

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Luiz Fernando Pereira

**O EQUILÍBRIO DOS PLANOS E OS PONTOS NOTÁVEIS DO
TRIÂNGULO: ARQUIMEDES, EUCLIDES, HUZITA E HATORI
TRABALHANDO JUNTOS**

Santa Maria, RS
2021

Luiz Fernando Pereira

**O EQUILÍBRIO DOS PLANOS E OS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO:
ARQUIMEDES, EUCLIDES, HUZITA E HATORI TRABALHANDO JUNTOS**

Dissertação elaborada e apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Prof Dr. Edson Sidney Figueiredo

Santa Maria, RS
2021

Pereira, Luiz Fernando

O EQUILÍBRIO DOS PLANOS E OS PONTOS NOTÁVEIS DO
TRIÂNGULO: ARQUIMEDES, EUCLIDES, HUZITA E HATORI
TRABALHANDO JUNTOS / Luiz Fernando Pereira.- 2021.
120 p.; 30 cm

Orientador: Edson Sidney Figueiredo
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2021

1. Pontos Notáveis do Triângulo 2. Origami na
Matemática 3. Centro de Gravidade 4. Ensino de Geometria
Plana 5. Matemática dos Axiomas de Huzita-Hatori I.
Figueiredo, Edson Sidney II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

©2021

Todos os direitos autorais reservados a Luiz Fernando Pereira. A reprodução de partes ou do todo este trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

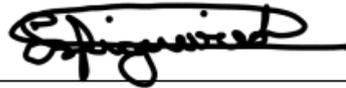
End. Eletr.: engelutz@gmail.com; engelutz@yahoo.com.br

Luiz Fernando Pereira

**O EQUILÍBRIO DOS PLANOS E OS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO:
ARQUIMEDES, EUCLIDES, HUZITA E HATORI TRABALHANDO JUNTOS**

Dissertação elaborada e apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 28 de janeiro de 2021:



Edson Sidney Figueiredo, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)



Cláudia Candida Pansonato, Dra. (UFSM)



Lisandra de Oliveira Sauer, Dra. (UFPEL)

DEDICATÓRIA

Este trabalho não seria realizado sem o apoio incondicional de minha família, entendida como todas as pessoas com as quais convivemos, que nos desejam o bem e torcem por nosso sucesso.

Assim, dedico esta dissertação:

- a minha mãe pelo exemplo de vida e pela incansável busca pela felicidade dos filhos;
- a meus pais e tios por me apoiarem na decisão de recomeçar minha jornada longe do Rio Grande do Sul;
- a minha esposa e filhos que me acompanharam na empreitada da pós-graduação e souberam entender as minhas ausências para estudo e trabalho;
- a meus sogros que me receberam como filho e não mediram esforços para que eu tivesse tranquilidade para completar meu trabalho;
- a minha mãe e minha dinda pela dedicação aos seus alunos e por me inspirarem a ser professor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de nascer neste mundo, no seio de uma família que sempre me apoiou em minhas decisões, que valoriza a educação e que comemora cada pequena conquista.

Agradeço a meus pais pela vida e pelos exemplos. Especialmente agradeço a minha mãe Ivani pela luta diária para criar seus filhos, estudar e ensinar. A ela também agradeço pelo apoio e incentivo para concluir meus estudos.

Agradeço a minha esposa Nêmenes pelo amor, pelo companheirismo e pelo apoio que permitiu superar as dificuldades que apareceram no caminho. A ela também devo a parceria na criação e educação de meus filhos Luiz Felipe e João Luiz, sobretudo neste período de pandemia e aulas à distância.

Agradeço a minha amiga Dircélia pelas contribuições para meu trabalho, compartilhando a experiência adquirida em muitas e muitas horas de sala de aula ensinando matemática.

Agradeço aos meus colegas do PROFMAT pela amizade e alegria que permitiram fazer das aulas da pós-graduação uma atividade prazerosa.

Agradeço aos professores da UFSM que ministraram as disciplinas do curso por compartilharem sua experiência, saber e visão de mundo.

Agradeço a meu orientador Professor Edson pelas discussões, opiniões e auxílio para elaboração da dissertação.

Agradeço ao Exército Brasileiro, nas pessoas de meus chefes diretos, por terem permitido que eu cursasse a pós-graduação e por entenderem que o autoaperfeiçoamento reflete diretamente na melhoria de desempenho dos seus subordinados.

RESUMO

O EQUILÍBRIO DOS PLANOS E OS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO: ARQUIMEDES, EUCLIDES E ORIGAMI TRABALHANDO JUNTOS

AUTOR: Luiz Fernando Pereira
ORIENTADOR: Edson Sidney Figueiredo

Este trabalho pretende explorar uma nova maneira de estudar geometria no Ensino Médio, usando a física e os origamis. Nesse mister, recorre-se aos ensinamentos dos mestres clássicos Arquimedes e Euclides para estabelecer o ponto de partida do pensamento matemático relacionado ao estudo dos Centros de Gravidade das Figuras Planas e dos Pontos Notáveis do Triângulo. Caminhando sobre a linha do tempo do conhecimento somam-se as contribuições do matemático francês Hadamard e as práticas atuais do ensino da geometria em sala de aula, tentando fazer uma breve comparação entre as técnicas clássicas e as modernas. Preparando a atividade interdisciplinar, faz-se um rápido estudo das origens das dobraduras em papel, chamadas origami no Japão e papiroflexia no ocidente. Posteriormente, os Axiomas de Huzita-Hatori são apresentados em termos matemáticos. O conceito físico de Centro de Gravidade é adicionado para servir de catalizador da curiosidade dos estudantes para encararem a geometria como uma ciência que está presente no seu cotidiano. Finalmente, o estudo dos Centros de Gravidade dos Planos e dos Pontos Notáveis do Triângulo é apresentado de duas maneiras diferentes: uma clássica usando régua e compasso para as construções matemáticas e outra lúdica, com uso dos origamis, para fazer o mesmo. Espera-se que professores e alunos percebam que podem se divertir enquanto estudam Matemática. Além disso, espera-se que este trabalho inspire os professores a estimularem os seus alunos a compartilhar o seu conhecimento matemático fora do ambiente de sala de aula.

Palavras-chave: Centro de Gravidade. Pontos Notáveis do Triângulo. Papiroflexia. Origami na Matemática. Ensino de Geometria Plana. Matemática dos Axiomas de Huzita-Hatori

ABSTRACT

ON THE EQUILIBRIUM OF PLANES AND THE TRIANGLE'S NOTABLE POINTS: ARCHIMEDES, EUCLID, HUZITA AND HATORI WORKING TOGETHER

AUTHOR: Luiz Fernando Pereira
ADVISOR: Edson Sidney Figueiredo

This paper aims to explore a new way to study geometry during the High School, using physics and origami. We use classical works of Archimedes and Euclid to rise the mathematical way to study the properties of the plane figures' center of mass and the triangle's notable points. Walking on the knowledge timeline we add some contributions made by the french mathematician Hadamard and modern ways to teaching geometry at school. In fact, we try to compare old and modern classroom practices. Then, we present some aspects about the origin of origami in Japan and paperfolding in western contries. After, we talk about Huzita-Hatori Axioms in mathematical terms. In order to use the natural young people curiosity about things we show the physical center of mass concept and argue about the geometry usefulness in the real world. Finally, we present how its possible to work in two diferente ways to find the plane figures' center of mass and the triangle's notable points: the classical way, using a straight edge and a compass for the mathematical constructions and the funny way, using origami to do the same. All of these will be done looking foward teachers and students realize that's possible to have good time while they are studing Mathematics. We also hope this work may inspire teachers to encourage their students to share mathematical knowlegmente outside the school.

Keywords: Center of Mass. Triangle's Notable Points. Paper Folding. Mathematical Origami. Teaching Plane Geometry. Huzita-Hatori Axioms on Mathematical Words.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	VIDA E OBRA DE ARQUIMEDES	14
3	SOBRE O EQUILÍBRIO DOS PLANOS - LIVRO I¹	22
4	PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO	40
4.1	INCENTRO.....	42
4.1.1	Definições	42
4.1.2	Proposta de Euclides	43
4.2	CIRCUNCENTRO.....	44
4.2.1	Definições	44
4.2.2	Proposta de Euclides	45
4.3	ORTOCENTRO.....	47
4.3.1	Definições	47
4.3.2	Proposta de Hadamard	48
4.3.3	Proposta de Neto (2013)	49
4.4	BARICENTRO.....	49
4.4.1	Definições	49
4.4.2	Proposta de Hadamard	50
5	DOBRADURAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA	54
5.1	ORIGAMI X PAPIROFLEXIA.....	55
5.2	ORIGAMI NA MATEMÁTICA.....	58
5.3	OS AXIOMAS DE HUZITA-HATORI E A GEOMETRIA PLANA.....	61
5.3.1	Primeiro Axioma de Huzita (1ºAH)	63
5.3.2	Segundo Axioma de Huzita (2ºAH)	63
5.3.3	Terceiro Axioma de Huzita (3ºAH)	64
5.3.3.1	<i>Se os segmentos forem paralelos</i>	64
5.3.3.2	<i>Se os segmentos forem concorrentes</i>	65
5.3.4	Quarto Axioma de Huzita (4ºAH)	65
5.3.5	Quinto Axioma de Huzita (5ºAH)	66
5.3.6	Sexto Axioma de Huzita (6ºAH)	67
6.3.6.1	<i>Se os segmentos forem paralelos</i>	68
6.3.6.2	<i>Se os segmentos forem concorrentes</i>	68
5.3.7	Sétimo Axioma de Huzita-Hatori (7ºAHH)	68
6	CENTRO DE GRAVIDADE DAS FIGURAS PLANAS E PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO (RÉGUA E COMPASSO X ORIGAMI) 70	
6.1	ABORDAGEM CLÁSSICA: CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO.....	71
6.1.1	Centro de Gravidade (CG) das Figuras Planas Retilíneas – Baricentro (G)	71
6.1.1.1	<i>Centro de Gravidade dos Triângulos</i>	73
6.1.1.1.1	Construção do triângulo.....	73
6.1.1.1.2	Construção das medianas.....	78
6.1.1.1.3	Construção do Baricentro.....	81
6.1.1.2	<i>Centro de Gravidade dos Paralelogramos</i>	82
6.1.1.2.1	Construção do paralelogramo.....	82
6.1.1.2.2	Construção do Baricentro.....	86
6.1.1.3	<i>Importância do Centro de Gravidade</i>	87
6.1.2	Circuncentro do Triângulo (C)	88

6.1.3	Incentro do Triângulo (\mathcal{I})	88
6.1.4	Ortocentro do Triângulo (\mathcal{H})	89
6.2	ABORDAGEM LÚDICA: ORIGAMI	90
6.2.1	Centro de Gravidade (CG) das Figuras Planas Retilíneas – Baricentro (\mathcal{G})	90
6.2.1.1	<i>Centro de Gravidade dos Triângulos</i>	90
6.2.1.2	<i>Centro de Gravidade dos Paralelogramos</i>	91
6.2.2	Circuncentro do Triângulo (\mathcal{C})	92
6.2.3	Incentro do Triângulo (\mathcal{I})	93
6.2.4	Ortocentro do Triângulo (\mathcal{H})	94
6.3	SUGESTÕES PARA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO	95
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	98
	REFERÊNCIAS	100
	APÊNDICE A – ATIVIDADE DIDÁTICA SUGERIDA - Produto Educacional	104

INTRODUÇÃO

Embora possa causar surpresa em muitas pessoas, é possível falar em geometria na pré-história: não uma geometria alicerçada em conceitos definidos, mas uma geometria que é o resultado da expressão simbólica dos humanos daquela época e que resistiu ao tempo gravada nas cavernas. No que tange à tecnologia, também a era pré-histórica nos presenteia com artefatos de corte feitos em pedra cuja forma é bem próxima dos triângulos. Assim, é possível garantir que a matemática e, em particular a geometria, fazem parte da vida dos homens desde os primórdios de sua gênese (Martins, 2016; Blasco e Peris, 2014).

Ao longo dos séculos o conhecimento humano progrediu, as formas de analisar o mundo e explicar seu comportamento se diversificaram, mas todos nós continuamos envolvidos em um universo de formas geométricas singulares. De fato, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz no capítulo “Os Campos de Experiências” a constatação de que desde cedo as crianças estão imersas em campos de espaços e tempo diferentes, tendo a necessidade e curiosidade de explorar o mundo físico ao seu redor. Nessas experiências se deparam com noções e grandezas que posteriormente serão explicadas pela matemática (contagem, ordenação, reconhecimento de formas geométricas, etc.). Nos capítulos posteriores da BNCC a geometria aparece como uma das competências básicas a serem desenvolvidas em todas as etapas da Educação Básica por envolver o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos que ajudarão a resolver problemas do mundo físico em muitas áreas do conhecimento.

Há estudos que comprovam que a geometria normalmente é ensinada nas escolas ao final do ano letivo, quase como um assunto de menor importância, o que acaba formando estudantes com poucas habilidades para lidar com as questões geométricas do mundo que os cerca. Embora existam várias causas que concorrem para esse comportamento, é perceptível que lacunas na formação dos professores são uma das principais razões para a manutenção da situação (Rogenski e Pedroso, 2011).

A proposta deste trabalho foi organizada buscando reunir em um único texto alguns conceitos que normalmente aparecem fragmentados ao longo dos programas desenvolvidos na escola e servir de fonte de consulta e inspiração para os educadores que pretendem tornar o ensino aprendizagem de Matemática uma tarefa mais agradável para os alunos. Nesse sentido o objeto de estudo desta dissertação é trabalhar com os conceitos clássicos da geometria de Euclides e Arquimedes, comparar as construções propostas pelos mestres com as que hoje são ensinadas na sala de aula e verificar se é possível tornar a tarefa de ensinar geometria mais

divertida e atrativa com a contribuição de alguns conceitos físicos como o centro de gravidade e a manipulação de figuras geométricas na forma de origamis. Em suma, trazer Arquimedes e Euclides para a sala de aula e manipular a geometria para localização dos pontos notáveis do triângulo com destaque para o centro de gravidade das figuras planas.

Nesse sentido o trabalho está organizado em sete capítulos incluindo a introdução e as considerações finais.

No Capítulo 1 é apresentada de forma sintética o objeto do trabalho e a sequência que será adotada para desenvolver a dissertação.

No Capítulo 2 será apresentada uma síntese histórica da vida de Arquimedes e de suas obras uma vez que o Grande Geômetra (como era popularmente conhecido em sua época) foi pioneiro no uso da matemática e da razão para explicar os fenômenos que observava. Além disso, face ao seu trabalho eclético, é autor de muitas definições e princípios que são fundamentais para o desenvolvimento de muitos ramos da pesquisa aplicada moderna.

No Capítulo 3 consta a tradução do Livro I, de O Centro de Gravidade dos Planos, de Arquimedes. A referida tradução é uma produção própria de autor deste trabalho e tem por base a obra *The Works of Archimedes (Os Trabalhos de Arquimedes)*, editado por T.L.Heath, em 1897. Embora seja relativamente fácil achar a relação das obras de Arquimedes em português e algumas traduções de versões em francês da sua obra, não foi encontrada tradução da versão para o inglês editada por Heath. Assim, além da contribuição que a própria tradução representa, é importante salientar que o centro de gravidade de algumas figuras geométricas básicas foi detalhadamente estudado pelo autor clássico.

No Capítulo 4 constam parcelas das contribuições dos grandes mestres clássicos Arquimedes e Euclides para o estudo dos pontos notáveis do triângulo, com ênfase no centro de gravidade. As técnicas de construção com régua e compasso sugeridas pelos matemáticos clássicos são acompanhadas de versões mais modernas dos mesmos conteúdos apresentadas por Hadamard e Neto em suas obras. Nesse capítulo o leitor poderá recuperar a linha do tempo de desenvolvimento da geometria e ter uma boa base de pesquisa sobre o assunto.

O Capítulo 5 traz um breve histórico da origem das dobraduras em papel conhecidas, no Japão, como origami. Além disso, aborda a possibilidade de usar essa técnica para o estudo da matemática prática que está sendo adotada em muitos países desenvolvidos.

No Capítulo 6 são apresentadas duas maneiras diferentes para a localização do centro de gravidade de figuras planas e dos principais pontos notáveis do triângulo: uma tradicional, com régua e compasso, e outra lúdica, com dobraduras. Nesse capítulo são aproveitados todos os conteúdos apresentados nos precedentes para a construção de uma nova maneira de abordar

a geometria e tornar a atividade de ensino aprendizagem mais divertida e interativa. Ao final do capítulo 6 constam algumas sugestões do autor para aplicação dos temas tratados no Ensino Médio.

Finalmente, no capítulo 7 são apresentadas as considerações finais deste trabalho no sentido de comprovar que é possível encarar a geometria de várias maneiras, que professores e alunos podem se divertir enquanto estudam Matemática e que os alunos podem ser estimulados a compartilhar o seu conhecimento fora do ambiente de sala de aula.

No apêndice consta uma proposta de atividade didática estruturada para aplicação do conteúdo desta dissertação no Ensino Médio. Ciente da dificuldade de transformar as pesquisas acadêmicas em produtos educacionais que facilitem o trabalho do professor em sala de aula a referida atividade didática pode ser encarada como um roteiro a ser seguido ou um recurso didático a ser utilizado pelo docente na preparação de suas aulas de geometria.

2 VIDA E OBRA DE ARQUIMEDES

Segundo Heath (1912) uma biografia de Arquimedes foi escrita por Heracleides (Heráclito) que foi seu contemporâneo na antiguidade. Infelizmente, este trabalho não sobreviveu, e só é conhecido pelas referências a ele consignadas por Eutocius em seus comentários sobre trabalhos de Arquimedes e Apolônio. Muito do que sabemos das vidas dos antigos matemáticos vem de duas fontes principais: os trabalhos ou fragmentos de suas obras encontrados posteriormente e biografias ou histórias escritas sobre eles. Estes últimos textos, muitas vezes, misturam fatos e lendas (Chondros, 2010).

Conforme Chondros (2010) o texto formal mais antigo que trata da vida de Arquimedes (287 a 212 a.C.) pode ser atribuído a Polybius (Políbio) que viveu o período de 203 a 120 a.C. Sua obra “Histórias” discorre sobre as descobertas realizadas no mundo Mediterrâneo, no período de 246 a 146 a.C., época em que viveu Arquimedes. Outro historiador citado é Plutarco que nasceu no primeiro século da era Cristã e escreveu sobre Arquimedes em sua obra “Vidas Paralelas”.

Observa-se que os autores que escreveram sobre Arquimedes viveram anos, décadas ou até séculos após a sua morte e, por conta disso, há várias controvérsias sobre a sua vida e a sua obra. Segundo Berggren (1984) este fato apenas ilustra que os grandes gênios são mais facilmente reconhecidos que entendidos e, não sem razão, suas descobertas intrigam os estudiosos até os nossos dias.

É consenso, no entanto, que Arquimedes nasceu em 287 a.C. na Cidade-Estado de Siracusa. Filho do astrônomo Pheidias (Fídias), Arquimedes era um grande representante do que hoje chamamos um “Filósofo Grego Clássico”: foi matemático, físico, astrônomo, inventor, engenheiro e se envolveu nas guerras travadas com os romanos (Ceccarelli, 2014).

De acordo com Heath (1912) Arquimedes passou parte da sua juventude em Alexandria, no Egito, que havia se tornado o centro científico e cultural mais importante da Era Helênica (Chondros, 2010). Nesse período, acredita-se que estudou no *Museum* (da mitologia “a casa das Musas”, as protetoras das artes e da ciência) onde deve ter conhecido Conon de Samos, Eratosthenes (Eratóstenes) e outros herdeiros dos ensinamentos de Euclides.

Chondros (2010) relata que há autores que acreditam que, embora seja certo que Arquimedes tenha conhecido os matemáticos Conon e Erastóstenes, não há evidências de que ele realmente tenha estudado em Alexandria. Argumentam que Arquimedes pode ter recebido os estudos em Siracusa e se correspondido com eles para ajudar nos trabalhos uns dos outros. Nesse sentido, eles teriam criado a primeira rede de correspondências colaborativa de que se

tem notícia, já que o principal método utilizado por Arquimedes, para publicar as suas descobertas, eram as correspondências que ele remetia para aos principais matemáticos de seu tempo. De fato, uma das suas obras mais famosas “O Método”, cujo manuscrito foi redescoberto em 1998 em uma casa de leilões, se tratava de uma correspondência para Erastóstenes (Magnaghi e Assis, 2019). Este fato pitoresco permite conjecturar que Arquimedes e seus amigos, além das outras grandes descobertas e proezas lendárias, tenham sido os precursores das redes virtuais de que dispomos hoje.

Saindo ou não de Siracusa, Arquimedes dedicou sua vida à pesquisa e seu principal objeto de estudo era a Matemática (Heath, 1912). Seus trabalhos estabeleceram um ponto de partida para a geometria plana e espacial, foram pioneiros no uso do conceito de limite e se atribui ao matemático a determinação da primeira aproximação aceitável do valor de π que foi estimada por ele para calcular áreas e volumes de superfícies curvas e de outras formas circulares (Chondros, 2010).

Por ser um gênio para sua época, Arquimedes também é reverenciado como um grande engenheiro e um grande inventor. Porém, para Heath (1912), embora o nome de Arquimedes esteja associado a grandes criações, esses trabalhos eram encarados pelo Geômetra como uma forma divertida de aplicar a matemática. Esta postura desapegada, no entanto, contrastava com a complexidade, aplicabilidade e eficiência alcançada por suas obras.

Arquimedes foi precursor nos estudos do equilíbrio de corpos (planos ou tridimensionais), enunciou diversas leis da hidrodinâmica relacionadas ao equilíbrio de forças e fluabilidade dos corpos, concebeu e trabalhou com o conceito de peso específico e contribuiu para o entendimento do funcionamento de pelo menos três dos cinco equipamentos conhecidos na antiguidade: guincho, polia, alavanca, cunha e parafuso. Seus inventos tais como catapultas gigantes, guindastes com jogos de polias e alavancas permitiram demonstrar a grande vantagem de aplicar estes mecanismos para suplantar as dificuldades dos construtores e militares de sua época (Chondros, 2010). A Figura 1 mostra um grupo de turistas operando um sistema para içamento de cargas semelhante aos que foram criados por Arquimedes na antiguidade.

Além disso, ele sistematizou o projeto de máquinas e o estudo de suas funções (Chondros, 2010). Ainda que não tenha inventado a alavanca e seu uso, há consenso de que Arquimedes foi o primeiro pesquisador a explicar detalhadamente as condições para seu emprego e apresentar uma regra matemática que explicasse as leis de equilíbrio que regem o seu funcionamento. Conforme relatado por Pappus, enquanto discursava sobre o emprego das

alavancas ele teria pronunciado a famosa sentença: “Dê-me um ponto de apoio e eu poderei mover a Terra” (Ceccarelli, 2014).

Figura 1 – Turistas operam um sistema de içamento de cargas semelhante ao de Arquimedes



Fonte: (Internet. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Capstan_\(nautical\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Capstan_(nautical)) . Acesso em: 18 abr. 2020)

Uma declaração deste tipo não passaria despercebida na Grécia antiga. Como curiosidade, conta-se que o Rei Hieron pediu ao Geômetra que desse uma demonstração de como seria possível mover um grande peso com uma pequena força. Plutarco relata que Arquimedes aceitou o desafio e o desenvolveu da seguinte forma: escolheu o maior navio no arsenal do rei, mandou carregá-lo totalmente e adicionou vários passageiros; convidou muitos curiosos para empurrarem a embarcação que, embora motivados, não conseguiram deslocar a nau; Arquimedes então levantou-se e puxou um cabo que estava preso ao veleiro, passando por um sistema de polias. O navio deslocou-se suavemente para surpresa de todos. Depois o próprio rei foi convidado a tentar a proeza e ele também conseguiu mover a embarcação sem grande esforço. A história que se conta é que o Rei declarou que, daquele dia em diante, todos deveriam acreditar em qualquer coisa que Arquimedes falasse (Heath, 1912).

No campo da astronomia, ciência que aprendeu com o pai, Arquimedes destacou-se por suas observações precisas sendo uma fonte de informações para os estudiosos da época. Segundo Chondros (2010) Pappus relata que Arquimedes escreveu um roteiro detalhado para construção de mecanismos para maquetes de sistemas planetários e para fabricação de esferas o que era uma tarefa muito complicada em seu tempo. De acordo com Heath (1912), Cícero relata que viu o modelo do sistema solar produzido por Arquimedes e que ele simulava o

movimento do Sol, da Lua e mais cinco planetas. O equipamento era tão preciso que permitia verificar os eclipses do Sol e da Lua.

Segundo Ceccarelli (2014) o “Parafuso de Arquimedes” foi a primeira bomba hidráulica manual funcional e pode ser considerado sua invenção mais relevante. Este artefato simples tinha uma espiral metálica, instalada no interior de um cilindro, e permitia a elevação de um fluido entre dois níveis distintos sem a necessidade de realização de separação de sólidos em suspensão. O equipamento teria sido inventado por Arquimedes, no Egito, para possibilitar a irrigação de plantações. Posteriormente foi adaptado para extração de azeite, bomba de porão de navios e muitas outras aplicações no mundo antigo (Chondros, 2010). Hoje em dia, transformado na Turbina de Arquimedes, é objeto de estudo de pesquisadores podendo ser empregado, entre outras possibilidades, para produção de energia elétrica em países em desenvolvimento (Siswantara et All, 2018). Além disso, o parafuso pode ser considerado o antepassado das brocas helicoidais, brocas escalonadas e alguns pesquisadores afirmam que, com esta montagem, Arquimedes também inventou o parafuso sem fim (Chondros, 2010).

No que se refere a arte da guerra, Arquimedes trabalhou junto com Erastóstenes para aumentar o poder e a precisão das catapultas gregas. Obtiveram tanto sucesso nessa empreitada que os romanos temiam mais que tudo as defesas de Siracusa instaladas por eles (Heath, 1912; Ceccarelli, 2014). Além disso, há relatos de que ele tenha evitado um ataque romano a sua cidade natal usando um arranjo com múltiplos espelhos de aço polido que, ao refletir e concentrar os raios solares sobre os navios, acabaram por incendiá-los. Esses eventos, logicamente, carecem de comprovação (Chondros, 2010). Consta que Marcus Claudius Marcellus, o grande General romano que conduziu a campanha vitoriosa sobre Siracusa, na Segunda Guerra Púnica, muitas vezes dirigiu-se aos seus engenheiros dizendo que seria uma façanha vencer os gregos pois o geômetra Arquimedes, sozinho, era capaz de virar ou incendiar seus navios e lançar tantas flechas sobre eles que parecia ter centenas de braços, uma verdadeira criatura mitológica. Não por acaso, o general desistiu das campanhas de assalto e optou por um grande cerco para vencer a resistência grega (Heath, 1912).

As façanhas ou esquisitices atribuídas a Arquimedes permitem inferir que ele foi um excêntrico em seu tempo, estando muito mais afeito às questões científicas que propriamente às regras de comportamento ou mesmo suas necessidades fisiológicas. Alguns pesquisadores asseguram que ele se concentrava tanto em seus estudos abstratos que poderia esquecer de comer ou dormir. (Heath, 1912).

Uma história pitoresca atribuída a Arquimedes é bastante conhecida: enquanto se banhava o Geômetra divagava, absorto em pensamentos tentava responder uma questão

levantada pelo rei Hieron – seria possível descobrir se uma coroa que ganhara era feita totalmente de ouro ou se tinha alguma parte em prata? Trabalhando empiricamente com o conceito de peso específico Arquimedes descobriu a solução e consta que saiu correndo pela rua, totalmente nú, gritando a célebre palavra “Eureka!!” que, em grego, significa “Descobri!!” (Heath, 1912; Batalha e Bento, 2007).

Segundo Ceccarelli (2014) as invenções de Arquimedes eram conhecidas pelos historiadores desde os tempos antigos enquanto seus textos permaneceram praticamente esquecidos por toda a Idade Média. Como Arquimedes não alcançou, em seu tempo, o mesmo reconhecimento de Euclides, considerado o pai da geometria, seus textos, espalhados pelas diversas cartas que escreveu para os matemáticos de sua época, levaram muito tempo para ser reunidos. Na verdade, especula-se que muitas de suas cartas tenham sido perdidas ou destruídas nas oportunidades em que a biblioteca de Alexandria foi danificada ou pilhada (Chondros, 2010).

Ao que tudo indica, os textos originais não sobreviveram e as obras da antiguidade foram preservadas principalmente nas cópias produzidas no Império Bizantino. Consta que os arquitetos responsáveis pela construção da Basílica de Santa Sofia, em Constantinopla, Isidoro de Mileto e Antêmio de Trales reuniram diversos trabalhos de Arquimedes numa obra publicada no séc.VI. Esta obra, contudo, também foi perdida (Chondros, 2010).

Embora existam relatos de que o Arcebispo de Corinto, William de Moerbeke, tenha feito algumas traduções de manuscritos gregos para o latim, no séc.XIII, suas obras e os manuscritos originais desapareceram nos séculos seguintes. Assim, a primeira publicação em latim conhecida das obras de Arquimedes foi publicada em 1544, e foi produzida por Jacobus de Sancto Cassiano Cremonensis sob encomenda do Papa Nicolau V (Chondros, 2010)

As traduções dos trabalhos de Arquimedes ao longo do séc.XVI contribuíram para a difusão do seu trabalho e influenciaram muitos físicos e matemáticos que viveram nos séculos seguintes incluindo Johannes Kepler (1571-1630), Galileu Galilei (1564-1642), Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat (1607-1665). Alguns autores defendem que Arquimedes (287 a 212 a.C.), Isaac Newton (1643-1727) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) podem ser considerados os maiores matemáticos de todos os tempos. As melhores traduções dos trabalhos de Arquimedes para idiomas modernos foram escritas no começo do séc.XX respectivamente por Johan Ludwig Heiberg (1015) e Thomas Little Heath (1912) (Chondros, 2010).

O compêndio tradicionalmente conhecido como “Os Trabalhos de Arquimedes” reúne os seguintes textos (Heath, 1912; Ceccarelli, 2014):

- Sobre o equilíbrio dos planos I;

- Quadratura da parábola;
- Sobre o equilíbrio dos planos II;
- Sobre a esfera e o cilindro, I e II;
- Sobre espirais;
- Sobre conoides e esferoides;
- Sobre corpos flutuantes, I e II;
- Medidas do círculo;
- O contador de areia;
- O Método.

Em poucas palavras, pode-se dizer que Arquimedes pretendia discutir com seus correspondentes os seguintes assuntos (Heath, 1912; Chondros, 2010; Ceccarelli, 2014):

- Os centros de gravidade dos planos – discutir as condições de equilíbrio de figuras planas sujeitas a diversas forças e propor um enunciado particular para a Lei da Alavancas;

- Quadratura da parábola – talvez a primeira correspondência entre Arquimedes e Dositheus, após a morte de Conon - calcular a área de figuras geométricas, considerando a possibilidade de dividi-las em vários segmentos de parábolas e usar a soma de séries geométricas para obter o resultado;

- Sobre o equilíbrio dos planos II – discutir a proposição de que o centro de gravidade de figuras côncavas está em seu interior;

- Sobre a esfera e o cilindro I e II – correspondência entre Arquimedes e Dositheus - provar relações entre áreas e volumes de esferas e cilindros relacionados entre si pelos raios e alturas das figuras planas que são as suas projeções. Consta que o matemático pediu que uma escultura de uma esfera inscrita em um cilindro fosse colocada em seu túmulo para expor ao mundo aquela que ele achava a sua principal contribuição (a esfera tem área e volume exatamente iguais a dois terços do cilindro em que está perfeitamente inscrita);

- Sobre espirais – correspondência entre Arquimedes e Dositheus - discorre sobre o deslocamento de um ou mais pontos sobre curvas, particularmente sobre uma espiral que ficou conhecida como “A Espiral de Arquimedes”;

- Sobre conoides e esferoides - correspondência entre Arquimedes e Dositheus – discutir relações entre áreas e volumes de conoides, esferoides e paraboloides seccionados ou não por planos diversos. Nesse trabalho Arquimedes usou alguns resultados dos estudos de Euclides e Aristeu;

- Sobre corpos flutuantes I e II – discutir as condições de equilíbrio de corpos sólidos dispostos em recipientes com líquidos. Nesse trabalho Arquimedes tangencia a definição de

peso específico e enuncia alguns princípios que são basilares no estudo da hidrostática. O conhecido Teorema de Arquimedes, segundo o qual “um corpo totalmente ou parcialmente imerso em um líquido sofre um impulso em sentido contrário igual ao peso do volume de fluido deslocado”, decorre da conjugação das proposições 5 e 6 do livro I.

- Medidas do Círculo – discutir as relações entre a área do círculo, seu raio e o comprimento da circunferência. Nesse texto, Archimedes propõe uma estratégia para cacular a razão entre o perímetro e o raio de uma circunferência, valor hoje representado pela letra π . Trabalhando com aproximações sucessivas compara o perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos à mesma circunferência. Ao comparar os valores para os polígonos de 96 lados, conclui que o valor de π deve estar entre $3\frac{10}{71}$ (3,1408) e $3\frac{1}{7}$ (3,1421);

- O contador de areia – cria um sistema de medidas para contar quantos grãos de areia cabem no universo. Estuda grandezas astronômicas relacionadas e faz estimativas do tamanho da Terra, do Sol e da Lua além de estimar a distância entre os eles;

- O Método – correspondência entre Arquimedes e Erastóstenes – discutir como calcular áreas e volumes de figuras geométricas após sua divisão em pequenas partes. Segundo alguns autores este tratado apresenta as primeiras noções do cálculo infinitesimal.

A coleção de trabalhos de Arquimedes jamais será totalmente conhecida, porém, há relatos de que pelo menos 31 deles sobreviveram, total ou parcialmente. Entre suas contribuições mais relevantes para a ciência matemática os pesquisadores relatam que ele foi o primeiro pesquisador grego a estudar as curvas representativas do deslocamento de objetos móveis, essa análise é descrita no trabalho “Sobre Espirais” e materializada na curva batizada de “Espiral de Arquimedes”. No campo de geometria plana, três trabalhos sobreviveram – Medidas do Círculo, Quadratura da Parábola e Sobre Espirais – neles o Geômetra trabalha métodos de aproximação e propõe a primeira aproximação aceitável da razão π . No campo da geometria espacial, deixou os trabalhos “Sobre a esfera e o cilindro” e “Sobre conoides e esferoides” e consta que ele era fascinado pela demonstração na qual provou que a relação entre o volume da esfera e o cilindro em que ela está perfeitamente inscrita é de 2 para 3.

As circunstâncias da morte de Arquimedes são tão intrigantes quanto os relatos de seus feitos e consta que ele morreu tal como viveu: absorto em considerações matemáticas (Heath, 1912). Sabe-se que Arquimedes foi morto por um soldado romano, durante a Segunda Guerra Púnica (218 a 201 a.C.), chamada de a Grande Guerra Mundial do Mundo Clássico, depois de um longo cerco a cidade de Siracusa (Chondros, 2010).

Embora o General Marcellus tivesse dado ordens expressas para que ele fosse poupado, o comportamento controverso do matemático pode ter decidido seu destino: há relatos de que, em plena guerra, ele era capaz de desenhar figuras geométricas no chão empoeirado ou distrair-se com alguma demonstração matemática (Heath, 1912). Entre tantas lendas contadas a seu respeito Heath (1912) enumeram-se pelo menos três relacionadas a sua morte:

- a versão mais simples do ocorrido defende que, alheio ao tumulto que se seguiu à queda da cidade, Arquimedes estava observando alguns desenhos no chão quando foi encontrado, e morto, por um soldado que não o conhecia;

- a versão mais fantasiosa informa que o Geômetra não sabia da queda da cidade e estava trabalhando na solução de algum problema ou demonstração quando foi encontrado por um soldado. O militar ordenou que ele o acompanhasse e Arquimedes se recusou a fazê-lo. Depois de muita argumentação, ameaças, brandir de espadas e pedidos de mais algum tempo para não deixar um trabalho incompleto o soldado, irritado, teria sacrificado o geômetra;

- a versão mais crível descreve que Arquimedes, ciente da queda das defesas, reuniu seus trabalhos, ferramentas, artefatos e se deslocava para encontrar Marcellus quando foi abordado por um grupo de soldados. Estes, achando que ele transportava ouro e outras preciosidades o mataram para pilhar seus pertences.

Qualquer que tenha sido a situação que vitimou Arquimedes, é consenso que ele faleceu em 212 a.C. e, conforme relata Plutarco, no dia de sua morte, ninguém ficou mais consternado que o General Marcellus comandante do exército romano vencedor da batalha de Siracusa (Heath, 1912).

Os estudos de Arquimedes permitiram um grande progresso no entendimento de como as coisas funcionam no mundo real. Entre tantas honrarias póstumas o mestre grego ganhou o título honorífico de “Pai da Ciência Experimental” pois, além de discutir e apresentar muitos dos princípios básicos das ciências, ele também os testou em um processo formal de tentativas e erros. Seus trabalhos contêm um conjunto robusto de princípios que são base para o desenvolvimento de muitos ramos da engenharia e foram pioneiros no uso da matemática e da razão para explicar os fenômenos que observava.

3 SOBRE O EQUILÍBRIO DOS PLANOS - LIVRO I¹

Segundo informa Heath (1912), Arquimedes postulou:

P1. Pesos iguais a distâncias iguais de um ponto estão em equilíbrio e pesos iguais, a distâncias diferentes, não estão em equilíbrio e o sistema se inclina em direção ao peso que está mais distante;

P2. Num sistema com dois pesos que está em equilíbrio, se algo for adicionado a um dos lados eles não ficarão mais equilibrados e o conjunto se inclinará em direção ao peso que foi aumentado;

P3. Da mesma forma, se algo for tirado de algum dos pesos, eles não ficarão em equilíbrio e o sistema se inclinará em direção ao peso que não foi reduzido;

P4. Os centros de gravidade² de figuras planas iguais e semelhantes coincidem quando elas são superpostas;

P5. Em figuras semelhantes os centros de gravidade estarão numa posição similar. Assim se escolhermos em cada uma um ponto em posição similar e o ligarmos ao centro de massa as linhas resultantes formarão o mesmo ângulo com o lado correspondente da respectiva figura;

P6. Se grandezas estão em equilíbrio em uma dada distância, outras grandezas iguais a elas também estarão em equilíbrio na mesma distância³.

¹ Tradução adaptada da obra *The Works of Archimedes With The Method of Archimedes*. T.L.Heath. 1912. Texto originalmente produzido pelo autor da dissertação;

² Arquimedes não define formalmente o que seria o Centro de Gravidade (CG) de um corpo. Pode-se, no entanto, ter a certeza de que ele trabalhava com a ideia de que o CG seria um ponto por onde o objeto poderia ser apoiado para permanecer em equilíbrio.

Modernamente, o CG é definido na Física como sendo um ponto virtual no qual pode-se considerar que a massa total do corpo esteja concentrada e, portanto, é exatamente nesse ponto que a força peso atua (Beer et al., 2009)

Para determinar a sua localização nas figuras planas Arquimedes admite, sem explicitar, que a distribuição da massa pela área da forma é homogênea e, nesse caso, a tarefa pode ser realizada dividindo a figura em porções de mesma área e, portanto, de mesmo peso. Não por acaso, o Geômetra usa as medianas dos triângulos e as diagonais dos paralelogramos como eixos onde o CG precisa estar.

No caso de distribuições lineares ele propõe uma espécie de gangorra em que o apoio do eixo de rotação estaria no CG e este seria a origem de um sistema onde o somatório do produto das massas pelas distâncias ao CG seria zero.

³ Johnson (1960) propõe que a localização do Centro de Gravidade (G) de uma distribuição finita de massas sobre um plano pode ser obtida da seguinte forma:

- admita que $m_1, m_2 \dots m_n$ sejam, respectivamente, as massas concentradas nos pontos $p_1, p_2 \dots p_n$ de um plano;
- escolha duas retas r_1 e r_2 do plano, concorrentes entre si;
- admita que $d_1, d_2 \dots d_n$ sejam, respectivamente, as distâncias dos pontos $p_1, p_2 \dots p_n$ a reta r_1 ;
- admita que $D_1, D_2 \dots D_n$ sejam, respectivamente, as distâncias dos pontos $p_1, p_2 \dots p_n$ a reta r_2 ;

Então, as distâncias do CG às retas r_1 e r_2 , respectivamente, d_G e D_G , serão calculadas pela média geométrica das distâncias das massas a cada reta, usando a própria massa como peso. Ou seja:

$$d_G = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2 + \dots + m_n d_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad \text{e} \quad D_G = \frac{m_1 D_1 + m_2 D_2 + \dots + m_n D_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Assim, o CG estaria na intersecção das paralelas a cada reta distando d_G e D_G de r_1 e r_2 , respectivamente.

P7. Em qualquer figura côncava o centro de gravidade estará em seu interior.
Com base nos postulados provou as seguintes proposições:

PROPOSIÇÃO 1

Pesos em equilíbrio à mesma distância em relação a um ponto são iguais.

Prova: Se eles são diferentes, tire do maior a diferença entre os dois. Os pesos restantes não estarão em equilíbrio (P3), o que é um absurdo (P1).

Assim, os pesos não podem ser diferentes.

PROPOSIÇÃO 2

Pesos diferentes a uma mesma distância de um ponto não estarão em equilíbrio e o sistema se inclinará para o lado do mais pesado.

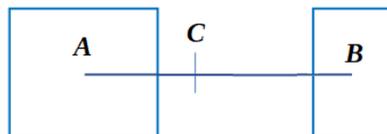
Prova: Tire do maior peso a diferença entre os dois. Os pesos remanescentes estarão em equilíbrio (P1). Então, se adicionarmos novamente o peso retirado, os pesos não estarão em equilíbrio e se inclinarão para o lado do mais pesado (P2).

PROPOSIÇÃO 3

Pesos diferentes estarão em equilíbrio a distâncias diferentes e o maior peso estará numa distância menor.

Sejam A e B dois pesos diferentes, com A maior que B, em equilíbrio em relação ao ponto C quando colocados às distâncias AC e BC, conforme representado na Figura 2 – Arranjo de Arquimedes. Então, AC será menor que BC.

Figura 2 – Arranjo de Arquimedes para Proposição 3



Fonte: (HEATH, 1912, p.190)

Prova: Se \overline{AC} não for menor que \overline{BC} retire de A o peso (A-B). Então os pesos remanescentes se inclinarão em direção a B (P3). Mas isso é impossível pois:

- pela Proposição 1: se $\overline{AC} = \overline{BC}$, então os pesos iguais estarão em equilíbrio; ou

- pela Proposição 2: se $\overline{AC} > \overline{BC}$, os pesos irão se inclinar em direção a A, que está a uma distância maior (P1).

Assim, $\overline{AC} < \overline{BC}$.

Reciprocamente, se os pesos estão em equilíbrio e, $\overline{AC} < \overline{BC}$, então $A > B$.

PROPOSIÇÃO 4

Mesmo que os centros de gravidade de dois pesos iguais não estejam em posição similar, o centro de gravidade do sistema formado por eles estará no ponto médio do segmento que une os dois centros de gravidade.

Obs.:

1. Arquimedes admite que o centro de gravidade do sistema está na linha que une os dois centros de gravidade, dizendo que isto havia sido provado anteriormente. A referência, sem dúvidas, remete ao seu trabalho “Sobre Alavancas”, que foi perdido.

2. De posse desta informação provou a Proposição 4, a partir da Proposição 3, por redução ao absurdo.

Uma prova possível:

Seja A o centro de gravidade do Peso A (PA) e B o centro de gravidade do Peso B (PB).

Pela Obs.1, o centro de gravidade do sistema C estará sobre o segmento AB. Assim o arranjo é exatamente o mesmo da Proposição 3.

Nesse caso, pela recíproca se, $\overline{AC} < \overline{BC}$, então, $PA > PB$. Absurdo pois $PA = PB$.

Analogamente, se, $\overline{BC} < \overline{AC}$, então, $PB > PA$. Absurdo pois $PA = PB$.

Assim, se C está entre A e B, \overline{AC} não é menor que \overline{BC} e nem o contrário.

Então, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Logo C é o ponto médio do segmento \overline{AB} .

PROPOSIÇÃO 5

Se três grandezas iguais (A, B e C) têm seus centros de gravidade sobre uma reta e $\overline{AB} = \overline{BC}$, então, o centro de gravidade do sistema formado por elas coincidirá com o centro de gravidade daquela que ocupa a posição central no sistema (B).

A prova segue imediatamente da Proposição 4

Corolário 1. O mesmo enunciado vale para qualquer número ímpar de grandezas iguais se a sua disposição for simétrica em relação àquela que ocupa a posição central e a distância entre dois centros de gravidade consecutivos for a mesma.

Corolário 2. No caso de haver um número par de grandezas com seus centros de gravidade alinhados e posicionados a mesma distância consecutivamente. Se as duas centrais forem iguais, e as demais também forem iguais, duas a duas, e cada par estiver situado a mesma distância das centrais, em sentidos contrários. Então o centro de gravidade do sistema estará situado no ponto médio do segmento que liga os centros de gravidade das duas centrais.

PROPOSIÇÕES 6,7

Duas grandezas, comensuráveis⁴ (Proposição 6) ou incomensuráveis⁵ (Proposição 7), estão em equilíbrio a distâncias reciprocamente proporcionais às suas magnitudes.

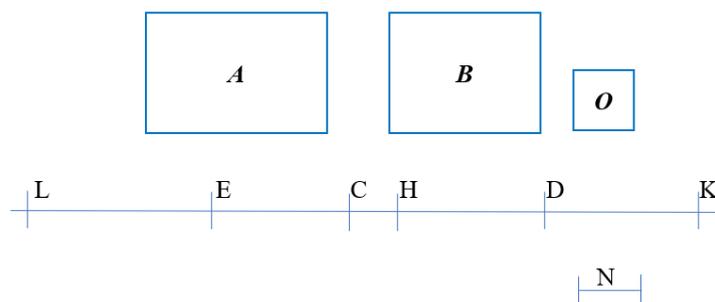
*I. Supondo que as grandezas **A**, **B** sejam comensuráveis*

Admita que **A** e **B** sejam os seus centros de gravidade, que \overline{DE} seja um segmento de reta e que o ponto **C** pertença a \overline{DE} tal que: $\frac{A}{B} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}$

Para provar a Proposição 6, é preciso provar que:

Se **A for colocado sobre o ponto **E** e **B** sobre o Ponto **D**, então, o centro de gravidade do sistema estará localizado sobre **C**.**

Figura 3 – Equilíbrio de grandezas comensuráveis



Fonte: (HEATH, 1912, p.192)

Prova:

1. Como **A** e **B** são comensuráveis, então \overline{DC} e \overline{CE} também o serão;
2. Assim, existirá o segmento **N** do qual \overline{DC} e \overline{CE} são múltiplos;

⁴ Grandezas Comensuráveis – que são múltiplas de uma mesma unidade (Assis, 2008).

⁵ Grandezas Incomensuráveis – para as quais não é possível encontrar uma unidade da qual ambas sejam múltiplas (Assis, 2008).

3. Marcam-se os pontos K, H e L, sobre a reta suporte de \overline{DE} , tal que, $\overline{DH}=\overline{DK}=\overline{CE}$ e $\overline{EL}=\overline{CD}$;

4. Como: $\overline{CD}=\overline{CH} + \overline{HD}$ e $\overline{DH}=\overline{CE} \rightarrow \overline{CD}=\overline{CE} + \overline{CH}=\overline{EH} \therefore \overline{CD}=\overline{EH}$;

5. Como: $\overline{EL}=\overline{CD}=\overline{EH} \rightarrow E$ é ponto médio de $\overline{LH} \therefore \overline{LH}=2\overline{CD}$;

6. Por construção: D é o ponto médio de $\overline{HK} \therefore \overline{HK}=2\overline{CE}$;

7. Como: \overline{LH} e \overline{HK} são múltiplos pares de N $\rightarrow \overline{LH}$ e \overline{HK} são comensuráveis;

8. Seja O uma grandeza da qual A seja múltiplo de tal forma que: $\frac{A}{O} = \frac{\overline{LH}}{N}$;

9. Por construção: $\frac{A}{B} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}} = 2 \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{LH}}{\overline{HK}}$;

10. Assim: $B=A \cdot \frac{\overline{HK}}{\overline{LH}} = O \cdot \frac{\overline{LH}}{N} \frac{\overline{HK}}{\overline{LH}} = O \cdot \frac{\overline{HK}}{N} \therefore \frac{B}{O} = \frac{\overline{HK}}{N}$

11. Portanto: B é múltiplo de O pois \overline{HK} é múltiplo de N;

12. Assim: O é uma unidade comum entre A e B ;

13. Dividindo \overline{LH} e \overline{HK} em partes iguais a N $\rightarrow \overline{LH} = \alpha N$ e $\overline{HK} = \beta N$, onde α e β são pares;

14. Do item 8: $\frac{A}{O} = \frac{\overline{LH}}{N} = \frac{\alpha N}{N} \therefore A = \alpha O$;

15. Do item 10: $\frac{B}{O} = \frac{\overline{HK}}{N} = \frac{\beta N}{N} \therefore B = \beta O$;

16. Imaginando que fosse possível distribuir cada uma das α partes de A sobre as α partes de \overline{LH} , teríamos um conjunto par de grandezas O distribuído ao longo do segmento \overline{LH} . Portanto, pelo Postulado 1 (P1) o sistema estará em equilíbrio em relação ao ponto médio do segmento \overline{LH} , o qual, pelo Corolário 2, da Proposição 5, também é o centro de gravidade deste conjunto e, por construção, coincide com o ponto E;

17. Analogamente, imaginando que fosse possível distribuir cada uma das β partes de B sobre as β partes de \overline{HK} , teríamos um conjunto par de grandezas O distribuído ao longo do segmento \overline{HK} . Portanto, o sistema estará em equilíbrio em relação ao ponto médio do segmento \overline{HK} , que é o centro de gravidade do conjunto e coincide com o ponto D;

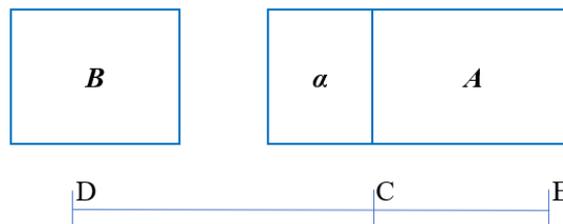
18. Como o sistema construído no item 16 está justaposto ao sistema construído no item 17, pode-se afirmar que os dois formam um conjunto par de grandezas O distribuído ao longo do segmento \overline{LK} . Portanto, pelas mesmas razões elencadas em 16 e 17, o sistema estará em equilíbrio em relação ao ponto médio do segmento \overline{LK} , que é o centro de gravidade do conjunto e coincide com o ponto C;

19. Assim, se o centro de gravidade de grandeza A for colocado sobre o ponto E e o centro de gravidade da grandeza B for colocado sobre o ponto D elas estarão em equilíbrio em relação ao ponto C.

II. Supondo que as grandezas $(A+a)$ e B sejam incomensuráveis

Construa o segmento \overline{DE} e marque o ponto C tal que: $\frac{A+a}{B} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}$

Figura 4 – Equilíbrio de grandezas incomensuráveis



Fonte: (HEATH, 1912, p.192)

Prova:

1. Se o sistema não ficar equilibrado, em relação ao ponto C, quando $(A+a)$ estiver sobre E e B estiver sobre D, então $(A+a)$ é muito grande para ser balanceado por B ou, por outro lado, não é grande o suficiente para garantir o equilíbrio;

2. Suponha que $(A+a)$ é muito grande para que se atinja o equilíbrio;

3. Retire de $(A+a)$ uma quantidade a que torne A e B comensuráveis e que não seja suficiente para que as grandezas fiquem em equilíbrio em relação a C;

4. Como A e B se tornaram comensuráveis e agora $\frac{A}{B} < \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}$ então o sistema não estará em equilíbrio em relação ao ponto C (Proposição 6);

5. Se o segmento \overline{DC} for reduzido até que $\frac{A}{B} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}$, então, pela Proposição 6, o sistema deveria estar em equilíbrio. Porém, isto não poderia acontecer pois, segundo a item 3 da presente prova, a quantidade a , retirada da maior grandeza, ainda mantém o sistema desequilibrado em direção a grandeza A . Assim, a grandeza $(A+a)$ não pode ser tão grande que não seja possível obter o equilíbrio.

6. De maneira similar, pode-se provar que a grandeza $(A+a)$ também não pode ser insuficiente para que se atinja o equilíbrio.

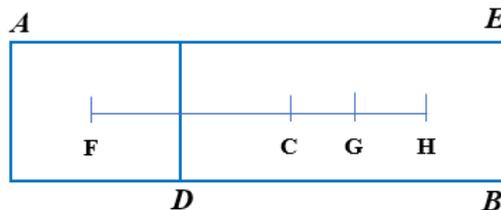
7. Assim, se a grandeza $(A+a)$ não atende as duas situações possíveis que levariam ao desequilíbrio, então pode-se afirmar que o sistema $(A+a)$ e B estarão em equilíbrio em relação ao ponto C .

PROPOSIÇÃO 8

Se AB é uma grandeza com seu centro de gravidade no ponto C e AD é uma porção dessa grandeza com centro de gravidade no ponto F , então o centro de gravidade da porção restante de AB , identificada como DE , estará no ponto G , sobre o segmento \overline{FC} , tal

$$\text{que: } \frac{AD}{DE} = \frac{\overline{GC}}{\overline{CF}}$$

Figura 5 – Centro de gravidade das partes do todo



Fonte: (HEATH, 1912, p.194)

Prova:

1. Se o centro de gravidade da grandeza DE não estiver sobre G , então estará sobre algum ponto H também sobre \overline{FC} .

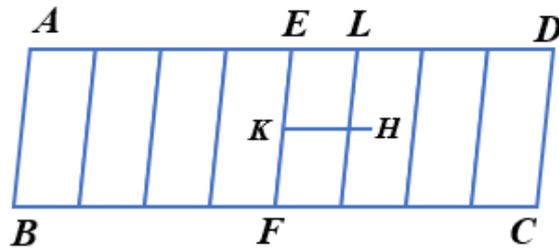
2. Nesse caso, será possível chegar à contradição verificada na prova das Proposições 6 e 7.

PROPOSIÇÃO 9

O centro de gravidade de qualquer paralelogramo está localizado sobre a reta que une os pontos médios de dois lados opostos.

Seja $ABCD$ um paralelogramo, e seja \overline{EF} o segmento que une os pontos médios dos lados AD e BC .

Figura 6 – Centro de gravidade do paralelogramo 1



Fonte: (HEATH, 1912, p.195)

Prova:

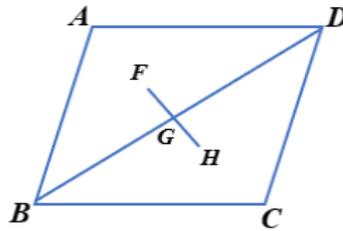
1. Se o centro de gravidade não estiver sobre \overline{EF} , ele estará sobre um ponto H no interior do paralelogramo (P1);
2. Trace \overline{HK} paralelo a \overline{AD} ou \overline{BC} e marque $K = \overline{HK} \cap \overline{EF}$;
3. Divida o segmento \overline{ED} em partes iguais até que o segmento \overline{EL} seja menor que o segmento \overline{KH} ;
4. Trace segmentos paralelos a \overline{AB} ou \overline{DC} por todos os pontos que dividem o segmento \overline{ED} ;
5. Assim, há vários paralelogramos iguais e semelhantes e, conforme P4, os seus centros de gravidade coincidirão se eles forem sobrepostos uns aos outros;
6. Mas também há um número par de grandezas iguais cujos centros de gravidade estão sobre uma mesma reta, em posições equidistantes. Assim, conforme o Corolário 2, da Proposição 5, o centro de gravidade do conjunto estará no ponto médio da linha que une os centros de gravidade dos dois paralelogramos centrais;
7. Porém isso é impossível pois H não pertence a nenhum dos dois paralelogramos centrais;
8. Assim, o centro de gravidade do paralelogramo não pode estar fora do segmento \overline{EF} que é a linha reta que une os pontos médios dos lados AD e BC .

Prova semelhante pode ser feita para os lados AB e DC .

PROPOSIÇÃO 10

O centro de gravidade de um paralelogramo é o ponto de intersecção das suas diagonais.

Figura 7 – Centro de gravidade do paralelogramo 2



Fonte: (HEATH, 1912, p.196)

Prova:

Da Proposição 9, o centro de gravidade do paralelogramo está sobre duas linhas – uma delas une os pontos médios dos lados paralelos AD e BC e a outra une os pontos médios dos lados AB e DC . Ou seja, o centro de gravidade do paralelogramo estará sobre o ponto de intersecção das duas linhas citadas que também é o ponto de intersecção das diagonais.

Prova alternativa:

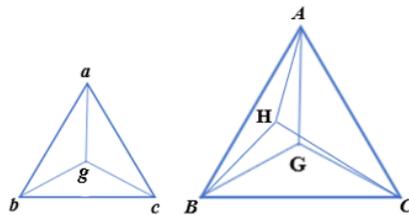
1. Seja $ABCD$ um paralelogramo e o segmento \overline{BD} a sua diagonal;
2. Como os triângulos ABD e CDB são iguais e semelhantes, segundo P4, os seus centros de gravidade irão coincidir se as duas figuras forem sobrepostas;
3. Suponha que F seja o centro de gravidade do triângulo ABD e que G seja o ponto médio do lado BD ;
4. Sobre a reta suporte do segmento \overline{FG} marque H tal que $\overline{FG} = \overline{GH}$;
5. Então, ao sobrepor os triângulos ABD e CDB o ponto F coincidirá com o ponto H ;
6. Assim, de P4, como o centro de gravidade do triângulo ABD , ou seja, o ponto F , coincide com o ponto H , este será o centro de gravidade do triângulo CDB ;
7. Como F e H são os centros de gravidade de dois triângulos iguais, a Proposição 4 garante que o centro de gravidade do sistema formado por eles, ou seja, do paralelogramo, estará sobre o ponto médio do segmento \overline{FH} , isto é, sobre o ponto G ;
8. Como o ponto G é o ponto médio da diagonal BD e, também, é o ponto de intersecção das duas diagonais, então prova-se que o centro de gravidade do paralelogramo é o ponto de intersecção das suas diagonais.

PROPOSIÇÃO 11

Se abc e ABC são dois triângulos semelhantes e g, G são dois pontos em posições similares situados respectivamente em cada um dos triângulos, então, se g é o centro de gravidade do triângulo abc , G será o centro de gravidade de ABC .

Da semelhança: $\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ca}{CA}$

Figura 8 – Centro de gravidade de triângulos semelhantes 1



Fonte: (HEATH, 1912, p.196)

A proposição pode ser provada facilmente pela redução ao absurdo.

Prova:

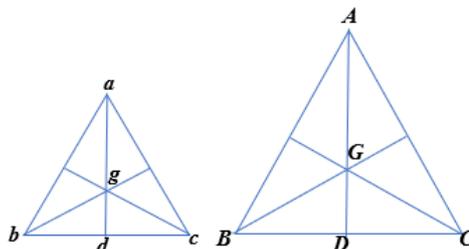
1. Se G não for o centro de gravidade da ABC , então suponha que outro ponto H , em seu interior, o será;

2. De P5, como g e H precisam estar em posições similares nos dois triângulos então os ângulos \widehat{HAB} e \widehat{GAB} precisam ser iguais, o que é um absurdo.

PROPOSIÇÃO 12

Dados dois triângulos semelhantes abc e ABC e os pontos médios dos lados bc e BC , respectivamente, d e D . Se o centro de gravidade do triângulo abc está sobre o segmento \overline{ad} então o centro de gravidade do triângulo ABC estará sobre o segmento \overline{AD} .

Figura 9 – Centro de gravidade de triângulos semelhantes 2



Fonte: (HEATH, 1912, p.197)

Prova:

1. Seja g um ponto sobre \overline{ad} que também é o centro de gravidade do triângulo abc ;
2. Tome G sobre \overline{AD} tal que: $\frac{ad}{ag} = \frac{AD}{AG}$ e trace os segmentos \overline{gb} , \overline{gc} , \overline{GB} e \overline{GC} ;
3. Então, devido à semelhança de triângulos, pode-se garantir que os segmentos \overline{bd} e \overline{BD} são metade dos lados bc e BC , respectivamente, que vale a relação $\frac{ab}{bd} = \frac{AB}{BD}$ e os ângulos abc e ABC são iguais;
4. Assim, os triângulos abd e ABD são semelhantes e pode-se garantir que os ângulos bad e BAD são iguais e valem as relações $\frac{ba}{ad} = \frac{BA}{AD}$ e $\frac{AD}{ad} = \frac{BA}{ba}$;
5. Manipulando a relação do item 2 obtém-se: $\frac{AG}{ag} = \frac{AD}{ad}$;
6. Assim, de 4 e 5: $\frac{AG}{ag} = \frac{AD}{ad} = \frac{BA}{ba}$;
7. Nestas condições, pode-se garantir que os ângulos bag e BAG são iguais;
8. Nesse caso, os triângulos bag e BAG são semelhantes e os ângulos \widehat{abg} e \widehat{ABG} são iguais;
9. Como $\widehat{abd} = \widehat{ABD}$, então $\widehat{gbd} = \widehat{GBD}$;
10. Da mesma forma, são iguais os seguintes ângulos:

$$\widehat{gac} = \widehat{GAC}; \widehat{acg} = \widehat{ACG}; \widehat{gcd} = \widehat{GCD}$$
11. Assim, b e G estão em posições semelhantes nos respectivos triângulos, logo, pela Proposição 11, G é o centro de gravidade do triângulo ABC .

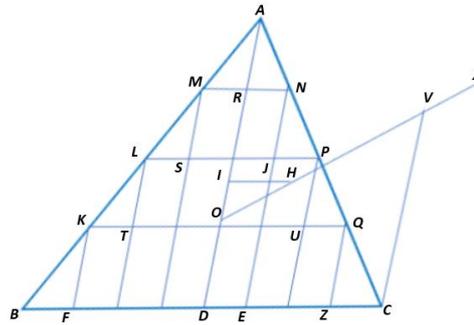
PROPOSIÇÃO 13

Em qualquer triângulo o centro de gravidade está sobre a linha reta que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto⁶.

Seja ABC um triângulo e o ponto D o ponto médio do lado BC (Figura 10). Trace o segmento \overline{AD} . Então o centro de gravidade estará sobre \overline{AD} .

⁶ Em linguagem atual: o centro de gravidade de um triângulo está sobre uma de suas medianas.

Figura 10 – Centro de gravidade e a mediana 1



Fonte: (HEATH, 1912, p.198)

Prova⁷:

1. Admita que o centro de gravidade seja o ponto H e que ele não está sobre \overline{AD} ;
2. Trace \overline{HI} paralelo a \overline{CB} e marque o ponto $I = \overline{HI} \cap \overline{AD}$;
3. Divida o segmento \overline{DC} ao meio sequencialmente até que $\overline{DE} < \overline{HI}$;
4. Divida o segmento \overline{BD} em partes iguais a \overline{DE} ;
5. Pelos pontos em que os segmentos \overline{BD} e \overline{DC} foram divididos, trace paralelas a \overline{AD} e marque os pontos K, L, M e N, P, Q sobre os lados AB e AC , respectivamente;
6. Trace os segmentos $\overline{MN}, \overline{LP}$ e \overline{KQ} os quais serão paralelos ao lado BC ;
7. Assim, foram construídos vários paralelogramos cujos lados opostos são divididos ao meio pelos segmentos $\overline{MN}, \overline{LP}, \overline{KQ}$ e \overline{AD} ;
8. Pelo texto da Proposição 9, o centro de gravidade de cada paralelogramo está sobre o segmento \overline{AD} e, portanto, o centro de gravidade da figura também está sobre o segmento \overline{AD} ;
9. Assim, se um ponto O é o centro de gravidade do conjunto de paralelogramos, então O pertence a \overline{AD} . Trace o segmento \overline{OH} ;
10. Por C trace uma reta paralela a \overline{AD} e marque o ponto V na intersecção com a reta suporte do segmento \overline{OH} ;

⁷ Arquimedes usou as seguintes propriedades para provar a Proposição 13:

i. $\Delta ADC \approx \Delta ARN, \Delta ADC \approx \Delta NJP, \Delta ADC \approx \Delta PUQ$ e $\Delta ADC \approx \Delta QZC$, sempre pelo caso AAA;

ii. $\Delta ARN \equiv \Delta NR_1P \equiv \Delta PR_2Q \equiv \Delta QR_3C$, sempre pelo caso ALA;

iii. A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da relação entre os lados das mesmas

iv. Assim, com base em i:

$$\frac{A(\Delta ARN)}{A(\Delta ADC)} = \frac{AN^2}{AC^2}; \frac{A(\Delta NJP)}{A(\Delta ADC)} = \frac{NP^2}{AC^2}; \frac{A(\Delta PUQ)}{A(\Delta ADC)} = \frac{PQ^2}{AC^2}; \frac{A(\Delta QZC)}{A(\Delta ADC)} = \frac{QC^2}{AC^2}$$

v. Somando membro a membro obtém-se:

$$\frac{A(\Delta ARN) + A(\Delta NJP) + A(\Delta PUQ) + A(\Delta QZC)}{A(\Delta ADC)} = \frac{AN^2 + NP^2 + PQ^2 + QC^2}{AC^2} \quad (\gamma)$$

vi. Invertendo a relação (γ) , obtém-se a relação (1);

11. Então, se n for o número de partes em que o lado AC foi dividido, admitindo que $A(\Delta ADC)$ indica a área do triângulo ADC , valem as relações⁸:

$$\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ARN)+A(\Delta NJP)+A(\Delta PUQ)+A(\Delta QZC)} = \frac{AC^2}{AN^2+NP^2+PQ^2+QC^2} \quad (1)$$

$$= \frac{n^2}{n} \quad (2)$$

$$= \frac{n}{1} = \frac{AC}{AN} \quad (3)$$

12. Analogamente:

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta AMR)+A(\Delta MLS)+A(\Delta LKT)+A(\Delta KBF)} = \frac{AB}{AM} \quad (8)$$

13. Como, $\Delta ABC \approx \Delta AMN$, pelo caso AAA, então:

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} \quad (9)$$

14. Segue que⁹:

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta AMR)+A(\Delta MLS)+A(\Delta LKT)+A(\Delta KBF)+A(\Delta ARN)+A(\Delta NJP)+A(\Delta PUQ)+A(\Delta QZC)} = \frac{AC}{AN} \quad (10)$$

15. Considerando as retas paralelas a \overline{AD} que passam pelos pontos N , P , Q e V pode-se garantir que: $\frac{AC}{AN} > \frac{VO}{OH}$

16. Chamando X um ponto sobre o prolongamento de \overline{OV} , tal que:

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta AMR)+A(\Delta MLS)+A(\Delta LKT)+A(\Delta KBF)+A(\Delta ARN)+A(\Delta NJP)+A(\Delta PUQ)+A(\Delta QZC)} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OH}} \quad (11)$$

⁸ vii. Com base em ii:

$$AN = NP = PQ = QC$$

viii. Com base no item 11 acima:

$$AC = nAN ;$$

ix. Assim, a relação (1) pode ser reescrita como segue:

$$\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ARN)+A(\Delta NJP)+A(\Delta PUQ)+A(\Delta QZC)} = \frac{(nAN)^2}{AN^2+AN^2+AN^2+\dots+AN^2} = \frac{n^2AN^2}{nAN^2} \quad (\delta)$$

x. Simplificando a relação (δ), obtém-se a relação (2);

$$\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ARN)+A(\Delta NJP)+A(\Delta PUQ)+A(\Delta QZC)} = \frac{n^2}{n} \quad (\epsilon)$$

xi. Reescrevendo a relação (δ), obtém-se:

$$\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ARN)+A(\Delta NJP)+A(\Delta PUQ)+A(\Delta QZC)} = \frac{(nAN)(nAN)}{(nAN)AN} = \frac{nAN}{AN} \quad (\zeta)$$

xii. Aplicando a igualdade apresentada no item viii, obtém-se a relação (3):

$$\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ARN)+A(\Delta NJP)+A(\Delta PUQ)+A(\Delta QZC)} = \frac{nAN}{AN} = \frac{AC}{AN}$$

⁹ Das equações (3), (8) e (9) pode-se garantir as seguintes igualdades:

$$\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ARN)+A(\Delta NJP)+A(\Delta PUQ)+A(\Delta QZC)} = \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta AMR)+A(\Delta MLS)+A(\Delta LKT)+A(\Delta KBF)} = \frac{AC}{AN} \quad (\eta)$$

i. Manipulando a primeira igualdade:

$$\frac{A(\Delta ADC)+A(\Delta ABD)}{[A(\Delta ARN)+A(\Delta NJP)+A(\Delta PUQ)+A(\Delta QZC)]+[A(\Delta AMR)+A(\Delta MLS)+A(\Delta LKT)+A(\Delta KBF)]} = \frac{AC}{AN} \quad (\kappa)$$

ii. Como, $A(\Delta ADC) + A(\Delta ABD) = A(\Delta ABC)$, obtém-se a equação (10).

17. Como $A(\triangle ABC)$ é igual a soma das áreas dos paralelogramos e dos triângulos laterais, têm-se:

$$A(\triangle ABC) = A(KFZQ) + A(LTUP) + A(MSJK) + A(\triangle ARN) + A(\triangle NJP) + A(\triangle PUQ) + A(\triangle QZC) + A(\triangle AMR) + A(\triangle MLS) + A(\triangle LKT) + A(\triangle KBF)$$

$$A(\triangle ABC) - [A(\triangle ARN) + A(\triangle NJP) + A(\triangle PUQ) + A(\triangle QZC) + A(\triangle AMR) + A(\triangle MLS) + A(\triangle LKT) + A(\triangle KBF)] = A(KFZQ) + A(LTUP) + A(MSJK)$$

18. Como, por construção, $\overline{XO} = \overline{OH} + \overline{HX}$ então $\overline{XO} - \overline{OH} = \overline{HX}$;

19. Aplicando a seguinte propriedade: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\omega}{\theta} \rightarrow \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\omega - \theta}{\theta}$

com $\alpha = A(\triangle ABC)$, $\beta = A(\text{triângulos laterais})$, $\omega = \overline{XO}$ e $\theta = \overline{OH}$, obtém-se:

$$\frac{A(KFZQ) + A(LTUP) + A(MSJK)}{A(\triangle AMR) + A(\triangle MLS) + A(\triangle LKT) + A(\triangle KBF) + A(\triangle ARN) + A(\triangle NJP) + A(\triangle PUQ) + A(\triangle QZC)} = \frac{\overline{XH}}{\overline{OH}} \quad (12)$$

20. Como, do item 1, o centro de gravidade do $\triangle ADC$ é o ponto H e, do item 9, o centro de gravidade do conjunto de paralelogramos é o ponto O , então, pela Proposição 8, o centro de gravidade do conjunto de triângulos, tomados todos juntos, será o ponto X . Mas isso é impossível pois todos os triângulos estão à esquerda de \overline{OV} ;

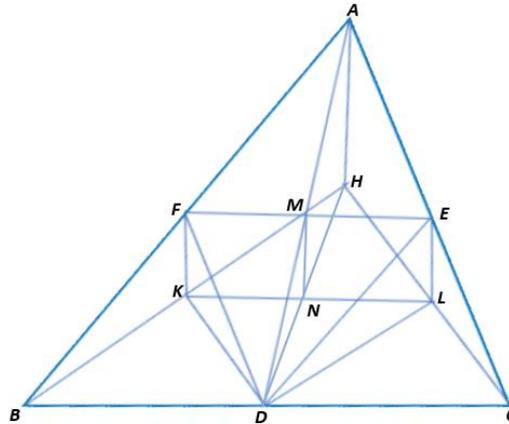
21. Assim, o centro de gravidade do $\triangle ADC$ não pode estar fora de \overline{AD} .

Prova alternativa:

1. Admita que o centro de gravidade seja o ponto H e que ele não está sobre \overline{AD} ;
2. Trace \overline{AH} , \overline{BH} e \overline{CH} ;
3. Marque os pontos E e F , pontos médios dos lados AC e AB , respectivamente;
4. Trace \overline{DE} , \overline{EF} e \overline{FD} e marque o ponto $M = \overline{EF} \cap \overline{AD}$;
5. Trace \overline{FK} e \overline{EL} paralelas a \overline{AH} e marque os pontos $K = \overline{FK} \cap \overline{BH}$ e $L = \overline{EL} \cap \overline{CH}$;
6. Trace \overline{KD} , \overline{HD} , \overline{LD} e \overline{KL} , marque o ponto $N = \overline{KL} \cap \overline{DH}$ e trace o segmento \overline{MN} ;
8. Como \overline{DE} é paralelo ao lado AB ¹⁰, então $\triangle ABC \approx \triangle EDC$;
9. Como $\overline{CE} = \overline{AE}$ e \overline{EL} é paralelo \overline{AH} , então $\overline{CL} = \overline{LH}$;
10. Analogamente, $\overline{CD} = \overline{DB}$, então \overline{BH} é paralelo a \overline{DL} ;

¹⁰ \overline{DE} é base média do $\triangle ABC$

Figura 11 – Centro de gravidade e a mediana 2



Fonte: (HEATH, 1912, p.200)

11. Assim, nos triângulos semelhantes e similarmente posicionados, $\triangle ABC$ e $\triangle EDC$, os segmentos \overline{AH} e \overline{BH} são respectivamente paralelos aos segmentos \overline{EL} e \overline{DL} ;

12. Segue, então, que os pontos H e L estão similarmente posicionados em relação aos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EDC$, respectivamente;

13. Pelo item 1, H é o centro de gravidade do $\triangle ABC$ então, pela Proposição 11, o ponto L é o centro de gravidade do $\triangle EDC$;

14. Analogamente, chega-se à conclusão de que o ponto K é o centro de gravidade do $\triangle FBD$;

15. Como os triângulos $\triangle FBD$ e $\triangle EDC$ são iguais, então pela Proposição 14, o centro de gravidade do conjunto formado por eles é o ponto médio do segmento \overline{KL} , isto é, o ponto N ¹¹.

16. Retirando do $\triangle ABC$ os dois triângulos congruentes ($\triangle FBD$ e $\triangle EDC$) a figura restante será o paralelogramo $AFDE$, assim, pela Proposição 10, o centro de gravidade deste paralelogramo é o ponto M , intersecção das suas diagonais;

17. Então, pela Obs.1, da Proposição 4, resulta que o centro de gravidade do $\triangle ABC$ estará sobre o segmento \overline{MN} ;

¹¹ Do item 9, da prova alternativa, L é o ponto médio de \overline{HC} ;

i. Analogamente, K é o ponto médio de \overline{HB} ;

ii. Portanto \overline{KL} , é base média do $\triangle HBC$ e paralelo a \overline{AB} ;

iii. Como \overline{HD} é mediana do $\triangle HBC$, então $N = \overline{HD} \cap \overline{KL}$, é o ponto médio de \overline{KL} ;

18. Assim, como H , por hipótese, é o centro de gravidade do ΔABC , o segmento \overline{MN} deve passar pelo ponto H . O que é impossível pois \overline{MN} é paralelo a \overline{AH} ¹².

19. Assim, o centro de gravidade do ΔABC não pode estar fora de \overline{AD} .

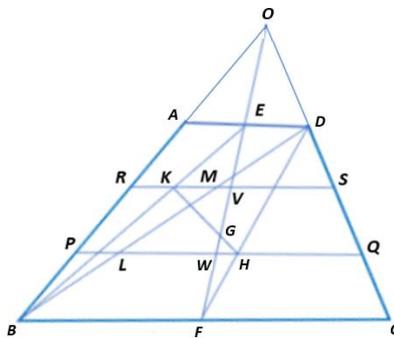
PROPOSIÇÃO 14

Da Proposição 13, segue que o centro de gravidade de qualquer triângulo é o ponto de intersecção das linhas traçadas de dois dos seus vértices até os pontos médios dos lados opostos respectivos¹³.

PROPOSIÇÃO 15

Se AD e BC são os dois lados paralelos de um trapézio $ABCD$, sendo AD o menor, e se AD e BC são divididos ao meio pelos pontos E e F , respectivamente, então o centro de gravidade deste trapézio será o ponto G , sobre \overline{EF} tal que: $\frac{GE}{GF} = \frac{(2BC+AD)}{(2AD+BC)}$

Figura 12 – Centro de gravidade do trapézio



Fonte: (HEATH, 1912, p.201)

¹² Do item 3, da prova alternativa, \overline{FE} é base média do ΔABC , então \overline{FE} é paralelo a \overline{AB} ;

i. Logo, \overline{FE} é paralelo a \overline{KL} e o quadrilátero $FELK$ é um paralelogramo;

ii. Como, do item 16, da prova alternativa, M é ponto médio de \overline{FE} e, de 1.3, N é o ponto médio de \overline{KL} , então \overline{MN} une os pontos médios de dois lados opostos do paralelogramo $FELK$, e, portanto $\overline{MN} \parallel \overline{FK}$;

iii. Como, do item 5, da prova alternativa, $\overline{FK} \parallel \overline{AH}$, conclui-se que $\overline{MN} \parallel \overline{AH}$.

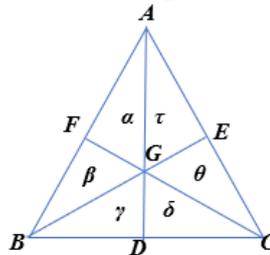
¹³ Em linguagem atual: o centro de gravidade de qualquer triângulo é o ponto de intersecção de duas de suas medianas;

Prova:

1. No trapézio $ABCD$ prolongue os lados BA e CD e marque o ponto O na sua intersecção;
2. Como E e F são os pontos médios dos lados paralelos do trapézio, a reta suporte do segmento \overline{FE} passará pelo ponto O ;
3. Assim, pela Proposição 13, o centro de gravidade do ΔOAD e do ΔOBC estarão sobre o segmento \overline{OF} ;
4. Além disso, pela Proposição 8, pode-se afirmar que o centro de gravidade do trapézio $ABCD$ também estará sobre o segmento \overline{OF} ;
5. Trace o segmento \overline{BD} e o divida em três partes iguais marcando os pontos L e M ;
6. Pelos pontos L e M trace retas paralelas ao lado BC e marque os pontos P e R sobre o lado BA , os pontos W e V sobre \overline{FE} e os pontos Q e S sobre o lado CD , respectivamente;
7. Trace \overline{DF} e \overline{BE} e marque o ponto H sobre \overline{PQ} e o ponto K sobre \overline{RS} , respectivamente;
8. Assim¹⁴, como $\overline{BL} = \frac{1}{3} \overline{BD}$ então $\overline{FH} = \frac{1}{3} \overline{FD}$;
9. Portanto, H é o centro de gravidade do ΔDBC ¹⁵;

-
- ¹⁴ i. Considere o ΔABC , onde D, E e F são os pontos médios dos lados BC, CA e AB , respectivamente;
 ii. Segundo a Proposição 14, G é o centro de gravidade pois é o ponto de intersecção das medianas;
 iii. Sejam h_A a altura relativa ao vértice A e h_G a altura relativa ao vértice G , respectivamente nos ΔABC e ΔGBC ;

Figura 13 – Centro de gravidade e as medianas de um triângulo



Fonte: (autor)

- iv. No ΔGBC , GD é mediana logo $A(\Delta GBD) = A(\Delta GCD)$ então: $\gamma = \delta$;
 - v. Analogamente: $\alpha = \beta$ e $\theta = \tau$;
 - vi. No ΔABC , AD é mediana logo $A(\Delta ABD) = A(\Delta ACD)$ então: $\alpha + \beta + \gamma = \delta + \theta + \tau$;
 - vii. Logo: $2\alpha + \gamma = \gamma + 2\theta$ e $\alpha = \theta$;
 - viii. Analogamente, no ΔBCA , BE é mediana logo $A(\Delta BEA) = A(\Delta BEC)$ e $\alpha = \gamma$;
 - ix. Portanto $A(\Delta ABC) = 6\alpha$ e $A(\Delta GBC) = 2\alpha$;
 - x. Assim: $A(\Delta GBC) = \frac{1}{3} A(\Delta ABC)$;
 - xi. Como: $A(\Delta ABC) = \frac{1}{2} h_A \overline{BC}$ e $A(\Delta GBC) = \frac{1}{2} h_G \overline{BC}$;
 - xii. De 9 e 10: $\frac{1}{2} h_G \overline{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} h_A \overline{BC}$;
 - xiii. Logo: $h_G = \frac{1}{3} \cdot h_A$ e, assim, $\overline{GD} = \frac{1}{3} \overline{AD}$;
 - xiv. Como G é o centro de gravidade do ΔABC , do item 12, conclui-se que, em qualquer triângulo, o centro de gravidade está sobre a mediana, localizado a $\frac{1}{3}$ de seu comprimento em relação ao lado a que ela se liga.
- ¹⁵ Esta situação é facilmente provada à partir da Proposição 14.

10. Analogamente, como $\overline{EK} = \frac{1}{3}\overline{BE}$, então K é o centro de gravidade do ΔADB ;

11. Assim, pode-se dizer que os centros de gravidade do conjunto formado pelos triângulos ΔADB e ΔDBC , ou seja do trapézio $ABCD$, está sobre o segmento \overline{HK} ;

12. Dos itens 4 e 11, pode-se garantir que o centro de gravidade do trapézio $ABCD$ estará na intersecção dos segmentos \overline{OF} e \overline{HK} , identificado na Figura 12 pelo ponto G ;

13. Assim, das Proposições 6 e 7: $\frac{A(\Delta DBC)}{A(\Delta ABD)} = \frac{\overline{KG}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{VG}}{\overline{GW}}$

14. Mas: $\frac{A(\Delta DBC)}{A(\Delta ABD)} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$

15. Assim: $\frac{\overline{VG}}{\overline{GW}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$

16. Portanto: $\frac{(2BC+AD)}{(2AD+BC)} = \frac{(2VG+GW)}{(2GW+VG)} = \frac{\overline{GE}}{\overline{GF}}$

4 PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

Heath (1908) afirma que a observação de De Morgan, publicada em 1848, assegurando que nunca existiu e que, a seu ver, nunca existiria um sistema de geometria, digno do nome, que não se apoiasse nos ensinamentos de Euclides, permanecia verdadeira à época da publicação de seu trabalho. Corroborando esta declaração Campos & Moreira (2018) afirmam que a visão euclidiana serviu de alicerce para o desenvolvimento da matemática moderna e, não sem motivo, a expressão “Matemática Clássica” refere-se ao modelo proposto pelo Geômetra. Nesse sentido, pode-se afirmar que ainda hoje, passados quase dois séculos, a afirmação de De Morgan não pode ser refutada.

Segundo Machado (2016) há indícios de que os mesopotâmios já conheciam algumas relações métricas das figuras de três lados quase um milênio antes dos trabalhos de Pitágoras (570-490 a.C.) e dos importantes estudos de Tales de Mileto (624-546 a.C.). No entanto, nas palavras de Burton (2011), Os Elementos, de Euclides, é a obra mais antiga que sobreviveu ao tempo e que traz uma compilação completa e sistematizada dos conhecimentos matemáticos da Grécia Antiga. Além disso, o autor assegura que poucos livros foram mais importantes para a construção do pensamento lógico e o ensino no ocidente.

Burton (2011) relata que seria impossível uma pessoa produzir sozinha todos os conteúdos reunidos na obra Os Elementos. Ressalta que, mais difícil ainda, seria organizar uma obra dessa envergadura com a maestria de Euclides: a escolha criteriosa dos axiomas, a sequência de apresentação das proposições, em que um resultado sucede ao outro com demonstrações criteriosas, seguindo um pensamento lógico, para construir a noção completa da geometria elementar. Nesse mister o Grande Geômetra, além de definir coisas básicas como ponto e reta, introduz os conceitos de círculo, triângulo e quadrado. Entre as várias coisas que registrou em sua obra, estão as construções para inscrever ou circunscrever um círculo a um triângulo (Commandino, 1944; Heath, 1908). Assim, pode-se supor que o compêndio de Euclides também seja considerado o precursor na abordagem dos pontos notáveis dos triângulos.

O estudo de Campos & Moreira (2018) assegura que muitos conceitos fundamentais se modificaram na passagem da matemática antiga para a moderna. Afirmam que houve, inclusive, alteração na relação entre os números e as medidas geométricas que eles representam. Esta mudança reflete o caminho natural de uma ciência viva como é a matemática. Fruto da evolução do conhecimento, novas concepções, definições e nomenclaturas foram inseridas de tal sorte que os antigos geômetras trabalharam com os pontos notáveis dos triângulos sem atribuir nomes específicos a eles.

De fato, analisando os livros de Euclides percebe-se que o matemático estabelece no Livro I que as figuras triláteras são aquelas formadas por três linhas retas, no entanto, só emprega a palavra triângulo para definir os tipos particulares de triláteras existentes: os triângulos equilátero, isósceles, escaleno, reto, obtusângulo e acutângulo. Esta nomenclatura não foi alterada ao longo dos séculos, porém, modernamente, o triângulo é definido como a figura formada por três pontos não colineares, chamados de vértices (Neto, 2013). No Livro IV, Euclides trabalha com as bissetrizes dos ângulos e mediatrizes dos lados dos triângulos para provar suas proposições que utilizam o incentro e o circuncentro sem, no entanto, nomear os referidos pontos. No Livro VI, o autor introduz a definição da altura de uma figura (Commandino, 1944; Heath, 1908).

Johnson (1960) assegura que os teoremas mais importantes envolvendo triângulos envolvem segmentos de retas, ou conjuntos de segmentos, que se originam nos seus vértices. Os exemplos mais óbvios dessas linhas são as bissetrizes internas dos ângulos do triângulo, as medianas e as alturas, cujos pontos de encontro geram, respectivamente, o incentro, o baricentro e o ortocentro. Ao trabalhar com o teorema de Ceva, cuja prova foge ao escopo deste trabalho, o autor garante que as mediatrizes dos lados do triângulo, segmentos de igual relevância na referida figura geométrica, concorrem no quarto ponto notável de interesse, ou seja, no circuncentro.

Magalhães (2013) afirma que existem milhares de pontos notáveis em um triângulo muitos deles com propriedades tão interessantes quanto os quatro mais divulgados: incentro, baricentro, ortocentro e circuncentro. No entanto, considerando as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (MEC, 2006), no sentido de utilizar a História da Matemática em sala de aula como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos, este trabalho irá focar nas contribuições dos grandes matemáticos clássicos.

Lima (1991) defende que entre os textos de geometria mais notáveis que foram produzidos até hoje certamente estarão “Os Elementos” de Euclides, escritos na Grécia antiga, e “Lições de Geometria Elementar” de Jacques Hadamard, publicado em 1898.

Assim, face a dificuldade de encontrar traduções para o português dos trabalhos de Arquimedes e Euclides publicados por T.L.Heath e dos trabalhos originais de Hadamard, as demonstrações que seguem, acerca da existência do incentro, circuncentro, ortocentro e baricentro, serão uma contribuição para o estudo dos clássicos da geometria. Assim, as definições e demonstrações apresentadas neste capítulo são baseadas, principalmente, nas traduções próprias do autor das seguintes obras:

- The Works of Archimedes with The Method of Archimedes (Os Trabalhos de Arquimedes com o Método de Arquimedes), editado por T.L.Heath, em 1912;
- The Thirteen Books of Euclid's Elements (Os Treze Livros dos Elementos de Euclides), traduzidos para o inglês por de T.L.Heath, em 1908; e
- Lessons in Geometry: plane geometry (Lições em Geometria: geometria plana), do autor francês Jacques Hadamard, publicado em 1898, traduzido para o inglês por Mark Saul, em 2008;

Para facilitar o trabalho com os conteúdos em uma linguagem contemporânea recorreu-se ao texto da obra Geometria, de Antônio Caminha Muniz Neto, de 2013.

4.1 INCENTRO

4.1.1 Definições

Euclides inicia sua obra definindo as coisas básicas da geometria. O Geômetra estabelece no Livro I, entre outras coisas, os conceitos primitivos de ponto e reta, as noções de ângulo, ângulo reto, círculo, centro do círculo, diâmetro, triângulo, retângulo e quadrado. Todas essas definições serão importantes neste trabalho, porém, julgou-se que seria desnecessário apresentar a tradução e análise dos textos originais.

Heath (1908) relata que a noção de tangência entre uma reta e um círculo consta do Livro III do compêndio de Euclides com algumas colaborações de Theon de Alexandria, publicadas no ano de 395 da era Cristã.

Euclides estabeleceu que:

- quando duas retas se cortam formando ângulos retos elas são ditas perpendiculares entre si (Definição 10, Livro I);
- diz-se que uma reta toca um círculo quando ela o encontra sem cortá-lo (Definição 2, Livro III);
- uma reta que forma um ângulo reto com um diâmetro de um círculo toca o mesmo em apenas um ponto (Corolário da Proposição 16, do Livro III) a unicidade do ponto é citada como uma contribuição de Theon (Heath, 1908);
- um círculo será dito inscrito em uma figura quando a circunferência do círculo tocar cada um dos lados da figura (Definição 5, Livro IV).

Neto (2013) estabelece que a bissetriz de um ângulo é a semirreta que o divide em dois ângulos iguais e Burton (2011) afirma que os pontos sobre a bissetriz equidistam dos lados do ângulo original.

O item 54 da obra de Hadamard é provado um teorema dedicado a demonstrar que, em qualquer triângulo, as bissetrizes dos ângulos internos são concorrentes.

Em linguagem atual, as afirmações anteriores são expressas como:

- uma reta é tangente a um círculo quando ela for perpendicular a um raio e tiver exatamente um ponto em comum com o círculo (Neto, 2013);

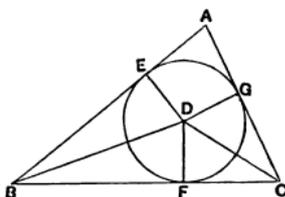
- um círculo é dito inscrito a uma figura quando estiver no seu interior e tangenciar todos os lados da figura (Coxeter & Greitzer, 1967).

- a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que equidistam das retas suportes dos seus lados.

4.1.2 Proposta de Euclides

Euclides apresenta a seguinte proposta em seu Livro IV: inscrever um círculo em um triângulo dado (Proposição IV). Para resolver este desafio ele estabelece os passos para localização do centro da circunferência inscrita no triângulo. Este ponto, posteriormente, seria batizado de **incentro**.

Figura 14 – Incentro



Fonte: (HEATH, 1908, p.85)

Seja ABC o triângulo dado no qual deve ser inscrito um círculo.

1. trace as bissetrizes dos ângulos \widehat{ABC} e \widehat{ACB} e marque o ponto D na intersecção delas;
2. do ponto D trace: \overline{DE} , \overline{DF} e \overline{DG} perpendiculares aos lados AB , BC e CA , respectivamente;
3. como:
 - a. $\widehat{EBD} = \widehat{FBD}$ (\overline{BD} é bissetriz de \widehat{FBE});
 - b. $\widehat{DBD} = \widehat{DFB} = 90^\circ$;
 - c. \overline{BD} é um lado comum aos dois triângulos.
4. então: $\triangle DBE \equiv \triangle DBF$
5. portanto: $\overline{DE} = \overline{DF}$

6. analogamente: $\overline{DG} = \overline{DE} = \overline{DF} = r$

7. logo existe um círculo com centro em D e raio r que tangencia os lados AB , BC e CA nos pontos E , F e G , respectivamente. Conforme a Definição V, do Livro VI, este é o círculo inscrito no $\triangle ABC$

□

Heath (1908) ressalta que Euclides não achou necessário provar que as bissetrizes dos ângulos \widehat{ABC} e \widehat{ACB} se cruzariam, porém, esta condição decorre do Postulado 5, do Livro 1. Além disso o autor assegura que a unicidade do ponto D (incentro) também decorre da própria construção pois:

1. como:

a. $\overline{DG} = \overline{DE}$

b. $\widehat{DEA} = \widehat{DGA} = 90^\circ$

c. \overline{DA} é um lado comum aos dois triângulos.

2. então: $\triangle DEA \cong \triangle DGA$

3. portanto: $\widehat{DAE} = \widehat{DAG}$

4. logo: \overline{DA} é bissetriz de \widehat{EAG}

5. assim, o ponto D é o encontro das três bissetrizes do $\triangle ABC$

Portanto, em linguagem atual, pode-se afirmar que as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo concorrem em um único ponto, em seu interior e chamado incentro. Neste trabalho o incentro será identificado pela letra \mathcal{I} .

Como \mathcal{I} pertence às três bissetrizes do $\triangle ABC$ ele equidista dos três lados do triângulo. Assim, considerando que já foi provada a unicidade do incentro pode-se garantir que qualquer triângulo admite um único círculo contido no seu interior e tangente simultaneamente aos seus lados. Este círculo é denominado círculo inscrito no triângulo o seu centro é o incentro do triângulo (Neto, 2013).

4.2 CIRCUNCENTRO

4.2.1 Definições

A Definição 6, do Livro IV de Os Elementos que um círculo será dito circunscrito em uma figura quando a circunferência do círculo passar sobre cada vértice¹⁶ da figura (Definição 6).

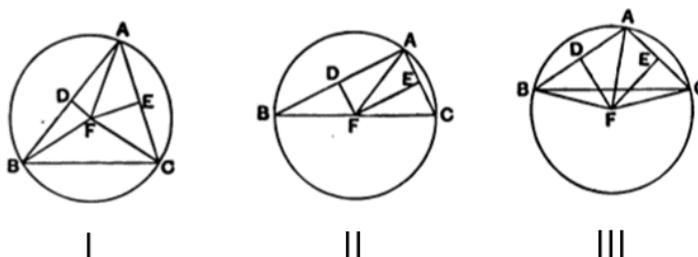
Hadamard (2008, p.33) estabelece que a mediatriz de um segmento (\overline{AB}) é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos seus extremos (equidistam dos pontos A e B).

No item 52 da obra de Hadamard é provado um teorema dedicado a demonstrar que, em qualquer triângulo, as mediatrizes dos lados são concorrentes.

4.2.2 Proposta de Euclides

Euclides apresenta em seu Livro IV a proposta que segue: circunscrever um círculo em um triângulo dado (Proposição V). A solução desse desafio esclareceu os passos para localização do centro da circunferência circunscrita. Este ponto, posteriormente, seria batizado de **circuncentro**.

Figura 15 – Circuncentro



FONTE: (HEATH, 1908, P.88)

Seja ABC o triângulo dado ao qual deve ser circunscrito um círculo.

1. trace as mediatrizes¹⁷ dos lados AB e AC e marque o ponto F no seu encontro;
2. conforme o tipo do triângulo, as mediatrizes irão se encontrar no interior do triângulo ABC , sobre o lado BC ou fora do triângulo (Figuras 15.I, 15.II e 15.III);
3. no primeiro caso (Figura 15.I) as mediatrizes se encontram no interior do ΔABC , exatamente no ponto F ;
4. trace \overline{FB} , \overline{FC} e \overline{FA} ;

¹⁶ Euclides não usou a palavra vértice, em seu lugar usou a palavra ângulo.

¹⁷ Euclides não usou a palavra mediatriz, sugeriu a seguinte construção: marcar os pontos médios dos lados e, à partir deles, traçar ângulos retos.

5. verifica-se que : $\triangle DFA \equiv \triangle DFB$

a. $\overline{AD} = \overline{DB}$

b. \overline{DF} é um lado comum aos dois triângulos;

c. $\widehat{FDA} = \widehat{FDB} = 90^\circ$

6. portanto: $\overline{FB} = \overline{FA}$

7. analogamente: $\overline{FC} = \overline{FA} = \overline{FB} = R$

8. logo existe um círculo com centro em F e raio R que passa pelos vértices do $\triangle ABC$ e, conforme a Definição VI, do Livro VI, este é o círculo circunscrito ao $\triangle ABC$.

9. no segundo caso (Figura 15.II), as mediatrizes se encontram sobre o lado BC , exatamente no ponto F ;

10. trace \overline{FA} ;

11. seguindo os mesmos passos descritos acima, prova-se que existe um círculo com centro em F e raio R que passa pelos vértices do $\triangle ABC$.

12. finalmente, no terceiro caso (Figura 15.III), as mediatrizes se encontram fora do $\triangle ABC$, exatamente no ponto F ;

13. novamente, seguindo os passos descritos acima, prova-se que existe um círculo com centro em F e raio R que passa pelos vértices do $\triangle ABC$.

□

Euclides acrescenta que se o ponto de encontro das mediatrizes estiver no interior do $\triangle ABC$ ele será acutângulo, se elas se encontrarem sobre o lado BC o $\triangle ABC$ será retângulo no vértice A e, finalmente, se elas se encontrarem fora do $\triangle ABC$ ele será obtusângulo no vértice A .

Heath (1908) ressalta que a condição de existência do ponto de encontro das mediatrizes decorre da observação de que, caso se não forem concorrentes em um ponto, as mediatrizes seriam paralelas e, nesse caso, os lados AB e BC seriam paralelos. Assim, não teríamos um triângulo, mas um quadrilátero.

Em linguagem atual, poderia ser dito que se as mediatrizes não forem concorrentes chegaríamos ao absurdo de concluir que os lados AB e BC do $\triangle ABC$ são paralelos.

A unicidade do circuncentro pode ser provada seguindo raciocínio semelhante ao utilizado para provar a unicidade do incentro, ou seja:

14. como $\overline{FB} = \overline{FC} = R$

15. então F equidista dos pontos B e C ;

16. logo F pertence a mediatriz do lado BC ;

17. portanto F é o ponto de encontro das mediatrizes dos três lados do $\triangle ABC$.

□

Assim, em linguagem atual, pode-se afirmar que qualquer triângulo admite um único círculo passando por seus vértices. Este círculo é denominado círculo circunscrito ao triângulo e o seu centro é o de intersecção das mediatrizes dos lados do próprio triângulo, chamado de **circuncentro** (Neto, 2013). Neste trabalho o circuncentro será identificado pela letra **C**.

4.3 ORTOCENTRO

4.3.1 Definições

Segundo Heath (1908) Aristóteles definiu as relações de semelhança entre figuras planas no séc.III a.C. porém, não trabalhava com o conceito matemático para altura das figuras. Este conceito apareceu formalmente na Definição 4, do Livro VI, de Euclides como uma ferramenta para possibilitar a comparação entre duas figuras planas.

Lima (1991) afirma que os matemáticos gregos não conheciam os números irracionais, mas, graças a Pitágoras (séc.V a.C.), sabiam da existência de segmentos incomensuráveis¹⁸. Ressalta que, naquela época, não fazia sentido atribuir um valor numérico para as medidas de segmentos. Assim, as comparações necessárias eram feitas estabelecendo uma proporção entre eles por comparação direta.

Euclides não fez qualquer referência ao ortocentro nos Elementos não por desconhecê-lo, mas, segundo defende Heath (1908), por achar que se tratava de uma curiosidade sem muitas aplicações na geometria. Os trabalhos de Euler e outros matemáticos modernos demonstraram que o Geômetra cometeu uma gafe. (Johnson, 1929)

Euclides estabeleceu que a altura de qualquer figura plana é obtida pela perpendicular à base traçada a partir do vértice (Definição 4, Livro VI);

No item 53 da obra de Hadamard é provado um teorema dedicado a demonstrar que, em qualquer triângulo, as três alturas são concorrentes. Este ponto singular era conhecido pelos matemáticos gregos e foi redescoberto por Giovanni Ceva, em 1678 (Johnson, 1929; Coxeter & Greitzer, 1967; Neto, 2013). Este ponto, posteriormente, seria batizado de **ortocentro**.

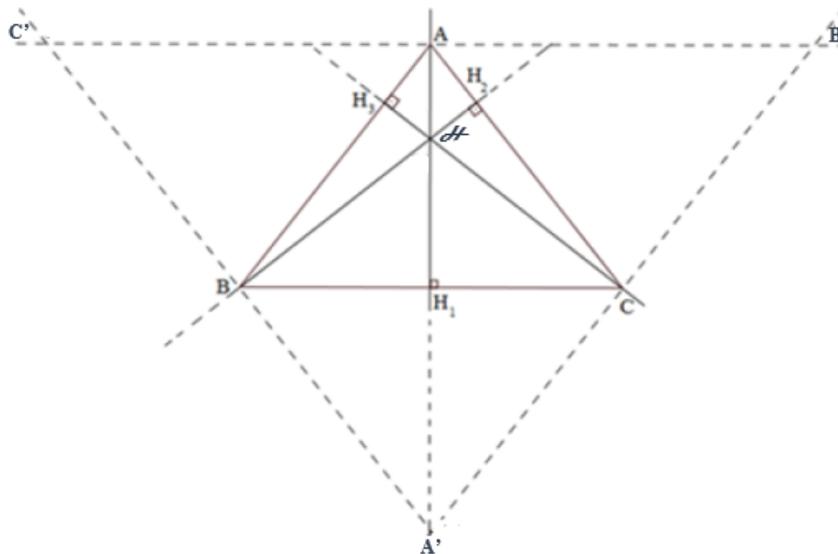
¹⁸ Definição de grandeza incomensurável consta na Seção 6,7, do Capítulo 3, do presente trabalho

4.3.2 Proposta de Hadamard

Seja ABC um triângulo qualquer (Figura 16) e o ponto H o seu ortocentro.

1. Trace uma paralela ao lado BC passando por A , uma paralela ao lado AC passando por B e uma paralela ao lado AB passando por C . Isso forma o $\Delta A'B'C'$;

Figura 16 – Ortocentro



FONTE: (Adaptada de JUNIOR, 2014, P.55)

2. mostraremos que as retas suportes das alturas do ΔABC são as mediatrizes dos lados do $\Delta A'B'C'$. Disso segue, imediatamente, que elas são concorrentes;

3. no paralelogramo $ABCB'$ Verifica-se que. $\overline{BC} = \overline{AB'}$;

4. no paralelogramo $ACBC'$ Verifica-se que. $\overline{BC} = \overline{AC'}$;

5. logo A é o ponto médio do lado $B'C'$;

6. logo a altura $\overline{AH_1}$ do ΔABC está contida na mediatriz do lado $B'C'$ do $\Delta A'B'C'$;

7. analogamente:

a. a altura $\overline{BH_2}$ do ΔABC é a mediatriz do lado $A'C'$ do $\Delta A'B'C'$;

b. a altura $\overline{CH_3}$ do ΔABC é a mediatriz do lado $A'B'$ do $\Delta A'B'C'$;

8. logo as medianas se encontram em um ponto H que é o circuncentro do $\Delta A'B'C'$;

9. como as retas suportes das alturas do ΔABC são as mediatrizes dos lados do $\Delta A'B'C'$, fica provado que elas concorrem no ponto H .

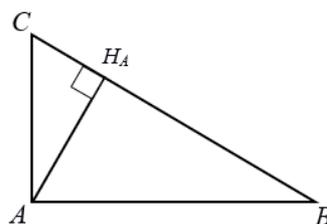


4.3.3 Proposta de Neto (2013)

Neto (2013) ressalta que se o ΔABC for um triângulo retângulo a demonstração da existência do ponto de concorrência das alturas é trivial.

Considere, sem perda de generalidade o ΔABC retângulo em A .

Figura 17 – Ortocentro do triângulo retângulo



FONTE: (Autor)

1. A é o pé das alturas referentes aos lados AB e AC , ou seja, as alturas relativas aos catetos concorrem em A ;
2. Como, por definição, a altura relativa ao lado BC (hipotenusa) passa por A ;
3. Então, fica provado que o ponto A é o ponto de intersecção das três alturas do ΔABC ;
4. Nesse caso específico, o ortocentro do triângulo é o vértice do ângulo reto

□

Assim, em linguagem atual, pode-se afirmar que em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um único ponto denominado ortocentro do triângulo (Neto, 2013). Neste trabalho o ortocentro será identificado pela letra H .

4.4 BARICENTRO

4.4.1 Definições

Conforme Johnson (1929) o baricentro¹⁹ era conhecido na antiguidade, porém, não há referência a ele na obra de Euclides.

A existência do centro de gravidade do triângulo foi provada por Arquimedes no séc.III a.C. De fato, as proposições 13 e 14 do livro “Os centros de gravidade dos planos” comprovam que o centro de gravidade²⁰ de um triângulo encontra-se na intersecção de duas medianas²¹. Na

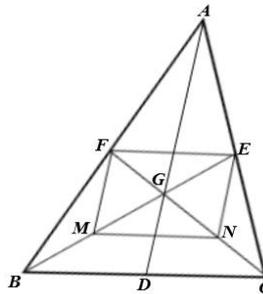
mesma obra (Proposição 15) Arquimedes assume, sem provar, que o baricentro do triângulo está na mediana a um terço do comprimento em relação a base (Heath, 1912).

Hadamard (2008, p.22) define formalmente uma mediana como sendo uma linha que une um vértice de um triângulo ao ponto médio do lado oposto. Além disso, no item 56 de sua obra, o autor prova um teorema dedicado a demonstrar que, em qualquer triângulo, as três medianas são concorrentes em um ponto situado, em cada uma delas, a um terço do seu comprimento a partir do lado correspondente. Ainda segundo Hadamard (2008, p.55) a razão para que o ponto de encontro das medianas seja chamado de centro de massa é explicada nos estudos de mecânica. O centro de massa também é conhecido como **baricentro** na língua portuguesa.

4.4.2 Proposta de Hadamard

“As três medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto situado em cada uma delas a um terço do seu comprimento em relação ao lado correspondente.” (Hadamard, 2008, p.54, tradução nossa)

Figura 18 – Baricentro



FONTE: (Adaptada de HADAMARD, 1898, P.56)

No $\triangle ABC$ (Figura 18) desenhe as medianas BE e CF . Precisamos mostrar que o ponto de intersecção delas G está exatamente a um terço do seu comprimento em relação ao lado do triângulo.

1. Sejam M e N os pontos médios dos lados BC e CG , respectivamente, do $\triangle BCG$;

¹⁹ Johnson (1929) não usou a palavra baricentro em seu lugar escreveu ponto medial.

²⁰ Archimedes não usou a palavra baricentro em seu lugar escreveu centro de gravidade.

²¹ Archimedes não usou a palavra mediana, escreveu que o centro de gravidade está sobre a linha reta que une qualquer ângulo ao ponto médio do lado oposto.

2. Assim, o segmento \overline{MN} é a base média²² do $\triangle BCG$ e, portanto, seu comprimento é a metade do comprimento do lado BC ;

3. Mas o segmento \overline{FE} é base média do $\triangle ABC$ e, portanto, seu comprimento também é a metade do comprimento do lado BC ;

4. Assim o quadrilátero $EFMN$ é um paralelogramo cujas diagonais se cortam em seu ponto médio;

5. Portanto: $\overline{EG} = \overline{GM} = \overline{MB}$ e $\overline{FG} = \overline{GN} = \overline{NC}$

6. Então a mediana BE passa pelo ponto G situado na mediana CF a um terço do seu comprimento;

7. Analogamente para mediana CF , que passa pelo ponto G situado na mediana BE a um terço do seu comprimento;

8. Analogamente para mediana AD , que passa pelo ponto G situado na mediana BE a um terço do seu comprimento;

9. Analogamente para mediana BE , que passa pelo ponto G situado na mediana AD a um terço do seu comprimento;

10. De 7 e 8: o ponto G pertence as medianas BE , CF e AD ;

11. Portanto: as três medianas são concorrentes no ponto G ;

12. De 6, 7 e 8: o ponto G está a um terço do comprimento das medianas BE , CF e AD em relação aos lados correspondentes;

13. Portanto: o ponto G está a exatamente um terço do comprimento das três medianas;

14. De 6: só existe um ponto sobre a mediana CF que a divide na razão um terço para dois terços;

15. Portanto o ponto G é único. □

Conforme consta do Capítulo. 3 do presente trabalho Arquimedes propõe que o centro de gravidade do triângulo está na intersecção de duas de suas medianas. Além disso registrou, sem provar, que o baricentro está sobre a mediana a um terço de seu comprimento em relação à base (Heath, 1912, p.202). Também no Capítulo. 3 deste estudo é apresentada uma demonstração desta propriedade como alternativa ao teorema de Hadamard apresentado no item acima.

²² Hadamard (1898) não usou a expressão base média em seu lugar escreveu que o segmento \overline{MN} une os pontos médios dos lados do triângulo.

Assim, em linguagem atual, pode-se afirmar que em todo triângulo, as três medianas se intersectam em um único ponto denominado baricentro do triângulo. Além disso, pode-se afirmar que o baricentro divide cada mediana, a partir do vértice, na razão 2:1 (Neto, 2013). Neste trabalho o ortocentro será identificado pela letra H .

5 DOBRADURAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (MEC, 2013) as políticas públicas para a educação básica no Brasil são orientadas por vários indicadores, entre eles, as provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), a Prova Brasil e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Além disso, entre os fundamentos pedagógicos da Base Nacional Curricular Comum (MEC, 2018) há destaque para o foco no desenvolvimento de competências que, não por acaso, também é o foco do Programa Internacional de Avaliações de Alunos (PISA) conduzido pela Organização para Cooperação do Desenvolvimento Econômico (OCDE) e de outros programas internacionais.

Conforme reportam Ribeiro & Tereza (2013) o desempenho dos estudantes brasileiros nas avaliações do PISA, SAEB e ENEM, nos tópicos referentes à matemática, são insatisfatórios, geram grande preocupação na comunidade docente e nas autoridades responsáveis pelas políticas públicas educacionais.

A dificuldade em atingir bons resultados nos exames internacionais, no entanto, não é um problema restrito aos países em desenvolvimento e conforme dados disponibilizados pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) maior renda nacional, ou maior gasto em educação, não garantem melhor desempenho dos alunos. Os relatórios do PISA 2018²³ indicam que países desenvolvidos como os Estados Unidos, Israel e Luxemburgo, entre outros, obtiveram resultados abaixo da média dos países da OCDE (489 pontos) e foram largamente superados pelos resultados dos estudantes da China e da Estônia, por exemplo.

Winckler, Wolf & Bock (2011) comentam que os baixos desempenhos dos estudantes alemães no PISA 2000 os levaram a questionar as estratégias tradicionais de ensino da matemática na Alemanha. Entre as novas abordagens que propuseram estava a busca de formas de associar o estudo da teoria da matemática com práticas manuais e, nesse sentido, o ensino de geometria com o auxílio de origami mostrou-se uma técnica acessível aos alunos.

Para Lang (2010) a execução de construções geométricas com dobraduras é tão interessante do ponto de vista acadêmico quanto as que tradicionalmente são ensinadas no ensino médio, usando apenas régua e compasso. Ghourabi et al (2007) defendem, inclusive, que os axiomas enunciados por Huzita superam em capacidade de solução de problemas o método proposto por Euclides. Os autores alegam que usando dobraduras é possível reproduzir os resultados obtidos com régua e compasso e superar algumas limitações do método clássico tais como a trissecção de um ângulo.

²³ Relatório Internacional do PISA 2018, disponível no sítio do CNE. Consulta realizada em 17JUL2020.

5.1 ORIGAMI X PAPIROFLEXIA

Segundo Hatori (2011) ainda hoje é muito difícil definir com exatidão a origem das dobraduras em papel costumeiramente chamadas de origami. O autor informa que, no passado, era muito comum os pesquisadores admitirem que esta prática teria se originado na China, por volta do ano 105 da era cristã, logo após a invenção do papel por T'sai Lun. Estas conjecturas baseavam-se principalmente no prefácio escrito pela americana Lillian Oppenheimer, para a versão em inglês da obra *Como Fazer Origami*, de Isao Honda, traduzida para o inglês em 1959. Esta abordagem também é majoritária nas dissertações de mestrado dos alunos do PROFMAT: 17 dos 23 trabalhos listados no sítio oficial do Programa, consultado em 24 jul. 2020, apresentam esta ideia. No entanto, conforme Hatori (2011), hoje pode-se garantir que o papel nem o origami são criações chinesas.

Hatori (2011) informa que há estudos modernos que mostram que os povos da América Central, e do sudeste da Ásia, produziam papel vegetal de alta qualidade cinco milênios antes do início da era Cristã. Assim, pode-se admitir que a teoria de que o papel teria sido inventado na China já foi cientificamente refutada. No entanto, considerando as enormes dificuldades de estabelecer contato entre os povos antigos, o papel chinês, criado no início do séc.II, ainda que não seja o primeiro de que se tem notícia, pode ter sido o primeiro que chegou ao Japão.

Ainda segundo Hatori (2011), considerando que o papel surgiu há quase 7000 anos, é lícito supor que alguém tenha dobrado as folhas por alguma razão na antiguidade e, assim, sugerir que o origami também se originou muito tempo antes de Cristo. Contudo, o autor defende que discutir a origem do origami só tem sentido quando se considera o uso da dobradura como um objeto de valor por si e não interessa a discussão de quem dobrou a primeira folha de papel para embalar ou proteger alguma coisa. Nesse sentido, Hatori assegura que as primeiras dobraduras relacionadas aos origamis modernos foram feitas há alguns séculos e não milênios passados.

A origem do origami é envolta em dúvidas e lendas. Para alguns pesquisadores o início desta prática se deu no Japão, no período Heian (784 a 1185), atribuindo o feito a Abe no Seimei, famoso astrólogo da época, que teria dobrado uma garça real em papel e presenteado seu grande rival Ashiya Doman. Outros defendem que alguns itens usados como oferendas aos deuses (Kami) nos rituais do Shintoísmo²⁴, no período Heian, podem ter sido dobraduras e estes seriam os primeiros origamis produzidos (Figura19.a).

²⁴ Shintoísmo: doutrina espiritualista japonesa, politeísta, com origem anterior ao séc.VII. Fonte Wikipédia. Consulta realizada em 17JUL2020.

Há uma corrente que assegura que os origamis ancestrais remontam ao séc.XII, eram denominados Noshi, e foram usados no Japão para adornar presentes e desejar boa sorte a noivos e aniversariantes (Figura 19.b). Finalmente, existem autores que defendem que os samurais do período Edo (1603 a 1868) usavam origamis diferentes para identificar pacotes com presentes que ofertavam. Nenhuma destas origens pode, no entanto, ser tomada como definitiva (Hatori, 2011).

Figura 19 – Origami Japonês



a. Oferendas aos Kami



b. Noshi

FONTE: (Google Imagens, pesquisa em 27AGO2020)

Por outro lado, Hatori (2011) afirma que, no mundo ocidental, a arte de dobrar papéis, conhecida como papiroflexia, tem uma origem menos contestada, podendo ser fortemente associada aos certificados de batismo usados na Europa Central nos séc.XVII e séc.XVIII (Figura 20), ou seja, contemporâneos aos origamis samurais. Existe, no entanto, uma corrente que defende que um balão de papel, mencionado na peça A Duquesa de Malfi, escrita pelo dramaturgo inglês John Webster, em 1612, para retratar acontecimentos supostamente verídicos ocorridos no século anterior, tenha sido a primeira referência à papiroflexia na Europa.

Figura 20 – Certificados de Batismo Alemães



FONTE: (SALLAS, 2010. P.125)

Além disso, há quem defenda que o tradicional barquinho de papel, cuja produção é ensinada nos anos iniciais na escola contemporânea, tenha sido retratado em um livro publicado

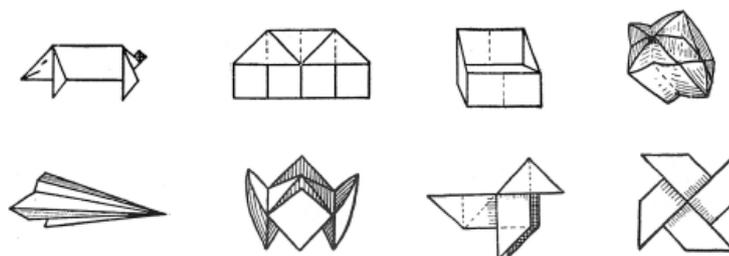
por Johannes de Sacroboco, no séc.XIII, sendo a primeira dobradura ocidental de que se tem notícia. Infelizmente, não se pode garantir que o balão e o barquinho existiram realmente, assim, os certificados de batismo são o único registro concreto da papiroflexia original.

Considerando os exemplares preservados, e os registros existentes, pode-se afirmar que os estilos das dobraduras praticados no ocidente e oriente, até a primeira metade do séc. XIX, eram muito distintos: enquanto os origamis japoneses empregavam dobras em diversas angulações e sentidos, partindo de folhas de papel de formato variado (quadradas, retangulares, hexagonais, octogonais ou mesmo irregulares), podendo apresentar vários cortes e pinturas, as dobraduras ocidentais se limitam a usar ângulos retos ou diagonais de quadrados, partiam de folhas quadradas ou, raramente, retangulares e apresentavam poucos cortes (Hatori, 2011).

O autor defende, portanto, que os registros disponíveis sugerem que a arte do origami e da papiroflexia surgiram, e se desenvolveram, independentes uma da outra, no oriente e no ocidente, respectivamente.

Esses estilos diferentes se preservaram até a metade do séc. XIX quando o Japão abriu as suas fronteiras para o intercâmbio com o ocidente. Nesse período, conhecido como Restauração Meiji (1860 a 1870), o imperador japonês recuperou seu poder, promoveu trocas comerciais vultuosas, reorganizou a força militar e introduziu no país um sistema de educação de inspiração europeia. Na base do novo sistema foram importadas técnicas direcionadas ao jardim de infância, iniciadas na Europa por trabalhos de Friedrich Froebel, que incluíam material e esquemas para dobraduras até então desconhecidas no Japão. As atividades acabaram por quebrar a barreira que separava os estilos de dobraduras e colocaram à disposição dos japoneses muitos dos modelos originais europeus como o porco, o sofá, o balão, o avião, o pássaro e o tradicional catavento (Figura 21). Em contrapartida, o maior fluxo de viajantes também promoveu a disseminação dos origamis japoneses pelo mundo ocidental (Hatori, 2011; Friedman, 2018)

Figura 21 – Dobraduras Ocidentais



FONTE: (HATORI, 2011. P.7)

O incremento do intercâmbio cultural no mundo moderno, potencializado pelo advento da rede mundial de computadores, colaborou para que mais e mais pessoas tivessem acesso às diversas técnicas de dobraduras. O termo origami é a palavra mais empregada mundialmente para designar as dobraduras em papel, porém, conforme pode ser verificado no presente texto, contrariamente ao senso comum, a arte do origami não é uma tradição exclusivamente japonesa tendo se desenvolvido também no continente europeu antes de ganhar o mundo por conta da globalização (Hatori, 2011; Friedman, 2018).

5.2 ORIGAMI NA MATEMÁTICA

Segundo Demaine & O'Rourke (2007) a referência mais antiga de que se tem notícia relacionando origami e geometria data de 1840: trata-se de um livro do Reverendo Dionysius Lardner, publicado em 1840, que apresentava diversos conceitos de geometria com emprego de dobraduras. No entanto, outra obra do mesmo período, publicada pelo matemático indiano T. Sundara Row, em 1893, é tida como a principal responsável pela popularização das dobraduras na matemática (Friedman, 2018). A obra de Row (1893) é considerada tão importante por empregar dobraduras para construções geométricas que tradicionalmente eram apresentadas com o uso de régua e compasso. Além disso, muitos dos exercícios propostos por ele foram reapresentados em obras posteriores e muitas vezes a fonte original foi omitida.

Na década de 1930, a italiana Margherita P Beloch foi a precursora na análise dos trabalhos de Row sob o ponto de vista das construções matemáticas envolvidas extrapolando o caráter lúdico que até então era explorado. As descobertas de Beloch incluíram os primeiros axiomas sobre dobraduras tais como “em uma folha de papel, dados dois pontos genéricos e dois segmentos de reta, também genéricos, sempre será possível dobrar a mesma produzindo um vinco que sobreponha os pontos sobre os segmentos dados” e a demonstração de que é possível, por meio de dobraduras, construir segmentos cujo tamanho seja a solução real de equações do terceiro ou quarto grau. Infelizmente, as contribuições da pesquisadora permaneceram praticamente escondidas até serem redescobertas, na década de 1980, por Humiaki Huzita (Friedman, 2018; Friedman, 2019).

Friedman (2018) relata que na primeira metade do séc.XX a maioria dos autores considerava as dobraduras como uma forma divertida de apresentar a matemática para diversos públicos e era muito usada em truques de mágica (Lister, 2005). Nesse período, as construções e conceitos matemáticos envolvidos no origami foram pouco exploradas podendo-se dizer que houve avanços, paradas, omissões e descontinuidades nas pesquisas.

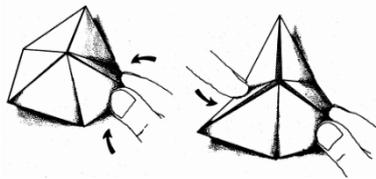
Na segunda metade do século, no entanto, os origamis ganharam importância, em grande medida, pelas publicações de Martin Gardner na revista *Scientific American* (Friedman, 2018; Lister, 2005). De acordo com Lister (2005) a década de 1950 foi particularmente significativa para a popularização do origami:

- em 1955 ocorreu a primeira exposição do origamista Akira Yoshizawa no museu Stedelyjk, em Amsterdã. Segundo Rozemberg (2018) Yoshizawa pode ser considerado o pai do origami moderno por ter criado a nomenclatura usada nos diagramas, indispensáveis para a popularização da arte e, também, para o desenvolvimento da origametria computacional;

- em 1956 foi publicado o primeiro livro de Robert Harbin, um mágico famoso na Inglaterra que dedicou muito do seu tempo ao estudo do origami. A obra *Magia do Papel* (*Paper Magic*, na versão original) trazia muitos desenhos e apresentou um pequeno histórico da origem das dobraduras no oriente. Robert Harbin é considerado pela Sociedade Britânica de Origami, o primeiro e mais importante autor que realmente se dedicou ao estudo e divulgação dos origamis japoneses;

- no mês de dezembro de 1956 foi publicado na *Scientific American* o primeiro artigo de Martin Gardner tratando sobre hexaflexagons (Figura 22), um tipo de quebra-cabeça em forma hexagonal que pode ser manipulado para apresentar diferentes configurações, cuja construção e funcionamento matemático, foi descoberta por Artur J Stone, pesquisador da Universidade de Princeton, em 1939. O sucesso da coluna foi tão grande que projetou o nome de Gardner no mercado editorial e permaneceu sendo parte das seções da revista por 25 anos;

Figura 22 – Hexaflexagons



FONTE: (GARDNER, 1959. P.5)

- em 1958 foi publicado na *Scientific American* o primeiro artigo dedicado ao Origami. Em outubro do mesmo ano, como reflexo da popularização do origami no ocidente, Lillian Oppenheimer capitaneou a criação do Centro de Origami em Nova York.

Conforme definido por Friedman (2018) os estudos sobre dobraduras no séc.XX permitiram a axiomatização, a operacionalização e a algebrização das mesmas. De fato, após a publicação da obra de Row (1893) as dobraduras começaram a atrair a atenção dos matemáticos por

diferentes razões: enquanto Row estava interessado em pesquisar técnicas de ensino, Beloch buscava desvendar as construções matemáticas envolvidas nas dobraduras, Justin e Huzita trabalharam com diversos tipos de dobraduras, inclusive os origamis, chegando ao ponto de estabelecer axiomas paralelos aos que Euclides concebeu para geometria plana. Modernamente são exploradas as capacidades estruturais das construções baseadas em origamis, seja na arquitetura seja na biomedicina, e podemos observar o crescimento do emprego da origametria computacional para desvendar as leis matemáticas envolvidas na produção dos origamis ou para propor estruturas cada vez mais complexas (Friedman, 2018).

Pope e Lam (2011) afirmam que muitos países estão modificando os currículos escolares para enfatizar a criatividade, incentivar a busca para soluções de problemas, o desenvolvimento de habilidades técnicas e colaborativas. Nesse cenário, o origami surge como uma boa ferramenta para desenvolvimento da motricidade e permite apresentar aos estudantes estratégias para solução de problemas para desafiá-los a desenvolverem o espírito cooperativo enquanto decodificam a matemática.

Lang (2010) reforça que o método para construção de um origami se baseia na localização precisa de pontos que servirão de referências para as dobras (linhas vincadas) necessárias para produção do objeto final. Os passos são repetidos para obtenção de outras referências nas bordas do papel, ou nas intersecções de vincos, construindo ângulos de interesse ou obtendo vértices de figuras. A sequência de construção se aproxima daquela que seria executada com régua e compasso o que facilita a introdução do origami na escola tradicional.

Pope e Lam (2011) defendem que a escolha criteriosa de origamis para o trabalho em sala de aula pode ser uma ferramenta poderosa para o aprendizado de conceitos matemáticos, por exemplo:

- trabalho com ângulos notáveis: a dificuldade de visualizar as diferenças entre os ângulos de 45° e 60° , comum entre alunos de diversos níveis e mesmo entre professores, pode ser trabalhada analisando os vincos produzidos pela bissecção do ângulo de um vértice de uma folha quadrada e os vincos produzidos em uma folha igual que foi dobrada para obtenção de um triângulo equilátero;

- trabalho com polígonos em duas ou três dimensões: a dificuldade em identificar um quadrado desenhado rotacionado 45° , um triângulo retângulo desenhado com a hipotenusa na horizontal ou de visualizar a existência de um ângulo tridimensional pode ser contornada pela manipulação das formas produzidas pelas dobraduras;

- noções de simetria podem ser trabalhadas analisando os polígonos produzidos pelos vincos resultantes das dobras executadas para produção de muitos origamis. É muito comum na

origametria a produção de dobraduras unindo as extremidades das folhas quadradas ou os vincos que partem de algum vértice bissectando regiões diversas da folha original;

- visualização de frações, e noção da relação entre as partes e o todo, podem ser apresentadas desafiando os alunos a dividirem as folhas em diversas partes iguais com o uso de dobraduras e analisando os resultados com o auxílio dos vincos produzidos;

Em todas as atividades propostas os autores enfatizam que a linguagem matemática correta deve ser introduzida e seu emprego estimulado. Além disso, ressaltam que o trabalho manual e sistematizado fornece a oportunidade para desenvolver o raciocínio lógico matemático, apoiado na sequência de construções geométricas e nas justificativas, à luz da teoria, do sucesso de cada etapa.

5.3 OS AXIOMAS DE HUZITA-HATORI E A GEOMETRIA PLANA

Segundo Lang (2010) origamistas tentaram criar sistemas que permitissem construir segmentos com tamanhos definidos nos anos 70. Porém, corroborando a tese defendida por Friedman (2018), somente em 1989 foram publicados os primeiros trabalhos que propuseram um conjunto de axiomas robusto o suficiente para suportar todas as construções possíveis.

O trabalho de Humiaki Huzita, cujo título em português seria “A álgebra das dobraduras em papel (origami)”, foi publicado nos anais do Primeiro Encontro Internacional da Ciência e Tecnologia do Origami, realizado na cidade de Ferrara, na Itália, em 1989. Este artigo pioneiro, apresentava um conjunto de seis operações fundamentais para execução de dobras (vincos) partindo de pontos ou linhas pré-existentes, ou da combinação da ambos, para obtenção de um determinado resultado: normalmente, a superposição dos elementos de partida. Estas seis operações tornaram-se conhecidas como os Axiomas de Huzita (AH) e poderiam ser repetidas para a construção sequencial dos origamis (Lang, 2010.).

Os seis axiomas propostos por Huzita representam para a origametria o mesmo que os axiomas de Euclides são para a geometria plana e, exatamente por essa razão, permitem o emprego de dobraduras para obter a solução para muitos problemas da geometria clássica (Ida et.al, 2014). Os Axiomas de Huzita produziram uma base sólida que permitiu, inclusive, apresentar soluções para a trissecção de um ângulo e para o problema de Delus²⁵ cuja solução, apenas com régua e compasso, foi provada ser impossível para ambos (Lang, 2010).

²⁵ Problema de Delus: supostamente atribuído a um Oráculo do Deus Apolo, na ilha de Delus, que sugeriu a construção de um novo altar cúbico, com volume igual ao dobro do que existia, como forma de livrar Atenas de uma peste que dizimou um quarto de sua população no séc.V a.C. Em termos matemáticos, seria necessário construir um cubo com lado $\sqrt[3]{2}$ vezes maior que o existente. Fonte Wikipédia. Consulta realizada em 08 dez.2020.

De acordo com Lang (2010) os seis Axiomas de Huzita foram originalmente enunciados conforme segue:

- 1º Axioma de Huzita – dados dois pontos P_1 e P_2 , é possível fazer uma dobra conectando-os;
- 2º Axioma de Huzita – dados dois pontos P_1 e P_2 , é possível fazer uma dobra que sobreponha os dois;
- 3º Axioma de Huzita – dados dois segmentos de reta r_1 e r_2 , é possível fazer uma dobra que sobreponha os dois;
- 4º Axioma de Huzita – dados um ponto P_1 e um segmento de reta r_1 , é possível fazer uma dobra perpendicular ao segmento e passando por P_1 ;
- 5º Axioma de Huzita – dados dois pontos P_1 e P_2 e um segmento de reta r_1 , é possível fazer uma dobra que sobreponha P_1 sobre r_1 e passe por P_2 ; e
- 6º Axioma de Huzita – dados dois pontos P_1 e P_2 e dois segmentos de reta r_1 e r_2 , é possível fazer uma dobra que sobreponha P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2 .

Lang (2010) comenta que Koshiro Hatori propôs um novo axioma, em 2003, na publicação “Origami versus régua e compasso”. De fato, o autor japonês identificou uma sétima operação, diferente dos 6AH, que permitia obter a solução de algumas equações quadráticas. Esta nova operação foi batizada como o 7º axioma, e o conjunto passou a ser conhecido como os Axiomas de Huzita-Hatori (AHH). Lang também provou que o conjunto formado pelos AHH era completo, ou seja, cobria todas as situações possíveis para produção de uma dobra (vinco) com a finalidade de sobreposição de pontos, traçar retas paralelas ou concorrentes a outras retas dadas (inclusive as perpendiculares), passando ou não por pontos de interesse (Hatori, 2003).

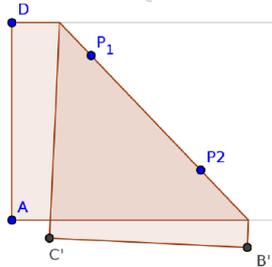
Embora seja relativamente comum encontrar trabalhos em português apresentando os AHH reescritos de maneira a considerar a unicidade dos vincos produzidos, o que pode ser verificado em Fleishmann (2019), são muito reduzidas as publicações que detalham as justificativas geométricas para tais afirmações. Nesse sentido, o presente capítulo pretende apresentar esta contribuição e facilitar o entendimento do assunto trabalhando principalmente com traduções próprias do autor das seguintes obras:

- Livro 1 da obra Os Treze Livros dos Elementos de Euclides, traduzidos para o inglês por de T.L.Heath, em 1908, a partir do texto original de Heiberg;
- Lições em Geometria: geometria plana, do autor francês Jacques Hadamard, publicado em 1898, traduzido para o inglês por Mark Saul, em 2008; e
- Explorando Geometria com Origami, de Eduardo Cavacami e Yolanda Kioko Saito Furuya, de 2009.

5.3.1 Primeiro Axioma de Huzita (1ºAH)

1ºAH: Dados dois pontos P_1 e P_2 , é possível fazer uma dobra conectando-os.

Figura 23 – Primeiro Axioma de Huzita



FONTE: (Cavami e Furuya, 2009, P.3)

Conforme Heath (1908) o primeiro postulado enunciado por Euclides estabelece que é possível traçar uma reta de um ponto a qualquer outro ponto. Esta declaração não encerra a prova da unicidade da reta que liga dois pontos e, segundo o autor, embora não esteja explícita na obra de Euclides, ela decorre da conjugação de suas definições e postulados.

Para contornar essa omissão, pode-se recorrer a definição de reta enunciada por Hadamard no parágrafo 2º, do item 4, da introdução, que deixa claro que sobre dois pontos quaisquer, pode-se traçar uma, e apenas uma, reta.

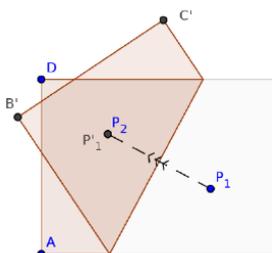
Considerando que o vinco reproduz uma reta no origami, pode-se reescrever este axioma da seguinte maneira:

1ºAH: Dados dois pontos P_1 e P_2 , existe uma única dobra (reta) que passa sobre eles.

5.3.2 Segundo Axioma de Huzita (2ºAH)

2ºAH: Dados dois pontos P_1 e P_2 , é possível fazer uma dobra que sobreponha os dois.

Figura 24 – Segundo Axioma de Huzita



FONTE: (Cavami e Furuya, 2009, P.3)

Na introdução de sua obra Hadamard define segmento de reta como sendo a parte de uma reta contida entre dois pontos. Observando que, ao sobrepor os dois pontos, o segmento será dividido ao meio, este axioma pode ser relacionado à Proposição 10, enunciada por Euclides, que trata da divisão de um segmento de reta em duas partes iguais.

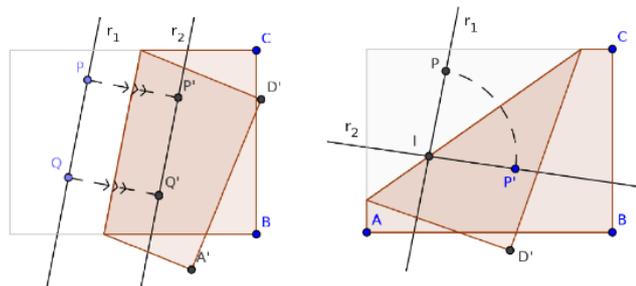
Além disso, valendo-se da prova do teorema da unicidade da mediatriz também encontrada em Hadamard²⁶ (2008, p.12), pode-se reescrever este axioma da seguinte maneira:

2ºAH: Dados dois pontos P_1 e P_2 , existe uma única dobra (mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$) que posiciona um sobre o outro.

5.3.3 Terceiro Axioma de Huzita (3ºAH)

3AH: Dados dois segmentos de reta r_1 e r_2 , é possível fazer uma dobra que sobreponha os dois.

Figura 25 – Terceiro Axioma de Huzita



FONTE: (Cavami e Furuya, 2009, P.4)

5.3.3.1 Se os segmentos forem paralelos

A união das extremidades dos segmentos gera um paralelogramo ou um trapézio e, em qualquer dos casos, a dobra que permitirá a sobreposição dos segmentos será a reta suporte do segmento que une os pontos médios de dois lados opostos e, nesse caso, conforme apresentado por Hadamard, será paralela aos dois segmentos originais.

²⁶ Hadamard não empregou o termo mediatriz, de fato ele enuncia, e prova, um teorema que estabelece que em um plano, por qualquer ponto pertencente a uma reta pode-se traçar uma, e apenas uma, perpendicular a esta reta. Assim, se considerarmos a mediatriz de um segmento uma reta perpendicular ao mesmo, que passa pelo seu ponto médio, poderemos usar o teorema de Hadamard para garantir que ela é única.

Segundo Heath, Euclides não enuncia formalmente o teorema da unicidade da reta paralela traçada por um ponto P . Porém, conforme raciocínio atribuído por Heath a Proclus, há várias definições e construções propostas por Euclides no Livro 1, de Os Elementos, que permitem admitir a referida unicidade. Assim considerando o roteiro proposto para traçar uma paralela por um ponto (Proposição 31) e a sua definição de retas paralelas (Definição 23) chegaríamos ao absurdo de que, se ela não for única, existirão pelo menos duas retas distintas, paralelas a um mesmo segmento e, portanto, paralelas entre si (Proposição 30), que seriam concorrentes no ponto P , o que não pode acontecer. Assim, pode-se garantir a unicidade procurada.

Face ao exposto, o 3ºAH pode ser reescrito da seguinte forma:

3ºAH (retas paralelas): Dados dois segmentos de reta paralelos r_1 e r_2 , existe uma única dobra que sobrepõe os dois (a dobra será paralela aos segmentos e equidistante dos mesmos).

5.3.3.2 *Se os segmentos forem concorrentes*

Nesse caso, sobre o ponto de intersecção das retas pode-se passar um eixo sobre o qual será feita a rotação dos segmentos para coincidirem e a dobra resultante será a reta suporte da bissetriz de um dos ângulos formados pelos segmentos. Nesse caso, pode-se relacionar este axioma à Proposição 9, enunciada por Euclides, que permite dividir um ângulo plano em duas partes iguais (construir a sua bissetriz).

Considerando que os segmentos concorrentes determinam dois ângulos suplementares o 3ºAH pode ser reescrito da seguinte forma:

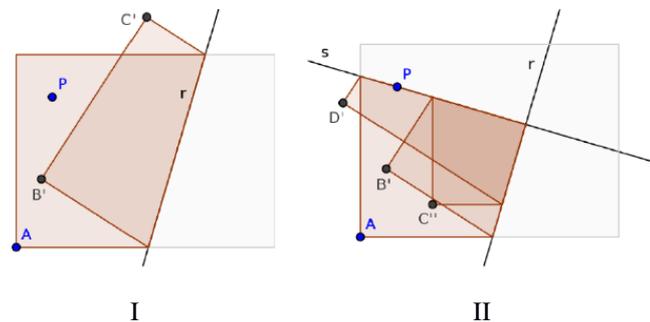
3ºAH (retas concorrentes): Dados dois segmentos de reta concorrentes r_1 e r_2 , existem duas dobras que os sobrepõem, cada uma será a bissetriz de um dos ângulos formados pelos segmentos.

5.3.4 **Quarto Axioma de Huzita (4ºAH)**

4ºAH: Dados um ponto P_1 e um segmento de reta r_1 , é possível fazer uma dobra perpendicular ao segmento e passando por P_1 .

Obs.: a primeira dobra apresentada na Figura 26.I destina-se à produção da reta r_1 .

Figura 26 – Quarto Axioma de Huzita



FONTE: (Cavami e Furuya, 2009, P.4)

Pode-se relacionar este axioma à Definição 10 (definição de retas perpendiculares) e as Proposições 11 e 12 (construir uma reta perpendicular a outra conhecida passando, respectivamente, por um determinado ponto da própria reta ou por um ponto de interesse que não pertence a reta conhecida), todas enunciadas por Euclides, no Livro I, dos Elementos.

Heath comenta que, tal como ocorreu em relação à paralela, Euclides não enuncia formalmente o teorema que trate da unicidade da perpendicular a uma reta, traçada passando por um ponto conhecido. Pode-se, no entanto, observar que as construções propostas por Euclides iniciam construindo um segmento de reta cuja mediatriz passará pelo ponto de interesse e recorrer a demonstração de Hadamard citada anteriormente (**2º AH**).

Para contornar essa omissão pode-se, alternativamente, recorrer aos teoremas provados por Hadamard no item 14 e 19 de sua obra que se dedicam a demonstrar que, por um ponto de uma reta, no primeiro item, e por um ponto qualquer externo a reta, no segundo item, pode-se traçar uma, e apenas uma, perpendicular a reta inicial. Assim, pode-se reescrever este axioma da seguinte maneira:

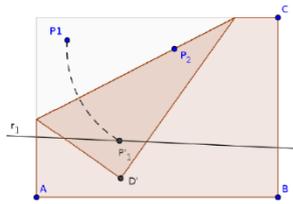
4ºAH: Dados um ponto P_1 e um segmento de reta r_1 , é possível fazer uma única dobra perpendicular ao segmento e passando por P_1 .

5.3.5 Quinto Axioma de Huzita (5ºAH)

5AH: Dados dois pontos P_1 e P_2 e um segmento de reta r_1 , é possível fazer uma dobra que sobreponha P_1 sobre r_1 e passe por P_2 .

Obs.: será mostrado que a solução depende da relação entre o módulo do segmento $\overline{P_1P_2}$ e a distância do ponto P_2 à reta r_1 .

Figura 27 – Quinto Axioma de Huzita



FONTE: (Cavami e Furuya, 2009, P.4)

Segundo Cavami e Furuya (2009) para solucionar este problema é necessário encontrar a intersecção de reta r_1 com o círculo de centro num dos pontos e passando pelo segundo, por exemplo o círculo de centro em P_2 e raio igual ao segmento $\overline{P_1P_2}$. O número de soluções depende da relação entre a distância de P_2 a r_1 e de P_1 a P_2 :

a. se a distância de P_2 a $r_1 > \overline{P_1P_2}$ o círculo construído não tangencia ou corta a reta r_1 , assim, não é possível resolver o problema com uma dobra apenas. Uma solução possível usaria duas dobras, porém, neste caso o axioma em tela não se aplicaria;

b. se a distância de P_2 a $r_1 = \overline{P_1P_2}$ há uma solução apenas;

c. se a distância de P_2 a $r_1 < \overline{P_1P_2}$ há duas soluções.

Nos casos em que a solução é possível, a dobra será a mediatriz do segmento que une P_1 e os pontos em que a reta r_1 corta ou tangencia o círculo supracitado, retornando ao 4ºAH.

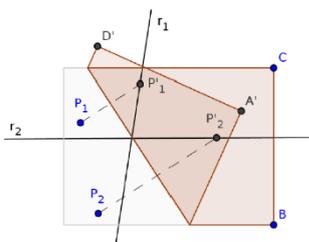
Considerando o exposto, pode-se reescrever este axioma da seguinte maneira:

5ºAH: Dados dois pontos P_1 e P_2 e um segmento de reta r_1 , se a distância P_2 a $r_1 \geq \overline{P_1P_2}$ será possível fazer pelo menos uma dobra que sobreponha P_1 sobre r_1 e passe por P_2 .

5.3.6 Sexto Axioma de Huzita (6ºAH)

6AH: Dados dois pontos P_1 e P_2 e dois segmentos de reta r_1 e r_2 , é possível fazer uma dobra que sobreponha P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2 .

Figura 28 – Sexto Axioma de Huzita



FONTE: (Cavami e Furuya, 2009, P.5)

Para solucionar este problema basta escolher um ponto P_3 na reta r_1 para ser o centro de um círculo de raio $\overline{P_1P_2}$ e marcar os pontos (P_4 e P_5 , se houver) onde a reta r_2 corta ou tangencia o círculo. Nesse ponto, basta sobrepor o segmento $\overline{P_1P_2}$ ao segmento $\overline{P_3P_4}$ ou $\overline{P_3P_5}$ com o emprego do **3ºAH**.

5.3.6.1 Se os segmentos forem paralelos

a) se a distância entre as retas for maior que o segmento $\overline{P_1P_2}$ não há solução possível e, portanto, é impossível fazer a dobra requerida;

b) caso contrário, desconsiderando as restrições do papel, o 6AH pode ser reescrito da seguinte forma:

6ºAH (retas paralelas): Dados dois pontos P_1 e P_2 e dois segmentos de reta paralelos r_1 e r_2 , se a distância entre as retas for menor ou igual ao segmento $\overline{P_1P_2}$, é possível fazer pelo menos uma dobra que sobreponha P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2 .

5.3.6.2 Se os segmentos forem concorrentes

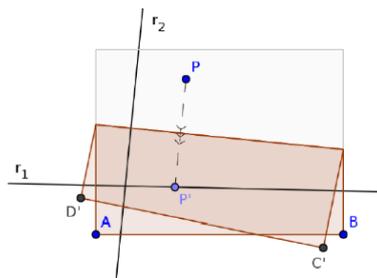
Nesse caso, o 6AH pode ser reescrito da seguinte forma:

6ºAH (retas concorrentes): Dados dois pontos P_1 e P_2 e dois segmentos de reta concorrentes r_1 e r_2 , é possível fazer pelo menos uma dobra que sobreponha P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2 .

5.3.7 Sétimo Axioma de Huzita-Hatori (7ºAHH)

7ºAHH: Dado um ponto P_1 e dois segmentos de reta r_1 e r_2 , é possível fazer uma dobra perpendicular a r_2 e que sobreponha P_1 sobre r_1 (Figura 29).

Figura 29 – Sétimo Axioma de Huzita-Hatori



Para solucionar este problema basta marcar sobre a reta r_1 o P_2 na intersecção com a reta $r_3 // r_2$ e passando por P_1 . A dobra será a mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$ que será produzida com o emprego do 2°AH .

a) Se os segmentos forem paralelos: não há solução.

b) Se os segmentos forem concorrentes: valendo-se da prova da unicidade da paralela traçada de um ponto, em relação a uma reta dada (3°AH) e da prova unicidade da mediatriz (2°AH), o 7°AHH pode ser reescrito da seguinte maneira:

7°AHH : Dado um ponto P_1 e dois segmentos de reta concorrentes r_1 e r_2 , é possível fazer uma única dobra perpendicular a r_2 e que sobreponha P_1 sobre r_1 .

Hatori (2003) propõe que o sexto axioma de Huzita seria suficiente para garantir a reprodução de qualquer dobradura uma vez que os demais axiomas seriam degenerações deste último. Surpreendentemente, o sexto axioma proposto por Huzita, julgado por Hatori o único fundamental para a matemática dos origamis, é exatamente o mesmo que foi descoberto por Margherita P Beloch, na década de 1930 e que permaneceu praticamente desconhecido até as publicações de Huzita (Friedman e Rittberg, 2019). A pesquisadora italiana, infelizmente, não conseguiu inspirar seus contemporâneos a prosseguirem sua pesquisa e não consta que tenha visualizado a magnitude de sua descoberta.

As omissões históricas não se limitaram apenas a Row e Beloch uma vez que a comunidade matemática se acostumou a trabalhar com os Axiomas de Huzita-Hatori conforme apresentados pelo segundo autor, em 2003. Lang (2010) sugere que no Primeiro Encontro Internacional da Ciência e Tecnologia do Origami, realizado em 1989, o pesquisador Jacques Justin publicou um artigo em francês, cujo título em português seria “Solução por dobraduras da equação do terceiro grau e aplicações geométricas”, no qual apresentava um conjunto de sete axiomas equivalentes aos AHH. Este artigo, provavelmente por ter sido submetido em francês, permaneceu esquecido da maioria dos pesquisadores até ser revisitado por Lang, em 2010. Esta situação permitiu a consolidação da ideia de que os AHH eram, de fato, precursores. Lang (2010) propõe, por justiça, que conjunto de axiomas fosse renomeado para Axiomas de Huzita-Justin (AHJ) no entanto, não há evidências de que a comunidade matemática tenha aderido à sua causa e, sem deméritos ao autor francês, a nomenclatura mais usada permanece sendo a que remete à dupla nipônica Huzita-Hatori. Neste trabalho, os sete axiomas da origametria serão tratados por Axiomas de Huzita-Hatori (AHH).

6 CENTRO DE GRAVIDADE DAS FIGURAS PLANAS E PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO (RÉGUA E COMPASSO X ORIGAMI)

Lang (2010) afirma que a maioria dos estudantes do ensino médio foi apresentada às construções com régua e compasso nas aulas de geometria. O autor ressalta que, atualmente, muitos estudantes encaram essas técnicas como algo pitoresco, que está restrito a sala de aula ou às pesquisas, sem aplicação na vida prática. Este pensamento desconsidera a importância dos ensinamentos clássicos que embasam a matemática avançada e que, ainda hoje, são usados como ferramentas de projeto e construção garantindo o sustento de muitos profissionais, aos moldes do que faziam os gregos e egípcios antigos.

Para Hatori (2003) as construções com régua e compasso, mesmo as mais complicadas, podem ser resumidas em uma sequência de três procedimentos simples: traçar uma reta passando por dois pontos de interesse (P_1 e P_2), traçar um círculo de centro num ponto O e raio igual a um determinado segmento $\overline{P_1P_2}$ [Circ(O , $\overline{P_1P_2}$)] e marcar os pontos de intersecção entre retas e círculos dados. Segundo Lang (2010), respeitando as regras clássicas, o primeiro procedimento é executado com o auxílio de uma régua sem marcações de escalas, o segundo, com o emprego de um compasso, e o terceiro, com o uso das duas ferramentas, cada uma a seu turno e, nunca, simultaneamente. Apesar das regras originais para construções geométricas estarem restritas às duas ferramentas básicas, os autores concordam que existem outras técnicas para executá-las com precisão semelhante, por exemplo: construções empregando régua com escalas, esquadros e com o emprego de dobraduras (Hatori, 2003; Hadamard, 2008; Lang, 2010).

Conforme discutido no Capítulo 5, deste trabalho, as construções geométricas com uso de dobraduras são tão poderosas, interessantes e aplicáveis quanto as que são realizadas com régua e compasso. Além disso, pode-se afirmar que a sequência de construção de um origami é muito semelhante a que seria executada com régua e compasso, uma vez que ambas se baseiam numa contínua repetição de tarefas simples, destinadas a localizar pontos, segmentos e intersecções destes, com outras figuras de interesse (Hatori, 2003; Lang, 2010).

Recordando a sugestão de Neves (2013) que trata de aproveitar as relações entre as diversas áreas do conhecimento para facilitar a compreensão dos tópicos de matemática, ressaltando as Orientações Curriculares para o Ensino Médio acerca da importância do uso da história da matemática para atribuição de significados aos conceitos científicos e da necessidade de criar condições para que os alunos resolvam problemas do cotidiano com o uso da geometria e, acima de tudo, buscando reunir, num mesmo texto, alguns conceitos que normalmente

aparecem fragmentados ao longo dos programas desenvolvidos na escola, organizou-se a proposta deste trabalho. Nesse sentido, para facilitar o estudo do centro de massa de figuras planas elementares (triângulos e paralelogramos) e dos principais pontos notáveis do triângulo, de maneira agradável para o professor e os alunos, serão apresentadas duas abordagens distintas para obtenção dos referidos pontos: uma clássica, com régua e compasso, recorrendo à história da matemática e adaptando as propostas originais de Euclides, Arquimedes e Hadamard, grandes matemáticos que ajudaram a estabelecer as bases da geometria (Lima, 1991) trazendo, quando necessário, contribuições de autores modernos como Neto (2013); e outra lúdica, com o uso de dobraduras para permitir a manipulação das figuras planas pelos alunos, criar novos desafios, estimular a criatividade e desenvolver o espírito colaborativo entre os estudantes (Pope e Lam, 2011). Ao final do capítulo será apresentada uma proposta de aplicação das duas técnicas na educação básica como forma de estimular a curiosidade e aproximar a geometria dos problemas do cotidiano dos alunos.

6.1 ABORDAGEM CLÁSSICA: CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO

As técnicas de construção com régua e compasso apresentadas neste trabalho serão baseadas nas traduções do autor ou adaptações das seguintes obras:

- The Thirteen Books of Euclid's Elements (Os Treze Livros dos Elementos de Euclides), traduzidos para o inglês por de T.L.Heath, em 1908, a partir do texto original de Heiberg;

- Lessons in Geometry: plane geometry (Lições em Geometria: geometria plana), do autor francês Jacques Hadamard, publicado em 1898, traduzido para o inglês por Mark Saul, em 2008; e

- Geometria, de Antônio Caminha Muniz Neto, de 2013.

6.1.1 Centro de Gravidade (CG) das Figuras Planas Retilíneas – Baricentro (G)

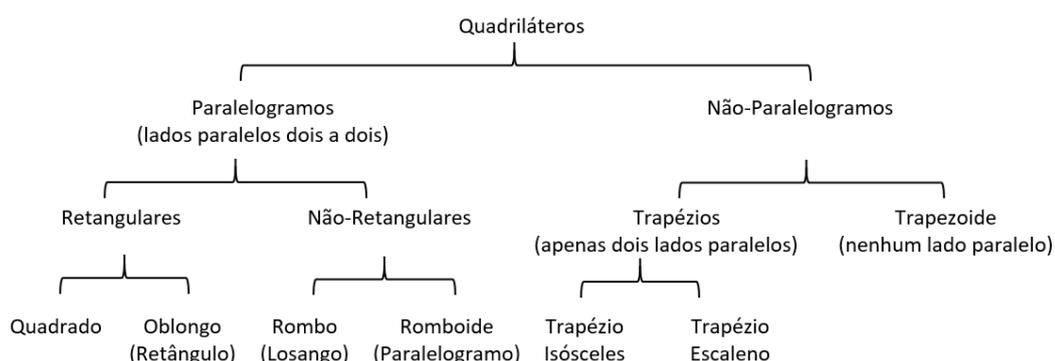
Euclides estabelece na definição 19, do Livro I, da obra Os Elementos, que as figuras retilíneas são aquelas formadas por linhas retas. Embora possa parecer óbvio para os estudantes atuais, é importante salientar que, naquela época, os matemáticos estavam tentando criar uma linguagem que permitisse tratar com correção os elementos geométricos. Heath ressalta que a segunda parte desta definição é uma contribuição original de Euclides e trata da diferenciação de três categorias distintas de figuras retilíneas: as triláteras, formadas por três linhas retas

(triângulos), as quadriláteras formadas por quatro linhas retas (família posteriormente dividida por Posidonius, 135 a 51 a.C., em paralelogramos e não paralelogramos) e as multiláteras, formadas por mais de quatro linhas retas.

Nas definições seguintes (20 e 21) Euclides descreve os tipos de triângulos existentes considerando, respectivamente, seus lados e ângulos internos. Nesse sentido, em relação aos lados, existiriam os triângulos equiláteros (três lados iguais), isósceles (dois lados iguais apenas) e escaleno (três lados diferentes) e, em relação aos ângulos internos, existiriam os triângulos com um ângulo reto (triângulo retângulo em linguagem moderna), os triângulos obtusângulos (com um ângulo obtuso) e os triângulos acutângulos (com três ângulos agudos).

Em relação aos quadriláteros, Euclides identifica na definição 22 as seguintes figuras: quadrado (simultaneamente equilátero e com todos os ângulos retos), oblongo (que tem todos os ângulos retos sem ser equilátero – retângulo em linguagem atual), rombo, diamante ou losango (que é equilátero sem ter todos os ângulos retos), romboíde (que tem os lados e ângulos opostos iguais, sem ser equilátero e sem ângulos retos – paralelogramos na linguagem atual) e trapézio (todas as outras figuras quadriláteras). Heath relata que Euclides, por não definir formalmente o que seriam os paralelogramos, também não propôs uma classificação mais elaborada para os quadriláteros. A Figura 30 – Classificação dos Quadriláteros, é uma adaptação da figura original na qual o autor comenta informações trazidas por Proclus²⁷ acerca da classificação dos quadriláteros proposta por Posidonius²⁸.

Figura 30 – Classificação dos Quadriláteros – Proposta de Posidonius



FONTE: (Adaptada de HEATH, 1898, P.189)

²⁷ Proclus: estudioso que viveu entre os anos de 410 e 485 d.C. Iniciou seus estudos sobre matemática em Alexandria e, posteriormente, mudou-se para Atenas onde dedicou-se a análise e estudo do pensamento Platônico. Seus comentários sobre o Livro I de Euclides são uma das principais fontes sobre os estudos de Euclides uma vez que os textos originais do mestre foram perdidos (Heath, 1908).

²⁸ Posidonius: estudioso nascido em Apamea, no norte da Síria, aproximadamente cem anos antes da era Cristã. Destacou-se como grande professor na cidade de Rhodes, é citado várias vezes por Proclus e consta que foi um dos primeiros matemáticos a tentar provar o 5º Axioma de Euclides (Heath, 1908).

Heath adiciona que muitas dessas figuras geométricas eram conhecidas e estudadas desde as eras antigas, em tempos anteriores a Pitágoras (481 a 411 a.C.) e Platão (428 a 348 a.C.) porém havia certa imprecisão nas nomenclaturas empregadas pelos diversos estudiosos. Um exemplo significativo é referente à palavra grega empregada por Euclides para definir as figuras quadriláteras que, anteriormente à definição de sua autoria, ora estava relacionada a um quadrado e ora a um quadrilátero genérico. Exatamente por este tipo de contribuição relevante é que Euclides é considerado o Pai da Geometria Plana.

Considerando que o escopo deste trabalho é apresentar o conteúdo abordado pelos precursores do estudo sistematizado da matemática (Arquimedes, Euclides e Hadamard) a análise dos centros de gravidade de figuras planas será limitada às figuras que foram estudadas por Arquimedes, no Livro I, do texto O Centro de Gravidade dos Planos, cuja tradução adaptada consta no Capítulo 3. Nesse sentido, cabe lembrar que Arquimedes demonstrou como localizar o centro de gravidade dos triângulos, paralelogramos e trapézios. Como a prova sugerida por Arquimedes para localizar o baricentro do trapézio recorreu à divisão da referida figura em dois triângulos ela não será abordada particularmente neste trabalho.

A localização dos CG de outras figuras planas, regulares ou irregulares, não faz parte do escopo deste trabalho e pode ser desenvolvida em estudos futuros.

6.1.1.1 Centro de Gravidade dos Triângulos

Conforme apresentado nos capítulos anteriores, o CG dos triângulos é um único ponto, localizado na intersecção das suas medianas. Assim, após construir o triângulo de interesse, pode-se localizar seu CG traçando duas medianas.

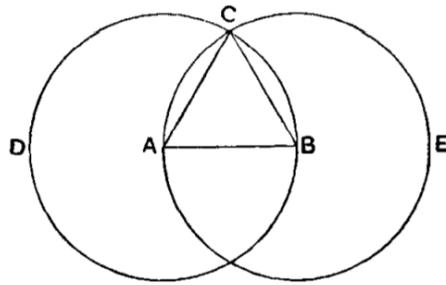
6.1.1.1.1 Construção do triângulo

a) Triângulo equilátero – Proposição 1, do Livro I, Os Elementos, de Euclides

A primeira construção proposta por Euclides após enunciar seus famosos axiomas da geometria foi: construir um triângulo equilátero sobre um segmento de reta existente. A partir deste primeiro passo, ele começou a definir as bases da geometria plana estudada até hoje.

A construção passa pelo seguinte roteiro:

Figura 31 – Os Elementos, Livro I, Proposição 1



FONTE: (Heath, 1898, P.241)

- seja \overline{AB} o segmento de interesse;
- com uso do compasso, trace o Circ BCD (A, \overline{AB}) e o Circ ACE (B, \overline{AB});
- marque o ponto C na intersecção dos dois círculos²³;
- com uso da régua, trace os segmentos \overline{CA} e \overline{CB} ;
- como $\overline{CA} = \overline{AB}$ e $\overline{CB} = \overline{AB}$, então o ΔABC é equilátero.

□

b) Triângulo qualquer

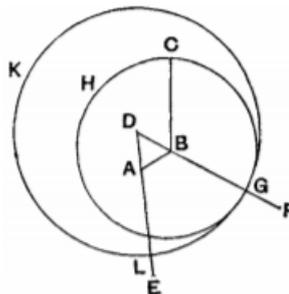
Para construir um triângulo qualquer a partir de três segmentos determinados precisa-se, primeiro, aprender a transportar um segmento com auxílio do compasso.

i) Transporte de um segmento – proposta de Euclides

Esse procedimento consta da Proposição 2, do Livro I, Os Elementos, de Euclides, com o seguinte enunciado: construir, a partir de um ponto dado, um segmento de reta igual a outro segmento conhecido.

Essa construção segue o roteiro abaixo:

Figura 32 – Os Elementos, Livro I, Proposição 2



FONTE: (Heath, 1898, P.242)

- sejam A e \overline{BC} o ponto e o segmento de interesse;
- com o auxílio de uma régua trace o segmento \overline{AB} ;
- construa o triângulo equilátero $\triangle ABD$;
- prolongue os segmentos \overrightarrow{DA} e \overrightarrow{DB} ;
- construa o Circ $BCH(B, \overline{BC})$ e marque o ponto G na intersecção entre o círculo e \overrightarrow{DB} ;
- construa o Circ $DGH(D, \overline{DG})$ e marque o ponto L na intersecção entre o círculo e \overrightarrow{DA} ;
- no Circ BCH , tem-se que $\overline{BC} = \overline{BG}$ = raio do Circ BCH ;
- no Circ DGH , tem-se que $\overline{DG} = \overline{DL}$ = raio do Circ DGH ;
- como $\overline{DG} = \overline{DB} + \overline{BG}$ e $\overline{DL} = \overline{DA} + \overline{AL}$ então $\overline{DB} + \overline{BG} = \overline{DA} + \overline{AL}$;
- como $\overline{DA} = \overline{DB}$ pois o $\triangle ABD$ é equilátero, então $\overline{BG} = \overline{AL}$;
- como $\overline{BC} = \overline{BG}$, então $\overline{BC} = \overline{AL}$

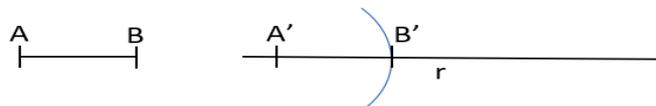
□

Assim, pode-se afirmar que com o auxílio do roteiro acima foi possível transportar o segmento \overline{BC} para a semirreta \overrightarrow{DA} .

O procedimento proposto por Euclides revelou-se trabalhoso demais para a realização da simples tarefa de transportar um segmento. Na realidade, o transporte de um segmento prescinde da construção do triângulo equilátero inicial e pode ser realizada seguindo um roteiro mais enxuto cuja descrição pode ser encontrada em Neto.

ii) Transporte de um segmento – Proposta de Neto

Figura 33 – Transporte de um segmento – Proposta de Neto



FONTE: (Autor)

- seja \overline{AB} o segmento a ser transportado para a reta r ;
- centre o compasso em A e fixe a outra extremidade do mesmo em B ;
- marque o ponto A' sobre a reta r ;

- mantendo a abertura calibrada anteriormente, centre o compasso em A' e marque com a outra extremidade o ponto B' sobre a reta r ;
- como a abertura do compasso é exatamente igual ao segmento \overline{AB} , então o segmento $\overline{A'B'} = \overline{AB}$

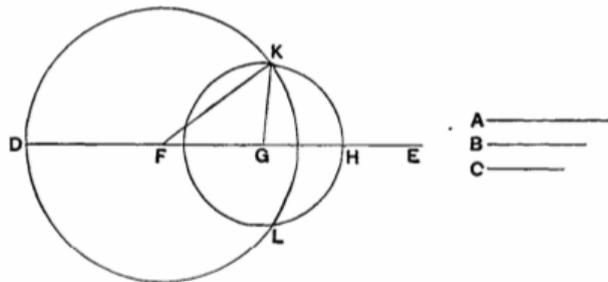
Assim, com o auxílio do roteiro simplificado, pode-se afirmar que o segmento \overline{AB} foi transportado para a reta r .

Antes de construir um triângulo, transportando sequencialmente os segmentos dados, é necessário garantir que a figura exista e, para isso, deve ser considerada a desigualdade triangular, apresentada por Euclides, na Proposição 20, Livro I, da obra Os Elementos, conforme segue: em qualquer triângulo a soma de dois lados é sempre maior que o terceiro lado.

iii) Construção de um triângulo – proposta de Euclides

Considerando satisfeita a desigualdade triangular, pode-se construir um triângulo qualquer adotando o roteiro sugerido por Euclides na Proposição 22, Livro I, da obra Os Elementos,

Figura 34 – Os Elementos, Livro I, Proposição 20



FONTE: (Heath, 1898, P.286)

- sejam A , B e C os segmentos correspondentes aos lados do ΔKFG , tais que $A+B > C$, $A+C > B$ e $B+C > A$ (desigualdade triangular);
- sobre a semirreta \overrightarrow{DE} marque $\overline{DF} = A$, $\overline{FG} = B$ e $\overline{GH} = C$;
- construa o Circ (F, A) e o Circ (G, C) e marque os pontos K e L na sua intersecção;
- trace os segmentos \overline{KF} e \overline{KG} ;
- como $\overline{KF} = A$ e $\overline{KG} = C$, pois são raios dos círculos construídas e $\overline{FG} = B$, por construção, então os lados do ΔKFG são respectivamente iguais a A , B e C .

□

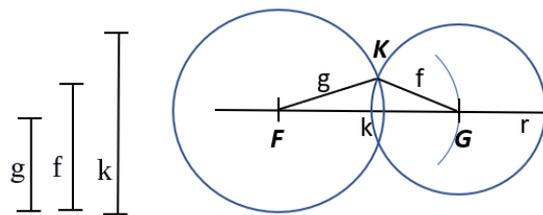
Nesse ponto, pode-se afirmar que, com o auxílio do roteiro acima, será possível construir um triângulo qualquer, a partir de três segmentos de reta que respeitem a desigualdade triangular.

Mais uma vez pode-se simplificar o procedimento sugerido por Euclides e realizar a construção direta do ΔKFG seguindo um roteiro enxuto proposto por Hadamard e exemplificado em Neto.

Na ótica do autor francês o desenho de um triângulo, a partir de três segmentos conhecidos, é a segunda construção fundamental da geometria e serve de apoio para vários problemas mais complexos.

iv) Construção do triângulo – proposta de Neto

Figura 35 – Construção de um triângulo qualquer – Proposta de Neto



FONTE: (Autor)

- trace uma reta r e, sobre ela, marque os pontos F e G tais que $\overline{FG} = k$;
- trace os círculos $C_1(F, g)$ e $C_2(G, f)$;
- marque o ponto K como um dos pontos de intersecção dos círculos C_1 e C_2 ;
- trace os segmentos \overline{KF} e \overline{KG} ;

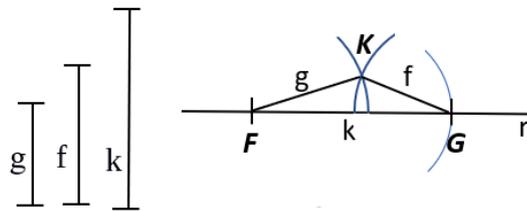
- como $\overline{KF} = g$ e $\overline{KG} = f$, pois são raios dos círculos construídos e $\overline{FG} = k$, por construção, então os lados do ΔKFG são respectivamente iguais a g, f e k .

□

Assim, com o auxílio do roteiro simplificado, pode-se construir qualquer triângulo, sendo conhecidos os comprimentos dos seus lados.

Este roteiro pode ser adaptado para que o desenho fique mais limpo. Nesse caso, basta traçarmos os arcos dos círculos C_1 e C_2 necessários para encontrar um dos dois pontos de intersecção.

Figura 36 – Construção de um triângulo qualquer – Proposta de Neto (adaptada)



FONTE: (Autor)

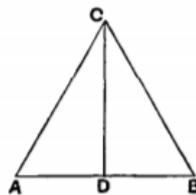
6.1.1.1.2 Construção das medianas

Conforme discutido no Capítulo 4 a mediana é um segmento de reta que une um vértice de um triângulo ao ponto médio do lado oposto. Assim, para construir as medianas será preciso, primeiro, localizar o ponto médio de cada lado, ou seja, construir a mediatriz do segmento de reta que representa o lado do triângulo.

a) Mediatriz de um segmento – proposta de Euclides

Na obra Os Elementos, Euclides apresenta na Proposição 10, do Livro I, seu método para dividir um dado segmento em duas partes iguais.

Figura 37 – Mediatriz - Os Elementos, Livro I, Proposição 10



FONTE: (Heath, 1898, p.267)

- seja \overline{AB} o segmento a ser dividido;
- construa um triângulo equilátero sobre \overline{AB} e, posteriormente, construa a bissetriz do ângulo \hat{C} ;
- marque o ponto M na intersecção da bissetriz de \hat{C} e o lado \overline{AB} ;
- como os ΔACD e ΔBCD são congruentes LAL, então $\overline{AD} = \overline{DB}$;
- assim, D é o ponto médio do lado AB .



O procedimento sugerido por Euclides depende da construção da bissetriz do ângulo \hat{C} cujo roteiro foi apresentado pelo matemático na Proposição 9, Livro I, da obra Os Elementos.

Figura 38 – Bissetriz - Os Elementos, Livro I, Proposição 9



FONTE: (Heath, 1898, p.264)

- seja \widehat{BAC} o ângulo a ser dividido;
- marque um ponto D , arbitrário, sobre o segmento \overline{AB} e, posteriormente, marque o ponto E , sobre o segmento \overline{AC} , tal que $\overline{AD} = \overline{AE}$;
- trace o segmento \overline{DE} e construa o triângulo equilátero $\triangle DEF$;
- como os $\triangle ADF$ e $\triangle AEF$ são congruentes LLL, então $\widehat{DAF} = \widehat{EAF}$;
- assim, a semirreta \overrightarrow{AF} é a bissetriz do ângulo \widehat{BAC} .

□

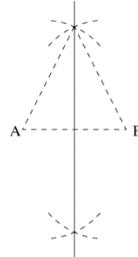
Verifica-se que o método proposto por Euclides, por ser pioneiro na geometria, preocupou-se em deixar claro os passos que seriam seguidos para a bissecção de um segmento e sua demonstração.

Hadamard admite que a construção da mediatriz de um segmento é a primeira construção fundamental da geometria. Segundo sua abordagem, a construção da perpendicular a uma reta passando por um ponto, e a construção da bissetriz de um ângulo, são aplicações da primeira construção fundamental.

O roteiro proposto por Hadamard para obtenção da mediatriz prescinde da construção dos triângulos propostos por Euclides e, embora se baseie nas mesmas propriedades, é mais direto e gera um desenho mais limpo. Exatamente por essas características, os passos propostos pelo autor, com algumas adaptações eventuais, são ensinados nas aulas de geometria contemporâneas. Neto propõe em sua obra procedimentos muito semelhantes aos que Hadamard apresentou em seus estudos.

b) Mediatriz de um segmento – Proposta de Hadamard

Figura 39 – Mediatriz – Proposta de Hadamard

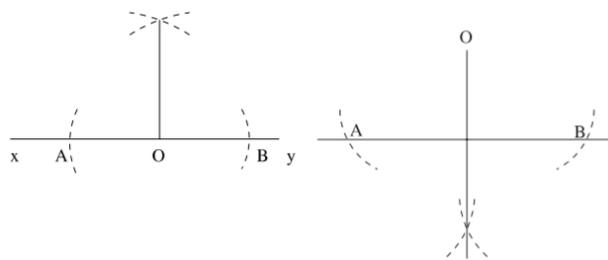


FONTE: (Hadamard, 1898, p.84)

- seja \overline{AB} o segmento de interesse;
- tendo as extremidades A e B como centro, trace arcos com raio suficientemente grande para que eles se intersectem. Os dois pontos de intersecção pertencem mediatriz (equidistam das extremidades);
- unindo os dois pontos, será construída a mediatriz do segmento \overline{AB} .

c) Perpendicular a uma reta passando por um ponto – Proposta de Hadamard

Figura 40 – Perpendicular – Proposta de Hadamard



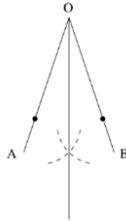
FONTE: (Hadamard, 1898, p.85)

- sejam o ponto O e a reta xy as figuras iniciais;
- tendo o ponto O como centro trace um círculo de raio arbitrário que corte a reta xy nos pontos A e B ;
- trace os círculos $C_1(A, \overline{OA})$ e $C_2(B, \overline{OA})$;
- se o ponto O não estiver sobre a reta, os dois círculos se intersectarão num ponto O' , simétrico a O , em relação a reta;
- se o ponto O estiver sobre a reta, os dois círculos se intersectarão em dois pontos O' e O'' , simétricos em relação a reta;

- unindo os pontos O e O' , será construída a perpendicular procurada;

d) Bissetriz de um ângulo – Proposta de Hadamard

Figura 41 – Bissetriz – Proposta de Hadamard



FONTE: (Hadamard, 1898, p.85)

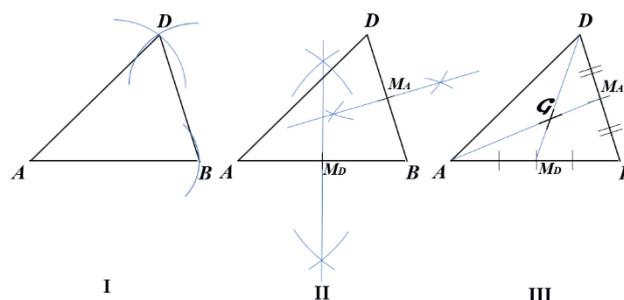
- seja \hat{O} o ângulo a ser dividido;
- marque os segmentos $\overline{OA} = \overline{OB}$ sobre os lados do ângulo;
- construa a perpendicular ao segmento \overline{AB} passando por O ;
- a perpendicular construída é a bissetriz procurada.

Conforme mencionado anteriormente, para demonstrar a correção das construções sugeridas por Hadamard pode-se lançar mão dos mesmos argumentos usados por Euclides. As técnicas do autor francês são, aparentemente, mais diretas uma vez que deixam subentendidas as semelhanças de triângulos existentes.

6.1.1.1.3 Construção do Baricentro

A localização do baricentro de um triângulo com uso de régua e compasso seguirá, portanto, o seguinte roteiro:

Figura 42 – Localização do Baricentro do Triângulo



FONTE: (Autor)

- Figura 42.I - construção do $\triangle ABC$ seguindo a roteiro apresentado na Figura 36 - Construção de um triângulo qualquer – Proposta de Neto (adaptada);
 - Figura 42.II - construção das mediatrizes de dois lados do triângulo seguindo o roteiro apresentado na Figura 39 - Mediatriz – proposta de Hadamard;
 - Figura 42.III - construção das medianas unindo os vértices aos pontos médios dos lados opostos; e
- O **baricentro** (\mathcal{G}) do $\triangle ABC$ será o ponto de intersecção das duas medianas construídas.

6.1.1.2 Centro de Gravidade dos Paralelogramos

Euclides chama de rombóide a figura que hoje costumamos chamar de paralelogramo. Esta diferença, no entanto, não altera as características do quadrilátero que terá os lados e ângulos opostos iguais. Utilizando a classificação proposta por Posidonius, esta classe de figuras inclui os quadrados, retângulos, losangos e os paralelogramos propriamente ditos. Neste trabalho estas figuras serão chamadas genericamente pelo nome de paralelogramos nome que também é utilizado por Aristóteles.

Conforme apresentado no Capítulo 3, Arquimedes provou que o CG de qualquer paralelogramo está localizado no ponto de intersecção de suas diagonais. Assim, após construir o paralelogramo, basta unir os vértices não consecutivos que será identificado o baricentro da figura.

6.1.1.2.1 Construção do paralelogramo

Para construir quadrados e retângulos precisa-se apenas conhecer as dimensões dos lados, uma vez que todos os seus ângulos são retos. Nesse sentido, após transportar o segmento referente ao primeiro lado, basta construir perpendiculares a ele passando por suas extremidades, transportar os demais lados da figura e unir os pontos. Essas construções já foram apresentadas nos itens anteriores.

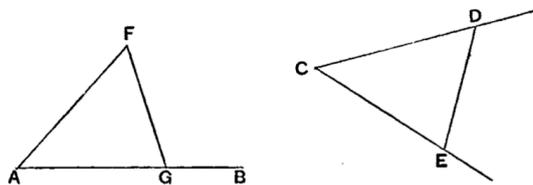
Para construir losangos e paralelogramos precisa-se transportar segmentos e ângulos, uma vez que a definição da figura estabelece a igualdade dos respectivos opostos. Nesse caso, basta apenas demonstrar como transportar ângulos, com régua e compasso, para ser possível construir as referidas figuras.

- i) Transporte de um ângulo – proposta de Euclides

Euclides define um ângulo plano retilíneo como sendo a inclinação entre dois segmentos de reta que se intersectam em um plano e não são coincidentes com a mesma reta (Proposições 8 e 9, do Livro I, Os Elementos).

Na Proposição 23, do Livro I, Euclides apresenta seu método para construir um segmento de reta que forme um ângulo determinado com um outro segmento de interesse. Segundo Heath esta é uma proposta original de Euclides e, ao seu ver, também é o registro mais antigo que se dispõe tratando do assunto.

Figura 43 – Os Elementos, Livro I, Proposição 23



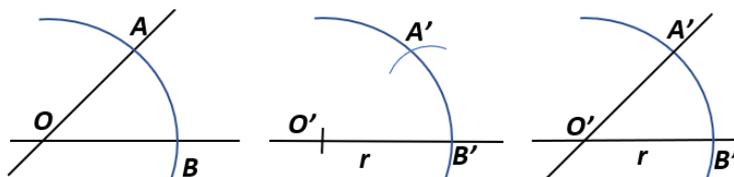
FONTE: (HEATH, 1898, p.294)

- sejam o segmento \overline{AB} e o ângulo \widehat{C} os elementos de interesse;
- marque os pontos D e E sobre os lados do segmento e construa o $\triangle CDE$
- sobre o segmento \overline{AB} construa o $\triangle AFG$ transportando os segmentos \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{CE} ;
- como $\triangle CDE \equiv \triangle AFG$, caso LLL, então $\widehat{DCE} = \widehat{FAG}$;
- assim, a inclinação (ângulo) entre os segmentos \overline{AF} e \overline{AB} é igual ao ângulo \widehat{C} ;

□

Pode-se observar que o roteiro proposto por Euclides formaliza todas as construções necessárias para transportar um ângulo. Contudo, Hadamard propõe uma sequência mais enxuta, baseada nos mesmos princípios, que é ensinada até os dias de hoje nas salas de aula. Neto propõe em sua obra procedimento muito semelhante ao sugerido pelo autor francês.

Figura 44 – Transporte de um ângulo – Proposta de Hadamard



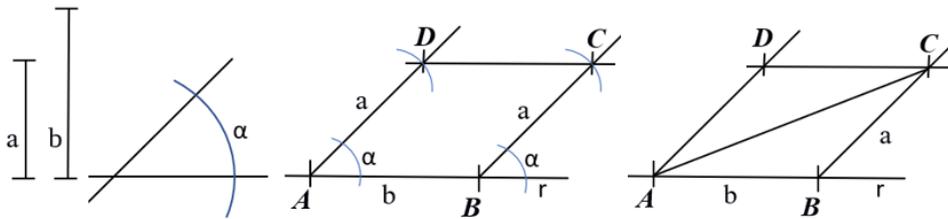
FONTE: (AUTOR)

- sejam o ângulo \widehat{O} e a reta r os elementos de interesse;
- trace um arco de círculo de centro em O com raio arbitrário e marque os pontos A e B sobre os lados do ângulo \widehat{O} ;
- marque o ponto O' sobre a reta r , trace outro arco de círculo igual ao primeiro e marque o ponto B' sobre a reta r ;
- trace um arco de círculo de centro em B' com raio igual ao segmento \overline{AB} e marque o ponto A' na intersecção dos dois arcos;
- como $\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$, caso LLL, então $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$;
- assim, o ângulo \widehat{O} foi transportado para o ponto O' .

□

Nesse ponto, conhecendo-se os tamanhos dos lados e um dos ângulos é possível construir qualquer paralelogramo.

Figura 45 – Construção do paralelogramo específico – Proposta do Autor



FONTE: (AUTOR)

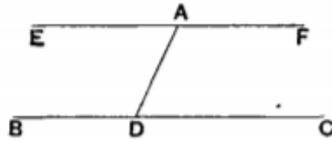
- sejam os comprimentos a e b e o ângulo $\widehat{\alpha}$ os elementos de interesse;
- marque sobre a reta r o segmento $\overline{AB} = b$;
- transporte o ângulo $\widehat{\alpha}$ para as extremidades do segmento \overline{AB} ;
- trace dois círculos {Circ (A , a) e Circ (B , a)} e marque os pontos D e C , respectivamente, na intersecção dos círculos com os lados do ângulo $\widehat{\alpha}$;
- trace o segmento \overline{AC} ;
- como \overline{AD} é paralelo a \overline{BC} , por construção, então $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ (alternos internos);
- portanto $\triangle ADC \equiv \triangle CBA$, caso LAL, então $\overline{AB} = \overline{DC}$;
- como o quadrilátero $ABCD$ tem os lados opostos iguais, então é um paralelogramo.

□

Hadamard propõe um caminho alternativo para construção de um paralelogramo e Neto adota uma solução semelhante em sua obra. No entanto, construção sugerida pelos autores precisa ser precedida pela solução de mais um problema sugerido por Euclides: traçar uma

paralela a uma reta, ou segmento de reta conhecido, passando por um ponto também conhecido (Proposição 31, Livro I, Os Elementos).

Figura 46 – Paralela a uma reta passando por um ponto – Proposta de Euclides



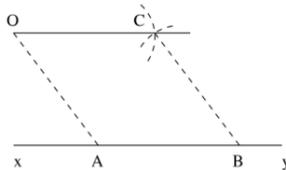
FONTE: (Heath, 1898, P.316)

- sejam A e \overline{BC} o ponto e o segmento de reta de interesse;
- marque D , um ponto qualquer o segmento \overline{BC} e trace o segmento \overline{AD} ;
- construa o ângulo $\widehat{EAD} = \widehat{CDA}$ e prolongue o segmento \overline{EA} ;
- como \overline{AD} forma ângulos alternos internos iguais com os segmentos \overline{BC} e \overline{EF} , então os dois segmentos são paralelos;

- como $A \in \overline{EF}$ então foi construída uma reta paralela a \overline{BC} , passando por A

□

Figura 47 – Paralela a uma reta passando por um ponto – Proposta de Hadamard



FONTE: (Hadamard, 1898, P.88)

- sejam O e xy o ponto e a reta interesse;
- marque A e B , dois pontos quaisquer, sobre a reta xy ;
- trace dois círculos $\{\text{Circ}(O, \overline{AB}) \text{ e } \text{Circ}(B, \overline{OA})\}$ e marque o ponto C , na intersecção entre eles;

- trace o segmento \overline{OC} ;
- como, por construção, $\overline{AB} = \overline{OC}$ e $\overline{OA} = \overline{CB}$, o quadrilátero $ABCD$ tem os lados opostos iguais e, portanto, é um paralelogramo;

- assim, a semirreta \overrightarrow{OC} é paralela a reta xy ;

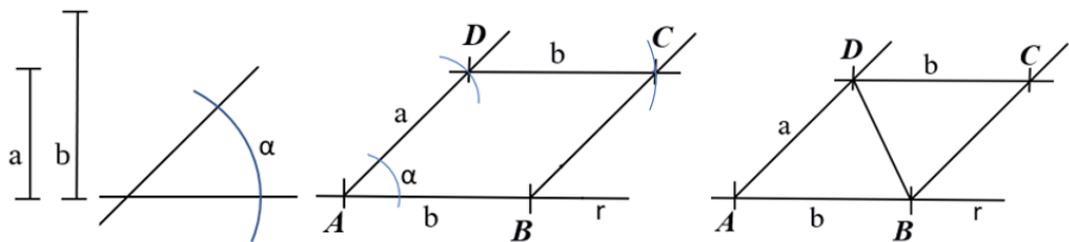
- como $O \in \overrightarrow{OC}$, foi construída uma reta paralela a \overline{AB} , passando por O

□

Pode-se observar que a construção proposta por Hadamard tanto serve para construir a reta paralela pretendida como para construir um paralelogramo genérico. Contudo, o referido procedimento ainda não permite a construção de um paralelogramo com os lados e um ângulo conhecido.

Uma vez apresentado o procedimento para construção de paralelas pode-se empregar este conhecimento para construção de um paralelogramo específico conforme Neto apresenta em sua obra.

Figura 48 – Construção do paralelogramo específico – Proposta de Neto



FONTE: (AUTOR)

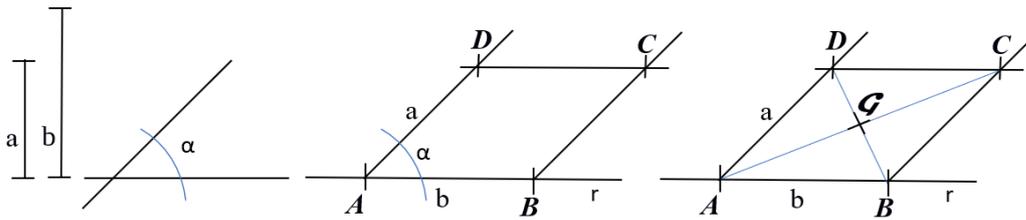
- sejam os comprimentos a e b e o ângulo $\hat{\alpha}$ os elementos de interesse;
- marque segmento $\overline{AB} = b$ sobre a reta r ;
- transporte o ângulo $\hat{\alpha}$ para a extremidade A do segmento \overline{AB} ;
- transporte o segmento a para o lado do ângulo construído e marque o ponto D ;
- trace uma paralela a r passando por D ;
- transporte o segmento b para a reta construída e marque o ponto C ;
- trace o segmento \overline{CB} ;
- como \overline{AD} é paralelo a \overline{BC} , por construção, então $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (alternos internos);
- portanto $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$, caso LAL, então $\overline{AD} = \overline{BC}$;
- como o quadrilátero $ABCD$ tem os lados opostos iguais, então é um paralelogramo.

□

6.1.1.2.2 Construção do Baricentro

Uma vez construído o paralelogramo, basta unir os vértices opostos (traçar as diagonais da figura) para localizar o seu baricentro (\mathcal{G}).

Figura 49 – Baricentro do Paralelogramo



FONTE: (Autor)

6.1.1.3 Importância do Centro de Gravidade

Do ponto de vista da matemática os teoremas que resultam das propriedades do baricentro são menos interessantes que os que empregam as propriedades do Ortocentro (Johnson, 1929, p.173). Além disso, por não haver nenhum círculo notável associado ao CG este ponto pode ser menosprezado no estudo da matemática.

Na obra *Geometria Euclidiana Avançada* (Johnson, 1929) o autor tece rápidos comentários sobre o baricentro no capítulo relativo aos pontos notáveis do triângulo e, posteriormente, retorna a ele na seção dedicada a tópicos diversos no final do livro. Nessa nova seção, discutem-se algumas propriedades físicas do centro de gravidade e como elas são reproduzidas em modelos matemáticos.

Beer e Johnston (2009) definem a Mecânica como um ramo da física dedicado a descrever e prever as condições de repouso, ou movimento, dos corpos sobre a ação de forças. Um de seus ramos, a mecânica dos corpos rígidos, é estudado desde os tempos de Aristóteles (384 a 322 a.C.) e Arquimedes (287 a 212 a.C.) e depende, fundamentalmente, da conceituação e localização do Centro de Gravidade. Assim, pode-se dizer que, na mecânica, o centro de gravidade seria o principal ponto notável de um triângulo e de qualquer outra figura plana.

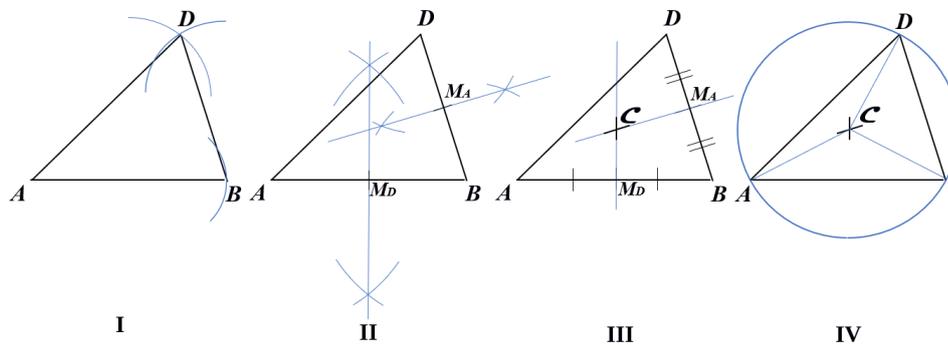
Enfim, as propriedades físicas do baricentro serão importantes para criar uma oportunidade de trabalhar de maneira lúdica com triângulos e paralelogramos retirando a geometria, por um momento, do campo das ciências restritas aos livros e a sala de aula. Essa atividade será explorada nas “Sugestões para o Ensino Médio” que serão apresentadas no final deste capítulo e no Produto Educacional que consta do apêndice do presente trabalho.

6.1.2 Circuncentro do Triângulo (\mathcal{C})

Conforme apresentado no Capítulo.4 deste trabalho o circuncentro \mathcal{C} é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo e, também, é o centro do círculo circunscrito ao mesmo triângulo.

A localização do circuncentro de um triângulo com uso de régua e compasso seguirá, portanto, o seguinte roteiro:

Figura 50 – Circuncentro do Triângulo



FONTE: (Autor)

- Figura 50.I - construção ΔABD seguindo a roteiro apresentado na Figura 36 - Construção de um triângulo qualquer – Proposta de Neto (adaptada);

- Figura 50.II - construção das mediatrizes de dois lados do triângulo seguindo o roteiro apresentado na Figura 39 - Mediatriz – Proposta de Hadamard;

- Figura 50.III – o **circuncentro** (\mathcal{C}) do ΔABD será o ponto de intersecção das duas mediatrizes construídas; e

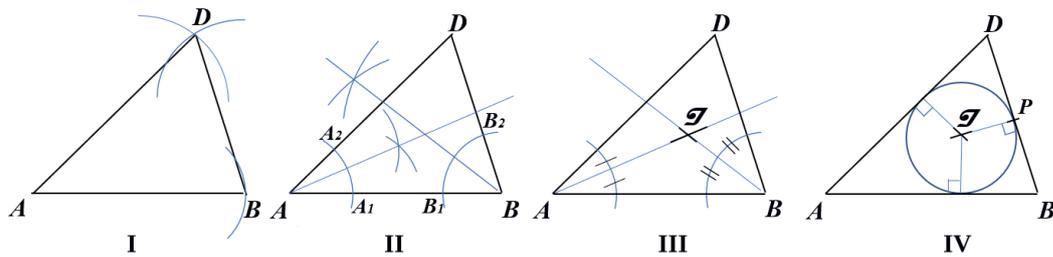
- Figura 50.IV – construção do círculo circunscrito ao ΔABD : Circ (\mathcal{C} , \overline{CA}).

6.1.3 Incentro do Triângulo (\mathcal{I})

Conforme apresentado no Capítulo.4 deste trabalho o incentro \mathcal{I} é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo e, também, é o centro do círculo inscrito ao mesmo triângulo.

A localização do incentro de um triângulo com uso de régua e compasso seguirá, portanto, o seguinte roteiro:

Figura 51 – Incentro do Triângulo



FONTE: (Autor)

- Figura 51.I - construção ΔABC seguindo a roteiro apresentado na Figura 36 - Construção de um triângulo qualquer – Proposta de Neto (adaptada);

- Figura 51.II - construção das bissetrizes de dois ângulos internos do triângulo seguindo o roteiro apresentado na Figura 41 - Bissetriz – proposta de Hadamard;

- Figura 51.III – o **incentro** (I) do ΔABC será o ponto de intersecção das duas bissetrizes construídas; e

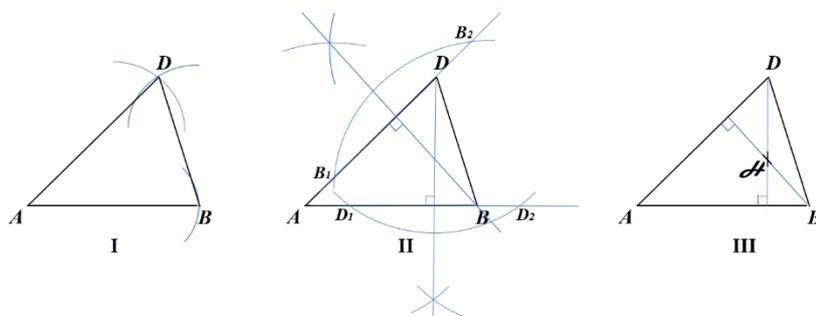
- Figura 51.IV – construção do círculo inscrito ao ΔABC : Circ (I, \overline{IP}).

6.1.4 Ortocentro do Triângulo (H)

Conforme apresentado no Capítulo 4 deste trabalho o ortocentro H é o ponto de intersecção das alturas relativas aos vértices de um triângulo.

A localização do ortocentro de um triângulo com uso de régua e compasso seguirá, portanto, o seguinte roteiro:

Figura 52 – Ortocentro do Triângulo



FONTE: (Autor)

- Figura 52.I - construção ΔABC seguindo a roteiro apresentado na Figura 36 - Construção de um triângulo qualquer – Proposta de Neto (adaptada);

- Figura 52.II - construção das alturas relativas a dois vértices do triângulo seguindo o roteiro apresentado na Figura 40 – Perpendicular – Proposta de Hadamard; e

- Figura 52.III – o **ortocentro** (H) do ΔABC será o ponto de intersecção das duas alturas construídas.

6.2 ABORDAGEM LÚDICA: ORIGAMI

Conforme discutido nos itens anteriores, as construções geométricas com uso de dobraduras são tão poderosas quanto as que são realizadas com régua e compasso. E exatamente por essa razão elas podem ser empregadas em sala de aula para desenvolver o interesse pela matemática e abordar, além dos conceitos, os aspectos procedimentais e atitudinais do ensino de geometria.

Para colaborar com a tarefa de criar um ambiente que favoreça o aprendizado em sala de aula, o professor de geometria pode usar dobraduras para localizar e explorar algumas propriedades do Centro de Gravidade de Figuras Planas e dos Pontos Notáveis do Triângulo (PNT). Nesse sentido, serão apresentadas técnicas de dobraduras simples, baseadas nos Sete Axiomas de Hatori-Huzita, trabalhados no Capítulo. 5, que permitirão a construção precisa dos mesmos elementos apresentados nos itens 6.1.1 Centro de Gravidade (CG) das Figuras Planas Retilíneas – Baricentro (G), 6.1.2 Circuncentro do Triângulo (C), 6.1.3 Incentro do Triângulo (I) e 6.1.4 Ortocentro do Triângulo (H).

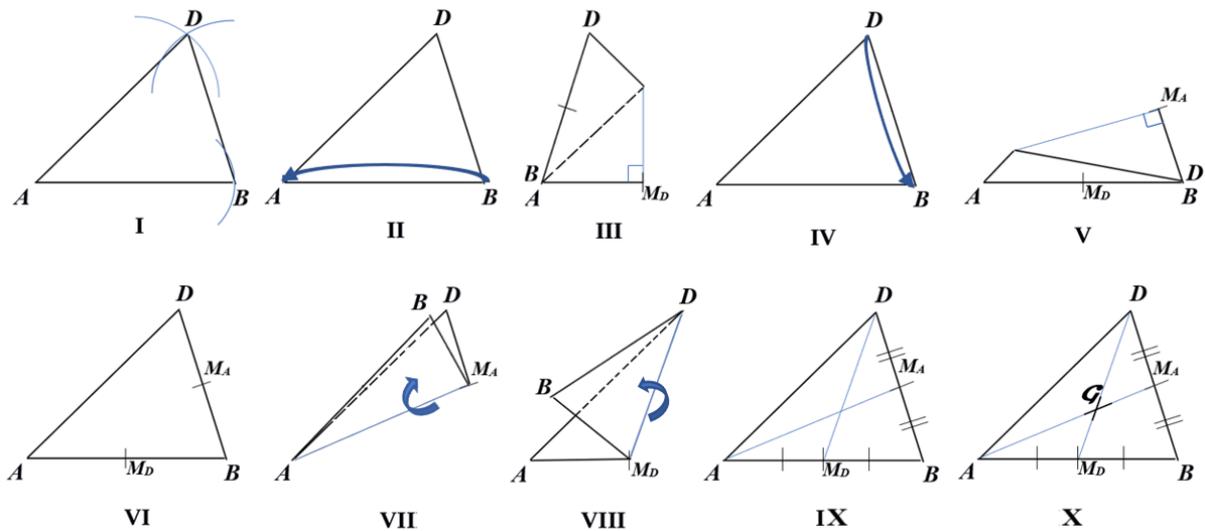
Similar ao que ocorreu nas construções com régua e compasso, a localização do CG de figuras planas e dos PNT depende da existência da figura inicial. Para possibilitar a comparação das técnicas, facilitar o trabalho com os alunos e reduzir o número de dobras ao absolutamente necessário para a localização dos pontos de interesse, optou-se por utilizar figuras iguais as que foram construídas com régua e compasso utilizando a técnica tradicional para sua construção.

6.2.1 Centro de Gravidade (CG) das Figuras Planas Retilíneas – Baricentro (G)

6.2.1.1 Centro de Gravidade dos Triângulos

Lembrando que o CG de um triângulo é o ponto de intersecção das medianas pode-se localizá-lo, por dobraduras, adaptando o roteiro apresentado na Figura 42 – Localização do Baricentro do Triângulo, conforme segue:

Figura 53 – Localização do Baricentro do Triângulo - Origami



FONTE: (Autor)

- Figura 53.I - construção do $\triangle ABC$ seguindo a roteiro apresentado na Figura 36 - Construção de um triângulo qualquer – Proposta de Neto (adaptada);

- Figura 53.II e Figura 53.III - construção da mediatriz do lado AB do triângulo sobrepondo os pontos A e B conforme apresentado na Figura 24 – Segundo Axioma de Huzita;

- Figura 53.IV e Figura 53.V- construção da mediatriz do lado DB do triângulo sobrepondo os pontos D e B conforme apresentado na Figura 24 – Segundo Axioma de Huzita;

- Figura 53.VI - localização dos pontos médios dos lados AB e DB , respectivamente M_D e M_A ;

- Figura 53.VII e Figura 53.VIII- construção das medianas executando as dobras que conectem o vértice A ao ponto M_A e o vértice D ao ponto M_D conforme apresentado na Figura 23 – Primeiro Axioma de Huzita;

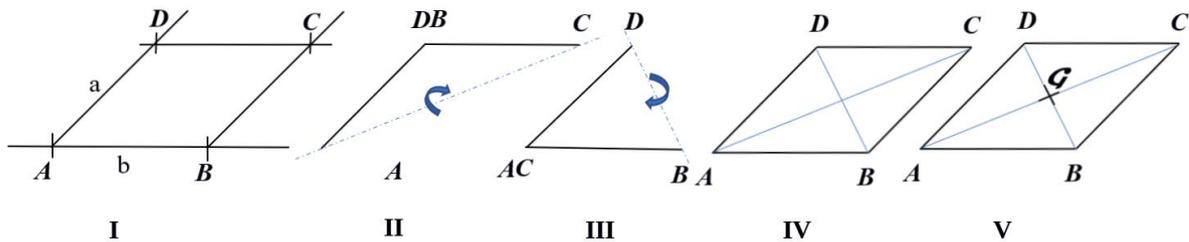
- Figura 53.IX – representação dos vincos indicativos de cada mediana.

O **baricentro** (G) do $\triangle ABC$ será o ponto de intersecção das duas medianas construídas (Figura 53.X).

6.2.1.2 Centro de Gravidade dos Paralelogramos

Lembrando que o CG de um paralelogramo é o ponto de intersecção das duas diagonais pode-se localizá-lo, por dobraduras, conforme segue:

Figura 54 – Localização do Baricentro do Paralelogramo - Origami



FONTE: (Autor)

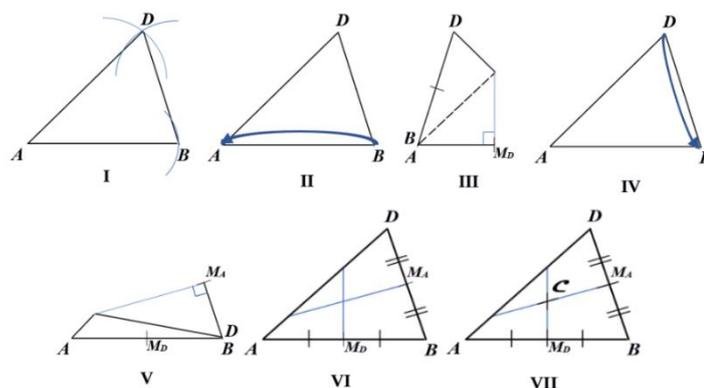
- Figura 54.I - construção do paralelogramo $ABCD$ seguindo a roteiro apresentado na Figura 48 – Construção do paralelogramo específico – Proposta de Neto;
- Figura 54.II - construção da diagonal AC do paralelogramo (vinco que passa sobre os pontos A e C conforme apresentado na Figura 23 – Primeiro Axioma de Huzita;
- Figura 54.III - construção da diagonal BD do paralelogramo (vinco que passa sobre os pontos B e D conforme apresentado na Figura 23 – Primeiro Axioma de Huzita;
- Figura 54.IV – representação dos vincos indicativos de cada diagonal.

O **baricentro** (G) do paralelogramo $ABCD$ será o ponto de intersecção das duas diagonais construídas (Figura 54.V).

6.2.2 Circuncentro do Triângulo (C)

Lembrando que o circuncentro C é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo pode-se localizá-lo, por dobraduras, adaptando o roteiro apresentado na Figura 49 – Circuncentro do Triângulo, conforme segue:

Figura 55 – Circuncentro do Triângulo - Origami



FONTE: (Autor)

- Figura 55.I - construção do $\triangle ABC$ seguindo a roteiro apresentado na Figura 36 - Construção de um triângulo qualquer – Proposta de Neto (adaptada);

- Figura 55.II e Figura 55.III - construção da mediatriz do lado AB do triângulo sobrepondo os pontos A e B conforme apresentado na Figura 24 – Segundo Axioma de Huzita;

- Figura 55.IV e Figura 55.V- construção da mediatriz do lado DB do triângulo sobrepondo os pontos D e B conforme apresentado na Figura 24 – Segundo Axioma de Huzita;

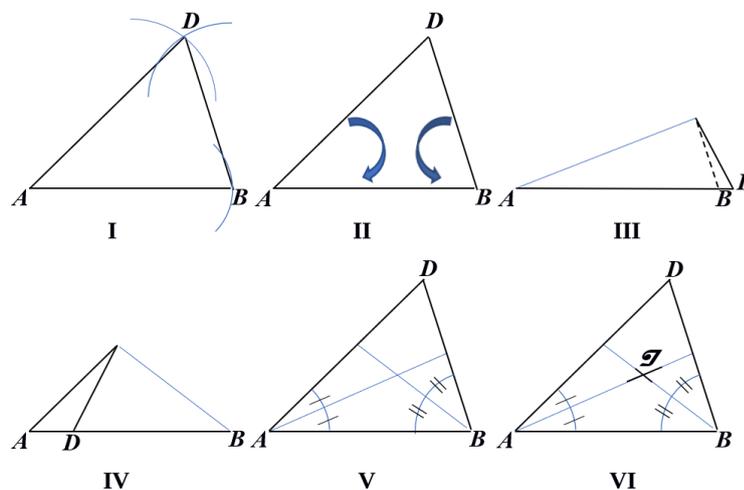
- Figura 55.VI – representação dos vincos indicativos de cada mediatriz.

O **circuncentro** (C) do $\triangle ABC$ será o ponto de intersecção das duas mediatrizes construídas (Figura 55.VII).

6.2.3 Incentro do Triângulo (\mathcal{I})

Lembrando que o incentro \mathcal{I} é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo pode-se localizá-lo, por dobraduras, adaptando o roteiro apresentado na Figura 51 – Incentro do Triângulo, conforme segue:

Figura 56 – Incentro do Triângulo - Origami



FONTE: (Autor)

- Figura 56.I - construção $\triangle ABC$ seguindo a roteiro apresentado na Figura 36 - Construção de um triângulo qualquer – Proposta de Neto (adaptada);

- Figura 56.II e Figura 56.III - construção da bissetriz interna do \hat{A} do triângulo sobrepondo os lados AD e AB conforme apresentado na Figura 25 – Terceiro Axioma de Huzita;

- Figura 56.II e Figura 56.IV - construção da bissetriz interna do \widehat{B} do triângulo sobrepondo os lados BD e BA conforme apresentado na Figura 25 – Terceiro Axioma de Huzita;

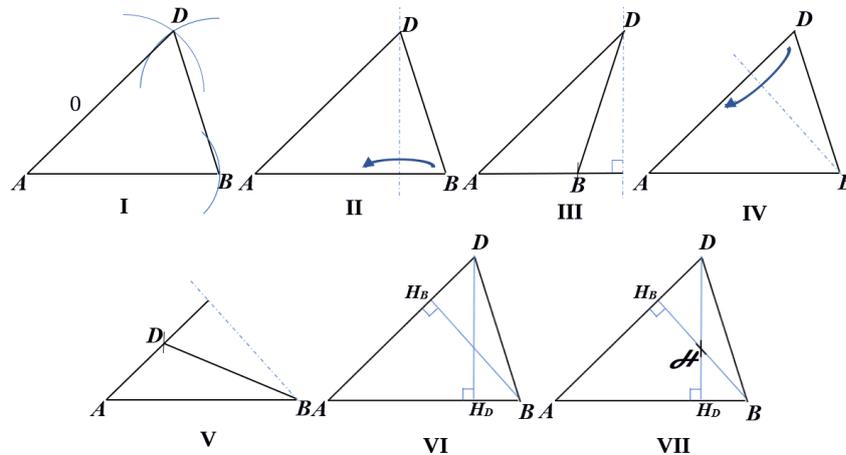
- Figura 56.V – representação dos vincos indicativos de cada bissetriz.

O **incentro** (\mathcal{I}) do ΔABC será o ponto de intersecção das duas bissetrizes construídas (Figura56.VI).

6.2.4 Ortocentro do Triângulo (\mathcal{H})

Lembrando que o ortocentro \mathcal{H} é o ponto de intersecção das alturas relativas aos vértices de um triângulo pode-se localizá-lo, por dobraduras, adaptando o roteiro apresentado na Figura 52 – Ortocentro do Triângulo, conforme segue:

Figura 57 – Ortocentro do Triângulo - Origami



FONTE: (Autor)

- Figura 57.I - construção do ΔABC seguindo a roteiro apresentado na Figura 36 - Construção de um triângulo qualquer – Proposta de Neto (adaptada); X

- Figura 57.II e Figura 57.III - construção da altura relativa ao vértice D do triângulo produzindo um vinco perpendicular ao lado AB passando pelo ponto D conforme apresentado na Figura 26– Quarto Axioma de Huzita;

- Figura 57.IV e Figura 57.V- construção da altura relativa ao vértice B do triângulo produzindo um vinco perpendicular ao lado AD passando pelo ponto B conforme apresentado na Figura 26– Quarto Axioma de Huzita;

- Figura 57.VI – representação dos vincos indicativos de cada altura.

O ortocentro (H) do $\triangle ABC$ será o ponto de intersecção das duas alturas construídas (Figura 57.VII).

6.3 SUGESTÕES PARA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Nos itens 6.1 e 6.2 deste capítulo foram apresentadas duas formas diferentes para a localização do Centro de Gravidade de figuras planas e dos principais pontos notáveis do triângulo. Para cada roteiro de construção com régua e compasso foi apresentada uma alternativa usando dobraduras e, ao final, verificou-se ser possível realizar a tarefa, com sucesso, usando as duas abordagens.

Ao introduzir este assunto no Ensino Médio o professor pode trabalhar as técnicas de maneira geral e, após garantir que os alunos têm condições de reproduzi-las, solicitar que eles formem dois grupos para trabalhar com uma das abordagens cada. Sugere-se que os próprios alunos escolham a técnica de seu interesse para que a atividade seja mais agradável e, caso uma das técnicas não tenha voluntários, o professor fará, ele mesmo, a segunda construção. Para atingir os objetivos propostos o professor deverá definir as dimensões dos lados do triângulo de interesse e, também, um dos ângulos do paralelogramo. A atividade a ser desenvolvida pode ser conduzida conforme o roteiro que segue:

- pedir aos dois grupos que construam as figuras propostas usando as técnicas trabalhadas com régua e compasso;

- sugere-se que o grupo que trabalhará exclusivamente com a abordagem tradicional faça os desenhos sobre papel vegetal ou outro tipo de papel translúcido;

- sugere-se que o segundo grupo trabalhe com papel próprio para origami ou papel criativo para dobraduras;

- os dois grupos devem trabalhar em paralelo cada um fazendo as construções conforme apresentado;

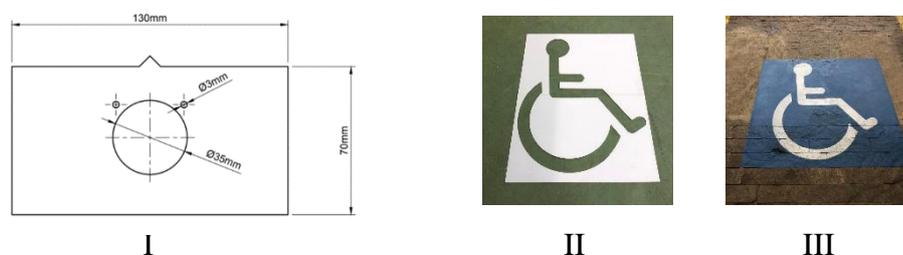
- o professor, de tempos em tempos, deve verificar o andamento das atividades e questionar sobre as expectativas dos alunos, principalmente se eles acham que os pontos vão coincidir;

- quando os dois grupos tiverem concluído a tarefa as figuras desenhadas em papel translúcido devem ser colocadas sobre os origamis para verificar se as mediatrizes, bissetrizes, alturas, medianas e os respectivos pontos de intersecção estão sobrepostos;

- ressaltados os erros de construção, espera-se que todos os elementos estejam sobrepostos. O sucesso deve ser comemorado com os alunos ressaltando que foi possível comprovar na prática a correção da teoria apresentada;

- nesse ponto, sugere-se a apresentação de alguns desafios do cotidiano que podem ser resolvidos com o uso da técnica de sobreposição de modelos: usar gabaritos para furação de chapas de madeira, montagem de móveis (Figura 58.I) ou fixação de eletrodutos em paredes de alvenaria, usar estêncil para pintura (Figura 58-II e Figura 58-III) ou produção de peças de artesanato e confeitaria. No caso específico do Ensino Médio, ressaltar que o conhecimento das técnicas tem uso na Educação Profissional, que melhora apresentação do trabalho final para o cliente e reflete na valorização do profissional que dominar algumas técnicas simples.

Figura 58 – Modelo de gabarito para montagem de móveis e de estêncil para pintura



FONTE: (Internet²⁹. Acesso em: 15 dez. 2020)

No item 6.1.1.3 foi apresentada a importância do Centro de Gravidade para a física e, também, algumas aplicações de suas propriedades na indústria. Aproveitando a oportunidade o professor pode perguntar aos alunos se eles acreditam que é possível equilibrar um corpo usando um único ponto de apoio. Depois de discutir o assunto poderá propor o seguinte desafio:

- colocar os origamis construídos em equilíbrio sobre um suporte fino conforme o que consta da Figura 59 – Suporte para experiências;

Figura 59 – Suporte para experiências



FONTE: (Autor)

²⁹ Figura 58.I disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1mN04-wliPMAnGoJSN6T-rsPxRsyBU0yO/view>
Figuras 58.II e 58.III disponíveis em: <https://stencildecor.com.br/gabarito-pne>

- espera-se que, após algum tempo, os alunos conclua que o triângulo e o paralelogramo ficam em equilíbrio somente quando apoiados no Centro de Gravidade³⁰;

- o professor pode explorar a obra de Arquimedes para discutir as razões para que o equilíbrio seja possível recordando as propriedades do baricentro. Talvez seja interessante comentar como Arquimedes conseguiu impressionar os reis de sua época e resolver problemas práticos com suas máquinas básicas;

- para fazer uma relação com o cotidiano sugere-se que o professor também apresente alguns desafios que são resolvidos com o conhecimento do baricentro: pendurar corretamente um quadro na parede, equilibrar estruturas pendentes como lustres e luminárias, andar de bicicleta ou skate, transportar cargas em carrinhos, marcar eixos de rotação, definir o prumo de obras de engenharia, inclinar-se em uma cadeira na sala de aula sem cair no chão e ser alvo de risadas dos colegas;

- especialmente no Ensino Médio, o professor pode ressaltar que várias profissões usam as propriedades do baricentro diariamente (engenheiros, marceneiros, pedreiros, aviadores, marinheiros, etc.).

Ao final da aula o professor pode distribuir os origamis e sugerir que os alunos reproduzam as experiências em suas casas e comentem em sala de aula, noutra oportunidade, a reação dos familiares.

Lembrando que um dos objetivos deste trabalho é contribuir para tornar o ensino aprendizagem da Geometria Plana um pouco mais leve e divertido, para professores e alunos, foi elaborada uma proposta de atividade didática que instrumentaliza as sugestões apresentadas acima e pode ser desenvolvida nas disciplinas de matemática, ou física, do Ensino Médio. A proposta baseia-se nos roteiros propostos por Vidmar (2017) e consta do Apêndice A – Atividade Didática Sugerida.

³⁰ Para estimular a curiosidade dos alunos o professor pode sugerir que eles assistam vídeos adicionais sobre as propriedades do centro de gravidade, semelhantes aos produzidos pelo canal Manual do Mundo, disponíveis na Internet em: <https://www.youtube.com/watch?v=PWO-X6CZQXA> e <https://youtu.be/3CsduW-U02U>.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é uma ciência viva, multifacetada e intriga a humanidade desde o início dos tempos. A geometria, particularmente, esteve presente na vida do homem mesmo antes do surgimento formal da escrita: os estudos arqueológicos dão conta de que pontos, traços e triângulos, entre outros objetos de interesse geométrico, estavam presentes nas pinturas rupestres ou artefatos usados na era pré-histórica (Martins, 2016; Blasco e Peris, 2014).

Segundo Hamburger (1984) a sociedade valorizou o conhecimento científico de maneira diferente ao longo do tempo e, normalmente, o fez com base nas soluções tecnológicas produzidas. Esse comportamento é reproduzido nas escolas fazendo com que disciplinas como a geometria recebam menos atenção de mestres e alunos por conta da falta de entendimento de sua importância ou pela dificuldade em apresentar exemplos da aplicação na vida cotidiana ou, mesmo, por falha na formação dos professores.

Neste trabalho buscou-se reunir em um único documento os estudos de gênios clássicos e matemáticos reconhecidos sobre o tema centros de gravidade e pontos notáveis do triângulo para servir de fonte de estudos e inspiração para os professores de geometria do Ensino Médio.

A opção pelo uso comparativo das construções com régua e compasso e dobraduras (origamis) tem a possibilidade de tornar as aulas mais agradáveis, quebrar o caráter puramente operacional da geometria, estimular a cooperação entre os estudantes e estimular o compartilhamento das experiências didáticas com os familiares.

Nesse sentido, o produto educacional sugerido pode ser aplicado em sala de aula ou num ambiente menos tradicional para demonstrar a importância de saber trabalhar com a geometria. Além disso, o instrumento pode ser empregado para explorar outros pontos notáveis do triângulo ou adaptado para apoiar o estudo da aritmética e a da trigonometria, entre outras áreas das ciências que, em última análise, são sugestões para pesquisas futuras.

Finalmente, ao trazer o ponto de vista da física acerca do centro de massa e trabalhar o conceito de forma lúdica abre-se uma janela para estimular os estudantes a enxergarem a matemática para além dos números e cálculos que os afligem. A oportunidade de manipular a geometria pode ser expandida para outras áreas do conhecimento e tornar a tarefa de ensinar mais interativa.

REFERÊNCIAS

- ASSIS, A. K.T. **Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca**. 1ª ed. Montreal: C. Roy Keys, 2008. 243 p. Disponível em: <https://www.ifi.unicamp.br/~assis/Arquimedes.pdf>. Acesso em: 24 out. 2019.
- BATALHA, E.; BENTO, S. **Arquimedes e a coroa**. In: FIOCRUZ, In Vivo. 2007. Disponível em: <http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?inford=946&sid=7>. Acesso em: 18 dez. 2020
- BEER, F.P. et al. **Mecânica Vetorial para Engenheiros – Estática**. 9ª ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. p. 1-270.
- BERGGREN, J. L. History of Greek Mathematics: A Survey os Recent Research. **Historia Mathematica**. nº 11, p. 394-410, 1984. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(84\)90024-7](https://doi.org/10.1016/0315-0860(84)90024-7). Acesso em: 01 abr. 2019.
- BLASCO, R.; PERIS, J. F. La dieta carnica em la cova del Bolomor (Valencia, España). Uma estratégia de deversificación em el pleistoceno médio europeu (MIS 9-5E). **Comechingonia - Revista de Arqueologia**. Córdoba, ES, nº 18, p.17-40, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.37603/2250.7728.v18.n2.18150>. Acesso em: 03 nov. 2020.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. 595 p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 12 jul. 2020.
- BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, 2013. 562 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curriculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 03 nov. 2020.
- BURTON, D. M. **The History of Mathematics: An introduction**. 7ª ed. The McGraw-Hill. 2011. 806 p.
- CAMPOS, D. F.; MOREIRA, P. C. Inadequação do uso da linguagem algébrica moderna na tradução de enunciados dos Elementos de Euclides. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**. v. 32, nº 62, p. 907-926. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08>. Acesso em: 03 jun. 2020.
- CAVAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami**. In: Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Matemática, 2009. p. 1-7. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf>. Acesso em: 23 ago. 2020.
- CECCARELLI, M. Contributions of Archimedes on mechanics and design of mechanisms. **Mechanism and Machine Theory**. nº 72, p. 86-93. 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2013.10.005>. Acesso em: 28 mar. 2020.
- CHONDROS, T. G. Archimedes life and machines. **Mechanism and Machine Theory**. nº 45, p. 1766-1775, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2010.05.009>. Acesso em: 28 mar. 2020.

COMMANDATINO, F. **Euclides – Elementos de Geometria**. ed. rev. e ampl. São Paulo: Cultura, 1944. p. 1-123.

COXETER, S. M.; GREITZER, S. L. **Geometry Revisited**. 5ª ed. New York: The Mathematical Association of America, 1967. p. 1-22.

DEMAINE, E. D.; O’ROURKE, J. **Geometric Folding Algorithms**. New York: Cambridge University, 2007. p. 167-170.

FLEISCHMANN, S. O. **O Origami e suas dobras no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos**. 2019. 116 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba. 2019.

FRIEDMAN, M.; RITBERG, C. J. The material reasoning of folding paper. **Synthese**. 2019. Disponível em:
https://www.academia.edu/38581766/The_Material_Reasoning_of_Folding_Paper.
Acesso em: 26 jun. 2020.

FRIEDMAN, M. Mathematical Recreational Folding in the 20th Century: Between Row and Gardner In: INTERNATIONAL MEETING OF ORIGAMI SCIENCE, MATHEMATICA, AND EDUCATION, 7, 2018, Oxford. **Proceedings...** Oxford: 7OSME, 2018. p. 165-180
Disponível em:
https://www.academia.edu/37342954/Mathematical_Recreational_Folding_in_the_20th_Century_Between_Row_and_Gardner. Acesso em: 07 ago. 2020

GARDNER. M. **Hexaflexagons and other mathematical diversions**. 2ª ed. Chicago: The University of Chicago, 1988. 200 p.

GHOUBABI, F. et al. Logical and algebraic view of Huzita’s origami axioms with applications to computational origami. In: ACM Symposium on Applied computing, 2007. **Proceedings...**Seul: SAC07. Seul. 2007. P. 767-772. Disponível em:
<https://www.researchgate.net/publication/221001320> . Acesso em: 13 ago. 2020.

HADAMARD, J. **Lessons in geometry: plane geometry**. 13ª ed. Providence: American Mathematical Society MS, 2008. 330 p. Traduzido para o inglês por Mark Saul.

HATORI, K. **Origami versus Strait-Edge-and-Compass**. In: K’s Origami, 2003.
Disponível em: <https://origami.ousaan.com/library/conste.html> . Acesso em: 19 ago. 2020.

HATORI, K. History of Origami in the East and the West before Interfusion In: INTERNATIONAL MEETING OF ORIGAMI SCIENCE, MATHEMATICA, AND EDUCATION, 5, 2011, Singapura. **Proceedings...** Singapura: 5OSME, 2011. p. 4-12

HAMBURGER, E. W. **O que é física**. São Paulo: Brasiliense, 1984. p. 1-20.

HEATH, T. L. **The Works of Archimedes with The Method of Archimedes**. 2ª ed. New York: Dover, 1912. p.189-202.

HEATH, T. L. **The Thirteen Books of Euclid’s Elements**. 2ª ed. v. 2. Cambridge: Cambridge University, 1908. 424 p. Traduzido a partir do texto original de Heiberg.

IDA, T. et al. Morley's theorem revisited: Origami construction and automated proof. **Journal of Symbolic Computation**. 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2010.10.007> . Acesso em: 18 ago. 2020.

JOHNSON, R.A. **Advanced Euclidean Geometry – An elementar treatise on the geometry of the triangle and the circle**. 2ª ed. New York: Dover, 1960. 319 p.

LANG, R. J. **Origami and Geometric Constructions**. 2010. 56 p. Disponível em: https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf. Acesso em: 08 dez.2020.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. 98 p.

LISTER, D. **Martin Gardner and Paperfolding**. British Origami Society. Londres. 2005. Disponível em: https://britishorigami.info/lister/martin_gardner.php. Acesso em: 12 ago.2020

MACHADO, G. C. **O estudo dos triângulos através da observação de estruturas treliçadas e sua aplicação em competição de construção de pontes de espaguete**. 2016. 99 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes. 2016.

MAGALHÃES, E. J. S. **Pontos Notáveis do Triângulo. Quantos você conhece?**. 2013. 35 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão. 2013.

MAGNAGHI, C.P.; ASSIS, A. K.T. **O método de Arquimedes: análise e tradução comentada**. Montreal: C. Roy Keys, 2019. 234 p. Disponível em: <https://www.ifi.unicamp.br/~assis/O-Metodo-de-Arquimedes.pdf> . Acesso em: 24 out. 2019.

MARTINS, A. E Antes da Geometria? Os Motivos Denominados “Geométricos” na Arte Rupestre Pré-Histórica. **Convocarte - Revista de Ciências da Arte**. Lisboa, nº 3, p. 23-40, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/31503/1/Convocarte-AndreaMartins.pdf> . Acesso em: 24 nov. 2020.

NETO, A. C. M. **Geometria – Coleção Profmat**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 427 p.

NEVES, E. D. **Caracterização e localização dos pontos notáveis do triângulo**. 2013. 71 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de São Paulo. São Carlos. 2013.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OECD (2019), PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do, PISA, OECD Publishing, Paris. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en> Acesso em: 17 jul. 2020

POPE, S.; LAM, T.K. Origami and Learning Mathematics. In: INTERNATIONAL MEETING OF ORIGAMI SCIENCE, MATHEMATICA, AND EDUCATION, 5, 2011, Singapura. **Proceedings...** Singapura: 5OSME, 2011. p. 205-217.

RIBEIRO, E. M. P.; TERESA, M. P. O uso das dobraduras como ferramenta para a prática pedagógica. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 11, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: EDUCERE, 2013. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2013/8331_4756.pdf. Acesso em: 09 jul. 2020.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. **O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades**. 2011. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf> . Acesso em: 05 dez. 2020.

ROZENBERG, L. On the Evolution of the Notation System. **The Fold**. v.50, 2019. Disponível em: <https://origamiusa.org/thefold/article/evolution-notation-system> . Acesso em: 20 ago. 2020.

SISWANTARA, A. I. et al. Investigation of the α angle's effect on the performance of an Archimedes turbine. **Energy Procedia**. nº 156, p. 458-462, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2018.11.084>. Acesso em: 22 abr. 2020.

VIDMAR, M. P. **Atividades didáticas de Física mediadas por hipermídia: potencialidades para o desenvolvimento da flexibilidade cognitiva**. 2017. 241 p. Tese (Doutorado em Educação em Ciências) – Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria. 2017. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/14598/TES_PPGECC_2017_VIDMAR_MURYEL.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 28 set. 2020.

WINCKLER, M. J.; WOLF, K. D.; BOCK, HG. Hands-On Geometry with Origami. In: INTERNATIONAL MEETING OF ORIGAMI SCIENCE, MATHEMATICA, AND EDUCATION, 5, 2011, Singapura. **Proceedings...** Singapura: 5OSME, 2011. p. 219-231.

APÊNDICE A - ATIVIDADE DIDÁTICA SUGERIDA

1 CARACTERÍSTICAS

Conforme proposto por Vidmar (2017) as atividades didáticas (AD) elaboradas para uso compartilhado por terceiros devem conter dois itens indispensáveis, a saber:

- material do professor: deve trazer informações detalhadas sobre as intenções do autor da AD, no que diz respeito ao assunto, objetivos, procedimentos, número de aulas planejadas e referências utilizadas. Essas informações, além de outras julgadas necessárias, devem ser suficientes para que o professor, ou futuro professor, que tiver acesso a tarefa sinta-se seguro do ponto de vista conceitual e metodológico para reproduzi-la em sala de aula. Este material deve estar em perfeita harmonia com o material do aluno;

- material do aluno: documento que serve como roteiro para a realização da AD. Deve trazer orientação formal para cada tarefa a ser realizada pelos estudantes. De acordo com o ritmo de trabalho que o professor deseja imprimir e tendo em vista a autonomia que se deseje dar aos alunos este material pode ser distribuído completo ou fracionado. É importante que o material do aluno tenha informações suficientes para servir de fonte de consulta para estudos futuros e, em algumas situações, ele pode ser usado como um relatório da atividade.

2 MATERIAL DO PROFESSOR

2.1 TÍTULO

O Equilíbrio dos planos – Centro de Gravidade.

2.2 PÚBLICO ALVO

Estudantes de 1ª série do Ensino Médio.

2.3 ASSUNTO

Equilíbrio dos Planos, especificamente: definição matemática e física do Centro de Gravidade (CG). (Caso 1) localização do CG em figuras planas regulares usando régua e compasso, (caso 2) desafio: localização do centro de gravidade em figuras planas regulares com uso de dobraduras (origami); (Caso 3) localização do centro de gravidade em figuras planas irregulares; Aplicações práticas do conceito de Centro de Gravidade.

2.4 OBJETIVOS

Ao final da atividade didática, o estudante deve:

- conhecer os conceitos matemático e físico do centro de gravidade;
- localizar os centros de gravidade de figuras planas regulares usando régua e compasso e realizando dobraduras;
- perceber que há meios alternativos para localizar o centro de gravidade em figuras planas regulares;
- analisar a importância do centro de gravidade para o equilíbrio dos corpos;
- aplicar adequadamente os conceitos para obter posições de equilíbrio em montagens com objetos do cotidiano e como explicá-lo;
- conhecer uma maneira experimental para localizar o CG de figuras irregulares.

2.5 PONTO DE PARTIDA

Por que a Torre de Pisa não cai?

2.6 RECURSO DIDÁTICO

Seção “PARA SABER MAIS Conexões com o cotidiano – Por que a Torre de Pisa não cai?”, parte integrante da obra Conexões com a Física 1– Estudo dos Movimentos, Leis de

Newton, Leis da Conservação, de Martini, Spinelli, Reis e Sant'Anna, p.179. Disponível em: <https://pt.calameo.com/read/0028993276b5d54c42e84?authid=yyjYOiciOfLx> . Acesso em: 16 dez. 2020.

2.7. PROCEDIMENTO DIDÁTICO-METODOLÓGICO

Serão necessárias duas aulas (com cinquenta minutos cada) para a realização desta atividade didática, que trata do centro de gravidade das figuras planas e está estruturada em cinco etapas:

2.7.1 Primeira Aula (três etapas)

- a primeira etapa inicia com a indagação aos alunos se eles acham possível equilibrar figuras planas por um único ponto seguida da execução de testes com itens diversos disponíveis na sala de aula: apagador, caderno, estojo e outros materiais que o professor tenha providenciado. Esta etapa se encerra com a leitura da seção “PARA SABER MAIS Conexões com o cotidiano – Por que a Torre de Pisa não cai?” apresentada no item “recurso didático”;

- na segunda etapa, serão apresentados aspectos da vida de Arquimedes e um resumo de seu trabalho tratando do centro de gravidade das figuras planas. Pode-se usar o texto de Pereira (2021) ou o resumo apresentado ao final desta Atividade Didática;

Então, os estudantes serão convidados a desenharem triângulos, quadrados e figuras irregulares em folhas cartolina que devem ter sido providenciadas com antecedência.

- na terceira etapa serão desafiados a encontrarem o ponto de equilíbrio (Centro de Gravidade) das figuras produzidas usando os conceitos de Arquimedes.

Neste ponto será retomado o conteúdo de geometria plana para explicar como encontrar o centro de gravidade das figuras geométricas usando régua e compasso. Para encontrar o centro de gravidade da figura irregular Assis (2008) propõe-se o seguinte experimento.

Figura 1 – Centro de Gravidade de figuras irregulares – experiência



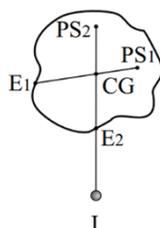
I

II

FONTE: (AUTOR)

- faça dois furos nas extremidades da figura, preferencialmente nos eixos que dividem a figura em três partes semelhantes;
- insira um gancho em um dos furos e pendure o conjunto em um anteparo vertical de forma que ela fique livre para girar e estabelecer seu equilíbrio natural (Figura 1.I);
- pendure um fio de prumo no mesmo gancho e reproduza na figura a reta descrita pela linha (para construir o fio de prumo use uma linha de tecido ou nylon com um peso em sua ponta);
- repita o procedimento inserindo o gancho no segundo furo (Figura 1.II);
- o CG estará no ponto de intersecção das duas retas traçadas na figura (Figura 2 – Centro de Gravidade de figuras irregulares – representação)

Figura 2 – Centro de Gravidade de figuras irregulares – representação



FONTE: (ASSIS, 2008. P. 73)

Após a obtenção dos respectivos centros de gravidade os desenhos deverão ser copiados em papel translúcido (papel vegetal se possível) para utilização na segunda aula. É importante que não só as figuras, mas as medianas e o CG sejam copiados.

Posteriormente, as figuras em cartolina deverão ser recortadas e colocadas, apoiadas sobre o CG, num suporte em forma de agulha (Figura 3 – Suporte para experiências) para demonstrar o sucesso da atividade. Para facilitar o equilíbrio o professor pode fazer um pequeno furo sobre o CG. O restante da folha de cartolina deve ser guardado para emprego na segunda aula.

Figura 3 – Suporte para experiências



FONTE: (PEREIRA, 2021. P. xxx)

O professor pode perguntar aos alunos se eles ainda acham que é possível equilibrar as figuras por outro ponto e, dependendo das respostas, mostrar que não há outra alternativa.

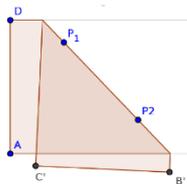
As figuras utilizadas devem ser guardadas pois serão utilizadas na segunda aula.

2.7.2 Segunda Aula (quatro etapas)

- a quarta etapa da AD inicia com noções básicas sobre dobraduras popularmente conhecidas como origami. Nesse ponto o professor deve demonstrar como usar as dobraduras para construir uma reta e traçar a mediatriz de um segmento.

Para construir uma reta o professor pode reproduzir a dobra apresentada na Figura 4 - 1º Axioma de Huzita produzindo um vinco que une dois pontos.

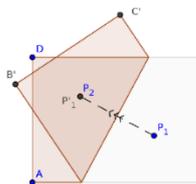
Figura 4 – Primeiro Axioma de Huzita



FONTE: (Cavami e Furuya, 2009, P.3)

Para construir a mediatriz de um segmento o professor pode reproduzir a dobra apresentada na Figura 5 - 2º Axioma de Huzita sobrepondo as extremidades do segmento e produzindo um vinco que será perpendicular ao segmento de reta formado pelas extremidades dividindo o mesmo em duas partes iguais.

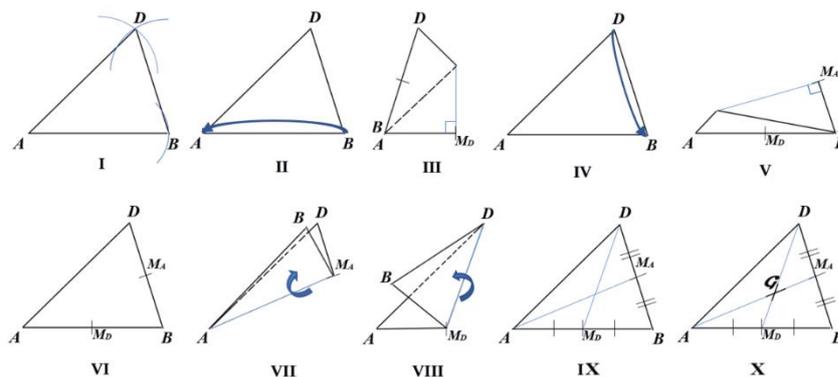
Figura 5 – Segundo Axioma de Huzita



FONTE: (Cavami e Furuya, 2009, P.3)

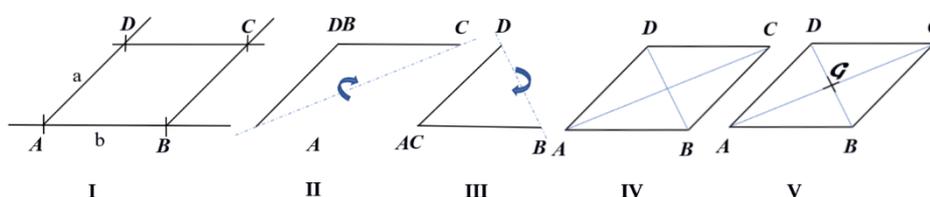
Então os alunos serão convidados a produzir novas cópias das figuras geométricas iniciais na porção restante da folha de cartolina, recortá-las e tentar encontrar o centro de gravidade por meio de dobraduras. O procedimento para tal é apresentado na Figura 6 – Localização do Baricentro do Triângulo – Origami e na Figura 7 - Localização do Baricentro do Paralelogramo – Origami).

Figura 6 – Localização do Baricentro do Triângulo - Origami



FONTE: (PEREIRA, 2021. P.XXX)

Figura 7 – Localização do Baricentro do Paralelogramo - Origami



FONTE: (PEREIRA, 2021. P.XXX)

- a quinta etapa da AD consistirá na comparação das localizações dos CG das figuras desenhadas em papel translúcido com as que foram obtidas por dobraduras. Para tal, as figuras serão sobrepostas

Ressalvados os erros de construção, espera-se que todos os elementos estejam sobrepostos. O sucesso deve ser comemorado com os alunos ressaltando que foi possível comprovar na prática a correção da teoria apresentada

- na sexta etapa da AD as figuras produzidas na segunda aula serão colocadas em equilíbrio sobre o mesmo suporte utilizado na primeira aula para demonstrar o sucesso da atividade.

Nesse ponto deve-se fazer o fechamento da atividade, repassar a teoria sobre o centro de gravidade, reforçar a sua importância para muitas profissões e responder formalmente à pergunta inicial: Por que a Torre de Pisa não cai?

Ao final da aula o professor pode distribuir os origamis e sugerir que os alunos reproduzam as experiências em suas casas e comentem em sala de aula, noutra oportunidade, a reação dos familiares.

Uma etapa adicional de desafios pode ser criada e os alunos serão estimulados a tentarem explicar com as suas palavras porque o centro de gravidade das figuras regulares planas e tridimensionais está sobre o seu eixo de simetria. A resposta deve incluir a noção de que os eixos de simetria promovem a divisão da figura em partes iguais e, neste caso, a massa das figuras também estará dividida igualmente. Assim, o CG estará no ponto em que os eixos de simetria concorrem.

2.8 MATERIAS NECESSÁRIOS PARA REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE DIDÁTICA

- 01 (uma) folha de cartolina para cada participante (alunos e professores). Pode ser utilizado papel para origami (uma folha para cada figura) ou papel cartão (uma folha para cada participante);

- 02 (duas) folhas de papel translúcido para cada participante. Sugere-se usar papel vegetal se estiver disponível;

- material básico individual para desenho (lápis, borracha, compasso, régua);

- 01 (um) suporte tipo agulha ou espeto (pode ser construído com palitos de churrasco e borracha ou usar uma caneta presa a uma base conforme apresentado na Figura 3 – Suporte para experiências;

-01 (uma) tesoura para cada participante.

2.9 MATERIAIS COMPLEMENTARES SUGERIDOS – VIDEOTECA

2.9.1 Canal Manual do Mundo - propriedades do centro de gravidade:

- O desafio do centro de gravidade (Experiência). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=PWO-X6CZQXA>. Acesso em: 18 dez. 2020;

- Experiência das rolhas adestradas: balança mas não cai.

Disponível em: <https://youtu.be/3CsduW-U02U>. Acesso em: 18 dez. 2020.

2.9.2 Canal Origamath Chanel – construções geométricas com origami:

- Construindo a Bissetriz de um Ângulo e Mediatriz de um Segmento. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=yo1Vw3Oh1-4>. Acesso em 18 dez. 2020.

2.9.3 Canal Engelutz – Arquimedes, Euclides, Hatori e Huzita trabalhando juntos:

Conjunto de vídeos com a demonstração de uma atividade usando régua e compasso e origami para localizar especificamente o Centro de Gravidade de Figuras Planas.

- Centro de Gravidade 1 – Régua e Compasso x Origami. Disponível em: <https://youtu.be/xkYs7SMWgrg> . Acesso em: 20 dez. 2020.

- Centro de Gravidade 2 – Régua e Compasso x Origami. Disponível em: <https://youtu.be/zupbqbqRRQk> . Acesso em: 20 dez. 2020.

- Centro de Gravidade 3 – Régua e Compasso x Origami. Disponível em: <https://youtu.be/rRyiRFzEY-M> . Acesso em: 20 dez. 2020.

1.9 REFERÊNCIAS

ASSIS, A.K.T. **Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca**. C. Roy Keys Inc. Montreal. Canadá. 2008. Disponível em: <https://www.ifi.unicamp.br/~assis/Arquimedes.pdf> . Acesso em: 24 out. 2019.

BATALHA, E.; BENTO, S. **Arquimedes e a coroa**. In: FIOCRUZ, In Vivo. 2007. Disponível em: <http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=946&sid=7>. Acesso em: 18 dez. 2020.

PEREIRA, L.F. **O equilíbrio dos planos e os pontos notáveis do triângulo: Arquimedes, Euclides, Hatori e Huzita trabalhando juntos**. 2021. 110 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2020.

MARTINI, G. et al. **Conexões com a Física 1– Estudo dos Movimentos, Leis de Newton, Leis da Conservação**. Moderna. São Paulo. Brasil.2018. p.179. Disponível em: <https://pt.calameo.com/read/0028993276b5d54c42e84?authid=yyjYOiciOfLx> Acesso em: 16 dez. 2020.

3 MATERIAL DO ESTUDANTE

3.1 TÍTULO

O Equilíbrio dos planos – Centro de Gravidade.

3.2 PONTO DE PARTIDA

Por que a Torre de Pisa não cai?

3.3 ORIENTAÇÃO PROCEDIMENTAL

3.3.1 Aula 1

Nesta atividade buscaremos discutir se é possível equilibrar uma figura plana por um único ponto. O que você acha?

Leia atentamente a seção “PARA SABER MAIS Conexões com o cotidiano – Por que a Torre de Pisa não cai?” do livro Conexões com a Física 1– Estudo dos Movimentos, Leis de Newton, Leis da Conservação, de Martini, Spinelli, Reis e Sant’Anna, p.179. Disponível em: <https://pt.calameo.com/read/0028993276b5d54c42e84?authid=yyjYOiciOfLx>.

Figura 1 - Por que a Torre de Pisa não cai?



FONTE: (Internet. Disponível em: <https://www.towerofpisa.org/leaning-tower-of-pisa-facts/>. Acesso em: 20 dez. 2020)

Questão 1: Depois de ler o texto você consegue explicar por que a torre não cai?

Curiosidade: Você sabe quem foi Arquimedes?

Arquimedes foi o primeiro estudioso a demonstrar teoricamente como era possível encontrar a localização do centro de gravidade das figuras planas e trabalhou especificamente com os triângulos e os paralelogramos (retângulos e quadrados).

Tarefa 1: Agora que você sabe onde ficam os centros de gravidade (CG) das figuras planas desenhe um triângulo, um paralelogramo (pode ser um quadrado se preferir) e uma figura irregular na sua cartolina e tente achar geometricamente os CG.

Dica: Use seus conhecimentos de geometria plana para traçar as mediatrizes dos lados do triângulo, as suas medianas e as diagonais do quadrado.

Você conseguiu achar o CG da figura irregular?

Experimento 1: Vamos fazer um experimento para achá-lo.

Tarefa 2: Copie os seus desenhos para o papel translúcido, exceto a figura irregular. Não esqueça de marcar as medianas do triângulo, as diagonais do paralelogramo e os CG das duas figuras.

Questão 2: Você acha que as figuras vão ficar equilibradas sobre o suporte? Qual o ponto que deve ser testado?

Experimento 2: Com os CG marcados recorte as figuras e poderemos testar se elas ficarão em equilíbrio sobre o suporte.

Guarde suas figuras e a porção restante da cartolina para usar na próxima aula.

3.3.2 Aula 2

Questão 3: O que você sabe sobre Origami?

Questão 4: Será que as dobraduras podem ser usadas para achar o centro de gravidade de figuras planas?

Tarefa 3: Assista o vídeo S01:E03 Construindo a Bissetriz de um Ângulo e Mediatriz de um Segmento, do minuto 5,40 ao minuto 7,40 (Figura 2 – Bissetriz e mediatriz com dobraduras).

Fig.2 – Bissetriz e Mediatriz com dobraduras



FONTE: (Origamath Chanel. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=yo1Vw3Oh1-4>. Acesso em 20 dez. 2020)

Tire suas dúvidas com seu professor e pratique as dobraduras.

Tarefa 4: Agora copie e recorte as figuras que foram produzidas na última aula na sua cartolina e tente achar os CG usando o que você aprendeu sobre dobraduras (origami).

Tarefa 5: Vamos comparar as construções das duas aulas! Coloque o papel translúcido com seus desenhos sobre os origamis.

Os CG estão sobrepostos? O que aconteceu com as diagonais e as medianas? Coincidem também?

Questão 4: Você acha que os origamis ficarão em equilíbrio sobre o suporte? Qual o ponto devemos testar?

Experimento 3: Coloque os origamis apoiados no CG e veja o que acontece.

Questão 4: Os resultados foram iguais aos encontrados na última aula?

3.4 APLICAÇÃO DO CONHECIMENTO

Desafio 1: Tente explicar com suas palavras por que o centro de gravidade está sobre o eixo de simetria das figuras planas e tridimensionais.

VIDA E OBRA DE ARQUIMEDES (RESUMO)

Arquimedes nasceu em 287 a.C. na cidade-Estado de Siracusa. Filho do astrônomo Fídias ele era um grande representante do que hoje chamamos um “Filósofo Grego Clássico”: foi matemático, físico, astrônomo, inventor, engenheiro e se envolveu nas guerras travadas com os romanos.

Muito do que sabemos de sua vida vem de duas fontes principais: os trabalhos ou fragmentos de suas obras encontrados posteriormente e biografias ou histórias escritas sobre ele. Estes últimos textos, muitas vezes, misturam fatos e lendas

O fato é que Arquimedes foi precursor nos estudos do equilíbrio de corpos (planos ou tridimensionais), enunciou diversas leis da hidrodinâmica relacionadas ao equilíbrio de forças e flutuabilidade dos corpos, concebeu e trabalhou com o conceito de peso específico e contribuiu para o entendimento do funcionamento de pelo três dos cinco equipamentos conhecidos na antiguidade: guincho, polia, alavanca, cunha e parafuso. Seus inventos tais como catapultas gigantes, guindastes com jogos de polias e alavancas permitiram demonstrar a grande vantagem de aplicar estes mecanismos para suplantar as dificuldades dos construtores e militares de sua época.

As façanhas ou esquisitices atribuídas a Arquimedes permitem inferir que ele foi um excêntrico em seu tempo, estando muito mais afeito as questões científicas que propriamente as regras de comportamento ou mesmo suas necessidades fisiológicas. Alguns pesquisadores asseguram que ele se concentrava tanto em seus estudos abstratos que poderia esquecer de comer ou dormir.

Uma história pitoresca atribuída a Arquimedes é bastante conhecida: enquanto se banhava o mestre divagava, absorto em pensamentos tentava responder uma questão levantada pelo rei Hieron – seria possível descobrir se uma coroa que ganhara era feita totalmente de ouro ou se tinha alguma parte em prata? Trabalhando empiricamente com o conceito de peso específico Arquimedes descobriu a solução (a coroa em ouro puro deslocaria um volume de água diferente de outra coroa, com a mesma massa construída com uma mistura de metais) e consta que saiu correndo pela rua, totalmente nú, gritando a célebre palavra “Eureka!!”, que quer dizer descobri, em grego. O rei não ficou muito satisfeito com a resposta pois sua coroa não era de ouro puro!

Fig.1 – Arquimedes “Eureka!”



FONTE: (GIFFER, 2020)

As circunstâncias da morte de Arquimedes são tão intrigantes quanto os relatos de seus feitos e consta que ele morreu tal como viveu: absorto em considerações matemáticas. Sabe-se que Arquimedes foi morto por um soldado romano, durante a Segunda Guerra Púnica (218 a 201 a.C.), chamada de a Grande Guerra Mundial do mundo clássico, depois de um longo cerco a cidade de Siracusa.

Embora o General Marcellus tivesse dado ordens expressas para que ele fosse poupado o comportamento controverso do matemático pode ter decidido seu destino: há relatos de que, em plena guerra, ele era capaz de desenhar figuras geométricas no chão empoeirado ou distrair-se com alguma demonstração matemática. Entre tantas lendas contadas a seu respeito há muitas relacionadas a sua morte:

- a versão mais simples do ocorrido defende que, alheio ao tumulto que se seguiu a queda da cidade, Arquimedes estava observando alguns desenhos no chão quando foi encontrado, e morto, por um soldado que não o conhecia;

- a versão mais fantasiosa informa que o mestre não sabia da queda da cidade e estava trabalhando na solução de algum problema ou demonstração quando foi encontrado por um soldado. O militar ordenou que ele o acompanhasse e Arquimedes se recusou a fazê-lo. Depois de muita argumentação, ameaças, brandir de espadas e pedidos de mais algum tempo para não deixar um trabalho incompleto o soldado, irritado, teria sacrificado o geômetra;

- a versão mais crível descreve que Arquimedes, ciente da queda das defesas, reuniu seus trabalhos, ferramentas, artefatos e se deslocava para encontrar Marcellus quando foi abordado por um grupo de soldados. Estes, achando que ele transportava ouro e outras preciosidades o mataram para pilhar seus pertences.

A coleção de trabalhos de Arquimedes jamais será totalmente conhecida, porém, há relatos de que pelo menos 31 deles sobreviveram, total ou parcialmente. Esta dificuldade em reunir os trabalhos de Arquimedes é fruto de sua recusa em escrever livros e o uso de correspondências para apresentar seus trabalhos aos contemporâneos. Há estudiosos que afirmam que Arquimedes e outros estudiosos do mundo antigo se correspondiam para ajudar

nos trabalhos uns dos outros e teriam criado a primeira rede de correspondências colaborativa de que se tem notícia sendo os precursores das redes virtuais de que dispomos hoje.

Entre as obras do Mestre uma foi dedicada ao estudo dos centros de gravidade dos planos. Nesse texto ele prova que o centro de gravidade de qualquer triângulo está no ponto de intersecção de duas medianas e que o centro de gravidade dos paralelogramos está no ponto de intersecção das suas diagonais.