UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Danrlei Vaz Oliveira

EXISTÊNCIA E REGULARIDADE DE SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA OPERADORES DIFERENCIAIS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Santa Maria, RS
2020

Danrlei Vaz Oliveira

EXISTÊNCIA E REGULARIDADE DE SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA OPERADORES DIFERENCIAIS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Fronza da Silva

Santa Maria, RS
2020

This study was financied in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Finance Code 001

Oliveira, Danrlei Vaz
Existência e regularidade de soluções fundamentais para operadores diferenciais lineares de coeficientes constantes / Danrlei Vaz Oliveira.- 2020.
92 p.; 30 cm

Orientador: Maurício Fronza da Silva
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2020

1. Soluções fundamentais 2. Existência 3. Regularidade 4. Operadores lineares 5. Equações diferenciais parciais I. Silva, Maurício Fronza da II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, DANRLEI VAZ OLIVEIRA, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Danrlei Vaz Oliveira

EXISTÊNCIA E REGULARIDADE DE SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA OPERADORES DIFERENCIAIS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 19 de março de 2020:

Maurício Fronza da Silva, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

José Ruidival Soares dos Santos Filho, Dr. (UFSCar)

Juliano Damião Bittencourt de Godoi, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2020

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a meus pais, por todo apoio e incentivo que sempre me deram, por terem batalhado tanto para que eu pudesse aproveitar todas as oportunidades de estudo que tive. Sem eles, não teria chegado até aqui.

Agradecimento especial ao meu orientador, professor Maurício, que tanto me ajudou ao longo do mestrado, pela atenção, pelo esforço empregado para enriquecer-me intelectualmente, pela parceria e amizade.

Agradeço de coração aos colegas do mestrado, que tanto me aturaram neste tempo, pelos momentos de descontração, de estudos coletivos, de amizade e incentivo. Amigos que levarei para sempre.

Agradeço também a todos os professores da Universidade Federal de Santa Maria, os quais de algum modo tiveram participação na minha formação, levarei um pouco de cada um comigo sempre.

Agradecimentos gerais a todos meus amigos, colegas, ex-colegas e ex-professores, que sempre estiveram em contato, apoiando e incentivando meus estudos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro.

“Parte da jornada é o fim.”
-Tony Stark

RESUMO

EXISTÊNCIA E REGULARIDADE DE SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA OPERADORES DIFERENCIAIS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

AUTOR: Danrlei Vaz Oliveira
ORIENTADOR: Maurício Fronza da Silva

O objetivo principal desta dissertação é demonstrar um teorema que garante existência e regularidade de soluções fundamentais para operadores diferenciais lineares de coeficientes constantes. Apresentamos ainda algumas de suas aplicações relacionadas à regularidade de soluções de equações diferenciais parciais lineares de coeficientes constantes.

Palavras-Chave: Equações diferenciais parciais. Soluções fundamentais. Regularidade. Operadores lineares.

ABSTRACT

EXISTENCE AND REGULARITY OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS WITH CONSTANT COEFFICIENTS.

AUTHOR: Danrlei Vaz Oliveira
ADVISOR: Maurício Fronza da Silva

The main objective of this dissertation is to present a theorem that guarantees the existence and regularity of fundamental solutions for linear differential operators with constant coefficients. We also present some of its applications related to the regularity of solutions of linear partial differential equations with constant coefficients.

Keywords: Partial Differential Equations. Fundamental Solutions. Regularity. Linear Operators.

Sumário

1 Introdução

Algumas das principais questões relacionadas ao estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDP's) estão relacionadas à existência e regularidade de solução de uma dada equação. As soluções fundamentais fornecem informações sobre existência e regularidade das soluções de EDP's da forma $Pu = f$, na qual P é um operador diferencial linear de coeficientes constantes. Elas fornecem ainda uma fórmula que, sob certas condições, possibilita encontrar qualquer solução da equação em função da condição f dada.

Uma solução fundamental do operador linear de coeficientes constantes P é uma distribuição $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $PE = \delta$, onde δ é a distribuição *Delta de Dirac*. Basicamente, podemos resumir a importância da solução fundamental nas seguintes identidades, onde $*$ denota a convolução de distribuições:

$$P(E * f) = f, \ f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \tag{1.1}$$

e

$$E * (Pu) = u, \ u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

Então a convolução com E fornece uma inversa de P tanto à esquerda quando à direita. A identidade (1.1) significa que uma solução da equação $Pu = f$ é dada por $u = E * f$, enquanto que (1.2) torna possível obter informação sobre a regularidade de u a partir da regularidade de Pu.

É imediato da definição que o operador nulo não possui solução fundamental. Observamos ainda que se $P = c$ é o operador constante, com $c \neq 0$, então a única solução fundamental de P é $E = \delta/c$. Em particular, as soluções fundamentais são distribuições não necessariamente definidas por funções integráveis.

É interessante notar ainda que, se a ordem de P é $m > 0$, então a solução fundamental de P nunca é única. Isto ocorre pois sempre podemos encontrar uma solução para a equação homogênea $Pu = 0$ via exponencias. Logo, se E é uma solução fundamental de P e u é uma solução da equação homogênea $Pu = 0$, então $E + u$ é também uma solução fundamental de P.

O primeiro resultado geral sobre existência de soluções fundamentais foi publicado em (EHRENPREIS, 1954) e depois em (MALGRANGE, 1956). Utilizando o Teorema de Hahn-Banach eles provaram que todo operador linear de coeficientes constantes não identicamente nulo possui uma solução fundamental. Embora nenhuma das demonstrações forneça uma fórmula explícita ou informação sobre a regularidade da solução fundamental, segundo (HORVÁTH, 1966, p. 395), esse foi um dos primeiros grandes triunfos da Teoria das Distribuições que havia sido recentemente formalizada por L. Schwartz.

Após este resultado, surge então a questão da obtenção de fórmulas explícitas para a solução fundamental. A Transformada de Fourier desempenha papel importante na investigação deste problema.

Um fato interessante de se observar, ainda que neste momento careça de argumentos mais precisos, é que se $P(i\xi) \neq 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, então é possível provar que a aplicação $\xi \mapsto \dfrac{1}{P(i\xi)}$ define uma distribuição temperada. Logo, uma solução fundamental temperada de P é dada por $E = \mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{1}{P(i\xi)}\right)$, e, neste caso, E é a única solução fundamental temperada de P.

Esse exemplo ilustra o fato de que, em geral, os zeros da função $P(i\xi)$ desempenham papel central na construção de uma solução fundamental.

Nosso principal objetivo é demonstrar o teorema abaixo, resultado este que foi provado em (HORMANDER, 1969) e também pode ser encontrado em (ORTNER; WAGNER, 1997):

Teorema 1.0.1. *Se P é um operador diferencial linear de coeficientes constantes não identicamente nulo, então existe uma solução fundamental E de P tal que $E \in B^{loc}_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$.*

O espaço $B^{loc}_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$ é uma generalização dos espaços de Sobolev usuais e serão apresentados no decorrer do texto. Mais ainda, verificaremos que em termos dos espaços $B_{p,k}$ não é possível obter regularidade melhor do que esta. Assim, uma solução fundamental como a dada no Teorema 1.0.1 será chamada de solução fundamental regular.

Veremos ainda algumas das consequências do Teorema 1.0.1 sobre a existência e regularidade de soluções de algumas classes de equações diferenciais parciais.

2 Preliminares

Neste capítulo, introduziremos alguma terminologia e notação, bem como a teoria básica para o entendimento dos capítulos seguintes. Mais precisamente, introduzimos a notação de multi-índice, bem como definições e resultados úteis relacionados à Medida e Integração, Distribuições e Integração em Espaços Normados.

2.1 Multi-índice

Nesse texto, denotamos a base canônica de $\mathbb{R}^n$ por $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Um aberto de $\mathbb{R}^n$ é representado por Ω, enquanto que, para cada $k = 0, 1, 2, ...$, o símbolo $C^k(\Omega)$ representa o espaço vetorial das funções complexas continuamente diferenciáveis até ordem k definidas em Ω. Escrevemos ainda $C^\infty(\Omega)$ para denotar o espaço vetorial das funções complexas definidas em Ω que possuem derivadas parciais de todas as ordens.

A notação de multi-índice é muito útil na teoria de EDP's, pois torna prática a representação de derivadas parciais e polinômios em várias variáveis. Um **multi-índice** é uma $n-$upla de inteiros não negativos que representamos por $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n := \{0, 1, \ldots\}^n$. O **comprimento** do multi-índice α é denotado por $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ e o **fatorial** de α é definido por $\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. Ainda, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, escrevemos $\beta \leq \alpha$ quando, para $j = 1, \ldots, n$, temos $\beta_j \leq \alpha_j$, e diremos que $\beta < \alpha$ quando $\beta \leq \alpha$ e $\beta_j < \alpha_j$, para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por fim, usaremos também o símbolo

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},$$

onde $\beta \leq \alpha$.

Escrevemos as derivadas parciais de primeira ordem como $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, e denotamos por $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $\partial_j^{\alpha_j} = \dfrac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$, $j = 1, \ldots, n$. Ainda, se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Isto torna a escrita de polinômios em várias variáveis e da série de Taylor de funções de várias variáveis mais simples, por exemplo, um polinômio P em $\mathbb{R}^n$(ou $\mathbb{C}^n$) de grau $\leq m$ com coeficientes complexos será expresso por $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ e cada $a_\alpha \in \mathbb{C}$.

O resultado que segue é uma aplicação do Binômio de Newton.

Observação 2.1.1 (Teorema Binomial). *Se $x, y \in \mathbb{C}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ então*

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} x^\beta y^{\alpha-\beta}.$$

O resultado que segue generaliza a regra do produto para derivadas. A demonstração é feita usando indução sobre a ordem de derivação.

Teorema 2.1.2 (Regra de Leibniz). *Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ então*

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g. \tag{2.1}$$

2.2 Resultados de Medida e Integração

Nesta seção apresentamos as definições básicas e os resultados de Medida e Integração que serão utilizados ao longo do texto. Maiores detalhes e demonstrações podem ser encontrados em (FOLLAND, 2013).

O símbolo X, nesta seção, sempre denota um conjunto não vazio e $\mathcal{P}(X)$ representa o conjunto das partes de X.

Definição 2.2.1. *Uma **álgebra** em X é um subconjunto não vazio $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que:*

(i) Se $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{A}$ então $\bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathscr{A}$;

(ii) se $E \in \mathscr{A}$ então $E^c = X \setminus E \in \mathscr{A}$.

*Uma σ-**álgebra** em X é um subconjunto não vazio $\mathscr{M} \subset \mathcal{P}(X)$ com as seguintes propriedades:*

(i) Se $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ então $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \in \mathscr{M}$;

(ii) se $F \in \mathscr{M}$ então $F^c = X \setminus F \in \mathscr{M}$.

*O par $(X, \mathscr{M})$ é chamado de **espaço mensurável** e os elementos de $\mathscr{M}$ são ditos **conjuntos mensuráveis**.*

Observação 2.2.2. *Se $\mathscr{A}$ é uma álgebra em X e $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{A}$ então $\bigcap_{j=1}^{n} E_j \in \mathscr{A}$. Desta forma segue que $\emptyset = E \cap E^c \in \mathscr{A}$ e $X = E \cup E^c \in \mathscr{A}$, onde $E \in \mathscr{A} \neq \emptyset$. Analogamente para a σ-álgebra $\mathscr{M}$.*

Verifica-se que a interseção arbitrária de $\sigma-$álgebras em X ainda é uma $\sigma-$álgebra em X. Com isso, na nomenclatura da definição abaixo, segue a $\sigma-$álgebra gerada por um subconjunto de X é, de fato, uma σ-álgebra em X.

Definição 2.2.3. *Seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. A σ-**álgebra gerada por** $\mathcal{E}$, denotada por $\mathscr{M}(\mathcal{E})$, é a interseção de todas as σ-álgebras em X que contém $\mathcal{E}$.*

Em particular, se $X = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{E} = \{A \subset \mathbb{R}^n;\ A \text{ é aberto}\}$, então $\mathscr{M}(\mathcal{E}) := \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ é uma σ-álgebra em $\mathbb{R}^n$, a qual denominamos de **σ-álgebra de Borel**.

Definição 2.2.4. *Uma **medida** no espaço mensurável $(X, \mathscr{M})$ é uma função $\mu : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$, que cumpre as seguintes condições:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) se $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$, *onde* $F_i \cap F_j = \emptyset$ *e* $i \neq j$, *então* $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(F_i)$;

(iii) se $A, B \in \mathscr{M}$ *são tais que* $A \subset B$ *e* $\mu(B) < \infty$, *então* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Definição 2.2.5. *Um **espaço de medida** é uma tripla $(X, \mathscr{M}, \mu)$, onde X é um conjunto não vazio, $\mathscr{M}$ é uma σ-álgebra em X e μ é uma medida em $(X, \mathscr{M})$. Dizemos ainda que o espaço $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é **completo** se todo subconjunto de um conjunto de medida nula é mensurável.*

Quando não houver risco de confusão em relação a σ-álgebra $\mathscr{M}$ e a medida μ às quais nos referimos, diremos apenas espaço de medida X. O resultado que segue significa que toda medida possui um completamento.

Teorema 2.2.6 (**Completamento**). *Sejam $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida, $N = \{B \in \mathscr{M};\ \mu(B) = 0\}$, $\overline{\mathscr{M}} = \{E \cup F;\ E \in \mathscr{M} \text{ e } F \subset B, \text{ para algum } B \in N\}$ e $\overline{\mu} : \overline{\mathscr{M}} \to [0, \infty]$ definida por $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. Então $(X, \overline{\mathscr{M}}, \overline{\mu})$ é um espaço de medida completo e $\overline{\mu}$ é a única medida em $(X, \overline{\mathscr{M}})$ tal que sua restrição a $\mathscr{M}$ é μ.*

A partir de agora listamos as definições e resultados usados para a construção da Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ via Teorema de Carathéodory.

Definição 2.2.7. *Dizemos que $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ é uma **medida exterior em** X se:*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) $E, F \in \mathcal{P}(X)$, $E \subset F \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$;

(iii) se $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ *então* $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

Proposição 2.2.8. *Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ e $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ com $\rho(\emptyset) = 0$. Então, a função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0.\infty]$ definida por*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n);\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ \text{com } E_n \in \mathcal{E}, \forall n \in \mathbb{N}\right\},\ A \in \mathcal{P}(X), \tag{2.2}$$

é uma medida exterior em X.

Um conjunto $A \in \mathcal{P}(X)$ é dito μ^***-mensurável** se $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, para todo $E \in \mathcal{P}(X)$.

Teorema 2.2.9 (Carathéodory). *Se μ^* é uma medida exterior em X, então a família $\mathscr{M}$ de todos os conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra em X e $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é um espaço de medida completo, onde $\mu := \mu^*|_{\mathscr{M}}$ é a restrição de μ^* a $\mathscr{M}$.*

Uma **pré-medida** em $(X, \mathscr{A})$, onde $\mathscr{A}$ é uma álgebra em X, é uma função $\mu_0 : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ com as seguintes propriedades:

(i) $\mu_0(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A}$, com $A_j \cap A_i = \emptyset$ se $i \neq j$, e $\cup A_j \in \mathscr{A}$, então $\mu_0(\cup A_j) = \sum \mu_0(A_j)$.

Dizemos ainda que μ_0 é σ**-finita** quando existe uma coleção $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, com $F_i \in \mathscr{A}$ e $\mu_0(F_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$, de modo que $X = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} F_i$.

Proposição 2.2.10. *Se $\mathscr{A}$ é uma álgebra em X, μ_0 é uma pré-medida em $(X, \mathscr{A})$ e μ^* é dada por* (2.2) *então:*

(i) a restrição de μ^* a $\mathscr{A}$ é igual a μ_0;

(ii) todo conjunto de $\mathscr{A}$ é μ^*-mensurável.

Teorema 2.2.11. *Sejam $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra em X, μ_0 uma pré-medida em $(X, \mathscr{A})$ e $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathscr{A})$. Então, existe uma medida μ em $(X, \mathscr{M})$ cuja restrição a $\mathscr{A}$ é igual a μ_0; a saber, $\mu = \mu^*|_{\mathscr{M}}$, onde μ^* é dada por* (2.2)*. Se μ_0 é σ-finita então μ é a única extensão de μ_0 para uma medida definida em $(X, \mathscr{M})$.*

Observação 2.2.12. *Consideremos $\mathscr{A}$ como a coleção dos conjuntos $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$, onde $n \in \mathbb{N}$, $-\infty \leq a_i \leq b_i < \infty$, para $i = 1, \dots, n$, e $(a_i, b_i] \cap (a_j, b_j] = \emptyset$ se $i \neq j$. Temos que $\mathscr{A}$ é uma álgebra em $\mathbb{R}$ e $\mathscr{M}(\mathscr{A}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.*

Teorema 2.2.13. *Sejam $\mathscr{A}$ como na Observação 2.2.12 e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona crescente e contínua à direita. Defina $\mu_0 : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ dada por $\mu_0(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} F(b_i) - F(a_i)$, se $E \neq \emptyset$, e $\mu_0(\emptyset) = 0$. Então, μ_0 é uma pré-medida em $\mathscr{A}$.*

Utilizando os resultados anteriores obtemos

Teorema 2.2.14. *Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente e contínua à direita, então existe uma única medida $\mu_F : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ tal que*

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a), \ -\infty \leq a \leq b < \infty.$$

O completamento da medida μ_F dada pelo Teorema 2.2.14, a qual ainda denotaremos por μ_F, é chamada de **medida de Borel-Stieltjes** associada à função F e seu domínio será representado por M_μ. Tomando $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como a função identidade, temos a **medida de Lebesgue** em $\mathbb{R}$, a qual denotaremos por m, e seu respectivo domínio $\mathcal{L}$ é a $\sigma-$**álgebra de Lebesgue** em $\mathbb{R}$.

Vejamos agora uma das propriedades de regularidade das medidas de Borel-Stieltjes.

Teorema 2.2.15. *Para todo $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ vale:*

$$\begin{aligned} \mu_F(E) &= \inf\{\mu_F(U);\ E \subset U \text{ e } U \text{ é aberto}\} \\ &= \sup\{\mu_F(K);\ K \subset E \text{ e } K \text{ é compacto}\}. \end{aligned}$$

Nosso próximo objetivo é introduzir a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2.16. *Se $(X, \mathscr{M})$ e $(Y, \mathscr{N})$ são espaços mensuráveis então definimos a* ***σ-álgebra produto*** *$\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$ como a σ-álgebra gerada pelo conjunto $\{A \times B; A \in \mathscr{M}, B \in \mathscr{N}\}$.*

Verifica-se que o conjunto $\mathscr{A}$ das uniões finitas e disjuntas de retângulos da forma $A \times B$, com $A \in \mathscr{M}$ e $B \in \mathscr{N}$, é uma álgebra em $X \times Y$ e que $\pi(E) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j)\nu(B_j)$ é uma pré-medida em $(X, \mathscr{A})$, onde $E = (A_1 \times B_1) \cup \cdots \cup (A_k \times B_k) \in \mathscr{A}$. Do Teorema 2.2.11 segue que existe uma medida $\mu \otimes \nu$ em $(X \times Y, \mathscr{M} \times \mathscr{N})$ que estende π, a qual chamamos de **medida produto**. Analogamente definimos o produto de uma quantidade finita qualquer de medidas.

Sejam $\mathcal{L}$ e m a $\sigma-$álgebra e medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, respectivamente. Consideramos então o espaço de medida completo $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$, onde $\mathcal{L}^n$ é o completamento da σ-álgebra produto $\prod\limits_{j=1}^{n} \mathcal{L}$ e m^n a medida completa correspondente. Obtemos assim a **σ-álgebra de Lebesgue** e **medida de Lebesgue** em $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

Por simplicidade, faremos um abuso de notação e escrevemos apenas $\mathcal{L}$ e m, para representar a σ-álgebra e a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, respectivamente, independente de $n \in \mathbb{N}$.

Apresentamos agora os resultados de integração que serão usados no decorrer do texto.

Se $(X, \mathscr{M})$, $(Y, \mathscr{N})$ são espaços mensuráveis, uma função $f : X \to Y$ será dita **$(\mathscr{M}, \mathscr{N})$-mensurável**, ou apenas mensurável, quando $f^{-1}(A) \in \mathscr{M}$, para todo $A \in \mathscr{N}$. Uma **função simples** em X é uma função $s : X \to \mathbb{C}$ que pode ser escrita na forma:

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{F_j}(x),\ x \in X,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $F_j \in \mathscr{M}$ e χ_{F_j} representa a função característica do conjunto F_j, $j = 1, \ldots, n$. Aqui, consideramos sempre o caso em que os conjuntos $F_j's$ são dois a dois disjuntos com união igual a X, e que os $a_j's$ são dois a dois distintos.

Consideremos agora um espaço de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$. Se s é uma função simples real não negativa, definimos a **integral** de s em X, com relação à medida μ, por

$$\int_X s \,\mathrm{d}\mu(\mathrm{x}) = \int s(x) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(F_j).$$

Com isso, definimos a **integral** de uma função mensurável $f : X \to [0, \infty]$ por

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int s \,\mathrm{d}\mu;\ s \text{ é simples e } 0 \leq s(x) \leq f(x),\ \forall\, x \in X \right\}.$$

Agora, estendemos esta definição para funções reais mensuráveis através de suas partes positiva e negativa. Mais precisamente, se $f : X \to (-\infty, \infty]$, podemos escrever $f = f^+ - f^-$, onde

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \begin{cases} f(x), \text{ se } f(x) \geq 0, \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases} \\ f^-(x) &= \begin{cases} -f(x), \text{ se } f(x) \leq 0, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Se f é mensurável então verifica-se que f^+ e f^- são funções mensuráveis. Nesse caso, definimos a **integral** de f por $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu$, se pelo menos uma das duas últimas integrais é finita. No caso em que $\displaystyle\int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ e $\displaystyle\int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$, dizemos que f é **integrável** (ou μ-integrável). Observamos que f é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável, uma vez que $|f| = f^+ + f^-$. Definimos ainda a integral de f sobre o conjunto $E \in \mathscr{M}$ por

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = \int f \chi_E \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Por fim, para funções complexas mensuráveis $f : X \to \mathbb{C}$, diremos que f é **integrável** em $E \in \mathscr{M}$, se $\displaystyle\int_E |f(x)| \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Notemos que isto ocorre se, e somente se, as partes real e imaginária de f, respectivamente $\mathrm{Re} f$ e $\mathrm{Im} f$, são integráveis em E e, neste caso, definimos:

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E \mathrm{Re}\, f \,\mathrm{d}\mu + i \int_E \mathrm{Im}\, f \,\mathrm{d}\mu\,. \tag{2.3}$$

O lado esquerdo de (2.3) é chamado de **integral de Lebesgue** de f em E com relação à medida μ, a qual será utilizada ao longo de todo o trabalho. Denotamos o espaço vetorial de todas as funções integráveis (em X) por $\mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Seja $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma propriedade P vale **q.t.p.** ou **quase toda parte**, quando o conjunto E de pontos nos quais a P não é válida é mensurável e $\mu(E) = 0$. Apresentamos agora dois dos principais resultados de convergência relacionados à integral de Lebesgue

Teorema 2.2.17 (**Convergência Monótona**). *Seja* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida. Sejam* $0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots \leq f$ *mensuráveis e tais que* $f_n \longrightarrow f$ *q.t.p., quando* $n \longrightarrow \infty$. *Então* $\displaystyle\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.

Teorema 2.2.18 (**Convergência Dominada**). *Seja* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida. Suponha que* (f_j) *é uma sequência de funções em* $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ *tal que* $f_j \longrightarrow f$ *q.t.p., quando* $j \longrightarrow \infty$. *Se existe* $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, *não negativa, de modo que* $|f_j| \leq g$ *q.t.p., então* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ *e* $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{j \to \infty} \int_X f_j \, \mathrm{d}\mu$.

Do Teorema 2.2.18 segue

Teorema 2.2.19 (**Derivação sob o sinal da integral**). *Seja* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida e* $f : X \times [a, b] \to \mathbb{C}$ *tal que para cada* $t \in [a, b]$, *a aplicação* $x \mapsto f(x, t)$ *é integrável. Defina* $F(t) = \displaystyle\int_X f(x, t) \, \mathrm{d}\mu$, *para todo* $t \in [a, b]$. *Então valem:*

(i) Se para quase todo $x \in X$, *tem-se que a função* $t \mapsto f(x, t)$ *é contínua em* $t_0 \in [a, b]$ *e existe* $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ *de modo que* $|f(x, t)| \leq g(x)$ *para quase todo* $(x, t) \in X \times [a, b]$, *então* F *é contínua em* t_0;

(ii) se $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ *existe em todos os pontos de* $X \times [a, b]$ *e existe* $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ *tal que* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x)$ *para quase todo* $(x, t) \in X \times [a, b]$, *então* F *é derivável em* $[a, b]$ *e* $F'(t) = \displaystyle\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, \mathrm{d}\mu$.

Passamos agora à apresentação de resultados relativos aos espaços L^p.

Definição 2.2.20. *Dado* $1 \leq p < \infty$, *denotaremos por* $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ *o espaço vetorial das funções* $f : X \to \mathbb{C}$ *mensuráveis tais que* $\displaystyle\int_X |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

Queremos definir uma norma neste espaço a fim de obtermos um espaço de Banach. Porém isto não pode ser feito de maneira natural, uma vez que duas funções que diferem apenas em um conjunto de medida nula possuem a mesma integral. Por conta disto, consideramos em $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ a relação de equivalência **quase toda parte** (q.t.p.), ou seja, dados $f, g, \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ definimos $f \sim g$ se, e somente se, $f = g$ q.t.p.. Denotamos o espaço quociente $\mathcal{L}^p(X, \mu)/\sim$ por $L^p(X, \mu)$, no qual é possível definir a seguinte aplicação:

$$\|\overline{f}\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \ \overline{f} \in L^p(X, \mu), \ 1 \leq p < \infty.$$

No caso $p = +\infty$ fazemos construção análoga a fim de obter o espaço $L^\infty(X, \mu)$ no qual definimos a seguinte função

$$\|\overline{f}\|_\infty = \sup_{x \in X} \text{ess}\, |f(x)| := \inf\{c > 0;\, \mu(\{x \in X; |f(x)| > c\}) = 0\}.$$

Observação 2.2.21. *Vale ressaltar que os elementos dos espaços $L^p(X, \mu)$ não são funções, mas sim classes de equivalência e que, para simplificar a notação, não faremos distinção entre o elemento de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ e sua classe de equivalência em $L^p(X, \mu)$.*

O resultado básico em espaços L^p é a Desigualdade de Hölder que apresentamos abaixo.

Teorema 2.2.22 (Desigualdade de Hölder). *Considere $(X, \mathscr{M}, \mu)$ um espaço de medida. Sejam $f, g : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis e $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Se $f \in L^p(X, \mu)$ e $g \in L^q(X, \mu)$, então $f \cdot g \in L^1(X, \mu)$ e vale*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

A verificação de que a aplicação $\| \cdot \|_p$ cumpre a desigualdade triangular segue do resultado abaixo.

Teorema 2.2.23 (Desigualdade de Minkowski). *Suponha que $(X, \mathscr{M}, \mu)$ é um espaço de medida e $1 \leq p \leq \infty$. Se $f, g \in L^p(X, \mu)$, então vale $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Usando resultados auxiliares e o fato de que sempre podemos aproximar uma função mensurável por uma sequência crescente de funções simples, demonstramos o seguinte

Teorema 2.2.24. *Considere um espaço de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$. Para $1 \leq p \leq \infty$, segue que $L^p(X, \mu)$ é um espaço de Banach e o conjunto das funções simples em X é denso em $L^p(X, \mu)$.*

O próximo teorema dá condições suficientes para que seja possível "trocar" a ordem de integração quando trabalhamos com o produto de medidas.

Teorema 2.2.25 (Fubini). *Sejam $(X, \mathscr{M}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e f uma função $(\mathscr{M} \times \mathscr{N})$-mensurável definida em $X \times Y$. Então,*

(i) se f é não negativa q.t.p., então as funções $\varphi : X \to [0, +\infty]$, $\psi : Y \to [0 + \infty]$, definidas por $\varphi(x) = \int_Y f(x, y)\, \mathrm{d}\nu$ e $\psi(y) = \int_X f(x, y)\, \mathrm{d}\mu$ são, respectivamente, $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$-mensuráveis e vale:

$$\int_X \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu = \int_{X \times Y} f(x, y)\, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_Y \psi(y)\, \mathrm{d}\nu\,. \tag{2.4}$$

(ii) *se* f *é uma função a valores complexos e a função* $\varphi^* : X \to [0, +\infty]$, *definida por* $\varphi^*(x) = \int_Y |f(x, y)| \, \mathrm{d}\nu$, *pertence a* $L^1(X, \mu)$, *então* $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$.

(iii) *se* $f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$, *então a aplicação* $y \mapsto f(x, y)$ *pertence a* $L^1(Y, \nu)$ *para quase todo* $x \in X$, *a aplicação* $x \mapsto f(x, y)$ *pertence a* $L^1(X, \mu)$ *para quase todo* $y \in Y$, *as funções* φ *e* ψ *definidas em (i) são integráveis e vale* (2.4).

O próximo resultado permite a aproximação de funções mensuráveis por funções contínuas.

Teorema 2.2.26 (Lusin). *Considere* $(X, \mathcal{L}, m)$, *onde* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Sejam* $f : X \to \mathbb{C}$ *mensurável e* $A \in \mathcal{L}$, *de modo que* $m(A) < \infty$ *e* $f(x) = 0$ *se* $x \in X \setminus A$. *Dado* $\varepsilon > 0$, *existe uma função* g *contínua, que se anula fora de um compacto de* X, *tal que:*

$$m(\{x \in X; \, f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

Ainda, é possível tomar tal função g *de modo que* $\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Para o próximo teorema, precisamos da definição de convolução de funções. Dadas $f, g : X \to \mathbb{C}$, definimos a convolução de f e g por $(f * g)(x) = \int_X f(x - y) g(y) \, \mathrm{d}\mu$, para todo $x \in X$ tal que a integral é finita. Esta definição será melhor explorada na próxima seção.

Teorema 2.2.27 (Desigualdade de Young). *Seja* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *um espaço de medida* σ-*finito. Se* $f \in L^1(X, \mu)$ *e* $g \in L^p(X, \mu)$, *com* $1 \leq p \leq \infty$, *então* $f * g$ *existe para quase todo* $x \in X$, $f * g \in L^p(X, \mu)$ *e* $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

A partir de agora, usaremos a integral de Lebesgue sempre com relação à medida de Lebesgue, ou seja, com $\mathscr{M} = \mathcal{L}$ e $\mu = m$, a menos de menção em contrário. Ainda, denotaremos por $\int_X f(x) \, \mathrm{dx} = \int_X f \, \mathrm{dm}$, sendo $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. Também adotaremos as seguintes notações, para todo $1 \leq p \leq \infty$:

$$L^p(X) = L^p(X, m) \text{ e } L^p = L^p(\mathbb{R}^n).$$

Denotaremos ainda, por $L^1_{loc}(X)$ o espaço das funções **localmente integráveis** em X, isto é, das funções $f : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis, tais que $\int_K |f(x)| \, \mathrm{dx} < \infty$, para todo compacto $K \subset X$. Notemos que toda função integrável em X, assim como toda função contínua em X, são exemplos de funções localmente integráveis em X. Para simplificar a notação escrevemos ainda $L^1_{loc} = L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.2.28. *Sejam* $r \in \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = |x|^r$. *Então:*

(i) f *é integrável numa vizinhança da origem se, e somente se* $r > -n$, *ou seja,*

$$\int_{|x|<1} f(x) \, \mathrm{dx} < \infty \Leftrightarrow r > -n;$$

(ii) f é integrável no infinito se, e somente se $r < -n$, ou seja,

$$\int_{|x|>1} f(x)\,\mathrm{dx} < \infty \Leftrightarrow r < -n.$$

2.3 Funções teste

Nesta seção, estudamos resultados relacionados às funções teste, como preliminar ao estudo das distribuições. As demonstrações encontram-se em (HOUNIE, 1979).

Definição 2.3.1. *Dados um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $k = 0, 1, \ldots,$ definimos o espaço vetorial complexo $C_c^k(\Omega)$ como o conjunto de todas as funções (a valores reais ou complexos) $\varphi \in C^k(\Omega)$ tais que* ***suporte*** *de f, que é o conjunto definido por*

$$supp(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega;\ \varphi(x) \neq 0\}},$$

é um compacto de Ω. Definimos também o espaço vetorial complexo $C_c^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_c^k(\Omega)$, ou seja, das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω, e seus elementos serão chamados de ***funções teste****.*

O principal exemplo de funções teste é a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi = \psi / \int \psi$, onde

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, \text{ se } |x| < 1, \\ 0, \text{ se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Observamos que $\varphi \geq 0$, $supp(\varphi) \subset B[0;1]$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{dx} = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos definir $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^n$, obtendo assim $0 \leq \varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $supp(\varphi_\varepsilon) \subset B[0;\varepsilon]$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{dx} = 1$. A partir daqui, sempre que falarmos em funções φ_ε, estaremos nos referindo a uma família de funções com as propriedades acima.

Utilizando uma função φ_ϵ adequada podemos mostrar que para todo aberto Ω em $\mathbb{R}^n$, existe uma funções teste cujo suporte está contido em Ω, ou seja, $C_c^\infty(\Omega) \neq \emptyset$. Também é possível verificar que para qualquer compacto K de $\mathbb{R}^n$, existe uma funções teste ψ, com $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 1$ em K e que se anula fora de uma vizinhança arbitrariamente pequena de K.

Apresentamos, a seguir, a noção de convergência no espaço das funções teste.

Definição 2.3.2. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Diremos que uma sequência (φ_j) em $C_c^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, quando se verificam:*

(i) Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $supp(\varphi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$;

(ii) Fixado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência das derivadas $(\partial^\alpha \varphi_j)$ converge uniformemente para $\partial^\alpha \varphi$.

Definição 2.3.3. *Se $f \in L^1_{loc}$ e $\varphi \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, então a* ***convolução*** *de f e φ é a função definida por*

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{dy},\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Notemos que $f * \varphi$ está bem definida pois φ tem suporte compacto em $\mathbb{R}^n$. Ainda, através de uma mudança de variáveis é possível mostrar que $f * \varphi = \varphi * f$. Se, no lugar de φ tomarmos uma das funções φ_ε, com $\varepsilon > 0$ arbitrário, obtemos a família de funções $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$, chamadas de **regularizadas de f.** A importância de tais funções regularizadas pode ser vista nos resultados abaixo:

Teorema 2.3.4. *Dados $f \in L^1_{loc}$ e $\varepsilon > 0$, temos:*

(i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) *supp*$(f_\varepsilon) \subset$ *supp*$(f) + B[0;\varepsilon]$. *Em particular $f_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, quando f tiver suporte compacto;*

(iii) *Se $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$, então $f_\varepsilon \longrightarrow f$ uniformemente, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

Corolário 2.3.5. *Se $f \in L^1$, então suas regularizadas têm as seguintes propriedades adicionais:*

(i) $\|f_\varepsilon\|_1 \leq \|f\|_1$, *para todo* $\varepsilon > 0$;

(ii) $\|f_\varepsilon - f\|_1 \longrightarrow 0$, *quando* $\varepsilon \longrightarrow 0$;

(iii) $\|f_\varepsilon\|_1 \longrightarrow \|f\|_1$, *quando* $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Com estes resultados e o Teorema de Lusin (veja Teorema 2.2.26), obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.3.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $1 \leq p < \infty$, então $C^\infty_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

2.4 As Distribuições

Nesta seção, apresentamos os resultados básicos relacionados às distribuições. Maiores detalhes podem ser encontrados em (HOUNIE, 1979), (BARROS-NETO, 1973) e (HÖRMANDER, 2003).

Para simplificar os enunciados dos resultados listados, Ω sempre representará um aberto do $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.4.1. *Um* ***funcional linear contínuo*** *em $C^\infty_c(\Omega)$ é uma aplicação $\Lambda : C^\infty_c(\Omega) \to \mathbb{C}$ com as seguintes propriedades:*

(i) $\Lambda(a\varphi + \psi) = a\Lambda(\varphi) + \Lambda(\psi)$, *para quaisquer* $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$, $a \in \mathbb{C}$;

(ii) *Se* $\varphi_j \longrightarrow 0$ *em* $C_c^\infty(\Omega)$, *quando* $j \longrightarrow \infty$, *então* $\Lambda(\varphi_j) \longrightarrow 0$, $j \longrightarrow \infty$.

Uma ***distribuição*** *em* Ω *é um funcional linear contínuo em* $C_c^\infty(\Omega)$. *Denotaremos por* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *o espaço vetorial complexo das distribuições em* Ω. *Usaremos também a notação* $u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$, *quando* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *e* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Aqui, as operações de soma e multiplicação por escalar em $\mathscr{D}'(\Omega)$ são definidas de maneira natural, ou seja, dados $u_1, u_2, u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\langle u_1 + u_2, \varphi \rangle = \langle u_1, \varphi \rangle + \langle u_2, \varphi \rangle$$

e

$$\langle \lambda u, \varphi \rangle = \lambda \langle u, \varphi \rangle.$$

Alguns exemplos importantes de distribuições são dados abaixo.

Exemplo 2.4.2. *Se* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *então* f *define uma distribuição* $T_f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *da seguinte maneira:*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx},\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

De fato, isto é consequência da integrabilidade de f em compactos. A partir deste exemplo, usaremos apenas f para indicar tanto a função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, como a distribuição $T_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ definida por f. O contexto deixará claro a qual elemento nos referimos.

Este exemplo mostra que podemos identificar alguns espaços de funções com subespaços de $\mathscr{D}'(\Omega)$. Neste sentido, dizemos que as distribuições são "funções generalizadas". É possível mostrar que se $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$, para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, e $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $f = g$ q.t.p..

Apresentamos, a seguir, o exemplo de uma distribuição que não é definida por uma função localmente integrável.

Exemplo 2.4.3. *Consideremos* $\delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, *dada por* $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. *Esta distribuição é chamada de* ***Delta de Dirac***.

Exemplo 2.4.4. *É possível definir uma distribuição a partir de uma função que não é localmente integrável, a saber,* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Para tal, observamos que $g(x) = \log|x|$, $x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, é localmente integrável e $g' = f$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assim, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e vale $\langle g', \varphi \rangle = -\langle g, \varphi' \rangle$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Agora, se *supp*$(\varphi) \subset [-N, N]$, $N > 0$, usando integração por partes e o Teorema do Valor Médio obtemos:

$$\langle g', \varphi \rangle = -\langle g, \varphi' \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{dx},$$

e definimos a distribuição **valor principal de** $\dfrac{1}{x}$ por g', a qual é denotada por $\operatorname{v.p.}\dfrac{1}{x}$.

Além da soma e multiplicação por escalar, outras operações com distribuições são dadas abaixo.

Definição 2.4.5 (**Produto por uma função de classe** C^∞)**.** *Sejam* $f \in C^\infty(\Omega)$ *e* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$*. Então, definimos a distribuição* $fu : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *por*

$$\langle fu, \varphi\rangle = \langle u, f\varphi\rangle,\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Em geral, distribuições não são funções definidas ponto a ponto, logo, não faz sentido falar em derivadas parciais no sentido clássico. Entretanto, há uma maneira de definir a derivada no sentido das distribuições.

Definição 2.4.6 (**Derivação**)**.** *Se* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *e* $j = 1, 2, ..., n$ *definimos a* ***derivada*** *de* u *na direção* j *como a distribuição* $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ *dada por*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle,\ u \in \mathscr{D}'(\Omega),\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Notamos que a linearidade e a continuidade de $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ seguem da linearidade e da continuidade de u, logo temos que de fato $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Com essa definição, toda distribuição possui derivadas, no sentido das distribuições, de todas as ordens dada por

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \varphi\rangle,\ u \in \mathscr{D}'(\Omega),\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

A definição de derivada no sentido das distribuições é motivada pela fórmula de integração por partes: se $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, então

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)\,\mathrm{dt} = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt},$$

uma vez que φ se anula fora de um compacto. Notamos que isto também indica que, para funções suficientemente regulares, as derivadas (no sentido usual e das distribuições) coincidem.

Exemplo 2.4.7. *Consideremos a função de Heaviside* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$H(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } \ t > 0, \\ 0, \text{ se } \ t \leq 0. \end{cases}$$

Então $H' = \delta$*.*

De fato, notamos que $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Ainda, dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, temos

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt} = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\,\mathrm{dt} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

ou seja, a derivada no sentido das distribuições da função de Heaviside é a distribuição Delta de Dirac.

Podemos mostrar também que a Regra de Leibniz se mantém válida para a derivada parcial do produto de uma distribuição por uma função C^∞. De fato, se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, para $j = 1, \ldots, n$, então

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial (fu)}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle fu, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= -\left\langle u, f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= -\left\langle u, \frac{\partial (f\varphi)}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi \right\rangle \\
&= \left\langle f\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}u, \varphi \right\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, $\dfrac{\partial (fu)}{\partial x_j} = f\dfrac{\partial u}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f}{\partial x_j}u$ no sentido das distribuições.

Observação 2.4.8. *Se $(a, b) \subset \mathbb{R}$, e $u \in \mathscr{D}'((a, b))$ é tal que $u' = 0$, então $u =$ constante em (a, b).*

Neste trabalho, denotamos por P um **operador diferencial parcial linear de coeficientes constantes**, ou seja, uma aplicação $P : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ da forma

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u, \; u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),$$

com cada $a_\alpha \in \mathbb{C}$ constante, $m = 0, 1, 2, ...$ e $a_\alpha \neq 0$ para algum $n-$multi-índice α tal que $|\alpha| = m$. Nesse caso, dizemos que m é a **ordem** do operador P e definimos o **símbolo** e o **símbolo principal** de P como os polinômios $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ e $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \xi^\alpha$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, respectivamente. Para simplificar a escrita, escrevemos $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$.

Uma **solução fundamental de** P é uma distribuição $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $PE = \delta$. Do Exemplo 2.4.7 segue que a função de Heaviside H é uma solução fundamental do operador P definido em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ por $P = \dfrac{d}{dt}$. No Capítulo 4, mostraremos que todo operador diferencial parcial linear de coeficientes constantes não identicamente nulo tem uma solução fundamental.

Observação 2.4.9. *Se* $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ *é um operador diferencial com* $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, *então pelo exemplo acima:*

$$\begin{aligned}
\langle Pu, \varphi \rangle &= \left\langle \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha u, \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= \langle u, Q\varphi \rangle,
\end{aligned}$$

onde $Q = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (-\partial)^\alpha$.

Definição 2.4.10 (Translação). *Seja* $a \in \mathbb{R}^n$ *e definamos a translação de* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *por* a *como a função* $\varphi_a(x) = \varphi(x-a)$. *Dado* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, *a translação de* u *por* a *é dada por* $\langle u_a, \varphi \rangle = \langle u, \varphi_{-a} \rangle$.

Definição 2.4.11 (Reflexão). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto simétrico em relação a origem e definamos* $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. *Se* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, *então* $\langle \check{u}, \varphi \rangle = \langle u, \check{\varphi} \rangle$.

Passamos agora à definição de suporte de uma distribuição, com o objetivo de identificar o dual de $C^\infty(\Omega)$ com o subespaço das distribuições definidas em Ω que possuem suporte compacto.

Como uma distribuição não está definida ponto a ponto num conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definiremos agora uma maneira para dizer que duas distribuições coincidem em um conjunto aberto. Antes precisamos de uma observação preliminar.

Se U, Ω são abertos de $\mathbb{R}^n$ com $U \subset \Omega$ e $\varphi \in C_c^\infty(U)$, então a função $\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $\psi = \varphi$ em U e $\psi = 0$ em $\Omega \setminus U$ pertence a $C_c^\infty(\Omega)$. Nesse sentido, escrevemos $C_c^\infty(U) \subset C_c^\infty(\Omega)$ e $\mathscr{D}'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(U)$.

Definição 2.4.12. *Dizemos que duas distribuições* $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ ***são iguais num aberto*** $U \subset \Omega$ *quando* $\langle u_1, \varphi \rangle = \langle u_2, \varphi \rangle$, *para qualquer* $\varphi \in C_c^\infty(U)$.

Definição 2.4.13. *Se* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, *definimos o* ***suporte*** *de* u, *e usaremos a mesma notação de suporte de funções* $(supp(u))$, *como a interseção de todos os fechados de* Ω *fora dos quais* u *se anula.*

Observação 2.4.14. *Se* u *é uma função contínua em* Ω, *então* u *define uma distribuição como elemento de* $L^1_{loc}(\Omega)$. *Assim, temos duas definições para o suporte de* u : *como função e como distribuição. Vale ressaltar que ambas as definições coincidem quando* u *é uma aplicação contínua.*

Definição 2.4.15. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que u é C^∞ num aberto $U \subset \Omega$ quando existe uma função $f \in C^\infty(U)$ tal que $\langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, definimos o* ***suporte singular*** *de u, singsupp(u), como a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é C^∞.*

Não é difícil verificar que *singsupp*$(u) \subset$ *supp*(u), para qualquer $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e que *singsupp*$(\delta) =$ *supp*$(\delta) = \{0\}$.

Denotaremos por $\mathscr{E}'(\Omega)$ o subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.

Teorema 2.4.16. *Seja $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que:*

(i) $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi)$, *para todo* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$;

(ii) $\tilde{u}(\varphi) = 0$, *se* $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ *e supp*$(\varphi) \cap$ *supp*$(u) = \emptyset$.

Definição 2.4.17. *Diremos que uma sequência (φ_j) em $C^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ se, dados um compacto $K \subset \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $(\partial^\alpha \varphi_j)$ converge uniformemente para $\partial^\alpha \varphi$ em K, quando $j \longrightarrow \infty$.*

Notemos que se $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ em $C^\infty(\Omega)$.

Observação 2.4.18. *Um funcional linear contínuo em $C^\infty(\Omega)$ é uma aplicação $\Lambda : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ que cumpre:*

(i) $\Lambda(a\varphi + \psi) = a\Lambda(\varphi) + \Lambda(\psi)$, *para quaisquer* $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega)$, $a \in \mathbb{C}$;

(ii) Se $\varphi_j \longrightarrow 0$ *em* $C^\infty(\Omega)$, *então* $\Lambda(\varphi_j) \longrightarrow 0$, *quando* $j \longrightarrow \infty$.

O teorema, a seguir, caracteriza a continuidade dos funcionais lineares em $C^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.4.19. *Seja u um funcional linear em $C^\infty(\Omega)$. As condições, a seguir, são equivalentes:*

(i) u é contínuo;

(ii) Existem um compacto $K \subset \Omega$, uma constante $C > 0$ e um inteiro $m > 0$ tais que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \;\; \varphi \in C^\infty(\Omega). \tag{2.5}$$

A seguir, de modo semelhante ao Teorema 2.4.19, caracterizamos a continuidade dos funcionais lineares definidos em $C_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.4.20. *Seja u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) u é contínuo;

(ii) Para cada compacto $K \subset \Omega$, existem um inteiro positivo m e uma constante positiva C tais que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ supp(\varphi) \subset K. \tag{2.6}$$

O próximo resultado mostra que podemos identificar os funcionais lineares contínuos definidos em $C^\infty(\Omega)$ com o subespaço $\mathscr{E}'(\Omega)$.

Teorema 2.4.21. *Seja $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, ou seja, $supp(u)$ é compacto;

(ii) Existe um funcional linear contínuo v definido em $C^\infty(\Omega)$ tal que sua restrição a $C_c^\infty(\Omega)$ é igual a u.

Observação 2.4.22. *$C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C^\infty(\Omega)$.*

Com efeito, consideremos (K_j) uma sequência de compactos que exaurem Ω, isto é, $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \Omega$, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j = \Omega$, com cada K_j contido no interior de K_{j+1}, e uma sequência de funções teste (ψ_j) tais que $\psi_j = 1$ em K_j. Assim, se $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, basta tomar a sequência $(\varphi\psi_j)$. Neste caso, $\varphi\psi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\varphi\psi_j \longrightarrow \varphi$ em $C^\infty(\Omega)$.

Mais ainda, esta observação mostra que o funcional v do teorema acima é único, uma vez que se v_1, v_2 satisfazem (ii), então eles coincidem em um subespaço denso e, logo, são iguais.

Isto significa que se u é uma distribuição de suporte compacto, então existe um único funcional linear contínuo em $C^\infty(\Omega)$ que estende u. Assim, podemos identificar o espaço $\mathscr{E}'(\Omega)$ com o espaço dual de $C^\infty(\Omega)$.

Exemplo 2.4.23. *Se $K \subset \Omega$ é um compacto e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ é tal que $f = 0$ q.t.p. em $\Omega \setminus K$, então $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Reciprocamente, se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $supp(f) = K$, para algum compacto $K \subset \Omega$, então $f = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n \setminus K$.*

Definição 2.4.24. *Diremos que uma sequência (u_j) de distribuições converge para u em $\mathscr{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle u_j, \varphi \rangle)$ converge para $\langle u, \varphi \rangle$, para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

Exemplo 2.4.25. *Seja $u_j \longrightarrow u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$ então, a sequência das derivadas das distribuições u_j converge para a derivada da distribuição u.*

Com efeito, dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, segue que:

$$\left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u_j, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \longrightarrow -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle.$$

Exemplo 2.4.26. *Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $\varphi \geq 0$, supp$(\varphi) \subset B[0;1]$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{dx} = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, tomamos $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Então, segue que $\varphi_\varepsilon \longrightarrow \delta$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

De fato, dada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{dx} = \check{\psi}_\varepsilon(0) = \psi_\varepsilon(0) \longrightarrow \psi(0) = \langle \delta, \psi \rangle.$$

Exemplo 2.4.27. *$\mathscr{E}'(\Omega)$ é denso em $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

De fato, basta seguir a ideia da Observação 2.4.22 e adaptar ao caso desejado.

A convolução é uma ferramenta útil para regularizar distribuições. Veremos, agora, alguns resultados importantes sobre a convolução de uma distribuição e uma função e, também, sobre a convolução de duas distribuições, quando pelo menos uma delas tem suporte compacto.

Definição 2.4.28. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ (ou $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$) e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), denotaremos por $u * \varphi$ a função definida por $(u * \varphi)(a) = \langle u, \check{\varphi}_a \rangle$, $a \in \mathbb{R}^n$, onde $\check{\varphi}_a(x) = \varphi(a - x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.*

Notemos que $u * \varphi$ está bem definida e, no caso em que $u \in L^1_{loc}$, a definição acima está de acordo com a definição dada para a convolução de funções. O próximo exemplo significa que a distribuição Delta de Dirac desempenha o papel de "elemento neutro" para a convolução com funções teste.

Exemplo 2.4.29. *Consideremos a distribuição Delta de Dirac δ definida em $\mathbb{R}^n$. Para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e todo $a \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$(\delta * \varphi)(a) = \langle \delta, \varphi(a - x) \rangle = \varphi(a),$$

ou seja, $\delta * \varphi = \varphi$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

O próximo resultado significa que, no caso de funções de duas variáveis, derivadas com relação a uma delas comuta com a atuação das distribuições com relação a outra variável. O símbolo $\hat{u}(\xi) = \langle u_x, \varphi(x,\xi) \rangle, \xi \in \mathbb{R}^n$ salienta o fato de que a atuação da distribuição u ocorre na variável x enquanto que ξ está fixado. Análogo para $\langle u_x, \partial_\xi^\alpha \varphi(x,\xi) \rangle$.

Proposição 2.4.30. *Se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, então para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$:*

$$\partial_\xi^\alpha \langle u_x, \varphi(x,\xi) \rangle = \left\langle u_x, \partial_\xi^\alpha \varphi(x,\xi) \right\rangle.$$

Mostramos, agora, que a convolução com funções suaves regulariza uma distribuição.

Teorema 2.4.31. *Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então*

(i) $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e suas derivadas são dadas por

$$\partial^\alpha(u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi),\ \alpha \in \mathbb{N}^n;$$

(ii) $supp(u * \varphi) \subset supp(u) + supp(\varphi)$.

Vale ressaltar que o resultado acima pode ser provado no caso em que $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. O próximo resultado é útil para a regularização de distribuições.

Teorema 2.4.32. *Dados $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue que $(u*\varphi)*\psi = u*(\varphi*\psi)$.*

Como consequência, temos o seguinte resultado de aproximação de distribuições por funções suaves. Assim como no caso de funções integráveis, dada $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, consideramos a família de funções de classe C^∞ dada por $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon, \varepsilon > 0$, chamadas de **regularizadas de** u.

Teorema 2.4.33. *Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, então $u_\varepsilon \to u$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

Combinando o Exemplo 2.4.27 e o Teorema 2.4.33, temos

Corolário 2.4.34. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

O teorema abaixo é útil para definir a convolução de duas distribuições, quando pelo menos uma delas tem suporte compacto.

Teorema 2.4.35. *Seja $U : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ um operador linear contínuo que comuta com todas as translações T_h, $h \in \mathbb{R}^n$. Então, existe uma única distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $U\varphi = u * \varphi$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 2.4.36. *Sejam $u_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $u_2 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos $v = u_1 * u_2$ como a única distribuição v tal que $u_1 * (u_2 * \varphi) = v * \varphi$.*

Utilizando o Teorema 2.4.35, verifica-se que $u_1 * u_2$ está bem definida, quando pelo menos uma das distribuições u_1 ou u_2, tem suporte compacto. A distribuição δ é uma espécie de "elemento neutro" para a convolução de distribuições, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.4.37. *Para toda $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ segue que $u * \delta = \delta * u = u$.*

De fato, basta observar que

$$\langle u * \delta, \varphi \rangle = [(u * \delta) * \check{\varphi}]\,(0) = [u * (\delta * \check{\varphi})]\,(0) = (u * \check{\varphi})(0) = \langle u, \varphi \rangle,\ \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

isto é, $u * \delta = u$. Analogamente, podemos mostrar que $\delta * u = u$.

O suporte da convolução de distribuições tem comportamento similar ao suporte da convolução de funções.

Teorema 2.4.38. *Sejam $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Então, segue que $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$ e vale $supp(u_1 * u_2) \subset supp(u_1) + supp(u_2)$.*

Então, usando os resultados acima obtemos:

Exemplo 2.4.39. *Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

$$\partial^\alpha(u * \varphi) = u * (\partial^\alpha \varphi) = (u * \partial^\alpha \varphi) * \delta = u * (\varphi * \partial^\alpha \delta) = (u * \partial^\alpha \delta) * \varphi,$$

ou seja , $\partial^\alpha u = (\partial^\alpha \delta) * u$. Em particular, para $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$:

$$\partial^\alpha(u_1 * u_2) = \partial^\alpha \delta * (u_1 * u_2) = (\partial^\alpha \delta * u_1) * u_2 = \partial^\alpha u_1 * u_2 = u_1 * (u_2 * \partial^\alpha \delta) = u_1 * \partial^\alpha u_2.$$

2.5 Integração em espaços normados

Apresentaremos aqui alguns conceitos sobre integral de Riemann-Stieltjes em espaços de Banach. Esta seção se baseia no capítulo 2 de (KHATSKEVICH; SHOIYKHET, 2012). Aqui, o símbolo $\mathcal{B}$ sempre representará um espaço de Banach e $\|\cdot\|$ a norma correspondente. Nesta seção, $[a, b]$ denota um intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

Definição 2.5.1. *Uma função vetorial $y : [a, b] \to \mathcal{B}$ é dita de **variação limitada** se existe $M < \infty$, de modo que*

$$\sum_{i=1}^{m} \|y(b_i) - y(a_i)\| < M,$$

onde (a_i, b_i), $i \in \{1, \ldots, m\}$, são intervalos disjuntos de (a, b).

*Definimos ainda a **variação completa** de y em $[a, b]$, indicada por $Var[y]$, como sendo o supremo (em relação a todas as escolhas de intervalos possíveis) dessas somas.*

Observação 2.5.2. *Se y é uma função de variação limitada, então a função escalar $\varphi_{y^*}(t) = \langle y^*, y(t) \rangle$ também é de variação limitada, para todo $y^* \in \mathcal{B}^*$.*

De fato, isto é verdade já que para qualquer $y^* \in \mathcal{B}^*$, vale $|\langle y^*, y(t) \rangle| \leq \|y^*\|\|y(t)\|$, para todo t onde y está definida.

Lembremos que uma partição P do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos $\{a = \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_m = b\}$, onde $\sigma_j < \sigma_{j+1}$, para todo $j \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Definição 2.5.3. *Sejam* $y : [a, b] \to \mathcal{B}$, $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ *e* $P = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_m\}$ *uma partição de* $[a, b]$. *As expressões*

$$S_P(y, g) := \sum_{i=1}^{m} y(t_i)[g(\sigma_i) - g(\sigma_{i-1})]$$

e

$$s_P(y, g) = \sum_{i=1}^{m} g(t_i)[y(\sigma_i) - y(\sigma_{i-1})],$$

onde $\sigma_{i-1} \leq t_i \leq \sigma_i$, $i = 0, \ldots, m$, *são chamadas de* ***somas integrais de Riemann-Stieltjes***. *Denotaremos ainda* $|P| := \max\{\sigma_i - \sigma_{i-1}; 1 \leq i \leq m\}$.

Teorema 2.5.4. *Sejam* y, g *e* P *como na definição acima. Se um dos limites*

$$\lim_{|P| \to 0} S_P(y, g), \quad \lim_{|P| \to 0} s_P(y, g)$$

existe, então o outro também existe (consideramos aqui apenas a convergência na norma do espaço $\mathcal{B}$*).*

Estes limites são chamados de ***integrais de Riemann-Stieltjes*** *e denotados, respectivamente, por*

$$\int_a^b y(t) \, \mathrm{d}\, g(t) \quad \text{e} \quad \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}\, y(t).$$

Mais ainda, vale

$$\int_a^b y(t) \, \mathrm{d}\, g(t) = y(b)g(b) - y(a)g(a) - \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}\, y(t).$$

Demonstração. Basta observarmos que

$$S_P(y, g) = \sum_{i=1}^{m} y(t_i)[g(\sigma_i) - g(\sigma_{i-1})] = y(b)g(b) - y(a)g(a) - \sum_{i=0}^{m} g(\sigma_i)[y(t_{i+1}) - y(t_i)],$$

onde $t_{m+1} = b$ e $t_0 = a$. Assim, para cada partição $P = \{a = \sigma_0, \ldots, \sigma_m = b\}$, com os respectivos elementos $\sigma_{i-1} \leq t_i \leq \sigma_i$, $i = 1, \ldots, m$, podemos criar uma nova partição $P' = \{a = t_0, \ldots, t_{m+1} = b\}$, tal que se $|P| \longrightarrow 0$, então $|P'| \longrightarrow 0$. $\square$

Teorema 2.5.5. *Considerando* y, g *e* P *como no Teorema 2.5.4, suponhamos que* y *é contínua e* g *é de variação limitada. Então, ambas as integrais*

$$\int_a^b y(t) \, \mathrm{d}\, g(t) \quad \text{e} \quad \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}\, y(t),$$

existem (na topologia da norma de $\mathcal{B}$*). Ainda, se* $\mathcal{N}$ *é um espaço de Banach e* $A : \mathcal{B} \to \mathcal{N}$ *é um operador linear contínuo, então*

$$A\left(\int_a^b y(t) \, \mathrm{d}\, g(t)\right) = \int_a^b Ay(t) \, \mathrm{d}\, g(t)$$

e

$$A\left(\int_a^b g(t) \, \mathrm{d}\, y(t)\right) = \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}\, Ay(t).$$

Demonstração. Usando que y é contínua e g é de variação limitada, mostramos que a sequência das somas de Riemann-Stieltjes $(S_{P_j}(y,g))$, onde P_j é uma partição de $[a,b]$ e $|P_j| \longrightarrow 0$, é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}$.

Para mostrar o restante do teorema, basta observar que a aplicação $t \mapsto Ay(t)$ é contínua e usar a linearidade de A. □

Teorema 2.5.6. *Se $y : [a,b] \to \mathcal{B}$ é contínua e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, então*

$$\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}\,g(t) = \int_a^b y(t)g'(t)\,\mathrm{dt}\,. \tag{2.7}$$

Demonstração. Primeiramente, como $g \in C^1([a,b])$, segue que g é de variação limitada. Assim, a integral do lado esquerdo de (2.7) existe e, considerando, respectivamente, no lugar de y e g, yg' e $\mathrm{i_d}$, onde $\mathrm{i_d}$ é a função identidade em $[a,b]$, concluímos que a integral do lado direito de (2.7) também existe. Para mostrar a igualdade, usamos o Teorema do Valor Médio para ver que $S_P(y,g) = S_P(yg', i_d)$, assim basta tomar o limite $|P| \longrightarrow 0$.

□

Corolário 2.5.7. *Se y é como no Teorema acima e $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ é de classe C^1, então vale* (2.7)*.*

Demonstração. Com efeito, basta aplicarmos o Teorema acima às partes real e imaginária de g, ou seja, escrevendo $g = u + iv$, temos u, v de classe C^1 e, portanto:

$$\begin{aligned}
\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}\,g(t) &= \int_a^b y(t)\,\mathrm{d}[u(t) + iv(t)] \\
&= \int_a^b y(t)\,\mathrm{d}\,u(t) + i\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}\,v(t) \\
&= \int_a^b y(t)u'(t)\,\mathrm{dt} + i\int_a^b y(t)v'(t)\,\mathrm{dt} \\
&= \int_a^b y(t)g'(t)\,\mathrm{dt}\,.
\end{aligned}$$

□

3 Transformada de Fourier e os espaços $B_{p,k}$

A principal ferramenta que utilizaremos na demonstração de existência e regularidade de solução fundamental para operadores lineares de coeficientes constantes é a Transformada de Fourier. Nas duas primeiras seções deste capítulo abordaremos os resultados essenciais desta ferramenta. Na Seção 3.3, utilizamos a Transformada de Fourier para introduzir os espaços de Sobolev, que depois são generalizados para os espaços $B_{p,k}$ na Seção 3.4. As referências aqui são (HOUNIE, 1979), (FOLLAND, 1995), (HÖRMANDER, 2003) e (HÖRMANDER, 2005).

3.1 A Transformada de Fourier

Se $f \in L^1$ então a **Transformada de Fourier** de f é a função definida por:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{dx},\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

onde $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Vejamos que $\hat{f}$ é contínua. Dados $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ e uma sequência $\xi_k \longrightarrow \xi_0$, definindo $g_k(x) = e^{-ix\cdot\xi_k} f(x)$ e $g(x) = e^{-ix\cdot\xi_0} f(x)$, segue que $g_k \longrightarrow g$ pontualmente e, como $|g_k| \le |f|$, para todo $k \in \mathbb{N}$, pelo Teorema da Convergência Dominada (veja Teorema 2.2.18):

$$\hat{f}(\xi_k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi_k} f(x)\,\mathrm{dx} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi_0} f(x)\,\mathrm{dx} = \hat{f}(\xi_0)$$

Logo $\hat{f}$ é contínua em ξ_0.

Introduziremos agora um subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ fechado por derivação e multiplicação por polinômios, no qual a Transformada de Fourier é continuamente inversível.

Definição 3.1.1. *Denotaremos com $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de Schwartz, definido como subespaço vetorial das funções $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Escreveremos apenas $\mathscr{S}$ para nos referirmos a $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, quando ficar implícito a dimensão do espaço euclidiano.

Neste texto, por questões de simplicidade de notação, fixado $\alpha \in \mathbb{N}$, o símbolo x^α denota a função definida por $x \mapsto x^\alpha, x \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma sequência (φ_j) de elementos de $\mathscr{S}$ **converge para φ em $\mathscr{S}$** quando $x^\alpha\partial^\beta\varphi_j$ converge para $x^\alpha\partial^\beta\varphi$ uniformemente, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

$\mathscr{S}$ é conhecido como o espaço das funções de decaimento rápido no infinito. O resultado a seguir explica melhor este fato.

Lema 3.1.2. *Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então são equivalentes:*

(i) $\varphi \in \mathscr{S}$;

(ii) $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = 0$, *para quaisquer* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Denotaremos por $|\cdot|_M$ a norma do máximo em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $|x|_M = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$, para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Observamos também que $|x| \le n|x|_M$.

Agora, se $\varphi \in \mathscr{S}$, então dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, existe uma constante $M(\alpha, \beta) > 0$ tal que $|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \le M(\alpha, \beta)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se $|x|_M = |x_l|$, para algum $l \in \{1, \dots, n\}$, então tomando $\alpha' = \alpha + e_l$, temos $\dfrac{|x|}{n}|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \le |x^{\alpha'} \partial^\beta \varphi(x)| \le M(\alpha', \beta)$, e assim

$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \le \frac{nM(\alpha', \beta)}{|x|}, \ \ \forall\, x \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

donde, segue que $\lim\limits_{|x|\longrightarrow\infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim\limits_{|x|\longrightarrow\infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \longrightarrow 0$, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Então, existe $N > 0$ de modo que $|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < 1$, para todo $|x| > N$. Agora, uma vez que a função $x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)$ é contínua (é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$), existe $M_1(\alpha, \beta) > 0$ tal que $|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \le M_1(\alpha, \beta)$, se $|x| \le N$. Tomando $M(\alpha, \beta) = \max\{M_1(\alpha, \beta), N\}$, segue que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \le M(\alpha, \beta) < \infty$. $\square$

Exemplo 3.1.3. *Observamos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}$ e, se $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ em $\mathscr{S}$. Um exemplo de função que está em $\mathscr{S}$ mas não pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é a função dada por $f(x) = e^{-|x|^2}$. Logo, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}$ propriamente.*

Lema 3.1.4. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, existem constantes $A, B > 0$ tais que*

$$(1 + |\xi|^2)^k \le A \sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|^2 \le B(1 + |\xi|^2)^k, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja $\xi \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Observemos que, para $|\alpha| \le k$:

$$|\xi^\alpha| \le 1, \ \text{ se } \ |\xi| \le 1 \quad \text{e} \quad |\xi^\alpha| \le |\xi|^{|\alpha|} \le |\xi|^k, \ \text{ se } \ |\xi| \ge 1.$$

Assim, temos que $|\xi^\alpha|^2 \le \max\{1, |\xi|^{2k}\} = \max\{1, |\xi|^2\}^k$. Consequentemente,

$$\sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|^2 \le \sum_{|\alpha|\le k} \max\{1, |\xi|^{2k}\} = C_k \max\{1, |\xi|^2\}^k \le C_k(1 + |\xi|^2)^k,$$

onde $C_k = \sum\limits_{|\alpha|\le k} 1 > 0$.

Por outro lado, a função $\xi \mapsto \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^k|^2$ é contínua e definida positiva, portanto possui um mínimo $C_1 > 0$ em S^1. Desta forma temos, para $\xi \neq 0$:

$$C_1 \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\xi_j^k}{|\xi|^k} \right|^2 \Rightarrow |\xi|^{2k} \leq C_2 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^k|^2,$$

onde $C_2 = 1/C_1$.

Notando que $\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^k|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\xi^{ke_j}|^2 \leq \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2$, temos:

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|^2)^k &\leq 2^k \max\{1, |\xi|^{2k}\} \\
&\leq 2^k(1+|\xi|^{2k}) \\
&\leq 2^k \left(1 + C_2 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^k|^2\right) \\
&\leq 2^k C_3 \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2, \ \xi \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

onde $C_3 \geq 1 + C_2$. Portanto, tomando $C_k' = 2^k C_3$, segue que $(1+|\xi|^2)^k \leq C_k' \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Observação 3.1.5. *O espaço $\mathscr{S}$ é invariante por derivação e multiplicação por polinômios. Além disso $\mathscr{S} \subset L^1$.*

De fato, se $f \in \mathscr{S}$, temos que $\partial^\gamma f \in \mathscr{S}$, $\forall \gamma \in \mathbb{N}^n$, uma vez que, por definição:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta [\partial^\gamma f](x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^{\beta+\gamma} f(x)| < \infty, \ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Ainda, se P_α é um polinômio em $\mathbb{R}^n$ de ordem $|\alpha|$, segue que $P_\alpha f \in \mathscr{S}$, pois:

$$\partial^\beta [P_\alpha(x) f(x)] = \sum_{\gamma\leq\beta} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \partial^\gamma P_\alpha(x) \partial^{\beta-\gamma} f(x), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Finalmente, vejamos que $\mathscr{S} \subset L^1$. Observe que do Lema 3.1.4 segue que, para cada $k \in \mathbb{N}^n$, existe $C_k > 0$ tal que $(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \leq C_k \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, dada $\varphi \in \mathscr{S}$, resulta que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, \mathrm{dx} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|(1+|x|^2)^{\frac{-n-1}{2}} (1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}} | \, \mathrm{dx} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| C_{n+1} \sum_{|\alpha|\leq n+1} |x^\alpha| (1+|x|^2)^{\frac{-n-1}{2}} \, \mathrm{dx},
\end{aligned}$$

sendo $C = C_{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \varphi(x)|$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, \mathrm{dx} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{-n-1}{2}} \, \mathrm{dx}\,.$$

Pela Proposição 2.2.28 resulta que $\varphi \in L^1$.

Teorema 3.1.6 (HOUNIE, Teo. V.1.1, p. 74)**.** *A Transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é um operador linear contínuo e valem:*

$$\mathcal{F}[\partial^\alpha \varphi](\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi), \ \xi \in \mathbb{R}^n, \ \varphi \in \mathscr{S}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{F}[x^\alpha \varphi(x)](\xi) = (-i)^{-|\alpha|} \partial^\alpha \hat{\varphi}(\xi), \ \varphi \in \mathscr{S}. \tag{3.3}$$

Demonstração. A linearidade de $\mathcal{F}$ é clara. Fixe $\xi \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Como as funções em $\mathscr{S}$ são integráveis em $\mathbb{R}^n$, é permitido a derivação sob o sinal da integral (conforme Teorema 2.2.19), o que resulta:

$$\partial^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \partial^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) \, \mathrm{dx} \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha [e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x)] \, \mathrm{dx} = (-i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) \, \mathrm{dx}\,.$$

Isto prova (3.3).

Agora, como $\varphi \in \mathscr{S}$ e $\partial^\alpha \varphi \in \mathscr{S}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, segue que $\partial^\alpha \varphi \in L^1$ e isto permite usar o Teorema de Fubini (veja Teorema 2.4). Integrando $|\alpha|$ vezes:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \partial^\alpha \varphi(x) \, \mathrm{dx} = (i\xi)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) \, \mathrm{dx} = (i\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi).$$

Isto prova (3.2).

Combinando as fórmulas (3.2) e (3.3) temos:

$$\begin{aligned} \xi^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(\xi) &= \xi^\alpha (-i)^{-|\beta|} \mathcal{F}[x^\beta \varphi(x)](\xi) \\ &= (-i)^{-|\beta| - |\alpha|} (i\xi)^\alpha \mathcal{F}[x^\beta \varphi(x)](\xi) \\ &= (-i)^{-|\beta| - |\alpha|} \mathcal{F}[\partial^\alpha (x^\beta \varphi(x)](\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Disto, segue:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(\xi)| \leq \|\partial^\alpha (x^\beta \varphi(x))\|_1 < \infty, \ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \varphi \in \mathscr{S}.$$

Consequentemente $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}$.

Finalmente, seja (φ_j) uma sequência em $\mathscr{S}$ tal que $\varphi_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}$, ou seja, $x^\alpha \partial^\beta \varphi \longrightarrow 0$ uniformemente, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Então, temos, pelo Lema 3.1.4;

$$
\begin{aligned}
|\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}_j(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (x^\beta \varphi_j(x)| \,\mathrm{dx} \\
&\leq C. \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (x^\beta \varphi_j(x))|(1+|x|^2)^{n+1}] \\
&\leq C. \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\gamma \leq \min\{\alpha,\beta\}} \sum_{|\theta|\leq n+1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} |x^{\beta-\gamma}\partial^\gamma \varphi_j(x)||x^\theta|^2 \right] \\
&\leq C. \sum_{\gamma \leq \min\{\alpha,\beta\}} \sum_{|\theta|\leq n+1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\beta-\gamma+2\theta}\partial^\gamma \varphi_j(x)|,
\end{aligned}
$$

onde $|x^{\beta-\gamma+2\theta}\varphi_j| \longrightarrow 0$ uniformemente por hipótese. Consequentemente $\hat{\varphi}_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}$. □

Corolário 3.1.7 (HOUNIE, Cor. V.1.1, p. 75)**. *(Lema de Riemann-Lebesgue):*** *Se $f \in L^1$, então $\hat{f}(\xi) \longrightarrow 0$ quando $|\xi| \longrightarrow \infty$.*

Demonstração. Para cada $N \in \mathbb{N}$, defina $f_N(x) = f(x)$, *se* $|x| < N$ e $f_N(x) = 0$, se $|x| \geq N$. Desta forma, temos que $|f_N| \leq |f|$, e consequentemente, $f_N \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Como $f_N \longrightarrow f$ pontualmente, o Teorema da Convergência Dominada implica em $f_N \longrightarrow f$ em L^1.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, existe (pelo Teorema 2.3.6) $(\psi_k^N) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi_k^N \longrightarrow f_N$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$, quando $k \longrightarrow \infty$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_k^N(x) - f_N(x)| \,\mathrm{dx} < \varepsilon.$$

Logo,

$$|\mathcal{F}\psi_k^N(\xi) - \mathcal{F}f_N(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_k^N(x) - f_N(x)| \,\mathrm{dx} < \varepsilon,\ \forall\ k \geq k_0,\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Com isso, $\mathcal{F}\psi_k^N \longrightarrow \mathcal{F}f_N$ uniformemente, quando $k \longrightarrow \infty$.

Pelo Exemplo 3.1.3, temos $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}$, assim segue que $\mathcal{F}\psi_k^N(\xi) \longrightarrow 0$ quando $|\xi| \longrightarrow \infty$, para quaisquer $k, N \in \mathbb{N}$. Desta forma, dado $\rho > 0$, tomando $k \in \mathbb{N}$ e $A > 0$ adequados, temos

$$|\mathcal{F}f_N(\xi)| \leq |\mathcal{F}f_N(\xi) - \mathcal{F}\psi_k^N(\xi)| + |\mathcal{F}\psi_k^N(\xi)| < \rho,\ \text{ se } |\xi| > A.$$

Assim, $\mathcal{F}f_N(\xi) \longrightarrow 0$, quando $|\xi| \longrightarrow \infty$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Finalmente, basta ver que $\mathcal{F}f_N \longrightarrow \hat{f}$ uniformemente. Mas isso é consequência do fato de f_N convergir para f em L^1, uma vez que

$$|\mathcal{F}f_N(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_N(x) - f(x)| \,\mathrm{dx},\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, $\hat{f}(\xi) \longrightarrow 0$, quando $|\xi| \longrightarrow \infty$. □

Exemplo 3.1.8. *Se* $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R},$ *então* $\hat{\varphi}(\xi) = \sqrt{2\pi}\varphi(\xi), \xi \in \mathbb{R}$.

Para calcular $\hat{\varphi}$, usaremos um método indireto. Primeiro, note que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ e satisfaz o *P.V.I.* $\varphi'(x) + x\varphi(x) = 0,\ \varphi(0) = 1$. Aplicando $\mathcal{F}$ nesta equação, obtemos, pelo Teorema 3.1.6,

$$0 = \mathcal{F}[\varphi'(x) + x\varphi(x)] = \mathcal{F}\left[\frac{d\varphi}{dx}(x)\right] + \mathcal{F}[x\varphi(x)] = i\xi\hat{\varphi}(\xi) - i^{-1}\frac{d\hat{\varphi}}{d\xi}(\xi).$$

Ou seja, $\hat{\varphi}$ satisfaz a mesma equação que φ. Desta forma, como a solução do *P.V.I.* é única, segue que

$$\hat{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi).\hat{\varphi}(0) \ \Rightarrow \hat{\varphi}(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{dx} = \sqrt{2\pi}e^{\frac{-\xi^2}{2}},\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se $\psi(x) = e^{\frac{-|x|^2}{2}}$, onde $x \in \mathbb{R}^n$, temos que $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e, usando o Teorema de Fubini, segue que:

$$\hat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\psi(x)\,\mathrm{dx} = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1}e^{\frac{-x_1{}^2}{2}}\,\mathrm{dx}_1\right)\ldots\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_n\xi_n}e^{\frac{-x_n{}^2}{2}}\,\mathrm{dx}_n\right).$$

Como cada expressão entre parênteses é exatamente a Transformada de Fourier de φ concluímos que

$$\hat{\psi}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{\frac{-\xi_1{}^2}{2}}\ldots\sqrt{2\pi}e^{\frac{-\xi_n{}^2}{2}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}e^{\frac{-|\xi|^2}{2}},\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 3.1.9 (HOUNIE, Teo. V.1.2, p. 77)**.** *A Transformada de Fourier* $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ *é continuamente inversível, sendo* $\mathcal{F}^{-1}$ *dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi \in \mathscr{S}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Observemos que não é possível trocar a ordem de integração em (3.4). De fato, se tomarmos $\varphi = \hat{\psi}$, segue que

$$\psi(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}\psi(y)\,\mathrm{dy}\right]\mathrm{d}\xi$$

e, se $x = y$ por exemplo, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}|\,\mathrm{d}\xi = \infty$$

Sendo assim, usaremos funções auxiliares e o Teorema da Convergência Dominada para mostrar que vale (3.4), para toda $\varphi \in \mathscr{S}$.

Definimos então, para cada $0 < \epsilon < 1$, $\varphi_\epsilon(x) = \varphi_1(\epsilon x)$, onde $\varphi_1(x) = e^{\frac{-|x|^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Pelo Exemplo 3.1.8, temos que $\hat{\varphi}_1(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-|\xi|^2}{2}}, \xi \in \mathbb{R}^n$. Desta forma, fazendo a mudança de variável $x \to \dfrac{x}{\epsilon}$ segue:

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{x}{\varepsilon}\cdot\xi}\varphi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}\,\mathrm{dx} \\
&= \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\frac{\xi}{\varepsilon}}\varphi_1(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \varepsilon^{-n}\hat{\varphi}_1\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) \\
&= \varepsilon^{-n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\varphi_1\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right),\ \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Então

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\varphi_1\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right),\ \xi \in \mathbb{R}^n \ \text{ e } \ 0 < \varepsilon < 1. \tag{3.5}$$

Observamos ainda que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\epsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-\frac{\epsilon^2|x|^2}{2}} = 1. \tag{3.6}$$

Ainda, dada $\psi \in \mathscr{S}$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \le \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Pelo Teorema de Fubini e por (3.5)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}\psi(y)\,\mathrm{dy}\right]\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}\varphi_\varepsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{dy} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)\hat{\varphi}_\varepsilon(y-x)\,\mathrm{dy} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\psi(y+x)\hat{\varphi}_\varepsilon(y)\,\mathrm{dy} \\
&= \varepsilon^{-n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(y+x)\varphi_1\left(\frac{y}{\epsilon}\right)\mathrm{dy} \\
&= \varepsilon^{-n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(\varepsilon z+x)\varphi_1(z)\epsilon^n\,\mathrm{dz},\ x \in \mathbb{R}^n \ \text{ e } \ 0 < \varepsilon < 1.
\end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(\varepsilon z+x)\varphi_1(z)\,\mathrm{dz},\ x \in \mathbb{R}^n \ \text{ e } \ 0 < \varepsilon < 1. \tag{3.8}$$

Agora, devido a (3.7), podemos usar o Teorema da Convergência Dominada e obter com isso:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(\xi)e^{ix\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{3.9}$$

Ainda, por (3.7), e observando que $\psi(\varepsilon z + x) \longrightarrow \psi(x)$, segue que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\varepsilon z + x)\varphi_1(z)\,\mathrm{dz} = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi_1(z)\,\mathrm{dz} = \psi(x)(2\pi)^{\frac{n}{2}}. \tag{3.10}$$

Comparando (3.9) e (3.10), temos $\psi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\hat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\ \hat{\psi} \in \mathscr{S}$.

A prova da continuidade de $\mathcal{F}^{-1}$ é análoga à prova da continuidade de $\mathcal{F}$ apresentada no Teorema 3.1.6 e por isso será omitida. □

Teorema 3.1.10 (HOUNIE, Teo. V.1.3, p. 78)**.** *Se $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$, então:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)\psi(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\hat{\psi}(x)\,\mathrm{dx}, \tag{3.11}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\overline{\psi(x)}\,\mathrm{dx} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)\overline{\hat{\psi}(x)}\,\mathrm{dx}, \tag{3.12}$$

$$\mathcal{F}[\varphi * \psi] = \hat{\varphi}\hat{\psi} \tag{3.13}$$

e

$$\mathcal{F}[\varphi\psi] = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}. \tag{3.14}$$

Demonstração. Usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\,\mathrm{dx}\right]\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\psi(\xi)\varphi(x)d\xi\right]\mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\psi(\xi)d\xi\right]\varphi(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx},
\end{aligned}$$

o que prova (3.11).

Agora, tomando $\alpha = \varphi$, $\overline{\beta} = \hat{\psi}$ e usando (3.11), vemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x)\overline{\beta}(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\hat{\psi}(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)\psi(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\alpha}(x)\mathcal{F}^{-1}\overline{\beta}(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Observando que $\mathcal{F}^{-1}\overline{\beta}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x}\overline{\beta}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-n}\overline{\hat{\beta}(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x)\overline{\beta(x)}\,\mathrm{dx} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\alpha}(x)\overline{\hat{\beta}(x)}\,\mathrm{dx},$$

o que prova (3.12).

Para provar (3.13), observamos que $\varphi * \psi \in L^1$ devido a $\varphi, \psi \in \mathscr{S} \subset L^1$ e à Desigualdade de Young (veja Teorema 2.2.27). Podemos então usar o Teorema de Fubini e, através da mudança de variável $x - y = w$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\varphi * \psi](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x-y)\,\mathrm{dx} \right] \mathrm{dy} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(w+y)\cdot\xi} \varphi(w)\,\mathrm{dw} \right] \mathrm{dy} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) e^{-iy\cdot\xi} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw\cdot\xi} \varphi(w)\,\mathrm{dw} \right] \mathrm{dy} \\
&= \hat{\varphi}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi} \psi(y)\,\mathrm{dy} \\
&= \hat{\varphi}(\xi)\hat{\psi}(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Isso prova (3.13).

Finalmente, pelo Teorema 3.1.9, segue que

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-n} \hat{\varphi}(-x), x \in \mathbb{R}^n.$$

Desta forma, usando (3.13), temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\varphi(x)\mathcal{F}^{-1}\psi(x) &= (2\pi)^{-n}(2\pi)^{-n}\mathcal{F}[\varphi * \psi](-x) \\
&= (2\pi)^{-n}\mathcal{F}^{-1}[\varphi * \psi](x), x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{F}[\varphi\psi] = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}$, provando assim (3.14). □

3.2 O Espaço das Distribuições Temperadas

Nesta seção, descreveremos um subespaço das distribuições no qual é possível definir a Transformada de Fourier.

Definição 3.2.1. *Um funcional linear contínuo em $\mathscr{S}$ é uma aplicação $\Lambda : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ que cumpre:*

(i) $\Lambda(a\varphi + \psi) = a\Lambda(\varphi) + \Lambda(\psi)$, *para quaisquer* $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$ *e* $a \in \mathbb{C}$;

(ii) Se $\varphi_j \longrightarrow 0$ *em* $\mathscr{S}$, *então* $\Lambda(\varphi_j) \longrightarrow 0$, *quando* $j \longrightarrow \infty$.

Uma ***distribuição temperada*** *é um funcional linear contínuo em $\mathscr{S}$. O espaço vetorial complexo formado por tais funcionais é denotado por $\mathscr{S}'$ e usaremos a notação $u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$, para $u \in \mathscr{S}'$, $\varphi \in \mathscr{S}$.*

Observação 3.2.2. *$\mathscr{S}'$ pode ser identificado com um subespaço de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

De fato, primeiramente temos que se $f \in \mathscr{S}'$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então o número $\langle f, \varphi \rangle$ está bem definido, já que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}$.

Desta forma, se $f \in \mathscr{S}'$ e $(\psi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\psi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tomando $g : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, de modo que $\langle g, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue que $\langle g, \psi_j\rangle \longrightarrow 0$. Logo, temos que $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Assim, todo elemento de $\mathscr{S}'$ pode ser visto como um elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Ainda, se $(f_j) \subset \mathscr{S}'$ converge para $f \in \mathscr{S}'$, temos que $\langle f_j, \varphi\rangle \longrightarrow \langle f, \varphi\rangle$, para toda $\varphi \in \mathscr{S}$ e, em particular, $\langle f_j, \varphi\rangle \longrightarrow \langle f, \varphi\rangle$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, $f_j \longrightarrow f$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, isto é, a convergência em $\mathscr{S}'$ implica na convergência em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Observação 3.2.3. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{S}$.*

Com efeito, dada $\varphi \in \mathscr{S}$, tomemos $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de modo que $\psi = 1$ em B[0;1] e $0 \leq \psi \leq 1$. Segue que $\psi\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi\varphi = \varphi$ em B[0;1]. Definamos, para cada $\varepsilon > 0$, $\psi_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Com isso, temos $\psi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi_\varepsilon = 1$ em B[0;1/ε] e $\psi_\varepsilon(x) \longrightarrow 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Resta vermos que $\varphi\psi_\varepsilon \longrightarrow \varphi$ em $\mathscr{S}$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Fixemos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ e observemos que, para cada $\gamma \leq \beta$, $\partial^\gamma \psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{|\gamma|}\partial^\gamma \psi(\varepsilon x)$. Tomando $C(\psi, \beta) := \max\limits_{\gamma\leq\beta} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\gamma \psi(x)|$, temos, para $0 < \varepsilon < 1$:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta[\psi_\varepsilon(x)\varphi(x) - \varphi(x)]| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\gamma\leq\beta} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} |x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)\partial^\gamma\psi_\varepsilon(x)| + |x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)|\right] \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\gamma\leq\beta} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} |x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)\varepsilon^{|\gamma|}\partial^\gamma\psi(\varepsilon x)| + |x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)|\right] \\
&\leq C(\psi,\beta)\varepsilon \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\gamma\leq\beta} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} |x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)| + |x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)|\right] \\
&\leq C'\varepsilon,
\end{aligned}$$

onde

$$C' = C(\psi,\beta)\left[\sum_{\gamma\leq\beta} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)|\right] > 0$$

não depende de ε.

Logo, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha\partial^\beta[\psi_\varepsilon(x)\varphi(x) - \varphi(x)]| \longrightarrow 0$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, como queríamos demonstrar.

Teorema 3.2.4 (HOUNIE, Teo. V.1.4, p. 80)**.** *Seja u um funcional linear em $\mathscr{S}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $u \in \mathscr{S}'$;

(ii) Existem inteiros positivos m, M tais que:

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq M \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^m \partial^\alpha\varphi(x)|, \ \varphi \in \mathscr{S}, \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Demonstração. (i)$\Rightarrow$(ii). Assumimos que u é contínuo e provaremos (ii) por absurdo. Suponhamos que para quaisquer $j, l \in \mathbb{Z}$ positivos, exista $\varphi_{j,l} \in \mathscr{S}$ tal que:

$$|\langle u, \varphi_{j,l}\rangle| > j \sum_{|\alpha|\leq l} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^l \partial^\alpha \varphi_{j,l}(x)|, \ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Assim, tomando $r_j = |\langle u, \varphi_{j,j}\rangle| > j \sum_{|\alpha|\leq j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^j \partial^\alpha \varphi_{j,j}(x)|$ e definindo $\psi_j = \varphi_{j,j}/r_j$, para cada $j \in \mathbb{N}$, segue que:

$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial^\beta \psi_j(x)| &= |x^\alpha||\partial^\beta \psi_j(x)| \\ &\leq \frac{(1+|x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}}{r_j} |\partial^\beta \varphi_{j,j}(x)| \\ &\leq \frac{(1+|x|^2)^j}{r_j} |\partial^\beta \varphi_{j,j}(x)| \\ &\leq \sum_{|\beta|\leq j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\frac{(1+|x|^2)^j}{r_j} \partial^\beta \varphi_{j,j}(x)| \\ &< \frac{1}{j}, \end{aligned}$$

para $j > \frac{|\alpha|}{2} + |\beta|$. Logo, $\psi_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}$. Por outro lado, $|\langle u, \psi_j\rangle| = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$, o que contraria a continuidade de u. Consequentemente, vale (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i). Seja $(\varphi_j) \subset \mathscr{S}$ tal que $\varphi_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}$, ou seja, $|x^\alpha \partial^\beta \varphi_j| \longrightarrow 0$ uniformemente, quando $j \longrightarrow \infty$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Ora, para cada $k \in \mathbb{Z}$ positivo existe $C_k > 0$ de modo que $(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \leq C_k \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|, \ x \in \mathbb{R}^n$. Consequentemente,

$$(1+|x|^2)^i |\partial^\beta \varphi_j(x)| \leq C_{2i} \sum_{|\alpha|\leq 2i} |x^\alpha \partial^\beta \varphi_j(x)|,$$

para todo inteiro i positivo. Agora, uma vez que o lado direito da desigualdade acima converge a zero uniformemente, temos que:

$$M \sum_{|\beta|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^m \partial^\beta \varphi_j(x)| \longrightarrow 0.$$

Desta forma, como assumimos que vale (ii), segue que $|\langle u, \varphi_j\rangle| \longrightarrow 0$, provando (i). □

Exemplo 3.2.5. *$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado com um subespaço de $\mathscr{S}'$.*

De fato, sabemos que $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado com um funcional linear contínuo definido em C^∞, através de $\langle \tilde{u}, \varphi\rangle = \langle u, \psi\varphi\rangle$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, onde $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\psi = 1$ numa vizinhança do suporte de u. Desta forma, basta tomar a restrição de $\tilde{u}$ a $\mathscr{S}$, uma vez que a convergência em $\mathscr{S}$ implica na convergência em C^∞.

Outro exemplo de distribuição temperada é uma medida de Borel μ localmente finita (finita em compactos) e tal que $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{-m}\,\mathrm{d}\mu < \infty$, para algum inteiro positivo m. Com efeito, sejam μ uma tal medida e $\varphi \in \mathscr{S}$ qualquer. Então, pelo Lema 3.1.4, existe uma constante $C_m > 0$ de modo que $|\varphi(x)|(1+|x|^2)^m \leq C_m$, $x \in \mathbb{R}^n$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}\mu \leq C_m \int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{-m}\,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Ainda, se $\varphi_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}$, então $|(1+|\cdot|^2)^m\varphi_j| \longrightarrow 0$ uniformemente quando $j \longrightarrow \infty$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x)|\,\mathrm{d}\mu &= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m|\varphi_j(x)|(1+|x|^2)^{-m}\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^m\varphi_j(x)| \int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{-m}\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq C_j,
\end{aligned}$$

onde $C_j \longrightarrow 0$, quando $j \longrightarrow \infty$. Portanto, $\langle \mu, \varphi_j\rangle \longrightarrow 0$, quando $j \longrightarrow \infty$.

Mais geralmente, temos o próximo exemplo.

Exemplo 3.2.6. *Se $f \in L^1_{loc}$ é tal que*

$$|f(x)| \leq A(1+|x|)^B, \text{ quando } |x| > C, \tag{3.15}$$

para certas constantes $A, B, C > 0$, então f pode ser identificada com um elemento de $\mathscr{S}'$, definido da mesma maneira como no Exemplo 2.4.2.

De fato, seja f uma função satisfazendo (3.15) e $\varphi \in \mathscr{S}$ qualquer. Segue que:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}\right| &\leq \int_{|x|>C}|f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{dx} + \int_{|x|<C}|f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{dx} \\
&\leq A\int_{|x|>C}(1+|x|)^B|\varphi(x)|\,\mathrm{dx} + M\int_{|x|<C}|f(x)|\,\mathrm{dx} \\
&\leq A_1\int_{|x|>C}(1+|x|)^{-n-1}\,\mathrm{dx} + M_1 \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

pela Proposição 2.2.28, o que prova que $T_f : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$, dada por $\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}$, está bem definida. Ainda, se $\varphi_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}$, segue que $(1+|\cdot|)^{B+n+1}|\varphi_j| \longrightarrow 0$ uniformemente quando $j \longrightarrow \infty$. Com isso temos:

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \varphi_j\rangle| &\leq A\int_{|x|>C}(1+|x|)^B|\varphi_j(x)|\,\mathrm{dx} + \int_{|x|<C}|f(x)\varphi_j(x)|\,\mathrm{dx} \\
&\leq A.\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{B+n+1}|\varphi_j(x)|\int_{|x|>C}(1+|x|)^{-n-1}\,\mathrm{dx} + M_j \\
&= c_j + M_j,
\end{aligned}$$

onde $c_j + M_j \longrightarrow 0$, quando $j \longrightarrow \infty$. Logo, $T_f \in \mathscr{S}'$.

A condição $|f(x)| \leq A(1+|x|)^B,\ |x| > C$, significa que f "cresce lentamente" no infinito. Esta condição, porém, não é necessária para que uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^n$ possa ser identificada com uma distribuição temperada através da definição acima. Um exemplo disso, em $\mathbb{R}$, é a função $f(x) = e^x cos(e^x), x \in \mathbb{R}$. Como f é contínua, temos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e o fator e^x faz com que a função não seja dominada por polinômio algum. Por outro lado, dada $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, usando integração por partes, temos que:

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi\rangle| &= |\int_{\mathbb{R}} e^x cos(e^x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}\,| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi'(x) sen(e^x)|\,\mathrm{dx} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)|\,\mathrm{dx} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

uma vez que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ implica em $\varphi' \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. E ainda, se $\varphi_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, então $(1+x^2)\varphi' \longrightarrow 0$ uniformemente. Logo, $\langle T_f, \varphi_j\rangle \longrightarrow 0$, quando $j \longrightarrow \infty$ e assim $T_f \in \mathscr{S}'$.

Definimos abaixo a Transformada de Fourier de uma distribuição temperada.

Definição 3.2.7. *Se $u \in \mathscr{S}'$, então a* ***Transformada de Fourier*** *$\hat{u}$ de u é definida por $\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle,\ \varphi \in \mathscr{S}$.*

Note que $\hat{u}$ está bem definida, pois o operador $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ é contínuo. Agora, suponha que $(u_j) \subset \mathscr{S}'$ seja tal que $u_j \longrightarrow u$ em $\mathscr{S}'$, isto é, $\langle u_j, \varphi\rangle \longrightarrow \langle u, \varphi\rangle$ para toda $\varphi \in \mathscr{S}$. Temos que:

$$\langle \hat{u_j}, \varphi\rangle = \langle u_j, \hat{\varphi}\rangle \longrightarrow \langle u, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{u}, \varphi\rangle.$$

Consequentemente, a Transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ é contínua.

Ainda, utilizando o Teorema 3.1.9, para $u \in \mathscr{S}'$, segue que $\mathcal{F}^{-1}u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$, dada por $\langle \mathcal{F}^{-1}u, \varphi\rangle = \langle u, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle$, está bem definida e $\langle \mathcal{F}^{-1}\hat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle$, para toda $\varphi \in \mathscr{S}$. Logo, $\mathcal{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ é continuamente inversível.

Calculemos a Transformada de Fourier da distribuição delta de Dirac.

Exemplo 3.2.8. *Se δ é a distribuição Delta de Dirac então $\hat{\delta} = 1$.*

De fato, dada $\varphi \in \mathscr{S}$, temos que:

$$\langle \hat{\delta}, \varphi\rangle = \langle \delta, \hat{\varphi}\rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{dx} =< 1, \varphi\rangle.$$

Logo, $\hat{\delta}$ é a função constante igual a 1.

Observe que toda função de $\mathscr{S}$ cumpre as condições do Exemplo 3.2.6, logo, cada elemento de $\mathscr{S}$ define uma distribuição temperada. Faremos um abuso de notação utilizando $\mathcal{F}$ sem distinção para representar o operador Transformada de Fourier, tanto definido em $\mathscr{S}$ quanto em $\mathscr{S}'$. Mostraremos que ambas as definições coincidem.

No próximo resultado, o símbolo $\hat{u}(\xi) = \langle u_x, e^{-ix\cdot\xi}\rangle$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ salienta o fato de que a atuação da distribuição u ocorre na variável x enquanto que ξ está fixado.

Teorema 3.2.9 (HOUNIE, Teo. V.2.1, p. 81)**.** *A Transformada de Fourier em $\mathscr{S}'$ goza das seguintes propriedades:*

(i) Se $f \in L^1$, então a Transformada de Fourier de f como distribuição temperada coincide com a Transformada de Fourier de f dada por (3.1)*;*

(ii) Se $f \in L^2$, então $\hat{f} \in L^2$ e $\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n}\|\hat{f}\|_2^2$;

(iii) Se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{u}$ é uma função $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, definida por $\hat{u}(\xi) = \langle u_x, e^{-ix\cdot\xi}\rangle$, $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(iv) Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $u \in \mathscr{S}'$, então $(\partial^\alpha u)\hat{} = (i\xi)^\alpha \hat{u}$, $(x^\alpha u)\hat{} = (-i)^{-|\alpha|}\partial_\xi^\alpha \hat{u}$, $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. (i) Se $f \in \mathscr{S}$, então suas Transformadas de Fourier, como distribuição e função, coincidem, uma vez que

$$\langle \hat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx},\ \ \varphi \in \mathscr{S},$$

em virtude do Teorema 3.1.10. Agora, seja $f \in L^1$ e tomemos uma sequência $(\psi_j) \subset \mathscr{S}$ tal que $\psi_j \longrightarrow f$ em L^1. Com isso, $\hat{\psi}_j \longrightarrow \hat{f}$ em L^1. Logo, para $\varphi \in \mathscr{S}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}_j(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_j(x)\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Portanto, $\langle \hat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}\,.$

(ii) Sejam $f \in L^2$ e $(\psi_j) \subset \mathscr{S}$ tais que $\psi_j \longrightarrow f$ em L^2. Então, do Teorema 3.1.10, segue que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}_j(x) - \hat{\psi}_k(x)|^2\,\mathrm{dx} &= \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{\psi}_j(x) - \hat{\psi}_k(x))\overline{(\hat{\psi}_j(x) - \hat{\psi}_k(x))}\,\mathrm{dx} \\
&= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} (\psi_j(x) - \psi_k(x))\overline{(\psi_j(x) - \psi_k(x))}\,\mathrm{dx} \\
&= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_j(x) - \psi_k(x)|^2\,\mathrm{dx}\,.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\|\hat{\psi}_j - \hat{\psi}_k\|_2^2 = (2\pi)^n\|\psi_j - \psi_k\|_2^2$. Como a sequência $(\psi_j) \subset L^2$ converge, esta é uma sequência de Cauchy. Logo, temos que $(\hat{\psi}_j) \subset L^2$ também é uma sequência de Cauchy e, por L^2 ser um espaço de Banach, $\hat{\psi}_j$ converge para alguma função g em L^2.

Pela Desigualdade de Hölder, temos que $\|(\psi_j - f)\varphi\|_1 \leq \|\psi_j - f\|_2\|\varphi\|_2 \longrightarrow 0$, logo, $\psi_j\varphi \longrightarrow f\varphi$ em L^1, para qualquer $\varphi \in \mathscr{S}$. Com isto, temos

$$\langle \hat{f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_j(x)\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} = \langle g, \varphi\rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathscr{S}$, ou seja, $\hat{f} = g \in L^2$.

Finalmente,

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \lim_{j\to\infty} \|\hat{\psi}_j\|_2^2 = (2\pi)^n \lim_{j\to\infty} \|\psi_j\|_2^2 = (2\pi)^n \|f\|_2^2.$$

(iii) Sejam $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \varphi$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{dx} = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, definamos $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon), x \in \mathbb{R}^n$ e tomemos $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$. Com isto, temos que $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, pelo Teorema 2.4.33, segue que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ em $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Em particular, $u_\varepsilon \longrightarrow u$ em $\mathscr{S}'$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Então, segue que $\hat{u_\varepsilon} \longrightarrow \hat{u}$ em $\mathscr{S}'$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Como $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que $\hat{u_\varepsilon} \in \mathscr{S} \subset L^1$, para todo $\varepsilon > 0$. Por (i), a Transformada de Fourier de u_ε como função coincide com sua Transformada de Fourier como distribuição, assim:

$$\hat{u_\varepsilon}(\xi) = \langle (u * \varphi_\varepsilon)_x, e^{-ix\cdot\xi}\rangle = \left[(u * \varphi_\varepsilon) * e^{ix\cdot\xi}\right](0) = \langle u_x, (\varphi_\varepsilon * e^{ix\cdot\xi})\check{}\,\rangle = \langle u_x, \check{\varphi}_\varepsilon * e^{-ix\cdot\xi}\rangle.$$

Observando que $\check{\varphi}_\varepsilon * e^{-ix\cdot\xi} = e^{-ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\varepsilon\xi)$, temos $\hat{u_\varepsilon}(\xi) = \langle u_x, \hat{\varphi}(\varepsilon\xi)e^{-ix\cdot\xi}\rangle$. Ainda, como $\hat{\varphi}_\varepsilon$ converge (em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$) para a função constante 1, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, segue que $\hat{u_\varepsilon}(\xi) \longrightarrow \langle u_x, e^{-ix\cdot\xi}\rangle = \hat{u}(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Pela Proposição 2.4.30, segue que $\partial^\alpha \hat{u}(\xi) = \langle u_x, \partial_\xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\rangle$, e assim $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iv) Seja $u \in \mathscr{S}'$ arbitrária. Pela definição 3.2.7 e pelo Teorema 3.1.6 segue, para quaisquer $\varphi \in \mathscr{S}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, que:

$$\langle (\partial^\alpha u)\hat{}\,, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \hat{\varphi}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, (-i)^{|\alpha|}(\xi^\alpha\varphi)\hat{}\,\rangle,$$

logo, $(\partial^\alpha u)\hat{}\, = (i\xi)^\alpha \hat{u}$.

Ainda,

$$\langle (x^\alpha u)\hat{}_\xi, \varphi(\xi)\rangle = \langle u, x^\alpha\hat{\varphi}\rangle = \langle u, i^{-|\alpha|}(\partial_\xi^\alpha\varphi)\hat{}(x)\rangle = \langle (-1)^{|\alpha|} i^{-|\alpha|}\partial_\xi^\alpha \hat{u}, \varphi\rangle.$$

Consequentemente, $(x^\alpha u)\hat{}\, = (-i)^{-|\alpha|}\partial^\alpha\hat{u}$.

Agora, observando que $\check{\varphi} = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{\varphi}}$, temos

$$\langle \hat{\hat{u}}, \varphi\rangle = \langle \hat{u}, \hat{\varphi}\rangle = \langle u, \hat{\hat{\varphi}}\rangle = \langle u, (2\pi)^n\check{\varphi}\rangle = \langle (2\pi)^n\check{u}, \varphi\rangle,\ \varphi \in \mathscr{S}.$$

Portanto $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n\check{u}$. □

Observação 3.2.10. *Se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{u}$ possui extensão analítica para $\mathbb{C}^n$.*

Com efeito, pelo Teorema 3.2.9 temos que se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e é definida por $\hat{u}(\xi) = \langle u_x, e^{-ix\cdot\xi}\rangle, \xi \in \mathbb{R}^n$. Observando que a aplicação $\zeta \mapsto e^{-ix\cdot\zeta}\ \zeta \in \mathbb{C}^n$, é analítica, ou seja, satisfaz as condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial[e^{-ix\cdot\zeta}]}{\partial\bar{\zeta}_j} = 0,\ j = 1,\ldots,n,$$

segue, pela Proposição 2.4.30, que $\dfrac{\partial \hat{u}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_j} = \langle u_x, 0\rangle = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Portanto, a aplicação $\hat{u} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, dada por $\hat{u}(\zeta) = \langle u_x, e^{-ix\cdot\zeta}\rangle, \zeta \in \mathbb{C}^n$, é analítica.

Proposição 3.2.11. *Se $u \in \mathscr{S}'$ e $\varphi \in \mathscr{S}$, então segue $\langle u, \varphi\rangle = (2\pi)^{-n}\langle \hat{u}, \check{\hat{\varphi}}\rangle$ e $(\varphi u)\hat{} = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{u}$.*

Demonstração. Por (iv) do Teorema 3.2.9 segue que $\langle \hat{\hat{u}}, \check{\varphi}\rangle = (2\pi)^n\langle \check{u}, \check{\varphi}\rangle$, logo $\langle u, \varphi\rangle = (2\pi)^{-n}\langle \hat{u}, \hat{\check{\varphi}}\rangle = (2\pi)^{-n}\langle \hat{u}, \check{\hat{\varphi}}\rangle$.

Agora, dada $\psi \in \mathscr{S}$ e observando que $(2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\hat{\psi}} = (\varphi\hat{\psi})\hat{} \in \mathscr{S}$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle (\varphi u)\hat{}, \psi\rangle &= \langle u, \varphi\hat{\psi}\rangle \\
&= (2\pi)^{-n}\langle \hat{u}, ((2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\hat{\psi}})\check{}\,\rangle \\
&= (2\pi)^{-n}\hat{u} * (\hat{\varphi} * (2\pi)^{-n}\hat{\hat{\psi}})(0) \\
&= (2\pi)^{-n}(\hat{u} * \hat{\varphi}) * \check{\psi}(0) \\
&= \langle (2\pi)^{-n}(\hat{u} * \hat{\varphi}), \psi\rangle.
\end{aligned}$$

□

Quando $u \in \mathscr{S}'$ não é uma função em L^1, para calcular $\hat{u}$, tenta-se aproximar u por funções integráveis cujas transformadas se conhecem. Abaixo um exemplo desta prática.

Exemplo 3.2.12. *Consideremos a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calculemos $\hat{H}$ através das aproximadas $H_\varepsilon(x) = H(x)e^{-\varepsilon x},\ \varepsilon > 0$.*

Primeiro, notemos que $H_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ e $H_\varepsilon \longrightarrow H$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Ainda, se $\varphi \in \mathscr{S}$, então $H_\varepsilon\varphi \longrightarrow \varphi$ em $L^1(\mathbb{R})$, uma vez que $|H_\varepsilon\varphi| \leq |\varphi|$. Logo,

$$\langle H_\varepsilon, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)e^{-\varepsilon x}\varphi(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x}\varphi(x)\,\mathrm{dx} \longrightarrow \int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{dx} = \langle H, \varphi\rangle,\ \ \varphi \in \mathscr{S},$$

ou seja, $H_\varepsilon \longrightarrow H$ em $\mathscr{S}'$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Agora, para cada $\varepsilon > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\hat{H}_\varepsilon(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi}H(x)e^{-\varepsilon x}\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty e^{-(i\xi+\varepsilon)x}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{i\xi + \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \xi^2} - i\frac{\xi}{\varepsilon^2 + \xi^2}$$

Tomando $g_\varepsilon(\xi) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \xi^2}$, temos que $\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\,\mathrm{dx} = 1$ e $\int_{|x|>a} g_\varepsilon(x)\,\mathrm{dx} \longrightarrow 0$ para todo $a > 0$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Disto, segue que $g_\varepsilon \longrightarrow \delta$ e, assim, $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \xi^2} \longrightarrow \pi\delta$. Por outro lado, temos que $\dfrac{\xi}{\varepsilon^2 + \xi^2} \longrightarrow \mathrm{v.\,p.}\,\dfrac{1}{\xi}$, onde $\mathrm{v.\,p.}\,\dfrac{1}{\xi}$ está definida como no Exemplo 2.4.4.

Finalmente, pela continuidade de $\mathcal{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$, segue que $\hat{H}_\varepsilon \longrightarrow \hat{H}$ e, portanto, temos que $\hat{H}(\xi) = \pi\delta - i\,\mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{\xi}$.

Observação 3.2.13. *Notemos que $H + \check{H} = 1$ e que $\hat{\check{H}}(\xi) = \hat{H}(-\xi) = \pi\delta + i\,\mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{\xi}$. Desta forma, segue que $\hat{1} = (H + \check{H})\hat{} = 2\pi\delta$, o que está de acordo com o Exemplo 3.2.8.*

Observação 3.2.14. *Consideremos a função "sinal de x",* $\mathrm{sn}(x) = H(x) - H(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. *Segue que* $\hat{\mathrm{sn}}(\xi) = \hat{H}(\xi) - \hat{H}(-\xi) = -2i\,\mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{\xi}$ *e, consequentemente:*

$$(\mathrm{v.\,p.})\hat{}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{i}{2}\hat{\hat{\mathrm{sn}}}(\xi) = \frac{i}{2}2\pi\check{\mathrm{sn}}(\xi) = i\pi(H(-\xi) - H(\xi)) = -i\pi\,\mathrm{sn}(\xi),$$

ou seja, $(\mathrm{v.\,p.})\hat{} = -i\pi\,\mathrm{sn}$.

3.3 Espaços de Sobolev

Nesta seção, utilizamos a Transformada de Fourier para introduzir os espaços de Sobolev H_s, começando com o caso em que s é um número inteiro não-negativo.

Definição 3.3.1. *Seja $k \in \mathbb{Z}_+$. Definimos o* ***espaço de Sobolev*** *H_k de ordem k, como o conjunto das funções $f \in L^2$ cujas derivadas (no sentido das distribuições) $\partial^\alpha f \in L^2$, para $|\alpha| \le k$, isto é, $H_k = \{f \in L^2;\ \partial^\alpha f \in L^2,\ \text{para todo } |\alpha| \le k\}$.*

Notamos que H_k é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{C}$, onde consideramos a norma $\|f\|_k = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^k\,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}}$.

O teorema, a seguir, mostra que o espaço H_k pode também ser caracterizado em termos da Transformada de Fourier de seus elementos. Aqui o símbolo $(1 + |\xi|^2)$ denota a função $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2), \xi \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3.2 (FOLLAND, Teo. 6.1, p. 191)**.** *Para que se tenha $f \in H_k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, é necessário e suficiente que $(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}}\hat{f} \in L^2$ e as normas $\left[\sum_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2\right]^{\frac{1}{2}}$ e $\|f\|_k$ sejam equivalentes.*

Demonstração. Começaremos provando a equivalência entre as normas, donde se seguirá a outra afirmação do teorema.

Primeiramente, pelo Teorema 3.2.9, temos que $\|f\|_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|\hat{f}\|_{L^2}$, para toda $f \in L^2$. Se $f \in H_k$, então, pela Definição 3.3.1, $\partial^\alpha f \in L^2$, para todo $|\alpha| \le k$. Logo, $\|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n}\|(-i\xi)^\alpha \hat{f}\|_{L^2}^2$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 &= (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \le k} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |\xi^\alpha|\,\mathrm{d}\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_{|\alpha| \le k} |\xi^\alpha|\,\mathrm{d}\xi\,. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 3.1.4,

$$\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2} \leq (2\pi)^{-n} B\|f\|_k \leq (2\pi)^{-n} AB \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2},$$

provando a equivalência entre as normas.

Finalmente, se $f \in H_k$, então $\|\partial^\alpha f\|_{L^2} < \infty$, para todo $|\alpha| \leq k$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
\|(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{f}\|^2_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^k \,\mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 C'_k \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2 \,\mathrm{d}\xi \\
&= C'_k \sum_{|\alpha|\leq k} (2\pi)^n \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

ou seja, $(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{f} \in L^2$.

Em contrapartida, se $(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{f} \in L^2$, então $f \in L^2$, uma vez que $\hat{f} \in L^2$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \,\mathrm{dx} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^k |\hat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < \infty.$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2} &= \sum_{|\alpha|\leq k} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |\xi^\alpha|^2 \,\mathrm{d}\xi \\
&\leq C_k (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^k \,\mathrm{d}\xi \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

para todo $|\alpha| \leq k$. Logo, $\partial^\alpha f \in L^2$, para todo $|\alpha| \leq k$ e, portanto, $f \in H_k$. □

Podemos generalizar os espaços H_k, trocando $k \in \mathbb{Z}_+$ por $s \in \mathbb{R}$ no Teorema 3.3.2. Para tal, vejamos primeiro que se u é uma função definida em $\mathbb{R}^n$ tal que $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} u \in L^2$, então u define uma distribuição temperada.

De fato, seja $\varphi \in \mathscr{S}$ dada. Como para cada $\beta \in \mathbb{N}^n$ existe $M_\beta > 0$ tal que $|\xi^\beta \varphi(\xi)| \leq M_\beta$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos, pelo Lema 3.1.4, para $2k > n+1-s$:

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1-s}{2}} |\varphi(\xi)| \leq (1+|\xi|^2)^k |\varphi(\xi)| \leq C'_k \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2 |\varphi(\xi)| \leq M_{\alpha,k},$$

onde $M_{\alpha,k} = C'_k \sum_{|\alpha|\leq k} M_{2\alpha}$. Ou seja, $|\varphi(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}} \leq M_{\alpha,k}(1+|\xi|^2)^{\frac{-n-1}{2}}, \xi \in \mathbb{R}^n$. Desta forma, pela Desigualdade de Hölder:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi) u(\xi)| \,\mathrm{d}\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} \,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde ambas integrais do lado direito são finitas, devido a $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}u \in L^2$ e ao fato de $\varphi \in \mathscr{S}$ implicar na existência de uma constante $C > 0$ de modo que

$$|\varphi(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{-s} \leq C(1+|\xi|^2)^{-n-1}, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, $u \in \mathscr{S}'$ e consequentemente, $\hat{u} \in \mathscr{S}'$.

Isso motiva a seguinte definição.

Definição 3.3.3. *Fixado $s \in \mathbb{R}$ definimos o* ***espaço de Sobolev de ordem s*** *como:*

$$H_s = H_s(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathscr{S}'; \ \hat{f} \in L^1_{loc} \ e \ \|f\|_s^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s \, \mathrm{d}\xi < \infty\}.$$

A aplicação $\|\cdot\|_s : H_s \to \mathbb{R}$ como definida acima é chamada de ***norma Sobolev de ordem*** *s.*

Observação 3.3.4. *O Teorema 3.3.2 assegura que as definições 3.3.1 e 3.3.3 coincidem quando $s \in \mathbb{Z}_+$.*

Teorema 3.3.5 (FOLLAND, Teo. 6.3, p. 192)**.** *Sejam $k \in \mathbb{Z}_+, \ s \in \mathbb{R}, \ f \in \mathscr{S}'$. Então, $f \in H_s$ se, e somente se, $\partial^\alpha f \in H_{s-k}$, para todo $|\alpha| \leq k$. Além disso as normas $\|\cdot\|_s$ e*

$$f \mapsto \left[\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{s-k}^2\right]^{\frac{1}{2}}, f \in H_s,$$

são equivalentes. Em particular, para todo $s \in \mathbb{R}$ temos que $\partial^\alpha : H_s \to H_{s-k}$ é um operador limitado quando $|\alpha| \leq k$.

Demonstração. Primeiramente mostremos que as normas são equivalentes. Note que:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{s-k}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha f)\hat{}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{s-k} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{s-k} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2(1+|\xi|^2)^{-k} \, \mathrm{d}\xi \, .
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1.4, $\sum\limits_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2(1+|\xi|^2)^{-k} \leq C_k$, para alguma constante $C_k > 0$. Logo,

$$\left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{s-k}^2\right) \leq C_k^{\frac{1}{2}} \|f\|_s.$$

Também pelo Lema 3.1.4, existe uma constante $C_k' > 0$ tal que $(1+|\xi|^2)^k \leq C_k' \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, e assim

$$\begin{aligned} \|f\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, \mathrm{d}\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{s-k} C_k' \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2 \, \mathrm{d}\xi \\ &= C_k' \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha f)\hat{}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{s-k} \, \mathrm{d}\xi \\ &= C_k' \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{s-k}^2. \end{aligned}$$

Portanto, as normas $\|f\|_s$ e $\left[\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{s-k}^2\right]^{\frac{1}{2}}$, $f \in H_s$, são equivalentes. Consequentemente, $f \in H_s$ se, e somente se, $\partial^\alpha f \in H_{s-k}$ e $\partial^\alpha : H_s \to H_{s-k}$ é um operador limitado. $\square$

Observação 3.3.6. *Para todo $s \in \mathbb{R}$, H_s é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por:*

$$(f|g)_s := \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}(1+|\xi|^2)^s \, \mathrm{d}\xi, \ f,g \in H_s. \tag{3.16}$$

Com efeito, seja $(f_j) \subset H_s$ uma sequência de Cauchy. Então, $\|f_j - f_k\|_s \longrightarrow 0$, quando $j,k \longrightarrow \infty$, ou seja, $\|(\hat{f}_j - \hat{f}_k)(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\|_{L^2} \longrightarrow 0$, quando $j,k \longrightarrow \infty$. Com isso, temos que $((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}_j)$ é uma sequência de Cauchy em L^2. Uma vez que L^2 é completo, segue que existe $g \in L^2$ tal que $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}_j \longrightarrow g$ em L^2 e, ainda, $g \in \mathscr{S}'$. Notando que $(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}} g \in \mathscr{S}'$, podemos definir $f = \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}} g] \in \mathscr{S}'$, donde segue que $\hat{f}$ é uma função e $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f} \in L^2$.

Desta forma, temos que $f \in H_s$ e $\|f_j - f\|_s = \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}_j - g\|_{L^2} \longrightarrow 0$, quando $j \longrightarrow \infty$. Portanto, H_s é completo na norma Sobolev de ordem s, a qual é proveniente do produto interno definido em (3.16).

Observação 3.3.7. *Consideremos a medida definida por* $\mathrm{d}\mu(\xi) = (1+|\xi|^2)^s \, \mathrm{d}\xi$, *onde $s \in \mathbb{R}$ está fixado. Então $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n,\mu)$ e $\mathcal{F} : H_s \to L^2(\mathbb{R}^n,\mu)$ é um isomorfismo tal que $\|f\|_s^2 = (2\pi)^n \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu)}^2$.*

Com efeito, dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n,\mu)$, temos que $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} f \in L^2$. Uma vez que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em L^2, segue que existe uma sequência $(\varphi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(\xi) - (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} f(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad j \longrightarrow \infty.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, tomamos $\psi_j = (1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}} \varphi_j$. Segue que $(\psi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi) - \psi_j(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} |(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} f(\xi) - \varphi_j(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \longrightarrow 0,$$

quando $j \longrightarrow \infty$, ou seja, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Em particular, $\mathscr{S}$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Agora, notemos que f define uma distribuição temperada da seguinte forma:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\varphi(\xi)\, \mathrm{d}\mu(\xi), \;\; \varphi \in \mathscr{S}.$$

Com isto, podemos definir $\langle \mathcal{F}^{-1} f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle$ e, assim, temos $\mathcal{F}^{-1} f \in \mathscr{S}'$. Logo, segue que $\mathcal{F}^{-1} f \in H_s$. Desta forma, $\mathcal{F} : H_s \to L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ é um isomorfismo.

Ainda, a mesma demonstração de (ii) do Teorema 3.2.9 serve para mostrar que $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu)} = (2\pi)^{-n}\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu)}$, para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ e, com isso,

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \, \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\mu(\xi) = \|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu)},$$

para toda $f \in H_s$, concluindo a verificação da Observação 3.3.7.

Em particular, isto mostra que $\mathscr{S}$ é denso em H_s, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Observação 3.3.8. *Uma vez que H_s é um espaço de Hilbert, ele é isomorfo ao seu dual H_s^*. Contudo, é possível definir um isomorfismo entre H_s^* e H_{-s}, o qual atua através do produto interno natural de L^2 nas transformadas de Fourier.*

De fato, fixemos $g \in H_{-s}$ e definamos $f \mapsto \langle \tilde{g}, f \rangle = (\hat{f}|\hat{g})$, para toda $f \in H_s$. Temos que $\hat{f}\overline{\hat{g}} = [(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}][(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}\overline{\hat{g}}]$ e, pela Desigualdade de Hölder, segue:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}|\, \mathrm{d}\xi \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\hat{g}(\xi)}|^2(1+|\xi|^2)^{-s}\, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

ou seja, $(\hat{f}|\hat{g}) \in \mathbb{C}$. Disto segue que $\tilde{g}$ está bem definido e ainda $|(\hat{f}|\hat{g})| \le \|f\|_s \|g\|_{-s}$, para toda $f \in H_s$. Logo, $\tilde{g} \in H_s^*$.

Por outro lado, seja $h \in H_s^*$. Então, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que, para $f \in H_s$, com $\|f\|_s \le 1$,

$$|\langle h, f \rangle| \le C_1.$$

Em particular, $|\langle h, \varphi \rangle| \le C_1$, para toda $\varphi \in \mathscr{S}$ com $\|\varphi\|_s \le 1$. Ainda, uma vez que h é um elemento de $\mathscr{S}'$, existe uma constante $C > 0$, de modo que

$$|\langle \hat{h}, \check{\hat{\varphi}} \rangle| \le C, \;\; \|\varphi\|_s \le 1.$$

Se definirmos $\hat{\psi}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(-\xi)$, temos que $\hat{\psi} \in \mathscr{S}$, logo $\psi \in \mathscr{S}$ e, se $\|\varphi\|_s \le 1$, então

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\varphi}(-\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \le 1,$$

ou seja, $\|\hat{\psi}\|_{L^2} \le 1$. Desta forma, temos que $|\langle (1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}\hat{h}, \hat{\psi} \rangle| \le C$, para toda $\psi \in \mathscr{S}$ com $\|\hat{\psi}\|_{L^2} \le 1$. Pela auto dualidade de L^2, segue que $(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}\hat{h} \in L^2$, e portanto $h \in H_{-s}$.

Por fim, vejamos que a norma $\|\cdot\|_{-s}$ é equivalente à norma do dual H_s^*. Observemos que dadas $h \in H_{-s}$ e $\varphi \in H_s$, com $\|\varphi\|_s \leq 1$, existe uma constante $C_1 > 0$ de modo que

$$|\langle h, \varphi\rangle| = C_1|\langle \hat{h}, \hat{\check{\varphi}}\rangle| \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{h}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}|\hat{\varphi}(-\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\,\mathrm{d}\xi,$$

e, pela Desigualdade de Hölder, segue

$$\|h\| = \sup_{\|\varphi\|_s \leq 1} |\langle h, \varphi\rangle| \leq \sup_{\|\varphi\|_s \leq 1} \{C_1\|h\|_{-s}\|\varphi\|_s\} \leq C_1\|h\|_{-s}.$$

Por outro lado, notamos que $(1+|\cdot|^2)^{-s}\check{\hat{\hat{h}}} \in \mathscr{S}'$. Então, definindo $\varphi_0 = \dfrac{\mathcal{F}^{-1}[(1+|\cdot|^2)^{-s}\check{\hat{\hat{h}}}]}{\|h\|_{-s}}$, segue que $\varphi_0 \in H_s$ e $\|\varphi_0\|_s = 1$. Com isso, temos $\langle h, \varphi_0\rangle = C_1\langle \hat{h}, \check{\hat{\varphi}}_0\rangle = C_1\|h\|_{-s}$. Portanto, $\|h\|_{-s} \leq C_2\|h\|$, para alguma constante $C_2 > 0$. Assim, identificamos o espaço dual de H_s, H_s^*, com o espaço H_{-s}, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Observação 3.3.9. *Se $s \leq t$ então $H_t \subset H_s$, sendo a inclusão uma aplicação contínua.*

De fato, se $f \in H_t$ então a desigualdade abaixo implica que $f \in H_s$ e que a aplicação inclusão $I : H_t \to H_s$, dada por $I(f) = f$, é contínua:

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\,\mathrm{d}\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^t\,\mathrm{d}\xi = \|f\|_t^2.$$

Em particular, $H_s \subset H_0 = L^2$, para todo $s \geq 0$. Consequentemente, os elementos de H_s são funções de L^2 sempre que $s \geq 0$.

Exemplo 3.3.10. *Vejamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (\pi x)^{-1}\operatorname{sen}(2\pi x)$, pertence a H_s, para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Primeiro, observamos que se ψ é a função característica do intervalo $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$, então $\psi \in \mathscr{S}'$. Ainda:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\psi)(x) &= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx}\psi(y)\,\mathrm{dy} \\ &= (2\pi)^{-1}\int_{-1}^{1} e^{iyx}\,\mathrm{dy} \\ &= (\pi x)^{-1}\operatorname{sen}(2\pi x), x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, $\hat{f} = \psi$ e, consequentemente, $\hat{f}(1+|\xi|^2)^s \in L^2(\mathbb{R})$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Portanto, $f \in H_s$, para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Observamos ainda que f decai como $\dfrac{1}{x}$ quando $x \longrightarrow \infty$. Isto mostra que os elementos de H_s não necessariamente decaem rapidamente no infinto.

Exemplo 3.3.11. *Consideremos novamente a distribuição δ=delta de Dirac.*

Como já visto anteriormente, $\hat{\delta}$ é a função constante igual a 1. Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned}\|\delta\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\delta}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s \, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \, \mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

ou seja, $\delta \in H_s$ se, e somente se, $s < \frac{-n}{2}$.

O próximo resultado relaciona as derivadas em L^2 (no sentido das distribuições) com derivadas no sentido clássico.

Lema 3.3.12 (FOLLAND, Lem. 6.5, p. 194)**. *(Lema de Sobolev):*** *Se $k \in \mathbb{Z}_+$ e $s > k + \frac{n}{2}$, então $H_s \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ e existe uma constante $C = C_{s,k} > 0$ tal que:*

$$\sup_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)| \leq C\|f\|_s, \quad f \in H_s.$$

Demonstração. Sejam $f \in H_s$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e suponhamos que $s > k + \frac{n}{2}$, para algum $k \in \mathbb{Z}_+$. Notemos primeiro que, pela fórmula de inversão da Transformada de Fourier, temos $\partial^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot x} (\partial^\alpha f)\hat{}(y) \, \mathrm{d}y$. Logo, se $(\partial^\alpha f)\hat{} \in L^1$, então $\partial^\alpha f$ é contínua. Mas, pelo Teorema 3.3.5, temos que $\partial^\alpha f \in H_{s-k}$, para $|\alpha| \leq k$. Assim, segue que $\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha f)\hat{}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{s-k} \, \mathrm{d}\xi < \infty$, para todo $|\alpha| \leq k$.

Como $k - s < -\frac{n}{2}$, segue da Desigualdade de Hölder que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha f)\hat{}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha f)\hat{}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{s-k} \, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{k-s} \, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Desta forma, temos que $(\partial^\alpha f)\hat{} \in L^1$ e, consequentemente, $\partial^\alpha f$ é contínua, para todo $|\alpha| \leq k$. Com isso, $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Ainda, pela fórmula de inversão da Transformada de Fourier, temos que $|\partial^\alpha f(x)| \leq (2\pi)^{-n} \|(\partial^\alpha f)\hat{}\|_{L^1}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)| \leq (2\pi)^{-n} \|(\partial^\alpha f)\hat{}\|_{L^1}$.

Para completar a demonstração, basta mostrarmos que $\|(\partial^\alpha f)\hat{}\|_{L^1} \leq C_1 \|f\|_s$, para qualquer $|\alpha| \leq k$ e para algum $C_1 > 0$.

Ora, uma vez que $(\partial^\alpha f)\hat{} = (i\xi)^\alpha \hat{f}$, para $|\alpha| \leq k$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha f)\hat{}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\hat{f}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} |\hat{f}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s \, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{k-s} \, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_1\|f\|_s,\end{aligned}$$

onde $C_1 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{k-s} \, \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}$. □

Corolário 3.3.13. *Se $f \in H_s$ para todo $s \in \mathbb{R}$, então $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Dado $k \in \mathbb{N}$, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s > k + \frac{n}{2}$. Logo, $f \in H_s$ implica, pelo Lema 3.3.12, que $f \in C^k$. $\square$

Corolário 3.3.14. *Toda distribuição de suporte compacto pertence a H_s, para algum $s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 2.4.19, existem um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, uma constante $C_1 > 0$ e um inteiro $m > 0$ de modo que:

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,\ \varphi \in \mathscr{S}.$$

Tomando $s = k + \dfrac{n}{2} + 1$, pelo Lema de Sobolev segue que, para alguma constante $C > 0$,

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_s,\ \varphi \in \mathscr{S}.$$

Como $\mathscr{S}$ é denso em H_s, segue que f pode ser estendido de forma única a um funcional linear contínuo em H_s e, consequentemente, $f \in H_{-s}$.

$\square$

Observação 3.3.15. *Dado $k \in \mathbb{Z}_+$, consideremos o subespaço BC^k das funções $f \in C^k$, cujas derivadas de ordem menor ou igual a k são limitadas. Vejamos que $H_s \subset BC^k$ se, e somente se, $s > k + \frac{n}{2}$.*

De fato, pelo Lema de Sobolev 3.3.12, temos que $H_s \subset BC^k$, se $s > k + \frac{n}{2}$. Agora, suponhamos que $H_s \subset BC^k$ e consideremos a aplicação inclusão $I : H_s \to BC^k$. Vejamos que seu gráfico $G(I)$ é fechado em $H_s \times BC^k$. Seja (f_j) uma sequência em H_s de modo que $f_j \longrightarrow f$ em H_s e $I(f_j) \longrightarrow g$ em BC^k. Assumiremos aqui que a convergência em H_s implica na convergência em $\mathscr{S}'$, fato este que será provado de maneira mais geral (a saber, Teorema 3.4.8) para os espaços $B_{p,k}$, dos quais H_s é um caso particular. Desta forma, temos que $f_j \longrightarrow f$ em $\mathscr{S}'$.

Agora, dada $\psi \in \mathscr{S}$, por $f_j \longrightarrow g$ em BC^k, segue que:

$$|\langle f_j - g, \psi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x) - g(x)||\psi(x)|\,\mathrm{dx} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_j(x) - g(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|\,\mathrm{dx} \longrightarrow 0,$$

quando $j \longrightarrow 0$. Logo, $f_j = I(f_j) \longrightarrow g$ em $\mathscr{S}'$ e, pela unicidade do limite, $f = g$ como distribuição temperada. Mas, uma vez que $f, g \in L^1_{loc}$, temos $f \equiv g$ e, portanto, $(f, g) \in G(I)$.

Pelo Teorema do Gráfico Fechado (ver (BRÉZIS; ESTEBAN, 1984)), segue que existe uma constante $C > 0$ tal que $\|I(f)\|_{BC^k} \leq C\|f\|_s$, para toda $f \in H_s$. Logo,

$$\sup_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)| \leq C\|f\|_s, \ f \in H_s,$$

ou seja, a aplicação $f \mapsto \partial^\alpha f$ é contínua, para todo $|\alpha| \leq k$. Mais ainda, o conjunto dos funcionais lineares $\partial^\alpha f$ é limitado, para $|\alpha| \leq k$.

Considerando $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, temos que o conjunto $D = \{\partial^\alpha \delta_x;\ |\alpha| \leq k\}$, onde $\langle \partial^\alpha \delta_x, f\rangle = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha f(x)$, $f \in H_s$, é limitado em H_{-s}. Assim, existe $A > 0$ tal que $\|\partial^\alpha \delta(\cdot - x)\|_{-s} \leq A$, para todo $|\alpha| \leq k$. Mas isto significa que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha \delta)\widehat{}(\xi - x)|^2(1 + |\xi|^2)^{-s}\,\mathrm{d}\xi \leq A, \ \forall\ |\alpha| \leq k. \tag{3.17}$$

Se tomarmos $\alpha = (k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$, a integral acima pode ser escrita como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi_1^k|^2(1 + |\xi + x|^2)^{-s}\,\mathrm{d}\xi,$$

onde o integrando se comporta como $|\xi|^{2k-2s}$ para ξ suficientemente grande.

Mas a aplicação $\xi \mapsto |\xi|^r$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, é integrável (pela Proposição 2.2.28) no infinito se, e somente se $r < -n$. Consequentemente, (3.17) vale se, e somente se $s > k + \frac{n}{2}$, como queríamos demonstrar.

Lema 3.3.16 (FOLLAND, Lem. 6.10, p. 197)**.** *Para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ e $s \in \mathbb{R}$, vale:*

$$\left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2}\right)^s \leq 2^{|s|}(1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|}.$$

Demonstração. Pela desigualdade triangular e por $2|\xi - \eta||\eta| \leq |\eta|^2 + |\xi - \eta|^2$, temos que:

$$|\xi|^2 \leq (|\xi - \eta| + |\eta|)^2 = |\xi - \eta|^2 + 2|\xi - \eta||\eta| + |\eta|^2 \leq 2(|\xi - \eta|^2 + |\eta|^2).$$

Disto, temos que $1 + |\xi|^2 \leq 2(1 + |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2 + |\xi - \eta|^2|\eta|^2)$ e, assim,

$$1 + |\xi|^2 \leq 2(1 + |\xi - \eta|^2)(1 + |\eta|^2), \ \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Agora, para $s > 0$, basta elevar ambos os lados da desigualdade acima na potência s, para obter o resultado desejado. Por outro lado, para $s < 0$, trocando ξ por η na desigualdade acima, segue que $(1 + |\eta|^2)^{-s} \leq 2^{-s}(1 + |\eta - \xi|^2)^{-s}(1 + |\xi|^2)^{-s}$, logo:

$$\left(\frac{1 + |\eta|^2}{1 + |\xi|^2}\right)^{-s} \leq 2^{-s}(1 + |\xi - \eta|^2)^{-s},$$

para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, donde segue o que queríamos demonstrar. □

Lema 3.3.17 (FOLLAND, Lem. 6.11, p. 197)**.** *Sejam $r < s < t$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C = C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\|f\|_s^2 \leq \varepsilon\|f\|_t^2 + C\|f\|_r^2, \ f \in H_t.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar $A_\varepsilon > 0$ tal que $(1 + A_\varepsilon^2)^s \leq \varepsilon(1 + A_\varepsilon^2)^t$. Tomando $C_\varepsilon = (1 + A_\varepsilon^2)^{s-r}$, segue que:

- para $|\xi| \leq A_\varepsilon$, temos $|\xi|^2 \leq A_\varepsilon^2$ e, com isso, $(1 + |\xi|^2)^{s-r} \leq (1 + A_\varepsilon^2)^{s-r} \leq C_\varepsilon$. Logo, $(1 + |\xi|^2)^s \leq C_\varepsilon(1 + |\xi|^2)^r$;

- para $|\xi| \geq A_\varepsilon$, temos que $1+|\xi|^2 \geq 1+A_\varepsilon^2$ e, com isso, $(1+|\xi|^2)^{s-t} \leq (1+|\xi|^2)^{s-t} \leq \varepsilon$. Logo, $(1 + |\xi|^2)^s \leq \varepsilon(1 + |\xi|^2)^t$.

Com isso, segue que $(1 + |\xi|^2)^s \leq \varepsilon(1 + |\xi|^2)^t + C_\varepsilon(1 + |\xi|^2)^r,\ \xi \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^s \,\mathrm{d}\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \left[\varepsilon(1 + |\xi|^2)^t + C_\varepsilon(1 + |\xi|^2)^r\right] \mathrm{d}\xi\,.$$

□

Vejamos que os espaços de Sobolev H_s são invariantes por multiplicação por funções do espaço de Schwartz. Primeiro consideremos os caso em que $s = k \in \mathbb{Z}_+$. Dadas $\varphi \in \mathscr{S},\ f \in H_k$, segue que $\varphi f \in L^2$, uma vez que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)f(x)|^2 \,\mathrm{dx} \leq M \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \,\mathrm{dx} < \infty,$$

onde $M \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2$. Ainda, como $\partial^\beta\varphi \in \mathscr{S}$, para todo $\beta \in \mathbb{N}^n$, e $\partial^\beta f \in L^2$, para $|\beta| \leq k$, segue que $\partial^\beta\varphi\partial^{\alpha-\beta}f \in L^2$, para todo $|\beta| \leq k$. Logo, pela Regra de Leibniz, temos que $\partial^\alpha(\varphi f) = \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta\varphi\partial^{\alpha-\beta}f \in L^2$, para todo $|\alpha| \leq k$. Consequentemente, $\varphi f \in H_k$.

O caso geral $s \in \mathbb{R}$ demanda um pouco mais de trabalho e será tratado abaixo.

Proposição 3.3.18 (FOLLAND, Pro. 6.12, p. 198)**.** *Se $\varphi \in \mathscr{S}$, a aplicação $f \mapsto \varphi f, f \in H_s$, é limitada em $H_s,\ s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Mostremos primeiro que a aplicação está bem definida, ou seja, dadas $f \in H_s,\ \varphi \in \mathscr{S}$, temos que $\varphi f \in H_s$. Pela Proposição 3.2.11, $(\varphi f)\hat{} = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{f}$.

Desta forma,

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(\varphi f)\hat{}(\xi) &= (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{f}(\xi) \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(\xi - \eta)\hat{f}(\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2}\right)^{\frac{s}{2}} \hat{\varphi}(\xi - \eta)(1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,. \end{aligned}$$

Definindo $K(\xi, \eta) = \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2}\right)^{\frac{s}{2}} \hat{\varphi}(\xi - \eta)$, temos, pelo Lema 3.3.17,

$$|K(\xi, \eta)| \leq 2^{\frac{|s|}{2}}(1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{|s|}{2}}|\hat{\varphi}(\xi - \eta)|,$$

para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Assim, $\int_{\mathbb{R}^n} |K(\xi,\eta)|\, \mathrm{d}\xi < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^n} |K(\xi,\eta)|\, \mathrm{d}\eta = C < \infty$, já que $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}$, e usando a Desigualdade de Hölder, segue:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(\xi,\eta)||\hat{f}(\eta)|(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\, \mathrm{d}\eta \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(\xi,\eta)||\hat{f}(\eta)|^2(1+|\eta|^2)^s\, \mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Disto e do Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|(\varphi f)\hat{\ }(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi &= (2\pi)^{-2n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} K(\xi,\eta)(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}(\eta)\, \mathrm{d}\eta\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq (2\pi)^{-2n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(\xi,\eta)||\hat{f}(\eta)|(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\, \mathrm{d}\eta\right)^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq (2\pi)^{-2n}\int_{\mathbb{R}^n} C^2\int_{\mathbb{R}^n} |K(\xi,\eta)||\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{-2n}C^2\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\eta)|^2(1+|\eta|^2)^s\int_{\mathbb{R}^n} |K(\xi,\eta)|\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \\
&= (2\pi)^{-2n}C^3\|f\|_s^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi f \in H_s$ e, ainda, temos que $\|\varphi f\|_s \leq C'\|f\|_s$, onde $C' = (2\pi)^{-n}C^{\frac{3}{2}}$. □

Definição 3.3.19. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Definimos o* ***espaço local de Sobolev*** *$H_s^{loc}(\Omega)$ como o conjunto de todas as distribuições f em Ω tais que, para todo aberto limitado Ω_0, com $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$, existe $g \in H_s$, de modo que $f = g$ em Ω_0.*

Proposição 3.3.20 (FOLLAND, Pro. 6.13, p. 198)**.** *Seja $s \in \mathbb{R}$. Então $f \in H_s^{loc}(\Omega)$ se, e somente se, $\varphi f \in H_s$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. E ainda, $H_s \subset H_s^{loc}(\Omega)$ para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam $f \in H_s^{loc}(\Omega)$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e consideremos $K = supp(\varphi) \subset \Omega$. Tomando $U \subset \Omega$ aberto tal que $K \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$, temos que existe $g \in H_s$ tal que $f = g$ em U. Logo, $\varphi f = \varphi g$ e, pela proposição anterior, segue que $\varphi g \in H_s$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $\varphi f \in H_s$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dado um aberto limitado Ω_0 tal que $\Omega_0 \subset \overline{\Omega_0} \subset \Omega$, existe $\varphi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$, de modo que $\varphi = 1$ em Ω_0. Desta forma, $\varphi_0 f \in H_s$ e $\varphi_0 f = f$ em Ω_0. □

Em certo sentido, dizer que $f \in H_s^{loc}(\Omega)$ significa que f cumpre o requisito de suavidade para estar em H_s em Ω, mas não impõe condições de integrabilidade global.

3.4 Os espaços $B_{p,k}$

No estudo sobre a teoria de Equações Diferenciais Parciais é importante termos condições que garantam a existência de soluções e, sempre que possível, dar afirmações precisas sobre as regularidades de tais soluções.

Nesta seção, estudaremos um pouco sobre os espaços onde são buscadas as soluções fundamentais com maior regularidade de EDP's. Mais precisamente, veremos quais propriedades estes espaços possuem e como isto se traduz em relação à regularidade de seus elementos.

Uma condição na regularidade de uma distribuição ou função u (com suporte compacto) pode também ser considerada como uma condição no comportamento de $\hat{u}(\xi)$ quando $\xi \longrightarrow \infty$. Para classificar este comportamento podemos, por exemplo, questionar para quais "funções peso" k é válida a condição $k\hat{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

O conjunto de todas as distribuições temperadas $u \in \mathscr{S}'$ com a propriedade descrita acima é denotado por $B_{p,k}$. Os casos mais interessantes se dão quando $p = 1$, 2 ou ∞.

Definição 3.4.1. *Uma função positiva k definida em $\mathbb{R}^n$ é chamada de **função peso temperada** se existirem $C, N > 0$ tais que:*

$$k(\xi + \eta) \leq (1 + C|\xi|)^N k(\eta), \;\; \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{3.18}$$

O conjunto de tais funções k será denotado por $\mathscr{K}$.

De (3.18) segue que $k(-\xi + \eta) \leq (1 + C|\xi|)^N k(\eta)$. Logo, tomando $\eta = \sigma + \xi$ nesta última desigualdade, segue que $k(\sigma) \leq (1 + C|\xi|)^N k(\xi + \sigma)$. Consequentemente, para $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$:

$$(1 + C|\xi|)^{-N} \leq \frac{k(\xi + \eta)}{k(\eta)} \leq (1 + C|\xi|)^N.$$

Logo, $\dfrac{k(\xi + \eta)}{k(\eta)} \longrightarrow 1$ quando $\xi \longrightarrow 0$ e, assim, k é contínua.

Ainda, se $\eta = 0$ segue que $k(0)(1 + C|\xi|)^{-N} \leq k(\xi) \leq k(0)(1 + C|\xi|)^N$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Para cada $k \in \mathscr{K}$, definimos $M_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, por $M_k(\xi) = \sup\limits_{\eta \in \mathbb{R}^n} \dfrac{k(\xi + \eta)}{k(\eta)}$. Isto é, M_k é a "menor" função para a qual vale $k(\xi + \eta) \leq M_k(\xi)k(\eta)$.

Vemos que M_k é sub-multiplicativa, ou seja, $M_k(\xi + \eta) \leq M_k(\xi)M_k(\eta)$, para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ e, ainda, que $M_k(\xi) \leq (1 + C|\xi|)^N$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Com isso, segue que:

$$\frac{M_k(\xi + \eta)}{M_k(\eta)} \leq M_k(\xi) \leq (1 + C|\xi|)^N, \xi, \eta \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, temos que $M_k \in \mathscr{K}$, para qualquer $k \in \mathscr{K}$.

Ainda pela sub-multiplicatividade de M_k segue, para $v \in \mathbb{N}$:

$$M_k(0) = M_k(v\xi - v\xi) \leq M_k(v\xi)M_k(-v\xi) \leq [M_k(\xi)]^v M_k(-v\xi) \leq [M_k(\xi)]^v (1 + Cv|\xi|)^N.$$

Logo, temos que $1 = M_k(0) \leq M_k(\xi)(1 + Cv|\xi|)^{\frac{N}{v}}$ e, uma vez que $(1 + Cv|\xi|)^{\frac{N}{v}} \longrightarrow 1$ quando $v \longrightarrow \infty$, concluímos que $1 = M_k(0) \leq M_k(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.4.2. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $k_s(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$. Os espaços H_s correspondem ao espaço B_{2,k_s}, ou seja, dos elementos $f \in \mathscr{S}'$ tais que $\hat{f} \in L^1_{loc}$ e $\|k_s\hat{f}\|_{L^2} < \infty$.*

De fato, vejamos que $k_s \in \mathscr{K}$. Observemos que, para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$:

$$1+|\xi+\eta|^2 \leq 1+|\xi|^2+2|\xi||\eta|+|\eta|^2 \leq (1+|\xi|)^2(1+|\eta|^2).$$

Daí, para $s>0$ segue que $(1+|\xi+\eta|^2)^{\frac{s}{2}} \leq (1+|\xi|)^s(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}$. Por outro lado, se $s<0$, tomando $\xi=-\xi$ e $\eta=\xi+\eta$ temos que $1+|\eta|^2 \leq (1+|\xi|^2)(1+|\xi+\eta|^2)$ e, consequentemente,

$$\frac{(1+|\eta|^2)^{\frac{-s}{2}}}{(1+|\xi+\eta|^2)^{\frac{-s}{2}}} \leq (1+|\xi|)^{-s}.$$

Portanto, segue que $k_s(\xi+\eta) \leq (1+|\xi|)^{|s|}k_s(\eta)$, para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Logo, $k_s \in \mathscr{K}$.

Exemplo 3.4.3. *Se P é um polinômio não nulo definido em $\mathbb{R}^n$ então a função $\tilde{P}$ dada por $\tilde{P}(\xi) = \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{|\partial^\alpha P(\xi)|^2}{\alpha!^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, é uma função peso temperada.*

Vejamos que $\tilde{P} \in \mathscr{K}$. Aqui usaremos a notação $\partial^\alpha P = P^{(\alpha)}$, para $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Primeiramente, definimos o conjunto $\Lambda_{m,n} = \{\alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m\} = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_M\}$, onde assumimos que $\alpha_0 = 0 \in \mathbb{N}^n$ e $P^{(\alpha_M)}(\xi) = \text{constante} \neq 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Ainda, para simplificar a notação, escreveremos $P^{(\alpha_j)} = P^{(\alpha_j)}(\eta)$, uma vez que $\eta \in \mathbb{R}^n$ estará fixado. Assim, usando Série de Taylor em volta do ponto $\eta \in \mathbb{R}^n$, obtemos,

$$P(\xi+\eta) = \sum_{|\beta|\leq m} P^{(\beta)}\frac{\xi^\beta}{\beta!}, \ \frac{P^{(\alpha_1)}(\xi+\eta)}{\alpha_1!} = \sum_{|\beta|\leq m-|\alpha_1|} \frac{P^{(\alpha_1+\beta)}}{\alpha_1!}\frac{\xi^\beta}{\beta!}, \ldots, \ \frac{P^{(\alpha_M)}(\xi+\eta)}{\alpha_M!} = \frac{P^{(\alpha_M)}}{\alpha_M!}.$$

Agora, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos:

$$\left(P(\xi+\eta), \ldots, \frac{P^{(\alpha_M)}(\xi+\eta)}{\alpha_M!}\right) = \left(P, \frac{P^{(\alpha_1)}}{\alpha_1!}, \ldots, \frac{P^{(\alpha_M)}}{\alpha_M!}\right) + \left(\sum_{0<|\beta|\leq m} P^{(\beta)}\frac{\xi^\beta}{\beta!}, \ldots, 0\right).$$

Desta forma, aplicando a norma euclideana em ambos os lados e utilizando a desigualdade triangular, concluímos que

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(\xi+\eta) &\leq \tilde{P}(\eta) + \sqrt{\left(\sum_{0<|\beta|\leq m} P^{(\beta)}\frac{\xi^\beta}{\beta!}\right)^2 + \left(\sum_{0<|\beta|\leq m-|\alpha_1|} \frac{P^{(\alpha_1+\beta)}}{\alpha_1!}\frac{\xi^\beta}{\beta!}\right)^2 + \cdots + 0^2} \\
&\leq \tilde{P}(\eta) + \sum_{0<|\beta|\leq m} |P^{(\beta)}|\frac{|\xi^\beta|}{\beta!} + \sum_{0<|\beta|\leq m-|\alpha_1|} \frac{|P^{(\alpha_1+\beta)}|}{\alpha_1!}\frac{|\xi^\beta|}{\beta!} + \cdots + 0 \\
&\leq \tilde{P}(\eta) + \frac{|P^{(\alpha_1)}|}{\alpha_1!}\sum_{0<|\beta|\leq m} |\xi^\beta| + \cdots + \frac{|P^{(\alpha_M)}|}{\alpha_M!}\sum_{0<|\beta|\leq m} |\xi^\beta| \\
&= \tilde{P}(\eta) + \left(\frac{|P^{(\alpha_1)}|}{\alpha_1!}, \ldots, \frac{|P^{(\alpha_M)}|}{\alpha_M!}\right) \cdot \left(\sum_{0<|\beta|\leq m} |\xi^\beta|, \ldots, \sum_{0<|\beta|\leq m} |\xi^\beta|\right),
\end{aligned}$$

e, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(\xi+\eta) &\leq \tilde{P}(\eta)+\tilde{P}(\eta)\sqrt{M\left(\sum_{0<|\beta|\leq m}|\xi^{\beta}|\right)^{2}} \\
&\leq \tilde{P}(\eta)\left(1+M\sum_{0<|\beta|\leq m}|\xi|^{|\beta|}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, se $|\xi|\leq 1$, então

$$1+M\sum_{0<|\beta|\leq m}|\xi|^{|\beta|}\leq 1+M^2|\xi|\leq (1+M^2|\xi|)^m.$$

Por outro lado, se $|\xi|\geq 1$, então

$$1+M\sum_{0<|\beta|\leq m}|\xi|^{|\beta|}\leq 1+M^2|\xi|^m\leq 1+M^{2m}|\xi|^m\leq (1+M^2|\xi|)^m.$$

Portanto, $\tilde{P}(\xi+\eta)\leq (1+M^2|\xi|)^m\tilde{P}(\eta)$, para quaisquer $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$, uma vez que M depende apenas da dimensão n e do grau m do polinômio P. Logo $\tilde{P}\in\mathscr{K}$. Deste exemplo, segue a próxima observação.

Observação 3.4.4. *Se P é um polinômio não nulo definido em $\mathbb{R}^n$, então a função $\xi\mapsto\tilde{P}(i\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, também é uma função peso temperada.*

De fato, se $P(\xi)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha\xi^\alpha$, $a_\alpha\in\mathbb{C}$, então podemos escrever:

$$P(i\xi)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(i\xi)^\alpha=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha i^{|\alpha|}\xi^\alpha=\sum_{\alpha|\leq m}b_\alpha\xi^\alpha,$$

onde $b_\alpha=i^{|\alpha|}a_\alpha$. Assim, como $Q(\xi):=\sum_{|\alpha|\leq m}b_\alpha\xi^\alpha$ é um polinômio definido em $\mathbb{R}^n$, temos que $\tilde{Q}(\xi)=\tilde{P}(i\xi)$ define uma função peso temperada.

Para simplificar a notação denotamos a aplicação $\xi\mapsto\tilde{P}(i\xi),\xi\in\mathbb{R}^n$, por $\tilde{P}(i\xi)$. Mostramos a seguir que $\mathscr{K}$ é fechado por soma, produto, supremo e ínfimo.

Teorema 3.4.5 (HÖRMANDER, 2005, Teo. 10.1.4, p. 5)**.** *Se $k_1,k_2\in\mathscr{K}$, então segue $k_1+k_2, k_1k_2, \sup\{k_1,k_2\}, \inf\{k_1,k_2\}\in\mathscr{K}$. Além disso, se $k\in\mathscr{K}$, então $k^s\in\mathscr{K}$, para todo $s\in\mathbb{R}$ e, dada μ uma medida positiva, segue que ou $\mu*k\in\mathscr{K}$ ou $\mu*k(\xi)=\infty$, para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Sejam $k_1,k_2\in\mathscr{K}$. Então existem $C_1,C_2,N_1,N_2>0$ tais que:

$$k_1(\xi+\eta)\leq(1+C_1|\xi|)^{N_1}k_1(\eta)$$

e

$$k_2(\xi+\eta)\leq(1+C_2|\xi|)^{N_2}k_2(\eta).$$

Tomando $C = C_1 + C_2$ e $N = N_1 + N_2$, segue que:

$$(k_1 + k_2)(\xi + \eta) \leq (1 + C|\xi|)^N (k_1 + k_2)(\eta), \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, $k_1 + k_2 \in \mathscr{K}$.

Agora, suponhamos, sem perda de generalidade, $N_1, N_2 > 1$. Daí, temos que:

$$(k_1 k_2)(\xi + \eta) \leq (1 + C|\xi|)^N (k_1 k_2)(\eta), \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

onde $C = C_1 + C_2, N = 2(N_1 + N_2)$.

O caso $\sup\{k_1, k_2\}$ é obtido tomando $C = \max\{C_1, C_2\}$ e $N = \max\{N_1, N_2\}$. Para mostrar que $\inf\{k_1, k_2\} \in \mathscr{K}$, observamos inicialmente que $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2} \in \mathscr{K}$. Com isto temos que $\sup\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}\right) \in \mathscr{K}$, ou seja, $\frac{1}{\inf\{k_1, k_2\}} \in \mathscr{K}$ e, consequentemente, $\inf\{k_1, k_2\} \in \mathscr{K}$.

Agora, sejam $s \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathscr{K}$ dados. Se $s > 0$, então segue imediatamente que $k(\xi+\eta)^s \leq (1+C|\xi|)^{sN} k(\eta)^s$. Por outro lado, se $s < 0$, observando que para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ vale $k(\eta) \leq (1 + C|\xi|)^N k(\xi + \eta)$,

$$k(\eta)^{-s} \leq (1 + C|\xi|)^{-sN} k(\xi + \eta)^{-s} \Rightarrow k(\xi + \eta)^s \leq (1 + C|\xi|)^{|s|N} k(\eta)^s.$$

Portanto, $k^s \in \mathscr{K}$.

Finalmente, seja μ uma medida positiva. Dados $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, segue que:

$$\begin{aligned}
(\mu * k)(\xi + \eta) &= \langle \mu, \check{k}_{\xi+\eta} \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} k(\xi + \eta - x)\, \mathrm{d}\mu(\mathrm{x}) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + C|\xi|)^N k(\eta - x)\, \mathrm{d}\mu(\mathrm{x}) \\
&= (1 + C|\xi|)^N (\mu * k)(\eta).
\end{aligned}$$

Assim, se existir algum $\eta \in \mathbb{R}^n$ de modo que $(\mu * k)(\eta) < \infty$, temos que $\mu * k \in \mathscr{K}$. Caso contrário, $(\mu * k)(\xi) = \infty$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. □

Teorema 3.4.6 (HÖRMANDER, 2005, Teo. 10.1.5, p. 5)**.** *Se $k \in \mathscr{K}$, então para todo $\varepsilon > 0$ existem $k_\varepsilon \in \mathscr{K}$ e constante C_ε tais que:*

(i) $1 \leq \dfrac{k_\varepsilon(\xi)}{k(\xi)} \leq C_\varepsilon, \ \xi \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $M_{k_\varepsilon}(\xi) \leq (1 + C|\xi|)^N, \ \xi \in \mathbb{R}^n$.

Onde $C, N > 0$ são independentes de ε e $M_{k_\varepsilon} \longrightarrow 1$, uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Demonstração. Seja $k \in \mathscr{K}$ e, para cada $\varepsilon > 0$, definamos $k_\varepsilon(\xi) = \sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|\eta|}k(\xi-\eta)$. Assim, temos que $k_\varepsilon \in \mathscr{K}$ e

$$k(\xi) = e^{-\varepsilon|0|}k(\xi-0) \leq \sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|\eta|}k(-\eta+\xi) \leq \sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|\eta|}(1+C|\eta|)^N k(\xi).$$

Tomando $C_\varepsilon = \sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|\eta|}(1+C|\eta|)^N$, segue que $k(\xi) \leq k_\varepsilon(\xi) \leq C_\varepsilon k(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n$, o que prova (i).

Agora, como

$$k_\varepsilon(\xi+\tau) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|\eta|}k(\xi+\tau-\eta) \leq \sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|\eta|}(1+C|\tau|)^N k(\xi-\eta) = (1+C|\tau|)^N k_\varepsilon(\xi),$$

segue que $M_{k_\varepsilon}(\tau) \leq (1+C|\tau|)^N,\ \tau \in \mathbb{R}^n$, provando (ii).

Finalmente, provemos que $M_{k_\varepsilon} \longrightarrow 1$ em compactos, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Primeiro, notemos que $k_\varepsilon(\xi) = \sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|\eta|}k(\xi-\eta) = \sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|\xi-\eta|}k(\eta)$. Desta forma, segue que

$$k_\varepsilon(\xi+\tau) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|\xi+\tau-\eta|}k(\eta) \leq e^{\varepsilon|\tau|}\sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|\xi-\eta|}k(\eta) = e^{\varepsilon|\tau|}k_\varepsilon(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Como $1 \leq M_{k_\varepsilon}$, segue que $1 \leq M_{k_\varepsilon}(\xi) \leq e^{\varepsilon|\xi|},\ \xi \in \mathbb{R}^n$. Isto conclui a demonstração do teorema. □

Definição 3.4.7. *Sejam $k \in \mathscr{K}$ e $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $B_{p,k}$ o conjunto de todas as distribuições $u \in \mathscr{S}'$ tais que $\hat{u} \in L^1_{loc}$ e*

$$\|u\|_{p,k} := \left[(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |k(\xi)\hat{u}(\xi)|^p \,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

No caso $p = \infty$, definimos $\|u\|_{\infty,k} = \sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n} \mathrm{ess}\,|k(\xi)\hat{u}(\xi)|$.

Observamos que $(B_{p,k}, \|\cdot\|_{p,k})$ é um espaço vetorial normado. O fator $(2\pi)^{-n}$ é introduzido por conveniência, motivado pela fórmula (ii) do Teorema 3.2.9, e nos dá:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\tilde{P}(i\xi)} &= \left[(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{P}(i\xi)\hat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq m} |\partial^\alpha P(i\xi)\hat{u}(\xi)|^2 (2\pi)^{-n} \,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha [Pu](\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha [Pu]\|_{L^2}^2\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Teorema 3.4.8 (HÖRMANDER, 2005, Teo. 10.1.7, p. 7)**.** *Para quaisquer $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathscr{K}$, $B_{p,k}$ é um espaço de Banach, com a norma da Definição 3.4.7. Temos também que $\mathscr{S} \subset B_{p,k} \subset \mathscr{S}'$ no sentido topológico, isto é, a topologia em $\mathscr{S}$ (respectivamente em $B_{p,k}$) é mais fina que a topologia lá induzida por $B_{p,k}$ (respectivamente $\mathscr{S}'$). E ainda, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $B_{p,k}$, se $p < \infty$.*

Demonstração. Começamos definindo o conjunto

$$L_{p,k} := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ f \in L^1_{loc} \text{ e } (2\pi)^{-n}\|kf\|_p < \infty\}.$$

Mostraremos que vale a inclusão $\mathscr{S} \subset L_{p,k} \subset \mathscr{S}'$ no sentido topológico e, pela continuidade da Transformada de Fourier em $\mathscr{S}$ e em $\mathscr{S}'$, teremos o resultado desejado.

Primeiramente, vejamos que $L_{p,k}$ é um espaço de Banach. Se $(f_j) \subset L_{p,k}$ é uma sequência de Cauchy, então (kf_j) é uma sequência de Cauchy em L^p, logo converge para alguma $g \in L^p$. Definindo $f = g/k$, temos que $f_j \longrightarrow f$ em $L_{p,k}$. Portanto, $L_{p,k}$ é um espaço de Banach.

Notemos que se $\varphi \in \mathscr{S}$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k(\xi)\varphi(\xi)|^p \,\mathrm{d}\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |k(0)(1 + C|\xi|)^N \varphi(\xi)|^p \,\mathrm{d}\xi < \infty,$$

logo, $\varphi \in L_{p,k}$. Ainda, dada $f \in L_{p,k}$, a Desigualdade de Hölder (Teorema 2.2.22) nos dá:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)\varphi(\xi)| \,\mathrm{d}\xi \leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |k(\xi)f(\xi)|^p \,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)k^{-1}(\xi)|^{p'} \,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{p'}} < \infty, \forall\ \varphi \in \mathscr{S},$$

ou seja, $f \in \mathscr{S}'$. Com isso, temos $\mathscr{S} \subset L_{p,k} \subset \mathscr{S}'$, sendo as inclusões contínuas.

Como a Transformada de Fourier é um isomorfismo de $\mathscr{S}$ e $\mathscr{S}'$, será um isomorfismo entre $L_{p,k}$ e $\mathcal{F}^{-1}(L_{p,k}) = B_{p,k}$. Disto segue que $B_{p,k}$ é um espaço de Banach. Ainda, se $f_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}$, então $\hat{f}_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}$ e, consequentemente, em $L_{p,k}$. Logo, $f_j \longrightarrow 0$ em $B_{p,k}$. Por outro lado, se $f_j \longrightarrow 0$ em $B_{p,k}$, então $\hat{f}_j \longrightarrow 0$ em $L_{p,k}$ e, desta forma, $\hat{f}_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}'$. Pela continuidade de $\mathcal{F}^{-1} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$, segue que $f_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}'$. Logo, $\mathscr{S} \subset B_{p,k} \subset \mathscr{S}'$ também no sentido topológico.

Finalmente, sejam $1 \leq p < \infty$ e $f \in B_{p,k}$ dados. Então, temos que $\hat{f} \in L_{p,k}$ e, observando que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L_{p,k}$, existe uma sequência $(\varphi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_j \longrightarrow f$ em $L_{p,k}$. Consequentemente, a sequência $(\mathcal{F}^{-1}\varphi_j) \subset \mathscr{S}$ é tal que $\mathcal{F}^{-1}\varphi_j \longrightarrow f$ em $B_{p,k}$. Com isto, temos que $\mathscr{S}$ é denso em $B_{p,k}$. Agora, por $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ser denso em $\mathscr{S}$ e, como a convergência em $\mathscr{S}$ implica convergência em $B_{p,k}$, segue que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $B_{p,k}$. □

Teorema 3.4.9 (HÖRMANDER, 2005, Teo. 10.1.8, p. 7)**.** *Sejam $k_1, k_2 \in \mathscr{K}$ e suponhamos que exista uma constante $C > 0$ de modo que*

$$k_2(\xi) \leq Ck_1(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.19}$$

Então, segue que $B_{p,k_1} \subset B_{p,k_2}$, $1 \leq p \leq \infty$. *Reciprocamente, se existe um aberto* $X \neq \emptyset$ *tal que* $B_{p,k_1} \cap \mathscr{E}'(X) \subset B_{p,k_2}$, *então* (3.19) *é válido.*

Demonstração. Se (3.19) vale, para alguma constante $C > 0$, então, para toda $f \in B_{p,k_1}$,

$$|k_2(\xi)\hat{f}(\xi)| \leq C|k_1(\xi)\hat{f}(\xi)| \Rightarrow \|f\|_{p,k_2} \leq C\|f\|_{p,k_1}.$$

Logo, $f \in B_{p,k_2}$.

Agora, seja $X \neq \emptyset$ tal que $B_{p,k_1} \cap \mathscr{E}'(X) \subset B_{p,k_2}$. Tomemos um compacto $F \subset X$ com interior não vazio e $B := B_{p,k_1} \cap \mathscr{E}'(F)$. Vejamos que B é um subespaço vetorial fechado de B_{p,k_1}. Naturalmente B é um espaço vetorial, uma vez que B_{p,k_1} e $\mathscr{E}'(F)$ são espaços vetoriais. Além disso, se (φ_j) é uma sequência em B convergindo para $\varphi \in B_{p,k_1}$, então $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ em $\mathscr{S}'$. Logo, se $\psi \in \mathscr{S}$ tem suporte contido no complementar de F, então, $\langle \varphi, \psi \rangle = \lim_{j \longrightarrow \infty} \langle \varphi_j, \psi \rangle = 0$, ou seja, *supp*$(\varphi) \subset F$. Consequentemente, $\varphi \in B$.

Consideremos, agora, a aplicação inclusão $I : B \to B_{p,k_2}$, dada por $I(f) = f$. Mostremos que I é uma transformação linear fechada. Com efeito, claramente I é uma transformação linear e, se $(f_j, I(f_j))$ é uma sequência convergindo para $(f, g) \in B \times B_{p,k_2}$, então $f_j \longrightarrow f$ em B_{p,k_1} e $f_j \longrightarrow g$ em B_{p,k_2}. Mas a convergência em $B_{p,k}$ implica convergência em $\mathscr{S}'$, logo $f = g$ e assim $G(I)$ é fechado.

Uma vez que B_{p,k_1} é um espaço de Banach, segue que B é um espaço de Banach. Consequentemente, pelo Teorema do Gráfico Fechado (ver (BRÉZIS; ESTEBAN, 1984)), temos que I é limitado, ou seja, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{p,k_2} \leq C_1\|u\|_{p,k_1}, \ \forall\ u \in B. \tag{3.20}$$

Fixemos, agora, uma função $u \in C_c^\infty(F)$ não nula. Uma vez que podemos estender esta função para todo $\mathbb{R}^n$ (fazendo $u \equiv 0$ fora de F), segue que $u \in \mathscr{S}$ e temos $\hat{u} \in \mathscr{S}$ e $u \in \mathscr{S}'$. Assim, temos $u \in B$. Para cada $\eta \in \mathbb{R}^n$, definamos $u_\eta(x) = u(x)e^{ix\cdot\eta}$, $x \in \mathbb{R}^n$, donde, temos $u_\eta \in C_c^\infty(F)$ e, assim, $u_\eta \in B$. Observamos que

$$\hat{u_\eta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u_\eta(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot(\xi-\eta)} u(x)\,\mathrm{dx} = \hat{u}(\xi - \eta).$$

Ainda, temos:

$$\frac{k_1(\xi)}{k_1(\eta)}|\hat{u}(\xi-\eta)| \leq M_{k_1}(\xi-\eta)|\hat{u}(\xi-\eta)| \Rightarrow |k_1(\xi)\hat{u}(\xi-\eta)| \leq k_1(\eta)|M_{k_1}(\xi-\eta)\hat{u}(\xi-\eta)|,$$

e

$$\frac{k_2(\eta)}{k_2(\xi)}|\hat{u}(\xi-\eta)| \leq M_{k_2}(\eta-\xi)|\hat{u}(\xi-\eta)| \Rightarrow |k_2(\xi)\hat{u}(\xi-\eta)| \geq \left|\frac{k_2(\eta)\hat{u}(\xi-\eta)}{M_{k_2}(\eta-\xi)}\right|.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|u_\eta\|_{p,k_1} &= (2\pi)^{\frac{-n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k_1(\xi)\hat{u_\eta}(\xi)|^p \, \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (2\pi)^{\frac{-n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k_1(\xi) M_{k_1}(\xi-\eta)\hat{u}(\xi-\eta)|^p \, \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= k_1(\eta)\|u\|_{p,M_{k_1}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|u_\eta\|_{p,k_2} &= (2\pi)^{\frac{-n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k_2(\xi)\hat{u_\eta}(\xi)|^p \, \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq (2\pi)^{\frac{-n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{k_2(\eta)\hat{u}(\xi-\eta)}{M_{k_2}(\eta-\xi)} \right|^p \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= k_2(\eta)\|u\|_{p,k_3}, \end{aligned}$$

onde $k_3(\xi) = \dfrac{1}{M_{k_2}(-\xi)}$.

Por isso e por 3.20, decorre que

$$k_2(\eta)\|u\|_{p,k_3} \leq \|u_\eta\|_{p,k_2} \leq C_1\|u_\eta\|_{p,k_1} \leq C_1 k_1(\eta)\|u\|_{p,M_{k_1}}.$$

Logo, tomando $C = \dfrac{C_1\|u\|_{p,M_{k_1}}}{\|u\|_{p,k_3}} > 0$, temos $k_2(\xi) \leq Ck_1(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n$. □

Corolário 3.4.10 (HÖRMANDER, 2005, Cor. 10.1.9, p. 8)**.** *Se $k_1, k_2 \in \mathscr{K}$, então $B_{p,k_1} \cap B_{p,k_2} = B_{p,k_1+k_2}$ e, para toda $u \in B_{p,k_1+k_2}$, vale $\max\limits_{j=1,2} \|u\|_{p,k_j} \leq \|u\|_{p,k_1+k_2}$.*

Demonstração. Como $k_j \leq k_1 + k_2$, segue que $B_{p,k_1+k_2} \subset B_{p,k_j}$ e $\|u\|_{p,k_j} \leq \|u\|_{p,k_1+k_2}$, para $j = 1, 2$. Daí, $B_{p,k_1+k_2} \subset B_{p,k_1} \cap B_{p,k_2}$.

Por outro lado, se $u \in B_{p,k_1} \cap B_{p,k_2}$, segue pela Desigualdade de Minkowski que:

$$\|(k_1+k_2)\hat{u}\|_p \leq \|k_1\hat{u}\|_p + \|k_2\hat{u}\|_p.$$

Logo, $u \in B_{p,k_1+k_2}$ e $\|u\|_{p,k_1+k_2} \leq \|u\|_{p,k_1} + \|u\|_{p,k_2}$. □

O próximo resultado nos dará condições para que a aplicação inclusão definida na demonstração do Teorema 3.4.9 seja compacta.

Teorema 3.4.11 (HÖRMANDER, 2005, Teo. 10.1.10, p. 8)**.** *Sejam $k_1, k_2 \in \mathscr{K}$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ compacto tais que $B_{p,k_1} \cap \mathscr{E}'(V) \subset B_{p,k_2}$. Então, a aplicação $I : B_{p,k_1} \cap \mathscr{E}'(V) \to B_{p,k_2}$, dada por $I(u) = u$, é compacta se*

$$\frac{k_2(\xi)}{k_1(\xi)} \longrightarrow 0, \ \textit{quando}\ \xi \longrightarrow \infty. \tag{3.21}$$

Reciprocamente, se a aplicação I é compacta para algum conjunto V com interior não vazio, então (3.21) *vale.*

Demonstração. Começamos supondo válido (3.21). Dada $(u_j) \subset B_{p,k_1} \cap \mathscr{E}'(V)$ limitada, digamos que $\|u_j\|_{p,k_1} \leq 1$, sem perda de generalidade. Provaremos que existe uma subsequência de (u_j) convergente em B_{p,k_2}.

Primeiramente, tomemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de modo que $\varphi = 1$ em uma vizinhança de V. Como $supp(u_j) \subset V$, segue que $u_j = \varphi u_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí, temos que:

$$\hat{u}_j(\xi) = (\varphi u_j)\hat{\ }(\xi) = (2\pi)^{-n}(\hat{\varphi} * \hat{u}_j)(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi - \eta)\hat{u}_j(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,.$$

Multiplicando por $k_1(\xi)$ e observando que $k_1(\xi) \leq M_{k_1}(\xi - \eta)k_1(\eta)$, temos que:

$$|k_1(\xi)\hat{u}_j(\xi)| \leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |M_{k_1}(\xi - \eta)k_1(\eta)\hat{\varphi}(\xi - \eta)\hat{u}_j(\eta)|\,\mathrm{d}\eta,$$

e, aplicando a Desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}
|k_1(\xi)\hat{u}_j(\xi)| &\leq (2\pi)^{-n}\|M_{k_1}\hat{\varphi}\|_{L^{p'}}\|k_1\hat{u}_j\|_{L^p} \\
&= (2\pi)^{-n\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\right)}\|M_{k_1}\hat{\varphi}\|_{L^{p'}}\|k_1\hat{u}_j\|_{L^p} \\
&= (2\pi)^{\frac{-n}{p'}}\|M_{k_1}\hat{\varphi}\|_{L^{p'}}\|u_j\|_{p,k_1} \\
&\leq (2\pi)^{\frac{-n}{p'}}\|M_{k_1}\hat{\varphi}\|_{L^{p'}}.
\end{aligned}$$

De forma semelhante, e pelo fato de $\partial^\alpha\hat{u}_j = (2\pi)^{-n}\partial^\alpha(\hat{\varphi} * \hat{u}_j) = (2\pi)^{-n}(\partial^\alpha\hat{\varphi}) * \hat{u}_j$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n,\ j \in \mathbb{N}$, segue que $|k_1(\xi)\partial^\alpha\hat{u}_j(\xi)| \leq (2\pi)^{\frac{-n}{p'}}\|M_{k_1}\partial^\alpha\hat{\varphi}\|_{L^{p'}}$. Consequentemente, temos que a sequência $(\hat{u}_j)$ é uniformemente limitada e equicontínua em qualquer compacto de $\mathbb{R}^n$. Desta forma, a menos de subsequência, temos que a sequência $(\hat{u}_j)$ converge uniformemente em compactos.

Agora, dado $\epsilon > 0$, tomemos $S > 0$ de modo que $\dfrac{k_2(\xi)}{k_1(\xi)} < \dfrac{\epsilon}{2}$ se $|\xi| > S$. Com isso, sendo χ_1 e χ_2 as funções características, respectivamente, dos conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq S\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| > S\}$, pela Desigualdade de Minkowski temos, para $j, l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\|u_j - u_l\|_{p,k_2} &= (2\pi)^{\frac{-n}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |k_2(\xi)[\hat{u}_j(\xi) - \hat{u}_l(\xi)]|^p\,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (2\pi)^{\frac{-n}{p}}\|(\chi_1 + \chi_2)k_2(\hat{u}_j - \hat{u}_l)\|_{L^p} \\
&\leq (2\pi)^{\frac{-n}{p}}(\|\chi_1 k_2(\hat{u}_j - \hat{u}_l)\|_{L^p} + \|\chi_2 k_2(\hat{u}_j - \hat{u}_l)\|_{L^p}) \\
&\leq A\sup_{|\xi|\leq S}|\hat{u}_j(\xi) - \hat{u}_l(\xi)| + (2\pi)^{\frac{-n}{p}}\left(\int_{|\xi|>S} |k_1(\xi)\frac{\epsilon}{2}[\hat{u}_j(\xi) - \hat{u}_l(\xi)]|^p\,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq AC_{j,l} + \frac{\epsilon}{2}\|u_j - u_l\|_{p,k_1} \\
&\leq AC_{j,l} + \epsilon,
\end{aligned}$$

onde $A = (2\pi)^{\frac{-n}{p}}\left(\int_{|\xi|\leq S}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{|\xi|\leq S}|k_2(\xi)| < \infty$ e $C_{j,l} \longrightarrow 0$, quando $j, l \longrightarrow \infty$.

Desta forma, se $\rho > 0$, podemos tomar $S' > 0$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ adequados de modo que $\|u_j - u_l\|_{p,k_1} < \rho,\ j,l \geq j_0$, ou seja, a sequência (u_j) é de Cauchy em B_{p,k_2}. Consequentemente, existe $u \in B_{p,k_2}$ tal que $u_j \longrightarrow u$ em B_{p,k_2}. Portanto, a aplicação I é compacta.

Agora, suponhamos $I : B_{p,k_1} \cap \mathscr{E}'(V) \to B_{p,k_2}$ compacta, para algum $V \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Provemos que se $(\xi_j) \subset \mathbb{R}^n$ é tal que $|\xi_j| \longrightarrow \infty$, então $\dfrac{k_2(\xi_j)}{k_1(\xi_j)} \longrightarrow 0$, quando $j \longrightarrow \infty$.

Tomemos $u \in C_c^\infty(V)$ não nula e, para cada $j \in \mathbb{N}$, $u_j(x) = \dfrac{u(x)e^{ix\cdot\xi_j}}{k_1(\xi_j)}$. Assim, como no Teorema 3.4.9, segue que:

$$\|u_j\|_{p,k_1} \leq \|u\|_{p,M_{k_1}} \ e \ \|u_j\|_{p,k_2} \geq \|u\|_{p,k_3}\frac{k_2(\xi_j)}{k_1(\xi_j)}, \text{ onde } k_3(\xi) = \frac{1}{M_{k_2}(-\xi)}. \tag{3.22}$$

Da primeira desigualdade, temos que a sequência (u_j) é limitada em B_{p,k_1}, logo, por I ser compacta, (u_j) é relativamente compacta em B_{p,k_2}. Então, a menos de uma subsequência, podemos assumir que u_j converge para algum v em B_{p,k_2}. Vejamos que $u_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}'$.

Dada $\varphi \in \mathscr{S}$, temos que $\langle u_j, \varphi\rangle = \dfrac{(u\varphi)\hat{}(-\xi_j)}{k_1(\xi_j)}, j \in \mathbb{N}$. Observemos que $u\varphi \in \mathscr{S}$ e, assim, $(u\varphi)\hat{} \in \mathscr{S}$. Consequentemente, $|\langle u_j, \varphi\rangle| \leq |(u\varphi)\hat{}(-\xi_j)|\dfrac{(1 + C_1|\xi_j|)^{N_1}}{k_1(0)} \longrightarrow 0$, quando $|\xi_j| \longrightarrow \infty$. Logo, $u_j \longrightarrow 0$ em $\mathscr{S}'$.

Como a topologia de B_{p,k_2} é mais forte que a induzida por $\mathscr{S}'$, segue que $u_j \longrightarrow v$ em $\mathscr{S}'$ e, consequentemente, $u_j \longrightarrow 0$ em B_{p,k_2}. Desta forma, segue de (3.22), que:

$$\frac{k_2(\xi_j)}{k_1(\xi_j)} \leq \frac{\|u_j\|_{p,k_2}}{\|u\|_{p,k_3}} \longrightarrow 0, \text{ quando } j \longrightarrow \infty.$$

□

Estudaremos, agora, como operadores diferenciais lineares de coeficientes constantes atuam nos espaços $B_{p,k}$. Lembramos que um operador P deste tipo é escrito na forma:

$$P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha,$$

para algum inteiro não negativo m, enquanto que o símbolo de P é o polinômio dado por

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Além disso, $\tilde{P}$ é definida como no Exemplo 3.4.3. Manteremos a notação dos espaços $B_{p,k}$, para $k \in \mathscr{K}$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 3.4.12 (HÖRMANDER, 2005, Teo. 10.1.11, p. 10)**.** *Seja P um operador diferencial linear de coeficientes constantes. Se $u \in B_{p,k}$ então $Pu \in B_{p,k/\tilde{P}(i\xi)}$.*

Demonstração. Seja $u \in B_{p,k}$. Pelas propriedades da Transformada de Fourier (veja Teorema 3.1.6), segue que

$$(Pu)\hat{}(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (\partial^\alpha u)\hat{}(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) = P(i\xi)\hat{u}(\xi),$$

e ainda, observando que $\tilde{P}(i\xi) \geq |P(i\xi)|$, temos,

$$\left|\frac{(Pu)\hat{}(\xi)k(\xi)}{\tilde{P}(i\xi)}\right| \leq |k(\xi)\hat{u}(\xi)| \Rightarrow \|Pu\|_{p,k/\tilde{P}(i\xi)} \leq \|u\|_{p,k}.$$

Logo, $Pu \in B_{p,k/\tilde{P}(i\xi)}$. □

Teorema 3.4.13 (HÖRMANDER, 2005, Teo. 10.1.12, p. 10)**.** *Se $u_1 \in B_{p,k_1} \cap \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $u_2 \in B_{\infty,k_2}$ então $u_2 * u_1 \in B_{p,k_1k_2}$ e vale*

$$\|u_2 * u_1\|_{p,k_1k_2} \leq \|u_1\|_{p,k_1}\|u_2\|_{\infty,k_2} \tag{3.23}$$

Demonstração. Sejam $u_2 \in \mathscr{S}'$, $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathscr{S}$. Como $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, existem um compacto K, um inteiro não negativo m e uma constante $C_1 > 0$ tais que:

$$|\check{u}_1 * \varphi(x)| = |\langle u_1, \varphi_x\rangle| \leq C_1 \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{y\in K} |\partial^\alpha \varphi_x(y)| = C_1 \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{y\in K-\{x\}} |\partial^\alpha \varphi(y)|.$$

Com isso, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$|x^\alpha \partial^\beta (\check{u}_1 * \varphi)(x)| \leq C_1 \sum_{|\gamma|\leq m} \sup_{y\in K-\{x\}} |x^\alpha||\partial^{\gamma+\beta}\varphi(y)| \leq C_1 \sum_{|\gamma|\leq m} \sup_{y\in \mathbb{R}^n} |x^\alpha||\partial^{\gamma+\beta}\varphi(y)| \leq C,$$

onde $0 < C < \infty$ é uma constante independente de $x \in \mathbb{R}^n$. Desta forma, segue que $\check{u}_1 * \varphi \in \mathscr{S}$ e, ainda, se (φ_j) é uma sequência convergindo para zero em $\mathscr{S}$, então $\check{u}_1 * \varphi_j \longrightarrow 0$ também em $\mathscr{S}$.

Desta forma, segue que

$$\langle u_2 * u_1, \varphi\rangle = [(u_2 * u_1) * \check{\varphi}](0) = [u_2 * (u_1 * \check{\varphi})](0) = \langle u_2, \check{u}_1 * \varphi\rangle$$

está bem definida e é contínua, ou seja, $u_2 * u_1 \in \mathscr{S}'$. Agora,

$$\langle (u_2 * u_1)\hat{}, \varphi\rangle = \langle u_2, \check{u}_1 * \hat{\varphi}\rangle = \left\langle u_2, (2\pi)^n \left(\left(\mathcal{F}^{-1}\check{u}_1\right)\varphi\right)\hat{}\right\rangle = \left\langle \hat{u}_2, (2\pi)^n \left(\mathcal{F}^{-1}\check{u}_1\right)\varphi\right\rangle.$$

Como $\check{u}_1 = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{u}}_1$, segue que $\langle (u_2 * u_1)\hat{}, \varphi\rangle = \langle \hat{u}_2, \hat{u}_1\varphi\rangle$ e, uma vez que $\hat{u}_1 \in C^\infty$, temos $(u_2 * u_1)\hat{} = \hat{u}_2\hat{u}_1 \in L^1_{loc}$.

Agora, notando que $|k_2\hat{u}_2| \leq \|u_2\|_{\infty,k_2}$ (a menos de um conjunto de medida nula), temos:

$$\|u_1 * u_2\|_{p,k_1k_2} = (2\pi)^{\frac{-n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k_1(\xi)k_2(\xi)\hat{u}_1(\xi)\hat{u}_2(\xi)|^p \,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u_2\|_{\infty,k_2}\|u_1\|_{p,k_1} < \infty,$$

o que garante $u_2 * u_1 \in B_{p,k_1k_2}$. □

Segue mais um resultado útil na demonstração do teorema principal desse trabalho, o qual assegura que $B_{p,k}$ é fechado pela multiplicação por elementos de $\mathscr{S}$.

Teorema 3.4.14 (HÖRMANDER, 2005, Teo. 10.1.15, p. 15). *Se $u \in B_{p,k}$ e $\varphi \in \mathscr{S}$ então $\varphi u \in B_{p,k}$ e vale*

$$\|\varphi u\|_{p,k} \leq \|\varphi\|_{1,M_k}\|u\|_{p,k} \tag{3.24}$$

Demonstração. Sejam $u \in B_{p,k}$ e $\varphi \in \mathscr{S}$. Então, se $v = u\varphi$, pela Proposição 3.2.11, segue que $\hat{v}(\xi) = (u\varphi)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{-n}(\hat{\varphi} * \hat{u})(\xi) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)\,\mathrm{d}\eta,\ \xi \in \mathbb{R}^n$.

Desta forma, temos $k(\xi)\hat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi-\eta)k(\xi)\hat{u}(\eta)\,\mathrm{d}\eta$, e, uma vez que $k(\xi) \leq M_k(\xi-\eta)k(\eta)$, segue

$$|k(\xi)\hat{v}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)M_k(\xi-\eta)||\hat{u}(\eta)k(\eta)|\,\mathrm{d}\eta = (2\pi)^{-n}(|\hat{\varphi}M_k| * |\hat{u}k|)(\xi).$$

Observamos que $\hat{\varphi}M_k \in L^1$, já que $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}$ e $M_k(\xi) \leq (1+C|\xi|)^N$, para certas constantes $C, N > 0$. Pela Desigualdade de Young (veja Teorema 2.2.27) temos que $\||\hat{\varphi}M_k|*|\hat{u}k|\|_{L^p} \leq \|\hat{\varphi}M_k\|_{L^1}\|\hat{u}k\|_{L^p}$. Consequentemente, $\|k\hat{v}\|_{L^p} \leq (2\pi)^{-n}\|\hat{\varphi}M_k\|_{L^1}\|\hat{u}k\|_{L^p}$ e, portanto $\|u\varphi\|_{p,k} \leq \|\varphi\|_{1,M_k}\|u\|_{p,k}$, como queríamos demonstrar.

□

Este teorema torna possível definir um subespaço local de $B_{p,k}$, os espaços $B_{p,k}^{loc}$. A ideia por trás de tais espaços, é que seus elementos se comportam localmente como os elementos de $B_{p,k}$, mas não possuem restrições de crescimento no infinito. Dados $k \in \mathscr{K}$, $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço local de $B_{p,k}$, como

$$B_{p,k}^{loc} := \{u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n);\ \varphi u \in B_{p,k},\ \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Muitos resultados provados para os espaços $B_{p,k}$ se mantém válidos também para os espaços $B_{p,k}^{loc}$. Os mais relevantes para nossos objetivos são dados abaixo.

Teorema 3.4.15 (HÖRMANDER, 2005, Teo. 10.1.22, p. 14). *Se $u \in B_{p,k}^{loc}$, então $Pu \in B_{p,k/\tilde{P}(i\xi)}^{loc}$.*

Demonstração. Dados $u \in B_{p,k}^{loc}$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tomemos $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi = 1$ em *supp*(φ). Pelas propriedades dos espaços $B_{p,k}$, temos que $\psi u \in B_{p,k}$ e $P(\psi u) \in B_{p,k/\tilde{P}(i\xi)}$. Consequentemente, $\varphi Pu = \varphi P(\psi u) \in B_{p,k/\tilde{P}(i\xi)}$, como queríamos provar. □

Teorema 3.4.16 (HÖRMANDER, 2005, Teo. 10.1.23, p. 14). *Se $u \in B_{p,k}^{loc}$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\varphi u \in B_{p,k}^{loc}$.*

Demonstração. Se $u \in B_{p,k}^{loc}$, então $\psi u \in B_{p,k}$, para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dada $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que $\psi\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, e, portanto, $\psi(\varphi u) \in B_{p,k}$. □

Teorema 3.4.17 (HÖRMANDER, 2005, Teo. 10.1.24, p. 14)**.** *Sejam $u_1 \in B_{p,k_1} \cap \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $u_2 \in B^{loc}_{\infty,k_2}$. Então, $u_1 * u_2 \in B^{loc}_{p,k_1k_2}$.*

Demonstração. Primeiramente observamos que $u_1 * u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ está bem definida (veja Definição 2.4.36), uma vez que $u_1 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Agora, dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, devemos mostrar que $\varphi(u_1 * u_2) \in B_{p,k_1k_2}$. Para isso, consideremos o conjunto

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n;\ (x + supp(u_1)) \cap supp(\varphi) \neq \emptyset\}.$$

Assim, segue que $x \in V$ se, e somente se, $x \in supp(\varphi) - supp(u_1)$ e, logo, V é compacto. Com isso, podemos escolher $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de modo que $\psi \geq 0$ e $\psi = 1$ em V. Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} supp(u_1 * u_2 - u_1 * (\psi u_2) \cap supp(\varphi)) &= supp(u_1 * ((1-\psi)u_2)) \cap supp(\varphi) \\ &\subset [supp(u_1) + supp((1-\psi)u_2)] \cap supp(\varphi) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

pois se $y + z = x \in supp(\varphi)$, com $y \in supp(u_1)$ e $z \in supp((1-\psi)u_2)$, então $z = x - y \in V$, o que é uma contradição já que $(1-\psi)u_2 = 0$ em V.

Logo, segue que $\varphi(u_1 * u_2 - u_1 * (\psi u_2)) \equiv 0$, ou seja, $\varphi(u_1 * u_2) \equiv \varphi(u_1 * (\psi u_2)$. Como $u_2 \in B^{loc}_{\infty,k_2}$, temos $\psi u_2 \in B_{\infty,k_2}$ e, pelo Teorema 3.4.13, $u_1 * (\psi u_2) \in B_{p,k_1k_2}$. Portanto, $\varphi(u_1 * u_2) \in B_{p,k_1k_2}$ e assim $u_1 * u_2 \in B^{loc}_{p,k_1k_2}$. $\square$

4 Teorema Principal

Neste capítulo, demonstraremos o resultado principal da dissertação, isto é, o Teorema 1.0.1. Na Seção 4.1 apresentamos resultados auxiliares que serão usados na Seção 4.2 para demonstrar o resultado principal. Na Seção 4.3 mostramos algumas aplicações da existência de soluções fundamentais regulares e por fim, na Seção 4.4, exploramos algumas relações entre operadores hipoelípticos e suas soluções fundamentais. Os resultados aqui expostos seguem de (HÖRMANDER, 2005), (ORTNER; WAGNER, 1997), (FOLLAND; JOSEPH; THANGAVELU, 1983) e (HOUNIE, 1979).

4.1 Resultados Auxiliares

Fixado $m \in \{0, 1, 2, ...,\}$ indicaremos por $\mathbb{C}[x]_m$ o espaço vetorial dos polinômios de coeficientes complexos com grau menor do que ou igual a m definidos em $\mathbb{C}^n$. Neste espaço consideramos a norma dada por:

$$Q(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha \mapsto \|Q\| = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha|^2}.$$

Lema 4.1.1. *Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ compacto. Então a aplicação $\Phi : \{Q \in \mathbb{C}[x]_m; \|Q\| = 1\} \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(Q) = \min_{z \in X} |Q(z)|$, é contínua.*

Demonstração. Seja X compacto tal que $X \subset \{x \in \mathbb{C}^n; |x| \leq A\}$. Dado $\rho > 0$, tomemos $\varepsilon = \rho/2(1 + A)^m C_1$, onde $C_1 = \sum_{|\alpha| \leq m} 1$. Desta forma, se $P, Q \in \mathbb{C}[x]_m$ estão definidos por

$$P(\zeta) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \zeta^\alpha,\ Q(\zeta) = \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha \zeta^\alpha,\ \ \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

e são tais que $\|P - Q\| < \varepsilon$, então $|a_\alpha - b_\alpha| < \varepsilon$, para todo $|\alpha| \leq m$. Consequentemente, para todo $z \in X$:

$$\begin{aligned}
|P(z) - Q(z)| &= \left| \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha z^\alpha - \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha z^\alpha \right| \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha - b_\alpha||z|^{|\alpha|} \\
&< \varepsilon \sum_{|\alpha| \leq m} A^{|\alpha|} \\
&\leq \varepsilon(1 + A)^m \sum_{|\alpha| \leq m} 1 \\
&< \rho.
\end{aligned}$$

Agora, como $|P|$ e $|Q|$ são funções contínuas e X é compacto, existem $z_P, z_Q \in X$ tais que:

$$\Phi(P) = |P(z_P)|\,,\ \Phi(Q) = |Q(z_Q)|.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\Phi(P) \leq \Phi(Q)$. Com isto, e pela desigualdade acima, temos que

$$|Q(z_P)| - \rho < |P(z_P)| < |Q(z_P)| + \rho$$

e

$$|P(z_Q)| - \rho < |Q(z_Q)| < |P(z_Q)| + \rho.$$

Logo, segue que $|Q(z_Q)| - |P(z_P)| \leq |Q(z_P)| - |P(z_P)| < \rho$, ou seja

$$|\Phi(Q) - \Phi(P)| < \rho,$$

sempre que $\|P - Q\| < \varepsilon$. Portanto, Φ é contínua. □

Lema 4.1.2. *Seja $X_j \subset \mathbb{C}^n$ compacto, onde $j \in \{1, 2, \ldots, L\}$. Então, a aplicação Ψ : $\{Q \in \mathbb{C}[x]_m; \|Q\| = 1\} \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\Psi(Q) = \max\{\min\{|Q(z)|; z \in X_j\}; 1 \leq j \leq L\},$$

é contínua.

Demonstração. Primeiramente observamos que, para cada $j \in \{1, \ldots, L\}$, a aplicação $\Phi_j : \{Q \in \mathbb{C}[x]_m; \|Q\| = 1\} \to \mathbb{R}$, $\Phi_j(Q) = \min_{z \in X_j} |Q(z)|$, é contínua pelo Lema 4.1.1. Agora, se tomarmos $A = \max_{1 \leq j \leq L} \{A_j; X_j \subset \{x \in \mathbb{C}^n; |x| \leq A_j\}\}$, seguindo a demonstração do Lema 4.1.1, obtemos

$$|\Phi_j(Q) - \Phi_j(P)| < \rho,\ j = 1, \ldots, L,$$

sempre que $\|Q - P\| < \varepsilon$, onde $\varepsilon = \rho/2(1 + A)^m C_1$.

Desta forma, analogamente ao que foi feito no Lema 4.1.1, é possível mostrar que $|\Psi(Q) - \Psi(P)| < \rho$, desde que $\|Q - P\| < \varepsilon$, o que conclui a demonstração. □

Lema 4.1.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par e analítica. Então $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(|x|)$, é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Observamos que fora da origem, pela Regra da Cadeia, a composição $f \circ |\cdot|$ é de classe C^∞. Portanto, basta verificarmos que $g \in C^\infty$ numa vizinhança da origem.

Por hipótese, a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)t^j}{j!}$ converge, para todo t suficientemente próximo de 0. Mas, como f é par, podemos escrever esta série como $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(2j)}(0)(t^2)^j}{(2j)!}$.

Assim, a série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(2j)}(0)(|x|^2)^j}{(2j)!}$ converge para $x \in \mathbb{R}^n$ numa vizinhança da origem, uma vez que possui os mesmos coeficientes de uma série convergente. Desta forma, por (KRANTZ; PARKS, 2002, Cor 1.1.15, p 10), a função

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(2j)}(0)(|x|^2)^j}{(2j)!}$$

é de classe C^∞ numa vizinhança da origem, como queríamos demonstrar.

$\square$

Lema 4.1.4. *Sejam* $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ *fixados e* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função polinomial. Então*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{\varepsilon' t}}{\cosh(\varepsilon t)} P(t) = 0.$$

Demonstração. Considerando $\varepsilon' = \varepsilon - \tau$, com $0 < \tau < \varepsilon$ escolhido de modo apropriado, temos por L'Hôpital:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|P(t)|}{e^{\tau t}} = 0. \tag{4.1}$$

Da definição de $\cosh \varepsilon t$ segue que

$$\left| \frac{e^{\varepsilon' t} P(t)}{\cosh(\varepsilon t)} \right| \leq \frac{2e^{\varepsilon' t}}{e^{\varepsilon t}} |P(t)| = 2\frac{|P(t)|}{e^{\tau t}}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

De (4.1) e (4.2) segue o resultado. $\square$

Observação 4.1.5. $\lim_{t \to \infty} \tanh(t) = 1.$

Com efeito, basta notarmos que $\tanh(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$ e que $e^{-2t} \longrightarrow 0$, quando $t \longrightarrow \infty$.

Lema 4.1.6. *Sejam* $\varepsilon > 0$ *e* $\eta \in \mathbb{C}^n$ *fixados. Considere a função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = e^{\eta \cdot x}/\cosh(\varepsilon|x|), x \in \mathbb{R}^n$. *Dado* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *temos que* $\partial^\alpha f$ *é uma soma finita de parcelas da forma:*

$$C\eta^{\tilde{\beta}} \frac{x^\beta}{|x|^l} f(x)(\tanh(\varepsilon|x|))^k, \ x \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

sendo $k, l \in \mathbb{N}, \beta, \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^n$ *e* C *uma constante que não depende* x.

Demonstração. Primeiramente, observamos que pelo Lema 4.1.3, temos $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Agora, a verificação deste Lema será feita por indução em $|\alpha|$. Nessa demonstração, $x \in \mathbb{R}^n$ é arbitrário.

Se $|\alpha| = 1$ então $\alpha = e_j$ para algum $j = 1, \ldots, n$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \frac{\eta_j e^{\eta \cdot x}\cosh(\varepsilon|x|) - e^{\eta\cdot x}\operatorname{senh}(\varepsilon|x|)\varepsilon x_j |x|^{-1}}{(\cosh(\varepsilon|x|))^2} \\
&= \frac{\eta_j e^{\eta\cdot x}}{\cosh(\varepsilon|x|)} - \frac{\varepsilon x_j}{|x|}\frac{e^{\eta\cdot x}}{\cosh(\varepsilon|x|)}\frac{\operatorname{senh}(\varepsilon|x|)}{\cosh(\varepsilon|x|)} \\
&= \eta_j f(x) - \frac{\varepsilon x_j}{|x|} f(x)\tanh(\varepsilon|x|).
\end{aligned}$$

Suponhamos que o resultado seja válido para todo $|\alpha| \leq m \in \mathbb{N}$. Provemos sua validade no caso $|\alpha| = m+1$. Então, podemos escrever $\alpha = \alpha' + e_j$, onde $|\alpha'| = m$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. Com isso, temos que $\partial^\alpha f = \dfrac{\partial}{\partial x_j}[\partial^{\alpha'} f]$. Usando a hipótese de indução, temos que cada parcela de $\partial^\alpha f$ será do tipo:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{C\eta^{\tilde\beta}x^\beta}{|x|^l} f(x)(\tanh(\varepsilon|x|))^k\right], \ \tilde\beta, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad |\beta| \leq l \ \text{ e } \ k \leq m.$$

Escrevamos $\varphi(x) = \dfrac{C\eta^{\tilde\beta}x^\beta}{|x|^l}$ e $\psi(x) = f(x)(\tanh(\varepsilon|x|))^k$. Assim, basta calcularmos $\dfrac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_j}(x)$. Notando que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) = \frac{\beta_j C\eta^{\tilde\beta}x^{\beta-e_j}}{|x|^l} - \frac{C\eta^{\tilde\beta}x^{\beta+e_j}l}{|x|^{l+2}},$$

e, por outro lado:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)(\tanh(\varepsilon|x|))^k + \frac{k\varepsilon x_j}{|x|}f(x)\frac{(\tanh(\varepsilon|x|))^{k-1}}{(\cosh(\varepsilon|x|))^2}.$$

Podemos escrever cada parcela de $\partial^\alpha f$ como:

$$\begin{aligned}
&C\eta^{\tilde\beta}\left[\frac{\beta_j x^{\beta-e_j}}{|x|^l} - \frac{l x^{\beta+e_j}}{|x|^{l+2}}\right] f(x)(\tanh(\varepsilon|x|))^k + \\
&+ \frac{\eta^{\tilde\beta}x^\beta}{|x|^l}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)(\tanh(\varepsilon|x|))^k + \frac{k\varepsilon x_j}{|x|}f(x)\frac{(\tanh(\varepsilon|x|))^{k-1}}{(\cosh(\varepsilon|x|))^2}\right],
\end{aligned}$$

donde, após substituirmos a expressão conhecida para $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ e observarmos a identidade $\dfrac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$, obtemos o resultado desejado. □

Lema 4.1.7. *Se f está definida como no Lema 4.1.6 e $|\eta| < \varepsilon$, então $f \in \mathscr{S}$.*

Demonstração. Do Lema 4.1.6 segue que f é analítica. Logo, pelo Lema 3.1.2, basta provarmos que dados $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^n$, temos que $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x^\gamma \partial^\alpha f(x)| = 0$.

Observemos que, pelo Lema 4.1.6, como η está fixado, é suficiente verificarmos que, dados $k, l \in \mathbb{N}$ e $\gamma \in \mathbb{N}^n$

$$\lim_{|x|\to\infty} \left| \frac{x^\gamma}{|x|^l} f(x)(\tanh(\varepsilon|x|))^k \right| = 0.$$

Mas a aplicação $x \mapsto 1/|x|^l, x \neq 0$, é limitada desde que $|x|$ seja suficientemente grande. Além disso $|\tanh(\varepsilon|x|)| \leq 1, x \in \mathbb{R}^n$. Logo, é suficiente provarmos que

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^\gamma f(x)| = 0.$$

Mas, notemos que, por *Cauchy-Schwarz*:

$$\begin{aligned} |x^\gamma f(x)| &= |x^\gamma| \frac{e^{\eta \cdot x}}{\cosh(\varepsilon|x|)} \\ &\leq |x|^{|\gamma|} \frac{e^{|\eta||x|}}{\cosh(\varepsilon|x|)}, x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Como $|\eta| < \varepsilon$, pelo Lema 4.1.4 temos o resultado desejado. □

Se $\zeta \in \mathbb{C}^n$ é arbitrário e $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ é um operador diferencial parcial linear de coeficientes constantes, então o operador $P(\partial + \zeta) : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$P(\partial+\zeta)u = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (\partial+\zeta)^\alpha u := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \zeta^\beta \partial^{\alpha-\beta} u. \tag{4.3}$$

No próximo lema é conveniente denotar P por $P(\partial)$.

Lema 4.1.8. *Seja* $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$, *com* $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq m$. *Dados* $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $v \in \mathscr{S}'$, *temos:*

(i) $P(\partial)(e^{\zeta\cdot x}u) = e^{\zeta\cdot x} P(\partial+\zeta)u$;

(ii) $P(\partial+\zeta)\mathcal{F}^{-1}v = \mathcal{F}^{-1}(P(i\xi+\zeta)v)$.

Demonstração. (i) Pela Regra de Leibniz temos:

$$P(\partial)(e^{\zeta\cdot x}u) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta e^{\zeta\cdot x} \partial^{\alpha-\beta} u.$$

Como $\partial^\beta e^{\zeta\cdot x} = \zeta^\beta e^{\zeta\cdot x}$, segue que:

$$\begin{aligned} P(\partial)(e^{\zeta\cdot x}u) &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \zeta^\beta e^{\zeta\cdot x} \partial^{\alpha-\beta} u \\ &= e^{\zeta\cdot x} \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \zeta^\beta \partial^{\alpha-\beta} u \\ &= e^{\zeta\cdot x} P(\partial+\zeta)u, \end{aligned}$$

sendo que na última igualdade usamos (4.3).

(ii) Primeiramente, observemos que de (4.3) resulta

$$P(\partial+\zeta)\mathcal{F}^{-1}v = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \zeta^\beta \partial^{\alpha-\beta}(\mathcal{F}^{-1}v). \tag{4.4}$$

Agora, pelo Teorema 3.2.9, temos que $\mathcal{F}(\partial^{\alpha-\beta}v) = (i\xi)^{\alpha-\beta}\hat{v}$. Assim, segue que $(i\xi)^{\alpha-\beta}v = \mathcal{F}(\partial^{\alpha-\beta}\mathcal{F}^{-1}v)$, e, consequentemente $\mathcal{F}^{-1}((i\xi)^{\alpha-\beta}v) = \partial^{\alpha-\beta}\mathcal{F}^{-1}v$.

Com isso, de (4.4) temos que

$$P(\partial+\zeta)\mathcal{F}^{-1}v = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \zeta^\beta \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^{\alpha-\beta}v). \tag{4.5}$$

Por outro lado, pelo Teorema Binomial, segue que

$$\mathcal{F}^{-1}(P(i\xi+\zeta)v) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (i\xi+\zeta)^\alpha v\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \zeta^\beta (i\xi)^{\alpha-\beta}v\right),$$

logo

$$\mathcal{F}^{-1}(P(i\xi+\zeta)v) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \zeta^\beta \mathcal{F}^{-1}((i\xi)^{\alpha-\beta}v). \tag{4.6}$$

De (4.5) e (4.6) segue o resultado desejado. □

O próximo resultado segue da Regra de Leibniz.

Lema 4.1.9. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n, (f_k)$ uma sequência em $C^\infty(\mathbb{R}^n), f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tais que $\partial^\beta f_k \to \partial^\beta f$ uniformemente em X, para $\beta \in \mathbb{N}^n$ satisfazendo $|\beta| \leq |\alpha|$, e existe $C_\alpha > 0$ satisfazendo $|\partial^\beta g(x)| \leq C_\alpha, x \in X, |\beta| \leq |\alpha|$. Então $\partial^\alpha(gf_k) \to \partial^\alpha(gf)$ uniformemente em X.*

Demonstração. Observamos que pela Regra de Leibniz (ver Teorema 2.1.2) segue:

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(gf_k - gf)(x)| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta g(x)||\partial^{\alpha-\beta}f_k(x) - \partial^{\alpha-\beta}f(x)| \\
&\leq C_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta}f_k(x) - \partial^{\alpha-\beta}f(x)|,\ x \in X.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.1.10. *Seja $T : [a,b] \subset \mathbb{R} \to B_{p,k}$ contínua, $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathscr{K}$. Então, dadas $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, valem:*

$$\left\langle \int_a^b fT(z)\,\mathrm{dz}, \varphi \right\rangle = \int_a^b \langle fT(z), \varphi\rangle,$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_a^b fT(z)\,\mathrm{dz} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_j}(fT(z))\,\mathrm{dz},\ j = 1, \ldots, n.$$

Observação 4.1.11. $\int_a^b T(z)\,\mathrm{dz} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *atua na variável* $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Primeiramente, observamos que, pelo Teorema 2.5.5, as somas integrais de Riemann-Stieltjes da função T convergem para $\int_a^b T(z)\,\mathrm{dz}$ em $B_{p,k}$, logo, pelo Corolário 2.5.7, a convergência também ocorre em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Desta forma, temos

$$\left\langle \int_a^b T(z)\,\mathrm{dz}, \varphi \right\rangle = \int_a^b \langle T(z), \varphi\rangle\,\mathrm{dz},\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Mais ainda, como $f\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, para quaisquer $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue que:

$$\begin{aligned} \left\langle \int_a^b fT(z)\,\mathrm{dz}, \varphi \right\rangle &= \left\langle f\int_a^b T(z)\,\mathrm{dz}, \varphi \right\rangle \\ &= \int_a^b \langle T(z), (f\varphi)\rangle\,\mathrm{dz} \\ &= \int_a^b \langle fT(z), \varphi\rangle\,\mathrm{dz}\,. \end{aligned}$$

Finalmente, se $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\int_a^b fT(z)\,\mathrm{dz}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \int_a^b fT(z)\,\mathrm{dz}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \int_a^b \left\langle \frac{\partial (fT)}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle \mathrm{dz}\,.$$

□

4.2 Demonstração do teorema principal

Nesta seção, demonstraremos o Teorema 1.0.1. Para isso, faremos a demonstração do resultado abaixo, baseada em (ORTNER; WAGNER, 1997):

Teorema 4.2.1. *Seja* P *um operador linear de coeficientes constantes não nulo. Então para todo* $\varepsilon > 0$, *existe uma solução fundamental* E *de* P *tal que* $E/\cosh(\varepsilon|\cdot|) \in B_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$.

Demonstração. Seja m a ordem de P. Se $m = 0$ então, como P não é identicamente nulo, segue que $P \equiv c$ para algum $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Então a única solução fundamental de P é dada por $E = \delta/c$. Além disso $\tilde{P}(i\xi) = c$ e $E \in B_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$. Agora, pelo Lema 4.1.6 temos que $1/\cosh(\varepsilon|\cdot|) \in \mathscr{S}$. Do Teorema 3.4.14, segue que $E/\cosh(\varepsilon|\cdot|) \in B_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$.

A demonstração do Teorema 4.2.1 para o caso $m > 0$ será dividia em 8 etapas. Suponhamos, a partir de agora, $m > 0$. Fixemos $\varepsilon > 0$ arbitrário e $\varepsilon' \in \left(0, \dfrac{\varepsilon}{m^2\sqrt{n}}\right)$. Definimos a aplicação $M : \{Q \in \mathbb{C}[x]_m; \|Q\| = 1\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$M(Q) = \max\{\min\{|Q(z\varepsilon' j_0(j_1, \ldots, j_n))|; z \in \mathbb{S}^1\}; j = (j_0, \ldots, j_n) \in \{0, \ldots, m\}^{n+1}\}.$$

Etapa 1. *M é uma aplicação contínua e estritamente positiva.*

Com efeito, pelos Lemas 4.1.1 e 4.1.2 temos que M é contínua. Vejamos que M é estritamente positiva. Supomos que não, isto é, $M(Q) = 0$ para algum $Q \in \mathbb{C}[x]_m$, com $\|Q\| = 1$. Desta forma, $\min_{z \in \mathbb{S}^1} |Q(z\varepsilon' j_0(j_1, \ldots, j_n))| = 0$, para todo $j \in \{0, \ldots, m\}^{n+1}$. Consequentemente, existe $z_j \in \mathbb{S}^1$ tal que $Q(z_j \varepsilon' j_0(j_1, \ldots, j_n)) = 0$. Mas isto implica que, para cada $(j_1, \ldots, j_n) \in \{0, \ldots, m\}^n$, o polinômio $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dado por $q(z) = Q(z(j_1, \ldots, j_n))$, possui mais de m raízes e, portanto, é nulo. Consequentemente, temos que Q é identicamente nulo, contrariando o fato de $\|Q\| = 1$. Logo, $M > 0$ concluindo a prova da Etapa 1.

Para simplificar a notação, escreveremos $\eta_j := \varepsilon' j_0(j_1, \ldots, j_n)$, para cada $j = (j_0, \ldots, j_n) \in \{0, \ldots, m\}^{n+1}$ e consideraremos $C > 0$ como o mínimo atingido pela aplicação M.

Para a próxima etapa, usaremos a notação P_ζ, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, para representar o polinômio $P_\zeta(\xi) := P(\xi + \zeta)$.

Etapa 2. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ existe $j \in \{0, \ldots, m\}^{n+1}$ tal que

$$\tilde{P}(i\xi) = \|P_{i\xi}\| \leq \frac{1}{C} |P(i\xi + z\eta_j)|, \; \forall z \in \mathbb{S}^1. \tag{4.7}$$

Com efeito, dado $\xi \in \mathbb{R}^n$, segue que $P_{i\xi} \in \mathbb{C}[x]_m$. Tomando $Q := P_{i\xi}/\|P_{i\xi}\|$, temos $Q \in \mathbb{C}[x]_m$ e $\|Q\| = 1$. Com isso, existe $j \in \{0, \ldots, m\}^{n+1}$ de modo que $M(Q) = \min\{|Q(z\eta_j)|; z \in \mathbb{S}^1\}$. Portanto, temos $C \leq |Q(z\eta_j)| = |P(i\xi + z\eta_j)|/\|P_{i\xi}\|$, para todo $z \in \mathbb{S}^1$.

Agora, observe que usando Série de Taylor temos

$$P_{i\xi}(\zeta) = P(i\xi + \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha P(i\xi) \zeta^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha P(i\xi) \zeta^\alpha,$$

e, desta forma segue que $\|P_{i\xi}\| = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha P(i\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \tilde{P}(i\xi)$.

Logo, temos $\tilde{P}(i\xi) \leq \dfrac{1}{C} |P(i\xi + z\eta_j)|$ e isso conclui a prova da Etapa 2.

Agora, consideremos em $\{0, \ldots, m\}^{n+1}$ a relação de ordem do dicionário, ou seja, $j, l \in \{0, \ldots, m\}^{n+1}$ e $j < l$ se, e somente se, $j_0 < l_0$ ou $j_0 = l_0 \, e \, j_1 < l_1$ ou $j_0 = l_0, j_1 = l_1 \, e \, j_2 < l_2 \ldots$ (a particular escolha da relação de ordem não é relevante para a demonstração do Teorema 4.2.1).

Para cada $j \in \{0, \ldots, m\}^{n+1}$, consideremos χ_j como a função característica do conjunto dos pontos $\xi \in \mathbb{R}^n$ tais que j é o menor elemento que satisfaz (4.7).

Etapa 3. Para cada $j \in \{0, \ldots, m\}^{n+1}$ temos que χ_j é uma função mensurável.

Com efeito, assumiremos que $\{0, \ldots, m\}^{n+1} = \{J_1, \ldots, J_L\}$, onde $J_i < J_j$ se $i < j$. Também faremos um abuso de notação indicando apenas por j, tanto o elemento $j = J_j \in \{0, \ldots, m\}^{n+1}$ como $j \in \{1, \ldots, L\}$, ficando subentendido o contexto.

Definimos $\varphi_{j,z} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi_{j,z}(\xi) = |P(i\xi + z\eta_j)|/\tilde{P}(i\xi)$, para cada $j \in \{1, \ldots, L\}, z \in \mathbb{S}^1$. Temos que $\varphi_{j,z}$ é contínua, para quaisquer $1 \leq j \leq L, z \in \mathbb{S}^1$. Assim, o conjunto $X_{j,z} := \varphi_{j,z}^{-1}([C, +\infty))$ é fechado. Disto, segue que $X_j := \bigcap_{z\in\mathbb{S}^1} X_{j,z}$ também é fechado e, portanto, mensurável, para todo $j \in \{1, \ldots, L\}$.

Agora, podemos definir $A_1 = X_1$ e $A_j = X_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} X_i$, para $2 \leq j \leq L$, donde segue que A_j é mensurável e $\chi_j(\xi) = 1$ se, e somente se, $\xi \in A_j$, para todo $j \in \{1, \ldots, L\}$, o que prova a mensurabilidade de χ_j, concluindo assim a Etapa 3.

A estimativa (4.7) também nos mostra que $|\chi_j(\xi)/P(i\xi + z\eta_j)| \leq (C\tilde{P}(i\xi))^{-1}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Agora, como P não é identicamente nulo, temos que $\partial^\alpha P(\xi) = a_\alpha \neq 0$, para algum $\alpha \in \mathbb{N}^n$, assim segue que $\tilde{P}(\xi) \geq |a_\alpha| > 0, \xi \in \mathbb{R}^n$. Consequentemente, a função $\xi \mapsto \chi_j(\xi)/P(i\xi + z\eta_j)$ é limitada por $1/|a_\alpha|$ e, pelo Exemplo 3.2.6, tal função define uma distribuição temperada. Desta forma, sua Transformada Inversa de Fourier está bem definida. Mostraremos, a seguir, que $\mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{\chi_j(\xi)}{P(i\xi + z\eta_j)}\right) \in B_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$. De fato,

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\chi_j(\xi)}{P(i\xi + z\eta_j)}\right)\right\|_{\infty,\tilde{P}(i\xi)} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \text{ess} \left|\frac{\chi_j(\xi)}{P(i\xi + z\eta_j)}\tilde{P}(i\xi)\right| \leq \frac{1}{C} < \infty. \tag{4.8}$$

Etapa 4. Para todo $j \in \{0, \ldots, m\}^{n+1}$ temos que a aplicação $\Psi_j : \mathbb{S}^1 \to B_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$, dada por $\Psi_j(z) = \mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{\chi_j(\xi)}{P(i\xi + z\eta_j)}\right), z \in \mathbb{S}^1$, é contínua.

De fato, dados $z, w \in \mathbb{S}^1$, utilizando a fórmula de Taylor e (4.7):

$$\begin{aligned}
\|\Psi_j(z) - \Psi_j(w)\|_{\infty,\tilde{P}(i\xi)} &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \text{ess} \left|\left(\frac{\chi_j(\xi)}{P(i\xi + z\eta_j)} - \frac{\chi_j(\xi)}{P(i\xi + w\eta_j)}\right)\tilde{P}(i\xi)\right| \\
&\leq \sup_{\xi\in A_j} \text{ess} \left|\tilde{P}(i\xi)\frac{P(i\xi + w\eta_j) - P(i\xi + z\eta_j)}{P(i\xi + z\eta_j)P(i\xi + w\eta_j)}\right| \\
&\leq \sup_{\xi\in A_j} \text{ess} \frac{|P(i\xi + w\eta_j) - P(i\xi + z\eta_j)|}{C^2\tilde{P}(i\xi)} \\
&\leq \sup_{\xi\in A_j} \text{ess} \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{|\partial^\alpha P(i\xi)|}{\tilde{P}(i\xi)} \frac{|(w\eta_j)^\alpha - (z\eta_j)^\alpha|}{C^2} \\
&\leq \frac{1}{C^2} \sum_{|\alpha|\leq m} |\eta_j^\alpha||w^{|\alpha|} - z^{|\alpha|}|,
\end{aligned}$$

logo

$$\|\Psi_j(z) - \Psi_j(w)\|_{B_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}} \leq C' \sum_{|\alpha|\leq m} |w^{|\alpha|} - z^{|\alpha|}|, \ z, w \in \mathbb{S}^1, \tag{4.9}$$

onde $C' = (1 + |\eta_j|)^m/C^2$. Como, para cada $|\alpha| \leq m$, a restrição da função polinomial $z \mapsto z^{|\alpha|}, z \in \mathbb{C}$ ao compacto $\mathbb{S}^1$ é uniformemente contínua, dado $\rho > 0$, existe $\rho' > 0$ de modo que se $z, w \in \mathbb{S}^1$ e $|z - w| < \rho'$, então $|z^{|\alpha|} - w^{|\alpha|}| < \rho/C' \sum_{|\alpha|\leq m} 1$, para todo $|\alpha| \leq m$. Disso e de (4.9), segue a continuidade de Ψ_j e conclui-se a prova da Etapa 4.

Etapa 5. Para todo $j \in \{0, \dots, m\}^{n+1}$ temos que a aplicação $\Phi_j : \mathbb{S}^1 \to \mathscr{S}$, dada por $\Phi_j(z)(x) = \dfrac{e^{z\eta_j \cdot x}}{\cosh(\varepsilon|x|)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, é contínua.

De fato, inicialmente observamos que fixado $z \in \mathbb{S}^1$, pelo Lema 4.1.7, a aplicação $x \mapsto \dfrac{e^{z\eta_j \cdot x}}{\cosh(\varepsilon|x|)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, é um elemento de $\mathscr{S}$.

Mostremos que Φ_j é contínua no ponto $z_0 \in \mathbb{S}^1$ arbitrário. Para isso, consideremos uma sequência (z_k) em $\mathbb{S}^1$ tal que $z_k \longrightarrow z_0$, quando $k \longrightarrow \infty$, e fixemos $j \in \{0, \dots, m\}^{n+1}$. Primeiro, vamos mostrar que $\Phi_j(z_k) \longrightarrow \Phi_j(z_0)$ uniformemente. Para começar, definamos $f_x(z) = e^{z\eta_j \cdot x}$, para todo $z \in \mathbb{C}$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ está fixado. Observamos que f_x é analítica e através da identificação $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, podemos usar a Desigualdade do Valor Médio para obter

$$|f_x(z_k) - f_x(z_0)| \leq e^{\eta_j \cdot x}|z_k - z_0| \leq e^{|\eta_j||x|}|z_k - z_0|,\ k \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Mas da definição de η_j segue que $|\eta_j| \leq \varepsilon' m^2 \sqrt{n}$. Disto temos

$$|f_x(z_k) - f_x(z_0)| \leq e^{\varepsilon' m^2 \sqrt{n}|x|}|z_k - z_0|,\ k \in \mathbb{N},$$

logo

$$|\Phi_j(z_k)(x) - \Phi_j(z_0)(x)| = \frac{|e^{z_k\eta_j \cdot x} - e^{z_0\eta_j \cdot x}|}{\cosh(\varepsilon|x|)} \leq \frac{e^{\varepsilon' m^2 \sqrt{n}|x|}}{\cosh(\varepsilon|x|)}|z_k - z_0|,\ k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Como $\varepsilon' m^2 \sqrt{n} < \varepsilon$, definido $\varepsilon'' = \varepsilon - \varepsilon' m^2 \sqrt{n} > 0$

$$|\Phi_j(z_k)(x) - \Phi_j(z_0)(x)| \leq e^{-\varepsilon''|x|}|z_k - z_0|,\ k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.11}$$

donde podemos inferir que $\Phi_j(z_k) \longrightarrow \Phi_j(z_0)$ uniformemente, quando $k \longrightarrow \infty$.

Para concluir, precisamos mostrar que

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\gamma(\partial^\alpha[\Phi_j(z_k) - \Phi_j(z_0)](x))| = 0,$$

para quaisquer $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^n$. Primeiramente, fixemos $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^n$. Definindo $f_k(x) = e^{z_k\eta_j \cdot x}$ e $f_0(x) = e^{z_0\eta_j \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}^n$, podemos mostrar, via Desigualdade do Valor Médio, que $\partial^\beta f_k \longrightarrow \partial^\beta f_0$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n$, quando $k \longrightarrow \infty$, para qualquer $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| \leq |\alpha|$. Aplicando o Lema 4.1.9, com $g = 1/\cosh(\varepsilon|\cdot|)$, segue que

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{|x| \leq 1} |x^\gamma\left(\partial^\alpha[\Phi_j(z_k) - \Phi_j(z_0)](x)\right)| = 0.$$

Resta mostrar que $\lim\limits_{k \to \infty} \sup\limits_{|x| \geq 1} |x^\gamma \partial^\alpha[\Phi_j(z_k) - \Phi_j(z_0)](x)| = 0$.

Pelo Lema 4.1.6, como η_j está fixado e $C > 0$ é constante, é suficiente provar que:

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{|x| \geq 1} \left| \frac{x^\gamma}{|x|^l}(\tanh(\varepsilon|x|))^r \left({z_k}^{|\beta|}\Phi_j(z_k)(x) - {z_0}^{|\beta|}\Phi_j(z_0)(x)\right)\right| = 0,$$

sendo $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$, $r, l \in \mathbb{N}$ arbitrários, com $|\beta| \leq |\alpha|$.

Como $\dfrac{1}{|x|} \leq 1$ para $|x| \geq 1$ e $\tanh(\varepsilon|x|) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, é suficiente provarmos que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{|x|\geq 1} \left| x^\gamma \left({z_k}^{|\beta|} \Phi_j(z_k)(x) - {z_0}^{|\beta|} \Phi_j(z_0)(x) \right) \right| = 0. \tag{4.12}$$

Mas, da desigualdade triangular resulta, para $|x| \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{gathered} \left| x^\gamma \left({z_k}^{|\beta|} \Phi_j(z_k)(x) - {z_0}^{|\beta|} \Phi_j(z_0)(x) \right) \right| \leq \\ \left| x^\gamma \left({z_k}^{|\beta|} - {z_0}^{|\beta|} \right) \Phi_j(z_k)(x) \right| + \left| x^\gamma {z_0}^{|\beta|} \left(\Phi_j(z_k)(x) - \Phi_j(z_0)(x) \right) \right|. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Como $|z_k| = 1$, pela definição de η_j e pelo Lema 4.1.7, segue $\Phi_j(z_k) \in \mathscr{S}$. Logo,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{|x|\geq 1} \left| x^\gamma \left(z_k^{|\beta|} - z_0^{|\beta|} \right) \Phi_j(z_k)(x) \right| = 0. \tag{4.14}$$

Agora, por (4.11) e devido a $|z_0| = 1$, temos, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\left| x^\gamma {z_0}^{|\beta|} \left(\Phi_j(z_k)(x) - \Phi_j(z_0)(x) \right) \right| \leq |x|^{|\gamma|} e^{-\varepsilon''|x|} |z_k - z_0|.$$

Da Regra de L' Hôpital temos

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{|x|\geq 1} \left| x^\gamma {z_0}^{|\beta|} \left(\Phi_j(z_k)(x) - \Phi_j(z_0)(x) \right) \right| = 0. \tag{4.15}$$

Combinando (4.13), (4.14) e (4.15) segue (4.12), concluindo a prova da Etapa 5.

Etapa 6. Para todo $j \in \{0, \ldots, m\}^{n+1}$, a aplicação $T_j : \mathbb{S}^1 \to B_{\infty, \tilde{P}(i\xi)}$ dada por

$$T_j(z) = \frac{e^{z\eta_j \cdot (\cdot)}}{2\pi i z \cosh(\varepsilon|\cdot|)} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\chi_j(\xi)}{P(i\xi + z\eta_j)} \right),$$

é contínua.

De fato, inicialmente provemos que T_j está bem definida. Para todo $z \in \mathbb{S}^1$ fixado, pelo Lema 4.1.7, a função $x \mapsto \dfrac{e^{z\eta_j \cdot x}}{2\pi i z \cosh(\varepsilon|x|)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, é um elemento de $\mathscr{S}$. Por (4.8) temos que $\mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{(\chi_j(\xi)}{P(i\xi + z\eta_j)} \right) \in B_{\infty, \tilde{P}(i\xi)}$. Então, segue do Teorema 3.4.14 que $T_j(z) \in B_{\infty, \tilde{P}(i\xi)}$.

Pela Etapa 5, temos que $z \mapsto \dfrac{\Phi_j(z)}{2\pi i z}$, $z \in \mathbb{S}^1$, é contínua. Assim, basta usar a Etapa 4 e o Teorema 3.24 para concluir a prova da Etapa 6.

Etapa 7. A distribuição E definida por

$$E := \sum_{j \in \{0,\ldots,m\}^{n+1}} \int_{\mathbb{S}^1} e^{z\eta_j \cdot x} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\chi_j(\xi)}{P(i\xi + z\eta_j)} \right) \frac{\mathrm{dz}}{2\pi i z}, \tag{4.16}$$

é um elemento de $B^{loc}_{\infty, \tilde{P}(i\xi)}$.

De fato, primeiro observamos que podemos escrever

$$E = \cosh(\varepsilon|\cdot|) \sum_{j\in\{0,\dots,m\}^{n+1}} \int_{\mathbb{S}^1} T_j(z)\,\mathrm{dz}\,.$$

Pela Etapa 6, temos que T_j é contínua para todo $j \in \{0,\dots,m\}^{n+1}$. Então, do Corolário 2.5.7, segue que $E/\cosh(\varepsilon|\cdot|) \in B_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$. Desta forma, pelo Teorema 3.4.16, temos que $E \in B^{loc}_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$.

Etapa 8. *E é solução fundamental de P, ou seja, $PE = \delta$.*

Com efeito, usando os lemas 4.1.8 e 4.1.10, juntamente com a Fórmula Integral de Cauchy, obtemos:

$$\begin{aligned}
PE &= \sum_{j\in\{0,\dots,m\}^{n+1}} \int_{\mathbb{S}^1} P\left(e^{z\eta_j\cdot x}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\chi_j(\xi)}{P(i\xi+z\eta_j)}\right)\right)\frac{\mathrm{dz}}{2\pi iz}\\
&= \sum_{j\in\{0,\dots,m\}^{n+1}} \int_{\mathbb{S}^1} e^{z\eta_j\cdot x}P(\partial+z\eta_j)\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\chi_j(\xi)}{P(i\xi+z\eta_j)}\right)\frac{\mathrm{dz}}{2\pi iz}\\
&= \sum_{j\in\{0,\dots,m\}^{n+1}} \int_{\mathbb{S}^1} e^{z\eta_j\cdot x}\mathcal{F}^{-1}[\chi_j(\xi)]\frac{\mathrm{dz}}{2\pi iz}\\
&= \sum_{j\in\{0,\dots,m\}^{n+1}} \mathcal{F}^{-1}[\chi_j(\xi)]\\
&= \mathcal{F}^{-1}[1]\\
&= \delta,
\end{aligned}$$

e, assim concluímos a demonstração do Teorema 4.2.1. □

Vejamos que a regularidade dada pelo Teorema 4.2.1 não pode ser melhorada em termos de espaços $B_{p,k}$, ou seja, que o espaço $B^{loc}_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$ é o menor espaço do tipo $B_{p,k}$ que contém uma solução fundamental.

Exemplo 4.2.2. *Consideremos um operador diferencial linear de coeficientes constantes P e uma solução fundamental E de P. Vamos supor que existam $k \in \mathscr{K}$ e $1 \le p \le \infty$ tais que $E \in B^{loc}_{p,k}$. Mostraremos que $B^{loc}_{\infty,\tilde{P}(i\xi)} \subset B^{loc}_{p,k}$.*

De fato, do Teorema 3.4.15 segue que $\delta = PE \in B^{loc}_{p,k/\tilde{P}(i\xi)}$. Daí, podemos escolher $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ igual a 1 numa vizinhança da origem para obtermos $\delta = \varphi\delta \in B_{p,k/\tilde{P}(i\xi)}$ e, consequentemente, $\dfrac{k}{\tilde{P}(i\xi)} \in L^p$.

Desta forma, se $u \in B^{loc}_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$ e $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$k(\xi)\mathcal{F}[\psi u](\xi) = \frac{k(\xi)}{\tilde{P}(i\xi)}\tilde{P}(i\xi)\mathcal{F}[\psi u],\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

o que mostra que $\psi u \in B_{p,k}$, ou seja, $u \in B^{loc}_{p,k}$. Logo, $B^{loc}_{\infty,\tilde{P}(i\xi)} \subset B^{loc}_{p,k}$, como queríamos demonstrar.

Devido ao Exemplo 4.2.2, dizemos que uma solução fundamental E do operador diferencial linear de coeficientes constantes P é **regular** quando $E \in B^{loc}_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$. Assim, o Teorema 4.2.1 pode ser escrito nos seguintes termos

Teorema 4.2.3. *Todo operador diferencial linear de coeficientes constantes não identicamente nulo possui uma solução fundamental regular.*

4.3 Resultados envolvendo soluções fundamentais regulares

Nesta seção, apresentamos alguns resultados obtidos a partir do teorema demonstrado na seção anterior, a começar com o seguinte corolário.

Corolário 4.3.1. *Sejam P um operador diferencial linear de coeficientes constantes e $s \in \mathbb{R}$. Então, P possui uma solução fundamental $E \in H^{loc}_s$ se, e somente se, $\dfrac{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}{\tilde{P}(i\xi)} \in L^2$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Pelo Exemplo (3.4.2) temos que $H^{loc}_s = B^{loc}_{2,k_s}$, onde $k_s(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$. Assim, se E é uma solução fundamental de P que pertence a H^{loc}_s, então seguindo os argumentos do Exemplo (4.2.2), concluímos que $\dfrac{k_s(\xi)}{\tilde{P}(i\xi)} \in L^2$.

($\Leftarrow$) Por outro lado, supondo que $\dfrac{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}{\tilde{P}(i\xi)} \in L^2$, então dado $u \in B_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$, podemos escrever

$$\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} = \tilde{P}(i\xi)\hat{u}(\xi)\frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}{\tilde{P}(i\xi)},$$

e assim, concluímos que $u \in H_s$. Logo, $B^{loc}_{\infty,\tilde{P}(i\xi)} \subset H^{loc}_s$. □

Estabelecemos, a seguir, resultados sobre a regularidade das soluções da equação $Pu = f$ no caso em que $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.3.2. *Sejam $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, P um operador linear de coeficientes constantes não identicamente nulo e E uma solução fundamental regular de P. Então, a solução de $Pu = f$ dada por $u = E * f$ pertence a $B^{loc}_{p,k\tilde{P}(i\xi)}$ para todo $k \in \mathscr{K}$ e $1 \leq p \leq \infty$ tais que $f \in B_{p,k}$.*

Demonstração. Observamos inicialmente que a existência de solução fundamental regular segue do Teorema 4.2.1. Como f tem suporte compacto, a convolução $u := E * f$ está bem definida e vale $Pu = P(E * f) = (PE) * f = \delta * f = f$.

Se $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \cap B_{p,k}$, para certos $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathscr{K}$ então, pelo Teorema 3.4.17, segue que $u \in B^{loc}_{p,k\tilde{P}(i\xi)}$.

□

Apresentamos a recíproca do Teorema 3.4.12 para o caso em que u tem suporte compacto.

Teorema 4.3.3. *Seja P um operador diferencial linear de coeficientes constantes não identicamente nulo. Se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathscr{K}$ e $1 \leq p \leq \infty$, então $u \in B_{p,k\tilde{P}(i\xi)}$ se, e somente se, $Pu \in B_{p,k}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $u \in B_{p,k\tilde{P}}$, então, pelo Teorema 3.4.12, $Pu \in B_{p,k}$.

($\Leftarrow$) Seja $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $Pu \in B_{p,k}$, $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathscr{K}$. Considerando E uma solução fundamental regular de P, temos que $E * Pu$ está bem definida, uma vez que $Pu \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, e ainda, pelo Teorema 3.4.17 segue que

$$u = \delta * u = (PE) * u = E * (Pu) \in B^{loc}_{p,k\tilde{P}(i\xi)}.$$

Por fim, podemos escolher $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de modo que $\psi = 1$ em $supp(u)$ e, assim, obtemos $u = \psi u \in B_{p,k\tilde{P}(i\xi)}$. □

4.4 Operadores Hipoelípticos

Nesta seção, apresentamos resultados que relacionam soluções fundamentais com operadores hipoelípticos e alguns exemplos.

Sejam P um operador linear de coeficientes constantes, $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se u é de classe C^∞ em Ω, então Pu é de classe C^∞ em Ω. Logo, vale $singsupp(Pu) \subset singsupp(u)$, qualquer que seja o operador P. Nesta seção, trataremos dos operadores para os quais vale a igualdade $singsupp(Pu) = singsupp(u)$.

Definição 4.4.1. *Um operador diferencial linear de coeficientes constantes P é dito **hipoelíptico** quando $singsupp(u) \subset singsupp(Pu)$, para qualquer $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Exemplo 4.4.2. *O operador $P = \dfrac{d}{dt}$ é hipoelíptico na reta.*

De fato, seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e suponhamos que Pu é C^∞ em $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Considere $f = \dfrac{d}{dt}u$, que por hipótese é C^∞ em (a,b). Fixado $c \in (a,b)$ defina $g(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)dt$, $x \in (a,b)$. Então, temos que g é C^∞ em (a,b) e $(u-g)' = 0$. Pela Observação 2.4.8 segue que $u - g = k$ para algum $k \in \mathbb{R}$. Logo, $u = g + k$ é C^∞ em (a,b).

Exemplo 4.4.3. *O operador $P = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ não é hipoelíptico em $\mathbb{R}^2$.*

Com efeito, se $Pu = 0$, então Pu é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Se P fosse hipoelíptico, então qualquer solução u desta equação homogênea deveria ser de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$. Porém, basta tomar $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ tais que $f, g \notin C^2(\mathbb{R})$ e $u(x,y) = f(x) + g(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, para ver que isso não é verdade.

Em (FOLLAND, 1995, Cor 6.34, p 215)) prova-se que todo operador diferencial linear de coeficientes constantes elíptico é hipoelíptico. Nosso próximo objetivo é relacionar a hipoelipticidade de P com suas soluções fundamentais. Começamos com um lema que nos ajudará a demonstrar o resultado que faz esta ligação.

Lema 4.4.4. *Sejam $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e suponha que f é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Então singsupp$(f * g) \subset$ supp(g).*

Demonstração. Seja $x \in [supp(g)]^c$ fixado. Mostraremos que $f * g$ é C^∞ numa vizinhança de x.

Como x não está no suporte de g, existe $\rho > 0$ tal que $B(x;\rho) \cap supp(g) = \emptyset$. Tomando $\varphi \in C_c^\infty(B(0;\rho/2))$ tal que $\varphi = 1$ em $B(0;\rho/4)$, podemos escrever $f * g = (1-\varphi)f * g + \varphi f * g$. Assim, como $(1-\varphi) = 0$ numa vizinhança de $\{0\}$, temos que $(1-\varphi)f$ é C^∞ em $\mathbb{R}^n$. Consequentemente, $(1-\varphi)f * g$ é C^∞ em $\mathbb{R}^n$.

Agora, pelo Teorema 2.4.38, segue que:

$$supp(\varphi f * g) \subset \{y + z; |y| < \rho/2 \text{ e } z \in supp(g)\} = \{y; d(y, supp(g) < \rho/2\}.$$

Disto, temos que $\varphi f * g = 0$ em $B(x;\rho/2)$, e assim, segue que $f * g = (1-\varphi)f * g$ é C^∞ em $B(x;\rho/2)$, como queríamos demonstrar.

□

Teorema 4.4.5. *Seja P um operador diferencial linear de coeficientes constantes. São equivalentes:*

(i) P é hipoelíptico;

(ii) Toda solução fundamental de P é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

(iii) Ao menos uma solução fundamental de P é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Demonstração. (i)⇒(ii) Se P é hipoelíptico, então $singsupp(E) \subset singsupp(PE)$. Assim, basta observar que se E é uma solução fundamental regular de P, então $PE = \delta$, e que δ é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii)⇒(iii) Imediato.

(iii)⇒(i) Sejam E uma solução fundamental de P tal que E é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e suponha que Pu é C^∞ em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Vejamos que u é C^∞ em Ω. Para tal, fixemos $x \in \Omega$ e mostremos que u é C^∞ numa vizinhança de x.

Tomemos $\rho > 0$ tal que $\overline{B(x;\rho)} \subset \Omega$ e $\varphi \in C_c^\infty(B(x;\rho))$ de modo que $\varphi = 1$ em $B(x;\rho/2)$. Desta forma, temos que $\varphi u = u$ em $B(x;\rho/2)$ e $\varphi u = 0$ fora de $B(x;\rho)$.

Agora, observamos que podemos escrever

$$P(\varphi u) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta\varphi\partial^{\alpha-\beta}u = \varphi \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\partial^\alpha u + \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{0<\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta\varphi\partial^{\alpha-\beta}u,$$

ou seja, $P(\varphi u) = \varphi Pu + v$, onde $v = 0$ tanto em $B(x;\rho/2)$ quanto em $[B(x;\rho)]^c$.

Desta forma, podemos escrever $E * P(\varphi u) = E * \varphi Pu + E * v$. Observando que φPu é C^∞ em $\mathbb{R}^n$, segue que $E * \varphi Pu$ é C^∞ em $\mathbb{R}^n$. Agora, pelo Lema 4.4.4 temos que *singsupp*$(E * v) \subset$ *supp*(v), ou seja, $E * v$ é C^∞ em $B(x;\rho/2)$.

Logo, temos que $E * P(\varphi u)$ é C^∞ em $B(x;\rho/2)$. Mas, pelo Exemplo 2.4.39 segue que

$$E * P(\varphi u) = PE * \varphi u = \delta * \varphi u,$$

e, com isso, $u = E * P(\varphi u)$ é C^∞ em $B(x;\rho/2)$, o que conclui a demonstração do teorema.

□

Exemplo 4.4.6 (Operador do Calor). *O Operador do Calor é hipoelíptico.*

De fato, o Operador do Calor em $\mathbb{R}^{n+1}$, dado por

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2},$$

possui uma solução fundamental da forma (ver (FOLLAND; JOSEPH; THANGAVELU, 1983, p 47)):

$$E(t,x) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/4t}, \text{ se } t > 0, \\ 0, \text{ se } t \leq 0. \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema 4.4.5, segue que P é hipoelíptico, já que E é C^∞ em $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$. A demonstração do resultado que segue é uma adaptação dos argumentos utilizados em (HÖRMANDER, 1957, Th. 1.4, p 34).

Exemplo 4.4.7. *Se P é um operador diferencial linear de coeficientes constantes hipoelíptico, então todas as soluções fundamentais de P são regulares.*

De fato, se E_1 e E_2 são soluções fundamentais de P, segue que $u = E_2 - E_1$ é solução da equação homogênea $Pu = 0$, em particular, $Pu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como P é hipoelíptico temos que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue que $\varphi u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}$. Do Teorema 3.4.8 resulta que $\varphi u \in B_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$. Como φ é arbitrária temos que $u \in B^{loc}_{\infty,\tilde{P}(i\xi)}$.

Se tomarmos E_1 regular (a existência de solução fundamental regular segue do Teorema 4.2.1) segue que $E_2 = u + E_1$ também é regular. Portanto, qualquer solução fundamental de P é regular, concluindo assim a prova do Exemplo 4.4.7.

Como todo operador elíptico é hipoelíptico, a conclusão do Exemplo 4.4.7 é válida para todo operador diferencial linear de coeficientes constantes elíptico.

Agora, se P é elíptico de grau $m > 0$, então podemos ver que $\tilde{P}(i\xi)$ cresce como um múltiplo do polinômio $(1 + |\xi|)^m$, e ainda, para $\xi \in \mathbb{R}^n$ grande, este polinômio se comporta como $|\xi|^m$. Desta forma, dado $s \in \mathbb{R}$, segue que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}{\tilde{P}(i\xi)} \right|^2 \mathrm{d}\xi < \infty \Leftrightarrow s < m - \frac{n}{2}.$$

Então, pelo Corolário 4.3.1, P possui uma solução fundamental $E \in H_s^{loc}$ se, e somente se, $s < m - n/2$. Mais ainda, se $m > n + k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, podemos tomar $s \in \mathbb{R}$ tal que $m > s > \frac{n}{2} + k$ e, pelo Lema de Sobolev (ver Lema 3.3.12), temos que $H_s \subset C^k(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, a solução fundamental $E \in H_s^{loc}$ é de classe C^k.

Referências

BARROS-NETO, J. **An introduction to the theory of distributions**. [S.l.]: Dekker, 1973.

BRÉZIS, H.; ESTEBAN, J. R. **Análisis funcional: teoría y aplicaciones**. [S.l.]: Alianza, 1984.

EHRENPREIS, L. **Solution of some problems of division: part I. Division by a polynomial of derivation**. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 76, n. 4, p. 883–903, 1954.

FOLLAND, G. B. **Introduction to partial differential equations**. [S.l.]: Princeton university press, 1995.

FOLLAND, G. B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.

FOLLAND, G. B.; JOSEPH, K.; THANGAVELU, S. **Lectures on partial differential equations**. [S.l.]: Springer Berlin, 1983.

HÖRMANDER, L. **Local and global properties of fundamental solutions**. *Mathematica Scandinavica*, JSTOR, p. 27–39, 1957.

HORMANDER, L. **Linear partial differential operators**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin, 1969. v. 116.

HÖRMANDER, L. **The Analysis of Differential Linear Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis**. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

HÖRMANDER, L. **The Analysis of Differential Linear Operators II: Differential Operators With Constant Coefficients**. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

HORVÁTH, J. **Topological Vector Spaces and Distributions, Vol. I.** [S.l.]: Addition-Wesley Publ. Co, 1966.

HOUNIE, J. **Teoria elementar das distribuições:(12º colóquio brasileiro de matemática, poços de caldas 1979)**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

KHATSKEVICH, V.; SHOIYKHET, D. **Differentiable operators and nonlinear equations**. [S.l.]: Birkhäuser, 2012. v. 66.

KRANTZ, S. G.; PARKS, H. R. **A primer of real analytic functions**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002.

MALGRANGE, B. **Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution**. *Annales de l'institut Fourier*, v. 6, p. 271–355, 1956.

ORTNER, N.; WAGNER, P. **A survey on explicit representation formulae for fundamental solutions of linear partial differential operators**. *Acta Applicandae Mathematica*, Springer, v. 47, n. 1, p. 101–124, 1997.