

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Lucas Pinto Dutra

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES  
FRACAS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS  
ELÍPTICAS COM NÃO LINEARIDADE DE FRONTEIRA

Santa Maria, RS

2017

Lucas Pinto Dutra

**EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES FRACAS PARA  
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS COM NÃO  
LINEARIDADE DE FRONTEIRA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Damião Bittencourt de Godoi

Santa Maria, RS

2017

Lucas Pinto Dutra

**EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES FRACAS PARA  
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS COM NÃO  
LINEARIDADE DE FRONTEIRA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**Aprovado em 16 de Março de 2017:**

---

**Juliano Damião Bittencourt de Godoi, Dr. (UFSM)**  
(Presidente/Orientador)

---

**Taísa Junges Miotto, Dra. (UFSM)**

---

**Leonardo Prange Bonorino, Dr. (UFRGS)**

---

**Mauricio Fronza da Silva, Dr. (UFSM) (Suplente)**

Santa Maria, RS

2017

## DEDICATÓRIA

*Ao meu pai, Adelar, ao meu avô, Erineu, e ao meu primo, Guilherme.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu pai, Adelar, por ter me ajudado a tentar alcançar todos os meus sonhos. Que você possa estar vendo este momento, de onde quer que esteja.

A minha mãe e a minha avó, Eliane e Enoemia, que são minha fonte de amor, de inspiração para nunca parar e meu apoio em todos os momentos.

Aos meus demais familiares, que sempre me auxiliaram no que era possível e entenderam todos os momentos de ausência.

A Andressa Dutra, que sempre foi uma grande amiga e fonte de apoio durante todo o tempo desse curso.

Aos meus amigos, de Caxias do Sul e de Santa Maria, pelos momentos de descontração e estudos. Em especial, ao Érick Scopel por ser um grande amigo pra vida, e à turma do 1º semestre de 2015, pela convivência com tanta alegria.

Ao professor Juliano, pela ótima orientação e pela amizade. Aos demais professores do PPGMAT da UFSM, pelas ótimas aulas e auxílios.

A banca examinadora, pelas contribuições.

A Capes pelo apoio financeiro.

## RESUMO

# EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES FRACAS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS COM NÃO LINEARIDADE DE FRONTEIRA

AUTOR: Lucas Pinto Dutra

ORIENTADOR: Juliano Damião Bittencourt de Godoi

O objetivo do trabalho é estabelecer resultados de existência e multiplicidade de soluções fracas para equações diferenciais parciais elípticas com condições de fronteira não lineares do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu_1 u + f(x, u), & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para tal, realizamos um estudo introdutório sobre a teoria de autovalores de Steklov e sobre a teoria de Homologia Singular. Em todos os resultados, utilizamos Métodos Variacionais, e em um deles utilizamos a teoria de Grupos Críticos.

**Palavras-chave:** Métodos Variacionais. Autovalores de Steklov. Grupos Críticos.

## ABSTRACT

# EXISTENCE AND MULTIPLICITY OF WEAK SOLUTIONS FOR ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONLINEARITY OF BOUNDARY

AUTHOR: Lucas Pinto Dutra

ADVISOR: Juliano Damião Bittencourt de Godoi

The objective of this work is to establish results of existence and multiplicity of weak solutions for elliptic partial differential equations with nonlinear boundary conditions to the following problem

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, & \text{on } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu_1 u + f(x, u), & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

To achieve this, we performed an introductory study on the Steklov's eigenvalues theory and on Singular Homology theory. In all results, we used Variational Methods, and in one of them we used Critical Groups theory.

**Keywords:** Variational Methods. Steklov's Eigenvalues. Critical Groups.

## LISTA DE SÍMBOLOS

- q.t.p. significa quase todo ponto;
- $\Omega$  é um conjunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^n$ ;
- $\overline{\Omega}$  é o fecho de  $\Omega$  ;
- $\partial\Omega$  é a fronteira de  $\Omega$ ;
- $|A|$  é a medida de Lebesgue de um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ ;
- $|A|_\sigma$  é a  $\sigma$ -medida de um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$ ;
- $|u|_p^p = \sum_{i=1}^n |u_i|^p$  e  $|u| = \sum_{i=1}^n |u_i|$ ,  $\forall u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ , com  $1 < p < +\infty$  ;
- $\text{supp}u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$ ;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é } k \text{ vezes continuamente diferenciável}\}$ ;
- $C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); \text{supp}(u) \text{ é compacto em } \Omega\}$ ;
- $C_c^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é infinitamente diferenciável e } \text{supp}(u) \text{ é compacto em } \Omega\}$ ;
- $\|u\|_\infty = \inf\{a \geq 0; |\{x \in \Omega; |u(x)| > a\}| = 0\}$ ;
- $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}$  e  $\|u\|_{p,\partial} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma\right)^{1/p}$  ;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_\infty < +\infty\}$ ;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_p < +\infty\}$ ;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$  e  $|\nabla u| = \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|$ ;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ ;
- $\langle u, v \rangle_2 = \int_\Omega uv dx$ ,  $\forall u, v \in L^2(\Omega)$  e  $\langle u, v \rangle_{2,\partial} = \int_{\partial\Omega} uv d\sigma$ ,  $\forall u, v \in L^2(\partial\Omega)$ ;
- $\langle u, v \rangle_c = \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv] dx$ ,  $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ ;
- $\|u\|_c = \sqrt{\int_\Omega [|\nabla u|^2 + c(x)u^2] dx}$ ,  $\forall u \in H^1(\Omega)$ ;
- $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u\varphi' dx = - \int_\Omega g\varphi dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}$ ;
- $\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_\Omega [uv + \nabla u \cdot \nabla v] dx$ ,  $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ ;
- $\|u\|_{H^1} = \sqrt{\int_\Omega [u^2 + |\nabla u|^2] dx}$ ,  $\forall u \in H^1(\Omega)$ ;
- $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ ;
- $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}$ , onde o fecho é tomado com relação a norma  $\|\cdot\|_{H^1}$ ;
- $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{u \in L^2(\partial\Omega); \exists v \in H^1(\Omega) \text{ com } v|_{\partial\Omega} = u\}$ ;
- $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}} = \inf\{\|v\|_{H^1}; v \in H^1(\Omega) \text{ e } v|_{\partial\Omega} = u\}$ ;



- $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ ;
- $X^*$  representa o espaço dual de  $(X, \|\cdot\|)$ , munido da norma  $\|\cdot\|^*$ ;
- $\|u\|_X^* = \sup_{\|x\|=1} |u(x)|$ ,  $u \in X^*$ ;
- $\sigma(X, X^*)$  representa a topologia fraca de  $X$ ;
- $u_k \rightarrow u$  em  $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k - u\| = 0 \Leftrightarrow u_k$  converge fortemente para  $u$ ;
- $u_k \rightharpoonup u$  em  $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} |f(u_k) - f(u)| = 0, \forall f \in X^* \Leftrightarrow u_k$  converge fracamente para  $u$ ;

- $$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

# SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1 RESULTADOS PRINCIPAIS	14
2 RESULTADOS AUXILIARES	18
3 DEMONSTRAÇÃO DOS RESULTADOS PRINCIPAIS	43
CONCLUSÕES	45
BIBLIOGRAFIA	46
A RESULTADOS GERAIS	49
A.1 O OPERADOR TRAÇO E O ESPAÇO $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . . . . .	49
A.2 ANÁLISE FUNCIONAL . . . . .	50
A.3 CÁLCULO VARIACIONAL . . . . .	53
A.4 TEORIA DE MINIMAX . . . . .	54
A.5 MEDIDA E INTEGRAÇÃO . . . . .	56
B O AUTOPROBLEMA DE STEKLOV	57
B.1 DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES . . . . .	57
B.2 O AUTOPROBLEMA DE STEKLOV . . . . .	58
B.3 RESULTADOS PRELIMINARES . . . . .	59
B.4 CONSTRUÇÃO DO PRIMEIRO AUTOVALOR DE STEKLOV . . . . .	67
B.5 CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA AUTOVALORES DE STEKLOV . . . . .	69
B.6 UMA DECOMPOSIÇÃO PARA $H^1(\Omega)$ . . . . .	74
C HOMOLOGIA SINGULAR E GRUPOS CRÍTICOS	80

C.1	TEORIA DE HOMOLOGIA SINGULAR . . . . .	80
C.2	GRUPOS CRÍTICOS . . . . .	83

# INTRODUÇÃO

O estudo da teoria de Equações Diferenciais Parciais (EDP's) tem tido grande desenvolvimento nos últimos anos, devido, principalmente, às suas aplicações em diversas áreas, como engenharias, ciências e economia. Nesse sentido, a busca pela existência, multiplicidade e comportamento de soluções para os diversos tipos de EDP's cresce em importância, tendo em vista que diversos problemas aplicados dependem de duas ou mais variáveis independentes.

As EDP's são classificadas, por muitos autores, como: equações parabólicas, hiperbólicas e elípticas. Neste trabalho, são estudadas EDP's elípticas, de maneira que o interesse se dá na busca por existência e multiplicidade de soluções fracas para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu_1 u + f(x, u), & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 2$ , é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  e  $\frac{\partial}{\partial \nu} := \nu \cdot \nabla$  é a derivada normal exterior unitária sobre  $\partial\Omega$ . O número  $\mu_1$  é o primeiro autovalor positivo do autoproblema de Steklov e as funções  $c$  e  $f$  satisfazem algumas hipóteses. Esse problema foi escolhido baseado no artigo de Fadlallah e da Silva (2015).

Para atingirmos os resultados, necessitamos estudar um problema de autovalores, a saber, o autoproblema de Steklov, que está relacionado ao termo  $\mu_1$  supracitado. Esse problema é dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu u, & \text{em } \partial\Omega; \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 2$ , é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  e, nova-

mente,  $c$  satisfaz uma condição apropriada. Dessa maneira, obtemos resultados referentes à existência de uma sequência de autovalores de Steklov positivos que tende para mais infinito, bem como uma decomposição do espaço  $H^1(\Omega)$  em termos dos espaços gerados pelas autofunções associadas aos autovalores de Steklov. Como referências de estudos sobre o autoproblema de Steklov, citamos Escobar (1999), Escobar (2000), Brock (2001), Auchmuty (2004), Anane et al. (2009), Mavinga e Nkashama (2010), Lamberti (2011) e De Godoi (2012).

Além do autoproblema de Steklov, para um dos resultados de multiplicidade do trabalho, foi necessário um estudo mais detalhado sobre alguns resultados de Topologia Algébrica, em particular o estudo dos Grupos de Homologia Singular e de Grupos Críticos, o que possibilitou a obtenção de informações sobre um funcional a partir dos seus pontos críticos. Para estudos desses tópicos, podemos citar Eilenberg e Steenrod (1952), Hu (1966), Wallace (1970), Chang (1993) e Ramos (1993).

Com o auxílio desta teoria, provamos quatro teoremas principais. Inicialmente, provamos a existência de solução fraca, e após demonstramos três resultados para a multiplicidade de soluções fracas para o problema em questão.

Organizamos o trabalho da seguinte maneira: o primeiro Capítulo conta com a descrição do problema principal, com as hipóteses necessárias para as funções  $c$  e  $f$ . Além disso, são enunciados quatro teoremas, ditos resultados principais, que nos fornecem existência e multiplicidade de soluções fracas para o problema principal sob determinadas condições.

No Capítulo 2, foram provados resultados auxiliares para a demonstração dos resultados principais enunciados no Capítulo 1. Tais resultados envolvem continuidade, diferenciabilidade e geometria, no sentido variacional, além da condição de Cerami, para um funcional associado ao problema inicial.

No Capítulo 3, são realizadas as demonstrações, utilizando os resultados provados no Capítulo 2, dos resultados principais que haviam sido previamente enunciados no Capítulo 1.

Além dos capítulos principais, o trabalho conta com três apêndices, denominados A, B e C. O Apêndice A conta com resultados gerais que são utilizados no decorrer do texto. No Apêndice B, nos dedicamos ao estudo do autoproblema de Steklov, enunciando resultados necessários para a prova dos teoremas de existência e multiplicidade propos-

tos. Já o Apêndice C traz alguns resultados relacionados à Topologia Algébrica que são utilizados durante a demonstração dos resultados principais.

# Capítulo 1

## RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo, serão enunciados os principais resultados deste trabalho. Tais resultados garantem a existência e multiplicidade de solução fraca para a seguinte classe de equações diferenciais parciais de segunda ordem, com condições de fronteira não lineares,

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu_1 u + f(x, u), & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 2$ , é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  e  $\frac{\partial}{\partial \nu} := \nu \cdot \nabla$  é a derivada normal exterior unitária sobre  $\partial\Omega$ . O número  $\mu_1$  é o primeiro autovalor positivo do autoproblema de Steklov, dado no Apêndice B. Além disso, temos que:

(C)  $c \in L^p(\Omega)$ , sendo  $p \geq n$  e  $c \geq 0$ , com desigualdade estrita em um subconjunto de medida positiva de  $\Omega$ , isto é,  $\int_{\Omega} c(x)dx > 0$ .

Note que se a função  $c$  satisfaz a hipótese (C) acima, é também satisfeita a hipótese  $(C_1)$  do Apêndice B, sendo válidos os resultados lá citados.

O termo não linear  $f : \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as condições de Carathéodory, ou seja, vale:

( $f_0$ ) A função  $f : \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

i)  $f(\cdot, u)$  é mensurável em  $\partial\Omega$ , para cada  $u \in \mathbb{R}$ ;

ii)  $f(x, \cdot)$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , q.t.p.  $x \in \partial\Omega$ .

E mais, consideraremos o caso subcrítico para  $f$ , isto é,

( $f_1$ ) Existe constante  $\alpha$ , tal que

$$|f(x, u)| \leq \alpha(1 + |u|^{p-1}), \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

com  $1 \leq p < \frac{2n-2}{n-2}$ .

O objetivo principal do nosso estudo é a busca de soluções fracas para o problema (1.1), em que condições de ressonância no infinito na fronteira são consideradas, ou seja, imporemos a seguinte condição:

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u} = 0, \quad (1.2)$$

o que acontece uniformemente para q.t.p.  $x \in \partial\Omega$ .

**Definição 1.1.** Dizemos que  $u \in H^1(\Omega)$  é solução fraca de (1.1), se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x)uv dx = \int_{\partial\Omega} \mu_1 uv dx + \int_{\partial\Omega} f(x, u)v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Também consideraremos o fenômeno de ressonância forte, isto é,

(SSR)  $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} f(x, u) = 0$ , e  $|F(x, u)| \leq \tilde{F}(x)$  para q.t.p.  $x \in \partial\Omega$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , sendo a segunda desigualdade válida para alguma função  $\tilde{F} \in L^q(\partial\Omega)$ ,  $q \geq 1$ . Aqui consideramos  $F(x, u) = \int_0^{u(x)} f(x, s) ds$ .

Além disso, para o controle da ressonância, serão introduzidas as seguintes condições:

(HOC)<sup>-</sup> Existe função  $a \in L^1(\partial\Omega)$  tal que  $a(x) \leq 0$  e  $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} uf(x, u) \leq a(x)$ ;

(HOC)<sup>+</sup> Existe função  $b \in L^1(\partial\Omega)$  tal que  $b(x) \geq 0$  e  $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} uf(x, u) \geq b(x)$ .

Enunciaremos, agora, o primeiro resultado de existência de solução fraca para (1.1). Para a prova de tal resultado, utilizamos o Princípio Variacional de Ekeland.

**Teorema 1.1.** Suponha que  $f$  satisfaz ( $f_0$ ), ( $f_1$ ), (SSR) e (HOC)<sup>-</sup> ou (HOC)<sup>+</sup>. Então, o problema (1.1) tem pelo menos uma solução fraca  $u \in H^1(\Omega)$ .

Caso assumirmos  $f(x, 0) = 0$ , em  $\partial\Omega$ , tem-se que  $u \equiv 0$  é solução trivial de (1.1). Nosso interesse é assegurar a existência de alguma solução fraca não trivial para (1.1).

Consideremos agora as seguintes hipóteses:



(BH1) A função  $f$  possui o seguinte comportamento na origem

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \frac{f(x, u)}{u} < 0,$$

uniformemente para q.t.p.  $x \in \partial\Omega$ .

(BH2) Existem números reais  $a^-$  e  $a^+$ , com  $a^- < 0 < a^+$ , tais que

$$\int_{\partial\Omega} F(x, a^\pm \varphi_1) dx > 0,$$

onde  $\varphi_1$  é a primeira autofunção correspondente ao primeiro autovalor de Steklov.

(BH2)' Se  $\mu_2 > \mu_1$ , onde  $\mu_2$  é o segundo autovalor do problema de Steklov, então

$$F(x, u) \leq \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} |u|^2, \quad \forall u \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \partial\Omega.$$

Assim, combinando o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha, podemos demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 1.2.** *Suponha que  $f$  satisfaz  $(f_0)$ ,  $(f_1)$ ,  $(SSR)$  e  $(HOC)^-$  ou  $(HOC)^+$ . Ainda, assuma válidos  $(BH1)$ ,  $(BH2)$  e  $(BH2)'$ . Então, (1.1) tem ao menos três soluções fracas não triviais  $u_\pm, u_1$ .*

Utilizando, agora, o Teorema do Ponto de Sela, o Princípio Variacional de Ekeland e a Teoria de Grupos Críticos, dada no Apêndice C, obtemos uma releitura do Teorema 1.2 com demonstração distinta da anterior, dada por:

**Teorema 1.3.** *Suponha que  $f$  satisfaz  $(f_0)$ ,  $(f_1)$ ,  $(SSR)$  e  $(HOC)^-$  ou  $(HOC)^+$ . Suponha válidas também  $(BH1)$ ,  $(BH2)$  e  $(BH2)'$ . Deste modo, o problema (1.1) tem ao menos três soluções fracas não triviais  $u_\pm, u_2$ .*

Se, além disso, considerarmos a hipótese

(BH3) existem  $r > 0$  e  $\epsilon \in (0, \mu_2 - \mu_1)$  tais que

$$0 \leq F(x, u) \leq \frac{\mu_2 - \mu_1 - \epsilon}{2} |u|^2, \quad \forall |u| \leq r,$$

podemos aplicar o Teorema de Link Local e provar o seguinte resultado:

**Teorema 1.4.** *Suponha que  $f$  satisfaz  $(f_0)$ ,  $(f_1)$ ,  $(SSR)$  e  $(HOC)^-$  ou  $(HOC)^+$ .*

*Ainda, assumamos a validade de (BH3). Então, (1.1) tem ao menos duas soluções não triviais.*

## Capítulo 2

# RESULTADOS AUXILIARES

Neste capítulo, serão abordados resultados auxiliares para a construção das demonstrações dos resultados principais deste trabalho.

No decorrer do capítulo, consideraremos o espaço  $H^1(\Omega)$ , com produto interno definido por

$$\langle u, v \rangle_c = \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv] dx, \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

o qual induz a norma

$$\|u\|_c = \sqrt{\int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + c(x)u^2] dx}, \forall u \in H^1(\Omega),$$

que provamos, no Apêndice B, ser equivalente à norma usual de  $H^1(\Omega)$ .

**Lema 2.1.** *Suponha que  $f$  satisfaz  $(f_0)$ ,  $(f_1)$  e que existam constantes  $a, b, p$  e  $q$ , com  $1 \leq p, q < \infty$  e  $a, b > 0$ , tais que para quaisquer  $x \in \bar{\Omega}$  e  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$|f(x, t)| \leq a + b|t|^\beta, \text{ com } \beta = p/q. \quad (2.1)$$

Se  $\mathbb{F} : L^p(\partial\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$  é definida por

$$\mathbb{F}(\psi)(x) = f(x, \psi(x)), \forall \psi \in L^p(\partial\Omega) \text{ e } \forall x \in \partial\Omega,$$

então,  $\mathbb{F}$ , que é conhecido como operador de Nemytskii, é contínuo.

**Demonstração.** Provemos inicialmente a boa definição do operador de Nemytskii. Seja,

para tal,  $\psi \in L^p(\partial\Omega)$ . Temos que, utilizando (2.1) e a desigualdade do Teorema A.4,

$$\int_{\partial\Omega} |f(x, \psi(x))|^q d\sigma \leq \int_{\partial\Omega} (a + b|\psi|^{p/q})^q d\sigma \leq b_1 \int_{\partial\Omega} (1 + |\psi|^p) d\sigma,$$

onde  $b_1 \in \mathbb{R}$  é uma constante.

Notando agora que  $|\partial\Omega|_\sigma < \infty$  e lembrando que  $\psi \in L^p(\partial\Omega)$ ,

$$\int_{\partial\Omega} |f(x, \psi(x))|^q d\sigma < \infty,$$

donde  $f(\cdot, \psi(\cdot)) \in L^q(\partial\Omega)$  e o operador  $\mathbb{F}$  está bem definido.

Para provarmos a continuidade de  $\mathbb{F}$ , sejam  $(u_k)$  e  $u$  em  $L^p(\partial\Omega)$ , tais que  $u_k \rightarrow u$  em  $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$ . Do Teorema A.14, existem subsequência  $(u_{k_j})$  de  $(u_k)$  em  $L^p(\partial\Omega)$  e  $h$  em  $L^p(\partial\Omega)$ , tais que

$$u_{k_j}(x) \rightarrow u(x) \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|) \text{ e } |u_{k_j}(x)| \leq h(x), \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega. \quad (2.2)$$

Pela hipótese  $(f_1)$ ,  $f(x, u_{k_j}(x)) \rightarrow f(x, u(x))$  em  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , q.t.p.  $x \in \partial\Omega$ . Agora, por (2.1) e (2.2),

$$|f(x, u_{k_j}(x))| \leq a + b|u_{k_j}(x)|^{p/q} \leq a + b|h(x)|^{p/q}, \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega.$$

Ainda, escrevendo  $m(x) = a + b|h(x)|^{p/q}$ , temos que  $m \in L^q(\partial\Omega)$ , pois  $h \in L^p(\partial\Omega)$ . Dessa maneira, pelo Teorema A.26,  $f(x, u_{k_j}(x)) \rightarrow f(x, u(x))$  em  $(L^q(\partial\Omega), \|\cdot\|_{q,\partial})$ .

Devemos, agora, mostrar que  $f(x, u_k(x)) \rightarrow f(x, u(x))$  em  $(L^q(\partial\Omega), \|\cdot\|_{q,\partial})$ . Suponhamos, por contradição, que isto não ocorra, isto é, que existam  $\varepsilon > 0$  e subsequência  $(u_{k_l})$  de  $(u_k)$  tais que

$$\|f(x, u_{k_l}(x)) - f(x, u(x))\|_{q,\partial} \geq \varepsilon, \forall l \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Porém, da hipótese inicial,  $u_k \rightarrow u$  em  $(L^q(\partial\Omega), \|\cdot\|_{q,\partial})$ . Logo,  $u_{k_l} \rightarrow u$  neste espaço. Ora, utilizando novamente o Teorema A.14 e os resultados acima, obtemos  $(u_{k_{l_j}}) \subset (u_{k_l})$  tal que

$$f(x, u_{k_{l_j}}(x)) \rightarrow f(x, u(x)) \text{ em } (L^q(\partial\Omega), \|\cdot\|_{q,\partial}), \text{ q.t.p. } x \in \partial\Omega,$$

que gera uma contradição com (2.3). Portanto,

$$f(x, u_k(x)) \rightarrow f(x, u(x)) \text{ em } (L^q(\partial\Omega), \|\cdot\|_{q,\partial}),$$

ou seja, o operador de Nemytskii  $\mathbb{F}$  é contínuo. ■

**Definição 2.1.** O funcional  $J : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  associado ao problema (1.1) é dado por

$$J(u) := \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)u^2 dx - \mu_1 \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \right] - \int_{\partial\Omega} F(x, u) d\sigma,$$

$$\text{com } F(x, u) = \int_0^{u(x)} f(x, s) ds.$$

**Proposição 2.1.** Se valem as condições  $(f_0)$ ,  $(f_1)$  e  $(C)$ , então  $J(u) \in \mathbb{R}$ , para todo  $u \in H^1(\Omega)$ .

**Demonstração.** Pelas condições de domínio, por  $(C)$  e pelo Teorema A.1, temos

$$\left| \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + c(x)u^2 dx \right] - \frac{\mu_1}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \right| \leq \left| \frac{1}{2} \langle u, u \rangle_c \right| + \left| \frac{\mu_1}{2} \langle u, u \rangle_{2,\partial} \right| = \frac{1}{2} \|u\|_c^2 + \frac{\mu_1}{2} \|u\|_{2,\partial}^2,$$

que é finito.

$$\text{Ainda, } F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds. \text{ Donde}$$

$$|F(x, u)| = \left| \int_0^u f(x, s) ds \right| \leq \int_0^u |f(x, s)| ds.$$

Daí, pela condição  $(f_1)$ , tem-se

$$|F(x, u)| \leq \int_0^u \alpha(1 + |s|^{p-1}) ds = \alpha u + \alpha \frac{|u|^p}{p} \leq C_2(|u| + |u|^p),$$

com  $1 \leq p < \frac{2(n-1)}{n-2}$  e  $C_2 = \max\{\alpha, \alpha/p\}$ . Considerando  $\Psi(u) = |u| + |u|^p$ , obtemos  $|F(x, u)| \leq C_2 \Psi(u)$ . Da continuidade do operador traço (Teorema A.1), existem  $a_1 > 0$  e  $a_2 > 0$  tais que  $\|w\|_{1,\partial} \leq a_1 \|w\|_{H^1} < \infty$  e  $\|w\|_{p,\partial} \leq a_2 \|w\|_{H^1} < \infty$ , para qualquer  $w \in H^1(\Omega)$ . Assim, para todo  $u \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\partial\Omega} |\Psi(u)| d\sigma = \int_{\partial\Omega} (|u| + |u|^p) d\sigma \leq \int_{\partial\Omega} |u| d\sigma + \int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma = \|u\|_{1,\partial} + \|u\|_{p,\partial}^p < \infty.$$

Deste modo,

$$\int_{\partial\Omega} |F(x, u)| d\sigma \leq C_2 \int_{\partial\Omega} |\Psi(u)| d\sigma < \infty, \forall u \in H^1(\Omega).$$

Por isto,

$$0 \leq |J(u)| \leq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 + \frac{\mu_1}{2} \|u\|_{2,\partial}^2 + \left| \int_{\partial\Omega} F(x, u) d\sigma \right| < \infty,$$

sendo, então,  $J(u) \in \mathbb{R}$ , para todo  $u \in H^1(\Omega)$ . ■

**Proposição 2.2.** *Se valem as condições  $(f_0)$ ,  $(f_1)$  e  $(C)$ , então, para cada  $u \in H^1(\Omega)$  arbitrário, porém fixado,  $T_u : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por*

$$T_u(v) = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla v + c(x)uv] dx - \int_{\partial\Omega} \mu_1 uv d\sigma - \int_{\partial\Omega} f(x, u) \cdot v d\sigma, \forall v \in H^1(\Omega),$$

*está bem definido, é linear e contínuo. Em outras palavras,  $T_u \in [H^1(\Omega)]^*$ .*

**Demonstração.** Mostremos inicialmente que  $T_u$  está bem definido, ou seja,  $T_u(v) \in \mathbb{R}$ , para todo  $v \in H^1(\Omega)$ . Seja, pois,  $v \in H^1(\Omega)$ . Das condições de fronteira, temos que

$$T_u(v) = \langle u, v \rangle_c - \mu_1 \langle u, v \rangle_{2,\partial} - \int_{\partial\Omega} f(x, u) v d\sigma,$$

onde  $\langle u, v \rangle_c < \infty$  e  $\langle u, v \rangle_{2,\partial} < \infty$ . Basta, então, verificarmos que  $\left| \int_{\partial\Omega} f(x, u) v d\sigma \right| < \infty$ , pois desse modo teríamos

$$|T_u(v)| \leq |\langle u, v \rangle_c| + |\mu_1 \langle u, v \rangle_{2,\partial}| + \left| \int_{\partial\Omega} f(x, u) v d\sigma \right| < \infty.$$

**Afirmção:**  $\left| \int_{\partial\Omega} f(x, u) v d\sigma \right| < \infty$ .

Com efeito, de  $(f_1)$ , da Desigualdade de Hölder e do Teorema A.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial\Omega} f(x, u) v d\sigma \right| &\leq \alpha \int_{\partial\Omega} (|v| + |u|^{p-1} |v|) d\sigma \\
&= \alpha \|v\|_{1, \partial} + \alpha \int_{\partial\Omega} |u|^{p-1} |v| d\sigma \\
&\leq \alpha \|v\|_{1, \partial} + \alpha \left( \int_{\partial\Omega} |u|^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}} d\sigma \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left( \int_{\partial\Omega} |v|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \alpha \|v\|_{1, \partial} + \alpha \|u\|_{p, \partial}^{p-1} \|v\|_{p, \partial} \\
&\leq a_1 \alpha \|v\|_{H^1} + a_2^p \alpha \|u\|_{H^1}^{p-1} \|v\|_{H^1} \\
&\leq k_1 (\|v\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}^{p-1} \|v\|_{H^1}) < \infty,
\end{aligned}$$

onde  $k_1 = \max\{a_1 \alpha, a_2^p \alpha\}$  e  $1 \leq p < \frac{2(n-1)}{n-2}$ . Logo,

$$\left| \int_{\partial\Omega} f(x, u) v d\sigma \right| < \infty, \quad (2.4)$$

como queríamos.

A linearidade de  $T_u$  segue da linearidade dos funcionais  $P_1, P_2$  e  $P_3 : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definidos por

$$P_1(v) = \langle u, v \rangle_c, \quad P_2(v) = \mu_1 \langle u, v \rangle_{2, \partial} \text{ e } P_3(v) = \int_{\partial\Omega} f(x, u) v d\sigma,$$

para  $v \in H^1(\Omega)$ .

Finalmente, mostremos a continuidade de  $T_u$ . Para isto, é suficiente mostrarmos que  $T_u$  é contínuo em  $0 \in H^1(\Omega)$ . Seja  $(v_k)$  sequência em  $H^1(\Omega)$  com  $v_k \rightarrow 0$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Pela equivalência das normas  $\|\cdot\|_{H^1}$  e  $\|\cdot\|_c$ ,  $v_k \rightarrow 0$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ .

Por (2.4) e pelo Teorema A.1,

$$\begin{aligned}
|T_u(v_k)| &\leq \|u\|_c \|v_k\|_c + \mu_1 \|u\|_{2, \partial} \|v_k\|_{2, \partial} + \left| \int_{\partial\Omega} f(x, u) v_k d\sigma \right| \\
&\leq \|u\|_c \|v_k\|_c + \mu_1 b_1^2 \|u\|_{H^1} \|v_k\|_{H^1} + k_1 (\|v_k\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}^{p-1} \|v_k\|_{H^1}) \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Portanto,  $T_u$  é contínuo. ■

**Proposição 2.3.** *Suponhamos válidas  $(f_0)$ ,  $(f_1)$  e  $(C)$ . Então o funcional  $J$  é diferenciável a Fréchet, tendo como derivada de Fréchet em  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $J'(u) = T_u$ .*

**Demonstração.** Observemos que se  $J_1, J_2, J_3 : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  são definidos por

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} c(x)u^2 \right] dx, \quad J_2(u) = \frac{\mu_1}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \quad \text{e} \quad J_3(u) = \int_{\partial\Omega} F(x, u) d\sigma,$$

para todo  $u \in H^1(\Omega)$ , então  $J = J_1 - J_2 - J_3$ . Mostrando, então, que  $J_1, J_2$  e  $J_3$  são diferenciáveis a Fréchet em  $u \in H^1(\Omega)$ , teremos  $J'(u) = J'_1(u) - J'_2(u) - J'_3(u)$ , sendo, portanto,  $J$  diferenciável a Fréchet em  $H^1(\Omega)$ . Provemos, pois, que isto vale.

**Afirmção 1:**  $J_1$  é diferenciável a Fréchet, com derivada Fréchet em  $u \in H^1(\Omega)$  dada por

$$J'_1(u) \cdot v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x)u v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

De fato,  $J_1(u) = \frac{1}{2} \mathcal{D}_c(u)$ , para todo  $u \in H^1(\Omega)$ . Mas, pelo Teorema B.2,  $\mathcal{D}_c$  é diferenciável a Fréchet, com derivada de Fréchet dada por  $\mathcal{D}'_c(u) \cdot v = 2\langle u, v \rangle_c$ , para  $v \in H^1(\Omega)$ . Logo,  $J_1$  é diferenciável a Fréchet, com  $J'_1(u) \cdot v = \langle u, v \rangle_c$ , para quaisquer  $u, v \in H^1(\Omega)$ .

**Afirmção 2:**  $J_2$  é diferenciável a Fréchet, com derivada Fréchet em  $u \in H^1(\Omega)$  dada por

$$J'_2(u) \cdot v = \mu_1 \int_{\partial\Omega} u v d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Com efeito,  $J_2(u) = \frac{\mu_1}{2} \mathcal{B}(u)$ , sendo, pelo Teorema B.2,  $\mathcal{B}$  diferenciável a Fréchet com  $\mathcal{B}'(u) \cdot v = 2\langle u, v \rangle_{2,\partial}$ , para todo  $v \in H^1(\Omega)$ . Daí, segue que  $J'_2(u) \cdot v = \mu_1 \langle u, v \rangle_{2,\partial}$ , como queríamos.

**Afirmção 3:**  $J_3$  é diferenciável a Fréchet, com derivada Fréchet em  $u \in H^1(\Omega)$  dada por

$$J'_3(u) \cdot v = \int_{\partial\Omega} f(x, u) v d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Mostraremos que, dado  $\varepsilon > 0$  qualquer, existe  $\delta = \delta(u, \varepsilon) > 0$  tal que, se  $v \in H^1(\Omega)$  e  $\|v\|_c < \delta$ , então

$$\left| J_3(u+v) - J_3(u) - \int_{\partial\Omega} f(x, u) v d\sigma \right| \leq \varepsilon \|v\|_c,$$

ou seja, que  $J_3$  é diferenciável a Fréchet, com  $J'_3(u) = \int_{\partial\Omega} f(x, u) v d\sigma$ , para  $v \in H^1(\Omega)$ . Para tanto, notemos inicialmente que se  $\Psi \equiv |F(x, u+v) - F(x, u) - f(x, u)v|$ , então

$$\left| J_3(u+v) - J_3(u) - \int_{\partial\Omega} f(x, u) v d\sigma \right| \leq \int_{\partial\Omega} \Psi d\sigma.$$



Consideremos  $\tilde{\varphi}, \tilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+$  arbitrários e definamos, para  $u, v \in H^1(\Omega)$ ,

$$R_1 = \{x \in \partial\Omega; |u(x)| \geq \tilde{\varphi}\}, R_2 = \{x \in \partial\Omega; |v(x)| \geq \tilde{\varepsilon}\}$$

e

$$R_3 = \{x \in \partial\Omega; |u(x)| \leq \tilde{\varphi} \text{ e } |v(x)| \leq \tilde{\varepsilon}\}.$$

Desse modo,  $\partial\Omega \subset R_1 \cup R_2 \cup R_3$ . Disto,

$$\int_{\partial\Omega} \Psi d\sigma \leq \sum_{i=1}^3 \int_{R_i} \Psi d\sigma. \quad (2.5)$$

Por  $(f_0)$  e pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\theta \in (0, 1)$  de modo que

$$F(x, \xi + \eta) - F(x, \xi) = f(x, \xi + \theta\eta)\eta, \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

Daí, de (2.5) e de  $(f_1)$ , seque que

$$\int_{R_1} |F(x, u+v) - F(x, u)| d\sigma = \int_{R_1} |f(x, u + \theta v)| |v| d\sigma \leq \int_{R_1} \alpha(1 + |u + \theta v|^{p-1}) |v| d\sigma.$$

Pelo Teorema A.4, existe constante  $\tilde{k}_1 > 0$  tal que  $|u + \theta v|^{p-1} \leq \tilde{k}_1(|u|^{p-1} + |\theta v|^{p-1})$ .

Como  $\theta \in (0, 1)$ ,  $|u + \theta v|^{p-1} \leq \tilde{k}_1(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})$ . Assim,

$$\int_{R_1} |F(x, u+v) - F(x, u)| d\sigma \leq \int_{R_1} \alpha |v| + \tilde{k}_2 |u|^{p-1} |v| + \tilde{k}_2 |v|^{p-1} |v| d\sigma, \quad (2.6)$$

onde  $\tilde{k}_2 = \alpha \tilde{k}_1$ . Visto que  $0 \leq p-1 < \frac{n}{n-2}$ ,  $\frac{p-1}{p} + \frac{n-2}{2n-2} < 1$ , existe  $\alpha > 1$  tal que  $\frac{1}{\alpha} + \frac{p-1}{p} + \frac{n-2}{2n-2} = 1$ . Como  $1 \leq p < \frac{2n-2}{n-2}$ , o Teorema A.1 garante a continuidade do operador traço de  $H^1(\Omega)$  sobre  $L^p(\partial\Omega)$  e de  $H^1(\Omega)$  sobre  $L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega)$ . Consequentemente, existem  $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $\|u\|_{p,\partial} \leq \tilde{b}_1 \|u\|_{H^1}$  e  $\|u\|_{\frac{2n-2}{n-2},\partial} \leq \tilde{b}_2 \|u\|_{H^1}$ . Disto e da desigualdade de Hölder generalizada aplicada a (2.6) para  $p' = \frac{2n-2}{n-2}$ ,  $q' = \frac{p}{p-1}$  e  $\alpha$ , temos, notando que  $R_1 \subset \partial\Omega$ ,

$$\int_{R_1} |F(x, u+v) - F(x, u)| d\sigma \leq \|v\|_{\frac{2n-2}{n-2},\partial} \left[ C |R_1|^{\frac{n}{2n-2}} + \tilde{k}_2 |R_1|^{\frac{1}{\alpha}} (\|u\|_{p,\partial}^{p-1} + \|v\|_{p,\partial}^{p-1}) \right].$$

Devido a isto, ao Teorema A.1 e à equivalência entre as normas  $\|\cdot\|_{H^1}$  e  $\|\cdot\|_c$ , obtemos

$\tilde{k}_3 > 0$  tal que

$$\int_{R_1} |F(x, u+v) - F(x, u)| d\sigma \leq \tilde{k}_3 \|v\|_c \left[ |R_1|_{\sigma}^{\frac{n}{2n-2}} + |R_1|_{\sigma}^{\frac{1}{\sigma}} (\|u\|_c^{p-1} + \|v\|_c^{p-1}) \right]. \quad (2.7)$$

Por outro lado, pela continuidade do operador traço de  $H^1(\Omega)$  em  $L^2(\partial\Omega)$ , pela equivalência das normas  $\|\cdot\|_{H^1}$  e  $\|\cdot\|_c$  e pela definição de  $R_1$ , existe constante positiva  $\bar{k}_1$  tal que

$$\|u\|_c \geq \bar{k}_1 \tilde{\varphi} \left( \int_{R_1} 1 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} = \bar{k}_1 \tilde{\varphi} |R_1|_{\sigma}^{\frac{1}{2}},$$

isto é,

$$|R_1|_{\sigma}^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left( \frac{\|u\|_c}{\bar{k}_1 \tilde{\varphi}} \right)^{\frac{2}{\sigma}} := M_1(\tilde{\varphi}) \quad \text{e} \quad |R_1|_{\sigma}^{\frac{n}{2n-2}} \leq \left( \frac{\|u\|_c}{\bar{k}_1 \tilde{\varphi}} \right)^{\frac{n}{n-1}} := M_2(\tilde{\varphi}).$$

Por conseguinte, de (2.7),

$$\int_{R_1} |F(x, u+v) - F(x, u)| d\sigma \leq \tilde{k}_3 \|v\|_c [M_2(\tilde{\varphi}) + M_1(\tilde{\varphi}) (\|u\|_c^{p-1} + \|v\|_c^{p-1})].$$

Analogamente, pode-se mostrar que existe  $\tilde{k}_4 > 0$ , tal que

$$\int_{R_1} |f(x, u)v| d\sigma \leq \tilde{k}_4 \|v\|_c [M_2(\tilde{\varphi}) + M_1(\tilde{\varphi}) (\|u\|_c^{p-1} + \|v\|_c^{p-1})].$$

Assim, se  $\tilde{k}_5 = \tilde{k}_3 + \tilde{k}_4$ , temos

$$\int_{R_1} \Psi d\sigma \leq \tilde{k}_5 \|v\|_c [M_2(\tilde{\varphi}) + M_1(\tilde{\varphi}) (\|u\|_c^{p-1} + \|v\|_c^{p-1})].$$

Agora, seja  $v \in H^1(\Omega)$ , com  $\|v\|_c < \delta$ , onde  $0 < \delta < 1$ . Como  $u \in H^1(\Omega)$  é arbitrário, porém fixado,  $M_1(\tilde{\varphi}) \rightarrow 0$  e  $M_2(\tilde{\varphi}) \rightarrow 0$ , quando  $\tilde{\varphi} \rightarrow \infty$ . Disto,

$$M_2(\tilde{\varphi}) + M_1(\tilde{\varphi}) (\|u\|_c^{p-1} + \|v\|_c^{p-1}) \rightarrow 0$$

em  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ . Assim, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\varphi > 0$  tal que se  $\tilde{\varphi} > \varphi$ , então

$$\int_{R_1} \Psi d\sigma \leq \tilde{k}_5 \|v\|_c \frac{\epsilon}{3\tilde{k}_5} = \frac{\epsilon}{3} \|v\|_c, \forall v \in H^1(\Omega) \text{ com } \|v\|_c \leq \delta < 1. \quad (2.8)$$

Analogamente, ao que foi feito até agora para  $R_1$ , obtemos constante  $d_1 > 0$  tal

que

$$\begin{aligned} \int_{R_2} \Psi d\sigma &\leq \int_{R_2} |F(x, u+v) - F(x, u)| d\sigma + \int_{R_2} |f(x, u)v| d\sigma \\ &\leq d_1 \int_{R_2} [ |v| + |u|^{p-1}|v| + |v|^{p-1}|v| ] d\sigma. \end{aligned}$$

Pelo Teorema A.1, pelas normas  $\|\cdot\|_{H^1}$  e  $\|\cdot\|_c$  serem equivalentes, pela desigualdade de Hölder, com  $p' = \frac{p}{p-1}$ ,  $q' = p$  e por  $R_2 \subset \partial\Omega$ , vemos que

$$\int_{R_2} \Psi d\sigma \leq d_1 \left[ |R_2|_{\sigma}^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_{p,\partial} + \|u\|_{p,\partial}^{p-1} \|v\|_{p,\partial} + \|v\|_{p,\partial}^{p-1} \|v\|_{p,\partial} \right],$$

com  $d_1 > 0$ . Novamente, pelo Teorema A.1 e pela equivalência entre as normas  $\|\cdot\|_{H^1}$  e  $\|\cdot\|_c$ , conseguimos  $d_2 > 0$  de modo que

$$\int_{R_2} \Psi d\sigma \leq d_2 (1 + \|u\|_c^{p-1} + \|v\|_c^{p-1}) \left[ \int_{R_2} |v|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2.9)$$

Agora, se  $x \in R_2$ ,  $|v(x)| \geq \tilde{\epsilon}$ . Assim, se  $m = \frac{2n-2}{n-2}$ , temos

$$\left( \int_{R_2} |v|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{R_2} |v|^p \left( \frac{|v|}{|v|} \right)^{m-p} d\sigma \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde  $\frac{m}{p}$  e  $\frac{m}{m-p}$  são expoentes conjugados. Segue, da desigualdade de Hölder e de  $|v(x)| \geq \tilde{\epsilon}$ , para  $x \in R_2$  que

$$\begin{aligned} \left( \int_{R_2} |v|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left[ \left( \int_{R_2} |v|^m d\sigma \right)^{\frac{p}{m}} \left( \int_{R_2} |v|^m d\sigma \right)^{\frac{m-p}{m}} \right]^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\tilde{\epsilon}^{\frac{m-p}{p}}} \\ &= \|v\|_{m,\partial} \|v\|_{m,\partial}^{\frac{m-p}{p}} \tilde{\epsilon}^{\frac{p-m}{p}}. \end{aligned}$$

Como  $m > p$ , segue, do Teorema A.1 e das normas  $\|\cdot\|_{H^1}$  e  $\|\cdot\|_c$  serem equivalentes, que existe  $d_3 > 0$  tal que

$$\left( \int_{R_2} |v|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \leq d_3 \|v\|_c \|v\|_c^{\frac{m-p}{p}} \tilde{\epsilon}^{\frac{p-m}{p}}.$$

Disto e de (2.9), obtemos,

$$\int_{R_2} \Psi d\sigma \leq d_4 \tilde{\epsilon}^{\frac{p-m}{p}} (1 + \|u\|_c^{p-1} + \|v\|_c^{p-1}) \|v\|_c^{\frac{m}{p}} \text{ com } d_4 = d_2 d_3. \quad (2.10)$$

Agora, como  $F \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , temos que dados  $\hat{\epsilon}, \hat{v} > 0$ , existe  $\hat{k}_1 = \hat{k}_1(\hat{\epsilon}, \hat{v}) > 0$  tal que se  $x \in \partial\Omega$ ,  $|u(x)| \leq \hat{v}$  e  $|v(x)| \leq \hat{k}_1$ , então

$$|F(x, u+v) - F(x, u) - f(x, u)v| \leq \hat{\epsilon}|v|. \quad (2.11)$$

Assim, para  $\hat{\epsilon} > 0$  qualquer e  $\hat{v} = \hat{\varphi} > 0$ , garantimos que existe  $\hat{k}_1 = \hat{\gamma} > 0$  tal que se  $|u(x)| \leq \hat{\varphi}$  e  $|v(x)| \leq \hat{\gamma}$ , então a desigualdade (2.11) é satisfeita. Daí, do Teorema A.1 e das normas  $\|\cdot\|_{H^1}$  e  $\|\cdot\|_c$  serem equivalentes,

$$\int_{R_3} \Psi d\sigma \leq \hat{\epsilon} \int_{R_3} |v(x)| d\sigma \leq \hat{\epsilon} K \|v\|_c.$$

Tomando  $\hat{\epsilon}$  tal que  $\hat{\epsilon} K < \frac{\epsilon}{3}$ , segue que

$$\int_{R_3} \Psi d\sigma \leq \frac{\epsilon}{3} \|v\|_c. \quad (2.12)$$

Combinando (2.8), (2.10) e (2.12), obtemos

$$\int_{\partial\Omega} \Psi d\sigma \leq \frac{2\epsilon}{3} \|v\|_c + d_4 \tilde{\epsilon}^{\frac{p-m}{p}} (1 + \|u\|_c^{p-1} + \|v\|_c^{p-1}) \|v\|_c^{\frac{m}{p}},$$

desde que  $v \in H^1(\Omega)$  com  $\|v\|_c < \delta$ . Tomando  $\delta \in (0, 1)$  tal que

$$d_4 \tilde{\epsilon}^{\frac{p-m}{p}} (1 + \|u\|_c^{p-1} + \|v\|_c^{p-1}) \delta^{\frac{m-p}{p}} < \frac{\epsilon}{3},$$

tem-se

$$\int_{\partial\Omega} \Psi d\sigma \leq \frac{2\epsilon}{3} \|v\|_c + \frac{\epsilon}{3} \|v\|_c = \epsilon \|v\|_c,$$

como queríamos. ■

**Proposição 2.4.** *Se valem  $(f_0)$ ,  $(f_1)$  e  $(C)$ , então o funcional  $J \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ .*

**Demonstração.** Mostraremos que  $J_1, J_2, J_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ , de modo que  $J$ , que é dado por  $J_1 - J_2 - J_3$ , pertencerá a  $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

Recordemos, inicialmente, que  $J_1(u) = \frac{1}{2}\mathcal{D}_c(u)$  e que  $J_2(u) = \frac{\mu_1}{2}\mathcal{B}(u)$ , para todo  $u \in H^1(\Omega)$  e, que, pelo Teorema B.2,  $\mathcal{D}_c, \mathcal{B} \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ . Dessa maneira,  $J_1$  e  $J_2$  pertencem a  $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ . Resta provar que  $J_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ .

Já provamos que  $J_3$  é diferenciável a Fréchet e a derivada de Fréchet em  $u \in H^1(\Omega)$  é dada por  $J'_3(u) \cdot v = \int_{\partial\Omega} f(x, u)v d\sigma$ , para todo  $v \in H^1(\Omega)$ . Verifiquemos que  $J'_3 : H^1(\Omega) \rightarrow [H^1(\Omega)]^*$  é contínuo.

Seja  $u \in H^1(\Omega)$  e  $(u_k)$  sequência em  $H^1(\Omega)$  com  $u_k \rightarrow u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Temos, pela equivalência das normas  $\|\cdot\|_c$  e  $\|\cdot\|_{H^1}$ , que  $u_k \rightarrow u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ . Ainda, do Teorema A.1, o operador traço de  $H^1(\Omega)$  em  $L^l(\partial\Omega)$  é contínuo para  $l \leq \frac{2n-2}{n-2}$ .

Portanto,

$$u_k \rightarrow u \text{ em } (L^l(\partial\Omega), \|\cdot\|_{l,\partial}), \forall l \text{ com } 1 \leq l \leq \frac{2n-2}{n-2}. \quad (2.13)$$

Queremos mostrar que  $J'_3(u_k) \rightarrow J'_3(u)$  em  $([H^1(\Omega)]^*, \|\cdot\|_c^*)$ . Notemos que

$$\begin{aligned} \|J'_3(u_k) - J'_3(u)\|_c^* &= \sup_{\|v\|_c \leq 1} \|[J'_3(u_k) - J'_3(u)](v)\| \\ &\leq \sup_{\|v\|_c \leq 1} \int_{\partial\Omega} |f(x, u_k) - f(x, u)||v| d\sigma. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pela Desigualdade de Hölder, segue que

$$\int_{\partial\Omega} |f(x, u_k) - f(x, u)||v| d\sigma \leq \|f(x, u_k) - f(x, u)\|_{\frac{p}{p-1}, \partial} \|v\|_{p, \partial}.$$

Como  $1 \leq p < \frac{2n-2}{n-2}$ , pelo Teorema A.1, existe  $\tilde{K}_1 > 0$  tal que

$$\int_{\partial\Omega} |f(x, u_k) - f(x, u)||v| d\sigma \leq \tilde{K}_1 \|f(x, u_k) - f(x, u)\|_{\frac{p}{p-1}, \partial} \|v\|_{H^1},$$

e pela equivalência das normas  $\|\cdot\|_{H^1}$  e  $\|\cdot\|_c$ , obtemos  $\tilde{K}_2 > 0$ , de modo que

$$\int_{\partial\Omega} |f(x, u_k) - f(x, u)||v| d\sigma \leq \tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \|f(x, u_k) - f(x, u)\|_{\frac{p}{p-1}, \partial} \|v\|_c.$$

Voltando em (2.14), com  $\tilde{K}_3 = \tilde{K}_1 \tilde{K}_2 > 0$ , temos

$$\|J'_3(u_k) - J'_3(u)\|_c^* \leq \tilde{K}_3 \|f(x, u_k) - f(x, u)\|_{\frac{p}{p-1}, \partial} \quad (2.15)$$

Pelo Lema 2.1, o operador de Nemytskii é contínuo. Ainda, por  $p$  satisfazer  $1 \leq p < \frac{2n-2}{n-2}$  e por (2.13), com  $l = p$ , tem-se que  $u_k \rightarrow u$  em  $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$ . Daí,

$$f(\cdot, u_k(\cdot)) \rightarrow f(\cdot, u(\cdot)) \text{ em } (L^{\frac{p}{p-1}}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{\frac{p}{p-1},\partial}).$$

Assim, em (2.15), obtemos

$$\|J'_3(u_k) - J'_3(u)\|_c^* \leq \tilde{K}_3 \|f(x, u_k) - f(x, u)\|_{\frac{p}{p-1},\partial} \rightarrow 0.$$

Logo,  $J'_3(u_k) \rightarrow J'_3(u)$  em  $([H^1(\Omega)]^*, \|\cdot\|_c^*)$ , sendo  $J'_3$  contínuo e  $J_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ , como queríamos. ■

**Proposição 2.5.** *Supondo válidas  $(f_0)$ ,  $(f_1)$  e  $(C)$ , o operador  $J'_2$  é compacto.*

**Demonstração.** Seja  $(u_k)$  sequência limitada em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Como  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$  é espaço de Hilbert, é, em particular, reflexivo. Daí, existem  $u \in H^1(\Omega)$  e  $(u_{k_j}) \subset (u_k)$  tais que  $u_{k_j} \rightharpoonup u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Da compacidade da imersão  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ ,  $u_{k_j} \rightarrow u$  em  $(L^2(\partial\Omega), \|\cdot\|_{2,\partial})$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \|J'_2(u_{k_j}) - J'_2(u)\|_c^* &= \sup\{|[J'_2(u_{k_j}) - J'_2(u)]v|; \|v\|_c \leq 1\} \\ &= \sup\{\mu_1 |\langle u_{k_j} - u, v \rangle|; \|v\|_c \leq 1\} \\ &\leq \mu_1 \sup\{\|u_{k_j} - u\|_{2,\partial} \|v\|_{2,\partial}; \|v\|_c \leq 1\} \\ &\leq \mu_1 \bar{k} \sup\{\|u_{k_j} - u\|_{2,\partial} \|v\|_c; \|v\|_c \leq 1\} \\ &\leq \mu_1 \bar{k} \|u_{k_j} - u\|_{2,\partial} \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donde  $J'_2(u_{k_j}) \rightarrow J'_2(u)$  em  $([H^1(\Omega)]^*, \|\cdot\|_c^*)$ , de modo que  $J'_2$  é compacto. ■

**Proposição 2.6.** *Supondo válidas  $(f_0)$ ,  $(f_1)$  e  $(C)$ , o funcional  $J_3$  é fracamente contínuo e, além disso, o operador  $J'_3$  é compacto.*

**Demonstração.** Mostremos que  $J_3$  é fracamente contínuo. Para tanto, sejam  $(u_k)$  sequência em  $H^1(\Omega)$  e  $u \in H^1(\Omega)$ , com  $u_k \rightharpoonup u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Pelo Teorema A.10, existe constante  $k_1 > 0$  tal que  $\|u_k\|_c \leq k_1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Por isto e pelo fato de  $\|\cdot\|_{H^1}$  e  $\|\cdot\|_c$  serem equivalentes, existe  $k_2 > 0$ , com  $\|u\|_{H^1} \leq k_2$ . Devido ao Teorema

A.9, existe  $(u_{k_j}) \subset (u_k)$ , com  $u_{k_j} \rightharpoonup u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ . De  $(f_1)$ , temos  $1 \leq p < \frac{2n-2}{n-2}$ , e do Teorema A.1, temos que  $u_k \rightarrow u$  em  $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$ .

Analisemos, agora, o funcional  $J_3$ . Temos que  $J_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$  e, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$J_3(w) - J_3(u) = J_3'(\theta w + (1 - \theta)u) \cdot (w - u), \quad \forall u, w \in H^1(\Omega).$$

Daí,  $|J_3(u_k) - J_3(u)| = \left| \int_{\partial\Omega} f(x, \theta_k u_k + (1 - \theta_k)u) \cdot (u_k - u) d\sigma \right|$ . Utilizando a notação  $\Gamma_k = \theta_k u_k + (1 - \theta_k)u$ , temos, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |J_3(u_k) - J_3(u)| &\leq \int_{\partial\Omega} |f(x, \theta u_k + (1 - \theta)u)| |u_k - u| d\sigma \\ &\leq \left( \int_{\partial\Omega} |f(x, \Gamma_k(u))|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\partial\Omega} |u_k - u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f(x, \Gamma_k(u))\|_{\frac{p}{p-1}, \partial} \|u_k - u\|_{p, \partial}. \end{aligned}$$

Ainda, pela definição de  $\Gamma_k$ ,  $\Gamma_k \rightarrow u$  em  $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$ . Disto e do Lema 2.1,  $f(\cdot, \Gamma_k(u)) \rightarrow f(\cdot, u)$  em  $(L^{\frac{p}{p-1}}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{\frac{p}{p-1}, \partial})$ . Consequentemente,  $(\|f(\cdot, \Gamma_k(u))\|_{\frac{p}{p-1}, \partial})$  é limitada em  $\mathbb{R}$ . Portanto,

$$|J_3(u_k) - J_3(u)| \leq \|f(x, \Gamma_k(u))\|_{\frac{p}{p-1}, \partial} \|u_k - u\|_{p, \partial} \rightarrow 0.$$

Logo,  $J_3$  é fracamente contínuo.

Resta, agora, provarmos que  $J_3'$  é compacto. Seja, pois,  $(u_k)$  uma sequência limitada em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Como  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$  é espaço de Hilbert, ele é, em particular, reflexivo. Daí, existem  $u \in H^1(\Omega)$  e  $(u_{k_j}) \subset (u_k)$  tais que  $u_{k_j} \rightharpoonup u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Pelo argumento anterior, obtemos que  $f(\cdot, u_{k_j}(\cdot)) \rightarrow f(\cdot, u(\cdot))$  em  $(L^{\frac{p}{p-1}}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{\frac{p}{p-1}, \partial})$  e  $J_3(u_{k_j}) \rightarrow J_3(u)$ .

Por outro lado, da Proposição 2.4 segue que, quando  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\|J_3'(u_{k_j}) - J_3'(u)\|_c^* \leq \tilde{K}_3 \|f(\cdot, u_{k_j}) - f(\cdot, u)\|_{\frac{p}{p-1}, \partial} \rightarrow 0.$$

Portanto,  $J_3'(u_{k_j}) \rightarrow J_3'(u)$  em  $([H^1(\Omega)]^*, \|\cdot\|_c^*)$  e, assim,  $J_3'$  é compacto. ■

O próximo passo desse capítulo é realizarmos a prova de que o funcional  $J$  satisfaz

a condição de Cerami. Isso tornará possível a demonstração dos resultados principais deste estudo.

**Definição 2.2.** *Seja  $X$  um espaço de Banach. Dizemos que  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfaz a condição de Cerami com nível  $c$ , sendo  $c \in \mathbb{R}$ , e denotamos  $(Ce)_c$ , se qualquer sequência  $(u_n) \subset X$  tal que  $J(u_n) \rightarrow c$  e  $|J'(u_n)|(1 + \|u_n\|) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , possui uma subsequência convergente em  $H^1(\Omega)$ .*

*Ainda, diz-se que  $J$  satisfaz a condição  $(Ce)$  se  $J$  satisfaz  $(Ce)_c$ , para todo  $c \in \mathbb{R}$ .*

Primeiramente, faremos a demonstração de que qualquer sequência de Cerami para  $J$  é limitada em  $H^1(\Omega)$ .

**Proposição 2.7.** *Suponha  $(SSR)$ . Ainda, assuma que valem ou  $(HOC)^-$  ou  $(HOC)^+$ . Deste modo, qualquer sequência de Cerami para  $J$  é limitada em  $H^1(\Omega)$ .*

**Demonstração.** A demonstração é feita por contradição. Seja, pois,  $(u_n) \subset H^1(\Omega)$  uma sequência de Cerami ilimitada. Tomando  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_c}$ , temos que  $(v_n)$  é limitada, com  $\|v_n\|_c = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde existe  $v \in H^1(\Omega)$  de tal modo que  $v_n \rightharpoonup v$  em  $H^1(\Omega)$ . Pelos Teoremas A.7 e A.17,  $v_n \rightarrow v$  em  $L^q(\Omega)$ , para quase todo ponto de  $\Omega$ , com  $q \in [1, \frac{2n}{n-2})$  e ainda  $v_n \leq h$ , para algum  $h \in L^q(\Omega)$ . Analogamente,  $v_n \rightarrow v$  em  $L^r(\partial\Omega)$ , q.t.p. em  $\partial\Omega$ , onde  $r \in [1, \frac{2(n-1)}{n-2})$ .

Agora,

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \phi dx + \int_{\Omega} c(x) u_n \phi dx - \mu_1 \int_{\partial\Omega} u_n \phi d\sigma - \int_{\partial\Omega} f(x, u_n) \phi d\sigma = \langle J'(u_n), \phi \rangle,$$

qualquer que seja  $\phi \in H^1(\Omega)$ . Dividindo a igualdade acima por  $\|u_n\|_c$ , obtemos, para  $\phi \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla v_n \nabla \phi dx + \int_{\Omega} c(x) v_n \phi dx - \mu_1 \int_{\partial\Omega} v_n \phi d\sigma - \int_{\partial\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} v_n \phi d\sigma = o_n(1), \quad (2.16)$$

pois  $\frac{1}{\|u_n\|_c} \|J'(u_n)\| \|\phi\|_c \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , visto que a sequência é de Cerami. Ainda, por  $(SSR)$  e pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} v_n \phi d\sigma = 0, \quad \text{q.t.p. } x \in \partial\Omega. \quad (2.17)$$



De (2.16) e (2.17) concluímos que

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi dx + \int_{\Omega} c(x)v\phi dx - \mu_1 \int_{\partial\Omega} v\phi d\sigma = 0, \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Tomando, em particular,  $\phi = v_n$ ,

$$\begin{aligned} \|v\|_c^2 &= \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)v^2 dx = \mu_1 \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma = \mu_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} v_n^2 d\sigma \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\langle J'(u_n), v_n \rangle}{\|u_n\|_c} + \|v_n\|_c^2 - \int_{\partial\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} v_n^2 d\sigma \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\langle J'(u_n), v_n \rangle}{\|u_n\|_c} + 1 - \int_{\partial\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} v_n^2 d\sigma \right] = 1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Em (2.18) foi usado o fato de que  $(v_n)$  é normal. Em particular, utilizando (2.18), a convergência fraca de  $v_n$  implica que  $v_n \rightarrow v$  em  $H^1(\Omega)$ . Logo,  $v$  é uma solução não nula para o autoproblema de Steklov

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu_1 u, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.19)$$

Como uma consequência,  $v = t\varphi_1$ , para algum  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , onde  $\varphi_1$  é a primeira autofunção para (2.19).

Observemos, agora, que  $\|u_n\|_c \rightarrow \infty$  no conjunto  $[v \neq 0] := \{x \in \Omega; |v(x)| \neq 0\}$ .

Colocando  $\phi = u_n$ , segue que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)u_n^2 dx - \mu_1 \int_{\partial\Omega} u_n^2 d\sigma - \int_{\partial\Omega} f(x, u_n)u_n d\sigma = \langle J'(u_n), u_n \rangle. \quad (2.20)$$

Escrevamos agora  $u_n = t_n\varphi_1 + w_n$ , com  $t_n \in \mathbb{R}$  e  $(w_n) \subset V_1$ . O objetivo aqui é provarmos que  $(w_n)$  é limitada. Nesse intuito, tomemos  $\varphi = w_n$  como função teste, provando que

$$0 \leq \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \|w_n\|_c^2 \leq \|w_n\|_c^2 - \mu_1 \|w_n\|_{2,\partial}^2 \leq \int_{\partial\Omega} f(x, u_n)w_n d\sigma + o_n(1),$$

pois  $\langle J'(u_n), w_n \rangle = \langle J'(u_n), u_n \rangle + t_n \int_{\partial\Omega} f(x, u_n)\varphi_1 \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , por (SSR).

Utilizando novamente  $(SSR)$ ,

$$0 \leq \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \|w_n\|_c^2 \leq k + k\|w_n\|_c.$$

Por conseguinte,  $(w_n)$  é limitada em  $H^1(\Omega)$ . Lembrando novamente  $(SSR)$  e usando  $\phi = w_n$  como função teste,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \|w_n\|_c^2 &\leq \int_{\partial\Omega} |f(x, u_n)w_n| d\sigma \\ &\leq \|f(\cdot, u_n)\|_{2,\partial} \|w_n\|_{2,\partial} \leq C\|w_n\|_c \|f(\cdot, u_n)\|_{2,\partial}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Portanto, de (2.21) e do Teorema da Convergência Dominada,  $\|w_n\|_c \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Isto nos dá

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)u_n^2 dx - \mu_1 \int_{\partial\Omega} u_n^2 d\sigma = o_n(1). \quad (2.22)$$

Utilizando (2.20) e (2.22), vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} f(x, u_n)u_n d\sigma = 0 \quad (2.23)$$

Por outro lado, usando o Lema de Fatou, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} f(x, u_n)u_n d\sigma \neq 0.$$

De fato, usando  $(HOC)^-$ , obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} f(x, u_n)u_n d\sigma \leq \int_{\partial\Omega} \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x, u_n)u_n d\sigma \leq \int_{\partial\Omega} a(x) d\sigma < 0. \quad (2.24)$$

Analogamente, por  $(HOC)^+$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} f(x, u_n)u_n d\sigma \geq \int_{\partial\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x, u_n)u_n d\sigma \geq \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma > 0. \quad (2.25)$$

Portanto, (2.24) e (2.25) fornecem uma contradição com (2.23), donde obtemos que a sequência  $(u_n)$  é limitada. ■

**Proposição 2.8.** *Suponha  $(SSR)$ . Assuma ainda que valem ou  $(HOC)^-$  ou  $(HOC)^+$ . Então o funcional  $J$  satisfaz a condição de Cerami  $(Ce)$ .*

**Demonstração.** Seja  $(u_k)$  uma sequência de Cerami para  $J$ . Da Proposição 2.7,  $(u_k)$  é limitada. Disto e de  $H^1(\Omega)$  ser reflexivo, existem  $u \in H^1(\Omega)$  e subsequência  $(u_{k_j})$  de  $(u_k)$ , tal que  $u_{k_j} \rightharpoonup u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Como  $J'_2$  e  $J'_3$  são compactos,  $J'_2(u_{k_j}) \rightarrow J'_2(u)$  e  $J'_3(u_{k_j}) \rightarrow J'_3(u)$  em  $([H^1(\Omega)]^*, \|\cdot\|_c^*)$ .

Consideremos agora o operador  $T : H^1(\Omega) \rightarrow [H^1(\Omega)]^*$ , dado por

$$T(u) \cdot v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x)uv dx = \langle u, v \rangle_c, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

**Afirmção:**  $T$  é linear, bijetor e contínuo.

Com efeito, a linearidade de  $T$  segue do fato que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  é um produto interno em  $H^1(\Omega)$ .

Para provar que  $T$  é injetor, notemos que  $\text{Ker}T = \{u \in H^1(\Omega); T(u) \cdot v = 0\}$ , donde, tomando  $u \in \text{Ker}T$ ,  $\langle u, v \rangle_c = 0$ , qualquer que seja  $v \in H^1(\Omega)$ . Considerando, em particular  $v = u$ , temos  $\langle u, u \rangle_c = 0$ , o que ocorre se, e somente se,  $u = 0$ . Logo,  $\text{Ker}T = \{0\}$  e, assim,  $T$  é injetor. Para a sobrejetividade, basta usarmos o Teorema de Riesz-Fréchet, de modo que, como  $T(u) \in [H^1(\Omega)]^*$ , dado qualquer  $l \in [H^1(\Omega)]^*$ , existe  $u \in H^1(\Omega)$  tal que  $l(v) = T(u) \cdot v = \langle u, v \rangle_c$ , sendo  $T$  sobrejetivo.

Finalmente, seja  $(u_k)$  uma sequência em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ , com  $u_k \rightarrow 0$ . Assim,

$$\|T(u_k)\|_c^* = \sup_{\|v\|_c \leq 1} |T(u_k) \cdot v| = \sup_{\|v\|_c \leq 1} |\langle u_k, v \rangle_c| \leq \sup_{\|v\|_c \leq 1} \|u_k\|_c \|v\|_c \leq \|u_k\|_c \rightarrow 0,$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo,  $T(u_k) \rightarrow 0 = T(0)$  em  $([H^1(\Omega)]^*, \|\cdot\|_c^*)$ , o que mostra que  $T$  é contínuo.

Assim, como  $T$  é linear, bijetor e contínuo, temos, pelo Teorema da Aplicação Aberta, que  $T$  é uma aplicação aberta, de modo que  $T^{-1} : [H^1(\Omega)]^* \rightarrow H^1(\Omega)$  é contínuo.

Ainda,  $J'(u) = J'_1(u) - J'_2(u) - J'_3(u)$ , sendo  $J'_1 = T$ . Logo, dado  $u \in H^1(\Omega)$ ,

$$T^{-1}(J'(u)) = u - T^{-1}(J'_2(u)) - T^{-1}(J'_3(u));$$

em particular,

$$u_{k_j} = T^{-1}(J'(u_{k_j})) + T^{-1}(J'_2(u_{k_j})) + T^{-1}(J'_3(u_{k_j})), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Agora, por  $(u_k)$  ser uma sequência de Cerami, obtemos que  $J'(u_k) \rightarrow 0$  em  $([H^1(\Omega)]^*, \|\cdot\|_c^*)$ , donde  $J'(u_{k_j}) \rightarrow 0$  neste mesmo espaço. Utilizando esse fato e as

compacidades de  $J'_2$  e  $J'_3$ , obtemos  $T^{-1}(J'(u_{k_j})) \rightarrow 0$ ,  $T^{-1}(J'_2(u_{k_j})) \rightarrow T^{-1}(J'_2(u))$  e  $T^{-1}(J'_3(u_{k_j})) \rightarrow T^{-1}(J'_3(u))$ , em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ , com

$$u_{k_j} \rightarrow T^{-1}(J'_2(u)) + T^{-1}(J'_3(u)), \text{ em } (H^1(\Omega), \|\cdot\|_c),$$

sendo que a sequência  $(u_k)$  possui subsequência  $(u_{k_j})$  convergente. Portanto,  $J$  satisfaz a condição de Cerami. ■

No Apêndice B, vimos uma decomposição de  $H^1(\Omega)$  em função dos espaços gerados pelas autofunções que são soluções do problema de Steklov. Nesse sentido, denotemos  $E(\mu_1)$  como sendo o espaço, de dimensão 1, gerado pela autofunção  $\varphi_1$  associada ao primeiro autovalor de Steklov  $\mu_1$ , e  $V_1 = \bigoplus_{j=2}^{\infty} E(\mu_j)$  para denotar o espaço gerado pelas demais autofunções associadas aos autovalores  $\mu_2, \mu_3, \dots$ . Com isto,  $H^1(\Omega) = E(\mu_1) \oplus V_1$ . Além disso, demonstramos, no Apêndice B, as seguintes desigualdades variacionais, que são decorrentes, de tal decomposição:

$$\|v\|_c^2 \leq \mu_2 \|v\|_{2,\partial}^2, \forall v \in E(\mu_1)$$

e

$$\|w\|_c^2 \geq \mu_2 \|w\|_{2,\partial}^2, \forall w \in V_1.$$

Relembramos estes resultados, com esta roupagem, pois eles serão utilizados nas demonstrações daqui em diante.

**Proposição 2.9.** *Suponha (SSR) e assumas válidas ainda  $(HOC)^-$  ou  $(HOC)^+$ . Então o funcional  $J$  é limitado inferiormente.*

**Demonstração.** Provemos que  $J$  é limitado inferiormente. A demonstração desse fato segue por contradição. Nesse sentido, consideremos uma sequência  $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ , de modo que  $J(u_n) \rightarrow -\infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim,  $\|u_n\|_c \rightarrow \infty$ , pois do contrário,  $(J(u_n))$  seria limitada.

Consideremos, agora,  $u_n = t_n \varphi_1 + w_n$ , com  $t_n \in \mathbb{R}$  e  $w_n \in V_1$ . Deste modo, pela

ortogonalidade de  $t_n\varphi_1$  e  $w_n$ ,

$$\begin{aligned}
J(u_n) &= J(t_n\varphi_1 + w_n) \\
&= \frac{1}{2} [\|t_n\varphi_1 + w_n\|_c^2 - \mu_1\|t_n\varphi_1 + w_n\|_{2,\partial}^2] - \int_{\partial\Omega} F(x, t_n\varphi_1 + w_n)d\sigma \\
&= \frac{1}{2} [t_n^2\|\varphi_1\|_c^2 + \|w_n\|_c^2 - \mu_1t_n^2\|\varphi_1\|_{2,\partial}^2 - \mu_1\|w_n\|_{2,\partial}^2] - \int_{\partial\Omega} F(x, t_n\varphi_1 + w_n)d\sigma \\
&= \frac{1}{2} [\|w_n\|_c^2 - \mu_1\|w_n\|_{2,\partial}^2] - \int_{\partial\Omega} F(x, t_n\varphi_1 + w_n)d\sigma.
\end{aligned}$$

Ainda, utilizando a desigualdade variacional  $\|w\|_c^2 \geq \mu_2\|w\|_{2,\partial}^2$  para  $V_1$ , obtemos

$$\begin{aligned}
J(u_n) &= \frac{1}{2} [\|w_n\|_c^2 - \mu_1\|w_n\|_{2,\partial}^2] - \int_{\partial\Omega} F(x, t_n\varphi_1 + w_n)d\sigma \\
&\geq \frac{1}{2} [\mu_2\|w_n\|_{2,\partial}^2 - \mu_1\|w_n\|_{2,\partial}^2] - \int_{\partial\Omega} F(x, u_n)d\sigma \\
&= \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right) \|w_n\|_{2,\partial}^2 - \int_{\partial\Omega} F(x, u_n)d\sigma.
\end{aligned}$$

Assim, do fato de que, por hipótese,  $J(u_n) \rightarrow -\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} F(x, u_n)d\sigma = +\infty. \quad (2.26)$$

Porém, (SSR) implica que  $|F(x, u_n)| \leq \tilde{F}(x)$ , para todo  $x \in \partial\Omega$ . Em particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\partial\Omega} F(x, u_n)d\sigma \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} \tilde{F}(x)d\sigma < \infty.$$

Logo, temos uma contradição com (2.26), o que prova a limitação inferior de  $J$ . ■

Consideraremos, agora, os conjuntos

$$A^+ = \{t\varphi_1 + w; t \geq 0, w \in V_1\}$$

e

$$A^- = \{t\varphi_1 + w; t \leq 0, w \in V_1\}.$$

Os conjuntos  $A^+$  e  $A^-$  são não vazios e  $A^+ \cap A^- = V_1$ . No que segue, minimizaremos os funcionais  $J|_{A^+}$  e  $J|_{A^-}$ , mostrando que  $J$  admite dois pontos críticos distintos.

**Proposição 2.10.** *Suponha (SSR), (BH1), (BH2) e (BH2)'. Assuma válidas ainda (HOC)<sup>-</sup> ou (HOC)<sup>+</sup>. Então o funcional  $J$  é limitado inferiormente sobre os conjuntos  $A^+$  e  $A^-$ . Ainda, considerando*

$$c^+ = \inf_{u \in A^+} J(u) \quad e \quad c^- = \inf_{u \in A^-} J(u),$$

$J$  admite dois pontos críticos,  $u_+$  e  $u_-$ , distintos, sendo  $J(u_+) = c^+$  e  $J(u_-) = c^-$ .

**Demonstração.** Mostraremos, inicialmente, que  $J$  é limitado inferiormente sobre  $A^+$ . A prova da limitação de  $J$  em  $A^-$  é análoga. Utilizaremos a ortogonalidade entre  $\varphi_1$  e  $w$ , com respeito aos produtos internos  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,\partial}$ , bem como a desigualdade variacional  $\|w\|_c^2 \geq \mu_2 \|w\|_{2,\partial}^2$  para  $V_1$ . Seja, portanto,  $u \in A^+$ . Assim,

$$\begin{aligned} J(u) &= J(t\varphi_1 + w) \\ &= \frac{t^2}{2} \|\varphi_1\|_c^2 + \frac{1}{2} \|w\|_c^2 - \frac{t^2}{2} \mu_1 \|\varphi_1\|_{2,\partial}^2 - \frac{1}{2} \mu_1 \|w\|_{2,\partial}^2 - \int_{\partial\Omega} F(x, t\varphi_1 + w) d\sigma \\ &\geq \frac{1}{2} \|w\|_c^2 - \frac{1}{2} \mu_1 \|w\|_{2,\partial}^2 - \int_{\partial\Omega} \tilde{F}(x) d\sigma \\ &\geq \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \right) \|w\|_{2,\partial}^2 - \int_{\partial\Omega} \tilde{F}(x) d\sigma > k, \end{aligned}$$

por (SSR), sendo  $k$  uma constante,  $w \in V_1$  e  $t \geq 0$ . Donde obtemos que  $J$  é limitado inferiormente sobre  $A^+$ .

Dessa maneira, temos que  $J$  é limitado inferiormente sobre  $A^+$  e é de classe  $C^1$ . Ainda, de acordo com a Proposição 2.8,  $J$  satisfaz a condição de Cerami. Assim, do Princípio Variacional de Ekeland,  $J$  tem um valor crítico em  $A^+$ . Analogamente, vê-se que  $J$  possui um valor crítico em  $A^-$ . Ponhamos

$$c^+ = \inf_{u \in A^+} J(u) \quad e \quad c^- = \inf_{u \in A^-} J(u).$$

Se  $J^+ := J|_{A^+}$  e  $J^- := J|_{A^-}$ , então obtemos dois pontos críticos, denotados por  $u_+ \in A^+$  e  $u_- \in A^-$ , com

$$c^+ = J^+(u_+) = \inf_{u \in A^+} J(u) \quad e \quad c^- = J^-(u_-) = \inf_{u \in A^-} J(u).$$

Da hipótese  $(BH2)$ , segue que

$$J^\pm(u_\pm) \leq J(a^\pm \varphi_1) = - \int_{\partial\Omega} F(x, a^\pm \varphi_1) d\sigma < 0, \quad (2.27)$$

donde temos que  $u_+$  e  $u_-$  são pontos críticos não nulos.

Ao utilizarmos as hipóteses  $(BH2)$  e  $(BH2)'$ , podemos mostrar que  $J$  restrito ao espaço  $V_1$  é não negativo. De fato, se  $w \in V_1$ , temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} J(w) &= \frac{1}{2} (\|w\|_c^2 - \mu_1 \|w\|_{2,\partial}^2) - \int_{\partial\Omega} F(x, w) d\sigma \\ &\geq \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \right) \|w\|_{2,\partial}^2 - \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \right) \|w\|_{2,\partial}^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Finalmente, mostremos que  $u_+$  e  $u_-$  são distintos. A prova se dá por contradição. Suponhamos, desse modo, que  $u_+ = u_-$ , donde  $u_+, u_- \in A^+ \cap A^- = V_1$ . Daí, por (2.27) e (2.28), temos que  $J(u_\pm) < 0 \leq J(u_\pm)$ . Portanto, tem-se uma contradição. Logo,  $u_+ \neq u_-$ . Desse modo,  $u_+$  e  $u_-$  são dois pontos críticos distintos de  $J$ , concluindo a prova. ■

A seguir, demonstraremos alguns resultados referentes à geometria, no sentido variacional, do funcional  $J$ .

**Proposição 2.11.** *Suponha  $(SSR)$ ,  $(BH1)$  e  $(BH2)$ . Então o funcional  $J$  admite a seguinte Geometria do Passo da Montanha, ou seja,*

- i) Existem  $\rho > 0$  e  $\alpha > 0$  tais que  $J(u) \geq \rho$  para todo  $u \in H^1(\Omega)$ , com  $\|u\|_{2,\partial} = \alpha$ ;*
- ii) Existe  $e \in H^1(\Omega)$  tal que  $J(e) < 0$  e  $\|e\|_{2,\partial} > \alpha$ .*

**Demonstração.** Provemos inicialmente o item *i*). De  $(BH1)$ , temos que

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \frac{f(x, u)}{u} = \gamma < 0.$$

Isto implica que

$$f(x, u) \leq \gamma |u|, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad \text{com } |u(x)| \leq R_1, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Assim,

$$F(x, u) \leq \frac{\gamma}{2} |u|^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad \text{com } |u(x)| \leq R_1, \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (2.29)$$

Ainda, de (SSR), obtemos que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $R_2 > 0$  tal que

$$f(x, u) \leq 2\epsilon|u|, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad \text{com } |u(x)| \geq R_2 \text{ e } \forall x \in \partial\Omega,$$

o que nos dá, para alguma constante  $k > 0$

$$F(x, u) \leq \epsilon|u|^2 \leq k\epsilon|u|^r, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad \text{com } |u(x)| \geq R_2 \text{ e } \forall x \in \partial\Omega,$$

onde  $r \in \left(2, \frac{2(n-1)}{n-2}\right)$ .

Desse modo, utilizando a continuidade de  $F$  no compacto  $[R_2, R_1]$ , obtemos  $c_1 > 0$ , grande o suficiente para que

$$F(x, u) \leq c_1|u|^r, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad \text{com } |u(x)| \geq R_1 \text{ e } \forall x \in \partial\Omega, \quad (2.30)$$

sendo  $r \in \left(2, \frac{2(n-1)}{n-2}\right)$ .

Dessa maneira, ao utilizarmos (2.29) e (2.30),

$$F(x, u) \leq \frac{\gamma}{2}|u|^2 + c_1|u|^r, \quad \forall u \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \partial\Omega,$$

para algum  $r \in \left(2, \frac{2(n-1)}{n-2}\right)$  e  $c_1 > 0$ . Pelos Teoremas A.1 e A.7, temos

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)u^2 dx - \int_{\partial\Omega} \mu_1 u^2 d\sigma \right] - \frac{\gamma}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma - c_1 \int_{\partial\Omega} |u|^r d\sigma,$$

e, pelo Corolário B.2, do Apêndice B,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)u^2 dx - \int_{\partial\Omega} \mu_1 u^2 d\sigma \geq 0.$$

Donde,

$$J(u) \geq -\frac{\gamma}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma - c_1 \int_{\partial\Omega} |u|^r d\sigma = -\frac{\gamma}{2} \|u\|_{2,\partial}^2 - c_1 \|u\|_{r,\partial}^r \geq \left(-\frac{\gamma}{2} - c_1 \|u\|_{2,\partial}^{r-2}\right) \|u\|_{2,\partial}^2,$$

para todo  $u \in H^1(\Omega)$ . Considerando  $\|u\|_{2,\partial} = \alpha_1$ , com  $\alpha_1 > 0$  suficientemente pequeno, obtemos  $J(u) \geq \rho > 0$ , como queríamos.

Para a prova do item *ii*), tomemos  $e = t\varphi_1$ , onde  $\varphi_1$  é a primeira autofunção do



problema de Steklov,  $t = a^+$  dado por (BH2), de tal maneira que  $\|e\|_{2,\partial} > \alpha$ , sendo  $\alpha < \min\{\alpha_1, \|a^+\varphi_1\|_{2,\partial}\}$ . Temos que  $e \in H^1(\Omega)$ , visto que  $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$ . Ainda,

$$J(e) = J(t\varphi_1) = \frac{t^2}{2} (\|\varphi_1\|_c^2 - \mu_1\|\varphi_1\|_{2,\partial}^2) - \int_{\partial\Omega} F(x, t\varphi_1)d\sigma,$$

o que nos dá, pelo fato de  $\varphi_1$  ser autofunção de Steklov associada a  $\mu_1$ ,

$$J(e) = - \int_{\partial\Omega} F(x, t\varphi_1)d\sigma,$$

e como vale a hipótese (BH2), temos  $J(e) < 0$ , o que conclui a demonstração. ■

**Proposição 2.12.** *Suponha (SSR). Então o funcional  $J$  admite a seguinte geometria do ponto de Sela, ou seja, valem:*

i)  $J(u_n) \rightarrow +\infty$ , quando  $\|u_n\|_c \rightarrow \infty$ , onde  $u_n \in V_1$ .

ii) Existe  $k > 0$  tal que  $J(u) \leq k$ , para todo  $u \in E(\mu_1)$ .

**Demonstração.** Por (SSR), temos para  $u_n \in V_1$ ,

$$\begin{aligned} J(u_n) &= \frac{1}{2} (\|u_n\|_c^2 - \mu_1\|u_n\|_{2,\partial}^2) - \int_{\partial\Omega} F(x, u_n)d\sigma \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \|u_n\|_c^2 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\|u_n\|_c^2 \right) - \int_{\partial\Omega} \tilde{F}(x)d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \right) \|u_n\|_c^2 - \int_{\partial\Omega} \tilde{F}(x)d\sigma, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Daí,  $J(u_n) \rightarrow +\infty$ , quando  $\|u_n\|_c \rightarrow \infty$ , visto que  $\left| \int_{\partial\Omega} \tilde{F}(x)d\sigma \right| < \infty$  e  $\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} > 0$ , o que prova o item i).

Provemos agora ii), o que é feito por contradição. Seja, nesse sentido,  $(u_n) \subset E(\mu_1)$  uma sequência ilimitada satisfazendo  $J(u_n) \rightarrow \infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Usando o fato de  $E(\mu_1)$  ter dimensão 1, podemos reescrever  $u_n = t_n\varphi_1$ , para alguma sequência  $(t_n) \subset \mathbb{R}$  tal que  $|t_n| \rightarrow \infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Deste modo, obtemos

$$J(u_n) = J(t_n\varphi_1) = - \int_{\partial\Omega} F(x, t_n\varphi_1)d\sigma, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.31)$$

Assim, de (2.31) e da hipótese de que  $J(u_n) \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} F(x, t_n \varphi_1) d\sigma = -\infty. \quad (2.32)$$

Agora, a hipótese (SSR) nos dá  $|F(x, t_n \varphi_1)| \leq \tilde{F}(x)$ , para  $x \in \partial\Omega$ . Em particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\partial\Omega} F(x, t_n \varphi_1) d\sigma \right| \leq \int_{\partial\Omega} \tilde{F}(x) d\sigma < \infty,$$

o que contradiz (2.32). Logo,  $J$  é limitado superiormente em  $E(\mu_1)$ . ■

**Proposição 2.13.** *Suponha (SSR) e (BH3). Então  $J$  admite a seguinte geometria de Linking Local:*

*Existe  $\delta > 0$ , tal que*

*i)  $J(u) \geq 0$ , para qualquer  $u \in V_1$ , com  $\|u\|_c \leq \delta$ ;*

*ii)  $J(u) \leq 0$ , para qualquer  $u \in E(\mu_1)$ , com  $\|u\|_c \leq \delta$ .*

**Demonstração.** Primeiro, provaremos i). Seja, para tal,  $w \in V_1$  fixado. Utilizando os mesmos argumentos da Proposição 2.11 e a hipótese (BH3), segue que existe  $c_1 > 0$  de tal maneira que

$$F(x, t) \leq \frac{\mu_2 - \mu_1 - \epsilon}{2} |t|^2 + c_1 |t|^r, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.33)$$

onde  $r \in \left(2, \frac{2(n-1)}{n-2}\right)$ . Daí, por (2.33) e pela compacidade dada no Teorema A.7,

$$J(w) \geq \frac{1}{2} \left[ \|w\|_c^2 - \int_{\partial\Omega} \mu_1 w^2 d\sigma \right] - \frac{\mu_2 - \mu_1 - \epsilon}{2} \int_{\partial\Omega} w^2 d\sigma - c_1 \int_{\partial\Omega} w^r d\sigma. \quad (2.34)$$

Disto, para  $w \in V_1$  obtemos as seguintes estimativas

$$J(w) \geq \left(1 - \frac{\mu_2 - \epsilon}{\mu_2}\right) \|w\|_{2,\partial}^2 - c_1 \|w\|_{r,\partial}^r \geq \left[ \left(1 - \frac{\mu_2 - \epsilon}{\mu_2}\right) - c_1 \|w\|_{2,\partial}^{r-2} \right] \|w\|_{2,\partial}^2.$$

Por conseguinte, existe  $\delta_1 > 0$  de modo que

$$J(w) \geq \frac{\epsilon}{2\mu_2} \|w\|_{2,\partial}^2 \geq 0, \quad \forall w \in V_1 \text{ com } \|w\|_c \leq \delta_1,$$

o que prova *i*).

Provemos agora *ii*). Notemos, inicialmente, que quaisquer normas em  $E(\mu_1)$  são equivalentes, já que a dimensão de  $E(\mu_1)$  é igual a 1. Daí, existe  $k > 0$  tal que

$$\|u\|_\infty \leq k\|u\|_c, \forall u \in E(\mu_1).$$

Em particular, sendo  $u \in E(\mu_1)$  de modo que  $\|u\|_c \leq \frac{r}{k}$ , tem-se  $\|u\|_\infty \leq r$ , com  $r > 0$ , dado pela hipótese (BH3). Tomemos, agora,  $\delta_2 = \frac{r}{k}$ . Daí, utilizando novamente (BH3), vemos que

$$J(u) = - \int_{\partial\Omega} F(x, u) d\sigma \leq 0, \forall u \in E(\mu_1), \text{ com } \|u\|_c \leq \delta_2.$$

Este fato prova *ii*).

Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , as desigualdades em *i*) e *ii*) são satisfeitas, o que conclui a demonstração. ■

## Capítulo 3

# DEMONSTRAÇÃO DOS RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo, serão realizadas as demonstrações dos resultados principais deste trabalho, que foram enunciados no Capítulo 1. Para tal, serão utilizados majoritariamente os resultados do Capítulo 2 e dos Apêndices A, B e C, de modo que as provas seguirão como consequência destes.

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.1.** Devemos observar, inicialmente, que provar a existência de solução fraca para o problema (1.1) significa provar que existe  $u \in H^1(\Omega)$ , de tal maneira que  $J'(u) = 0$ , isto é,  $u$  é um ponto crítico para o funcional  $J : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ora, pela Proposição 2.9,  $J$  é limitado inferiormente. Ainda, pela Proposição 2.8,  $J$  satisfaz a condição de Cerami. Daí, utilizando o Princípio Variacional de Ekeland, obtemos um ponto crítico  $u_0 \in H^1(\Omega)$  tal que  $J(u_0) = c_{inf}$ , sendo  $c_{inf}$  dado por  $\inf_{u \in H^1(\Omega)} J(u)$ . Logo,  $u_0$  é a solução buscada. ■

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.2.** A ideia, agora, é encontrarmos três pontos críticos distintos de  $J$ . Inicialmente, minimizaremos  $J$  sobre os conjuntos  $A^+$  e  $A^-$ , definidos na Proposição 2.10. Relembremos, novamente, que  $J$  é limitado inferiormente, pela Proposição 2.9. Ainda, temos, pela Proposição 2.10, dois pontos críticos distintos para  $J$ . De maneira precisa, obtemos  $u_+ \in A^+$ ,  $u_- \in A^-$  tais que  $J(u_+) < 0$ ,  $J(u_-) < 0$ , com  $J(u_+) = \inf_{u \in A^+} J(u)$  e  $J(u_-) = \inf_{u \in A^-} J(u)$ .

Por outro lado, sob essas hipóteses, pela Proposição 2.11,  $J$  admite a geometria

do Passo da Montanha. Como, pela Proposição 2.8,  $J$  também satisfaz a condição de Cerami, pelo Teorema A.21, existe um ponto crítico  $u_1$  de  $J$ . Em particular,  $J(u_1) > 0$ , o que nos mostra que  $u_1$ ,  $u_+$  e  $u_-$  são três pontos críticos distintos para  $J$ . Deste modo, (1.1) admite, sob as hipóteses do Teorema 1.2, três soluções fracas não triviais. ■

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.3.** Consideremos, inicialmente, a geometria do Ponto de Sela, dada pela Proposição 2.12. Levando em consideração que  $J$  satisfaz a condição de Cerami, o Teorema A.22 garante a existência de um ponto crítico  $u_2 \in H^1(\Omega)$  para o funcional  $J$ . Quando analisamos  $J$  restrito ao espaço  $E(\mu_1)$ , vemos que  $u_2$  é ponto de máximo local, sendo que aqui utilizamos a caracterização do ponto crítico dada pelo Teorema A.22. Deste modo, utilizando o fato da dimensão de  $E(\mu_1)$  ser igual a 1, podemos notar que o grupo crítico  $C_1(J, u_2)$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , pelo Teorema C.1.

Minimizando, agora,  $J$  sobre os conjuntos  $A^+$  e  $A^-$ , obtemos novamente dois pontos críticos  $u_+$ ,  $u_- \in H^1(\Omega)$ . Neste caso,  $u_+$  e  $u_-$  são mínimos locais de  $J$ , pela Proposição 2.10, de modo que o grupo crítico  $C_i(J, u_\pm)$  é isomorfo a  $\delta_{i,0}\mathbb{Z}$ , para todo  $i \geq 0$ .

Portanto, como  $u_+$  e  $u_-$  são distintos e  $C_1(J, u_\pm) \neq C_1(J, u_2)$ , temos que  $u_+$ ,  $u_-$  e  $u_2$  são três pontos críticos distintos para  $J$ , de modo que o problema (1.1) admite três soluções fracas não triviais, sob as hipóteses do Teorema 1.3. ■

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.4.** Primeiramente, notemos que  $J$  satisfaz a condição de Cerami, pela Proposição 2.8, e, de acordo com a Proposição 2.9, temos que  $J$  é limitado inferiormente. Ainda, o funcional  $J$  admite a geometria de Link Local, pela Proposição 2.13. Deste modo, utilizando o Teorema de Link Local A.24, obtemos a existência de duas soluções fracas não triviais para o problema (1.1) e a prova está concluída. ■

# CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi estudar a existência e a multiplicidade de soluções fracas não triviais para o problema (1.1), no qual o termo  $\mu_1$  tem relação com o auto-problema de Steklov (B.1). A Teoria Variacional e a Teoria de Grupos Críticos foram a base essencial para provarmos quatro resultados para o problema principal, sendo o primeiro garantindo a existência de solução fraca para (1.1) e os outros três garantindo a multiplicidade de soluções fracas não triviais para uma classe de equações diferenciais parciais de segunda ordem, com condições de fronteira não lineares.

No que segue, existem diversas possibilidades para a continuidade do estudo sobre o problema (1.1) a nível de doutorado, até mesmo pelo problema ser recente. Uma das ideias a ser considerada é a mudança de hipóteses para a função  $f$  que confere a não linearidade de fronteira, ao avaliarmos os casos crítico ou supercrítico. Além disso, pode ser considerada a mudança de hipóteses no intuito da obtenção de resultados distintos para a multiplicidade de soluções fracas.

# REFERÊNCIAS

ADAMS, R. A., FOURNIER, J. J. F. **Sobolev Spaces**, second ed., Academic Press, New York, 2003.

ANANE, A.; CHAKRONE, O.; KARLM, B.; ZEROUALI, A. **An asymmetric Steklov problem weights the singular case**. Bol. Soc. Paran. de Mat., v. 27, n. 2, p. 35-42, 2009.

AUCHMUTY, G. **Steklov eigenproblems and the representation of solutions of elliptic boundary value problems**. Numerical Functional Analysis and Optimization, v. 25, p. 321-348, 2004.

BARTLE, R. G. **The Elements of Integration**. Wiley, New York, 1966.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer, New York, 2011.

BROCK, F. **An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem**. ZAMM Z. Angew. Math. Mech., v. 81, p. 69-71, 2001.

CHANG, K. C. **Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems**. Progress in nonlinear differential equation and their applications, v. 6, Birkhäuser Boston Inc., MA, 1993.

DE GODOI, J. D. B. **Problemas de autovalores de Steklov-Neumann e aplicações**. 2012. Tese (Doutorado em Matemática)-Universidade Federal de São

Carlos, São Carlos, SP, 2012.

EILENBERG, S.; STEENROD, N. **Foundation of Algebraic Topology.** Princeton University Press, New Jersey, 1952.

ESCOBAR, J. F. **A isoperimetric inequality and the first Steklov eigenvalue.** Journal of Functional Analysis, v. 165, p. 101-116, 1999.

ESCOBAR, J. F. **A comparison theorem for the first Steklov eigenvalue.** Journal of Functional Analysis, v. 178, p. 143-155, 2000.

EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. **Measure Theory and Fine Properties of Functions.** CRC Press, Boca Raton, 1992.

FADLALLAH, A.; DA SILVA, E. D. **Linear Elliptic equations with nonlinear boundary conditions under strong resonance conditions.** Cornell University Library (arXiv:1507.07989), Cornell, 2015.

GRISVARD, P. **Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.** Pitman, Boston, 1985.

HU, S. **Homology Theory: A first course in Algebraic Topology.** Holden-Day Inc., California, 1966.

KAVIAN, O. **Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.** Springer-Verlag, Paris, 1993.

KESAVAN, S. **Nonlinear Functional Analysis with Applications.** Wiley, New York, 1978.

KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** Wiley, New York, 1978.



KUFNER, A.; JOHN, O.; FUCIK, S. **Function Spaces.** Academia, Praha e Noordhoff International Publishing, Lauden, 1977.

LAMBERTI, P. D. **Steklov-type eigenvalues associated with best Sobolev trace constants: domain perturbation and overdetermined systems.** Complex Variables and Elliptic Equations, 2011.

LI, S.; WILLEM, M. **Applications of Local Linking to Critical Point Theory.** J. Math. Anal. Appl., v. 189, p. 6-32, 1995.

MAVINGA, N.; NKASHAMA, M. N. **Steklov- Neumann eigenproblems and nonlinear elliptic equations with nonlinear boudary conditions.** J. Differential Equations, v. 248, p. 1212-1229, 2010.

RABINOWICZ, P. H. **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.** Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

RAMOS, M. P. N. **Teoremas de Enlace na Teoria dos Pontos Críticos.** Textos de matemática, v.2, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática, 1993.

WALLACE, A. **Algebraic Topology.** Benjamin, New York, 1970.

WILLEM, M. **Minimax theory.** Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhauser, Boston, 1996.

# Apêndice A

## RESULTADOS GERAIS

No que segue serão apresentados alguns resultados e definições que são utilizados no decorrer dos capítulos deste trabalho. A justificativa para citá-los nesta etapa é para propiciar uma leitura mais objetiva, uma vez que durante todo texto, eles foram apenas referenciados. Vale ressaltar que grande parte das provas dos resultados serão referenciadas.

### A.1 O OPERADOR TRAÇO E O ESPAÇO $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

Nesta seção são enunciados resultados sobre o operador traço de  $W^{1,p}(\Omega)$  sobre  $L^q(\partial\Omega)$  e a respeito do espaço fracionário  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Podemos encontrá-los em Kufner, John e Fucik (1977), Grisvard (1985) e Adams e Fournier (2003).

**Teorema A.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado, com fronteira de classe  $C^2$ ,  $n \geq 2$  e  $p \in [0, +\infty)$ . Então existe um único operador, denominado operador traço de  $W^{1,p}(\Omega)$  sobre  $L^q(\partial\Omega)$ ,  $\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$ , contínuo desde que*

$$(1) \ p < n \text{ e } 1 \leq q \leq \frac{(n-1)p}{n-p} \text{ ou}$$

$$(2) \ p \geq n \text{ e } q \in [1, +\infty).$$

*E mais, caso  $p < n$  e  $1 \leq q < \frac{(n-1)p}{n-p}$  ou  $p \geq n$  e  $q \in [1, +\infty)$ , o operador  $\Gamma$  é compacto.*

**Demonstração.** Veja Adams e Fournier (2003, p. 164).

**Teorema A.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado, com fronteira de classe  $C^2$ , com  $n \geq 2$ . A inclusão  $i : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  é linear e contínua.*

**Demonstração.** Veja Kufner, John e Fucik (1977, p. 330).

**Teorema A.3.** *Com as hipóteses do Teorema A.2, tem-se que  $\dim H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = +\infty$ .*

**Demonstração.** Veja De Godoi (2012, p. 136).

## A.2 ANÁLISE FUNCIONAL

Nesta seção serão apresentados algumas desigualdades e resultados de Análise Funcional que foram utilizados no decorrer das demonstrações dos teoremas deste trabalho.

**Teorema A.4.** *Se  $0 \leq p < +\infty$ ,  $a > 0$  e  $b > 0$ , então existe uma constante positiva  $K(p)$ , tal que*

$$(a + b)^p \leq K(p)(a^p + b^p).$$

**Demonstração.** Veja Adams e Fournier (2003, p. 23).

**Teorema A.5. (Desigualdade de Hölder)** *Sejam  $f$  e  $g$  pertencentes a  $L^p(\Omega)$  e  $L^q(\Omega)$  respectivamente, onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $1 \leq p \leq +\infty$ . Então  $fg \in L^1(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Demonstração.** Veja Brezis (2011, p. 92).

**Teorema A.6. (Desigualdade de Hölder Generalizada)** *Sejam  $f_1, \dots, f_k$  funções, tais que  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq k$  onde  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$ . Então, o produto  $f = f_1 \cdots f_k$  também é um elemento de  $L^p(\Omega)$  e  $\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_k\|_{p_k}$ .*

**Demonstração.** Veja Brezis (2011, p. 93).

**Teorema A.7. (Rellich-Kondrachov)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio de classe  $C^2$ ,  $n \geq 2$ . Se  $p \in [1, +\infty)$ , então o mergulho  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  é contínuo, desde que*

$$(1) \quad p < n \text{ e } 1 \leq q \leq \frac{np}{n - kp} \text{ ou}$$

$$(2) \quad p \geq n \text{ e } q \in [1, +\infty).$$

Além disso, caso  $p < n$  e  $1 \leq q < \frac{np}{n - kp}$  ou caso  $p \geq n$  e  $q \in [1, +\infty)$ , o mergulho  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  é compacto.

**Demonstração.** Veja Adams e Fournier (2003, p. 168).

**Teorema A.8.** *Sejam  $(E, \|\cdot\|)$  um espaço de Banach reflexivo,  $K \subset E$  um subconjunto limitado, fechado e convexo. Então  $K$  é fracamente compacto em  $E$ , ou seja,  $K$  é compacto em  $E$ , munido da topologia fraca.*

**Demonstração.** Veja Brezis (2011, p. 71).

**Teorema A.9.** *Se  $(E, \|\cdot\|)$  é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada possui uma subsequência fracamente convergente.*

**Demonstração.** Veja Brezis (2011, p. 71).

**Teorema A.10.** *Sejam  $(E, \|\cdot\|)$  um espaço vetorial normado e  $(x_k)$  uma sequência em  $E$ . Então valem as seguintes afirmações:*

(i)  $x_k \rightharpoonup x$  se, e somente se,  $f(x_k) \rightarrow f(x)$ , para qualquer  $f \in E^*$ ;

(ii) Se  $x_k \rightarrow x$ , então  $x_k \rightharpoonup x$ ;

(iii) Se  $x_k \rightharpoonup x$ , então  $(x_k)$  é limitada e  $\|x\| \leq \liminf \|x_k\|$ ;

(iv) Se  $x_k \rightharpoonup x$  e  $f_k \rightarrow f$  em  $E^*$ , então  $f_k(x) \rightarrow f(x)$ .

**Demonstração.** Veja Brezis (2011, p. 58).

**Teorema A.11.** *Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^n$ , com fronteira de classe  $C^{k,1}$ . Assuma que  $s \leq k+1$  e que  $s - \frac{1}{p}$  não é inteiro. Ainda, seja  $s - \frac{1}{p} = l + \theta$ ,  $0 < \theta \leq 1$  e  $l$  um inteiro não negativo. Então  $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$  se, e só se,  $u \in W^{s,p}(\Omega)$  e*

$$\Gamma(u) = \Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = \dots = \Gamma\left(\frac{\partial^l u}{\partial n^l}\right) = 0.$$

**Demonstração.** Veja Grisvard (1985, p. 38).

**Teorema A.12.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $V \subset H$  um subespaço fechado, então*

$$H = V \oplus V^\perp$$

**Demonstração.** Veja Kreyszig (1978, p. 146).

**Teorema A.13.** *Seja  $M$  um subconjunto de um espaço com produto interno  $X$ . Então, se  $X$  for completo e não existir  $x \in X \setminus \{0\}$  que seja ortogonal a todo o elemento de  $M$ ,  $M$  é total em  $X$ .*

**Demonstração.** Veja Kreyszig (1978, p. 169).

**Teorema A.14.** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado de Lipschitz (fronteira de classe  $C^{0,1}$ ) em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Sejam, ainda,  $(u_k)$  uma sequência em  $L^p(\partial\Omega)$  e  $u \in L^p(\partial\Omega)$ , tais que  $u_k \rightarrow u$  em  $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{p,\partial})$ . Então, existem  $(u_{k_j})$  subsequência de  $(u_k)$  e  $h \in L^p(\partial\Omega)$ , tais que  $u_{k_j}(x) \rightarrow u(x)$  em  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  e  $|u_{k_j}(x)| \leq h(x)$ , q.t.p.  $x \in \partial\Omega$ .*

**Demonstração.** Veja Kufner, John e Fucik (1977, p. 74).

**Teorema A.15. (Teorema de Riesz)** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert, munido com o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Se  $f \in H^*$  então existe um único  $y \in H$ , tal que  $f(x) = \langle x, y \rangle$ , para todo  $x \in H$ . Além disso,  $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$ .*

**Demonstração.** Veja Brezis (2011, p. 135).

**Teorema A.16. (Teorema da Aplicação Aberta)** *Sejam  $E, F$  espaços de Banach e  $T$  uma aplicação linear de  $E$  em  $F$ , limitada e sobrejetiva. Então existe  $r > 0$ , tal que  $\overline{T(B(0; 1))} \supset B(0; r)$ , onde  $B(0; \gamma) = \{x \in E; \|x\| < \gamma\}$ .*

**Demonstração.** Veja Kreyszig (1978, p. 286).

**Teorema A.17.** *Sejam  $(f_k)$  uma sequência em  $L^p(\Omega)$  e  $f \in L^p(\Omega)$  tais que  $\|f_k - f\|_p \rightarrow 0$ . Então existem uma subsequência  $(f_{k_j})$  de  $(f_k)$  e uma função  $h \in L^p(\Omega)$ , tais que*

$$a) f_{k_j}(x) \rightarrow f(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega;$$

$$b) |f_{k_j}(x)| \leq h(x), \forall j \text{ e q.t.p. } x \in \Omega.$$

**Demonstração.** Veja Brezis (2011, p. 94).

**Teorema A.18.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $(u_k) \subset L^p(\Omega)$ , com  $1 \leq p < +\infty$ . Se  $(u_k)$  é uma sequência limitada em  $L^p(\Omega)$  e  $u_k(x) \rightarrow u(x)$ , q.t.p.  $x \in \Omega$ , então*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\|u_k\|_p^p - \|u_k - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$

**Demonstração.** Veja Brezis (2011, p. 121).

**Teorema A.19.** *Seja  $(u_k) \subset L^p(\Omega)$  satisfazendo:*

$$i) \ u_k(x) \rightarrow u(x), \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e}$$

$$ii) \ \|u_k\|_p \rightarrow \|u\|_p, \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

*Então  $\|u_k - u\|_p \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ .*

**Demonstração.** Veja Brezis (2011, p. 121).

### A.3 CÁLCULO VARIACIONAL

Nesta seção, veremos a ideia de diferenciabilidade sobre um espaço de Banach, a qual generaliza àquela vista em  $\mathbb{R}^n$ . As definições e resultados vistos aqui são encontrados em Kesavan (1978), Rabinowicz (1986), Kavian (1993) e Willem (1996).

**Definição A.1.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $X^*$  seu dual,  $U$  um subconjunto aberto de  $X$  e  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional. Dizemos que  $\varphi$  é diferenciável a Gateaux se, para cada  $u \in U$ , existe  $D\varphi(u) \in X^*$ , tal que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\varphi(u + tv) - \varphi(u) - D\varphi(u) \cdot (tv)] = 0, \quad \forall v \in X.$$

**Definição A.2.** *Dizemos que o funcional  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável a Fréchet se, para cada  $u \in U$ , existe  $\varphi'(u) \in X^*$ , tal que*

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} [\varphi(u + v) - \varphi(u) - \varphi'(u) \cdot v] = 0,$$

*Dizemos que o funcional  $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$  se a derivada de Fréchet de  $\varphi$  existe para cada  $u \in U$  e  $\varphi'$  é contínua.*

**Teorema A.20. (Multiplicadores de Lagrange)** *Sejam  $(E, \|\cdot\|)$  um espaço vetorial de Banach e  $F, G_1, G_2, \dots, G_k$  funcionais em  $C^1(E, \|\cdot\|)$ . Se  $y_0$  for um extremo de  $F$  restrito ao conjunto  $F^{-1}(F(y_0)) \cap \left[ \bigcap_{i=1}^k G_i^{-1}(G_i(y_0)) \right]$ , então uma das duas alternativas ocorre:*

(1)  $\det A(v_1, v_2, \dots, v_k) = 0$ , para quaisquer  $v_1, v_2, \dots, v_k \in E$ , onde

$$A(v_1, v_2, \dots, v_k) = \begin{pmatrix} F'(y_0) \cdot v_1 & F'(y_0) \cdot v_2 & \dots & F'(y_0) \cdot v_k \\ G'_1(y_0) \cdot v_1 & G'_1(y_0) \cdot v_2 & \dots & G'_1(y_0) \cdot v_k \\ G'_2(y_0) \cdot v_1 & G'_2(y_0) \cdot v_2 & \dots & G'_2(y_0) \cdot v_k \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ G'_k(y_0) \cdot v_1 & G'_k(y_0) \cdot v_2 & \dots & G'_k(y_0) \cdot v_k \end{pmatrix}.$$

(2) Existem  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , tais que  $F'(y_0) \cdot v = \sum_{i=1}^k \lambda_i G'_i(y_0) \cdot v$ , para todo  $v \in E$ .

**Demonstração.** Veja Kavian (1993, p. 55).

## A.4 TEORIA DE MINIMAX

Os resultados vistos aqui são utilizados nas demonstrações dos teoremas principais deste trabalho e abordam noções da teoria de Minimax, sendo muito úteis para obtenção de pontos críticos. Como referências podemos citar Kesavan (1978), Rabinowicz (1986), Kavian (1993), Li e Willem (1995) e Willem (1996).

**Definição A.3.** *Seja  $X$  um espaço de Banach. Dizemos que  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfaz a condição de Palais-Smale, e denotamos (PS), se qualquer sequência  $(u_n) \subset X$  tal que  $(J(u_n))$  é limitada e  $J'(u_n) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , possui uma subsequência convergente.*

**Observação A.1.** *Note que a condição de Cerami implica na condição de Palais-Smale. De fato, seja  $(u_n)$  sequência de Cerami. Como  $(J(u_n))$  converge para  $c$ ,  $(J(u_n))$  é limitada. Ainda,*

$$|J'(u_n)| \leq |J'(u_n)|(1 + \|u_n\|) \rightarrow 0,$$

donde  $J'(u_n) \rightarrow 0$ , se vale (Ce). Assim, se  $J$  satisfaz (Ce), então  $J$  satisfaz (PS).

**Teorema A.21. (Teorema do Passo da Montanha)** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ . Suponhamos que  $I$  satisfaça as seguintes condições:*

- i) *Existem  $R > 0$  e  $c_0 \in \mathbb{R}$  tais que  $I(u) \geq c_0$  para todo  $u \in E$  com  $\|u\| = R$ ;*
- ii)  *$I(0) < c_0$  e  $I(e) < c_0$  para algum  $e \in E$  com  $\|e\| > R$ .*

Assim, se  $I$  satisfizer (PS), então  $I$  terá um ponto crítico em  $E \setminus \{0, e\}$ , com correspondente valor crítico  $c \geq c_0$ .

**Demonstração.** Veja Rabinowicz (1986, p. 7).

**Teorema A.22. (Teorema do Ponto de Sela)** Sejam  $W = V \oplus X$  um espaço de Banach, com  $V \neq \{0\}$  e  $\dim V < +\infty$ . Se  $I \in C^1(W, \mathbb{R})$  satisfaz a condição (PS) e  $D$  é uma vizinhança limitada de 0 em  $V$ , tal que

$$a = \sup_{\partial D} I < \inf_X I = b,$$

então  $c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in \bar{D}} I(h(u))$  é um valor crítico de  $I$ , com  $c \geq b$ , onde

$$\Gamma = \{h \in C(\bar{D}, V); h(u) = u, \forall u \in \partial D\}.$$

**Demonstração.** Veja Rabinowicz (1986, p. 24).

**Teorema A.23. (Princípio Variacional de Ekeland)** Seja  $E$  um espaço de Banach real. Se  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  satisfaz a condição (PS) e é limitado inferiormente, então  $c = \inf_E I$  é um valor crítico para  $I$ .

**Demonstração.** Veja Willem (1996, p. 39).

**Definição A.4.** Seja  $X = X^1 \oplus X^2$  um espaço de Banach. Dizemos que  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  possui link local em 0, com respeito a  $(X^1, X^2)$ , se, para algum  $r > 0$ ,

$$I(u) \geq 0, \forall u \in X^1, \text{ com } \|u\| \leq r$$

e

$$I(u) \leq 0, \forall u \in X^2, \text{ com } \|u\| \leq r.$$

**Teorema A.24. (Teorema de Link Local)** Suponha que  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfaz as seguintes condições:

- (A1)  $I$  possui link local em 0;
- (A2)  $I$  satisfaz a condição (PS);
- (A3)  $I$  aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados;
- (A4)  $I$  é limitada inferiormente e  $d := \inf_X I < 0$ .

Então,  $I$  tem no mínimo três pontos críticos.



**Demonstração.** Veja Li e Willem (1995, p. 12).

## A.5 MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Nesta seção serão enunciados resultados de teoria da medida necessários para a prova de que o funcional  $J$  satisfaz a condição de Cerami. As demonstrações podem ser encontradas em Bartle (1966) e Evans e Gariepy (1992).

**Teorema A.25. (Lema de Fatou)** *Seja  $(f_k)$  uma sequência de funções mensuráveis não negativas. Então*

$$f(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

*é mensurável e*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx \geq \int f(x) dx.$$

**Demonstração.** Veja Evans e Gariepy (1992, p. 19).

**Teorema A.26. (Teorema da Convergência Dominada)** *Sejam  $E$  um espaço com uma medida,  $g$  uma função cuja integral é finita e  $(f_k)$  uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para uma função integrável  $f$  tal que  $|f_k(x)| \leq g(x)$ , q.t.p.  $x \in E$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Então  $f$  é integrável e  $\int f du = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k du$ .*

**Demonstração.** Veja Evans e Gariepy (1992, p. 20).

# Apêndice B

## O AUTOPROBLEMA DE STEKLOV

### B.1 DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES

No que segue, vamos considerar  $\Omega$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$  não vazio, com  $n \geq 2$  satisfazendo a seguinte condição:

(A)  $\Omega$  é um domínio limitado do  $\mathbb{R}^n$  e a fronteira de  $\Omega$ , dada por  $\partial\Omega$ , é reunião finita de superfícies fechadas disjuntas de Lipschitz, tendo cada superfície área finita.

Quando a condição (A) for válida mostra-se que existe um vetor normal exterior  $\nu(x)$  definido, para quase todo ponto  $x \in \partial\Omega$ . Os espaços reais de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  e  $L^p(\partial\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  são aqui definidos de maneira usual e têm as normas denotadas por  $\|\cdot\|_p$  e  $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ , respectivamente.

Temos, em  $L^2(\Omega)$  e  $L^2(\partial\Omega)$ , os produtos internos definidos por

$$\langle u, v \rangle_2 = \int_{\Omega} uv dx \quad \text{e} \quad \langle u, v \rangle_{2,\partial} = \int_{\partial\Omega} uv d\sigma.$$

Denotaremos por  $H^1(\Omega)$  o espaço usual de Sobolev. Este torna-se um espaço de Hilbert, quando munido do seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} [uv + \nabla u \cdot \nabla v] dx.$$

A norma proveniente deste produto interno é denotada por  $\|\cdot\|_{H^1}$ .

## B.2 O AUTOPROBLEMA DE STEKLOV

Problemas de Steklov são estudados desde 1902, porém, atualmente, estes problemas ainda possuem possibilidades de investigação inéditas. Existem diversas literaturas que tratam problemas similares a esse, como Auchmuty (2004) e Anane et al. (2009). A primeira utiliza um princípio variacional para encontrar um primeiro autovalor de Steklov e a partir disto obter uma sequência de autovalores de Steklov.

Baseados principalmente no artigo de Auchmuty, mostraremos alguns resultados relacionados à teoria de autovalores de Steklov que são necessários para a demonstração dos resultados principais deste trabalho. Consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu u, & \text{em } \partial\Omega; \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  satisfaz a condição **(A)** e  $c$  satisfaz a condição:

(C<sub>1</sub>)  $c \in L^p(\Omega)$ , com  $p \geq \frac{n}{2}$ , quando  $n \geq 3$  ( $p \geq 1$ , quando  $n = 2$ ) e  $c \geq 0$ , com desigualdade estrita para um conjunto de medida positiva, isto é,  $\int_{\Omega} c(x)dx > 0$ .

O problema (B.1) é denominado autoproblema de Steklov.

**Definição B.1.** *Uma solução fraca para o autoproblema de Steklov é um par  $(u, \mu)$ , onde  $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$  e  $\mu \in \mathbb{R}$  satisfazem*

$$\int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv]dx - \mu \int_{\partial\Omega} uv d\sigma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (\text{B.2})$$

*Neste caso, dizemos que  $\mu$  é autovalor de Steklov, com autofunção associada  $u$ .*

Primeiramente, provaremos a existência de um primeiro autovalor de Steklov. Para isto, sejam  $\mathcal{D}_c$  e  $\mathcal{B} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definidos, para  $u \in H^1(\Omega)$ , por

$$\mathcal{D}_c(u) = \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + c(x)u^2]dx \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(u) = \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma.$$

A ideia para a obtenção do primeiro autovalor de Steklov é utilizar técnicas variacionais para maximizar  $\mathcal{B}$  sobre  $\mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K} = \{u \in H^1(\Omega); \mathcal{D}_c(u) \leq 1\}$ , ou seja, mostraremos que existe  $u_1 \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$  tal que  $\sup_{u \in \mathbb{K}} \mathcal{B}(u) = \beta_1 = \mathcal{B}(u_1)$ . Disto, seguirá que  $\beta_1 = \mu_1^{-1}$  será o menor autovalor de Steklov positivo com autofunção associada  $u_1$ . Para mostrarmos estes fatos, precisaremos de alguns resultados preliminares.

## B.3 RESULTADOS PRELIMINARES

No transcorrer desta seção, assumiremos que as condições **(A)** e  $(C_1)$  são válidas. Com estas hipóteses, pode-se provar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$\langle u, v \rangle_c = \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv] dx, \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

define um produto interno em  $H^1(\Omega)$ , tendo norma proveniente denotada por  $\| \cdot \|_c$ .

**Lema B.1.** *Os funcionais  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}_c$  são contínuos e convexos.*

**Demonstração.** Inicialmente, mostraremos que  $\mathcal{B}$  é contínuo. Para isto sejam  $(u_k)$  sequência em  $H^1(\Omega)$  e  $u \in H^1(\Omega)$ , tais que  $u_k \rightarrow u$  em  $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_{H^1})$ . Pelo Teorema A.1,

$$\|\Gamma(u_k) - \Gamma(u)\|_{2,\partial} \leq \tilde{k} \|u_k - u\|_{H^1} \rightarrow 0, \text{ onde } \tilde{k} \in \mathbb{R}.$$

E assim,  $\Gamma(u_k) \rightarrow \Gamma(u)$  em  $(L^2(\partial\Omega), \| \cdot \|_{2,\partial})$ .

Consequentemente, pela desigualdade de Hölder em  $L^2(\partial\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(u_k) - \mathcal{B}(u)| &\leq \int_{\partial\Omega} |(\Gamma(u_k))^2 - (\Gamma(u))^2| d\sigma \\ &= \|(\Gamma(u_k))^2 - (\Gamma(u))^2\|_{2,\partial} \cdot |\partial\Omega|_{\sigma}^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{B}(u_k) \rightarrow \mathcal{B}(u)$ , isto é,  $\mathcal{B}$  é contínuo.

Observamos que  $\mathcal{D}_c = P + Q$ , onde  $P, Q : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  são dados, respectivamente, por  $P(u) = \int_{\Omega} c(x)u^2 dx$  e  $Q(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ . Para mostrarmos a continuidade do funcional  $\mathcal{D}_c$ , mostraremos que  $P$  e  $Q$  são contínuos.

A continuidade de  $Q$  pode ser encontrada em Rabinowicz (1986, p. 9). Deste modo provaremos apenas que  $P$  é contínuo. Para tal, sejam  $(u_k) \subset H^1(\Omega)$  e  $u \in H^1(\Omega)$ , tais que  $u_k \rightarrow u$  em  $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_{H^1})$ .

Caso  $n \geq 3$ :

Do Teorema A.7, o mergulho  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  é contínuo, quando  $0 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}$ . Assim,

$$u_k \rightarrow u \quad \text{em} \quad (L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega), \| \cdot \|_{\frac{2n}{n-2}}). \quad (\text{B.3})$$

Ainda, pelo Teorema A.17, existe uma subsequência  $(u_{k_j})$  de  $(u_k)$ , tal que

$$u_{k_j}(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \quad \text{em } (\mathbb{R}, |\cdot|). \quad (\text{B.4})$$

Como  $u_k^2, u^2 \in L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)$ , ao utilizarmos (B.3), (B.4) e aplicarmos o Teorema A.18, teremos

$$\|u_{k_j}^2\|_{\frac{n}{n-2}} \rightarrow \|u^2\|_{\frac{n}{n-2}} \quad \text{em } (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

Desta maneira, pelo Teorema A.19, concluímos que

$$\|u_{k_j}^2 - u^2\|_{\frac{n}{n-2}} \rightarrow 0 \quad \text{em } (\mathbb{R}, |\cdot|),$$

ou seja, se  $u_k \rightarrow u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ , então existe subsequência  $(u_{k_j})$  de  $(u_k)$ , tal que  $\|u_{k_j}^2 - u^2\|_{\frac{n}{n-2}} \rightarrow 0$  em  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

**Afirmção 1:**  $u_k^2 \rightarrow u^2$  em  $(L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega), \|\cdot\|_{\frac{n}{n-2}})$ .

Suponhamos que tal afirmação seja falsa. Então, existem  $\epsilon > 0$  e  $(u_{k_j}) \subset (u_k)$  tais que  $\|u_{k_j}^2 - u^2\|_{\frac{n}{n-2}} \geq \epsilon$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Como  $u_k \rightarrow u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ ,  $u_{k_j} \rightarrow u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ . Pelo que vimos anteriormente, existe  $(u_{k_{j_l}}) \subset (u_{k_j})$  tal que  $\|u_{k_{j_l}}^2 - u^2\|_{\frac{n}{n-2}} < \epsilon$ , mas isto contradiz nossa suposição. Portanto a Afirmação 1 é válida.

Finalmente, observemos que por  $c \in L^p(\Omega)$ , para  $p \geq \frac{n}{2}$ , nos remete a  $c \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ . A partir dessas informações, podemos mostrar a continuidade de  $P$ .

Com o auxílio da Desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \left| P(u_k) - P(u) \right| &\leq \int_{\Omega} |c(x)| |u_k^2 - u^2| dx \\ &\leq \|c(x)\|_{\frac{n}{2}} \|u_k^2 - u^2\|_{\frac{n}{n-2}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $P(u_k) \rightarrow P(u)$  em  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

Caso  $n = 2$ :

Pelo Teorema A.7, o mergulho  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  é contínuo, quando  $1 \leq q < +\infty$ . Assim,  $u_k \rightarrow u$  em  $(L^q(\Omega), \|\cdot\|_q)$  para qualquer  $q \in [0, +\infty)$ . Com argumentos similares ao do caso  $n \geq 3$ ,  $u_k^2 \rightarrow u^2$  em  $(L^q(\Omega), \|\cdot\|_q)$ . Agora, como  $c \in L^p(\Omega)$ ,  $p > 1$ , temos

$$\begin{aligned} \left| P(u_k) - P(u) \right| &\leq \int_{\Omega} |c(x)| |u_k^2 - u^2| dx \\ &= \|c\|_p \|u_k^2 - u^2\|_q \rightarrow 0, \end{aligned}$$

isto é,  $P(u_k) \rightarrow P(u)$  em  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ . Logo  $P$  é contínuo e assim  $\mathcal{D}_c$  é contínuo.

Provemos agora que  $\mathcal{B}$  é convexo. Tendo em vista que a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(s) = s^2$ , para  $s \in \mathbb{R}$  é convexa, temos

$$\int_{\partial\Omega} ((1-t)u + tv)^2 d\sigma \leq (1-t) \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma + t \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma, \quad \forall t \in [0, 1], u, v \in H^1(\Omega),$$

ou seja,  $\mathcal{B}$  é convexo.

Analogamente, mostra-se que  $\mathcal{D}_c$  é convexo. ■

O próximo resultado, que é provado com o auxílio do Lema anterior, será útil para mostrarmos a equivalência das normas  $\|\cdot\|_c$  e  $\|\cdot\|_{H^1}$ .

**Teorema B.1.** *Existe  $\alpha > 0$ , tal que  $\mathcal{D}_c(u) \geq \alpha \int_{\Omega} u^2 dx$ , para todo  $u \in H^1(\Omega)$ .*

**Demonstração.** Sejam  $\mathbf{S} = \{u \in H^1(\Omega); \|u\|_2 = 1\}$  e  $\alpha = \inf_{u \in \mathbf{S}} \mathcal{D}_c(u)$ .

**Afirmção 1:** Existe  $\tilde{u} \in \mathbf{S}$  tal que  $\mathcal{D}_c(\tilde{u}) = \alpha$ .

Com efeito, da definição de ínfimo conseguimos uma sequência  $(u_k) \subset \mathbf{S}$ , tal que  $\mathcal{D}_c(u_k) \rightarrow \alpha$  e  $\mathcal{D}_c(u_k) < \alpha + 1$ . Como  $u_k \in \mathbf{S}$ ,  $\|u_k\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx + 1$ .

Mas,

$$\begin{aligned} \|u_k\|_c^2 &= \int_{\Omega} [|\nabla u_k|^2 + c(x)u_k^2] dx \\ &= \|u_k\|_{H^1}^2 - 1 + \int_{\Omega} c(x)u_k^2 dx \\ &\geq \|u_k\|_{H^1}^2 - 1. \end{aligned}$$

Logo,  $\|u_k\|_{H^1}^2 \leq \alpha + 2$ , ou seja, a sequência  $(u_k)$  é limitada em  $H^1(\Omega)$ . Como  $H^1(\Omega)$  é espaço reflexivo, existem subsequência  $(u_{k_j})$  de  $(u_k)$  e  $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ , tais que  $u_{k_j} \rightharpoonup \tilde{u}$  em  $H^1(\Omega)$ . Pelo Teorema A.7,  $u_{k_j} \rightarrow \tilde{u}$  em  $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2)$ . Por isto, por  $u_{k_j} \in \mathbf{S}$  e pela norma  $\|\cdot\|_2$  ser contínua,  $\tilde{u} \in \mathbf{S}$ .

Por outro lado, devido a  $u_{k_j} \rightarrow \tilde{u}$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$  e ao Lema B.1,  $\|\cdot\|_c^2$  é contínua e convexa. Consequentemente,  $\|u_{k_j}\|_c$  é fracamente sequencialmente contínua em  $H^1(\Omega)$ . Portanto, segundo ao Teorema A.10, toda sequência  $(u_{k_j})$  tal que  $u_{k_j} \rightharpoonup \tilde{u}$  em  $H^1(\Omega)$  satisfaz a seguinte desigualdade,

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \|u_{k_j}\|_c \geq \|\tilde{u}\|_c.$$

Agora, como  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{D}_c(u_k) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_c^2 = \alpha$  segue que  $\|\tilde{u}\|_c^2 \leq \alpha$ . Ainda, como  $\tilde{u} \in \mathbf{S}$  e  $\alpha = \inf_{u \in \mathbf{S}} \mathcal{D}_c(u)$ ,  $\|\tilde{u}\|_c^2 \geq \alpha$ . Portanto,  $\|\tilde{u}\|_c^2 = \alpha$ , isto é,  $\mathcal{D}_c(\tilde{u}) = \alpha$ .

**Afirmção 2:**  $\alpha > 0$ .

De fato, pela Afirmção 1,  $\alpha = \mathcal{D}_c(\tilde{u}) = \|\tilde{u}\|_c^2 \geq 0$ . Caso  $\alpha = 0$ ,

$$\int_{\Omega} [|\nabla \tilde{u}|^2 + c(x)\tilde{u}^2] dx = 0 \implies \left[ \int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}|^2 dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} c(x)\tilde{u}^2 dx = 0 \right].$$

Assim, por  $(C_1)$ ,  $\tilde{u} = 0$  q.t.p.  $x \in \Omega$ . Logo,  $\|\tilde{u}\|_2 = 0$ . Mas,  $\|\tilde{u}\|_2 = 1$ , o que é um absurdo. Daí segue a validade da Afirmção 2.

Finalmente, como consequência das Afirmções 1 e 2, mostraremos a desigualdade do Teorema em questão.

Se  $u = 0$ , a igualdade vale. Caso  $u \neq 0$ , tomemos  $v = \frac{u}{\|u\|_2}$ . Por conseguinte,

$$\alpha \leq \mathcal{D}_c(v) = \|v\|_c^2 = \frac{\|u\|_c^2}{\|u\|_2^2} \implies \|u\|_c^2 \geq \alpha \|u\|_2^2,$$

o que finaliza a demonstração. ■

**Corolário B.1.** *As normas  $\|\cdot\|_c$  e  $\|\cdot\|_{H^1}$  são equivalentes.*

**Demonstração.** Inicialmente, observamos que sendo  $\mathcal{D}_c$  contínuo e homogêneo de segunda ordem, existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\|u\|_c \leq \gamma \|u\|_{H^1}, \forall u \in H^1(\Omega). \tag{B.5}$$

Com efeito, se  $u = 0$ , (B.5) é válida. Caso  $u \neq 0$ , temos, pela continuidade de  $\mathcal{D}_c$  em  $0 \in H^1(\Omega)$ , que existe  $\delta > 0$  tal que se  $w \in H^1(\Omega)$  e  $\|w\|_{H^1}^2 < \delta$ , então  $\|w\|_c^2 < 1$ .

Assim, tomando  $v = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{u}{\|u\|_{H^1}} \in H^1(\Omega)$ ,  $\|v\|_{H^1} < \delta$ . Logo,  $\|v\|_c^2 < 1$ . Por conseguinte,

$$\frac{\delta^2}{4} \cdot \frac{\|u\|_c^2}{\|u\|_{H^1}^2} < 1 \implies \|u\|_c^2 < \frac{4}{\delta^2} \|u\|_{H^1}^2,$$

ou seja,  $\|u\|_c \leq \gamma \|u\|_{H^1}$  para todo  $u \in H^1(\Omega)$ , onde  $\gamma = \frac{2}{\delta} > 0$ .

Por outro lado,  $\|u\|_{H^1}^2 \leq \|u\|_c^2 + \|u\|_2^2$ , para todo  $u \in H^1(\Omega)$ . Por isto e pelo Teorema B.1,

$\|u\|_{H^1}^2 \leq \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \|u\|_c^2$ . Pondo  $\eta = \sqrt{\frac{1}{\alpha} + 1}$ , vemos que

$$\|u\|_{H^1} \leq \eta \|u\|_c. \quad (\text{B.6})$$

Por (B.5) e (B.6), concluímos que as normas  $\|\cdot\|_c$  e  $\|\cdot\|_{H^1}$  são equivalentes em  $H^1(\Omega)$ . ■

**Teorema B.2.** *Os funcionais  $\mathcal{D}_c$  e  $\mathcal{B}$  são elementos de  $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ , tendo como derivada de Fréchet em  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{D}'_c(u) \cdot v = 2\langle u, v \rangle_c$  e  $\mathcal{B}'(u) \cdot v = 2\langle u, v \rangle_2$ , para todo  $v \in H^1(\Omega)$ . Além disso,  $\mathcal{B}$  é fracamente contínuo em  $H^1(\Omega)$ .*

**Demonstração.** Mostraremos, inicialmente, que  $\mathcal{D}_c \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$  tendo como derivada de Fréchet em  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{D}'_c(u) \cdot v = 2\langle u, v \rangle_c$ , para  $v \in H^1(\Omega)$ . Para tal, notamos que  $F_u : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por  $F_u(v) = 2\langle u, v \rangle_c$ , para  $v \in H^1(\Omega)$  e  $u \in H^1(\Omega)$  fixado é um funcional linear limitado.

Agora, pelo Corolário B.1, existe constante  $K_0 > 0$ , tal que  $\|w\|_c \leq K_0 \|w\|_{H^1}$ , para todo  $w \in H^1(\Omega)$ . Deste modo, para  $u \in H^1(\Omega)$  fixado,  $\epsilon > 0$  arbitrário, existe  $\delta = \frac{\epsilon}{K_0^2}$  tal que se

$$0 \leq \|v\|_{H^1} < \frac{\epsilon}{K_0^2}, \text{ então}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|v\|_{H^1}} |\mathcal{D}_c(u+v) - \mathcal{D}_c(u) - F_u(v)| &= \frac{1}{\|v\|_{H^1}} |\langle v, v \rangle_c| \\ &\leq \frac{1}{\|v\|_{H^1}} \cdot \|v\|_c^2 \\ &\leq \frac{1}{\|v\|_{H^1}} \cdot K_0^2 \|v\|_{H^1}^2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{D}_c$  é diferenciável a Fréchet e  $\mathcal{D}'_c(u) = F_u$ .

Verifiquemos que  $\mathcal{D}'_c : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)^*$  é contínuo. Para isto, sejam  $(u_k) \subset H^1(\Omega)$  e  $u \in H^1(\Omega)$ , tais que  $u_k \rightarrow u$  em  $H^1(\Omega)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}'_c(u_k) - \mathcal{D}'_c(u)\|_{H^1}^* &= \sup\{2|\langle u_k - u, v \rangle_c|; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &\leq \sup\{2\|u_k - u\|_c \|v\|_c; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &\leq \sup\{2K_0^2 \|u_k - u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &= 2K_0^2 \|u_k - u\|_{H^1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{D}'_c(u_k) \rightarrow \mathcal{D}'_c(u)$  em  $(H^1(\Omega)^*, \|\cdot\|_{H^1}^*)$ , o que completa a demonstração de que o



operador  $\mathcal{D}'_c$  é contínuo.

A seguir, provaremos que o funcional  $\mathcal{B} \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ . Para tal, observamos que o funcional  $G_u : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por  $G_u(v) = 2\langle u, v \rangle_{2,\partial}$ , para  $u$  fixado,  $v \in H^1(\Omega)$  é linear e limitado. Pois, a linearidade decorre da linearidade do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,\partial}$  e a limitação segue do Teorema A.1.

A partir disto, demonstraremos que  $\mathcal{B}$  é diferenciável a Fréchet em  $H^1(\Omega)$ , tendo como derivada de Fréchet em  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $G_u$ .

Do Teorema A.1, existe  $K_1 > 0$  tal que  $\|v\|_{2,\partial} \leq K_1\|v\|_{H^1}$ , para todo  $v \in H^1(\Omega)$ . Assim, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \frac{\epsilon}{K_1^2} > 0$ , tal que se  $0 \leq \|v\|_{H^1} < \frac{\epsilon}{K_1^2}$ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|v\|_{H^1}} |\mathcal{B}(u+v) - \mathcal{B}(u) - G_u(v)| &= \frac{1}{\|v\|_{H^1}} |\langle v, v \rangle_{2,\partial}| \\ &\leq \frac{1}{\|v\|_{H^1}} \cdot \|v\|_{2,\partial}^2 \\ &\leq \frac{1}{\|v\|_{H^1}} \cdot K_1^2 \|v\|_{H^1}^2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{B}$  é diferenciável a Fréchet, com  $\mathcal{B}'(u) = G_u$

Ainda,  $\mathcal{B}' : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)^*$  é contínuo, pois se  $(u_k) \subset H^1(\Omega)$  e  $u \in H^1(\Omega)$  são tais que  $u_k \rightarrow u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ , então

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}'(u_k) - \mathcal{B}'(u)\|_{H^1}^* &= \sup\{2|\langle u_k - u, v \rangle_{2,\partial}|; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &\leq \sup\{2\|u_k - u\|_{2,\partial}\|v\|_{2,\partial}; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &\leq \sup\{2K_1^2\|u_k - u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}; v \in H^1(\Omega) \text{ e } \|v\|_{H^1} = 1\} \\ &= 2K_1^2\|u_k - u\|_{H^1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{B}'(u_k) \rightarrow \mathcal{B}'(u)$  em  $(H^1(\Omega)^*, \|\cdot\|_{H^1}^*)$ , o que completa a demonstração de que o operador  $\mathcal{B}'$  é contínuo.

Finalmente, mostremos que o funcional  $\mathcal{B}$  é fracamente contínuo. Com efeito, sejam  $(u_k) \subset H^1(\Omega)$  e  $u \in H^1(\Omega)$ , tais que  $u_k \rightharpoonup u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ . Em consequência do Teorema A.1,  $u_k \rightarrow u$  em  $(L^2(\partial\Omega), \|\cdot\|_{2,\partial})$ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(u_k) - \mathcal{B}(u)| &\leq |\langle u_k - u, u_k \rangle_{2,\partial}| + |\langle u, u - u_k \rangle_{2,\partial}| \\ &\leq \|u_k - u\|_{2,\partial} \|u_k\|_{2,\partial} + \|u\|_{2,\partial} \|u - u_k\|_{2,\partial} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{B}(u_k) \rightarrow \mathcal{B}(u)$  em  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ . ■

A fim de garantirmos a existência do primeiro autovalor de Steklov, precisaremos de alguns resultados referentes ao conjunto  $\mathbb{K} = \{u \in H^1(\Omega); \mathcal{D}_c(u) \leq 1\}$ .

**Proposição B.1.** *O conjunto  $\mathbb{K} \subset H^1(\Omega)$  é convexo, limitado e fechado.*

**Demonstração.** Primeiramente mostraremos que  $\mathbb{K}$  é convexo. Como  $\|\cdot\|_c$  define uma norma em  $H^1(\Omega)$ ,

$$\|(1-t)u + tv\|_c \leq (1-t)\|u\|_c + t\|v\|_c \leq 1, \quad \forall u, v \in \mathbb{K}, \quad t \in [0, 1],$$

ou seja,  $(1-t)u + tv \in \mathbb{K}$ , para quaisquer  $u, v \in \mathbb{K}$  e  $t \in [0, 1]$ .

A limitação de  $\mathbb{K}$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ , segue do Corolário B.1. Ainda, pelo Lema B.1,  $\mathcal{D}_c$  é um funcional contínuo. Portanto,  $\mathbb{K} = \mathcal{D}_c^{-1}((-\infty, 1])$  é fechado em  $H^1(\Omega)$ . ■

**Observação B.1.** *Sendo  $H^1(\Omega)$  um espaço de Hilbert e  $\mathbb{K} \subset H^1(\Omega)$  limitado, convexo e fechado segue, pelo Teorema A.8, que  $\mathbb{K}$  é fracamente compacto em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ .*

Para construirmos a sequência de autovalores de Steklov, consideremos

$$\mathbb{K}_J = \{u \in \mathbb{K}; \langle \Gamma u, \Gamma u_j \rangle_{2,\partial} = \langle u, u_j \rangle_{2,\partial} = 0, \quad \text{para } 1 \leq j < J\},$$

onde  $u_1, u_2, \dots, u_J \in H^1(\Omega)$ ,  $J \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  e  $\Pi_u : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por  $\Pi_u(v) = \langle u, v \rangle_{2,\partial}$ , com  $u \in H^1(\Omega)$  fixado e  $v \in H^1(\Omega)$ .

**Proposição B.2.** *O funcional  $\Pi_u \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ , tendo como derivada de Fréchet em  $v \in H^1(\Omega)$ ,  $\Pi_u$ , isto é,  $\Pi'_u(v) = \Pi_u$  para todo  $v \in H^1(\Omega)$ .*

**Demonstração.** Como  $\Pi_u = \frac{1}{2}G_u$ ,  $\Pi_u$  é linear e limitado. Por outro lado, como todo operador linear e limitado é infinitamente diferenciável e sua derivada de Fréchet coincide com ele próprio,  $\Pi'_u(v) = \Pi_u$ , para todo  $v \in H^1(\Omega)$ .

■

**Proposição B.3.** *O conjunto  $\mathbb{K}_J \subset H^1(\Omega)$  é convexo, limitado e fechado.*

**Demonstração.** Inicialmente, mostramos que  $\mathbb{K}_J$  é convexo. Para isto, sejam  $u, v \in \mathbb{K}_J$  e  $t \in [0, 1]$ . Como  $\mathbb{K}$  é convexo,  $(1 - t)u + tv \in \mathbb{K}$  e, para  $1 \leq j \leq J$ ,

$$\begin{aligned} \langle \Gamma((1 - t)u + tv), \Gamma u_j \rangle_{2, \partial} &= \langle (1 - t)u + tv, u_j \rangle_{2, \partial} \\ &= (1 - t)\langle u, u_j \rangle_{2, \partial} + t\langle v, u_j \rangle_{2, \partial} = 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $(1 - t)u + tv \in \mathbb{K}_J$ . Pela definição de  $\mathbb{K}_J$ ,  $\mathbb{K}_J \subset \mathbb{K}$ . Como  $\mathbb{K}$  é limitado, segue a limitação de  $\mathbb{K}_J$ . Finalmente, notando que  $\mathbb{K}_J = \mathbb{K} \cap \bigcap_{j=1}^J \Pi_j^{-1}(\{0\})$ , onde  $\Pi_j = \Pi_{u_j}$ ,  $\Pi_{u_j}$  é contínua para  $1 \leq j \leq J$  e  $\mathbb{K}$  é fechado, tem-se que  $\mathbb{K}_J$  também será fechado em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ .

■

**Observação B.2.** *Em consequência da Proposição B.3, temos que o conjunto  $\mathbb{K}_J$  é fracamente compacto em  $H^1(\Omega)$ .*

Ainda, para construirmos a sequência de autovalores de Steklov precisamos de alguns resultados referente ao espaço

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{u \in L^2(\partial\Omega) : \exists v \in H^1(\Omega); v|_{\partial\Omega} = u\}.$$

Sabe-se, do Teorema A.2, que o operador inclusão  $i : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  é linear, injetor e contínuo.

**Teorema B.3.** *Se  $u_1, u_2, \dots, u_J \in H^1(\Omega)$ , então existe  $v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \setminus \{0\}$ , tal que  $i(v) = v$  é um elemento de  $[\Gamma u_1, \Gamma u_2, \dots, \Gamma u_J]^\perp$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que o Teorema não valha. Como o subespaço  $[\Gamma u_1, \Gamma u_2, \dots, \Gamma u_J]$  de  $L^2(\partial\Omega)$  possui dimensão finita,

$$L^2(\partial\Omega) = [\Gamma u_1, \Gamma u_2, \dots, \Gamma u_J] \oplus [\Gamma u_1, \Gamma u_2, \dots, \Gamma u_J]^\perp. \quad (\text{B.7})$$

Agora, se  $v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , então  $v \in L^2(\partial\Omega)$  e existe  $u \in H^1(\Omega)$ , tais que  $u|_{\partial\Omega} = v$ . Por

(B.7), existem  $\delta_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, J$ , e  $\tilde{u} \in [\Gamma u_1, \Gamma u_2, \dots, \Gamma u_J]^\perp$ , tais que

$$\Gamma(u) = v = \delta_1 \Gamma(u_1) + \delta_2 \Gamma(u_2) + \dots + \delta_J \Gamma(u_J) + \tilde{u}.$$

Em virtude da linearidade do operador  $\Gamma$ ,  $v = \Gamma(\delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \dots + \delta_J u_J) + \tilde{u}$ . Além disso, pela caracterização de  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , concluímos que  $\tilde{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ .

Pelo Teorema A.2,  $i(\tilde{u}) = \tilde{u}$ . Agora, como  $\tilde{u}$  é um elemento de  $[\Gamma u_1, \Gamma u_2, \dots, \Gamma u_J]^\perp$  e devido à nossa suposição,  $\tilde{u} = 0$ . Assim,  $v \in [\Gamma u_1, \Gamma u_2, \dots, \Gamma u_J]$ . Visto que  $v$  é arbitrário em  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ,  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = [\Gamma u_1, \Gamma u_2, \dots, \Gamma u_J]$ . Mas isto é um absurdo, pois a dimensão de  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  é infinita (Teorema A.3). Logo vale o teorema em questão. ■

## B.4 CONSTRUÇÃO DO PRIMEIRO AUTOVALOR DE STEKLOV

O próximo Teorema garante a existência do primeiro autovalor de Steklov, bem como, algumas de suas propriedades.

**Teorema B.4.** (a) *Existe  $u_1 \in \mathbb{K}$  tal que  $\|u_1\|_c = 1$  e  $\mathcal{B}(u_1) = \beta_1 > 0$ ;*

(b) *Se  $\mu_1 = \beta_1^{-1}$ , então o par  $(u_1, \mu_1)$  satisfaz (B.2), ou seja,  $\mu_1$  é autovalor de Steklov, tendo como autofunção associada  $u_1$ .*

(c)  *$\mu_1$  é o menor autovalor positivo de Steklov.*

**Demonstração.** (a) Pela Observação B.1, o conjunto  $\mathbb{K}$  é fracamente compacto em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ . Além disso, pelo Teorema B.2, o funcional  $\mathcal{B}$  é fracamente contínuo. Logo, existe  $u_1 \in \mathbb{K}$ , tal que  $\beta_1 = \mathcal{B}(u_1) = \sup_{u \in \mathbb{K}} \mathcal{B}(u)$ .

**Afirmção 1:**  $\|u_1\|_c = 1$ .

De fato, como  $u_1 \in \mathbb{K}$ ,  $\|u_1\|_c^2 = \mathcal{D}_c(u_1) \leq 1$ . Suponhamos que  $\mathcal{D}_c(u_1) < 1$ . Com isto, existe  $r = \frac{1 + \|u_1\|_c}{2\|u_1\|_c} > 1$ , tal que  $ru_1 \in \mathbb{K}$ . Assim,  $\mathcal{B}(ru_1) = r^2 \mathcal{B}(u_1) > \mathcal{B}(u_1) = \beta_1$ , o que é um absurdo. Portanto,  $\|u_1\|_c = 1$ .

Diante da afirmação anterior, podemos ver  $u_1$  como um extremo de  $\mathcal{B}$  restrito ao conjunto  $\mathcal{D}_c^{-1}(\mathcal{D}_c(u_1))$ .

Agora, visto que  $\mathcal{D}_c$  e  $\mathcal{B}$  são elementos de  $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ , temos, pelo Teorema A.20, que uma das condições abaixo deve valer

$$(1) \mathcal{D}'_c(u_1) \cdot v = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega);$$

$$(2) \text{ Existe } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \mathcal{B}'(u_1) \cdot v = \lambda \mathcal{D}'_c(u_1) \cdot v, \text{ para todo } v \in H^1(\Omega).$$

A condição (1) não ocorre, pois  $\mathcal{D}'_c(u_1) \cdot u_1 = 2\langle u_1, u_1 \rangle_c = 2\|u_1\|_c^2 = 2$ . Logo, deve ocorrer (2), ou seja, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\int_{\partial\Omega} u_1 v d\sigma = \lambda \int_{\Omega} [\nabla u_1 \cdot \nabla v + c(x)u_1 v] dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (\text{B.8})$$

**Afirmção 2:**  $\lambda = \beta_1 > 0$ .

Com efeito, se considerarmos  $v = u_1$  em (B.8) e o fato de  $\|u_1\|_c = 1$ , então

$$\int_{\partial\Omega} u_1^2 d\sigma = \lambda \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + c(x)u_1^2] dx = \lambda \|u_1\|_c^2 = \lambda,$$

ou seja,

$$\lambda = \int_{\partial\Omega} u_1^2 d\sigma = \|u_1\|_{2,\partial}^2 = \mathcal{B}(u_1) = \beta_1.$$

Logo,  $\lambda = \beta_1 \geq 0$ . Caso  $\lambda = 0$ , segue que  $\sup_{u \in \mathbb{K}} \mathcal{B}(u) = 0$ . Como  $\mathcal{B}$  é contínua e não negativa  $\mathcal{B}(u) = 0$ , para todo  $u \in \mathbb{K}$ . Por outro lado, todo funcional constante sobre  $\Omega$  é um elemento de  $H^1(\Omega)$ , uma vez que  $\Omega$  é limitado. Em particular, o funcional  $\varphi_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por  $\varphi_1(x) = 1$  para  $x \in \Omega$ , é um elemento de  $H^1(\Omega)$ . Por conseguinte,

$$\mathcal{B}(\varphi_1) = \int_{\partial\Omega} 1 d\sigma = |\partial\Omega|_{\sigma} > 0.$$

Agora, notando que  $\phi = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|_c} \in \mathbb{K}$ ,

$$\mathcal{B}(\phi) = \frac{1}{\|\varphi_1\|_c^2} \int_{\partial\Omega} \varphi_1^2 d\sigma = \frac{\|\varphi_1\|_{2,\partial}^2}{\|\varphi_1\|_c^2} = \frac{\mathcal{B}(\varphi_1)}{\|\varphi_1\|_c^2} > 0,$$

isto é,  $\mathcal{B}(\phi) > 0$  o que contradiz o fato que  $\mathcal{B}(u) = 0$ , para todo  $u \in \mathbb{K}$ . Deste modo,  $\lambda = \beta_1 > 0$ , o que conclui a prova da Afirmção 2 e do item (a). (b) Por (B.8) e pela Afirmção 1, o par  $(u_1, \lambda^{-1}) \in (H^1(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$  é uma solução fraca para o autop problema (B.1), ou seja,  $\mu_1 = \beta_1^{-1} = \lambda^{-1}$  é autovalor de Steklov, com autofunção associada  $u_1$ . (c) Suponhamos que  $\mu_1$  não seja o menor autovalor positivo de Steklov. Assim, existem  $\hat{u} \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$  e  $\hat{\mu} \in \mathbb{R}$ , com  $0 < \hat{\mu} < \mu_1$ , tais que  $\langle \hat{u}, v \rangle_c = \hat{\mu} \langle \hat{u}, v \rangle_{2,\partial}$ , para todo

$v \in H^1(\Omega)$ . Ao tomarmos  $v = \frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|_c}$ ,

$$\mathcal{B}(v) = \mathcal{B}\left(\frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|_c}\right) = \frac{1}{\|\hat{u}\|_c^2} \int_{\partial\Omega} \hat{u}^2 d\sigma.$$

Logo,

$$\hat{\mu} \mathcal{B}\left(\frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|_c}\right) = \frac{\hat{\mu}}{\|\hat{u}\|_c^2} \cdot \|\hat{u}\|_{2,\partial}^2 = \frac{\hat{\mu}}{\|\hat{u}\|_c^2} \cdot \frac{1}{\hat{\mu}} \cdot \|\hat{u}\|_c^2 = 1.$$

Consequentemente,  $\mathcal{B}\left(\frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|_c}\right) = \frac{1}{\hat{\mu}} > \frac{1}{\mu_1} = \beta_1$ , o que é um absurdo, pois  $\beta_1 = \sup_{u \in \mathbb{K}} \mathcal{B}(u)$  e  $\frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|_c} \in \mathbb{K}$ . ■

O resultado a seguir é de grande importância para a obtenção de soluções do problema principal deste trabalho.

**Corolário B.2.** *Para todo  $u \in H^1(\Omega)$ , vale a seguinte desigualdade*

$$\int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + c(x)u^2] dx \geq \mu_1 \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma,$$

onde  $\mu_1 > 0$  é o primeiro autovalor de Steklov.

**Demonstração.** Se  $u = 0$ , vale a igualdade. Se  $u \neq 0$ , consideremos  $v = \frac{u}{\|u\|_c}$ . Deste modo,  $\|v\|_c = 1$ , isto é,  $v \in \mathbb{K}$ . Assim, temos  $\mathcal{B}(v) \leq \beta_1 = \sup_{u \in \mathbb{K}} \mathcal{B}(u)$ . Como  $\mathcal{B}(v) = \|v\|_{2,\partial}^2$ , segue que  $\mathcal{B}(v) = \frac{\|u\|_{2,\partial}^2}{\|u\|_c^2}$ . Logo,  $\|u\|_{2,\partial}^2 \leq \beta_1 \|u\|_c^2$  e isto significa que  $\int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + c(x)u^2] dx \geq \mu_1 \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma$ . ■

## B.5 CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA AUTOVALORES DE STEKLOV

Com o auxílio dos resultados vistos nas seções B.3 e B.4 vamos, agora, à construção da sequência de autovalores de Steklov, a saber,  $(\mu_j)$ , que satisfaz algumas propriedades que são úteis para o desenvolvimento deste trabalho.

No Teorema B.4, vimos que existe um primeiro autovalor de Steklov, o qual denotamos por  $\mu_1$ , tendo como autofunção associada  $u_1$ . Com isto, teremos o primeiro passo do processo de indução satisfeito, sendo este utilizado para a construção da sequência  $(\mu_j)$ .

**Teorema B.5.** *Existe uma seqüência de pares  $((u_J, \mu_J))$  em  $[H^1(\Omega) \setminus \{0\}] \times \mathbb{R}$ , os quais são soluções fraca para o autoproblema (B.1). Além disso, se considerarmos, para cada  $J \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ ,*

$$\mathbb{K}_0 = \mathbb{K} \text{ e } \mathbb{K}_J = \{u \in \mathbb{K}; \langle u, u_j \rangle_{2,\partial} = 0, \text{ para } 1 \leq j \leq J\},$$

então

$$\beta_J = \sup_{u \in \mathbb{K}_{J-1}} \mathcal{B}(u) = \mathcal{B}(u_J) > 0 \text{ e } \mu_J = \beta_J^{-1}.$$

**Demonstração.** Vamos demonstrar este teorema por indução em  $J$ . A validade do mesmo, para  $J = 1$ , é garantida pelo Teorema B.4. Suponhamos que o Teorema em questão seja válido para  $j$ , com  $j \leq J$ , e mostremos a validade do mesmo para  $J + 1$ .

**Afirmção 1:** Existe  $u_{J+1} \in \mathbb{K}_J$  tal que  $\beta_{J+1} = \sup_{u \in \mathbb{K}_J} \mathcal{B}(u) = \mathcal{B}(u_{J+1})$ .

De fato, pela Observação B.2,  $\mathbb{K}_J$  é fracamente compacto em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ . Além disso, pelo Teorema B.2,  $\mathcal{B}$  é fracamente contínuo. Logo, existe  $u_{J+1} \in \mathbb{K}_J$ , tal que

$$\mathcal{B}(u_{J+1}) = \beta_{J+1} = \sup_{u \in \mathbb{K}_J} \mathcal{B}(u).$$

**Afirmção 2:**  $\|u_{J+1}\|_c = 1$ .

Com efeito,  $u_{J+1} \in \mathbb{K}_J$  e  $\mathbb{K}_J \subset \mathbb{K}$ . Com isto,  $\|u_{J+1}\|_c \leq 1$ . Suponhamos que  $\|u_{J+1}\|_c < 1$ . Para  $r = \frac{1+\|u_{J+1}\|_c}{2\|u_{J+1}\|_c} > 1$ ,  $ru_{J+1} \in \mathbb{K}_J$ . Além disso,

$$\mathcal{B}(ru_{J+1}) = r^2 \mathcal{B}(u_{J+1}) > \mathcal{B}(u_{J+1}) = \beta_{J+1}.$$

Mas isto é um absurdo. Portanto,  $\|u_{J+1}\|_c = 1$ .

**Afirmção 3:**  $\beta_{J+1} > 0$ .

Pela hipótese de indução, existem  $u_1, u_2, \dots, u_J \in H^1(\Omega)$ , tais que

$$\beta_l = \sup_{u \in \mathbb{K}_{l-1}} \mathcal{B}(u) = \mathcal{B}(u_l) > 0, \text{ para } 1 \leq l \leq J.$$

Pelo Teorema B.3, visto que  $v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \setminus \{0\}$ ,  $w|_{\partial\Omega} = v$  para algum  $w \in H^1(\Omega)$ . Em razão de  $v \neq 0$  em  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ,  $\mathcal{B}(w) = \int_{\partial\Omega} w^2 d\sigma > 0$ . Com efeito, se  $\mathcal{B}(w) = 0$ , então  $\int_{\partial\Omega} w^2 d\sigma = 0$ , e assim  $w = 0$  para q.t.p. na  $\partial\Omega$ . Mas  $w|_{\partial\Omega} = v$ . Logo  $v = 0$  em  $L^2(\partial\Omega)$ .

Como  $v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ,  $i$  é injetora e  $i(v) = 0 = i(0)$ , concluímos que  $v = 0$  em  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , o que não ocorre. Por conseguinte,  $\mathcal{B}(w) > 0$ .

Além disso,  $w \neq 0$  em  $H^1(\Omega)$ , pois caso  $w = 0$  em  $H^1(\Omega)$ , então  $w|_{\partial\Omega} = v = 0$  em  $L^2(\partial\Omega)$ . Assim,  $v = 0$  em  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , o que não é verdade. Deste modo,  $\|w\|_c \neq 0$  ( $w \neq 0$  em  $H^1(\Omega)$ ).

Vamos assim considerar  $\tilde{w} = \frac{w}{\|w\|_c} \in H^1(\Omega)$ . Observamos que

$$\mathcal{B}(\tilde{w}) = \mathcal{B}\left(\frac{w}{\|w\|_c}\right) = \frac{1}{\|w\|_c^2} \mathcal{B}(w).$$

Ainda,  $\frac{v}{\|w\|_c} = \frac{1}{\|w\|_c} w|_{\partial\Omega} = \tilde{v} = \tilde{w}|_{\partial\Omega} \in [\Gamma u_1, \Gamma u_2, \dots, \Gamma u_J]^\perp$ . Por conseguinte,

$$\langle \tilde{w}, u_k \rangle_{2,\partial} = 0, \quad \text{para } 1 \leq k \leq J. \quad (\text{B.9})$$

Agora, notemos que  $\|\tilde{w}\|_c = 1$ . Disto e de (B.9), segue que  $\tilde{w} \in \mathbb{K}_J$ . Daí,

$$\mathcal{B}_{J+1} = \sup_{u \in \mathbb{K}_J} \mathcal{B}(u) \geq \mathcal{B}(\tilde{w}) > 0,$$

e tem sentido definirmos  $\mu_{J+1} = \beta_{J+1}^{-1}$ .

**Afirmção 4:** O par  $(u_{J+1}, \mu_{J+1})$  é solução fraca para o autoprobema (B.1).

Pelas Afirmções 2 e 3, podemos ver  $u_{J+1}$  como um elemento máximo de  $\mathcal{B}$  restrito a

$$\mathcal{D}_c^{-1}(\mathcal{D}_c(u_{J+1})) \cap \left[ \bigcap_{k=1}^J \Pi_k^{-1}(\Pi_k(u_{J+1})) \right],$$

onde  $\Pi_k = \Pi_{u_k}$ , para  $k = 1, 2, \dots, J$ . Já vimos, pelo Teorema B.2 e pela Proposição B.2, que os funcionais  $\mathcal{D}_c$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\Pi_k$  são elementos de  $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ . Deste modo, podemos aplicar o Teorema A.20, ou seja, uma das seguintes condições deve valer:

(1)  $\det A(v_1, \dots, v_{J+1}) = 0$ , para quaisquer  $v_1, v_2, \dots, v_{J+1} \in H^1(\Omega)$ , onde

$$A(v_1, v_2, \dots, v_{J+1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}'_c(u_{J+1}) \cdot v_1 & \mathcal{D}'_c(u_{J+1}) \cdot v_2 & \dots & \mathcal{D}'_c(u_{J+1}) \cdot v_{J+1} \\ \Pi'_1(u_{J+1}) \cdot v_1 & \Pi'_1(u_{J+1}) \cdot v_2 & \dots & \Pi'_1(u_{J+1}) \cdot v_{J+1} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \Pi'_J(u_{J+1}) \cdot v_1 & \Pi'_J(u_{J+1}) \cdot v_2 & \dots & \Pi'_J(u_{J+1}) \cdot v_{J+1} \end{pmatrix};$$



(2) Existem  $\alpha, \alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2, \dots, J$ , tais que

$$\mathcal{B}'(u_{J+1}) \cdot v = \alpha \mathcal{D}'_c(u_{J+1}) \cdot v + \sum_{k=1}^J \alpha_k \Pi'_k(u_{J+1}) \cdot v, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (\text{B.10})$$

Mas, pela hipótese de indução, sabemos, para  $u, v \in H^1(\Omega)$  e  $k = 1, 2, \dots, J$ , que

$$\mathcal{D}'_c(u) \cdot v = 2\langle u, v \rangle_c \text{ e } \Pi'_k(u) \cdot v = \langle v, u_k \rangle_{2,\partial}.$$

Por isto, por  $u_{J+1} \in \mathbb{K}_J$  e pela hipótese de indução, para  $k, l = 1, 2, \dots, J$ , com  $k \neq l$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_c(u_{J+1}) \cdot u_{J+1} &= 2\langle u_{J+1}, u_{J+1} \rangle_c = 2\|u_{J+1}\|_c^2 = 2, \\ \mathcal{D}'_c(u_{J+1}) \cdot u_k &= 2\langle u_{J+1}, u_k \rangle_c = 2\mu_k \langle u_{J+1}, u_k \rangle_{2,\partial} = 0, \\ \Pi'_k(u_{J+1}) \cdot u_{J+1} &= \langle u_{J+1}, u_k \rangle_{2,\partial} = 0, \\ \Pi'_k(u_{J+1}) \cdot u_k &= \langle u_k, u_k \rangle_{2,\partial} = \|u_k\|_{2,\partial}^2 = \beta_k \|u_k\|_c^2 = \beta_k. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$A(u_{J+1}, u_1, \dots, u_J) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_J \end{pmatrix}.$$

Logo,  $\det A(u_{J+1}, u_1, \dots, u_J) = 2\beta_1\beta_2 \cdots \beta_J > 0$ . Portanto, (2) deve ocorrer. Para concluirmos a prova da Afirmação 4, mostremos, antes, que  $\alpha_s = 0$ , para todo  $s \in \{1, 2, \dots, J\}$ .

Ora, ao considerarmos  $v = u_s$  para  $s \in \{1, 2, \dots, J\}$  em (B.10), obtemos

$$\mathcal{B}'(u_{J+1}) \cdot u_s = 2\langle u_{J+1}, u_s \rangle_{2,\partial} = 2\alpha \langle u_{J+1}, u_s \rangle_c + 2 \cdot \sum_{k=1}^J \alpha_k \langle u_s, u_k \rangle_{2,\partial}. \quad (\text{B.11})$$

Como  $u_{J+1} \in \mathbb{K}_J$ , segue, da hipótese de indução, que

$$0 = \alpha \mu_s \langle u_{J+1}, u_s \rangle_{2,\partial} + 2\alpha_s \langle u_s, u_s \rangle_{2,\partial} \implies 0 = 2\alpha_s \mu_s^{-1}.$$

Como  $\mu_s \neq 0$ ,  $\alpha_s = 0$ , para todo  $s \in \{1, 2, \dots, J\}$ . Agora, se  $v = u_{J+1}$  em (B.11), obtemos

$$\beta_{J+1} = \langle u_{J+1}, u_{J+1} \rangle_{2,\partial} = \alpha \langle u_{J+1}, u_{J+1} \rangle_c = \alpha \|u_{J+1}\|_c^2 = \alpha.$$

Portanto,  $\beta_{J+1}^{-1} \langle u_{J+1}, v \rangle_{2,\partial} = \langle u_{J+1}, v \rangle_c$ , para todo  $v \in H^1(\Omega)$ . Ainda, visto que  $\|u_{J+1}\|_c = 1$ , o par  $(u_{J+1}, \beta_{J+1}^{-1}) = (u_{J+1}, \mu_{J+1})$  é uma solução fraca para o autoprobema B.1. ■

**Teorema B.6.** *A sequência  $(u_j, \mu_j)$  satisfaz*

(a)  $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_j \leq \dots$ ;

(b)  $\langle u_j, u_k \rangle_{2,\partial} = \mu_j^{-1} \delta_{jk}, \forall j, k \in \mathbb{N}$ ;

(c)  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mu_j = +\infty$ .

(d) A dimensão do autoespaço associado a cada autovalor de Steklov  $\mu_j$  é finita.

**Demonstração.** (a) Pelo Teorema B.5, para  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_j = \beta_j^{-1}$  e  $\beta_l = \sup_{u \in K_{l-1}} \beta(u)$ . Logo, em razão de  $K_{j-1} \subset K_{j-2}$ ,  $\beta_j \leq \beta_{j-1}$ , para  $j \geq 2$ . Assim,  $\mu_{j-1} = \beta_{j-1}^{-1} \leq \beta_j^{-1} = \mu_j$ . Disto e do fato de que  $\mu_1 > 0$ , segue que  $0 < \mu_1 \leq \dots \leq \mu_j \leq \dots$ .

(b) Pelo Teorema B.5,  $u_j \in K_{j-1} \subset K_j$ . Deste modo,  $\|u_j\|_c = 1$  e  $\langle u_j, u_k \rangle_{2,\partial} = 0$ , quando  $k < j$ . Caso  $j < k$ , obtemos  $\langle u_j, u_k \rangle_{2,\partial} = 0$ . Finalmente, se  $j = k$ , então, pelo fato de  $u_j$  ser autofunção associada ao autovalor de Steklov  $\mu_j$ ,

$$\langle u_j, u_j \rangle_{2,\partial} = \mu_j^{-1} \langle u_j, u_j \rangle_c = \mu_j^{-1} \|u_j\|_c^2 = \mu_j^{-1},$$

o que implica na validade de (b).

(c) Suponhamos que o item (c) não seja válido, ou seja, existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $\mu_j \leq L$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Se, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $v_j = \frac{u_j}{\|u_j\|_{2,\partial}} \in H^1(\Omega)$ , então

$$\|v_j\|_c^2 = \frac{1}{\|u_j\|_{2,\partial}^2} = \beta_j^{-1} = \mu_j \leq L, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo  $(v_j)$  é uma sequência limitada em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Como as normas  $\|\cdot\|_c$  e  $\|\cdot\|_{H^1}$  são equivalentes em  $H^1(\Omega)$ , a sequência  $(v_j)$  também é limitada em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ . Ainda, visto que  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$  é um espaço reflexivo, existem subsequência  $(v_{j_k})$  de  $(v_j)$  e

$\tilde{v} \in H^1(\Omega)$ , tais que  $v_{j_k} \rightharpoonup \tilde{v}$  em  $(H^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$ . Daí, pelo Teorema A.1,  $v_{j_k} \rightarrow \tilde{v}$  em  $(L^2(\partial\Omega), \|\cdot\|_{2,\partial})$ . Deste modo, a sequência  $(v_{j_k})$  é uma sequência de Cauchy em  $L^2(\partial\Omega)$ . Entretanto, ao considerarmos  $j_k$  e  $j_l$  grandes, com  $j_k \neq j_l$  temos

$$\begin{aligned} \|v_{j_k} - v_{j_l}\|_{2,\partial}^2 &= \left\| \frac{u_{j_k}}{\|u_{j_k}\|_{2,\partial}} - \frac{u_{j_l}}{\|u_{j_l}\|_{2,\partial}} \right\|_{2,\partial}^2 \\ &= \frac{1}{\|u_{j_k}\|_{2,\partial}^2} \langle u_{j_k}, u_{j_k} \rangle_{2,\partial} + \frac{1}{\|u_{j_l}\|_{2,\partial}^2} \langle u_{j_l}, u_{j_l} \rangle_{2,\partial} - \frac{2}{\|u_{j_k}\|_{2,\partial} \|u_{j_l}\|_{2,\partial}} \langle u_{j_k}, u_{j_l} \rangle_{2,\partial} \\ &= \frac{\|u_{j_k}\|_{2,\partial}^2}{\|u_{j_k}\|_{2,\partial}^2} + \frac{\|u_{j_l}\|_{2,\partial}^2}{\|u_{j_l}\|_{2,\partial}^2} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Consequentemente,  $\|v_{j_k} - v_{j_l}\|_{2,\partial}^2 = 2$ . Mas isto é um absurdo, pois a sequência  $(v_{j_k})$  é de Cauchy em  $L^2(\partial\Omega)$ . Portanto, devemos ter  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mu_j = +\infty$ .

(d) Suponhamos que a dimensão do autoespaço associado a algum autovalor  $\mu_k$  seja infinita. Deste modo, podemos considerar uma sequência  $(y_j)$  de autofunções  $c$ -ortonormais em  $H^1(\Omega)$  associadas ao autovalor de Steklov  $\mu_k$ . Logo, para  $r, s \in \mathbb{N}$ , com  $r \neq s$ , devemos ter  $\langle y_r, y_s \rangle_{2,\partial} = \mu_k \langle y_r, y_s \rangle_c = 0$  e  $\mu_k \|y_r\|_{2,\partial}^2 = \|y_r\|_c^2 = 1$ . Se definirmos, para  $j \in \mathbb{N}$ ,  $v_j = \frac{y_j}{\|y_j\|_{2,\partial}}$ , então  $\|v_j\|_c^2 = \mu_k < +\infty$ . Por conseguinte,  $(v_j)$  é uma sequência limitada em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Como as normas  $\|\cdot\|_c$  e  $\|\cdot\|_{H^1}$  são equivalentes em  $H^1(\Omega)$ , a sequência  $(v_j)$  é limitada em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ . Com os mesmos argumentos do item (c) e pela reflexibilidade de  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ , a sequência  $(v_j)$  possui subsequência  $(v_{j_k})$  tais que  $v_{j_k} \rightharpoonup \tilde{v}$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ , onde  $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$ . Pelo Teorema A.1,  $v_{j_k} \rightarrow \tilde{v}$  em  $(L^2(\partial\Omega), \|\cdot\|_{2,\partial})$ . Assim,  $(v_{j_k})$  é uma sequência de Cauchy em  $L^2(\partial\Omega)$ . No entanto, para  $j_k$  e  $j_l$  grandes, com  $j_k \neq j_l$ , obtemos

$$\|v_{j_k} - v_{j_l}\|_{2,\partial}^2 = \left\| \frac{y_{j_k}}{\|y_{j_k}\|_{2,\partial}} - \frac{y_{j_l}}{\|y_{j_l}\|_{2,\partial}} \right\|_{2,\partial}^2 = \frac{\|y_{j_k}\|_{2,\partial}^2}{\|y_{j_k}\|_{2,\partial}^2} + \frac{\|y_{j_l}\|_{2,\partial}^2}{\|y_{j_l}\|_{2,\partial}^2} = 1 + 1 = 2,$$

o que é um absurdo, pois a sequência  $(v_{j_k})$  é de Cauchy em  $L^2(\partial\Omega)$ . Consequentemente, a dimensão do autoespaço associado a cada autovalor de Steklov deve ser finita. ■

## B.6 UMA DECOMPOSIÇÃO PARA $H^1(\Omega)$ .

Nesta seção, vamos descrever uma decomposição  $c$ -ortogonal para  $H^1(\Omega)$ .

**Definição B.2.** *Uma solução fraca de*

$$c(x)u - \Delta u = 0, \text{ em } \Omega, \quad (\text{B.12})$$

é uma função  $u \in H^1(\Omega)$  que satisfaz  $\langle u, \varphi \rangle_c = \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla \varphi + c(x)u\varphi] dx = 0$ , para todo  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ , isto é,  $u \in H^1(\Omega)$  é solução fraca de (B.12) se, e somente se,  $u$  é  $c$ -ortogonal a  $C_c^1(\Omega)$ .

O próximo Lema fornecerá uma condição necessária e suficiente para uma função  $u$  em  $H^1(\Omega)$  ser uma solução fraca de (B.12).

**Lema B.2.** *Um funcional  $u$  em  $H^1(\Omega)$  é uma solução fraca de (B.12) se, e somente se,  $u \in W$ , onde  $W = H_0^1(\Omega)^\perp = \{u \in H^1(\Omega) : \langle u, v \rangle_c = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega)\}$ .*

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Sejam  $u \in H^1(\Omega)$ , uma solução fraca de (B.12), e  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Como  $C_c^1(\Omega)$  é denso em  $H_0^1(\Omega)$  na norma  $\|\cdot\|_{H^1}$ , existe uma sequência  $(\varphi_k) \subset C_c^1(\Omega)$  tal que  $\varphi_k \rightarrow v$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ . Deste modo, em virtude das normas  $\|\cdot\|_{H^1}$  e  $\|\cdot\|_c$  serem equivalentes,  $\varphi_k \rightarrow v$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Ainda, como o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  é contínuo,  $\langle u, \varphi_k \rangle_c \rightarrow \langle u, v \rangle_c$  em  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ . Mas, como  $u$  é solução fraca de (B.12),  $\langle u, \varphi_k \rangle_c = 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Consequentemente,  $\langle u, v \rangle_c = 0$ , o que implica em  $u \in W$ , já que  $v \in H_0^1(\Omega)$  é arbitrário.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $u \in W$ . Então  $u \in H^1(\Omega)$  e  $\langle u, v \rangle_c = 0$ , para todo  $v$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Ainda, como  $C_c^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$  segue, em particular, que  $\langle u, \varphi \rangle_c = 0$ , para todo  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ . E isto mostra que  $u$  é solução fraca de (B.12). ■

**Proposição B.4.** *Seja  $u \in H^1(\Omega)$ . Então  $\mathcal{B}(u) = 0$  se, e somente se,  $u \in H_0^1(\Omega)$ .*

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos  $\mathcal{B}(u) = 0$ . Então  $\|u\|_{2,\partial} = 0$  e assim  $u = 0$  q.t.p. em  $L^2(\partial\Omega)$ , ou seja,  $\Gamma u = 0$ . Logo pelo, Corolário A.11, para  $s = 1, p = 2, l = 0$  concluímos que  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Seguindo o mesmo raciocínio do Lema B.2 conseguimos uma sequência  $(\varphi_k) \subset C_c^1(\Omega)$  tal que  $\varphi_k \rightarrow u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Pela continuidade de  $\mathcal{B}$  e por  $\mathcal{B}(\varphi_k) = 0$ , vemos que  $\mathcal{B}(u) = 0$ . ■

**Proposição B.5.** *O espaço  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$  admite a seguinte decomposição*

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus_c W. \quad (\text{B.13})$$

**Demonstração.** Como  $H^1(\Omega)$  é um espaço de Hilbert, para verificarmos a decomposição (B.5), mostraremos que  $H_0^1(\Omega)$  é fechado em  $H^1(\Omega)$ , com a norma  $\|\cdot\|_c$ , e utilizaremos o Teorema A.12 para concluirmos a validade de (B.5).

Sejam  $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$  e  $u \in H^1(\Omega)$ , tais que  $u_k \rightarrow u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Como as normas  $\|\cdot\|_c$  e  $\|\cdot\|_{H^1}$  são equivalentes  $u_k \rightarrow u$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ . Por outro lado,  $H_0^1(\Omega)$  é um subespaço fechado de  $H^1(\Omega)$ , com a norma  $\|\cdot\|_{H^1}$ . Logo,  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Portanto,  $H_0^1(\Omega)$  é fechado em  $H^1(\Omega)$ , com a norma  $\|\cdot\|_c$  e vale o resultado. ■

Seja  $Aut(\mu_k)$  o autoespaço associado ao autovalor de Steklov  $\mu_k$ . Pelo Teorema B.6, item (d),  $\dim Aut(\mu_k) < +\infty$ . Consideremos  $M_k = \{v_1^k, v_2^k, \dots, v_{m_k}^k\}$  uma base  $c$ -ortonormal de  $Aut(\mu_k)$ .

**Proposição B.6.** *O conjunto  $S = \{v_1^1, \dots, v_{m_1}^1, v_1^2, \dots, v_{m_2}^2, \dots, v_1^k, \dots, v_{m_k}^k, \dots\}$  é  $c$ -ortonormal em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ .*

**Demonstração.** Se  $u \in M_l$  e  $v \in M_k$ , com  $l \neq k$ , então, por  $M_k = \{v_1^k, v_2^k, \dots, v_{m_k}^k\}$  ser um subconjunto  $c$ -ortogonal de autofunções associados ao autovalor de Steklov  $\mu_k$ , e pelo Teorema B.6-(c),  $\langle u, v \rangle_c = \mu_k \langle u, v \rangle_{2,\partial} = 0$ . Conseqüentemente,

$$S = \{v_1^1, \dots, v_{m_1}^1, v_1^2, \dots, v_{m_2}^2, \dots, v_1^k, \dots, v_{m_k}^k, \dots\}$$

é um conjunto  $c$ -ortogonal em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Ainda, como  $\|v_s^t\|_c = 1$ , para quaisquer  $s, t \in \mathbb{N}$ ,  $S$  é  $c$ -ortonormal em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . ■

**Proposição B.7.** *Se, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , denotarmos*

$$w_k = \begin{cases} v_k^1 & \text{se } 1 \leq k \leq m_1, \\ v_{k-m_j}^{j+1} & \text{se } m_j < k \leq m_j + m_{j+1}, \end{cases}$$

então  $\tilde{O} = (w_k)$  satisfaz as seguintes propriedades:

(a)  $\tilde{O}$  é uma sequência  $c$ -ortonormal;

(b)  $w_k \in H_0^1(\Omega)^\perp$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;

(c) Se  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)^\perp$  satisfaz  $\tilde{u} \perp w_k$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então  $\tilde{u} = 0$ .

**Demonstração.** (a) Temos que  $w_k \in S$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $S$  é um subconjunto  $c$ -ortonormal. Logo,  $\tilde{O}$  é uma sequência  $c$ -ortonormal.

(b) Pelo Lema B.2, basta mostrar que  $w_k$  é solução fraca de (B.12), ou seja,  $\langle w_k, \varphi \rangle_c = 0$ , para todo  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ . Digamos que  $w_k$  seja autofunção associada ao autovalor de Steklov  $\mu_l$ . Assim,  $\langle w_k, \varphi \rangle_c = \mu_l \langle w_k, \varphi \rangle_{2,\partial}$ , para todo  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ . Mas,  $\langle w_k, \varphi \rangle_{2,\partial} = 0$ , pois  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ . Por conseguinte,  $\langle w_k, \varphi \rangle_c = 0$ , o que significa que  $w_k \in H_0^1(\Omega)^\perp$ .

(c) Caso o item (c) não ocorra, existe  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)^\perp \setminus \{0\}$ , tal que  $\tilde{u} \perp w_k$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Ao considerarmos  $\tilde{v} = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_c}$ ,  $\|\tilde{v}\|_c = 1$  e  $\langle \tilde{v}, w_k \rangle_c = 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Logo,  $\tilde{v} \in K_J$ , para todo  $J \in \mathbb{N}$ . Agora, pela definição de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}(\tilde{v}) \geq 0$ . Se  $\mathcal{B}(\tilde{v}) = 0$ , então, pela Proposição B.5,  $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ . Como  $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)^\perp$ ,  $\tilde{v} = 0$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Mas isto é um absurdo, uma vez que  $\|\tilde{v}\|_c = 1$ . Portanto,  $\mathcal{B}(\tilde{v}) > 0$ .

Finalmente pelo Teorema B.6-(c),  $\mu_J \rightarrow +\infty$  quando  $J \rightarrow +\infty$ . Por isto e por  $\mu_J = \beta_J^{-1}$ , segue que  $\beta_J \rightarrow 0$ , quando  $J \rightarrow +\infty$ . Deste modo, existe  $J \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{B}(\tilde{v}) > \beta_{J+1}$ , mas isto é um absurdo, uma vez que  $\beta_{J+1} = \sup_{u \in K_J} \mathcal{B}(u)$  e  $\tilde{v} \in K_J$ . Portanto, vale o item (c). ■

**Observação B.3.** Pela Proposição B.7, podemos concluir que  $\tilde{O}$  é uma sequência  $c$ -ortonormal total em  $H_0^1(\Omega)^\perp$ .

**Observação B.4.** De acordo com a observação anterior, a sequência  $\tilde{O}$  define uma base de Hilbert para o espaço  $H_0^1(\Omega)^\perp$  em  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_c)$ . Com isto, cada  $u \in H_0^1(\Omega)^\perp$  é escrito de maneira única (a menos de ordem) como  $u = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle u, w_k \rangle_c w_k$ , com

$$\|u\|_c^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle u, w_k \rangle_c|^2.$$

Agora, da continuidade e linearidade do operador traço  $\Gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  e do fato de  $w_k$  ser autofunção associada ao autovalor  $\sigma_j$ , onde  $\sigma_j = \mu_k$ , se  $\theta(k-1) < j \leq \theta(k)$ ,

com  $\theta(k) = \sum_{l=1}^k m_l$ , temos  $\Gamma(u) = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle u, w_k \rangle_c \Gamma(w_k)$  e

$$\|\Gamma(u)\|_{2,\partial}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle u, w_k \rangle_c|^2 \sigma_k^{-1} \langle w_k, w_k \rangle_c = \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k^{-1} |\langle u, w_k \rangle_c|^2.$$

**Proposição B.8.** *Se, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,*

$$\tilde{V}_j = \left[ \bigcup_{k=1}^{\theta(j)} M_k \right], \quad \tilde{Y}_j = \left[ \bigcup_{k=\theta(j)+1}^{+\infty} M_k \right] \quad e \quad \tilde{X}_j = \tilde{Y}_j \oplus_c H_0^1(\Omega)$$

então  $H^1(\Omega) = \tilde{V}_j \oplus_c \tilde{X}_j$ .

**Demonstração.** Seja  $u \in H^1(\Omega)$ , como  $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus_c H_0^1(\Omega)^\perp$ , existem únicos  $u_0$  em  $H_0^1(\Omega)$  e  $\bar{u}$  em  $H_0^1(\Omega)^\perp$ , tais que  $u = u_0 + \bar{u}$ . Mas,  $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)^\perp = \overline{[\tilde{O}]}$ . Logo, existe uma sequência  $(c_j) \subset \mathbb{R}$ , tal que

$$\bar{u} = c_1 w_1 + \dots + c_{\theta(j)} w_{\theta(j)} + \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n,$$

onde

$$S_n = \sum_{k=\theta(j)+1}^n c_k w_k \quad e \quad c_k = \langle \bar{u}, w_k \rangle_c.$$

Assim,  $u = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_{\theta(j)} w_{\theta(j)} + \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n + u_0$ . Com isto,  $v = c_1 w_1 + \dots + c_{\theta(j)} w_{\theta(j)} \in \tilde{V}_j$ ,  $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \in \tilde{Y}_j$ ,  $x = y + u_0 \in \tilde{X}_j$  e  $v \in \tilde{V}_j$ , ou seja,  $u = v + x \in \tilde{V}_j + \tilde{X}_j$ . Finalmente,

dado  $x \in \tilde{V}_j \cap \tilde{X}_j$ ,  $x \in \tilde{V}_j$  e  $x \in \tilde{X}_j$ . Mas,  $x \in \tilde{X}_j = \tilde{Y}_j \oplus_c H_0^1(\Omega)$  significa que  $x = x_1 + x_2$ ,

onde  $x_1 \in \tilde{Y}_j$  e  $x_2 \in H_0^1(\Omega)$  são únicos. Por outro lado,  $x \in \tilde{V}_j$ , significa que  $x = \sum_{k=1}^{\theta(j)} c_k w_k$ .

Agora, pela Observação B.4,  $x_2 \in H_0^1(\Omega)^\perp$ . Por isto e por  $x_2 \in H_0^1(\Omega)$ , segue que  $x_2 = 0$ .

Deste modo,  $x = \sum_{k=1}^{\theta_j} c_k w_k = \sum_{k=\theta(j)+1}^{+\infty} c_k w_k$ . Mas,  $\tilde{O}$  é uma base de Hilbert de  $H_0^1(\Omega)^\perp$ .

Logo  $c_k = 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , isto é,  $x = 0$ . E assim  $H^1(\Omega) = \tilde{V}_j \oplus_c \tilde{X}_j$ . ■

**Observação B.5.** *Pela definição de  $\tilde{V}_j$ ,  $\dim \tilde{V}_j = m_1 + \dots + m_j$ . Assim, se  $u \in \tilde{V}_j$ , então*

$u = \sum_{k=1}^{\theta(j)} \langle u, w_k \rangle_c w_k$ . Com o auxílio da Observação B.7 e do item (a), do Teorema B.6,

obtemos  $\|u\|_{2,\partial}^2 \geq \mu_j^{-1} \|u\|_c^2$ , para todo  $u \in \tilde{V}_j$ . Com efeito,

$$\|u\|_{2,\partial}^2 = \|\Gamma(u)\|_{2,\partial}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k^{-1} |\langle u, w_k \rangle_c|^2 \geq \mu_j^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle u, w_k \rangle_c|^2 = \mu_j^{-1} \|u\|_c^2.$$

**Observação B.6.** Se  $\bar{u} \in \tilde{Y}_j \subset W$ , então  $\bar{u} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{k=\theta(j)+1}^n c_k w_k \right]$  Com isto,

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|_{2,\partial}^2 &= \sum_{l,k=\theta(j)+1}^{+\infty} c_k c_l \langle w_k, w_l \rangle_{2,\partial} \\ &= \sum_{l,k=\theta(j)+1}^{+\infty} c_k c_l \sigma_k^{-1} \langle w_k, w_l \rangle_c \\ &= \sum_{l=\theta(j)+1}^{+\infty} c_l^2 \sigma_l^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{l=\theta(j)+1}^n \sigma_l^{-1} c_l^2 \right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|_c^2 &= \sum_{l,k=\theta(j)+1}^{+\infty} c_k c_l \langle w_k, w_l \rangle_c \\ &= \sum_{k=\theta(j)+1}^{+\infty} c_k^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{k=\theta(j)+1}^n c_k^2 \right]. \end{aligned}$$

Por isto e pelo Teorema B.6,

$$\|\bar{u}\|_{2,\partial}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{k=\theta(j)+1}^n \sigma_k^{-1} c_k^2 \right] \leq \mu_{j+1}^{-1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{k=\theta(j)+1}^n c_k^2 \right] = \mu_{j+1}^{-1} \|\bar{u}\|_c^2.$$



# Apêndice C

## HOMOLOGIA SINGULAR E GRUPOS CRÍTICOS

Neste Apêndice, vamos definir os grupos de homologia, enunciando algumas propriedades deles, que são utilizadas neste trabalho. Além disso, na segunda seção do Apêndice, serão estudados os grupos críticos, que nos permitem obter informações sobre um funcional, a partir dos seus pontos críticos.

### C.1 TEORIA DE HOMOLOGIA SINGULAR

A teoria de homologia consiste em associar a cada espaço topológico uma série de grupos abelianos, os quais chamamos grupos de homologia deste espaço, de maneira que espaços homeomorfos possuem grupos de homologia isomorfos. No que segue, apresentaremos algumas noções e resultados sobre topologia algébrica. Vale ressaltar que os resultados desta seção são encontrados em Eilenberg e Steenrod (1952), Hu (1966) e Wallace (1970).

**Definição C.1.** *Sejam  $(G_i)_i$  uma sequência de grupos abelianos e  $(\varphi_i)_i$  uma sequência de homomorfismos de grupos*

$$\cdots \longrightarrow G_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i+1} \longrightarrow \cdots .$$

*A sequência acima é dita exata em  $G_i$ , se  $\text{Ker}(\varphi_i) = \text{Im}(\varphi_{i-1})$ . A sequência é exata se é exata em todo  $G_i$ .*

Um par de espaços  $(X, A)$  é um espaço topológico  $X$ , junto a um subconjunto  $A \subset X$ . Escreveremos  $(X, A) \subset (Y, B)$ , se  $X \subset Y$  e  $A \subset B$ .

**Definição C.2.** Uma aplicação de pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ , tal que  $f(A) \subset B$ . Duas aplicações de pares  $f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são homotópicas se existir uma aplicação contínua  $h : [0, 1] \times (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , de modo que

$$h(0, x) = f_0(x), \quad h(1, x) = f_1(x), \quad \forall x \in X \text{ e } h(t, a) \in B, \quad \forall a \in A.$$

A aplicação  $h$  é dita uma homotopia entre  $f_0$  e  $f_1$ .

Seja  $A \subset X$ , uma aplicação contínua  $r : X \rightarrow A$  é uma retração, se  $r(x) = x$  para todo  $x \in A$ . Quando essa aplicação existe, diz-se que  $A$  é um retrato de  $X$ . Agora, se além disso, existir uma homotopia  $h : [0, 1] \times X \rightarrow X$ , tal que  $h(0, x) = x$  e  $h(1, x) = r(x)$ , para todo  $x \in X$ , dizemos que  $A$  é um retrato de deformação de  $X$ . Finalmente, temos que  $A$  é um retrato de deformação forte de  $X$  se a homotopia  $h$  satisfaz  $h(t, x) = x$ , para todo  $x \in A$ .

**Exemplo C.1.** Sejam  $A \subset X$  um subconjunto convexo e  $f, g : A \rightarrow X$  aplicações contínuas. Então,  $f$  e  $g$  são homotópicas. Basta tomar a homotopia  $h : [0, 1] \times A \rightarrow X$ , definida por  $h(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ .

Faremos, agora, uma breve construção dos grupos de homologia. Esta construção se dará através de alguns axiomas, que nos permitirão obter propriedades que poderão ser utilizadas nos demais resultados.

(a) Para cada  $q \in \mathbb{Z}$  e cada terna  $(X, A, G)$ , onde  $(X, A)$  é um par de espaços topológicos e  $G$  é um grupo abeliano, é associado um grupo abeliano  $H_q(X, A, G)$ , ou, quando ficar claro o grupo  $G$  fixado,  $H_q(X, A)$ . Este grupo é chamado grupo de homologia do par topológico  $(X, A)$ . No caso de  $A = \emptyset$ , utilizamos a notação  $H_q(X, \emptyset) = H_q(X)$ .

(b) Para cada aplicação de pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , é associado um homomorfismo de grupos

$$f_* : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B).$$

O homomorfismo  $f_*$  é dito um homomorfismo induzido pela aplicação  $f$  sobre o grupo de homologia  $H_q(X, A)$ .

(c) Para cada  $q \in \mathbb{Z}$  e cada par  $(X, A)$ , é associado um homomorfismo de grupos

$$\partial : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A).$$

O homomorfismo  $\partial$  é chamado de operador bordo sobre o grupo de homologia  $H_q(X, A)$ .

Os seguintes axiomas são requeridos:

**Axioma C.1.** Se  $f = Id|_X$ , então  $f_* = Id|_{H_q(X, A)}$ .

**Axioma C.2.** Se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  são aplicações de pares, então  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

**Axioma C.3.** Se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma aplicação de pares, então  $\partial \circ f_* = (f|_A)_* \circ \partial$ .

**Axioma C.4.** Sejam  $i : A \rightarrow X$  e  $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  aplicações inclusões, então a sequência

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

é exata.

**Axioma C.5.** Se  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são aplicações de pares, homotópicas, então  $f_* = g_*$ .

**Axioma C.6. (Excisão)** Se  $U$  é um conjunto aberto de  $X$  com  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ , e se

$$i : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$$

denota a inclusão, então  $i_*$  é um isomorfismo de grupos.

**Axioma C.7.** Se  $X$  consiste de um único ponto  $p$ , então

$$H_q(\{p\}) = \begin{cases} G & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

No que segue, listaremos algumas propriedades derivadas dos axiomas acima. Sejam, para tanto,  $(X, A)$  e  $(X, B)$  pares topológicos. A notação  $H_q(X, A) \simeq H_q(X, B)$  será utilizada para indicar que os grupos em questão são isomorfos.

**Propriedade C.1.** Se  $(X, A) = \bigcup_{i=1}^j (X_i, A_i)$ , sendo  $\{X_i\}_i$  uma família de conjuntos fechados em  $X$ , dois a dois disjuntos, então

$$H_q(X, A) = \bigoplus_{i=1}^j H_q(X_i, A_i).$$

**Propriedade C.2.** Se  $B \subset A \subset X$  e  $q \in \mathbb{Z}$ , então

- (i) Caso  $A$  seja um retrato de  $X$ ,  $H_q(X) \simeq H_q(A) \oplus H_q(X, A)$ .
- (ii) Caso  $A$  seja um retrato de deformação forte de  $X$ , a injeção canônica induz um isomorfismo entre  $H_q(A, B)$  e  $H_q(X, B)$ . Em particular,  $H_q(X, A) = 0$ .
- (iii) Caso  $B$  seja um retrato de deformação forte de  $A$ , a injeção canônica induz um isomorfismo entre  $H_q(X, B)$  e  $H_q(X, A)$ .

**Propriedade C.3.** Sejam  $B^n$  a bola unitária e  $S^{n-1}$  a esfera unitária de um espaço vetorial normado  $E$ , com  $n \geq 2$ . Então

$$H_q(B^n, S^{n-1}, G) = H_q(B^n, S^{n-1}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{se } q \neq n \\ G & \text{se } q = n. \end{cases}$$

Na próxima seção, onde são abordados grupos críticos, será considerada a teoria de Homologia Singular, que é construída por meio de aplicações entre subconjuntos de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Tal teoria, possibilita a demonstração dos resultados que aqui enunciamos como axiomas.

## C.2 GRUPOS CRÍTICOS

Consideremos um aberto  $X$  de um espaço de Banach  $E$  e uma aplicação  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Na teoria de grupos críticos, temos informações a respeito do comportamento local de  $f$ , próximo de um ponto crítico isolado  $u$ , descritas a partir da sequência dos grupos críticos dessa função.

No que segue, vamos utilizar a teoria de homologia singular sobre o corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais. As demonstrações iniciais serão omitidas, e podem ser encontradas em Chang (1993) e Ramos (1993).

**Definição C.3.** *Se  $u$  é um ponto crítico isolado de  $f$  e  $c = f(u)$ , define-se os grupos críticos de  $u$  como sendo*

$$C_n(f, u) = H_n(f^c, f^c \setminus \{u\}), \quad n \geq 0,$$

onde  $f^c = \{x \in X; f(x) \leq c\}$ .

Segue da propriedade de excisão (ver Axioma C.6), que, se  $V$  é uma vizinhança fechada de  $u$ , então

$$C_n(f, u) \simeq H_n(f^c \cap V, f^c \setminus \{u\} \cap V).$$

Para funções  $f$  satisfazendo a condição (PS), temos as seguintes caracterizações para os grupos críticos.

**Proposição C.1.** *Suponha que  $f$  satisfaz a condição (PS) numa vizinhança de um ponto crítico isolado  $u_0$ . Então, existem  $\varepsilon > 0$  e uma vizinhança fechada  $W$  de  $u_0$  tais que*

$$C_n(f, u) \simeq H_n(f^{c+\varepsilon} \cap W, f^{c-\varepsilon} \cap W).$$

**Demonstração.** Veja Chang (1993, p. 338).

Obtemos o resultado a seguir, ao generalizarmos a Proposição C.1 para um conjunto de pontos críticos  $K_c = \{u_1, u_2, \dots, u_j\}$ .

**Proposição C.2.** *Suponha que  $f$  satisfaça a condição (PS) e que  $c$  seja um valor crítico de  $f$ , com  $K_c = \{u_1, u_2, \dots, u_j\}$ . Então, para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno, temos*

$$H_n(f^{c+\varepsilon}, f^{c-\varepsilon}) \simeq H_n(f^c, f^c \setminus K_c) \simeq \bigoplus_{i=1}^j C_n(f, u_i).$$

**Demonstração.** Veja Chang (1993, p. 338).

Com estes resultados, temos ferramentas suficientes para enunciar e provar o próximo resultado, de grande importância para a dissertação, que caracteriza os grupos críticos do tipo máximo e mínimo de  $f$ , no caso em que o espaço de Banach  $E$  tem dimensão finita.

**Teorema C.1.** *Suponha que  $f$  satisfaça a condição (PS) nos subconjuntos limitados de  $X$  e seja  $u_0$  um ponto crítico isolado de  $f$ . Então:*

- (i)  $u_0$  é mínimo local de  $f$  se, e somente se,  $C_i(f, u_0) \simeq \delta_{i,0}\mathbb{R}$ , para todo  $i \geq 0$ ;
- (ii)  $u_0$  é máximo local de  $f$  se, e somente se,  $C_i(f, u_0) \simeq \delta_{i,n}\mathbb{R}$ , para todo  $i \geq 0$ .

**Demonstração.** (i) Seja  $c = f(u_0)$ . Se  $u_0$  é mínimo local de  $f$ , então existe uma vizinhança fechada  $V$  de  $u_0$ , tal que  $f(u) > f(u_0)$  sempre que  $u \in V \setminus \{u_0\}$ . Disto e do Axioma C.7, segue que

$$C_i(f, u_0) \simeq H_i(\{u_0\}, \emptyset) \simeq \delta_{i,0}\mathbb{R}, \text{ para } i = 0, 1, \dots$$

Reciprocamente, suponhamos, por contradição, que  $u_0$  não seja um mínimo local de  $f$ , e sejam  $W$  e  $\varepsilon > 0$  dados pela Proposição C.1. Fixemos uma bola  $B_p(u_0) \subset f^{c+\varepsilon} \cap W$  e um ponto  $v \in B_p(u_0)$ , tal que  $f(v) < c$ . Pela construção de  $W$ , todo ponto  $u \in f^{c+\varepsilon} \cap W$  pode ser ligado, por meio de uma homotopia, a um ponto de  $f^c \cap W$ , que é  $u_0$  ou está em  $f^c \setminus \{u_0\}$ . Como  $B_p(u_0)$  é conexo por caminhos, podemos concluir que todo ponto  $u \in f^{c+\varepsilon} \cap W$  pode ser ligado a um ponto de  $(f^c \cap W) \setminus \{u_0\}$ , por um caminho contido em  $f^{c+\varepsilon} \cap W$ . Logo,

$$C_0(f, u_0) \simeq H_0(f^{c+\varepsilon} \cap W, (f^c \cap W) \setminus \{u_0\}) = 0.$$

- (ii) A prova deste item é análoga a do item (i). ■