UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

Carolina Ribeiro Pereira

GRAFOS: UMA PROPOSTA APLICADA AO COTIDIANO DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Santa Maria, RS
2019

Carolina Ribeiro Pereira

GRAFOS: UMA PROPOSTA APLICADA AO COTIDIANO DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Roberto Lazzarin

Santa Maria, RS
2019

Pereira, Carolina
GRAFOS:UMA PROPOSTA APLICADA AO COTIDIANO DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL / Carolina Pereira.- 2019.
50 f.; 30 cm

Orientador: João Roberto Lazzarin
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2019

1. Grafos 2. Algoritmo de Dijkstra 3. Ensino Fundamental. 4. Matemática I. Lazzarin, João Roberto II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Carolina Ribeiro Pereira

GRAFOS: UMA PROPOSTA APLICADA AO COTIDIANO DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 30 de agosto de 2019:

João Roberto Lazzarin, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Luciane Gobbi Tonet

Luciane Gobbi Tonet, Drª. (UFSM)

Ricardo Leite dos Santos

Ricardo Leite dos Santos, Dr. (FURG)

Santa Maria, RS
2019

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Tânia Maria Ribeiro Pereira e Nelson Alves Pereira, pelo incentivo e importância que sempre atribuíram à educação.

À minha irmã, Giovana pelo apoio, paciência e pelas significativas contribuições que foram de grande valor para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu noivo Cássio, pelo companheirismo, compreensão e incentivo em todos os momentos.

Ao Prof. Dr. João Lazzarin, pela atenção, paciência e competência com que orientou esta pesquisa.

Aos professores que tive ao longo de toda vida, por tudo que aprendi e pelas muitas dúvidas que ainda tenho.

Aos meus colegas de mestrado, pela ótima companhia durante esse tempo e pelos bons momentos de troca de experiências.

E finalmente à Simone e Matheus que foram, amigos/parceiros essenciais desde o início até a conclusão deste curso.

RESUMO

GRAFOS: UMA PROPOSTA APLICADA AO COTIDIANO DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

AUTOR: Carolina Ribeiro Pereira

ORIENTADOR: João Roberto Lazzarin

Este trabalho foi desenvolvido com propósito de introduzir um novo conceito de matemática para um grupo formado por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Porto Alegre. Desejávamos ensinar os fundamentos da teoria de grafos, assim como ampliar os conhecimentos para além do currículo tradicional, instigando-os a investigações na busca de padrões e regularidades e também a resoluções de problemas. A estratégia inicial foi a apresentação de uma situação problema presente no cotidiano dos estudantes para, dessa forma, provocar a curiosidade pelo assunto e, a partir disto, introduzir conceitos relacionados com grafos e seus elementos. Neste trabalho, fazemos um relato de todas essas atividades, refletindo sobre a teoria e a prática pedagógica e dando pareceres sobre a receptividade dos estudantes a cada etapa. Na tentativa de evidenciar o aprendizado pela experiência quando utilizamos dados geográficos locais, simulamos um problema real de seus cotidianos, o qual foi resolvido inicialmente de maneira intuitiva. Posteriormente também foi utilizado o algoritmo de Dijkstra.

Palavras-chave: Grafos. Algoritmo de Dijkstra. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

GRAPHS: A PROPOSITION APPLIED TO ELEMENTARY SCHOOL STUDUDENTS LIVES

AUTHOR: Carolina Ribeiro Pereira

ADVISOR: João Roberto Lazzarin

This paper was developed with the purpose of introducing a new concept of math to a group formed by 9th-grade elementary students of a municipal school from Porto Alegre. We wished to teach the fundamentals of the Graphs theory, as well as broad such knowledge from beyond the traditional curriculum, leading them to investigations in the search of patterns and regularities as well as solving problems. The initial strategy was the presentation of a problem situation present in the daily life of the students to, in this way, cause the curiosity for the subject and, from this point, introduce concepts related to Graphs and its elements. In this paper, we make a report of all these activities, reflecting about the theory and the pedagogical practice and giving opinions about the receptivity of students to each step. On the attemp to evidence the learning by experience when local geographic data is used, we simulate a real problem of their daily lives, which was solved innitially on an intuitive way. Posteriorly it was also used the Dijkstra algoritm.

Key words: graphs, Dijkstra algoritm, elementary teaching

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência que se utiliza de conhecimentos que relacionam a lógica com situações práticas cotidianas, ao longo do tempo vem sendo aperfeiçoada e segue em constante evolução. Conforme D'Ambrosio

> [...] a matemática vem passando por uma grande transformação. Isso é absolutamente natural. Os meios de observação, de coleção de dados e de processamento desses dados, que são essenciais na criação matemática, mudaram profundamente. (D'AMBROSIO, 1996, p.58).

Uma teoria considerada jovem na matemática é a teoria de grafos. Ela surgiu através de um problema real enfrentado pelos moradores da cidade de Königsberg, esta era dividida por dois rios formando ilhas as quais eram ligadas por sete pontes. O problema consistia em aferir a possibilidade de fazer um passeio pela cidade cruzando todas as suas pontes uma única vez e voltar ao ponto de partida. A busca pela solução deste problema levou Euler a desenvolver o primeiro teorema do que é hoje conhecido como teoria de grafos.

Este trabalho propõe a introdução deste novo conceito para um grupo formado por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Porto Alegre. Segundo Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área da Matemática

> No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados. (BRASIL, 1998, p. 15).

Nesse sentido o estudo da teoria de grafos pode contribuir muito, visto que, uma das formas de representação dos conceitos desta teoria se dá através de diagramas. Estes por sua vez, "são elementos de apoio à compreensão matemática. São maneiras de o aluno ver o que está sendo exposto". (PAULO, 2010, p.178).

Este trabalho está assim organizado: no Capítulo 2 estabeleceremos o objeto de trabalho e as justificativas mostrando a relevância da escolha do tema para o ensino-aprendizagem e, finalmente, apresentaremos uma fundamentação pedagógica do objeto de estudo. No Capítulo 3 apresentaremos um pouco sobre a história envolvendo a teoria de grafos, conjuntamente com algumas definições e resultados mais frequentes nesta teoria, os quais embasarão as aplicações utilizadas no decorrer do trabalho. No Capítulo 4, apresentaremos os planos de aulas executados junto aos alunos, descrevendo as percepções destes em cada etapa do projeto. Finalizamos o trabalho com algumas conclusões em relação às atividades propostas e discorremos brevemente sobre as perspectivas de utilização deste modelo de forma mais frequente em aulas para o Ensino Fundamental.

2 DOS OBJETIVOS E DAS JUSTIFICATIVAS DA ESCOLHA DO TEMA

Neste capítulo apresentaremos o tema do projeto, os objetivos a serem alcançados e justificaremos a relevância destas escolhas.

2.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A pesquisa pretende verificar a seguinte questão: de que modo a introdução dos conceitos de grafos podem contribuir para o ensino e aprendizagem de matemática para o 9º ano do Ensino Fundamental?

2.2 OBJETIVOS

Para efeito desta investigação são definidos os objetivos a seguir.

2.2.1 Objetivo Geral

Compreender como a introdução dos conceitos da teoria de grafos contribuem para o ensino e aprendizagem de matemática no Ensino Fundamental.

2.2.2 Objetivos Específicos

São delimitados os seguintes objetivos:

a) Propor uma sequência de atividades visando a introdução de fundamentos da teoria de grafos para estudantes do Ensino Fundamental.
b) Propor a resolução de problemas contextualizados como metodologia para a introdução de conceitos da Teoria de Grafos no Ensino Fundamental.
c) Acompanhar e relatar os resultados na tentativa de compreender a contribuição do estudo da Teoria de Grafos para o ensino-aprendizagem de matemática no Ensino Fundamental.

2.3 JUSTIFICATIVA

A importância da teoria de grafos se dá por sua fácil adaptação a diversas áreas. Serve para modelar os mais variados problemas, tendo um vasto campo de aplicações. Segundo Netto e Jurkiewicz

> A teoria de grafos é, hoje, um campo de interesse crescente, cujas aplicações vão desde problemas de localização e de traçados de rotas para diversos tipos de serviços, ao projeto de processadores de eletrônicos, passando pelo planejamento de horários, pelo estudo da estrutura do DNA e pelo projeto de códigos, além dos problemas comparativamente mais simples como o da interligação elétrica e o da engenharia molecular. (NETTO; JURKIEWICZ, 2017, p. 4)

São inúmeros os exemplos de aplicação da teoria de grafos: planta de imóveis, genética, jogos, organizações de campeonatos, computação, redes elétricas, organogramas, roteiros de passeio ou viagem, cruzamento de dados da receita federal, caracterização de redes, trajetos ótimos, entre outros. Conforme Deluca

> Diversas organizações estão utilizando grafos para modelar redes sociais, análise de fraude, campanhas eleitorais e até para evitar a proliferação de doenças. Mesmo que não haja uma solução que encaixe em todos os problemas, é indiscutível que os grafos são extremamente úteis. (DELUCA, 2018, online)

O estudo da teoria de grafos na disciplina de matemática no ensino fundamental se justifica por possibilitar um ambiente propício para um trabalho baseado na resolução de problemas, na contextualização e na interdisciplinaridade, tornando mais fácil e atrativo o estudo e compreensão de conceitos estudados. Dentre os objetivos gerais de matemática para o ensino fundamental dispostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN estão:

> - resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
> - estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares; (BRASIL, 1997, p.37)

Neste sentido percebe-se a relevância do estudo da teoria de grafos no ensino fundamental contribuindo para atingir tais objetivos.

2.4 FUNDAMENTAÇÃO PEDAGÓGICA

Existe um avanço crescente em relação às pesquisas na área de matemática, que englobam a matemática pura, aplicada e a educação matemática. Nesta última tem-se valorizado muito a resolução de problemas, aplicação no cotidiano e em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, o uso e elaboração de novas tecnologias.

A resolução de problemas ganhou uma atenção especial na década de 70, quando passou a ser foco dos estudos de alguns educadores matemáticos preocupados com os rumos do ensino e compreensão da matemática. Conforme Onuchic; Allevato (2004, p.215) foi no final dos anos 70 que a resolução de problemas ganhou destaque e espaço no mundo inteiro.

Um problema pode ser definido como uma situação inédita em que o estudante tem que usar a criatividade para buscar uma solução usando suas próprias estratégias para resolvê-lo. Dante classifica como sendo uma definição consensual entre os educadores matemáticos: “ problema é uma situação que o indivíduo ou grupo quer resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”. (LESTER, 1982 *apud*, DANTE, 2010, p.12). Um problema pode ser o ponto de partida para o estudo de um novo conceito ou teoria, despertando no estudante a curiosidade e induzindo-o a procura de uma solução.

A resolução de problemas passou então a ser vista como uma maneira de os estudantes compreenderem de fato a matemática e não apenas reproduzirem o conhecimento memorizado. Desta forma, o aluno passa a ser o foco da relação ensino-aprendizagem tornando-se agente ativo na construção do seu próprio conhecimento.

Entre as competências específicas de matemática para o ensino fundamental estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estão:

> - Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> - Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas e dados.). (BRASIL, 2018, p. 263)

Trabalhar a resolução de problemas dentro de contextos específicos relacionados ao cotidiano dos estudantes torna mais fácil o entendimento e a compreensão dos conteúdos desenvolvidos em sala de aula, pois evidencia a importância da matemática nas vivências/experiências diárias destes alunos.

Para as autoras Gigante e Santos

> No ensino de matemática, como é atualmente entendido, é fundamental que o aluno aprenda a raciocinar lógico-matematicamente, que se predisponha a resolver problemas e, ao resolve-los, tenha condições de atuar na realidade. As situações de aprendizagem daí decorrentes proporcionam aos alunos a construção dos conceitos matemáticos e a oportunidade de discutir, confrontar, selecionar e expor, oralmente e por escrito, ideias relevantes, além de fazer comparações e inferências, buscar e registrar informações, levantar hipóteses e elaborar conclusões. Predomina, então, a concepção de que aprendizagem se dá e se consolida pela resolução de problemas provenientes de contextos sócio históricos e naturais, que oferecem a possibilidade de oferecer conexão entre diferentes temas e conceitos estruturantes da matemática e também de outras áreas do conhecimento. (GIGANTE; SANTOS, 2012, p.41).

A contextualização possibilita aos estudantes um melhor desempenho nas atividades propostas, pois leva situações do dia a dia para dentro da sala de aula, transformando o cotidiano do aluno no objeto de estudo.

3 ASPECTOS HISTÓRICOS E TEÓRICOS DA TEORIA DE GRAFOS

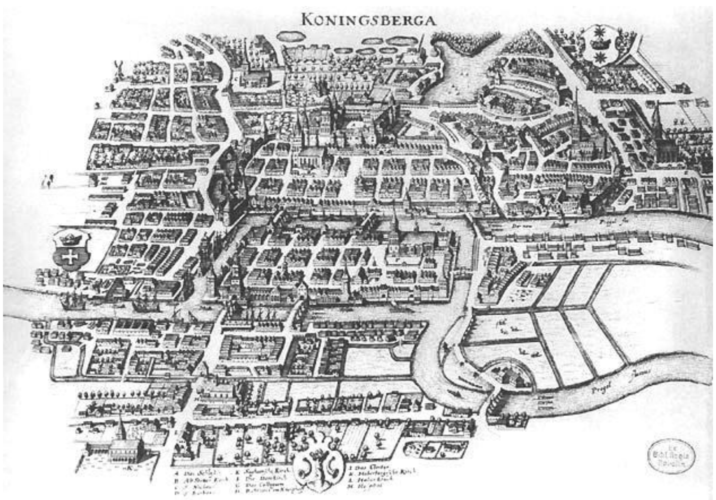
Neste capítulo, apresentaremos um pouco de história da teoria de grafos, sua importância na resolução de problemas relevantes para a sociedade e formularemos algumas definições, exemplos e propriedades desta teoria que serão importantes para a compreensão do trabalho.

3.1 FATOS HISTÓRICOS QUE REVELAM A IMPORTÂNCIA DA TEORIA DE GRAFOS PARA A HUMANIDADE

Os grafos já fazem parte da história da humanidade desde a antiguidade afirma Mota [s.d.]. Os primeiros registros, desenhos que representam abstrações de grafos, datam do século VIII a.C. Ainda de acordo com Mota: “Exemplos de grafos podem ser encontrados, ao longo dos séculos, em diversas formas de arte e em diferentes culturas. ” (MOTA, [s.d.], p.3).

Em 1736, segundo Ives (2007), um problema prático que vinha provocando muitas discussões foi resolvido por Euler. Em Königsberg, uma cidade da antiga Prússia (na parte hoje pertencente ao território Russo) existiam sete pontes que ligavam as porções de terra determinadas pelo rio Pregel, o qual atravessava a cidade formando uma pequena ilha central. A figura abaixo é uma ilustração da antiga cidade de Königsberg.

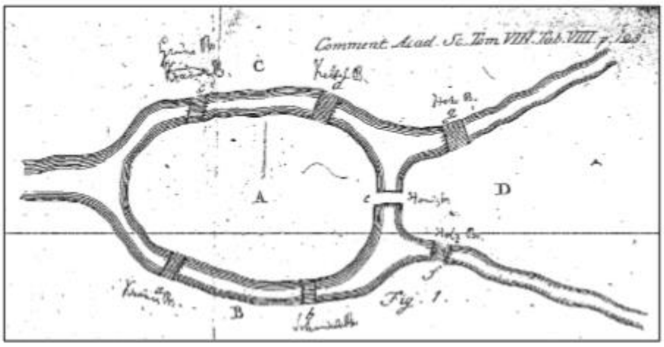
Figura 1: Mapa da antiga cidade de Königsberg.



Fonte: Merian, (online).

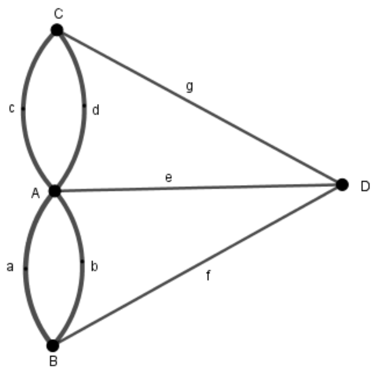
O problema que desafiou Euler versava sobre um passeio pela cidade de forma que todas as pontes fossem atravessadas uma única vez, tendo pontos de partida e chegada iguais. Segundo Netto (2017), esse problema não passou de um desafio intelectual para Euler, mas que acabou dando origem a teoria de grafos. Para solucioná-lo, Euler usou um modelo simplificado, onde as porções de terra eram vértices e as pontes, arestas. A figura 2 abaixo ilustram o modelo usado por Euler na época e a figura 3, o modelo seguindo as notações atuais.

Figura 2: Esquema do problema das sete pontes de Königsberg apresentado por Euler.



Fonte: Euler, (1741, p. 128 apud MOTA [s.d.]).

Figura 3: Grafo representando as pontes de Königsberg.



Fonte: Elaborada pela autora.

Segundo David Carvalho ([s.d.], online), “o matemático suíço Leonhard Euler, não só conseguiu elucidar o problema como acabou por criar uma teoria que se aplica a vários problemas deste tipo”. Euler provou que o tal passeio não era possível, dando origem ao primeiro teorema da teoria de grafos.

Como relata Netto (2017), passaram-se mais de 100 anos da solução do problema das pontes até que alguém pensasse algo parecido. Foi apenas em 1847 que Kirchhoff utilizou grafos para representar circuitos elétricos e assim estudar suas propriedades.

Ao longo dos tempos muitos matemáticos estudaram problemas relacionados com a teoria de grafos. De acordo com Mota ([s.d.]), os estudiosos Poinsot, Clausen e Listing se dedicaram a solucionar desafios sobre traçados de diagramas sem levantar a caneta do papel. Hamilton tratou de circuitos que passavam uma única vez em cada vértice. Cayley foi o primeiro a usar o termo árvore para se referir e estudar grafos conexos e acíclicos. Também mostrou que essa teoria poderia ser aplicada ao estudo de química orgânica.

Em 1962 Ford e Fulkerson publicam em seu livro, Flows in Networks, o trabalho que desenvolveram sobre fluxos de rede. Um importante resultado para teoria de grafos, que seria amplamente explorado na resolução de problemas relacionados a encontrar o fluxo máximo de uma rede. O algoritmo de Ford e Fulkerson tem aplicações em redes elétricas, sistemas de transporte de fluido, distribuição de produtos ao longo de uma rede de transportes e impulsionou o desenvolvimento de ferramentas computacionais para analisar modelos de fluxo de rede.

A teoria de grafos vem evoluindo e cada vez mais sendo usada para modelar e resolver problemas aplicados as mais diversas áreas. Redes de transportes, caracterização de redes de assistência médica, sequenciamento do DNA, formulação de novos compostos químicos, redes de TI, gerenciamento de recursos humanos, mídias sociais e determinação de menores caminhos são algumas aplicações desta teoria.

3.2 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção apresentaremos conceitos que serão usados ao longo do trabalho, e que são baseados em Scheinerman (2017), Netto e Jurkiewicz (2017) e Jurkiewicz (2009).

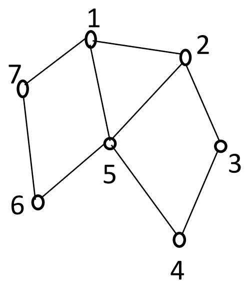
Um grafo é formado por um conjunto finito de pontos, que são chamados de vértices, e um o conjunto de arestas que relacionam os vértices entre si. Mais formalmente:

Definição 3.1 (Grafo). Um grafo é um par G=(V, E), em que V é um conjunto finito e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V.

Exemplo 3.2. Na figura 4 temos um grafo G=(V, E), onde V é o conjunto finito {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} e E é o conjunto que contém nove subconjuntos de V.
E= {{1, 2}, {1, 5}, {1, 7}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 4}, {5, 4}, {5, 6}, {6, 7}}.
Assim,
G=({1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, {{1, 2}, {1, 5}, {1, 7}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 4}, {5, 4}, {5, 6}, {6, 7}})

Todo grafo tem uma representação gráfica através de diagramas, onde cada elemento v ∈ V é representado por um ponto que chamamos de vértice e os elementos de E são segmentos de reta, chamados arestas.

Figura 4: Grafo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observações:

1. Vale observar que denotar uma aresta por {a,b} faz sentido, pois na teoria de conjuntos, {a,b} = {b,a} e ambos representam a mesma aresta. Existem grafos em que a aresta {a,b} não é considerada a mesma que a {b,a}, os quais são chamados de **dígrafos, grafos orientados** ou **grafos dirigidos.**
2. Quando, em um grafo, houver pelo menos um par de vértices ligados por mais de uma aresta o denominamos multigrafo (com arestas múltiplas).

3. Quando, em um grafo, uma aresta liga um vértice a ele mesmo, temos um laço.
4. Um grafo que não possui arestas múltiplas nem laços é um **grafo simples**.

Se dois vértices são associados por uma aresta dizemos que eles são adjacentes. Por exemplo, na Figura 4, os vértices 1 e 2 são adjacentes. Formalmente temos a seguinte definição:

Definição 3.3 (Adjacência). Sejam G=(V,E) um grafo e $u, v \in V$. Dizemos que u é adjacente a v se, e somente se, $\{u, v\} \in E$. A notação $u{\sim}v$ significa que u é adjacente a v.

Por exemplo, no grafo da Figura 4, temos que $\{1, 2\} \in E$, logo 1$\sim$2. Nesse caso, dizemos que 1 e 2 são pontos terminais da aresta {1, 2}, e que os vértices 1e 2 são incidentes com a aresta {1, 2}.

Definição 3.4 (Grau). Sejam G=(V,E) e $v \in V$. O grau de v é o número de arestas com as quais v é incidente. O grau (degree) de v se denota por $d_G(v)$. Ou , se não houver risco de confusão, simplesmente por $d(v)$.

Exemplo 3.5. No grafo da Figura 4, o vértice 1 está ligado a outros três vértices. Logo, seu grau é 3, isto é, $d(1) = 3$. Para os outros vértices temos: $d(2) = 3$, $d(3) = 2$, $d(4) = 2$, $d(5) = 4$, $d(6) = 2$ e $d(7) = 2$.

A soma dos graus dos vértices e o número de arestas estão diretamente relacionados, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 3.6 (Soma dos graus). Seja G=(V, E). A soma dos graus dos vértices em G é o dobro do número de arestas.

Demonstração. Cada aresta tem dois vértices que são incidentes com ela. Quando contamos as arestas para cada vértice, elas são contadas duas vezes. Assim temos que a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas. ∎

Exemplo 3.7. No grafo representado na Figura 4, temos que a soma dos graus dos vértices é 18, que corresponde ao dobro de 9, sendo este o número de arestas.

Deste teorema decorre o corolário:

Corolário 3.8. Em todo grafo o número de vértices de grau ímpar é par.

Demonstração. Suponhamos que o número de vértices de grau ímpar fosse ímpar. Desta forma, a soma dos graus seria ímpar. Porém, pelo Teorema 3.6 temos que a soma dos graus dos vértices é um número par. Logo, por contradição, temos que o número de vértices de grau ímpar deve ser par.■

Definição 3.9 (Passeio e Caminho).

1) Passeio: Seja G=(V,E) um grafo. Um passeio em G é uma sequência de vértices, em que cada vértice é adjacente ao seguinte. O comprimento de um passeio é o número de arestas atravessadas.
2) Caminho: Um caminho em um grafo é um passeio em que nenhum vértice é repetido.

Exemplo 3.10. No grafo da Figura 4 podemos ter o passeio $1 \sim 2 \sim 3 \sim 4 \sim 5 \sim 2$, cujo comprimento é 5. Também é possível fazer o passeio $1 \sim 2 \sim 3 \sim 4 \sim 5$, de comprimento 4. Nesse caso, temos um caminho, pois nenhum vértice é repetido.

Definição 3.11 (Conexo). Um grafo é chamado conexo se, e somente se, cada par de vértices está ligado por um caminho. Do contrário, dizemos que o grafo é desconexo.

Exemplo 3.12. Na Figura 5 temos um grafo desconexo e na Figura 6 um grafo conexo.

Figura 5: Grafo desconexo.

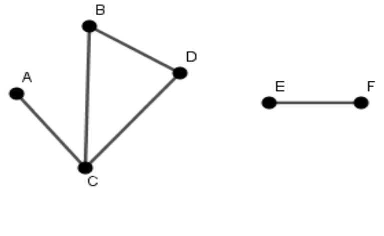
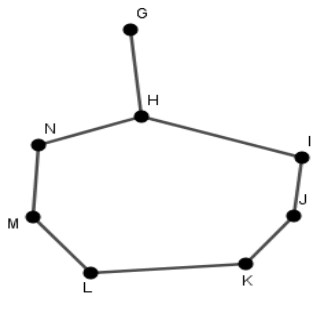


Figura 6: Grafo conexo.



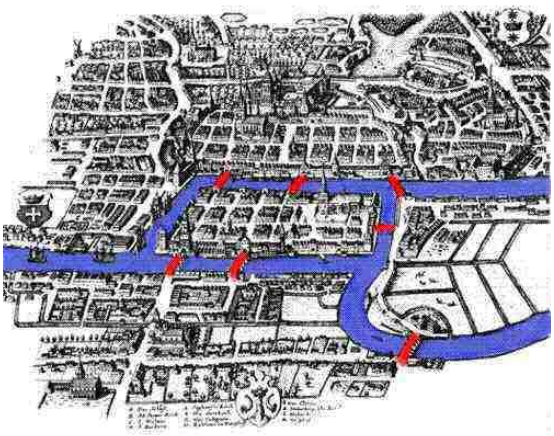
Fonte: Elaborada pela autora.

3.3 PROBLEMA DE EULER

Nesta sessão vamos abordar um problema clássico da teoria de grafos e alguns resultados obtidos a partir da busca por uma solução.

"É possível fazer um passeio na cidade de Königsberg cruzando todas as suas pontes uma única vez e voltar ao ponto de partida? "

Figura 7: Pontes de Königsberg.

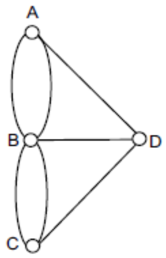


Fonte: Araújo, ([s.d.], online).

Esse foi o problema que inspirou Leonard Euler a, em 1736, dar início ao que conhecemos hoje como Teoria de Grafos. Neste ano Euler apresentou uma solução geral para o problema que há muito tempo vinha desafiando vários intelectuais da cidade de Königsberg, famosa por suas sete pontes.

Euler representou graficamente o problema e sua solução deu origem ao primeiro teorema da Teoria de Grafos.

Figura 8: Grafo pontes de Königsberg.



Fonte: UFRGS (2009, online).

Definição 3.13 (Trilha euleriana). Uma **trilha euleriana** é um passeio que percorre cada aresta uma única vez, podendo ser denominada **trilha fechada ou ciclo** quando termina no mesmo vértice em que começou ou **trilha euleriana aberta** quando o vértice inicial é diferente do final. Um grafo que contém uma trilha euleriana fechada que contenha todas as suas arestas é chamado de **grafo euleriano**.

Observação: O comprimento de uma trilha é dado pelo comprimento de um passeio, ou seja, o número *m* de arestas atravessadas pele trilha.

Lema 3.14. Se todo vértice de um grafo G tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.

Demonstração.

> Se G contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois, automaticamente, G contém um ciclo. Consideramos, portanto, apenas os grafos simples. A partir de um vértice v_o, qualquer, iniciamos nossa trilha. Quando chegamos a um vértice qualquer, ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado. ■ (JURKIEWICZ, 2009, p. 52)

Teorema 3.15 (Teorema de Euler). Um grafo conexo (não necessariamente simples) G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par.

Demonstração.

> (⇒) Suponhamos que G tenha uma trilha fechada de comprimento m. Cada vez que a trilha passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.
> (⇐) Usaremos indução sobre o número de arestas m do grafo. Por vacuidade, o teorema é válido quando m = 0. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior do que 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todos as trilhas fechadas em G escolhemos uma trilha T com comprimento máximo. Se T tem comprimento m, o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T. Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T, e todos os vértices do grafo tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, H tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H, e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando T com a trilha em H. Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T.■ (JURKIEWICZ, 2009, p. 53)

Teorema 3.16. Seja G um grafo conexo com exatamente dois vértices de grau ímpar: *a* e *b*. Então, G tem uma trilha euleriana (aberta) que inicia em *a* e termina em *b*.

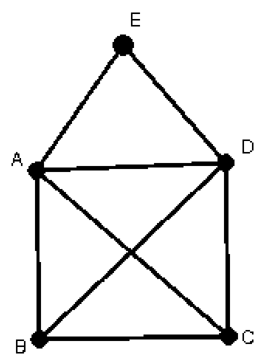
Demonstração. Seja o grafo G conexo com um par de vértices de grau ímpar, *a* e *b*. Se acrescentarmos uma aresta de *a* até *b*, os graus de todos os vértices se tornam pares, e pelo Teorema de Euler, existe uma trilha fechada de comprimento *m+ 1* que começa e termina em *a*, e uma trilha aberta de comprimento m que começa em *a* e termina em *b* ao qual descreve uma trilha euleriana aberta. ■

Exemplo 3.17. O problema das pontes de Königsberg é um exemplo de grafo não euleriano. Na época, Euler provou que não seria possível fazer um passeio na cidade de Königsberg cruzando todas as suas pontes uma única vez e voltar ao ponto de partida. Pois o grafo da Figura 8 tem todos os seus quatro vértices com grau ímpar.

Exemplo 3.18. O desafio recreativo a seguir é um exemplo de grafo com trilha euleriana aberta.

"Traçar a figura abaixo sem levantar o lápis do papel e passando apenas uma vez em cada aresta. "

Figura 9: Grafo com trilha euleriana aberta.



Fonte: Elaborada pela autora.

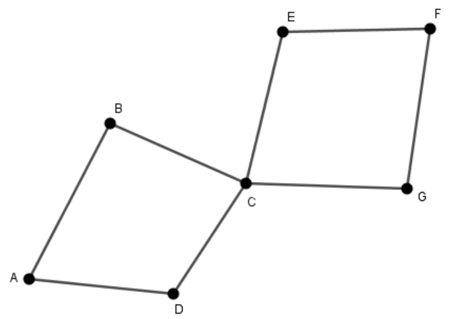
Para resolver o desafio, observamos inicialmente que $d(A) = 4$, $d(B) = 3$, $d(C) = 3$, $d(D) = 4$, $d(E) = 2$ são os graus dos vértices do grafo. Temos exatamente 2 vértices (B e C) de grau ímpar e, portanto, o Teorema 3.16 nos garante que, nesse caso, existe uma trilha euleriana aberta que inicia em B e termina em C.

Exemplo 3.20. O grafo da figura 10 é um exemplo de grafo euleriano. Analisando os graus de seus vértices, verificamos que:

$$d(A) = 2,\ d(B) = 2,\ d(C) = 4,\ d(D) = 2,\ d(E) = 2,\ d(F) = 2,\ d(G) = 2$$

Ou seja, todos os vértices tem grau par. Uma trilha euleriana possível seria: $A{\sim}B{\sim}C{\sim}E{\sim}F{\sim}G{\sim}C{\sim}D{\sim}A$.

Figura 10: Grafo Euleriano.



Fonte: Elaborada pela autora.

3.4 ALGORITMO DE DIJKSTRA

Uma situação problema que está presente constantemente no nosso cotidiano, segundo Netto (2017), é a de decidir qual o melhor caminho a ser percorrido para chegar em algum lugar. Para tomar essa decisão é necessário considerar vários fatores, como meios de transporte, trânsito, distâncias e custos, entre outros. A teoria de grafos pode nos ajudar a fazer essa escolha quando usada para determinar o caminho mais curto. A solução para esse problema pode ser encontrada usando o Algoritmo de Dijkstra, que foi desenvolvido por Edsger Dijkstra, matemático, físico com Ph.D em ciência da computação. A primeira publicação desse trabalho acontece somente em 1959, segundo entrevista de Dijkstra publicada na revista Communications of the ACM em agosto de 2010.

A seguir daremos uma ideia de como o algoritmo funciona, apresentando seus principais elementos.

O problema: Dado um vértice s de um grafo com distâncias positivas nas arestas, encontrar uma árvore, ou seja, um grafo conexo sem ciclos, de caminhos mínimos com início em s do grafo.

O algoritmo: seja G (V,A) um grafo orientado e s um vértice de G:

1. Atribua valor zero à estimativa de distância mínima do vértice s (a raiz da busca) e infinito às demais estimativas;
2. Atribua um valor qualquer aos precedentes (o precedente de um vértice t é o vértice que precede t no caminho de distância mínima de s para t);
3. Enquanto houver vértice aberto:

- Seja k um vértice ainda aberto cuja estimativa seja menor dentre todos os vértices abertos;
- Feche o vértice k.
- Para todo vértice j ainda aberto que seja sucessor de k faça:
  - Some a estimativa do vértice k com a distância da aresta que une k a j;
  - Caso esta soma seja melhor que a estimativa anterior para o vértice j, substitua-a e anote k como precedente de j.

Como exemplo vamos resolver o seguinte problema:

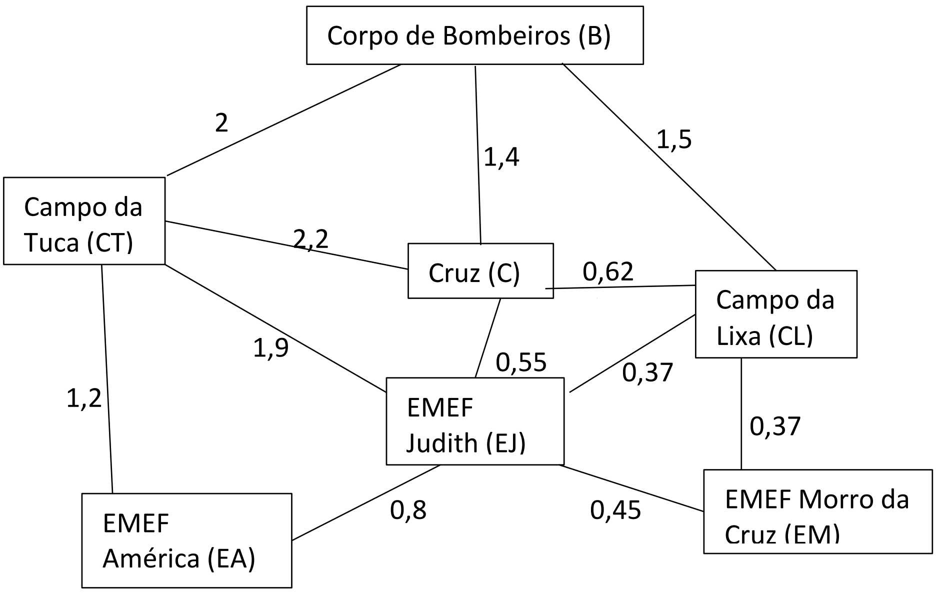
A seguir temos o mapa de partes dos bairros Partenon e São José, em Porto Alegre- RS, com alguns pontos de referência destacado. Qual é o menor caminho, partindo do Corpo de Bombeiros, para cada um dos outros locais?

Figura 11: Mapa do bairro.

Fonte: Google Earth (online).

O grafo da Figura 12 ilustra graficamente a situação, onde as distâncias estão em quilômetros:(considerando que serão percorridas de carro).

Figura 12: Grafo correspondente ao mapa do bairro.



Fonte: Elaborada pela autora.

Começamos organizando as distâncias entre os locais (vértices) em uma tabela. Para os vértices não adjacentes usaremos ∞.

Tabela 1: Distâncias entre os locais.

	B	CT	C	CL	EJ	EM	EA
B	0	2	1,4	1,5	∞	∞	∞
CT	2	0	2,2	∞	1,9	∞	1,2
C	1,4	2,2	0	0,62	0,55	∞	∞
CL	1,5	∞	0,62	0	0,37	0,37	∞
EJ	∞	1,9	0,55	0,37	0	0,45	0,8
EM	∞	∞	∞	0,37	0,45	0	∞
EA	∞	1,2	∞	∞	0,8	∞	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Agora para cada etapa do algoritmo vamos fazer uma tabela para ilustração. Atribuindo valor zero à estimativa de custo mínimo do vértice B (a raiz da busca) e infinito às demais estimativas temos:

Tabela 2: Tabela inicial.

	B	CT	C	CL	EJ	EM	EA
Distância	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Precedente	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: Elaborada pela autora.

Quais vértices poderíamos atingir diretamente a partir de B?

- CT, com distância 2;
- C, com distância 1,4;
- CL, com distância 1,5.

O vértice C pode ser fechado, pois os outros caminhos para alcançá-lo passariam por CT ou CL que tem 2 e 1,5, respectivamente, como distâncias. Para simbolizar o fechamento de um vértice usaremos *.

Tabela 3: Tabela para o vértice precedente B.

	B*	CT	C*	CL	EJ	EM	EA
Distância	0	2	1,4	1,5	∞	∞	∞
Precedente	-	-	B	-	-	-	-

Fonte: Elaborada pela autora.

Passando por C, quais são os vértices alcançados diretamente?

- CT, com distância 1,4 + 2,2 = 3,6; que é maior do que 2. Então o vértice CT fica fechado com a distância 2.
- CL, com distância 1,4 + 0,62 = 2,02; que é maior do que 1,5. Este vértice ficará fechado com a distância 1,5.
- EJ, com distância 1,4 + 0,55 = 1,95; que é menor do que ∞. Trocamos EJ por 1,95; com precedente C, mas ainda não podemos fechá-lo.

Nossa tabela ficou assim:

Tabela 4: Tabela para o vértice precedente C.

	B*	CT*	C*	CL*	EJ	EM	EA
Distância	0	2	1,4	1,5	1,95	∞	∞
Precedente	-	B	B	B	C	-	-

Fonte: Elaborada pela autora.

Quais lugares podemos atingir diretamente a partir de CT?

- EA, com distância 2+1,2=3,2, que é menor do que ∞. Trocamos EA por 3,2, mas não podemos fechá-lo, pois existem outras possibilidades a serem avaliadas.
- EJ, com distância 2+1,9=3,9, que é maior do que 1,95. Nesse caso EJ permanece com a distância 1,95, mas ainda não podemos fechá-lo.
- C, que já está fechado.

A tabela ficou com a seguinte configuração:

Tabela 5: Tabela para o vértice precedente CT.

	B*	CT*	C*	CL*	EJ	EM	EA
Distância	0	2	1,4	1,5	1,95	∞	3,2
Precedente	-	B	B	B	C	-	CT

Fonte: Elaborada pela autora.

Quais lugares podemos atingir diretamente a partir de CL?

- EJ, com distância 1,5+0,37=1,87, que é menor do que 1,95. Trocamos EJ por 1,87 e fechamos o vértice, já que a outra possibilidade de chegar até ele é passando por EM, o que torna o caminho maior como veremos a seguir.
- EM, com distância 1,5+0,37=1,87, que é menor do que ∞. Trocamos EM por 1,87, mas ainda temos que avaliar outros caminhos.
- C, que já está fechado.

A situação agora é essa:

Tabela 6: Tabela para o vértice precedente CL.

	B*	CT*	C*	CL*	EJ*	EM	EA
Distância	0	2	1,4	1,5	1,87	1,87	3,2
Precedente	-	B	B	B	CL	CL	CT

Fonte: Elaborada pela autora.

Ainda temos os vértices EM e EA abertos. Para isso vamos analisar os vértices que podemos atingir diretamente partindo de EJ.

- EM, com distância 1,87+0,45=2,32, que é maior do que 1,87. Portando fechamos o vértice EM com 1,87.
- EA, com distância de 1,87+0,8=2,67, que é menor do que 3,2. Trocamos EA para 2,67 e fechamos o vértice também.

A tabela mostra o resultado final da aplicação do algoritmo de Dijkstra, com as distâncias mínimas entre o Corpo de bombeiros e os outros locais marcados no mapa.

Tabela 7: Tabela para o vértice precedente EJ.

	B*	CT*	C*	CL*	EJ*	EM*	EA*
Distância	0	2	1,4	1,5	1,87	1,87	2,67
Precedente	-	B	B	B	CL	CL	EJ

Fonte: Elaborada pela autora.

Observando a tabela podemos resgatar os percursos que levaram às menores distâncias. Por exemplo, para chegar em EA devemos passar por EJ, mas para isso temos que passar por CL que tem como precedente B. O percurso ficou $B \sim CL \sim EJ \sim EA$.

4 PRÁTICA

Neste capítulo apresentaremos as atividades realizadas em sala de aula para introduzir o estudo da teoria de grafos, assim como seus objetivos e comentários de como as aulas aconteceram de fato, além de relatos de como os alunos receberam a proposta. Desenvolvemos o trabalho com uma turma do 9º ano do ensino fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental Professora Judith Macedo de Araújo. A escola está localizada na periferia de Porto Alegre, tem 1060 alunos e atende nos três turnos. Aplicamos as atividades em uma turma com 32 alunos, com idades entre 14 e 17 anos.

A proposta de trabalho teve como objetivo que os alunos construíssem suas próprias definições através da observação de padrões. A metodologia usada foi a resolução de problemas, onde é apresentada uma situação desconhecida e o estudante precisa buscar estratégias para resolvê-la. Optamos por contextualizar os problemas para que as situações ficassem mais próximas do cotidiano da comunidade escolar e provocassem maior curiosidade e interesse pela busca de uma solução.

4.1 AULA 1 - PRÁTICA ENVOLVENDO O COTIDIANO

A aula 1 tinha por objetivo que os estudantes tivessem um primeiro contato com o conceito de grafo e seus elementos. Optamos por iniciar com uma situação problema envolvendo a determinação do menor caminho. O problema foi elaborado considerando um contexto com o qual os estudantes se identificassem e tornasse o encontro da solução uma necessidade real.

4.1.1 Desenvolvimento

Aos estudantes entregamos um material impresso com um mapa do bairro da escola com alguns pontos de referência destacados e um esquema, que mais tarde seria apresentado como grafo. Com base nos dados fornecidos, os estudantes, organizados em grupos de até quatro pessoas, deveriam resolver o seguinte problema:

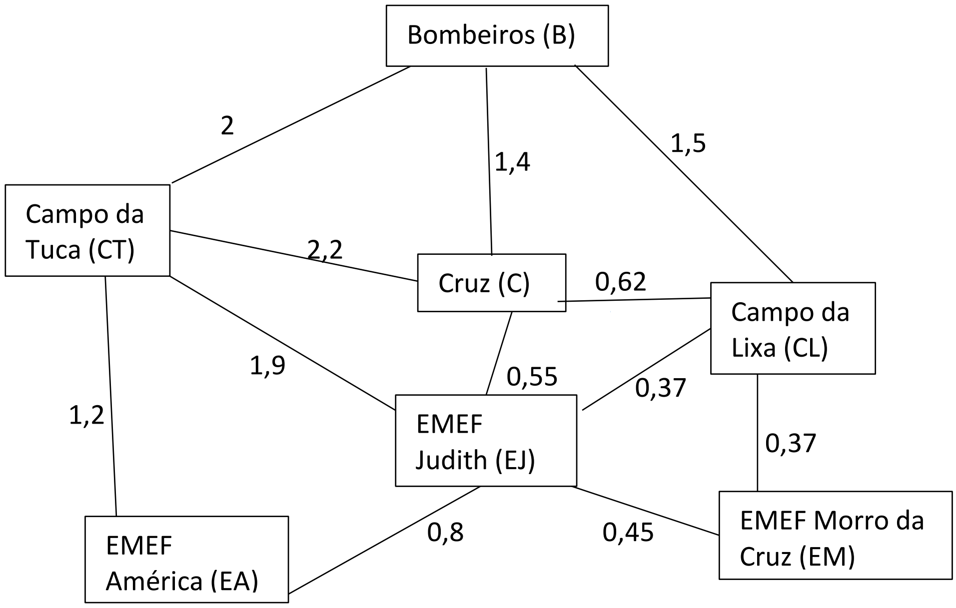
Na Figura 13, temos o mapa de partes dos bairros Partenon e São José com alguns pontos em destaque.

Figura 13: Mapa do bairro.

Fonte: Google Earth.

No esquema abaixo, cada linha representa um caminho entre os locais selecionados, e os valores correspondem às distâncias, em quilômetros, entre eles. Considerando que o deslocamento seja realizado de carro e supondo que esses sejam os únicos caminhos possíveis de serem percorridos, qual é a menor distância do Corpo de Bombeiros até cada um dos outros lugares destacados?

Figura 14: Grafo correspondente ao mapa do bairro.



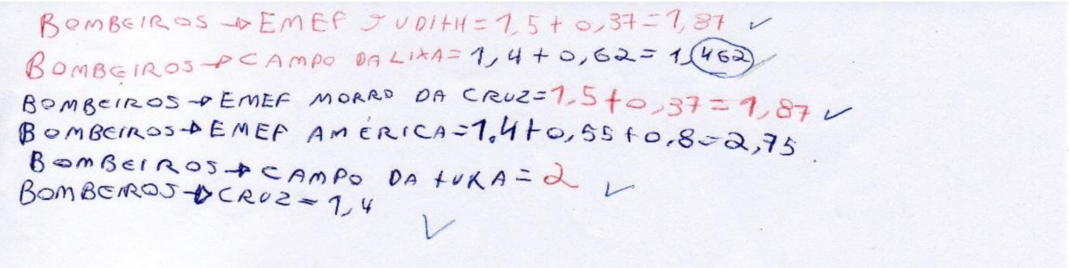
Fonte: Elaborada pela autora.

Nesse momento a professora deixou que cada grupo criasse suas próprias estratégias para resolver o problema e solicitou que fizessem registros do processo e dos resultados encontrados. No início a turma não demonstrou interesse, ficando dispersos e sem iniciativa para resolver o problema. Observando esse comportamento, a professora entendeu que estavam com bastante dificuldade para compreender o que estava sendo solicitado. A maioria dos grupos não conseguiu interpretar o problema. A intervenção da professora foi necessária, expondo no quadro alguns exemplos mais simples. A partir de então os grupos compreenderam o problema e começaram a busca pela resposta.

A dificuldade dos estudantes na resolução de problemas nem sempre está ligada a falta de algum conhecimento matemático. Muitas vezes está associada a falta de compreensão dos enunciados, “as suas dificuldades ao nível da língua materna podem influenciar a compreensão e interpretação dos enunciados e a justificação e explicação dos raciocínios efetuados.” (Mendes e Sousa, 2017).

Outra dificuldade encontrada foi o registro do processo. Na maioria dos grupos os estudantes traçavam os caminhos e realizavam os cálculos mentalmente, chegando à resposta sem o registro da estratégia utilizada, ou apenas com o registro do caminho mais curto encontrado, conforme Figura 15 e Figura 16, respectivamente.

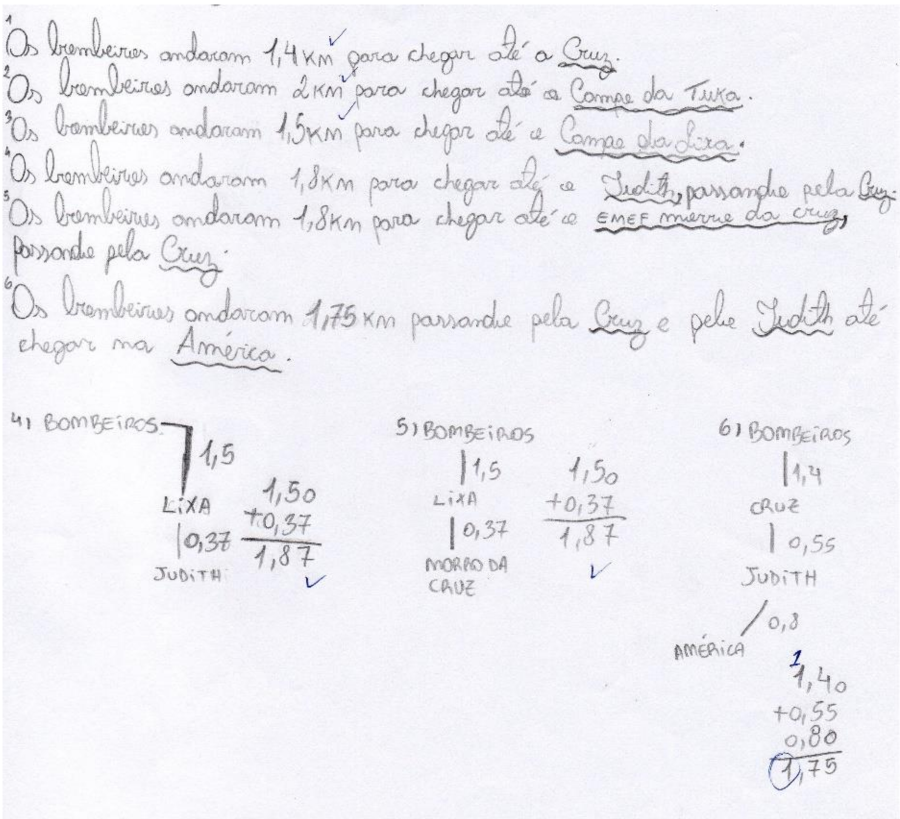
Figura 15: Registo da menor distância elaborado pelo grupo 1.



BOMBEIROS → EMEF JUDITH = 1,5 + 0,37 = 1,87
BOMBEIROS → CAMPO DA LIXA = 1,4 + 0,62 = 1,462
BOMBEIROS → EMEF MORRO DA CRUZ = 1,5 + 0,37 = 1,87
BOMBEIROS → EMEF AMÉRICA = 1,4 + 0,55 + 0,8 = 2,75
BOMBEIROS → CAMPO DA TUKA = 2
BOMBEIROS → CRUZ = 1,4

Fonte: dados da pesquisa.

Figura 16: Registro da menor distância elaborado pelo grupo 2.



1 Os bombeiros andaram 1,4 km para chegar até a Cruz.
2 Os bombeiros andaram 2 km para chegar até o Campo da Tuka.
3 Os bombeiros andaram 1,5 km para chegar até o Campo da Lixa.
4 Os bombeiros andaram 1,8 km para chegar até a Judith, passando pela Cruz.
5 Os bombeiros andaram 1,8 km para chegar até a EMEF morro da Cruz, passando pela Cruz.
6 Os bombeiros andaram 1,75 km passando pela Cruz e pela Judith até chegar na América.

4) BOMBEIROS 1,5 LIXA 0,37 JUDITH
1,50 + 0,37 = 1,87

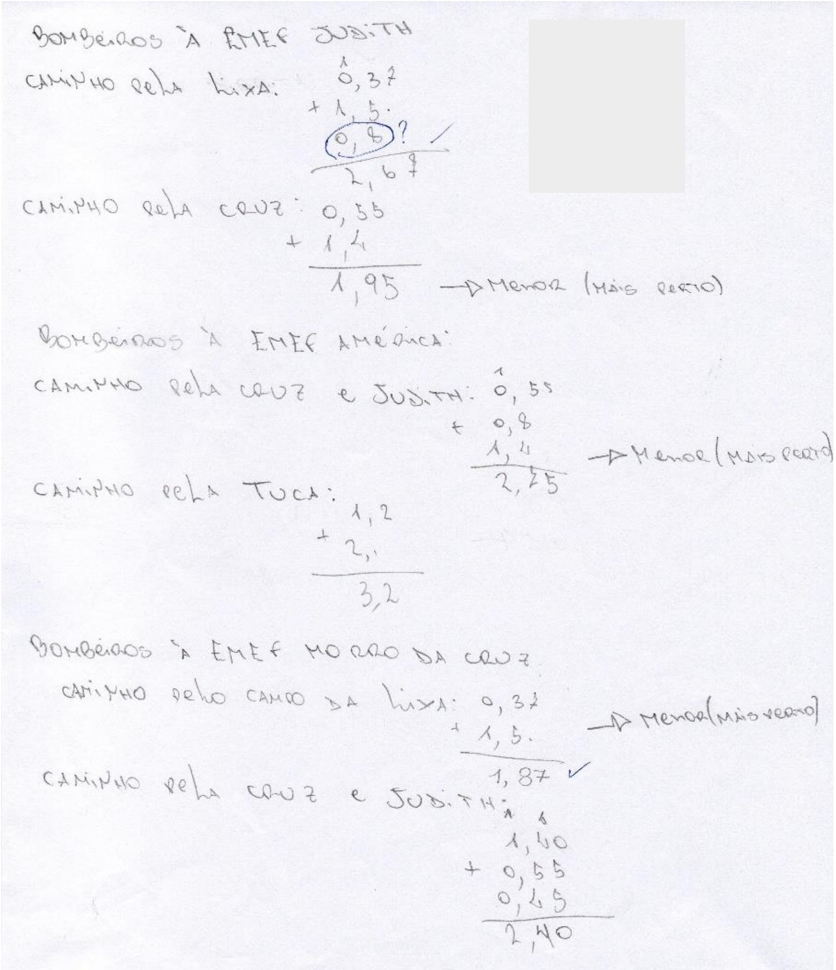
5) BOMBEIROS 1,5 LIXA 0,37 MORRO DA CRUZ
1,50 + 0,37 = 1,87

6) BOMBEIROS 1,4 CRUZ 0,55 JUDITH 0,8 AMÉRICA
1,40 + 0,55 + 0,80 = 1,75

Fonte: dados da pesquisa.

Poucos grupos fizeram registros mais completos, mostrando os possíveis caminhos e as distâncias percorridas, como os da Figura 17.

Figura 17: Registro da menor distância elaborado pelo grupo3.



Fonte: dados da pesquisa.

Quando questionados sobre o porquê da resposta, diziam que era só olhar o esquema. De fato, como o esquema proposto era um grafo com poucos vértices e poucas arestas, as possibilidades de caminho eram poucas, facilitando bastante a tomada de decisão pelo caminho mais curto. Outro fato que contribuiu para a descoberta rápida do caminho mais curto, foi que todos são moradores do bairro e conhecem bem a região, vivenciando diariamente a situação apresentada.

Um dos benefícios do trabalho com a resolução de problemas é que ela possibilita e facilita a contextualização e a abordagem de demandas do dia a dia. “A oportunidade de usar conceitos e procedimentos matemáticos no dia a dia favorece o desenvolvimento de uma atitude positiva do aluno em relação à matéria” (DANTE, 2010, p.21).

No final do período todos os grupos apresentaram soluções, porém, nem todos fizeram o devido registro do método utilizado. Alguns grupos não chegaram na resposta esperada por cometerem erros de cálculo, como pode ser observado nas Figuras 15, 16 e 17.

Apesar do desinteresse no início da aula, devido à falta de compreensão do problema, a turma ficou muito envolvida com a atividade após entender a proposta.

Pela dificuldade apresentada no início da aula, a atividade levou mais tempo do que o planejado, não sendo possível apresentar formalmente a definição de grafo e de seus elementos.

4.2 AULA 2 - BUSCA DE REGULARIDADES

Nossa segunda aula tinha por objetivos: concluir que a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas e que o número de vértices com grau ímpar é par. Para isso, elaboramos uma atividade que priorizou a busca por regularidades que relacionassem vértices, grau do vértice e arestas.

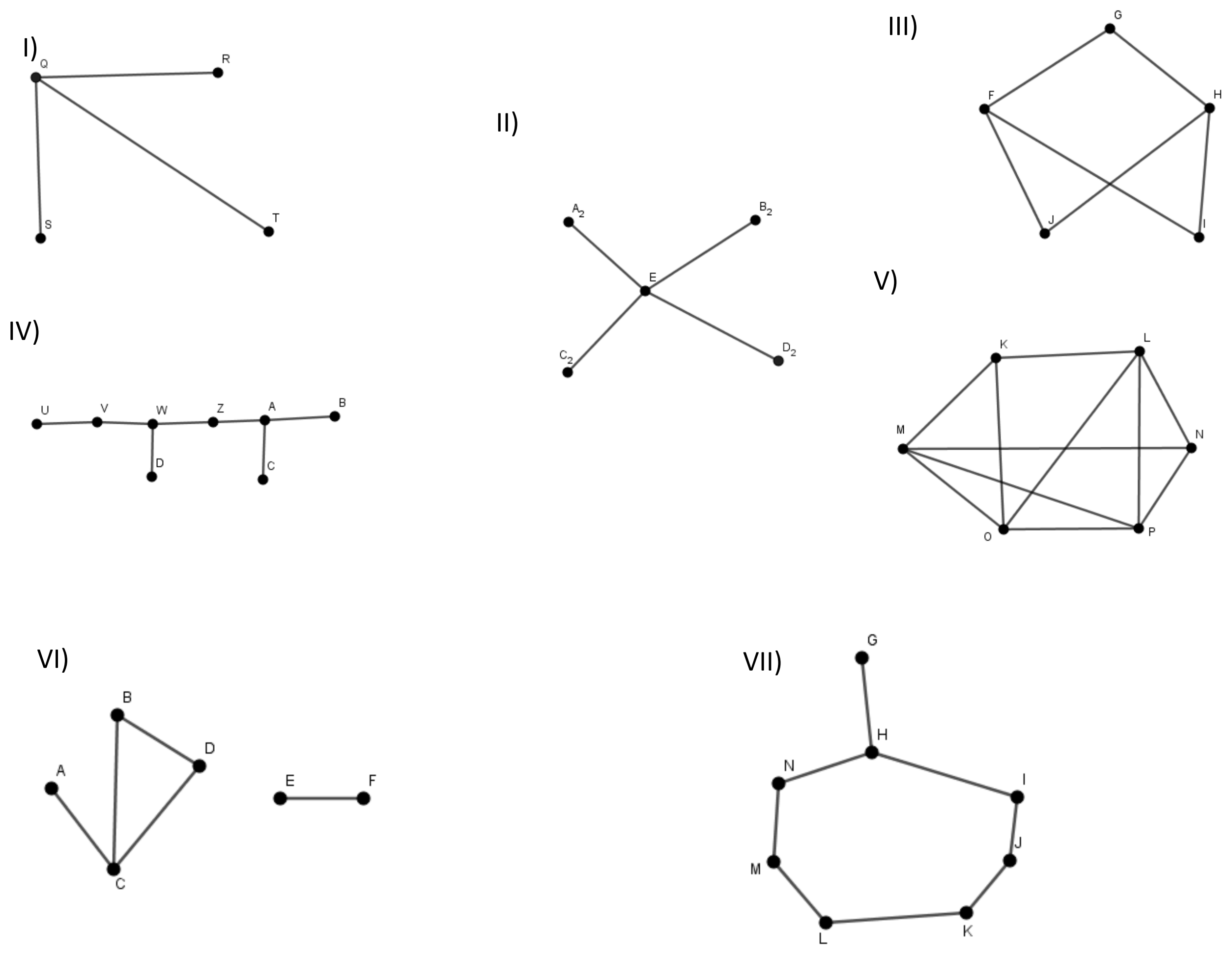
4.2.1 Desenvolvimento

Esta aula iniciou com a retomada do problema da aula anterior e apresentação para os estudantes da definição de grafo e seus elementos (vértices e arestas). Também foi definido grau de um vértice. Posteriormente, os alunos receberam uma folha com sete grafos, conforme Figura 18, para os quais deveriam responder, em duplas, as seguintes perguntas:

Para cada grafo da Figura 18, responda:

a) Qual é o número de vértices?
b) Qual é o grau de cada vértice?
c) Quantos são os vértices de grau par? E grau ímpar?
d) Qual é o valor da soma dos graus de todos os vértices?
e) Qual é o número de arestas?
f) Existe alguma regularidade nas quantidades de vértices de grau par e grau ímpar?
g) É possível estabelecer alguma relação entre a soma dos graus dos vértices e o número de arestas? Qual é a relação?

Figura 18: Grafos variados.



Fonte: Elaborada pela autora.

Ao contrário do ocorrido na aula 1, a turma compreendeu facilmente a proposta passando a demonstrar grande envolvimento. Os estudantes responderam os itens *a, b, c, d* e *e* com muita prontidão e interesse. No entanto, apresentaram dificuldade para responder os itens *f* e *g*. Neste momento passamos a registrar no quadro os dados que nos ajudariam a respondê-los. Juntos concluímos que a quantidade de vértices com grau ímpar era sempre par nos grafos analisados. Um aluno questionou se seria sempre assim. A professora percebeu então que os itens *g* e *f* estavam em ordem invertida, pois para responder o questionamento do aluno precisávamos do resultado do item *g*. Deixamos a pergunta em aberto, aguardando a resposta sobre a soma dos graus dos vértices. Essa regularidade foi encontrada com facilidade, logo que compararam a soma dos grais dos vértices com o número de arestas, concluíram que uma era o dobro da outra. Quando questionados sobre os possíveis motivos para essa relação, houve discussão até chegarem a um acordo: para encontrar o grau de cada vértice, cada aresta estava sendo contada duas vezes, uma para o vértice de saída outra para o de chegada. Por isso a soma dos graus seria sempre o dobro do número de arestas.

Com esse resultado voltamos à questão do aluno: A quantidade de vértices com grau ímpar é sempre par? A turma não conseguiu chegar a uma conclusão sozinha, mas compreenderam quando a demonstração foi apresentada.

4.3 AULA 3 - GRAFO EULERIANO

O objetivo da terceira aula era concluir que, para grafos com todos os vértices de grau par ou dois vértices de grau ímpar, é possível fazer um percurso que passe por todas as arestas sem repetir nenhuma, para isso elaboramos três questões. Com a intenção de despertar a curiosidade e o interesse pelo estudo de caminhos na teoria de grafos, retornamos ao contexto da situação problema da primeira aula, mas com uma nova questão: Os professores e alunos da EMEF Judith estão fazendo uma campanha para reciclagem do lixo e desejam colar cartazes e distribuir panfletos em todos os locais do mapa. Saindo da EMEF Judith, é possível fazer um caminho que passe em todos os locais apenas uma vez e termine na EMEF Judith? Qual é o caminho? Existe apenas um caminho?

A partir dessas perguntas foram lançadas outras duas atividades, explorando novamente a busca por regularidades que nos levassem a caracterizar um grafo euleriano.

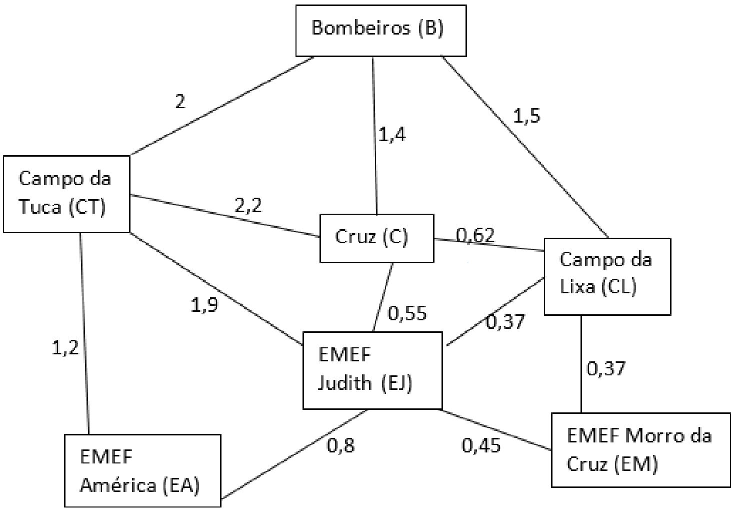
4.3.1 Desenvolvimento

Iniciamos a aula com a organização da turma em duplas. Cada dupla recebeu uma folha com três atividades, conforme destacamos a seguir:

QUESTÃO 1

Os professores e alunos da EMEF Judith estão fazendo uma campanha para reciclagem do lixo e desejam colar cartazes e distribuir panfletos em todos os locais do mapa, cujo grafo está representado na Figura 19. Saindo da EMEF Judith, é possível fazer um caminho que passe em todos os locais apenas uma vez e termine na EMEF Judith? Qual é o caminho? Existe apenas um caminho?

Figura 19: Grafo representando os pontos do mapa.



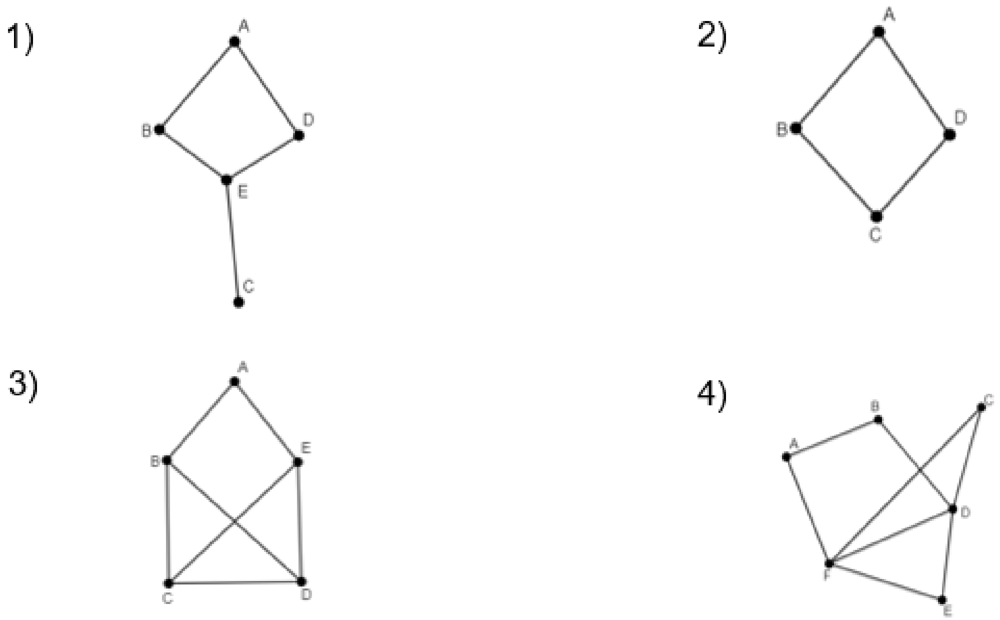
Fonte: Elaborada pela autora.

QUESTÃO 2

Com base nos grafos da Figura 20, responda.

a) Qual é o grau de cada vértice?
b) Em quais grafos é possível fazer um caminho percorrendo cada uma das arestas uma única vez e terminando no mesmo vértice em que iniciou?
c) Esses grafos têm alguma característica em comum?

Figura 20: Grafos



Fonte: Elaborada pela autora.

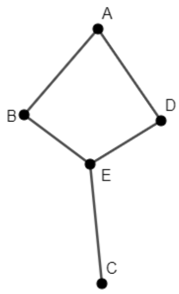
QUESTÃO 3

Com base nos grafos da Figura 21, responda.

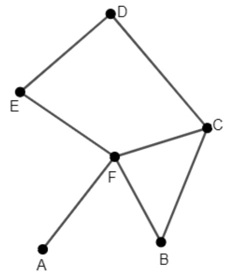
a) Qual é o grau de cada vértice?
b) Em quais grafos é possível fazer um caminho percorrendo cada uma das arestas uma única vez? (Não é necessário iniciar e terminar o caminho no mesmo vértice)
c) Esses grafos têm alguma característica em comum?

Figura 21: Grafos

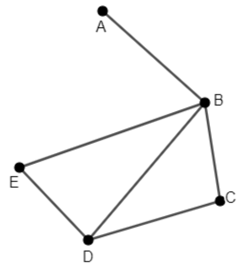
1)



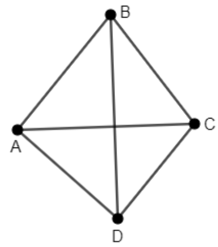
2)



3)



4)



Fonte: Elaborada pela autora.

Nessa aula, a turma já estava completamente envolvida no trabalho com grafos e responderam rapidamente a questão 1, encontrando com facilidade caminhos que passassem por todos os locais apenas uma vez. Importante registrar que os locais eram os vértices do grafo.

As questões 2 e 3 envolviam o conceito de grau do vértice que havia sido trabalhado na aula anterior. Poucos estudantes pediram para relembrar o que era grau do vértice. A maioria iniciou o trabalho imediatamente ao recebimento do material.

Na questão 2, fizeram várias tentativas para encontrar os caminhos solicitados no item b. Alguns não compreendiam a impossibilidade de encontrar tal caminho em determinados casos, demonstrando inconformidade. Diante da discussão, um estudante fez a seguinte observação: “nesse não dá, sempre falta um”. A partir dessa fala, passaram a aceitar a possibilidade de não haver o caminho com as características solicitadas para certos grafos. Dessa vez, a busca por regularidades aconteceu naturalmente e responder o item c foi mais fácil. Concluíram que, quando o grafo tinha todos os vértices com grau par, “não faltava nenhum” e era possível encontrar o caminho solicitado. Mais tarde a professora definiu esse caminho como caminho euleriano.

Para responder a questão 3 os estudantes apresentaram maior facilidade. Alguns já haviam observado que, para alguns grafos da questão 2, havia um caminho que passava por todas arestas uma única vez, mas que possuía os vértices inicial e final diferentes. No momento de socialização das respostas demostraram bastante empolgação, identificaram as regularidades e concluíram rapidamente que os vértices inicial e final deveriam ser os de grau ímpar.

As atividades baseadas na busca de regularidades e padrões foram muito bem recebidas pela turma e contribuíram muito para o bom desenvolvimento das aulas. Os estudantes se sentiram estimulados a investigar e fazer novas descobertas a respeito daquele conteúdo tão novo para eles. Durante a investigação, se sentiram protagonistas no processo de aprendizagem, criaram hipóteses, testaram e chegaram a conclusões. “Nesse sentido a aprendizagem pela investigação configura-se como uma alternativa para auxiliar o estudante a dar sentido ao conteúdo ensinado, pois o conhecimento passa a ser consequência de uma postura ativa do aluno”. (LOPES, 2015, p.550).

4.4 AULA 4 – ALGORITMO DE DIJKSTRA

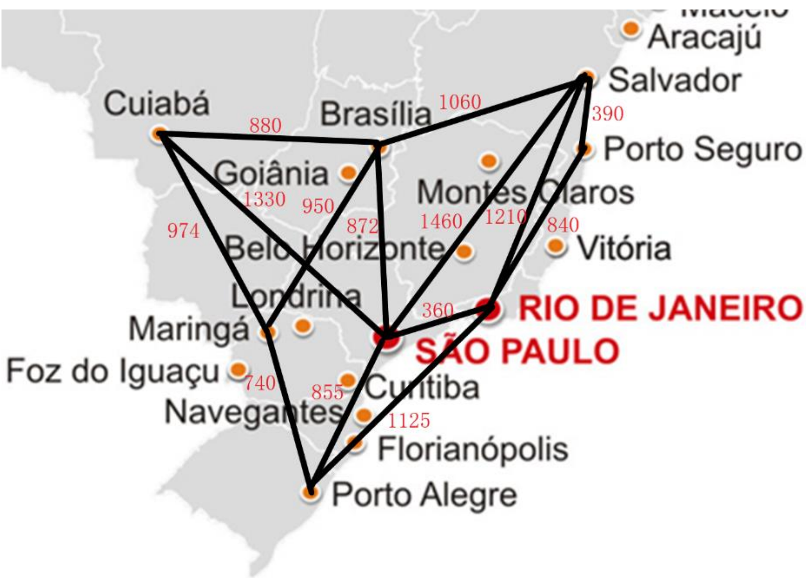
O objetivo desta aula foi apresentar formalmente o Algoritmo de Dijkstra para resolver problemas de caminho mínimo. Na aula 1 foi possível observar que os estudantes resolveram o problema proposto sem dificuldades, pois para eles os caminhos envolvidos na situação eram muito familiares e o grafo tinha poucos vértices e arestas. Para complementar nossos estudos, o problema proposto para essa atividade não estava contextualizado com uma situação do dia a dia dos alunos, mas nem por isso o tema escolhido deixou de atrair o interesse do grupo. Escolhemos esse momento para realizar essa atividade pois os estudantes já estavam mais familiarizados com a teoria de grafos.

4.4.1 Desenvolvimento

A situação-problema proposta foi: Um piloto de avião recebeu o mapa abaixo com os aeroportos para os quais deve viajar. (As distâncias são aproximadas e estão em km).

Tendo sempre como ponto de partida o aeroporto de Porto Alegre e respeitando as rotas e distâncias estabelecidas, ajude o piloto a decidir qual é a rota mais curta entre Porto Alegre e cada um dos outros aeroportos destacados no mapa da Figura 22.

Figura 22:Mapa dos aeroportos.

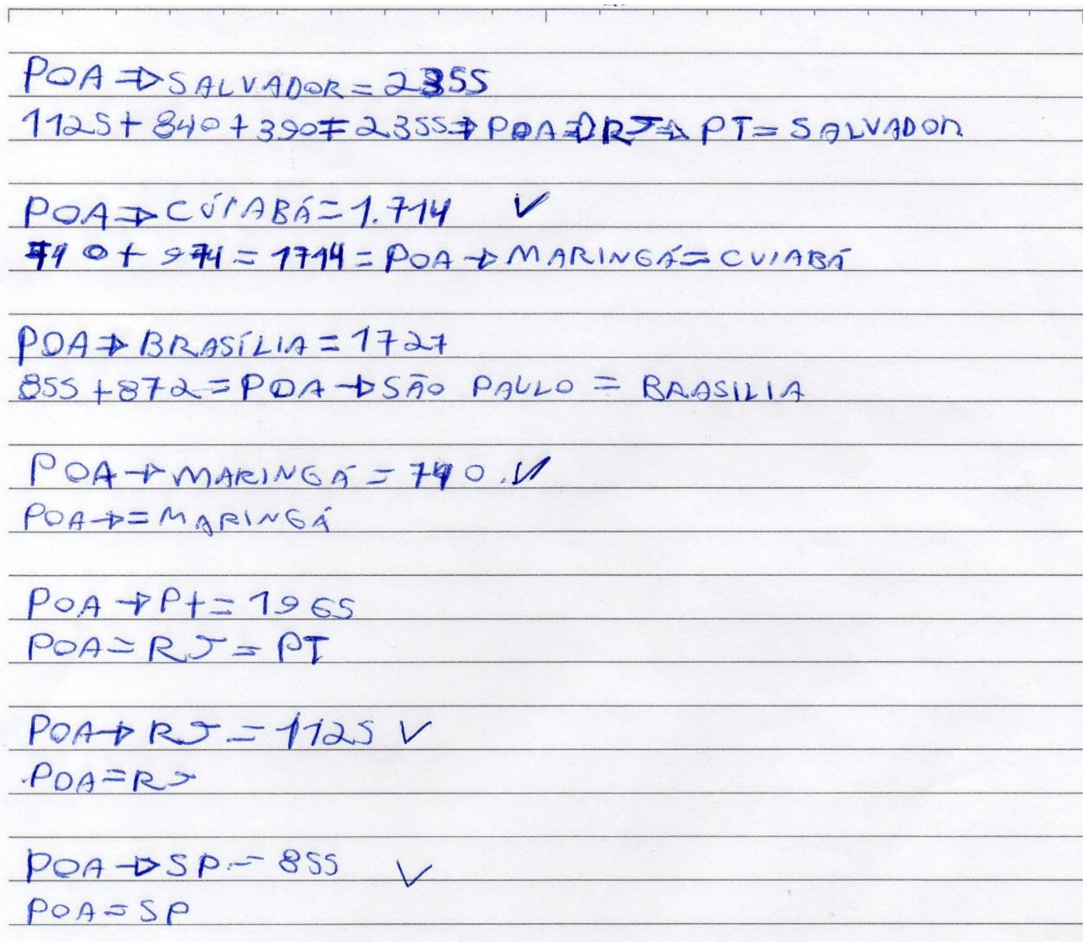


Fonte: Elaborada pela autora.

A turma foi dividida em duplas. Assim que professora entregou o material e os alunos leram o problema, surgiu o seguinte comentário: “Esse grafo é muito grande, vai dar trabalho! ”. Aproveitando essa fala, a professora contou um pouco da história de Edsger Dijkstra e passou a mostrar o algoritmo criado por ele para resolver problemas de caminho mínimo. O grupo acompanhou muito atento a explicação fazendo perguntas e respondendo quando questionados. Entenderam o algoritmo, mas alguns acharam muito trabalhoso desenhar tabelas para cada fase da aplicação.

Esses optaram por registros mais simplificados, que chamaram de “método tradicional”, conforme registros apresentados nas Figura 23.

Figura 23: Registro do “método tradicional”.


POA ⇒ SALVADOR = 2355
1125 + 840 + 390 = 2355 ⇒ POA ⇒ RJ ⇒ PT = SALVADOR

POA ⇒ CUIABÁ = 1.714 V
740 + 974 = 1714 = POA → MARINGÁ = CUIABÁ

POA ⇒ BRASÍLIA = 1727
855 + 872 = POA → SÃO PAULO = BRASILIA

POA → MARINGÁ = 740 V
POA → = MARINGÁ

POA → PT = 1965
POA = RJ = PT

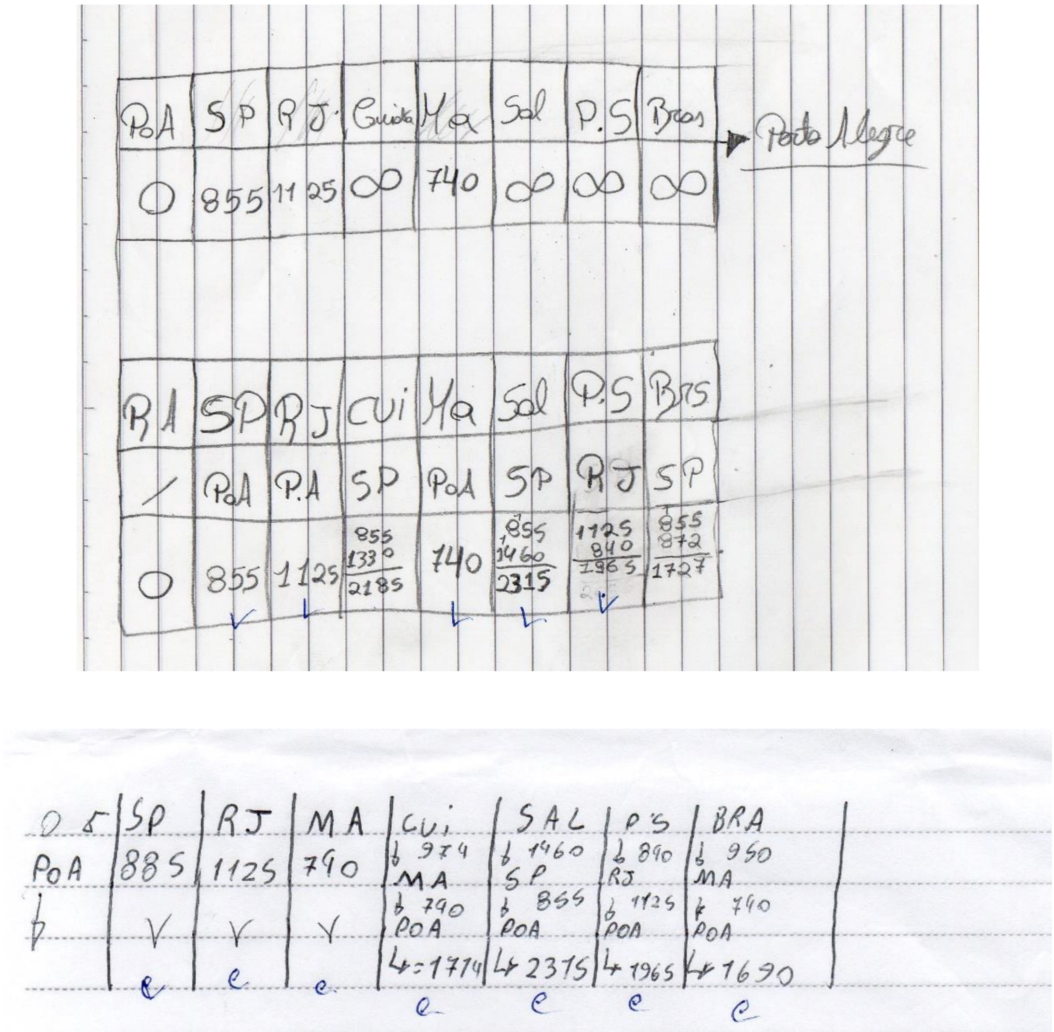
POA → RJ = 1125 V
POA = RJ

POA → SP = 855 V
POA = SP

Fonte: dados da pesquisa.

O grupo trabalhou com bastante dedicação e ao final da aula entregaram seus registros, a maioria mesclou a ideia do algoritmo de Dijkstra com o “método tradicional”, conforme a Figura 24.

Figura 24: Registros mesclando algoritmo de Dijkstra e “método tradicional”.



Fonte: dados da pesquisa.

4.5 AULA 5 – OUTRAS APLICAÇÕES

Esta aula tinha como objetivo explorar outras aplicações da teoria de grafos. Ela foi dividida em duas partes. A primeira tratava de um problema de determinação do melhor lugar para instalação de containers de coleta de lixo. Na segunda parte, propomos uma experiência no laboratório de informática com o jogo online Grafo Euleriano (Lilly Hop), disponível no site https://www.cokitos.pt/jogo-grafo-euleriano/play/. Esse jogo explora os conceitos de caminho euleriano aberto e fechado.

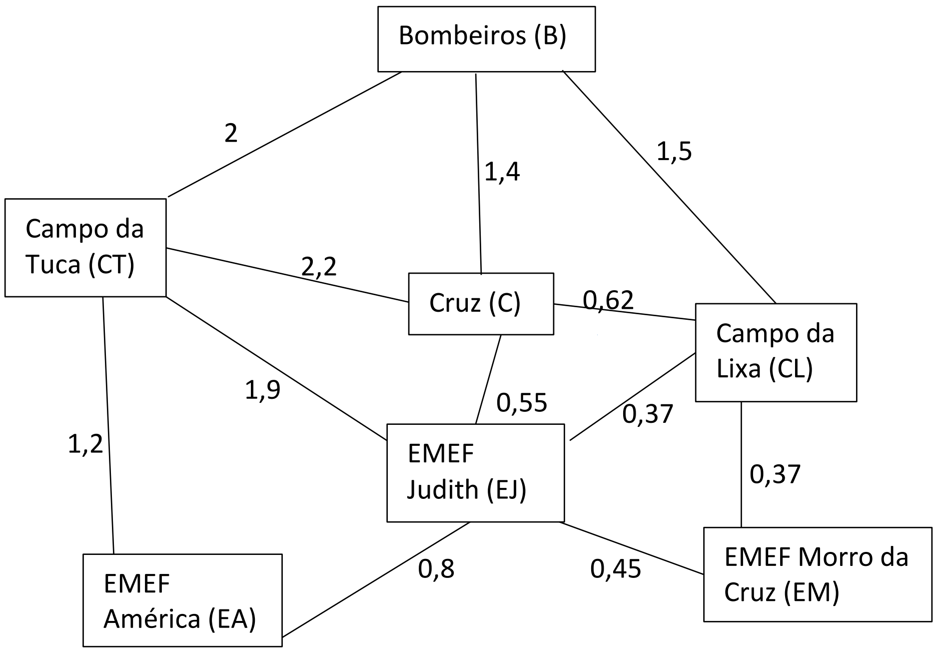
4.5.1 Desenvolvimento

Na primeira parte da aula os alunos foram organizados em duplas e receberam uma folha com a seguinte atividade:

Questão: Considere o grafo da Figura 25 a seguir para solucionar o problema.

A prefeitura deseja instalar containers para coleta de lixo reciclável. Os pontos de coleta coincidirão com alguns vértices do grafo. Determine o número mínimo de containers a serem instalados e em quais pontos devem ficar, de modo que para acessá-los, partindo de outro vértice percorra-se apenas uma aresta.

Figura 25: Grafo representando o mapa do bairro.



Fonte: Elaborada pela autora.

Nessa aula, a dificuldade com interpretação de texto ficou mais uma vez evidenciada. Muitos estudantes não compreenderam o que estava sendo solicitado e a intervenção da professora foi necessária para esclarecer as dúvidas. A partir das explicações, a turma chegou à conclusão de que somente dois containers seriam necessários. No momento de comparar as respostas, verificaram que estes poderiam estar em locais variados.

Para realização da segunda parte da aula, a turma foi até o laboratório de informática. O laboratório tem 17 computadores, porém apenas 12 estavam funcionando, motivo pelo qual os estudantes foram organizados em trios. Tal atividade tinha por objetivo aplicar de forma lúdica os conceitos de caminhos eulerianos abertos e fechados.

O jogo consistia em conduzir um pássaro por um passeio sobre plantas aquáticas (vértices de um grafo), com as condições de não repetir a aresta e visitar todos os vértices. Nas Figuras 26 a 28 a seguir, apresentamos a interface do jogo.

Figura 26: Tela inicial.

Fonte: FREE WORLD GROUP (2008, online).

Figura 27: Nível 1 do jogo.

Fonte: FREE WORLD GROUP (2008, online).

Figura 28: Nível 11 do jogo.

Fonte: FREE WORLD GROUP (2008, online).

O jogo inicia com grafos simples como o da figura 26, com poucos vértices e todos de grau par, os quais a turma resolveu com rapidez e precisão. A medida que o jogo evolui, os grafos passam a ter mais vértices e também aparecem vértices com grau ímpar. Nessa fase os estudantes tiveram que repetir algumas vezes o mesmo grafo, até que lembraram da seguinte conclusão da aula anterior: quando havia vértices de grau ímpar, o caminho deveria iniciar em um e terminar no outro vértice. A partir disso, a turma apresentou facilidade para resolver os desafios.

Os estudantes tiveram uma participação muito boa nessa atividade. Os alunos se revezaram no manuseio do computador, mas resolviam os desafios juntos. A aplicação das regularidades observadas na aula anterior fez com que a maioria dos grupos avançasse bastante nos níveis do jogo.

Essa atividade propiciou trocas entre os estudantes pois tentavam resolver os desafios propostos pelo jogo sempre em equipe. Compartilharam e aplicaram os conhecimentos estudados na aula anterior. Conforme Gonçalves: “vale a pena investir e tentar cativar os alunos com a introdução de alguma atividade lúdica associada à aprendizagem. ” (GONÇALVES, 2007, p.93). Este envolvimento, por parte dos alunos, motivado pelo lúdico, ficou evidente com a participação de todos e o desejo de continuarem a atividade mesmo com o término da aula.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho tinha por objetivo compreender de que forma a introdução da teoria de grafos no ensino fundamental poderia contribuir para o ensino-aprendizagem de matemática. Para isso, elaboramos, dentro da perspectiva de resolução de problemas, uma sequência de atividades envolvendo conceitos básicos da teoria de grafos. Essa proposta foi aplicada em uma turma de 9º ano do ensino fundamental.

A partir das aplicações em aula percebemos que a teoria de grafos elementar pode favorecer em muito o trabalho coletivo na elaboração de respostas a problemas reais, proporcionando propostas interdisciplinares e contextualizações, assim como o desenvolvimento da autonomia e protagonismo dos estudantes. As atividades apresentadas neste trabalho foram pensadas explorando todas essas possibilidades.

A proposta foi bem recebida pelos estudantes que, apesar das dificuldades apresentadas em interpretação de texto, demonstraram bastante interesse e envolvimento com as atividades. A contextualização dos problemas com dados geográficos do cotidiano dos alunos facilitou muito o trabalho, fazendo com que o interesse fosse maior e o envolvimento também. “ A identificação com situações-problema que tragam informações a respeito de fatos e assuntos do mundo cultural do aluno também o motivará em suas descobertas. ” (DANTE, 2010, p.168)

Em particular, as atividades que envolviam busca por regularidades, que em geral não é recebida naturalmente entre os alunos, haja visto que a algebrização e generalização de resultados quase sempre é um vilão no ensino da matemática, aqui mostrou-se bastante natural. A investigação estimulou os estudantes a criarem hipóteses e, posteriormente, chegarem a conclusões. A autonomia e protagonismo dos estudantes ficou evidente.

Após a conclusão das atividades com grafos, a professora de matemática juntamente com os professores de Educação Física e Educação Artística, deram início a um trabalho interdisciplinar sobre jogos africanos de tabuleiro. Na aula destinada à pesquisa, um aluno, assim que observou o tabuleiro de um dos jogos, associou-o aos grafos. Isso demonstra o quanto as atividades anteriores foram significativas e também abre uma nova possibilidade de trabalho.

Ao longo do desenvolvimento do trabalho observou-se que a teoria de grafos pode trazer grandes contribuições para o processo de ensino-aprendizagem de matemática na educação básica. Amplia o currículo com um novo conhecimento, uma teoria relativamente jovem, que está em constante evolução. Existem muitas aplicações diretas no cotidiano. Serve para modelar dos problemas mais simples aos mais complexos, nas mais variadas áreas de conhecimento. Além disso, possibilita trabalhar de forma diferente conceitos já presentes no currículo, como operações com números racionais, paridade, padrões, regularidades e generalizações.

Finalmente, temos consciência de que as atividades apresentadas neste trabalho não são suficientes para tratar a Teoria de Grafos em todas as suas possibilidades. Elas foram usadas como estímulo para compreensões possíveis dentro da teoria, e por facilitarem a construção do conhecimento por estudantes do ensino fundamental.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Adérito**. As pontes de Königsberg.** Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes/. Acesso em: 09 abr. 2019.

BRASIL. Ministério da Cultura. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 16 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – BNCC. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 28 jun. de 2019.

CARVALHO, David. História da teoria dos grafos, [s.d.]. *In*: **Academia**. Disponível em: https://www.academia.edu/5225351/Hist%C3%B3ria_da_teoria_dos_grafos. Acesso em: 16 jul. 2019.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática:** teoria e prática. São Paulo: Ática, 2010.

DELUCA, Cristina. Faça a teoria dos grafos trabalhar para a sua empresa, 2018. *In:* **Cio**. Disponível em: https://cio.com.br/faca-a-teoria-dos-grafos-trabalhar-para-sua-empresa/. Acesso em 16 jun. 2019.

EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 1741, 8, 128-140. doi: citeulike-article-id:9589611

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: UNICAMP, 2004.

FRANA, Philip L.; MISSA, Thomas J. Uma entrevista com Edsger W. Dijkstra. Entrevistado: Edsger W. Dijkstra. **Magazine Communications of the ACM**. Nova York, 2010, v. 53, n. 8, p. 41-47, ago. 2010. Disponível em: https://dl.acm.org/citation.cfm?doid=1787234.1787249. Acesso em 16 jun. 2019.

FREE WORLD GROUP. Lilly Hop. 2008. Disponível em: https://www.cokitos.pt/jogo-grafo-euleriano/play/. Acesso em: 10 abr. de 2019.

GIGANTE, Ana Maria Beltrão; SANTOS, Monica Bertoni. Matemática: reflexões no ensino, reflexos na aprendizagem. Erechim: Edelbra, 2012.

GONÇALVES, Andreia Leite. **Grafos**: aplicações ao jogo. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Portucaense, Porto, 2007. Disponível em:

http://www.pucrs.br/ciencias/viali/graduacao/po_2/literatura/grafos/dissertacoes/TMMAT%20102.pdf. Acesso em: 04 jan. 2019.

JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos**: uma introdução. Rio de Janeiro: SBM, 2009. Disponível em: http://www.obmep.org.br/apostilas.htm. Acesso em 20 dez. 2018.
LESTER Jr., F.; CHARLES, R. **Teaching problem solving**: what, why, and how. Nova York: Dale Seymour Publications, 1982.

LOPES, Lidiane Schimitz; ALVES, Gilson Leandro Pacheco; FERREIRA, André Luís Andrejew. A simetria nas aulas de matemática: uma proposta investigativa. *In*: **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 40, n. 2, p. 549-572, abr./jun. 2015. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/edreal/v40n2/2175-6236-edreal-46015.pdf. Acesso em 24 mai. 2019.

MENDES, Cristina; SOUSA, Fátima. Aprender a resolver problemas no 2.º ano do ensino básico. *In*: **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 243 - 265, abr. 2017. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0243.pdf. Acesso em: 17 jul. 2019.

MERIAN, Erben. Mapa da antiga cidade de Königsberg. Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/15/Image-Koenigsberg%2C_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg

MOTA, Belmira. Teoria de grafos: história da matemática, [s.d.]. *In*: **Academia**. Disponível em: https://www.academia.edu/6342431/Teoria_de_Grafos_-_Hist%C3%B3ria. Acesso em: 05 jul. 2019.

NETTO, Paulo Oswaldo Boaventura; JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos**: introdução e prática. São Paulo: Blucher, 2017.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs). **Educação matemática pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004, p.213-231.

PAULO, Rosa Monteiro. O significado dos diagramas na produção do conhecimento geométrico. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Filosofia da educação matemática**: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas.São Paulo: UNESP, 2010, p. 169-191.

SCHEINERMAN, Edward R. **Matemática discreta**: uma introdução. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. **Matemática na Escola**: novos conteúdos, 2009. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novos_conteudos/2009/modulo_I/conteudos1a.htm. Acesso em: 09 abr. de 2019