UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Lidiane Garcia Bressan

UTILIZAÇÃO DO ALGEPLAN NAS OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS E RAÍZES DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Santa Maria, RS
2021

Lidiane Garcia Bressan

UTILIZAÇÃO DO ALGEPLAN NAS OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS E RAÍZES DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - ProfMat da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Orientadora: Profa. Dra. Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

Santa Maria, RS
2021

Bressan, Lidiane Garcia
Utilização do Algeplan nas Operações com Polinômios e Raízes de Equações do 2° Grau / Lidiane Garcia Bressan.- 2021.
141 p.; 30 cm

Orientadora: Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2021

1. Algeplan 2. Material Didático Manipulável 3. Ensino de Matemática 4. Polinômios 5. Completar Quadrados I. Brum, Valéria de Fátima Maciel Cardoso II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Lidiane Garcia Bressan

UTILIZAÇÃO DO ALGEPLAN NAS OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS E RAÍZES DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – ProfMat da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 15 de janeiro de 2021

____

Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum, Dra. (UFSM)

(Presidente/Orientadora)

____

Vanilde Bisognin, Dra. (UFN)

____

Janice Rachelli, Dra, (UFSM)

____

Eduardo Casagrande Stabel, Dr., (UFSM)

Santa Maria, RS

2021

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho e toda jornada até aqui à minha mãe Vera que nunca me permitiu desistir.

AGRADECIMENTOS

Ao término desse trabalho, gostaria de agradecer:

- à Deus, que soube o tempo e as condições necessárias para que eu cursasse e concluísse essa etapa da vida acadêmica.

- à minha mãe Vera e meu amigo José Eli, mais que incentivadores, eles não deixaram-me abater perante às dificuldades.

- à CAPES, fomentadora de grande parte do curso.

- às minhas colegas de ProfMat, Elenice, Ivana, Luciana e Viviane, companheiras de aula e confidentes de vida, e aos colegas Fernando, Joacildo, Jones e Luiz que dividiram seus conhecimentos. Sem vocês o curso seria apenas uma segunda graduação.

- às minhas amigas Camila e Daniela, que fizeram das suas casas o meu refúgio de descanso e estudo, além do carinho e ânimo que sempre dispuseram.

- à minha amiga Ingrid, que me socorreu quando achei que era incapaz.

- aos professores do PROFMAT da Universidade Federal de Santa Maria por contribuírem pela conquista desse título, em especial à Profa Dra. Alice de Jesus Kozakevicius minha conselheira e amiga, e à minha orientadora Profª Dra Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum, compreensiva e companheira.

- às professoras Dra. Janice Rachelli da UFSM, Dra. Vanilde Bisognin da UFN e ao professor Dr. Eduardo Casagrande Stabel da UFSM, pela disponibilidade em participarem da banca examinadora;

- aos meus alunos do 9° ano e à diretoria da Escola Estadual de Ensino Fundamental Padre José de Anchieta pela disponibilidade de participação neste trabalho;

E por fim, a todos que conheci durante esses mais de 30.000 km percorridos no trajeto entre Alegrete e Santa Maria. Pessoas que enriqueceram a minha vida com suas histórias.

RESUMO

UTILIZAÇÃO DO ALGEPLAN NAS OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS E RAÍZES DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU.

AUTORA: Lidiane Garcia Bressan
ORIENTADORA: Valéria de Fátima Cardoso Brum

O presente estudo tem como objetivo tratar do uso dos materiais didáticos manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática, em específico a utilização do Algeplan no ensino de operações com polinômios e raízes de equações do 2º grau. Tal estudo partiu da ideia de que a maioria dos alunos tendem a apresentar dificuldades em alguns conteúdos matemáticos e que a utilização de tais materiais pode auxiliar positivamente professores e alunos nesse processo, propiciando uma abordagem de maneira participativa, clara e sucinta, e tornando o trabalho da matemática prazeroso e dinâmico. Deste modo, propõe-se uma metodologia que permita aos alunos a construção do conhecimento com a mediação do professor desde o processo de elaboração dos materiais, até sua aplicação em sala de aula. Nesse foco, buscou-se aplicar e descrever dentre os métodos alternativos, o uso do material manipulativo do Algeplan, para auxiliar o ensino da Álgebra no 9º ano do Ensino Fundamental. Os participantes da pesquisa são 27 alunos do 9° Ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual pública da cidade de Rosário do Sul (RS). Diante do momento de pandemia que estamos vivenciando, o presente trabalho foi aplicado de forma remota, o que trouxe, durante o desenvolvimento das atividades, algumas dificuldades de interação com os alunos. Constatou-se que a partir da aplicação das atividades com o Algeplan foi possível aos alunos resgatarem habilidades matemáticas, trabalharem conceitos e formarem inferências, de um modo significativo. Espera-se, que o presente trabalho possa vir a servir de apoio aos colegas professores de matemática no seu trabalho diário.

Palavras-chave: Algeplan. Material Didático Manipulável. Ensino de Matemática. Polinômios. Completar Quadrados.

ABSTRACT

USE OF ALGEPLAN IN OPERATIONS WITH POLYNOMY AND ROOTS OF EQUATIONS OF THE 2nd DEGREE

AUTHOR: Lidiane Garcia Bressan
ADVISOR: Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

The present study aimed to deal with the use of manipulable didactic materials as a pedagogical resource in Mathematics classes, specifically the use of Algeplan in teaching operations with polynomials and roots of 2nd degree equations. This study starting from the idea that most students tend to have difficulties in some mathematical content and that the use of such materials can positively help teachers and students in this process, providing a participatory, clear and succinct approach, and making the work of mathematics pleasant and dynamic. In this way, a methodology is proposed that allows students to build knowledge with the mediation of the teacher from the process of preparing the materials, to their application in the classroom. In this focus, we sought to apply and describe, among the alternative methods, the use of the Algeplan manipulative material, to assist the teaching of Algebra in the 9th grade of elementary school. The research particicipants are 27 students from the 9th grade of elementary school at a public state school in the city of Rosário do Sul (RS). In view of the pandemic moment we are experiencing, the present work was applied remotely, which brought, during the development of the activities, some difficulties of interaction with the students. It was found that from the application of activities with Algeplan it was possible for students to recover mathematical skills, work concepts and form inferences, in a meaningful way. The present work is expected to be able to provide support to fellow mathematics teachers in their daily work.

Keywords: Algeplan. Manipulable Didactic Material. Mathematics teaching. Polynomials. Complete Squares.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A disciplina de Matemática no Ensino Fundamental é marcada por apresentar, na maioria das vezes, o maior índice de reprovação dos alunos. Acredita-se que uma das razões que contribuem com esse alto índice seja que a grande maioria das aulas são desenvolvidas por meio expositivo, onde o professor é o detentor do saber e o aluno, um mero espectador. Segundo D'Ambrósio (1989, p. 14-19):

> Os professores em geral mostram a matemática como sendo um corpo de conhecimento acabado polido. Ao aluno não é dado em nenhum momento a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada, nem mesmo uma solução mais interessante. O aluno assim passa a acreditar que na aula de matemática o seu papel é passivo e desinteressante.

Deste modo, nós professores, enfrentamos um grande desafio em buscar alternativas para ensinar Matemática de modo a motivar os alunos a produzir seu próprio conhecimento e resolver problemas de uma forma dinâmica estimulando-os a aprender e atribuir significado à matemática.

Durante a minha experiência como professora de Ensino Fundamental, pude verificar que existem alguns conteúdos matemáticos nos quais os alunos apresentam maior dificuldade de aprendizagem. Tais dificuldades acentuam-se quando é feita a transição das manipulações concretas para os conceitos abstratos, levando em consideração que os alunos em geral apresentam problemas ao atribuir significado aos símbolos, termos algébricos, à linguagem formal da própria Álgebra e a todas as regras e procedimentos que lhe são associados, diferentemente do trabalho realizado nos anos iniciais do Ensino Fundamental, no âmbito da Aritmética.

O ensino da matemática, em meados de 1960, sofreu forte influência de um movimento conhecido como Movimento Matemática Moderna e como resultado desse movimento, foi incorporado ao trabalho em sala de aula, uma linguagem de conjuntos de maneira exagerada e assim, foram formalizadas ideias matemáticas que ainda não podem ser compreendidas pelos alunos. Esse movimento, apesar das dificuldades, trouxe um maior interesse pela busca e pesquisa de novas metodologias de ensino, levando em consideração a importância de o aluno participar de forma ativa na construção do seu conhecimento (DANTZIG, 1970).

A partir da década de 1980, os educadores matemáticos passaram a demonstrar maior preocupação em estabelecer uma proposta de educação que pudesse permitir a todos os alunos do Ensino Fundamental uma oportunidade de desenvolver competências básicas e necessárias para o exercício da sua cidadania. Com o estabelecimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), atualmente a educação matemática vem alcançando cada vez mais outra plataforma de atuação e conhecimento, mesmo que ainda seja marcada por diversos relatos de dificuldades de aprendizado por parte dos alunos.

A matemática, sendo um importante componente na construção da cidadania, tem como principais objetivos identificar os conhecimentos matemáticos como meios de compreensão e transformação do mundo que o rodeia, perceber o caráter de jogo intelectual, característico da disciplina, como aspecto estimulador de interesse, curiosidade, espírito de investigação e de desenvolvimento da capacidade em resolver problemas (BRASIL, 1999). A aprendizagem da matemática está ligada diretamente, à compreensão, isto é, à apreensão do significado resultante das conexões entre todas as disciplinas com o cotidiano, em seus diferentes temas.

A fim de contornar tais dificuldades, faz-se necessária uma pesquisa sobre métodos alternativos de apresentação do conteúdo que possam auxiliar colegas professores, no processo de ensino-aprendizagem de seus alunos, visto que vivenciam as mesmas dificuldades e manifestam as mesmas preocupações.

A escolha do tema do presente trabalho surgiu através dessas dificuldades observadas, optando por trabalhar com os conteúdos de Operações com Polinômios, Produtos Notáveis e Raízes de equações do 2º grau. Dentre os métodos alternativos, optou-se pelo uso do material manipulativo Algeplan, para auxiliar o ensino da Álgebra no 9º ano do Ensino Fundamental. Tal material já havia sido pesquisado e aplicado em turmas de 8º Ano em 2016 e consequente 9º ano em 2017 na mesma escola. Visto que trouxe engajamento e maior aprendizagem, decidiu-se reaplicá-lo observando com maior embasamento teórico sua funcionalidade.

A presente dissertação tem como objetivo geral investigar as contribuições do uso do material didático manipulativo Algeplan para o ensino e aprendizagem de polinômios em uma turma de 9º ano do ensino fundamental. E tem como objetivos específicos:

- Construir uma sequência didática envolvendo operações com polinômios e raízes de equações do 2º grau;
- Aplicar uma sequência didática com alunos do 9º ano do ensino fundamental usando o material didático manipulativo Algeplan;
- Analisar as trajetórias dos alunos no desenvolvimento dos problemas propostos;
- Avaliar as contribuições do uso do Algeplan no ensino e aprendizagem das operações com polinômios.

A manipulação do material Algeplan traz as seguintes questões: Um aluno que mostre domínio das técnicas algorítmicas de operações com expressões algébricas, também dominará as regras do Algeplan? E aquele que entender as regras do material, conseguirá transpô-las para o manuseio algorítmico das expressões? E quanto à Geometria, é necessário que o aluno saiba as relações de área para conseguir compreender as regras do jogo? Buscamos nesse trabalho as respostas para tais questionamentos.

Sendo a utilização do Algeplan no ensino de operações com polinômios e raízes de equações do 2º grau o principal objeto de estudo, o presente trabalho foi dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo está a introdução. No segundo capítulo, analisamos as diretrizes governamentais sobre o Ensino de Matemática, em especial no eixo temático da Álgebra, assim como a descrição da importância da utilização de materiais didáticos manipulativos, em especial o Algeplan. Também há a descrição dos recursos metodológicos que auxiliaram a aplicação deste trabalho. O terceiro capítulo objetiva definir os conteúdos a serem abordados, tais como operações com Polinômios e o cálculo de raízes de Equações do 2º grau. O quarto capítulo consiste em descrever as atividades propostas durante o ano letivo e realizar uma análise da contribuição do Algeplan no entendimento, por parte dos alunos, dos conteúdos abordados. O último capítulo traz a síntese dos resultados e considerações da aplicação do material.

Diante do momento de pandemia que estamos enfrentando, o presente trabalho foi aplicado de forma remota com os alunos da turma de 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Fundamental Padre José de Anchieta, conforme descrito no quarto capítulo.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

O ensino de matemática faz parte da vida dos alunos desde as séries iniciais, de onde se percebe que muitas dificuldades são trazidas e que estas, mais tarde, poderão ser trabalhadas de forma efetiva, se houver diálogo e reflexão por nós educadores sobre essas dificuldades, utilizando delas como um ponto de partida para saná-las. Nós educadores matemáticos devemos nos mostrar capazes de realizar a interação entre os diferentes campos da Matemática, procurando faze-la de forma articulada.

No processo de aprendizagem da matemática, é necessário um contexto de interações, troca de ideias e saberes, de construção coletiva de novos conhecimentos, através da mediação do educador, que orienta essas interações. É necessário, também, que os alunos saibam que podem aprender com seus colegas e também ensiná-los através da cooperação, na busca de novas soluções de problemas (MORENO, 1983). Assim, sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais dos anos finais do Ensino Fundamental de Matemática (BRASIL, 1999) que as noções algébricas venham a ser exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, desta forma, se faz necessária a utilização de diferentes metodologias que possam auxiliar nesse processo, como por exemplo, a utilização de materiais didáticos manipuláveis.

2.1 O USO DE MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Na busca pela melhoria do processo de ensino-aprendizagem, a manipulação de materiais didáticos manipuláveis e associação destes com a teoria surgem como alternativas que podem propiciar uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos. A utilização destes materiais traz aproximação entre o aluno e o objeto que se quer conhecer, além de ser uma importante fonte estimuladora do raciocínio e da criatividade, que afasta a transcrição de conhecimentos apenas em exercícios prontos e sua resolução exaustiva, tornando o processo mais prazeroso e divertido.

O uso dos Materiais Didáticos (MD) manipuláveis traz uma metodologia de contextualização do ensino, levando o aluno a construir e compreender melhor conteúdos abstratos, assim como seus procedimentos, além de ser uma metodologia viável, fácil de promover e que depende da reflexão de sua viabilidade pelo professor.

Lorenzato (2006, pág. 18) menciona que:

> Os MD podem desempenhar várias funcões, conforme o objeto a que se prestam, e, por isso, o professor deve perguntar-se para que ele deseja utilizar o MD. Por melhor que seja, o MD nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar

> de ensino, de alternativa metodológica a disposição de professor e do aluno e, como tal, o MD não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor. Convêm termos em mente que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental por parte do aluno. Contudo, o MD pode ser um excelente catalizador para o aluno construir seu saber matemático.

A utilização destes objetos reais, nomeados de materiais didáticos manipuláveis, leva o aluno a tocar, sentir, manipular e movimentar, e acabam por tornarem-se representação de uma ideia que para muitos pode estar diretamente relacionada à obtenção do significado numa situação de aprendizagem, e que mesmo sendo simbólicos, expressam tão diretamente seu significado que não necessitam de qualquer tipo de mediação para serem compreendidos (SCOLARO, 2008).

Desde a sua idealização, esses materiais tem sido discutidos e muitas têm sido as justificativas para a sua utilização no ensino de matemática. Segundo Smole, Diniz e Cândido (2012), sua utilização pode se relacionar à argumentos do passado, que deram origem aos materiais manipulativos na escola, com sua significação para o ensino hoje, tais como: "A criança aprende o que faz sentido para ela", já que anteriormente, dizia-se que os materiais, por estarem próximos da realidade em que a criança estava inserida, facilitariam a aprendizagem.

A utilização dos materiais didáticos manipulativos é reconhecida pela capacidade de oferecer uma série de vantagens para o processo de ensino-aprendizagem, entre essas vantagens, podemos destacar: a) Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois é capaz de despertar a curiosidade dos alunos; b) Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor; c) Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacentes em cada material; d) É motivador, pois dá um sentido para o ensino da Matemática, visto que o conteúdo passa a ter um significado especial; e) Facilita a internalização das relações percebidas (SARMENTO, 2012).

É importante destacar que apesar de apresentar diversas vantagens, sua utilização não diminui a importância do livro didático e dos exercícios, tão comuns no ensino de matemática, pelo contrário, é a interação desses elementos que desenvolve e dá sentido ao que é aprendido. Talvez a melhor das potencialidades do MD seja revelada no momento da sua construção pelo próprio aluno, pois é durante esta que surgem imprevistos e desafios, os quais conduzem os alunos a fazer conjecturas e a descobrir caminhos e soluções (LORENZATO, 2006).

Percebida sua viabilidade, ainda assim o docente precisa estar seguro sobre a manipulação do material e ao planejamento da ação pedagógica e objetivos a serem alcançados com sua aplicação, desenvolvendo assim habilidades de raciocínio ao despertar o interesse dos alunos pelo assunto. Como já citado, o MD por si só não garante a aprendizagem, ele representa um auxílio que muitos professores precisam quando sua metodologia torna-se pouco atrativa ou até mesmo sem significado no cotidiano do aluno. Por isso, antes de optar pela sua utilização, deve-se refletir sobre a proposta pedagógica de qual o papel da escola na localidade em que se encontra e sobre qual o tipo de matemática acreditamos que seja importante para a formação do aluno.

A importância em optarmos pela utilização do MD está diretamente ligada ao fato de que ao aluno deve ser dado o direito de aprender de forma significativa, no qual ele atua como agente participativo, raciocinando, compreendendo, reelaborando e superando sua visão fragmentada e parcial do cotidiano. O material escolhido pode ser fundamental para que isso ocorra. Nesse sentido, o material mais adequado, nem sempre será visualmente mais bonito e nem já construído, já que muitas vezes, durante a própria confecção de um material, o aluno tem a oportunidade de aprender matemática de uma forma mais efetiva.

Na busca por argumentos da importância do trabalho manual na aula de matemática, não podemos nos apoiar somente em delineamentos superficiais como: "assim os alunos se sentem melhor", senão que devemos nos aprofundar mais (ALSINA I PASTELLS, 2009). A educadora Maria Montessori (1914), no princípio do século XX, afirmou que: "a criança tem a inteligência na mão", fazendo uma bela alusão ao fato de que as crianças adquirem noções a partir do contato manual e da experimentação. Posteriormente, Piaget e Inhelder (1975) mencionaram que: "As crianças aprendem a partir da ação sobre os objetos o qual seria válido pelo menos enquanto sua inteligência é ainda de caráter concreto".

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017, p. 265), a área da Matemática:

> [...] por meio da articulação de seus diversos campos (Aritmética, álgebra, geometria, estatística e probabilidade), a disciplina precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental.

Ainda de acordo com o Referencial Curricular Gaúcho (RCG, 2018, p. 48), alinhado à BNCC, a temática para o Ensino Fundamental da área de Matemática busca:

> [...] através da formação do pensamento matemático, focar na superação da visão compartimentada que privilegia a memorização de fatos e técnicas, comprometendo-se com a aprendizagem relacionada com a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos, inclusive no contexto da própria matemática.

Assim, entende-se que a visão do aluno ao material apresentado, deve trazer significado nas articulações algébricas propostas no desenvolvimento do presente trabalho, que busca responder à seguinte questão: Como o uso de materiais didáticos manipulativos, no caso o Algeplan, potencializam o ensino e a aprendizagem de operações com polinômios e raízes de equações do segundo grau em uma turma de 9º ano do ensino fundamental?

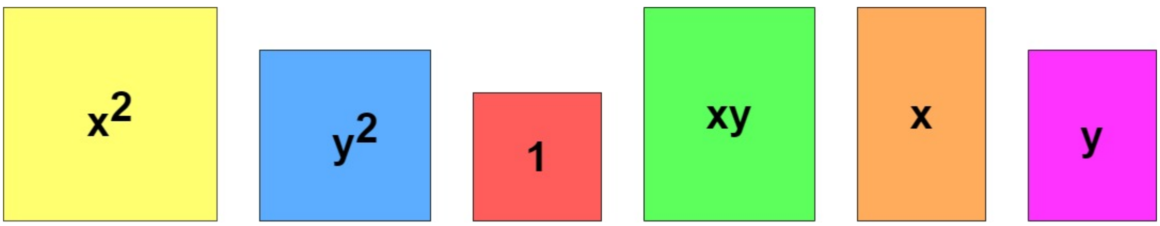
2.2 O USO DO ALGEPLAN NO ESTUDO DAS OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

O material manipulativo Algeplan apresentado neste trabalho e as formas de resolução com o mesmo são uma adaptação de aplicações encontradas em Pasquetti (2008) e Poleto (2010) que consiste na utilização de figuras geométricas planas (quadrados e retângulos) manipuláveis, confeccionados em papel, cartolina, EVA ou MDF, ou apenas representadas em forma de desenho. Essa prática auxilia o aluno a relacionar letras e formas geométricas manipuláveis, associando área e perímetros de quadrados e retângulos com expressões algébricas com grau menor ou igual a dois, uma vez que no 9º Ano eles já têm essa capacidade desenvolvida nos anos anteriores. Conceitos de operações com polinômios e resoluções de equações do 2º grau são enfatizados no 9º Ano mas serão utilizados até o final do Ensino Médio e até mesmo no decorrer da vida acadêmica. Portanto é de extrema importância o aluno apropriar-se desses conceitos para que possa aplicá-los nas mais diversas situações.

Para a elaboração do material Algeplan, serão confeccionados quadrados e retângulos de papel com lados de medidas 1, y e x, de modo que $1 < y < x$.

Por meio da associação entre as dimensões dos lados dos quadrados e dos retângulos com suas respectivas áreas, as peças recebem as nomenclaturas: x^2 , y^2, 1, xy, x e y . Para melhor manipulação do material, convencionamos as medidas dos lados como $1 = 3$cm, $y = 4$cm e $x = 5$cm. Além da variação das áreas, as peças terão cores distintas em cada forma, escolhidas arbitrariamente pelos próprios alunos e termos simétricos (opostos) nas faces opostas. Podemos assim representar com expressões algébricas envolvendo coeficientes inteiros, com até duas letras e grau 2.

Figura 1: Peças do material com o lado positivo



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura	Área	Perímetro
Quadrado de lado x	x^2	$4x$
Quadrado de lado y	y^2	$4y$
Quadrado de lado 1	1	4
Retângulo de lados x e y	xy	$2(x+y)$
Retângulo de lados x e 1	x	$2(x+1)$
Retângulo de lados y e 1	y	$2(y+1)$

Devemos prestar atenção especial quando se utiliza a estratégia geométrica para atribuir significado à Álgebra, pois não existe medida de comprimento negativo . Para tal representação, utilizaremos o verso da peça. Como cada peça está associada à uma área, essa notação permite dizer que será representada uma "área negativa".

O Algeplan possui diferentes abordagens para a realização das operações. As regras a serem seguidas para se efetuar as operações como soma, subtração e multiplicação de polinômios são diferentes entre si. Mesmo um aluno que saiba manipular o jogo para simplificar termos semelhantes, pode ter dificuldade em descobrir sozinho como manipulá-lo para efetuar a operação de multiplicação. Portanto todas as regras para efetuar cada operação serão devidamente explicadas em vídeo através de exemplos.

2.3 RECURSOS METODOLÓGICOS

A introdução de recursos metodológicos mostra-se como fator essencial para tornar o aluno sujeito ativo da própria aprendizagem. Assim é necessário que as metodologias utilizadas levem em consideração o respeito do contexto em que estes estão inseridos e os aspectos lúdicos condizentes com a faixa etária e a disposição dos mesmos.

Permear o fazer pedagógico com recursos que despertem o interesse, curiosidade e motivação para a aprendizagem, é imprescindível, pois inúmeros estudos atentam para a importância do uso de diferentes metodologias, como propulsão do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa a sua prática. (Brasil, 1999, p.42)

Assim, é necessário a reflexão docente sobre as manifestações dos alunos no decorrer das aulas, a fim de detectar qual metodologia traz melhores resultados na aprendizagem, o que lhes chama a atenção e o que gera maior envolvimento no que lhes é proposto. Com isso, nós docentes precisamos reinventar, criar novas possibilidades e caminhos objetivando o desenvolvimento de aprendizagens significativas e eficazes.

Para que a adaptação da proposta inicial fosse realizada, alguns objetos educacionais foram utilizados. Para tanto, definiremos tais objetos e o novo conceito de ensino remoto.

2.3.1 Ensino Remoto

No início do ano de 2020, fomos surpreendidos com a necessidade de adoção de medidas de distanciamento social devido à pandemia de Covid-19 no Brasil. O enfrentamento da pandemia nos trouxe a necessidade de manutenção de várias medidas sanitárias, incluindo o distanciamento social. Em um contexto geral, entendemos que não seria razoável esperar que, em curto prazo, as atividades presenciais em escolas, universidades, institutos federais retornassem, sendo assim, muitas instituições decidiram suspender todas as aulas presenciais, incluindo aulas práticas em laboratórios e outras experiências de aprendizagem, e investir na educação e no aprendizado online para ajudar a impedir a propagação do vírus. Assim, fomos obrigados a procurar por outras medidas que pudessem levar conteúdo aos alunos mesmo que estes estivessem em casa, cumprindo isolamento social. Foi então que o termo Ensino Remoto se popularizou.

O Ensino Remoto prioriza a mediação pedagógica por meio de tecnologias e plataformas digitais como apoio para os processos de ensino e aprendizagem, não configurando como simples transposição de modelos educativos presenciais para espaços virtuais, pois requer adaptações de planejamentos didáticos, estratégias, metodologias, recursos educacionais, no sentido de apoiar os estudantes na construção de percursos ativos de aprendizagem. Também conhecido como Ensino Remoto Emergencial (ERE), este modelo é utilizado em situações emergenciais, nas quais as atividades educativas presenciais precisam ser suspensas, como ocorre no atual cenário mundial, em função da pandemia de Covid-19.

Considerando processos de ensino e aprendizagem mediados por tecnologias digitais e plataformas educacionais que propiciam acesso a conteúdos, recursos, materiais e ferramentas para apoiar educadores e educandos, podemos classificar em interações virtuais síncronas que são realizadas com acesso simultâneo às tecnologias digitais, propiciando que os participantes estejam conectados em tempo real e interações virtuais assíncronas que não requerem simultaneidade no processo de interação entre os participantes, permitindo maior flexibilidade temporal e espacial (OLIVEIRA et al, 2020, p.11).

Se formos olhar de uma forma mais abrangente e positiva, a educação online pode flexibilizar o ensino e aprendizado, que pode passar ocorrer a qualquer hora e em qualquer lugar. Ensinar remotamente não exatamente é sinônimo de ensinar à distância, embora esteja diretamente relacionado ao uso de tecnologia. O ensino remoto permite o uso de plataformas já disponíveis e abertas para outros (GARCIA et al., 2020).

A variabilidade dos recursos e das estratégias bem como das práticas é definida a partir da familiaridade e da habilidade do professor em adotar tais recursos. Ensinar remotamente permite o compartilhamento de conteúdos escolares em aulas organizadas por meio de ambientes controlados por login e senha, criados em plataformas de ensino, como, por exemplo, o Google Classroom.

Do ponto de vista didático, o professor, ao ensinar remotamente, enfrenta o mesmo desafio do ensino convencional, em sala de aula presencial. E já de um ponto de vista pedagógico, o ensino remoto insere o professor e o aluno na dimensão da quinta revolução, na qual a relação do homem com os recursos tecnológicos e a inteligência artificial requerem novos protocolos éticos envolvendo responsabilidade e eficiência. A fim de atender os requisitos da responsabilidade e da eficiência, o domínio dessas competências digitais representa aspecto de relevância.

O interesse do aluno é um aspecto desafiador para o ensino remoto, pois significa tornar a apresentação das aulas tão ou mais atrativa do que aquilo que o aluno encontrar disponível na rede de comunicação aberta, e a atuação do professor, seja ela em que ambiente aconteça, é sempre um desafio (GARCIA et al., 2020).

Os desafios e limitações que o Ensino Remoto nos impõe vão além de ser somente questões conceituais do papel de cada agente na educação. As aulas online, atividades em tempo real com depedência da internet para fornecimento de dados e acesso à plataformas, nos mostram como é imprescindível uma infraestrutura que seja capaz de atender a todos, o que é muito difícil em um país com condições financeiras tão desiguais em sua população (RUSCHEL, 2020).

2.3.2 Plataforma Google Classroom

O Google Classroom ou Google Sala de Aula é uma plataforma que foi criada com o objetivo apoiar professores em sala de aula, melhorando a qualidade do ensino e aprendizagem. Surgiu no ano de 2014, criado pela empresa de tecnologia Google sendo uma aposta para uma ferramenta que pudesse atender a área educacional. Com o intuito de permitir que instituições de ensino utilizem de uma ferramenta de qualidade e gratuita, o Google Classroom surge como uma ferramenta facilitadora para a comunicação entre professores e estudantes. A ferramenta logo ficou conhecida pelo seu poder de promover o interesse dos alunos na participação dos conteúdos criando uma extensão da sala de aula em um ambiente virtual (DINIZ et al., 2020).

No Google Classroom é possível criar turmas, partilhar documentos, propor tarefas e promover discussões de forma simples e intuitiva. O docente consegue ainda organizar suas aulas em formato de tópicos, tendo a possibilidade de compartilhar documentos, áudios, vídeos, links e uma infinidade de possibilidades (ARAÚJO, 2016). Além disso, é possível a criação de notas de avisos, atividades que permitem correção, nota e comentários.

O ambiente é considerado agradável e fácil de trabalhar por ser um ambiente limpo, sem informações excessivas, bastando apenas o acesso via email, que geralmente o aluno já possui ou pode criar dentro da plataforma Google. Sua interface é semelhante a uma rede social, onde de forma lúdica é possível que o aluno visualize todo o conteúdo de forma ágil. Seu acesso também é possível via smartphone através do site e do aplicativo disponibilizado para Android e IOS (DINIZ et al., 2020). A cada tópico criado ou conteúdo enviado pelo professor à plataforma, todos os membros do grupo recebem automaticamente um alerta por email, facilitando assim o contato do professor com os alunos. Esses arquivos e conteúdos enviados são armazenados na tecnologia Drive disponível pelo Google, de forma que o professor não se preocupa inicialmente com a armazenagem dos arquivos. Como mecanismo de inserção e cadastro de turmas, tudo ocorre intuitivamente, ao tempo que o professor pode criar sua sala de aula e convidar seus alunos a participarem por email ou enviando uma chave de acesso que corresponde ao endereço da sala.

A utilização do Google Classroom apresenta várias vantagens, como: configuração fácil; não faz uso dos conteúdos e dados dos alunos; não contém anúncios ou propagandas; permite ambientes de comentários; facilita a organização dos materiais; dispensa de papel; estabelecimento de prazos e horários; E também algumas desvantagens, como por exemplo a necessidade de internet como pré-requisito ao acesso dos arquivos. Neste caso, antes da implantação e utilização da ferramenta, é importante verificar se todos os alunos conseguem de alguma forma ter acesso a pontos de conexão de internet, fator que deve ser planejado para não se tornar excludente.

Alguns pesquisadores mostram as contribuições da plataforma para o Ensino Híbrido, dentre eles podemos citar Souza (2016) que ao acompanhar por duas semanas o acesso feito pelos alunos na plataforma Google Classroom, identificou como único ponto negativo a limitação que alguns alunos tiveram no acesso à internet, mas concluiu que no geral, a maioria dos alunos se envolveu mais efetivamente com a disciplina de Matemática, por considerar que a ferramenta facilitou o diálogo com os colegas da turma e a troca de experiências por estes fora do contexto de sala de aula.

Outro autor que também trabalhou com o Google Classroom na aplicação de atividades referentes ao ensino de Matemática foi Araújo (2016). O autor descreveu as motivações, o envolvimento, bem como o interesse dos alunos pelo conteúdo. De modo geral, houve comprometimento da turma estudada e uma minoria se manteve alheia às atividades, realizando-as apenas para obtenção de nota na disciplina (SILVA; NETTO, 2018).

O Google Classroom vem sendo considerado um importante aliado dos professores diante desse momento de pandemia. De modo geral, podemos observar que a utilização dessas plataformas apresenta diversas vantagens e que sua utilização, desde que feita com empenho e criatividade pode vir a despertar o interesse dos alunos. Entende-se que nós professores precisamos estar primeiramente envolvidos e familiarizados com essas novas formas de interação, principalmente com o uso dessas tecnologias, que foram as ferramentas que nos permitiram conseguir repassar conteúdos aos nossos alunos mesmo que de forma remota, sem o contato presencial de que estávamos acostumados. É um tempo de novas descobertas e desafios, tempo esse que exige ainda mais de nós professores a criatividade e o planejamento, para que possamos atingir os nossos objetivos enquanto educandos.

2.3.3 Aplicativo de mensagens WhatsApp

Diante do momento atípico em que estamos vivendo, onde precisamos nos reinventar enquanto docentes para que conseguíssemos levar conteúdo a milhares de alunos de forma remota, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), surgem juntamente desses novos desafios e novas maneiras de aprender. As tecnologias móveis, como o celular e tablet, por exemplo, permitem aprender em diferentes espaços. Por isso utilizar dessas tecnologias para aprimorar o ensino, incentivar os alunos a buscar o conhecimento e principalmente descobrir novas maneiras de aprender, é contribuir para autonomia, criatividade e também ensinar para a liberdade (FELICIANO et al., 2009).

As redes sociais vem tomando espaço e impactando a vida moderna e os processos de ensino e aprendizagem estão sendo modificados por novos hábitos, acessos e facilidades, deste modo, as redes sociais surgem como mais um instrumento que pode servir de apoio ao processo ensino-aprendizagem remoto. Nesse contexto o aplicativo WhatsApp tem se tornado relevante.

O WhatsApp surgiu no ano de 2009 como sendo um aplicativo para troca de mensagens instantâneas para smartphones. Desde sua criação e com a posterior compra por parte do Facebook, ao Whatsapp foram incorporados os mais variados recursos para que uma comunicação cada vez mais rápida viesse a ocorrer (LIMA; ALMEIDA; CAVALCANTE, 2017).

O WhatsApp é definido como sendo um aplicativo para dispositivos móveis, que possibilita uma forma de comunicação instantânea. Definido por alguns autores como uma ferramenta de comunicação rápida e promissora a ser utilizada como uma plataforma de apoio à educação, visto que possibilita o envio de textos, imagens, sons e vídeos e a criação de grupos de usuários (MATTAR, 2014). Trata-se ainda de um aplicativo que permite a transferência dessas informações, instantaneamente, o que pode ajudar no ensino remoto, proposto com o surgimento da pandemia, pois permite que todos os usuários visualizem conteúdo escrito e visual em tempo real, e respondam a esse conteúdo no mesmo tempo.

Moran (2015) cita outro aspecto positivo em relação à forma de comunicação proporcionada por esta ferramenta, que é a utilização de uma linguagem mais familiar, maior espontaneidade e fluência constante de imagens, ideias e vídeos. Além disso, por ser gratuito, o WhatsApp oferece uma solução de baixo custo e acessível a grande parte da população, já que o envio de mensagens é gratuito, sendo necessária apenas uma conexão com a internet, dessa forma os usuários podem fazer uso de uma conexão com a internet já existente no ambiente onde eles se encontram, como comércio e locais públicos ou na sua própria residência (PAULINO et al., 2018). Esses recursos e serviços disponíveis pelo aplicativo facilitam o engajamento do discente em tarefas nas quais se envolve de forma ativa, construtivista, intencional, autêntica e cooperativa. Outra das suas funcionalidades que pode ser particularmente importante para as atividades pedagógicas é a confirmação do recebimento e da leitura das mensagens enviadas. Contudo, dentro do contexto da sua utilização para facilitar o envio e recebimento de atividades propostas por nós docentes durante o período de aulas remotas, o WhatsApp foi utilizado para proporcionar o envio das atividades aos discentes, que deveriam acessar o endereço enviado e responder aos questionamentos da atividade (KAIESKI; GRINGS; FETTER, 2015).

3 POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Neste capítulo apresentamos as definições de polinômios, grau de polinômios, operações com polinômios e raiz de um polinômio, com base nos livros Fundamentos da Matemática Elementar (IEZZI, 2005) e Polinômios e Equações Algébricas da Coleção PROFMAT (HEFEZ E VILLELA, 2018).

3.1 POLINÔMIOS

Definição: Uma função polinomial, ou simplesmente polinômio, é uma função $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

, $n \in \mathbb{N}$ onde a_0, a_1, a_2, ..., $a_n \in \mathbb{C}$ são denominados coeficientes de $p(x)$, $x \in \mathbb{C}$ é a variável e a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n são chamados termos do polinômio p.

São exemplos de polinômios: $p(x) = 2 + 5x + 3x^4$ e $q(x) = 1 + 4x^2 + 2x^3$

Definição: Um polinômio de um só termo é denominado monômio. São exemplos de monômios: $p(x) = 3$ e $q(x) = 7x^3$

3.1.1 Grau de um Polinômio

Definição: Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Definimos grau do polinômio p e denotamos por $gr(p(x))$ o número natural n , onde n é o maior expoente do termo tal que $a_n \neq 0$.

Por exemplo, se
$p(x) = 2 - 4x^3 + x^5$, então $gr(p(x)) = 5$ e se
$q(x) = 7x$, então $gr(q(x)) = 1$.

Observação: Não definimos o grau do polinômio nulo $p(x) = 0$.
Sendo assim, temos que $gr(p(x)) = 0$, se e somente se, $p(x) = a_0$ onde $a_0 \neq 0$.

3.1.2 Valor Numérico - Raiz de um Polinômio

Dado um número complexo r e o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, denomina-se valor numérico de p em r a imagem

$$p(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + ... + a_nr^n$$

Em particular, se $r \in \mathbb{C}$ satisfaz $p(r) = 0$ então dizemos que r é uma raiz do polinômio p.

3.1.3 Operações com Polinômios:

Adição ou Soma: Sejam os polinômios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$. Definimos a operação de adição ou soma desses polinômios, como segue

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n$$

O resultado da adição de dois polinômios é denominado soma e denotado por $(p + q)(x)$. Então $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$.

Propriedades da Adição:

Teorema: Sejam P o conjunto dos polinômios com coeficientes complexos e p, q, $h \in P$.

A operação de adição de polinômios satisfaz as seguintes propriedades:

A_1: *Propriedade associativa*: $p + (q + h) = (p + q) + h$

A_2: *Propriedade comutativa*: $p + q = q + p$

A_3: *Existência do elemento neutro da adição*: Existe um polinômio e_n tal que

$p + e_n = p$ para todo polinômio p. O polinômio e_n é chamado de elemento neutro para a adição de polinômios.

Determinando o elemento neutro da adição de polinômios:

Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ e $e_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + ... + \alpha_nx^n$

$$p(x) + e_n(x) = p(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + ... + \alpha_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

$$\Updownarrow$$

$$(a_0 + \alpha_0) + (a_1 + \alpha_1)x + (a_2 + \alpha_2)x^2 + ... + (a_n + \alpha_n)x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

$$\Updownarrow$$

$$a_0 + \alpha_0 = a_0,\ a_1 + \alpha_1 = a_1,\ ...\ ,\ a_n + \alpha_n = a_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e_n(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$$

Portanto $e_n(x)$ é o polinômio nulo.

A_4**:** *Existência de oposto aditivo:* Para todo polinômio p, existe o polinômio p' tal que $p + p' = e_n$

Determinando o oposto aditivo de $p(x)$:

Sejam os polinômios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ e $p'(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$

$$
\begin{gathered}
p(x) + p'(x) = e_n(x) \\
\Updownarrow \\
a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n \\
\Updownarrow \\
(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ...+ = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n \\
\Updownarrow \\
a_0 + b_0 = 0 \Rightarrow b_0 = -a_0 \\
a_1 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -a_1 \\
a_2 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = -a_2 \\
\vdots \\
a_n + b_n = 0 \Rightarrow b_n = -a_n
\end{gathered}
$$

Logo $p'(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - ... - a_nx^n$

Por exemplo, sejam os polinômios $p(x) = x + 3x^2 + 6x^5$ e $q(x) = 9 + 4x + 7x^2 + x^4$, então a adição é

$$
\begin{aligned}
(p + q)(x) = p(x) + q(x) &= (0 + 9) + (1 + 4)x + (3 + 7)x^2 + (0 + 0)x^3 + (0 + 1)x^4 + (6 + 0)x^5 \\
&= 9 + 5x + 10x^2 + x^4 + 6x^5
\end{aligned}
$$

Subtração: Sejam os polinômios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$. Definimos a operação de subtração desses polinômios como a soma de $p(x)$ com o inverso aditivo de $q(x)$. Assim:

$p(x) - q(x) = (a_o - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + ... + (a_n - b_n)x^n$

O resultado de dois polinômios é denominada diferença e é denotado por $(p - q)(x)$. Então $(p - q)(x) = p(x) - q(x)$.

Multiplicação: Dados dois polinômios, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$, definimos a multiplicação destes polinômios como segue:

$$p(x) \cdot q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n + ... + c_{n+m}x^{n+m}$$

onde

$c_0 = a_0b_0$

$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$

$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$

$\vdots$

$c_{n+m} = a_0b_m + a_1b_{m-1} + ... + a_nb_0$

Note que $p \cdot q$ pode ser obtido multiplicando-se cada termo a_ix^i de p por b_jx^j de q, sendo i e $j \in \mathbb{N}$. Segundo a regra $(a_ix^i) \cdot (b_jx^j) = a_ib_jx^{i+j}$ e somando os resultados obtidos.

O resultado da multiplicação de polinômios é denominado produto e denotado por $(p \cdot q)(x)$. Então $(p \cdot q)(x) = p(x) \cdot q(x)$.

Propriedades da Multiplicação:

Teorema: Sejam P o conjunto dos polinômios com coeficientes complexos e p, q, $h \in P$.

A operação de multiplicação de polinômios em P satisfaz as seguintes propriedades:

M_1**:** *Propriedade associativa*: $p \cdot (q \cdot h) = (p \cdot q) \cdot h$

M_2**:** *Propriedade comutativa*: $p \cdot q = q \cdot p$

M_3**:** *Existência do elemento neutro da multiplicação*: Existe um polinômio $e_m \in P$ tal que

$p \cdot e_m = p$ para todo polinômio p. O polinômio e_m é chamado de elemento neutro para a multiplicação de polinômios.

Determinando o elemento neutro da multiplicação de polinômios:

Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ e $e_m(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + ... + \alpha_mx^n$

$$p(x) \cdot e_n(x) = p(x)$$

M_4**:** *Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:* $p \cdot (q + h) = p \cdot q + p \cdot h$

Por exemplo, sejam os polinômios $p(x) = x + 3x^2 + 5x^3$ e $q(x) = 4 + 2x + x^2$, o produto é

$$
\begin{aligned}
(p \cdot q)(x) = p(x) \cdot q(x) &= (x + 3x^2 + 5x^3) \cdot (4 + 2x + x^2) \\
&= x(4 + 2x + x^2) + 3x^2(4 + 2x + x^2) + 5x^3(4 + 2x + x^2) \\
&= 4x + 2x^2 + x^3 + 12x^2 + 6x^3 + 3x^4 + 20x^3 + 10x^4 + 5x^5 \\
&= 4x + 14x^2 + 27x^3 + 13x^4 + 5x^5
\end{aligned}
$$

Divisão: Sejam dois polinômios $p(x)$ (dividendo) e $g(x)$ (divisor) com $g(x) \neq 0$. Dividir $p(x)$ por $g(x)$ é determinar outros polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que $p(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ onde $r(x) = 0$ ou $gr(r(x)) < gr(q(x))$.

Exemplo:

Quando dividimos $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ por $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ obtemos $q(x) = x$ e $r(x) = -4x^2 + 8x + 2$.

Note que $q(x) \cdot g(x) + r(x) = p(x)$

3.2 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Definição: Dadas duas funções polinomiais $h(x)$ e $q(x)$, chama-se equação polinomial ou equação algébrica a sentença aberta $h(x) = q(x)$.

Assim, se por exemplo, $h(x) = 4x^2 - 3x + 1$ e $q(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ a sentença aberta $4x^2 - 3x + 1 = x^3 - 2x^2 + 3$ é uma equação polinomial.

3.2.1 Raiz de uma equação polinomial

Definição: Dada uma equação polinomial $h(x) = q(x)$, chama-se raiz da equação o número r que quando substituído no lugar do x, torna a sentença verdadeira, ou seja, r é raiz da equação polinomial $h(x) = q(x)$ se, e somente se, $h(r) = q(r)$ é sentença verdadeira.

Número de Raízes Note que se $h(x) = q(x)$ então $h(x) - q(x) = 0$.

Chamando $p(x) = h(x) - q(x)$ temos que $p(x) = 0$. Então toda equação polinomial pode ser colocada na forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

.

Sendo assim, fica evidente que as seguintes proposições são equivalentes:

(1) r é raiz da equação $p(x) = 0$

(2) r é raiz da função polinomial $p(x)$

(3) r é raiz do polinômio p

e as três proposições são sintetizadas por $p(r) = 0$.

Dizemos também que a equação $p(x) = 0$ é de grau n se, e só se, $p(x)$ e p são de grau n.

3.2.2 Teorema Fundamental de Álgebra

Todo polinômio p de grau $n \geqslant 1$ admite pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada no livro Polinômios e Equações Algébricas da Coleção PROFMAT (HEFEZ E VILLELA, 2018).

3.2.3 Teorema da decomposição

Todo polinômio p de grau $n \geqslant 1$ pode ser decomposto de forma única em n fatores do primeiro grau, isto é,

$$p = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n)$$

onde r_1, r_2, r_3,..., r_n são as raízes de p, considerando multiplicidades de raízes.

A demonstração desse Teorema pode ser encontrada no livro Fundamentos da Matemática Elementar 6 (IEZZI, 2005).

Exemplo:

Fatorar o polinômio $p = 5x^5 - 5x^4 - 80x + 80$.

Sabendo que suas raízes são 1, -2, 2, $-2i$ e $2i$, a forma fatorada do polinômio p é

$$p = 5(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 2i)(x - 2i)$$

3.2.4 Relações entre coeficientes e raízes

Equação do 2º Grau Consideremos a equação

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

cujas raízes são r_1 e r_2.

Note que essa equação pode ser escrita na forma

$$a(x - r_1)(x - r_2) = 0 \qquad (2)$$

.

Assim de (1) e (2) obtemos

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2) \ \ \forall x$$

isto é:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 \ \ \forall x$$

Então

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$

e

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

são as relações entre coeficientes e raízes da equação do 2º grau.

Produtos Notáveis Existem alguns produtos de polinômios que aparecem com frequência em problemas e apresentam certas regularidades. Esses produtos são chamados Produtos Notáveis, e o conhecimento dessas regularidades facilita a realização de cálculos.

Quadrado da soma de dois termos: Esse produto notável resulta de uma soma de dois termos elevada ao quadrado. Quando encontramos uma soma de dois números elevada ao quadrado, efetuamos primeiro os cálculos dentro dos parênteses.

Por exemplo: $(4 + 3)^2 = 7^2 = 7.7 = 49$

No entanto, em $(x + y)^2$ devemos utilizar propriedades algébricas .

Nesse caso, transformamos $(x + y)^2$ em $(x + y).(x + y)$ e, aí, efetuamos esta multiplicação de binômios:

$$(x + y)^2 = (x + y).(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Assim,

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

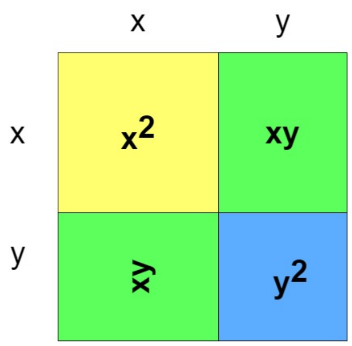
Produtos como esse obedecem a uma regularidade, têm um padrão.

$\underbrace{Quadrado\ da\ soma}$ = $\underbrace{Quadrado\ do\ 1^o\ termo}$ + $\underbrace{Duas\ vezes\ o\ 1^o\ termo\ pelo\ 2^o\ termo}$ + $\underbrace{Quadrado\ do\ 2^o\ termo}$

A expressão encontrada tem três termos, e é chamada de trinômio quadrado perfeito.

Visualização do quadrado da soma: Observe o quadrado da Figura 2, cujo lado mede $x + y$.

Figura 2: Quadrado da soma



Fonte: Elaborado pela autora.

Exemplo; Vamos utilizar o padrão do quadrado da soma para resolver $(3x + 5)^2$

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2.(3x).(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

Quadrado da diferença de dois termos: Esse produto notável resulta de uma diferença de dois termos elevada ao quadrado.

Vamos resolver o quadrado $(x - y)^2$

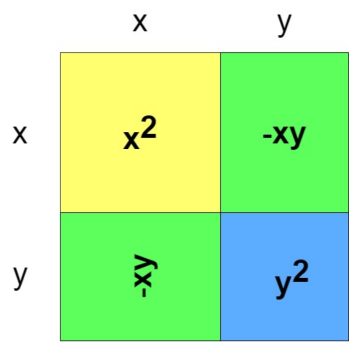
$$(x - y)^2 = (x - y).(x - y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Assim,

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Visualização do quadrado da diferença: Observe o quadrado, cujo lado mede $x - y$.

Figura 3: Quadrado da diferença



Fonte: Elaborado pela autora.

Mais uma vez podemos observar que ocorre um padrão.

$\underbrace{\textit{Quadrado da diferença}}$ = $\underbrace{\textit{Quadrado do } 1^o \textit{ termo}}$ - $\underbrace{\textit{Duas vezes o } 1^o \textit{ termo pelo } 2^o \textit{ termo}}$ + $\underbrace{\textit{Quadrado do } 2^o \textit{ termo}}$

Exemplo: Vamos utilizar o padrão para resolver o quadrado $(3x^2 - 2y)^2$

$$(3x^2 - 2y)^2 = (3x)^2 - 2.(3x^2).(2y) + (2y)^2 = 9x^4 - 12x^2y + 4y^2$$

Produto da Soma pela Diferença de dois termos: No primeiro produto notável vimos uma soma multiplicada por uma soma; no segundo, uma diferença multiplicada por uma diferença. Agora, veremos a soma de dois termos multiplicada pela diferença dos mesmos termos. Vejamos:

$$(x + y).(x - y) = x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2$$

Assim,

$$(x + y).(x - y) = x^2 - y^2$$

Nesse produto ocorre um padrão diferente:

$\underbrace{\textit{Produto da soma pela diferença}}$ = $\underbrace{\textit{Quadradodo}1^o\textit{termo}}$ - $\underbrace{\textit{Quadrado do } 2^o \textit{ termo}}$

Exemplo 14 Vamos utilizar o padrão para resolver o produto $(2x^3 + 7).(2x^3 - 7)$

$$(2x^3 + 7).(2x^3 - 7) = (2x^3)^2 - (7)^2 = 4x^6 - 49$$

3.2.5 Método de Completar Quadrados

Utilizando como base de pesquisa o livro História da Matemática (BOYER, 1974), conhece-se um pouco da história do matemático Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi que viveu aproximadamente entre o anos 790 e 850 e escreveu dois livros, sobre aritmética e álgebra, com papéis muito importantes na história da matemática.

> Através de sua aritmética, o nome de al-Kowarizmi tornou-se uma palavra vérnácula; através do título de seu livro mais importante, *Al-jabr wa'l muqabalah* ele ele nos deu uma palavra ainda mais familiar. Desse título veio o termo *álgebra* pois foi por esse livro que mais tarde a Europa aprendeu o ramo da matemática que tem esse nome. Diofante é às vezes chamado de o "pai da álgebra", mas esse título pertence mais a al-Kowarizmi. (1974, p. 166-167)

Segundo Boyer (1974), a tradução latina da Álgebra de al-Khowarizmi introduz uma breve explanação do princípio posicional para números passando então à resolução, em seis capítulos curtos, dos seis tipos de equações formadas com três espécies de quantidades: raízes, quadrados e números.

3.2.6 Resolução de uma equação do 2º grau

Para resolver uma equação do segundo grau, da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais não nulos, com a utilização do método, a estratégia que utilizaremos faz aparecer um trinômio quadrado perfeito $ax^2 + bx + c = 0$, ou pelo menos parte dele, como descrito nas operações quadrado da soma e quadrado da diferença de dois termos dos Produtos Notáveis.

Seguiremos os seguintes passos, que são uma adaptação do método descrito por al-Khowarizmi:

Passo 1: Isolar o termo independente dos termos dependentes, ou seja, subtrair dos dois membros da igualdade o valor de c, onde temos $ax^2 + bx = -c$.

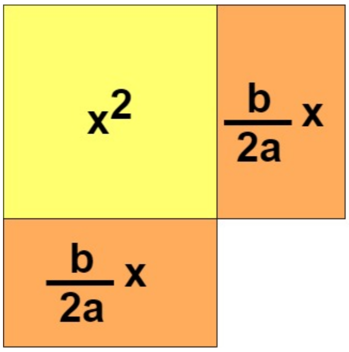
Passo 2: Dividir a equação pelo valor do coeficiente do termo x^2, que neste caso é a. Logo, teremos $x^2 + (\frac{b}{a})x = -\frac{c}{a}$.

Passo 3: Montar a seguinte representação geométrica para a equação:

a. Representar o quadrado de lado x (ou lado y) com a peça x^2 (ou y^2)

b. Adicionar os retângulos de lados x (ou y) na quantidade $\frac{b}{2a}$ em cada lado do quadrado.

Figura 4: Quadrado de lado $x + \dfrac{b}{2a}$



Fonte: Elaborado pela autora.

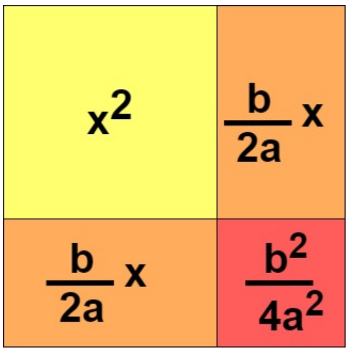
Temos então que a área da figura construída é exatamente $x^2 + (\frac{b}{a}x)$, ou sua variação $x^2 - (\frac{b}{a}x)$, que pelo Passo 2, tem valor de $-\frac{c}{a}$.

Passo 4: Completar a figura construída no item 3 para que se torne um quadrado, de forma que tenha a menor área possível, sem que haja deformação das figuras já construídas.

Temos então que foi adicionado no total um quadrado de lado $\frac{b}{2a}$. Logo se antes a área da figura era $-\frac{c}{a}$, agora temos que a área total da figura formada é $-\dfrac{c}{a}+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a}$.

Observando o quadrado completado, percebe-se que ele possui lado igual a $x+\frac{b}{2a}$, portanto possui área igual a $(x + \frac{b}{2a})^2$.

Figura 5: Quadrado de lado $x + \dfrac{b}{2a}$ completo

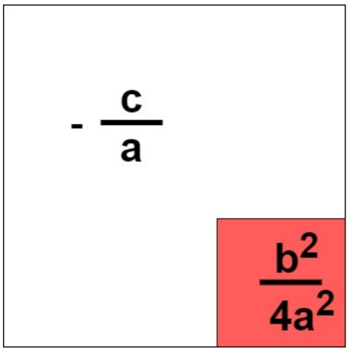


Fonte: Elaborado pela autora.

Igualando os valores da área do quadrado completado, temos que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Figura 6: Quadrado de lado $x + \frac{b}{2a}$



Fonte: Elaborado pela autora.

Logo,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\mid x + \frac{b}{2a} \mid = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Se $x + \frac{b}{2a} \geqslant 0$, então $\mid x + \frac{b}{2a} \mid = x + \frac{b}{2a}$
Assim

$$\mid x + \frac{b}{2a} \mid = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $x + \frac{b}{2a} < 0$, então $\mid x + \frac{b}{2a} \mid = -\left(x + \frac{b}{2a}\right)$
Assim

$$\mid x + \frac{b}{2a} \mid = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$-\left(x + \frac{b}{2a}\right) = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x" = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

onde x' e $x"$ são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c$.

4 PROPOSTA DE ABORDAGEM E RELATO DE APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

As operações básicas com polinômios com coeficientes inteiros e a generalização das regras dos produtos notáveis obedecem regras que podem ser verificadas com o uso do Algeplan. Neste capítulo será relatada a proposta de aplicação de plano de aula relacionado a estas propriedades que foram desenvolvidas com 25 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Fundamental Padre José de Anchieta, da cidade de Rosário do Sul, estado do Rio Grande do Sul, ano letivo de 2020. As atividades presenciais foram realizadas dentro dos períodos de aula destinados à disciplina de Matemática entre os dias 5 e 18 de março de 2020 e de forma remota de 19 de março à 28 de agosto de 2020, envolvendo todos os alunos da turma, visto ser uma das unidades temáticas a ser desenvolvidas conforme plano de trabalho do 8º e 9º anos da referida escola. A escola situa-se no Bairro Ana Luiza e pertence à 19ª Coordenadoria Regional de Educação. A turma do 9º Ano, onde a proposta foi aplicada, é composta por 25 alunos, sendo 15 meninas e 10 meninos, numa faixa etária entre 14 e 17 anos. Destes, 19 alunos são oriundos do 8º ano da própria escola e 6 estão cursando novamente o 9º ano. Três alunos frequentam a sala de recursos multifuncional da escola, onde é realizado o Atendimento Educacional Especializado – AEE.

Com o objetivo de trazer significado no ensino de operações com polinômios e raízes de equações polinomiais do segundo grau, conforme já elencado, o uso do material manipulável do tipo Algeplan incorpora um meio de despertar o interesse dos alunos, desmistificando a ideia de que a aprendizagem algébrica se dá somente por sistematização de fórmulas e cálculos. Neste sentido, a proposta de abordagem dos tópicos relacionados deu-se em 3 etapas: revisão de conteúdos, confecção do material Algeplan e resolução de questões com o material.

4.1 ATIVIDADES LÁPIS/PAPEL

A primeira etapa, realizada parte presencial e parte remotamente, foi composta por aulas de revisão do conteúdo operações com polinômios e resolução de exercícios juntamente com os alunos. Concluída a revisão, os alunos foram submetidos à avaliação escrita para mensurar o nível de conhecimento adquirido. O período posterior foi realizado apenas remotamente, de acordo com o Parecer nº 01/2020 publicado pelo Governo do Estado do Rio Grande do Sul em 18 de março de 2020, onde o Conselho Estadual de Educação manifestou-se dando orientações às instituições estaduais de ensino sobre o desenvolvimento das atividades escolares, excepcionalmente, enquanto permanecerem as medidas de prevenção ao novo Coronavirus - Covid-19.

Durante o mês de maio instaurou-se férias escolares. A partir de junho, propomos atividades de construção do material Algeplan e sua aplicação na realização de exercícios de operações com polinômios (adição, subtração, multiplicação e regras de produtos notáveis). Essa proposta e sua devolutiva por parte dos alunos realizou-se de modo virtual e assíncrono em que a interação acontece a qualquer tempo. São atividades realizadas pelo estudante em horário individualmente definido, com prazo de entrega estipulado pelo professor, pelo aplicativo WhatsApp, pela plataforma Google Classroom e disponibilizado material impresso na escola para os alunos que não têm acesso à internet.

Semanalmente, foram propostas atividades com vídeos explicativos, primeiramente por professores que já tinham canal no Youtube e depois por vídeos do canal próprio, e solicitada realização de lista de exercícios, de forma que os alunos enviassem fotos das resoluções pelo aplicativo de mensagens para o contato pessoal da professora ou pela plataforma.

Descrevemos, a seguir, as atividades semanalmente programadas.

Semana 1 (05/03 à 17/03): Foram revisadas presencialmente em sala de aula durante 11 horas-aula os conteúdos de adição, subtração, multiplicação e divisão de monômios, por meio de explicação no quadro negro, exercícios e correção de exercícios.

Percebeu-se alguns alunos com conhecimento do conteúdo, mas a maioria da turma mostrava-se apática e desmotivada.

Semana 2 (19/03 à 25/03): Disponibilização de videoaula (CORREIA, 2017a) com o tema adição e subtração com polinômios e lista de exercícios sobre o conteúdo. Envio e recebimento pelo WhatsApp.

Começando as aulas remotas, o vídeo explicativo foi compartilhado do canal ”Professora Angela Matemática”por haver maior recurso audiovisual e atender aos objetivos do conteúdo.

A lista de exercícios disponibilizada aos alunos encontra-se no Apêndice A.

Semana 3 (26/03 è 01/04): Disponibilização de videoaula (CORREIA, 2017b) com o tema multiplicação de polinômios e lista de exercícios sobre o conteúdo. Envio e recebimento da atividade pelo WhatsApp.

A lista de exercícios disponibilizada aos alunos encontra-se no Apêndice B.

Semana 4 (02/04 à 08/04): Disponibilização de videoaula (CORREIA, 2017c) com o tema divisão de polinômio por monômio e lista de exercícios sobre o conteúdo. Envio e recebimento da atividade pelo WhatsApp.

A lista de exercícios disponibilizada aos alunos encontra-se no Apêndice C.

Semana 5 (09/04 à 15/04): Disponibilização de videoaula (CORREIA, 2017d) com o tema produtos notáveis: quadrado da soma de dois termos e lista de exercícios sobre o conteúdo . Envio e recebimento da atividade pelo WhatsApp.

A lista de exercícios disponibilizada aos alunos encontra-se no Apêndice D.

Semana 6 (16/04 à 22/04): Disponibilização de videoaula (CORREIA, 2017e) com o tema produtos notáveis: quadrado da diferença de dois termos e lista de exercícios sobre o conteúdo. Envio e recebimento da atividade pelo WhatsApp.

A lista de exercícios disponibilizada aos alunos encontra-se no Apêndice E.

Semana 7 (23/04 à 30/04): Disponibilização de videoaula (CORREIA, 2017f) com o tema produtos notáveis: produto da soma pela diferença de dois termos e lista de exercícios sobre o conteúdo. Envio e recebimento da atividade pelo WhatsApp.

A lista de exercícios disponibilizada aos alunos encontra-se no Apêndice F.

Durante o mês de maio o governo estadual estabeleceu férias, retomando-se assim as atividades remotas no mês de junho.

Semana 8 (01/06 à 07/06): Disponibilização, no grupo de WhatsApp e na plataforma Google Classrom, de lista de exercícios para verificação da aprendizagem dos alunos.

A lista de exercícios disponibilizada aos alunos encontra-se no Apêndice G.

O procedimento de coleta de dados foi o recebimento das produções dos alunos, correção e anotações no diário de classe. A síntese de aproveitamento das semanas de 1 à 8 foi de atividades realizadas parcialmente por 3 alunos e integralmente por 8 alunos.

4.2 ATIVIDADES COM O ALGEPLAN

4.2.1 Confecção do Algeplan

Semana 9 (08/06 à 14/06): Disponibilização de vídeos Confeccionando o Algeplan - Vídeos 1 (Bressan, 2020a) e 2 (Bressan, 2020b) com os passos de construção dos quadrados do material Algeplan, no grupo de WhatsApp e na plataforma Google Classroom; recebimento de fotos dos quadrados confeccionados pelo WhatsApp.

Semana 10 (15/06 à 21/06): Disponibilização de vídeo Confeccionando o Algeplan - Vídeo 3 (Bressan, 2020c) com os passos da construção dos retângulos do material Algeplan, no grupo de WhatsApp e na plataforma Google Classrom; recebimento de fotos dos retângulos confeccionados pelo WhatsApp.

Semana 11 (22/06 à 28/06): Disponibilização, no grupo de WhatsApp e na plataforma Google Classrom, de imagens dos termos (monômios) que deveriam ser escritos nas peças do material Algeplan; recebimento de fotos do material confeccionado pelo WhatsApp.

Na Figura 7, podemos visualizar as peças confeccionadas pelos alunos. Alguns alunos fizeram as peças sem cores distintas (apenas folha branca) e outros coloriram as peças.

Figura 7: Material confeccionado pelos Alunos 3 e 4

Fonte: Arquivo da autora.

O procedimento de coleta de dados foi o recebimento das fotos das peças confeccionadas e posterior anotações no diário de classe. A síntese de aproveitamento dessa atividade foi parcialmente por 3 alunos e integralmente por 6 alunos.

4.2.2 Adição e Subtração de Polinômios

Semana 12 (29/06 à 05/07) : Disponibilização de lista de exercícios e de vídeo (BRESSAN, 2020d), no grupo de WhatsApp e na plataforma Google Classroom, com exemplos de como resolver e responder às questões sobre adição e subtração de polinômios da lista com o material Algeplan; recebimento de fotos da resolução pelo WhatsApp.

O vídeo apresenta a resolução de 5 exemplos:

1) $2y^2 + 5y + 3$

2) $x^2 + x - x - x - x - 1 - 1 - 1$

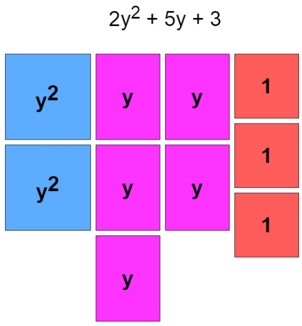
3) $(2y^2 + 3x - 4) + (y^2 + 2x + 5)$

4) $(x^2 - x + 5) + (-3x^2 + x + 5)$

5) $(x^2 - x + 5) - (-3x^2 + x + 5)$

O primeiro exemplo do vídeo mostra como montar o polinômio $2y^2 + 5y + 3$ com as peças do material, ou seja, dois quadrados com a inscrição y^2, 5 retângulos com a inscrição y e três quadrados com a inscrição 1. Uma forma de representar por meio de figuras está apresentado na Figura 8.

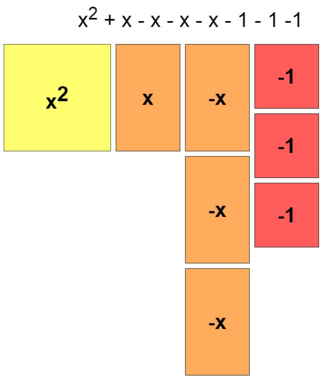
Figura 8: Montagem de $2y^2 + 5y + 3$



Fonte: Elaborado pela autora.

O segundo exemplo do vídeo traz o polinômio $x^2 + x - x - x - x - 1 - 1 - 1$, com os termos semelhantes separados. Uma forma de representar por meio de figuras está apresentado na Figura 9.

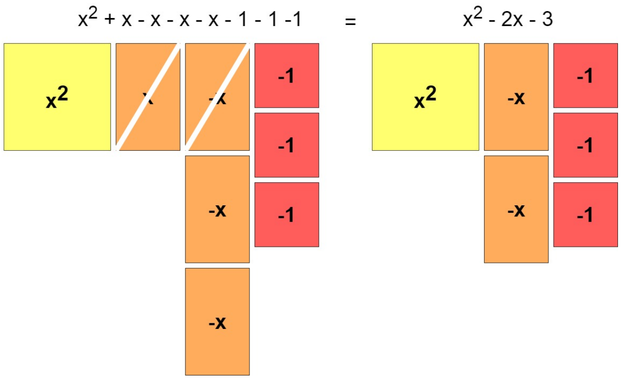
Figura 9: Montagem de $x^2 + x - x - x - x - 1 - 1 - 1$



Fonte: Elaborado pela autora.

Esse exemplo traz o reconhecimento do oposto aditivo na utilização da subtração de termos semelhantes, ou seja, ao expressar o polinômio com as peças, devemos retirar pares de peças iguais mas que possuem sinais contrários. Aqui devem ser retiradas uma peça com a inscrição x e outra com a inscrição $-x$, resultando no polinômio $x^2 - 2x - 3$. Uma forma de representar por meio de figuras está apresentado na Figura 10.

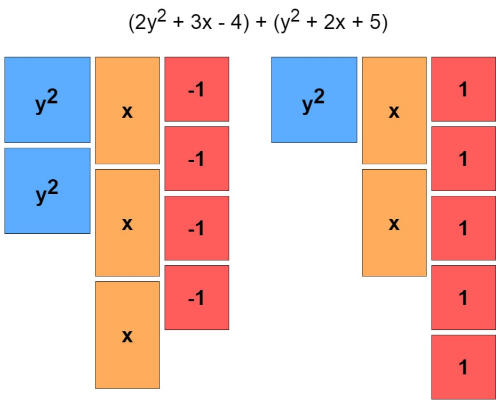
Figura 10: Resolução de $x^2 + x - x - x - x - 1 - 1 - 1$



Fonte: Elaborado pela autora.

O terceiro exemplo do vídeo traz a adição de polinômios $(2y^2 + 3x - 4) + (y^2 + 2x + 5)$. O polinômio da primeira parcela deve ser expresso por dois quadrados y^2, três retângulos x e quatro quadrados -1, lembrando que a inscrição negativa está no verso da mesma peça com a inscrição positiva. Já o polinômio da segunda parcela deve ser expresso por um quadrado y^2, dois retângulos x e cinco quadrados 1. Uma forma de representar por meio de figuras está apresentado na Figura 11.

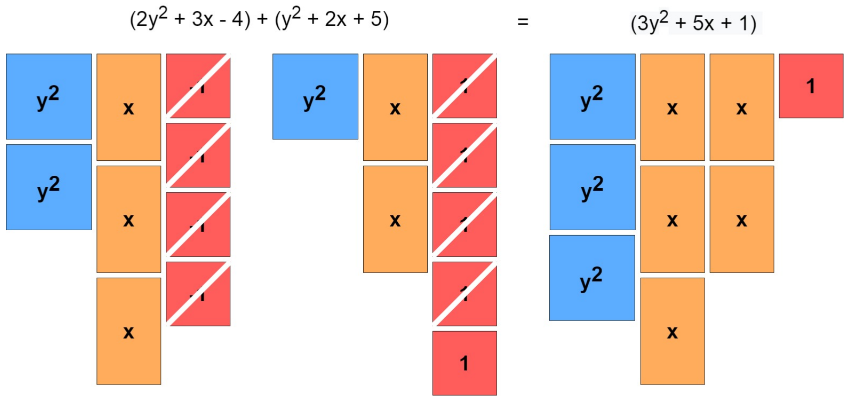
Figura 11: Montagem de $(2y^2 + 3x - 4) + (y^2 + 2x + 5)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Para a resolução, como o uso do Algeplan, deve-se retirar 4 quadrados com a inscrição 1 juntamente com quatro quadrados com a inscrição -1. Uma forma de representar por meio de figuras está apresentado na Figura 12.

Figura 12: Resolução de $(2y^2 + 3x - 4) + (y^2 + 2x + 5)$

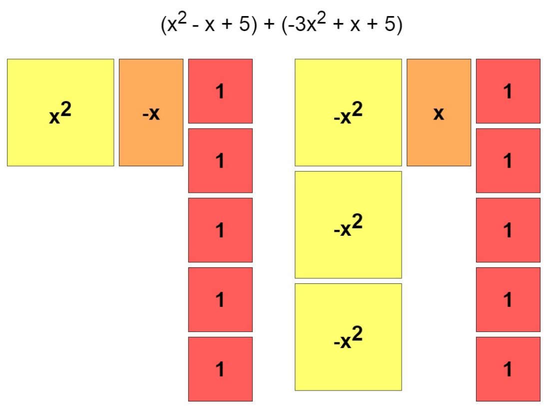


Fonte: Elaborado pela autora.

Portanto, temos como resultado para a adição o polinômio $3y^2 + 5x + 1$

Como no terceiro, o quarto exemplo do vídeo traz a adição de polinômios $(x^2 - x + 5) + (-3x^2 + x + 5)$. O polinômio da primeira parcela deve ser expresso por um quadrado x^2, um retângulo $-x$ e cinco quadrados 1. Já o polinômio da segunda parcela deve ser expresso por três quadrados x^2, um retângulo x e cinco quadrados 1. Uma forma de representar por meio de figuras está apresentado na Figura 13.

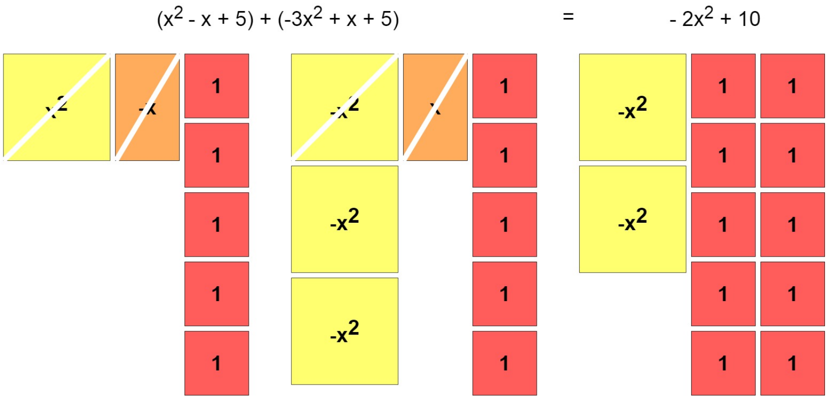
Figura 13: Montagem de $(x^2 - x + 5) + (-3x^2 + x + 5)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Para a resolução, com o uso do Algeplan, deve-se retirar um quadrado com a inscrição x^2 juntamente com outro quadrado com a inscrição $-x^2$, assim como um retângulo com a inscrição x com um retângulo com a inscrição $-x$.

Figura 14: Resolução de $(x^2 - x + 5) + (-3x^2 + x + 5)$

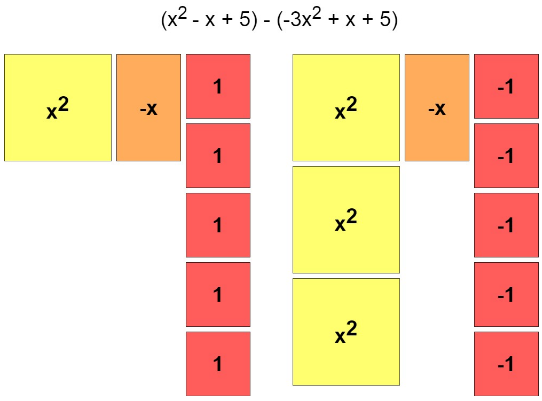


Fonte: Elaborado pela autora.

Portanto, temos como resultado para a adição o polinômio $-2x^2 + 10$

No quinto e último exemplo do vídeo, temos a subtração de polinômios $(x^2 - x + 5) - (-3x^2 + x + 5)$. Deve-se representar o polinômio do minuendo por um quadrado x^2, um retângulo $-x$ e cinco quadrados 1. Já o polinômio do subtraendo deve ser representado pelo seu oposto aditivo, ou seja, por três quadrados x^2, um retângulo $-x$ e cinco quadrados -1. Uma forma de representar por meio de figuras está apresentado na Figura 15.

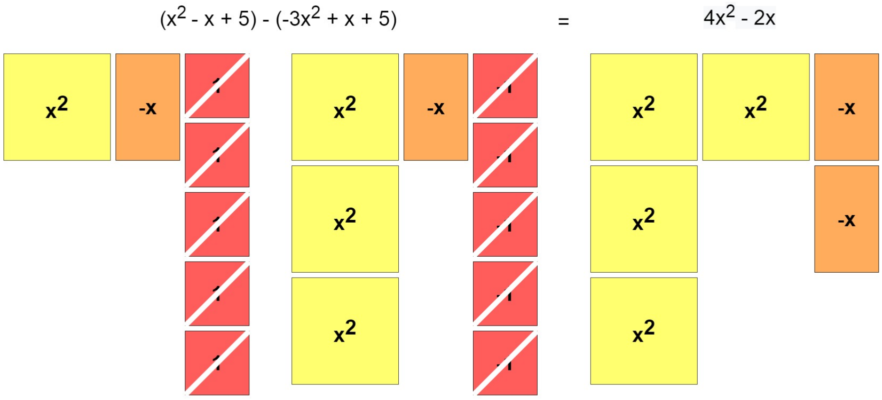
Figura 15: Montagem de $(x^2 - x + 5) - (-3x^2 + x + 5)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Para a resolução, com o uso do Algeplan, deve-se retirar cinco quadrados com a inscrição 1 juntamente com cinco quadrados com a inscrição -1. Uma forma de representar por meio de figuras está apresentado na Figura 16.

Figura 16: Resolução de $(x^2 - x + 5) - (-3x^2 + x + 5)$



Fonte: a autora.

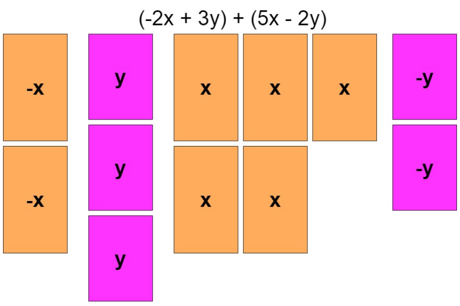
Portanto, temos como resultado para a adição o polinômio $4x^2 - 2x$.

A lista de exercícios disponibilizada aos alunos encontra-se no Apêndice H.

Apresentamos a seguir, a resolução esperada do Item a) e as resoluções apresentadas pelos alunos.

A representação esperada da adição $(-2x + 3y) + (5x - 2y)$ com as peças está ilustrada na Figura 17.

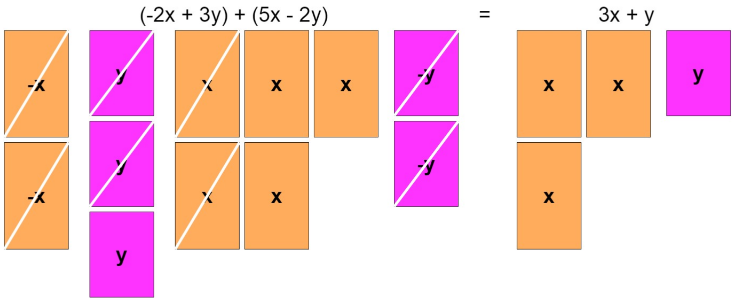
Figura 17: Montagem de $(-2x + 3y) + (5x - 2y)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme descrito no exemplo 2 do vídeo, duas peças y e duas peças $-y$ assim como duas peças x e duas peças $-x$, por terem sinais opostos, anulam-se e deverão ser retiradas. Uma forma de resolução com as peças está apresentado na Figura 18.

Figura 18: Resolução de $(-2x + 3y) + (5x - 2y)$

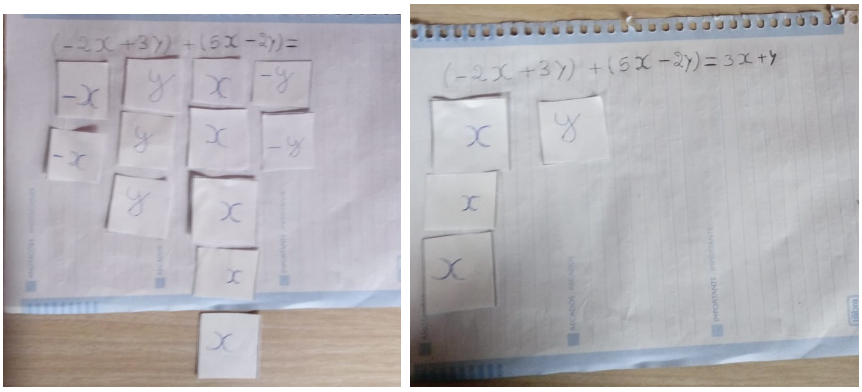


Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, teremos como resultado $3x + y$

Na Figura 19, podemos observar que o Aluno 4 realizou a montagem do Item a) de forma correta.

Figura 19: Montagem e resolução de $(-2x + 3y) + (5x - 2y)$ realizada pelo Aluno 4



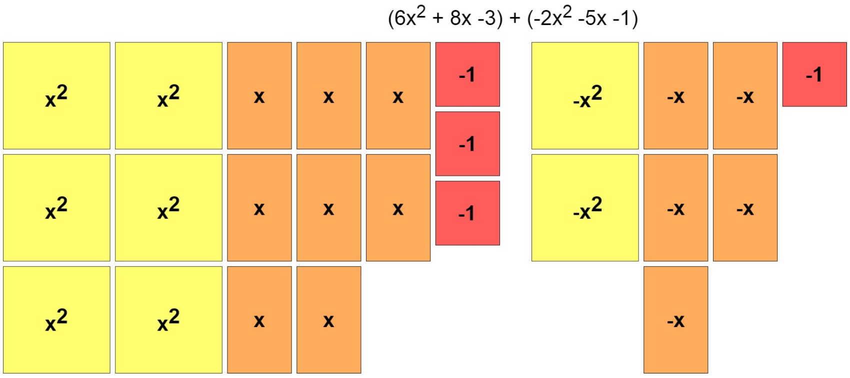
Fonte: Arquivo da autora.

Além disso resolveu corretamente retirando as peças que deveria e expressando o resultado conforme esperado, visto na Figura 19.

Resolução esperada do Item b)

A representação esperada da adição $(6x^2 + 8x - 3) + (-2x^2 - 5x - 1)$ com as peças, pode ser vista na Figura 20.

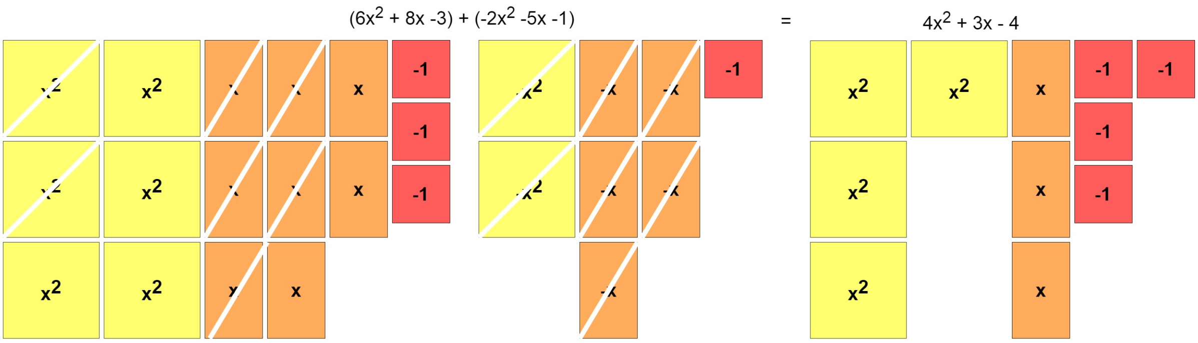
Figura 20: Montagem de $(6x^2 + 8x - 3) + (-2x^2 - 5x - 1)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme descrito no exemplo 2 do vídeo, duas peças x^2 e duas peças $-x^2$ assim como cinco peças x e cinco peças $-x$, por terem sinais opostos, anulam-se e deverão ser retiradas. Uma forma de resolução com as peças está apresentado na Figura 21.

Figura 21: Resolução de $(6x^2 + 8x - 3) + (-2x^2 - 5x - 1)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, teremos como resultado $4x^2 + 3x - 4$

O Aluno 3 realizou a montagem do Item b) de forma correta, conforme apresentado na Figura 22.

Figura 22: Montagem e resolução de $(6x^2 + 8x - 3) + (-2x^2 - 5x - 1)$ pelo Aluno 3

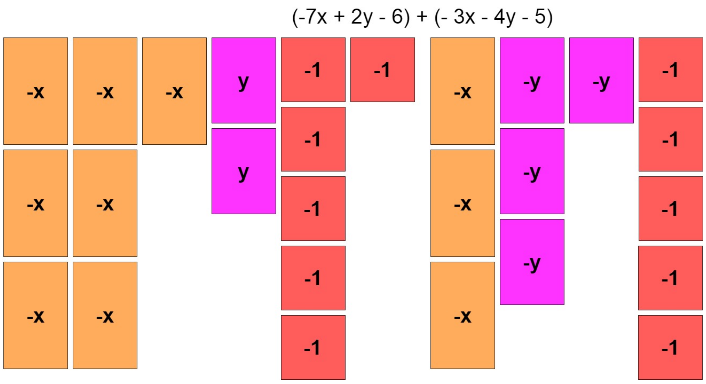
Fonte: Arquivo da autora.

Além disso resolveu corretamente retirando as peças que deveria e expressando o resultado conforme esperado.

Resolução esperada do Item c)

Na Figura 23 está a representação esperada da adição $(-7x+2y-6)+(-3x-4y-5)$ com as peças.

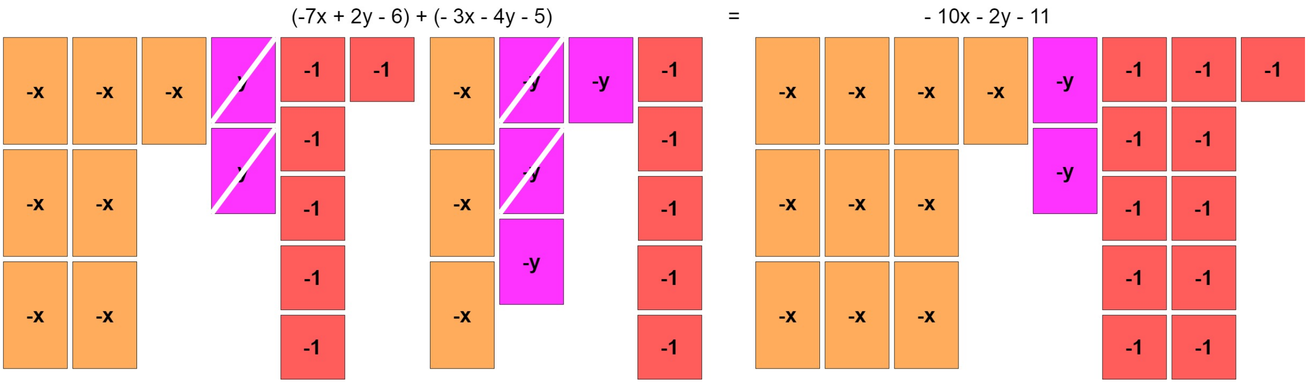
Figura 23: Montagem de $(-7x + 2y - 6) + (-3x - 4y - 5)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme descrito no exemplo 2 do vídeo, duas peças y e duas peças $-y$, por terem sinais opostos, anulam-se e deverão ser retiradas. Uma forma de resolução com as peças está apresentado na Figura 24.

Figura 24: Resolução de $(-7x + 2y - 6) + (-3x - 4y - 5)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, teremos como resultado $-10x - 2y - 11$.

O Aluno 3 realizou a montagem do Item c) de forma correta, conforme descrito na Figura 25.

Figura 25: Montagem e resolução de $(-7x + 2y - 6) + (-3x - 4y - 5)$ realizada pelo Aluno 3

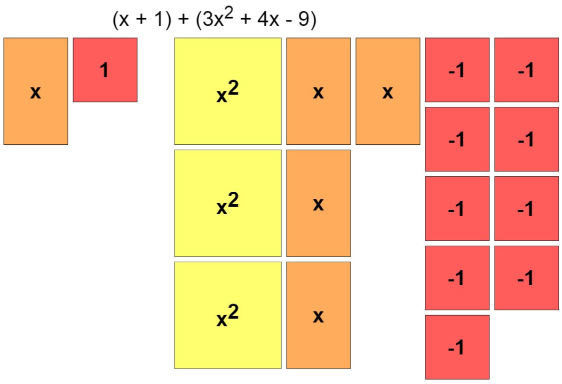
Fonte: Arquivo da autora.

Podemos observar que o Aluno 3 resolveu corretamente retirando as peças que deveria mas não expressou o resultado esperado pois esqueceu do sinal negativo em $-10x$ (Figura 25).

Resolução esperada do Item d)

A representação esperada da adição $(x + 1) + (3x^2 + 4x - 9)$ com as peças do Algeplan, pode ser vista na figura 26.

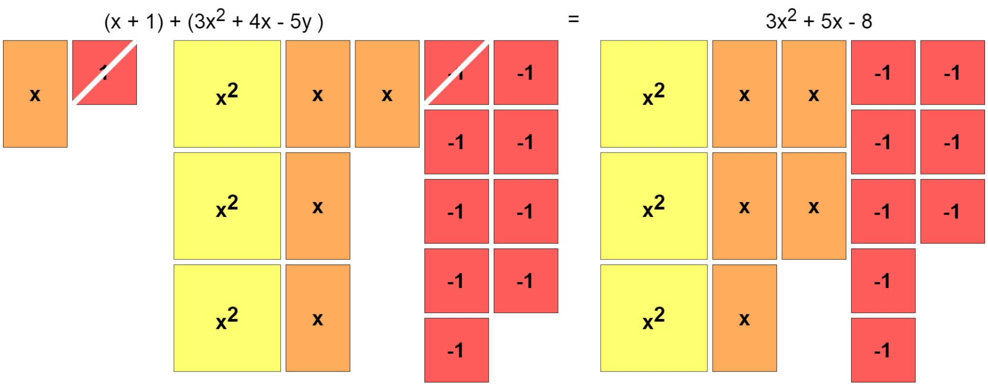
Figura 26: Montagem de $(x+1)+(3x^2+4x-9)$



Fonte:Elaborado pela autora.

Conforme descrito no exemplo 2 do vídeo, uma peça x e uma peça $-x$, por terem sinais opostos, anulam-se e deverão ser retiradas (Figura 27).

Figura 27: Resolução de $(x+1)+(3x^2+4x-9)$

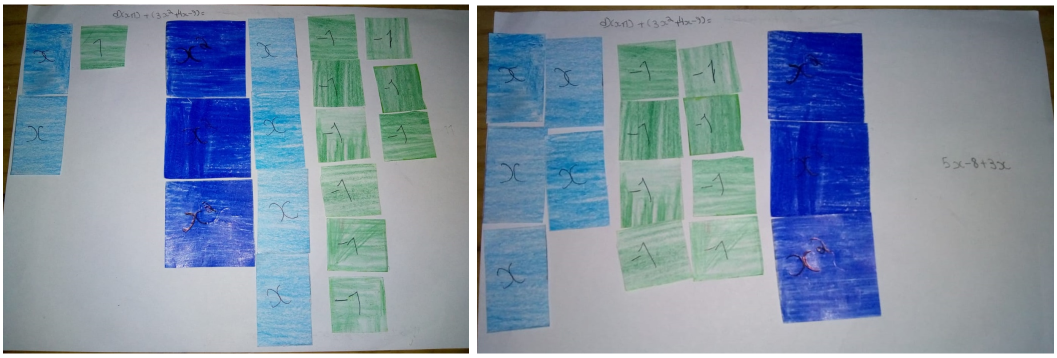


Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado $3x^2+5x-8$

O Aluno 3 realizou a montagem do Item d) de forma incorreta, pois colocou uma peça x a mais, conforme Figura 28.

Figura 28: Montagem e resolução de $(x+1)+(3x^2+4x-9)$ pelo Aluno 3



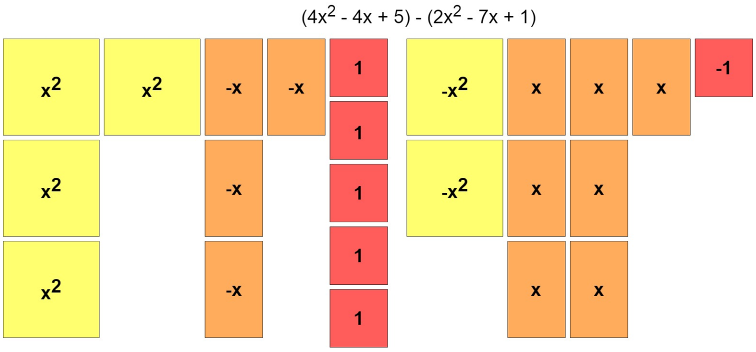
Fonte: Arquivo da autora.

No entanto, ele resolveu corretamente retirando as peças que deveria e expressando o resultado esperado, conforme Figura 28.

Resolução esperada do Item e)

Conforme o exemplo 5 do vídeo, a representação esperada da subtração $(4x^2-4x+5)-(2x^2-7x+1)$ com as peças está ilustrada na Figura 29.

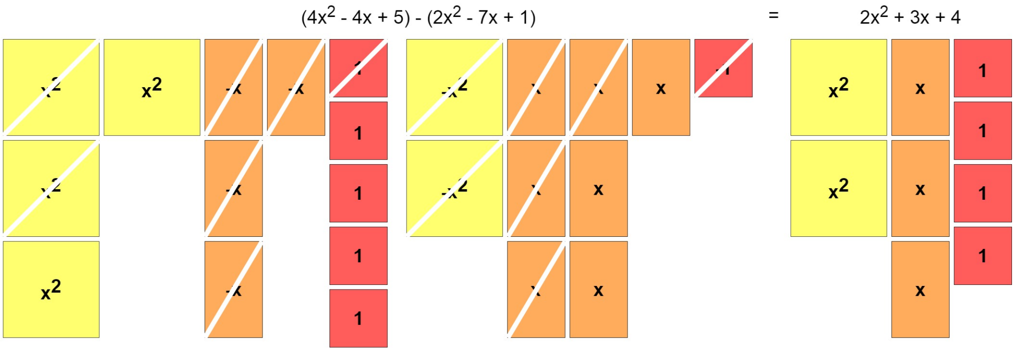
Figura 29: Montagem de $(4x^2-4x+5)-(2x^2-7x+1)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme descrito no exemplo 2 do vídeo, duas peças x^2 e duas peças $-x^2$, cinco peças x e cinco peças $-x$ assim como uma peça 1 e uma -1, por terem sinais opostos, anulam-se e deverão ser retiradas (Figura 30).

Figura 30: Resolução de $(4x^2 - 4x + 5) - (2x^2 - 7x + 1)$

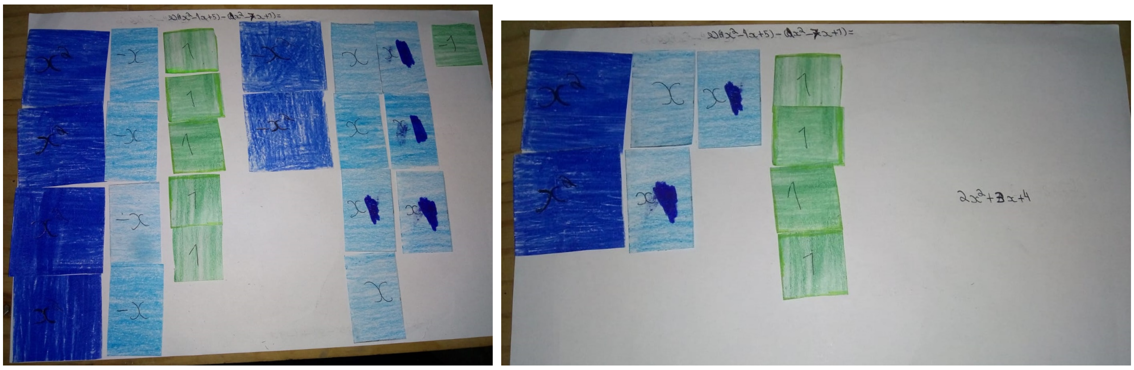


Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado $2x^2 + 3x + 4$.

O Aluno 3 realizou a montagem do Item e) de forma correta, conforme Figura 31.

Figura 31: Montagem e resolução de $(4x^2 - 4x + 5) - (2x^2 - 7x + 1)$ pelo Aluno 3



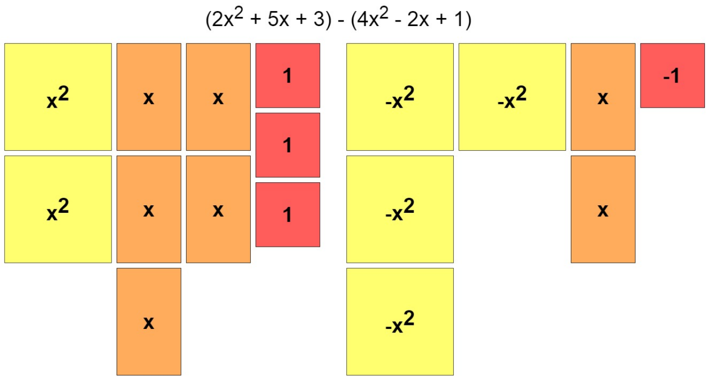
Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 3, resolveu corretamente retirando as peças que deveria e expressando o resultado esperado.

Resolução esperada do Item f)

Conforme o exemplo 5 do vídeo, a representação esperada da subtração $(2x^2 + 5x + 3) - (4x^2 - 2x + 1)$ com as peças está ilustrada na Figura 32.

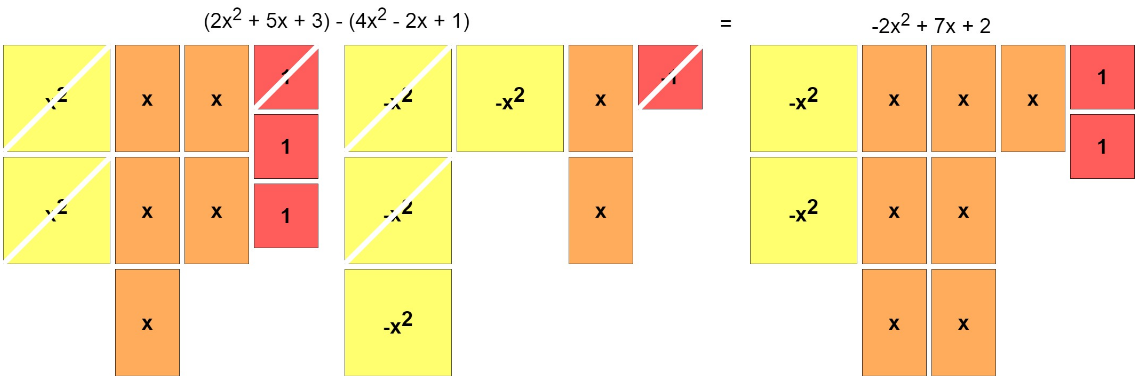
Figura 32: Montagem de $(2x^2 + 5x + 3) - (4x^2 - 2x + 1)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme descrito no exemplo 2 do vídeo, duas peças x^2 e duas peças $-x^2$ assim como uma peça 1 e uma -1, por terem sinais opostos, anulam-se e deverão ser retiradas (Figura 33).

Figura 33: Resolução de $(2x^2 + 5x + 3) - (4x^2 - 2x + 1)$

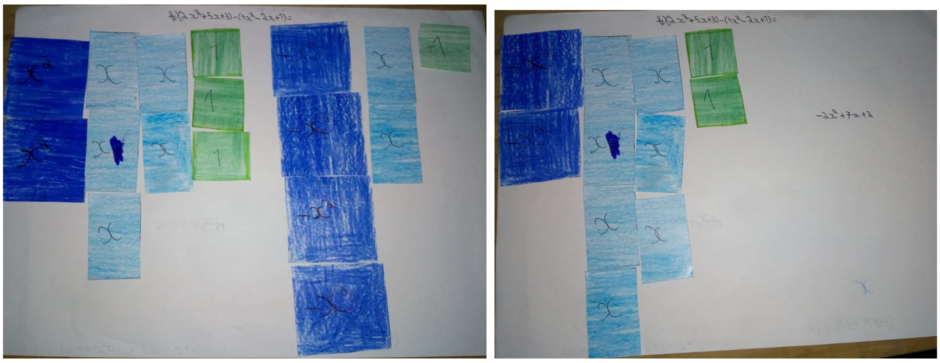


Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado $-2x^2 + 7x + 2$

O Aluno 3 realizou a montagem do Item f) de forma correta, conforme Figura 34.

Figura 34: Montagem e resolução de $(2x^2 + 5x + 3) - (4x^2 - 2x + 1)$ pelo Aluno 3



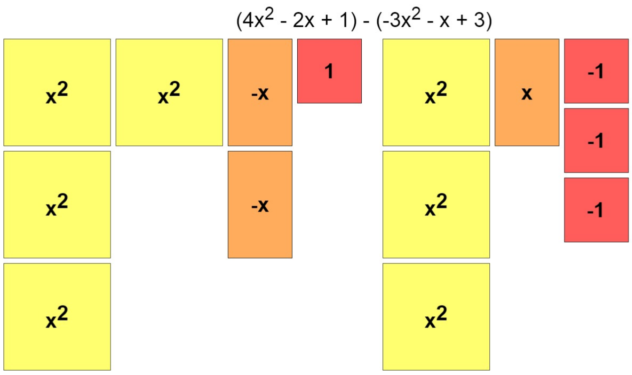
Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 3 resolveu corretamente retirando as peças que deveria e expressando o resultado esperado, como mostra a Figura 34.

Resolução esperada do Item g)

Conforme orientação do exemplo 5 do vídeo, a representação esperada da subtração $(4x^2 - 2x + 1) - (-3x^2 - x + 3)$ com as peças está ilustrada na Figura 35

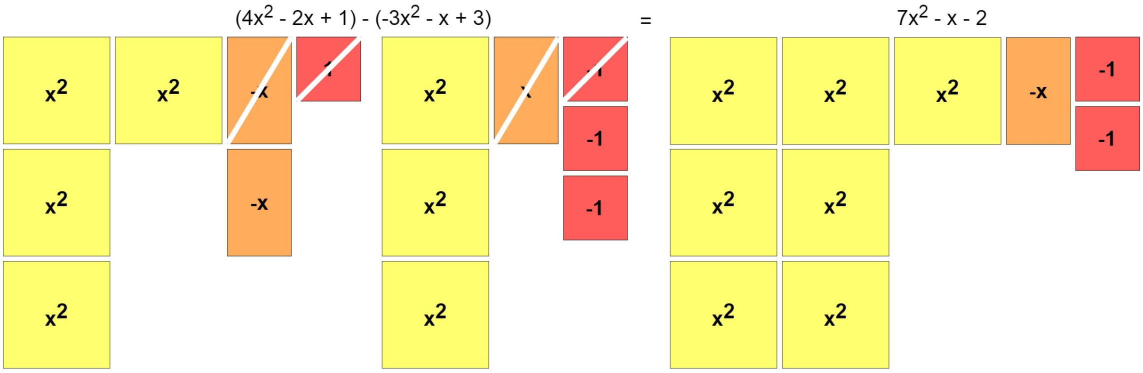
Figura 35: Montagem de $(4x^2 - 2x + 1) - (-3x^2 - x + 3)$



Fonte: Elaborada pela autora.

Conforme descrito no exemplo 2 do vídeo, um peça x e uma peça $-x$ assim como uma peça 1 e uma -1, por terem sinais opostos, anulam-se e deverão ser retiradas, como mostra a Figura 36.

Figura 36: Resolução de $(4x^2 - 2x + 1) - (-3x^2 - x + 3)$

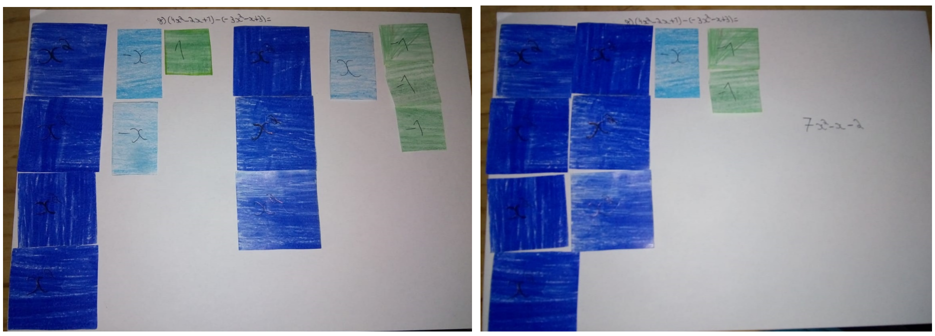


Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, temos como resultado $7x^2 - x - 2$

O Aluno 3 realizou a montagem do Item g) de forma correta, conforme mostra a Figura 37.

Figura 37: Montagem e resolução de $(4x^2 - 2x + 1) - (-3x^2 - x + 3)$ pelo Aluno 3



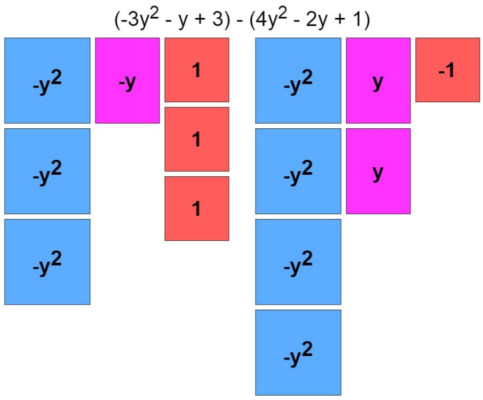
Fonte: Arquivo da autora.

Ele resolveu corretamente retirando as peças que deveria e expressando o resultado esperado.

Resolução esperada do Item h)

Conforme orientações do exemplo 5 do vídeo, a representação esperada da subtração $(-3y^2 - y + 3) - (4y^2 - 2y + 1)$ com as peças do Algeplan está na Figura 38.

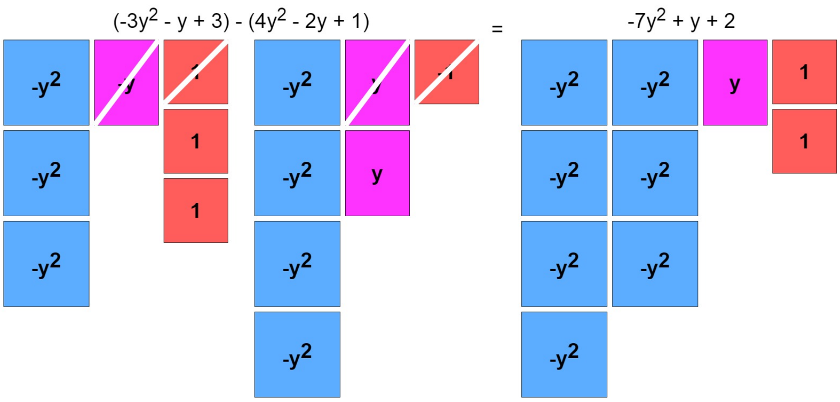
Figura 38: Montagem de $(-3y^2 - y + 3) - (4y^2 - 2y + 1)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme orientações do exemplo 2 do vídeo, um peça y e uma peça $-y$ assim como uma peça 1 e uma -1, por terem sinais opostos, anulam-se e deverão ser retiradas, como mostra a Figura 39.

Figura 39: Resolução de $(-3y^2 - y + 3) - (4y^2 - 2y + 1)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, teremos como resultado $-7y^2 + y + 2$

O Aluno 3 realizou a montagem do Item h) de forma correta, conforme pode ser observado na Figura 40.

Figura 40: Montagem e resolução de $(-3y^2 - y + 3) - (4y^2 - 2y + 1)$ pelo Aluno 3

Fonte:Arquivo da autora.

Ele resolveu corretamente retirando as peças que deveria e expressando o resultado esperado.

A atividade foi corretamente interpretada pelos alunos que a realizaram integralmente, mostrando alguma dificuldade apenas na descrição do polinômio oposto na subtração. O procedimento de coleta de dados foi o recebimento das fotos da resolução e montagem com as peças e posterior anotações no diário de classe. A síntese de aproveitamento dessa atividade foi parcial por 1 aluno e integral por 3 alunos. Os demais alunos não apresentaram retorno.

4.2.3 Multiplicação de Polinômios

Semana 13 (06/07 à 12/07): Disponibilização de lista de exercícios e de vídeo (BRESSAN, 2020e), no grupo de WhatsApp e na plataforma Google Classroom, com exemplos de como resolver e responder às questões sobre multiplicação de polinômios da lista com o material Algeplan e recebimento de fotos da resolução pelo WhatsApp.

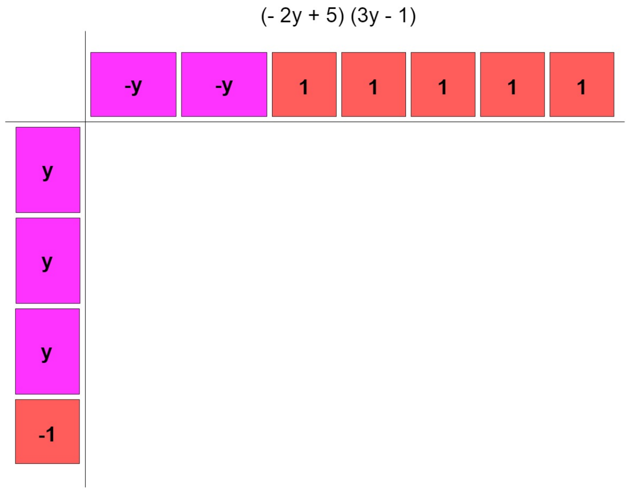
O vídeo apresenta a resolução de 2 exemplos:

1) $(-2y + 5) \cdot (3y - 1)$

2) $(3x + 1) \cdot (x + 4)$

O primeiro exemplo do vídeo descreve como montar a tábua de multiplicação entre os polinômios $(-2y + 5) \cdot (3y - 1)$ com as peças do material, ou seja, ao longo da linha horizontal superior das linhas traçadas, perpendicularmente no canto superior esquerdo, será disposto o primeiro polinômio com dois retângulos com a inscrição $-y$ e cinco quadrados com a inscrição 1. Já na linha vertical lateral será disposto o segundo polinômio com três retângulos com a inscrição y e um quadrado com a inscrição -1. A troca entre as posições vertical e horizontal dos polinômios não interfere no produto. Sua visualização pode ser vista na Figura 41.

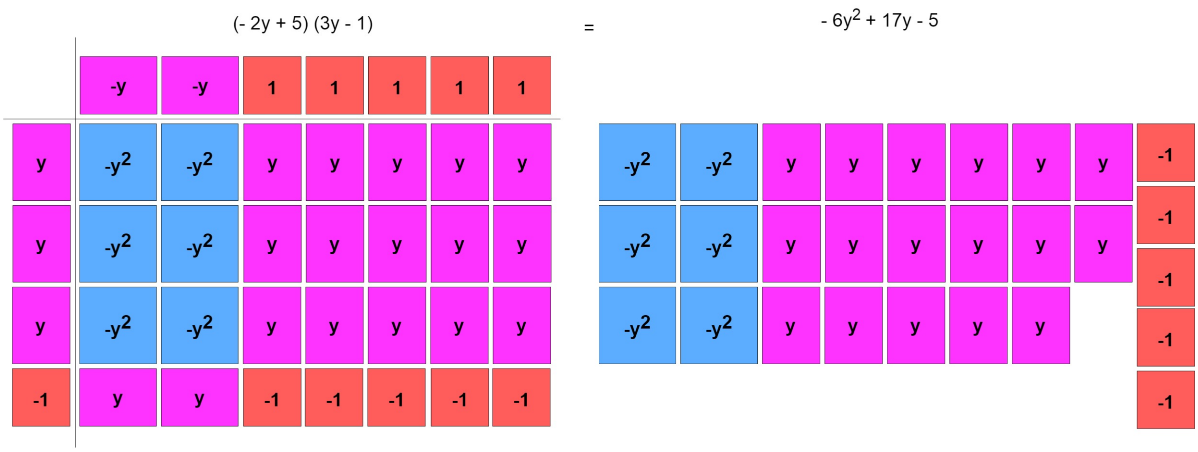
Figura 41: Montagem de $(-2y+5)\cdot(3y-1)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Para a resolução, multiplicam-se linhas por colunas e dispõe-se as peças com os resultados, conforme mostra a Figura 42.

Figura 42: Resolução de $(-2y+5)\cdot(3y-1)$

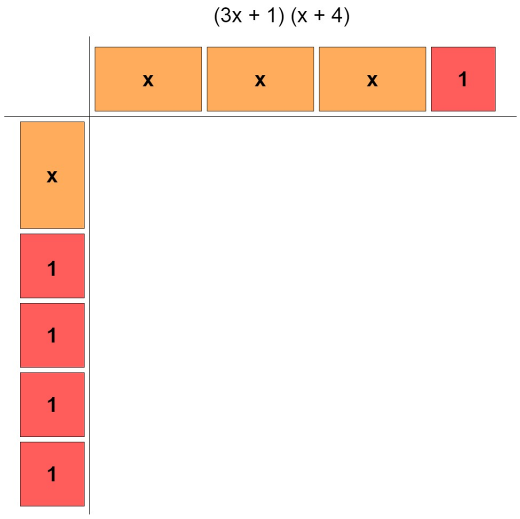


Fonte: Elaborado pela autora.

Retiram-se as peças utilizadas nas linhas perpendiculares, restando o resultado $-6y^2+17y-5$.

O segundo exemplo descreve, assim como o primeiro exemplo, a multiplicação entre os polinômios $(3x+1)\cdot(x+4)$ com as peças do material, ou seja, ao longo da linha horizontal superior será disposto o primeiro polinômio com três retângulos com a inscrição x e um quadrado com a inscrição 1. Já na linha vertical lateral será disposto o segundo polinômio com um retângulo com a inscrição x e quatro quadrados com a inscrição 1. Sua visualização está apresentada na Figura 43.

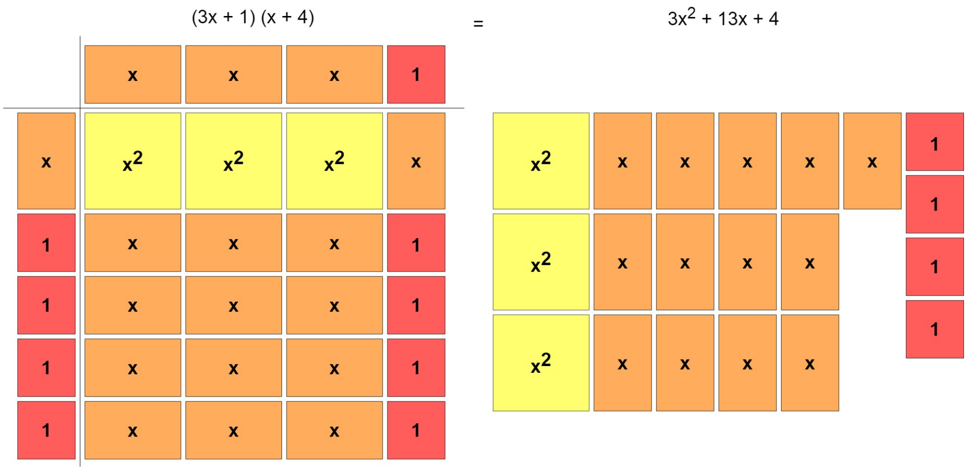
Figura 43: Montagem de $(3x + 1) \cdot (x + 4)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Para a resolução, multiplicam-se linhas por colunas e dispõe-se as peças com os resultados, como mostra a Figura 44.

Figura 44: Montagem de $(3x + 1) \cdot (x + 4)$



Fonte: Elaborado pela autora.

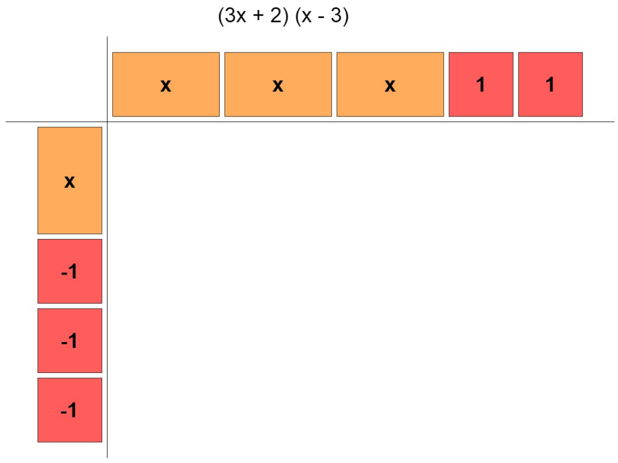
Retiram-se as peças utilizadas nas linhas perpendiculares, restando o resultado $-6y^2 + 17y - 5$.

A lista de exercícios disponibilizada aos alunos encontra-se no Apêndice I.

Resolução esperada do Item a)

De acordo com as orientações dos exemplos do vídeo, a representação esperada para a multiplicação $(3x + 2) \cdot (x - 3)$ com as peças está ilustrada na Figura 45.

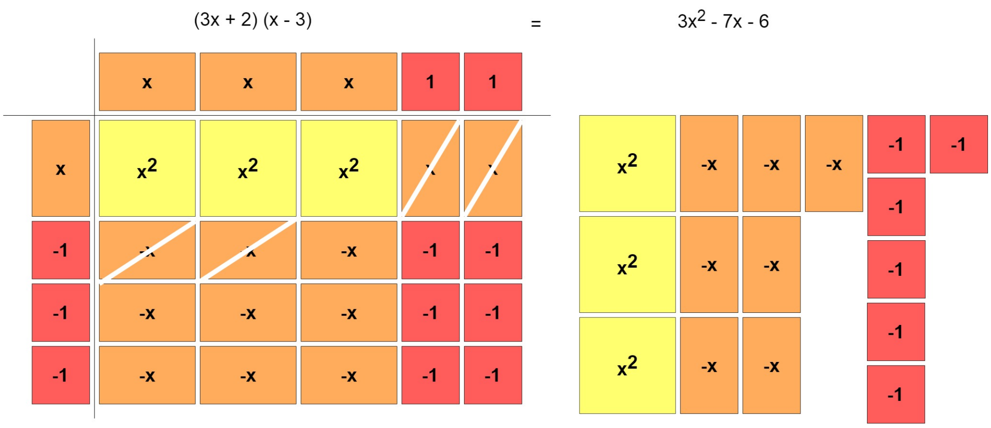
Figura 45: Montagem de $(3x + 2) \cdot (x - 3)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, percebemos que duas peças x e duas peças $-x$ do produto, por terem sinais opostos, anulam-se e devem ser retiradas obedecendo às regras da subtração de termos semelhantes, conforme mostra a Figura 46.

Figura 46: Resolução de $(3x + 2) \cdot (x - 3)$

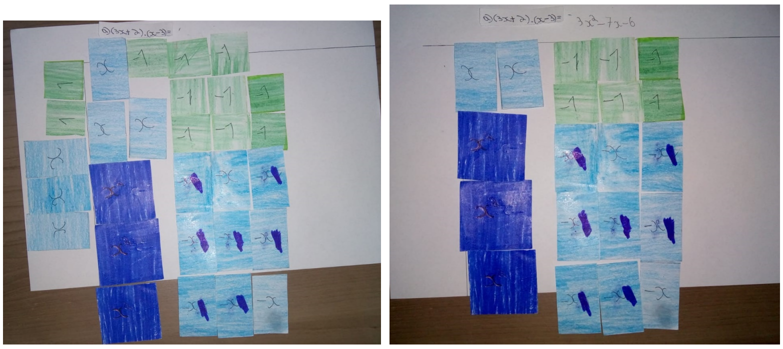


Fonte: a autora.

Assim, temos como resultado $3x^2 - 7x - 6$.

O Aluno 3 realizou a montagem do Item a) de forma correta, apesar das peças não estarem alinhadas, conforme Figura 47.

Figura 47: Montagem e resolução de $(3x + 2) \cdot (x - 3)$ pelo Aluno 3



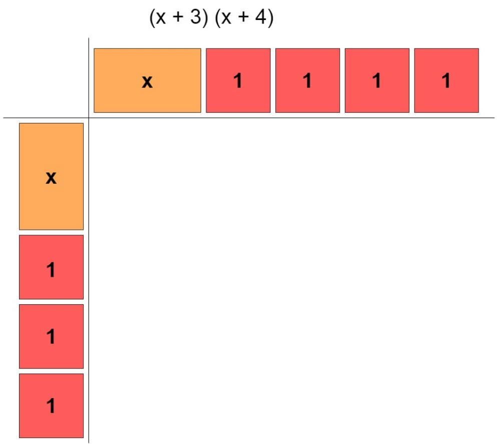
Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 3 expressou algebricamente de forma correta o resultado esperado para o item a), mas não expressou corretamente com o material, já que não retirou duas peças x e duas peças $-x$.

Resolução esperada do Item b)

Conforme os exemplos do vídeo, a representação esperada para a multiplicação $(x + 3) \cdot (x + 4)$ com as peças, pode ser visto na Figura 48.

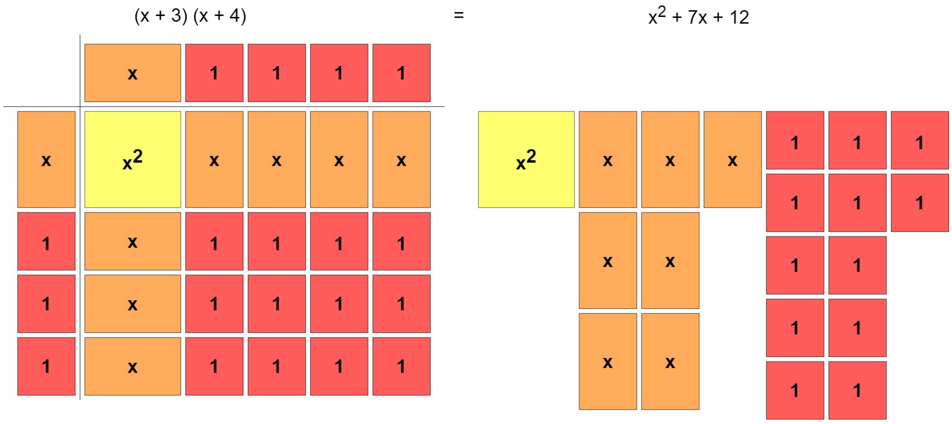
Figura 48: Montagem de $(x + 3) \cdot (x + 4)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, percebemos que não há peças iguais com sinais opostos, como mostrado na Figura 49.

Figura 49: Resolução de $(x+3)\cdot(x+4)$



Fonte: Elaborado pela a autora.

Assim, temos como resultado $x^2+7x+12$

O Aluno 3 realizou a montagem do Item b) de forma incorreta. Mesmo que não houvesse peças a serem retiradas, expressou o resultado incorreto, já que há um peça x^2 a mais, conforme podemos observar na Figura 50.

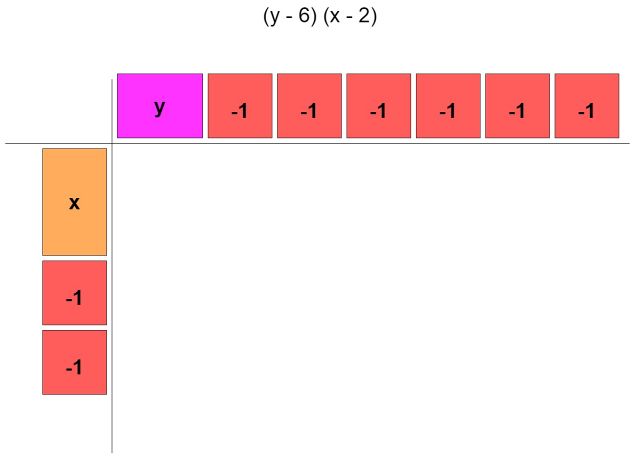
Figura 50: Resolução de $(x+3)\cdot(x+4)$ pelo Aluno 3

Fonte: Arquivo da autora.

Resolução esperada do Item c)

Conforme os exemplos do vídeo, a representação esperada para a multiplicação $(y-6)\cdot(x-2)$ com as peças, está apresentada na Figura 51.

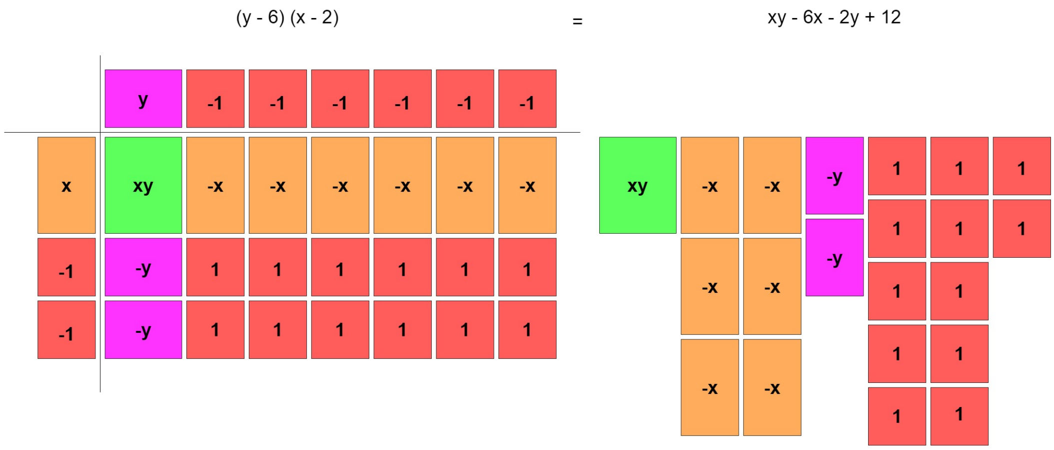
Figura 51: Montagem de $(y-6)\cdot(x-2)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, percebemos que não há peças iguais com sinais opostos, como mostrado na Figura 52.

Figura 52: Resolução de $(y-6)\cdot(x-2)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado $xy-6x-2y+12$.

O Aluno 3 não realizou a montagem correta do Item c), pois está faltando uma peça y, assim como mostra a Figura 53.

Figura 53: Montagem e resolução de $(y-6)\cdot(x-2)$ pelo Aluno 3

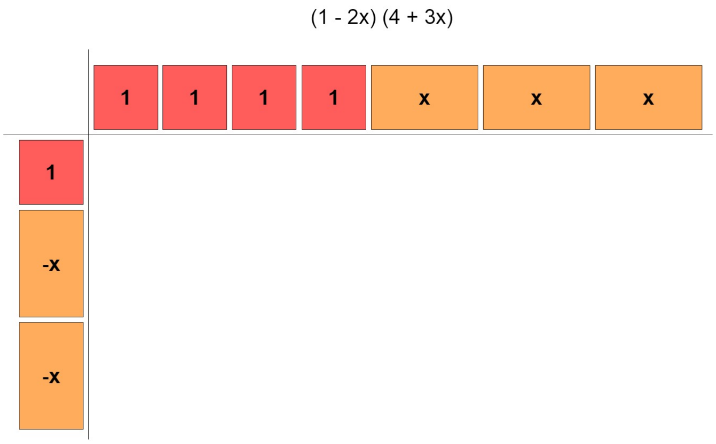
Fonte: Arquivo da autora.

O aluno expressou corretamente o resultado com as peças, mas não algebricamente.

Resolução esperada do Item d)

Conforme os exemplos do vídeo, a representação esperada para a multiplicação $(1-2x)\cdot(4+3x)$ com as peças está apresentada na Figura 54.

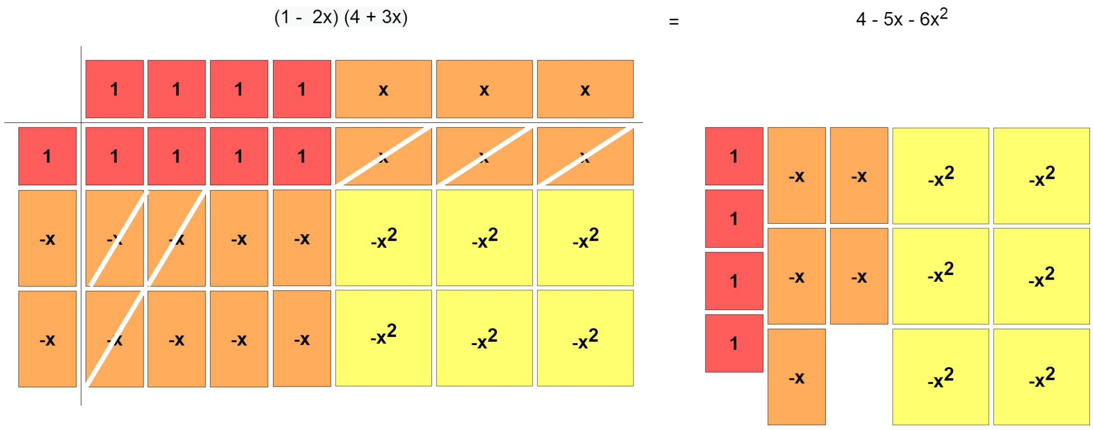
Figura 54: Montagem de $(1-2x)\cdot(4+3x)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, percebemos que três peças x e três peças $-x$ do produto, por terem sinais opostos, anulam-se e devem ser retiradas obedecendo às regras da subtração de termos semelhantes, como mostra a Figura 55.

Figura 55: Resolução de $(1 - 2x) \cdot (4 + 3x)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado $4 - 5x - 6x^2$.

Conforme podemos observar na Figura 56, Aluno 3 realizou a montagem incorreta do Item d), pois colocou como segunda parcela da multiplicação o polinômio que consta no item e). Analisando a questão como $(1 - 2x) \cdot (x + 4)$, a montagem fica correta, apesar do alinhamento.

Figura 56: Montagem e resolução de $(1 - 2x) \cdot (x + 4)$ pelo Aluno 3

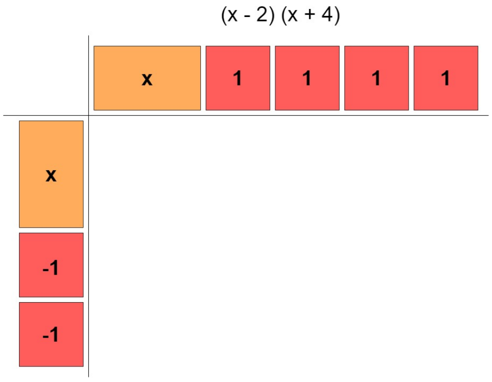
Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 3 expressou algebricamente de forma correta o resultado esperado para o item adaptado, mas não expressou corretamente com o material, já que não retirou uma peça x e uma peça $-x$.

Resolução esperada do Item e)

Na Figura 57, está a representação esperada para a multiplicação $(x-2)\cdot(x+4)$ com as peças do Algeplan.

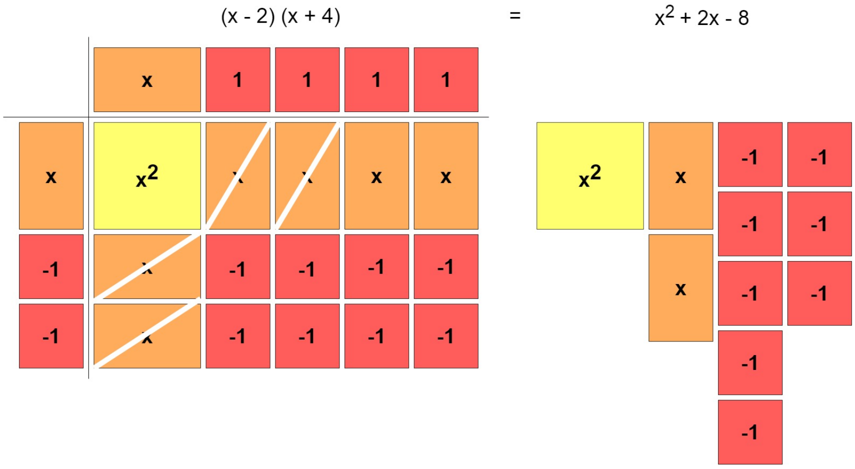
Figura 57: Montagem $(x-2)\cdot(x+4)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, percebemos que duas peças x e duas peças $-x$ do produto, por terem sinais opostos, anulam-se e devem ser retiradas obedecendo às regras da subtração de termos semelhantes, como mostra a Figura 58.

Figura 58: Resolução $(x-2)\cdot(x+4)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado x^2+2x-8.

Podemos observar na Figura 59, que o Aluno 3 realizou a montagem correta do Item e), apesar das peças não estarem alinhadas.

Figura 59: Montagem e resolução $(x-2) \cdot (x+4)$ pelo Aluno 3

Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 3 expressou algebricamente de forma correta o resultado esperado para o item, mas não expressou corretamente com o material, já que não retirou duas peças x e duas peças $-x$.

Percebe-se que houve dificuldade na montagem da tábua de multiplicação, tanto pelas linhas quanto pela disposição das peças e seus formatos. As respostas apresentaram-se corretas. Desta forma, acredita-se haver maior compreensão algébrica do que geométrica das questões. O procedimento de coleta de dados foi o recebimento das fotos da resolução e montagem com as peças e posterior anotações no diário de classe. A síntese de aproveitamento dessa atividade foi parcial por 2 alunos e integral por apenas 1 aluno, motivo pelo qual somente suas resoluções foram apresentadas. Os demais alunos não apresentaram retorno.

4.2.4 Produtos Notáveis

Semana 14 (13/07 à 19/07) : Disponibilização de lista de exercícios e de vídeo (BRESSAN, 2020f), no grupo de WhatsApp e na plataforma Google Classroom, com exemplos de como resolver e responder às questões sobre produtos notáveis (quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da Soma pela Diferença de dois termos) da lista com o material Algeplan; recebimento de fotos da resolução pelo WhatsApp.

O vídeo apresenta a resolução de 3 exemplos:

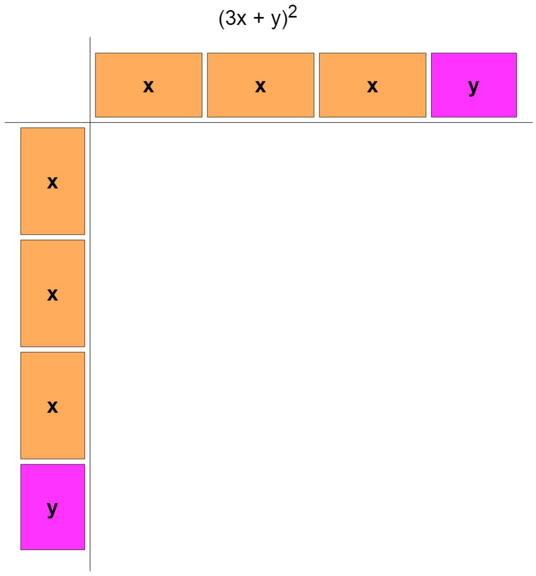
1) $(3x+y)^2$

2) $(2y-4)^2$

3) $(2x-1) \cdot (2x+1)$

O primeiro exemplo do vídeo mostra a resolução do quadrado da soma de dois termos $(3x+y)^2$. Do mesmo modo que realizou-se a multiplicação de polinômios, para a resolução desse produto notável serão traçadas duas linhas perpendiculares, onde serão dispostos como fatores desse quadrado os polinômios $(3x+y)$, formados por três retângulos com a inscrição x e um retângulo com a inscrição y cada, conforme a Figura 60.

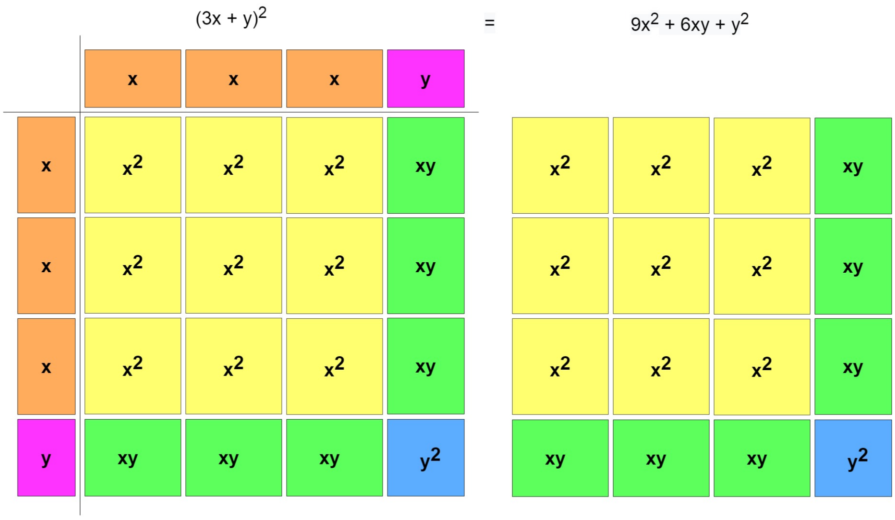
Figura 60: Montagem $(3x + y)^2$



Fonte: Elaborado pela autora.

Para a resolução, multiplicam-se linhas e colunas, dispondo as peças com os resultados, conforme Figura 61.

Figura 61: Resolução $(3x + y)^2$

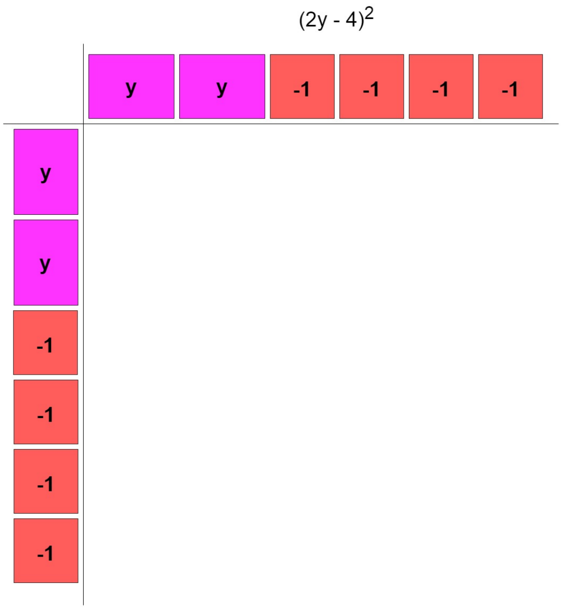


Fonte: Elaborado pela autora.

Retiram-se as peças utilizadas nas linhas perpendiculares, restando o resultado $9x^2 + 6xy + y^2$, área do quadrado de lado $3x + y$.

O segundo exemplo do vídeo mostra a resolução do quadrado da diferença de dois termos $(2y - 4)^2$. Do mesmo modo que o primeiro exemplo, serão dispostos como fatores desse quadrado os polinômios $(2y - 4)$, formados por dois retângulos com a inscrição y e quatro quadrados com a inscrição -1, conforme Figura 62.

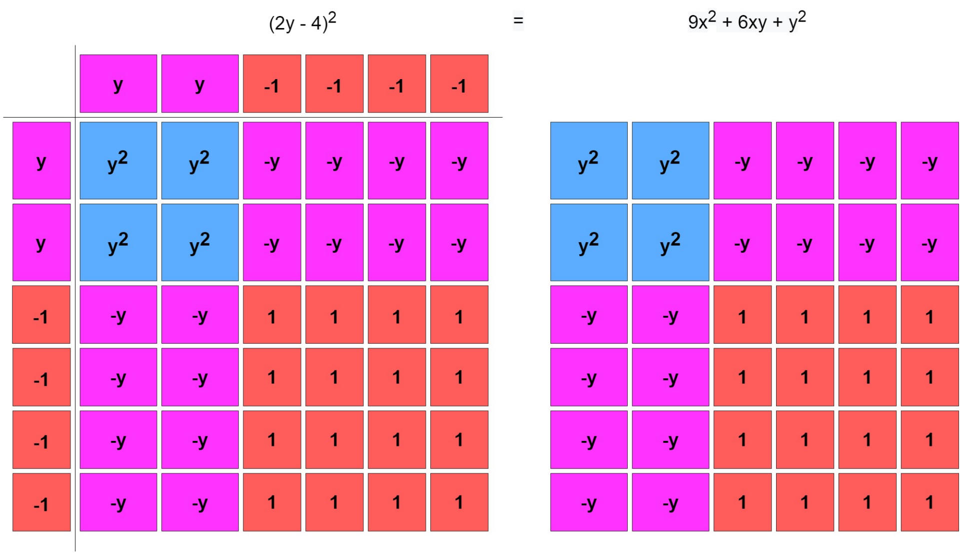
Figura 62: Montagem $(2y - 4)^2$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicam-se linhas e colunas, dispondo as peças com os resultados, conforme ilustrado na Figura 63.

Figura 63: Montagem $(2y - 4)^2$

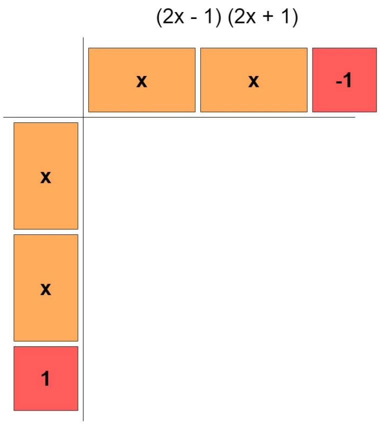


Fonte: Elaborado pela autora.

Retiram-se as peças utilizadas nas linhas perpendiculares, restando o resultado $4y^2 - 16y + 16$, área do quadrado de lado $2y - 4$.

O terceiro exemplo do vídeo mostra a resolução do produto da soma pela diferença de dois termos $(2x-1)\cdot(2x+1)$. Do mesmo modo que os exemplos anteriores, serão dispostos os fatores desse produto, $(2x-1)$ com dois retângulos com a inscrição x e um quadrado com a inscrição -1, e $(2x+1)$ com dois retângulos com a inscrição x e um quadrado com a inscrição 1, não importando a localização vertical ou horizontal, conforme Figura 64.

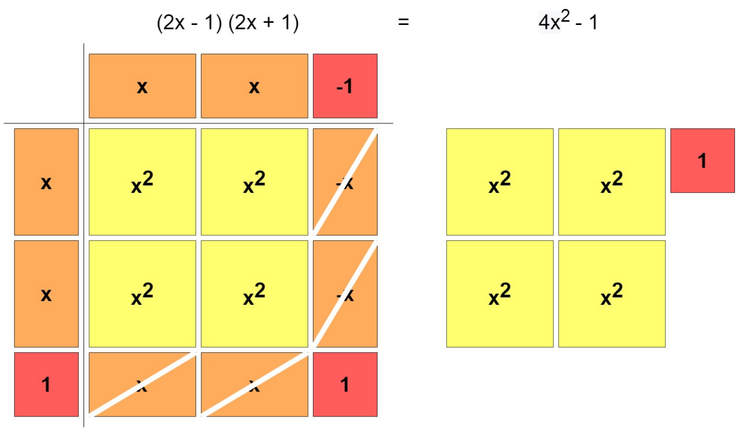
Figura 64: Montagem de $(2x-1)\cdot(2x+1)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicam-se linhas e colunas, dispondo as peças com os resultados. Retiram-se dois retângulos com a inscrição x juntamente com dois retângulos com a inscrição $-x$, que por terem sinais opostos; anulam-se e devem ser retiradas obedecendo às regras da subtração de termos semelhantes. A resolução com o uso do Algeplan está ilustrado na Figura 65.

Figura 65: Resolução de $(2x-1)\cdot(2x+1)$



Fonte: Elaborada pela autora.

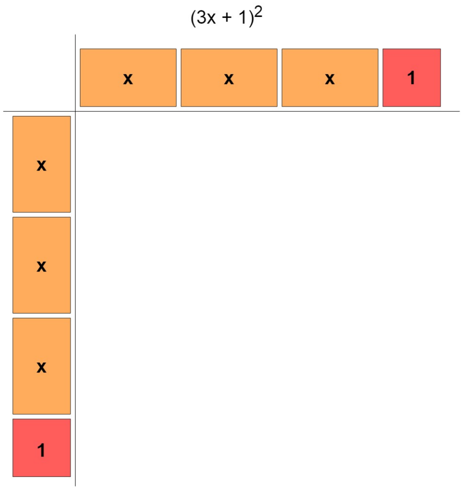
Retiram-se as peças utilizadas nas linhas perpendiculares conforme os exemplos de multiplicação, restando o resultado $4x^2 - 1$, soma das áreas dos quadrados lado $2x$ e 1.

A lista de exercícios disponibilizada aos alunos encontra-se no Apêndice J.

Resolução esperada do Item a)

Conforme descrito no exemplo 1 do vídeo, na representação esperada para o quadrado da soma $(3x + 1)^2$, teremos a multiplicação $(3x + 1) \cdot (3x + 1)$ com as peças do Algeplan, como mostra a Figura 66.

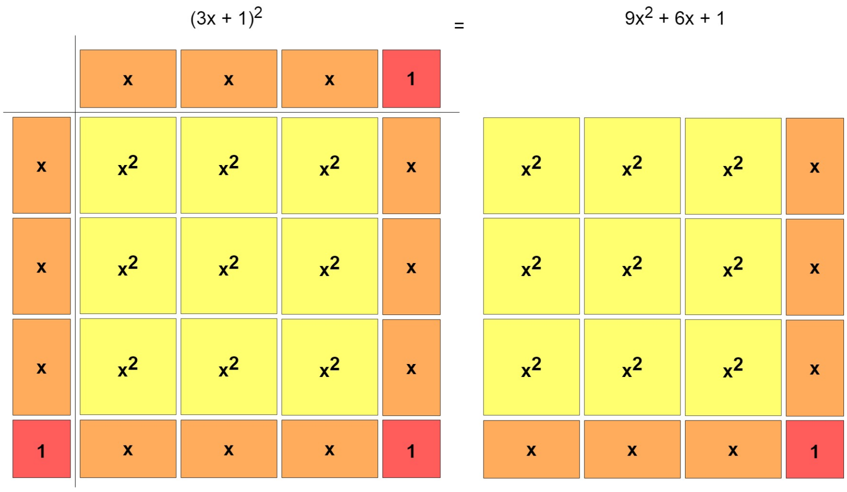
Figura 66: Montagem de $(3x + 1)^2$



Fonte: Elaborada pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, temos como representação a área do quadrado de lado $3x + 1$, cuja resolução está apresentada na Figura 67.

Figura 67: Resolução de $(3x + 1)^2$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, teremos como resultado $9x^2 + 6x + 1$.

O Aluno 3 realizou a montagem correta do Item a), apesar das peças não estarem alinhadas, conforme pode ser observado na Figura 68.

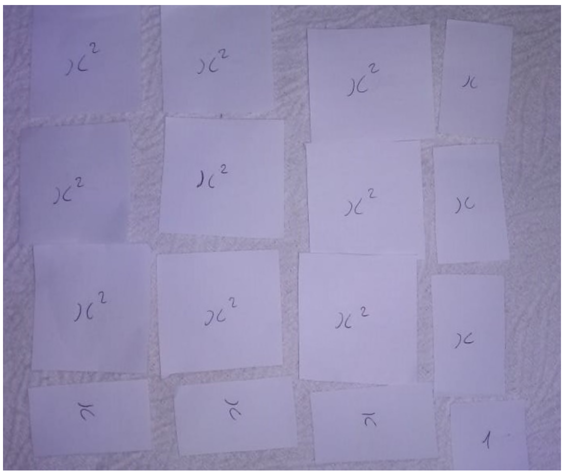
Figura 68: Montagem e resolução de $(3x + 1)^2$ pelo Aluno 3

Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 3 expressou com as peças e algebricamente de forma correta o resultado esperado para o item a).

Já o Aluno 2 não realizou a montagem, mas expressou com as peças de forma correta o resultado esperado para o item a), formando a área do quadrado de lado $3x + 1$, como mostrado na Figura 69.

Figura 69: Resolução de $(3x + 1)^2$ pelo Aluno 2

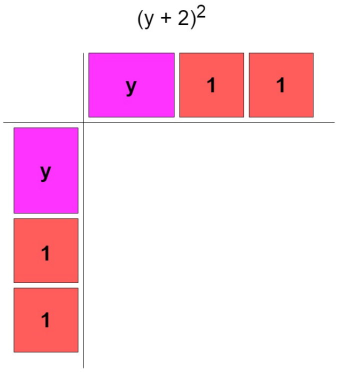


Fonte: Arquivo da autora.

Resolução esperada do Item b)

Conforme o exemplo 1 do vídeo, na representação esperada para o quadrado da soma $(y + 2)^2$, teremos a multiplicação $(y + 2) \cdot (y + 2))$ com as peças do Algeplan, como mostrado na Figura 70.

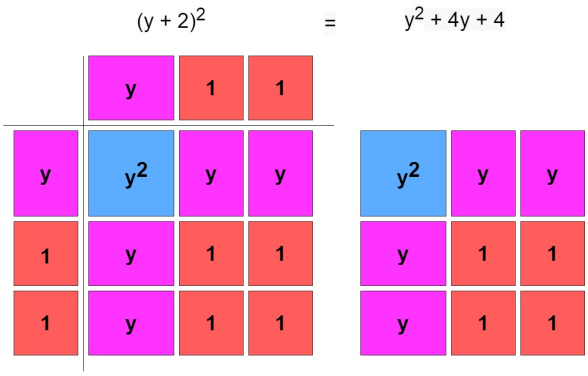
Figura 70: Montagem de $(y+2)^2$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, temos como representação a área do quadrado de lado $y+2$ na Figura 71.

Figura 71: Resolução de $(y+2)^2$

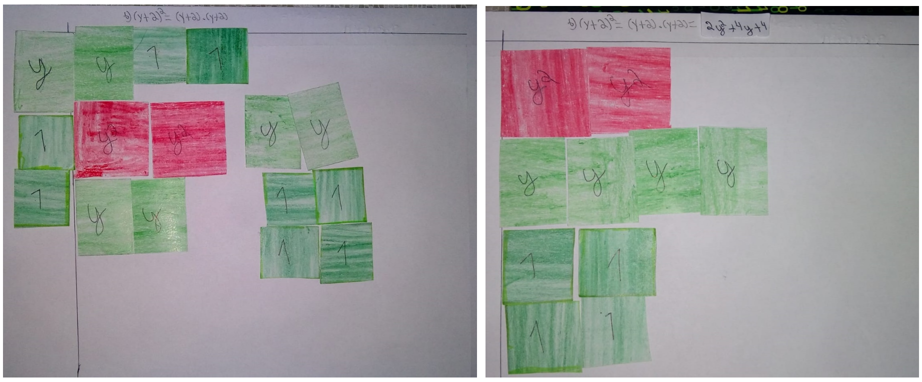


Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado y^2+4y+4.

O Aluno 3 realizou a montagem correta do Item b), apesar das peças não estarem alinhada, como mostrado na Figura 72.

Figura 72: Montagem e resolução de $(y+2)^2$ pelo Aluno 3

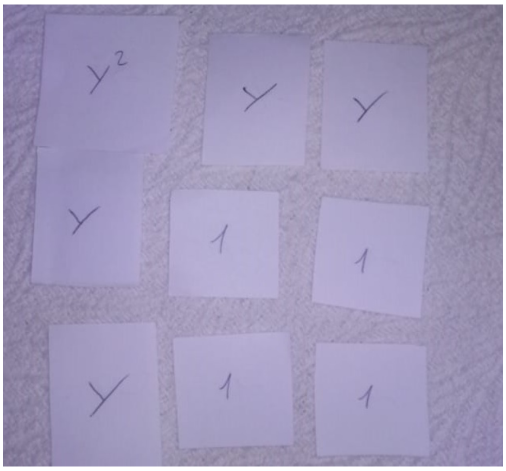


Fonte: Arquivo da autora.

Mas ao realizar a multiplicação de linhas e colunas, expressou com as peças e algebricamente de forma incorreta o resultado esperado para o item a), colocando uma peça y^2 a mais.

Novamente o Aluno 2 não realizou a montagem, mas expressou com as peças de forma correta o resultado esperado para o item b), formando a área do quadrado de lado $y+2$, como mostrado na Figura 73.

Figura 73: Resolução de $(y+2)^2$ pelo Aluno 2

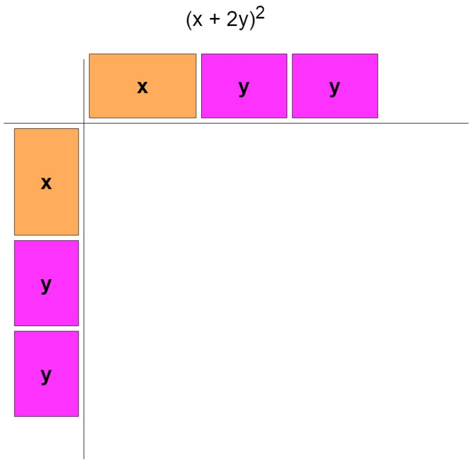


Fonte: Arquivo da autora.

Resolução esperada do Item c)

Conforme descrito no exemplo 1 do vídeo, na representação esperada para o quadrado da soma $(x+2y)^2$, teremos a multiplicação $(x+2y)\cdot(x+2y)$ com as peças do Algeplan, como mostrado na Figura 74.

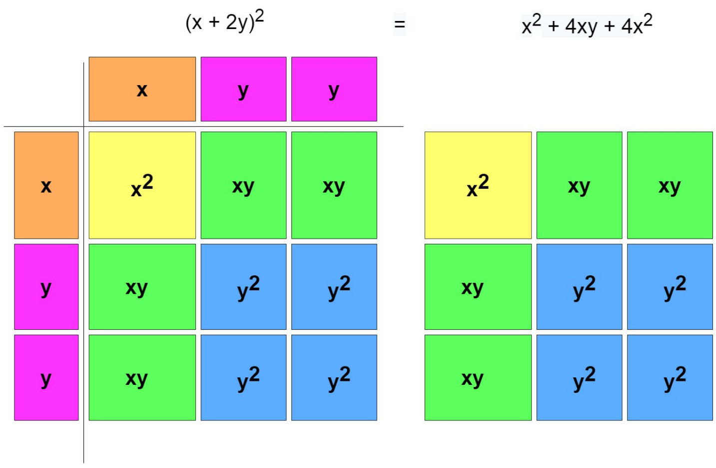
Figura 74: Montagem de $(x + 2y)^2$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, temos como representação a área do quadrado de lado $x + 2y$ na Figura 75.

Figura 75: Resolução de $(x + 2y)^2$

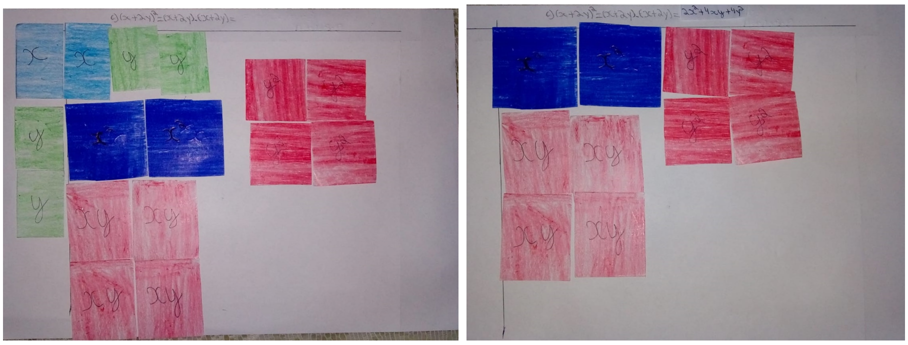


Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado $x^2 + 4xy + 4y^2$.

O Aluno 3 realizou a montagem correta do Item c), apesar das peças não estarem alinhadas, como mostrada na Figura 76.

Figura 76: Montagem e resolução de $(x + 2y)^2$ pelo Aluno 3

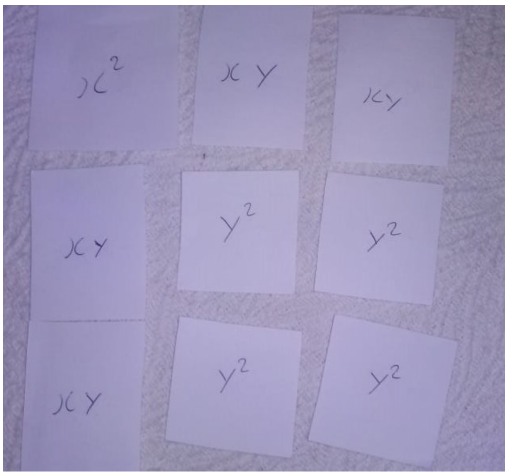


Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 3 expressou com as peças e algebricamente de forma correta o resultado esperado para o item c).

Aluno 2 não realizou a montagem, mas expressou com as peças de forma correta o resultado esperado para o item c), formando a área do quadrado de lado $x + 2y$, como mostrado na Figura 77.

Figura 77: Resolução de $(x + 2y)^2$ pelo Aluno 2

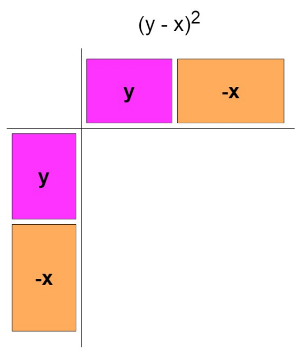


Fonte: Arquivo da autora.

Resolução esperada do Item d)

Conforme o exemplo 2 do vídeo, na representação esperada para o quadrado da diferença $(y - x)^2$, teremos a multiplicação $(y - x) \cdot (y - x)$ com as peças, como mostra a Figura 78.

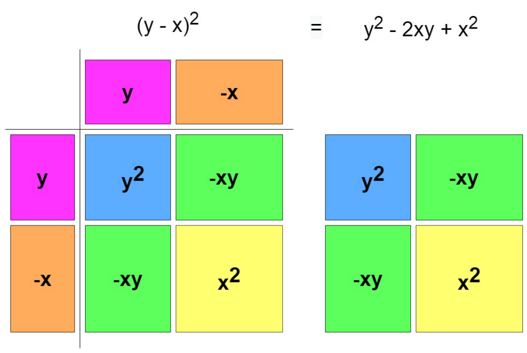
Figura 78: Montagem de $(y - x)^2$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, temos como representação a área do quadrado de lado $y - x$ na Figura 79.

Figura 79: Resolução de $(y - x)^2$

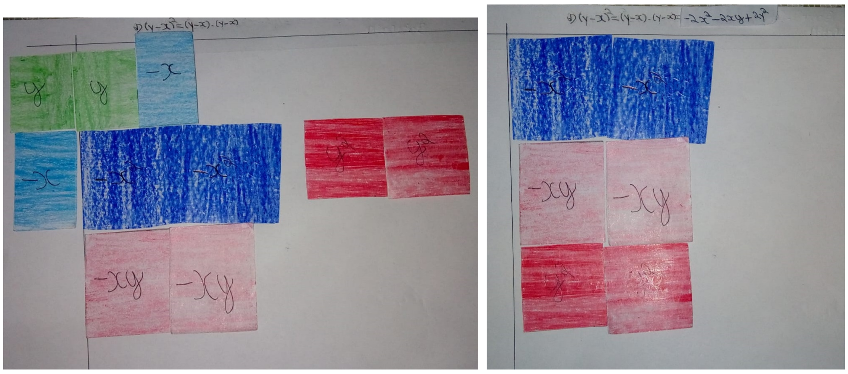


Fonte: a autora.

Assim, temos como resultado $y^2 - 2xy + x^2$.

O Aluno 3 realizou a montagem do Item d) de forma correta, apesar das peças não estarem alinhadas, como mostra a Figura 80.

Figura 80: Montagem e resolução de $(y-x)^2$ pelo Aluno 3

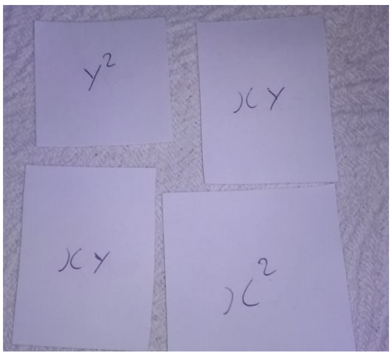


Fonte: Arquivo da autora.

No entanto, ao realizar a multiplicação de linhas e colunas, expressou com as peças e algebricamente de forma incorreta o resultado esperado para o item), colocando uma peça y^2 e uma peça $-x^2$ a mais.

Aluno 2 não realizou a montagem e expressou com as peças de forma incorreta o resultado esperado para o item d), já que a multiplicação $y \cdot (-x)$ é igual a $-xy$, erro observado na Figura 81.

Figura 81: Resolução de $(y-x)^2$ pelo Aluno 2

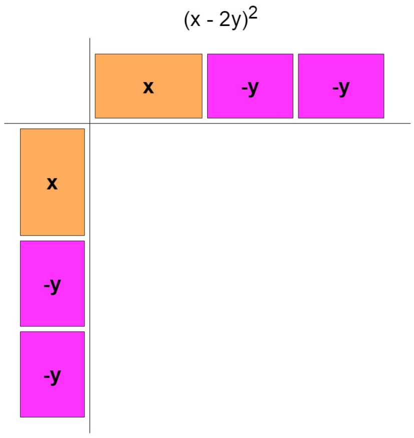


Fonte: Arquivo da autora.

Resolução esperada do Item e)

Conforme descrito no exemplo 2 do vídeo, na representação esperada para o quadrado da diferença $(x-2y)^2$, teremos a multiplicação $(x-2y)\cdot(x-2y)$ com as peças do Algeplan, como mostra a Figura 82.

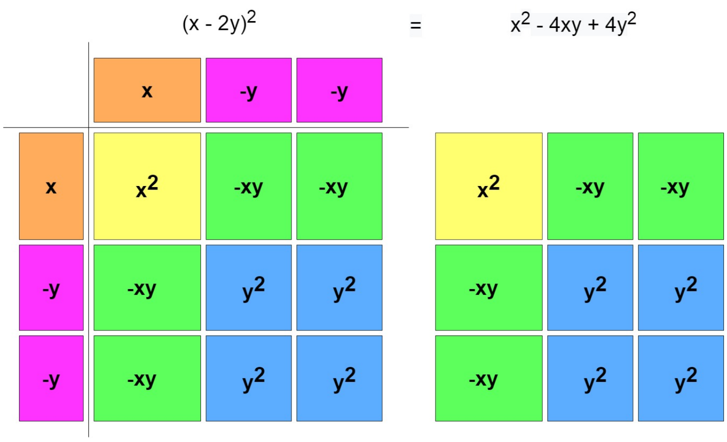
Figura 82: Montagem de $(x - 2y)^2$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, temos como representação a área do quadrado de lado $x - 2y$ na Figura 83.

Figura 83: Resolução de $(x - 2y)^2$

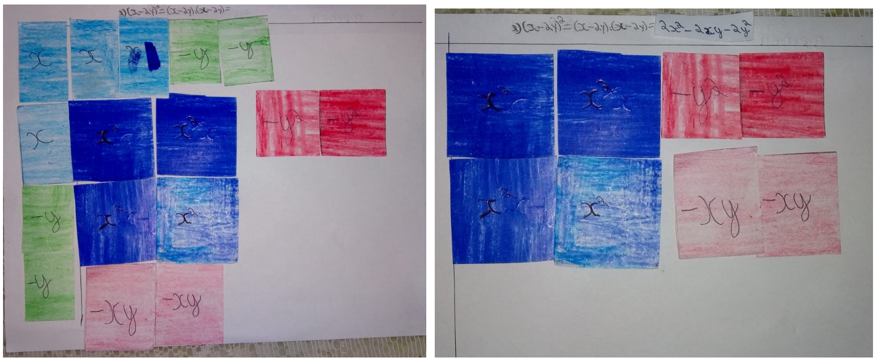


Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, teremos como resultado $x^2 - 4xy + 4y^2$.

O Aluno 3 realizou a montagem do Item e) de forma incorreta, colocando duas peças x ao invés de uma, como mostrado na Figura 84.

Figura 84: Montagem e resolução de $(x-2y)^2$ pelo Aluno 3

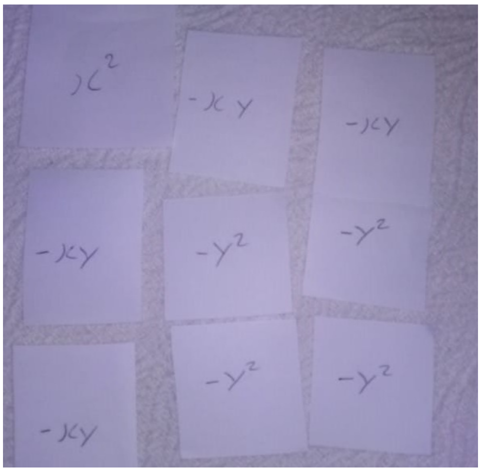


Fonte: Arquivo da autora.

Assim, ao realizar a multiplicação de linhas e colunas, expressou com as peças e algebricamente de forma incorreta o resultado esperado para o item e).

Aluno 2 não realizou a montagem e expressou com as peças de forma incorreta o resultado esperado para o item e), já que a multiplicação $y \cdot y$ é igual a y^2, como podemos verificar na Figura 85.

Figura 85: Resolução de $(x-2y)^2$ pelo Aluno 2

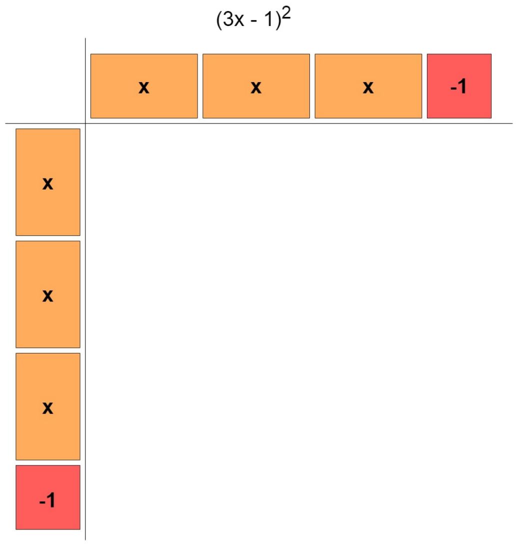


Fonte: Arquivo da autora.

Resolução esperada do Item f)

Conforme descrito no exemplo 2 do vídeo, na representação esperada para o quadrado da diferença $(3x-1)^2$, teremos a multiplicação $(3x-1)\cdot(3x-1)$ com as peças do Algeplan, conforme a Figura 86.

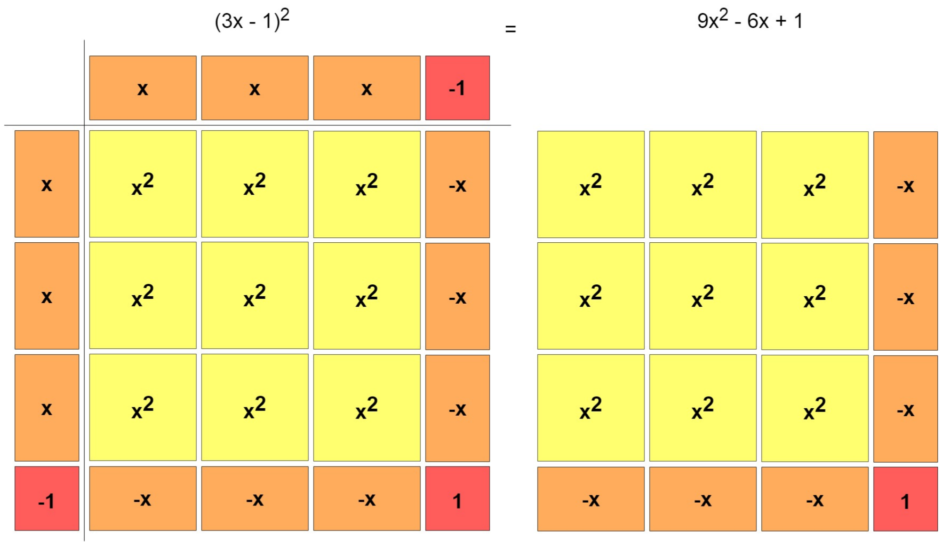
Figura 86: Montagem de $(3x-1)^2$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, temos como representação a área do quadrado de lado $3x-1$ na Figura 87.

Figura 87: Resolução de $(3x-1)^2$

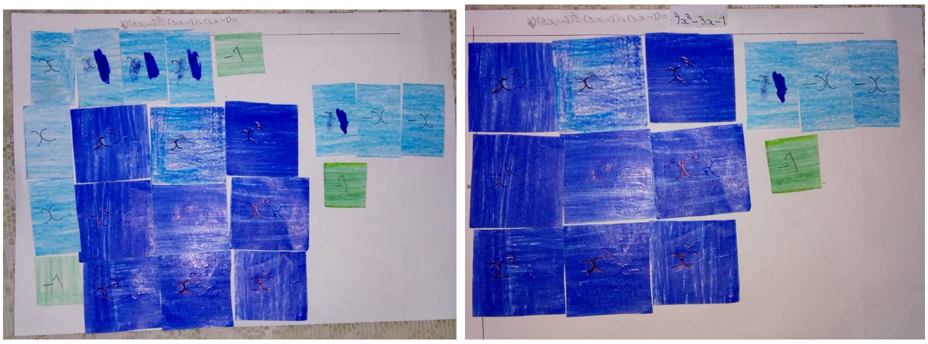


Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado $9x^2-6x+1$.

O Aluno 3 realizou a montagem do Item f) de forma correta, apesar das peças não estarem alinhadas, como podemos verificar na Figura 88.

Figura 88: Montagem e resolução de $(3x-1)^2$ pelo Aluno 3



Fonte: Arquivo da autora.

No entanto, ao realizar a multiplicação de linhas e colunas, expressou com as peças e algebricamente de forma incorreta o resultado esperado para o item f), não colocando três peças $-x$.

O Aluno 2 não realizou a montagem e expressou com as peças de forma incorreta o resultado esperado para o item f), já que a multiplicação $1 \cdot 1$ é igual a 1, como mostra a Figura 89.

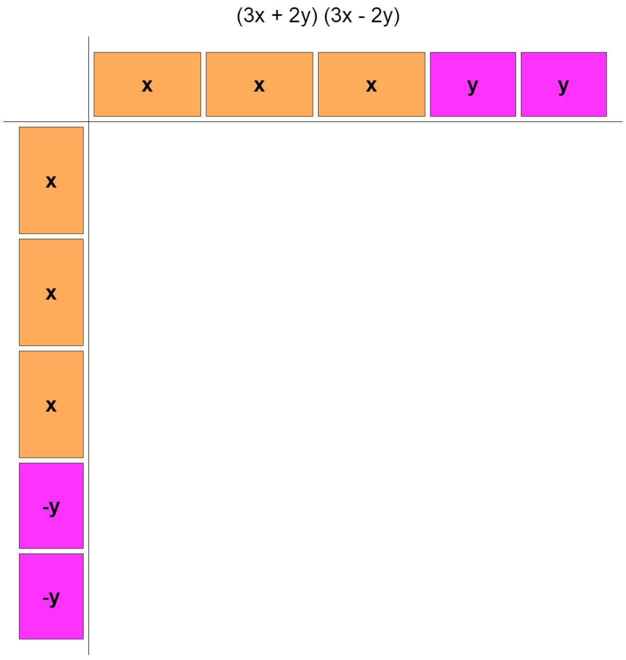
Figura 89: Resolução de $(3x-1)^2$ pelo Aluno 2

Fonte: Arquivo da autora.

Resolução esperada do Item g)

Conforme descrito no exemplo 3 do vídeo, a representação esperada para o produto da soma pela diferença $(3x+2y) \cdot (3x-2y)$, com as peças do Algeplan deverá ser de acordo com a Figura 90.

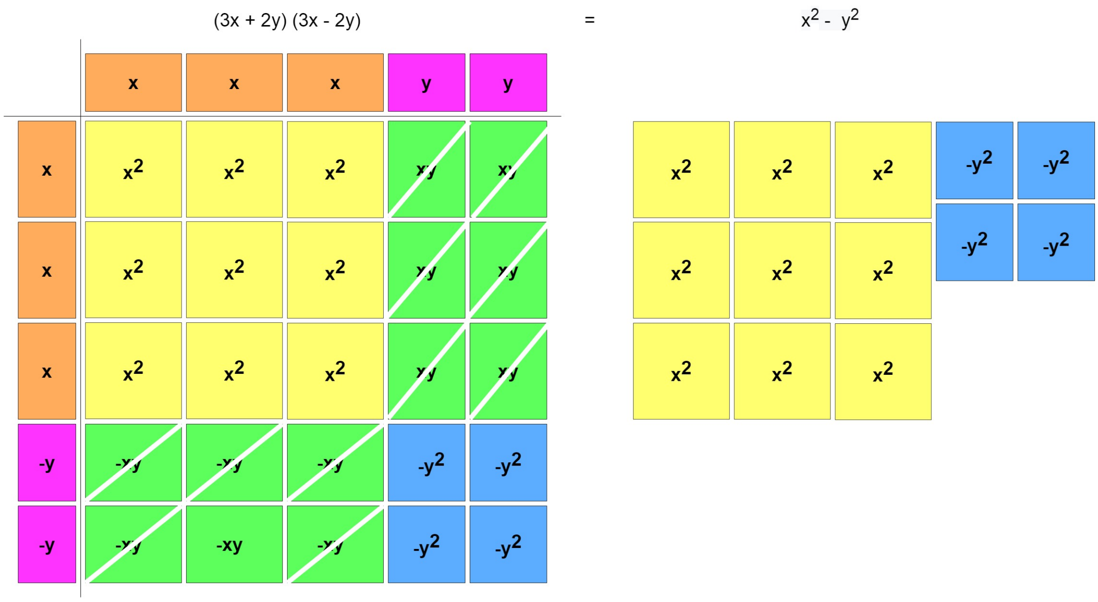
Figura 90: Montagem de $(3x + 2y) \cdot (3x - 2y)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, percebemos que seis peças xy e seis peças $-xy$ do produto, por terem sinais opostos, anulam-se e devem ser retiradas obedecendo às regras da subtração de termos semelhantes, como mostra a Figura 91.

Figura 91: Resolução de $(3x + 2y) \cdot (3x - 2y)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado $9x^2 - 4y^2$.

O Aluno 3 realizou a montagem do Item g) de forma correta, apesar das peças não estarem alinhadas, como mostra a Figura 92.

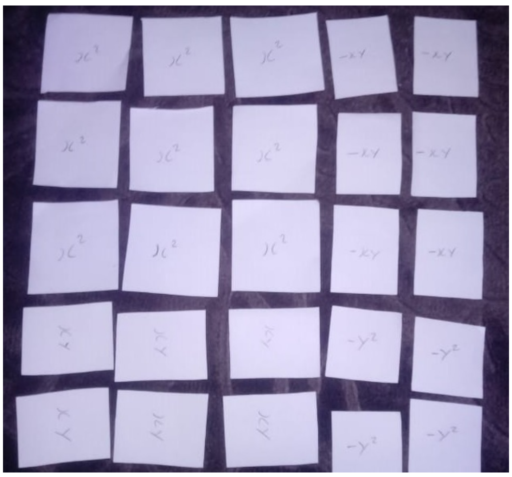
Figura 92: Montagem e resolução de $(3x + 2y) \cdot (3x - 2y)$ pelo Aluno 3

Fonte: Arquivo da autora.

No entanto, ao realizar a multiplicação de linhas e colunas, expressou com as peças e algebricamente de forma incorreta o resultado esperado para o item g), não colocando seis peças xy que se anulariam com as seis peças $-xy$ existentes.

O Aluno 2 não realizou a montagem mas expressou o resultado esperado para o item g) de forma correta, apenas não retirou as peças $-xy$ e xy, como mostrado na Figura 93.

Figura 93: Resolução de $(3x + 2y) \cdot (3x - 2y)$ pelo Aluno 2

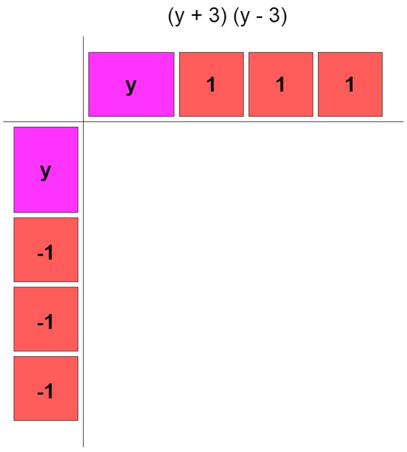


Fonte: Arquivo da autora.

Resolução esperada do Item h)

Conforme descrito no exemplo 3 do vídeo, na representação esperada para o produto da soma pela diferença $(y + 3) \cdot (y - 3)$, com as peças do Algeplan, deverá ser expressa como na Figura 94.

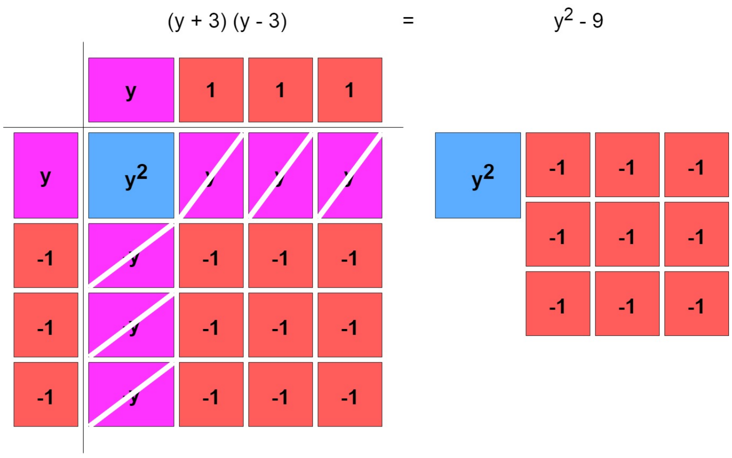
Figura 94: Montagem de $(y+3)\cdot(y-3)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, percebemos que três peças y e três peças $-y$ do produto, por terem sinais opostos, anulam-se e devem ser retiradas obedecendo às regras da subtração de termos semelhantes como mostra a Figura 95.

Figura 95: Resolução de $(y+3)\cdot(y-3)$

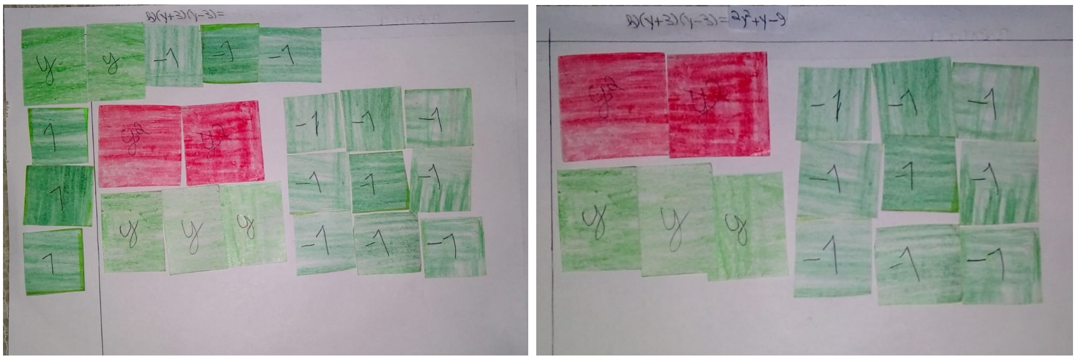


Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado $y^2 - 9$.

O Aluno 3 realizou a montagem correta do Item h), apesar das peças não estarem alinhadas, como mostra a Figura 96.

Figura 96: Montagem e resolução de $(y+3) \cdot (y-3)$ realizada pelo Aluno 3

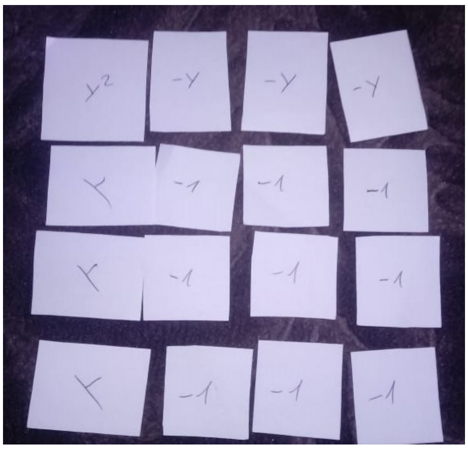


Fonte: Arquivo da autora.

No entanto, ao realizar a multiplicação de linhas e colunas, expressou com as peças e algebricamente de forma incorreta o resultado esperado para o item f), não colocando três peças $-y$ que se anulariam com três as peças y existentes, assim como colocou uma peça y^2 a mais.

O Aluno 2 não realizou a montagem e expressou com as peças de forma correta o resultado esperado para o item h), apenas não retirou as peças $-y$ e y, como mostra a Figura 97.

Figura 97: Resolução de $(y+3) \cdot (y-3)$ pelo Aluno 2

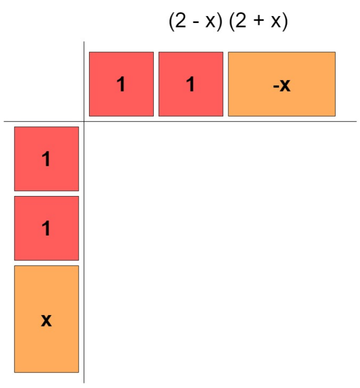


Fonte: Arquivo da autora.

Resolução esperada do Item i)

Conforme descrito no exemplo 3 do vídeo, na representação esperada para o produto da soma pela diferença $(2-x) \cdot (2+x)$, com as peças do Algeplan, deve ser expressa como na Figura 98.

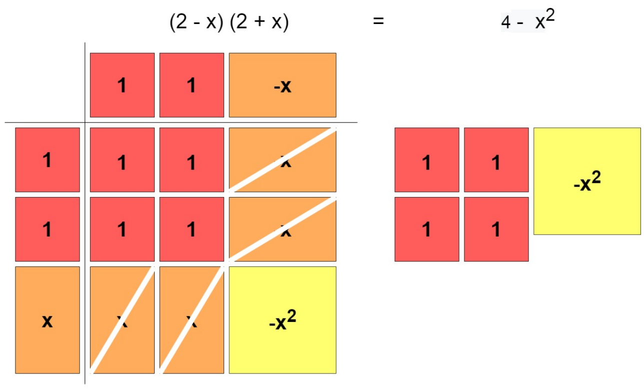
Figura 98: Montagem de $(2 - x) \cdot (2 + x)$



Fonte: Elaborado pela autora.

Multiplicando-se linhas e colunas, percebemos que duas peças x e duas peças $-x$ do produto, por terem sinais opostos, anulam-se e devem ser retiradas obedecendo às regras da subtração de termos semelhantes, como mostra a Figura 99.

Figura 99: Resolução de $(2 - x) \cdot (2 + x)$

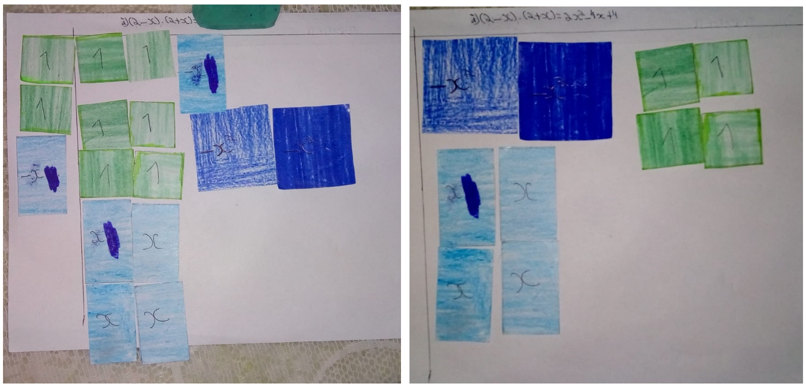


Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, temos como resultado $4 - x^2$.

O Aluno 3 realizou a montagem do Item i) de forma incorreta, pois colocou uma peça $-x$ ao invés de x, como mostra a Figura 100.

Figura 100: Montagem e resolução de $(2 - x) \cdot (2 + x)$ pelo Aluno 3

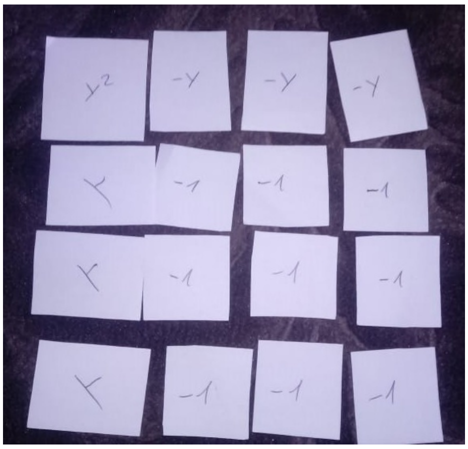


Fonte: Arquivo da autora.

Logo ao realizar a multiplicação de linhas e colunas, expressou com as peças e algebricamente de forma incorreta o resultado esperado para o item i).

O Aluno 2 não realizou a montagem, expressou com as peças o resultado esperado para o item i) de forma correta, mas não retirou as peças $-x$ e x, como mostra a Figura 101.

Figura 101: Resolução de $(2 - x) \cdot (2 + x)$ pelo Aluno 2



Fonte: Arquivo da autora.

Percebe-se que o Aluno 3 ainda não compreendeu a formação geométrica da multiplicação de polinômios, mas expressou corretamente de forma algébrica a maior parte dos resultados. Já o Aluno 2 mostra compreensão da forma geométrica e a descrição do quadrado que dever ser formado com as peças do Algeplan. O procedimento de coleta de dados foi o recebimento das fotos da resolução e montagem com as peças e posterior anotações no diário de classe. A síntese de aproveitamento dessa atividade foi parcial por 2 alunos e integral por 4 alunos. Os demais alunos não apresentaram retorno.

4.2.5 Equações Polinomiais do 2º Grau

Semanas 15, 16 e 17 (20/07 à 09/08): Disponibilização de material e listas de exercícios em pdf, assim como vídeos (PEREIRA, 2020) e (RIBEIRO, 2014) com conceitos iniciais sobre Equações do segundo grau (Identificação dos coeficientes, raízes de equações incompletas e completas com a fórmula resolutiva). Devolutiva através de fotos pelo WhatsApp e plataforma.

O procedimento de coleta de dados foi o recebimento das fotos da resolução das listas e posterior anotações no diário de classe. A síntese de aproveitamento dessa atividade foi parcial por 2 alunos e integral por 5 alunos. Os demais alunos não apresentaram retorno.

Semana 18 (10/08 à 17/08): Disponibilização de lista de exercícios e de vídeos (BRESSAN, 2020g e 2020h), no grupo de WhatsApp e na plataforma Google Classroom, com exemplos de como resolver e responder às questões sobre cálculo das raízes da equação do segundo grau com o método de completar quadrados, da lista com o material Algeplan; recebimento de fotos da resolução pelo WhatsApp.

O vídeo postado no Youtube e depois repostado tanto no grupo da turma no WhatsApp quanto na plataforma Classroom traz dois exemplos de resolução de equações de 2º grau aplicando o método de completar quadrados descrito na subseção 2.3.

Resolução do exemplo 1):

Seja a equação do 2º grau $x^2+8x-33=0$, vamos determinar seu conjunto solução seguindo os passos enumerados na subseção 2.3:

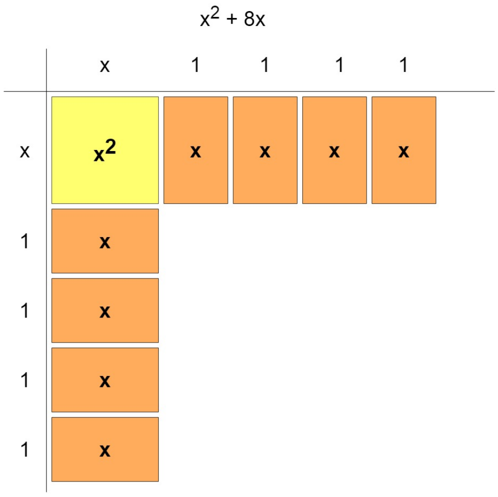
Passo 1: Isolar o termo independente dos termos dependentes:

$$x^2 + 8x = 33$$

Passo 2: Dividir a equação pelo valor do coeficiente a de x^2 que neste caso é 1.

Passo 3: Montar a representação geométrica para a equação, representando o quadrado de lado x com a peça x^2 e dispor os retângulos de lados x na quantidade $\frac{8}{2} = 4$ em cada lado do quadrado, conforme Figura 102.

Figura 102: Montagem de $x^2 + 8x$

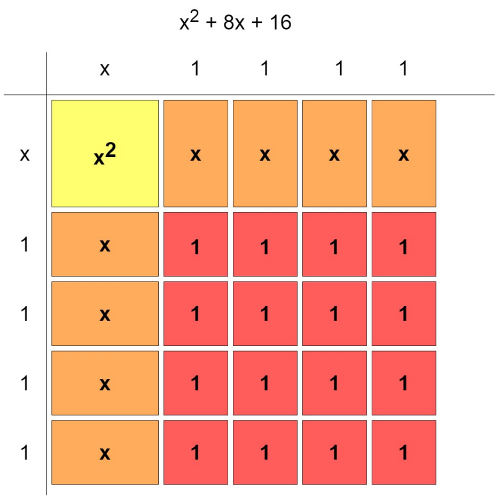


Fonte: Elaborado pela autora.

Temos então que a área da figura construída é exatamente x^2+8x, que pelo passo 1, tem valor igual à 33.

Passo 4: Completar, com os quadrados de lado 1, a figura construída no item 2 para que se torne um quadrado, como na Figura 103.

Figura 103: Completar o quadrado de lado $x + 4$



Fonte: Elaborado pela autora.

Note que foi adicionado no total um quadrado de lado $\frac{8}{2} = 4$. Então a área da figura é dada por $x^2 + 8x + 16$. Como $x^2 + 8x = 33$, temos que

$$x^2 + 8x + 16 = 33 + 16$$
$$x^2 + 8x + 16 = 49$$

Observando o quadrado completado, percebe-se que ele possui lado igual a $x+4$, portanto possui área igual a $(x+4)^2$.

Igualando os valores da área do quadrado completado, temos que

$$\begin{aligned}(x+4)^2 &= 49\\ \sqrt{(x+4)^2} &= \sqrt{49}\\ \mid x+4 \mid &= \sqrt{49}\\ \mid x+4 \mid &= 7\end{aligned}$$

Se $x+4 \geq 0$, ou seja, $x \geq -4$ então

$$\mid x+4 \mid = x+4$$

Assim $\mid x+4 \mid = 7 \Rightarrow x+4 = 7 \Rightarrow x = 7-4 \Rightarrow x = 3$

Ou

Se $x+4 < 0$, ou seja, $x < -4$ então

$$\mid x+4 \mid = -(x+4)$$

Assim $\mid x+4 \mid = 7 \Rightarrow -(x+4) = 7 \Rightarrow x = -7-4 \Rightarrow x = -11$

Logo, o conjunto solução encontrado é $S = \{-11, 3\}$

Resolução do exemplo 2):

Seja a equação do 2º grau $y^2+10y-39=0$, seguindo os passos enumerados na subseção 2.3, temos:

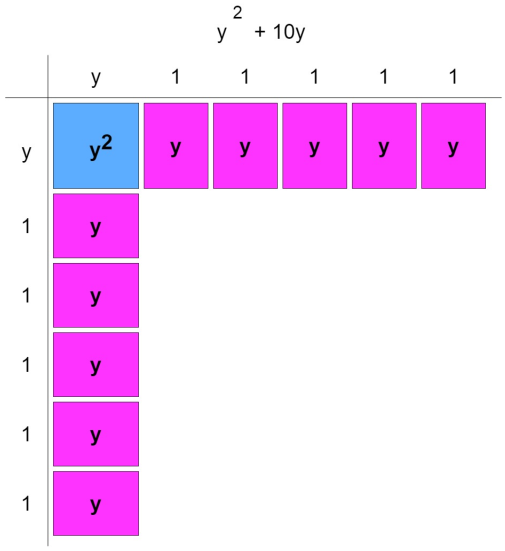
Passo 1: Isolar o termo independente dos termos dependentes:

$$y^2+10y = 39$$

Passo 2: Dividir a equação pelo valor do coeficiente a de y^2 que neste caso é 1.

Passo 3: Montar a representação geométrica para a equação, representando o quadrado de lado y com a peça y^2 e dispor os retângulos de lados y na quantidade $\frac{10}{2}=5$ em cada lado do quadrado, como mostra a Figura 104.

Figura 104: Montagem de $y^2 + 10y$

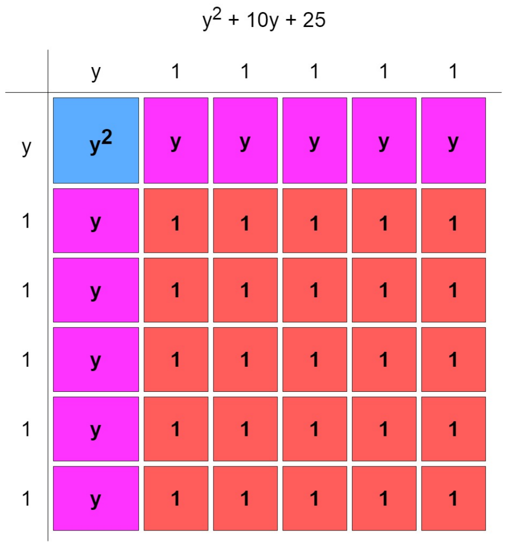


Fonte: Elaborado pela autora.

Temos então que a área da figura construída é exatamente $y^2 + 10y$, que pelo item 1, tem valor igual à 39.

Passo 4: Completar, com os quadrados de lado 1, a figura construída no item 2 para que se torne um quadrado, como mostra a Figura 105.

Figura 105: Completar o quadrado de lado de $y + 5$



Fonte: Elaborado pela autora.

Temos então que foi adicionado no total um quadrado de lado $\frac{10}{2} = 5$. Logo se antes a área da figura era 39, agora temos que a área total da figura formada é

$$39 + 5^2 = 39 + 25 = 64$$

.

Observando o quadrado completado, percebe-se que ele possui lado igual a $y+5$, portanto possui área igual a $(y+5)^2$.

Igualando os valores da área do quadrado completado, temos que

$$\begin{aligned}(y+5)^2 &= 64\\ \sqrt{(y+5)^2} &= \sqrt{64}\\ \mid y+5 \mid &= \sqrt{64}\\ \mid y+5 \mid &= 8\end{aligned}$$

Se $y+5 \geq 0$, ou seja, $y \geq -5$, então

$$\mid y+5 \mid = y+5$$

Assim $\mid y+5 \mid = 8 \Rightarrow y+5 = 8 \Rightarrow y = 8-5 \Rightarrow y = 3$

Ou

Se $y+5 < 0$, ou seja, $y < -5$ então

$$\mid y+5 \mid = -(y+5)$$

Assim $\mid y+5 \mid = 8 \Rightarrow -(y+5) = 8 \Rightarrow y = -8-5 \Rightarrow y = -13$

Logo, o conjunto solução encontrado é $S = \{-13, 3\}$

A lista de exercícios disponibilizada aos alunos encontra-se no Apêndice K.

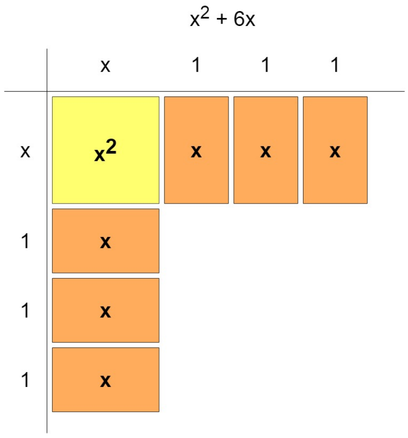
Análise da realização da atividade pelos alunos.

Resolução da atividade item a):

$x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 7$

A Figura 106 traz a representação esperada para o item a).

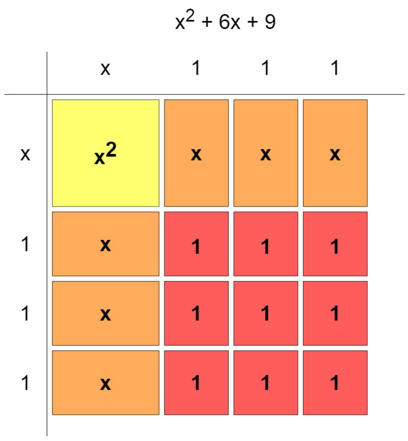
Figura 106: Montagem de $x^2 + 6x$



Fonte: Elaborado pela autora.

Completando o quadrado, temos a Figura 107.

Figura 107: Completar o quadrado de lado $x + 3$



Fonte: a autora.

Assim,

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6x + 9 &= 7 + 9 \\
(x+3)^2 &= 16 \\
\sqrt{(x+3)^2} &= \sqrt{16} \\
|\, x + 3 \,| &= \sqrt{16} \\
|\, x + 3 \,| &= 4
\end{aligned}
$$

Se $x + 3 \geq 0$, ou seja $x \geq -3$, então

$$| x+3 |= x+3$$

Assim $| x+3 |= 4 \Rightarrow x+3 = 4 \Rightarrow x = 4-3 \Rightarrow x = 1$

Ou

Se $x+3 < 0$, ou seja $x < -3$, então

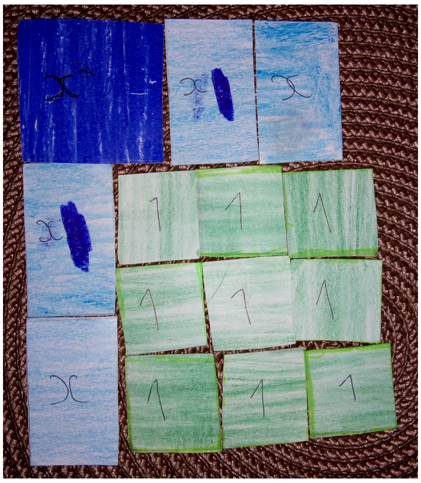
$$| x+3 |= -(x+3)$$

Assim $| x+3 |= 4 \Rightarrow -(x+3) = 4 \Rightarrow x = -4-3 \Rightarrow x = -7$

Logo, o conjunto solução encontrado é $S = \{-7, 1\}$

O Aluno 3 realizou a montagem do Item a) de forma incorreta, pois dispôs apenas duas peças x ao invés de três em cada parcela, mas completou corretamente o quadrado com nove peças 1, como mostra a Figura 108.

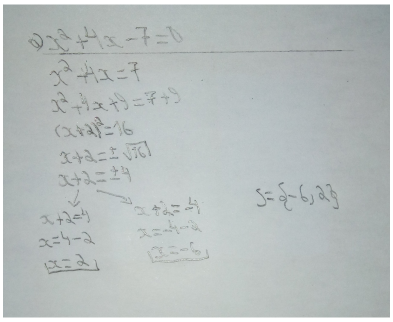
Figura 108: Montagem de $x^2 + 6x + 9$ realizada pelo Aluno 3



Fonte: Arquivo da autora.

Percebe-se que o Aluno 3 copiou a questão de forma incorreta, trocando o termo $6x$ por $4x$, assim não realizou os cálculos corretos e não obteve o resultado esperado para o item a), cuja resolução está descrita na Figura 109.

Figura 109: Resolução de $x^2 + 6x + 9 = 160$ pelo Aluno 3



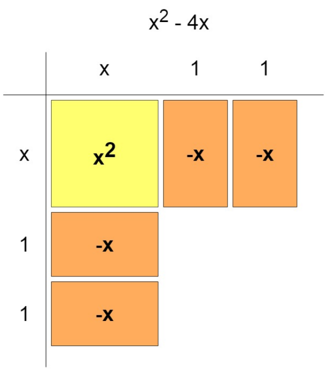
Fonte: Arquivo da autora.

Resolução da atividade item b):

$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 5$

A Figura 110 traz a representação esperada para o item b).

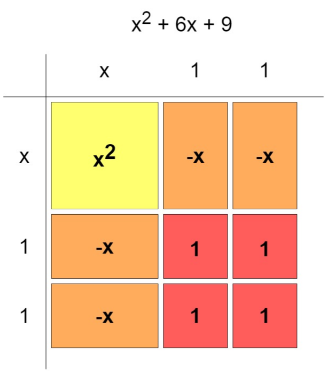
Figura 110: Montagem de $x^2 - 4x$



Fonte: Elaborado pela autora.

Completando o quadrado, temos a Figura 111.

Figura 111: Completar o quadrado de lado $x - 2$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim,

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 4 &= 5 + 4 \\
(x-2)^2 &= 9 \\
\sqrt{(x-2)^2} &= \sqrt{9} \\
\mid x - 2 \mid &= \sqrt{9} \\
\mid x - 2 \mid &= 3
\end{aligned}
$$

Se $x - 2 \geq 0$, ou seja, $x \geq 2$, então

$$\mid x - 2 \mid = x - 2$$

Assim $\mid x - 2 \mid = 3 \Rightarrow x - 2 = 3 \Rightarrow x = 3 + 2 \Rightarrow x = 5$
Ou
Se $x - 2 < 0$, ou seja, $x < 2$ então

$$\mid x - 2 \mid = -(x - 2)$$

Assim $\mid x - 2 \mid = 3 \Rightarrow -(x - 2) = 3 \Rightarrow x = -3 + 2 \Rightarrow x = -1$
Logo, o conjunto solução encontrado é $S = \{-1, 5\}$

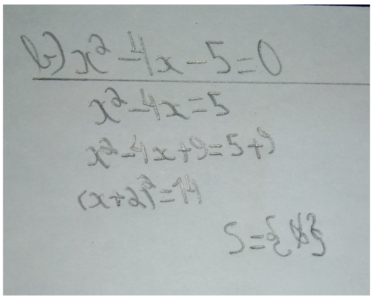
O Aluno 3 realizou de forma incorreta a montagem do Item b),pois colocou peças x ao invés das peças negativas, ainda completou o quadrado com 9 peças 1 ao invés de quatro, como mostra a Figura 112.

Figura 112: Montagem de $x^2 - 4x + 4$ realizada pelo Aluno 3

Fonte: Arquivo da autora.

Desta forma, o Aluno 3 não realizou os cálculos corretos e consequentemente não obteve o resultado esperado para o item b), cuja resolução está descrita na Figura 113.

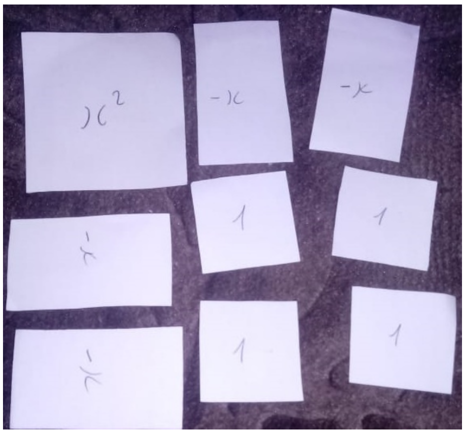
Figura 113: Resolução de $x^2 - 4x + 4 = 9$ pelo Aluno 3



Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 2 expressou e completou o quadrado com as peças de forma correta, no entanto não resolveu corretamente os cálculos, não obtendo desta forma o resultado esperado para o item b), como mostra a Figura 114.

Figura 114: Montagem de $x^2 - 4x + 4 = 0$ pelo Aluno 2



Fonte: Arquivo da autora.

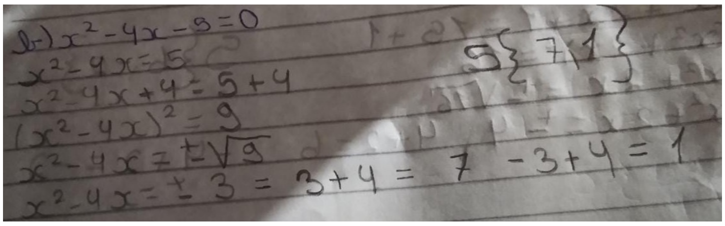
O Aluno 5 realizou a montagem do Item b) de forma incorreta, pois colocou peças x ao invés das peças negativas. No entanto, completou o quadrado corretamente com 4 peças 1, como mostra a Figura 115.

Figura 115: Montagem $x^2 - 4x + 4$ pelo Aluno 5

Fonte: Arquivo da autora.

A resolução do Aluno 5 foi incorreta, pois não expressou algebricamente o quadrado de lado $x - 2$ e portanto não obteve o resultado esperado para o item b), cuja resolução está descrita na Figura 116.

Figura 116: Resolução de $x^2 - 4x + 4 = 9$ pelo Aluno 5



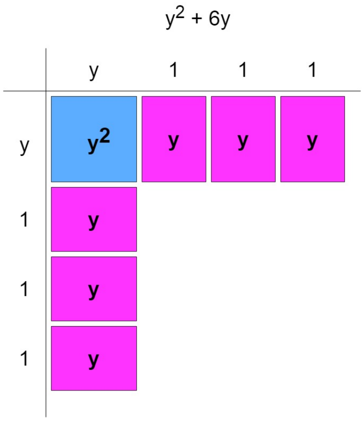
Fonte: Arquivo da autora.

Resolução da atividade item c):

$y^2 + 6y - 40 = 0 \Rightarrow y^2 + 6y = 40$

A Figura 117 traz a representação esperada para o item c).

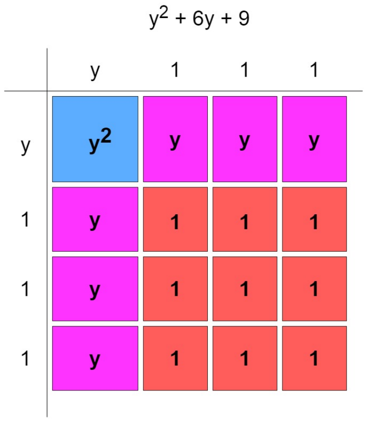
Figura 117: Montagem de $y^2 + 6y$



Fonte: Elaborado pela autora.

Completando o quadrado, temos a Figura 118.

Figura 118: Completar o quadrado de lado $y+3$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim,

$$
\begin{aligned}
y^2+6y+9 &= 40+9\\
(y+3)^2 &= 49\\
\sqrt{(y+3)^2} &= \sqrt{49}\\
|\, y+3 \,| &= \sqrt{49}\\
|\, y+3 \,| &= 7
\end{aligned}
$$

Se $y+3 \geq 0$, ou seja, $y \geq -3$, então

$$|\, y+3 \,| = y+3$$

Assim $|\, y+3 \,| = 7 \Rightarrow y+3 = 7 \Rightarrow y = 7-3 \Rightarrow y = 4$
Ou
Se $y+3 < 0$, ou seja, $y < -3$ então

$$|\, y+3 \,| = -(y+3)$$

Assim $|\, y+3 \,| = 7 \Rightarrow -(y+3) = 7 \Rightarrow y = -7-3 \Rightarrow y = -10$
Logo, o conjunto solução encontrado é $S = \{-10, 4\}$

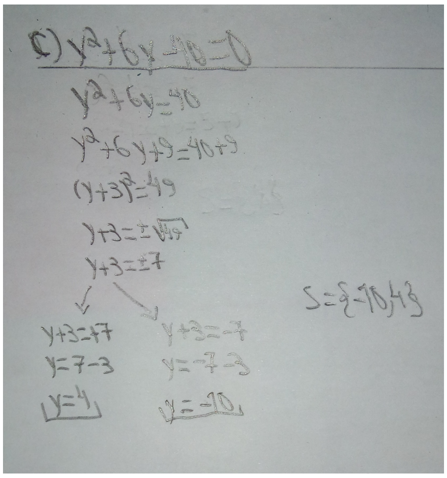
O Aluno 3 realizou a montagem e completou de forma correta o quadrado do Item c), como mostra a Figura 119.

Figura 119: Montagem de $y^2 + 6y + 9$ pelo Aluno 3

Fonte: Arquivo da autora.

Além disso, resolveu algebricamente de forma correta, encontrando o conjunto solução esperado para o item c), cuja resolução está descrita na Figura 120.

Figura 120: Resolução de $y^2 + 6y + 9 = 49$ pelo Aluno 3



Fonte: Arquivo da autora.

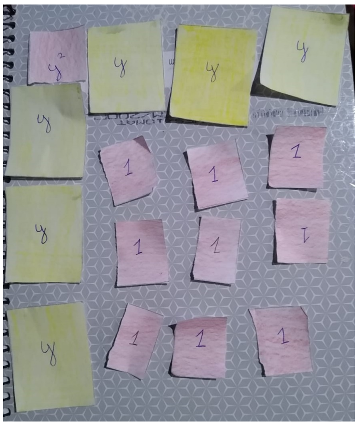
O Aluno 2 expressou e completou o quadrado com as peças de forma correta, mas não resolveu algebricamente com cálculos e nem detalhou o resultado esperado para o item c), como mostra a Figura 121.

Figura 121: Montagem $y^2 + 6y + 9$ pelo Aluno 2

Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 5 realizou a montagem e completou de forma correta o quadrado do Item c), como mostra a Figura 22.

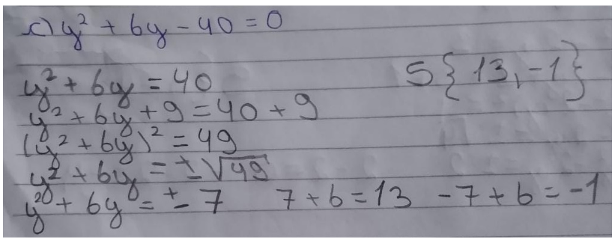
Figura 122: Montagem de $y^2 + 6y + 91$ pelo Aluno 5



Fonte: Arquivo da autora.

A resolução do Aluno 5 foi incorreta, pois não expressou algebricamente o quadrado de lado $y + 3$ e portanto não obteve o resultado esperado para o item c), cuja resolução está descrita na Figura 123.

Figura 123: Resolução de $y^2 + 6y + 9 = 49$ pelo Aluno 5



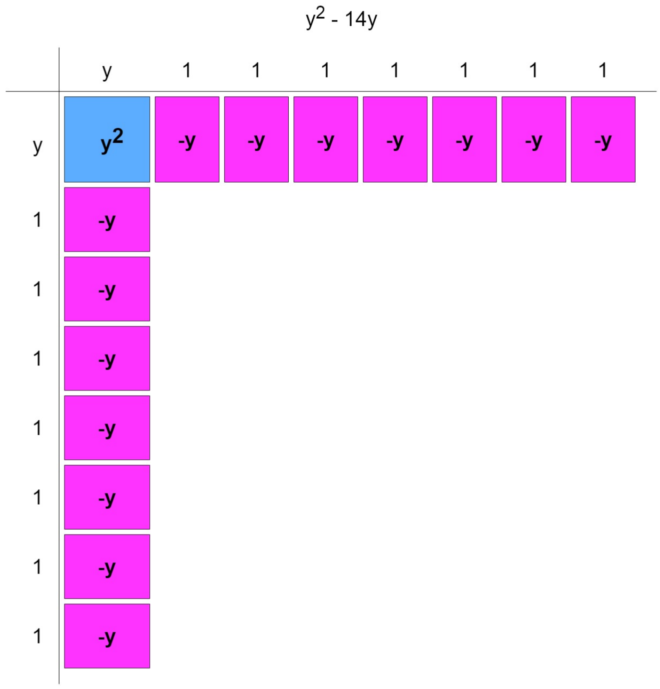
Fonte: Arquivo da autora.

Resolução da atividade item d):

$y^2 - 14y + 33 = 0 \Rightarrow y^2 - 14y = -33$

A Figura 124 traz a representação esperada para o item d).

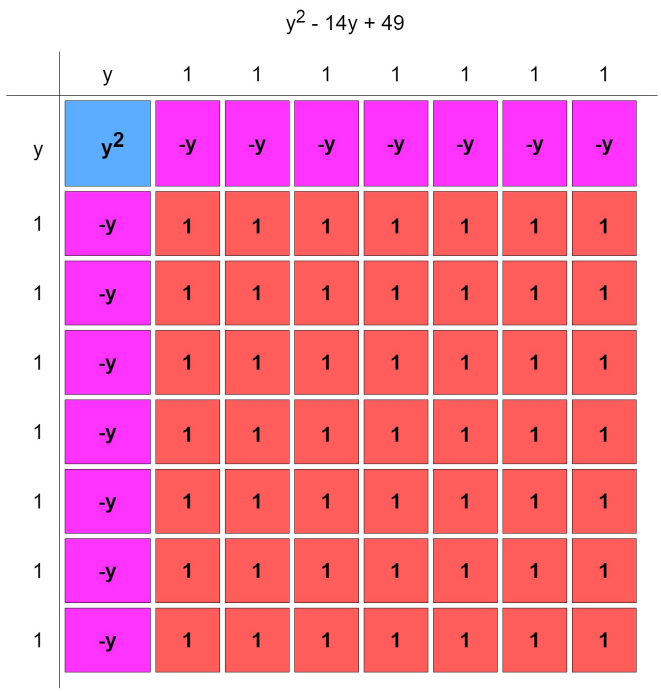
Figura 124: Montagem de $y^2 - 14y$



Fonte: Elaborado pela autora.

Completando o quadrado, temos a Figura 125.

Figura 125: Completar o quadrado de lado $y - 7$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim,

$$
\begin{aligned}
y^2 - 14y + 49 &= -33 + 49 \\
(y-7)^2 &= 16 \\
\sqrt{(y-7)^2} &= \sqrt{16} \\
\mid y-7 \mid &= \sqrt{16} \\
\mid y-7 \mid &= 4
\end{aligned}
$$

Se $y - 7 \geq 0$, ou seja, $y \geq 7$, então

$$\mid y-7 \mid = y-7$$

Assim $\mid y-7 \mid = 4 \Rightarrow y-7 = 4 \Rightarrow y = 4+7 \Rightarrow y = 11$
Ou
Se $y - 7 < 0$, ou seja, $y < 7$, então

$$\mid y-7 \mid = -(y-7)$$

Assim $\mid y-7 \mid = 4 \Rightarrow -(y-7) = 4 \Rightarrow y = -4+7 \Rightarrow y = 3$
Logo, o conjunto solução encontrado é $S = \{3, 11\}$

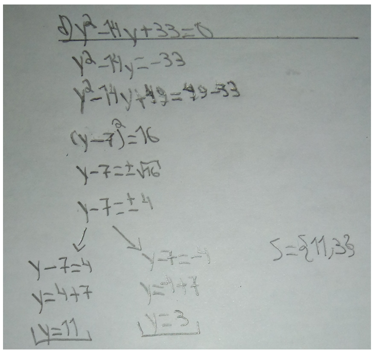
O Aluno 3 realizou a montagem e completou de forma correta o quadrado do Item d), mesmo não dispondo de quarenta e nove peças 1, como mostra a Figura 126.

Figura 126: Montagem de $y^2 - 14y + 49$ pelo Aluno 3

Fonte: Arquivo da autora.

E resolveu algebricamente de forma correta, encontrando o conjunto solução esperado para o item d), cuja resolução está descrita na Figura 127.

Figura 127: Resolução de $y^2 - 14y + 49 = 16$ pelo Aluno 3



Fonte: Arquivo da autora.

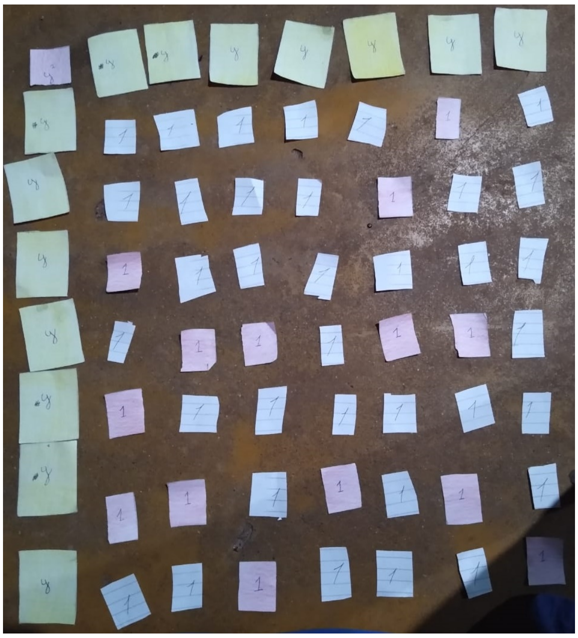
O Aluno 2 expressou e completou o quadrado com as peças de forma correta, mesmo não dispondo de quarenta e nove peças 1, mas não resolveu algebricamente e nem detalhou o resultado esperado para o item d), como mostra a Figura 128.

Figura 128: Montagem de $y^2 - 14y + 49$ pelo Aluno 2

Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 5 realizou a montagem e completou de forma correta o quadrado do Item e), como mostra a Figura 129.

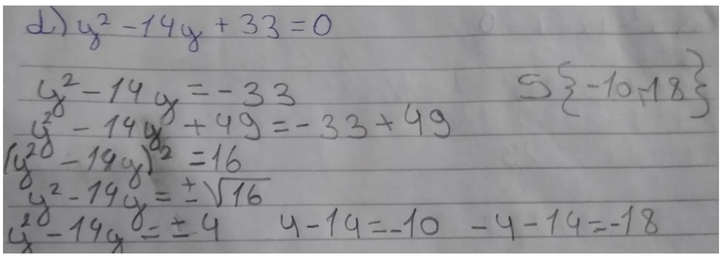
Figura 129: Montagem de $y^2 - 14y + 49$ pelo Aluno 5



Fonte: Arquivo da autora.

A resolução do Aluno 5 foi incorreta, pois não expressou algebricamente o quadrado de lado $y - 7$ e portanto não obteve o resultado esperado para o item d), cuja resolução está descrita na Figura 130.

Figura 130: Resolução de $y^2 - 14y + 49 = 16$ pelo Aluno 5



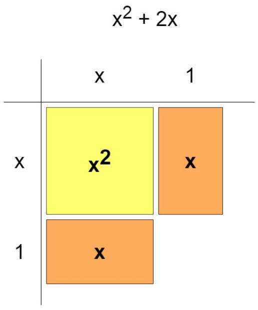
Fonte: Arquivo da autora.

Resolução da atividade item e):

$x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 15$

A Figura 131 traz a representação esperada para o item e).

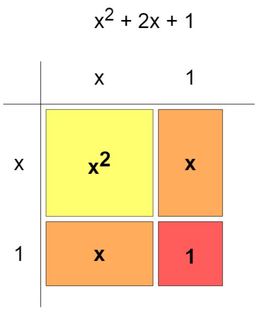
Figura 131: Montagem de $x^2 + 2x$



Fonte: Elaborado pela autora.

Completando o quadrado, temos a Figura 132.

Figura 132: Completar o quadrado de lado $x + 1$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim,

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2x + 1 &= 15 + 1 \\
(x+1)^2 &= 16 \\
\sqrt{(x+1)^2} &= \sqrt{16} \\
\mid x + 1 \mid &= \sqrt{16} \\
\mid x + 1 \mid &= 4
\end{aligned}
$$

Se $x + 1 \geq 0$, ou seja, $x \geq -1$, então

$$\mid x + 1 \mid = x + 1$$

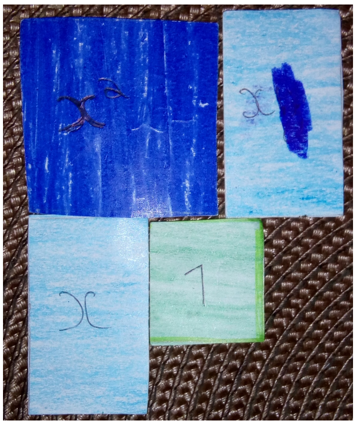
Assim $\mid x + 1 \mid = 4 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 4 - 1 \Rightarrow x = 3$
Ou
Se $x + 1 < 0$, ou seja, $x < -1$, então

$$| x+1 |= -(x+1)$$

Assim $| x+1 |= 4 \Rightarrow -(x+1) = 4 \Rightarrow x = -4-1 \Rightarrow x = -5$
Logo, o conjunto solução encontrado é $S = \{-5, 3\}$

O Aluno 3 realizou a montagem e completou de forma correta o quadrado do Item e), como mostra a Figura 133.

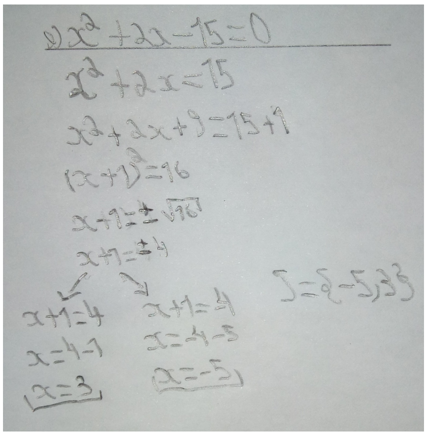
Figura 133: Montagem de $x^2 + 2x + 1$ pelo Aluno 3



Fonte: Arquivo da autora.

E resolveu algebricamente de forma correta, encontrando o conjunto solução esperado para o item e), cuja resolução está descrita na Figura 134.

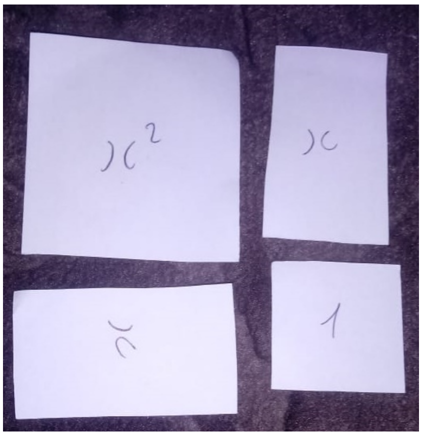
Figura 134: Resolução de $x^2 + 2x + 1 = 16$ pelo Aluno 3



Fonte: Arquivo da autora.

Novamente o Aluno 2 expressou e completou o quadrado com as peças de forma correta, mas não resolveu algebricamente com cálculos e nem detalhou o resultado esperado para o item e), como mostra a Figura 135

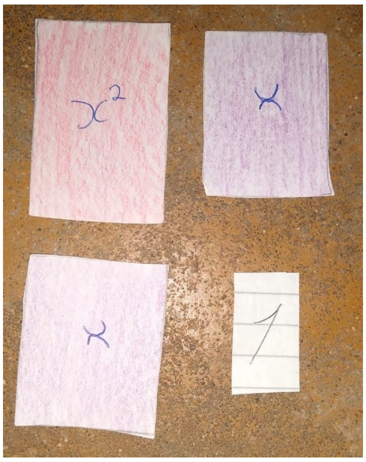
Figura 135: Montagem de $x^2 + 2x + 1$ pelo Aluno 2



Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 5 realizou a montagem e completou de forma correta o quadrado do Item e), como mostra a Figura 136.

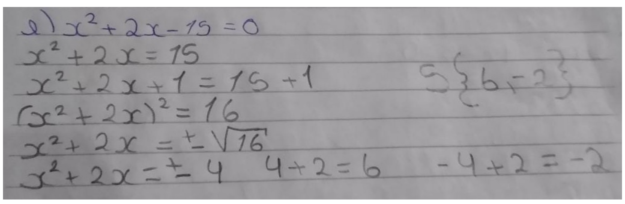
Figura 136: Montagem de $x^2 + 2x + 1$ pelo Aluno 5



Fonte: Arquivo da autora.

A resolução do Aluno 5 foi incorreta, pois não expressou algebricamente o quadrado de lado $x + 1$ e portanto não obteve o resultado esperado para o item d), cuja resolução está descrita na Figura 137.

Figura 137: Resolução de $x^2 + 2x + 1 = 16$ pelo Aluno 5



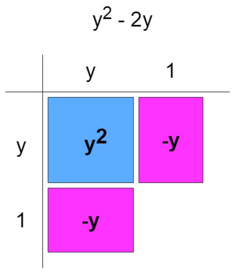
Fonte: Arquivo da autora.

Resolução da atividade item f):

$y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y = 3$

A Figura 138 traz a representação esperada para o item f).

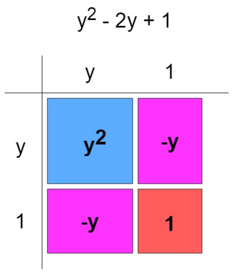
Figura 138: Montagem de $y^2 - 2y$



Fonte: Elaborado pela autora.

Completando o quadrado, temos a Figura 139.

Figura 139: Completar o quadrado de lado $y - 1$



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim,

$$\begin{aligned} y^2 - 2y + 1 &= 3 + 1 \\ (y-1)^2 &= 4 \\ \sqrt{(y-1)^2} &= \sqrt{4} \\ |\, y - 1 \,| &= \sqrt{4} \\ |\, y - 1 \,| &= 2 \end{aligned}$$

Se $y - 1 \geq 0$, ou seja, $y \geq 1$, então

$$|\, y - 1 \,| = y - 1$$

Assim $|\, y - 1 \,| = 2 \Rightarrow y - 1 = 2 \Rightarrow y = 2 + 1 \Rightarrow y = 3$

Ou

Se $y - 1 < 0$, ou seja, $y < 1$, então

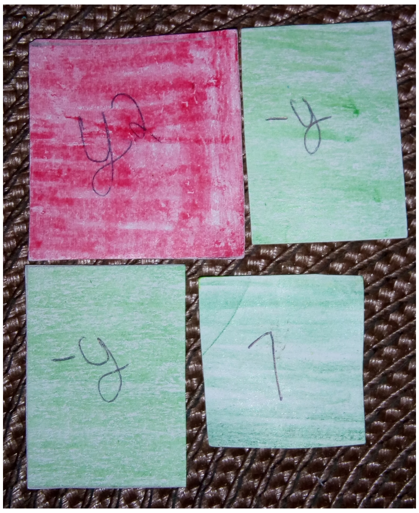
$$\mid y - 1 \mid = -(y - 1)$$

Assim $\mid y - 1 \mid = 2 \Rightarrow -(y - 1) = 2 \Rightarrow y = -2 + 1 \Rightarrow y = -1$

Logo, o conjunto solução encontrado é $S = \{-1, 3\}$

O Aluno 3 realizou a montagem e completou de forma correta o quadrado do Item f), conforme mostra a Figura 140.

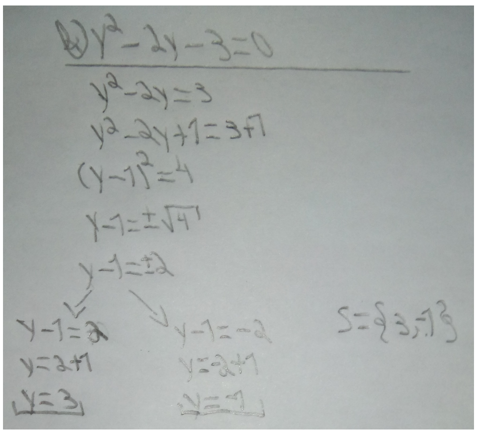
Figura 140: Montagem de $y^2 - 2y + 1$ realizada pelo Aluno 3



Fonte: Arquivo da autora.

E resolveu algebricamente de forma correta, encontrando o conjunto solução esperado para o item f), cuja resolução está descrita na Figura 141.

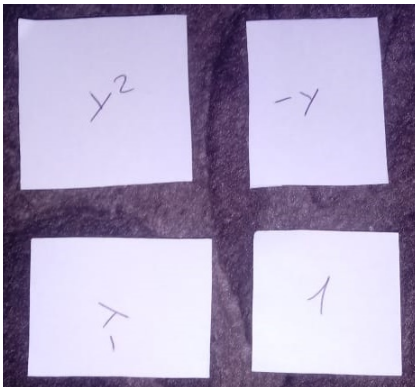
Figura 141: Resolução de $y^2 - 2y + 1 = 4$ pelo Aluno 3



Fonte: Arquivo da autora.

Novamente Aluno 2 expressou e completou o quadrado com as peças de forma correta, mas não resolveu algebricamente com cálculos e nem detalhou o resultado esperado para o item f), como mostra a Figura 142.

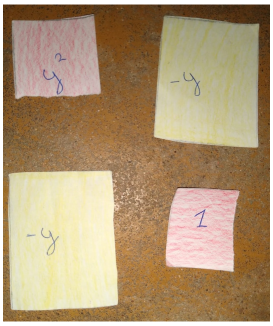
Figura 142: Montagem de $y^2 - 2y + 1$ pelo Aluno 2



Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno 5 realizou a montagem e completou de forma correta o quadrado do Item f), como mostra a Figura 143.

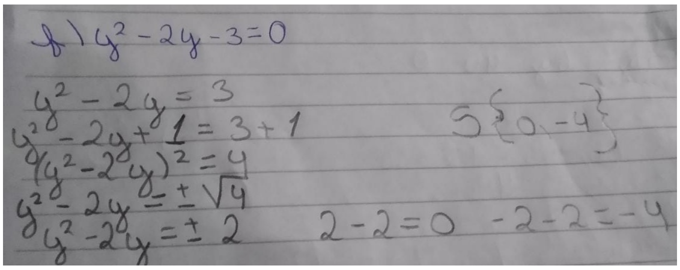
Figura 143: Montagem de $y^2 - 2y + 1$ realizada pelo Aluno 5



Fonte: Arquivo da autora.

A resolução do Aluno 5 foi incorreta, pois não expressou algebricamente o quadrado de lado $y - 1$ e portanto não obteve o resultado esperado para o item f), cuja resolução está descrita na Figura 144.

Figura 144: Resolução de $y^2 - 2y + 1 = 4$ pelo Aluno 5



Fonte: Arquivo da autora.

4.2.6 Síntese dos Resultados

Os alunos mostraram maior dificuldade em resolver algebricamente as equações do que na montagem do quadrado com as peças. O procedimento de coleta de dados foi o recebimento das fotos da resolução e montagem com as peças e posterior anotações no diário de classe. A síntese de aproveitamento dessa atividade foi parcial por 1 aluno e integral por 3 alunos. Os demais alunos não apresentaram retorno.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho, proposto a fim de validar uma proposta diferenciada para o ensino dos conteúdos de Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental, buscou ressaltar a importância do uso de Materiais Didáticos Manipuláveis na busca pela construção de conceitos a partir do concreto, permitindo que o aluno construa seu conhecimento a partir de uma base abstrata. Seu objetivo de demonstrar, através da prática com exercícios e da análise da aplicação dos mesmos, as tarefas algébricas que podem ser realizadas com o auxílio de figuras planificadas, nos permitiu perceber que o Algeplan e Álgebra têm o objetivo de manipular expressões algébricas e suas operações.

Por meio de ambos, tanto na manipulação do material quanto na manipulação algébrica, encontramos resultados que possuem semelhanças familiares, no entanto, as formas como suas regras são aplicadas são diferentes. Na aplicação da Álgebra, como prática escolar, as operações com polinômios constituem um conjunto de regras voltadas para a manipulação algorítmica, já no Algeplan, mobilizam-se as regras para a manipulação com um material pelas suas formas e cores. Por essa mobilização, podemos dizer que o Algeplan possui semelhanças também familiares com a Geometria.

Por possuir essa aplicação de acordo com as cores e formas das peças, Lorenzato (2006, p. 25) ressalta que:

> Para o aluno, mais importante do que conhecer essas verdades matemáticas, é obter a alegria da descoberta, a percepção da sua competência, a melhoria da autoimagem, a certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer constatações, a satisfação do sucesso, e compreender que a matemática, longe de ser um bicho-papão, é considerada um campo de saber onde ele, aluno, pode navegar.

Visto que, não é simples introduzir na cultura educativa uma ótica de trabalho diferente, espera-se que um caminho dessa natureza demore algum tempo. Suspeita-se que apenas um docente não pode encarregar-se de tudo. Será mais factível na medida em que as instituições o proponham e, para isso, é necessário que se formem equipes de trabalho que possam colaborar na produção de propostas que avancem em uma verdadeira linha de ação.

Esse tipo de trabalho, que influencia no modo de pensar a álgebra, propõe a possibilidade de apoiar-se em propriedades de figuras geométricas para verificar relações conhecidas, bem como inferir e produzir novas propriedades, assim como a fatoração de polinômios, envolvendo uma prática diferente para alunos e docentes. Para alguns alunos, implica em deixar de ser mero receptor de raciocínio produzido por outros e tornar-se protagonista de suas próprias deduções.

Para vários docentes, comporta o desafio de voltar a se relacionar com aspectos matemáticos que, por um motivo ou outro, tenham abandonado e que muito provavelmente foram os que motivaram o prazer desta disciplina e seu ingresso nela. Vale a pena voltar a pensar em termos educativos o trabalho matemático em geral, pois é evidente que muitos professores sentem certa impotência quando desenvolvem sua tarefa.

Por fim, a aplicação do presente trabalho, trouxe como resposta às questões introdutórias que mesmo que um aluno consiga manipular o Algeplan, seguindo suas regras definidas para as operações, isso não significa que ele conseguirá absorver os conceitos esperados, muitas vezes utilizando das técnicas algorítmicas para responder às questões com maior facilidade. Quanto à Geometria, alguns alunos não compreenderam o propósito de utilizar áreas de quadrados e retângulos na resolução das questões que envolveram multiplicação de polinômios, ficando o Algeplan apenas como termos de cores e formatos diferentes. Essas respostas poderiam ser outras se ao invés do ensino remoto a proposta fosse aplicada no ensino presencial, pois nada substitui o empenho do professor na tentativa de se trabalhar com novas alternativas, do seu olhar atento ao desenvolvimento das atividades pelos alunos que assim torna possível a superação nas dificuldades que assombram o ensino de matemática.

REFERÊNCIAS

ALSINA I PASTELLS, Ángel. **Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos: para crianças de 6 a 12 anos .** Curitiba: Base Editorial 2009.

ARAÚJO, H. M. C. **O uso das ferramentas do aplicativo "*Google* sala de aula"no ensino da matemática.** Catalão, GO, 2016.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo (tradução obra original de 1968), 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, DF: MEC, 2017 . Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79611-anexo-texto-bncc-aprovado-em-15-12-17-pdf&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 10 dez. 2020.

________: **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática (Ensino Fundamental)**, 1999 . Disponível em: < https://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/volume-03\-matematica.pdf > Acesso em 10 dez. 2020.

BRESSAN, Lidiane Garcia. 1 Vídeo (3m49s). **Confeccionando o Algeplan - Vídeo 1**. Publicado pelo canal Lidiane Garcia Bressan. 2020a. Disponível em: < https://youtu.be/Kq07iVKOOO0>. Acesso em: 08 jun. 2020.

________: 1 Vídeo (6m08s) **Confeccionando o Algeplan - Vídeo 2**. Publicado pelo canal Lidiane Garcia Bressan. 2020b. Disponível em: <https://youtu.be/ZN2axJfJf0w>. Acesso em: 08 jun. 2020.

________: 1 Vídeo (5m24s) **Confeccionando o Algeplan - Vídeo 3**. Publicado pelo canal Lidiane Garcia Bressan. 2020c. Disponível em: <https://youtu.be/j-VkV_YtemY>. Acesso em: 15 jun. 2020.

________: 1 Vídeo (10m39s) **Adição e subtração com o Algeplan**. Publicado pelo canal Lidiane Garcia Bressan. 2020d. Disponível em: <https://youtu.be/LT5eHW_t35s>. Acesso em: 29 jun. 2020.

________: 1 Vídeo (9m21s) **Multiplicação de polinômios - Algeplan**. Publicado pelo canal Lidiane Garcia Bressan. 2020e. Disponível em: <https://youtu.be/i5Lqi1z-PL0>.

Acesso em: 06 jul. 2020.

________: 1 Vídeo (11m38s) **Produtos Notáveis com Algeplan**. Publicado pelo canal Lidiane Garcia Bressan. 2020f. Disponível em: <https://youtu.be/lkK_5gVSxs4>. Acesso em: 13 jul. 2020.

________: 1 Vídeo (8m06s) **Método de completar quadrados - Exemplo 1**. Publicado pelo canal Lidiane Garcia Bressan. 2020g. Disponível em: <https://youtu.be/kT1G6-LNNZQ>. Acesso em: 10 ago. 2020.

________: 1 Vídeo (5m22s) **Método de completar quadrados - Exemplo 2**. Publicado pelo canal Lidiane Garcia Bressan. 2020h. Disponível em: <https://youtu.be/7-heqqvtb8c>. Acesso em: 10 ago. 2020.

CORDEIRO, Cristiane Teixeira et al. **Uso do Método de Completar Quadrados de Al-Khwarizmi na Resolução de Equações do Segundo Grau**. In: VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 2017, Canoas RS. Anais. Canoas: ULBRA, 2017. Disponível em: < http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/6853/3830>. Acesso em: 10 dez. 2020.

CORREIA, Angela Pereira. 1 Vídeo (9m07s). **Adição e Subtração com Polinômios - Professora Angela**. Publicado pelo canal Professora Angela Matemática. 2017a. Disponível em: < https://youtu.be/Ng2yNXfsZqw>. Acesso em: 05 mar. 2020.

________: 1 Vídeo (8m48s) **Multiplicação de Polinômios - Professora Angela**. Publicado pelo canal Professora Angela Matemática. 2017b. Disponível em: <https://youtu.be/\j3M1RvjpTBY>. Acesso em: 26 mar. 2020.

________: 1 Vídeo (6m47s) **Divisão de Polinômio por Monômio - Professora Angela**. Publicado pelo canal Professora Angela Matemática. 2017c. Disponível em: < https://youtu.be/wDTIV2hc868>. Acesso em: 02 abr. 2020.

________: 1 Vídeo (10m13s) **Produtos Notáveis - QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS - Professora Angela**. Publicado pelo canal Professora Angela Matemática. 2017d. Disponível em: < https://youtu.be/EDB_K6wDrkg>. Acesso em: 09 abr. 2020.

________: 1 Vídeo (11m14s) **Produtos Notáveis - QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS - Professora Angela**. Publicado pelo canal Professora Angela Matemática. 2017e. Disponível em: < https://youtu.be/kAuopf5iT1o>. Acesso em: 16

abr. 2020.

______: 1 Vídeo (6m13s) **Produtos Notáveis - Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos - Professora Angela**. Publicado pelo canal Professora Angela Matemática. 2017f. Disponível em: < https://youtu.be/TGSrdY8qUV4>. Acesso em: 23 abr. 2020.

D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. Ano II. n.2. SBEM, p.15, 1989.

DANTZIG, T. Número: **a linguagem da ciência.** Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DINIZ, R. H. N. et al. **Utilizando o Google Classroom como ferramenta educacional - Percepções e Potenciais.** Série Educar. v. 10, 2020.

FELICIANO, S. et al. **O Uso Do Whatsapp Como Ferramenta.** n. 7, 2009.

GARCIA, T. C. M. et al. **Ensino Remoto Emergencial.** Sedis, v. 1, 2020.

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lucia Torres.**Polinômios e Equações Algébricas.** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 6:** complexos, polinômios, equações. 7.ed. São Paulo: Atual, 2005.

KAIESKI, N.; GRINGS, J. A.; FETTER, S. A. Um Estudo Sobre as Possibilidades Pedagógicas De Utilização do Whatsapp. **Novas Tecnologias na Educação**, v. 13, n. 2, 2015.

LIMA, D. L. F.; ALMEIDA, L. P. C. M. de A.; CAVALCANTE, A. G. B. **A utilização do whatsapp como ferramenta de construção inicial de um trabalho de conclusão de curso.** Relato de experiência inovadora (ei) categoria métodos e tecnologias. p. 1-9. Fortaleza, CE, 2017.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas: Autores Associados, 2006 .

MATTAR, João. **Design educacional:** educação a distância na prática. 1 ed. São Paulo: Artesanato educacional, 2014.

MORAN, José Manuel. **Educação híbrida:** Um conceito-chave para a educação hoje. In: BACICH, Lilian; NETO, Adolfo Tanzi; TREVISANI, Fernando de Mello. **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação.** Porto Alegre: Penso, 2015.

MORENO, M. org. **La pedagogia operatória.** Barcelona: Editorial Laia, 1983 .

OLIVEIRA, Maria do S. de L., et al. **Diálogos com docentes sobre ensino remoto e planejamento didático**. EDUFRPE, Recife, 2020.

PASQUETTI, Camila. **Proposta de Aprendizagem de Polinômios através de Materiais Concretos** 2008. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Matemática, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Erechim, RS, 2008.

PAULINO, D. B. et al. **Saúde: Contextualizando Teoria e Prática em um WhatsApp as a Resource for Health Education:** Contextualizing Theory and Practice in a New Teaching-Learning Scenario. **Revista Brasileira de Educação Médica**, v. 42, n. 1, p. 171-180, 2018.

PEREIRA, Paulo. 1 Vídeo (28m54s). **Definição de Equação do 2º Grau e Resolução de Equações Incompletas Com vários exemplos!**. Publicado pelo canal Equaciona Com Paulo Pereira. 2020. Disponível em: < https://youtu.be/nD6Xu20ADGs>. Acesso em: 20 jul. 2020.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **O desenvolvimento das quantidades físicas na criança.** 2.ed., Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1975.

POLETO, Camilla da Silva. **Algeplan, Álgebra e Geometria:** entendendo práticas matemáticas como jogos de linguagem. 2010. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2010.

RIBEIRO, Rodrigo. 1 Vídeo (17m43s). **Como resolver uma equação do 2º grau**. Publicado pelo canal Matemática do aluno - Prof. Rodrigo Ribeiro. 2014. Disponível em: < https://youtu.be/8ogBhY5YYHw>. Acesso em: 20 jul. 2020.

RIO GRANDE DO SUL. **Referencial Curricular Gaúcho: Matemática.** Porto Alegre: SEE, 2018. Disponível em: < http://portal.educacao.rs.gov.br/Portals/1/Files/1533.pdf>. Acesso em: 01 dez. 2020.

RUSCHEL, Gian E. S.; TREVISAN, Mariana B.; PEREIRA, Josei F. **Ensino remoto no contexto de uma instituição privada**. UFSM, 2020, Santa Maria RS. (Texto para discussão, n.18)

SARMENTO, Alan Kardec Carvalho. **A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática.** Anais do VI Encontro de Pesquisa em Educação da UFPI, 2012.

SCHUCK, Fernanda et al. **O O Uso do Algeplan como Ferramenta para a Construção de Conceitos Referente a Produtos Notáveis.** In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba/PR, Anais.

SCOLARO, Maria Angela. **O uso dos Materiais Didático Manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática.** 2008 . Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2020.

SILVA, G.; NETTO, J. F. **Um Relato de experiência usando Google Sala de Aula para Apoio à Aprendizagem de Química.** In: XXIV Workshop de Informática na escola (WIE 2018), v. 1, n. Cbie, p. 119, 2018.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Patrícia. Resolução de Problemas-V2: **Coleção Matemática de 0 a 6.** São Paulo: Editorial Laia, 2012.

APÊNDICES

APÊNDICE A - ATIVIDADE SEMANA 2

E. E. E. F. Pe José de Anchieta – Matemática – 9° Ano – Semana 2 (19/03 à 25/03) – Primeiro Semestre/ 2020 – Profª Lidiane Garcia

Nesta atividade vocês deverão **completar** os exemplos segundo o vídeo https://youtu.be/Ng2yNXfsZqw e **resolver** os exercícios que seguem.

Esta atividade pode ser impressa ou copiada no caderno.

Adição e Subtração de Polinômios:

Exemplos:

1) $(4x^2y + 5x + 2y) + (3x^2y + 6y) =$

2) $(7x^2 – 12y + 15) – (4y^2 + 16y – 18) =$

Polinômio Oposto:

Exemplo:

$(a^3 + 2a^2b^2 – 9b) + (-a^3 – 2a^2b^2 + 9b)=$

Exercícios:

1) Efetue as adições de polinômios:

a) $(- 2x + 3y) + (9x – 7y) =$

b) $(6x^2 + 8x - 3) + (- 2x^2 – 5x - 1) =$

c) $(- 7x + 2y - 6) + (- 3x – 4y - 5) =$

d) $(x + 1) + (3x^2 + 4x - 9) =$

e) $(5x^3 + 2x - 1) + (4x^3 – 6x2 - 3) =$

f) $(a^2 + a - 8) + (- a^2 – a + 8) =$

g) $(5x^3 + 4x^2 – 2x + 1) + (- 5x^3 – 4x^2 + 7x - 3) =$

2) Efetue as subtrações de polinômios

a) $(4x^2 – 4x + 5) – (2x^2 + 7x - 1) =$

b) $(6a – 3b + 2c) – (2a – 2b + 5c) =$

c) $(7ab + 2c – 3a) – (5ab – 4a + c) =$

d) $(4x^3 – 5x^2 - 2) – (7 – 6x^3) =$

e) $(h^2 – h - 1) – (- h^2 + h + 1) =$

f) $(8x^3 – 5x^2 – 6 + 2x) – (- 2x^2 + 6x^3 + 8 + 2x) =$

APÊNDICE B - ATIVIDADE SEMANA 3

E. E. E. F. Pe José de Anchieta – Matemática – 9° Ano – Semana 3 (26/03 à 01/04) – Primeiro Semestre/ 2020 – Profª Lidiane Garcia

Nesta atividade vocês devem assistir o vídeo https://youtu.be/j3M1RvjpTBY com a explicação da matéria e resolver os exercícios que seguem. Aguardo fotos das resoluções.

1) Calcule os produtos:

a) $x^3 \cdot (x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$

b) $(a^2 - 4ab + b^2) \cdot \left(-\frac{1}{3}\, ab\right)$

c) $(2y^2 + 3y - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\, y^2\right)$

d) $m^2n \cdot (m^2 - 5mn + n^2)$

e) $(-5\,abc) \cdot (a - b + c)$

f) $\frac{3}{5}abx \cdot (ab + 5ax - bx)$

2) Determine os produtos do binômios:

a) $(2x + 3)\,(3x - 2)$

b) $(a + 3b)\,(b - 3a)$

c) $(5 - 2y)\,(1 - 3y)$

d) $(ab - 4)\,(ab + 4)$

e) $(2x - a)\,(x - 2a)$

f) $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

g) $\left(\frac{1}{2}\, a - \frac{1}{3}\, b\right)(a - b)$

h) $(2m^2 - n)\,(3m^2 + 2n)$

3) Determine os produtos:

a) $(x^2 - 2x + 1)\,(x - 1)$

b) $(a + b - 3)\,(a - b)$

c) $(y^4 - y + 5)\,(2y - 1)$

d) $(m^2 - mn + n^2)\,(m^2 - n^2)$

e) $(3x^3 + 2x^2 - 2x + 4)\,(x^2 - 1)$

f) $(2x^2 - 3x + 1)\,(x^2 - 5x + 2)$

g) $(m^2 - 5m + 3)\,(3m^2 - m + 4)$

4) Determine os produtos:

a) $5x\,(x - 2)\,(x - 4)$

b) $ab\,(2a + b)\,(b - 2a)$

c) $-xy\,(x + 1)\,(y + 2)$

d) $(x - 3)\,(x - 2)\,(x - 1)$

e) $(a - b)\,(2a - b)\,(a - 2b)$

f) $2mn\,(m - 2)\,(m + 2)\,(m - n)$

5) Dados os polinômios $A = 2x^3$, $B = 2x^2 - 3x + 1$ e $C = 3x - 1$, determine:

a) $A \cdot C$

b) C^2

c) $A \cdot B$

d) $B \cdot C$

e) $C^2 - A \cdot B$

f) $AC - BC$

APÊNDICE C - ATIVIDADE SEMANA 4

E. E. E. F. Pe José de Anchieta – Matemática – 9° Ano – Semana 4 (02/04 à 08/04) – Primeiro Semestre/ 2020 – Profª Lidiane Garcia

Nesta atividade vocês devem assistir o vídeo https://youtu.be/wDTIV2hc868 com a explicação da matéria e resolver os exercícios que seguem. Aguardo fotos das resoluções.

1) Realize as seguintes divisões:

a) $(2x^5 + 3x^4) : x^3$

b) $(3y^3 – 7y^2 + 8y) : y$

c) $(x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4) : xy^2$

d) $(12x^3y^4 – 18x^4y^3) : (- 6x^3y^3)$

e) $(15x^4 – 45x^3 – 6x^2) : 3x^2$

f) $(14x^3y^3 + 21x^2y^4 – 28xy^5) : 7xy^3$

g) $(3x^6 – 2x^4 – 5x^2) : (- 2x^2)$

h) $(3x^2y^2 – 6xy + 9xy^2) : \frac{3}{4}xy$

i) $(4x^3 – x^2 – 2x) : x$

j) $(5a^6 + 15a^3 – 10a) : 5a$

k) $(12x^5 – 8x^3) : 2x^2$

l) $(2x^4y^4 – 4x^3y) : 2x^2y$

APÊNDICE D - ATIVIDADE SEMANA 5

E. E. E. F. Pe José de Anchieta – Matemática – 9° Ano – Semana 5 (09/04 à 15/04) – Primeiro Semestre/ 2020 – Profª Lidiane Garcia

Nesta atividade vocês devem assistir o vídeo https://youtu.be/EDB_K6wDrkg com a explicação da matéria e resolver os exercícios que seguem. Aguardo fotos das resoluções.

1) Calcule os quadrados:

a) $(x + y)^2$

b) $(a + 7)^2$

c) $(3x + 1)^2$

d) $(5 + 2m)^2$

e) $(10x + y)^2$

f) $(a + 3x)^2$

g) $(5x^2 + 1)^2$

h) $(c^3 + 6)^2$

i) $(x^{10} + 4)^2$

j) $(a^2 + c^3)^2$

k) $(10 + a)^2$

l) $(2 + 3m)^2$

m) $(a + 5x)^2$

n) $(x^2 + x)^2$

o) $(a^5 + c^4)^2$

p) $(3m^2 + 4n)^2$

q) $(2x + xy)^2$

r) $(ac + p^3)^2$

s) $(xy + 5)^2$

t) $(11 + pq)^2$

2) Simplifique as expressões:

a) $(x + 1)^2 + (x + 2)^2$

b) $(2x + 1)^2 + (3x + 1)^2$

c) $5x – (2x + 3)^2$

d) $(x + 5)^2 – x (x + 3)$

e) $(x + 1)^2 + (x + 5)^2$

f) $(x + y)^2 – 2 (x^2 + y^2)$

g) $(a + b)^2 – (b + c)^2$

h) $(3x + 5)^2 + 3x (5x + 1)$

APÊNDICE E - ATIVIDADE SEMANA 6

E. E. E. F. Pe José de Anchieta – Matemática – 9° Ano – Semana 6 (16/04 à 22/04) – Primeiro Semestre/ 2020 – Profª Lidiane Garcia

Nesta atividade vocês devem assistir o vídeo https://youtu.be/kAuopf5iT1o com a explicação da matéria e resolver os exercícios que seguem. Aguardo fotos das resoluções.

1) Calcule:

a) $(5 – x)^2 =$

b) $(y – 3)^2 =$

c) $(x – y)^2 =$

d) $(x – 7)^2 =$

e) $(2x – 5)^2 =$

f) $(6y – 4)^2 =$

g) $(3x – 2y)^2 =$

h) $(2x – b)^2 =$

i) $(5x^2 - 1)^2 =$

j) $(x^2 - 1)^2 =$

l) $(9x^2 - 1)^2 =$

m) $(x^3 - 2)^2 =$

n) $(2m^5 - 3)^2 =$

o) $(x – 5y^3)^2 =$

p) $(1 - mx)^2 =$

q) $(2 - x^5)^2 =$

r) $(-3x – 5)^2 =$

s) $(x^3 - m^3)^2 =$

APÊNDICE F - ATIVIDADE SEMANA 7

E. E. E. F. Pe José de Anchieta – Matemática – 9° Ano – Semana 7 (23/04 à 30/04) – Primeiro Semestre/ 2020 – Profª Lidiane Garcia

Nesta atividade vocês devem assistir o vídeo https://youtu.be/TGSrdY8qUV4 com a explicação da matéria e resolver os exercícios que seguem. Aguardo fotos das resoluções.

1) Calcule o produto da soma pela diferença de dois termos:

a) $(x + y) . (x - y) =$

b) $(y – 7) . (y + 7) =$

c) $(x + 3) . (x – 3) =$

d) $(2x + 5) . (2x – 5) =$

e) $(3x – 2) . (3x + 2) =$

f) $(5x + 4) . (5x – 4) =$

g) $(3x + y) (3x – y) =$

h) $(1 – 5x) . (1 + 5x) =$

i) $(2x + 3y) . (2x – 3y) =$

j) $(7 – 6x) . (7 + 6x) =$

l) $(1 + 7x^2) . (1 – 7x^2) =$

m) $(3x^2 - 4) . (3x^2 + 4) =$

n) $(3x^2 - y^2) . (3x^2 + y^2) =$

o) $(x + 1/2) . (x – 1/2) =$

p) $(x – 2/3) . (x + 2/3) =$

q) $(x/4 + 2/3) . (x/4 – 2/3) =$

APÊNDICE G - ATIVIDADE SEMANA 8

E. E. E. F. Pe José de Anchieta – Matemática – 9° Ano – Semana 8 (01/06 à 07/06) – Primeiro Semestre/ 2020 – Profª Lidiane Garcia

Esta atividade serve de avaliação de aprendizagem até agora. Aguardo fotos das resoluções.

1) Calcule as seguintes adições e subtrações de Polinômios:

a) $(-2x + 3y) + (5x – 2y)$

b) $(6x^2 + 8x – 3) + (-2x^2 – 5x – 1)$

c) $(-7x + 2y – 6) + (-3x – 4y – 5)$

d) $(x + 1) + (3x^2 + 4x – 9)$

e) $(4x^2 – 4x + 5) – (2x^2 + 7x + 1)$

f) $(2x^2 + 5x + 3) – (4x^2 – 2x + 1)$

g) $(4x^2 – 2x + 1) – (-3x^2 – x + 3)$

h) $(-3y^2 – y + 3) – (4y^2 – 2y + 1)$

i) $6x^2 – (2x^2 + 5) + (x – 8) – (3x - 1)$

j) $(-2x^2 – 5x) + (8x – 6) – (-3x^2 + 7x)$

2) Calcule os seguintes produtos:

a) $2x .(3x + 1)$

b) $4x (2y + x)$

c) $7x (x – 2)$

d) $-x (- x + y)$

e) $-5x (- x – y)$

f) $(3x + 2) (x – 3)$

g) $(x + 3) (x + 4)$

h) $(y – 6) (x – 2)$

i) $(1 – 2x) (4 + 3x)$

j) $(x – 2) (x + 4)$

k) $(2x + 3) (2x – 1)$

3) Calcule os seguintes produtos notáveis:

a)$(x + y)^2$

b) $(3x + 1)^2$

c) $(y + 2)^2$

d) $(x + 2y)^2$

e) $(2 +3x)^2$

f) $(x - y)^2$

g) $(5y - x)^2$

h) $(1 - x)^2$

i) $(x – 2y)^2$

j) $(3x - 1)^2$

k) $(3x + 2y) (3x – 2y)$

l) $(x – 1) (x + 1)$

m) $(y + 3) (y – 3)$

n) $(2 – x) (2 + x)$

APÊNDICE H - ATIVIDADE SEMANA 12

E. E. E. F. Pe José de Anchieta – Matemática – 9° Ano – Semana 12 (29/06 à 05/07) – Primeiro Semestre/ 2020 – Profª Lidiane Garcia

1) Represente os cálculos com as peças do Algeplan e dê o resultado:

a) $(-2x + 3y) + (5x – 2y)$

b) $(6x^2 + 8x – 3) + (-2x^2 – 5x – 1)$

c) $(-7x + 2y – 6) + (-3x – 4y – 5)$

d) $(x + 1) + (3x^2 + 4x – 9)$

e) $(4x^2 – 4x + 5) – (2x^2 + 7x + 1)$

f) $(2x^2 + 5x + 3) – (4x^2 – 2x + 1)$

g) $(4x^2 – 2x + 1) – (-3x^2 – x + 3)$

h) $(-3y^2 – y + 3) – (4y^2 – 2y + 1)$

APÊNDICE I - ATIVIDADE SEMANA 13

E. E. E. F. Pe José de Anchieta – Matemática – 9° Ano – Semana 13 (06/07 à 12/07) – Primeiro Semestre/ 2020 – Profª Lidiane Garcia

1) Represente os produtos com as peças do Algeplan e dê o resultado:

a) (3x + 2) (x – 3)

b) (x + 3) (x + 4)

c) (y – 6) (x – 2)

d) (1 – 2x) (4 + 3x)

e) (x – 2) (x + 4)

APÊNDICE J - ATIVIDADE SEMANA 14

E. E. E. F. Pe José de Anchieta – Matemática – 9° Ano – Semana 14 (13/07 à 19/07) – Primeiro Semestre/ 2020 – Profª Lidiane Garcia

1) Represente os produtos notáveis com as peças do Algeplan e dê o resultado:

a) $(3x + 1)^2$

b) $(y + 2)^2$

c) $(x + 2y)^2$

d) $(y - x)^2$

e) $(x – 2y)^2$

f) $(3x - 1)^2$

g) $(3x + 2y)\ (3x – 2y)$

h) $(y + 3)\ (y – 3)$

i) $(2 – x)\ (2 + x)$

APÊNDICE K - ATIVIDADE SEMANA 18

E. E. E. F. Pe José de Anchieta – Matemática – 9° Ano – Semana 18 (10/08 à 17/08) - Segundo Semestre/ 2020 – Profª Lidiane Garcia

Nesta atividade vocês deverão **completar** os exemplos segundo os vídeos:

Exemplo 1: https://www.youtube.com/watch?v=kT1G6-LNNZQ

Exemplo 2: https://www.youtube.com/watch?v=7-heqqvtb8c

e **resolver** os exercícios que seguem com as peças do Algeplan.

Exemplo 1) $x^2 + 8x – 33 = 0$

Exemplo 2) $y^2 + 10y – 39 = 0$

Exercícios:

1) Resolva as seguintes equações do 2º grau pelo método de completar quadrados, representando com o Algeplan:

a) $x^2 + 6x – 7 = 0$

b) $x^2 – 4x – 5 = 0$

c) $y^2 + 6y – 40 = 0$

d) $y^2 – 14y + 33 = 0$

e) $x^2 + 2x – 15 = 0$

f) $y^2 – 2y – 3 = 0$