UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIA NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Eduardo de Souza Böer

SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS ENVOLVENDO O OPERADOR *P*-LAPLACIANO, COM PESO E POTENCIAL INDEFINIDOS E DIFERENTES CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Santa Maria, RS
2019

Eduardo de Souza Böer

SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS ENVOLVENDO O OPERADOR *P*-LAPLACIANO, COM PESO E POTENCIAL INDEFINIDOS E DIFERENTES CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração: Matemática Pura, Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Damião Bittencourt de Godoi

Santa Maria, RS
2019

Böer, Eduardo de Souza
Sobre uma Classe de Problemas Elípticos Envolvendo o Operador p-Laplaciano, com Peso e Potencial Indefinidos e Diferentes Condições de Fronteira / Eduardo de Souza Böer.- 2019.
158 p.; 30 cm

Orientador: Juliano Damião Bittencourt de Godoi
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2019

1. EDP's Elípticas 2. Métodos Variacionais 3. p Laplaciano 4. Autovalores 5. Dirichlet I. de Godoi, Juliano Damião Bittencourt II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Eduardo de Souza Böer

SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS ENVOLVENDO O OPERADOR *P*-LAPLACIANO, COM PESO E POTENCIAL INDEFINIDOS E DIFERENTES CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração: Matemática Pura, Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovada em 12 de março de 2019:

Juliano Damião Bittencourt de Godoi, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Olimpio Hiroshi Miyagaki, Dr. (UFJF)

Celene Buriol, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2019

A minha mãe, a quem devo tudo

AGRADECIMENTOS

A concretização desta Dissertação, que consiste no espelho dos estudos realizados durante o período de mestrado, somente foi possível mediante o auxílio de algumas pessoas. Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a concretização deste trabalho e, de uma maneira especial, agradeço:

- aos meus pais, Marlisa de Souza Böer e Eroni Paulo Böer, por todo apoio e confiança que sempre depositaram em mim, especialmente, por terem feito o seu melhor para que eu tivesse acesso ao Ensino Superior e conseguisse chegar até aqui;

- a Deus, por ter sempre estado ao meu lado, em todos os momentos;

- às minhas amigas Renata e Maria Eduarda, por terem contribuído com muitas risadas tarde da noite e, principalmente, com um teto;

- aos demais familiares e amigos, os quais sofreram e comemoraram junto comigo cada pequeno passo que foi dada para chegar até aqui;

- ao professor Juliano Damião Bittencourt de Godoi, orientador do trabalho, por todos os conselhos, sugestões e por sempre contribuir com suas experiências;

- aos professores Saradia Sturza Della Flora e Maurício Fronza da Silva, pela significativa contribuição ao longo de toda minha formação, em especial, pelo excelente exemplo de professores e orientadores;

- ao Curso de Pós-Graduação em Matemática da UFSM e todo seu corpo docente, pela contribuição em minha formação;

- aos professores da banca, Olimpio Hiroshi Miyagaki, Celene Buriol e Maurício Fronza da Silva, muito obrigado pela revisão do trabalho e pelas contribuições;

- à CAPES, pelo apoio financeiro, muito obrigado.

And it is probable that there is some secret here which remais to be discovered.

(C. S. Peirce)

RESUMO

SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS ENVOLVENDO O OPERADOR *P*-LAPLACIANO, COM PESO E POTENCIAL INDEFINIDOS E DIFERENTES CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

AUTOR: Eduardo de Souza Böer
ORIENTADOR: Juliano Damião Bittencourt de Godoi

Este trabalho dedica-se ao estudo de duas classes distintas de problemas de autovalores, os quais envolvem o operador p-laplaciano e funções peso e potencial indefinidas. Fornecemos condições necessárias e suficientes para a existência de autovalores principais e, em seguida, caracterizamos o primeiro autovalor não-principal. Tais resultados são obtidos via técnicas variacionais.

Palavras-chave: Equações Elípticas Não Lineares. Condição de Fronteira Mista Robin-Dirichlet. p-Laplaciano. Métodos Variacionais.

ABSTRACT

ABOUT A CLASS OF ELLIPTIC PROBLEMS INVOLVING THE *P*-LAPLACIAN OPERATOR, WITH INDEFINITE WEIGHT AND POTENTIAL AND DISTINCT BOUNDARY CONDITIONS

AUTHOR: Eduardo de Souza Böer
ADVISOR: Juliano Damião Bittencourt de Godoi

This work is dedicated to study two distinct classes of eigenvalue problems, involving the *p*-laplacian operator and indefinite weight and potential functions. We give some necessary and sufficient conditions such that there is a positive eigenvalue. In addition, we present a characterization to the first non-principal eigenvalue. This results are obtained by variational techniques.

Keywords: Nonlinear Elliptic Equations. Mixed Boundary Condition Robin-Dirichlet. p-Laplacian. Variational Methods.

LISTA DE SÍMBOLOS

- $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$;
- $\partial\Omega$ denota a fronteira do conjunto Ω;
- $u \not\equiv 0$ indica que existe um conjunto de medida positiva onde $u \neq 0$;
- $|A|$ é a medida de Lebesgue do conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$;
- $||\cdot||$ denotará a norma padrão utilizada em cada capítulo, definida no início do mesmo;
- $C^1 = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ é uma vez continuamente diferenciável $\}$;
- $C^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ infinitamente continuamente diferenciável $\}$;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$;
- $||u||_p \left(\int\limits_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}$ e $||u||_{p,X} \left(\int\limits_X |u|^p dx\right)^{1/p}$, para algum conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$;
- $||u||_\infty = \inf\{a \geq 0; |\{x \in \Omega; |u(x)| > a\}| = 0\}$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é mensurável e $||u||_\infty < \infty\}$;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u$ é mensurável e $||u||_p < \infty\}$;
- $W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega); \exists f \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int\limits_\Omega u\varphi' dx = -\int\limits_\Omega f\varphi dx, \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\right\}$;
- $W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega); u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$;
- $||T||_* = \sup\{|T(x)|; ||x|| = 1\}$;
- s' denotará o expoente conjugado de s, para $s \in (1, \infty]$;
- $|\cdot|$ denotará a norma de um vetor no $\mathbb{R}^N$;
- $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$, $X_+^f = \{x \in; f(x) > 0\}$ e $X_-^f = \{x \in; f(x) < 0\}$;
- $\mathcal{S} = \{x \in X; ||x|| = 1\}$, para algum conjunto X;
- $A - B = \{x \in A; x \notin B\}$;
- B^c, para $B \subset X$, indicará o conjunto completar de B em relação a X;
- $C^m(\Omega) = \{\psi : \Omega \to \mathbb{R}; \psi$ é contínua e todas as derivadas parciais $D^\alpha\psi$ de ordem $|\alpha| \leq m$ são contínuas $\}$;
- $C^{1,m}(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega); |D^\alpha\psi(x) - D^\alpha\psi(y)| \leq K|x - y|,$ para alguma constante $K > 0e$ para todos $\alpha \in [0, 1]$ e $x, y \in \Omega\}$;
- $u_n \searrow u$ indica que $u_n \to u$ e $u \leq u_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $f * g$ e $\overline{f}$ indicam, respectivamente, a adjunção dos caminhos f e g e o caminho reverso de f;
- q.t.p. = quase todo ponto, T.V.M. = Teorema do Valor Médio, f.s.s.i. = fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo de Equações Diferenciais Parcias (EDPs), que se iniciou no século 18 com os trabalhos de Euler, D'Alembert, Lagrange e Laplace, vem crescendo exponencialmente desde então. Passou de uma ferramenta central na descrição de problemas do meio físico, para uma parte essencial no estudo de diversas subáreas da matemática, tais como Topologias Diferencial e Algébrica, Geometria Diferencial, Análise de Fourier, Teoria das Variedades, Geometria Algébrica, Análise Harmônica, Álgebra Homológica, entre outras. Contudo, a utilidade do estudo das EDPs não se restringe a Matemática Pura, ou até mesmo as áreas aplicadas mais conhecidos, como Física e Engenharias. Muito pelo contrário, são inúmeras as aplicações em áreas como a de Processos Estocásticos, Teoria do Caos, Economia, Biologia, e assim por diante. De acordo com Brézis e Browder (1998), tal processo de desenvolvimento não foi uma via de mão única, uma vez que, os avanços nas subáreas supracitas também desempenharam papel essecial para o desenvolvimento dos Tópicos em EDPs.

De acordo com Binding e Huang (1994), o estudo de problemas de autovalores envolvendo o Operador p-Laplaciano é de grande interesse dentro da comunidade matemática. Tal interesse pode ser justificado pelas aplicações que esta classe de problemas possui. Por exemplo, para certos fluídos, a tensão de cisilhamento, que denotamos aqui por $\mathcal{F}$, e a velocidade, dada por ∇u em x, obedecem a relação $\mathcal{F}(x) = r(x)\Delta_p u(x)$. Desta forma,

• se o fluído é Newtoniano, então $p = 2$;

• se o fluído é pseudoplástico, então $p < 2$;

• se o fluído é dilatante, então $p > 2$.

Além disso, o operador p-Laplaciano aparece no estudo dos seguintes problemas:

• Fluência (*torsional creep*), a qual consiste em uma deformação que ocorre num material, sob tensão constante ou quase constante. A mesma será elástica, se $p = 2$, ou plástica, conforme $p \to +\infty$.

• Fluxo através de meios porosos ($p = \frac{3}{2}$).

• Deslizamento glacial ($p \in (1, 4/3]$).

Em geral, as EDPs são classificadas em três grandes áreas, a saber, Parabólicas, Hiperbólicas e Elípticas. No presente trabalho, nos dedicamos ao estudo de duas classes distintas de EDPs Elípticas:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u & , \text{ em } \Omega \\ u = 0 & , \text{ em } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um domínio limitado, $p > 1$ e $V,\ m : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções possivelmente indefinidas e ilimitadas;

.

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u & , \text{ em } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda\sigma(x)|u|^{p-2}u & , \text{ em } \Gamma_1 \\ u = 0 & , \text{ em } \Gamma_2 \end{cases},$$

onde $V, m,$ e σ são, possivelmente, indefinidas, Ω é um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$, para algum $0 < \alpha < 1$, de modo que $\partial\Omega$ possa ser decomposta em dois conjuntos, Γ_1 e Γ_2, os quais são variedades $(n-1)$-dimensionais conexas e fechadas, com $p > 1$.

Nosso objetivo central é determinar condições necessárias e suficientes para que cada um desses problemas possua, ao menos um, autovalor principal. Além disso, garantimos a existência de um primeiro autovalor não-principal e fornecemos uma caracterização variacional para o mesmo. Nossa linha de ação consiste na aplicação de métodos variacionais e *minimax*, os quais surgem fortemente no estudo das EDPs a partir do século 19.

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, abordamos uma classe de problemas com condição de fronteira de Dirichlet, para o qual determinamos sob quais condições existe ao menos um autovalor principal $\lambda_1(V, m)$. Para obter tal resultado, buscaremos zeros para a autocurva associada ao problema em questão, noção essa que será introduzida no interior deste capítulo. O diferencial deste capítulo em relação aos demais, é o fato de permitirmos que as funções peso e potencial sejam possivelmente ilimitadas. Além disso, garantimos a existência de um primeiro autovalor não-principal, o qual se encontra acima de $\lambda_1(V, m)$.

Finalmente, no Capítulo 3 consideramos, com base no trabalho de Cuesta e Leadi (2015), uma classe de problemas com condição de fronteira mista Robin-Dirichlet. Tal problema, generaliza tanto o problema do capítulo 2, quanto o respectivo problema de Steklov. Ressaltamos, apenas, que no problema do Capítulo 2, o mesmo resolve apenas o caso onde as funções peso e potencial são essencialmente limitadas. Como nos dois capítulos anteriores, determinamos condições para a existência de um autovalor principal e caracterizamos o primeiro autovalor não-principal. Além do mais, construímos duas sequências de autovalores no caso em que o parâmetro real é positivo, o qual será definido no interior do capítulo em questão. Tal construção será baseada no Genus de Krasnoselskii e na Teoreia de Ljusternik-Schnirelmann.

2 UM PROBLEMA DE AUTOVALORES COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA DE DIRICHLET

Neste capítulo, estudaremos a seguinte classe de problemas elípticos envolvendo o operador p-laplaciano e com condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u & , \text{ em } \Omega \\ u = 0 & , \text{ em } \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um domínio limitado, $p > 1$ e $V,\ m : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções possivelmente indefinidas e ilimitadas.

Nosso objetivo é determinar condições necessárias e suficientes para que o problema (2.0.1) possua ao menos um autovalor principal. Os casos onde $V \equiv 0$ e m satisfaz algumas hipóteses, $V \geq 0$ e m satisfaz outras hipóteses e V indefinida e $m \equiv 1$, já foram vastamente estudados em diversos trabalhos da área. . Por exemplo, Cuesta (2001) fornece resultados para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u & , \text{ em } \Omega \\ u = 0 & , \text{ em } \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.0.2}$$

onde m é possivelmente indefinida e satisfaz

$$m^+ \not\equiv 0 \ \text{ e } \ m \in L^s(\Omega), \ \text{ com } \begin{cases} s > \dfrac{N}{p}, \ \text{ se } \ 1 < p \leq N \\ s = 1 \ \text{ se } \ p > N \end{cases}.$$

Segundo a autora, uma das maiores dificuldades neste problema é a falta de uma "boa" regularidade para as soluções. Contudo, a mesma mostra como contornar as dificuldades que surgem, substituindo a aplicação da Desigualdade de Diaz-Saa's e o Princípio do Máximo de Vazquez, pelas Identidade de Picone e Desigualdade de Harnack, respectivamente. A autora prova, entre outras coisas, que o problema (2.0.2) possui um primeiro autovalor principal, caracterizado por

$$\lambda = \inf\left\{ E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p dx; u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ \text{ e } \int_\Omega m|u|^p dx = 1 \right\},$$

o qual é positivo, simples, isolado no espectro e principal. Para mais detalhes, referimos Cuesta (2001) e os trabalhos citados no interior do referido. Além disso, Arias et al (2002), fornecem caracterizações para o segundo autovalor associado a (2.0.2), bem como algumas propriedades a respeito da continuidade apresentada pelos autovalores, com respeito ao peso m.

Destacamos, ainda, os trabalhos de:

• Ôtani e Teshima (1988), no qual os autores consideram o caso em que $V \geq 0$ e $m \geq 0$ e provam que o mesmo possui um primeiro autovalor principal, o qual é positivo e simples.

• Bonder e Pezzo (2000), os quais consideram o caso V indefinida e $m \equiv 1$. Os autores provam que

$$\lambda = \inf \left\{ E_V(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p + V|u|^p dx; u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } ||u||_p = 1 \right\}$$

é o menor autovalor para o problema em questão, o qual é principal, simples e isolado no espectro. Além disso, os autores constroem uma sequência não-decrescente de autovalores.

Quando permitimos que V e m sejam indefinidas, novas dificuldades se apresentam, como o fato do funcional energia ser ilimitado inferiormente e não ser convexo. Alguns autores da área fornecem exemplos de tais dificuldades, citamos, por exemplo, Fleckinger, Hernández e Thélin (2004). Neste sentido, as imposições sobre as funções peso, m, e potencial, V, e a dependência de determinados parâmetros reais, que estabeleceremos ao longo desta seção, surgem como forma de superar tais dificuldades.

Nossa abordagem fará uso da autocurva associada ao problema (2.0.1). Tal noção foi introduzida por Binding e Huang (1995).

Ao longo desta seção, consideraremos os seguintes funcionais $E_V, I_1 : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados, respectivamente, por

$$E_V(u) = \int_\Omega [|\nabla u|^p + V(x)|u|^p]dx \quad \text{e} \quad I_1(u) = \int_\Omega m(x)|u|^p dx \ , \ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

a variedade

$$M = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega); \int_\Omega m(x)|u|^p dx = 1 \right\}$$

e a norma usual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \ , \ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

.

A fim de que a notação não se torne tão carregada na demonstração dos teoremas, utilizaremos apenas V, para $V(x)$, e m, para $m(x)$.

Finalmente, ressaltamos que um par $(u, \lambda) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ é uma solução fraca para (2.0.1) quando $u \neq 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V|u|^{p-2}uv \, dx = \lambda \int_\Omega m|u|^{p-2}uv \, dx \ , \ \forall \, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.0.3}$$

2.1 Hipóteses Gerais e Resultados Preliminares

Para garantirmos a existência de autovalores principais para o problema (2.0.1), consideraremos a seguinte hipótese sobre as funções potencial e peso

$$m, V \in L^r(\Omega), \text{ onde } \begin{cases} r > \dfrac{N}{p} \ , & \text{se } 1 < p \leq N \\ r = 1 \ , & \text{se } N < p \end{cases} . \tag{2.1.1}$$

E, para cada $m \in L^r(\Omega)$, fixaremos a seguinte notação

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega; m(x) > 0\}, \Omega_- = \{x \in \Omega; m(x) < 0\} \text{ e } \Omega_0 = \{x \in \Omega; m(x) = 0\},$$

e imporemos, no transcorrer deste capítulo, que $|\Omega_+| > 0$.

Inicialmente, provaremos que o problema (2.0.1) possui um único autovalor principal, que é simples e isolado no espectro, quando $m > 0$ q.t.p. Ω. Tal resultado será necessário para construirmos a autocurva associada ao problema (2.0.1). Para tanto, provaremos um Lema auxiliar.

Lema 2.1.1. Sejam ω, satisfazendo (2.1.1), e $K \subset L^r(\Omega)$ limitado. Se $\omega > 0$ q.t.p. Ω, existem duas constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que

$$||u||^p \leq C_1 E_V(u) + C_2 \int_\Omega \omega |u|^p dx \ , \forall \, V \in K \text{ e } \forall \, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Seja $r' \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ o expoente conjugado de r. Por (2.1.1), temos

(i) se $1 < p \leq N$, então $\frac{N}{p} < r$. Disso, $\frac{1}{r} < \frac{p}{N}$ e $1 - \frac{1}{r'} < \frac{p}{N}$. Assim,

$$1 - \frac{p}{N} < \frac{1}{r'} \Rightarrow \frac{N-p}{N} < \frac{1}{r'} \Rightarrow 1 \leq r' < \frac{N}{N-p} \Rightarrow 1 < p \leq pr' < \frac{N}{N-p}.$$

Consequentemente, $1 < pr' < \frac{Np}{N-p}$. Pelo Teorema A.2, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $u \in L^{pr'}(\Omega)$;

(ii) se $N < p$, então $r = 1$. Assim, $r' = \infty$ e $pr' = \infty$. Pelo Teorema A.5, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $u \in L^{\infty}(\Omega)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} V|u|^p dx \right| &\leq \int_{\Omega} |V||u|^p dx \\ &\leq ||V||_r |||u|^p||_{r'} \\ &= ||V||_r ||u||_{pr'}^p. \quad (\bigstar) \end{aligned}$$

Afirmação: Para todo $\varepsilon > 0$, existe $M_\varepsilon > 0$, tal que

$$||u||_{pr'}^p \leq \varepsilon ||u||^p + M_\varepsilon \int_{\Omega} \omega |u|^p dx \ , \ \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.1.2}$$

Com efeito, suponhamos, por contradição, que (2.1.2) não ocorra. com isso, existe $\varepsilon_0 > 0$ e $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $||u_n||_{pr'} = 1$ e

$$\varepsilon_o ||u_n||^p + n \int_{\Omega} \omega |u_n|^p dx < ||u_n||_{pr'}^p = 1, \ \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.3}$$

Por isso e por $w > 0$ q.t.p. Ω, a sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada. Assim, pelo Teorema B.2, existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Devido a isso, ao Teorema A.2 e ao Teorema A.5, $u_n \to u_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$. Disso e de $||u_n||_{pr'} = 1$, $||u_0||_{pr'} = 1$ **(I)**.

Reescrevendo (2.1.3),

$$0 < \frac{\varepsilon_o}{n} ||u_n||^p + \int_{\Omega} \omega |u_n|^p dx < \frac{1}{n}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, por (I), pelo Teorema da Convergência Dominada, pelos Teoremas B.3, B.4, H.4, a menos da passagem a uma subsequência de (u_n), se necessário, pelo Teorema do Sanduíche,

$\int\limits_{\Omega} \omega|u_0|^p dx = 0$, donde $u_0 = 0$ q.t.p. em Ω , já que $\omega > 0$ q.t.p. em Ω, o que contraria (I). Logo, a afirmação é válida.

Agora, visto que $K \subset L^r(\Omega)$ é limitado, existe $C > 0$, tal que $||V||_r \leq C$, para toda $V \in K$. Considerando $\varepsilon \in \mathbb{R}$, tal que $0 < \varepsilon < \frac{1}{C}$ **(II)**, temos, por (★) e (2.1.2),

$$\left|\int\limits_{\Omega} V|u|^p dx\right| \leq C(\varepsilon||u||^p + M_\varepsilon \int\limits_{\Omega} \omega|u|^p dx) \ , \ \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } \forall \ V \in K.$$

Deste modo, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $V \in K$,

$$-C\varepsilon||u||^p - CM_\varepsilon \int\limits_{\Omega} \omega|u|^p dx \leq \int\limits_{\Omega} V|u|^p dx.$$

Por conseguinte,

$$(1 - C\varepsilon)||u||^p \leq E_V(u) + CM_\varepsilon \int\limits_{\Omega} \omega|u|^p dx.$$

Finalmente, por (II), $1 - C\varepsilon > 0$. Portanto, ao tomarmos $C_1 = \dfrac{1}{1 - C\varepsilon}$ e $C_2 = \dfrac{CM_\varepsilon}{1 - C\varepsilon}$, obtemos o resultado desejado.

■

Lema 2.1.2. O funcional $B : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por $B(u) = \int\limits_{\Omega} V|u|^p dx$, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, assim como I_1, são fracamente sequencialmente contínuos.

Demonstração: Faremos a prova apenas para B. Para I_1 a prova é análoga.

Caso $1 < p \leq N$**:** Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, pelo Teorema A.2, $u_n \to u$ em $L^{pr'}(\Omega)$.

Definamos, agora, a função $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo $h(x,t) = V(x)|t|^p$. Notamos que h é uma função de Carathéodory e que $|h(x,t)| = |V(x)||t|^p \leq ||V||_\infty |t|^p$, para quaisquer $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Portanto, pelo Teorema C.1, o Operador de Nemytskii, $N_h : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$ está bem definido e é contínuo.

Assim,

$$\begin{aligned}|B(u_n) - B(u)| &= \left|\int_\Omega V(|u_n|^p - |u|^p)dx\right| \\ &= \left|\int_\Omega (N_h(u_n) - N_h(u))dx\right| \\ &\leq ||N_h(u_n) - N_h(u)||_1 \to 0.\end{aligned}$$

Caso $N < p$: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, pelo Teorema A.5, $u_n \to u$ em $L^\infty(\Omega)$. Definamos a função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x,t) = |t|^p$. Observamos que f é Carathéodory e que $|f(x,s)| = |s|^p$. Desta forma, considerando $b \in L^\infty(\Omega)$, $b \equiv 0$, pelo Teorema C.1, o Operador de Nemytskii $N_f : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$, dado por $N_f(u) = f(x,u)$, está bem definido, é contínuo e limitado. Assim, como $u_n \to u$ em $L^\infty(\Omega)$,

$$N_f(u_n) \to N_f(u) \text{ em } L^\infty(\Omega) \Leftrightarrow |u_n|^p \to |u|^p \text{ em } L^\infty(\Omega) \Leftrightarrow ||\,|u_n|^p - |u|^p||_\infty \to 0.$$

Portanto,

$$|B(u_n) - B(u)| = \left|\int_\Omega V(|u_n|^p - |u|^p)dx\right| \leq ||V||_1 ||\,|u_n|^p - |u|^p||_\infty \to 0.$$

Logo, $B(u_n) \to B(u)$ em $\mathbb{R}$, como queríamos.

■

Lema 2.1.3. O funcional $A : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por $A(u) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx$, é fracamente semicontínuo inferiormente.

Demonstração: Devido ao Teorema C.10, necessitamos provar apenas que A é convexo. Para tanto, consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = pt^{p-1}$ e $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$.

Afirmação: F é convexa.

Com efeito, para $0 \leq s < t$ e $r \in [0,1]$, pondo $\theta = rs + (1-r)t$, por f ser monótona e pelo

Teorema do Valor Médio para Integrais,

$$F(t) - F(\theta) \geq (t-\theta)f(\theta) \;\text{ e }\; F(\theta) - F(s) \leq (\theta - s)f(\theta).$$

Disso, $rF(s) + (1-r)F(t) - F(\theta) \geq 0$. Portanto, $F(rs + (1-r)t) \leq rF(s) + (1-r)F(t)$, provando que F é convexa.

Logo, como $A(u) = F(||u||)$, A é convexo e o resultado segue.

■

Observação 2.1.1. Pelos Lemas 2.1.2 e 2.1.3, o funcional energia E_V é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente.

Lema 2.1.4. Os funcionais E_V e I_1 são de Classe C^1, com derivadas de Fréchet dadas, respectivamente, por

$$E_V'(u)(v) = p\int_\Omega [|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + V|u|^{p-2}uv]\, dx,\ \forall\, u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

e

$$I_1'(u)(v) = \int_\Omega m|u|^{p-2}uv\, dx,\ \forall\, u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Sejam $A, B : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como definidos nos Lemas 2.1.2 e 2.1.3.

Com base na Observação B.1 e no Teorema B.6, para provarmos que A e B são diferenciáveis a Fréchet, provaremos que os mesmos são diferenciáveis a Gateaux, com derivada de Gateaux contínua. Começaremos provando que A é diferenciável, com derivada de Fréchet dada por

$$A'(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx,\ \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Mais ainda, veremos que A é de classe C^1. Para tanto, consideramos a seguinte função $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, dada por $F(x,y) = p\int_0^{|y|} s^{p-1}ds$, para todo par $(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$. Desta forma, para $0 < h < 1$ e $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{A(u+hv) - A(u)}{h} &= \frac{1}{h}\int_\Omega |\nabla(u+hv)|^p dx - \int_\Omega |\nabla u|^p dx \\ &= \int_\Omega \frac{|\nabla u + h\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{h} dx = \int_\Omega \frac{F(x, \nabla u + h\nabla v) - F(x, \nabla u)}{h} dx.\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, para cada $x \in \Omega$, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\frac{|F(x,\nabla u + h\nabla v) - F(x,\nabla u)|}{|h|} \leq p|\nabla + \theta h \nabla u|^{p-1}|\nabla u| \leq p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v|.$$

Assim, pela Desigualdade de Hölder, por $p = (p-1)p'$ e pelo Teorema G.1,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|F(x,\nabla u + h\nabla v) - F(x,\nabla u)|}{|h|}dx &\leq p\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v|dx \\ &\leq p|||\nabla u| + |\nabla v|||_p^{p-1}||\nabla v||_p \\ &\leq k(p)p(||u||^{p-1} + ||v||^{p-1})||v||,\end{aligned}$$

o que nos garante que $\dfrac{|F(x,\nabla u + h\nabla v) - F(x,\nabla u)|}{|h|} \in L^1(\Omega)$. Além disso,

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{F(x,\nabla u + h\nabla v) - F(x,\nabla u)}{h}\right] = p|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{A(u+hv) - A(u)}{h}\right] &= \lim_{h\to 0^+}\int_\Omega \frac{F(x,\nabla u + h\nabla v) - F(x,\nabla u)}{h}dx \\ &= \int_\Omega \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{F(x,\nabla u + h\nabla v) - F(x,\nabla u)}{h}\right]dx \\ &= p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx.\end{aligned}$$

Analogamente, considerando $-1 < h < 0$, vemos que

$$\lim_{h\to 0^-}\left[\frac{A(u+hv) - A(u)}{h}\right] = p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Logo, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left[\frac{A(u+hv) - A(u)}{h}\right] = p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx.$

Agora, para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, fixada, vamos definir o funcional $G_u : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, por $G_u(v) = p\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx$, para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Afirmação 1: G_u é linear e limitado.

Começamos ressaltando que a linearidade de G_u segue da linearidade de ∇. Provemos que G_u

é limitado. Ora, pelas Desigualdades de Schwarz em $\mathbb{R}^N$ e de Hölder, segue que

$$|G_u| \leq p \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| dx \leq p ||\nabla u||_p^{p-1} ||\nabla v||_p = p||u||^{p-1}||v||.$$

Deste modo, G_u é limitado. Logo, A é diferenciável a Gateux em u, com derivada de Gateux em u dada por $A'(u) = G_u$.

Resta-nos provar que $A' : W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, definido por $A'(u) = G_u$ é um operador contínuo. Para tanto, sejam $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Com o intuito de facilitarmos a notação, definimos o espaço produto $X = [L^{p'}(\Omega)]^N = \prod_{i=1}^N L^{p'}(\Omega)$, munido da norma $||f||_X = \left(\sum\limits_{i=1}^N ||f_i||_{p'}^{p'} \right)^{1/p'}$, para $f = (f_1, f_2, ..., f_N) \in X$, e o operador $\mathcal{J} : W_0^{1,p}(\Omega) \to X$, pondo $\mathcal{J}(u) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$, para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Afirmação 2: $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, ..., \mathcal{J}_N)$ é limitado e contínuo.

De fato, para cada $i \in \{1, 2, ...N\}$,

$$||\mathcal{J}_i(u)||_{p'}^{p'} = \int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p'} dx \leq \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} |\nabla u|)^{p'} dx = \int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p'} dx = ||u||^p,$$

donde

$$||\mathcal{J}(u)||_X^{p'} = \sum_{i=1}^N ||\mathcal{J}_i||_{p'}^{p'} \leq N||u||^p,$$

o que prova que $\mathcal{J}$ é limitado. Na sequência, veremos que $\mathcal{J}$ é contínuo. Pelo Teorema G.1 e pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$,

$$
\begin{aligned}
||\mathcal{J}(u_n)-\mathcal{J}(u)||_{p'} &= \left(\int_\Omega |\mathcal{J}(u_n)-\mathcal{J}(u)|^p dx\right)^{1/p'}\\
&= \left(\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^N |\mathcal{J}_i(u_n)-\mathcal{J}_i(u)|\right]^{p'} dx\right)^{1/p'}\\
&\leq \left(\int_\Omega 2^{p'-1}\left[\sum_{i=1}^N |\mathcal{J}_i(u_n)-\mathcal{J}_i(u)|^{p'}\right] dx\right)^{1/p'}\\
&= c_1\left(\sum_{i=1}^N ||\mathcal{J}_i(u_n)-\mathcal{J}_i(u)||_{p'}^{p'}\right)^{1/p'}\\
&= c_1||\mathcal{J}(u_n)-\mathcal{J}(u)||_X\\
&= c_1\left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\mathcal{J}_i(u_n)-\mathcal{J}_i(u)|^{p'} dx\right)^{1/p'}\\
&= c_1\left\{\int_\Omega \left[\left(\sum_{i=1}^N |\mathcal{J}_i(u_n)-\mathcal{J}_i(u)|^{p'}\right)^{1/p'}\right]^{p'} dx\right\}^{1/p'}\\
&\leq c_2\left(\int_\Omega |\mathcal{J}(u_n)-\mathcal{J}(u)|^{p'} dx\right)^{1/p'}\\
&= c_2||\mathcal{J}(u_n)-\mathcal{J}(u_n)||_{p'}.
\end{aligned}
$$

para alguma constante positiva $c_2 \in \mathbb{R}$. Com isso, existem constantes $c > 0$ e $d > 0$, tais que $d||f||_{p'}^{p'} \leq ||f||_X^{p'} \leq c||f||_{p'}^{p'}$ (♦).

Analisaremos, no que segue, dois casos.

Caso 1: $2 < p < +\infty$.

Se $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então, pelo Teorema G.5, por $|\nabla u - \nabla v|^{p'} \in L^{\frac{p}{p'}}(\Omega)$, por $(|\nabla u| - |\nabla v|)^{(p-2)p'} \in L^{\frac{p}{p'(p-2)}}(\Omega)$, pelo Teorema G.1, pela Desigualdade de Hölder, para os expoentes

$p-1$ e $\frac{p-2}{p-1}$, e por $\dfrac{1}{p-1} = \frac{p'}{p}$,

$$\begin{aligned}
||\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(v)||_X^{p'} &\leq c \int\limits_\Omega |\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(v)|^{p'} dx \\
&= c \int\limits_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v|^{p'} dx \\
&\leq cA_1^{p'} \int\limits_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p'} (|\nabla u| - |\nabla v|)^{(p-2)p'} dx \\
&\leq c_1 ||\nabla u - \nabla v||_p^{\frac{p'}{p}} |||\nabla u| + |\nabla v|||_p^{\frac{p'(p-2)}{p}} \\
&\leq c_2 ||\nabla u - \nabla v||_p^{p'} (||\nabla u||_p + ||\nabla v||_p)^{p'(p-2)} \\
&= c_2 ||u - v||^{p'} (||\nabla u|| + ||\nabla v||)^{p'(p-2)},
\end{aligned}$$

o que implica em

$$||\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(v)||_X \leq c_3 ||u - v|| (||\nabla u|| + ||\nabla v||)^{p-2}, \tag{2.1.4}$$

para uma constante $c_3 > 0$, a qual não depende de u e v.

Caso 2: $1 < p \leq 2$.

Pelo Teorema G.5, dados $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
||\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(v)||_X^{p'} &\leq c \int\limits_\Omega |\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(v)|^{p'} dx \\
&= c \int\limits_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v|^{p'} dx \\
&\leq cA_2^{p'} \int\limits_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p'(p-1)} dx \\
&= c_4 \int\limits_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p dx = c_4 ||u - v||^p,
\end{aligned}$$

o que implica em

$$||\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(v)||_X \leq c_4 ||u - v||^{p-1}, \tag{2.1.5}$$

para uma constante $c_4 > 0$, a qual é independente de u e v. De (2.1.4) e (2.1.5), decorre que $\mathcal{J}$ é contínuo.

Pela validade da Afirmação 2, pela Desigualdade de Hölder e por (♦),

$$\begin{aligned}
|G_{u_n}(v) - G_u(v)| &\leq p \int_\Omega ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u||\nabla v| dx \\
&= p \int_\Omega |\mathcal{J}(u_n) - \mathcal{J}(u_n)||\nabla v| dx \\
&\leq p \left(\int_\Omega |\mathcal{J}(u_n) - \mathcal{J}(u)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq pd||\mathcal{J}(u_n) - \mathcal{J}(u)||_X ||\nabla v||_p = pd||\mathcal{J}(u_n) - \mathcal{J}(u)||_X ||v||.
\end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned}
||A'(u_n) - A'(u)||_* &= \sup\{|A'(u_n)(v) - A'(u)(v)|; v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } ||v|| = 1\} \\
&= \sup\{|G_{u_n}(v) - G_u(v)|; v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } ||v|| = 1\} \\
&\leq pd|||\mathcal{J}(u_n) - \mathcal{J}(u_n)|||_X. \qquad (2.1.6)
\end{aligned}$$

Por $\mathcal{J}$ ser contínuo e $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que $|||\mathcal{J}(u_n) - \mathcal{J}(u_n)|||_{p'} \to 0$. Logo, por (2.1.6), $A'(u_n) \to A'(u)$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, provando que A' é um operador contínuo e, portanto, A é de classe C^1.

Provaremos, agora, que

$$B'(u)(v) = p \int_\Omega V|u|^{p-2}uv dx, \ \forall\, u, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad (2.1.7)$$

e que B é de classe C^1. A demonstração para I_1 se dá de maneira análoga.

Comecemos definindo a função $f : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$, pondo $f(x,t) = V(x)|u + tv|^p$. Pelo Teorema do Valor Médio (T.V.M), para $x \in \Omega$, fixado, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $f(x,t) - f(x,0) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) \cdot t$. Por $t_0 \in (0,1)$, podemos escrever $t_0 = \varepsilon t$, para algum $\varepsilon \in (0,1)$.

Ainda, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = pV|u + tv|^{p-2}(u + tv)v$. Disso,

$$\frac{|V(|u + tv|^p - |u|^p)|}{|t|} = |pV|u + \varepsilon tv|^{p-2}(u + tv)v| \leq p|V|(|u| + |v|)^{p-1}|v|.$$

No que segue, avaliaremos dois casos distintos.

Caso $1 < p \leq N$**:**

Consideremos os seguintes valores reais $\alpha = \frac{Np}{(N-p+1)(p-1)}$, $q = \frac{Np}{N-p+1}$ e $r = \frac{N}{p-1}$. Além disso, $q = pr'$ e

(a) $r > \frac{N}{p}$ donde, por (2.1.1), $V \in L^r(\Omega)$;

(b) $q < \frac{Np}{N-p}$ donde, pelos Teoremas A.2 e G.1, $|u| + |v| \in L^q(\Omega)$;

(c) $\alpha(p-1) = q$, donde $(|u| + |v|)^{p-1} \in L^\alpha(\Omega)$;

(d) $|v| \in L^q(\Omega)$, pelo Teorema A.2;

(e) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Assim, pela Desigualdade de Hölder Generalizada,

$$\int_\Omega |V|(|u| + |v|)^{p-1}|v|dx \leq ||V||_r||(|u| + |v|)^{p-1}||_\alpha||v||_q < \infty. \tag{2.1.8}$$

Caso $N < p$:

Pela hipótese (2.1.1), $V \in L^1(\Omega)$. Além disso, pelo Teorema A.5, $u, v \in L^\infty(\Omega)$. Deste modo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |V|(|u| + |v|)^{p-1}|v|dx &\leq \int_\Omega |V|(||u||_\infty + ||v||_\infty)^{p-1}||v||_\infty dx \\ &\leq k(p)(||u||_\infty + ||v||_\infty)||v||_\infty||V||_1 < \infty. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Decorre, de (2.1.8) e (2.1.9), que $|V|(|u| + |v|)^{p-1}|v| \in L^1(\Omega)$. Por isso, por $u + \varepsilon tv \to u$ q.t.p. em Ω, quando $t \to 0$, e pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{B(u + tv) - B(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \left[p \int_\Omega V|u + \varepsilon tv|^{p-2}(u + tv)vdx \right] \\ &= p \int_\Omega \left(\lim_{t\to 0} V|u + \varepsilon tv|^{p-2}(u + tv)v \right) dx \\ &= p \int_\Omega V|u|^{p-2}uvdx.\end{aligned}$$

Com isso, B é diferenciável a Gateaux e vale a igualdade em (2.1.7). Vejamos, agora, que B é de classe C^1. Para isso, seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pelo Teorema A.2 e pelo Teorema A.5, $u_n \to u$ em $L^{pr'}(\Omega)$. Consideremos $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x, s) = p|s|^{p-2}s$. Notamos que g é uma função de Carathéodory e $|g(x, s)| = p|s|^{p-1}$. Assim, pelo Teorema C.1, o Operador de Nemytskii, $N_g : L^{pr'}(\Omega) \to L^\alpha(\Omega)$, definido por $N_g(u) = g(x, u)$, está bem definido, é contínuo e limitado. Disso e de $u_n \to u$ em $L^{pr'}(\Omega)$, $N_g(u_n) \to N_g(u)$ em

$L^{\alpha}(\Omega)$. Consequentemente, utilizando a Desigualdade de Hölder Generalizada, com α, q e r, como definidos anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned}
|(B(u_n) - B(u))'(v)| &= \left| p \int\limits_{\Omega} V(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)vdx \right| \\
&\leq p \int\limits_{\Omega} |V||N_f(u_n) - N_f(u)||v|dx \\
&\leq p||V||_r||N_f(u_n) - N_f(u)||_{\alpha}||v||_q \to 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $B'(u_n)(v) \to B'(u)(v)$, para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, B' é contínuo.

■

Lema 2.1.5. Sejam V, m satisfazendo (2.1.1) e $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ duas autofunções para o problema (2.0.1) com autovalores associados λ, β, respectivamente. Suponhamos que $u \geq 0$ e $v > 0$, em Ω. Se $\beta \geq \lambda$ (respectivamente $\beta \leq \lambda$), quando $\int\limits_{\Omega} m|u|^p dx \geq 0$ (respectivamente $\int\limits_{\Omega} m|u|^p dx \leq 0$), então $u = cv$, para algum $c > 0$, e $\lambda = \beta$.

Demonstração: Como u e v são soluções fracas para (2.0.1),

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla w dx + \int\limits_{\Omega} V|u|^{p-2}uwdx = \lambda \int\limits_{\Omega} m|u|^{p-2}uwdx, \ \forall\, w \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.1.10)$$

e

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla w dx + \int\limits_{\Omega} V|v|^{p-2}vwdx = \beta \int\limits_{\Omega} m|v|^{p-2}vwdx, \ \forall\, w \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.1.11)$$

Assim, ao tomarmos $w = u$ em (2.1.10) e $w = \frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}}$ em (2.1.11), onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário,

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int\limits_{\Omega} V|u|^p dx = \lambda \int\limits_{\Omega} m|u|^p dx$$

e

$$\int\limits_{\Omega} \left[|\nabla v|^{p-2}\nabla \left(\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \right) \cdot \nabla v + V|v|^{p-1} \left(\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \right) \right] dx = \beta \int\limits_{\Omega} m|v|^{p-1} \left(\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \right) dx.$$

Por isso, por $u \geq 0$ e $v > 0$ temos, ao considerarmos L e R como em (P1) e (P2), pela

Identidade de Picone, que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega L(u, v+\varepsilon)dx \\
&= \int_\Omega R(u, v+\varepsilon)dx \\
&= \int_\Omega \left[|\nabla u|^p - |\nabla v|^{p-2}\nabla \left(\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \right) \cdot \nabla(v+\varepsilon) \right] dx \\
&= \lambda \int_\Omega m|u|^p dx - \int_\Omega V|u|^p dx + \int_\Omega (V - \beta m)|v|^{p-1} \left(\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \right) dx.
\end{aligned}$$

Disso e do Teorema da Convergência Dominada, ao fazermos $\varepsilon \to 0$,

$$0 \leq \int_\Omega L(u,v)dx \leq (\lambda - \beta) \int_\Omega m|u|^p dx. \tag{2.1.12}$$

Se $\beta \geq \lambda$ e $\int_\Omega m|u|^p dx > 0$, então $(\lambda - \beta)\int_\Omega m|u|^p dx \leq 0$. Logo, por (2.1.12), $L(u,v) = 0$ q.t.p. em Ω.

Caso 2: Se $\beta \leq \lambda$ e $\int_\Omega m|u|^p dx < 0$, então $(\lambda - \beta)\int_\Omega m|u|^p dx \leq 0$. Disto e de (2.1.12), $L(u,v) = 0$ q.t.p. em Ω. Pela Identidade de Picone, $u = cv$, para algum $c \in \mathbb{R}$, e, por $u \geq 0$ e $v > 0$ em Ω, $c > 0$. Ainda, por (2.1.12), segue que $\lambda = \beta$. A prova para os demais casos é análoga.

■

Neste momento, estamos aptos a demonstrar que o problema (2.0.1) possui um único autovalor principal, quando $m > 0$ q.t.p. em Ω. Tal teorema nos possibilitará construir a autocurva associada ao problema (2.0.1). Observa-se que, uma vez que buscamos construir uma função a partir dos autovalores fornecidos por este teorema, a unicidade dos mesmos é essencial.

Teorema 2.1.1. Suponhamos que valha (2.1.1) e que $m > 0$ q.t.p. em Ω. Então,

$$\lambda_1(V,m) = \inf_{u \in M^+} E_V(u) > -\infty$$

é o menor autovalor para o problema (2.0.1). Além disso, $\lambda_1(V,m)$ é simples e é o único autovalor principal para (2.0.1).

Demonstração: Como $m > 0$ q.t.p. em Ω e $\{V\} \subset L^r(\Omega)$ é limitado, pelo Lema 2.1.1, existem

$C_1, C_2 > 0$ tais que

$$||u||^p \leq C_1 E_V(u) + C_2 \int_\Omega m|u|^p dx, \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Assim,

$$-\frac{C_2}{C_1} \leq \frac{||u||^p - C_2}{C_1} \leq E_V(u), \forall\, u \in M^+,$$

donde $\lambda_1(V, m) > -\infty$. Consideremos, agora, uma sequência minimizante $(u_n) \subset M^+$, ou seja, $E_V(u_n) \to \lambda_1(V, m)$. Segue que $(E_V(u_n))$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Disso e do Lema 2.1.1, $||u_n||^p \leq K$, para alguma constante $K > 0$. Portanto, (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pelo Teorema B.2, a menos da passagem a uma subsequência, existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e, pelo Teorema A.2, $u_n \to u_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$ (**I**).

Também, pelo Lema 2.1.2,

$$E_V(u_0) \leq \liminf E_V(u_n) = \lim E_V(u_n) = \lambda_1(V, m). \tag{2.1.13}$$

Agora, de (I), dos Teoremas B.3, B.4 e H.4, de $|||u_n|^p||_{r'} = ||u_n||^p_{pr'}$, para todo n em $\mathbb{N} \cup \{0\}$, da continuidade da função polinomial $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $\phi(x) = x^p$, para $x \in \mathbb{R}$ e da Desigualdade de Hölder, a menos de passagem a uma subsequência, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega m|u_n|^p dx - \int_\Omega m|u_0|^p dx \right| &\leq \int_\Omega |m|||u_n|^p - |u_0|^p| dx \\ &\leq ||m||_r |||u_n|^p - |u_0|^p||_{r'} \to 0. \end{aligned}$$

Por isso e por $\int_\Omega m|u_n|^p dx = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\int_\Omega m|u_0|^p dx = 1$, ou seja, $u_0 \in M^+$. Com isso, $\lambda_1(V, m) \leq E_V(u_0)$. Assim, pela inequação (2.1.13), $E_V(u_0) = \lambda_1(V, m)$.

Deste modo, concluímos que u_0 é extremo de E_V em $M^+ = I_1^{-1}(I_1(u_0))$. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange:

a) $I_1'(u_0)(v) = 0$, para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ou

b) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $E_V'(u_0)(v) = \lambda I_1'(u_0)(v)$, para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Salientamos que (a) não ocorre, pois $u_0 \in M^+$ e $I_1'(u_0)(u_0) = p \int_\Omega m|u_0|^p dx = p \neq 0$.

Portanto, vale (b). Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\int_\Omega \left[|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \cdot \nabla v + V|u_0|^{p-2}u_0 v\right] dx = \lambda \int_\Omega m|u_0|^{p-2}uv\, dx, \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ainda,

$$\lambda_1(V,m) = E_V(u_0) = \int_\Omega [|\nabla u_0|^p + V|u_0|^p]dx = \lambda \int_\Omega m|u_0|^p\, dx = \lambda.$$

Logo, $\lambda_1(V,m)$ é autovalor de (2.0.1).

Mostraremos, a seguir, que $\lambda_1(V,m)$ é o menor autovalor para o problema (2.0.1). Para tanto, suponhamos que $(w,\lambda) \in (W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}) \times \mathbb{R}$ satisfaça (2.0.3) e que $\lambda < \lambda_1(V,m)$ **(II)**.

Se $\int_\Omega m|w|^p dx = 1$, então $w \in M^+$, donde $\lambda_1(V,m) \leq E_V(w) = \lambda \int_\Omega m|w|^p dx = \lambda$, o que contraria (II). Por outro lado, se $\int_\Omega m|w|^p dx = 0$, então $m|w| = 0$ q.t.p. em Ω. Mas $m > 0$ por hipótese, donde $w = 0$ q.t.p. em Ω, o que contraria o fato de w ser solução fraca para (2.0.1). Consequentemente, $\int_\Omega m|w|^p dx = \alpha > 0$, com $\alpha \neq 1$. Considerando $v = \dfrac{w}{\alpha^{1/p}}$, segue que $I_1(v) = 1$, donde $v \in M^+$.

Assim,

$$E_V(v) = \frac{1}{\alpha}E_V(w) = \frac{1}{\alpha}\lambda \int_\Omega m|w|^p dx = \lambda \int_\Omega m|v|^p dx = \lambda < \lambda_1(V,m),$$

isto é, $E_V(v) = \lambda < \lambda_1(V,m)$, contrariando a definição de $\lambda_1(V,m)$. Portanto, $\lambda_1(V,m)$ é o menor autovalor para (2.0.1).

Resta-nos provar que $\lambda_1(V,m)$ é principal, simples e o único autovalor principal para (2.0.1). Para vermos que $\lambda_1(V,m)$ é principal, observamos que $E_V(|u|) = E_V(u)$, donde concluímos que $\lambda_1(V,m)$ possui uma autofunção não-negativa associada. Aplicando a Desigualdade de Harnack, Teorema C.11, concluímos que tal autofunção é positiva em Ω. Finalmente, aplicando o Lema 2.1.5, vemos que $\lambda_1(V,m)$ é simples e é o único autovalor principal para (2.0.1), concluindo a demonstração.

$\blacksquare$

Observação 2.1.2. Pelos resultados de Regularidade de Ladyzhenskaya e Uraltseva (1975) e

Serrin (1962), podemos ver que todas as soluções fracas u do problema (2.0.1) pertencem a $L^\infty(\Omega) \cap C^\alpha(\Omega)$, para algum $\alpha \in (0,1)$.

■

2.2 Construção da Autocurva Associada ao Problema (2.0.1)

Nesta seção, construiremos a autocurva associada ao problema (2.0.1), conceito este introduzido por Binding e Huang (1995). Para isso, consideremos, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado, o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (V(x) - \lambda m(x))|u|^{p-2}u = \mu|u|^{p-2}u \ , & \text{em } \Omega \\ u = 0 & , \ \text{em } \partial\Omega \end{cases}. \tag{2.2.1}$$

Definimos $\mu(\lambda) = \lambda_1(V - \lambda m, 1)$, o qual, pelo Teorema 2.1.1, é o único autovalor principal para o problema (2.2.1). Ainda, fixemos φ_λ como sendo a autofunção positiva e L^p-normalizada associada ao autovalor $\mu(\lambda)$. Com isso, podemos definir a função $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $\mu(\lambda) = \lambda_1(V - \lambda m, 1)$. Essa função é chamada de **autocurva associada ao problema (2.0.1)**. No que segue, provaremos algumas propriedades para esta autocurva. Para tal, seja

$$\alpha(V,m) = \inf\{E_V(u); u \in \mathcal{B}\}, \text{ onde } \mathcal{B} = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega); ||u||_p = 1 \text{ e } I_1(u) = 0\right\}. \tag{2.2.2}$$

Proposição 2.2.1. O conjunto $\mathcal{B}$ é não vazio se, e somente se, $m^- \not\equiv 0$ ou $|\Omega_0| > 0$. Em qualquer um desses casos, o valor $\alpha(V,m)$ é atingido por uma função $\xi_0 \in \mathcal{B}$, com $\xi_0 \geq 0$.

Demonstração: Verifiquemos que, se $m^- \not\equiv 0$ ou $|\Omega_0| > 0$, então $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Suponhamos $m^- \not\equiv 0$. Por isso, $|\Omega_-| > 0$. Assim, já que $|\Omega_+| > 0$, podemos considerar $K_1 \subset \Omega_-$ e $K_2 \subset \Omega_+$ e $v_1, v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, de modo que v_1 e v_2 sejam as regularizações de, respectivamente, χ_{K_1} e χ_{K_2}, com *supp* $v_1 \subset \Omega_-$, *supp* $v_2 \subset \Omega_+$ e $|K_1| > 0$ e $|K_2| > 0$. Além do mais, por construção, $\int\limits_{K_1} m dx = c_1 < 0$ e $\int\limits_{K_2} m dx = c_2 > 0$.

Agora, se $u_1 = \dfrac{v_1}{(-c_1)^{1/p}}$ e $u_2 = \dfrac{v_2}{c_2^{1/p}}$, então

$$\int\limits_{K_1} m|u_{k_1}|^p dx = -1 \quad \text{e} \quad \int\limits_{K_2} m|u_{k_2}|^p dx = 1.$$

De fato,
$$\int_\Omega m|u_1|^p dx = -\frac{1}{c_1}\int_\Omega m|v_1|^p dx = -\frac{1}{c_1}\int_{K_1} m dx - \frac{1}{c_1}\int_{F_1} m|v_1|^p dx,$$
onde $F_1 \subset \Omega_-$ é a "faixa de regularização" de χ_{K_1}, isto é, $0 \le v_1(x) \le 1$, para todo $x \in F_1$. Ainda,
$$\int_\Omega m|u_2|^p dx = \frac{1}{c_2}\int_\Omega m|v_2|^p dx = \frac{1}{c_2}\int_{K_2} m dx + \frac{1}{c_2}\int_{F_2} m|v_2|^p dx,$$
onde $F_2 \subset \Omega_+$ é a "faixa de regularização" de χ_{K_2}, $0 \le v_2(x) \le 1$, para todo $x \in F_2$. Além disso,
$$\int_{F_1} m|v_1|^p dx \le \int_{F_1} m dx \quad \text{e} \quad \int_{F_2} m|v_2|^p dx \le \int_{F_2} m dx.$$

Deste modo, caso $1 < p \le N$, temos
$$\int_{F_1} m dx \le ||m||_\infty |F_1| \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{F_2} m dx \le ||m||_\infty |F_2| \to 0,$$
quando $|F_1| \to 0$ e $|F_2| \to 0$, fornecendo o resultado desejado. Por outro lado, caso $p > N$, $m \in L^1(\Omega)$, por (2.1.1). Por isso e pelo Teorema H.2, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que
$$|E| < \delta \Rightarrow \int_E |m| dx < \varepsilon.$$
Fazendo com que $|F_1| < \delta$ e $|F_2| < \delta$, obtemos, também neste caso, o resultado desejado.

Tomando $\tilde{u} = u_{k_1} + u_{k_2}$, temos que $\tilde{u} \not\equiv 0$, visto que $\Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset$. Portanto, $u = \dfrac{\tilde{u}}{||\tilde{u}||_p} \in \mathcal{S}$.

Finalmente, ao fazermos $|F_1| \to 0$ e $|F_2| \to 0$,
$$\int_\Omega m|u|^p dx = \frac{1}{||\tilde{u}||_p^p}\int_\Omega m|\tilde{u}|^p dx = \frac{1}{||\tilde{u}||_p^p}\left(\int_{K_1} m|u_{k_1}|^p dx + \int_{K_2} m|u_{k_2}|^p dx\right) = 0.$$
Logo, $u \in \mathcal{B}$ e, com isso, $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Se $|\Omega_0| > 0$, então podemos considerar $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que $u_1 \neq 0$ q.t.p. em Ω. Definamos
$$u(x) = \begin{cases} u_1(x)\ , \text{ se } x \in \Omega_0, \\ 0\ , \text{ se } x \in \Omega - \Omega_0 \end{cases}.$$

Deste modo, $\int\limits_{\Omega} m|u|^p dx = \int\limits_{\Omega_0} m|u|^p dx + \int\limits_{\Omega-\Omega_0} m|u|^p dx = 0$. Assim, $v = \dfrac{u}{||u||_p}$ é tal que $||v||_p = 1$ e, consequentemente, $v \in \mathcal{B}$, isto é, $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Reciprocamente, se $\mathcal{B} \neq \emptyset$, então existe $u \in \mathcal{B}$, tal que $||u||_p = 1$ e $I_1(u) = 0$. Suponhamos que $m^- \equiv 0$ e $|\Omega_0| = 0$. Neste caso, $m > 0$ q.t.p. em Ω. Como $I_1(u) = 0$, $u = 0$ q.t.p. em Ω, o que é um absurdo, visto que $||u||_p = 1$. Por conseguinte, $m^- \not\equiv 0$ ou $|\Omega_0| > 0$.

Mostraremos, a seguir, que o valor $\alpha(V, m)$ é atingido.

Inicialmente, notamos que, pela primeira parte, se $m^- \not\equiv 0$ ou $|\Omega_0| > 0$, então $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Da definição de $\alpha(V, m)$, existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{B}$ tal que $E_V(u_n) \to \alpha(V, m)$ **(I)**. Pelo Lema 2.1.1, para $\omega \equiv 1$, existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$, de modo que $C_2 + C_1 E_V(u_n) \geq ||u_n||^p$. Disso e de (I), concluímos que $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada. Pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, tomando uma subsequência, se necessário, existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u_n \to u_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$.

Ainda, por $u_n \to u_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$ e, pelos Teoremas B.1 e B.3, a menos da passagem a uma subsequência, se necessário, temos que $u_n \to u_0$ em $L^p(\Omega)$. Da continuidade da norma e do fato de $||u_n||_p = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $||u_0||_p = 1$.

Além disso, por $||u_n||_p^p \to ||u_0||_p^p$, pelos Teoremas B.3, B.4 e H.4, e pela Desigualdade de Hölder, a menos de considerarmos uma subsequência,

$$\left| \int\limits_{\Omega} m|u_n|^p dx - \int\limits_{\Omega} m|u_0|^p dx \right| \leq ||m||_\infty || |u_n|^p - |u_0|^p ||_1 \to 0.$$

Por conseguinte, $\int\limits_{\Omega} m|u_0|^p dx = 1$ e, assim, $u_0 \in \mathcal{B}$.

Finalmente, por E_V ser fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente, temos

$$E_V(u_0) \leq \liminf E_V(u_n) = \lim E_V(u_n) = \alpha(V, m)$$

e, por $u_0 \in \mathcal{B}$, $E_V(u_0) = \alpha(V, m)$. Logo, tomando $\xi_0 = |u_0|$, temos $\xi_0 \in \mathcal{B}$, com $\xi_0 \geq 0$, tal que $E_V(\xi_0) = \alpha(V, m)$, como queríamos.

■

Corolário 2.2.1. $\alpha(V, m) < +\infty$ se, e somente se, $|\Omega_+| < |\Omega|$.

Demonstração: Se $|\Omega_+| = |\Omega|$, então $m > 0$ q.t.p. em Ω, pela definição do conjunto $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \emptyset$ e, portanto, $\alpha(V, m) = +\infty$.

Reciprocamente, se $\alpha(V,m) = +\infty$ e o conjunto $\{E_V(u); u \in \mathcal{B}\} \neq \emptyset$, então existe $u \in \mathcal{B}$, de modo que $E_V(u) \geq +\infty$, o que não ocorre. Consequentemente, o único modo de ocorrer $\alpha(V,m) = +\infty$ é o conjunto $\mathcal{B}$ ser vazio. Mas, se $|\Omega_+| < |\Omega|$, então $m^- \not\equiv 0$ ou $|\Omega_0| = 0$ e, pela Proposição 2.2.1, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Logo, se $|\Omega_+| < |\Omega|$, então $\alpha(V,m) < +\infty$ e segue o resultado.

■

Proposição 2.2.2. A autocurva μ, associada ao problema (2.0.1), satisfaz as seguintes propriedades:

(i) μ é côncava e diferenciável, com

$$\mu'(\lambda) = -\int_\Omega m\varphi_\lambda^p dx, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}; \tag{2.2.3}$$

(ii) Se $|\Omega_+| > 0$ (respectivamente $|\Omega_-| > 0$), então $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mu(\lambda) = -\infty$ (respectivamente $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mu(\lambda) = -\infty$);

(iii) Se $|\Omega_-| = 0$, então μ é decrescente;

(iv) $\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \mu(\lambda) = \alpha(V,m)$.

Demonstração: i) Verifiquemos, inicialmente, que μ é côncava. Para tal, sejam $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $t \in [0,1]$. Com isso,

$$\begin{aligned}
E_{V-[(1-t)\lambda+t\xi]m}(u) &= \int_\Omega [|\nabla u|^p + (V - [(1-t)\lambda + t\xi]m)|u|^p]dx \\
&= (1-t)\left(E_V(u) - \int_\Omega \lambda m|u|^p dx\right) + t\left(E_V(u) - \int_\Omega \xi m|u|^p dx\right) \\
&= (1-t)E_{V-\lambda m}(u) + tE_{V-\xi m}(u).
\end{aligned}$$

Por isso e pelas propriedades de ínfimo, $(1-t)\mu(\lambda) + t\mu(\xi) \leq \mu((1-t)\lambda + t\xi)$. Portanto, μ é côncava.

Provemos, agora, que μ é diferenciável, com derivada dada como em (2.2.3). Primeiramente, observamos que, como $\mathbb{R}$ é um intervalo e μ é côncava, da Análise Real, μ é contínua.

Consideraremos, agora, uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, tal que $\lambda_n \to \lambda$, e $\varphi_{\lambda_n}, \varphi_\lambda$ as autofunções positivas, L^p-normalizadas, associadas, respectivamente, aos autovalores $\mu(\lambda_n)$ e $\mu(\lambda)$.

Como $\lambda_n \to \lambda$, pela continuidade de μ, $\mu(\lambda_n) \to \mu(\lambda)$ e $||V - \lambda_n m||_r \leq ||V||_r + |\lambda_n|||m||_r$. Assim, pelo Lema 2.1.1, existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$, tais que

$$||\varphi_{\lambda_n}||^p \leq C_1 E_{V-\lambda_n m}(\varphi_{\lambda_n}) + C_2 = C_1\mu(\lambda_n) + C_2 \leq C_3,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e algum $C_3 > 0$. Por conseguinte, $(\varphi_{\lambda_n}) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada. Por isso e pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, a menos da passagem a uma subsequência, existe $\varphi_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\varphi_{\lambda_n} \rightharpoonup \varphi_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\varphi_{\lambda_n} \to \varphi_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$. Disso e dos Teoremas B.1 e B.3, $\varphi_{\lambda_n} \to \varphi_0$ em $L^p(\Omega)$. Logo, pela continuidade da norma, $||\varphi_0||_p = 1$. Desta forma, pelo Lema 2.1.2,

$$\mu(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mu(\lambda_n) = \lim E_{V-\lambda_n m}(\varphi_{\lambda_n}) \geq E_{V-\lambda m}(\varphi_0) \geq \lambda_1(V - \lambda m, 1) = \mu(\lambda). \quad (2.2.4)$$

Portanto, $E_{V-\lambda m}(\varphi_0) = \mu(\lambda)$. Com isso, φ_0 é um extremo de $E_{V-\lambda m}$ em $\mathcal{S} = \mathcal{I}^{-1}(\mathcal{I}(\varphi_0))$, onde $\mathcal{I} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é dada por $\mathcal{I}(u) = \int\limits_\Omega |u|^p dx$, para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

(a) $\mathcal{I}'(\varphi_0)(v) = 0$, para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ou

(b) existe $\theta \in \mathbb{R}$, tal que $E'_{V-\lambda m}(\varphi_0)(v) = \theta\mathcal{I}'(\varphi_0)(v)$, para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Destacamos que o item (a) não ocorre. De fato, $\mathcal{I}'(\varphi_0)(\varphi_0) = p||\varphi_0||_p^p = p \neq 0$. Deste modo, vale o item (b) e, portanto, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int\limits_\Omega [|\nabla\varphi_0|^{p-2}\nabla\varphi_0 \cdot \nabla v + (V - \lambda m)|\varphi_0|^{p-2}\varphi_0 v]dx = \theta \int\limits_\Omega |\varphi_0|^{p-2}\varphi_0 v dx, \ \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Consequentemente, $\mu(\lambda) = E_{V-\lambda m}(\varphi_0) = \theta||\varphi_0||_p^p = \theta$. Desta forma, φ_0 é uma autofunção associada a $\mu(\lambda)$. Assim, pelo Lema 2.1.5, $\varphi_0 = c\varphi_\lambda$, para alguma constante $c \neq 0$. Mas, por $1 = ||\varphi_0||_p = ||c\varphi_\lambda||_p = |c|^p$, por $\varphi_{\lambda_n} \to \varphi_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$, por $\varphi_{\lambda_n} > 0$ em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$, por $\varphi_\lambda > 0$ e pelo Teorema B.5, $\varphi_0 = \varphi_\lambda$.

Além do mais,

$$\begin{aligned}\mu(\lambda_n) &= E_{V-\lambda_n m}(\varphi_{\lambda_n}) \\ &= E_{V-\lambda m}(\varphi_{\lambda_n}) + (\lambda - \lambda_n)\int\limits_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx \\ &\geq \mu(\lambda) + (\lambda - \lambda_n)\int\limits_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx.\end{aligned}$$

De outro modo,

$$\mu(\lambda_n) - \mu(\lambda) \geq (\lambda - \lambda_n)\int\limits_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx. \tag{2.2.5}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mu(\lambda) &= E_{V-\lambda m}(\varphi_\lambda) \\ &= E_{V-\lambda_n m}(\varphi_{\lambda_n}) + (\lambda_n - \lambda)\int\limits_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx \\ &\geq \mu(\lambda_n) + (\lambda_n - \lambda)\int\limits_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx,\end{aligned}$$

ou seja, temos

$$\mu(\lambda) - \mu(\lambda_n) \geq (\lambda_n - \lambda)\int\limits_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx. \tag{2.2.6}$$

Analisemos, agora, dois casos.

Caso 1: $\lambda_n > \lambda$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Neste caso, $\lambda_n - \lambda > 0$. Assim, de (2.2.5),

$$\frac{\mu(\lambda_n) - \mu(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \leq \int\limits_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx \Rightarrow \frac{\mu(\lambda_n) - \mu(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} \geq -\int\limits_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx. \tag{2.2.7}$$

E, em (2.2.6), temos

$$\frac{\mu(\lambda) - \mu(\lambda_n)}{\lambda_n - \lambda} \geq \int\limits_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx \Rightarrow \frac{\mu(\lambda_n) - \mu(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} \leq -\int\limits_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx. \tag{2.2.8}$$

Das inequações (2.2.7) e (2.2.8), temos

$$-\int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx \leq \frac{\mu(\lambda_n)-\mu(\lambda)}{\lambda_n-\lambda} \leq -\int_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx. \tag{2.2.9}$$

Caso 2: $\lambda_n < \lambda$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Neste caso, $\lambda_n - \lambda < 0$. Assim, em (2.2.5),

$$\frac{\mu(\lambda_n)-\mu(\lambda)}{\lambda-\lambda_n} \geq \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx \Rightarrow \frac{\mu(\lambda_n)-\mu(\lambda)}{\lambda_n-\lambda} \leq -\int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx. \tag{2.2.10}$$

E, em (2.2.6), temos

$$\frac{\mu(\lambda)-\mu(\lambda_n)}{\lambda_n-\lambda} \leq \int_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx \Rightarrow \frac{\mu(\lambda_n)-\mu(\lambda)}{\lambda_n-\lambda} \geq -\int_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx. \tag{2.2.11}$$

Das inequações (2.2.10) e (2.2.11), temos

$$-\int_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx \leq \frac{\mu(\lambda_n)-\mu(\lambda)}{\lambda_n-\lambda} \leq -\int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx. \tag{2.2.12}$$

Logo, por (2.2.9) e (2.2.12), por $\varphi_{\lambda_n} \to \varphi_0 = \varphi_\lambda$ em $L^p(\Omega)$ e por $\varphi_\lambda > 0$ em Ω, segue o resultado desejado.

(ii) Façamos o caso onde $|\Omega_+| > 0$, o outro caso é análogo. Como $|\Omega_+| > 0$, podemos considerar $K \subset \Omega_+$, de modo que $|K| > 0$ e a regularização de sua função característica, denotada por $\tilde{\xi}$, satisfaça $supp\ \tilde{\xi} \subset \Omega_+$. Ora, $||\tilde{\xi}||_p = c > 0$ e $\int_\Omega m|\tilde{\xi}|^p dx = \int_{\Omega_+} m|\tilde{\xi}|^p dx > 0$. Tomemos $\xi = \dfrac{\tilde{\xi}}{||\tilde{\xi}||_p}$. Então, $||\xi||_p = 1$ e $\int_\Omega m|\xi|^p dx > 0$. Logo, quando $\lambda \to \infty$, temos

$$\mu(\lambda) \leq \int_\Omega [|\nabla\xi|^p + (V - \lambda m)|\xi|^p] dx \to -\infty.$$

Consequentemente, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \mu(\lambda) = -\infty$.

(iii) Como $|\Omega_-| = 0$, $\int_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx = \int_{\Omega^+} m|\varphi_\lambda|^p dx > 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, se $\lambda_1 < \lambda_2$, então

$$\begin{aligned}\mu(\lambda_1) &= E_V(\varphi_{\lambda_1}) - \lambda_1 \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_1}|^p dx \\ &> E_V(\varphi_{\lambda_1}) - \lambda_2 \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_1}|^p dx \\ &\geq \mu(\lambda_2).\end{aligned}$$

Logo, $\mu(\lambda_1) > \mu(\lambda_2)$, provando, assim, que μ é decrescente.

(iv) Sejam, inicialmente, $A_1 = \{E_{V-\lambda m}(u); ||u||_p = 1\}$ e $\mathcal{B} = \{E_V(u); ||u||_p = 1 \text{ e } I_1(u) = 0\}$. Com isso, $\mathcal{B} \subset A_1$. Consequentemente, $\alpha(V,m) = \inf \mathcal{B} \geq \inf A_1 = \mu(\lambda)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e, assim, $\alpha(V,m) \geq \sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda)$. Para provarmos a desigualdade contrária, consideraremos dois casos distintos.

Caso 1: $m \geq 0$ em Ω.

Neste primeiro caso, faz-se necessário levar em consideração dois subcasos.

a) Suponhamos que $m > 0$ q.t.p. em Ω, ou seja, $|\Omega_0| = 0$ e $|\Omega_-| = 0$. Pelo Corolário 2.2.1, $\alpha(V,m) = +\infty$. Suponhamos $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda) < +\infty$. Pelo item (iii), sabemos que μ é decrescente, donde

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} \mu(\lambda). \tag{2.2.13}$$

Consideremos uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, tal que $\lambda_n \to -\infty$ e sejam φ_{λ_n} as autofunções associadas a $\mu(\lambda_n)$, L^p-normalizadas.

Agora, pelo Lema 2.1.1, com $\omega \equiv 1$, existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$, tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$||\varphi_{\lambda_n}||^p \leq C_1 E_V(\varphi_{\lambda_n}) + C_2 \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx \leq C_1\mu(\lambda_n) + C_3. \tag{2.2.14}$$

Disso, de (2.2.13) e de $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda) < +\infty$, $(\varphi_{\lambda_n}) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada. Pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, existe $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, passando a uma subsequência, se necessário, temos $\varphi_{\lambda_n} \rightharpoonup \varphi$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\varphi_{\lambda_n} \to \varphi$ em $L^{pr'}(\Omega)$.

Ainda, pelos Teoremas B.1 e B.3, pela continuidade da norma e por $||\varphi_{\lambda_n}||_p = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos, a menos de considerarmos uma subsequência, que $\varphi_{\lambda_n} \to \varphi$ em $L^p(\Omega)$ e

$||\varphi||_p = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda) &= \lim \mu(\lambda_n) \\ &= \lim \left[E_V(\varphi_{\lambda_n}) - \lambda_n \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx \right]. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Agora, como $m \geq 0$ em Ω e $\varphi_{\lambda_n} > 0$ em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Já pelos Teoremas B.3, B.4, H.4 e pela Desigualdade de Hölder, considerando uma subsequência, caso necessário, temos $\int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx \to \int_\Omega m|\varphi|^p dx$. Com isso, $\int_\Omega m|\varphi|^p dx \geq 0$. Se $\int_\Omega m|\varphi|^p dx > 0$, então, por (2.2.15), por $\lim E_V(\varphi_{\lambda_n}) \geq \liminf E_V(\varphi_{\lambda_n}) \geq E_V(\varphi)$ e por $\lambda_n \to -\infty$, $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu = +\infty$, o que contraria nossa suposição. Por conseguinte, $\int_\Omega m|\varphi|^p dx = 0$. Disso e de $||\varphi||_p = 1$, $m = 0$ q.t.p. em Ω, o que é um absurdo. Portanto, $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda) = +\infty$, como queríamos.

b) $m \geq 0$ em Ω, com $|\Omega_0| > 0$.

Primeiramente, observamos que a Proposição 2.2.1, nos garante que $\alpha(V, m) < +\infty$. Assim, repetindo a mesma construção anterior, obtemos

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx = \int_\Omega m|\varphi|^p dx,$$

e

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda) \geq \liminf \left[E_V(\varphi_{\lambda_n}) - \lambda_n \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx \right] \geq E_V(\varphi),$$

donde $\varphi \in \mathcal{B}$ e $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda) \geq E_V(\varphi) \geq \alpha(V, m)$. Logo, $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda) = \alpha(V, m)$.

Caso 2: $|\Omega_-| > 0$.

Neste caso, novamente, a Proposição 2.2.1 nos garante que $\alpha(V, m) < +\infty$. Agora, por (ii), $\lim_{\lambda\to-\infty} \mu(\lambda) = -\infty$. E, como $|\Omega_+| > 0$, $\lim_{\lambda\to+\infty} \mu(\lambda) = -\infty$. Por conseguinte, μ é limitada superiormente. Deste modo, por μ ser côncava, possui um ponto de máximo global, donde existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda) = \mu(\lambda_0)$. Logo, por μ ser diferenciável,

$$0 = \mu'(\lambda_0) = -\int_\Omega m|\varphi_{\lambda_0}|^p dx \Rightarrow \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_0}|^p dx = 0,$$

ou seja, $\varphi_{\lambda_0} \in \mathcal{B}$. Da definição de $\alpha(V,m)$, temos

$$\alpha(V,m) \leq E_V(\varphi_{\lambda_0}) = E_V(\varphi_{\lambda_0}) - \lambda_0 \int\limits_\Omega m|\varphi_{\lambda_0}|^p dx = E_{V-\lambda_0 m}(\varphi_{\lambda_0}) = \mu(\lambda_0) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda).$$

Portanto, $\alpha(V,m) \leq \sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu(\lambda)$, como queríamos.

∎

No que segue, faremos uma análise geométrica do comportamento da autocurva. Tal análise servirá de suporte para as condições de existência de autovalores principais, exibidas na próxima seção. Para tanto, faremos uma análise de casos.

Caso 1: $m > 0$ em Ω.

Neste caso, $\int\limits_\Omega m|u|^p dx = 0$ se, e somente se, $u = 0$ q.t.p. em Ω e, consequentemente, $||u||_p = 0$. Isto nos garante que $\mathcal{B} = \emptyset$ e, portanto, $\alpha(V,m) = +\infty$. Disso e da proposição anterior, concluímos que a autocurva possui o seguinte comportamento:

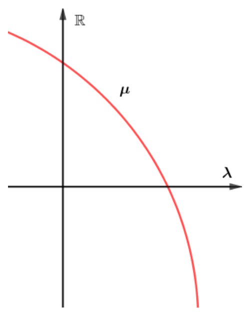

Figura 1: Representação da autocurva μ. Fonte: arquivo do autor.

Caso 2: $m \geq 0$ e $|\Omega_0| > 0$.

Nestas condições, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Por isso e pela Proposição 2.2.2, $\alpha(V,m) < +\infty$. Se $\alpha(V,m) \leq 0$, a autocurva apresenta um dentre os seguintes comportamentos:

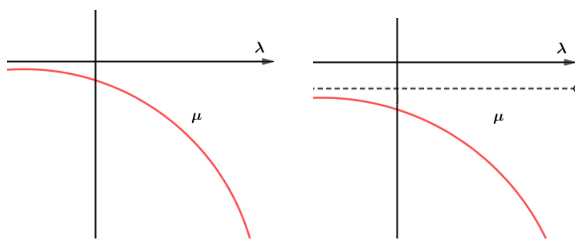

Figura 2: Representação da autocurva μ. Fonte: arquivo do autor.

Já, se $\alpha(V, m) > 0$, então temos a seguinte representação geométrica para a autocurva:

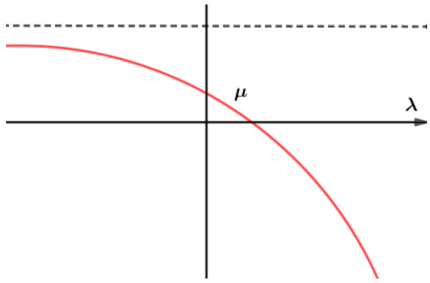

Figura 3: Representação da autocurva μ. Fonte: arquivo do autor.

Vale ressaltar que, em nenhum desses casos, o supremo de μ é atingido.

Caso 3: $|\Omega_-| > 0$ e $\alpha(V, m) < 0$.

De acordo com a Proposição 2.2.2, temos o seguinte comportamento para μ:

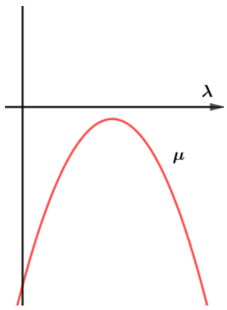

Figura 4: Representação da autocurva μ. Fonte: arquivo do autor.

Caso 4: $|\Omega_-| > 0$ e $\alpha(V, m) = 0$.

Pela proposição anterior, temos a representação a seguir para μ:

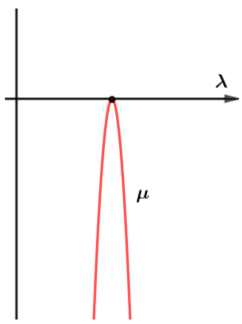

Figura 5: Representação da autocurva μ. Fonte: arquivo do autor.

Caso 5: $|\Omega_-| > 0$ e $\alpha(V, m) > 0$.

Novamente, pela Proposição 2.2.2, μ apresenta o seguinte comportamento:

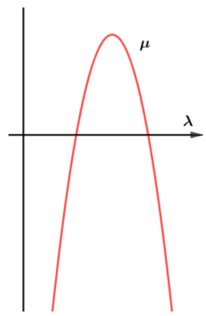

Figura 6: Representação da autocurva μ. Fonte: arquivo do autor.

Observamos que, nos casos (3), (4) e (5), o supremo da autocurva é atingido. .

Nosso objetivo, a partir deste momento, será relacionar os zeros da autocurva μ com os autovalores principais do problema (2.0.1), o que será demonstrado no próximo teorema. E, neste sentido, determinar condições razoáveis a serem impostas sobre V e m, de modo que exista ao menos um valor $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\mu(\lambda) = 0$.

Teorema 2.2.1. o número real λ satisfaz $\mu(\lambda) = 0$ se, e somente se, λ é um autovalor principal para (2.0.1). Além disso, λ é um autovalor simples.

Demonstração: Suponhamos $\mu(\lambda) = 0$. Como $\mu(\lambda)$ é o único autovalor principal para (2.2.1),

$$\int_\Omega [|\nabla \varphi_\lambda|^{p-2} \nabla \varphi_\lambda \cdot \nabla v + (V - \lambda m)|\varphi_\lambda|^{p-2} \varphi_\lambda v] dx = 0 \ , \ \forall \, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Assim,

$$\int_\Omega [|\nabla \varphi_\lambda|^{p-2} \nabla \varphi_\lambda \cdot \nabla v + V|\varphi_\lambda|^{p-2} \varphi_\lambda v] dx = \lambda \int_\Omega m |\varphi_\lambda|^{p-2} \varphi_\lambda v \, dx \ , \ \forall \, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Portanto, λ é autovalor principal para (2.0.1), com autofunção associada φ_λ, donde ganhamos também a simplicidade de λ.

Por outro lado, se λ é autovalor principal para (2.0.1), com autofunção associada u, L^p-normalizada, então

$$\int_\Omega [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v + (V - \lambda m)|u|^{p-2} uv] dx = 0 \cdot \int_\Omega |u|^{p-2} uv \, dx, \ \forall \, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Com isso, 0 é autovalor principal para (2.2.1). Mas, pelo Teorema 2.1.1, tal autovalor é único. Portanto, como $\mu(\lambda)$ é autovalor principal para (2.2.1), concluímos que $\mu(\lambda) = 0$.

■

2.3 Existência de Autovalores Principais

Neste momento, provamos o principal resultado deste capítulo. Demonstraremos, aqui, sob quais condições o problema (2.0.1) possui ao menos um autovalor principal. Para tanto, faremos uso dos resultados apresentados nas seções anteriores, especialmente do Teorema 2.2.1 e do parâmetro real $\alpha(V, m)$.

As condições apresentadas no teorema abaixo, evidenciam o quanto as partes negativa das funções peso e potencial influenciam na existência de autovalores principais.

Teorema 2.3.1. Suponhamos que V e m satisfaçam (2.1.1).
(i) Se $|\Omega_-| = 0$, então existe um autovalor principal para (2.0.1) se, e somente se, $\alpha(V, m) > 0$. Neste caso, o autovalor principal para (2.0.1) é único e caracterizado por

$$\lambda_1(V, m) = \min_{u \in M^+} E_V(u). \tag{2.3.1}$$

(ii) Se $|\Omega_-| > 0$ e $\alpha(V, m) > 0$, então existem exatamente dois autovalores principais para (2.0.1), digamos, $\lambda_{-1}(V, m) < \lambda_1(V, m)$, caracterizados por

$$\lambda_1(V, m) = \min_{u \in M^+} E_V(u) \quad \text{e} \quad \lambda_{-1}(V, m) = -\min_{u \in M^-} E_V(u), \tag{2.3.2}$$

onde $M^- = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); I_1(u) = -1\}$.
(iii) Se $|\Omega_-| > 0$ e $\alpha(V, m) = 0$, então existe um único autovalor principal para (2.0.1), $\lambda_1(V, m)$, o qual é caracterizado por

$$\lambda_1(V, m) = \inf_{u \in M^+} E_V(u) = -\inf_{u \in M^-} E_V(u). \tag{2.3.3}$$

Tais ínfimos não são atingidos. Mais precisamente, $u \not\equiv 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma autofunção associada a $\lambda_1(V, m)$ se, e somente se, $E_V(u) = I_1(u) = 0$.

Demonstração: **(i)** Primeiramente, notemos que, pelo Teorema 2.2.1, dizer que "existe um autovalor principal de (2.0.1) se, e somente se, $\alpha(V, m) > 0$" é equivalente a dizer que "existe algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(\lambda) = 0$ se, e somente se, $\alpha(V, m) > 0$". Neste sentido, provaremos o item (i) segundo esta forma equivalente.

Suponhamos $\alpha(V,m) > 0$. Por $|\Omega_-| = 0$, por $|\Omega_+| > 0$ e pela Proposição 2.2.2, existe um único $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(\lambda_1) = 0$. Reciprocamente, se $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ é tal que $\mu(\lambda_1) = 0$, então,

$$0 = \mu(\lambda_1) \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \mu(\lambda) = \alpha(V,m).$$

Suponhamos $\alpha(V,m) = 0$. Então, pelo item (iv) da Proposição 2.2.2, $\mu(\lambda_1) = 0 = \alpha(V,m) = \sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \mu(\lambda)$, o que é um absurdo, visto que μ é decrescente. Portanto, $\alpha(V,m) > 0$.

Agora, da definição de μ e do fato de existir $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, com $\mu(\lambda_1) = 0$, temos

$$0 = \mu(\lambda_1) = \inf\{E_{V-\lambda_1 m}(u); u \in \mathcal{S}\} \;\Rightarrow\; E_{V-\lambda_1 m}(u) \geq 0, \;\forall\, u \in \mathcal{S}.$$

Por conseguinte, $E_V(u) \geq \lambda_1 \displaystyle\int_\Omega m|u|^p dx$, para toda $u \in \mathcal{S}$. Mas, se $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v \neq 0$ q.t.p. em Ω, então, $\frac{v}{||v||_p} \in \mathcal{S}$. Consequentemente,

$$E_V(v) \geq \lambda_1 \int_\Omega m|v|^p dx, \;\forall\, v \neq 0. \tag{2.3.4}$$

Pelo Teorema 2.2.1, λ_1 é autovalor principal para (2.0.1), donde existe $\varphi_{\lambda_1} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, de modo que o par $(\varphi_{\lambda_1}, \lambda_1)$ satisfaz a igualdade (2.0.3). Logo,

$$E_V(\varphi_{\lambda_1}) = \lambda_1 \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_1}|^p dx. \tag{2.3.5}$$

Ainda, pelos itens (i) e (iii) da Proposição 2.2.2, $c = \displaystyle\int_\Omega m|\varphi_{\lambda_1}|^p dx > 0$. Com isso, $\dfrac{\varphi_{\lambda_1}}{c^{1/p}} \in M^+$. Por isso, por (2.3.4) e por (2.3.5), $\lambda_1(V,m) = \min\limits_{u \in M^+} E_V(u) = \lambda_1$, o que finaliza a prova de (i).

Antes de provarmos os dois outros itens, salientamos que, se existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, de modo que $\mu(\lambda_0) = 0$, então $\alpha(V,m) = \sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \mu(\lambda) \geq \mu(\lambda_0) = 0$. Por outro lado, supondo $\alpha(V,m) \geq 0$ e $|\Omega_-| > 0$, devido a $|\Omega_+| > 0$, e aos itens (i) e (ii) da Proposição 2.2.2, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(\lambda_0) = 0$. E, pelo Teorema 2.2.1, tal λ_0 é autovalor principal para (2.0.1).

Mais especificamente, se $\alpha(V,m) = 0$, então existe um único $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(\lambda_0) = 0$ e, se $\alpha(V,m) > 0$, então existem dois valores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tais que $\mu(\lambda_1) = \mu(\lambda_2) = 0$. Tendo estamos aptos a seguir com a prova dos demais itens do teorema.

ii) Pelo exposto acima, como $\alpha(V,m) > 0$, μ possui duas raízes, denotadas por $\lambda_{-1}(V,m)$ e

$\lambda_1(V,m)$. Digamos, sem perda de generalidade, $\lambda_{-1}(V,m) < \lambda_1(V,m)$.

Inicialmente, mostraremos que $\mu'(\lambda_{-1}(V,m)) > 0$. Ora, pelo Teorema D.1 e por $\mu(\lambda_1(V,m)) = \mu(\lambda_{-1}(V,m)) = 0$, temos

$$\mu(\lambda_1(V,m)) \leq \mu(\lambda_{-1}(V,m)) + \mu'(\lambda_{-1}(V,m))[\lambda_1(V,m) - \lambda_{-1}(V,m)],$$

donde $0 \leq \mu'(\lambda_{-1}(V,m))[\lambda_1(V,m)-\lambda_{-1}(V,m)]$. Como $\lambda_{-1}(V,m) < \lambda_1(V,m)$, $\mu'(\lambda_{-1}(V,m)) \geq 0$. Suponhamos, agora, que $\mu'(\lambda_{-1}(V,m)) = 0$. Assim, sendo φ_{-1} a autofunção, L^p-normalizada, associada a $\lambda_{-1}(V,m)$, temos $0 = \mu'(\lambda_{-1}(V,m)) = -\int\limits_\Omega m|\varphi_{-1}|^p dx$. Portanto, $\varphi_{-1} \in \mathcal{B}$, donde $\alpha(V,m) \leq E_V(\varphi_{-1}) = \mu(\lambda_{-1}(V,m)) = 0$, o que é uma contradição. Consequentemente, $\mu'(\lambda_{-1}(V,m)) > 0$, o que implica em $\int\limits_\Omega m|\varphi_{-1}|^p dx = c < 0$. Definindo $\tilde{\varphi}_{-1} = \dfrac{\varphi_{-1}}{(-c)^{1/p}}$, temos $I_1(\tilde{\varphi}_{-1}) = -1$, isto é, $\tilde{\varphi}_{-1} \in M^-$.

Finalmente, provemos que $\lambda_{-1}(V,m)$ é atingido. Ora,

$$\begin{aligned} 0 = \mu(\lambda_{-1}(V,m)) &= \lambda_1(V - \lambda_{-1}(V,m)m, 1) \\ &= E_{V-\lambda_{-1}(V,m)m}(\varphi_{-1}) = E_V(\varphi_{-1}) - \lambda_{-1}(V,m)\int\limits_\Omega m|\varphi_{-1}|^p dx, \end{aligned}$$

o que implica em $E_V(\varphi_{-1}) = \lambda_{-1}(V,m)\int\limits_\Omega m|\varphi_{-1}|^p dx$. Deste modo,

$$\frac{1}{-c}E_V(\varphi_{-1}) = \frac{1}{-c}\lambda_{-1}(V,m)\int\limits_\Omega m|\varphi_{-1}|^p dx,$$

donde

$$E_V(\tilde{\varphi}_{-1}) = \lambda_{-1}(V,m)\int\limits_\Omega m\left|\frac{\varphi_{-1}}{(-c)^{1/p}}\right|^p dx = \lambda_{-1}(V,m)\int\limits_\Omega m|\tilde{\varphi}_{-1}|^p dx = -\lambda_{-1}(V,m).$$

Ainda, pela definição de μ,

$$E_{V-\lambda_{-1}(V,m)m}(u) \geq \mu(\lambda_{-1}(V,m)) = 0 \;\Rightarrow\; E_V(u) \geq \lambda_{-1}(V,m)\int\limits_\Omega m|u|^p dx,\ \forall\, u \in \mathcal{S}.$$

Desta forma, se $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v \neq 0$ q.t.p. em Ω, então $E_V(u) \geq \lambda_{-1}(V,m) \int\limits_\Omega m|u|^p dx$. Em particular, se $u \in M^-$, temos $E_V(u) \geq -\lambda_{-1}(V,m)$. Por outro lado, $\tilde{\varphi}_{-1} \in M^-$, donde

$$-\lambda_{-1}(V,m) \leq \inf_{u \in M^-} E_V(u) \leq E_V(\tilde{\varphi}_{-1}) = -\lambda_{-1}(V,m).$$

Portanto, $\lambda_{-1}(V,m) = -\min\limits_{u \in M^-} E_V(u)$, como queríamos.

De maneira análoga, vemos que $\mu'(\lambda_1(V,m)) < 0$ e $\int\limits_\Omega m|\varphi_1|^p dx > 0$, sendo φ_1 a autofunção associada a $\lambda_1(V,m)$, L^p-normalizada. Repetindo o mesmo processo anterior, concluímos que $\lambda_1(V,m) = \min\limits_{u \in M^+} E_V(u)$.

(iii) Se $\alpha(V,m) = 0$, então, já vimos que existe um único $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(\lambda_0) = 0$. Pelo Teorema 2.2.1, λ_0 é o único autovalor principal para (2.0.1). Portanto, λ_0 é ponto de máximo global de μ, donde $-\int\limits_\Omega m|\varphi_{\lambda_0}|^p dx = \mu'(\lambda_0) = 0$. No que segue, provaremos que $\lambda_0 = \inf\limits_{u \in M^+} E_V(u)$.

Tomando $u \in M^+$, podemos assumir $u \geq 0$, a menos de trocar u por $|u|$, se necessário. Na sequência, seja $u_T = \min\{u, T\}$, para algum $T \in \mathbb{R}$, $T \geq 0$. Agora, toda autofunção φ_{λ_0} associada a λ_0 satisfaz (2.0.3). Considerando, para cada $\varepsilon > 0$, $v = \dfrac{u_T^p}{(\varphi_{\lambda_0} + \varepsilon)^{p-1}}$ em (2.0.3) e aplicando a Identidade de Picone a u_T e $\varphi_{\lambda_0} + \varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int\limits_\Omega L(u_T, \varphi_{\lambda_0} + \varepsilon) dx = \int\limits_\Omega R(u_T, \varphi_{\lambda_0} + \varepsilon) dx \\ &= \int\limits_\Omega \left[|\nabla u_T|^p - |\nabla \varphi_{\lambda_0}|^{p-2} \nabla \left(\frac{u_T^p}{(\varphi_{\lambda_0} + \varepsilon)^{p-1}} \right) \cdot \nabla \varphi_{\lambda_0} \right] dx \\ &= \int\limits_\Omega |\nabla u_T|^p dx - \lambda_0 \int\limits_\Omega m \left(\frac{u_T^p}{(\varphi_{\lambda_0} + \varepsilon)^{p-1}} \right) \varphi_{\lambda_0}^{p-1} dx + \int\limits_\Omega V \left(\frac{u_T^p}{(\varphi_{\lambda_0} + \varepsilon)^{p-1}} \right) \varphi_{\lambda_0}^{p-1} dx. \end{aligned}$$

Observamos, ainda, que

(a) $\varphi_{\lambda_0} + \varepsilon \to \varphi_{\lambda_0}$ q.t.p. em Ω, quando $\varepsilon \to 0$;

(b) para cada $x \in \Omega$, temos $\lim\limits_{T \to +\infty} u_T(x) = u(x)$, donde $u_T \to u$ q.t.p. em Ω, quando $T \to \infty$;

(c) pondo $\Omega_1 = \{x \in \Omega; u_T(x) = u(x)\}$ e $\Omega_2 = \{x \in \Omega; u_T(x) = T\}$ temos, por (b), que, para cada T suficientemente grande, existe $\delta_T > 0$, tal que $|\Omega_2| < \delta_T$. Nestes moldes, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_T > 0$ tal que, pelo Teorema H.2, $|\Omega_2| < \delta_T$ implica em $\int\limits_{\Omega_2} |\nabla u|^p dx < \varepsilon$. Por conseguinte, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$||\nabla u_T - \nabla u||_p^p = \int_\Omega |\nabla u_T - \nabla u|^p dx = \int_{\Omega_1} |\nabla u - \nabla u|^p dx + \int_{\Omega_2} |\nabla T - \nabla u|^p dx = \int_{\Omega_2} |\nabla u|^p dx < \varepsilon.$$

Logo, $\nabla u_T \to \nabla u$ em $L^p(\Omega)$. Pelo Teorema B.3, passando a uma subsequência, se necessário, $\nabla u_T \to \nabla u$ q.t.p. em Ω.

Assim, pelos itens (a), (b), (c), e pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda_0 \int_\Omega m \left(\frac{u^p}{\varphi_{\lambda_0}^{p-1}}\right) \varphi_{\lambda_0}^{p-1} dx + \int_\Omega V \left(\frac{u^p}{\varphi_{\lambda_0}^{p-1}}\right) \varphi_{\lambda_0}^{p-1} dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^p + V|u|^p dx - \lambda_0 \int_\Omega m|u|^p dx \\
&= E_V(u) - \lambda_0.
\end{aligned}$$

Disso, $E_V(u) \geq \lambda_0$.

Agora, ao considerarmos $\psi \in C^\infty(\Omega)$, com $\psi \geq 0$, satisfazendo $\int_\Omega m\psi^p dx > 0$ e $\int_\Omega m\varphi_{\lambda_0}^{p-1}\psi dx > 0$, temos $\int_\Omega m \left|\varphi_{\lambda_0} + \frac{\psi}{n}\right|^p dx > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande. Assim, podemos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande,

$$u_n = \frac{\varphi_{\lambda_0} + \frac{\psi}{n}}{\left(\int_\Omega m \left|\varphi_{\lambda_0} + \frac{\psi}{n}\right|^p dx\right)^{1/p}}. \tag{2.3.6}$$

Resultando que cada $u_n \in M^+$.

A seguir, provaremos que $E_V(u_n) \to \lambda_0$. Para isso, observamos que, pelo T.V.M., existe $t_n = \frac{\theta_1}{n} \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$, de modo que

$$E_V\left(\varphi_{\lambda_0} + \frac{\psi}{n}\right) = \frac{p}{n} E_V'\left(\varphi_{\lambda_0} + t_n\psi\right)(\psi),$$

já que $E_V(\varphi_{\lambda_0}) = \lambda_0 \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_0}|^p dx = 0$.

De maneira similar, existe $s_n = \frac{\theta_2}{n} \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$, tal que

$$I_1\left(\varphi_{\lambda_0} + \frac{\psi}{n}\right) = \frac{1}{n} I_1'\left(\varphi_{\lambda_0} + s_n\psi\right)(\psi).$$

visto que $I_1(\varphi_{\lambda_0}) = 0$. Agora, como λ_0 é autovalor com autofunção associada φ_{λ_0}, temos, para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, em que $I_1'(\varphi_{\lambda_0})(v) \neq 0$,

$$\lambda_0 = \frac{E_V'(\varphi_{\lambda_0})(v)}{I_1'(\varphi_{\lambda_0})(v)}.$$

Deste modo,

$$E_V(u_n) = \frac{E_V\left(\varphi_{\lambda_0} + \frac{\psi}{n}\right)}{I_1\left(\varphi_{\lambda_0} + \frac{\psi}{n}\right)} = \frac{E_V'\left(\varphi_{\lambda_0} + t_n\psi\right)(\psi)}{I_1'\left(\varphi_{\lambda_0} + s_n\psi\right)(\psi)}.$$

Ainda, quando $n \to \infty$, temos $t_n, s_n \to 0$, o que implica em

$$E_V'\left(\varphi_{\lambda_0} + t_n\psi\right)(\psi) \to E_V'\left(\varphi_{\lambda_0}\right)(\psi) \quad \text{e} \quad I_1'\left(\varphi_{\lambda_0} + s_n\psi\right)(\psi) \to I_1'\left(\varphi_{\lambda_0}\right)(\psi).$$

Com isso, quando $n \to \infty$, $E_V(u_n) \to \lambda_0$ e, assim, $\lambda_0 = \inf\limits_{u \in M^+} E_V(u)$. Por sua vez, como $I_1(\varphi_{\lambda_0}) = 0$, $\varphi_{\lambda_0} \notin M^+$, o que nos permite concluir que λ_0 não é atingido.

De maneira análoga, considerando $u \in M^-$ e $\psi < 0$ em Ω, de modo que $\int\limits_\Omega m\psi^p dx < 0$ e $\int\limits_\Omega m\varphi_{\lambda_0}^{p-1}\psi dx < 0$, mostramos que $\lambda_0 = -\inf\limits_{u \in M^-} E_V(u)$, e que este ínfimo não é atingido.

Finalmente, consideremos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $||u||_p = 1$ e $E_V(u) = 0$. Então, como $u \in \mathcal{B}$, $\mu(\lambda_0) = \sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \mu(\lambda) = \alpha(V, m)$ é atingido em u. Então, pelo Teorema 2.1.1, $u = c\varphi_{\lambda_0}$, para algum $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Reciprocamente, seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma autofunção associada a $\lambda_1(V, m)$. Caso $I_1(u) = c > 0$, $\tilde{u} = \frac{u}{c^{1/p}} \in M^+$ e $E_V(\tilde{u}) = \lambda_1(V, m) I_1(\tilde{u}) = \lambda_1(V, m)$, donde $\lambda_1(V, m)$ é atingido por uma função em M^+, contrariando o que foi provado na primeira parte deste item. Caso $I_1(u) = c < 0$, de maneira similar, podemos provar que $\lambda_1(V, m)$ é atingido por uma função $\overline{u} \in M^-$, produzindo um novo absurdo. Consequentemente, $E_V(u) = I_1(u) = 0$, como queríamos.

Logo, pondo $\lambda_0 = \lambda_1(V, m)$, segue o resultado.

■

Observação 2.3.1. Pelo Lema 2.1.5, todos os autovalores de (2.0.1) obtidos no Teorema 2.3.1

são simples e são os únicos autovalores principais para o problema (2.0.1).

Observação 2.3.2. Como consequência do Teorema 2.3.1, quando $|\Omega_-| > 0$ e $\alpha(V, m) = 0$, a função obtida pelo item (iv) da Proposição 2.2.1, ξ_0, é uma autofunção associada a $\lambda_1(V, m)$ e é a única função não negativa onde $\alpha(V, m)$ é atingido. Com efeito, pelo item (iii) do Teorema 2.3.1, ξ_0 é uma autofunção associada a $\lambda_1(V, m)$. Pela Observação 2.3.1, existe uma constante não nula $c_1 \in \mathbb{R}$, tal que $\xi_0 = c_1\varphi_0$, onde φ_0 é a autofunção positiva, L^p-normalizada, associada a $\lambda_1(V, m)$. Desta forma, por $\xi_0 \in \mathcal{B}$, $c_1 = 1$ ou $c_1 = -1$. Mas, como $\xi_0 \geq 0$ e $\varphi_0 > 0$, temos que $c_1 = 1$ e $\xi_0 = \varphi_0$.

Agora, supondo que exista uma função $u_0 \in \mathcal{B}$, $u_0 \geq 0$, tal que $E_V(u_0) = \alpha(V, m) = 0$, repetindo os argumentos anteriores, concluímos que $u_0 = \varphi_0$ e, assim, $u_0 = \xi_0$.

Proposição 2.3.1. Os autovalores de (2.0.1) obtidos no Teorema 2.3.1 são isolados no espectro.

Demonstração: Se $\lambda_1(V, m)$ é o autovalor de (2.0.1), obtido no item (i) do Teorema 2.3.1, então provaremos que este é isolado. Para os demais autovalores, a demonstração é feita de maneira análoga.

Inicialmente, lembramos que $\lambda_1(V, m)$ ser isolado no espectro significa que existe $\delta > 0$, de modo que não haja nenhum outro autovalor de (2.0.1) no intervalo $(\lambda_1(V, m)-\delta, \lambda_1(V, m)+\delta)$.

Suponhamos, por absurdo, que isso não ocorra, ou seja, existe uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_n \to \lambda_1(V, m)$, sendo cada λ_n é autovalor de (2.0.1). Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n é a autofunção, L^p-normalizada, associada a λ_n, então $||u_n||_p = 1$. Como $|\Omega_-| = 0$ e $|\Omega_+| > 0$, $\int\limits_\Omega m|u_n|^p dx = c > 0$. Com isso, $v_n = \dfrac{u_n}{c^{1/p}} \in M^+$. Logo, $(v_n) \subset M^+$.

Ainda, por λ_n ser autovalor, com autofunção associada u_n, $E_V(v_n) = \lambda_n$ **(I)**. Por isso, por $\lambda_n \to \lambda_1(V, m)$ e pelo Lema 2.1.1, concluímos que $(v_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada. Assim, pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, a menos de subsequência, existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v_n \to v$ em $L^{pr'}(\Omega)$.

Como $v_n \to v$ em $L^{pr'}(\Omega)$, pelos Teoremas B.3, B.4 e H.4, pela Desigualdade de Hölder, por $I_1(v_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e por E_V ser f.s.s.i., a menos da passagem a subsequências,

$$\int\limits_\Omega m|v|^p dx = 1 \quad \text{e} \quad E_V(v) \leq \liminf E_V(v_n) \overset{\text{(I)}}{=} \lim \lambda_n = \lambda_1(V, m).$$

Portanto, como $v \in M^+$, $E_V(v) = \lambda_1(V, m)$. Com isso, v é autofunção associada a $\lambda_1(V, m)$. Visto que $\lambda_1(V, m)$ é autovalor principal de (2.0.1), da sua simplicidade, decorre que $v = c_1\varphi_1$, para alguma constante $c_1 \in \mathbb{R}$. Notemos que, como $\varphi_1 > 0$, teremos $v > 0$ ou $v < 0$, dependendo do sinal de c_1. Suponhamos $v > 0$, ou seja, $|\Omega_-^v| = 0$. O caso onde $v < 0$ segue de maneira análoga.

Agora, pelo Teorema B.5, para todo n suficientemente grande, $|\Omega_-^{v_n}| = 0$ e, consequentemente, $|\Omega_-^{u_n}| = 0$, donde $u_n > 0$. Então, para todo n suficientemente grande, λ_n é autovalor principal de (2.0.1), o que contraria a Observação 2.3.1. Logo, $\lambda_1(V, m)$ é isolado no espectro.

■

Na sequência, vamos construir um exemplo onde ocorre $\alpha(V, m) = 0$.

Exemplo 2.3.1. Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \ , & \text{em } \Omega \\ u = 0 \ , & \text{em } \partial\Omega \end{cases} . \tag{2.3.7}$$

Em Biezuner (2006), é demonstrado que tal problema possui um autovalor principal que é simples e satisfaz a desigualdade $||u||^2 \geq \lambda_1 ||u||_2^2$, para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Aqui, λ_1 é o primeiro autovalor do problema (2.3.7) e $||u|| = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$, para $u \in H_0^1(\Omega)$, é a norma usual de $H_0^1(\Omega)$. Fixemos, neste exemplo, φ_1 como sendo a autofunção associada a λ_1, de modo que $||\varphi_1||_2 = 1$.

Agora, se $B_0 \subset \Omega$ é aberto, tal que $||\varphi_1||_{2,B_0}^2 = K > 0$, então $||\varphi_1||_{2,B_0^c}^2 = 1 - K > 0$, onde B_0^c é o conjunto complementar de B^0 em Ω. Ainda, ao definirmos m e V, pondo

$$m(x) = m_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon \left(\frac{K+1}{K-1} \right) \ , & \text{se } x \in B_0^c \\ \varepsilon \left(1 + \frac{1}{K} \right) \ , & \text{se } x \in B_0 \end{cases} , \tag{2.3.8}$$

e

$$V(x) = V_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\lambda_1 + \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{K+1}{K-1} \right) \ , & \text{se } x \in B_0^c \\ -\lambda_1 + \left(1 + \frac{1}{K} \right) \frac{1}{2\varepsilon} \ , & \text{se } x \in B_0 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

temos

$$\int\limits_\Omega m\varphi_1^2 dx = \varepsilon \left(\frac{K+1}{K-1} \right) ||\varphi_1||_{2,B_0^c}^2 + \varepsilon \left(1 + \frac{1}{K} \right) ||\varphi_1||_{2,B_0}^2 = 0. \tag{2.3.10}$$

Além disso, se u é tal que $\int\limits_\Omega mu^2dx = 1$, então

$$1 = \int\limits_\Omega mu^2dx = \varepsilon\left(\frac{K+1}{K-1}\right)||u||^2_{2,B_0^c} + \varepsilon\left(1+\frac{1}{K}\right)||u||^2_{2,B_0},$$

o que implica em

$$\left(1+\frac{1}{K}\right)||u||^2_{2,B_0} + \left(\frac{K+1}{K-1}\right)||u||^2_{2,B_0^c} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Consequentemente, devido a somente múltiplos de φ_1 satisfazerem $||u||^2 = \lambda_1||u||_2^2$ e à equação (2.3.10), temos

$$\begin{aligned}
E_V(u) &= ||u||^2 - \left(\lambda_1 - \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{K+1}{K-1}\right)\right)||u||^2_{2,B_0^c} - \left(\lambda_1 - \left(1+\frac{1}{K}\right)\frac{1}{2\varepsilon}\right)||u||^2_{2,B_0}\\
&> \lambda_1||u||_2^2 - \left(\lambda_1 - \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{K+1}{K-1}\right)\right)||u||^2_{2,B_0^c} - \left(\lambda_1 - \left(1+\frac{1}{K}\right)\frac{1}{2\varepsilon}\right)||u||^2_{2,B_0}\\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\left(\left(1+\frac{1}{K}\right)||u||^2_{2,B_0} + \left(\frac{K+1}{K-1}\right)||u||^2_{2,B_0^c}\right) = \frac{1}{2\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se u é tal que $\int\limits_\Omega mu^2dx = 0$, obtemos

$$\left(1+\frac{1}{K}\right)||u||^2_{2,B_0} + \left(\frac{K+1}{K-1}\right)||u||^2_{2,B_0^c} = 0$$

e, por conseguinte, como múltiplos de φ_1 podem ser consideradas aqui, obtemos

$$\begin{aligned}
E_V(u) &= ||u||^2 - \left(\lambda_1 - \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{K+1}{K-1}\right)\right)||u||^2_{2,B_0^c} - \left(\lambda_1 - \left(1+\frac{1}{K}\right)\frac{1}{2\varepsilon}\right)||u||^2_{2,B_0}\\
&\geq \lambda_1||u||_2^2 - \left(\lambda_1 - \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{K+1}{K-1}\right)\right)||u||^2_{2,B_0^c} - \left(\lambda_1 - \left(1+\frac{1}{K}\right)\frac{1}{2\varepsilon}\right)||u||^2_{2,B_0}\\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\left(\left(1+\frac{1}{K}\right)||u||^2_{2,B_0} + \left(\frac{K+1}{K-1}\right)||u||^2_{2,B_0^c}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $E_V(u) \geq 0$, para toda função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I_1(u) = 0$. Em particular, $E_V(u) \geq 0$ para toda $u \in \mathcal{B}$.

Vejamos, agora, que E_V se anula apenas em múltiplos de φ_1. Ora,

$$\begin{aligned} E_V(\varphi_1) &= ||\varphi_1||^2 - \left(\lambda_1 - \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{K+1}{K-1}\right)\right)||\varphi_1||^2_{2,B_0^c} - \left(\lambda_1 - \left(1+\frac{1}{K}\right)\frac{1}{2\varepsilon}\right)||\varphi_1||^2_{2,B_0} \\ &= \lambda_1||\varphi_1||_2^2 - \left(\lambda_1 - \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{K+1}{K-1}\right)\right)||\varphi_1||^2_{2,B_0^c} - \left(\lambda_1 - \left(1+\frac{1}{K}\right)\frac{1}{2\varepsilon}\right)||\varphi_1||^2_{2,B_0} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\left(\left(1+\frac{1}{K}\right)||u||^2_{2,B_0} + \left(\frac{K+1}{K-1}\right)||u||^2_{2,B_0^c}\right) = 0. \end{aligned}$$

E, assim, $E_V(u) = 0$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que $u = c\varphi_1$, com $c \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, se $E_V(u) = 0$ e $u = 0$ q.t.p. em Ω, então $u = 0 \cdot \varphi_1$. Por outro lado, se $u \neq 0$ q.t.p. em Ω, $||u||_2 > 0$. Logo, podemos considerar $u_1 = \dfrac{u}{||u||_2}$. Observamos que $E_V(u_1) = 0$ e que $||u_1||^2 \geq \lambda_1 = \inf\{||u||^2; ||u||_2 = 1\}$. Se $||u||^2 > \lambda_1$, então

$$\begin{aligned} E_V(u_1) &= ||u_1||^2 - \left(\lambda_1 - \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{K+1}{K-1}\right)\right)||u_1||^2_{2,B_0^c} - \left(\lambda_1 - \left(1+\frac{1}{K}\right)\frac{1}{2\varepsilon}\right)||u_1||^2_{2,B_0} \\ &> \lambda_1 - \lambda_1 + \frac{1}{2\varepsilon}\left[\left(\frac{K+1}{K-1}\right)||u_1||^2_{2,B_0^c} + \left(1+\frac{1}{K}\right)||u_1||^2_{2,B_0}\right] \geq 0, \end{aligned}$$

isto é, $E_V(u_1) > 0$, o que contradiz o fato de $E_V(u_1) = 0$. Deste modo, $||u_1|| = \lambda_1$ e, pelo Teorema Multiplicadores de Lagrange, concluímos que u_1 é autofunção associada a λ_1 e, por λ_1 ser simples, existe $c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$, tal que $u_1 = c\varphi_1$. Por conseguinte, $u = c||u||_2\varphi_1$, como queríamos demonstrar.

Finalmente, por $\varphi_1 \in \mathcal{B}$, por $E_V(\varphi_1) = 0$ e de $E_V(u) \geq 0$, para toda $u \in \mathcal{B}$, $\alpha(V,m)$ é atingido em φ_1 e, consequentemente, $\alpha(V,m) = 0$. Além disso, $\lambda_1(V,m) \geq \dfrac{1}{2\varepsilon^2}$.

■

Para finalizarmos esta seção, mostraremos que o funcional E_V é limitado inferiormente em M^+ se, e somente se, existe ao menos um autovalor principal para o problema (2.0.1). Para tanto, provaremos o seguinte resultado auxiliar.

Proposição 2.3.2. Se $\alpha(V,m) < 0$ ou $\alpha(V,m) = 0$ e $m \geq 0$, então E_V é ilimitado inferiormente em M^+.

Demonstração: Consideraremos cada um dos casos, separadamente.

Caso 1: $\alpha(V,m) < 0$.

Neste caso, existe $u_0 \in \mathcal{B}$ tal que $E_V(u_0) < 0$ e, a menos de considerarmos $|u_0|$, se necessário, podemos assumir $u_0 \geq 0$ em Ω. No que segue, consideremos dois subcasos.

(a) $m \geq 0$

Por esta condição, $u_0 = 0$ q.t.p. em Ω_+. Se $w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é tal que $w_0 \geq 0$ em Ω, então w_1, definida por

$$w_1(x) = \begin{cases} w_0 + 1 \ , \ \text{ se } x \in \Omega_+ \\ w_0 \ , \ \text{ se } \Omega - \Omega_+ \end{cases}$$

cumpre: $w_1 > 0$ em Ω_+ e $\int\limits_{\Omega_+} m|w_1|^p dx = c > 0$. Pondo $w = \dfrac{w_1}{c^{1/p}}$, temos $w > 0$ em Ω_+ e $\int\limits_{\Omega} m|w|^p dx = 1$.

Ainda,

$$\int\limits_{\Omega} m|w + tu_0|^p dx = \int\limits_{\Omega_+} m|w + tu_0|^p dx = \int\limits_{\Omega_+} m|w|^p dx = 1$$

e

$$E_V(w + tu_0) = \int\limits_{\Omega} [|\nabla w + tu_0|^p + V|w + tu_0|^p] dx \leq 2^{p-1}(E_V(w) + t^p E_V(u_0)) \to -\infty,$$

quando $t \to \infty$.

(b) $m^- \neq 0$.

Neste subcaso, $|(\Omega - \Omega_+) \cap \Omega_{0,+}| > 0$, onde $\Omega_{0,+} = \{x \in \Omega; u_0(x) > 0\}$. De fato, suponhamos que $|(\Omega - \Omega_+) \cap \Omega_{0,+}| = 0$. Ora,

$$(\Omega - \Omega_+) \cap \Omega_{0,+} = \Omega \cap \Omega_+^c \cap \Omega_{0,+} = \Omega \cap (\Omega_+ \cup \Omega_{0,+}^c)^c = \Omega - (\Omega_+ \cup \Omega_{0,+}^c).$$

Logo, $\Omega = (\Omega_+ \cup \Omega_{0,+}^c) \cup ((\Omega - \Omega_+) \cap \Omega_{0,+})$. Para simplificarmos, denotaremos $A = (\Omega - \Omega_+) \cap \Omega_{0,+}$. Assim, como $|A| = 0$, segue que

$$\int\limits_{\Omega} m|u_0|^p dx = \int\limits_{\Omega - A} m|u_0|^p dx + \int\limits_{A} m|u_0|^p dx = \int\limits_{\Omega - A} m|u_0|^p dx.$$

Definindo $K_1 = \Omega_+ \cap \Omega_{0,+}$, $K_2 = \Omega_+ \cap \Omega_{0,+}^c$ e $K_3 = \Omega_{0,+}^c \cap (\Omega - \Omega_+)$ e observando que $u_0 = 0$ em $\Omega_{0,+}^c$,

$$\int\limits_{\Omega - A} m|u_0|^p dx = \int\limits_{K_1} m|u_0|^p dx + \int\limits_{K_2} m|u_0|^p dx + \int\limits_{K_3} m|u_0|^p dx = \int\limits_{K_1} m|u_0|^p dx > 0.$$

Consequentemente, $\int\limits_{\Omega} m|u_0|^p dx > 0$, o que é um absurdo, pois $u_0 \in \mathcal{B}$. Portanto, $|(\Omega - \Omega_+) \cap \Omega_{0,+}| > 0$.

Agora, seja $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, de modo que $w \geq 0$ em Ω e $supp\ w \subset \Omega_+ \cap \Omega_{0,+}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema do Valor Médio, existem $0 < s_n, t_n < \frac{1}{n}$, tais que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} m\left|u_0 + \frac{w}{n}\right|^p dx &= \frac{p}{n}\int\limits_{\Omega} m\left|u_0 + s_n w\right|^{p-2}(u_0 + s_n w)w dx\\ &= \frac{p}{n}\int\limits_{\Omega_+} m\left|u_0 + s_n w\right|^{p-2}(u_0 + s_n w)w dx\\ &> 0\end{aligned}$$

e

$$E_V\left(u_0 + \frac{w}{n}\right) = E_V(u_0) + \frac{1}{n}E_V'(u_0 + t_n w)(w).$$

Deste modo, $\frac{u_0 + \frac{w}{n}}{I_1\left(u_0 + \frac{w}{n}\right)} \in M^+$ e, por E_V ser de classe C^1, quando $t_n \to 0$, $(E_V'(u_0 + t_n w)) \subset (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ é limitada. Consequentemente,

$$\begin{aligned}E_V\left(u_0 + \frac{w}{n}\right) &= E_V(u_0) + \frac{1}{n}E_V'(u_0 + t_n w)(w)\\ &\leq E_V(u_0) + \frac{1}{n}||E_V'(u_0 + t_n w)||_*||w|| \leq E_V(u_0) + \frac{1}{n}C,\end{aligned}$$

onde $C = C_1||w||$, sendo $||E_V'(u_0 + t_n w)||_* \leq C_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pondo $f_n = m\left|u_0 + s_n w\right|^{p-2}(u_0 + s_n w)w$, por $E_V(u_0) < 0$ e $\int\limits_{\Omega} f_n dx \to I_1'(u_0)(w) > 0$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{Ev\left(u_0 + \frac{w}{n}\right)}{\int\limits_{\Omega} m\left|u_0 + \frac{w}{n}\right|^p dx} &\leq \frac{E_V(u_0) + \frac{C}{n}}{\frac{p}{n}\int\limits_{\Omega} f_n dx}\\ &= \frac{E_V(u_0)}{\frac{p}{n}\int\limits_{\Omega} f_n dx} + \frac{C/n}{\frac{p}{n}\int\limits_{\Omega} f_n dx}\\ &= \frac{nE_V(u_0)}{p\int\limits_{\Omega} f_n dx} + \frac{C}{p\int\limits_{\Omega} f_n dx} \to -\infty,\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Deste modo, E_V é ilimitado inferiormente sobre M^+.

Caso 2: $\alpha(V,m) = 0$ e $m \geq 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $\lambda_1 = \inf\limits_{u \in M^+} E_V(u) > -\infty$. Provaremos, a seguir, que E_V satisfaz a condição (PSC) em M^+ no nível λ_1. Para tanto, seja $(u_n) \subset M^+$ uma sequência $(PSC)_{\lambda_1}$ para $\tilde{E}_V = E_V\big|_{M^+}$. Ou seja, para alguma sequência $\varepsilon_n \to 0$, verifica-se

$(PSC1)$ $E_V(u_n) \to \lambda_1$;

$(PSC2)$ $|(E'_V(u_n)(\xi)| \leq \dfrac{\varepsilon_n}{1+||u_n||}||\xi||$, $\forall\, \xi \in T_{u_n}M^+$.

Suponhamos que (u_n) seja ilimitada. Definindo $v_n = \dfrac{u_n}{||u_n||}$ **(I)**, temos $||v_n|| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $(v_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada. Pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, a menos de subsequência, existe $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v_n \to v_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$.

Agora, para quaisquer $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, definimos $\tau(v,w) = \displaystyle\int_\Omega m|v|^{p-2}vwdx$. Ainda, temos que $\xi = (v_n - v_0) - \tau(u_n, v_n - v_0)u_n \in T_{u_n}M^+$. De fato, pondo $K = \tau(u_n, v_n - v_0)$, decorre, por $(u_n) \subset M^+$, que

$$\begin{aligned} I'_1(u_n)(\xi) &= \int_\Omega m|u_n|^{p-2}u_n((v_n - v_0) - Ku_n)dx \\ &= \int_\Omega m|u_n|^{p-2}u_n(v_n - v_0)dx - K\int_\Omega m|u_n|^p dx = K - K = 0. \end{aligned}$$

Assim, considerando este ξ em $(PSC2)$ e multiplicando ambos os lados da expressão por $||u_n||^{1-p}$, obtemos .

$$|E'_V(v_n)(v_n - v_0) - \tau(v_n, v_n - v_0)E_V(u_n)| \leq \frac{\varepsilon_n||u_n||}{1+||u_n||}\left\|\frac{v_n - v_0}{||u_n||^p} - \tau(v_n, v_n - v_0)v_n\right\|. \tag{2.3.11}$$

Disso, temos

$$\begin{aligned} |E'_V(v_n)(v_n - v_0)| \leq \frac{\varepsilon_n||u_n||}{1+||u_n||}&\left(\frac{||v_n - v_0||}{||u_n||^p}|\tau(v_n, v_n - v_0)|||v_n||\right) \\ &+ |\tau(v_n, v_n - v_0)||E_V(u_n)|. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Lembramos, ainda, que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e que $v_n \to v_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$. Tomando $r = \dfrac{N}{p-1}$, $q = \dfrac{Np}{N-p+1}$ e $\beta = \dfrac{Np}{(N-p+1)(p-1)}$ e observando que $\beta(p-1) = q = pr'$, temos, ao aplicarmos a Desigualdade de Hölder Generalizada,

$$\begin{aligned}|\tau(v_n, v_n - v_0)| &\leq \int_\Omega |m||v_n|^{p-1}|v_n - v_0|dx \\ &= ||m||_r||v_n||_q^{q/\beta}||v_n - v_0||_q \to 0.\end{aligned}$$

Por isso e pela equação (2.3.12), segue que $|E_V'(v_n)(v_n - v_0)| \to 0$. Pela Propriedade S^+ do p-Laplaciano, Teorema C.8, $v_n \to v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Assim, substituindo $v_n - v_0$ por $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, na equação (2.3.11), e fazendo $n \to \infty$, temos o lado direito da desigualdade indo para zero e $E_V(u_n) \to \lambda_1$. Concluímos, então, que $E_V'(v_0)(w) - \tau(v_0, w)\lambda_1 = 0$. De outro modo,

$$\int_\Omega [|\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0 \cdot \nabla w + V|v_0|^{p-2}v_0 w]dx = \lambda_1 \int_\Omega m|v_0|^{p-2}v_0 w \, dx.$$

Portanto, $\alpha(V,m)$ é atingido em v_0 e λ_1 é um autovalor para o problema (2.0.1), com autofunção associada v_0. Tomando $|v_0|$ e aplicando a Desigualdade de Harnack, concluímos que λ_1 é um autovalor principal para (2.0.1), o que contradiz a Observação 2.3.1. Com isso, (u_n) é limitada.

Logo, repetindo o procedimento anterior para (u_n), vemos que E_V satisfaz a condição $(PSC)_{\lambda_1}$ sobre M^+ e, novamente, chegamos a um absurdo. Consequentemente, $\lambda_1 = -\infty$ e segue o resultado.

■

Teorema 2.3.2. O funcional E_V é limitado inferiormente em M^+ se, e somente se, existe ao menos um autovalor principal para o problema (2.0.1).

Demonstração: Se E_V é limitado inferiormente, então, pela Proposição 2.3.2, $\alpha(V,m) \geq 0$ e, quando $m \geq 0$, não pode ocorrer $\alpha(V,m) = 0$. Assim, pelo Teorema 2.3.1, o problema (2.0.1) possui ao menos um autovalor principal.

Reciprocamente, se o problema (2.0.1) possui ao menos um autovalor principal, nos casos (i) e (ii) do Teorema 2.3.1, temos garantida a limitação inferior de E_V em M^+. No caso do item (iii), apesar de o ínfimo não ser atingido, ele é finito, garantindo, assim, a limitação inferior de E_V em M^+.

■

Nas próximas duas seções, buscaremos existência de um primeiro autovalor não-principal para o problema (2.0.1), quando $\alpha(V,m) \geq 0$. Para tal, será necessário dividir essa busca em dois casos, a saber, $\alpha(V,m) > 0$ e $\alpha(V,m) = 0$. Isto se deve ao fato de que, no segundo caso, precisaremos contornar algumas dificuldades relativas à geometria do funcional energia associado ao problema (2.0.1).

Para caracterizarmos este primeiro autovalor não-principal, optamos por uma abordagem amplamente utilizada, a qual garante que tal autovalor é dado pelo valor minimax obtido via Teorema do Passo da Montanha, para variedades C^1, aplicado a uma família de caminhos dependendo de $\lambda_1(V,m)$.

2.4 Existência de Autovalores Não-Principais quando $\alpha(V,m) > 0$

Primeiramente, fixemos $\varphi_1 \in M^+$ como sendo a autofunção positiva associada a $\lambda_1(V,m)$ e $\varphi_{-1} \in M^-$ como sendo a autofunção positiva associada a $\lambda_{-1}(V,m)$, as quais existem pelo Teorema 2.3.1.

Nosso objetivo, nesta seção, é demonstrar que o seguinte valor minimax

$$\lambda_2(V,m) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} E_V(\gamma(t)), \tag{2.4.1}$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], M^+); \gamma(0) = -\varphi_1 \text{ e } \gamma(1) = \varphi_1\}$, é o primeiro autovalor não-principal para o problema (2.0.1). Ressaltamos que $\lambda_2(V,m) > -\infty$ pois, pelo Teorema 2.3.2 E_V é limitado inferiormente em M^+.

Inicialmente, faremos a prova de um lema que irá auxiliar na verificação de que $\tilde{E}_V = \big|_{M^+}$ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS).

Lema 2.4.1. Suponhamos que $\alpha(V,m) > 0$ e que V, m satisfaçam (2.1.1). Se $V_n \rightharpoonup V$ e $m_n \rightharpoonup m$ em $L^r(\Omega)$, e $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma sequência tal que $(E_{V_n}(u_n)) \subset \mathbb{R}$ e $\left(\int_\Omega m_n|u_n|^p dx\right) \subset \mathbb{R}$ sejam limitadas, então (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Suponhamos (u_n) ilimitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Definindo $v_n = \dfrac{u_n}{||u_n||}$, temos que $(v_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada. Pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, passando a uma subsequência, se necessário, existe $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v_n \to v_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$. Desta última convergência, a menos da passagem a subsequência, pelos Teoremas B.3, B.4 e H.4, $|v_n|^p \to |v_0|^p$ em $L^{r'}(\Omega)$. Observamos, ainda, que por $m_n \rightharpoonup m$ em $L^r(\Omega)$, $(m_n) \subset L^r(\Omega)$ é limitada e, consequentemente, $(m_n - m) \subset L^r(\Omega)$ também o é. Assim, pela Desigualdade de

Hölder,

$$\left|\int_\Omega m_n(|v_n|^p - |v_0|^p)dx\right| \leq ||m_n||_r|||v_n|^p - |v_0|^p||_{r'} \to 0 \tag{2.4.2}$$

Além disso, pela definição de convergência fraca e por $T : L^r(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por $T(u) = \int_\Omega u|v_0|^p dx$, para toda $u \in L^r(\Omega)$, ser um funcional linear, $T(m_n) \to T(m)$. Equivalentemente, $\int_\Omega m_n|v_0|^p dx \to \int_\Omega m|v_0|^p dx$. Por isso e por (2.4.2),

$$\left|\int_\Omega [m_n|v_n|^p dx - \int_\Omega m|v_0|^p]dx\right| \leq \left|\int_\Omega m_n(|v_n|^p - |v_0|^p)dx\right| + \left|\int_\Omega (m_n - m)|v_0|^p dx\right| \to 0.$$

Portanto, $\int_\Omega m_n|v_n|^p dx \to \int_\Omega m|v_0|^p dx$. Por outro lado, devido a $(u_n) \subset M^+$ ser ilimitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\int_\Omega m_n|v_n|^p dx = \frac{1}{||u_n||^p}\int_\Omega m_n|u_n|^p dx \to 0$. Por conseguinte, $\int_\Omega m|v_0|^p dx = 0$.

Da mesma forma, por (u_n) ser ilimitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} E_{V_n}(v_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{E_{V_n}(u_n)}{||u_n||^p} = 0. \tag{2.4.3}$$

Ainda, visto que $1 = ||v_n||^p = \int_\Omega |\nabla v_n|^p dx$, para todo $n \in \mathbb{N}$, repetindo os argumentos utilizados para (m_n),

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega V_n|v_n|^p dx = \int_\Omega V|v_0|^p dx. \tag{2.4.4}$$

Das equações (2.4.3) e (2.4.4),

$$\begin{aligned} 1 + \int_\Omega V|v_0|^p dx &= 1 + \lim \int_\Omega V_n|v_n|^p dx \\ &= \lim \left(\int_\Omega |\nabla v_n|^p dx + \int_\Omega V_n|v_n|^p dx \right) = \lim E_{V_n}(v_n) = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\int_\Omega V|v_0|^p dx = -1$. Isto nos garante que $v_0 \not\equiv 0$ em Ω, ou seja, $||v_0||_p > 0$, donde podemos considerar $\frac{v_0}{||v_0||_p} \in \mathcal{B}$. Vale ressaltar que, pelo Teorema A.2, $v_n \to v_0$ em

$L^p(\Omega)$. Além disso, $E_V\left(\frac{v_0}{||v_0||_p}\right) \leq \frac{1}{||v_0||_p^p} \liminf E_{V_n}(v_n) = 0$. Por isso e por $\frac{v_0}{||v_0||_p} \in \mathcal{B}$, $\alpha(V,m) \leq E_V\left(\frac{v_0}{||v_0||_p}\right) \leq 0$, o que é uma contradição, já que $\alpha(V,m) > 0$. Logo, (u_n) é limitada.

■

Proposição 2.4.1. Se $\alpha(V,m) > 0$, então o funcional $\tilde{E}_V$ satisfaz a condição (PS).

Demonstração: Seja $(u_n) \subset M^+$ uma sequência (PS) para $\tilde{E}_V$, isto é, existe $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}$, com $\varepsilon_n \to 0$, que satisfaz:

$(PS1)$ $E_V(u_n) \to c$;

$(PS2)$ $\left|\int\limits_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\xi dx + \int\limits_\Omega V|u_n|^{p-2}u_n\xi dx\right| \leq \varepsilon_n||\xi||$, $\forall\ \xi \in T_{u_n}M^+$.

Para $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, seja sua projeção em $T_{u_n}M^+$, dada por

$$w = v - \left(\int\limits_\Omega m|u_n|^{p-2}u_n v dx\right) u_n. \tag{2.4.5}$$

Substituindo ξ por w em $(PS2)$, obtemos .

$$\left|E_V'(u_n)(v) - \left(\int\limits_\Omega m|u_n|^{p-2}u_n v dx\right) E_V(u_n)\right| \leq \varepsilon_n \left\|v - \left(\int\limits_\Omega m|u_n|^{p-2}u_n v dx\right) u_n\right\|, \tag{2.4.6}$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Afirmação: (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, se $m > 0$ q.t.p. em Ω, então, pelo Lema 2.1.1, existem $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$||u_n||^p \leq C_1 E_V(u_n) + C_2 \int\limits_\Omega m|u_n|^p dx = C_1 E_V(u_n) + C_2, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Disso e de $(PS1)$, segue que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Caso não ocorra $m > 0$ q.t.p. em Ω, aplicamos o Lema 2.4.1 com as sequências (V_n) e (m_n), onde $V_n = V, m_n = m$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por $(u_n) \subset M^+$ e por $(PS1)$, $(E_V(u_n)) \subset \mathbb{R}$ e $\left(\int\limits_\Omega m|u_n|^p dx\right) \subset \mathbb{R}$ são limitadas. Logo, pelo Lema 2.4.1, (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Por isso, a menos da passagem a uma subsequência, pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u_n \to u_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$.

Agora, tomando $v = u_n - u_0$ na equação (2.4.6) e repetindo argumentos similares aos da demonstração da Proposição 2.3.2, vemos que

$$E_V'(u_n)(u_n - u_0) \to 0 \text{ em } \mathbb{R}, \text{ quando } n \to \infty.$$

Finalmente, pela propriedade S^+ do p-laplaciano, Teorema C.8, $u_n \to u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, $\tilde{E}_V$ satisfaz a condição (PS).

■

O resultado a seguir é válido quando consideramos o conceito de *arc*-conexidade, mas, à luz do Teorema , provaremos o resultado abaixo resultado utilizando o conceito de conexidade por caminhos. A demonstração considerando *arc*-conexidade pode ser encontrada, por exemplo, em Arias et. al (2002).

Lema 2.4.2. Sejam E um espaço de Banach, $g \in C^1(E, \mathbb{R})$, $M = \{u \in E; g(u) = 1\}$, $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $\tilde{f} = \big|_M$. Suponhamos que $\tilde{f}$ é limitada inferiormente em M e que $\tilde{f}$ satisfaça a condição (PS) em M. Para cada $r \in \mathbb{R}$, defina $\mathcal{O} = \{u \in M; \tilde{f}(u) < r\}$. Então, toda componente conexa por caminhos não vazia, $\mathcal{O}_1$, de $\mathcal{O}$, contém um ponto crítico de $\tilde{f}$.

Demonstração: Consideremos $d = \inf\{\tilde{f}(u); u \in \overline{\mathcal{O}}_1\}$. Tal ínfimo existe, pois $\overline{\mathcal{O}}_1 \subset M$ e $\tilde{f}$ é limitada inferiormente em M. Afirmamos que tal ínfimo é atingido em alguma função $u_0 \in \overline{\mathcal{O}}_1$. Para tal, seja $(u_k) \subset \overline{\mathcal{O}}_1$ uma sequência minimizante para d, ou seja, $\tilde{f}(u_k) \to d$, com $\tilde{f}(u_k) > d$. Desta forma, podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland - Forma Forte a $\tilde{f}$ em $\overline{\mathcal{O}}_1$, donde obtemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, fixado, existe $v_k \in \overline{\mathcal{O}}_1$, de modo que

(C1) $\tilde{f}(v_k) \leq \tilde{f}(u_k)$;

(C2) $||v_k - u_k||_E \leq \dfrac{1}{k}$;

(C3) $\tilde{f}(v_k) \leq \tilde{f}(u) + \dfrac{1}{k}||u - v_k||_E$, para toda $u \in \overline{\mathcal{O}}_1$.

Afirmação 1: $||\tilde{f}'(v_k)||_* \to 0$, quando $k \to \infty$.
Com efeito, para cada $k \in \mathbb{N}$, fixado, tomemos $w_k \in T_{v_k}M$ e consideremos o caminho de classe C^1, $\gamma_k : (-\eta, \eta) \to M$, tal que $\gamma_k(0) = v_k$ e $\gamma_k'(0) = w$. A existência de tal caminho é garantida em Zeidler (1985).

Agora, se $v_k \notin \mathcal{O}_1$, para todo k suficientemente grande, então $v_k \in \partial\mathcal{O}_1$. Consequentemente, todo aberto contendo v_k possui tanto pontos de $\mathcal{O}_1$, quanto pontos de $\mathcal{O} - \mathcal{O}_1$. Desta forma, todo aberto contendo v_k possui pontos de ao menos duas componentes conexas por caminhos distintas de $\mathcal{O}$, caso existam. Portanto, se $\mathcal{O}_1 \neq \mathcal{O}$, chegamos a um absurdo com a definição topológica de componentes conexas por caminho. Com isso, devemos ter $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}$ e, por conseguinte, $v_k \in \partial\mathcal{O}$. Assim, $v_k \notin \mathcal{O}$, donde $\tilde{f}(v_k) \geq r$. Mas, $d \leq \tilde{f}(u)$, para toda $u \in \overline{\mathcal{O}}_1$. Em particular, $d \leq \tilde{f}(u)$, para toda $u \in \mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}$, donde $\tilde{f}(u) < r$, para toda $u \in \mathcal{O}_1$. Por conseguinte, $d < r$. Por isso, por (C1) e pela definição de ínfimo, $\tilde{f}(v_k) \leq \tilde{f}(u_k) \leq d + \frac{1}{2k^2} < r$, para todo k suficientemente grande, o que nos leva a um absurdo. Portanto, $v_k \in \mathcal{O}_1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora, fazendo $t \to 0$, temos que $\gamma_k(t) \to v_k$, donde, para todo t suficientemente próximo de zero, por $\mathcal{O}_1$ ser aberto em $\mathcal{O}$, $\gamma_k(t) \in \mathcal{O}_1$. Pondo $u = \gamma_k(t)$ em (C3), $\tilde{f}(v_k) - \tilde{f}(\gamma_k(t)) \leq \frac{1}{k}||\gamma_k(t) - v_k||_E$, para todo t suficientemente próximo de zero. Deste modo, para $t > 0$, suficientemente próximo de zero,

$$\frac{\tilde{f}(v_k) - \tilde{f}(\gamma_k(t))}{t} \leq \frac{1}{k}\left\|\frac{\gamma_k(t) - v_k}{t}\right\|_E \overset{t\to 0^+}{\Rightarrow} -\tilde{f}'(v_k)(w_k) \leq \frac{1}{k}||w_k||_E, \tag{2.4.7}$$

e, consequentemente,

$$\tilde{f}'(v_k)\left(\frac{-w_k}{||-w_k||_E}\right) \leq \frac{1}{k} \Leftrightarrow ||\tilde{f}'(v_k)||_* \leq \frac{1}{k}. \tag{2.4.8}$$

Como $w_k \in T_{v_k}M^+$ é qualquer, ao fazermos $k \to \infty$, concluímos que $||\tilde{f}'(v_k)||_* \to 0$.

Afirmação 3: A sequência $(\tilde{f}(v_k))$ é limitada em $\mathbb{R}$.

De fato, como $\tilde{f}(u_k) \to d$, $(\tilde{f}(u_k)) \subset \mathbb{R}$ é limitada. Logo, de (C1), vem que $(\tilde{f}(v_k)) \subset \mathbb{R}$ é limitada, provando a validade da afirmação.

Das Afirmações 1 e 2, decorre que (v_k) é uma sequência (PS) para $\tilde{f}$ em $\overline{\mathcal{O}}_1$. Então, por $\tilde{f}$ satisfazer a condição (PS) em M, temos que, a menos de subsequência, $v_k \to v_0$ em E.

Ainda, por (C2), temos, para todo k suficientemente grande,

$$||u_k - v_0||_E \leq ||u_k - v_k||_E + ||v_k - v_0||_E \leq \frac{2}{k}.$$

Por isso, fazendo $k \to \infty$, $u_k \to v_0$ em E. Disso e da continuidade de $\tilde{f}$, $\tilde{f}(u_k) \to \tilde{f}(v_0)$. Portanto, da unicidade do limite, $\tilde{f}(v_0) = d$, mostrando que d é atingido.

Considerando, agora, $v_0 = u_0$, temos que $\tilde{f}(u_0) = d < r$ pois, se $\tilde{f}(u_0) = d = r$, então, $\tilde{f}(u) \geq r$, para toda $u \in \mathcal{O}_1$, o que é um absurdo com o fato de $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$. Por conseguinte,

$u_0 \in \mathcal{O}$. Além disso, $u_0 \in \mathcal{O}_1$, pois $\mathcal{O}$ é localmente conexo por caminhos.

Logo, como $\tilde{f}(u_0) = d = \min\{\tilde{f}(u); u \in \overline{\mathcal{O}_1}\}$ e $u_0 \in \mathcal{O}_1$, u_0 é um ponto crítico de $\tilde{f}$ que está em $\mathcal{O}_1$.

■

O próximo lema será essencial para a construção do primeiro autovalor não-principal de (2.0.1), tanto neste caso quanto no caso singular. O mesmo nos fornecerá uma maneira de construir caminhos entre duas funções em M^+, de modo que a imagem desses caminhos, via o funcional E_V, permaneça abaixo de um determinado nível $c \in \mathbb{R}$.

Lema 2.4.3. Se $\alpha(V, m) > 0$, então o conjunto $\mathcal{O} = \{u \in M^+; u \geq 0 \text{ e } E_V(u) < d\}$ é conexo por caminhos, para cada $d \in \mathbb{R}$. O mesmo vale para $u \leq 0$.

Demonstração: Dado $d \in \mathbb{R}$, seja $\widehat{\mathcal{O}} = \{u \in M^+; E_V(u) < d\}$. Ora, $\mathcal{O} \subset \widehat{\mathcal{O}}$, por definição, e $\widehat{\mathcal{O}} = \emptyset$ se $d \leq \lambda_1(V, m)$, pois $\lambda_1(V, m) = \inf\limits_{u \in M^+} E_V(u)$, donde não existe $u \in M^+$ tal que $E_V(u) < \lambda_1(V, m)$. Assim, podemos assumir que $d > \lambda_1(V, m)$.

Afirmação 1: φ_1 é o único ponto crítico de E_V em $\mathcal{O}$.

Primeiramente, observamos que $E_V(\varphi_1) = \lambda_1(V, m) < d$, o que implica em $\varphi_1 \in \mathcal{O}$. Suponhamos que exista $u_0 \in \mathcal{O}$, com $u_0 \neq \varphi_1$, que seja ponto crítico de E_V. Deste modo, temos

(i) $E_V'(u_0)(v) = \int\limits_{\Omega} [|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla v + V|u_0|^{p-2} u_0 v] dx = 0;$

(ii) $E_V(u_0) = \int\limits_{\Omega} [|\nabla u_0|^p + V|u_0|^p] dx < d;$

(iii) $\int\limits_{\Omega} m|u_0|^p dx = 1.$

Pelo item (iii), $u_0 \not\equiv 0$ e, juntamente com o item (i), concluímos que $(u_0, 0) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ é solução fraca para o problema (2.0.1). Tomando, se necessário, $|u_0|$ e aplicando a Desigualdade de Harnack, vemos que 0 é autovalor principal para (2.0.1). Agora, $0 \neq \lambda_{-1}(V, m)$, pois, caso contrário, u_0 seria múltiplo de φ_{-1}, digamos $u_0 = c\varphi_{-1}$, com $c \neq 0$. Disso,

$$1 = \int\limits_{\Omega} m|u_0|^p dx = \int\limits_{\Omega} m|c\varphi_{-1}|^p dx = -|c|^p,$$

o que levaria a um absurdo com o item (iii). Por outro lado, se $\lambda_1(V, m) = 0$, então u_0 seria autofunção associada a $\lambda_1(V, m)$ e, consequentemente, $u_0 = c\varphi_1$, para algum $c \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Mas,
$$1 = \int_\Omega m|u_0|^p dx = \int_\Omega m|c\varphi_1|^p dx = c^p \int_\Omega m|\varphi_1|^p dx = c^p \;\Rightarrow\; u_0 = \varphi_1,$$

o que é um absurdo. Portanto, 0 é um autovalor principal de (2.0.1) distinto de $\lambda_1(V,m)$ e $\lambda_{-1}(V,m)$, o que contraria o Teorema 2.3.1. Logo, é válida a Afirmação 1.

Como consequência da Afirmação 1, φ_1 é o único ponto crítico de E_V em $\widehat{\mathcal{O}}$ e, por conseguinte, de $\tilde{E}_V$.

Afirmação 2: $\widehat{\mathcal{O}}$ é conexo por caminhos.

Com efeito, por M^+ ser localmente conexo por caminhos e $\widehat{\mathcal{O}} \subset M^+$ ser aberto, $\widehat{\mathcal{O}}$ é localmente conexo por caminhos. Desta forma, para $\varphi_1 \in \widehat{\mathcal{O}}$, existe $V \subset \widehat{\mathcal{O}}$ aberto, de modo que $\varphi_1 \in V$ e V seja conexo por caminhos. Isto nos garante que uma dentre as seguintes opções é verificada:

(a) V é uma componente conexa por caminhos de $\widehat{\mathcal{O}}$, ou

(b) $V \subset U$, onde U é uma componente conexa por caminhos de $\widehat{\mathcal{O}}$.

Suponhamos que ocorra (b). Se $U = \widehat{\mathcal{O}}$, não há o que demonstrar. Por outro lado, se $U \subsetneq \widehat{\mathcal{O}}$, existe $y \in \widehat{\mathcal{O}} - U$. Por $\widehat{\mathcal{O}}$ ser localmente conexo por caminhos, existe $W \subset \widehat{\mathcal{O}}$ aberto, de modo que $y \in W$ e W seja conexo por caminhos. Como $y \notin U$, $U \cap W = \emptyset$, donde $W \subset \widehat{\mathcal{O}} - U$.

Novamente, ocorre uma dentre as seguintes opções:

(c) W é uma componente conexa por caminhos de $\widehat{\mathcal{O}}$, ou

(d) $W \subset U_1$, onde U_1 é uma componente conexa por caminhos de $\widehat{\mathcal{O}}$.

Pelo Lema 2.4.2, existe um ponto crítico de $\tilde{E}_V$ em W (respectivamente, em U_1), o que contraria o fato de φ_1 ser o único ponto crítico de $\tilde{E}_V$ em $\widehat{\mathcal{O}}$. Portanto, $\widehat{\mathcal{O}}$ é sua única componente conexa por caminhos, ou seja, $\widehat{\mathcal{O}}$ é conexo por caminhos. Se ocorrer a opção (a), a demonstração segue de maneira análoga. Logo, a Afirmação 2 é válida.

Finalmente, se $u_1, u_2 \in \mathcal{O} \subset \widehat{\mathcal{O}}$, pela Afirmação 2, existe um caminho em M^+, γ_1, indo de u_1 para u_2. Considerando $\gamma_2 = |\gamma_1|$, γ_2 é um caminho em M^+ que vai de u_1 para u_2, de modo que $\gamma_2(t) \geq 0$ e $E_V(\gamma_2(t)) < d$, para todo $t \in [0,1]$. Portanto, $\mathcal{O}$ é conexo por caminhos.

■

Observação 2.4.1. Como consequência do lema acima, temos:

1) Para qualquer $u \in M^+$, $u \geq 0$ em Ω e $E_V(u) < d$, para algum $d \in \mathbb{R}$, existe um caminho $\gamma : [0,1] \to M^+$, indo de u para φ_1, de modo que $\gamma(t) \geq 0$ e $E_V(\gamma(t)) < d$, para todo $t \in [0,1]$.

2) Para qualquer $u \in M^+$, $u \leq 0$ em Ω e $E_V(u) < d$, para algum $d \in \mathbb{R}$, existe um caminho $\tilde{\gamma} : [0,1] \to M^+$, em M^+, indo de u para $-\varphi_1$, de modo que $\tilde{\gamma}(t) \geq 0$ e $E_V(\tilde{\gamma}(t)) < d$, para todo $t \in [0,1]$.

O próximo teorema é o principal resultado desta seção. Nele garantimos que o valor minimax $\lambda_2(V,m)$ é o primeiro autovalor não-principal do problema (2.0.1).

Teorema 2.4.1. O número real $\lambda_2(V,m)$ é o primeiro autovalor não-principal de (2.0.1), no sentido de que não exista nenhum outro autovalor para (2.0.1) no intervalo $(\lambda_1(V,m), \lambda_2(V,m))$.

Demonstração: Vamos começar demonstrando que $\lambda_2(V,m)$ é autovalor de (2.0.1). Nosso objetivo será aplicarmos o Teorema do Passo da Montanha para variedades de classe C^1. Para tanto, demonstraremos alguns fatos necessários à aplicação de tal teorema.

Afirmação 1: $\varphi_1, -\varphi_1$ são pontos mínimos locais estritos de $\tilde{E}_V$.

Vamos provar tal afirmação para φ_1. A prova para $-\varphi_1$ é análoga. Suponhamos, por absurdo, que exista uma sequência $(u_n) \subset M^+$, com $u_n \neq \varphi_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $u_n \to \varphi_1$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\tilde{E}_V(u_n) \leq \tilde{E}_V(\varphi_1) = E_V(\varphi_1) = \lambda_1(V,m)$ ($\bigstar$). Por isso e por $(u_n) \subset M^+$, $\tilde{E}_V(u_n) = E_V(u_n) = \lambda_1(V,m)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Disso e do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, cada função u_n é uma autofunção associada a $\lambda_1(V,m)$. Por $\lambda_1(V,m)$ ser simples, existem constantes $c_n \in \mathbb{R}$, com $c_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que $u_n = c_n\varphi_1$.

Ainda,

$$1 = \int\limits_\Omega m|u_n|^p dx = \int\limits_\Omega m|c_n\varphi_1|^p dx = |c_n|^p \int\limits_\Omega m|\varphi_1|^p dx = |c_n|^p \;\Rightarrow\; c_n = \pm 1.$$

Deste modo, a sequência $(u_n) \subset M^+$ apresentará uma das seguintes formas:

(A) $(u_n) = (\varphi_1, \varphi_1, ..., \varphi_1, ...)$;

(B) $(u_n) = (-\varphi_1, -\varphi_1, ..., -\varphi_1, ...)$, ou

(C) $(u_n) = (\varphi_1, -\varphi_1, \varphi_1 ..., -\varphi_1, ...)$.

No caso (A), obtemos um absurdo com o fato de $u_n \neq \varphi_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, no caso (B) chegamos a um absurdo com o fato de $u_n \to \varphi_1$ e, no caso (C), se $u_n \to \varphi_1$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_n = \varphi_1$, para todo $n > n_0$, contrariando o fato de $u_n \neq \varphi_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, se $u_n \nrightarrow \varphi_1$, novamente, temos um absurdo. Logo, verifica-se a validade da Afirmação 1.

Agora, por φ_1 ser ponto de mínimo local estrito de $\tilde{E}_V$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $u \in M^+, u \neq \varphi_1, ||u - \varphi_1|| < \varepsilon_0$, implica em $\tilde{E}_V(\varphi_1) < \tilde{E}_V(u)$ **(I)**.

Afirmação 2: Para todo $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, temos

$$\lambda_1(V,m) < \inf\{E_V(u); u \in M^+ \cap \partial B(\varphi_1, \varepsilon)\} \tag{2.4.9}$$

e

$$\lambda_1(V,m) < \inf\{E_V(u); u \in M^+ \cap \partial B(-\varphi_1, \varepsilon)\}. \qquad (2.4.10)$$

Demonstraremos esta afirmação para φ_1, o caso com $-\varphi_1$ segue de maneira análoga. Suponhamos que (2.4.9) não ocorra, ou seja, existem $\varepsilon_1 > 0$, com $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ e $(u_k) \subset M^+$, de modo que $||u_k - \varphi_1|| = \varepsilon_1$ **(II)** e $\tilde{E}_V(u_k) \leq \tilde{E}_V(\varphi_1) + \frac{1}{2k^2}$ **(III)**, para todo $k \in \mathbb{N}$.

No que segue, construiremos uma função que contrarie o fato de φ_1 ser mínimo local estrito de $\tilde{E}_V$. Para tanto, produziremos uma sequência (PS) adequada.

Para cada $\delta > 0$, com $0 < \varepsilon_1 - \delta$ e $\varepsilon_1 + \delta < \varepsilon_0$ **(IV)**, devido a $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, podemos considerar o conjunto $C_\delta = \{u \in M^+; \varepsilon_1 - \delta \leq ||u - \varphi_1|| \leq \varepsilon_1 + \delta\}$. Da definição de C_δ, de (I) e de (IV), vem que $\tilde{E}_V(\varphi_1) \leq \inf\{\tilde{E}_V(u); u \in C_\delta\}$. Também, por (II), $(u_k) \subset C_\delta$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2k_0^2} < \frac{1}{k}$. Por isso, por $(u_k) \subset C_\delta$ e por (III),

$$\tilde{E}_V(\varphi_1) \leq \tilde{E}_V(u_{k_0}) \leq \tilde{E}_V(\varphi_1) + \frac{1}{k_0^2} < \tilde{E}_V(\varphi_1) + \frac{1}{k}.$$

Consequentemente, $\tilde{E}_V(\varphi_1) = \inf\{\tilde{E}_V(u); u \in C_\delta\}$ **(V)** e, por (III), $\tilde{E}_V(u_k) \leq \inf\limits_{u \in C_\delta} \tilde{E}_V(u) + \dfrac{1}{2n^2}$

Agora, como E_V é de classe C^1 em $W_0^{1,p}(\Omega)$, E_V é de classe C^1 em M^+, ou seja $\tilde{E}_V$ é de classe C^1. Desta forma, $\tilde{E}_V$ é semicontínuo inferiormente. Ainda, $\tilde{E}_V$ é limitado inferiormente em M^+, pois $\tilde{E}_V(\varphi_1) = \tilde{E}_V(\varphi_1) = \min\limits_{u \in M^+} E_V(u)$. Deste modo, como $C_\delta \subset M^+$ é fechado, estamos aptos a aplicar o Princípio Variacional de Ekeland - Forma Forte, Teorema C.5, ao funcional $\tilde{E}_V$ sobre C_δ. Por conseguinte, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $v_k \in C_\delta$ tal que

(C1) $\tilde{E}_V(v_k) \leq \tilde{E}_V(u_k)$;

(C2) $||v_k - u_k|| \leq \dfrac{1}{k}$;

(C3) $\tilde{E}_V(v_k) \leq \tilde{E}_V(u) + \dfrac{1}{k}||u - v_k||$, $\forall\, u \in C_\delta$.

No que segue, mostraremos que (v_k) é uma sequência (PS) para $\tilde{E}_V$.

A condição $(PS1)$ é garantida por (C1) e (III). Verifiquemos a validade de $(PS2)$. Para tal, sejam $k \in \mathbb{N}$ fixado, de modo que $\frac{1}{k} < \delta$, $w \in T_{v_k}M^+$ e $\gamma : (-\eta, \eta) \to M^+$ o caminho de classe C^1, com $\gamma(0) = v_k$ e $\gamma'(0) = w$.

Ao fazermos $t \to 0$, temos $||\gamma(t) - \varphi_1|| \to ||v_k - \varphi_1||$ **(VI)**. Também, por (C2),

$$||v_k - \varphi_1|| \leq ||v_k - u_k|| + ||u_k - \varphi_1|| \leq \frac{1}{k} + \varepsilon_1 < \delta + \varepsilon_1$$

e

$$\varepsilon_1 - \delta < \varepsilon_1 - \frac{1}{k} \leq \varepsilon_1 - ||v_k - u_k|| \leq |\varepsilon_1 - ||v_k - u_k||| = |||u_k - \varphi_1|| - ||v_k - u_k||| \leq ||v_k - \varphi_1||.$$

Portanto,

$$\varepsilon_1 - \delta \leq ||v_k - \varphi_1|| \leq \varepsilon_1 + \delta \;\Leftrightarrow\; \varepsilon_1 - \delta \leq \lim_{t\to 0} ||\gamma(t) - \varphi_1|| \leq \varepsilon_1 + \delta. \qquad (2.4.11)$$

Disso e de (VI), $\gamma(t) \in C$, para todo $t \in (-\eta_1, \eta_1)$, onde $\eta_1 \leq \eta$. Assim, tomando $u = \gamma(t)$ em (C3) e $t \in (0, \eta_1)$, obtemos

$$\frac{\tilde{E}_V(v_k) - \tilde{E}_V(\gamma(t))}{t} \leq \frac{1}{k}\left\|\frac{\gamma(t) - v_k}{t}\right\|.$$

Lembrando que $\gamma(0) = v_k$ e $\gamma'(0) = w$, ao fazermos $t \to 0$, concluímos que

$$-\tilde{E}'_V(v_k)(w) \leq \frac{1}{k}||w|| \;\Leftrightarrow\; \tilde{E}'_V(v_k)\left(\frac{-w}{||-w||}\right) \leq \frac{1}{k} \;\Leftrightarrow\; 0 \leq ||\tilde{E}'_V(v_k)||_* \leq \frac{1}{k}.$$

Com isso, $||\tilde{E}'_V(v_k)||_* \to 0$, quando $k \to \infty$. Logo, $(PS2)$ é válida. E, assim, (v_k) é uma sequência (PS). Por isso e por $\tilde{E}_V$ satisfazer a condição (PS), existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de considerarmos uma subsequência, $v_k \to v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ **(VIII)**.

Observamos, ainda, que

• de (VII) e (VIII), $\varepsilon_1 - \delta \leq ||v - \varphi_1|| \leq \varepsilon_1 + \delta$ **(IX)**, donde $v \in C_\delta$;

• $\varepsilon_1 = ||u_k - \varphi_1|| \leq ||u_k - v_k|| + ||v_k - \varphi_1|| \leq \frac{1}{k} + ||v_k - \varphi_1|| \leq \frac{1}{k} + \varepsilon_1$. Isto implica em $\varepsilon_1 \leq \frac{1}{k}||v_k - \varphi_1|| \leq \frac{1}{k} + \varepsilon_1$. E quando $k \to \infty$, $||v - \varphi_1|| = \varepsilon_1$;

• por $v \in C_\delta$ e por (V), $\tilde{E}_V(\varphi_1) \leq \tilde{E}_V(v)$. Por isso, por (C1) e (III), $\tilde{E}_V(v_k) \leq \tilde{E}_V(\varphi_1) + \frac{1}{2k^2}$. Assim, da continuidade de $\tilde{E}_V$, fazendo $k \to \infty$, $\tilde{E}_V(v) \leq \tilde{E}_V(\varphi_1)$.

Deste modo, $\tilde{E}_V(\varphi_1) = \tilde{E}_V(v)$. Mas isto é um absurdo com (I). Logo, é válida a Afirmação 2.

Afirmação 3: $\lambda_2(V, m) > \lambda_1(V, m)$.

Com efeito, mostraremos que, para algum $\varepsilon > 0$, a ser definido,

$$A_1 = \{\max_{t\in[0,1]} E_V(\gamma(t)); \gamma \in \Gamma\} \subset \{E_V(u); u \in M^+ \cap \partial B(\varphi_1, \varepsilon)\} = A_2.$$

Como γ é contínuo e $[0,1]$ é compacto, existe $t_0 \in [0,1]$, tal que $\max\limits_{t\in[0,1]} E_V(\gamma(t)) = E_V(\gamma(t_0))$. Pela definição de Γ, $\gamma(t) \in M^+$, para todo $t \in [0,1]$. Em particular, $\gamma(t_0) \in M^+$.

Agora, afirmamos que não ocorre $\gamma(t_0) = \varphi_1$. Suponhamos que $\gamma(t_0) = \varphi_1$. Então, $E_V(\gamma(t_0)) = \lambda_1(V,m) = \inf\limits_{u\in M^+} E_V(u)$ e $E_V(\gamma(t_0)) = \max\limits_{t\in[0,1]} E_V(\gamma(t))$. Assim, $\lambda_1(V,m) = E_V(\gamma(t))$, para todo $t \in [0,1]$, e, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, $\gamma(t)$ é autofunção associada a $\lambda_1(V,m)$, para todo $t \in [0,1]$. Por $\lambda_1(V,m)$ ser simples, existem constantes $c_t \in \mathbb{R}$, não nulas, de modo que $\gamma(t) = c_t\varphi_1$, para todo $t \in [0,1]$. Disso, para cada $t \in [0,1]$, temos

$$1 = \int\limits_\Omega m|\gamma(t)|^p dx = |c_t|^p \int\limits_\Omega m|\varphi_1|^p dx = |c_t|^p \ \Rightarrow \ c_t = 1 \ \text{ ou } \ c_t = -1.$$

Como o caminho γ é contínuo, devemos ter $\gamma(t) = \varphi_1$ ou $\gamma(t) = -\varphi_1$, para todo $t \in [0,1]$, o que contraria o fato de $\gamma \in \Gamma$. Desta forma, $\gamma(t_0) \neq \varphi_1$ e podemos considerar $B(\varphi_1, \varepsilon)$, com $\varepsilon = ||\varphi_1 - \gamma(t_0)|| > 0$. Disso, $\gamma(t_0) \in \partial B(\varphi_1,\varepsilon)$. Consequentemente, $E_V(\gamma(t_0)) \in A_2$.

De maneira análoga, podemos provar que

$$A_1 = \{\max_{t\in[0,1]} E_V(\gamma(t)); \gamma \in \Gamma\} \subset \{E_V(u); u \in M^+ \cap \partial B(-\varphi_1,\varepsilon)\} = A_2.$$

Logo, $\inf A_2 \leq \inf A_1$. Finalmente, pela Afirmação 2, ao tormarmos $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\lambda_1(V,m) < \inf A_2 \leq \inf A_1 = \lambda_2(V,m)$, como queríamos.

Pela Afirmação 3 e por E_V ser par,

$$\lambda_2(V,m) > \lambda_1(V,m) = E_V(\varphi_1) = E_V(-\varphi_1) \ \Rightarrow \ \lambda_2(V,m) > \max\{E_V(\varphi_1), E_V(-\varphi_1)\}.$$

Por isso e pelo Teorema C.4, $\lambda_2(V,m)$ é valor crítico de $\tilde{E}_V$, donde existe $u \in M^+$ tal que $E_V(u) = \tilde{E}_V(u) = \lambda_2(V,m)$. Concluímos, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, que $\lambda_2(V,m)$ é autovalor de (2.0.1).

Agora, se $\lambda_2(V,m)$ fosse principal, existiria $\overline{\varphi} \in M^+$ autofunção associada a $\lambda_2(V,m)$ tal que $\overline{\varphi} > 0$ em Ω. Disto, podemos aplicar o Lema 2.1.5 tanto vendo $\lambda = \lambda_1(V,m), \beta = \lambda_2(V,m)$, quanto $\lambda = \lambda_2(V,m)$ e $\beta = \lambda_1(V,m)$, dependendo se $\int\limits_\Omega m|\overline{\varphi}|^p \leq 0$ ou ≥ 0, concluindo que $\lambda_1(V,m) = \lambda_2(V,m)$, o que é um absurdo. Portanto, $\lambda_2(V,m)$ não é um autovalor principal para (2.0.1).

Para finalizarmos, vamos provar que não existe nenhum autovalor de (2.0.1) no intervalo $(\lambda_1(V,m), \lambda_2(V,m))$. Suponhamos, por contradição, que $(u,\lambda) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ seja uma solução fraca para (2.0.1) **(F1)** e que $\lambda \in (\lambda_1(V,m), \lambda_2(V,m))$ **(F2)**. Neste caso, u muda de sinal, pois senão λ seria um autovalor principal para (2.0.1), o que é um absurdo.

Afirmamos que $\int\limits_\Omega m|u^\pm|^p dx > 0$. De fato,

(a) se $\int\limits_\Omega m|u^+|^p dx = 0$, então $\frac{u^+}{||u^+||_p} \in \mathcal{B}$, donde

$$\alpha(V,m) \leq E_V\left(\frac{u^+}{||u^+||_p}\right) = \frac{1}{||u^+||_p^p}\int\limits_{\Omega_+^u}[|\nabla u|^p + V|u|^p]dx$$
$$= \frac{\lambda}{||u^+||_p^p}\int\limits_{\Omega_+^u} m|u|^p dx = \lambda\int\limits_\Omega m\left|\frac{u^+}{||u^+||_p}\right|^p dx = 0.$$

Consequentemente, $\alpha(V,m) \leq 0$, o que é um absurdo.

(b) se $\int\limits_\Omega m|u^+|^p dx = c < 0$, então podemos considerar $v = \frac{u^+}{(-c)^{1/p}}$. Segue que, $I_1(v) = -1$, o que implica em $v \in M^-$. Deste fato e de (F1),

$$-\lambda = I_1(v)\lambda = E_V(v) \geq -\lambda_{-1}(V,m) > -\lambda_1(V,m) \;\Rightarrow\; \lambda < \lambda_1(V,m),$$

o que contradiz (F2).

Por (a) e (b), segue que $\int\limits_\Omega m|u^+|^p dx > 0$. Analogamente, podemos mostrar que $\int\limits_\Omega m|u^-|^p dx > 0$. Deste modo, para $t \in [0,1]$,

$$\int\limits_\Omega m|u^+ - tu^-|^p dx \overset{(I)}{=} \int\limits_\Omega m|u^+|^p dx + t^p\int\limits_\Omega m|u^-|^p dx > 0. \tag{2.4.12}$$

Em particular, $\int\limits_\Omega m|u|^p dx = d > 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \in M^+$ pois, caso contrário, bastaria considerarmos $\tilde{u} = \frac{u}{d^{1/p}} \in M^+$ e fazermos a mesma construção que será apresentada no que segue.

Por (2.4.12) podemos definir o seguinte caminho $\gamma_1 : [0,1] \to M^+$, pondo

$$\gamma_1(t) = \frac{u^+ - tu^-}{\left(\int\limits_\Omega m|u^+ - tu^-|^p dx\right)^{1/p}}, \forall\, t \in [0,1].$$

Salientamos que:

(1) $\gamma_1(0) = \dfrac{u^+}{\left(\displaystyle\int_\Omega m|u^+|^p dx\right)^{1/p}}$ e $\gamma_1(1) = u$;

(2) Por (I), temos,

$$E_V(\gamma_1(t)) = \frac{E_V(u^+ - tu^-)}{\displaystyle\int_\Omega m|u^+ - tu^-|^p dx} = \frac{E_V(u^+) + t^p E_V(u^-)}{I_1(u^+) + t^p I_1(u^-)}$$
$$= \lambda\left(\frac{I_1(u^+) + t^p I_1(u^-)}{I_1(u^+) + t^p I_1(u^-)}\right) = \lambda, \forall\, t \in [0,1].$$

De maneira similar, definindo $\gamma_2 : [0,1] \to M^+$, por

$$\gamma_2(t) = \frac{(1-t)u^+ - u^-}{\left(\displaystyle\int_\Omega m|(1-t)u^+ - u^-|^p dx\right)^{1/p}}, \forall\, t \in [0,1],$$

obtemos um caminho que verifica

(3) $\gamma_2(0) = u$ e $\gamma_2(1) = \dfrac{-u^-}{\left(\displaystyle\int_\Omega m|u^-|^p dx\right)^{1/p}}$;

(4) Por (I), repetindo o argumento dado em (2), temos $E_V(\gamma_2(t)) = \lambda$, para todo $t \in [0,1]$.

Agora, observamos que

$$v_1 = \frac{u^+}{\left(\displaystyle\int_\Omega m|u^+|^p dx\right)^{1/p}} \geq 0 \;\text{ e }\; v_2 = \frac{-u^-}{\left(\displaystyle\int_\Omega m|u^-|^p dx\right)^{1/p}} \leq 0.$$

Por isso e pela Observação 2.4.1, existem γ_3, γ_4, caminhos em M^+ tais que, γ_3 liga v_1 a φ_1 e γ_4 liga v_2 a $-\varphi_1$. Além disso, como $E_V(v_1) = \lambda < \lambda_2(V,m)$ e $E_V(v_2) = \lambda < \lambda_2(V,m)$, pela Observação 2.4.1, $E_V(\gamma_3(t)) < \lambda_2(V,m)$ e $E_V(\gamma_4(t)) < \lambda_2(V,m)$, para todo $t \in [0,1]$. Ainda, $\gamma_1 * \gamma_2$ liga v_1 a v_2 e $E_V((\gamma_1 * \gamma_2)(t)) = \lambda < \lambda_2(V,m)$, para todo $t \in [0,1]$. Finalmente, se $\overline{\gamma}_4$ e $\overline{(\gamma_1 * \gamma_2)}$ representam os caminhos reversos de γ_4 e $\gamma_1 * \gamma_2$, respectivamente, então $\tilde{\gamma} = \overline{\gamma}_4 * \overline{(\gamma_1 * \gamma_2)} * \gamma_3$ é tal que $\tilde{\gamma}(t) \in M^+$, para todo $t \in [0,1]$, $\tilde{\gamma}(0) = -\varphi_1$, $\tilde{\gamma}(1) = \varphi_1$ e $E_V(\tilde{\gamma}(t)) < \lambda_2(V,m)$, para todo $t \in [0,1]$. Consequentemente, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ e $\max\limits_{t\in[0,1]} E_V(\tilde{\gamma}(t)) < \lambda_2(V,m)$, o que é um absurdo com (2.4.1). Logo, segue a validade do teorema.

■

O próximo resultado nos diz que é possível "engordar" um pouco a família de caminhos sobre as quais minimizamos o funcional E_V. Ao invés de fixarmos as extremidades dos caminhos em φ_1 e $-\varphi_1$, apenas exigiremos que o caminho comece em uma função não-negativa e termine em uma função não-positiva. Como estaremos considerando uma quantidade maior de caminhos sobre M^+, podemos dizer que, em um certo sentido, o valor $\lambda_2(V,m)$ obtido através desta minimização é uma melhor aproximação do que aquela feita em (2.4.1).

Teorema 2.4.2. Se $\Gamma_0 = \{\gamma \in C([0,1], M^+); \gamma(0) \geq 0, \gamma(1) \leq 0\}$, então

$$\lambda_2(V,m) = \inf_{\gamma\in\Gamma_0} \max_{t\in[0,1]} E_V(\gamma(t)).$$

Demonstração: Suponhamos que exista $\gamma \in \Gamma_0$ tal que $\max\limits_{t\in[0,1]} E_V(\gamma(t)) < \lambda_2(V,m)$. Vamos construir um caminho que contradiz a definição de $\lambda_2(V,m)$ dada em (2.4.1). Para tanto, consideremos o conjunto $A = \{u \in M^+; E_V(u) < \lambda_2(V,m)\}$. Pelo Lema 2.4.2, A possui, no máximo, duas componentes conexas por caminho, pois φ_1 e $-\varphi_1$ são os únicos pontos críticos de $\tilde{E}_V$ em A. De fato, se existir $u_0 \in A$, ponto crítico de $\tilde{E}_V$, com $u_0 \neq \varphi_1$ e $u \neq -\varphi_1$, então (i) $0 = E_V'(u_0)(v) = p\displaystyle\int_\Omega [|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \cdot \nabla v + V|u_0|^{p-2}u_0 v]dx$, para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, $(u_0, 0) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ é uma solução fraca para (2.0.1). Além disso, $E_V(u_0) = 0$; (ii) como $u_0 \in M^+$, $I_1(u_0) = 1$.

Assim, de (ii) e da definição de $\lambda_1(V,m)$, $\lambda_1(V,m) \leq E_V(u_0)$. Se $\lambda_1(V,m) = E_V(u_0)$, então, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrande, u_0 é autofunção associada a $\lambda_1(V,m)$. Por $\lambda_1(V,m)$ ser simples, existe $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, tal que $u_0 = c\varphi_1$. Por (ii) e por $\varphi_1 \in M^+$, concluímos que $c = \pm 1$, donde $u_0 = \varphi_1$ ou $u_0 = -\varphi_1$, o que contradiz nossa suposição. Portanto, $\lambda_1(V,m) < E_V(u_0) = 0$. Ainda, por $u_0 \in A$, $0 = E_V(u_0) < \lambda_2(V,m)$. Consequentemente, 0 é autovalor do problema (2.0.1) e satisfaz $\lambda_1(V,m) < 0 < \lambda_2(V,m)$, o que contradiz o Teorema 2.4.1. Logo, tal função u_0 não existe.

Finalmente, se φ_1 e $-\varphi_1$ estão na mesma componente conexa por caminhos de A, não há o que demonstrar. Caso contrário, como $\gamma(0) \geq 0$, $\gamma(1) \leq 0$, $\varphi_1 > 0$ e $-\varphi_1 < 0$, podemos aplicar a Observação 2.4.1, para obtermos caminhos ligando $\gamma(0)$ a φ_1 e $\gamma(1)$ a $-\varphi_1$, respectivamente, de modo que permaneçam a níveis inferiores a $\lambda_2(V,m)$. Desta forma, obtemos um caminho $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ tal que $\max\limits_{t\in[0,1]} E_V(\tilde{\gamma}(t)) < \lambda_2(V,m)$, produzindo o absurdo desejado.

■

2.5 Existência de Autovalores Não-Principais quando $\alpha(V, m) = 0$

Nesta seção, fixaremos φ_0 como sendo a autofunção positiva, L^p-normalizada, associada a $\lambda_1(V, m)$ e que satisfaz $I_1(\varphi_0) = 0$, quando $\alpha(V, m) = 0$. Além disso, assumiremos, ao longo desta seção, que $|\Omega_-| > 0$.

Obsevamos que, por $I_1(\varphi_0) = 0$, $\varphi_0 \notin M^+$, o que nos impossibilita de aplicar o Teorema do Passo da Montanha minimizando E_V sobre caminhos em M^+ que conectem φ_0 a $-\varphi_0$. Portanto, nossa abordagem seguirá a linha apresentada no último resultado da seção anterior, o qual consiste em minimizar E_V sobre caminhos em M^+ que comecem em uma função não-negativa e terminem em uma função não-positiva e de modo que as mesmas permaneçam a níveis de energia superiores a $\lambda_1(V, m)$.

A necessidade de permanecer a níveis superiores a $\lambda_1(V, m)$ se dá, neste caso, pela geometria que o funcional energia apresenta. Aqui, a condição (PS) falha no nível $\lambda_1(V, m)$, mas conseguimos garantir que E_V satisfaz a condição (PS) em todos os níveis $c \in \mathbb{R}$, com $c > \lambda_1(V, m)$. Tal abordagem foi introduzida por Cuesta et. al (2008).

Para prosseguirmos, consideremos $\lambda_2(V, m)$ como no Teorema 2.4.2. Nosso objetivo será provar que $\lambda_2(V, m)$ é o primeiro autovalor não-principal para (2.0.1), no mesmo sentido mencionado na seção anterior. Para tanto, faremos uso do seguinte valor *minimax*

$$\overline{\lambda}_2(V, m) = \inf_{\gamma \in \Gamma_1} \max_{t \in [0,1]} E_V(\gamma(t)), \tag{2.5.1}$$

onde $\Gamma_1 = \{\gamma \in C([0, 1], M^+); \gamma(0) = u_1 \text{ e } \gamma(1) = -u_1\}$, para qualquer $u_1 \in M^+$, com $u_1 \geq 0$ e $E_V(u_1) < \lambda_2(V, m)$.

Inicialmente, mostraremos que $\lambda_2(V, m) > -\infty$ e $\overline{\lambda}_2(V, m) > -\infty$. Tendo em vista que E_V é limitado inferiormente sobre M^+, resta-nos provar que os conjuntos Γ_0 e Γ_1 são não-vazios. Para isso, podemos considerar dois subconjuntos de medida positiva, $K_1, K_2 \subset \Omega_+$, com $|K_1| > 0$ e $|K_2| > 0$, de modo que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Também, sejam v_1 e v_2 as regularizações de χ_{K_1} e χ_{K_2}, respectivamente. A menos de reduzirmos os conjuntos K_1 e K_2, podemos supor *supp* $v_1 \cap$ *supp* v_2. Com isso, definindo $v = v_1 - v_2$ e denotando por F_1 e F_2 as faixas de regularização de χ_{K_1} e χ_{K_2}, respectivamente, temos

$$\int_\Omega m|v^+|^p d\sigma = \int_{K_1} m d\sigma + \int_{F_1} m|v_1|^p d\sigma > 0$$

e

$$\int_{\Omega} m|v^-|^p d\sigma = \int_{K_2} m d\sigma + \int_{F_2} m|v_2|^p d\sigma > 0.$$

Deste modo, como $I_1(tv^+ - (1-t)v^-) = t^p I_1(v^+) + (1-t)^p I_1(v^-)$, está bem definido o caminho $\gamma(t) : [0,1] \to M^+$, dado por

$$\gamma(t) = \frac{tv^+ - (1-t)v^-}{I_1(tv^+ - (1-t)v^-)^{1/p}}\ , \forall\, t \in [0,1].$$

Temos que $I_1(\gamma(t)) = 1$, para todo $t \in [0,1]$, $\gamma(0) = -\dfrac{v^-}{I_1(v^-)^{1/p}} \leq 0$ e $\gamma(1) = \dfrac{v^+}{I_1(v^+)^{1/p}} \geq 0$. Portanto, $\gamma \in \Gamma_0$. Logo, $\Gamma_0 \neq \emptyset$.

Observamos, agora, que, como $u_1 \geq 0$ e $v^+ \geq 0$, $(1-t)u_1 + tv^+ \geq (1-t)u_1$, para todo $t \in [0,1]$. Desta forma,

$$\int_{\Omega_+} m|(1-t)u_1 + tv^+|^p dx \geq \int_{\Omega_+} m|(1-t)u_1|^p dx = (1-t)^p \int_{\Omega_+} m|u_1|^p dx.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} m|(1-t)u_1 + tv^+|^p dx &= \int_{\Omega_+} m|(1-t)u_1 + tv^+|^p dx + \int_{\Omega_-} m|(1-t)u_1|^p dx \\
&\geq (1-t)^p \int_{\Omega_+} m|u_1|^p dx + (1-t)^p \int_{\Omega_-} m|u_1|^p dx \\
&= (1-t)^p \neq 0, \forall\, t \in [0,1).
\end{aligned}$$

Assim, está bem definido o caminho $\gamma_1 : [0,1] \to M^+$, dado por

$$\gamma_1(t) = \frac{(1-t)u_1 + tv^+}{[I_1((1-t)u_1 + tv^+)]^{1/p}}, \forall\, t \in [0,1].$$

Ressaltamos que: $\gamma_1(0) = u_1$ e $\gamma_1(1) = \dfrac{v^+}{I_1(v^+)^{1/p}}$. De modo análogo, podemos definir o caminho $\gamma_2 : [0,1] \to M^+$, dado por

$$\gamma_2(t) = \frac{-tu_1 - (1-t)v^-}{[I_1(-tu_1 - (1-t)v^-)]^{1/p}}, \forall\, t \in [0,1],$$

o qual satisfaz: $\gamma_2(0) = -\dfrac{v^-}{I_1(v^-)^{1/p}}$ e $\gamma_2(1) = -u_1$. Portanto, o caminho $\tilde{\gamma} = \gamma_1 * \overline{\gamma} * \gamma_2 \in \Gamma_1$, o que prova que $\Gamma_1 \neq \emptyset$.

Nosso próximo passo será provar que $\lambda_2(V,m)$ está acima de $\lambda_1(V,m)$. Para tanto, necessitaremos de um lema auxiliar, o qual provaremos na sequência.

Lema 2.5.1. Seja m satisfazendo (2.1.1). Suponhamos $|\Omega_-| > 0$ e $\alpha(V,m) > 0$. Se $(u_n) \subset M^+$ é tal que $u_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\{x \in \Omega; u_n(x) > 0\}| \to 0$ e $(E_V(u_n)) \subset \mathbb{R}$ é limitada, então (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Suponhamos que (u_n) seja ilimitada e definamos $v_n = \dfrac{u_n}{||u_n||}$. Neste caso, $(v_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada e, pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, a menos de considerarmos uma subsequência, existe $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v_n \to v_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$.

Assim, pelos Teoremas B.3, B.4 e H.4, obtemos, a menos da passagem a uma subsequência, que $\displaystyle\int_\Omega m|v_n|^p dx \to \int_\Omega m|v_0|^p dx$. Além disso,

$$\int_\Omega m|v_n|^p dx = \frac{1}{||u_n||^p}\int_\Omega m|u_n|^p dx = \frac{1}{||u_n||^p} \to 0 \text{ , quando } n \to \infty.$$

Consequentemente, $\displaystyle\int_\Omega m|v_0|^p dx = 0$. Da mesma forma, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E_V(v_n) = 0$. Deste modo,

$$1 + \int_\Omega V|v_0|^p dx = \lim\left(1 + \int_\Omega V|v_n|^p dx\right) = \lim E_V(v_n) = 0,$$

ou seja, $\displaystyle\int_\Omega V|v_0|^p dx = -1$, o que implica em $v_0 \neq 0$ q.t.p. em Ω. Portanto, podemos considerar $\dfrac{v_0}{||v_0||_p}$, que é um elemento de $\mathcal{B}$.

Observamos, ainda, que por E_V ser f.s.s.i.,

$$E_V\left(\frac{v_0}{||v_0||_p}\right) = \frac{1}{||v_0||_p^p}E_V(v_0) \leq \frac{1}{||v_0||_p^p}\lim E_V(v_n) = 0.$$

Por conseguinte, $\alpha(V,m) \leq 0$ e, por hipótese, $\alpha(V,m) = 0$. Logo, $E_V\left(\dfrac{v_0}{||v_0||_p}\right) = \alpha(V,m)$. Assim, pela Observação 2.3.2, $v_0 = c\varphi_0$, para alguma constante $c \in R - \{0\}$. Caso $v_0 > 0$ em Ω, produzimos um absurdo, visto que $|\{x \in \Omega; v_n(x) > 0\}| = |\{x \in \Omega; u_n(x) > 0\}| \to 0$. E, caso $v_0 < 0$ em Ω, para todo n suficientemente grande e, consequentemente, $u_n < 0$, o que é um absurdo com a hipótese. Portanto, (u_n) é limitada, como queríamos.

■

Proposição 2.5.1. A desigualdade $\lambda_2(V,m) > \lambda_1(V,m)$ é válida.

Demonstração: Inicialmente, observamos que $\lambda_1(V,m) \leq E_V(u)$, para toda $u \in M^+$. Ainda, como os elementos de Γ_0 são caminhos em M^+, dado $\gamma \in \Gamma_0$, temos

$$\lambda_1(V,m) \leq E_V(\gamma(t)),\ \forall\, t \in [0,1].$$

Logo, $\lambda_1(V,m)$ é uma cota inferior para $\{\max\limits_{t\in[0,1]} E_V(\gamma(t)); \gamma \in \Gamma_0\}$, donde $\lambda_1(V,m) \leq \lambda_2(V,m)$. Suponhamos $\lambda_1(V,m) = \lambda_2(V,m)$. Então, pela definição de $\lambda_2(V,m)$, existe uma sequência $(\gamma_k) \subset \Gamma_0$, tal que $\max\limits_{t\in[0,1]} E_V(\gamma_k(t)) \to \lambda_2(V,m) = \lambda_1(V,m)$, quando $k \to \infty$.
Afirmação 1: Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $t_k \in [0,1]$ tal que

$$\int\limits_\Omega m|\gamma_k(t_k)^-|^p dx = \int\limits_\Omega m|\gamma_k(t_k)^+|^p dx = \frac{1}{2}. \tag{2.5.2}$$

Para provar esta afirmação, consideremos a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} - \int\limits_\Omega m|\gamma_k(t_k)^+|^p dx,$$

a qual é contínua. De fato, sejam $t_0 \in [0,1]$ e $(t_n) \subset [0,1]$ tal que $t_n \to t_0$. Se $\varphi(t_n) \nrightarrow \varphi(t_0)$, então existem $\varepsilon_0 > 0$ e $(t_{n_j}) \subset (t_n)$ tais que $|\varphi(t_{n_j}) - \varphi(t_0)| \geq \varepsilon_0$ (♦). Como $t_n \to t_0$, $t_{n_j} \to t_0$. Ainda, visto que os caminhos γ_k são contínuos, $\gamma_k(t_{n_j}) \to \gamma_k(t_0)$ em M^+ e, devido a $\gamma_k(t_{n_j})^+ = \max\{\gamma_k(t_{n_j}), 0\}$, $\gamma_k(t_{n_j})^+ \to \gamma_k(t_0)^+$ em M^+. Então, pelo Teorema A.2, $\gamma_k(t_{n_j})^+ \to \gamma_k(t_0)^+$ em $L^{pr'}(\Omega)$.

Por conseguinte, $\int\limits_\Omega (|\gamma_k(t_{n_j})^+|^p)^{r'} dx < \infty$ e $(|\gamma_k(t_n)^+|^p) \subset L^{r'}(\Omega)$.

Assim, pelo Teorema B.3, existe $(t_{n_{j_l}}) \subset (t_{n_j})$ tal que $\gamma_k(t_{n_{j_l}})^+ \to \gamma_k(t_0)^+$ q.t.p. em Ω e, pelo Teorema H.4, $|\gamma_k(t_{n_{j_l}})^+|^p \to |\gamma_k(t_0)^+|^p$ q.t.p. em Ω. Ainda, $|||\gamma_k(t_{n_{j_l}})^+|^p||_{r'} = ||\gamma_k(t_{n_{j_l}})^+||^p_{pr'}$. Disso e de $||\gamma_k(t_{n_{j_l}})^+||_p \to ||\gamma_k(t_0)^+||_p$, decorre que $|||\gamma_k(t_{n_{j_l}})^+|^p||_{r'} \to |||\gamma_k(t_0)^+|^p||_{r'}$. Pelo Teorema B.4, $|||\gamma_k(t_{n_{j_l}})^+|^p - |\gamma_k(t_0)^+|^p||_{r'} \to 0$. Por isso e por

$$|\varphi(t_{n_{j_l}}) - \varphi(t_0)| \leq \int\limits_\Omega |m|||\gamma_k(t_{n_{j_l}})^+|^p - |\gamma_k(t_0)^+|^p| dx \leq ||m||_r|||\gamma_k(t_{n_{j_l}})^+|^p - |\gamma_k(t_0)^+|^p||_{r'},$$

$\varphi(t_{n_{j_l}}) \to \varphi(t_0)$, o que contraria (♦). Portanto, $\varphi(t_n) \to \varphi(t_0)$ e, assim, φ é contínua.

Agora, por $\gamma_k(t) \in M^+$, para todo $t \in [0,1]$, $\gamma_k(0) \geq 0$ e $\gamma_k(1) \leq 0$, temos

$$\varphi(0) = \frac{1}{2} - \int_\Omega m|\gamma_k(0)^+|^p dx = \frac{1}{2} - \int_\Omega m|\gamma_k(0)|^p dx = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

e

$$\varphi(1) = \frac{1}{2} - \int_\Omega m|\gamma_k(1)^+|^p dx = \frac{1}{2} > 0.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_k \in (0,1)$ tal que $\varphi(t_k) = 0$.

Finalmente, por $\displaystyle\int_\Omega m|\gamma_k(t_k)^+|^p dx = \frac{1}{2}$,

$$1 = \int_\Omega m|\gamma_k(t_k)|^p dx = \int_\Omega m|\gamma_k(t_k)^+ - \gamma_k(t_k)^-|^p dx = \int_\Omega m|\gamma_k(t_k)^+|^p dx + \int_\Omega m|\gamma_k(t_k)^-|^p dx,$$

o que implica em $\displaystyle\int_\Omega m|\gamma_k(t_k)^-|^p dx = \frac{1}{2}$, provando a validade da Afirmação 1.

Voltando à demonstração da proposição, consideremos o valor $t_k \in [0,1]$ obtido pela afirmação acima, e seja $u_k = \gamma_k(t_k)$. Então, $\displaystyle\int_\Omega m|2^{1/p}u_k^\pm|^p = 1$, donde $2^{1/p}u_k^\pm \in M^+$. Assim, $E_V(2^{1/p}u_k^\pm) \geq \lambda_1(V,m)$ e, portanto, $E_V(u_k^\pm) \geq \frac{1}{2}\lambda_1(V,m)$ **(I)**. Por isso,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1(V,m)}{2} &\leq E_V(u_k^+) = E_V(u_k) - E_V(u_k^-)\\ &\leq \max_{t\in[0,1]} E_V(\gamma_k(t)) - \frac{\lambda_1(V,m)}{2}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Sanduíche,

$$\lim_{k\to\infty} E_V(u_k^+) = \frac{\lambda_1(V,m)}{2}. \tag{2.5.3}$$

De maneira análoga,

$$\lim_{k\to\infty} E_V(u_k^-) = \frac{\lambda_1(V,m)}{2}.$$

Disso e de $E_V(u_k) = E_V(u_k^+) + E_V(u_k^-)$, temos $\lim E_V(u_k) = \lambda_1(V,m)$ **(♠)**.

Afirmação 2: A sequência $(u_k) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada.

Suponhamos, por absurdo, que (u_k) seja ilimitada e definamos $v_k = \dfrac{u_k}{||u_k||}$. Então, (v_k) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e, pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, existe $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v_k \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v_k \to v_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$. Por (u_k) ser ilimitada, por **(♠)**, por $(E_V(u_k)) \subset \mathbb{R}$ ser limitada,

$$\lim_{k\to\infty} E_V(v_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{E_V(u_k)}{||u_k||^p} = 0. \tag{2.5.4}$$

Também, por $v_k \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e pelos Teoremas B.3, B.4 e H.4, a menos da passagem a uma subsequência, $\int\limits_\Omega V|v_k|^p dx \to \int\limits_\Omega V|v_0|^p dx$. Consequentemente,

$$1 + \int\limits_\Omega V|v_0|^p dx = \lim_{k\to\infty} \left[||v_k|| + \int\limits_\Omega V|v_k|^p dx \right] = \lim_{k\to\infty} E_V(v_k) = 0,$$

donde $\int\limits_\Omega V|v_0|^p dx = -1$ e, portanto, $v_0 \neq 0$ q.t.p. em Ω.

Novamente, por $v_k \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e pelos Teoremas B.3, B.4 e H.4, considerando uma subsequência, se necessário, $\int\limits_\Omega m|v_k|^p dx \to \int\limits_\Omega m|v_0|^p dx$. Por outro lado, por $u_k = \gamma_k(t_k) \in M^+$, $\int\limits_\Omega m|u_k|^p dx = 1$, donde

$$\int\limits_\Omega m|v_k|^p dx = \frac{1}{||u_k||^p} \int\limits_\Omega m|u_k|^p dx = \frac{1}{||u_k||^p} \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Da unicidade do limite $\int\limits_\Omega m|v_0|^p dx = 0$. Portanto, $\dfrac{v_0}{||v_0||_p} \in \mathcal{B}$. Diante disso e do fato de E_V ser f.s.s.i.,

$$0 = \alpha(V, m) \leq E_V\left(\frac{v_0}{||v_0||_p}\right) \leq \frac{1}{||v_0||_p^p} \lim_{k\to\infty} E_V(v_k) = 0,$$

ou seja, $E_V(v_0) = 0$. Pelo item (iii) do Teorema 2.3.1 e pela Observação 2.3.2, $v_0 = c\varphi_0$, para algum $c \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $v_0 > 0$ em Ω. Então, $|\{x \in \Omega; v_0(x) < 0\}| = 0$. Assim, pelo Teorema B.5, $v_k \to v_0$ em medida, donde $v_k^- \to 0$ em medida e, consequentemente, $u_k^- \to 0$ em medida. Disso, de (★), de (2.5.3) e do Lema 2.5.1, (u_k^-) é limitada. Portanto, a menos de subsequência, $u_k^- \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Agora, de (2.5.3), por E_V ser f.s.s.i.,

$$E_V(u_0) \leq \liminf E_V(u_k^-) = \lim E_V(u_k^-) = \frac{\lambda_1(V, m)}{2}. \tag{2.5.5}$$

Também, dos Teoremas B.3, B.4 e H.4, da definição de u_k^-, de (★) e da unicidade do limite,

$\int_\Omega m|u_0|^p dx = \frac{1}{2}$, isto é, $2^{1/p}u_0 \in M^+$. Deste modo, $\lambda_1(V,m) \leq E_V(2^{1/p}u_0)$. Portanto, $\frac{1}{2}\lambda_1(V,m) \leq E_V(u_0)$. Disso e da equação (2.5.5), concluímos que $E_V(u_0) = \frac{1}{2}\lambda_1(V,m)$. Logo, $2^{1/p}u_0 \in M^+$ e $\lambda_1(V,m)$ é atingido em $2^{1/p}u_0$, o que é um absurdo com o item (iii) do Teorema 2.3.1, provando que (u_k) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, considerando uma subsequência, se necessário, existe $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup \tilde{u}$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u_k \to \tilde{u}$ em $L^{pr'}(\Omega)$. Além disso, observamos que

(a) $\int_\Omega m|u_k|^p dx = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$;

(b) pelos Teorema B.3, B.4 e H.4 e pela Desigualdade de Hölder, passando a uma subsequência, se necessário, $\int_\Omega m|u_k|^p dx \to \int_\Omega m|\tilde{u}|^p dx$;

(c) pelos itens (a) e (b) e pela unicidade do limite, $\int_\Omega m|\tilde{u}|^p dx = 1$, isto é, $\tilde{u} \in M^+$.

(d) por E_V ser f.s.s.i.,

$$E_V(\tilde{u}) \leq \liminf E_V(u_k) = \lim E_V(u_k) = \lambda_1(V,m).$$

Logo, dos itens (c) e (d), $E_V(\tilde{u}) = \lambda_1(V,m)$, o que nos garante que $\lambda_1(V,m)$ é atingido por uma função em M^+, o que contraria o item (iii) do Teorema 2.3.1. Portanto, segue a validade da proposição.

■

Como consequência dessa proposição, garantiremos que existe uma função $u_1 \in M^+$ nos moldes da definição (2.5.1), mostrando que é coerente considerar tal valor *minimax*.

Corolário 2.5.1. Existe $u_1 \in M^+$ tal que $u_1 \geq 0$ e $E_V(u_1) < \lambda_2(V,m)$.

Demonstração: Consideremos a sequência $(u_n) \subset M^+$ definida em (2.3.6), com φ_0 no lugar de φ_{λ_0}. Já provamos, no item (iii) do Teorema 2.3.1, que $E_V(u_n) \to \lambda_1(V,m)$. Disso e da Proposição 2.5.1, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $u_{k_0} \in M^+$, $u_{k_0} \geq 0$ e $E_V(u_{k_0}) < \lambda_2(V,m)$. Logo, tomando $u_{k_0} = u_1$, segue o corolário.

■

Como mencionamos anteriormente, neste caso, temos alguns problemas com a geometria do funcional E_V. Por $\lambda_1(V,m)$ não ser atingido, as condições (PS) e (PSC) não são satisfeitas no nível $\lambda_1(V,m)$. Contudo, provaremos que E_V satisfaz a condição (PSC) em M^+, em todos os níveis $c > \lambda_1(V,m)$.

Proposição 2.5.2. O funcional E_V satisfaz a condição (PSC) em M^+ para todo $c > \lambda_1(V, m)$.

Demonstração: Sejam $c > \lambda_1(V, m)$ e $(u_n) \subset M^+$ uma sequência $(PSC)_c$ para $\tilde{E}_V$, ou seja, existe $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}$, com $\varepsilon_n \to 0$ tal que

$(PSC1)$ $E_V(u_n) \to c$;

$(PSC2)$ $|\langle E_V'(u_n), \xi\rangle| \leq \dfrac{\varepsilon_n}{1+||u_n||}||\xi||, \ \forall\, \xi \in T_{u_n}M^+$.

Suponhamos que (u_n) seja ilimitada e definamos $v_n = \dfrac{u_n}{||u_n||}$. Então, pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, existe $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v_n \to v_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$.

Agora, sejam $\tau(v, w) = \displaystyle\int_\Omega m|v|^{p-2}vwdx$ e $\xi_n = (v_n - v_0) - \tau(u_n, v_n - v_0)u_n \in T_{u_n}M^+$. Substituindo este ξ_n em $(PSC2)$ e efetuando os cálculos, concluímos que

$$|E_V'(v_n)(v_n - v_0) - \tau(v_n, v_n - v_0)E_V(u_n)| \leq \frac{\varepsilon_n||u_n||}{1+||u_n||}\left\|\frac{v_n - v_0}{||u_n||^p} - \tau(v_n, v_n - v_0)v_n\right\| \quad (2.5.6)$$

e que $v_n \to v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim,

$$E_V(v_0) = \lim_{n\to\infty} E_V(v_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{E_V(u_n)}{||u_n||^p} = 0.$$

Da mesma forma,

$$I_1(v_0) = \lim I_1(v_n) = \lim \frac{I_1(u_n)}{||u_n||^p} = \lim \frac{1}{||u_n||^p} = 0.$$

Portanto, pelo item (iii) do Teorema 2.3.1, existe $d \in \mathbb{R} - \{0\}$, tal que $v_0 = d\varphi_0$.

Agora, substituindo $v_n - v_0$ por $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, em (2.5.6), obtemos

$$|E_V'(v_n)(w) - \tau(v_n, w)E_V(u_n)| \leq \frac{\varepsilon_n||u_n||}{1+||u_n||}\left\|\frac{w}{||u_n||^p} - \tau(v_n, w)v_n\right\| \to 0, \quad (2.5.7)$$

donde $E_V'(v_n)(w) - E_V(u_n)I_1'(v_n)(w) \to 0$. Disso, de $v_n \to v_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, de E_V ser de classe C^1 e de $(PSC1)$, concluímos que $E_V'(v_0)(w) = cI_1'(v_0)(w)$, para todo $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, c é um autovalor para (2.0.1), com autofunção associada v_0. Ainda, por $v_0 = d\varphi_0$, v_0 tem sinal constante. Assim, a menos de considerarmos $|v_0|$, temos que c é autovalor principal. Pelo item (iii) do Teorema 2.3.1, $c = \lambda_1(V, m)$, o que é um absurdo, pois $c > \lambda_1(V, m)$.

Logo, (u_n) é limitada e, pelo Teorema A.2, A.5 e B.2, a menos de considerarmos uma subsequência de (u_n), existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u_n \to u_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$. Deste modo, por (2.5.6) e pela Propriedade (S^+) do operador p-laplaciano, Teorema

C.8, repetindo os cálculos feitos para $v_n - v_0$, com $u_n - u_0$ em seu lugar, concluímos que $u_n \to u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, o que encerra a demonstração dessa proposição.

■

Antes de provarmos o principal resultado desta seção iremos definir uma função real com base no parâmetro $\alpha(V, m)$. Veremos que tal função é contínua e diferenciável em $t = 0$. A abordagem de tal função justificar-se-á na necessidade que encontraremos em aplicar os resultados da seção anterior, os quais são válidos apenas para parâmetros positivos.

Lema 2.5.2. Sejam $V, \tilde{V} \in L^r(\Omega)$, com r como em (2.1.1). Então a função $\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $\alpha(t) = \alpha(V + t\tilde{V}, m)$, é côncava, diferenciável em $t = 0$ e existe $u_0 \in \mathcal{B}$, de modo que $E_V(u_0) = \alpha(V, m)$ e

$$\alpha'(0) = \int_\Omega \tilde{V}|u_0|^p dx. \tag{2.5.8}$$

Demonstração: Faremos esta demonstração em etapas.

Etapa 1: Tendo em vista que $E_{V+t\tilde{V}}$ é côncava em t, aplicando as propriedades de ínfimo, concluímos que α é côncava. Além disso, pelo domínio de α ser $[0, +\infty)$, α é contínua.

Etapa 2: Observamos que $\alpha(0) = \alpha(V, m) = 0$ e, pela Observação 2.3.2, existe $\xi_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $E_V(\xi_0) = \alpha(V, m) = 0$. Podemos considerar $\xi_0 \in \mathcal{B}$ e que tal função é única a menos de constante multiplicativa, não nula.

Etapa 3: Seja $(t_n) \subset [0, +\infty)$ tal que $t_n \to 0$. Então,

$$\alpha(t_n) = \alpha(V + t_n\tilde{V}, m) \leq E_{V+t_n\tilde{V}}(\xi_0) = E_V(\xi_0) + t_n \int_\Omega \tilde{V}|\xi_0|^p dx.$$

Mas, $E_V(\xi_0) = \alpha(V, m) = \alpha(0)$. Logo,

$$\frac{\alpha(t_n) - \alpha(0)}{t_n} \leq \int_\Omega \tilde{V}|\xi_0|^p dx. \tag{2.5.9}$$

Etapa 4: Por $|\Omega_-| > 0$, pela Proposição 2.2.1 e pelo Corolário 2.2.1, $\alpha(V + t_n\tilde{V}, m) < \infty$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\xi_0^n \in \mathcal{B}$, tal que $\alpha(V + t_n\tilde{V}, m) = E_V(\xi_0^n)$. Vale ressaltar que $(t_n) \subset [0, +\infty)$ é limitada e que $V, \tilde{V} \in L^r(\Omega)$. Assim, $(V + t_n\tilde{V})$ é uniformemente limitada em $L^r(\Omega)$. Da continuidade de α e do Lema 2.1.1, com $\omega \equiv 1$, existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$, tais que

$$||\xi_0^n||^p \leq C_1 E_{V+t_n\tilde{V}}(\xi_0^n) + C_2 = C_1\alpha(V + t_n\tilde{V}, m) + C_2 < K,$$

para alguma constante positiva $K \in \mathbb{R}$. Assim, $(\xi_0^n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada e, pelos Teoremas A.2, A.5 e B.2, passando a uma subsequência, se necessário, existe $\tilde{\xi}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\xi_0^n \rightharpoonup \tilde{\xi}_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\xi_0^n \to \tilde{\xi}_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$.

Com isso, por E_V ser f.s.s.i.,

$$E_V(\xi_0) = \alpha(V,m) = \alpha(0) = \lim \alpha(t_n) = \lim \alpha(V + t_n\tilde{V}, m) = \lim E_{V+t_n\tilde{V}}(\xi_0^n) \geq E_V(\tilde{\xi}_0),$$

ou seja, $\alpha(V,m) \geq E_V(\tilde{\xi}_0)$. Além disso,

(a) pelos Teoremas B.3, B.4 e H.4, e pela Desigualdade de Hölder, a menos de considerarmos uma subsequência de (ξ_0^n), $I_1(\xi_0^n) \to I_1(\tilde{\xi}_0)$, e

(b) por $(\xi_0^n) \subset \mathcal{B}$, por $1 < p < pr'$, por $\xi_0^n \to \tilde{\xi}_0$ em $L^{pr'}(\Omega)$ e pelos Teorema A.3 e B.3, passando a uma subsequência, se necessário, $\xi_0^n \to \tilde{\xi}_0$ em $L^p(\Omega)$.

Portanto, dos itens (a) e (b), da continuidade da norma em $L^p(\Omega)$ e da unicidade do limite, $||\tilde{\xi}_0||_p = 1$ e $I_1(\tilde{\xi}_0) = 0$. Disso, $\tilde{\xi}_0 \in \mathcal{B}$ e, assim, $\alpha(V,m) \leq E_V(\tilde{\xi}_0)$ e, por conseguinte, $\alpha(V,m) = E_V(\tilde{\xi}_0)$. Pelo item (iii) do Teorema 2.3.1, ξ_0 e $\tilde{\xi}_0$ são autofunções associadas a $\lambda_1(V,m)$ e, por $\lambda_1(V,m)$ ser simples, por $\xi_0, \tilde{\xi}_0 \in \mathcal{B}$ e $||\varphi_0||_p = 1$, vemos que $\xi_0 = \tilde{\xi}_0$.

Etapa 5: Observamos que

$$\alpha(0) = \alpha(V,m) = E_V(\xi_0) \leq E_V(\xi_0^n) = \alpha(t_n) - t_n \int\limits_\Omega \tilde{V}|\xi_0^n|^p dx,$$

o que implica em

$$\int\limits_\Omega \tilde{V}|\xi_0^n|^p dx \leq \frac{\alpha(t_n) - \alpha(0)}{t_n}. \tag{2.5.10}$$

Pelas equações (2.5.9) e (2.5.10),

$$\int\limits_\Omega \tilde{V}|\xi_0^n|^p dx \leq \frac{\alpha(t_n) - \alpha(0)}{t_n} \leq \int\limits_\Omega \tilde{V}|\xi_0|^p dx.$$

Logo, α é diferenciável em $t = 0$ e se verifica a igualdade (2.5.8), com $u_0 = \xi_0$.

■

Observação 2.5.1. Pela diferenciabilidade de α em $t = 0$, dada no Lema 2.5.2, temos $\alpha(t) = \alpha(0+t) = \alpha(0) + \alpha'(0)t + r(t)$, com $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{r(t)}{t} = 0$. Então, tomando $\tilde{V} \equiv 1$, por $\alpha(0) = E_V(\xi_0)$ e por $||\xi_0||_p = 1$, $\alpha'(0) = ||\xi_0||_p^p > 0$ e, por conseguinte, $\alpha(t) = \alpha(V + t, m) > 0$, para todo $t > 0$ suficientemente próximo de zero.

Observação 2.5.2. Por $I_1(\xi_0) = 0$, por $E_V(\xi_0) = \alpha(V,m) = 0$ e pelo item (iii) do Teorema 2.3.1, ξ_0 é autofunção associada a $\lambda_1(V,m)$. Visto que $\lambda_1(V,m)$ é simples, existe uma constante não nula $c \in \mathbb{R}$ tal que $\xi_0 = c\varphi_0$. Ainda, por $\xi_0 \in \mathcal{B}$, $||\xi_0||_p = 1$. Disso,

$$1 = ||\xi_0||_p = ||c\varphi_0||_p = |c|^p \Leftrightarrow c = 1 \text{ ou } c = -1.$$

Mas, se $c = -1$, então $\xi_0 \leq 0$, o que é um absurdo. Portanto, $c = 1$ e $\xi_0 = \varphi_0$. Logo, a função u_0 encontrada no Lema 2.5.2 é, na verdade, φ_0.

Neste momento, estamos aptos a enunciar e demonstrar o principal teorema desta seção.

Teorema 2.5.1. Para cada $u_1 \in M^+$, com $u_1 \geq 0$ e $E_V(u_1) < \lambda_2(V,m)$, seja

$$\overline{\lambda}_2(V,m) = \inf_{\gamma \in \Gamma_1} \max_{t \in [0,1]} E_V(\gamma(t)), \tag{2.5.11}$$

onde $\Gamma_1 = \{\gamma \in C([0,1], M^+); \gamma(0) = u_1 \text{ e } \gamma(1) = -u_1\}$. Então,

(i) $\overline{\lambda}_2(V,m)$ é um autovalor de (2.0.1);

(ii) $\overline{\lambda}_2(V,m) = \lambda_2(V,m)$;

(iii) $\lambda_2(V,m)$ é o primeiro autovalor não-principal de (2.0.1), isto é, não existe nenhum outro autovalor principal de (2.0.1) no intervalo $(\lambda_1(V,m), \lambda_2(V,m))$.

Demonstração: i) A demonstração deste item consiste em aplicarmos o Teorema C.6, com as seguintes considerações:

(a) $K = [0,1]$, $\{0,1\} = K_0 \subset K$, $g = I_1$, $f = E_V$, $\tilde{f} = \tilde{E}_V$, $h_0 = \gamma_0$ tal que $\gamma_0(0) = u_1$ e $\gamma_0(1) = -u_1$.

(b) $M = M^+$ e $H = \Gamma_1$, pois $\gamma \in C([0,1], M^+)$, com $\gamma(0) = u_1$ e $\gamma(1) = -u_1$, estende γ_0 e $\overline{\Gamma}_0 \neq \emptyset$.

(c) Como $E_V(u_1) < \lambda_2(V,m)$ e $E_V(u_1) = E_V(-u_1)$,

$$\max_{t \in \{0,1\}} \{E_V(u_1), E_V(-u_1)\} < \lambda_2(V,m) \leq \max_{t \in [0,1]} E_V(\gamma(t)), \forall\, \gamma \in \overline{\Gamma}_0.$$

(d) Como $\overline{\Gamma}_0 \subset \Gamma_0$, $\lambda_2(V,m) \leq \overline{\lambda}_2(V,m)$. Disso e da Proposição 2.5.1, $\overline{\lambda}_2(V,m) > \lambda_1(V,m)$. Segue, da Proposição 2.5.2, que $\tilde{E}_V$ satisfaz a condição $(PSC)_{\overline{\lambda}_2(V,m)}$.

Diante da validade de (a)-(d), decorre, pelo Teorema C.6, que $\overline{\lambda}_2(V,m)$ é autovalor do problema (2.0.1).

ii) Primeiramente, como $\overline{\Gamma}_0 \subset \Gamma_0$, temos $\overline{\lambda}_2(V,m) \geq \lambda_2(V,m)$. Resta-nos provar que vale a igualdade. Ora, pela definição de $\lambda_2(V,m)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\gamma \in \Gamma$, tal que $\max_{t\in[0,1]} E_V(\gamma(t)) < \lambda_2(V,m) + \varepsilon$ **(I)**.

Disso, fixando $u_0 = \gamma(0)$, $E_V(u_0) < \lambda_2(V,m) + \varepsilon$ e, por hipótese, $E_V(u_1) < \lambda_2(V,m) + \varepsilon$. Desta forma, para todo $t > 0$, suficientemente próximo de zero, temos

$$\max\{E_{V+t}(u_0), E_{V+t}(u_1)\} < \lambda_2(V,m) + \varepsilon. \tag{2.5.12}$$

Definamos, agora, $\mathcal{O} = \{u \in M^+; E_{V+t}(u) < \lambda_2(V,m) + \varepsilon\} \subset M^+$, o qual é aberto em M^+, visto que E_{V+t} é de classe C^1 e $\mathcal{O} = E_{V+t}^{-1}((-\infty, \lambda_2(V,m) + \varepsilon))$.

Além disso, de acordo com a Observação 2.5.1, para todo $t > 0$ suficientemente próximo de zero, $\alpha(V + t, m) > 0$. Por isso e pelos resultados da seção anterior,

(A) o funcional E_{V+t}, restrito a M^+, satisfaz a condição (PS) em todos os níveis $c \in \mathbb{R}$;

(B) existe o autovalor principal $\lambda_1(V+t, m)$, cuja autofunção associada, positiva e L^p-normalizada, será denotada por $\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))$, e

(C) existe o primeiro autovalor não-principal $\lambda_2(V + t, m) > \lambda_1(V + t, m)$.

Neste sentido, seja γ um caminho tal que $\lambda_2(V + t, m)$ é atingido.

Afirmação: $\mathcal{O}$ possui, no máximo, duas componentes conexas por caminhos.

De fato, $\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))$ e $-\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))$, são os únicos pontos críticos em M^+ para E_{V+t}, visto que qualquer outro múltiplo de $\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))$ não estará em M^+, pois, para $u = c\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))$, $c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$, $c \neq 1$ e $c \neq -1$, $I_1(u) = |c|^p \neq 1$.

Mostraremos que $\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))$ e $-\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))$, são os únicos pontos críticos de E_{V+t} em $\mathcal{O}$. Com efeito,

$$E_{V+t}(-\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))) = E_{V+t}(\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))) = \lambda_1(V + t, m) = \inf_{u\in M^+} E_{V+t}(u).$$

Disso, de $u_1 \in M^+$ e de (II),

$$E_{V+t}(-\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))) = \lambda_1(V + t, m) \leq E_{V+t}(u_1) < \lambda_2(V,m) + \varepsilon,$$

provando que $-\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))$ e $\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))$ estão em $\mathcal{O}$. Logo, por estas funções serem os únicos pontos críticos em M^+, segue que $\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))$ e $-\varphi_1(\lambda_1(V + t, m))$, são os únicos pontos críticos de E_{V+t} em $\mathcal{O}$.

Assim, aplicando o Lema 2.4.2, concluímos que $\mathcal{O}$ tem, no máximo, duas componentes conexas por caminhos, validando a afirmação.

Agora, se u_1 e $-u_1$ estão na mesma componente, existe um caminho, $\tilde{\gamma}$, ligando-as e que satisfaz $E_{V+t}(\tilde{\gamma}(t)) < \lambda_2(V,m) + \varepsilon$, donde segue que $\overline{\lambda}_2(V,m) \leq \lambda_2(V,m)$. Caso contrário, como $u_0 = \gamma(0) \leq 0$, $\gamma(1) \geq 0$, pela Observação 2.4.1, existem caminhos ligando $\gamma(1)$ a $\varphi_1(\lambda_1(V+t,m))$ e ligando u_0 a $-\varphi_1(\lambda_1(V+t,m))$.

Ainda, como u_1 e $-u_1$ estão em componentes distintas, existe um caminho ligando u_1 a uma dentre as funções $\varphi_1(\lambda_1(V+t,m))$ ou a $-\varphi_1(\lambda_1(V+t,m))$, enquanto que $-u_1$ será conectada por um caminho à outra. Além disso, todos os caminhos obtidos pela Observação 2.4.1 permanecem a níveis inferiores a $\lambda_2(V,m)+\varepsilon$. Logo, segue a validade do item (ii).

(iii) A demonstração deste item segue de maneira similar à apresentada no Teorema 2.4.1 e, por este motivo, será omitida. Contudo, é interessante ressaltar que, se $(u,\lambda) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ é uma solução fraca para (2.0.1), com $\lambda \neq \lambda_1(V,m)$, então $\int_\Omega m|u^+|^p dx \neq 0$ pois, caso contrário, $E_V(u^+) = \lambda I_1(u^+) = 0$ e, pelo Teorema 2.3.1, u^+ é autofunção associada a $\lambda_1(V,m)$. Pelo Lema 2.1.5, existe $c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$, tal que $u^+ = c\varphi_0$ e $\lambda = \lambda_1(V,m)$, o que é um absurdo. De maneira análoga, $\int_\Omega m|u^-|^p dx \neq 0$.

■

3 UM PROBLEMA DE AUTOVALORES COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA MISTA ROBIN-DIRICHLET

Neste capítulo, estudaremos a seguinte classe de problemas elípticos envolvendo o operador p-laplaciano, com condição de fronteira mista Robin-Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u & , \text{ em } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \sigma(x)|u|^{p-2}u & , \text{ em } \Gamma_1 \\ u = 0 & , \text{ em } \Gamma_2 \end{cases} , \tag{3.0.1}$$

onde $V, m,$ e σ são, possivelmente, indefinidas, Ω é um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$, para algum $0 < \alpha < 1$, de modo que $\partial\Omega$ possa ser decomposta em dois conjuntos, Γ_1 e Γ_2, os quais são variedades $(n-1)$-dimensionais conexas e fechadas, com $p > 1$. Assumiremos que $V, m \in L^\infty(\Omega)$ e $\sigma \in C^{0,r}(\partial\Omega)$, com $0 < r < 1$.

Assim como no capítulo anterior, nosso objetivo será determinar condições necessárias e suficientes adequadas, de modo que o problema (3.0.1) possua ao menos um autovalor principal. No caso em que $\Gamma_2 = \emptyset$, recaímos no problema (2.0.1), para o qual já determinamos sob quais circunstâncias existem autovalores principais.

Novamente, nossa abordagem fará uso da autocurva associada ao problema (3.0.1). Antes de prosseguirmos, fixaremos algumas notações e destacaremos algumas hipóteses gerais. Ao longo desse capítulo, assumiremos que, ao menos uma dentre as funções m e σ, não é identicamente nula. Consideraremos, também os seguintes conjuntos:

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega; m(x) > 0\}, \Omega^- = \{x \in \Omega; m(x) < 0\} \text{ e } \Omega^0 = \{x \in \Omega; m(x) = 0\}$$

e

$$\Gamma_1^+ = \{x \in \Omega; \sigma(x) > 0\}, \Gamma_1^- = \{x \in \Omega; \sigma(x) < 0\} \text{ e } \Gamma_1^0 = \{x \in \Omega; \sigma(x) = 0\}.$$

Definimos, agora, um subespaço de $W^{1,p}(\Omega)$ mais adequado para a busca por soluções do problema (3.0.1). Seja $W = \{u \in W^{1,p}(\Omega); \Upsilon(u) = 0 \text{ em } \Gamma_2\}$, onde Υ é o operado traço.

Neste conjunto, podemos considerar a seguinte norma

$$||u||_W^p = \begin{cases} \int\limits_\Omega |\nabla u|^p dx + \int\limits_{\partial\Omega} |u|^p d\rho \text{ , se } |\Gamma_2| = 0 \\ \int\limits_\Omega |\nabla u|^p dx \text{ , se } |\Gamma_2| > 0 \end{cases} , \forall\, u \in W. \tag{3.0.2}$$

Observação 3.0.1. Devido ao Teorema A.7, as normas $||\cdot||_W$ e $||\cdot||$ são equivalentes. Devido a isso, ao longo do capítulo, muitas vezes nos referiremos a norma $||\cdot||_W$ simplesmente por $||\cdot||$, a fim de não carregar demais a notação.

Observação 3.0.2. Sejam $(u_n) \subset W$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que $u_n \rightharpoonup u$. Pela compacidade do operador traço, $\Upsilon(u_n) \to \Upsilon(u)$. Logo, por $\Upsilon(u_n) = 0$ em Γ_2, $\Upsilon(u) = 0$ em Γ_2 e, assim, $u \in W$. Deste modo, W é fracamente fechado. Por este motivo, ao aplicarmos os Teoremas A.2 e A.6, consideraremos a função limite no conjunto W.

Neste capítulo, consideraremos os seguintes funcionais $E_V, I_2 : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados, respectivamente, por

$$E_V(u) = \int\limits_\Omega [|\nabla u|^p + V|u|^p]dx \quad \text{e} \quad I_2(u) = \int\limits_\Omega m|u|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|u|^p d\rho, \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

os quais são de classe C^1, tendo como derivadas de Fréchet,

$$E_V'(u)(v) = p\int\limits_\Omega [|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + V|u|^{p-2}uv]dx, \ \forall\, u, v \in W^{1,p}(\Omega)$$

e

$$I_2'(u)(v) = p\int\limits_\Omega m(x)|u|^{p-2}uv\, dx + p\int\limits_{\Gamma_1} \sigma|u|^{p-2}uv d\rho, \ \forall\, u, v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Além disso, E_V e I_2 são f.s.s.i.

Finalmente, dizemos que um par $(u, \lambda) \in W \times \mathbb{R}$ é uma solução fraca para (3.0.1) quando $u \not\equiv 0$ e, para toda $v \in W$,

$$\int\limits_\Omega [|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + V(x)|u|^{p-2}uv]dx = \lambda\int\limits_\Omega m(x)|u|^{p-2}uv\, dx + \lambda\int\limits_{\Gamma_1} \sigma|u|^{p-2}uv d\rho. \tag{3.0.3}$$

3.1 Construção de uma Autocurva Associada ao Problema (3.0.1)

Nesta seção, construiremos a autocurva associada a (3.0.1), assim como fizemos no capítulo anterior. Para tanto, consideremos, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, o novo problema de autovalores com parâmetro $\mu = \mu(\lambda)$

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u + \mu|u|^{p-2}u & , \text{ em } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda\sigma(x)|u|^{p-2}u & , \text{ em } \Gamma_1 \\ u = 0 & , \text{ em } \Gamma_2 \end{cases} , \tag{3.1.1}$$

Lembramos que $\mu \in \mathbb{R}$ é um autovalor para (3.1.1) se, e somente se, existe $u \in W$, com $u \not\equiv 0$, satisfazendo a seguinte equação

$$\int_\Omega [|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + (V - \lambda m)|u|^{p-2}uv]dx = \mu \int_\Omega |u|^{p-2}uvdx + \lambda \int_{\Gamma_1} \sigma|u|^{p-2}uvd\rho, \ \forall\, v \in W. \tag{3.1.2}$$

Observação 3.1.1. Pelos resultados de regularidade, encontrados em DiBenedetto (1982) e Lieberman (1988), soluções fracas limitadas para o problema (3.0.1) são de classe $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, para algum $\beta \in (0,1)$. Utilizamos, aqui, o fato de Ω ser de classe $C^{2,\alpha}$, bem como o fato de $\sigma \in C^{0,r}(\partial\Omega)$, para certos $\alpha, r \in (0,1)$.

Ainda, quando $m \equiv 0$, toda solução fraca, u, para o problema (3.0.1), é um elemento de $L^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$, veja, por exemplo, Cuesta (2009).

A fim de construir a autocurva para o problema (3.0.1), precisaremos garantir, inicialmente, que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, (3.1.1) possui um autovalor principal. Para tanto, consideraremos o seguinte funcional energia $J_\lambda : W \to \mathbb{R}$, dado por $J_\lambda(u) = E_V(u) - \lambda I_2(u)$, e a variedade $\mathcal{S} = \{u \in W; ||u||_p = 1\}$.

Lema 3.1.1. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p d\rho \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^p dx + c(\varepsilon) \int_\Omega |u|^p dx \ , \ \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que exista $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$, com $||u_n||_{p,\partial\Omega} = 1$, tal que

$$\varepsilon_0 \int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx + n \int\limits_{\Omega} |u_n|^p dx < 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.1.3}$$

Assim, para $n \geq \varepsilon_0$, temos

$$1 > \varepsilon_0 \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx + \int\limits_{\Omega} |u_n|^p dx \right) = \varepsilon_0 ||u_n||^p,$$

Com isso, $A = \dfrac{1}{(\varepsilon_0)^{1/p}} \geq ||u_n||$, para todo $n \geq \varepsilon_0$. E, como a quantidade de $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < \varepsilon_0$ é finita, podemos considerar $B = \max\{||u_n||; n < \varepsilon_0\}$. Deste modo, tomando $\max\{A, B\}$, concluímos que $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ é limitada. Pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, a menos de considerarmos uma subsequência de (u_n), existe $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u_n \to u_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$. Ainda, visto que $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ é limitada, $(||\nabla u_n||_p) \subset \mathbb{R}$ é limitada.

Logo, por (3.1.3), segue que

$$0 < \frac{\varepsilon_0}{n} ||\nabla u_n||_p^p + ||u_n||_p^p < \frac{1}{n} \ \Rightarrow \ ||u_n||_p^p \to 0.$$

Mas, então, $||u_0||_p = 0$, donde $u = 0$ q.t.p. em Ω. Assim, por Υ ser linear, temos $\Upsilon(u) = 0$ q.t.p. na $\partial\Omega$ e, consequentemente, $||u_0||_{p,\partial\Omega} = 0$, o que é um absurdo. Portanto, segue a validade do lema.

■

Teorema 3.1.1. O número real

$$\mu_1 = \mu_1(\lambda) = \inf\{J_\lambda(u); u \in \mathcal{S}\}. \tag{3.1.4}$$

é o menor autovalor para (3.1.1). Além disso, μ_1 é principal, simples e o único autovalor associado ao problema (3.1.1).

Ainda, se denotarmos por $\varphi_\lambda \in \mathcal{S}$ a única autofunção positiva associada ao problema (3.1.1), então $\varphi_\lambda \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ e $\varphi_\lambda > 0$ em $\Omega \cup \Gamma_1$.

Demonstração: Tendo em vista tornar a demonstração clara ao leitor, organizaremos a mesma em partes.

Afirmação 1: $\mu_1 > -\infty$ e o mesmo é atingido por alguma função $u \in \mathcal{S}$.

De fato, para $u \in \mathcal{S}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega V|u|^p dx - \lambda\left[\int_\Omega m|u|^p dx + \int_{\Gamma_1}\sigma|u|^p d\rho\right]\right| &\leq \left|\int_\Omega V|u|^p dx\right| + |\lambda|\left|\int_\Omega m|u|^p dx\right| + \\ &+ |\lambda|\left|\int_{\Gamma_1}\sigma|u|^p d\rho\right| \\ &= ||V||_\infty ||u||_p^p + \\ &+ |\lambda|||m||_\infty ||u||_p^p + |\lambda|||\sigma||_{\infty,\Gamma_1}||u||_{p,\Gamma_1}^p.\end{aligned}$$

Pela desigualde acima, pelo Lema 3.1.1 e por $u \in \mathcal{S}$, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $c(\varepsilon) > 0$, de modo que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega V|u|^p dx - \lambda\left[\int_\Omega m|u|^p dx + \int_{\Gamma_1}\sigma|u|^p d\rho\right]\right| &\leq ||V||_\infty + |\lambda|||m||_\infty + \\ &+ |\lambda|||\sigma||_{\infty,\Gamma_1}\left(\varepsilon\int_\Omega |\nabla u|^p dx + c(\varepsilon)\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&||\nabla u||_p^p - ||V||_\infty - |\lambda|(||m||_\infty + c(\varepsilon)||\sigma||_{\infty,\Gamma_1}) - |\lambda|||\sigma||_{\infty,\Gamma_1}\varepsilon||\nabla u||_p^p \\ &= E_V(u) - \lambda I_2(u) = J_\lambda(u)\end{aligned}$$

Logo,

$$(1 - |\lambda|||\sigma||_{\infty,\Gamma_1}\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u|^p dx - ||V||_\infty - |\lambda|(||m||_\infty + c(\varepsilon)||\sigma||_{\infty,\Gamma_1}) \leq J_\lambda(u). \tag{3.1.5}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, escolhendo $0 < \varepsilon < (|\lambda|||\sigma||_{\infty,\Gamma_1})^{-1}$ na desigualdade acima, concluímos que

$$J_\lambda(u) \geq -||V||_\infty - |\lambda|(||m||_\infty + c(\varepsilon)||\sigma||_{\infty,\Gamma_1}), \forall\, u \in \mathcal{S}.$$

Portanto, J_λ é limitado inferiormente em $\mathcal{S}$. Deste modo, $\mu_1 = \mu_1(\lambda) = \inf\limits_{u\in\mathcal{S}} J_\lambda(u) > -\infty$.

Agora, provaremos que existe uma função $u_0 \in \mathcal{S}$ tal que $J_\lambda(u_0) = \mu_1(\lambda)$. Para tanto, seja $(u_n) \subset \mathcal{S}$ tal que $J_\lambda(u_n) \to \mu_1(\lambda)$. Disso, $(J_\lambda(u_n)) \subset \mathbb{R}$ é limitada, donde existe uma constante positiva $c \in \mathbb{R}$ tal que $|J_\lambda(u_n)| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, por (3.1.5),

$$c \geq J_\lambda(u_n) \geq c_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + c_2,$$

onde $c_1 = (1 - |\lambda| ||\sigma||_{\infty,\Gamma_1}\varepsilon)$ e $c_2 = -||V||_\infty - |\lambda|(||m||_\infty + c(\varepsilon)||\sigma||_{\infty,\Gamma_1})$. Logo, para $0 < \varepsilon < (|\lambda| ||\sigma||_{\infty,\Gamma_1})^{-1}$, $\dfrac{c - c_2}{c_1} \geq \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $(||\nabla u_n||_p^p) \subset \mathbb{R}$ é limitada. Também, como $(u_n) \subset \mathcal{S}$, $(||u_n||_p^p) \subset \mathbb{R}$ é limitada. Segue, disso, que $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ é limitada.

Pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, existe $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e $u_n \to u_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$. Por J_λ ser f.s.s.i., vem que $J_\lambda(u_0) \leq \liminf J_\lambda(u_n) = \lim J_\lambda(u_n) = \mu_1(\lambda)$.

Ainda, pelo Teorema A.6, $\Upsilon(u_n) \to \Upsilon(u_0)$ e, como $(u_n) \subset \mathcal{S} \subset W$, $\Upsilon(u_n) = 0$ em Γ_2, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\Upsilon(u_0) = 0$ em Γ_2, ou seja, $u_0 \in W$. Além do mais, da convergência e da continuidade da norma $||\cdot||_p$, $||u_0||_p = 1$. Logo, $u_0 \in \mathcal{S}$ e $J_\lambda(u_0) = \mu_1(\lambda)$, provando que μ_1 é atingido.

Afirmação 2: μ_1 é autovalor principal para (3.1.1).

Comecemos definindo $\beta : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, pondo $\beta(u) = ||u||_p^p$. Então, utilizando processos similares aos do Lema 2.1.4 e da Proposição **??**, concluímos que β e J_λ são de classe C^1, e que suas derivadas de Fréchet são, respectivamente,

$$J'_\lambda(u)(v) = p\int_\Omega [|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + V|u|^{p-2}uv]dx - p\lambda\left(\int_\Omega m(x)|u|^{p-2}uv\, dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|u|^{p-2}uv d\rho\right),$$

e

$$\beta'(u)(v) = p\int_\Omega |u|^{p-2}uv dx, \ \forall\, v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Com isso, u_0 é extremo de J_λ em $\mathcal{S} = \beta^{-1}(\{1\}) = \beta^{-1}(\beta(u_0))$ e, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, ocorre apenas uma dentre as alternativas abaixo:

(a) $\beta'(u_0)(v) = 0$, para todo $v \in W$;

(b) existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $J'_\lambda(u_0)(v) = \mu\beta'(u_0)(v)$, para todo $v \in W$.

Temos que (a) não ocorre, pois $u_0 \in \mathcal{S}$ e $\beta'(u_0)(u_0) = p \int\limits_{\Omega} |u_0|^p dx = p \neq 0$. Deste modo, vale (b). Logo, $(u_0, \mu) \in W \times \mathbb{R}$ satisfaz (3.0.3). Além disso,

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) = J_\lambda(u_0) &= \int\limits_{\Omega} [|\nabla u_0|^p + V|u_0|^p] dx - \lambda \left(\int\limits_{\Omega} m|u_0|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma |u_0|^p d\rho \right) \\ &= \mu \int\limits_{\Omega} |u_0|^p dx = \mu. \end{aligned}$$

Portanto, $\mu_1(\lambda) = \mu$ é um autovalor para (3.1.1), com autofunção associada u_0.

Finalmente, por $J_\lambda(|u_0|) = J_\lambda(u_0)$, por (3.1.1) e pelos Princípios Forte do Máximo e de Hopf, enunciados em Vázquez (1984), concluímos que $\mu_1(\lambda)$ é principal e $u_0 > 0$ em Γ_1.

Afirmação 3: μ_1 é o menor autovalor para o problema (3.1.1).

Com efeito, suponhamos que $(\varphi, \tilde{\mu}) \in W \times \mathbb{R}$ seja uma solução fraca para (3.1.1) e que $\tilde{\mu} < \mu_1$. Por definição, $\varphi \in W - \{0\}$. Desta forma, $||\varphi||_p > 0$ e, definindo $\varphi_1 = \dfrac{\varphi}{||\varphi||_p}$, temos que $||\varphi_1||_p = 1$ e $\varphi_1 \in \mathcal{S}$. Disso, $J_\lambda(\varphi_1) = \tilde{\mu} < \mu_1$, contrariando a minimalidade de $\mu_1 = \inf\limits_{u \in \mathcal{S}} J_\lambda(u)$. Consequentemente, μ_1 é o menor autovalor para (3.0.1).

Afirmação 4: μ_1 é simples.

Consideremos $v, w \in W$ duas autofunções distintas associadas ao mesmo autovalor μ_1, com w L^p-normalizada. Como μ_1 é principal, podemos supor $v > 0$, $w > 0$ em Ω.

Agora, para cada $\eta > 0$, consideremos $\dfrac{w^p}{(v+\eta)^{p-1}} \in W$. Como v, w são autofunções para (3.1.1), temos as seguintes igualdades

(i)

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \left(\frac{w^p}{(v+\eta)^{p-1}} \right) + (V - \lambda m)|v|^{p-2} v \left(\frac{w^p}{(v+\eta)^{p-1}} \right) dx = \\ &= \mu_1(\lambda) \int\limits_{\Omega} |v|^{p-2} v \left(\frac{w^p}{(v+\eta)^{p-1}} \right) dx + \lambda \int\limits_{\Gamma_1} \sigma |v|^{p-2} v \left(\frac{w^p}{(v+\eta)^{p-1}} \right) d\rho; \end{aligned}$$

(ii) $\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^p (V - \lambda m)|w|^p dx = \mu_1(\lambda) \int\limits_{\Omega} |w|^p dx + \lambda \int\limits_{\Gamma_1} \sigma |w|^p d\rho$ e $||w||_p = 1$.

Assim, pela Identidade de Picone,

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_{\Omega} R(w, v+\eta) &= \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx - \int_{\Omega} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \left(\frac{w^p}{(v+\eta)^{p-1}} \right) dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx + \int_{\Omega} (V - \lambda m)|v|^{p-2} v \left(\frac{w^p}{(v+\eta)^{p-1}} \right) dx \\
&- \mu_1(\lambda) \int_{\Omega} |v|^{p-2} v \left(\frac{w^p}{(v+\eta)^{p-1}} \right) dx - \lambda \int_{\Gamma_1} \sigma |v|^{p-2} v \left(\frac{w^p}{(v+\eta)^{p-1}} \right) d\rho
\end{aligned}
$$

Fazendo $\eta \to 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega} R(w, v) dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx + \int_{\Omega} (V - \lambda m)|v|^{p-1} \left(\frac{w^p}{v^{p-1}} \right) dx - \mu_1(\lambda) \int_{\Omega} |v|^{p-1} \left(\frac{w^p}{v^{p-1}} \right) dx \\
&- \lambda \int_{\Gamma_1} \sigma |v|^{p-1} \left(\frac{w^p}{v^{p-1}} \right) d\rho \overset{\text{(ii)}}{=} 0.
\end{aligned}
$$

De outro modo, $\int_{\Omega} R(w, v) dx = 0$, donde $R(w, v) = 0$ q.t.p. em Ω e, pela Identidade de Picone, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $w = cv$. Logo, μ_1 é simples.

Afirmação 5: μ_1 é o único autovalor principal para (3.1.1).

Suponhamos, por absurdo, que $\tilde{\mu}$ seja outro autovalor principal para (3.1.1), com autofunção associada w. Por μ_1 ser o menor autovalor de (3.1.1), temos $\mu_1 < \tilde{\mu}$. Assim, $\mu_1 - \tilde{\mu} < 0$. Utilizando cálculos similares aos da Afirmação 4, com w e u_0, obtemos

$$
0 \leq \int_{\Omega} R(u_0, w) = (\mu_1 - \tilde{\mu}) ||u_0||_p^p = \mu_1 - \tilde{\mu} < 0.
$$

Logo, $\tilde{\mu} = \mu_1$.

∎

Com base na proposição anterior, podemos considerar a função $\mu_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $\lambda \in \mathbb{R}$ associa o autovalor principal $\mu_1(\lambda)$ para (3.1.1). Essa função é, por definição, a **autocurva associada ao problema (3.0.1)**.

Antes de verificarmos algumas das propriedades que a mesma possui, provemos um lema e uma proposição que serão úteis no transcorrer desse trabalho.

Lema 3.1.2. Se $\sigma^- \not\equiv 0$ ou $m^- \not\equiv 0$, então existe $u_0 \in W$ tal que $supp\ u_0 \subset \Omega^-$ e $supp\ \Upsilon(u_0) \subset \Gamma_1^-$, com

$$\int_\Omega m|u_0|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|u_0|^p d\rho < 0. \tag{3.1.6}$$

Demonstração: Iremos separar a demonstração em dois casos.

Caso 1: Suponhamos que $m^- \not\equiv 0$. Então, podemos considerar $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, de modo que $u_1 \not\equiv 0$ e $supp\ u_0 \subset \Omega_-$. Então, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\int_\Omega m|u_0|^p dx < 0$. Além disso, por $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\Upsilon(u_0) = 0$ na $\partial\Omega$, donde $\Upsilon(u_0) = \emptyset \subset \Gamma_1^-$. Ainda,

$$\int_\Omega m|u_0|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|u_0|^p d\rho = \int_\Omega m|u_0|^p dx < 0.$$

Caso 2: Suponhamos que $m^- \equiv 0$ e $\sigma^- \not\equiv 0$. De outro modo, $|\Gamma_1^-| > 0$. Assim, consideremos $K \subset \Gamma_1^-$ e $\psi \in C^\infty(\Gamma_1)$, com $\psi \geq 0$, a regularização da função característica de K, χ_K, de modo que $supp\ \psi \subset \Gamma_1^-$. Ponha, ainda, $a = \int_{\Gamma_1} \sigma|\psi|^p d\rho < 0$.

Pela sobrejetividade de Υ, consideremos $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ (veja Observação 3.1.2), com $v \geq 0$, tal que $\Upsilon(v) = \psi$. Na sequência, para todo $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, consideremos $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; dist(x, \Gamma_1) > \varepsilon\}$ e a função $\xi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definida por

$$\xi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1\ , \text{ se } x \in \Omega_\varepsilon \\ 0\ , \text{ se } x \in \mathbb{R}^N - \Omega_{\varepsilon/2} \\ \beta_x\ , \text{ se } x \in \Omega_{\varepsilon/2} - \Omega_\varepsilon \end{cases},$$

onde $\beta_x \in [0,1]$ de modo que $\xi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Com isso, $u_0 = (1 - \xi_\varepsilon)v$ satisfaz

$$u_0(x) = \begin{cases} 0\ , \text{ se } x \in \Omega_\varepsilon \\ v\ , \text{ se } x \in \mathbb{R}^N - \Omega_{\varepsilon/2} \\ (1-\beta_x)v\ , \text{ se } x \in \Omega_{\varepsilon/2} - \Omega_\varepsilon \end{cases}.$$

Assim, $\Upsilon(u_0) = 0$, em Ω_ε, $\Upsilon(u_0) = \Upsilon(v) = \psi$, em $\mathbb{R}^N - \Omega_{\varepsilon/2}$ e, em $\Omega_{\varepsilon/2} - \Omega_\varepsilon$,

$$\Upsilon(u_0) = \Upsilon((1-\beta_x)v) = (1-\beta_x)\Upsilon(v) = (1-\beta_x)\psi.$$

Ainda, como $supp\ ((1-\beta_x)\psi) \subset supp\ (1-\beta_x) \cap supp\ \psi \subset supp\ \psi \subset \Gamma_1^-$, $\Upsilon(u_0) = 0$ em Γ_2, donde $u_0 \in W$.

Além disso, podemos escolher $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, de modo que

$$|\Omega - \Omega_{\varepsilon/2}| < \frac{-a}{4||m||_\infty ||v||_\infty^p} \quad \text{e} \quad |\Omega_{\varepsilon/2} - \Omega_\varepsilon| < \frac{-a}{4||m||_\infty ||1-\xi_\varepsilon||_\infty^p ||v||_\infty^p}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega m|u_0|^p dx \right| &\leq \int_\Omega |m||u_0|^p dx \\
&= \int_{\Omega - \Omega_{\varepsilon/2}} |m||v|^p dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |m| \cdot 0 \cdot |v|^p dx + \int_{\Omega_{\varepsilon/2} - \Omega_\varepsilon} |m||1-\xi_\varepsilon|^p |v|^p dx \\
&\leq ||m||_\infty ||v||_\infty^p |\Omega - \Omega_{\varepsilon/2}| + ||m||_\infty ||v||_\infty^p ||1-\xi_\varepsilon||_\infty^p |\Omega_{\varepsilon/2} - \Omega_\varepsilon| \\
&\leq -\frac{a}{4} - \frac{a}{4} = -\frac{a}{2} = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \sigma|\psi|^p d\rho = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \sigma|u_0|^p d\rho.
\end{aligned}$$

Desta forma, temos

$$\int_{\Gamma_1} \sigma|u_0|^p d\rho < 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega m|u_0|^p dx < -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \sigma|u_0|^p d\rho.$$

Logo, segue o resultado. ■

Observação 3.1.2. Como $\psi \in C^\infty(\Gamma_1)$ e Γ_1 é compacto, ψ é limitada, assim como suas derivadas de todas as ordens, ou seja, $\psi, \nabla\psi \in L^\infty(\Gamma_1)$. Consequentemente, $\psi \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$. Assim, pela definição da aplicação traço, neste caso, temos $\Upsilon : W^{1,\infty}(\Omega) \to W^{1,\infty}(\Gamma_1)$.

Observação 3.1.3. É possível demonstrar, de modo similar ao Lema 3.1.2, que, se $\sigma^+ \not\equiv 0$ ou $m^+ \not\equiv 0$, então existe $u_0 \in W$ tal que $supp\ u_0 \subset \Omega^+, supp\ \Upsilon(u_0) \subset \Gamma_1^+$ e

$$\int_\Omega m|u_0|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|u_0|^p d\rho > 0.$$

Proposição 3.1.1. Se $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{S}; I_2(u) = 0\}$ e o $\alpha(V,m) = \inf\{E_V(u); u \in \mathcal{A}\}$, então $\mathcal{A} \neq \emptyset$ se, e somente se, uma das seguintes alternativas é verificada:

(i) $m^\pm \not\equiv 0$;

(ii) $m^+ \not\equiv 0$ e $\sigma^- \not\equiv 0$, ou, $m^- \not\equiv 0$ e $\sigma^+ \not\equiv 0$;

(iii) $|\Omega^0| > 0$.

Além disso, em todos esses casos, o valor $\alpha(V, m)$ é atingido por alguma função $\xi_0 \in W$, com $\xi_0 \geq 0$.

Demonstração: Comecemos provando que, se vale alguma das alternativas (i), (ii) ou (iii), então $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

(i) Neste caso, $m^{\pm} \not\equiv 0$, isto é, $|\Omega^+| > 0$ e $|\Omega^-| > 0$. Assim, podemos considerar $K_1 \subset \Omega^-$ e $K_2 \subset \Omega^+$, e v_1, v_2 as regularizações das funções características, χ_{K_1} e χ_{K_2}, respectivamente, de modo que $supp\ v_1 \subset \Omega^-$ e $supp\ v_2 \subset \Omega^+$. Vale ressaltar que $v_1, v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Ainda, por construção, $\displaystyle\int_{supp\ v_1} m v_1^p dx = c_1 < 0$ e $\displaystyle\int_{supp\ v_2} m v_2^p dx = c_2 > 0$.

Defina, agora, $u_1 = \dfrac{v_1}{(-c_1)^{1/p}}$ e $u_2 = \dfrac{v_2}{c_2^{1/p}}$. Deste modo, denotando as faixas de regularização de χ_{K_1} e χ_{K_2}, por F_1 e F_2, respectivamente, fazendo $|F_1| \to 0$ e $|F_2| \to 0$ e aplicando o Teorema H.2, obtemos $\displaystyle\int_{supp\ v_1} m|u_1|^p dx = -1$ e $\displaystyle\int_{supp\ v_2} m|u_2|^p dx = 1$. Tomando $\tilde{u} = u_1 + u_2$, temos $\tilde{u} \not\equiv 0$. Portanto, $u = \dfrac{\tilde{u}}{||\tilde{u}||_p} \in \mathcal{S}$ e

$$\int_{\Omega} m|u|^p dx = \frac{1}{||\tilde{u}||_p^p} \int_{\Omega} m|\tilde{u}|^p dx = \frac{1}{||\tilde{u}||_p^p} \left(\int_{supp\ v_1} m|u_1|^p dx + \int_{supp\ v_2} m|u_2|^p dx \right) = 0.$$

Logo, $u \in \mathcal{A}$ e, assim, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

ii) Façamos o caso em que $m^+ \not\equiv 0$ e $\sigma^- \not\equiv 0$. O outro caso segue de maneira similar. Consideremos, como no Lema 3.1.2, $\psi \in C^{\infty}(\Gamma_1)$, com $\psi \geq 0$, tal que $a = \displaystyle\int_{\Gamma_1} \sigma|\psi|^p d\rho < 0$, $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\Upsilon(v) = \psi$ e $u_0 = (1 - \xi_\varepsilon)v$.

Podemos escolher $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que $|\Omega_\varepsilon \cap \Omega^+| > 0$, onde $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; dist(x, \Gamma_1) > \varepsilon\}$. Consideremos, assim, $w_1 \in W_0^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$, com $w_1 \geq 0$ em Ω_ε, de modo que $supp\ w_1 \subset \Omega_\varepsilon \cap \Omega^+$, tenha medida positiva. Então, $\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} m w_1^p dx = c > 0$ e, tomando $w = \dfrac{(-a)^{1/p} w_1}{c^{1/p}}$, temos $\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} m w^p dx = -a$.

Agora, notando que $u_0 \equiv 0$ em Ω_ε e $supp\, w \subset \Omega_\varepsilon$, $supp\, u_0 \cap supp\, w = \emptyset$ e segue

$$\int_\Omega m|w+u_0|^p dx = \int_{\Omega_\varepsilon} m|w+u_0|^p dx + \int_{\Omega_{\varepsilon/2}-\Omega_\varepsilon} m|w+u_0|^p dx + \int_{\Omega-\Omega_{\varepsilon/2}} m|w+u_0|^p dx$$
$$= -a + \int_{\Omega_{\varepsilon/2}-\Omega_\varepsilon} m|1-\xi_\varepsilon|^p|v|^p dx + \int_{\Omega-\Omega_{\varepsilon/2}} m|v|^p dx.$$

Ao fazermos $\varepsilon \to 0$, $|\Omega_{\varepsilon/2} - \Omega_\varepsilon| \to 0$ e $|\Omega - \Omega_{\varepsilon/2}| \to 0$, já que Ω é limitado. Logo, pelo Teorema H.2, podemos considerar $\displaystyle\int_\Omega m|w+u_0|^p dx = -a$.

Ainda,
$$\int_{\Gamma_1} \sigma|w+u_0|^p d\rho = \int_{\Gamma_1} \sigma|u_0|^p d\rho = \int_{\Gamma_1} \sigma|v|^p d\rho = \int_{\Gamma_1} \sigma\psi^p d\rho = a.$$

Por isso, $\displaystyle\int_\Omega m|w+u_0|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|w+u_0|^p d\rho = 0$. Além do mais, como $w + u_0 \not\equiv 0$, $||w+u_0||_p \neq 0$. Assim, $\dfrac{w+u_0}{||w+u_0||_p} \in \mathcal{S}$ e, consequentemente, $\dfrac{w+u_0}{||w+u_0||_p} \in \mathcal{A}$. Portanto, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

iii) Se $|\Omega^0| > 0$, então podemos considerar $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que $u_1 \not\equiv 0$ em Ω_0 e $supp\, u_1 \subset \Omega_0$, tem medida positiva. Ora, $\displaystyle\int_\Omega m|u|^p dx = \int_{\Omega^0} m|u|^p dx + \int_{\Omega-\Omega^0} m|u|^p dx = 0$. Disso, segue que $\dfrac{u}{||u||_p} \in \mathcal{S}$ e, assim, $\dfrac{u}{||u||_p} \in \mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Agora, mostremos a recíproca, ou seja, mostremos que se $\mathcal{A} \neq \emptyset$, então vale algum dentre os itens (i), (ii) ou (iii). Por $\mathcal{A} \neq \emptyset$, existe $u \in \mathcal{A}$, ou seja, $||u||_p = 1$ e $I_2(u) = 0$. Consideraremos três casos distintos.

1º **caso:** Suponhamos que não vale o item (i). Então, $m^+ \equiv 0$ ou $m^- \equiv 0$. Se $m^\pm \equiv 0$, então $m \equiv 0$ e, consequentemente, $|\Omega^0| = |\Omega| > 0$, provando que vale o item (iii). Agora, se $m^+ \equiv 0$ e $m^- \not\equiv 0$, por $I_2(u) = 0$, não pode ocorrer $\sigma^+ \equiv 0$. Logo, vale o item (ii). Caso ocorra $m^- \equiv 0$ e $m^+ \not\equiv 0$, procedemos de maneira análoga e concluímos que vale o item (ii).

2º **caso:** Suponhamos que não vale o item (ii). Então, temos que $m^+ \equiv 0$ ou $\sigma^- \equiv 0$, e, $m^- \equiv 0$ ou $\sigma^+ \equiv 0$. Analisemos cada subcaso.

(a) Se $m^+ \equiv 0$ e $m^- \equiv 0$, então $m \equiv 0$ em Ω e vale o item (iii).

(b) Se $m^+ \equiv 0$ e $\sigma^+ \equiv 0$. Então, $m \leq 0$ e $\sigma \leq 0$. Mas, por $u \in \mathcal{A}$, temos $I_2(u) = 0$. Assim, devemos ter $m \equiv 0$ em Ω e $\sigma \equiv 0$ em Γ_1. Portanto, novamente, vale o item (iii).

c) Se $m^- \equiv 0$ e $\sigma^- \equiv 0$. Então, $m \geq 0$ e $\sigma \geq 0$ e, de maneira análoga ao subcaso (b), verificamos a validade do item (iii).

d) Se $\sigma^+ \equiv 0$ e $\sigma^- \equiv 0$, então $\sigma \equiv 0$ em Γ_1. Disso e de $I_2(u) = 0$, concluímos que $\int_\Omega m|u|^p dx = 0$. Agora, como $||u||_p = 1$, temos que ocorre uma dentre as duas opções, ou $m^\pm \not\equiv 0$ ou $m \equiv 0$ em Ω. Portanto, se verifica a validade do item (i) ou do item (iii), respectivamente.

3º **caso:** Suponhamos que não vale o item (iii), ou seja, $|\Omega^0| = 0$. Desta forma, pelo menos um dentre os conjuntos Ω^+ e Ω^- possui medida positiva, isto é, $|\Omega^+| > 0$ ou $|\Omega^-| > 0$, donde $m^+ \not\equiv 0$ ou $m^- \not\equiv 0$, respectivamente. Novamente, faz-se necessário considerar alguns subcasos:

(a) Primeiramente, se $m^+ \not\equiv 0$ e $m^- \not\equiv 0$, então se verifica o item (i) e não há o que demonstrar. Assim, nos próximos dois subcasos, suporemos apenas um dentre os dois ocorrendo, a saber, $m^+ \not\equiv 0$ e $m^- \equiv 0$ ou $m^+ \equiv 0$ e $m^- \not\equiv 0$.

(b) Se $m^+ \not\equiv 0$ e $\sigma^- \equiv 0$, então $\int_\Omega m|u|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|u|^p d\rho > 0$, o que contraria o fato de $u \in \mathcal{A}$. Portanto, $\sigma^- \not\equiv 0$ e vale o item (ii).

c) Se $m^- \not\equiv 0$ e $\sigma^+ \equiv 0$, então $\int_\Omega m|u|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|u|^p d\rho < 0$, o que contraria o fato de $u \in \mathcal{A}$. Portanto, $\sigma^+ \not\equiv 0$ e vale o item (ii).

Logo, fica provada a primeira parte da proposição em questão. Na sequência, verificaremos que o valor $\alpha(V, m)$ é atingido.

Primeiramente, notamos que, pela primeira parte, verificada alguma das condições (i), (ii) ou (iii), temos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Consideremos, então, uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{A}$ tal que $E_V(u_n) \to \alpha(V, m)$ **(I)**. Assim, utilizando a desigualdade (3.1.5) do Teorema 3.1.1, com $\lambda = 0$, obtemos $E_V(u_n) \geq \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx - ||V||_\infty$. Disso e de (I), $(||\nabla u_n||_p^p) \subset \mathbb{R}$ é limitada e, por $||u_n||_p^p = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que $(u_n) \subset W$ é limitada. Pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, existe $u_0 \in W$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em W e $u_n \to u_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$.

Por $(u_n) \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ e $1 = \lim ||u_n||_p = ||u_0||_p = 1$, $u_0 \in \mathcal{S}$. Além disso, por $||u_n||_p^p \to ||u_0||_p^p$, pelos Teoremas B.3, B.4 e H.4, e pela Desigualdade de Hölder, temos que, a menos da passagem a uma subsequência de (u_n), que

$$\left| \int_\Omega m|u_n|^p dx - \int_\Omega m|u_0|^p dx \right| \leq ||m||_\infty || |u_n|^p - |u_0|^p ||_1 \to 0.$$

Analogamente, vê-se que, a menos de considerarmos uma subsequência, $\int\limits_{\Gamma_1} \sigma|u_n|^p d\rho \to \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|u_0|^p d\rho$. Portanto, $u_0 \in \mathcal{A}$.

Ainda, por E_V ser f.s.s.i., temos $E_V(u_0) \leq \liminf E_V(u_n) = \lim E_V(u_n) = \alpha(V,m)$ e, por $u_0 \in \mathcal{A}$, concluímos que $E_V(u_0) = \alpha(V,m)$. Logo, tomando $\xi_0 = |u_0|$, temos que $\alpha(V,m)$ é atingido em $\xi_0 \in W$, com $\xi_0 \geq 0$, como queríamos.

■

Observação 3.1.4. Quando falha um dentre os três itens da proposição anterior, o conjunto $\mathcal{A}$ será vazio e, portanto, $\alpha(V,m) = +\infty$. Por exemplo, se tivermos $m > 0$ q.t.p. em Ω ($m^- \equiv 0$ e $|\Omega_0| = 0$) e $\sigma \geq 0$ em Γ_1 ($\sigma^- \equiv 0$), então nenhum dos itens da proposição é verificado e, por se tratar de uma equivalência, $\mathcal{A} = \emptyset$ e $\alpha(V,m) = +\infty$.

Provaremos um resultado similar ao da Proposição 2.2.2, no qual verificamos propriedades análogas para a autocurva associada a (3.0.1).

Proposição 3.1.2. Suponhamos $m \not\equiv 0$ ou $\sigma \not\equiv 0$. Então:

(1) μ_1 é côncava e diferenciável, com derivada dada por

$$\mu_1'(\lambda) = -\left(\int\limits_{\Omega} m\varphi_\lambda^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma\varphi_\lambda^p d\rho\right). \tag{3.1.7}$$

(2) Se $m^+ \not\equiv 0$ em Ω, ou $\sigma^+ \not\equiv 0$ em Γ_1, então $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mu_1(\lambda) = -\infty$.

(3) Se $m^- \not\equiv 0$ em Ω, ou $\sigma^- \not\equiv 0$ em Γ_1, então $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \mu_1(\lambda) = -\infty$.

(4) Se $m \geq 0$ em Ω e $\sigma \geq 0$ em Γ_1 (respectivamente, $m \leq 0$ em Ω e $\sigma \leq 0$ em Γ_1), então μ_1 é decrescente (respectivamente, crescente).

(5) $\alpha(V,m) = \sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda)$.

Demonstração: 1) Notamos que $J_\lambda(u) = E_V(u) - \lambda I_2(u) = E_{V-\lambda m}(u) - \lambda \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|u|^p d\rho$. Já provamos, no capítulo anterior, que $E_{V-\lambda m}$ é côncavo em λ. Da mesma forma, definindo $\beta(u) = \lambda \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|u|^p d\rho$, temos que β é côncavo em λ. Consequentemente, J_λ é côncavo em λ. Portanto, das propriedades de ínfimo, concluímos que μ_1 é côncava. Ainda, por μ_1 ser côncava e estar definida em $\mathbb{R}$, temos que μ_1 é contínua.

Provemos, agora, que μ_1 é diferenciável e que a equação (3.1.7) é válida. Para tanto, consideremos uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, tal que $\lambda_n \to \lambda$, e $\varphi_{\lambda_n}, \varphi_\lambda$ as autofunções positvas e L^p-normalizadas, associadas a $\mu_1(\lambda_n)$ e $\mu_1(\lambda)$, respectivamente.

Pela desigualdade (3.1.5) do Teorema 3.1.1, aplicada a λ_n e φ_{λ_n}, para $\varepsilon > 0$, dado,

$$\mu_1(\lambda_n) = J_\lambda(\varphi_{\lambda_n}) \geq (1 - \varepsilon|\lambda_n|||\sigma||_{\infty,\Gamma_1})|||\nabla\varphi_{\lambda_n}|||_p^p - ||V||_\infty - |\lambda_n|(||m||_\infty + c(\varepsilon)||\sigma||_{\infty,\Gamma_1}).$$

Como $\lambda_n \to \lambda$ e μ_1 é contínua, $\mu_1(\lambda_n) \to \mu_1(\lambda)$, ou seja, $(\lambda_n), (\mu_1(\lambda_n)) \subset \mathbb{R}$ são limitadas. Também, para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, $1 - \varepsilon|\lambda_n|||\sigma||_{\infty,\Gamma_1} > 0$. Por isso, $(||\nabla\varphi_{\lambda_n}||_p^p) \subset \mathbb{R}$ é limitada. Logo, $(||\varphi_{\lambda_n}||^p) \subset \mathbb{R}$ é limitada e, pela equivalência das normas, (φ_{λ_n}) é limitada em W.

Assim, pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, existe $\varphi_0 \in W$ tal que $\varphi_{\lambda_n} \rightharpoonup \varphi_0$ em W e $\varphi_{\lambda_n} \to \varphi_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$. Disso e do Teorema B.5, $\varphi_{\lambda_n} \to \varphi_0$ em medida e, por $\varphi_{\lambda_n} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_0 \geq 0$. Além do mais, como $||\varphi_{\lambda_n}||_p = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $||\varphi_0||_p = 1$. Agora, por J_λ ser f.s.s.i.,

$$\mu_1(\lambda) = \lim \mu_1(\lambda_n) = \lim J_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}) \geq J_\lambda(\varphi_0) = E_{V-\lambda m}(\varphi_0) - \lambda \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_0|^p d\rho \geq \mu_1(\lambda),$$

ou seja, $J_\lambda(\varphi_0) = \mu_1(\lambda) = \inf\limits_{u \in \mathcal{S}} J_\lambda(u)$. Desta forma, φ_0 é um extremo de J_λ restrito a $\mathcal{S} = \beta^{-1}(\beta(\varphi_0))$ e, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, concluímos que φ_0 é uma autofunção para o problema (3.1.1) associada a $\mu_1(\lambda)$. Pelo Teorema 3.1.1, $\varphi_\lambda = c\varphi_0$, para algum $c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$. Ainda, $1 = ||\varphi_\lambda||_p = ||c\varphi_0||_p = |c|^p||\varphi_0||_p = |c|^p$, o que implica em $c = 1$ ou $c = -1$ mas, como $\varphi_0 \geq 0$ e $\varphi_\lambda > 0$, $\varphi_\lambda = \varphi_0$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda_n) &= E_{V-\lambda_n m}(\varphi_{\lambda_n}) - \lambda_n \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_n}|^p d\rho \\ &\geq \mu_1(\lambda) + (\lambda - \lambda_n) \int\limits_{\Omega} m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx + (\lambda - \lambda_n) \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_n}|^p d\rho. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\mu_1(\lambda_n) - \mu_1(\lambda) \geq (\lambda - \lambda_n) \int\limits_{\Omega} m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx + (\lambda - \lambda_n) \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_n}|^p d\rho. \tag{3.1.8}$$

Analogamente, vemos que

$$\mu_1(\lambda) - \mu_1(\lambda_n) \geq (\lambda_n - \lambda) \int_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx + (\lambda_n - \lambda) \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_\lambda|^p d\rho. \tag{3.1.9}$$

Agora, se $\lambda_n > \lambda$, então $\lambda_n - \lambda > 0$ e, pela equação (3.1.8), obtemos

$$\frac{\mu_1(\lambda_n) - \mu_1(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \leq \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_n}|^p d\rho,$$

o que implica em

$$\frac{\mu_1(\lambda_n) - \mu_1(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} \geq - \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx - \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_n}|^p d\rho. \tag{3.1.10}$$

e, pela equação (3.1.9),

$$\frac{\mu_1(\lambda) - \mu_1(\lambda_n)}{\lambda_n - \lambda} \geq \int_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_\lambda|^p d\rho,$$

donde

$$\frac{\mu_1(\lambda_n) - \mu_1(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} \leq - \int_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx - \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_\lambda|^p d\rho. \tag{3.1.11}$$

Das equações (3.1.10) e (3.1.11), temos

$$- \int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx - \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_n}|^p d\rho \leq \frac{\mu_1(\lambda_n) - \mu_1(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} \leq - \int_\Omega m|\varphi_\lambda|^p dx - \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_\lambda|^p d\rho.$$

No caso em que $\lambda_n < \lambda$, obtemos uma desigualdade similar. Assim, fazendo $n \to \infty$, obtemos o resultado desejado.

2) Consideremos dois casos, separadamente.

1º **caso:** Suponhamos $m^+ \not\equiv 0$. Assim, podemos escolher $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{S}$ tal que $\int_\Omega m|u_0|^p dx > 0$. Para construir tal função, podemos considerar uma bola de raio suficientemente pequeno, $B \subset \Omega^+$ e u_0 a regularização de χ_B, L^p-normalizada. Com isso,

$$\mu_1(\lambda) \leq J_\lambda(u_0) = E_V(u_0) - \lambda \int_\Omega m|u_0|^p dx \overset{\lambda \to \infty}{\to} -\infty.$$

2º **caso:** Suponhamos que $m^+ \equiv 0$ e $\sigma^+ \not\equiv 0$ em Γ_1. Pela Observação 3.1.3, temos que existe $\tilde{u}_0 \in W$ tal que

$$\int\limits_{\Omega} m|\tilde{u}_0|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\tilde{u}_0|^p d\rho > 0.$$

Tomando $u_0 = \dfrac{\tilde{u}_0}{||\tilde{u}_0||_p}$, $u_0 \in \mathcal{S}$ e

$$\mu_1(\lambda) \leq J_\lambda(u_0) = E_V(u_0) - \lambda \left(\int\limits_{\Omega} m|u_0|^p dx - \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|u_0|^p d\rho \right) \overset{\lambda\to\infty}{\to} -\infty.$$

Logo, dos dois casos anteriores, concluímos que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mu_1(\lambda) = -\infty$.

3) A demonstração de (3) segue de maneira similar à demonstração de (2) e, portanto, será omitida.

4) Se $m \geq 0$ em Ω e $\sigma \geq 0$ em Γ_1, então, do fato de $m \not\equiv 0$ e $\sigma \not\equiv 0$, vem que $m^+ \not\equiv 0$ e $\sigma^+ \not\equiv 0$. Disso, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica

$$\int\limits_{\Omega} m|\varphi_\lambda|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_\lambda|^p d\rho > 0.$$

Portanto, se $\lambda_1 < \lambda_2$,

$$\begin{aligned}\mu_1(\lambda_1) &= E_V(\varphi_{\lambda_1}) - \lambda_1 \left(\int\limits_{\Omega} m|\varphi_{\lambda_1}|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_1}|^p d\rho \right) \\ &> E_V(\varphi_{\lambda_1}) - \lambda_2 \left(\int\limits_{\Omega} m|\varphi_{\lambda_1}|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_1}|^p d\rho \right) \geq \mu_1(\lambda_2).\end{aligned}$$

Logo, μ_1 é decrescente. De modo análogo, podemos provar que μ_1 é crescente, quando $m \leq 0$ em Ω e $\sigma \leq 0$ em Γ_1.

5) Primeiramente, notamos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ e, se $u \in \mathcal{A}$, então $E_V(u) = J_\lambda(u)$. Disso, segue que $\{E_V(u); u \in \mathcal{A}\} \subset \{J_\lambda(u); u \in \mathcal{S}\}$. Consequentemente, $\mu_1(\lambda) \leq \alpha(V, m)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) \leq \alpha(V, m)$. Para provarmos que vale a igualdade, consideraremos dois casos em separado.

Caso 1: $m \geq 0$ e $\sigma \geq 0$ ou $m \leq 0$ e $\sigma \leq 0$.

Faremos a demonstração para $m \geq 0$ em Ω e $\sigma \geq 0$ em Γ_1, visto que o outro caso segue de maneira análoga. Pelo item (4) desta proposição, μ é decrescente, donde

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} \mu_1(\lambda). \tag{3.1.12}$$

Neste sentido, consideremos uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, tal que $\lambda_n \to -\infty$. Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, φ_{λ_n} a autofunção associada a $\mu_1(\lambda_n)$, L^p-normalizada.

Faz-se necessário, ainda, levar em consideração dois subcasos distintos.

a) $m > 0$ q.t.p. em Ω.

Pela Observação 3.1.4, $\alpha(V, m) = +\infty$. Suponhamos $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) < +\infty$ **(I)**.

Ora, pela Desigualdade de Hölder

$$\left|\int_\Omega V|\varphi_{\lambda_n}|^p dx\right| \leq ||V||_\infty ||\varphi_{\lambda_n}||_p^p = ||V||_\infty, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} -||V||_\infty \leq \int_\Omega V|\varphi_{\lambda_n}|^p dx &\Leftrightarrow ||\varphi_{\lambda_n}||_p^p - ||\varphi_{\lambda_n}||_p^p + ||\nabla\varphi_{\lambda_n}||_p^p - ||V||_\infty \leq E_V(\varphi_{\lambda_n}) \\ &\Leftrightarrow -1 + ||\varphi_{\lambda_n}||^p - ||V||_\infty \leq E_V(\varphi_{\lambda_n}), \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda_n) &= E_V(\varphi_{\lambda_n}) - \lambda_n \left(\int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_n}|^p d\rho\right) \\ &\geq -1 + ||\varphi_{\lambda_n}||^p - ||V||_\infty, \forall \lambda_n \leq 0. \end{aligned}$$

Por conseguinte, de (3.1.12) e de (I), $(\varphi_{\lambda_n}) \subset W$ é limitada. Assim, pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, a menos da passagem a uma subsequência, se necessário, existe $\varphi \in W$ tal que $\varphi_{\lambda_n} \rightharpoonup \varphi$ em W e $\varphi_{\lambda_n} \to \varphi$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$. Disso,

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} \mu_1(\lambda_n) = \lim_{n\to+\infty} \left[E_V(\varphi_{\lambda_n}) - \lambda_n \left(\int_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_n}|^p d\rho\right)\right]. \tag{3.1.13}$$

e, por $m > 0$ q.t.p. em Ω, $\sigma \geq 0$ em Γ_1 e $\varphi_{\lambda_n} > 0$ em $\Omega \cup \Gamma_1$, $\int\limits_\Omega m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_n}|^p d\rho > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ **(II)**. Além disso, a menos de considerarmos uma subsequência, se necessário, os Teoremas B.3, B.4 e H.4 e a Desigualdade de Hölder, nos garantem que

$$\int_{\Omega} m|\varphi_{\lambda_n}|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_n}|^p d\rho \to \int_{\Omega} m|\varphi|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi|^p d\rho.$$

Desta forma, por (II), $\int_{\Omega} m|\varphi|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi|^p d\rho \geq 0$. Se $\int_{\Omega} m|\varphi|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi|^p d\rho > 0$, então, por $\lim E_V(\varphi_{\lambda_n}) \geq \liminf E_V(\varphi_{\lambda_n}) \geq E_V(\varphi)$, por $\lambda_n \to -\infty$ e por (3.1.13), $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = +\infty$, o que contaria nossa suposição de que $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) < +\infty$. Por conseguinte, $\int_{\Omega} m|\varphi|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi|^p d\rho = 0$. Além disso, por $||\varphi_{\lambda_n}||_p = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $||\varphi||_p = 1$.

Finalmente, por $||\varphi||_p = 1$, $\varphi = 0$ q.t.p. em Ω não ocorre. E, por $m > 0$ em Ω e $\sigma \geq 0$ em Γ_1, vem que $\int_{\Omega} m|\varphi|^p dx = 0$. Portanto, $m = 0$ q.t.p. em Ω, o que é um absurdo. Logo, $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = +\infty$ e segue o resultado, para esse caso.

b) $|\Omega_0| > 0$.

Pelo item (iii) da Proposição 3.1.1, $\alpha(V, m) < +\infty$ e existe $\xi_0 \in \mathcal{A}$, com $\xi_0 \geq 0$, tal que $E_V(\xi_0) = \alpha(V, m)$. Deste modo, por $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) \leq \alpha(V, m)$, μ_1 é limitada superiormente. Repetindo os argumentos do subcaso (a), obtemos

$$\int_{\Omega} m|\varphi|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi|^p d\rho = 0,$$

donde $\varphi \in \mathcal{A}$ e, novamente, pelo cômputo feito no subcaso (a),

$$\alpha(V, m) \geq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} \mu_1(\lambda_n) \geq E_V(\varphi) \geq \alpha(V, m).$$

Portanto, $\alpha(V, m) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda)$, como queríamos.

Caso 2: $m^+ \not\equiv 0$ e $\sigma^- \not\equiv 0$ ou $m^- \not\equiv 0$ e $\sigma^+ \not\equiv 0$.

Em ambos os casos, a Proposição 3.1.1, nos garante que $\alpha(V, m) < +\infty$ e que existe $\xi_0 \in \mathcal{A}$, com $\xi_0 \geq 0$, tal que $E_V(\xi_0) = \alpha(V, m)$. Dos itens (1), (2) e (3) dessa proposição, decorre que μ_1 é limitada superiormente. Por conseguinte, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_1(\lambda_0) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda)$. Por μ_1 ser côncava, λ_0 é um ponto de máximo absoluto de μ_1 e, assim, $\mu_1'(\lambda_0) = 0$. Com isso,

$\int\limits_{\Omega} m|\varphi_{\lambda_0}|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_{\lambda_0}|^p d\rho = 0$. Portanto, $\varphi_{\lambda_0} \in \mathcal{A}$, e

$$\alpha(V,m) \leq E_V(\varphi_{\lambda_0}) = J_{\lambda_0}(\varphi_{\lambda_0}) = \mu_1(\lambda_0) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) \leq \alpha(V,m).$$

Logo, $\alpha(V,m) = \sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda)$ e segue o resultado.

■

Para finalizarmos esta seção, provaremos um resultado relacionando os zeros da autocurva com a existência de autovalores principais para o problema (3.0.1). Tal teorema será utilizado para provar o principal resultado da próxima seção.

Teorema 3.1.2. O número real λ é um autovalor principal de (3.0.1)se, e somente se, $\mu_1(\lambda) = 0$. Neste caso, as autofunções associadas a λ são múltiplos de φ_λ.

Demonstração: Suponhamos $\mu_1(\lambda) = 0$. Como ele é o único autovalor principal para (3.1.1), existe $\varphi_\lambda \in W$ tal que, para toda $v \in W$,

$$\int\limits_{\Omega} [|\nabla\varphi_\lambda|^{p-2}\nabla\varphi_\lambda \cdot \nabla v + (V-\lambda m)|\varphi_\lambda|^{p-2}\varphi_\lambda v]dx = 0\cdot \int\limits_{\Omega} |\varphi_\lambda|^{p-2}\varphi_\lambda v dx + \lambda \int\limits_{\Omega} \sigma|\varphi_\lambda|^{p-2}\varphi_\lambda v d\rho,$$

donde

$$\int\limits_{\Omega} [|\nabla\varphi_\lambda|^{p-2}\nabla\varphi_\lambda \cdot \nabla v + V|\varphi_\lambda|^{p-2}\varphi_\lambda v]dx = \lambda \int\limits_{\Omega} m|\varphi_\lambda|^{p-2}\varphi_\lambda v dx + \lambda \int\limits_{\Omega} \sigma|\varphi_\lambda|^{p-2}\varphi_\lambda v d\rho,\ \forall\, v \in W.$$

Portanto, λ é autovalor principal para (3.0.1). A simplicidade de λ é herdada da simplicidade de $\mu_1(\lambda)$. Reciprocamente, se λ é um autovalor principal para (3.0.1), com autofunção L^p-normalizada φ_λ, então, para toda $v \in W$,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} [|\nabla\varphi_\lambda|^{p-2}\nabla\varphi_\lambda \cdot \nabla v + V|\varphi_\lambda|^{p-2}\varphi_\lambda v]dx = 0 \cdot \int\limits_{\Omega} |\varphi_\lambda|^{p-2}\varphi_\lambda v dx + \lambda \int\limits_{\Omega} m|\varphi_\lambda|^{p-2}\varphi_\lambda v dx \\ + \lambda \int\limits_{\Omega} \sigma|\varphi_\lambda|^{p-2}\varphi_\lambda v d\rho.\end{aligned}$$

Consequentemente, 0 é autovalor principal para o problema (3.1.1) e, pelo Teorema 3.1.1, $\mu_1(\lambda) = 0$.

■

3.2 Existência de Autovalores Principais para o Problema (3.0.1)

No que segue, provaremos o principal resultado deste capítulo. Demonstraremos, aqui, sob quais condições o problema (3.0.1) possui ao menos um autovalor principal. Para tanto, faremos uso especialmente da Proposição 3.1.2, do Teorema 3.1.2 e do parâmetro real $\alpha(V, m)$.

Teorema 3.2.1. **(1)** Se m e σ têm (o mesmo) sinal constante, então existe um autovalor principal para (3.0.1) se, e somente se, $\alpha(V, m) > 0$. Mais precisamente:
(a) Se $m \geq 0$ em Ω e $\sigma \geq 0$ em Γ_1, então existe um único autovalor principal para (3.0.1) se, e somente se, $\alpha(V, m) > 0$. Neste caso, o autovalor é caracterizado por

$$\lambda_1(V, m, \sigma) = \lambda_1(V, m) = \min_{u \in M^+} E_V(u),$$

onde $M^+ = \{u \in W; I_2(u) = 1\} \neq \emptyset$.
(b) Se $m \leq 0$ em Ω e $\sigma \leq 0$ em Γ_1, então existe um único autovalor principal para (3.0.1) se, e somente se, $\alpha(V, m) > 0$. Neste caso, o autovalor é caracterizado por

$$\lambda_{-1}(V, m, \sigma) = \lambda_{-1}(V, m) = -\min_{u \in M^-} E_V(u),$$

onde $M^- = \{u \in W; I_2(u) = -1\} \neq \emptyset$.
(2) Se m e σ são definidas, mas com sinais opostos, ou uma delas é indefinida, então existe um autovalor principal para (3.0.1) se, e somente se, $\alpha(V, m) \geq 0$. Mais precisamente:
(a) Se $\alpha(V, m) > 0$, então (3.0.1) possui exatamente dois autovalores principais, $\lambda_{-1}(V, m) < \lambda_1(V, m)$, com cada um deles caracterizados como nos itens (a) e (b) de (1).
(b) Se $\alpha(V, m) = 0$, então o problema (3.0.1) possui um único autovalor principal, caracterizado por

$$\lambda_* = \inf_{u \in M^+} E_V(u) = -\inf_{u \in M^-} E_V(u).$$

Além disso, tais ínfimos não são atingidos e toda função $u \in \mathcal{A}$ satisfaz $E_V(u) = \alpha(V, m) = 0$ se, e somente se, $u \in \mathcal{S}$ é uma autofunção associada a λ_*.

Demonstração: Devido à demonstração do teorema consistir, basicamente, em uma adaptação da demonstração do Teorema 2.3.1, dos capítulos anteriores, apenas destacaremos algumas passagens do mesmo.
(1)(a) Para provar que "existe um autovalor principal para (3.0.1) se, e somente se, $\alpha(V, m) > 0$", utilizaremos o Teorema 3.1.2, os itens (1) e (2) da Proposição 3.1.2 e o fato de que $\alpha(V, m) >$

0 e adaptaremos a prova do Teorema 2.3.1. Em seguida, mostraremos que $\lambda_1(V,m) = \min\limits_{u \in M^+} E_V(u)$. Primeiramente, observamos que, pelo fato de $m^+ \not\equiv 0$, $M^+ \neq \emptyset$.

Agora, como $\lambda_1(V,m)$ é autovalor principal de (3.0.1), com autofunção associada $\varphi_{\lambda_1(V,m)}$, temos que $\mu_1(\lambda_1(V,m)) = 0$ e $E_V(\varphi_{\lambda_1(V,m)}) = \lambda_1(V,m)I_2(\varphi_{\lambda_1(V,m)})$. Pela definição de μ_1, vem que, para toda $u \in \mathcal{S}$, $J_{\lambda_1(V,m)}(u) \geq \mu_1(\lambda_1(V,m)) = 0$, donde $E_V(u) - \lambda_1(V,m)I_2(u) \geq 0$ e, consequentemente, $E_V(u) \geq \lambda_1(V,m)I_2(u)$.

Assim, pelos itens (1) e (4) da Proposição 3.1.2, temos

$$0 > \mu_1'(\lambda_1(V,m)) = -\left(\int\limits_{\Omega} m|\varphi_{\lambda_1(V,m)}|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma |\varphi_{\lambda_1(V,m)}|^p d\rho \right) = -I_2(\varphi_{\lambda_1(V,m)}),$$

ou seja, $I_2(\varphi_{\lambda_1(V,m)}) = k > 0$. Ora, $\tilde{\varphi} = \dfrac{\varphi_{\lambda_1(V,m)}}{k^{1/p}} \in M^+$. Com isso, $E_V(\tilde{\varphi}) = \lambda_1(V,m)I_2(\tilde{\varphi}) = \lambda_1(V,m)$. Por conseguinte, para toda $u \in M^+$, $E_V(u) \geq \lambda_1(V,m) = E_V(\tilde{\varphi})$. Logo, $\lambda_1(V,m) = \min\limits_{u \in M^+} E_V(u)$.

(b) Este caso é similar ao anterior. Para demonstrar a primeira parte, utilizamos o fato de que $\alpha(V,m) > 0$, o Teorema 3.1.2 e os itens (1) e (3) da Proposição 3.1.2. Para a segunda parte, repetimos os passos do caso anterior, aplicando os itens (1) e (4) da Proposição 3.1.2.

(2)(a) A prova desse item é similar à demonstração que consta no Teorema 2.3.1. Basta-nos notar que, em ambos os casos, os itens (2) e (3) da Proposição 3.1.2 são válidos, donde segue o resultado.

(b) Apesar deste caso também seguir uma ideia análoga a do Teorema 2.3.1, devido a sua demonstração ser um pouco mais delicada, daremos mais atenção ao mesmo.

Como $\alpha(V,m) = 0$, pela Proposição 3.1.2, existe um único $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_1(\lambda_0) = 0$ e, pelo Teorema 3.1.2, λ_0 é autovalor principal de (3.0.1), com autofunção associada φ_{λ_0}. Além disso, λ_0 é máximo absoluto de μ_1, donde $0 = \mu_1'(\lambda_0) = -I_2(\varphi_{\lambda_0})$, ou seja, $I_2(\varphi_{\lambda_0}) = 0$. Provaremos que $\lambda_0 = \inf\limits_{u \in M^+} E_V(u)$. Para tal, seja $u \in M^+$. Podemos supor $u \geq 0$, a menos de tomar seu módulo, se necessário. Definindo, para cada $T \in \mathbb{R}$, com $T > 0$, $u_T = \min\{u, T\}$, temos, por (3.1.2), por $\mu_1(\lambda_0) = 0$ e por $\varphi_{\lambda_0} > 0$,

$$\int\limits_{\Omega} \left[|\nabla \varphi_{\lambda_0}|^{p-2} \nabla \varphi_{\lambda_0} \cdot \nabla \left(\frac{u_T^p}{\varphi_{\lambda_0}^{p-1}} \right) + V|\varphi_{\lambda_0}|^{p-2}\varphi_{\lambda_0} \left(\frac{u_T^p}{\varphi_{\lambda_0}^{p-1}} \right) \right] dx =$$

$$\lambda_0 \int\limits_{\Omega} m(x)|\varphi_{\lambda_0}|^{p-2}\varphi_{\lambda_0} \left(\frac{u_T^p}{\varphi_{\lambda_0}^{p-1}} \right) dx + \lambda_0 \int\limits_{\Gamma_1} \sigma |\varphi_{\lambda_0}|^{p-2}\varphi_{\lambda_0} \left(\frac{u_T^p}{\varphi_{\lambda_0}^{p-1}} \right) d\rho,$$

ou seja,

$$\int\limits_{\Omega}\left[|\nabla\varphi_{\lambda_0}|^{p-2}\nabla\varphi_{\lambda_0}\cdot\nabla\left(\frac{u_T^p}{\varphi_{\lambda_0}^{p-1}}\right)\right]dx=-\int\limits_{\Omega}[|\nabla u_T|^p+Vu_T^p]dx+\lambda_0\int\limits_{\Omega}mu_T^p dx+\lambda_0\int\limits_{\Gamma_1}\sigma u_T^p d\rho.$$

Por isso e pela Identidade de Picone, vemos que

$$\begin{aligned}0\leq\int\limits_{\Omega}L(u_T,\varphi_{\lambda_0})dx&=\int\limits_{\Omega}R(u_T,\varphi_{\lambda_0})\\&=\int\limits_{\Omega}[|\nabla u_T|^p+Vu_T^p]dx-\lambda_0\int\limits_{\Omega}mu_T^p dx-\lambda_0\int\limits_{\Gamma_1}\sigma u_T^p d\rho.\end{aligned}$$

Fazendo $T\to\infty$, temos $u_T\to u$ q.t.p. em Ω. Disso, de $u_T\leq u\in L^p(\Omega)$, de $u\in M^+$ e do Teorema da Convergência Dominada, vem que

$$0\leq\int\limits_{\Omega}[|\nabla u|^p+Vu^p]dx-\lambda_0\left(\int\limits_{\Omega}mu^p dx+\int\limits_{\Gamma_1}\sigma u^p d\rho\right).$$

Logo, $E_V(u)\geq\lambda_0$, ou seja, λ_0 é uma cota inferior para $\{E_V(u);u\in M^+\}$.

Fixemos, agora, $\psi\in C^\infty(\overline{\Omega})$, com $\psi\geq 0$ em Ω, $\psi=0$ em Γ_2, de modo que $I_2(\psi)>0$ e $I_2'(\varphi_{\lambda_0})(\psi)>0$. Tal função pode ser construída usando argumentos similares aos apresentados no Lema 3.1.2 e, por este motivo, iremos omiti-la. Por isso, para todo $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $I_2(\varphi_{\lambda_0}+\frac{\psi}{n})>0$.

Assim, podemos definir, para todo $n\in\mathbb{N}$, sucientemente grande, a sequência $(u_n)\subset M^+$ pondo

$$u_n=\frac{\varphi_{\lambda_0}+\frac{\psi}{n}}{I_2\left(\varphi_{\lambda_0}+\frac{\psi}{n}\right)^{1/p}}. \tag{3.2.1}$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio, para todo n suficientemente grande, existem $t_n,s_n\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$, tais que

$$E_V\left(\varphi_{\lambda_0}+\frac{\psi}{n}\right)=\frac{1}{n}E_V'(\varphi_{\lambda_0}+t_n\psi)(\psi)\quad\text{e}\quad I_2\left(\varphi_{\lambda_0}+\frac{\psi}{n}\right)=I_2'(\varphi_{\lambda_0}+s_n\psi)(\psi).$$

Por λ_0 ser autovalor de (3.0.1), associado a φ_{λ_0}, temos $\lambda_0=\dfrac{E_V'(\varphi_{\lambda_0})(\psi)}{I_2'(\varphi_{\lambda_0})(\psi)}$. Segue, para todo

n suficientemente grande, que

$$E_V(u_n) = E_V\left(\frac{\varphi_{\lambda_0} + \frac{\psi}{n}}{I_2\left(\varphi_{\lambda_0} + \frac{\psi}{n}\right)^{1/p}}\right) = \frac{E_V\left(\varphi_{\lambda_0} + \frac{\psi}{n}\right)}{I_2\left(\varphi_{\lambda_0} + \frac{\psi}{n}\right)} = \frac{E_V'(\varphi_{\lambda_0} + t_n\psi)(\psi)}{I_2'(\varphi_{\lambda_0} + s_n\psi)(\psi)}.$$

Visto que, $t_n \to 0$ e $s_n \to 0$, quando $n \to \infty$, e E_V e I_2 são de classe C^1, temos que $E_V'(\varphi_{\lambda_0} + t_n\psi)(\psi) \to E_V'(\varphi_{\lambda_0})(\psi)$ e $I_2'(\varphi_{\lambda_0} + s_n\psi)(\psi) \to I_2'(\varphi_{\lambda_0})(\psi)$, quando $n \to \infty$. Portanto, $E_V(u_n) \to \lambda_0$ e, assim, $\lambda_0 = \inf_{u\in M^+} E_V(u)$.

No que segue, veremos que λ_0 não é atingido. Como φ_{λ_0} é autofunção associada a λ_0 e $I_2(\varphi_{\lambda_0}) = 0$, $\varphi_{\lambda_0} \notin M^{\pm}$. Consequentemente, λ_0 não é atingido pois, caso exista $v \in M^+$ tal que $E_V(v) = \lambda_0$, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e pela simplicidade de λ_0, existe $c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$, de modo que $v = c\varphi_{\lambda_0}$. Com isso, $1 = I_2(v) = I_2(c\varphi_{\lambda_0}) = 0$, o que é um absurdo.

Finalmente, dado $u \in \mathcal{A}$, tal que $E_V(u) = I_2(u) = 0$, $u \in \mathcal{S}$ e

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) = 0 = E_V(u) = E_{V-\lambda_0 m}(u) - \lambda_0 \int_{\Gamma_1} \sigma|u|^p d\rho = J_{\lambda_0}(u) \geq \mu_1(\lambda_0) = 0.$$

Logo, $J_{\lambda_0}(u) = \mu_1(\lambda_0) = 0$ e, novamente, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e pelo Teorema 3.1.1, $u = c\varphi_{\lambda_0}$, para algum $c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$. Via Teorema 3.1.2, concluímos que u é autofunção associada a λ_0. Reciprocamente, seja $u \in \mathcal{S}$, autofunção associada a λ_0. Se $I_2(u) = 0$, então $u \in \mathcal{A}$ e $E_V(u) = 0 = \alpha(V, m)$. Caso $I_2(u) \neq 0$, digamos $I_2(u) = k > 0$, então podemos definir $\frac{u}{k^{1/p}} \in M^+$. Disso, segue que λ_0 é atingido por uma função em M^+, o que é um absurdo.

Logo, tomando $\lambda_* = \lambda_0$, segue o resultado desejado.

∎

Observação 3.2.1. Se considerarmos $\sigma \equiv 0$ e $\Gamma_2 = \emptyset$, então o teorema anterior nos garante a existência de autovalores principais para o problema de Neumann com potencial indefinido.

Observação 3.2.2. A fim de não sobrecarregar a notação, denotaremos a autofunção associada a $\lambda_1(V, m)$ por φ_1, a autofunção associada a $\lambda_{-1}(V, m)$ por φ_{-1} e a autofunção associada a λ_* por φ_0.

Na sequência, verificaremos que os autovalores principais obtidos no Teorema 3.2.1 são os únicos autovalores principais que o problema (3.0.1) possui, são simples e são isolados no espectro.

Proposição 3.2.1. Sejam $u, v \in W$ autofunções para o problema (3.0.1), associadas, respectivamente, a λ e β. Suponha $u > 0$ em Ω e $v > 0$ em Ω. Se $\beta \geq \lambda$ (respectivamente, $\beta \leq \lambda$), quando $I_2(u) \geq 0$ (respectivamente, $I_2(u) \leq 0$), então $u = cv$, para algum $c > 0$, e $\lambda = \beta$.

Demonstração: Tendo em vista que esta demonstração baseia-se na aplicação da Identidade de Picone e se dá de maneira similar à do Lema 2.1.5, a mesma será omitida.

■

Teorema 3.2.2. Os autovalores $\lambda_1(V, m), \lambda_{-1}(V, m)$ e λ_*, obtidos no Teorema 3.2.1 são simples e os únicos autovalores principais para (3.0.1).

Demonstração: A demonstração do teorema em questão é uma consequência da Proposição 3.2.1 e dos autovalores serem principais. Ressaltamos apenas que, na aplicação da Proposição 3.2.1, $I_2(\varphi_1) = 1 > 0$, $I_2(\varphi_{-1}) = -1 < 0$, $I_2(\varphi_0) = 0$ e devemos considerar os três casos $\lambda_{-1}(V, m) < \lambda < \lambda_1(V, m)$, $\lambda < \lambda_{-1}(V, m) < \lambda_1(V, m)$ e $\lambda_{-1}(V, m) < \lambda_1(V, m) < \lambda$, para algum outro autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$.

■

Para provarmos que os autovalores principais são isolados no espectro, precisaremos do sequinte resultado auxiliar.

Proposição 3.2.2. Se $\alpha(V, m) > 0$, então, para cada $T \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{u \in M^+; E_V(u) \leq T\}$ é limitado em M^+.

Demonstração: Suponhamos que exista $T_0 \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset M^+$, ilimitada, de modo que $E_V(u_n) \leq T_0$. Definindo $v_n = \frac{u_n}{||u_n||}$, temos que $(v_n) \subset W$ é limitada. Por isso e pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, a menos de considerarmos uma subsequência de (v_n), se necessário, existe $v_0 \in W$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ em W e $v_n \to v_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$.

Além do mais, quando $n \to \infty$,

$$I_2(v_n) = \frac{1}{||u_n||^p} I_2(u_n) = \frac{1}{||u_n||^p} \to 0 \quad \text{e} \quad E_V(v_n) = \frac{1}{||u_n||^p} E_V(u_n) \to 0. \tag{3.2.2}$$

Por isso e por $I_2(v_n) \to I_2(v_0)$, a menos da passagem a uma subsequência, segue que $I_2(v_0) = 0$, e que $\int\limits_\Omega V|v_n|^p dx \to \int\limits_\Omega V|v_0|^p dx$ ($\bigstar$).

Agora, se $v_0 = 0$ em Ω, por (3.2.2), por ($\bigstar$) e por E_V ser f.s.s.i.,

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla v_0|^p dx = E_V(v_0) - \int_\Omega V|v_0|^p dx$$
$$\leq \liminf \left(E_V(v_n) - \int_\Omega V|v_n|^p dx \right) = \lim \left(E_V(v_n) - \int_\Omega V|v_n|^p dx \right) = 0,$$

ou seja, como $E_V(v_n) - \int_\Omega V|v_n|^p dx = \int_\Omega |\nabla v_n|^p dx$, $\int_\Omega |\nabla v_n|^p dx \to \int_\Omega |\nabla v_0|^p dx$ e, consequentemente, $v_n \to v_0$ em W, o que é um absurdo, pois $||v_n|| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $v_0 \neq 0$ em Ω.

Assim, podemos considerar $v = \dfrac{v_0}{||v_0||_p} \in \mathcal{A}$. Por conseguinte, por E_V ser f.s.s.i. e por (3.2.2),

$$\alpha(V, m) \leq E_V(v) = \frac{1}{||v_0||_p^p} E_V(v_0) \leq 0,$$

o que é um absurdo, visto que $\alpha(V, m) > 0$. Logo, $\{u \in M^+; E_V(u) \leq T\}$ é limitado em M^+.

■

Observação 3.2.3. É possível obter um resultado similar para $-E_V$ em M^-.

Observação 3.2.4. É interessante frisar que a Proposição 3.2.2 nos mostra que a condição $\alpha(V, m) > 0$ é suficiente para que o funcional energia E_V seja coercivo sobre M^+, pois se $||u_n|| \to +\infty$, não pode ocorrer $E_V(u_n) \leq K$, para alguma constante $K \in \mathbb{R}$, visto que isto geraria uma contradição via a referida proposição.

Teorema 3.2.3. Suponha $\alpha(V, m) \geq 0$. Então os autovalores principais obtidos no Teorema 3.2.1 são isolados no espectro.

Demonstração: Provaremos que $\lambda_1(V, m)$ e λ_* são isolados, em ambos os casos, $\alpha(V, m) > 0$ e $\alpha(V, m) = 0$. Para $\lambda_{-1}(V, m)$, a prova é similar. Começaremos demonstrando uma importante estimativa a priori. Para tal, sejam $u \in W$ uma autofunção que muda de sinal associada ao autovalor λ e $\mathcal{N}$ um domínio nodal para u, isto é, $\mathcal{N} = \Omega_+^u = \{x \in \Omega; u(x) > 0\}$ ou $\mathcal{N} = \Omega_-^u = \{x \in \Omega; u(x) < 0\}$.

Pela Observação 3.1.1, $u \in W \cap C(\overline{\Omega})$ e, consequentemente, $\mathcal{N} \subset \Omega$ é aberto. Assim, pelo Teorema A.6, $u\big|_{\mathcal{N}} \in W_{\mathcal{N}}$, onde $\{u \in W^{1,p}(\Omega)(\mathcal{N}); \Upsilon(u) = 0 \text{ em } \Gamma_2\} = W_{\mathcal{N}} \subset W^{1,p}(\mathcal{N})$.

Definindo w, pondo

$$w(x) = \begin{cases} u(x)\ ,\ \text{se } x \in \mathcal{N} \\ 0\ ,\ \text{se } x \in \Omega - \mathcal{N} \end{cases} .$$

temos, $w \in W$, pois $\Upsilon(w) = 0$ em Γ_2. Consideremos, agora, $1 < p < N$. O caso em que $p \geq N$, é análogo a este.

Visto que u é autofunção associada a λ, temos

$$\int_{\Omega} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla w + V|u|^{p-2}uw]dx = \lambda \int_{\Omega} m|u|^{p-2}uw\ dx + \lambda \int_{\Gamma_1} \sigma |u|^{p-2}uw d\rho.$$

Decorre disso e da definição de w, que

$$\int_{\mathcal{N}} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla w + V|u|^{p-2}uw]dx = \lambda \int_{\mathcal{N}} m|u|^{p-2}uw\ dx + \lambda \int_{\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}} \sigma |u|^{p-2}uw d\rho. \quad (3.2.3)$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder Generalizada, com os expoentes ∞, $\dfrac{p^*}{p^* - p}$ e $\dfrac{p^*}{p}$, temos

(i) $$\left| \int_{\mathcal{N}} V|u|^p dx \right| \leq ||V||_\infty ||u||^p_{p^*, \mathcal{N}} |\mathcal{N}|^{\frac{p^* - p}{p^*}} ,$$

(ii) $$\left| \lambda \int_{\mathcal{N}} m|u|^p dx \right| \leq |\lambda| ||m||_\infty ||u||^p_{p^*, \mathcal{N}} |\mathcal{N}|^{\frac{p^* - p}{p^*}} ,$$

(iii) $$\left| \lambda \int_{\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}} \sigma |u|^p dx \right| \leq |\lambda| ||\sigma||_\infty ||u||^p_{p_*, \Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}} |\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}|^{\frac{p_* - p}{p_*}} ,$$

(iv) $$\int_{\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}} |u|^p dx \leq ||u||^p_{p_*, \Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}} |\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}|^{\frac{p_* - p}{p_*}} .$$

Por isso e por (3.2.3), segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{N}} |\nabla u|^p dx \right| &\leq ||V||_\infty ||u||^p_{p^*, \mathcal{N}} |\mathcal{N}|^{\frac{p^* - p}{p^*}} + |\lambda| ||m||_\infty ||u||^p_{p^*, \mathcal{N}} |\mathcal{N}|^{\frac{p^* - p}{p^*}} \\ &\quad + |\lambda| ||\sigma||_\infty ||u||^p_{p_*, \Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}} |\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}|^{\frac{p_* - p}{p_*}} . \end{aligned}$$

Adicionando $\displaystyle\int_{\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}} |u|^p dx$, a esta equação, tomando tomando $C = \max\{||V||_\infty + |\lambda| ||m||_\infty,$

$|\lambda|||\sigma||_\infty + 1\}$ e aplicando (iv), obtemos

$$\int\limits_{\mathcal{N}} |\nabla u|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}} |u|^p dx \le C(||u||^p_{p^*,\mathcal{N}} |\mathcal{N}|^{\frac{p^*-p}{p^*}} + ||u||^p_{p_*,\Gamma_1\cap\overline{\mathcal{N}}} |\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}|^{\frac{p_*-p}{p_*}})$$
$$\le C(||u||^p_{p^*,\mathcal{N}} + ||u||^p_{p^*,\Gamma_1\cap\overline{\mathcal{N}}})(|\mathcal{N}|^\beta + |\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}|^\beta). \qquad (3.2.4)$$

Ainda, visto que $\partial\mathcal{N} = \Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}$ e que $W^{1,p}(\mathcal{N}) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathcal{N})$ e $W^{1,p}(\mathcal{N}) \hookrightarrow L^{p_*}(\partial\mathcal{N})$ são contínuos, exitem $c_1 = c_1(\mathcal{N}, p, \Omega) > 0$ e $c_2 = c_2(\mathcal{N}, p, \Omega) > 0$, tais que

$$c_1^p ||u||^p_{p^*,\mathcal{N}} \le ||u||^p_{\mathcal{N}} \quad \text{e} \quad c_2^p ||u||^p_{p_*,\Gamma_1\cap\overline{\mathcal{N}}} \le ||u||^p_{\mathcal{N}}.$$

Tomando $D = D(\mathcal{N}, p, \Omega) = \min\left\{\frac{c_1^p}{2}, \frac{c_2^p}{2}\right\}$, temos

$$\int\limits_{\mathcal{N}} |\nabla u|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1\cap\overline{\mathcal{N}}} |u|^p dx \ge D(||u||^p_{p^*,\mathcal{N}} + ||u||^p_{p^*,\Gamma_1\cap\overline{\mathcal{N}}}). \qquad (3.2.5)$$

Disso e de (3.2.4)

$$D(||u||^p_{p^*,\mathcal{N}} + ||u||^p_{p_*,\Gamma_1\cap\overline{\mathcal{N}}}) \le \int\limits_{\mathcal{N}} |\nabla u|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1\cap\overline{\mathcal{N}}} |u|^p dx$$
$$\le C(||u||^p_{p^*,\mathcal{N}} + ||u||^p_{p_*,\Gamma_1\cap\overline{\mathcal{N}}})(|\mathcal{N}|^\beta + |\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}|^{\beta_1}),$$

onde $\beta = \frac{p^*-p}{p^*}$, $\beta_1 = \frac{p_*-p}{p_*}$, e, consequentemente, $|\mathcal{N}|^\beta + |\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}|^{\beta_1} \ge \dfrac{D}{C}$. Desta forma, renomeando as constantes, conseguimos $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$ que dependem de m, σ, V e Ω, tais que

$$|\mathcal{N}|^\beta + |\Gamma_1 \cap \overline{\mathcal{N}}|^{\beta_1} \ge (|\lambda| d_1 + d_2)^{-1}, \qquad (3.2.6)$$

obtendo, assim, a estimativa desejada.

Façamos, agora, a demonstração do teorema. Suponhamos, por absurdo, que exista uma sequência de soluções fracas $(\lambda_n, u_n) \subset \mathbb{R} \times W$ tal que $\lambda_n \to \lambda_1(V, m)$ (respectivamente, $\lambda_n \to \lambda_*$) e $\lambda_n > \lambda_1(V, m)$(respectivamente, $\lambda_n > \lambda_*$), para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos assumir, ainda, que as funções u_n são L^p-normalizadas, pois $u_n \not\equiv 0$ em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Seja $\alpha(V, m) > 0$. Vejamos que $I_2(u_n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I_2(u_{n_0}) = 0$, então $u_{n_0} \in \mathcal{A}$, donde

$$0 < \alpha(V, m) \leq E_V(u_{n_0}) = \lambda_{n_0} I_2(u_{n_0}) = 0,$$

o que é um absurdo. Por outro lado, se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I_2(u_{n_0}) < 0$, então, tomando $v = \dfrac{u_{n_0}}{(-I_2(u_{n_0}))^{1/p}}$, temos $v \in M^-$ e

$$-\lambda_{-1}(V, m) \leq E_V(u_{n_0}) = -\frac{E_V(u_{n_0})}{I_2(u_{n_0})} = -\lambda_{n_0} < -\lambda_1(V, m) \Rightarrow \lambda_{-1}(V, m) > \lambda_1(V, m),$$

o que é um novo absurdo. Portanto, $I_2(u_n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definindo $v_n = \dfrac{u_n}{I_2(u_n)^{1/p}}$ temos que $v_n \in M^+$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $E_V(v_n) = \dfrac{E_V(u_n)}{I_2(u_n)} = \lambda_n \to \lambda_1(V, m)$. Com isso, $(E_V(v_n)) \subset \mathbb{R}$ é limitada. Pela Proposição 3.2.2, $(v_n) \subset M^+$ é limitada em W. Assim, pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, existe $v_0 \in W$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ em W e $v_n \to v_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$. Além disso, utilizando os Teoremas B.3, B.4 e H.4 e a Desigualdade de Hölder, concluímos, a menos de subsequência, que $I_2(v_n) \to I_2(v_0)$ e $\displaystyle\int_\Omega V|v_n|^p dx \to \int_\Omega V|v_0|^p dx$. Por outro lado, $I_2(v_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $I_2(v_0) = 1$. Isto é, $v_0 \in M^+$. Consequentemente,

$$\lambda_1(V, m) \leq E_V(v_0) \leq \liminf E_V(v_n) = \lim E_V(v_n) = \lambda_1(V, m) \Rightarrow E_V(v_0) = \lambda_1(V, m).$$

Assim, do Teorema 3.2.2, existe uma constante $c \in R$, com $c \neq 0$, tal que $v_0 = c\varphi_1$. Mas, por $v_0, \varphi_1 \in M^+$, concluímos que $v_0 = \varphi_1$ ou $v_0 = \varphi_1$. Suponhamos que $v_0 = \varphi_1$, assim, por $\varphi_1 > 0$ em $\Omega \cup \Gamma_1$, $v_0 > 0$ em $\Omega \cup \Gamma_1$.

Pondo, agora, $\Omega_-^{u_n} = \{x \in \Omega; u_n(x) < 0\}$, temos, devido a $v_n \to v_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$ e $v_n \to v_0$ em medida, pelo Teorema B.5, que $|\Omega_-^{u_n}| + |\overline{\Omega}_-^{u_n} \cap \Gamma_1| \to 0$, o que contradiria (3.2.6). Se $v_0 = -\varphi_1$, novamente, chegamos a um absurdo. Logo, $\lambda_1(V, m)$ é isolado no espectro.

b) Suponhamos $\alpha(V, m) = 0$. Começaremos mostrando que $I_2(u_n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I_2(u_{n_0}) = 0$, então, pelo item (2-b) do Teorema 3.2.1 e pelo Teorema 3.2.2, temos que $u_{n_0} = c_{n_0}\varphi_0$, para algum $c_{n_0} \in \mathbb{R}$, com $c_{n_0} \neq 0$. Assim, u_{n_0} é autofunção associada a λ_* e, consequentemente, $\lambda_* = \lambda_{n_0}$, o que é um absurdo. Por outro lado, se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I_2(u_{n_0}) < 0$, então podemos definir $v = \dfrac{u_{n_0}}{(-I_2(u_{n_0}))^{1/p}} \in M^-$. Deste modo,

$I_2(u_{n_0}) = -1$ e

$$-\lambda_* \leq E_V(v) = -\frac{E_V(u_{n_0})}{I_2(u_{n_0})} = -\lambda_{n_0} < -\lambda_* \Rightarrow \lambda_* < \lambda_*,$$

o que é um absurdo. Portanto, $I_2(u_n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Desta forma, podemos considerar $v_n = \dfrac{u_n}{I_2(u_n)} \in M^+$. Se $(v_n) \subset M^+$ for ilimitada, definamos $w_n = \dfrac{v_n}{||v_n||}$. Então, $(w_n) \subset W$ é limitada e, pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, considerando uma subsequência, se necessário, existe $w_0 \in W$ tal que $w_n \rightharpoonup w_0$ em W e $w_n \to w_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$. Além disso,

$$\lim E_V(w_n) = \lim \frac{1}{||v_n||^p} E_V(v_n) = \lim \frac{1}{||v_n||^p} \frac{E_V(u_n)}{I_2(u_n)} = \lim \frac{1}{||v_n||^p} \lambda_n = 0. \tag{3.2.7}$$

De maneira análoga, vemos que $I_2(w_n) \to 0$. Pelos Teoremas B.3, B.4 e H.4 e pela Desigualdade de Hölder, temos que $I_2(w_n) \to I_2(w_0)$, donde $I_2(w_0) = 0$. E, do mesmo modo, provamos que $\int\limits_\Omega V|w_n|^p dx \to \int\limits_\Omega V|w_0|^p dx$.

Agora, se $w_0 = 0$, então, do acima, da equação (3.2.7) e de E_V ser f.s.s.i., segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int\limits_\Omega |\nabla w_0|^p dx = E_V(w_0) - \int\limits_\Omega V|w_0|^p dx \\ &\leq \liminf \left(E_V(w_n) - \int\limits_\Omega V|w_n|^p dx \right) = \lim \left(E_V(w_n) - \int\limits_\Omega V|w_n|^p dx \right) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\int\limits_\Omega |\nabla w_n|^p dx \to \int\limits_\Omega |\nabla w_0|^p dx$. Consequentemente, $w_n \to w_0$ em W, o que é um absurdo, pois $||w_n|| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $w_0 \neq 0$.

Assim, podemos considerar $w = \dfrac{w_0}{||w_0||_p} \in \mathcal{A}$. Vale ressaltar que, $E_V(w) = 0 = \alpha(V, m)$. Pelo item (2-b) do Teorema 3.2.1, w e, consequentemente, w_0 são autofunções associadas a λ_*.

Digamos que $w_0 = c\varphi_0 > 0$. Então, pela convergência em medida, para todo n suficientemente grande, $|\Omega_-^{w_n}| + |\Gamma_1 \cap \overline{\Omega_-^{w_n}}| \to 0$. E, pelas definições de w_n e v_n, $|\Omega_-^{u_n}| + |\Gamma_1 \cap \overline{\Omega_-^{u_n}}| \to 0$, o que contraria a estimativa (3.2.6).

Portanto, v_n é limitada. E, assim, repetindo o processo no final do caso (a), obteremos um novo absurdo. Logo, λ_* é isolado no espectro.

■

Uma vez estabelecidas as condições para a existência de autovalores principais para o problema (3.0.1) e verificadas suas principais propriedades, construiremos dois exemplos em que ocorre $\alpha(V,m)=0$. Nosso objetivo, aqui, é evidenciar que existem problemas que se encaixam no caso singular, ou seja, o item (2-b) do Teorema 3.2.1 não é descartável.

Exemplo 3.2.1. Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u=\lambda|u|^{p-2}u & ,\ \text{em } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\lambda\sigma(x)|u|^{p-2}u & ,\ \text{em } \Gamma_1 \\ u=0 & ,\ \text{em } \Gamma_2 \end{cases}, \tag{3.2.8}$$

o qual possui um primeiro autovalor principal, que será denotado por λ_1^E. Vejamos que, como $V\equiv 0$, $m\equiv 1$ e σ indefinida, $\alpha(V,m)=\alpha(0,1)>0$ e, desta forma, podemos aplicar um dentre os itens (1-a) ou (2-a) do Teorema 3.2.1.

De fato, se $\alpha(0,1)=0$, então, pelo item (2-b) do Teorema 3.2.1, temos que se u é autofunção L^p-normalizada associada a λ_1^E, então $\lambda_1^E=\lambda_*$ e $E_0(u)=\alpha(0,1)=0$. Ou seja, $\displaystyle\int_\Omega|\nabla u|^p dx=0$, o que implica em $\nabla u=0$ q.t.p. em Ω. Consequentemente, u é uma função constante q.t.p. em Ω. Assim, ou $u\equiv 0$ ou $u=c$, $c\in\mathbb{R}$, com $c\neq 0$, q.t.p. em Ω. Em ambos os casos chegamos a um absurdo. Logo, $\alpha(0,1)>0$.

Com isso, $\lambda_1^E=\lambda_1(0,1)$. Seja, agora, ψ_1 a autofunção a λ_1^E, que satisfaz $\displaystyle\int_\Omega\psi_1^p dx+\int_{\Gamma_1}\sigma\psi_1^p d\rho=1$, já que $\psi_1\in M^+$. Consideremos, ainda, $B_0\subset\Omega$ aberto, de modo que $|B_0|>0$ e $|B_0^c|>0$, e definamos

$$m(x)=\begin{cases} a\ ,\ \text{se } x\in B_0^c \\ b\ ,\ \text{se } x\in B_0 \end{cases},$$

para certos $a,b\in\mathbb{R}$ a serem determinados.

Queremos produzir um exemplo onde $\alpha(V,m)=0$. Como vimos no Teorema 3.2.1, as autofunções estão em $\mathcal{A}$. Portanto, faz sentido procurar expressões para a e b que satisfaçam $\displaystyle\int_\Omega m\psi_1^p dx+\int_{\Gamma_1}\sigma\psi_1^p d\rho=0$. De outro modo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega m\psi_1^p dx+\int_{\Gamma_1}\sigma\psi_1^p d\rho=0 &\Leftrightarrow \int_{B_0^c}a\psi_1^p dx+\int_{B_0}b\psi_1^p dx+\int_{\Gamma_1}\sigma\psi_1^p d\rho=0\\ &\Leftrightarrow \int_{B_0^c}a\psi_1^p dx+\int_{B_0}b\psi_1^p dx=-\int_{\Gamma_1}\sigma\psi_1^p d\rho,\end{aligned}$$

e, da igualdade inicial para ψ_1^p, obtemos

$$\int\limits_{B_0^c} a\psi_1^p dx + \int\limits_{B_0} b\psi_1^p dx = \int\limits_{\Omega} \psi_1^p dx - 1. \tag{3.2.9}$$

Se pusermos $c = \int\limits_{\Omega} \psi_1^p dx \in \mathbb{R}$ e considerarmos $a = 1 - \dfrac{1}{c} = b$, obtemos a equação acima. Desta forma, para que ocorra $\psi_1 \in \mathcal{A}$, exigiremos que a e b satisfaçam a seguinte equação $\dfrac{a+b}{2} - 1 = -c^{-1}$.

Denotaremos, no restante do exemplo, $\lambda_1^E = \lambda_1$. Definamos, agora,

$$V(x) = \begin{cases} \lambda_1(a-1)\ , \text{ se } x \in B_0^c \\ \lambda_1(b-1)\ , \text{ se } x \in B_0 \end{cases},$$

Se u é uma função que satisfaz $\int\limits_{\Omega} mu^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma u^p d\rho = 0$, então

(i) $\int\limits_{\Omega} mu^p dx = -\int\limits_{\Gamma_1} \sigma u^p d\rho$;

(ii)

$$\begin{aligned}
E_V(u) &= \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p + V|u|^p dx \\
&= \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p + \lambda_1 \int\limits_{B_0^c} a|u|^p dx + \lambda_1 \int\limits_{B_0} b|u|^p dx - \lambda_1 \int\limits_{B_0^c} |u|^p dx - \lambda_1 \int\limits_{B_0} |u|^p dx \\
&= \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p - \lambda_1 \int\limits_{\Gamma_1} \sigma u^p d\rho - \lambda_1 \int\limits_{\Omega} |u|^p dx \\
&= \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p - \lambda_1 \left(\int\limits_{\Gamma_1} \sigma u^p d\rho + \int\limits_{\Omega} |u|^p dx \right).
\end{aligned}$$

Analisemos o que pode ocorrer com o sinal de $E_V(u)$.

(a) Se $\int\limits_{\Gamma_1} \sigma u^p d\rho + \int\limits_{\Omega} |u|^p dx = 0$, então $E_V(u) \geq 0$.

(b) Se $\int\limits_{\Gamma_1} \sigma u^p d\rho + \int\limits_{\Omega} |u|^p dx = 1$, então $u \in M^+$ no problema (3.2.8), donde $E_0(u) \geq E_0(\psi_1) = \lambda_1$. Logo, $E_V(u) \geq 0$.

(c) Se $\int\limits_{\Gamma_1} \sigma u^p d\rho + \int\limits_{\Omega} |u|^p dx = K < 0$, então segue que $E_V(u) \geq 0$.

(d) Se $\int\limits_{\Gamma_1} \sigma u^p d\rho + \int\limits_{\Omega} |u|^p dx = K > 0$, defina $\tilde{u} = \dfrac{u}{K^{1/p}} \in M^+$ no problema (3.2.8), donde $E_0(\tilde{u}) \geq \lambda_1$ e, consequentemente, $E_V(\tilde{u}) \geq 0$. Assim, por $K > 0$, obtemos $E_V(u) \geq 0$.

Logo, se u é uma função satisfazendo $\int\limits_{\Omega} m u^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma u^p d\rho = 0$, temos $E_V(u) \geq 0$.

Agora, se $v = c\psi_1$, então,

$$E_V(v) = |c|^{1/p} \left[\int\limits_{\Omega} |\nabla \psi_1|^p - \lambda_1 \left(\int\limits_{\Gamma_1} \sigma \psi_1^p d\rho + \int\limits_{\Omega} |\psi_1|^p dx \right) \right] = 0,$$

pois ψ_1 é autofunção para (3.2.8) associada a λ_1. Reciprocamente, se $E_V(v) = 0$, então $E_V(v) = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^p - \lambda_1 \left(\int\limits_{\Gamma_1} \sigma v^p d\rho + \int\limits_{\Omega} |v|^p dx \right)$. Assim,

(e) se $v = 0$ q.t.p. em Ω, não há o que demonstrar.

(f) se $v \not\equiv 0$ em Ω, podemos considerar $v_1 = \dfrac{v}{||v||_p}$. Desta forma,

(f_1) caso $\int\limits_{\Gamma_1} \sigma v^p d\rho + \int\limits_{\Omega} |v|^p dx$ ocorra, $\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^p = 0$ e, por conseguinte, $\alpha(0, 1) = 0$, o que é um absurdo. Portanto, $\int\limits_{\Gamma_1} \sigma v^p d\rho + \int\limits_{\Omega} |v|^p dx \neq 0$. Além disso, se $\int\limits_{\Gamma_1} \sigma v^p d\rho + \int\limits_{\Omega} |v|^p dx < 0$, por $\lambda_1 \geq 0$, concluímos que $\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^p = 0$, o que nos leva, novamente, a um absurdo.

(f_2) Como $\int\limits_{\Gamma_1} \sigma v^p d\rho + \int\limits_{\Omega} |v|^p dx = K > 0$, podmeos considerar $v_2 = \dfrac{v_1}{K^{1/p}}$. Disso, $v_2 \in M^+$ no problema (3.2.8), e $E_V(v_2) = \lambda_1$. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, v_2 é uma autofunção associada a λ_1 e, pela simplicidade do mesmo, existe $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ de modo que $v_2 = c\psi_1$. Portanto, $v = c_1\psi_1$, para alguma constante $c_1 \in \mathbb{R}$ não nula.

Logo, $\alpha(V, m) = 0$.

$\blacksquare$

Exemplo 3.2.2. Vamos construir, agora, um exemplo onde $m \equiv 0$. Suponhamos, neste exemplo, que Γ_1 não seja composto por um único ponto, quando $N = 1$. Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u \ , & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & , \ \text{em } \Gamma_1 \\ u = 0 & , \ \text{em } \Gamma_2 \end{cases} . \tag{3.2.10}$$

Inicialmente, destacamos que, argumentando de maneira análoga a do exemplo anterior, $\alpha(V,m)=\alpha(0,1)>0$.

Assim, como $\alpha(0,1)>0$, $m\equiv 1>0$ e $\sigma\equiv 0$, pelo item (1-a) do Teorema 3.2.1, existe um único autovalor principal para este problema, a saber, $\lambda_1(0,1)=\lambda_1$. Se ψ_0 é uma autofunção associada a λ_1, L^p-normalizada, então, podemos considerar $\Gamma_0\subset\Gamma_1$, de modo que $||\psi_0||^p_{p,\Gamma_0}=l>0$. Desta forma, $||\psi_0||^p_{p,\Gamma_1}=k$, onde $k\geq l$. Notamos que $k=l$ não ocorre, pois $\psi_0>0$ em Γ_1, donde $||\psi_0||^p_{p,\Gamma_0^c}=0$ não ocorre, ou seja, $k>l$. Por conseguinte, existe $\varepsilon>0$ tal que $k=l+\varepsilon$ e $||\psi_0||^p_{p,\Gamma_0^c}=\varepsilon=k-l$.

Definamos, agora,

$$\sigma(x)=\begin{cases}1 & \text{, se } x\in\Gamma_0^c\\ 1-\dfrac{k}{l} & \text{, se } x\in\Gamma_0\end{cases}.$$

Por isso,

$$\int\limits_{\Gamma_1}\sigma\psi_0^p d\rho=\int\limits_{\Gamma_0}\sigma\psi_0^p d\rho+\int\limits_{\Gamma_0^c}\sigma\psi_0^p d\rho=\left(1-\frac{k}{l}\right)\int\limits_{\Gamma_0}\psi_0^p d\rho+\int\limits_{\Gamma_0^c}\psi_0^p d\rho=\left(1-\frac{k}{l}\right)l+k-l=0.$$

Logo, $\int\limits_{\Gamma_1}\sigma\psi_0^p d\rho=0$. Seja, também, $V(x)=-\lambda_1$.

Assim, se u é uma função que satisfaz $\int\limits_{\Gamma_1}\sigma u^p d\rho=0$, então

$$E_V(u)=\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^p+\int\limits_{\Omega}V|u|^p dx=\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^p-\lambda_1\int\limits_{\Omega}|u|^p dx.$$

Considerando os casos $||u||_p=1$, $||u||_p=k>1$ e $0<||u||_p=k<1$, e repetindo os argumentos do exemplo anterior, podemos mostrar que $E_V(u)\geq 0$.

Além disso, de maneira similar ao exemplo anterior, provamos que $E_V(u)=0$ se, e somente se, $u=c\psi_0$, para algum $c\in\mathbb{R}$. Logo, $\alpha(V,m)=0$, como queríamos.

■

Para finalizar esta seção, apresentaremos uma condição suficiente para que o problema (3.0.1) possua ao menos um autovalor principal. Além do mais, neste caso especial, será possível determinar o sinal desses autovalores. Para tanto, consideremos o seguinte problema de autovalores com condição de fronteira mista Neumann-Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda |u|^{p-2}u \ , & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & , \ \text{em } \Gamma_1 \\ u = 0 & , \ \text{em } \Gamma_2 \end{cases} , \tag{3.2.11}$$

o qual corresponde ao caso em que $\sigma \equiv 0$ e $m \equiv 1$ no problema (3.0.1). No que segue, consideraremos o seguinte valor real

$$\lambda_1^{N,D}(V) = \inf\{E_V(u); u \in W, ||u||_p = 1\}.$$

Notamos que $\mu_1(0) = \inf\{J_0(u); u \in \mathcal{S}\} = \inf\{E_V(u); u \in \mathcal{S}\} = \lambda_1^{N,D}(V)$ e, se $\alpha(V, m) \geq 0$, então o Teorema 3.2.1 nos garante que $\lambda_1^{N,D}(V)$ é um autovalor principal para o problema (3.2.11). Desta forma, o resultado que segue é uma consequência dos Teoremas 3.2.1 e 3.1.2.

Proposição 3.2.3. Seja $\alpha(V, m) \geq 0$.

1) Se $\lambda_1^{N,D}(V) > 0$, então,

(i) caso $m \geq 0$ em Ω e $\sigma \geq 0$ em Γ_1, o problema (3.0.1) possui um único autovalor principal, o qual é positivo;

(ii) caso $m \leq 0$ em Ω e $\sigma \leq 0$ em Γ_1, o problema (3.0.1) possui um único autovalor principal, o qual é negativo;

(iii) nos demais casos, o problema (3.0.1) possui exatamente dois autovalores principais, com sinais opostos.

(2) Se $\lambda_1^{N,D}(V) = 0$, então o problema (3.0.1) possui um único autovalor principal, que é positivo, se, e somente se, $m^+ \not\equiv 0$ em Ω ou $\sigma^+ \not\equiv 0$ em Γ_1 e se verifica

$$d \doteq \int_\Omega m|\varphi_0|^p dx + \int_{\Gamma_1} \sigma|\varphi_0|^p d\rho < 0,$$

onde φ_0 é a autofunção positiva assoaciada a $\lambda_1^{N,D}(V)$, L^p-normalizada.

(3) Se $\lambda_1^{N,D}(V) = 0$, então o problema (3.0.1) possui um único autovalor principal, que é negativo, se, e somente se, $m^- \not\equiv 0$ em Ω ou $\sigma^- \not\equiv 0$ em Γ_1 e se verifica $d > 0$.

(4) Se $\lambda_1^{N,D}(V) = 0$ e $d = 0$, então $\lambda = 0$ é o único autovalor principal do problema (3.0.1).

Demonstração: Primeiramente, observamos que, como $\alpha(V, m) \geq 0$, pelo Teorema 3.2.1, o valor $\lambda_1^{N,D}(V)$ é finito e é um autovalor principal para o problema (3.2.11).

(1) Neste caso, $\alpha(V,m) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) \geq \mu_1(0) = \lambda_1^{N,D}(V) > 0$. Assim, o item (iii) segue do item (2-a) do Teorema 3.2.1 e os itens (i) e (ii) seguem dos itens (1-a) e (1-b) do Teorema 3.2.1, respectivamente. Verifiquemos, agora, o sinal desses autovalores.

Lembramos que $\lambda_1(V,m) = \min_{u\in M^+} E_V(u) = E_V(u_0)$, onde u_0 é a autofunção positiva associada a $\lambda_1(V,m)$. Então, $||u_0||_p > 0$. Definamos $\tilde{u} = \frac{u_0}{||u_0||_p} \in W$. Disso e de $\lambda_1^{N,D}(V) > 0$, vem que $E_V(\tilde{u}) > 0$ e, consequentemente, $E_V(u_0) > 0$. Portanto, $\lambda_1(V,m) > 0$. Ainda, se $\min_{u\in M^-} E_V(u) = E_V(u_1)$, então, de modo análogo, temos $E_V(u_1) > 0$ e $\lambda_{-1}(V,m) = -\min_{u\in M^-} E_V(u) = -E_V(u_1) < 0$. Portanto, $\lambda_{-1}(V,m) < 0$.

(2) Observamos que $\mu_1(0) = \lambda_1^{N,D}(V) = 0$ e $\alpha(V,m) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mu_1(\lambda) \geq 0$. Pelo Teorema 3.1.2, 0 é autovalor principal para o problema (3.0.1). Além disso, como $d < 0$, $\mu_1'(0) = -d > 0$ e, por μ_1 ser côncava, devemos ter $\alpha(V,m) > 0$ pois, caso $\alpha(V,m) = 0$, $\mu_1'(0) = 0$, o que é um absurdo. Ainda, por hipótese, $m^+ \not\equiv 0$ em Ω ou $\sigma^+ \not\equiv 0$ em Γ_1 e $d < 0$, donde ao menos uma dentre m e σ deve ser indefinida. Consequentemente, podemos aplicar o item (2-a) do Teorema 3.2.1, o qual nos garante a existência de dois autovalores principais para o problema (3.0.1). Visto que 0 é autovalor principal para o problema (3.0.1), existe um único autovalor principal, não-trivial, neste caso.

Verifiquemos, agora, que este autovalor principal não-trivial é positivo. Sabemos que $\lambda_{-1}(V,m) < \lambda_1(V,m)$. Como 0 é autovalor principal, devemos mostrar que $\lambda_{-1}(V,m) = 0$. Por um lado, como $d < 0$, $\frac{\varphi_0}{(-d)^{1/p}} \in M^-$. Assim, $\lambda_{-1}(V,m) \leq E_V\left(\frac{\varphi_0}{(-d)^{1/p}}\right) = \frac{E_V(\varphi_0)}{d} = 0$. Por outro lado, se u_0 é a autofunção positiva associada a $\lambda_{-1}(V,m)$, L^p-normalizada, $0 = \lambda_1^{N,D}(V) \leq E_V(u_0) = \lambda_{-1}(V,m)$. Portanto, $\lambda_{-1}(V,m) = 0$ e $\lambda_1(V,m)$ é positivo.

(3) Este caso pode ser demonstrado de maneira análoga ao caso anterior e, portanto, será omitido.

(4) Primeiramente, notamos que, por $d = 0$, $\varphi_0 \in \mathcal{A}$. Além do mais, $\mu_1(0) = \lambda_1^{N,D}(V) = 0$, implica em $E_V(\varphi_0) = \mu_1(0) = 0$. Deste modo, $\alpha(V,m) \leq E_V(\varphi_0) = 0$. Disso e da hipótese geral, $\alpha(V,m) = 0$. Portanto, pelo Teorema 3.2.1, o problema (3.0.1) possui um único autovalor principal. Por isso, por $\mu_1(0) = 0$ e pelo Teorema 3.1.2, concluímos que $\lambda = 0$ é o único autovalor principal, para o problema (3.0.1).

■

Observação 3.2.5. Se $V \equiv 0$ no problema (3.2.11), então $\lambda = 0$ será um autovalor para tal problema, desde que $\Gamma_2 = \emptyset$. Neste caso, pelo item (1-a) do Teorema 3.2.1 ($m \equiv 1 > 0$ e $\sigma \equiv 0$), temos que $\lambda = 0$ será o único autovalor principal para o problema (3.2.11). Sendo assim, podemos dizer que $0 = \lambda_1^{N,D}(V) = \mu_1(0)$, e podemos considerar $\varphi_0 \equiv c$, onde $c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$.

Observação 3.2.6. Os resultados (2) e (3), apresentados na Proposição anterior, generalizam aqueles apresentados por Umezu (2006) para o operador $p-$laplaciano.

3.3 Geometria do Funcional Energia Restrito as Variedades M^+ e M^-

Nesta seção, estudaremos a geometria que o funcional energia apresenta quando restrito as variedades M^+ e M^-. Mais especificamente, determinaremos condições sob as quais o funcional energia é coercivo e verificaremos que o mesmo satisfaz a condição (PS). Contudo, mostraremos que, no caso singular, a condição (PS) é valida somente em níveis superiores ao do autovalor principal λ_*.

Inicialmente, observamos que a Proposição 3.2.2, da seção anterior, nos fornece uma primeira condição suficiente para que haja a coercividade do funcional energia, E_V, sobre $M^\pm$, a saber, $\alpha(V,m) > 0$. Tal condição é apresentada pela contrapositiva da definição de coercividade, pois a Proposição 3.2.2 nos diz que, se $(u_n) \subset M^+$ e $E_V(u_n) \leq T$, para algum $T \in \mathbb{R}$, com $T > 0$, então (u_n) é limitada.

Na sequência, justificaremos porque $\alpha(V,m) > 0$ é uma condição "quase" necessária para que E_V seja coercivo sobre $M^\pm$. Notamos que a Proposição 2.3.2, garante a validade da próxima proposição no caso em que $\Gamma_1 = \emptyset$.

Proposição 3.3.1. Suponhamos $\sigma^+ \not\equiv 0$ (respectivamente, $\sigma^- \not\equiv 0$). Se $\alpha(V,m) < 0$, então E_V (respectivamente, $-E_V$) é ilimitado inferiormente sobre M^+(respectivamente, M^-).

Demonstração: Seja $u_0 \in \mathcal{A}$, com $u_0 \geq 0$, de modo que, $E_V(u_0) = \alpha(V,m) < 0$. Consideraremos quatro casos:

Caso 1: Suponhamos que $m^+ \not\equiv 0$.

Consideremos $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $w \geq 0$, tal que $w \not\equiv 0$ e $supp\ w \subset \Omega^+$. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, pelo T.V.M., existe $s_n \in (0,1)$, com $0 < s_n < \frac{1}{n}$, tal que

$$\begin{aligned} I_2\left(u_0 + \frac{w}{n}\right) &= \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega^+} m(u_0 + s_n w)^{p-2}(u_0 + s_n w)wdx \\ &\quad + \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega-\Omega^+} m(u_0 + s_n w)^{p-2}(u_0 + s_n w)wdx > 0. \end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$, temos que $u_0 + \frac{w}{n} \to u_0$ e $E_V\left(u_0 + \frac{w}{n}\right) \to E_V(u_0) = \alpha(V, m) < 0$. Além disso, $I_2\left(u_0 + \frac{w}{n}\right) \to I_2(u_0) = 0$, por valores positivos. Consequentemente, quando $n \to \infty$,

$$\frac{E_V\left(u_0 + \frac{w}{n}\right)}{I_2\left(u_0 + \frac{w}{n}\right)} \to -\infty.$$

Logo, como $\dfrac{u_0 + \frac{w}{n}}{I_2\left(u_0 + \frac{w}{n}\right)^{1/p}} \in M^+$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue a validade do resultado para esse caso.

Caso 2: $m \leq 0$ e $mu_0 \not\equiv 0$.

Primeiramente, observamos que, por $mu_0 \not\equiv 0$, devemos ter $|\Omega^-| > 0$ e $u_0 \neq 0$ em Ω^-.

Consideremos $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, com $w \geq 0$, tal que $0 \not\equiv w \leq u_0$ e $supp\ w \subset \Omega^-$. Então,

$$I_2\left(u_0 - \frac{w}{n}\right) = \int\limits_\Omega m\left|u_0 - \frac{w}{n}\right| dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma\left|u_0 - \frac{w}{n}\right| dxd\rho = \int\limits_\Omega m\left|u_0 - \frac{w}{n}\right| dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|u_0|^p d\rho. \tag{3.3.1}$$

Agora, observamos que, por $0 \leq w \leq u_0$, para todo n suficientemente grande, temos $u_0 - \frac{w}{n} < u_0$, donde $\left(u_0 - \frac{w}{n}\right)^p < u_0^p$. Por $m \leq 0$ e $mu_0 \not\equiv 0$, vem que $m\left(u_0 - \frac{w}{n}\right)^p > mu_0^p$. Logo, $\displaystyle\int\limits_\Omega m\left(u_0 - \frac{w}{n}\right)^p dx \geq \int\limits_\Omega mu_0^p dx$.

Afirmação 1: Existe $K_0 \subset \Omega$, mensurável, tal que $\displaystyle\int\limits_{K_0} m\left(u_0 - \frac{w}{n}\right)^p dx > \int\limits_{K_0} mu_0^p dx$.

Suponhamos, por absurdo, que isto não ocorra, ou seja, $\displaystyle\int\limits_K m\left(u_0 - \frac{w}{n}\right)^p dx = \int\limits_K mu_0^p dx$, para todo subconjunto mensurável $K \subset \Omega$. Pelo Teorema H.1, $m\left(u_0 - \frac{w}{n}\right)^p = mu_0^p$ q.t.p. em Ω.

Tal igualdade vale para todo x em Ω_0. Em Ω_-, teríamos $u_0 - \frac{w}{n} = u_0$ q.t.p. e, assim, $w = 0$ q.t.p. em Ω^-, o que é um absurdo. Logo, vale a Afirmação 1.

Decorre, da validade da Afirmação 1, que $\displaystyle\int\limits_\Omega m\left(u_0 - \frac{w}{n}\right)^p dx > \int\limits_\Omega mu_0^p dx$. Por isso e pela equação (3.3.1), $I_2\left(u_0 - \dfrac{w}{n}\right) > 0$, para todo n suficientemente grande.

Ainda, $E_V\left(u_0 - \frac{w}{n}\right) \to E_V(u_0) = \alpha(V, m) < 0$ e $I_2\left(u_0 + \frac{w}{n}\right) \searrow I_2(u_0) = 0$. Logo, de maneira análoga ao anterior, segue a validade do caso 2.

Caso 3: $m \leq 0$, $mu_0 \equiv 0$.

Consideremos uma função $w \in W$, com $w \geq 0$ e $supp\ w \subset \Omega^0$, de modo que $supp\ \Upsilon(w) \subset \Gamma_1^+$. Tal função pode ser construída de maneira análoga àquela construção feita no Lema 3.1.2.

Ponhamos $K = supp\, \Upsilon(w)$. Com isso, para $x \in K$, $w(x) > 0$ e, consequentemente, $u_0 + \frac{w}{n} > u_0$ em K. Visto que $K \subset \Gamma_1^+$, $\sigma \left|u_0 + \frac{w}{n}\right|^p > \sigma |u_0|^p$. Disso, segue que $\int\limits_K \sigma \left|u_0 + \frac{w}{n}\right|^p d\rho \geq \int\limits_K \sigma |u_0|^p d\rho$.

De maneira similar à demonstração da Afirmação 1, conseguimos provar que existe um subconjunto mensurável de K, digamos E, tal que $\int\limits_E \sigma \left|u_0 + \frac{w}{n}\right|^p d\rho > \int\limits_E \sigma |u_0|^p d\rho$.

Consequentemente,

$$\int\limits_{\Gamma_1^-} \sigma \left|u_0 + \frac{w}{n}\right|^p d\rho + \int\limits_{\Gamma_1^+ - E} \sigma \left|u_0 + \frac{w}{n}\right|^p d\rho + \int\limits_E \sigma \left|u_0 + \frac{w}{n}\right|^p d\rho >$$
$$\int\limits_{\Gamma_1^-} \sigma \left|u_0\right|^p d\rho + \int\limits_{\Gamma_1^+ - E} \sigma \left|u_0\right|^p d\rho + \int\limits_E \sigma \left|u_0 + \frac{w}{n}\right|^p d\rho,$$

Portanto, $I_2\left(u_0 + \frac{w}{n}\right) = \int\limits_{\Gamma_1} \sigma \left|u_0\right|^p d\rho > 0$. A partir disso, de mandeira análoga aos casos anteriores, vemos que vale o caso 3.

■

Em seguida, buscamos provar um resultado similar ao da Proposição 3.2.2, para o caso $\alpha(V, m) = 0$. Contudo, no caso singular, fazem-se necessárias algumas hipóteses adicionais, o que nos leva a afirmar que se trata de um resultado menos geral do que aquele obtido para $\alpha(V, m) > 0$.

Proposição 3.3.2. Suponhamos $\sigma^+ \not\equiv 0$. Se $\alpha(V, m) = 0$ e $(u_n) \subset M^+$ satisfaz

(a) $u_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(b) $|\Omega_{-,u_n} = \{x \in \Omega; u_n(x) > 0\}| \to 0$;

(c) $(E_V(u_n)) \subset \mathbb{R}$ é limitada,

então, (u_n) é limitada em W.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que (u_n) seja ilimitada em W e definamos $v_n = \frac{u_n}{||u_n||}$. Então, $(v_n) \subset W$ é limitada e, pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, a menos de considerarmos uma subsequência, se necessário, existe $v_0 \in W$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ em W e $v_n \to v_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$.

Assim, pelos Teoremas B.3, B.4 e H.4 e pela Desigualdade de Hölder, a menos da passagem a uma subsequência, obtemos

$$\left| \int_{\Omega} m|v_n|^p dx - \int_{\Omega} m|v_0|^p dx \right| \leq ||m||_\infty |||v_n|^p - |v_0|^p||_1 \to 0 \;\text{ e }\; I_2(v_n) = \frac{1}{||u_n||^p} I_2(u_n) \to 0,$$

ou seja, $I_2(v_n) \to I_2(v_0)$ e $I_2(v_n) \to 0$, donde $I_2(v_0) = 0$. Ainda, por (c) e por $(u_n) \subset W$ ser ilimitada, $E_V(v_n) = \dfrac{1}{||u_n||^p} E_V(u_n) \to 0$.

Desta forma, se $\Gamma_2 \neq \emptyset$, obtemos

$$1 + \int_{\Omega} V|v_0|^p dx = \lim \left(1 + \int_{\Omega} V|v_n|^p dx \right) = \lim E_V(v_n) = 0,$$

donde $v_0 \not\equiv 0$ em Ω. Por outro lado, se $\Gamma_2 = \emptyset$, temos

$$1 + \int_{\Omega} V|v_0|^p dx = \lim \left(1 + \int_{\Omega} V|v_n|^p dx \right) = \lim \left(E_V(v_n) + \int_{\partial\Omega} |v_n|^p d\rho \right) = \int_{\partial\Omega} |v_0|^p d\rho,$$

e, se $v_0 \equiv 0$ em Ω, então $\displaystyle\int_{\partial\Omega} |v_0|^p d\rho = 0$, o que é um absurdo. Portanto, $v_0 \not\equiv 0$ em Ω. Assim, podemos considerar $\dfrac{v_0}{||v_0||_p} \in \mathcal{A}$.

Agora, como $u_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $v_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $v_0 \geq 0$. Além do mais, por $\frac{v_0}{||v_0||_p} \in \mathcal{A}$, concluímos que

$$0 \leq E_V\left(\frac{v_0}{||v_0||_p} \right) = \frac{1}{||v_0||_p^p} E_V(v_0) \leq \liminf E_V(v_n) = 0.$$

De outro modo, $E_V(v_0) = 0 = \alpha(V, m)$. Pelo item (2-b) do Teorema 3.2.1, segue que v_0 é uma autofunção associada a λ_* e, por conseguinte, $v_0 > 0$ em Ω. Mas isto é um absurdo com a hipótese (b), a qual garante que $|\Omega_{-,v_n}| = |\Omega_{-,u_n}| \to 0$. Logo, (u_n) deve ser limitada em W.

$\blacksquare$

Observação 3.3.1. Um resultado similar pode ser estabelecido para o caso em que $\sigma^- \not\equiv 0$, considerando-se $-E_V$ sobre M^-.

Como comentamos na introdução deste trabalho, quando permitimos a função potencial mudar de sinal, perdemos a coercividade do funcional energia, como um todo. Percebemos, pelos resultados apresentados aqui, que a mesma só se verifica sob determinadas condições bem postas.

Na sequência, provaremos a validade da condição (PS), em cada um dos casos $\alpha(V,m)>0$ e $\alpha(V,m)=0$.

Proposição 3.3.3. Suponhamos $\alpha(V,m)>0$. Então, o funcional E_V satisfaz a condição (PS), sobre M^+, em todos os níveis $c\in\mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $(u_n)\subset M^+$ uma sequência (PS) para E_V, ou seja, existe uma sequência $(\varepsilon_n)\subset\mathbb{R}$, de modo que $\varepsilon_n\to 0$ e se verifiquem:

$((PS1))$ $E_V(u_n)\to c$;

$((PS2))$ $|E_V'(u_n)(\xi)|\leq \varepsilon_n||\xi||$, para todo $\xi\in T_{u_n}M^+$.

Agora, para $w\in W$, definamos,

$$b_n(w)=w-\left(\int\limits_\Omega m|u_n|^{p-2}u_nwdx+\int\limits_{\Gamma_1}\sigma|u_n|^{p-2}u_nwd\rho\right)u_n, \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Pondo $B_n=\int\limits_\Omega m|u_n|^{p-2}u_nwdx+\int\limits_{\Gamma_1}\sigma|u_n|^{p-2}u_nwd\rho$, temos $B_n=I_2'(u_n)(w)$.

Verifiquemos que $b_n\in T_{u_n}M^+$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Ora,

$$\begin{aligned}I_2'(u_n)(b_n(w)) &= \int\limits_\Omega m|u_n|^{p-2}u_n(w-B_nu_n)dx+\int\limits_{\Gamma_1}\sigma|u_n|^{p-2}u_n(w-B_nu_n)d\rho\\ &= I_2'(u_n)(w)-B_nI_2(u_n)=B_n-B_n=0.\end{aligned}$$

Com isso, tomando $\xi=b_n(w)=w-B_nu_n$ em $(PS2)$, temos

$$\begin{aligned}E_V'(u_n)(b_n(w)) &= \int\limits_\Omega[|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla b_n(w)+V|u_n|^{p-2}u_nb_n(w)]dx\\ &= \int\limits_\Omega[|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla(w-B_nu_n)+V|u_n|^{p-2}u_n(w-B_nu_n)]dx\\ &= E_V'(u_n)(w)-B_nE_V(u_n).\end{aligned}$$

Por isso, podemos reescrever $(PS2)$ na forma

$$|E_V'(u_n)(w)-B_nE_V(u_n)|\leq\varepsilon_n||w-B_nu_n||, \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Ainda, da condição $(PS1)$, concluímos que $(E_V(u_n)) \subset \mathbb{R}$ é limitada e, pela Proposição 3.2.2, temos que $(u_n) \subset W$ é limitada. Por conseguinte, dos Teoremas A.2, A.6 e B.2, a menos de considerarmos uma subsequência, se necessário, existe $u_0 \in W$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em W e $u_n \to u_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$.

Como $w \in W$ é arbitrário, consideraremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $w = u_n - u_0$. Disso, segue que

$$
\begin{aligned}
|B_n| &= \left| \int\limits_{\Omega} m|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u_0)dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u_0)d\rho \right| \\
&= ||m||_{\infty}||u_n||_p^{p-1}||u_n-u_0||_p + ||\sigma||_{\infty,\partial\Omega}||u_n||_{p,\partial\Omega}^{p-1}||u_n-u_0||_{p,\partial\Omega} \to 0.
\end{aligned}
$$

Repetindo os cálculos acima, verificamos que $\int\limits_{\Omega} V|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u_0)dx \to 0$. Além disso, por $(PS1)$ e pela Proposição 3.2.2, concluímos que $(u_n) \subset W$ é limitada. Como consequência disso, temos

$$
E_V'(u_n)(u_n-u_0) \leq \varepsilon_n||u_n-u_0|| + \varepsilon_n|B_n|||u_n|| + B_nE_V(u_n) \to 0.
$$

Portanto,

$$
\int\limits_{\Omega}[|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n-u_0)dx + \int\limits_{\Omega} V|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u_0)]dx \to 0.
$$

Por conseguinte, $\lim \int\limits_{\Omega}[|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n-u_0)]dx = 0$. Decorre, da Propriedade (S^+) do p-laplaciano e da Desigualdade de Hölder, que $\nabla u_n \to \nabla u_0$ em $L^p(\Omega)$ e, consequentemente, $u_n \to u_0$ em W.

Logo, E_V satisfaz a condição (PS) em qualquer nível $c \in \mathbb{R}$.

■

Finalmente, verifiquemos que, quando $\alpha(V,m) = 0$ o funcional energia satisfaz a condição (PSC) em todos os níveis $c \in \mathbb{R}$, tais que $c > \lambda_*$. É interessante ressaltar que a condição (PS) falha no nível $\lambda_* = \lambda_1(V,m) = \lambda_{-1}(V,m)$, pois, de acordo com o item (2-b) do Teorema 3.2.1, λ_* não é atingido nem em M^+, nem em M^-, mas em todas as funções $u \in \mathcal{A}$.

Contudo, como pretendemos aplicar a teoria de Ljusternik-Schnirelmann para obter uma sequência de autovalores para o problema (3.0.1), precisaremos de uma condição de compacidade para provar que os valores obtidos são valores críticos do funcional energia, E_V, restrito a variedade M^+. Por este motivo, provamos esta condição mais fraca de compacidade.

Proposição 3.3.4. Suponhamos $\alpha(V,m) = 0$. Então, E_V satisfaz a condição (PSC) em M^+ em todos os níveis $c > \lambda_*$.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset M^+$ uma sequência $(PSC)_c$ para E_V, isto é, existe uma sequência $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}$, de modo que $\varepsilon_n \to 0$ e sejam válidas:
$((PSC1))$ $E_V(u_n) \to c$;
$((PSC2))$ $|E_V'(u_n)(\xi)| \leq \dfrac{\varepsilon_n}{1+||u_n||}||\xi||$, para todo $\xi \in T_{u_n}M^+$.

Suponhamos, por absurdo, que (u_n) seja ilimitada. Definindo $v_n = \frac{u_n}{||u_n||}$, temos que $(v_n) \subset W$ é limitada e, pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, a menos de considerarmos uma subsequência de (v_n), existe $v_0 \in W$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ em W e $v_n \to v_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$.

Considerando b_n como na proposição anterior, temos que $b_n(v_n - v_0) \in T_{u_n}M^+$. Assim, considerando $\xi = b_n(v_n - v_0)$ em $(PSC2)$, e repetindo cálculos similares aos apresentados na demonstração do caso 2, da Proposição 2.3.2, obtemos

$$|E_V'(v_n)(v_n - v_0) - B_n E_V(u_n)| \leq \frac{\varepsilon_n ||u_n||}{1+||u_n||}\left\|\frac{v_n - v_0}{||u_n||^p} - B_n v_n\right\|,$$

onde B_n é definido como na proposição anterior.

Ainda, devido a $\frac{||u_n||}{1+||u_n||} \leq 1$, $\left(\frac{||u_n||}{1+||u_n||}\right) \subset \mathbb{R}$ é limitada. Repetindo os mesmos argumentos da proposição anterior, concluímos que $B_n \to 0$ e $\displaystyle\int_\Omega V|v_n|^{p-2}v_n(v_n - u_0)dx \to 0$. Disso e da limitação de (v_n) em W, vem

$$E_V'(v_n)(v_n - v_0) \leq \varepsilon_n \left(\frac{||u_n||}{1+||u_n||}\right)\left\|\frac{v_n - v_0}{||u_n||^p} - B_n v_n\right\| + B_n E_V(u_n) \to 0.$$

Consequentemente, $\lim \displaystyle\int_\Omega [|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \cdot \nabla(v_n - u_0)]dx = 0$. Com isso, pela Propriedade (S^+) do p-laplaciano e pela Desigualdade de Hölder, $\nabla v_n \to \nabla v_0$ em $L^p(\Omega)$ e, assim, $v_n \to v_0$ em W.

Notamos que, por $||v_n|| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $v_0 \neq 0$. Assim, podemos considerar $\dfrac{v_0}{||v_0||_p} \in \mathcal{S}$. Além do mais,

$$E_V(v_0) = \lim E_V(v_n) = \lim \frac{1}{||u_n||^p} E_V(u_n) = 0$$

e

$$I_2(v_0) = \lim I_2(v_n) = \lim \frac{1}{||u_n||^p} I_2(u_n) = 0.$$

Por conseguinte, $v_0 \in \mathcal{A}$ e $E_V(v_0) = 0 = \alpha(V, m)$. Pelo item (2-b) do Teorema 3.2.1, temos que v_0 é autofunção associada a λ_* e, pelo Teorema 3.2.2, concluímos que $v_0 = d\varphi_0$, para algum $d \in \mathbb{R}$, com $d \neq 0$. Ou seja, v_0 tem sinal constante.

Por outro lado, dado $w \in W$, tomando $\xi = b_n(w)$ em $(PSC2)$, obtemos

$$|E'_V(v_n)(w) - B_n E_V(u_n)| \leq \varepsilon_n \left(\frac{||u_n||}{1 + ||u_n||} \right) \left\| \frac{w}{||u_n||^p} - B_n v_n \right\| \to 0$$

e, pelos Teorema B.3, B.4 e H.4 e pela Desigualdade de Hölder, considerando uma subsequência, se necessário, $B_n \to \int\limits_{\Omega} m|v_0|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma |v_0|^p d\rho$. Deste modo, $E_V(v_0)(w) = cI_2(v_0)(w)$, para toda função $w \in W$, ou seja, v_0 é autofunção associada ao autovalor c. Além disso, a menos de considerarmos $|v_0|$, podemos supor $v_0 \geq 0$. Disso, de $v_0 = d\varphi_0$ e de $c > \lambda_*$, chegamos a uma contradição com o Teorema 3.2.2.

Logo, (u_n) é limitada e, a menos da passagem a subsequência, repetindo o procedimento para u_n e aplicando a Propriedade (S^+), concluímos que $u_n \to u_0$ em W, provando a condição $(PSC)_c$ para E_V, restrito a M^+.

■

Para finalizar este capítulo apresetaremos, nas próximas duas seções, a construção do primeiro autovalor não principal para o problema (3.0.1) e o processo para a obtenção de uma sequência de autovalores.

3.4 Existência de Autovalores Não-Principais quando $\alpha(V, m) > 0$

Nosso objetivo, nesta seção, será provar a existência de uma sequência de autovalores para o problema (3.0.1), quando $\alpha(V, m) > 0$. Mais especificamente, neste caso, conseguimos garantir a existência de duas sequências de autovalores, uma tendendo a $+\infty$ e a outra tendendo a $-\infty$.

Por simplicidade, assumiremos que uma dentre σ^+ e m^+ não é identicamente nula e provaremos a existência de uma sequência de autovalores que tende a $+\infty$, e os argumentos para o outro caso seguirão de maneira similar.

Para obtermos tal sequência de autovalores, construiremos, via Teoria Crítica de Ljusternik-Schnirelmann em Variedades C^1, uma sequência de valores críticos do funcional energia E_V

restrito a M^+. Além disso, por se tratar de uma ferramenta menos complexa de se abordar, neste trabalho, optamos por utilizar o *Genus* de Krasnoselskii ao invés da, assim chamada, Categoria de Ljusternik-Schnirelmann.

Definição 3.4.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathcal{R}_k = \{K \subset M^+; K \text{ é simétrico, compacto e } i(K) \geq k\},$$

onde $i(K)$ denota o *Genus* de Krasnoselskii de K em $W^{1,p}(\Omega)$.

Observação 3.4.1. Note que, pela definição acima, $\mathcal{R}_{k+1} \subset \mathcal{R}_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Observação 3.4.2. A definição do *Genus* de Krasnoselskii e as propriedades pertinentes a este trabalho se encontram no Apêndice, Seção F.

Antes de construirmos a sequência de autovalores, precisamos verificar que $\mathcal{R}_k \neq \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$, uma vez que este fato não fica evidente apenas pela definição dos conjuntos e, caso ocorresse de algum desses conjuntos ser vazio, não seria possível utilizá-los para a construção da sequência.

Lema 3.4.1. Suponhamos $\sigma^+ \not\equiv 0$ ou $m^+ \not\equiv 0$. Então, $\mathcal{R}_k \neq \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: A prova desse lema consiste em, para cada $k \in \mathbb{N}$, construir um conjunto que esteja em $\mathcal{R}_k$. Consideraremos dois casos em separado.

Caso 1: $m^+ \not\equiv 0$.

Neste caso, podemos considerar k bolas fechadas e disjuntas, $D_1, D_2, ..., D_k \subset \Omega_+$. Sejam $B_1, B_2, ..., B_k \subset \Omega_+$, tais que $B_i \subset D_i$, para todo $1 \leq i \leq k$, de modo que, $e_1, e_2, ..., e_k$ sejam, respectivamente, as regularizações das funções características $\chi_{B_1}, \chi_{B_2}, ..., \chi_{B_k}$, com $supp\ e_i \subset D_i$, para $1 \leq i \leq k$. Com isso,

$$supp\ e_j \cap supp\ e_i = \emptyset, \text{ para } i \neq j, \text{ e } \int\limits_{\Omega} m|e_i|dx > 0, \forall\, 1 \leq i \leq k.$$

Definamos, agora,

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \; ; \; \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \cap M^+.$$

Provaremos que $F \in \mathcal{R}_k$. Para tanto, verifiquemos que F satisfaz as condições dadas na Definição 3.4.1. Portanto, seja $F_1 = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \; ; \; \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$. Temos que $F \neq \emptyset$. Com efeito, para $1 \leq i \leq k$, temos $I_2(e_i) = \int\limits_\Omega m|e_i|^p dx = c > 0$. Então, $u_i = \frac{e_i}{c^{1/p}} \in M^+$. Pondo $\alpha = \frac{1}{c^{1/p}} \in \mathbb{R}$, concluímos que $u_i \in F$. Também, F é simétrico. De fato, se $u \in F$, então existe $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ tal que $u = \sum\limits_{i=1}^k \alpha_i e_i$ e $I_2(u) = 1$. Assim, existe $(\beta_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, com $\beta_i = -\alpha_i$, para $1 \leq i \leq k$, tal que $-u = \sum\limits_{i=1}^k \beta_i e_i$ e $I_2(-u) = 1$. Portanto, $-u \in F$.

O conjunto F é compacto. Ora, F_1 é um espaço vetorial de dimensão finita e, portanto, fechado. Além disso, como $M^+ = I_2^{-1}(\{1\})$ e I_2 é de classe C^1, M^+ é fechado. Disso e de M^+ ser limitado, $F \subset M^+$ e $F \subset F_1$, segue que F é compacto. Finalmente, $i(F) = k$. Com efeito, definamos $f : F \to S^{k-1}$ pondo $f(u) = \frac{u}{||u||_k}$, onde $|| \cdot ||_k$ denota a norma de $\mathbb{R}^k$. Notamos que f está bem definida, pois $0 \notin F$. Além disso, $||f(u)||_k = 1$, para todo $u \in F$. Então, da Análise no $\mathbb{R}^n$, sabemos que f é um homeomorfismo e que $f(-u) = \frac{-u}{||-u||_k} = -\left(\frac{u}{||u||_k}\right) = -f(u)$, provando que f é ímpar. Portanto, pelo Teorema ....., temos que $i(F) = i(S^{k-1}) = k$. Consequentemente, $F \in \mathcal{R}_k$.

Caso 2: $m^+ \equiv 0$ e $\sigma^+ \not\equiv 0$.

Nesse caso, daremos atenção especial à construção das funções e_i, $1 \leq i \leq k$, uma vez que a definição de F e a verificação de suas propriedades, se dão de maneira análoga ao do caso 1.

Começaremos considerando k bolas abertas e disjuntas $B_1, B_2, ..., B_k \subset \Omega$, de modo que $S_i = \overline{B}_i \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ e $|Q_i = S_i \cap \Gamma_1^+| > 0$. Notamos que a segunda condição é possível, pois $|\Gamma_1^+| > 0$. Observamos ainda, que para que consigamos funções com suportes disjuntos, Γ_1 não pode ser composto por um único ponto, o que justifica excluirmos o caso em que $N = 1$, no enunciado deste lema.

Para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, seja χ_{Q_i} a função característica de Q_i e $\psi_i \in C^\infty(\Gamma_1)$ sua regularização.

Ponhamos $a_i = \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\psi_i|^p d\rho > 0$. Pela sobrejetividade do operador traço, consideremos $v_i \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\Upsilon(v_i) = \psi_i$.

A seguir, consideremos subconjuntos abertos "menores", $B_i^0 \subset B_i$, de modo que $\overline{B_i^0} \cap \Gamma_1^+ = Q_i$ e que

$$|B_i^0| < \frac{a_i}{2||m||_\infty ||v_i||_\infty^p},$$

o que é possível, pois $|B_i| > 0$ e $Q_i \subset \overline{B}_i$, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Seja $\chi_{\overline{B_i^0}}$ a função característica do conjunto fechado $\overline{B_i^0}$ e u_i sua regularização.

Definamos $e_i = u_i v_i$, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Então, se verifica que:

(1) $\Upsilon(e_i) = \psi_i$, para todo $1 \leq i \leq k$. De fato isto ocorre onde $u_i = 0$ e $\psi_i = 0$ e onde $u_i = 1$, pois $\Upsilon(v_i) = \psi_i$.

Em Γ_1 a "faixa de regularização" de ψ_i coincide com a "faixa de regularização" de u_i, visto que $\chi_{Q_i} = \chi_{\overline{B_i^0}}\Big|_{Q_i}$. Sendo assim, se chamarmos esta faixa de B_i^r, temos que $\Upsilon(e_i) = \Upsilon(u)$ Observe que, como...

(2) como B_i são disjuntas, também o são as B_i^0 e, consequentemente, $supp\ e_i \cap supp\ e_j = \emptyset$, se $i \neq j$, com $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$.

(3) $\int\limits_{\Omega} m|e_i|^p dx = \int\limits_{\Omega - B_i^0} m|0|^p dx + \int\limits_{B_i^0} m|v_i|^p dx \leq ||m||_\infty ||v_i||_\infty |B_i^0| < \frac{a_i}{2}$, donde $\int\limits_{\Omega} m|e_i|^p dx < \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_1} \sigma|\psi_i|^p d\rho$, para cada $1 \leq i \leq k$.

Logo, $I_2(e_i) = \int\limits_{\Omega} m|e_i|^p dx + \int\limits_{\Gamma_1} \sigma|e_i|^p d\rho = c_i > 0$, para cada $1 \leq i \leq k$, e, repetindo o procedimento do caso 1, obtemos a validade do lema.

■

Observação 3.4.3. É importante ressaltar que ao considerarmos as bolas no lema acima, as mesmas já foram tomadas de modo que o suporte das regularizações das funções características permanecessem disjuntos, como explicado no caso 1.

Teorema 3.4.1. Suponhamos $\alpha(V, m) > 0$, e que $\sigma^+ \not\equiv 0$ ou $m^+ \not\equiv 0$. No caso em que $m^+ \equiv 0$, suponhamos também $N > 1$. Definamos, para cada $k \in \mathbb{N}$, o seguinte valor real

$$\lambda_k = \inf_{K \in \mathcal{R}_k} \max_{u \in K} E_V(u). \tag{3.4.1}$$

Então, (λ_k) é uma sequência não decrescente de autovalores para o problema (3.0.1), tal que $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty$. Além disso,

$$\lambda_2(V, m) = \inf\{\lambda; \lambda > \lambda_1(V, m) \text{ e } \lambda \text{ é um autovalor de } (3.0.1)\}. \tag{3.4.2}$$

Demonstração: Primeiramente, para provar que os valores definidos em (3.4.1) são autovalores do problema (3.0.1) e que $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty$, aplicaremos o Teorema C.12. Lembramos que, de acordo com a Proposição 3.3.3, que o funcional energia associado ao problema (3.0.1) satisfaz a condição (PS) em qualquer nível $c \in \mathbb{R}$. Ainda, observamos que, por E_V ser limitado inferiormente sobre M^+, quando $\alpha(V, m) > 0$, $-\infty < \lambda_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Da mesma forma, se $\lambda_k = +\infty$, então $E_V(\tilde{u}) = \max_{u\in K} E_V(u) = +\infty$, para todo $K \in \mathcal{R}_k$ e $u \in K$. Mas, isto é um absurdo, pois $E_V(\tilde{u}) \leq |||\nabla\tilde{u}|||_p^p + ||V||_\infty ||\tilde{u}||_p^p \leq c_1||\tilde{u}|| < \infty$, onde $c_1 = \max\{1, ||V||_\infty\}$.

Além disso, pela Observação 3.4.1 e pela definição de ínfimo, concluímos que $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$. Portanto, pelo Teorema C.12, segue a validade da primeira parte do teorema.

Para finalizarmos, provaremos a caracterização para $\lambda_2(V,m)$ dada em (3.4.2). Para tal, verificamos, inicialmente, que a definição de $\lambda_1(V,m)$ coincide com a definição de λ_1, dada em (3.4.1). Como $\lambda_1(V,m)$ é simples o autoespaço gerado por φ_1 é unidimensional e, consequentemente, seu *genus* também é 1. Sendo assim, seu autoespaço é um elemento de $\mathcal{R}_1$ e obtemos a equivalência entre as definições.

Neste sentido, fixemos as seguintes notações: $\lambda_2(V,m) = \lambda_2$, $\lambda_1(V,m) = \lambda_1$ e K_{λ_1} o autoespaço gerado por φ_1, com $dim\ K_{\lambda_1} = 1$. Vejamos que $\lambda_2 > \lambda_1$. Como $\lambda_2 \geq \lambda_1$, basta verificarmos que não pode ocorrer a igualdade. Se $\lambda_2 = \lambda_1$, então $\inf_{K\in\mathcal{R}_2} \max_{u\in K} E_V(u) = \min_{u\in M^+} E_V(u) = E_V(\varphi_1)$. Deste modo, $i(K_{\lambda_1}) = 2$, o que é um absurdo com a simplicidade de λ_1.

Resta-nos verificar que não existe nenhum outro autovalor entre λ_1 e λ_2. Para isso, suponhamos, por absurdo, que exista um autovalor λ para o problema (3.0.1), com autofunção associada $v \in M^+$, tal que $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Dessa desigualdade e do Teorema 3.2.1, concluímos que λ não é autovalor principal de (3.0.1) e, portanto, v muda de sinal. Logo, $||v^+||_p > 0$ e $||v^-||_p > 0$.

Agora, tomando v^+ em (**??**), temos

$$\int_\Omega [|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla v^+ + V|v|^{p-2}vv^+]dx = \lambda \int_\Omega m|v|^{p-2}vv^+dx + \lambda \int_{\Gamma_1} \sigma|v|^{p-2}vv^+d\rho,$$

o que equivale a

$$\int_{\Omega_+^v} |\nabla v|^p + V|v|^p dx = \lambda \int_{\Omega_+^v} m|v|^p dx + \lambda \int_{\partial\Omega_+^v} \sigma|v|^p d\rho.$$

Também,

$$E_V(v^+) = \int_{\Omega_+^v} |\nabla v|^p + V|v|^p dx \quad \text{e} \quad I_2(v^+) = \int_{\Omega_+^v} m|v|^p dx + \int_{\partial\Omega_+^v} \sigma|v|^p d\rho.$$

Por conseguinte, $E_V(v^+) = \lambda I_2(v^+)$. De maneira análoga, vemos que $E_V(v^-) = \lambda I_2(v^-)$.

Ainda, $I_2(v^+) > 0$. De fato, se $I_2(v^+) = 0$, então $E_V(v^+) = 0$ e $\dfrac{v^+}{||v^+||_p} \in \mathcal{A}$. Consequentemente, $\alpha(V,m) \leq E_V\left(\dfrac{v^+}{||v^+||_p}\right) = 0$, o que é um absurdo. Por outro lado, se $I_2(v^+) < 0$, então

$$-\lambda_{-1}(V,m) \leq -\frac{E_V(v^+)}{I_2(v^+)} = -\lambda < -\lambda_1 \;\Rightarrow\; \lambda_{-1}(V,m) > \lambda_1,$$

o que é um absurdo. Portanto, $I_2(v^+) > 0$. Analogamente, vemos que $I_2(v^-) > 0$.

Para o que segue, seja

$$D = \{av^+ + bv^- \;;\; a,b \in \mathbb{R}\} \cap M^+.$$

Notamos que $0 \notin D$. E, como os suportes de v^+ e v^- são disjuntos, dado uma função $u \in D$, temos que $u = av^+$ ou $u = bv^-$, para certos $a, b \in \mathbb{R}$. Assim, podemos definir as seguintes aplicações, $f : D \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(u) = (u, 0)$, $g : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to S^1$, definida por $g(y) = \dfrac{y}{||y||_{\mathbb{R}^2}}$ e $h = g \circ f$. Utilizando resultados de Análise,podemos ver que h é um homeomorfismo entre D e S^1. Pelos Corolários F.1 e F.2, temos que $i(D) = i(S^1) = 2$.

Portanto, $D \in \mathcal{R}_2$ e $\lambda_2 \leq \max\limits_{u\in D} E_V(u)$. Mas, note que, se tomarmos $u \in D$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $u = av^+$, para algum $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Logo,

$$E_V(u) = E_V(av^+) = a^p E_V(v^+) = a^p \lambda I_2(v^+) = \lambda I_2(av^+) = \lambda.$$

Consequentemente, $\max\limits_{u\in D} E_V(u) = \lambda$ e, assim, $\lambda_2 < \lambda$, o que é um absurdo. Portanto, o teorema em questão é válido.

■

A partir do teorema anterior, é possível provar o seguinte corolário.

Corolário 3.4.1. Suponhamos que $\alpha(V,m) > 0$, e que $\sigma^- \not\equiv 0$ ou $m^- \not\equiv 0$. No caso em que $m^- \equiv 0$, suponhamos também $N > 1$. Definamos, para cada $k \in \mathbb{N}$, o seguinte valor real

$$\lambda_{-k} = \inf_{K\in\mathcal{P}_k} \max_{u\in K} -E_V(u), \tag{3.4.3}$$

onde $\mathcal{P}_k = \{K \subset M^-; K \text{ é simétrico, compacto e } i(K) = k\}$. Então, (λ_{-k}) é uma sequência não crescente de autovalores para o problema (3.0.1), tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_{-k} = -\infty$.

Observação 3.4.4. Uma caracterização para $\lambda_2(V,m)$, como sendo o segundo autovalor à direita do problema (3.0.1), foi fornecida pela primeira vez, por Anane; Tsouli (1996), para um problema com condição de fronteira de Dirichlet e função potencial $V \equiv 0$. Uma segunda caracterização para $\lambda_2(V, m)$ foi estabelecida por Cuesta; Quoirin (2009), para um problema do tipo Dirichlet com funções potencial e peso indefinidas. A obteção de tal caracterização foi apresentada no capítulo 2 deste trabalho.

3.5 Existência de Autovalores Não-Principais quando $\alpha(V, m) = 0$

Nesta seção trataremos do caso singular. Como já mencionamos anteriormente, a condição (PS) falha no nível do autovalor principal e isto dificulta a aplicação de métodos variacionais para a construção de autovalores não-principais. Contudo, provamos na Proposição 3.3.4, que E_V satisfaz a condição (PS) em todos os níveis estritamente superiores a λ_*, sobre M^+. Isso será útil para a construção de autovalores não principais.

Sejam, ainda, $V, \tilde{V} \in L^\infty(\Omega)$. Definamos $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, pondo

$$\alpha(t) = \alpha(V + t\tilde{V}, m) = \inf\{E_{V+t\tilde{V}}(u); u \in \mathcal{A}\}, \forall\, t \in \mathbb{R}^+$$

Lema 3.5.1. Suponhamos que um dentre os itens da Proposição 3.1.1 é verificado. Então, a função α é côncava, diferenciável em $t = 0$ e existe uma função $u_0 \in \mathcal{A}$, tal que $E_V(u_0) = \alpha(0)$ e

$$\alpha'(0) = \int_\Omega \tilde{V}|u_0|^p dx. \tag{3.5.1}$$

Demonstração: Vamos organizar a demonstração em passos, a fim de facilitar a observação de cada fato.

1º **passo:** Notamos que $\alpha(0) = \alpha(V, m) = 0$. Pela Proposição 3.1.1, $\alpha(V, m)$ é atingido em alguma função $\xi_0 \in \mathcal{A}$, ou seja, $E_V(\xi_0) = \alpha(V, m) = 0$.

2º **passo:** Consideremos uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}$, tal que $t_n \to 0^+$. Então,

$$\alpha(t_n) = \alpha(V + t_n\tilde{V}, m) \leq E_{V+t_n\tilde{V}}(\xi_0) = E_V(\xi_0) + t_n \int_\Omega \tilde{V}|\xi_0|^p dx.$$

Portanto,

$$\frac{\alpha(t_n) - \alpha(0)}{t_n} \leq \int_\Omega \tilde{V}|\xi_0|^p dx. \tag{3.5.2}$$

3º **passo:** Quando $t_n \to 0^+$, $V + t_n\tilde{V} \to V$ e, por α ser côncava, α é contínua. Assim, $\alpha(t_n) \to \alpha(0) = 0$, o que equivale a $\alpha(V + t_n\tilde{V}, m) \to \alpha(V, m) = 0$.

4^{o} **passo:** Como as hipóteses da Proposição 3.1.1 são verificadas, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha(V + t_n\tilde{V}, m) < +\infty$ e existem funções $\xi_0^n \in \mathcal{A}$, tais que $\alpha(V + t_n\tilde{V}, m) = E_V(\xi_0^n)$.

Agora, como $I_2(\xi_0^n) = 0$, $J_\lambda(\xi_0^n) = E_V(\xi_0^n)$, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Disso e de (3.1.5), vem que, para todo $\varepsilon > 0$ dado,

$$\int_\Omega |\nabla\xi_0^n|^p dx \leq \frac{1}{1 - |\lambda|\varepsilon||\sigma||_{\infty,\Gamma_1}}[E_{V+t_n\tilde{V}}(\xi_0^n) + ||V||_\infty + |\lambda|(||m||_\infty + c(\varepsilon)||\sigma||_{\infty,\Gamma_1}],$$

Deste modo, tomando $0 < \varepsilon < (|\lambda|||\sigma||_{\infty,\Gamma_1})^{-1}$, concluímos que a sequência $\left(\int_\Omega |\nabla\xi_0^n|^p dx\right)$ é limitada. Portanto, se $\Gamma_2 \neq \emptyset$, $(\xi_0^n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ é limitada.

Além disso, por $\left(\int_\Omega |\nabla\xi_0^n|^p dx\right)$ ser limitada, pelo Lema 3.1.1 e por $||\xi_0^n||_p = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que $\left(\int_{\partial\Omega} |\xi_0^n|^p d\rho\right)$ é limitada. Por consequinte, se $\Gamma_2 = \emptyset$, também concluímos que $(\xi_0^n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ é limitada.

Assim, dos Teoremas A.2, A.6 e B.2, a menos da passagem a uma subsequência, se necessário, existe $\tilde{\xi}_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $\xi_0^n \rightharpoonup \tilde{\xi}_0$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e $\xi_0^n \to \tilde{\xi}_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$. Com isso,

$$E_V(\xi_0) = \alpha(V, m) = \alpha(0) = \lim_{t_n\to 0^+} \alpha(t_n) = \lim_{t_n\to 0^+} \alpha(V+t_n\tilde{V}) = \lim_{t_n\to 0^+} E_{V+t_n\tilde{V}}(\xi_n^0) \geq E_V(\tilde{\xi}_0),$$

ou seja, $\alpha(V, m) \geq E_V(\tilde{\xi}_0)$. Por outro lado,

(a) $||\tilde{\xi}_0||_p = 1$;

(b) pelos Teoremas B.4, B.4 e H.4 e a Desigualdade de Hölder, considerando uma subsequência, se necessário, temos $I_2(\xi_0^n) \to I_2(\tilde{\xi}_0)$;

(c) por $I_2(\xi_0^n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e pelo item (b), $I_2(\tilde{\xi}_0) = 0$.

Por (a) e (c), $\alpha(V, m) \leq E_V(\tilde{\xi}_0)$. Portanto, $E_V(\tilde{\xi}_0) = \alpha(V, m) = 0$ e, consequentemente, $\xi_0 = \tilde{\xi}_0$.

5^{o} **passo:** Temos,

$$\alpha(0) = E_V(\xi_0) \leq E_V(\xi_0^n) = \alpha(t_n) - t_n \int_\Omega \tilde{V}|\xi_0^n|^p dx,$$

donde
$$\frac{\alpha(t_n)-\alpha(0)}{t_n} \geq \int_\Omega \tilde{V}|\xi_0^n|^p dx.$$

Portanto,
$$\int_\Omega \tilde{V}|\xi_0^n|^p dx \leq \frac{\alpha(t_n)-\alpha(0)}{t_n} \leq \int_\Omega \tilde{V}|\xi_0|^p dx.$$

Logo, $\alpha'(0) = \int_\Omega \tilde{V}|\xi_0|^p dx$, como queríamos.

■

Observação 3.5.1. Como α é diferenciável em $t=0$,

$$\alpha(t) = \alpha(0+t) = \alpha(0) + \alpha'(0)t + r(t), \text{ onde } \lim_{t\to 0^+} \frac{r(t)}{t} = 0.$$

Assim, se $\tilde{V} \equiv 1$, então, por $\alpha(0)=0$, $\alpha(t) > 0$, quando $t \to 0^+$.

Teorema 3.5.1. Suponhamos que $\alpha(V,m) = 0$ e que $\sigma^+ \not\equiv 0$ ou $m^+ \not\equiv 0$. No caso em que $m^+ \equiv 0$, suponhamos também $N > 1$.

(i) Se $\mathcal{L} \doteq \{h \in C([0,1], M^+); h(0) \geq 0 \text{ e } h(1) \leq 0\}$, então

$$\beta(V) = \beta = \inf_{h\in\mathcal{L}} \max_{u\in h([0,1])} E_V(u), \tag{3.5.3}$$

satisfaz $\mu > \lambda_*$.

(ii) Dado uma função $u_1 \in M^+$, com $u_1 \geq 0$, de modo que $E_V(u_1) < \beta$, temos que

$$\lambda_2(V,m) = \inf_{h\in\mathcal{H}} \max_{u\in h([0,1])} E_V(u), \tag{3.5.4}$$

onde $\mathcal{H} \doteq \{h \in C([0,1], M^+); h(0) = u_1 \text{ e } h(1) = -u_1\}$, é um autovalor para o problema (3.0.1).

(iii) $\beta = \lambda_2(V,m)$.

(iv) $\lambda_2(V,m)$ é o primeiro autovalor não principal para o problema (3.0.1) satisfazendo (3.4.2).

Demonstração: i) Primeiramente, observamos que $\mathcal{L} \neq \emptyset$, pois sempre é possível encontrar funções $v_1 \leq 0$ e $v_2 \geq 0$, tais que $v_1, v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $supp\ v_1 \cap supp\ v_2 = \emptyset$ e $v_1, v_2 \in M^+$. Para tanto, basta-nos considerar bolas disjuntas em Ω^+, suas respectivas funções características e repetir os passos de construção que já descrevemos em demonstrações anteriores, por exemplo a do Lema **??**.

Então, $I_2(t^{1/p}v_1 + (1-t)^{1/p}v_2) \neq 0$, para todo $t \in [0,1]$, e podemos definir um caminho $\gamma_1 : [0,1] \to M^+$, pondo

$$\gamma_1(t) = \frac{t^{1/p}v_1 + (1-t)^{1/p}v_2}{I_2(t^{1/p}v_1 + (1-t)^{1/p}v_2)^{1/p}}, \forall\, t \in [0,1].$$

Notamos que $\gamma_1(0) = v_2 \geq 0$ e $\gamma_1(0) = v_1 \leq 0$. Portanto, $\gamma_1 \in \mathcal{L}$, provando a boa definição de (3.5.3).

Na sequência, verificamos que $\beta > \lambda_*$. Pela definição de λ_*, temos $\lambda_* \leq \beta$. Suponhamos, por absurdo, que $\beta = \lambda_*$. Então, existe uma sequência $(h_k) \subset \mathcal{L}$, tal que $\max\limits_{t\in[0,1]} E_V(h_k(t)) \to \lambda_*$, quando $k \to \infty$.

Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar um valor $t_k \in [0,1]$, de modo que $I_2(h_k(t_k)^+) = I_2(h_k(t_k)^-) = \frac{1}{2}$ ($\bigstar$). A demonstração desse fato é similar àquela dada na Proposição 2.5.1.

Ponhamos $u_k = h_k(t_k)$ e observemos que, de ($\bigstar$), $I_2(2^{1/p}u_k^{\pm}) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Com isso, $2^{1/p}u_k^{\pm} \in M^+$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Além do mais,

(a) pela definição de λ_*, temos $\lambda_* \leq E_V(2^{1/p}u_k^{\pm})$, donde $E_V(u_k^{\pm}) \geq \frac{1}{2}\lambda_*$.

(b) $E_V(u_k) = E_V(u_k^+) + E_V(u_k^-)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} E_V(u_k) &= \int_\Omega [|\nabla(u_k^+ - u_k^-)|^p + V|u_k^+ - u_k^-|^p]dx \\ &= \int_{\Omega_+^{u_k}} [|\nabla u_k^+|^p + V|u_k^+|^p]dx + \int_{\Omega_-^{u_k}} [|\nabla u_k^-|^p + V|u_k^-|^p]dx \\ &= E_V(u_k^+) + E_V(u_k^-) \end{aligned}$$

(c) $E_V(u_k) = E_V(h_k(t_k)) \leq \max\limits_{t\in[0,1]} E_V(h_k(t))$.

De (a), (b) e (c), segue que

$$\frac{1}{2}\lambda_* \leq E_V(u_k^+) = E_V(u_k) - E_V(u_k^-) \leq \max_{t\in[0,1]} E_V(h_k(t)) - \frac{1}{2}\lambda_*$$

e

$$\frac{1}{2}\lambda_* \leq E_V(u_k^-) = E_V(u_k) - E_V(u_k^+) \leq \max_{t\in[0,1]} E_V(h_k(t)) - \frac{1}{2}\lambda_*.$$

Por isso, por $\max\limits_{t\in[0,1]} E_V(h_k(t)) \to \lambda_*$ e pelo Teorema do Sanduíche,

$$\lim_{k\to\infty} E_V(u_k^{\pm}) = \frac{\lambda_*}{2}. \tag{3.5.5}$$

Disso e de (b), temos

$$\lim_{k\to\infty} E_V(u_k) = \lambda_*, \tag{3.5.6}$$

e, portanto, $(E_V(u_k))$ é limitada.

Suponhamos, agora, que $(u_k) \subset M^+$ seja ilimitada. Definindo $v_k = \frac{u_k}{||u_k||}$, temos que $(v_k) \subset W$ é limitada e, pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, a menos de passagem a subsequência, existe $v_0 \in W$ tal que $v_k \rightharpoonup v_0$ em W e $v_k \to v_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$.

Decorre disso, que

(1) $\lim I_2(v_k) = \lim \dfrac{1}{||u_k||^p} I_2(u_k) = 0$;

(2) $\lim E_V(v_k) = \lim \dfrac{1}{||u_k||^p} E_V(u_k) = 0$;

(3) a menos de considerarmos uma subsequência, se necessário, dos Teoremas B.3, B.4 e H.4 e da Desigualdade de Hölder, $I_2(v_k) \to I_2(v_0)$;

(4) de maneira análoga ao anterior, $\int\limits_\Omega V|v_k|^p dx \to \int\limits_\Omega V|v_0|^p dx$, passando a uma subsequência, se necessário. .

De (3.5.6), (2) e (4), temos

$$0 \leq \lim \int\limits_\Omega |\nabla v_k|^p dx = \lim \left(E_V(v_k) - \int\limits_\Omega V|v_k|^p dx \right) = -\int\limits_\Omega V|v_0|^p dx.$$

. Desta forma,

$$||\nabla v_k - \nabla v_0||_p \leq ||\nabla v_k||_p + ||\nabla v_0||_p \to 2||\nabla v_0||_p = 0,$$

quando $v_0 = 0$. Assim, se $v_0 = 0$, temos que $v_k \to v_0$ em W, o que é um absurdo, pois $||v_k|| = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $v_0 \neq 0$ e, como $I_2(v_0) = 0$, $v_1 = \dfrac{v_0}{||v_0||_p} \in \mathcal{A}$.

Ainda, por E_V ser f.s.s.i., temos

$$E_V(v_0) \leq \liminf E_V(v_k) = \lim E_V(v_k) = 0. \tag{3.5.7}$$

Então, por $\alpha(V,m) = 0$, (3.5.7) e $v_1 \in \mathcal{A}$, segue que $E_V(v_1) = \alpha(V,m)$. Assim, do item (2-b) do Teorema 3.2.1, obtemos que v_1 é autofunção associada a λ_*. Pelo Teorema 3.2.2, $v_1 = c\varphi_0$, para algum $c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$. Ou seja, v_1 não muda de sinal. Suponhamos $v_1 > 0$, o caso em que $v_1 < 0$ é tratado de modo análogo.

Deste modo, pela definição de v_k e por $v_k \to v_0$, temos $|\Omega_-^{u_k}| \to 0$. Agora, se isto ocorre, o mesmo ocorre para a sequência $(2^{1/p}u_k^-) \subset M^+$, e verifica-se que $2^{1/p}u_k^- \geq 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $|\{x \in \Omega; 2^{1/p}u_k^-(x) > 0\}| = |\Omega_{-,u_k}| \to 0$ e, por (3.5.5), $(E_V(2^{1/p}u_k^-)) \subset \mathbb{R}$ é limitada. Logo, pela Proposição 3.3.2, concluímos que $(2^{1/p}u_k^-) \subset M^+$ é limitada e, por conseguinte, $(u_k^-) \subset W$ é limitada.

Assim, pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, considerando uma subsequência, se necessário, existe $u_0 \in W$ tal que $u_k^- \rightharpoonup u_0$ em W e $u_k^- \to u_0$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$.

Disso, de $I_2(u_k^-) = \frac{1}{2}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, dos Teoremas B.3, B.4 e H.4 e da Desigualdade de Hölder, concluímos que, a menos de passagem a uma subsequência, $I_2(u_0) = \frac{1}{2}$. Deste fato, decorre que $2^{1/p}u_0 \in M^+$.

Portanto, $\lambda_* \leq E_V(2^{1/p}u_0)$ e, juntamente com (3.5.5), segue que

$$\frac{\lambda_*}{2} \leq E_V(u_0) \leq \liminf E_V(u_k^-) = \lim E_V(u_k^-) = \frac{\lambda_*}{2},$$

isto é, $\lambda_* = E_V(2^{1/p}u_0)$, com $2^{1/p}u_0 \in M^+$, o que contraria o Teorema 3.2.1. Logo, $(u_k) \subset W$ é limitada.

Assim, pelos Teoremas A.2, A.6 e B.2, a menos da passagem a uma subsequência, existe $\tilde{u} \in W$ tal que $u_k \rightharpoonup \tilde{u}$ em W e $u_k \to \tilde{u}$ em $L^p(\Omega) \cap L^p(\partial\Omega)$.

Pelos Teoremas B.3, B.4 e H.4 e da Desigualdade de Hölder, a menos de passagem a uma subsequência, $I_2(u_k) \to I_2(\tilde{u})$. Como $I_2(u_k) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $I_2(\tilde{u}) = 1$, ou seja, $\tilde{u} \in M^+$. Também, por (3.5.6),

$$\lambda_* \leq E_V(\tilde{u}) \leq \liminf E_V(u_k) = \lim E_V(u_k) = \lambda_*,$$

isto é, λ_* é atingido por uma função em M^+ o que, novamente, contraria o Teorema 3.2.1. Logo, $\lambda_* < \beta$.

(ii) Primeiramente, vejamos que existe ao menos uma função $u_1 \in M^+$, que satisfaz as condições impostas no teorema em questão. Consideremos a sequência $(u_n) \subset M^+$, definida em (3.2.1). Notamos que $u_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, provamos no Teorema 3.2.1, que $E_V(u_n) \to \lambda_*$. Deste modo, como $\beta > \lambda_*$, por (i), para todo n suficientemente grande,

$\beta > E_V(u_n)$. Assim, tomando $u_1 = u_{n_1}$, para n_1 suficientemente grande, obtemos a função desejada.

Vejamos, agora, que $\lambda_2(V, m)$ é autovalor para o problema (3.0.1). A fim de simplificar a notação, consideremos $\lambda_2 = \lambda_2(V, m)$. Observamos que,

(a) se $h \in Hh$, então $h \in \mathcal{L}$, pois $u_1 \geq 0$ e $-u_1 \leq 0$. De outro modo, $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$. Assim, pelas propriedades de ínfimo, $\beta \leq \lambda_2$. Ainda, pelo item (i), $\lambda_* < \beta \leq \lambda_2$. E, pela Proposição 3.3.4, E_V satisfaz $(PSC)_{\lambda_2}$, sobre M^+;

(b) como E_V é par e $E_V(u_1) < \beta$, temos que $\max\{E_V(u_1), E_V(-u_1)\} < \beta \leq \lambda_2$.

Portanto, de (a) e (b), podemos aplicar o Teorema C.6, com $f \equiv E_V$, $K = [0, 1]$ e $K_0 = \{0, 1\}$, o qual nos garante que λ_2 é valor crítico de $E_V\Big|_{M^+}$. Logo, λ_2 é autovalor para o problema (3.0.1).

(iii) Tendo em vista que $\beta \leq \lambda_2$, provaremos que $\lambda_2 \leq \beta$. Pela definição de ínfimo, consideremos $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, e $h \in \mathcal{L}$, de modo que

$$\max_{t \in [0,1]} E_V(h(t)) \leq \beta + \varepsilon. \tag{3.5.8}$$

Ponhamos $u_0 = h(0)$. Pelo Lema 3.5.1, temos $\alpha(0) = \alpha(V, m) = 0$ e, para $t > 0$ suficientemente pequeno, $\alpha(V + t, m) > 0$. Isto nos garante a validade da condição (PS) para o funcional E_{V+t}, restrito a M^+, em qualquer nível $c \in \mathbb{R}$. Ainda, por (ii), $E_V(u_1) < \beta$ e, por (3.5.8), $E_V(u_0) = E_V(h(0)) < \beta + \varepsilon$. Disso, podemos considerar $t > 0$, suficientemente pequeno, de modo que

$$\max\{E_{V+t}(u_0), E_{V+t}(u_1)\} < \beta + \varepsilon. \tag{3.5.9}$$

Agora, seja $\mathcal{O} = \{u \in M^+; E_{V+t}(u) < \beta + \varepsilon\}$. Temos que $\mathcal{O}$ é aberto em M^+, pois $\mathcal{O} = E_{V+t}^{-1}((-\infty, \beta + \varepsilon))$ e E_{V+t} é de classe C^1.

Afirmação: $\mathcal{O}$ possui, no máximo, duas componentes conexas por caminhos.

De fato, para $t > 0$ suficientemente pequeno, $\alpha(V + t, m) > 0$ e, pelo Teorema 3.2.1, $\pm\varphi_1(V + t)$ são os únicos pontos críticos de E_{V+t}, em M^+, onde $\varphi_1(V + t)$ é a autofunção associada a $\lambda_1(V + t, m)$. Deste último fato,

$$E_{V+t}(\pm\varphi_1(V + t)) = \lambda_1(V + t, m) = \inf_{u \in M^+} E_{V+t}(u).$$

Consequentemente, de $u_1 \in M^+$ e (3.5.9), obtemos que $E_{V+t}(\pm\varphi_1(V + t)) \leq E_{V+t}(u_1) < \beta + \varepsilon$. Portanto, $\pm\varphi_1(V + t)$ são os únicos pontos críticos de E_{V+t}, restrito a M^+, em $\mathcal{O}$. Logo, do Lema 2.4.2, segue a validade da afirmação.

Assim, se u_1 e $-u_1$ estão na mesma componente, obtemos que $\lambda_2 \leq \beta + \varepsilon$. Caso isto não ocorra, u_0 pode ser conectado por um caminho a uma dentre as funções u_1 e $-u_1$, de modo que este caminho seja composto por funções nã-negativas e permaneça a níveis inferiores a $\beta+\varepsilon$. Podemos repetir este argumento considerando $h(1)$ e a outra função dentre u_1 e $-u_1$. Tal construção pode ser feita com base na Observação 2.4.1.

Logo, $\lambda_2 \leq \beta + \varepsilon$ e, fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos o resultado desejado.

iv) Observe que, como $\alpha(V, m) = 0$, o problema (3.0.1) possui um único autovalor principal λ_*. Sendo assim, de (i) e (ii), λ_2 é um autovalor não-principal. O que nos garante que $||u^{\pm}||_p > 0$. Provemos que λ_2 é o primeiro autovalor não-principal satisfazendo (**??**).

Seja $\lambda > \lambda_*$ um autovalor de (3.0.1), com autofunção associada u. Defina o caminho

$$h(t) = \frac{tu^+ - (1-t)u^-}{I_2(tu^+ - (1-t)u^-)^{1/p}}.$$

Verifiquemos que h está bem definido. Primeiro observe que $I_2(tu^+ - (1-t)u^-) = t^p I_2(u^+) + (1-t)^p I_2(u^-)$. Além disso,

• não ocorre $I_2(u^{\pm}) < 0$. Provemos para u^+, visto que para u^- segue de modo análogo. Se $I_2(u^+) < 0$, então

$$-\lambda = E_V\left(\frac{u^+}{-I_2(u^+)}\right) \geq -\lambda_*,$$

ou seja, $\lambda_* \geq \lambda$, o que contraria nossa hipótese.

• Se $I_2(u^+) = 0$, é possível mostrar que u^+ é autofunção associada a λ_* e, desta forma, obteremos um absurdo com a Proposição 3.2.1. Portanto, $I_2(u^+) \neq 0$. De maneira similar, vemos que $I_2(u^-) \neq 0$

Logo, dos itens anteriores, $I_2(u^{\pm}) > 0$ e, consequentemente, $I_2(tu^+ - (1-t)u^-) > 0$, para todo $t \in [0, 1]$, provando a boa definição de h.

Observe que $I_2(h(t)) = 1$, para todo $t \in [0, 1]$, donde $h \in C([0, 1], M^+)$. Além disso, $h(0) = \frac{-u^-}{I_2(u^-)^{1/p}} \leq 0$ e $h(1) = \frac{u^+}{I_2(u^+)^{1/p}} \geq 0$.

Defina, agora, $\psi : [0, 1] \to M^+$ por

$$\psi(t) = \frac{tu^- + (1-t)u^+}{I_2(tu^- + (1-t)u^+)^{1/p}}.$$

Então, ψ está bem definida, $I_2(\psi(t)) = 1$, para todo $t \in [0, 1]$, e $\psi(0) = \frac{u^+}{I_2(u^+)^{1/p}}$ e $\psi =$

$\frac{u^-}{I_2(u^-)^{1/p}}$.

Assim, $\psi * \overline{h}$ é um caminho em M^+ que liga $\frac{u^-}{I_2(u^-)^{1/p}}$ a $\frac{-u^-}{I_2(u^-)^{1/p}}$, onde $\overline{h}$ é o caminho reverso de h.

Agora, se $\lambda \geq \beta$, não há o que demonstrar. Suponhamos, neste sentido, que $\lambda < \beta$. Então,

$$E_V\left(\frac{u^-}{I_2(u^-)^{1/p}}\right) = \frac{E_V(u^-)}{I_2(u^-)} = \lambda < \beta.$$

Também temos que $E_V(h(t)) = \lambda$ e $E_V(\psi(t)) = \lambda$, para todo $t \in [0,1]$. Por conseguinte, $\psi * \overline{h} \in \mathcal{H}$ e $\max\limits_{t\in[0,1]} E_V((\psi * \overline{h})(t)) < \beta$.

Pelo item (iii), $\lambda_2 = \beta$, donde $\max\limits_{t\in[0,1]} E_V((\psi * \overline{h})(t)) < \lambda_2$, o que é um absurdo. Logo, $\beta \leq \lambda$, provando o resultado.

$\blacksquare$

4 CONCLUSÃO

O estudo de problemas elípticos com funções potencial e peso indefinidas exige uma abordagem mais cuidadosa e delicada, uma vez que faz-se necessário contornar algumas dificuldades que surgem. A obtenção de resultados de existência depende das medidas das partes positiva e negativa das funções peso e potencial, bem como do espaço onde as mesmas se encontram.

Uma abordagem que se apresentou muito eficáz, tanto nos dois problemas apresentados neste trabalho, quanto nos dois problemas de Steklov que optamos por omitir aqui, consiste no uso de uma autocurva curva associada ao problema de autovalores. Como foi possível observar, independentemente das condições de fronteira, as propriedades relevantes da autocurva se mantém as mesmas, o que nos permite afirmar que estas são, de certa forma, intrínsecas a própria definição da curva.

Finalmente, com base neste estudo e nas referências pesquisadas, foi possível perceber que ainda existem problemas em aberto, mesmo quando consideramos o operador p-laplaciano, no que tange a mudança de sinal. Como trabalhos futuros, podemos mencionar o estudo de um problema elíptico não linear com potencial indefinido, o qual não tivemos tempo hábil para resolver antes do fechamento desta dissertação. Além disso, será interessante abordar problemas envolvendo outros expoentes, tais como o fracionário e o $p(x)$, incluindo nos problemas a mudança de sinal.

REFÊRENCIAS

ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. **Sobolev spaces**. 2. ed., Reprinted ed. Amsterdam: Acad. Press, 2008.

ALBIAC, F.; KALTON, N. J. **Topics in Banach space theory**. New York: Springer, 2006.

AMANN, H.; ESCHER, J. **Analysis I**. Basel; Boston: Birkhauser, 2005.

AMANN, H.; ESCHER, J. **Analysis I**. Basel; Boston: Birkhauser, 2005.

AMBROSETTI, A.; MALCHIODI, A. **Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

ARIAS, M.; CAMPOS, J.; CUESTA, M.; GOSSEZ, J.-P. **Asymmetric elliptic problems with indefinite weights**. Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, v. 19, n. 5, p. 581–616, 2002.

ARIAS, M.; CAMPOS, J.; CUESTA, M.; GOSSEZ, J.-P. **An asymmetric Neumann problem with weights**. Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, v. 25, n. 2, p. 267–280, 2008.

AUBIN, J. P.; EKELAND, I. **Applied nonlinear analysis**. New York: Wiley, 1984.

BEN-NAOUM, A. K.; TROESTLER, C.; WILLEM, M. **Extrema problems with critical sobolev exponents on unbounded domains**. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, v. 26, n. 4, p. 823–833, 1996.

BINDING, P. A.; HUANG, Y. X. **Linked eigenvalue problems for the p-Laplacian**. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, v. 124, n. 05, p. 1023–1036, 1994.

BINDING, P. A.; HUANG, Y. X. **The principal eigencurve for the p-laplacian**. Differential and Integral Equations, v.8, n. 02, p. 405-414, 1995.

BINDING, P. A.; HUANG, Y. X. **Existence and nonexistence of positive eigenfunctions for the p-laplacian**. Proceedings of the American Mathematical Society, v.123, n. 06, 1833-1838, 1995.

BREZIS, H. **Analyse Fonctionnelle**. Paris: Masson, 1983.

BREZIS, H.; BROWDER, F. **Partial Differential Equations in the 20th Century**. Advances in Mathematics, v. 135, n. 1, p. 76–144, 1998.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2010.

CUESTA, M.; LEADI, L. **Weighted eigenvalue problems for quasilinear elliptic operators with mixed Robin–Dirichlet boundary conditions**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 422, n. 1, p. 1–26, 2015.

CUESTA, M.; RAMOS QUOIRIN, H. **A weighted eigenvalue problem for the p-Laplacian plus a potential**. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, v. 16, n. 4, p. 469–491, 2009.

CUESTA M.; de FIGUEIREDO D. **The Beginning of the Fučik Spectrum for the p-Laplacian**. Journal of Differential Equations, v. 159, p.212-238, 1999.

COSTA, D. G. **An invitation to variational methods in differential equations**. Boston: Birkhäuser, 2007.

De MORAES, E. de F. G. **Autovalor principal para problemas elípticos com peso indefinido em $\mathbb{R}^N$ e aplicações**. 2006. 104 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2006.

DEMENGEL, F.; DEMENGEL, G.; ERNÉ, R. **Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations**. London: Springer [u.a.], 2012.

DENG, S.-G. **Positive solutions for Robin problem involving the p(x)-Laplacian**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 360, n. 2, p. 548–560, 2009.

FIGUEIREDO, D. G. DE. **Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours**. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer, 1989.

FOLLAND, G. B. **Real Analysis Modern Techniques and their Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1984.

GUEDDA, M.; VERON, L. **Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents**. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, v. 13, n. 8, p. 879–902, 1989.

HU, S.; PAPAGEORGIOU, N.S. **Handbook of multivalued analysis**. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997.

KAVIAN, O. **Introduction a la theorie des points critiques et applications aux problemes elliptiques**. Paris; New York: Springer-Verlag, 1993.

KINDERLEHRER, D.; STAMPACCHIA, G. **An introduction to variational inequalities and their applications**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley and Sons, 1978.

KUFNER, A.; JOHN, O.; FUčIK, S. **Function spaces**. Leyden: Noordhoff [u.a.], 1977.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**, v.1. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LANG, S. **Differential and Riemannian manifolds**. New York: Springer-Verlag, 1995.

MAZ'JA, V. G.; AALTO, D.; ISAKOV, V. (ORGS.). **Applications in analysis and partial differential equations**. New York, NY: Springer, 2009.

MOTREANU, D.; WINKERT, P. **The Fučík Spectrum for the Negative p-Laplacian with Different Boundary Conditions**. In: P. M. Pardalos; P. G. Georgiev; H. M. Srivastava (Orgs.); Nonlinear Analysis. v. 68, p.471–485, 2012. New York, NY: Springer New York.

NIRENBERG, L. **Topics in nonlinear functional analysis**. New York: Province, R.I: Courant Institute; American Mathematical Society, 2001.

ÔTANI, M.; TESHIMA, T. **On the first eigenvalue of some quasilinear elliptic equations**. Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, v. 64, n. 1, p. 8–10, 1988.

PERERA, K.; AGARWAL, R. P.; O'REGAN, D. **Morse theoretic aspects of p-Laplacian type operators**. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2010.

PEZZO, L.; BONDER, J. **An optimization problem for the first eigenvalue of the $p-$Laplacian plus a potential**. Communications on Pure and Applied Analysis, v. 5, n. 4, p. 675–690, 2006.

PUCCI, P.; SERRIN, J. **The maximum principle**. Basel; Boston: Birkhauser, 2007.

RABINOWITZ, P. H. **Some aspects of nonlinear eigenvalue problems**. Rocky Mountain Journal of Mathematics, v. 3, n. 2, p. 161–202, 1973.

RABINOWITZ, P. H. **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations**. Providence, R.I: Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society, 1986.

SZULKIN, A. **Ljusternik-Schnirelmann theory on C 1 -manifolds**. Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, v. 5, n. 2, p. 119–139, 1988.

TRUDINGER, N. S. **On harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations**. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 20, n. 4, p. 721–747, 1967.

VÁZQUEZ, J. L. A Strong Maximum Principle for some quasilinear elliptic equations. Applied Mathematics and Optimization, v. 12, n. 1, p. 191–202, 1984.

WILLEM, M. **Minimax theorems**. Boston: Birkhäuser, 1996.

ZEIDLER, E.; BORON, L. F. **Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: II/B: Nonlinear Monotone Operators**. New York, NY: Springer, 2013.

ZEIDLER, E.; QUANDT, J. **Nonlinear Functional Analysis and Its Application IV: Appli-**

cations to Mathematical Physics. New York, NY: Springer, 2013.

ZIEMER, W. P. **Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation**. New York: Springer-Verlag, 1989.

APÊNDICE

Nesta seção apresentamos alguns resultados utilizados ao longo do trabalho. Tais resultados são comuns na bibliografia e artigos da área das Equações Parciais Diferenciais, e serão organizados por área de conhecimento.

A. Espaços de Sobolev

Teorema A.1: Existe $C = C(|\Omega|) > 0$, $|\Omega| < \infty$, tal que $||u||_\infty \leq C||u||_{1,p}$, para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Ou seja, as imersões $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ são contínuas.

Além disso, se Ω é limitado, então

(a) a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ é compacta, para todo $1 < p \leq \infty$;

(b) a imersão $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta, para todo $1 \leq q < \infty$.

Teorema A.2: (Rellich-Kondrachov) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio de classe $C^{0,1}$, $N \geq 2$. Se $p \in [1, \infty)$, então o mergulho $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínuo, desde que

(a) $p < n$ e $1 \leq q \leq \dfrac{Np}{N - kp}$, ou,

(b) $p \geq N$ e $q \in [1, \infty)$.

Além disso, caso $p < N$ e $1 \leq q\dfrac{Np}{N - kp}$ ou $p \geq N$ e $q \in [1, \infty)$, o mergulho é compacto.

Teorema A.3: Sejam $\Omega' \subset \Omega$ dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^N$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então a restrição de u a Ω', denotada por $u\big|_{\Omega'}$, pertence a $W^{1,p}(\Omega')$ e temos $(u\big|_{\Omega'})_{x_i} = (u_{x_i})\big|_{\Omega'}$. Além disso, o operador restrição $u \mapsto u\big|_{\Omega'}$ é contínuo.

Demonstração: Veja Ben-Naoum, Troestler e Willem(1994).

■

Teorema A.4: Seja $(u_k) \subset W^{1,p}(\Omega)$ limitada, com $1 < p \leq \infty$. Então, existem $(u_{k_j}) \subset (u_k)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $||u_{k_j} - u||_\infty \to 0$.

Teorema A.5: Se $|\Omega| < \infty$, então a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ é compacta.

Teorema A.6: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, com fronteira de classe $C^{0,1}$, $N \geq 2$ e $p \in [0, \infty)$. Então, existe um único operador, denominado Operador Traço de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $L^q(\partial\Omega)$, $\Upsilon : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$ contínuo, desde que:

(1) $p < N$ e $1 \leq q \leq \dfrac{(N-1)p}{N-p}$.

(2) $p \geq N$ e $q \in [1, \infty)$.

E mais, caso $p < N$ e $1 \leq q < \dfrac{(N-1)p}{N-p}$ ou $p \geq N$ e $q \in [1, \infty)$, o operador Υ é compacto.

Teorema A.7: As normas $||\cdot||_W$ e $||\cdot|| = (||\nabla \cdot||_p^p + ||\cdot||_p^p)^{1/p}$ são equivalentes.

Demonstração: Veja Deng (2009).

∎

B. Análise Funcional

Teorema B.1: Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e (u_n) uma sequência limitada de $L^p(\Omega)$ que converge para u q.t.p. em Ω. Então, verifica-se que $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$, para todo $1 < r < p$.

Teorema B.2: Se $(E, ||\cdot||)$ é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada possui uma subsequência fracamente convergente.

Demonstração: Veja Brézis(2010).

∎

Teorema B.3: Seja (f_k) uma sequência em $L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ tais que $||f_k - f||_p \to 0$. Então, existem $(f_{k_j}) \subset (f_k)$ e $h \in L^p(\Omega)$ que verificam

(a) $f_{k_j}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;

(b) $|f_{k_j}(x)| \leq h(x)$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e q.t.p. em Ω.

Demonstração: Veja Brézis(2010).

∎

Teorema B.4: Seja $(u_k) \subset L^p(\Omega)$, satisfazendo:

(i) $u_k(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω;

(ii) $||u_k||_p \to ||u||_p$, quando $k \to \infty$.

Então, $||u_k - u||_p \to 0$, quando $k \to \infty$.

Demonstração: Veja Kavian(1993).

∎

Teorema B.5: Seja $(u_k) \subset L^p(\Omega)$. Se $u_k \to u$ em $L^p(\Omega)$, então $u_k \to u$ em medida.

Demonstração: Veja Fučik, John e Kufner(1977).

∎

Definição B.1: Sejam X um espaço de Banach, $U \subset X$ aberto e $F : U \to \mathbb{R}$. Então:

a) O funcional F tem derivada de Gateaux F' no ponto $x \in U$ se, para todo $h \in X$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x+th) - F(x) - \langle F', th \rangle}{t} = 0.$$

A derivada de Gateaux no ponto $x \in U$ é denotada por $F'(x)$.

b) O funcional F tem derivada de Fréchet F' no ponto $x \in U$, se

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x) - \langle F', h \rangle}{||h||} = 0.$$

c) O funcional $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de F existe e é contínua em U.

Observação B.1: Toda derivada de Fréchet é uma derivada de Gateaux.

Teorema B.6: Sejam X um espaço de Banach, $U \subset X$ aberto e $F : U \to \mathbb{R}$. Então, se F possui derivada de Gateaux contínua em U, $F \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Teorema B.7: (Multiplicadores de Lagrange) Sejam E um espaço de Banach e f, g dois funcionais em de classe C^1. Se u_0 é um extremo de f restrito a $g^{-1}(g(u_0))$, então uma dentre as seguintes alternativas ocorre:

(a) $g'(u_0)(v) = 0$, para todo $v \in E$;

(b) existe $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que $f'(u_0)(v) = \lambda g'(u_0)(v)$, para todo $v \in E$.

C. Cálculo Variacional

Teorema C.1: Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Suponha que existam uma função $b \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, uma constante $c > 0$ e $r > 0$, tal que

$$|f(x,s)| \leq c|s|^r + b(x), \ \forall \, x \in \Omega, s \in \mathbb{R}.$$

Então, o Operador de Nemytskii $N_f : L^{qr}(\Omega) \to L^q(\Omega)$, definido por $N_f(u) = f(x,u)$ é contínuo e limitado.

Demonstração: Veja Djairo(1989).

■

Teorema C.2: Assuma que $I : X \to \mathbb{R}$ é limitado inferiormente e ponha $c = \inf\{I(u); u \in X\}$. Então, I satisfaz a condição $(PSC)_c$ se, e somente se, I satisfaz a condição $(PS)_c$.

Demonstração: Veja Arias et al (2006).

■

Teorema C.3: Seja E um espaço de Banach real. Se $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição $(PS)_c$ e é limitado inferiormente, então $c = \inf\limits_E I$ é um valor crítico para I.

Teorema C.4: Sejam E um espaço de Banach real, $g \in C^1(E, \mathbb{R})$, $M = \{u \in E; g(u) = 1\}$, $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $\tilde{f}$ a restrição de f a M. Consideremos $u, v \in M$, com $u \neq v$. Suponha que

$H = \{h \in C([-1,1], M); h(-1) = u$ e $h(1) = v\}$ é não vazio. Assuma, também, que

$$c = \inf_{h \in H} \max_{w \in h([-1,1])} f(w) > \max\{f(u), f(v)\}$$

e que $\tilde{f}$ satisfaz a condição (PS) em M. Então, c é um valor crítico de $\tilde{f}$.

Demonstração: Veja Arias et al (2002).

■

Teorema C.5: (Princípio de Ekeland - Forma Forte) Sejam X um espaço métrico completo e $\Phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semicontínua inferiormente e limitada inferiormente. Sejam, ainda, $\varepsilon > 0$ e $\overline{u} \in X$, tais que

$$\Phi(\overline{u}) \leq \inf_X \Phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, dado $\lambda > 0$, existe $u_\lambda \in X$, tal que

(i) $\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(\overline{u})$;

(ii) $d(u_\lambda, \overline{u}) \leq \lambda$;

(iii) $\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(u) + \dfrac{\varepsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda)$.

Demonstração: Veja Djairo(1989).

■

Teorema C.6: Sejam K um espaço métrico compacto, $g \in C^1(E, \mathbb{R})$, $M = \{u \in E; g(u) = 1\}$, $f \in C^1(E, \mathbb{R})$, $\tilde{f}$ a restrição de f a M, $K_0 \subset K$ e $h_0 \in C(K_0, M)$. Considere a família de extensões de h_0, $H = \{h \in C(K, M); h\big|_{K_0} = h_0\}$. Assuma que $H \neq \emptyset$ e que se verifica $\max_{t \in K_0} f(h_0(t)) < \max_{t \in K} f(h(t))$, para qualquer $h \in H$. Defina $c = \inf_{h \in H} \max_{t \in K} f(h(t))$. Suponha, ainda, que $\tilde{f}$ satisfaz a condição $(PS)_c$. Então, c é um valor crítico de $\tilde{f}$. .

Demonstração: Sejam $h \in H$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\max_{t \in K} f(h(t)) \overset{\text{(I)}}{<} c + \frac{\varepsilon}{2}$. Então, pelo Teorema A.17, para cada $n \in N$, existe $u_n \in M$ tal que

(E1) $c \leq f(u_n) \leq c + \dfrac{\varepsilon}{2}$;

(E2) $||u_n - h(K)|| \leq n$;

(E3) $||\tilde{f}'(u_n)||_* \leq \dfrac{\varepsilon}{n}$.

Ponha $\varepsilon = \frac{1}{k}$ e $h = h_k$ tal que vale (I). Ainda, $n = n_k = 1 + ||h_K||_\infty$, onde $||\cdot||_\infty$ é a norma em $C(K, W_0^{1,p}(\Omega))$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $u_k \in M$, tal que

(F1) $c \leq f(u_k) \leq c + \dfrac{\varepsilon}{2k}$;

(F2) $||u_k - h_k(K)|| \leq 1 + ||h_K||_\infty$;

(F3) $||\tilde{f}'(u_k)||_* \leq \dfrac{1}{k(1 + ||h_K||_\infty)}$.

De (F2), vem que

$$||u_k|| \leq ||u_k - h_k(K)|| + ||h_k(t)|| \leq ||u_k - h_k(K)|| + ||h_K||_\infty \leq 1 + 2||h_K||_\infty.$$

Disto, $1 + ||u_k|| \leq 2(1 + |||h_K||_\infty)$. Substituindo isto em (F3), temos $||\tilde{f}'(u_k)||_* \leq \dfrac{2}{k(1+||u_k||_\infty)^{-1}}$. Portanto, quando $k \to \infty$, obtemos $f(u_k) \to c$ e $||\tilde{f}'(u_k)||_*(1 + ||u_k||_\infty) \to 0$, donde (u_k) é uma sequência $(PSC)_c$ para $\tilde{f}$. Assim, a menos da passagem a uma subsequência, $u_k \to u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Consequentemente, $f(u_0) = c$ e $\tilde{f}'(u_0) = 0$. Logo, segue o resultado.

■

Teorema C.7: Sejam V um espaço de Banach reflexivo com norma $||\cdot||$ e $M \subset V$ fracamente fechado. Suponha que $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é coercivo em M, com respeito a V, e sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente em M, com respeito a V. Então, f é limitado inferiormente em M e atinge seu ínfimo em M.

Demonstração: Veja Costa(2007).

■

Definição C.1: Sejam V um espaço de Banach reflexivo, com norma $||\cdot||$, e $X \subset V$ um subconjunto de V. Dizemos que um funcional $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é coercivo em X, com respeito a V, se $F(x) \to \infty$ quando $||x|| \to \infty$.

Teorema C.8: (Propiedade S^+ do Operador p-Laplaciano) Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ uma sequência tal que, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e verifica

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla(u_n - u_0) dx = 0.$$

Então, $||\nabla u_n - \nabla u_0||_p \to 0$.

Teorema C.9: (Identidade de Picone Generalizada para o p-Laplaciano)

Sejam u, v duas funções q.t.p.-diferenciáveis e $v > 0$ q.t.p. em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Defina

$$\textbf{P1} \quad L(u,v) = |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla u,$$

e

$$\textbf{P2} \quad R(u,v) = |\nabla u|^p - |\nabla v|^{p-2}\nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)\nabla v.$$

Então, $L(u,v) = R(u,v) \geq 0$. Além disso, $L(u,v) = 0$ q.t.p. em Ω se, e somente se, $\nabla \left(\dfrac{u}{v}\right) = 0$ q.t.p. em Ω se, e somente se, u e v são colineares.

Teorema C.10: Sejam X um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa. Então, f é semicontínua inferiormente se, e somente se, f é fracamente semicontínua inferiormente.

Teorema C.11: (Desigualdade de Harnack) Sejam $A(x,u,u_x)$ e $B(x,u,u_x)$ dois operadores definidos a partir de $A(x,u,p)$ e $B(x,u,p)$, os quais estão definidos para todos os valores de u e p, e para todos os pontos x pertencentes a um domínio limitado Ω, fixado. Consideremos a equação $divA(x,u,u_x) = B(x,u,u_x)$ **(I)**. Suponhamos, ainda, que as seguintes inequações são satisfeitas:

$$\begin{cases} |A| \leq a|p|^{\alpha-1} + b|u|^{\alpha-1} + e \\ |B| \leq c|p|^{\alpha-1} + d|u|^{\alpha-1} + f \\ p \cdot A \geq |p|^{\alpha} - d|u|^{\alpha} - g \end{cases},$$

para todos $x \in \Omega$ e para todos os valores de u e p. Desta forma:

(1) Se u é uma solução fraca não-negativa para (I) em alguma bola aberta $B(3R) \subset \Omega$, $1 < \alpha < N$, e ocorre $b, e \in L^{\frac{N}{\alpha-1}}(\Omega)$, $c \in L^{\frac{N}{1-\varepsilon}}(\Omega)$ e $d, f, g \in L^{\frac{N}{\alpha-\varepsilon}}(\Omega)$, para algum $\varepsilon \in (0,1]$, então $\max u \leq C(\min u + k)$ em $B(R)$, onde C e k são constantes dependendo apenas da estrutura de (I).

(2) Se u é uma solução fraca não-negativa para (I) em alguma bola aberta $B(3R) \subset \Omega$, $\alpha = N$, e ocorre $b, e \in L^{\frac{N}{N-1-\varepsilon}}(\Omega)$, $c \in L^{\frac{N}{1-\varepsilon}}(\Omega)$ e $d, f, g \in L^{\frac{N}{N-\varepsilon}}(\Omega)$, para algum $\varepsilon \in (0,1]$, então $\max u \leq C(\min u + k)$ em $B(R)$, onde C e k são constantes dependendo apenas da estrutura de (I).

(3) Se u é uma solução fraca não-negativa para (I) em alguma bola aberta $B(2R) \subset \Omega$, $\alpha > N$, e ocorre $b, e \in L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\Omega)$, $c \in L^{\alpha}(\Omega)$ e $d, f, g \in L^{1}(\Omega)$, então,

$$u(x) \leq (u(y) + k)exp\{C(\frac{|x-y|}{R})^{\frac{1-N}{\alpha}}, \forall\, x, y \in \Omega,$$

onde C depende de α, N, R, c, d e b, e k depende de R, α, e, f e g.

Teorema C.12: Sejam Ψ um funcional par e c_k como em (3.4.1).

(i) Se $-\infty < c_k \leq \cdots \leq c_{k+m-1} = c < +\infty$ e Ψ satisfaz $(PS)_c$, para $c = c_k, ..., c_{k+m-1}$, então cada c é um valor crítico de Ψ com m pares distintos de pontos críticos assosciados.

(ii) Se $-\infty < c_k < +\infty$, para todo k suficientemente grande, e Ψ satisfaz a condição (PS), então $c_k \to +\infty$.

Demonstração: Veja Agarwal, O'Regan e Perera (2000).

■

Demonstração: Veja Serrin (1962).

D. Análise do $\mathbb{R}^N$

Definição D.1: Um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é dito um domínio de Lipschitz se sua fronteira pode ser representada, localmente, como o gráfico de uma função de Lipschitz, definida em alguma bola aberta de $\mathbb{R}^{N-1}$.

Definição D.2: Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é dita monótona crescente se alguma das seguintes afirmações equivalentes é verificada:

(i) $\langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geq 0$, para todos $x, y \in X$.

(ii) $\langle f(x), y - x\rangle + \langle f(y), x - y\rangle \leq 0$, para todos $x, y \in X$.

(iii) $\langle f(x), x - y\rangle + \langle f(y), y - x\rangle \geq 0$, para todos $x, y \in X$.

De maneira análoga, invertendo as desigualdades acima, define-se uma função monótona decrescente.

Lema D.1: Consideremos a função $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, dada por $F(x) = ||x||^{p-2}x$. Então, F é monótona crescente.

Demonstração: De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned}
\langle F(x) - F(y), x - y\rangle &= \langle F(x), x\rangle - \langle F(y), x\rangle - \langle F(x), y\rangle + \langle F(y), y\rangle \\
&= ||x||^{p-2}\langle x, x\rangle - ||y||^{p-2}\langle y, x\rangle - ||x||^{p-2}\langle x, y\rangle + ||y||^{p-2}\langle y, y\rangle \\
&= ||x||^p - ||y||^{p-2}\langle y, x\rangle - ||x||^{p-2}\langle x, y\rangle + ||y||^p \\
&\geq ||x||^p - ||y||^{p-1}||x|| - ||x||^{p-1}||y|| + ||y||^p.
\end{aligned}$$

Afirmação: $||x||^p - ||y||^{p-1}||x|| - ||x||^{p-1}||y|| + ||y||^p \geq 0$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(s, t) = s^p - t^{p-1}s - s^{p-1}t + t^p$. Mostremos que $f(s, t) \geq 0$, para todo par $(s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.Veja que,

$$f(s, t) = s^p - t^{p-1}s - s^{p-1}t + t^p = s^{p-1}(s - t) - t^{p-1}(s - t) = (s^{p-1} - t^{p-1})(s - t),$$

para todo $p > 1$. Ponha $r = p - 1$. Então, $r > 0$ e $f(s, t) = (s^r - t^r)(s - t)$.

Agora, observe que a função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $g(u) = u^r$ é tal que $g'(u) = ru^{r-1} > 0$, donde concluímos que g é crescente. Consequentemente, temos

(i) se $s = t$, então $f(s,t) = 0$;

(ii) se $s - t > 0$, então $s > t$ e, por conseguinte, $s^r > t^r$, o que implica $s^r - t^r > 0$. Ou seja, $f(s,t) > 0$ e

(iii) se $s - t < 0$, então $s < t$ e, por conseguinte, $s^r < t^r$, o que implica $s^r - t^r < 0$. Ou seja, $f(s,t) > 0$.

Portanto a afirmação é válida. Logo, F é monótona crescente.

$\blacksquare$

Lema D.2: Consideremos a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = x^p - px + p - 1$, para $p > 1$. Então, $x = 1$ é a única raíz positiva de φ.

Demonstração: Primeiramente, observemos que

(i) quando $x \to +\infty$, temos $\varphi(x) \to +\infty$;

(ii) $\varphi(1) = 1 - p + p - 1 = 0$ e $\varphi(0) = p + 1$, e

(iii) $\varphi'(x) = px^{p-1} - p = p(x^{p-1} - 1)$.

Além disso, se $x \in (0,1)$, então $x^{p-1} - 1 < 0$. Ou seja, $\varphi'(x) < 0$. Portanto, φ apresenta um comportamento da forma

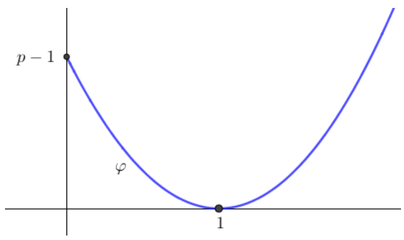

Figura 7: Representação da função φ. Fonte: arquivo do autor.

Logo, $x = 1$ é a única raíz positiva de φ, com queríamos demonstrar.

$\blacksquare$

Teorema D.1: As seguintes afirmações sobre uma função $f : I \to \mathbb{R}$, derivável no intervalo I, são equivalentes:

(a) f é côncava.

(b) Sua derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ é monótona não-crescente.

(c) Para quaisquer $a, x \in I$, tem-se $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$, ou seja, o gráfico de f está situado abaixo de qualquer de suas tangentes.

Demonstração: Elon (2013).

$\blacksquare$

E. Topologia

Teorema E.1: Um espaço de Hausdorff X é conexo por caminhos se, e somente se, X é *arc*-conexo.

Definição E.1: X é dito *arc*-conexo se, para todo par de pontos $x, y \in X$, existe um homeomorfismo $f : [0,1] \to X$, com $f(0) = x$ e $f(1) = y$.

Teorema E.2 Seja X um espaço de Hausdorff. Então, X é *arc*-conexo se, e somente se, X é conexo por caminhos.

Demonstração: Ver Willard (1970).

■

F. Genus de Krasnoselskii

Forneceremos, aqui, a definição mais usual para o Genus de Krasnoselskii, bem como algumas de suas propriedades. As demonstrações serão omitidas. Mais detalhes a respeito do mesmo podem ser encontrados em diversas bibliografias, por exemplo, em Rabinowitz (1986).

Definição F.1: Consideremos a família $\mathcal{A} = \{A \subset V - \{0\}; A$ é fechado e simétrico $\}$, onde V é um espaço de Banach real. Então, definimos

$$i(A) = \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N}\,; \text{ existe } h \in C^0(A; \mathbb{R}^k - \{0\}) \text{ tal que } h(-u) = -h(u)\}\,, & \text{se } \mathcal{A} \neq \emptyset \\ \infty\,, \text{ se } \mathcal{A} = \emptyset \end{cases} . \tag{4.0.1}$$

Além disso, $i(\emptyset) = 0$. O valor $i(A)$ é chamado de Genus de Krasnoselskii.

Observação F.1: 1) Esta definição foi fornecida por Coffman e equivale aquela cunhada por Krasnoselskii. Tal equivalência foi estabelecida por Rabinowitz (1986).

2) A noção de *genus* generaliza a noção de dimensão de um espaço vetorial.

Exemplo F.1: Suponhamos que $B \subset V$ é fechado e $B \cap (-B) = \emptyset$. Seja $A = B \cup (-B)$. Consideremos a função $\varphi : A \to \mathbb{R} - \{0\}$, definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in B \\ -1\,, & \text{se } x \in -B \end{cases} .$$

Note que, φ está bem definida, é ímpar, pois se $x \in B$, então $-x \in -B$, donde $\varphi(-x) = -1 = -(1) = -\varphi(x)$ e, pelo Lema da Colagem, é contínua. Logo, $\varphi \in C^0(A, \mathbb{R} - \{0\})$ e $i(A) = 1$.

■

Observação F.2: Com base no exemplo anterior, conseguimos concluir que, se $A \in A$ e $i(A) > 1$, então A possui infinitos pontos distintos. Pois, caso contrário, poderíamos escrever $A = B \cup (-B)$, com B dado como no exemplo anterior, donde obteríamos que $i(A) = 1$, um absurdo.

Proposição F.1: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ uma vizinhança limitada e simétrica da origem. Então, $i(\partial\Omega) = N$.

Corolário F.1: Seja S^{N-1} a esfera em $\mathbb{R}^N$. Então, $i(S^{N-1}) = N$.

Proposição F.2: Sejam $A, A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ e $h \in C^0(V; V)$ uma função ímpar. Então, as seguintes propriedades são verificadas:

(1ª) $i(A) \geq 0$ e $i(A) = 0$ se, e somente se, $A = \emptyset$.

(2ª) **(normalização)** Se $x \neq 0$, então $i(\{x\} \cup \{-x\}) = 1$.

(3ª) **(monotonicidade)** Se $A_1 \subset A_2$, então $i(A_1) \leq i(A_2)$.

(4ª) **(subaditividade)** $i(A_1 \cup A_2) \leq i(A_1) + i(A_2)$.

(5ª) **(supervariância)** $i(a) \leq i(\overline{h(A)})$.

(6ª) **(continuidade)** Se $A \in \mathcal{A}$ é compacto e $0 \notin A$, então $i(A) < \infty$ e existe uma vizinhança N de A, em V, tal que $\overline{N} \in \mathcal{A}$ e $i(A) = i(\overline{N})$.

Observação F.3: 1) A primeira propriedade nos diz que a função i é definida.

2) A quinta propriedade nos garante que, se existe um homeomorfismo ímpar entre A e B, com $A, B \in \mathcal{A}$, então $i(A) = i(B)$.

3) Se $A \in \mathcal{A}$ é uma coleção finita de pares antipodais, $u_i, -u_i$, então $i(A) = 1$.

Corolário F.2: Se $A \in \mathcal{A}$ é homeomorfo a S^{N-1}, via um homeomorfismo ímpar, então $i(A) = N$.

G. Algumas Desigualdades

Teorema G.1: Se $0 \leq p < \infty$, $a > 0$ e $b > 0$, então existe uma constante positiva$k(p)$ tal que $(a+b)^p \leq k(p)(a^p + b^p)$, onde $k(p) = 1$, se $0 \leq p \leq 1$, e $k(p) = 2^{p-1}$, se $1 \leq p < \infty$.

Demonstração: Veja Adams;Fournier(1992).

■

Teorema G.2:(Young) Se $1 < p < \infty$ e $a, b \geq 0$, então $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Demonstração: Veja Brézis(2010).

■

Teorema G.3: Se $p \geq 2$, então

$$||w_2||^p \geq ||w_1||^p + p||w_1||^{p-2}w_1 \cdot (w_2 - w_1) + \frac{||w_2 - w_1||^p}{2^{p-1} - 1}, \; \forall \, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^N.$$

Se $1 < p < 2$, então

$$||w_2||^p \geq ||w_1||^p + p||w_1||^{p-2}w_1 \cdot (w_2 - w_1) + c(p)\frac{||w_2 - w_1||^2}{(||w_1|| + ||w_2||)^{2-p}}, \; \forall \, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^N,$$

onde $c(p)$ é uma constante positiva dependendo apenas de p.

Teorema G.4: Existe uma constante $c = c(p)$ tal que, para todo $a, b \in \mathbb{R}^N$, temos

$$||a - b||^p \leq c[(||a||^{p-2}a - ||b||^{p-2}b)(a - b)]^{s/2}(||a||^p + ||b||^p)^{1-\frac{s}{2}},$$

onde $s = p$, se $p \in (1, 2)$, $s = 2$, se $p \geq 2$ e $||\cdot||$ representa uma norma em $\mathbb{R}^N$. **Demonstração:** Consideremos cada um dos casos em separado.

Caso 1: se $p \geq 2$, então queremos provar que

$$||a - b||^p \leq c(||a||^{p-2}a - ||b||^{p-2}b)(a - b).$$

Apliquemos o Teorema G.3 duas vezes, a primeira com $w_2 = a$, $w_1 = b$, e a segunda com $w_2 = b$, $w_1 = a$, obtendo duas constantes $c_1(p), c_2(p) > 0$, tais que

(1) $||a||^p \geq ||b||^p + p||b||^{p-2}b(a - b) + c_1(p)||a - b||^p$ e

(2) $||b||^p \geq ||a||^p + p||a||^{p-2}a(b - a) + c_2(p)||a - b||^p$.

Somando (1) e (2), vem

$$(c_1(p) + c_2(p))||a - b||^p \leq p(||a||^{p-2}a - ||b||^{p-2}b)(a - b).$$

Consequentemente, temos

$$||a - b||^p \leq c(||a||^{p-2}a - ||b||^{p-2}b)(a - b),$$

com $c = \dfrac{p}{c_1(p) + c_2(p)}$.

Caso 2: se $p \in (1, 2)$, então queremos provar

$$||a - b||^p \leq c[(||a||^{p-2}a - ||b||^{p-2}b)(a - b)]^{p/2}(||a||^p + ||b||^p)^{1-\frac{p}{2}}.$$

Apliquemos o Teorema G.3 duas vezes, a primeira com $w_2 = a$, $w_1 = b$, e a segunda com $w_2 = b$, $w_1 = a$, obtendo duas constantes $c_1(p), c_2(p) > 0$, tais que

(3) $||a||^p \geq ||b||^p + p||b||^{p-2}b(a-b) + c_1(p)\dfrac{||a-b||^2}{(||b|| + ||a||)^{2-p}}$ e

(4) $||b||^p \geq ||a||^p + p||a||^{p-2}a(b-a) + c_2(p)\dfrac{||a-b||^2}{(||b|| + ||a||)^{2-p}}$.

Somando (3) e (4), temos

$$c_3(p)\frac{||a-b||^2}{(||b|| + ||a||)^{2-p}} \leq p(||a||^{p-2}a - ||b||^{p-2}b)(a-b),$$

onde $c_3(p) = c_1(p) + c_2(p)$.

Segue que,

$$c_3(p)||a-b||^2 \leq p(||a||^{p-2}a - ||b||^{p-2}b)(a-b)(||b|| + ||a||)^{2-p},$$

donde

$$c_4(p)||a-b|| \leq p^{1/2}(||a||^{p-2}a - ||b||^{p-2}b)^{1/2}(a-b)^{1/2}(||b|| + ||a||)^{1-\frac{p}{2}},$$

onde $c_4(p) = c_3(p)^{1/2}$. Assim,

$$c_5(p)||a-b||^p \leq p^{p/2}(||a||^{p-2}a - ||b||^{p-2}b)^{1/2}(a-b)^{p/2}[(||b|| + ||a||)^p]^{1-\frac{p}{2}},$$

com $c_5(p) = c_4(p)^p$. Ainda, $(||a|| + ||b||)^p \leq 2^{p-1}(||a||^p + ||b||^p)$. Portanto, tomando $c = \dfrac{2^{p-1}p^{p/2}}{c_5(p)}$, obtemos a desigualdade desejada.

∎

Teorema G.5: Para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, temos:

(1) Se $2 \leq p < +\infty$, então existe uma constante positiva A_1, tal que

$$||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \leq A_1|x-y|(|x| + |y|)^{p-2}.$$

(2) Se $1 < p \leq 2$, então existe uma constante positiva A_2, tal que

$$||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \leq A_2|x-y|^{p-1}.$$

H. Teoria da Medida

Teorema H.1: Se $\int\limits_E f = \int\limits_E g$, para todo subconjunto $E \subset X$, mensurável, então $f = g$ q.t.p. em X.

Demonstração: Veja Folland (1984).

■

Teorema H.2: Seja $f \in L^p(\Omega)$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\mu(E) < \delta$, então, $\int\limits_E |f|^p d\mu < \varepsilon$.

Teorema H.3: (Lema de Fatou) Se (f_n) é uma sequência de funções definidas nos reais extendidos, onde cada f_n é não-negativa e mensurável, então $\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.

Demonstração: Veja Folland (1984).

■

Teorema H.4: Suponha que $f_n \to f$ q.t.p. em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seja contínua. Então, $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$ q.t.p. em Ω.

Teorema H.5: (Desigualdade de Hölder) Sejam $1 < p, q < \infty$ expoentes conjugados e f e g funções mensuráveis em X. Então, $||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$.

Demonstração: Veja Folland.

■

Teorema H.5: (Desigualdade de Hölder Generalizada) Sejam $p_i \geq 1$, $i \in \{1, ..., m\}$, tais que $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^{-1} = 1$. Se $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i \in \{1, ..., m\}$, então $\prod\limits_{i=1}^{m} f_i \in L^1(\Omega)$ e $\left\| \prod\limits_{i=1}^{m} f_i \right\|_1 \leq \prod\limits_{i=1}^{m} ||f_i||_{p_i}$.