UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ÁLGEBRA DE HOPF TRANÇADA A PARTIR DE UM PAR COMBINADO DE GRUPOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Tiago Luiz Ferrazza

Santa Maria, RS, Brasil

2014

ÁLGEBRA DE HOPF TRANÇADA A PARTIR DE UM PAR COMBINADO DE GRUPOS

Tiago Luiz Ferrazza

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Daiana Flôres

Santa Maria, RS, Brasil

2014

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

ÁLGEBRA DE HOPF TRANÇADA A PARTIR DE UM PAR COMBINADO DE GRUPOS

elaborada por
Tiago Luiz Ferrazza

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Daiana Flôres, Dr^{a}. (UFSM)
(Orientadora)

Saradia Della Flora, Dr^{a}. (UFSM)

Alveri Sant'Ana, Dr.(UFRGS)

Santa Maria, 15 de agosto de 2014.

À toda minha família

Agradecimentos

Quero agradecer à minha família, que me incentivou a ir atrás dos meus sonhos. Aos meu amigo, os antigos e os novos, que saibam que carrego um pouco de cada um comigo para onde quer que eu vá. Ao meu namorado Leonardo, que sempre compreendeu a necessidade de eu estar longe e que sempre me deu apoio quando precisei.

Quero agradecer também ao curso de Pós-Graduação em Matemática da UFSM pela acolhida e aos professores que contribuiram na minha formação acadêmica e, de uma forma ou de outra, pessoal. À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo incentivo financeiro.

Resumo

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

ÁLGEBRA DE HOPF TRANÇADA A PARTIR DE UM PAR COMBINADO DE GRUPOS

AUTOR: TIAGO LUIZ FERRAZZA
ORIENTADORA: DAIANA FLÔRES
Local e Data da Defesa: Santa Maria, 15 de agosto de 2014.

Sejam $(F, G, \triangleright, \triangleleft)$ um par combinado de grupos finitos e $\sigma : F \times F \longrightarrow (\Bbbk^{\times})^G$ e $\tau : G \times G \longrightarrow (\Bbbk^{\times})^F$ dois 2-cociclos. Nem sempre o produto bicruzado $R = \Bbbk^G *_{\sigma}^{\tau} \Bbbk F$ é uma biálgebra, tampouco uma álgebra de Hopf trançada. O objetivo deste trabalho é estudar condições necessárias e suficientes sobre σ, τ e uma dada trança c tal que R seja uma álgebra de Hopf trançada na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre alguma álgebra de Hopf H, além de apresentar a interpretação cohomológica desse resultado.

Palavras-chave: álgebra de Hopf, par combinado, álgebra de Hopf trançada, produto bicruzado, cohomologia, módulo de Yetter-Drinfeld.

Abstract

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Universidade Federal de Santa Maria

BRAIDED HOPF ALGEBRA ARISING FROM A MATCHED PAIR OF GROUPS

AUTHOR: TIAGO LUIZ FERRAZZA
ADVISOR: DAIANA FLÔRES
Location and Date of Defense: Santa Maria, August 15, 2014.

Let $(F, G, \triangleright, \triangleleft)$ be a matched pair of finite groups and $\sigma : F \times F \longrightarrow (\Bbbk^{\times})^{G}$ and $\tau : G \times G \longrightarrow (\Bbbk^{\times})^{F}$ two 2-cocycles. In general, the bicrossed product $R = \Bbbk^{G} *_{\sigma}^{\tau} \Bbbk F$ is not a bialgebra, neither a braided Hopf algebra. The purpose of this work is to study necessary and sufficient conditions over σ, τ and a braid c such that R is a braided Hopf algebra in the category of Yetter-Drinfeld modules over some Hopf algebra H, in addition to present the cohomological interpretation of this result.

Keywords: Hopf algebra, matched pair, braided Hopf algebra, bicrossed product, cohomology, Yetter-Drinfeld module.

Sumário

Introdução

Uma álgebra de Hopf é uma álgebra sobre a qual existe também uma estrutura de coálgebra, tal que essas duas estruturas satisfazem uma certa condição de compatibilidade, além disso esta possui um endomorfismo satisfazendo condições que podem ser expressas usando as estruturas de álgebra e de coálgebra. Os primeiros exemplos de álgebras de Hopf foram observados em topologia algébrica por H. Hopf em 1941. Sejam $\Bbbk$ um corpo, F e G grupos finitos. Considere $(F, G, \triangleright, \triangleleft)$ um par combinado de grupos, isto é, $\triangleright : G \times F \longrightarrow F$ é uma ação à direita de G em F, $\triangleleft : G \times F \longrightarrow G$ uma ação à esquerda de F em G satisfazendo

$$
\begin{aligned}
g \triangleright xy &= (g \triangleright x)((g \triangleleft x) \triangleright y) \\
gh \triangleleft x &= (g \triangleleft (h \triangleright x))(h \triangleleft x).
\end{aligned}
$$

Além disso, considere também $\sigma : F \times F \longrightarrow (\Bbbk^G)^\times$ e $\tau : G \times G \longrightarrow (\Bbbk^F)^\times$ 2-cociclos, com esses ingredientes podemos construir o produto bicruzado $R = \Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ o qual não é, em geral, uma álgebra de Hopf. Em [6] mostra-se que R é uma álgebra de Hopf se e somente se σ e τ satisfazem determinadas condições, as quais equivalem a dizer que o par (τ, σ) é um 1-cociclo num determinado complexo. Esta construção pode ser vista também em [1] e [4].

Uma característica importante das álgebras de Hopf assim construídas é que se a característica de $\Bbbk$ não divide a ordem de F e nem a ordem de G estas são semissimples e cosemissimples.

Em [1], N. Andruskiewitsch e S. Natale observam que se (τ, σ) não é um 1-cociclo, R pode admitir uma estrutura de álgebra de Hopf trançada com uma trança unicamente determinada. Com isso os autores podem obter novos exemplos de álgebra de Hopf via bosonização ou biproduto de Radford.

Essa dissertação foi organizada da seguinte maneira, no primeiro capítulo são apresentados conceitos básicos referentes a par combinado de grupos e álgebras de Hopf, além de verificar as condições necessárias e suficientes para que R seja uma álgebra de Hopf. Para finalizar este capítulo apresenta-se uma interpretação cohomológica desse resultado, ou seja, que R é uma álgebra de Hopf se e somente se o par (τ, σ) é um 1-cociclo num determinado complexo.

No segundo capítulo são apresentadas as definições categórica e não categórica de álgebra de Hopf trançada com o objetivo de mostrar que mesmo que (τ, σ) não seja um 1-cociclo, R pode admitir uma estrutura de álgebra de Hopf trançada, possibilitando a construção de uma álgebra de Hopf usual através da bosonização.

Ainda no segundo capítulo é considerado o caso particular em que as ações $\triangleleft$ e $\triangleright$ consideradas são as triviais, apresentando, então, uma descrição mais precisa das condições que o par (τ, σ) deve satisfazer para que R seja uma álgebra de Hopf trançada. Finaliza-se esse capítulo apresentando os conceitos necessários para provar o isomorfismo $Opext(\Bbbk F, \Bbbk^G) \cong H^1(Tot(C^{\cdot\cdot}))$.

Por fim, no terceiro capítulo, apresenta-se o conceito de realização diagonal sobre grupos finitos, que é um caso particular de realizações, seguido de um exemplo.

Capítulo 1

Álgebra de Hopf associada a um par combinado de grupos

O objetivo deste capítulo é mostrar que todo par combinado de grupos dá origem a uma álgebra de Hopf (trançada ou não). Inicialmente, serão apresentados as definições e resultados relevantes na construção desta álgebra de Hopf.

1.1 Par combinado de grupos

Além da definição de par combinado de grupos, nesta seção será mostrado que ter um par combinado de grupos é equivalente a existência de uma fatoração exata de um grupo. Para mais informações sobre par combinado de grupos, ver [5].

Definição 1.1.1. *Uma ação à esquerda de um grupo G sobre um conjunto X é uma aplicação $\cdot : G \times X \longrightarrow X$ que associa a cada par $(g, x) \in G \times X$ o elemento $g \cdot x$, satisfazendo:*

i. $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$

ii. $1_G \cdot x = x$,

para todo $g, h \in G, x \in X$.

De forma análoga define-se ação à direita.

Definição 1.1.2. *Sejam F e G grupos finitos, juntamente com $\triangleright : G \times F \longrightarrow F$ uma ação à esquerda de G em F e $\triangleleft : G \times F \longrightarrow G$ uma ação à direita de F em*

G. Diz-se que $(G, F, \triangleleft, \triangleright)$ é um par combinado de grupos se essas ações satisfazem as seguintes igualdades, para todo $g, h \in G$ e $x, y \in F$

i. $\quad g \triangleright xy = (g \triangleright x)((g \triangleleft x) \triangleright y)$,

ii. $\quad gh \triangleleft x = (g \triangleleft (h \triangleright x))(h \triangleleft x)$.

O par combinado de grupos $(G, F, \triangleright, \triangleleft)$ será denotado simplesmente por (G, F).

Exemplo 1.1.3. *Quaisquer dois grupos finitos G, F formam um par combinado de grupos com ações triviais.*

Exemplo 1.1.4. *Sejam G e F os seguintes subgrupos de $M_4(\mathbb{R})$ (o grupo multiplicativo das matrizes 4×4 com entradas em $\mathbb{R}$), $G = \{g(a, b) \in M_4(\mathbb{R}); a, b \in \mathbb{R}, b > 0\}$ e $F = \{f(x, y) \in M_4(\mathbb{R}); x, y \in \mathbb{R}, x > 0\}$, onde $g(a, b) = (g_{ij})$ tal que $g_{21} = a$, $g_{33} = b$, $g_{ii} = 1$, para $i = 1, 2, 4$, e 0 nas outras posições, e $f(x, y) = (f_{ij})$ tal que $f_{11} = x$, $f_{34} = y$, $f_{ii} = 1$, para $i = 2, 3, 4$, e 0 nas outras posições.*

Note que

$$g(a_1, b_1) \cdot g(a_2, b_2) = g(a_1 + a_2, b_1 \cdot b_2) \quad e \quad f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) = f(x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2),$$

de onde $g(a, b)^{-1} = g(-a, b^{-1})$, $f(x, y)^{-1} = f(x^{-1}, -y)$ e $g(0, 1) = I_4 = f(1, 0)$, o que garante que G e F são grupos com a multiplicação usual de matrizes. Mais ainda, (F, G) forma um par combinado de grupos com as ações

$$f(x, y) \triangleright g(a, b) = g(ax, b) \quad e \quad f(x, y) \triangleleft g(a, b) = f(x, \tfrac{y}{b}).$$

Observação 1.1.5. *Da Definição 1.1.2, segue que:*

i. $\quad g \triangleright 1 = 1$, *para todo* $g \in G$,

ii. $\quad 1 \triangleleft x = 1$, *para todo* $x \in F$.

Observe que 1 é usado para representar o elemento neutro tanto de G quanto de F.

De fato, $g \triangleright 1 = g \triangleright 1.1 = (g \triangleright 1)((g \triangleleft 1) \triangleright 1) = (g \triangleright 1)(g \triangleright 1)$. Como $g \triangleright 1 \in F$ e F é grupo, então $g \triangleright 1 = 1$. De forma semelhante, $1 \triangleleft x = 1$.

Lema 1.1.6. *Seja (G, F) um par combinado de grupos. Então, para quaisquer $g \in G$ e $x \in F$, tem-se que:*

i. $(g \triangleleft x)^{-1} = g^{-1} \triangleleft (g \triangleright x)$,

ii. $(g \triangleright x)^{-1} = (g \triangleleft x) \triangleright x^{-1}$.

Demonstração: Pelo item (ii) da definição de par combinado de grupos e pela observação anterior, segue que

$$(g^{-1} \triangleleft (g \triangleright x))(g \triangleleft x) = g^{-1}g \triangleleft x = 1 \triangleleft x = 1.$$

Como G é um grupo, então $g^{-1} \triangleleft (g \triangleright x) = (g \triangleleft x)^{-1}$. Analogamente se mostra $(ii.)$.

□

A próxima proposição mostra que se (G, F) é um par combinado de grupos, então pode-se definir uma estrutura de grupo para $F \times G$.

Proposição 1.1.7. *Seja (G, F) um par combinado de grupos. Então o produto cartesiano $F \times G$ é um grupo com a operação*

$$(x, g)(y, h) = (x(g \triangleright y), (g \triangleleft y)h),$$

para todo $x, y \in F$ e $g, h \in G$. Esse grupo será denotado por $F \bowtie G$.

Demonstração: Para mostrar que vale a associatividade, tomando $x, y, z \in F$ e $g, h, l \in G$, por um lado tem-se

$$\begin{aligned}
[(x,g)(y,h)](z,l) &= (x(g \triangleright y), (g \triangleleft y)h)(z,l) \\
&= (x(g \triangleright y)((g \triangleleft y)h \triangleright z), ((g \triangleleft y)h \triangleleft z)l) \\
&= (x(g \triangleright y)((g \triangleleft y) \triangleright (h \triangleright z)), ((g \triangleleft y) \triangleleft (h \triangleright z))(h \triangleright z)l).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(x,g)[(y,h)(z,l)] &= (x,g)(y(h \triangleright z), (h \triangleleft z)l) \\
&= (x(g \triangleright y(h \triangleright z)), (g \triangleleft y(h \triangleright z))(h \triangleleft z)l) \\
&= (x(g \triangleright y)((g \triangleleft y) \triangleright (h \triangleright z)), ((g \triangleleft y) \triangleleft (h \triangleright z))(h \triangleleft z)l).
\end{aligned}$$

Portanto $[(x, g)(y, h)](z, l) = (x, g)[(y, h)(z, l)]$.

Observe também que $(1,1)(x,g) = (1(1 \triangleright x), (1 \triangleleft x)g) = (x,g) = (x(g \triangleright 1), (g \triangleleft 1)1) = (x,g)(1,1)$, ou seja, $(1,1)$ é a unidade de $F \bowtie G$. Basta agora verificar a existência do elemento inverso. Considere $(g^{-1} \triangleright x^{-1}, g^{-1} \triangleleft x^{-1}) \in F \times G$. Pelo Lema 1.1.6, tem-se que

$$\begin{aligned} (x,g)(g^{-1} \triangleright x^{-1}, g^{-1} \triangleleft x^{-1}) &= (x(g \triangleright (g^{-1} \triangleright x^{-1})), (g \triangleleft (g^{-1} \triangleright x^{-1})(g^{-1} \triangleleft x^{-1})) \\ &= (x(1 \triangleright x^{-1}), (g^{-1} \triangleleft x^{-1})^{-1}(g^{-1} \triangleleft x^{-1})) = (1,1). \end{aligned}$$

De forma análoga, mostra-se que $(g^{-1} \triangleright x^{-1}, g^{-1} \triangleleft x^{-1})(x,g) = (1,1)$. Consequentemente $F \bowtie G$ é um grupo.

□

Observação 1.1.8. *Definindo $\varphi : G \longrightarrow F \bowtie G$ e $\psi : F \longrightarrow F \bowtie G$ as aplicações dadas, respectivamente, por $\varphi(g) = (1,g)$ e $\psi(x) = (x,1)$, segue que ambas são homomorfismos injetores de grupos. Dessa forma, é possível ver F e G como subgrupos de $F \bowtie G$.*

Definição 1.1.9. *Uma fatoração exata de um grupo Σ é um par de subgrupos finitos G e F tais que a operação multiplicação induz uma bijeção $m : F \times G \longrightarrow \Sigma$. Dessa forma, denota-se $\Sigma = FG$, ou seja, cada elemento de Σ é escrito de forma única como o produto de um elemento de F por um de G.*

A proposição a seguir relacionará par combinado de grupos e fatoração exata de um grupo, dizendo que um par combinado de grupos pode ser visto como uma fatoração exata de um grupo, e vice-versa.

Proposição 1.1.10. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i. *FG é a fatoração de um grupo,*

ii. *(G,F) é um par combinado de grupos.*

Demonstração: (*i.* $\Rightarrow$ *ii.*) Sendo $\Sigma = FG$ a fatoração exata de um grupo, para cada par $(g,x) \in G \times F$ existem, e são únicos, elementos $g \triangleright x \in F$ e $g \triangleleft x \in G$ tais que $gx = (g \triangleright x)(g \triangleleft x)$. Agora, resta mostrar que $\triangleleft$ e $\triangleright$ descritos dessa forma são ações e satisfazem as condições de par combinado de grupos.

De fato, sejam $g, h \in G$ e $x \in F$. Como F e G são subrgrupos de Σ, então $(gh)x = g(hx)$. Como consequência disso,

$$\begin{aligned}(gh \triangleright x)(gh \triangleleft x) &= g(h \triangleright x)(h \triangleleft x) \\ &= (g \triangleright (h \triangleright x))(g \triangleleft (h \triangleright x))(h \triangleleft x).\end{aligned}$$

Pela unicidade, segue que

$$gh \triangleright x = g \triangleright (h \triangleright x) \qquad e \qquad gh \triangleleft x = (g \triangleleft (h \triangleright x))(h \triangleleft x).$$

Analogamente, como $g(xy) = (gx)y$ em Σ, para quaisquer $g \in G$ e $x, y \in F$, tem-se

$$\begin{aligned}(g \triangleright xy)(g \triangleleft xy) &= (g \triangleright x)(g \triangleleft x)y \\ &= (g \triangleright x)((g \triangleleft x) \triangleright y)((g \triangleleft x) \triangleleft y),\end{aligned}$$

de onde

$$g \triangleright xy = (g \triangleright x)((g \triangleleft x) \triangleright y) \qquad e \qquad g \triangleleft xy = (g \triangleleft x) \triangleleft y.$$

Além disso, como $1g = g = g1 = (g \triangleright 1)(g \triangleleft 1)$, segue que $1 = g \triangleright 1$ e $g = g \triangleleft 1$. De forma semelhante, de $x1 = x = 1x = (1 \triangleright x)(1 \triangleleft x)$ tem-se $x = 1 \triangleright x$ e $1 = 1 \triangleleft x$.

Portanto (G, F) é um par combinado de grupos com as ações $\triangleleft$ e $\triangleright$.

$(i. \Leftarrow ii.)$ Como $(F \bowtie 1)(1 \bowtie G) \subset F \bowtie G$, para verificar a igualdade resta mostrar que $F \bowtie G \subset (F \bowtie 1)(1 \bowtie G)$. De fato, para qualquer $(x, g) \in F \bowtie G$, tem-se

$$\begin{aligned}(x, g) &= (x(1 \triangleright 1), (1 \triangleleft 1)g) \\ &= (x, 1)(1, g) \in (F \bowtie 1)(1 \bowtie G).\end{aligned}$$

Suponha agora que existam $(x', 1) \in F \bowtie 1$ e $(1, g') \in 1 \bowtie G$ tais que $(x', 1)(1, g') = (x, g)$. Mas então

$$(x, g) = (x', 1)(1, g') = (x', g').$$

De onde segue que $x = x'$ e $g = g'$. Portanto $(F \bowtie 1)(1 \bowtie G)$ é uma fatoração exata de $F \bowtie G$.

□

1.2 Ágebra de Hopf

Afim de compreender o que é uma álgebra de Hopf, serão apresentadas algumas definições e proposições, além de exemplos para o bom entendimento destes novos conceitos. Para maiores detalhes sobre álgebras de Hopf, ver [3] e [7].

Em todo o trabalho, $\mathbb{k}$ é considerado um corpo e $\otimes = \otimes_{\mathbb{k}}$, caso não seja especificado o contrário.

Definição 1.2.1. *Uma* $\mathbb{k}$*-álgebra* A *é uma tripla* (A, m, u) *onde* A *é um* $\mathbb{k}$*-espaço vetorial,* $m : A\otimes A \longrightarrow A$ *e* $u : \mathbb{k} \longrightarrow A$ *são aplicações* $\mathbb{k}$*-lineares tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes m"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\ A\otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{k}\otimes A \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] & A\otimes \mathbb{k} \arrow[l, "id\otimes u"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ & A & \end{tikzcd}.$$

Onde as aplicações φ *e* ψ *são os isomorfismos canônicos, ou seja,* $\varphi : \mathbb{k}\otimes A \longrightarrow A$ *é dado por* $\varphi(\lambda\otimes a) = \lambda a$ *e* $\psi : A\otimes \mathbb{k} \longrightarrow A$ *é dado por* $\psi(a\otimes\lambda) = \lambda a$*. As aplicações* m*,* u *são chamadas multiplicação e unidade, respectivamente. A comutatividade do primeiro diagrama é denominada associatividade.*

Uma $\mathbb{k}$-álgebra A é dita comutativa se $m_A = m_A \circ \tau$, onde $\tau : A\otimes A \longrightarrow A\otimes A$ é a aplicação dada por $\tau(a\otimes b) = b\otimes a$ e denominada $flip$.

Seguem alguns exemplos de álgebras.

Exemplo 1.2.2. *O conjunto* $M_n(\mathbb{k})$ *das matrizes de ordem* $n \times n$ *com entradas em* $\mathbb{k}$ *é uma álgebra com a multiplicação usual e* $u : \mathbb{k} \longrightarrow M_n(\mathbb{k})$ *dada por* $u(\alpha) = \alpha I$*, onde* I *é a matriz identidade de ordem* $n \times n$*.*

Exemplo 1.2.3. *Sejam* G *um grupo e* $\mathbb{k}G$ *o* $\mathbb{k}$*-espaço vetorial com base* G*, ou seja, os elementos de* $\mathbb{k}G$ *são somas finitas da forma* $\sum_{g\in G} \lambda_g g$*. Assim,* $\mathbb{k}G$ *é uma álgebra, conhecida como álgebra de grupo, com as operações*

$$(\sum_{g\in G}\lambda_g g)(\sum_{h\in G}\lambda_h h) = \sum_{g,h\in G}\lambda_g\lambda_h gh \quad e \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{\Bbbk G} = 1_{\Bbbk}1_G.$$

Exemplo 1.2.4. *Sejam G um grupo e $\Bbbk^G$ o $\Bbbk$-espaço vetorial formado pelas funções de G em $\Bbbk$. Então $\Bbbk^G$ tem estrutura de álgebra dada por:*

$$m(\sigma\otimes\beta)(g) = \sigma(g)\beta(g), \qquad\qquad u(1_{\Bbbk}) = 1_{\Bbbk^G},$$

para todo $\sigma,\beta\in\Bbbk^G,\ g\in G$.

Veja que $\Bbbk^G$ tem uma base dada pelos idempotentes centrais δ_g, $g\in G$, onde $\delta_g(h) = \delta_{g,h} = \begin{cases} 1, & g = h, \\ 0, & g \neq h. \end{cases}$.

Dadas duas álgebras, pode-se definir a partir destas uma nova álgebra, como pode ser visto na seguinte proposição.

Proposição 1.2.5. *Sejam A e B duas álgebras sobre um corpo $\Bbbk$. Então, $A\otimes B$ também é uma álgebra sobre $\Bbbk$ via:*

$$m_{A\otimes B} = (m_A\otimes m_B)(id\otimes\tau\otimes id), \quad e \qquad\qquad u_{A\otimes B}(1_{\Bbbk}) = 1_A\otimes 1_B.$$

Demonstração: (ideia) De fato, $m_{A\otimes B}(m_{A\otimes B}\otimes id) = m_{A\otimes B}(id\otimes m_{A\otimes B})$ pois o $flip$ reduz essa igualdade à verificação da associatividade das multiplicações em A e em B, que já são satisfeitas já que, por hipótese, A e B são álgebras. Da mesma forma, mostra-se que $m_{A\otimes B}(u_{A\otimes B}\otimes id_{A\otimes B}) = \varphi$, onde $\varphi : \Bbbk\otimes(A\otimes B) \longrightarrow A\otimes B$ é definida por $\varphi(\lambda\otimes(a\otimes b)) = \lambda(a\otimes b)$, para todo $a\in A$ e $b\in B$.

□

Definição 1.2.6. *Sejam A e B duas $\Bbbk$-álgebras. Diz-se que uma aplicação $\Bbbk$-linear $f : A \longrightarrow B$ é um morfismo de álgebras se os seguintes diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B\otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ & \Bbbk \arrow[ul, "u_A"] \arrow[u, "u_B"'] \end{tikzcd} .$$

Definição 1.2.7. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra. Um $\Bbbk$-espaço vetorial M é dito um A-módulo à esquerda se existe uma aplicação $\Bbbk$-linear $\mu : A\otimes M \longrightarrow M$, denominada* *ação, denotada por $\mu(a\otimes m) = a \cdot m$, para todo $a \in A, m \in M$, tal que os seguintes diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes M \arrow[r, "id_A\otimes\mu"] \arrow[d, "m_A\otimes id_M"'] & A\otimes M \arrow[d, "\mu"] \\ A\otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk\otimes M \arrow[r, "\mu\otimes id_M"] \arrow[dr, "\psi"'] & H\otimes M \arrow[d, "\mu"'] \\ & M \end{tikzcd} .$$

Definição 1.2.8. *Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra e M, N A-módulos à esquerda. Uma aplicação $\Bbbk$-linear $f : M \longrightarrow N$ é dita um morfismo de A-módulos se o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} A\otimes M \arrow[r, "id_A\otimes f"] \arrow[d, "\mu_M"'] & A\otimes N \arrow[d, "\mu_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd} .$$

A noção de coálgebra também é importante para a compreender este trabalho.

Definição 1.2.9. *Uma $\Bbbk$-coálgebra C é uma tripla (C, Δ, ε) onde C é um $\Bbbk$-espaço vetorial, $\Delta : C \longrightarrow C\otimes C$ e $\varepsilon : C \longrightarrow \Bbbk$ são aplicações $\Bbbk$-lineares tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ C\otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes id"'] & C\otimes C\otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk\otimes C & C \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\Delta"'] & C\otimes\Bbbk \\ & C\otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes id"] \arrow[ur, "id\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd} .$$

As aplicações Δ, ε são chamadas comultiplicação e counidade, respectivamente. A comutatividade do primeiro diagrama é denominada coassociatividade.

Uma $\Bbbk$-coálgebra C é dita cocomutativa se $\Delta_C = \tau \circ \Delta_C$, onde τ é a aplicação $flip$.

Um primeiro exemplo de coálgebra é o dual de uma álgebra de dimensão finita. Para mostrar isso, será necessário utilizar o seguinte lema.

Lema 1.2.10. *Sejam M e N $\Bbbk$-espaços vetoriais. Então $\rho : M^*\otimes N^* \longrightarrow (M\otimes N)^*$ definida por $\rho(f\otimes g)(m\otimes n) = f(m)g(n)$, para quaisquer $f \in M^*$, $g \in N^*$, $m \in M$*

e $n \in N$, é uma aplicação $\Bbbk$-linear injetora. Mais ainda, se M e N tem dimensão finita, tem-se que ρ é um isomorfismo.

Demonstração: A linearidade de ρ se dá como consequência da bilinearidade do produto tensorial juntamente com a linearidade das aplicações $f \in M^*$ e $g \in N^*$. Para mostrar a injetividade, seja $x = \sum_{i=1}^{l} f_i \otimes g_i \in \text{Ker}\rho$ tal que $\{g_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é um conjunto linearmente independente (isso é possível devido a bilinearidade do produto tensorial). Então, para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$ tem-se que

$$0 = \rho(\sum_{i=1}^{l} f_i \otimes g_i)(m \otimes n) = \sum_{i=1}^{l} f_i(m) g_i(n) = (\sum_{i=1}^{l} f_i(m) g_i)(n),$$

Consequentemente, $\sum_{i=1}^{l} f_i(m) g_i = 0$, para todo $m \in M$. Como $\{g_i\}_{1 \leq i \leq l}$ é um conjunto linearmente independente, segue que $f_i(m) = 0$, para todo $m \in M$ e sendo assim $f_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq l$. Portanto, $x = 0$ e desta forma ρ é injetiva.

Agora, supondo M e N com dimensão finita, tem-se

$$dim_{\Bbbk}(M \otimes N)^* = dim_{\Bbbk} M \otimes N = dim_{\Bbbk} M . dim_{\Bbbk} N = dim_{\Bbbk} M^* . dim_{\Bbbk} N^* = dim_{\Bbbk} M^* \otimes N^*,$$

e segue que ρ é um isomorfismo.

$\square$

Observação 1.2.11. *De forma mais geral, supondo $V_1, V_2, ..., V_n$ $\Bbbk$-espaços vetorias, tem-se que $\rho : (V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_n)^* \longrightarrow V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_n^*$ é uma aplicação $\Bbbk$-linear injetora. Além disso, se cada V_i tem dimensão finita, então ρ é um isomorfismo.*

A seguir, será introduzido outro conceito necessário para mostrar que o dual de uma álgebra de dimensão finita é uma coálgebra.

Lembre que dados M e N $\Bbbk$-espaços vetoriais e $\mu : M \longrightarrow N$ uma aplicação $\Bbbk$-linear, a aplicação dual de μ é definida como $\mu^* : N^* \longrightarrow M^*$, onde $\mu^*(f) = f \circ \mu$, para todo $f \in N^*$.

Note que, como μ e f são $\Bbbk$-lineares, para qualquer $f \in N^*$, segue que μ^* é $\Bbbk$-linear.

Proposição 1.2.12. *Seja (A, m, u) uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Então o seu dual $A^* = \{f : A \longrightarrow \Bbbk; f$ é aplicação $\Bbbk$-linear$\}$ é uma $\Bbbk$-coálgebra.*

Demonstração: Defina $\Delta = \rho^{-1} \circ m^*$ e $\varepsilon = \psi \circ u^*$, onde $\psi : \Bbbk^* \longrightarrow \Bbbk$ é o isomorfismo trivial, ou seja, $\psi(\lambda^*) = \lambda^*(1)$, e tome $f \in A^*$. Observe que

$$\begin{aligned}\varepsilon(f) &= (\psi \circ u^*)(f) = \psi(u^*(f)) = \psi(f \circ u)\\ &= f \circ u(1_\Bbbk) = f(u(1_\Bbbk)) = f(1_A).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i, \quad g_i, h_i \in A^*.$$

Por outro lado,

$$\Delta(f) = (\rho^{-1} \circ m^*)(f)$$

Aplicando ρ em ambos os membros da igualdade, obtem-se

$$\rho(\Delta(f)) = m^*(f) = f \circ m.$$

Logo,

$$\rho(\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i)(a \otimes b) = \sum_{i=1}^{n} g_i(a) h_i(b) = f(ab),$$

para todo $a, b \in A$, ou seja,

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i \text{ se e somente se } \sum_{i=1}^{n} g_i(a) h_i(b) = f(ab), \tag{1.2.1}$$

para todo $a, b \in A$.

Desta forma, basta verificar a comutatividade dos diagramas que fazem de A^* uma coálgebra. Com efeito, seja $f \in A^*$ tal que $\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i$, onde $\Delta(g_i) = \sum_j g'_{ij} \otimes g''_{ij}$ e $\Delta(h_i) = \sum_j h'_{ij} \otimes h''_{ij}$. Então,

$$(\Delta \otimes id)\Delta(f) = (\Delta \otimes id)(\sum_i g_i \otimes h_i) = \sum_{i,j} g'_{ij} \otimes g''_{ij} \otimes h_i.$$

Por outro lado, $(id\otimes\Delta)\Delta(f) = (id\otimes\Delta)(\sum_i g_i\otimes h_i) = \sum_{i,j} g_i\otimes h'_{ij}\otimes h''_{ij}$. Agora, observe que, para todo $a, b, c \in A$,

$$\begin{aligned}\rho(\sum_{i,j} g'_{ij}\otimes g''_{ij}\otimes h_i)(a\otimes b\otimes c) &= \sum_{i,j} (g'_{ij}(a)g''_{ij}(b))h_i(c)\\ &= \sum_i g_i(ab)h_i(c) = f((ab)c) = f(abc).\end{aligned}$$

De forma semelhante,

$$\begin{aligned}\rho(\sum_{i,j} g_i\otimes h'_{ij}\otimes h''_{ij})(a\otimes b\otimes c) &= \sum_{i,j} g_i(a)h'_{ij}(b)h''_{ij}(c)\\ &= \sum_i g_i(a)h_i(bc) = f(abc),\end{aligned}$$

para todo $a, b, c \in A$. Logo $\rho(\sum_{i,j} g'_{ij}\otimes g''_{ij}\otimes h_i) = \rho(\sum_{i,j} g_i\otimes h'_{ij}\otimes h''_{ij})$. Mas ρ é um isomorfismo, dessa forma

$$\sum_{i,j} g'_{ij}\otimes g''_{ij}\otimes h_i = \sum_{i,j} g_i\otimes h'_{ij}\otimes h''_{ij},$$

e consequentemente Δ é associativa.

Por fim,

$$\begin{aligned}(\varepsilon\otimes id)(\Delta(f)) = (\varepsilon\otimes id)(\sum_i g_i\otimes h_i) &= \sum_i \varepsilon(g_i)\otimes h_i\\ &= \sum_i g_i(1_A)\otimes h_i = 1_{\Bbbk}\otimes\sum_i g_i(1_A)h_i = 1_{\Bbbk}\otimes f.\end{aligned}$$

De fato, $f(a) = f(1_A a) = \sum_i g_i(1_A)h_i(a) = (\sum_i g_i(1_A)h_i)(a)$, para todo $a \in A$, então $\sum_i g_i(1_A)h_i = f$.

Analogamente $(id\otimes\varepsilon)\Delta(f) = f\otimes 1_{\Bbbk}$, e portanto A^* é uma coálgebra. □

Seguem alguns exemplos de coálgebras.

Exemplo 1.2.13. *Seja G um grupo, então $\Bbbk G$ é uma $\Bbbk$-coálgebra com as seguintes estruturas:*

$$\Delta(g) = g\otimes g \qquad e \qquad \varepsilon(g) = 1_{\Bbbk},$$

para todo $g \in G$. Isso quer dizer que qualquer espaço vetorial tem uma estrutura de coálgebra.

Exemplo 1.2.14. *Seja C um $\Bbbk$-espaço vetorial com base $\{s, c\}$. Tem-se que C é uma coálgebra com as estruturas,*

$$\Delta(s) = s \otimes c + c \otimes s, \qquad \Delta(c) = c \otimes c - s \otimes s,$$
$$\varepsilon(s) = 0, \qquad \varepsilon(c) = 1.$$

Exemplo 1.2.15. *Seja $M_n(\Bbbk)$ o $\Bbbk$-espaço vetorial das matrizes de ordem $n \times n$ com entradas em $\Bbbk$ e considere sua base $\{E_{ij}\}_{ij}$, com $i, j = 1, ..., n$. Onde*

$$E_{ij} = (e_{ij}) = \begin{cases} e_{ij} = 1 \\ e_{lm} = 0, \quad (l, m) \neq (i, j). \end{cases} .$$

Então $M_n(\Bbbk)$ é uma coálgebra via:

$$\Delta((e_{ij})) = \sum_{l=1}^{n} (e_{il}) \otimes (e_{lj}), \qquad \varepsilon((e_{ij})) = \delta_{i,j}.$$

Assim como acontece com as álgebras, dadas duas coálgebras, pode-se definir a partir destas uma nova coálgebra.

Proposição 1.2.16. *Sejam C e D duas coálgebras sobre o corpo $\Bbbk$, então $C \otimes D$ é uma coálgebra sobre $\Bbbk$ via:*

$$\Delta_{C \otimes D} = (id \otimes \tau \otimes id)(\Delta_C \otimes \Delta_D), \qquad \varepsilon_{C \otimes D}(c \otimes d) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d),$$

para todo $c \in C$ e $d \in D$, onde τ é a aplicação $flip$.

Também pode-se definir morfismo de coálgebras, dualizando a ideia de morfismo de álgebra.

Definição 1.2.17. *Sejam C, D duas coálgebras. Uma aplicação $\Bbbk$-linear $g : C \longrightarrow D$ é dita um morfismo de coálgebras se os seguintes diagramas comutam,*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta"'] & D \arrow[d, "\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & \Bbbk \end{tikzcd} .$$

Exemplo 1.2.18. *Supondo G um grupo finito, pode-se concluir que $(\Bbbk G)^*$ é uma coálgebra, a qual é isomorfa como coálgebra à $\Bbbk^G$, ou seja, o $\Bbbk$-espaço vetorial $\Bbbk^G$ com as respectivas comultiplicação e counidade*

$$\Delta(\delta_g) = \sum_{t \in G} \delta_t \otimes \delta_{t^{-1}g}, \qquad \qquad \varepsilon(\delta_g) = \delta_g(1) = \delta_{g,1}.$$

Sabe-se que o dual de uma álgebra de dimensão finita é uma coálgebra. Uma pergunta natural é: o dual de uma coálgebra é uma álgebra? A resposta é sim e, neste caso, não há restrições sobre a dimensão da coálgebra que se quer dualizar.

Observação 1.2.19. *Neste trabalho será denotado $(id \otimes \Delta)\Delta(c) = (\Delta \otimes id)\Delta(c) = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$, que é conhecida como a notação de Sweedler, porém sem o uso do símbolo $\sum$.*

Proposição 1.2.20. *Se A é uma álgebra e C é uma coálgebra, então*

$$\operatorname{Hom}(C, A) = \{f : C \longrightarrow A; f \text{ é uma aplicação } \Bbbk\text{-linear } \}$$

tem estrutura de álgebra via:

$$(f * g)(x) = m(f \otimes g)\Delta(x) = f(x_1)g(x_2),$$

onde a unidade desta álgebra é $u_A \circ \varepsilon_C$.

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(x) &= f(x_1)(g * h)(x_2) = f(x_1)(g(x_2)h(x_3)) \\ &= (f(x_1)g(x_2))h(x_3) = (f * g)(x_1)h(x_2) \\ &= ((f * g) * h)(x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (u_A\varepsilon_C * f)(x) &= u_A\varepsilon_C(x_1)f(x_2) = 1_A\varepsilon_C(x_1)f(x_2) \\ &= 1_A f(\varepsilon_C(x_1)x_2) = 1_A f(x). \end{aligned}$$

□

A operação $*$ apresentada acima é denominada produto de convolução. Como um caso particular, seja C uma $\Bbbk$-coálgebra, então $C^* = \{f : C \longrightarrow \Bbbk; f$ é aplicação $\Bbbk$-linear$\}$ é uma $\Bbbk$-álgebra via o produto de convolução.

Definição 1.2.21. *Seja C uma $\Bbbk$-coálgebra. Um $\Bbbk$-espaço vetorial M é dito um C-comódulo à esquerda se existe uma aplicação $\Bbbk$-linear $\rho : M \longrightarrow C \otimes M$, denominada coação, denotada por $\rho(m) = m_{-1} \otimes m_0$ na notação de Sweedler, para todo $m \in M$, tal que os seguintes diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta_C \otimes id_M"] \\ C \otimes M \arrow[r, "id_C \otimes \rho"'] & C \otimes C \otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \otimes M & M \arrow[l, "\phi"'] \arrow[d, "\rho"] \\ & C \otimes M \arrow[ul, "\varepsilon_C \otimes id_M"] \end{tikzcd}.$$

Definição 1.2.22. *Sejam C uma coálgebra e M, N C-comódulos à esquerda. Uma aplicação $\Bbbk$-linear $f : M \longrightarrow N$ é dita um morfismo de C-comódulos se o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ C \otimes M \arrow[r, "id_C \otimes f"'] & C \otimes N \end{tikzcd}.$$

Existem alguns conjuntos que possuem estrutura tanto de álgebra quanto de coálgebra. Se, além disso, estas estruturas satisfazem uma certa compatibilidade, esses conjuntos são denominados biálgebras.

Definição 1.2.23. *Uma biálgebra B é uma quíntupla $(B, \Delta, \varepsilon, m, u)$ onde (B, m, u) é uma álgebra, (B, Δ, ε) é uma coálgebra e, além disso, Δ e ε são morfismos de álgebras.*

Observação 1.2.24. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i. m e u são morfismos de coálgebras,

ii. Δ e ε são morfismos de álgebras.

Para maiores detalhes, consulte Proposição 4.1.1 em [3].

Exemplo 1.2.25. *Seja G um grupo. Então a coálgebra $\Bbbk G$ é uma biálgebra considerando a multiplicação usual e $u(\alpha) = \alpha 1_G$, para todo $\alpha \in \Bbbk$.*

Exemplo 1.2.26. *Seja G um grupo. Então $\Bbbk^G$ é uma biálgebra com as seguintes estruturas, considerando a base $\{\delta_g\}_{g\in G}$:*

$$\delta_g\delta_h = \delta_{g,h}\delta_g, \quad u(1_\Bbbk) = 1_{\Bbbk^G} = \sum_{g\in G}\delta_g, \quad \Delta(\delta_g) = \sum_{t\in G}\delta_t\otimes\delta_{t^{-1}g}, \quad \varepsilon(\delta_g) = \delta_{g,1}.$$

Exemplo 1.2.27. *Se H é uma biálgebra, então H^{op}, H^{cop} e $H^{op,cop}$ também são biálgebras, onde:*

i. $H^{op} = (H, \Delta, \varepsilon, m^{op}, u)$, *com* $m^{op} = m_H \circ \tau$,

ii. $H^{cop} = (H, \Delta^{op}, \varepsilon, m, u)$, *com* $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta_H$,

iii. $H^{op,cop} = (H, \Delta^{op}, \varepsilon, m^{op}, u)$.

Note que não existe nenhuma estrutura de coálgebra compatível com a estrutura de álgebra sobre $M_n(\Bbbk)$ dada pela multiplicação usual. Pois caso contrário $\ker\varepsilon$ seria um ideal de $M_n(\Bbbk)$, e como os únicos ideais de $M_n(\Bbbk)$ são os triviais, tem-se, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, uma contradição.

Definição 1.2.28. *Sejam B uma $\Bbbk$-biálgebra e $\mathcal{S} : B \longrightarrow B$ uma aplicação $\Bbbk$-linear. Se $\mathcal{S}$ é a inversa da identidade pelo produto convolução, ou seja, se*

$$\mathcal{S} * id = u_B \circ \varepsilon_B,$$

então $\mathcal{S}$ é denominada "antípoda"de B.

Definição 1.2.29. *Seja H uma biálgebra. Se H possui uma antípoda, então H é dita uma álgebra de Hopf.*

Exemplo 1.2.30. *A álgebra de grupo $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$.*

Exemplo 1.2.31. *O dual da álgebra de grupo, o qual é isomorfo à $\Bbbk^G$ também é uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}$.*

Observação 1.2.32. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}$. Então, para todo $g, h \in H$ tem-se:*

i. $\mathcal{S}(hg) = \mathcal{S}(g)\mathcal{S}(h)$, *ii.* $\mathcal{S}(1_H) = 1_H$,

iii. $\Delta(\mathcal{S}(h)) = \sum \mathcal{S}(h_2) \otimes \mathcal{S}(h_1)$,

iv. $\varepsilon(\mathcal{S}(h)) = \varepsilon(h)$.

1.3 Álgebra de Hopf associada a um par combinado de grupos

Nesta seção G, F denotarão dois grupos finitos, $\triangleright : G \times F \longrightarrow F$ uma ação à esquerda de G sobre F e $\triangleleft : G \times F \longrightarrow G$ uma ação à direita de F sobre G. A álgebra $\Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ nem sempre é uma álgebra de Hopf, para tanto, é necessário que $(G, F, \triangleright, \triangleleft)$ seja um par combinado de grupos finitos.

1.3.1 Produto semidireto

Sejam Γ um grupo, A uma $\Bbbk$-álgebra comutativa e $\rightharpoonup: \Gamma \times A \longrightarrow A$ uma ação por automorfismo de álgebras de Γ sobre A, isto é, $(x \rightharpoonup ab) = (x \rightharpoonup a)(x \rightharpoonup b)$. Com isso, pode-se construir uma álgebra, denotada por $A \rtimes \Bbbk\Gamma$ e denominada produto semidireto à esquerda de A e Γ, com a seguinte estrutura: $A \rtimes \Bbbk\Gamma = A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk\Gamma$ como $\Bbbk$-espaço vetorial,

$$(ax)(by) = a(x \rightharpoonup b)xy \quad \text{e} \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{A \rtimes \Bbbk\Gamma} = 1_A 1_{\Bbbk\Gamma},$$

onde ax é a notação utilizada para representar o elemento $a \otimes x \in A \otimes \Bbbk\Gamma$.

Esta é uma álgebra associativa, e isso será mostrado para um caso mais geral na seção seguinte.

Considerando $\Gamma = F$, a álgebra comutativa $A = \Bbbk^G$ e a ação por automorfismo de álgebras $\rightharpoonup$ induzida pela ação $\triangleleft : G \times F \longrightarrow G$, ou seja, $(x \rightharpoonup \phi)(h) = \phi(h \triangleleft x)$, para todo $x \in F, \phi \in \Bbbk^G, h \in H$. Em particular, $(x \rightharpoonup \delta_g)(h) = \delta_g(h \triangleleft x) = \delta_{g \triangleleft x^{-1}}(h)$, para todo $x \in F, g, h \in G$. Observe que, por um lado tem-se

$$\begin{aligned} x \rightharpoonup (\delta_g \delta_h) &= x \rightharpoonup (\delta_{g,h} \delta_h) \\ &= \delta_{g,h} \delta_{h \triangleleft x^{-1}} \end{aligned}$$

e por outro, tem-se

$$\begin{aligned}(x \rightharpoonup \delta_g)(x \rightharpoonup \delta_h) &= \delta_{g\triangleleft x^{-1}}\delta_{h\triangleleft x^{-1}}\\ &= \delta_{g\triangleleft x^{-1},h\triangleleft x^{-1}}\delta_{h\triangleleft x^{-1}}\\ &= \delta_{g,h}\delta_{h\triangleleft x^{-1}},\end{aligned}$$

de onde $\rightharpoonup$ é uma ação por automorfismo de álgebras. Dessa forma, tem-se que $\Bbbk^G \rtimes \Bbbk F$ é uma álgebra associativa com unidade $u(1_\Bbbk) = \sum_{g\in G}\delta_g$ e multiplicação dada por

$$(\delta_g x)(\delta_h y) = \delta_g(x \rightharpoonup \delta_h)xy = \delta_g\delta_{h\triangleleft x^{-1}}xy = \delta_{g,h\triangleleft x^{-1}}\delta_g xy = \delta_{g\triangleleft x,h}\delta_g xy.$$

Agora, se F e G forem finitos, tem-se que a álgebra $A = \Bbbk^G \rtimes \Bbbk F$ é finita com base $\{\delta_g x\}_{g\in G, x\in F}$. Mais ainda, $B = \Bbbk G \ltimes \Bbbk^F$, o produto semidireto a direita, também é uma álgebra, onde $\triangleright : G \times F \longrightarrow F$ induz a ação por automorfismo de álgebras $\leftharpoonup: \Bbbk^F \times G \longrightarrow \Bbbk^F$ dada por $\delta_x \leftharpoonup g = \delta_{g^{-1}\triangleright x}$ e

$$(g\delta_x)(h\delta_y) = gh\delta_{x,h\triangleright y}\delta_y \quad \text{e} \quad u(1_\Bbbk) = \textstyle\sum_{x\in F}\delta_x.$$

Assim, pode-se dar à álgebra A uma estrutura de coálgebra a partir da dualização da estrutura de álgebra de B, pois B^* é linearmente isomorfo a A . Essa estrutura de coálgebra de A é dada por

$$\Delta(\delta_g x) = \sum_{t\in G}\delta_t(t^{-1}g \triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x, \qquad\qquad \varepsilon(\delta_g x) = \delta_{g,1}.$$

Com efeito, tem-se

$$(\delta_g x)(h\delta_y l\delta_z) \;=\; (\delta_g x)(hl\delta_{y,l\triangleright z}\delta_z) = \delta_{y,l\triangleright z}\delta_{g,hl}\delta_{z,x}.$$

Por outro lado, para cada $t \in G$, segue que

$$\begin{aligned}\delta_t(t^{-1}g \triangleright x)(h\delta_y)\delta_{t^{-1}g}x(l\delta_z) &= \delta_{t,h}\delta_{y,t^{-1}g\triangleright x}\delta_{t^{-1}g,l}\delta_{z,x}\\ &= \delta_{g,hl}\delta_{y,h^{-1}g\triangleright x}\delta_{z,x}\\ &= \delta_{g,hl}\delta_{y,l\triangleright z}\delta_{z,x}.\end{aligned}$$

Logo, se G e F são grupos finitos então $A = \Bbbk^G \rtimes \Bbbk F$ tem estrutura de álgebra e de coálgebra. A proposição seguinte apresenta uma condição necessária e suficiente para que A seja uma biálgebra.

Proposição 1.3.1. *O produto semidireto $A = \Bbbk^G \rtimes \Bbbk F$, com as estruturas apresentadas anteriormente, é uma biálgebra se e somente se $(G, F, \triangleleft, \triangleright)$ é um par combinado de grupos.*

Demonstração: Inicialmente serão demonstradas as seguintes equivalências:

i. $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ se e somente se $g \triangleright 1 = 1$ para todo $g \in G$,

ii. $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ se e somente se $t \triangleright xy = (t \triangleright x)((t \triangleleft x) \triangleright y)$ para todo $t \in G, x, y \in F$,

iii. $\Delta(x\delta_g) = \Delta(x)\Delta(\delta_g)$ se e somente se $(s \triangleleft (t \triangleright x))(t \triangleleft x) = st \triangleleft x$, para todo $s, t \in G, x \in F$,

iv. $\varepsilon(x\delta_g) = \varepsilon(x)\varepsilon(\delta_g)$ se e somente se $1 \triangleleft z = 1$, para todo $z \in F$.

De fato,

$$\Delta(1) = \Delta(\sum_{h \in G} \delta_h) = \sum_{l,h \in G} \delta_l(l^{-1}h \triangleright 1) \otimes \delta_{l^{-1}h} = \sum_{l,g \in G} \delta_l(g \triangleright 1) \otimes \delta_g.$$

Como $\{\delta_g x \otimes \delta_h y; g, h \in G, x, y \in F\}$ é uma base para $A \otimes A$, segue que $\Delta(1) = 1 \otimes 1 = \sum_{s,h \in G} \delta_s \otimes \delta_h$ se e somente se $g \triangleright 1 = 1$ para qualquer $g \in G$.

Para mostrar $(ii.)$, tome $x, y \in F$ e $t \in G$. Então,

$$\begin{aligned}
\Delta(x)\Delta(y) &= \sum_{s,t,m,n \in G} \delta_s(t \triangleright x)\delta_m(n \triangleright y) \otimes \delta_t x \delta_n y \\
&= \sum_{s,t,m,n \in G} \delta_{s \triangleleft (t \triangleright x), m} \delta_s(t \triangleright x)(n \triangleright y) \otimes \delta_{t \triangleleft x, n} \delta_t xy \\
&= \sum_{s,t \in G} \delta_s(t \triangleright x)((t \triangleleft x) \triangleright y) \otimes \delta_t xy.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\Delta(xy) = \sum_{s,t \in G} \delta_s(t \triangleright xy) \otimes \delta_t xy$. Conclui-se então, que $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ se e somente se $t \triangleright xy = (t \triangleright x)((t \triangleleft x) \triangleright y)$ para todo $t \in G, x, y \in F$.

Para mostrar $(iii.)$, sejam $x \in F$ e $g \in G$. Então,

$$\begin{aligned}\Delta(x)\Delta(\delta_g) &= (\sum_{s,t\in G}\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_t x)(\sum_{u\in G}\delta_u(u^{-1}g\triangleright 1)\otimes\delta_{u^{-1}g}1)\\ &= (\sum_{s,t\in G}\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_t x)(\sum_{u\in G}\delta_u\otimes\delta_{u^{-1}g}1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(x)\Delta(\delta_g) &= \sum_{s,t,u\in G}\delta_{s\triangleleft(t\triangleright x),u}\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_{t\triangleleft x,u^{-1}g}\delta_t x\\ &= \sum_{s,t\in G}\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_{t\triangleleft x,(s\triangleleft(t\triangleright x))^{-1}g}\delta_t x\\ &= \sum_{\substack{s,t\in G\\ (s\triangleleft(t\triangleright x))(t\triangleleft x)=g}}\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_t x.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\Delta(x\delta_g) &= \Delta((\sum_{s\in G}\delta_s x)(\delta_g)) = \Delta(\sum_{s\in G}\delta_{s\triangleleft x,g}\delta_s x)\\ &= \Delta(\delta_{g\triangleleft x^{-1}}x) = \sum_{s\in G}\delta_s(s^{-1}(g\triangleleft x^{-1})\triangleright x)\otimes\delta_{s^{-1}(g\triangleleft x^{-1})}x\\ &= \sum_{\substack{s,t\in G\\ st\triangleleft x=g}}\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_t x.\end{aligned}$$

Como $\{\delta_g x\otimes\delta_h y; g,h\in G, x,y\in F\}$ forma uma base para $A\otimes A$, segue que $\Delta(x\delta_g) = \Delta(x)\Delta(\delta_g)$ se e somente se $(s\triangleleft(t\triangleright x))(t\triangleleft x) = st\triangleleft x$, para todo $s,t\in G, x\in F$.

Por fim, sejam $g \in G$ e $x \in F$. Então $\varepsilon(x\delta_g) = \varepsilon(\delta_{g\triangleleft x^{-1}}x) = \delta_{g\triangleleft x^{-1},1}$. Por outro lado, $\varepsilon(x)\varepsilon(\delta_g) = \delta_{g,1}$ e, consequentemente, $\varepsilon(x\delta_g) = \varepsilon(x)\varepsilon(\delta_g)$ se e somente se $1\triangleleft x = 1$, para todo $x \in F$.

Agora, se $\Bbbk^G \rtimes \Bbbk F$ é uma biálgebra então Δ e ε são morfismos de álgebras e portanto valem as equivalências $(i) - (iv)$ e $(G, F, \triangleleft, \triangleright)$ é um par combinado de grupos.

Reciprocamente, se $(G, F, \triangleleft, \triangleright)$ é um par combinado de grupos, fica fácil verificar que $\Bbbk^G \rtimes \Bbbk F$ é uma biálgebra.

$\square$

Proposição 1.3.2. *Se $(G, F, \triangleleft, \triangleright)$ é um par combinado de grupos então $\Bbbk^G \rtimes \Bbbk F$ é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração: Defina $\mathcal{S} : \Bbbk^G \rtimes \Bbbk F \longrightarrow \Bbbk^G \rtimes \Bbbk F$ por

$$\mathcal{S}(\delta_g x) = \delta_{(g \triangleleft x)^{-1}}(g \triangleright x)^{-1},$$

para todo $x \in F, g \in G$. Basta mostrar que $\mathcal{S}$ é a antípoda de $\Bbbk^G \rtimes \Bbbk F$, ou seja, que $\mathcal{S}$ é a inversa da identidade com respeito ao produto de convolução, em outras palavras, basta mostrar que

$$m(id \otimes \mathcal{S})\Delta(\delta_g x) = \varepsilon(\delta_g x)1_{\Bbbk^G \rtimes \Bbbk F},$$

para todo $\delta_g x \in \Bbbk^G \rtimes \Bbbk F$. De fato,

$$\begin{aligned} m(id \otimes \mathcal{S})\Delta(\delta_g x) &= \sum_{t \in G} \delta_{gt^{-1}}(t \triangleright x)\mathcal{S}(\delta_t x) \\ &= \sum_{t \in G} \delta_{gt^{-1}}(t \triangleright x)\delta_{(t \triangleleft x)^{-1}}(t \triangleright x)^{-1} \\ &= \sum_{t \in G} \delta_{gt^{-1},(t \triangleleft x)^{-1} \triangleleft (t \triangleright x)^{-1}}\delta_{gt^{-1}}(t \triangleright x)(t \triangleright x)^{-1} \\ &= \sum_{t \in G} \delta_{gt^{-1},(t \triangleleft x)^{-1} \triangleleft (t \triangleright x)^{-1}}\delta_{gt^{-1}}1. \end{aligned}$$

Note que, pelo fato de $\triangleleft$ e $\triangleright$ serem as ações do par combinado (G, F) e pelo Lema 1.1.6, tem-se $(t \triangleleft x)^{-1} \triangleleft (t \triangleright x)^{-1} = t^{-1}$. Assim

$$m(id \otimes \mathcal{S})\Delta(\delta_g x) = \delta_{g,1} \sum_{t \in G} \delta_t = \delta_{g,1} 1_{\Bbbk^G \rtimes \Bbbk F} = \varepsilon(\delta_g x) 1_{\Bbbk^G \rtimes \Bbbk F}.$$

□

1.3.2 Produto bicruzado

O produto cruzado é uma generalização da noção de produto semidireto, neste, a estrutura de álgebra do produto semidireto é deformada por um 2-cociclo.

Sejam Γ um grupo, A uma $\Bbbk$-álgebra comutativa, $\rightharpoonup : \Gamma \times A \longrightarrow A$ uma ação por automorfismos de álgebras e $\sigma : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow A^\times$ um 2-cociclo normalizado para o $\Bbbk\Gamma$-módulo $A^\times$ (unidades de A).

Lembre que σ é um 2-cociclo normalizado se satisfaz as seguintes condições

$$(x \rightharpoonup \sigma(y,z))\sigma(x,yz) = \sigma(xy,z)\sigma(x,y), \qquad \sigma(1,x) = 1 = \sigma(x,1),$$

para todo $x, y, z \in \Gamma$, onde a segunda igualdade é chamada de condição de normalização.

Seja $A*_\sigma \Bbbk\Gamma$ a álgebra definida por $A*_\sigma \Bbbk\Gamma = \oplus_{x\in\Gamma} Ax$ como um $\Bbbk$-espaço vetorial, com multiplicação dada por $(\alpha x)(\beta y) = \alpha(x \rightharpoonup \beta)\sigma(x,y)xy$.

De fato, sejam $\alpha, \beta, \gamma \in A$ e $x, y, z \in \Gamma$. Então,

$$\begin{aligned} m(id \otimes m)(\alpha x \otimes \beta y \otimes \gamma z) &= m(\alpha x \otimes \beta(y \rightharpoonup \gamma)\sigma(y,z)yz) \\ &= \alpha(x \rightharpoonup (\beta(y \rightharpoonup \gamma)\sigma(y,z)))\sigma(x,yz)xyz \\ &= \alpha(x \rightharpoonup \beta)(xy \rightharpoonup \gamma)(x \rightharpoonup \sigma(y,z))\sigma(x,yz)xyz \\ &= \alpha(x \rightharpoonup \beta)(xy \rightharpoonup \gamma)\sigma(xy,z)\sigma(x,y)xyz. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} m(m \otimes id)(\alpha z \otimes \beta y \otimes \gamma z) &= m(\alpha(x \rightharpoonup \beta)\sigma(x,y)xy \otimes \gamma z) \\ &= \alpha(x \rightharpoonup \beta)\sigma(x,y)(xy \rightharpoonup \gamma)\sigma(xy,z)xyz. \end{aligned}$$

Portanto, $m(id \otimes m) = m(m \otimes id)$. A verificação da comutatividade do diagrama da unidade é imediata.

Definido dessa forma, o $\Bbbk$-espaço vetorial $A*_\sigma \Bbbk\Gamma$ é denominado Γ-produto cruzado à esquerda de Γ sobre A determinado por $\rightharpoonup$ e σ. A noção de Γ-produto cruzado à direita sobre A determinado por uma ação à direita $\leftharpoonup: A \times \Gamma \longrightarrow A$ e um 2-cociclo $\tau : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow A^\times$ para o $\Bbbk\Gamma$-módulo à direita $A^\times$, $\Bbbk\Gamma\,_\tau * A$, é definida analogamente.

Vale observar que se σ for trivial, ou seja, $\sigma(x,y) = 1$ para todo $x, y \in \Gamma$, tem-se que $A *_\sigma \Bbbk\Gamma = A \rtimes \Bbbk\Gamma$, o produto semidireto. Mais ainda, se $\rightharpoonup$ e σ são triviais, então $A *_\sigma \Bbbk\Gamma = A\Gamma$, o anel de grupo.

Considerando $\Gamma = F$, $A = \Bbbk^G$, $\rightharpoonup$ induzida por $\triangleleft$ e $\sigma : F \times F \longrightarrow (\Bbbk^\times)^G$ um 2-cociclo normalizado, tem-se que $\Bbbk^G *_\sigma \Bbbk F$ é uma $\Bbbk$-álgebra associativa com unidade $1_{\Bbbk^G *_\sigma \Bbbk F} = \sum_{s\in G} \delta_s 1$ e com multiplicação dada por:

$$\begin{aligned}(\delta_g x)(\delta_h y) &= \delta_g(x \rightharpoonup \delta_h)\sigma(x,y)xy = \delta_g\delta_{h\triangleleft x^{-1}}\sigma(x,y)xy \\ &= \delta_{g,h\triangleleft x^{-1}}\delta_g\sigma(x,y)xy = \delta_{g\triangleleft x,h}\delta_g(\sum_{l\in G}\sigma_l(x,y)\delta_l)xy,\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\delta_g x)(\delta_h y) = \delta_{g\triangleleft x,h}\delta_g\sigma_g(x,y)xy. \tag{1.3.2}$$

Observe que para quaisquer $x, y \in F$, tem-se que $\sigma(x,y) \in (\Bbbk^{\times})^G$, então $\sigma(x,y) = \sum_{g\in G}\sigma_g(x,y)\delta_g$. Consequentemente as condições de 2-cociclo e de normalização de σ se resumem à

$$\sigma_{g\triangleleft x}(y,z)\sigma_g(x,yz) = \sigma_g(xy,z)\sigma_g(x,y) \quad e \tag{1.3.3}$$

$$\sigma_g(x,1) = 1 = \sigma_g(1,x) \tag{1.3.4}$$

para todo $g \in G, x, y, z \in F$.

De fato, como $(x \rightharpoonup \sigma(y,z))\sigma(x,yz) = \sigma(xy,z)\sigma(x,y)$, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{s\in G}\sigma_s(xy,z)\sigma_s(x,y)\delta_s &= \sum_{s\in G}\sigma_s(xy,z)\delta_s\sum_{t\in G}\sigma_t(x,y)\delta_t \\ &= \sigma(xy,z)\sigma(x,y) \\ &= (x \rightharpoonup \sigma(y,z))\sigma(x,yz) \\ &= (x \rightharpoonup \sum_{g\in G}\sigma_g(y,z)\delta_g)\sum_{h\in G}\sigma_h(x,yz)\delta_h \\ &= \sum_{g\in G}\sigma_g(y,z)\delta_{g\triangleleft x^{-1}}\sum_{h\in G}\sigma_h(x,yz)\delta_h \\ &= \sum_{g\in G}\sigma_{g\triangleleft x}(y,z)\delta_g\sum_{h\in G}\sigma_h(x,yz)\delta_h \\ &= \sum_{g\in G}\sigma_{g\triangleleft x}(y,z)\sigma_g(x,yz)\delta_g.\end{aligned}$$

Como $\{\delta_g\}_{g\in G}$ forma uma base para $\Bbbk^G$, segue (1.3.3). Da condição de normalização, tem-se que

$$\sum_{g\in G}\delta_g = 1_{\Bbbk^G} = \sigma(1,x) = \sum_{g\in G}\sigma_g(1,x)\delta_g,$$

de onde segue (1.3.4).

Como no caso do produto semidireto, considere agora o $\Bbbk G$-produto cruzado sobre $\Bbbk^F$, $\Bbbk G\,_\tau * \Bbbk^F$, determinado pela ação $\leftharpoonup$ induzida por $\triangleright$ e pelo 2-cociclo normalizado $\tau : G \times G \longrightarrow (\Bbbk^\times)^F$.

Note que escrevendo $\tau = \sum_{x\in F}\tau_x\delta_x$, as condições de 2-cociclo e de normalização são, respectivamente:

$$\tau_x(gh,k)\tau_{k\triangleright x}(g,h) = \tau_x(h,k)\tau_x(g,hk) \quad e \tag{1.3.5}$$

$$\tau_x(1,g) = 1 = \tau_x(g,1) \tag{1.3.6}$$

com $g,h,k \in G, x \in F$.

Tem-se então que $\Bbbk G\,_\tau * \Bbbk^F$ tem estrutura de álgebra via:

$$(g\delta_x)(h\delta_y) = gh\delta_{x,h\triangleright y}\tau_y(g,h)\delta_y \quad \text{e} \quad u(1_\Bbbk) = \textstyle\sum_{x\in F}\delta_x.$$

Assim, pode-se dar uma estrutura de coálgebra para $\Bbbk^G *_\sigma \Bbbk F$ dualizando a estrutura de álgebra de $\Bbbk G\,_\tau * \Bbbk^F$, ou seja, $\Bbbk^G *_\sigma \Bbbk F$ tem uma estrutura de coálgebra, a qual é dada por

$$\Delta(\delta_g x) = \sum_{t\in G}\tau_x(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x, \quad g\in G, x\in F, \tag{1.3.7}$$

$$\varepsilon_{\Bbbk^G *_\sigma \Bbbk F} = \varepsilon_{\Bbbk^G}\otimes\varepsilon_{\Bbbk F}. \tag{1.3.8}$$

Com efeito, basta verificar a equivalência (1.2.1). Tomando $g,h,l \in G, x,y,z \in F$, tem-se

$$(\delta_g x)(h\delta_y l\delta_z) = (\delta_g x)(hl\delta_{y,l\triangleright z}\tau_z(h,l)\delta_z) = \delta_{y,l\triangleright z}\delta_{g,hl}\delta_{z,x}\tau_z(h,l).$$

Por outro lado, para cada $t \in G$, segue que

$$\begin{aligned}
\tau_x(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)(h\delta_y)\delta_{t^{-1}g}x(l\delta_z) &= \tau_x(t,t^{-1}g)\delta_{t,h}\delta_{y,t^{-1}g\triangleright x}\delta_{t^{-1}g,l}\delta_{z,x}\\
&= \tau_x(h,h^{-1}g)\delta_{g,hl}\delta_{y,h^{-1}g\triangleright x}\delta_{z,x}\\
&= \tau_x(h,l)\delta_{g,hl}\delta_{y,l\triangleright z}\delta_{z,x}.
\end{aligned}$$

□

A partir de agora, $R = \Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ será considerado com estrutura de álgebra e de coálgebra dadas por σ (induzida pela ação $\triangleleft$) e τ (induzida pela ação $\triangleright$), respectivamente, definidas anteriormente. Com estas estruturas, R é denominado produto bicruzado.

Como foi visto anteriormente, para $\Bbbk^G \rtimes \Bbbk F$ ser uma álgebra de Hopf, é necessário e suficiente que $(G, F, \triangleleft, \triangleright)$ seja um par combinado de grupos. Então, é razoável se perguntar quais condições sobre $\sigma, \tau, \triangleleft$ e $\triangleright$ devemos impor para que $R = \Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ seja uma biálgebra? A proposição a seguir responderá essa pergunta.

Proposição 1.3.3. *O produto bicruzado $R = \Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$, com a estrutura apresentada anteriormente, é uma biálgebra se e somente se para todo $g, h \in G, x, y \in F$, valem as seguintes igualdades:*

$$\sigma_{gh}(x,y)\tau_{xy}(g,h) = \sigma_g(h\triangleright x,(h\triangleleft x)\triangleright y)\sigma_h(x,y)\tau_x(g,h)\tau_y(g\triangleleft(h\triangleright x),h\triangleleft x) \tag{1.3.9}$$

$$\sigma_1(x,y) = 1 = \tau_1(g,h) \tag{1.3.10}$$

$$g\triangleright xy = (g\triangleright x)((g\triangleleft x)\triangleright y) \tag{1.3.11}$$

$$gh\triangleleft x = (g\triangleleft(h\triangleright x))(h\triangleleft x). \tag{1.3.12}$$

Demonstração: Inicialmente, serão mostradas as seguintes equivalências

i. $\Delta(1) = 1\otimes 1$ se e somente se $t\triangleright 1 = 1$ e $\tau_1(s,t) = 1$, para todo $s, t \in G$;

ii. $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ se e somente se valem (1.3.9) e (1.3.11);

iii. $\Delta(x\delta_g) = \Delta(x)\Delta(\delta_g)$ se e somente se vale (1.3.12);

iv. $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$ se e somente se $\sigma_1(x, y) = 1$, para todo $x, y \in F$;

v. $\varepsilon(x\delta_g) = \varepsilon(x)\varepsilon(\delta_g)$ se e somente se $1 \triangleleft x = 1$, para todo $x \in F$.

De fato,

$$\Delta(1) = \sum_{s,t \in G} \tau_1(s,t)\delta_s(t \triangleright 1) \otimes \delta_t 1 = \sum_{s,t \in G} \delta_s \otimes \delta_t$$

se e somente se $t \triangleright 1 = 1$ e $\tau_1(s, t) = 1$, para todo $s, t \in G$, pois $\{\delta_g \otimes \delta_h\}_{g,h \in G}$ é uma base de $\Bbbk^G \otimes \Bbbk^G$.

Para demonstrar $(ii.)$, tome $x, y \in F$, segue que

$$\Delta(xy) = \sum_{s,t \in G} \sigma_{st}(x, y)\tau_{xy}(s, t)\delta_s(t \triangleright xy) \otimes \delta_t xy.$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta(x)\Delta(y) &= \sum_{s,t,u,v \in G} \tau_x(st)\tau_y(u, v)\delta_s(t \triangleright x)\delta_u(v \triangleright y) \otimes \delta_t x \delta_v y \\
&= \sum_{s,t,u,v \in G} \tau_x(s, t)\tau_y(u, v)\sigma_s(t \triangleright x, v \triangleright y)\sigma_t(x, y) \\
&\times \delta_{s \triangleleft (t \triangleright x),u}\delta_{t \triangleleft x,v}\delta_s(t \triangleright x)(v \triangleright y) \otimes \delta_t xy \\
&= \sum_{s,t \in G} \tau_x(s, t)\tau_y(s \triangleleft (t \triangleright x), t \triangleleft y)\sigma_s(t \triangleright x, (t \triangleleft x) \triangleright y) \\
&\times \sigma_t(x, y)\delta_s(t \triangleright x)((t \triangleleft x) \triangleright y) \otimes \delta_t xy.
\end{aligned}$$

Assim, $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ se e somente se valem (1.3.9) e (1.3.11).

Para todo $x \in F, g \in G$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\Delta(x\delta_g) &= \Delta((\sum_{s, \in G} \delta_s x)(\delta_g)) \\
&= \Delta(\sum_{s \in G} \delta_{s \triangleleft x, g}\sigma_s(x, 1)\delta_s x) \\
&= \Delta(\delta_{g \triangleleft x^{-1}} x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(x\delta_g) &= \sum_{s\in G} \tau_x(s, s^{-1}(g \triangleleft x^{-1}))\delta_s(s^{-1}(g \triangleleft x^{-1}) \triangleright x)\otimes\delta_{s^{-1}(g\triangleleft x^{-1})}x \\
&= \sum_{\substack{s,t\in G\\ t=s^{-1}(g\triangleleft x^{-1})}} \tau_x(s,t)\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_t x \\
&= \sum_{\substack{s,t\in G\\ g=st\triangleleft x}} \tau_x(s,t)\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_t x.
\end{aligned}
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\Delta(x)\Delta(\delta_g) &= (\sum_{s,t\in G} \tau_x(s,t)\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_t x)(\sum_{u\in G}\tau_1(u,u^{-1}g)\delta_u(u^{-1}(g\triangleright 1))\otimes\delta_{u^{-1}g}1) \\
&= \sum_{s,t,u\in G} \tau_x(s,t)\delta_{s\triangleleft(t\triangleright x),u}\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_{t\triangleleft x,u^{-1}g}\delta_t x \\
&= \sum_{\substack{s,t,u\in G\\ s\triangleleft(t\triangleright x)=u\\ u^{-1}g=t\triangleleft x}} \tau_x(s,t)\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_t x \\
&= \sum_{\substack{s,t\in G\\ g=(s\triangleleft(t\triangleright x))(t\triangleleft x)}} \tau_x(s,t)\delta_s(t\triangleright x)\otimes\delta_t x,
\end{aligned}
$$

de onde $\Delta(x\delta_g) = \Delta(x)\Delta(\delta_g)$ se e somente se vale (1.3.12).

Além disso, $\varepsilon(xy) = \varepsilon(\sum_{g\in G}\sigma_g(x,y)\delta_g xy) = \sum_{g\in G}\sigma_g(x,y)\varepsilon(\delta_g xy) = \sum_{g\in G}\sigma_g(x,y)\delta_{g,1} = \sigma_1(x,y)$. Por outro lado, $\varepsilon(x)\varepsilon(y) = 1$, para quaisquer $x, y \in F$. Consequentemente, $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$ se e somente se $\sigma_1(x,y) = 1$, para quaisquer $x, y \in F$.

Por fim, $\varepsilon(x\delta_g) = \varepsilon(\sigma_{g\triangleleft x^{-1}}(x,1)\delta_{g\triangleleft x^{-1}}x) = \delta_{g\triangleleft x^{-1},1}$. Por outro lado, $\varepsilon(x)\varepsilon(\delta_g) = \delta_{g,1}$. Logo, $\varepsilon(x\delta_g) = \varepsilon(x)\varepsilon(\delta_g)$ se e somente se $1 \triangleleft x = 1$, para todo $x \in F$.

Agora, supondo que R é uma biálgebra, tem-se que Δ e ε são morfismos de álgebras. Então, usando as equivalências $(i)-(v)$, segue a implicação da proposição.

Reciprocamente, assumindo que valem (1.3.9)-(1.3.12), fica simples verificar que R é uma biálgebra. $\square$

Mais ainda, pode-se mostrar que R possui uma antípoda, independentemente de ser uma biálgebra.

Proposição 1.3.4. *O produto bicruzado R possui inversa da identidade com respeito ao produto de convolução em* $\mathrm{End}R$.

Demonstração: Defina $\mathcal{S} : R \longrightarrow R$ como

$$\mathcal{S}(\delta_g x) = \sigma_{(g \triangleleft x)^{-1}}((g \triangleright x)^{-1}, g \triangleright x)^{-1} \tau_x(g^{-1}, g)^{-1} \delta_{(g \triangleleft x)^{-1}}(g \triangleright x)^{-1}. \tag{1.3.13}$$

Basta mostrar que $m(id \otimes \mathcal{S})\Delta = u\varepsilon$. De fato,

$$\begin{aligned}
m(id \otimes \mathcal{S})\Delta(\delta_g x) &= m(id \otimes \mathcal{S})(\sum_{t \in G} \tau_x(gt^{-1}, t)\delta_{gt^{-1}}(t \triangleright x) \otimes \delta_t x) \\
&= \sum_{t \in G} \tau_x(gt^{-1}, t)\delta_{gt^{-1}}(t \triangleright x)\mathcal{S}(\delta_t x) \\
&= \sum_{t \in G} \tau_x(gt^{-1}, t)\sigma_{(t \triangleleft x)^{-1}}((t \triangleright x)^{-1}, t \triangleright x)^{-1}\tau_x(t^{-1}, t)^{-1} \\
&\times \ \delta_{gt^{-1}}(t \triangleright x)\delta_{(t \triangleleft x)^{-1}}(t \triangleright x)^{-1} \\
&= \sum_{t \in G} \tau_x(gt^{-1}, t)\sigma_{(t \triangleleft x)^{-1}}((t \triangleright x)^{-1}, t \triangleright x)^{-1}\tau_x(t^{-1}, t)^{-1} \\
&\times \ \sigma_{gt^{-1}}(t \triangleright x, (t \triangleright x)^{-1})\delta_{gt^{-1}, (t \triangleleft x)^{-1} \triangleleft (t \triangleright x)^{-1}}\delta_{gt^{-1}}.
\end{aligned}$$

Note que $\delta_{gt^{-1}, (t \triangleleft x)^{-1} \triangleleft (t \triangleright x)^{-1}} = \delta_{gt^{-1}, t^{-1}} = \delta_{g,1}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
m(id \otimes \mathcal{S})\Delta(\delta_g x) = &\sum_{t \in G} \tau_x(gt^{-1}, t)\sigma_{(t \triangleleft x)^{-1}}((t \triangleright x)^{-1}, t \triangleright x)^{-1}\tau_x(t^{-1}, t)^{-1} \\
&\times \sigma_{gt^{-1}}(t \triangleright x, (t \triangleright x)^{-1})\delta_{g,1}\delta_{gt^{-1}}.
\end{aligned}$$

Observe ainda que pondo $z = y^{-1} = x$ na condição de 2-cociclo de σ, obtem-se

$$\sigma_{g \triangleleft x}(x^{-1}, x) = \sigma_g(x, x^{-1}), \quad g \in G, x \in F.$$

Utilizando o fato de $(t \triangleleft x)^{-1} = t^{-1} \triangleleft (t \triangleright x)$, e pondo $g = t^{-1}$ e $x = t \triangleright x$, segue que

$$\sigma_{(t \triangleleft x)^{-1}}((t \triangleright x)^{-1}, t \triangleright x) = \sigma_{t^{-1}}(t \triangleright x, (t \triangleright x)^{-1}), \quad t \in G, x \in F.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
m(id \otimes \mathcal{S})\Delta(\delta_g x) = &\sum_{t \in G} \tau_x(gt^{-1}, t)\sigma_{(t \triangleleft x)^{-1}}((t \triangleright x)^{-1}, t \triangleright x)^{-1}\tau_x(t^{-1}, t)^{-1} \\
&\times \sigma_{gt^{-1}}(t \triangleright x, (t \triangleright x)^{-1})\delta_{g,1}\delta_{gt^{-1}}
\end{aligned}$$

$$m(id\otimes\mathcal{S})\Delta(\delta_g x) = \delta_{g,1}\sum_{t\in G}\delta_t = \delta_{g,1}1 = (\varepsilon\otimes\varepsilon)(\delta_g x)1.$$

□

Dessa forma, tem-se que R é uma álgebra de Hopf se e somente se valem (1.3.9), (1.3.10), (1.3.11) e (1.3.12).

Essas condições sobre σ e τ podem ser interpretadas a partir de um ponto de vista diferente. Assumindo inicialmente que (G, F) é um par combinado de grupos, tem-se que $\Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ é uma álgebra de Hopf se e somente se (τ, σ) é um 1-cociclo num certo complexo. Veremos isto na próxima seção

1.4 Interpretação cohomológica

O objetivo desta seção será apresentar, do ponto de vista cohomológico, a condição necessária e suficiente para que R seja uma álgebra de Hopf. Para tanto, serão apresentadas algumas definições para melhor compreender essa nova interpretação. Para maiores detalhes, ver [8].

No que segue, A denotará um anel comutativo.

Definição 1.4.1. *Um complexo de cadeia de A-módulos $C_.$ é uma família $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de A-módulos, junto com morfismos de A-módulos $d = d_n : A_n \longrightarrow A_{n-1}$ tais que cada composição $d\circ d : A_n \longrightarrow A_{n-2}$ é zero, ou seja, $Imd_n \subseteq \mathrm{Ker} d_{n-1}$. As aplicações d_n são denominadas diferenciais de $C_.$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, o núcleo de d_n é um R-submódulo de A_n chamado de n-ciclo e denotado por $Z_n = Z_n(C_.)$, e a imagem de $d_{n+1} : A_{n+1} \longrightarrow A_n$ é um R-submódulo de A_n chamado de n-fronteira e denotado por $B_n = B_n(C_.)$.*
Como $d\circ d = 0$, segue que $0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, pode-se definir o n-ésimo A-módulo homológico de $C_.$, o qual é o quociente $H_n(C_.) = Z_n/B_n$ de A_n.

Assim, um complexo de cadeia $C_.$ é visto na forma de sequência

$$\cdots \xrightarrow{d} A_{n+1} \xrightarrow{d} A_n \xrightarrow{d} A_{n-1} \xrightarrow{d} \cdots$$

onde $d \circ d = 0$.

Exemplo 1.4.2. *Seja $A_n = \{\mathbb{Z}_8, +\}$, para todo $n \geq 0$, e $A_n = 0$, quando $n < 0$. Para $n > 0$, considere os diferenciais $d_n : \mathbb{Z}_8 \longrightarrow \mathbb{Z}_8$ como $d_n(x + 8\mathbb{Z}) = 4x + 8\mathbb{Z}$. Note que $(d \circ d)(x + 8\mathbb{Z}) = 16x + 8\mathbb{Z} = 0 + 8\mathbb{Z}$, portanto $C_{\cdot}$ é um complexo de cadeia de $\mathbb{Z}$-módulos.*

Analogamente, definine-se complexo de cocadeia de R-módulos $C^{\cdot}$, "invertendo-se as flechas", ou seja, $d = d^n : A^n \longrightarrow A^{n+1}$, onde $d \circ d = 0$. Assim, $C^{\cdot}$ é visto como

$$\cdots \xleftarrow{\ d\ } A^{n+1} \xleftarrow{\ d\ } A^{n} \xleftarrow{\ d\ } A^{n-1} \xleftarrow{\ d\ } \cdots$$

onde $d \circ d = 0$. Nesse caso, Z^n é o R-submódulo de A^ndos n-cociclos e B^n o R-submódulo de A^n das n-cofronteiras.

Definição 1.4.3. *Um complexo duplo (ou bicomplexo) de R-módulos $C_{\cdot\cdot}$ é uma família $\{A_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ de R-módulos junto com morfismos de R-módulos*

$$d_h : A_{m,n} \longrightarrow A_{m-1,n} \qquad e \qquad d_v : A_{m,n} \longrightarrow A_{m,n-1}$$

tais que $d_h \circ d_h = d_v \circ d_v = d_v \circ d_h + d_h \circ d_v = 0$.

Assim, um bicomplexo de R-módulos $C_{\cdot\cdot}$ é apresentado da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
\cdots & A_{m-1,n+1} \arrow[l] \arrow[d, "d_v"] & A_{m,n+1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & A_{m+1,n+1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & A_{m-1,n} \arrow[l] \arrow[d, "d_v"] & A_{m,n} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & A_{m+1,n} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & A_{m-1,n-1} \arrow[l] \arrow[d, "d_v"] & A_{m,n-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & A_{m+1,n-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & \cdots \arrow[l] \\
 & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{tikzcd}$$

onde cada linha e cada coluna define um complexo de cadeia de R-módulos, além de $d_v \circ d_h + d_h \circ d_v = 0$. Essa condição é chamada de condição de anticomutatividade e permite definir os *complexos totais* $Tot(C_{..}) = Tot^{\Pi}(C_{..})$ e $Tot^{\oplus}(C_{..})$ como

$$Tot^{\Pi}(C_{..})_r = \prod_{m+n=r} A_{m,n} \qquad e \qquad Tot^{\oplus}(C_{..})_r = \bigoplus_{m+n=r} A_{m,n},$$

onde $d = d_{tot} = d_h + d_v$ define morfismos de R-módulos

$$d : Tot^{\Pi}(C_{..})_r \longrightarrow Tot^{\Pi}(C_{..})_{r-1} \qquad e \qquad d : Tot^{\oplus}(C_{..})_r \longrightarrow Tot^{\oplus}(C_{..})_{r-1}$$

com $d \circ d = 0$, tornando $Tot^{\Pi}(C_{..})$ e $Tot^{\oplus}(C_{..})$ complexos de cadeias de R-módulos. De fato, $d \circ d = (d_h + d_v) \circ (d_h + d_v) = d_h d_h + d_h d_v + d_v d_h + d_v d_v = 0 + 0 + 0 = 0$.

Definição 1.4.4. *Diz-se que um bicomplexo $C_{..}$ é limitado se cada linha diagonal $m + n = t$ possui um número finito de R-módulos não nulos.*

Exemplo 1.4.5. *Se os R-módulos diferentes de $\{0\}$ de um bicomplexo se concentram no primeiro quadrante (a posição dos quadrantes são dadas considerando o "centro" do complexo duplo em $A_{0,0}$), então esse bicomplexo é limitado.*

Note que, se $C_{..}$ é um complexo duplo limitado, então $Tot^{\Pi}(C_{..}) = Tot^{\oplus}(C_{..})$.

De forma semelhante se define o complexo duplo de cocadeias de R-módulos $C^{..}$, que é igual ao bicomplexo $C_{..}$, mas com as flechas dos diferenciais invertidas. Assim, $Tot^{\Pi}(C^{..})$ e $Tot^{\oplus}(C^{..})$ são complexos de cocadeia de R-módulos, onde $d^n = d = d^h + d^v$, também denotado por $d = d^{tot}$.

Com isso, já pode-se apresentar, do ponto de vista cohomológico, a condição necessária e suficiente para que $\Bbbk^G *_{\sigma}^{\tau} \Bbbk F$ seja uma álgebra de Hopf.

Tome $(G, F, \triangleright, \triangleleft)$ um par combinado de grupos e o grupo $\Sigma = F \bowtie G$.

Seja $B_q = \oplus_{1 \neq x_i \in F} \mathbb{Z}F[x_1|\cdots|x_q]$ o $\mathbb{Z}F$-módulo livre à esquerda que tem como base elementos do tipo $\{[x_1|\cdots|x_q]; 1 \neq x_i \in F\}$. Mais ainda, B_q pode ser visto como um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda via

$$s \cdot (x[x_1|\cdots|x_q]) = (s \triangleright x)[(s \triangleleft x) \triangleright x_1|(s \triangleleft xx_1) \triangleright x_2|\cdots|(s \triangleleft xx_1 \cdots x_{q-1}) \triangleright x_q],$$

para todo $s \in G, x, x_1, \cdots, x_q \in F, x_i \neq 1$. E portanto, um $\mathbb{Z}\Sigma$-módulo à esquerda.

De fato, tome $l, t \in \Sigma$, com $l = xg$ e $t = yh$, $x, y \in F, g, h \in G$. Tem-se que

$$
\begin{aligned}
l\cdot(z[x_1|\cdots|x_q]) &= xg\cdot(z[x_1|\cdots|x_q]) = x\cdot(g\cdot z[x_1|\cdots|x_q])\\
&= x\cdot((g\triangleright z)[(g\triangleleft z)\triangleright x_1|\cdots|(g\triangleleft zx_1\cdots x_{q-1})\triangleright x_q])\\
&= x(g\triangleright z)[(g\triangleleft z)\triangleright x_1|\cdots|(g\triangleleft zx_1\cdots x_{q-1})\triangleright x_q].
\end{aligned}
$$

Lembrando que $lt=(xg)(yh)=x(gy)h=x(g\triangleright y)(g\triangleleft y)h$, segue que

$$
\begin{aligned}
lt\cdot(z[x_1|\cdots|x_q]) = {}& x(g\triangleright y)(((g\triangleleft y)h)\triangleright z)[(((g\triangleleft y)h)\triangleleft z)\triangleright x_1|((g\triangleleft y)h\triangleleft zx_1)\triangleright x_2|\\
&\cdots|(((g\triangleleft y)h)\triangleleft zx_1\cdots x_{q-1})\triangleright x_q]).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
l\cdot(t\cdot z[x_1|\cdots|x_q]) &= l\cdot(y(h\triangleright z)[(h\triangleleft z)\triangleright x_1|\cdots|(h\triangleleft zx_1\cdots x_{q-1})\triangleright x_q])\\
&= x\cdot(g\cdot(y(h\triangleright z)[(h\triangleleft z)\triangleright x_1|\cdots|(h\triangleleft zx_1\cdots x_{q-1})\triangleright x_q]))\\
&= x\cdot(g\triangleright(y(h\triangleright z))[(g\triangleleft(y(h\triangleright z))\triangleright((h\triangleleft z)\triangleright x_1)|\\
&\quad (g\triangleleft(y(h\triangleright z))((h\triangleleft z)\triangleright x_1))\triangleright((h\triangleleft zx_1)\triangleright x_2)|\\
&\quad \cdots|(g\triangleleft(y(h\triangleright z))((h\triangleleft z)\triangleright x_1)\cdots\\
&\times((h\triangleleft zx_1\cdots x_{q-2})\triangleright x_{q-1}))\triangleright((h\triangleleft zx_1\cdots x_{q-1})\triangleright x_q)].
\end{aligned}
$$

Note que as propriedades de par combinado de (F,G) permitem verificar algumas igualdades, sendo elas:

$$
\begin{aligned}
x(g\triangleright(y(h\triangleright z))) &= x(g\triangleright y)((g\triangleleft y)\triangleright(h\triangleright z))\\
&= x(g\triangleright y)((g\triangleleft y)h\triangleright z),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(g\triangleleft(y(h\triangleright z)))\triangleright((h\triangleleft z)\triangleright x_1) &= ((g\triangleleft y)\triangleleft(h\triangleright z))\triangleright((h\triangleleft z)\triangleright x_1)\\
&= [((g\triangleleft y)\triangleleft(h\triangleright z))(h\triangleleft z)]\triangleright x_1\\
&= [(g\triangleleft y)h\triangleleft z]\triangleright x_1
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}(g \triangleleft (y(h \triangleright z))((h \triangleleft z) \triangleright x_1)) \triangleright ((h \triangleleft zx_1) \triangleright x_2) &= ((g \triangleleft y) \triangleleft (y(h \triangleright z))((h \triangleleft z) \triangleright x_1)) \\ &\quad \triangleright ((h \triangleleft zx_1) \triangleright x_2) \\ &= ((g \triangleleft y) \triangleleft (h \triangleright zx_1)) \triangleright ((h \triangleleft zx_1) \triangleright x_2) \\ &= (((g \triangleleft y) \triangleleft (h \triangleright zx_1))((h \triangleleft zx_1)) \triangleright x_2) \\ &= ((g \triangleleft y)h \triangleleft zx_1) \triangleright x_2.\end{aligned}$$

Seguindo esse raciocínio, mostra-se também que

$$\begin{aligned}&(g \triangleleft (y(h \triangleright z))((h \triangleleft z) \triangleright x_1) \cdots ((h \triangleleft zx_1 \cdots x_{q-2}) \triangleright x_{q-1})) \triangleright ((h \triangleleft zx_1 \cdots x_{q-1}) \triangleright x_q) \\ &= (((g \triangleleft y)h) \triangleleft zx_1x_2 \cdots x_{q-1}) \triangleright x_q.\end{aligned}$$

Logo,

$$l \cdot (t \cdot (z[x_1| \cdots |x_q])) = lt \cdot (z[x_1| \cdots |x_q]),$$

ou seja, B_q é um $\mathbb{Z}\Sigma$-módulo à esquerda.

Seja $B_.$ o complexo de cadeia de $\mathbb{Z}\Sigma$-módulos dado por

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} B_0 \xleftarrow{d_1} B_1 \xleftarrow{d_2} B_2 \longleftarrow \cdots$$

onde

$d_n([x_1| \cdots |x_n]) = x_1[x_2| \cdots |x_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[x_1|\cdots|x_ix_{i+1}|\cdots|x_n] + (-1)^n[x_1|\cdots|x_{n-1}]$,

$\varepsilon : B_0 = \mathbb{Z}F \to \mathbb{Z}, \quad \varepsilon(x) = 1,$ para todo $x \in F$.

Note que cada aplicação d_n é $\mathbb{Z}\Sigma$-linear. Com efeito, seja $l = xg \in \mathbb{Z}\Sigma$. Então $l \cdot [x_1| \cdots |x_n] = x[g \triangleright x_1| \cdots |(g \triangleleft x_1 \cdots x_n - 1) \triangleright x_n]$ e

$$\begin{aligned}l \cdot d_n[x_1| \cdots |x_n] &= l \cdot (x_1[x_2| \cdots |x_q] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [x_1| \cdots |x_ix_{i+1}| \cdots |x_n] + (-1)^n [x_1| \cdots |x_{n-1}]) \\ &= x(g \triangleright x_1)[(g \triangleleft x_1) \triangleright x_2| \cdots |(g \triangleleft x_1 \cdots x_{n-1}) \triangleright x_n] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i x[g \triangleright x_1| \cdots |(g \triangleleft x_1 \cdots x_{i-1}) \triangleright x_ix_{i+1}| \\ &\quad \cdots |(g \triangleleft x_1 \cdots x_{n-1}) \triangleright x_n] + (-1)^n x[g \triangleright x_1| \cdots |(g \triangleleft x_1 \cdots x_{n-2}) \triangleright x_{n-1}].\end{aligned}$$

Como (F,G) é um par combinado, tem-se ainda que

$$\begin{aligned}((g\triangleleft x_1\cdots x_{i-1})\triangleright x_i)((g\triangleleft x_1\cdots x_i)\triangleright x_{i+1}) &= ((g\triangleleft x_1\cdots x_{i-1})\triangleright x_i)\\ &\times(((g\triangleleft x_1\cdots x_{i-1})\triangleleft x_i)\triangleright x_{i+1})\\ &= (g\triangleleft x_1\cdots x_{i-1})\triangleright x_i x_{i+1}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}d_n(l\cdot[x_1|\cdots|x_n]) &= d_n(x[g\triangleright x_1|\cdots|(g\triangleleft x_1\cdots x_n-1)\triangleright x_n])\\ &= xd_n([g\triangleright x_1|\cdots|(g\triangleleft x_1\cdots x_n-1)\triangleright x_n])\\ &= x(g\triangleright x_1)[(g\triangleleft x_1)\triangleright x_2|\cdots|(g\triangleleft x_1\cdots x_{n-1})\triangleright x_n]\\ &+ x\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g\triangleright x_1|\cdots|(g\triangleleft x_1\cdots x_{i-1})\triangleright x_i x_{i+1}|\\ &\cdots|(g\triangleleft x_1\cdots x_{n-1})\triangleright x_n] + (-1)^n x[g\triangleright x_1|\cdots|(g\triangleleft x_1\cdots x_{n-2})\triangleright x_{n-1}].\end{aligned}$$

de onde $l\cdot d_n[x_1|\cdots|x_n] = d_n(l\cdot[x_1|\cdots|x_n])$, ou seja, que cada d_n é $\mathbb{Z}\Sigma$-linear. Claramente $d_{n-1}d_n=0$.

Considere agora $B'_n=\oplus_{1\neq g_i\in G}[g_n|\cdots|g_1]\mathbb{Z}G$ o $\mathbb{Z}G$-módulo livre à direita com base $\{[g_n|\cdots|g_1]; 1\neq g_i\in G\}$. De forma semelhante à anterior, cada B'_n tem estrutura de $\mathbb{Z}\Sigma$-módulo à direita considerando a ação à direita de F em B'_n dada por

$$([g_n|\cdots|g_1]g)\cdot x = [g_n\triangleleft(g_{n-1}\cdots g_1 g\triangleright x)|\cdots|g_2\triangleleft(g_1 g\triangleright x)|g_1\triangleleft(g\triangleright x)](g\triangleleft x).$$

Com isso, cada B'_n é também um $\mathbb{Z}\Sigma$-módulo à esquerda via $t\cdot([g_n|\cdots|g_1]g) = ([g_n|\cdots|g_1]g)\cdot t^{-1}$. Seja $B'_{\cdot}$ o complexo de cadeia de $\mathbb{Z}\Sigma$-módulos dado por

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} B'_0 \xleftarrow{d'_1} B'_1 \xleftarrow{d'_2} B'_2 \longleftarrow \cdots$$

onde

$$d'_n[g_n|\cdots|g_1] = [g_n|\cdots|g_2]g_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_n|\cdots|g_{i+1}g_i|\cdots|g_1] + (-1)^n[g_{n-1}|\cdots|g_1],$$
$$\varepsilon: B'_0=\mathbb{Z}G\to\mathbb{Z},\quad \varepsilon(x)=1,\ \text{para todo } g\in G.$$

Agora, tendo esses dois complexos, considerando $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}}$, pode-se construir um complexo duplo de cadeias de $\mathbb{Z}\Sigma$-módulos, que será denotado por $B_{..}$,

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "d_2'\otimes id"'] & \vdots \arrow[d, "-d_2'\otimes id"'] & \\
B_1'\otimes B_0 & B_1'\otimes B_1 \arrow[l, "id\otimes d_1"'] \arrow[d, "-d_1'\otimes id"'] & \cdots \arrow[l] \\
B_0'\otimes B_0 \arrow[from=u, "d_1'\otimes id"'] & B_0'\otimes B_1 \arrow[l, "id\otimes d_1"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

onde as aplicações das colunas ímpares recebem o sinal negativo para que $d_h d_v + d_v d_h = 0$.

Observação 1.4.6. *Note que cada $\mathbb{Z}\Sigma$-módulo à esquerda $B_p'\otimes B_q$ é livre com base $[g_p|\cdots|g_1]\otimes[x_1|\cdots|x_q]$, onde $1 \neq x_i \in F, 1 \neq g_i \in G$.*

Com efeito, seja $t \in \Sigma$ e considere a estrutura de $\mathbb{Z}\Sigma$-módulo de $B_p'\otimes B_q$ dada por

$$t\cdot([g_p|\cdots|g_1]\otimes[x_1|\cdots|x_q]) = t\cdot[g_p|\cdots|g_1]\otimes t\cdot[x_1|\cdots|x_q].$$

Então, tomando $t = xg$ com $x \in F, g \in G$, segue que

$$\begin{aligned}
xg\cdot([g_p|\cdots|g_1]\otimes[x_1|\cdots|x_q]) &= xg\cdot[g_p|\cdots|g_1]\otimes xg\cdot[x_1|\cdots|x_q] \\
&= [g_p|\cdots|g_1]\cdot g^{-1}x^{-1}\otimes xg\cdot[x_1|\cdots|x_q] \\
&= [g_p|\cdots|g_1]g^{-1}\cdot x^{-1}\otimes x((g\triangleright 1)[(g\triangleleft 1)\triangleright x_1|\cdots|(g\triangleleft 1x_1\cdots x_{q-1})\triangleright x_q]) \\
&= [g_p\triangleleft(g_{p-1}\cdots g_1 g^{-1}\triangleright x^{-1})|\cdots|g_1\triangleleft(g^{-1}\triangleright x^{-1})](g^{-1}\triangleleft x^{-1}) \\
&\otimes x[g\triangleright x_1|\cdots|(g\triangleleft x_1\cdots x_{q-1})\triangleright x_q].
\end{aligned}$$

Assim, para cada $[g_p'|\cdots|g_1']g'\otimes x'[x_1'|\cdots|x_q'] \in B_p'\otimes B_q$, pondo $g = (g'\triangleleft x)^{-1}$, $x' = x$ e $g_i = g_i'\triangleleft(g_{i-1}'\cdots\triangleleft g_1' g\triangleright x)$, segue que

$$[g_p'|\cdots|g_1']g'\otimes x'[x_1'|\cdots|x_q'] = xg\cdot([g_p|\cdots|g_1]\otimes[x_1|\cdots|x_q]),$$

ou seja, cada $B_p'\otimes B_q$ é um $\mathbb{Z}\Sigma$-módulo livre à esquerda.

Considere $\Bbbk^\times$ como um $\mathbb{Z}\Sigma$-módulo à esquerda trivial. Aplicando $Hom_\Sigma(-,\Bbbk^\times)$

à $B_{..}$, obtem-se o complexo duplo de cocadeias denotado por $D^{\cdot\cdot}$,

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
D^{01} \arrow[d] & D^{11} \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
D^{00} & D^{10} \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

e como cada $B'_p \otimes B_q$ é um $\mathbb{Z}\Sigma$-módulo livre, cada $D^{qp} = Hom_{\mathbb{Z}}(B'_p \otimes_{\mathbb{Z}} B_q, \Bbbk^{\times})$ é identificado como $Map_+(G^p \times F^q, \Bbbk^{\times})$, que é o grupo abeliano das aplicações $f : G^p \times F^q \longrightarrow \Bbbk^{\times}$ tais que $f(g_p, ..., g_1; x_1, ..., x_q) = 1$ sempre que $g_i = 1$ ou $x_j = 1$ para algum $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$.

Note que a primeira linha e a primeira coluna de $D^{\cdot\cdot}$ podem ser excluídas pois, como $F^0 = G^0 = 1$, tem-se $Map_+(G^0 \times F^i, \Bbbk^{\times}) = Map_+(G^i \times F^0, \Bbbk^{\times}) = 1$ para cada i.

Obtem-se, então, o complexo duplo $C^{\cdot\cdot}$

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \\
Map_+(G^2 \times F^1, \Bbbk^{\times}) \arrow[u] \arrow[r, "\partial"] & Map_+(G^2 \times F^2, \Bbbk^{\times}) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
Map_+(G^1 \times F^1, \Bbbk^{\times}) \arrow[u, "\partial'"] \arrow[r, "\partial"] & Map_+(G^1 \times F^2, \Bbbk^{\times}) \arrow[u, "\partial'"] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd},$$

onde para cada $f : G^p \times F^q \longrightarrow \Bbbk^{\times}$, ∂f e $\partial' f$ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
\partial f(g_p, ..., g_1; x_1, ..., x_{q+1}) &= f(g_p \triangleleft (g_{p-1} \cdots g_1 \triangleright x_1), ..., g_1 \triangleleft x_1; x_2, ..., x_{q+1}) \\
&\times \prod_{i=1}^{q} f(g_p, ..., g_1; x_1, ..., x_i x_{x+1}, ..., x_{q+1})^{(-1)^i} \\
&\times f(g_p, ..., g_1; x_1, ..., x_q)^{(-1)^{q+1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial' f(g_{p+1},...,g_1;x_1,...,x_q)^{(-1)^q} &= f(g_{p+1},...,g_2;g_1 \triangleright x_1,(g_1 \triangleleft x_1) \triangleright x_2,\\
&\quad ...,(g_1 \triangleleft x_1 \cdots x_{q-1}) \triangleright x_q)\\
&\times \prod_{i=1}^{p} f(g_{p+1},...,g_{i+1}g_i,...,g_1;x_1,...,x_q)^{(-1)^i}\\
&\times f(g_p,...,g_1;x_1,...,x_q)^{(-1)^{p+1}}
\end{aligned}
$$

Note que ∂f é como acima, pois

$$
\begin{aligned}
\partial f(g_p,...,g_1;x_1,...,x_{q+1}) &= f((id \otimes d_{q+1})([g_p|\cdots|g_1] \otimes [x_1|\cdots|x_{q+1}]))\\
&= f([g_p|\cdots|g_1] \otimes (x_1[x_2|\cdots|x_{q+1}]\\
&+ \sum_{i=1}^{q}(-1)^i[x_1|\cdots|x_ix_{i+1}|\cdots|x_{q+1}]\\
&+ (-1)^{q+1}[x_1|\cdots|x_q]))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial f(g_p,...,g_1;x_1,...,x_{q+1}) &= f([g_p|\cdots|g_1] \otimes (x_1[x_2|\cdots|x_{q+1}]))\\
&\times \prod_{i=1}^{q} f([g_p|\cdots|g_1] \otimes [x_1|\cdots|x_ix_{i+1}|\cdots|x_{q+1}])^{(-1)^i}\\
&\times f([g_p|\cdots|g_1] \otimes [x_1|\cdots|x_q])^{(-1)^{q+1}}\\
&= f(x_1([g_p|\cdots|g_1] \cdot x_1 \otimes [x_2|\cdots|x_{q+1}]))\\
&\times \prod_{i=1}^{q} f([g_p|\cdots|g_1] \otimes [x_1|\cdots|x_ix_{i+1}|\cdots|x_{q+1}])^{(-1)^i}\\
&\times f([g_p|\cdots|g_1] \otimes [x_1|\cdots|x_q])^{(-1)^{q+1}}\\
&= x_1 \cdot f([g_{p-1} \cdots g_1 \triangleright x_1|\cdots|g_1 \triangleleft x_1] \cdot x_1 \otimes [x_2|\cdots|x_{q+1}])\\
&\times \prod_{i=1}^{q} f([g_p|\cdots|g_1] \otimes [x_1|\cdots|x_ix_{i+1}|\cdots|x_{q+1}])^{(-1)^i}\\
&\times f([g_p|\cdots|g_1] \otimes [x_1|\cdots|x_q])^{(-1)^{q+1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial f(g_p,...,g_1;x_1,...,x_{q+1}) &= f([g_{p-1}\cdots g_1 \triangleright x_1|\cdots|g_1 \triangleleft x_1]\cdot x_1 \otimes [x_2|\cdots|x_{q+1}]) \\
&\times \prod_{i=1}^{q} f([g_p|\cdots|g_1]\otimes[x_1|\cdots|x_i x_{i+1}|\cdots|x_{q+1}])^{(-1)^i} \\
&\times f([g_p|\cdots|g_1]\otimes[x_1|\cdots|x_q])^{(-1)^{q+1}}.
\end{aligned}
$$

Observe que a mudança $[g_p|\cdots|g_1]\otimes x_1[x_2|\cdots|x_q] = x_1\cdot([g_p|\cdots|g_1]\cdot x_1\otimes[x_2|\cdots|x_q])$ ocorre por que $B'_p\otimes B_{q+1}$ é um $\mathbb{Z}\Sigma$-módulo livre e por que a estrutura de $\mathbb{Z}\Sigma$-módulo de $\Bbbk^\times$ é a trivial.

Finalmente, escrevendo $\sigma_g(x,y)=\sigma(g;x,y)$ e $\tau_x(g,h)=\tau(h,g;x)$, o fato de

$$
\sigma_g(1,x)=\sigma_g(x,1)=\sigma_1(x,y)=1=\tau_x(1,g)=\tau_x(g,1)=\tau_1(g,h),
$$

para todo $g,h\in G, x,y\in F$, equivale a dizer que $(\tau,\sigma)\in Map_+(G^2\times F^1,\Bbbk^\times)\oplus Map_+(G^1\times F^2,\Bbbk^\times)$. Além disso, as condições de 2-cociclos de σ e τ, juntamente com a igualdade (1.3.9), equivalem a afirmar que $\delta_1^{tot}(\tau,\sigma)=1$, onde

$$
\delta_1^{tot}: Tot(C^{\cdot\cdot})^1 \longrightarrow Tot(C^{\cdot\cdot})^2.
$$

Mais explicitamente, considerando as projeções

$$
p_i: Tot(C^{\cdot\cdot})^n = \oplus_{j=1}^{n-j+2} Map_+(G^{n-j+2}\times F^j,\Bbbk^\times) \longrightarrow Map_+(G^{n-i}\times F^i,\Bbbk^\times).
$$

Então, por τ ser um 2-cociclo, tem-se que

$$
\begin{aligned}
p_1(\delta_1^{tot}(\tau,\sigma))(g,h,k;x) &= \partial'\tau(g,h,k;x) \\
&= \tau(g,h;k\triangleright x)^{-1}\tau(g,hk;x)\tau(gh,k;x)^{-1}\tau(h,k;x)=1,
\end{aligned}
$$

para todo $g,h,k\in G, x\in F$. E por σ ser um 2-cociclo, tem-se que

$$
\begin{aligned}
p_3(\delta_1^{tot}(\tau,\sigma))(g;x,y,z) &= \partial\sigma(g;x,y,z) \\
&= \sigma(g\triangleleft x;y,z)\sigma(g;xy,z)^{-1}\sigma(g;x,yz)\sigma(g;x,y)^{-1}=1,
\end{aligned}
$$

para todo $g\in G, x,y,z\in F$. Agora, como vale a igualdade (1.3.9), tem-se que

$$
\begin{aligned}
p_2(\delta_1^{tot}(\tau,\sigma))(g,h;x,y) &= \partial\tau(g,h;x,y)\partial'\sigma(g,h;x,y)\\
&= \tau_{xy}(g,h)^{-1}\tau_x(g,h)\tau_y(g\triangleleft(h\triangleright x),h\triangleleft x)\sigma_{gh}(x,y)^{-1}\\
&\times\sigma_g(h\triangleright x,(h\triangleleft x)\triangleright y)\sigma_h(x,y)=1,
\end{aligned}
$$

para todo $g,h\in G, x,y\in F$.

Portanto, supondo inicialmente (G,F) um par combinado de grupos, tem-se que $\Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ é uma álgebra de Hopf se e somente se (τ,σ) é um 1-cociclo no complexo de cocadeia $Tot(C^{\cdot\cdot})$.

1.5 Semissimplicidade e cossemissimplicidade

O objetivo nesta seção é mostrar que desde que a característica de $\Bbbk$ não divida a ordem de F e a ordem de G, tem-se que a álgebra de Hopf $R=\Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ é semissimples e cossemissimples.

Para demonstrar isto, será necessário introduzir a noção de integrais.

Definição 1.5.1. *Seja H uma biálgebra. Uma aplicação $\lambda\in H^*$ é dita uma integral à esquerda para H se $h^*\lambda=h^*(1)\lambda$ para todo $h^*\in H^*$.*

O espaço das integrais à esquerda para H será denotado por $\int_l$. Claramente, $\int_l$ é um subespaço de H^*.

Exemplo 1.5.2. *Tome $\lambda=\sum_{h\in G}h\delta_1\in R^*$. Segue que*

$$
\begin{aligned}
(g\delta_x)\lambda = (g\delta_x)(\sum_{h\in G}h\delta_1) &= \sum_{h\in G}g\delta_x h\delta_1 = \sum_{h\in G}gh\tau_x(g,h)\delta_{g^{-1}\triangleright x,1}\delta_1\\
&= \sum_{h\in G}gh\tau_x(g,h)\delta_{x,1}\delta_1 = \sum_{h'\in G}(g\delta_x(1))h'\delta_1 = g\delta_x(1)\lambda,
\end{aligned}
$$

desde que $\tau_1(g,h)=1$ e $g\delta_x(1)=g\delta_x(\sum_{s\in G}\delta_s 1)=\sum_{s\in G}\delta_{g,s}\delta_{x,1}=\delta_{x,1}$ para todo $g,h\in G$ e $x\in F$. Portanto λ é uma integral à esquerda para R.

Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, pelo Corolário 5.26 em [3], tem-se que $\int_l$ tem dimensão 1. Neste caso, pode-se definir o conceito de integrais para H por outro caminho.

Lembre que a aplicação $\theta : H \longrightarrow H^{**}$ dada por $\theta(h)(h^*) = h^*(h)$, para todo $h \in H, h^* \in H^*$ é um isomorfismo de $\Bbbk$-álgebras. Agora, suponha que $\theta(t) \in H^{**}$ é uma integral à esquerda para H^*. Uma vez que qualquer elemento em H^{**} é da forma $\theta(l)$, para algum $l \in H$, isto significa que

$$\begin{aligned} \theta(ht) &= \theta(h) * \theta(t) = \theta(h)(1_{H^*})\theta(t) \\ &= \varepsilon(h)\theta(t) = \theta(h)(\varepsilon)\theta(t) = \theta(\varepsilon(h)t), \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue da Proposição 1.2.20 para o caso particular de H^*.

Como θ é injetora, segue que $ht = \varepsilon(h)t$, para todo $h \in H$. Logo, $\theta(t)$ é uma integral à esquerda para H^* se e somente se $ht = \varepsilon(h)t$, para todo $h \in H$.

Isto justifica a seguinte definição.

Definição 1.5.3. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Uma integral à esquerda em H é um elemento $t \in H$ tal que $ht = \varepsilon(h)t$ para qualquer $h \in H$.*

Exemplo 1.5.4. *Tome $t = \sum_{y \in F} \delta_1 y \in R$. Segue que*

$$\begin{aligned} (\delta_g x)t &= (\delta_g x)(\sum_{y \in F} \delta_1 y) = \sum_{y \in F} \delta_g x \delta_1 y = \sum_{y \in F} \delta_{g \triangleleft x, 1} \sigma_g(x, y) \delta_g xy \\ &= \sum_{y \in F} \delta_{g,1} \sigma_g(x, y) \delta_g xy = \sum_{y' \in F} \varepsilon(\delta_g x) \delta_1 y' = \varepsilon(\delta_g x)t, \end{aligned}$$

desde que $\sigma_1(x, y) = 1$ e $\varepsilon(\delta_g x) = \delta_{g,1}$, para todo $x, y \in F$ e $g \in G$. Portanto t é uma integral à esquerda em R.

Definição 1.5.5. *Uma álgebra A é dita semissimples se A é soma de subálgebras simples.*

Definição 1.5.6. *Uma coálgebra C é dita cossemissimples se C é soma de subco-ï¿½lgebras simples.*

Em [3] são dadas as seguintes caracterizações para esses conceitos.

Proposição 1.5.7. ***(Theorem 5.2.10, [3])*** *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então H é uma álgebra semissimples se e somente se $\varepsilon(t) \neq 0$ para alguma integral à esquerda $t \in H$.*

Proposição 1.5.8. ***(Exercise 5.5.9, [3])*** *Seja H uma álgebra de Hopf. Então H é uma coálgebra cossemissimples se e somente se existe uma integral à esquerda $\lambda \in H^*$ tal que $\lambda(1) = 1$.*

Por fim, note que

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\sum_{y \in F} \delta_1 y) = \sum_{y \in F} \delta_{1,1} = |F|,$$
$$\lambda(1) = \sum_{h \in G} h\delta_1(\sum_{s \in G} \delta_s 1) = \sum_{h,s \in G} \delta_{h,s}\delta_{1,1} = |G|.$$

Fixe λ e t apresentados nos exemplos anteriores. Como o espaço das integrais à esquerda em H e para H tem dimensão 1, tem-se que qualquer integral t' em H é dada da forma $t' = \alpha t$, de onde tem-se que $\varepsilon(t') = \alpha|F|$. Da mesma maneira, qualquer integral λ' para H é dada da forma $\lambda' = \beta\lambda$, de onde segue que $\lambda'(1) = \beta|G|$. Assim, R é uma álgebra de Hopf semissimples e cossemissimples se e somente se a característica do corpo $\Bbbk$ não divide $|F|$ nem $|G|$.

Capítulo 2

Álgebra de Hopf trançada associada a um par combinado de grupos

Agora que se conhecem as condições sob os cociclos σ e τ para que o produto bicruzado $\Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ seja um ágebra de Hopf, pode-se perguntar o que é necessário para que essa álgebra seja uma álgebra de Hopf trançada, com uma trança previamente estabelecida. Esse será o objetivo deste capítulo, a construção original pode ser vista em [1].

2.1 Álgebra de Hopf trançada

Essa seção tem por finalidade apresentar a definição do que é uma álgebra de Hopf trançada na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld. Para isso, inicialmente será apresentada a definição de categoria. Para detalhes ver [2].

Definição 2.1.1. *Uma categoria pequena $\mathcal{C}$ consiste de*

- *um conjunto de objetos $A, B, \cdots$,*
- *uma família disjunta de conjuntos, $Hom(A, B)$, para cada par de objetos (A, B),*
- *uma lei de composição: se $f \in Hom(A, B)$ e $g \in Hom(B, C)$ então $fg \in Hom(A, C)$, caso contrário fg não está definido,*

- *para cada objeto A existe um elemento distiguido $1_A \in Hom(A, A)$,*

satisfazendo dois axiomas:

i. A composição é associativa, isto é, se $f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$ e $h \in Hom(C, D)$ então $(fg)h = f(gh)$,

ii. $1_A f = f = f 1_B$, para todo $f \in Hom(A, B)$.

Os elementos de $Hom(A, B)$ são chamados de *morfismos ou flechas* de A para B, e escreve-se $f : A \to B$ em vez de $f \in Hom(A, B)$. O elemento distinguido 1_A é chamado de *morfismo identidade* em A.

Seguem alguns exemplos de categorias.

Exemplo 2.1.2. *Categoria dos conjutos, **Set**, onde os objetos são conjuntos, as flechas são funções entre os conjuntos, a composição é a usual e o morfismo identidade é a função identidade.*

Exemplo 2.1.3. *Categoria $\boldsymbol{Vec}_{\Bbbk}$, onde os objetos são os espaços vetoriais sobre o corpo $\Bbbk$, as flechas são as aplicações $\Bbbk$-lineares, a composição é a usual e a unidade é a função identidade.*

Exemplo 2.1.4. *Categoria dos H-módulos à esquerda, ${}_H\mathcal{M}$, onde os objetos são H-módulos à esquerda, as flechas são morfismos de H-módulos, a composição é a usual e a unidade é a identidade.*

Exemplo 2.1.5. *Categoria dos H-comódulos à esquerda, ${}^H\mathcal{M}$, onde os objetos são H-comódulos à esquerda, as flechas são morfismos de H-comódulos, a composição é a usual e a unidade é a identidade.*

Exemplo 2.1.6. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Então, $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é uma categoria cujos objetos são pares (C, D), onde $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$ e as flechas são pares (f, g), com $f \in \mathcal{C}, g \in \mathcal{D}$.*

É possível relacionar duas categorias, esse novo conceito é a noção de mofismos entre categorias, o qual é denominado funtor.

Definição 2.1.7. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é uma função que associa a cada objeto $C \in \mathcal{C}$ um único objeto $F(C) \in \mathcal{D}$ e a cada flecha $f : C \longrightarrow D$ uma única flecha $F(f) : F(C) \longrightarrow F(D)$, tal que,* *i.* *Se* $g \circ f$ *é uma composição de flechas em* $\mathcal{C}$, *então* $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ *é uma composição de flechas em* $\mathcal{D}$;

ii. $F(1_A) = 1_{F(A)}$, *para todo objeto* $A \in \mathcal{C}$.

Exemplo 2.1.8. *Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria. O funtor diagonal associa a cada objeto* $A \in \mathcal{C}$ *o objeto* $A \times A \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, *e a cada flecha* f *em* $\mathcal{C}$ *a flecha* $f \times f$ *em* $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Exemplo 2.1.9. *Sejam* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *duas categorias. O funtor projeção sobre* $\mathcal{C}$ *associa a cada objeto* $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ *o objeto* $A \in \mathcal{C}$ *e a cada flecha* $(f, g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ *a flecha* $f \in \mathcal{C}$.

Definição 2.1.10. *Sejam* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *categorias e dois funtores* $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. *Uma transformação natural* $\eta : F \longrightarrow G$ *é uma família* $\{\eta_A : F(A) \longrightarrow G(A); A \in \mathcal{C}\}$ *de flechas em* $\mathcal{D}$ *tal que para quaisquer objetos* $A, B \in \mathcal{C}$ *e cada flecha* $f : A \longrightarrow B$ *em* $\mathcal{C}$, *o seguinte diagrama comuta,*

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}
.
$$

Além disso, se η_A *é um isomorfismo para todo* $A \in \mathcal{C}$, *então* η *é chamado de isomorfismo natural.*

Uma classe especial de categorias são as categorias monoidais.

Definição 2.1.11. *Uma categoria monoidal é uma sêxtupla* $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r, \mathbf{1})$ *onde* $\mathcal{C}$ *é uma categoria,* $\mathbf{1}$ *é um objeto em* $\mathcal{C}$, *chamado unidade, e valem as seguintes afirmações,*

i. $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *é um funtor;*

ii. *as aplicações* $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \longrightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$, $r_X : X \otimes \mathbf{1} \longrightarrow X$ *e* $l_X : \mathbf{1} \otimes X \longrightarrow X$ *são isomorfismos naturais que satisfazem a comutatividade dos seguintes diagramas*

$$
\begin{tikzcd}
 & ((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes id_W"'] \arrow[dr, "a_{X\otimes Y,Z,W}"] & \\
(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes W \arrow[d, "a_{X,Y\otimes Z,W}"'] & & (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z\otimes W}"] \\
X\otimes((Y\otimes Z)\otimes W) \arrow[rr, "id_X\otimes a_{Y,Z,W}"] & & X\otimes(Y\otimes(Z\otimes W))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(X\otimes \mathbf{1})\otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes id_Y"'] & & X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y) \arrow[dl, "id_X\otimes l_Y"] \\
 & X\otimes Y &
\end{tikzcd}
$$

denominados axioma do pentágono e do triângulo, respectivamente.

Observação 2.1.12. *Se os isomorfismos naturais a, l, r, que fazem de uma categoria, uma categoria monoidal, são os triviais, então esta categoria é denominada categoria monoidal estrita.*

Seguem alguns exemplos de categorias monoidais.

Exemplo 2.1.13. *A categoria **Set** é monoidal, onde o produto tensorial $\otimes$ é o produto cartesiano, a unidade é um conjunto unitário qualquer, a associatividade é a canônica e os isomorfismo naturais r, l são os triviais.*

Exemplo 2.1.14. *A categoria $\boldsymbol{Vec}_{\Bbbk}$ é monoidal, onde o produto tensorial $\otimes = \otimes_{\Bbbk}$, a unidade é o corpo $\Bbbk$, a associatividade é a canônica e os isomorfismo naturais r, l são os triviais.*

Dentre as categorias monoidais, existem ainda aquelas que são denominadas trançadas. Mas antes será introduzido o conceito de pré-trança.

Definição 2.1.15. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Diz-se que a aplicação $c_{V,W}$: $V\otimes W \longrightarrow W\otimes V$ é uma pré-trança para $\mathcal{C}$, se c é uma transformação natural tal que, para quaisquer objetos $U, V, W \in \mathcal{C}$, os seguintes diagramas são comutativos*

$$
\begin{tikzcd}
& (U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"] \arrow[dl, "c_{U,V}\otimes id_W"'] & U\otimes(V\otimes W) \arrow[dr, "c_{U,V\otimes W}"] & \\
(V\otimes U)\otimes W \arrow[dr, "a_{V,U,W}"'] & & & (V\otimes W)\otimes U \arrow[dl, "a_{V,W,U}"] \\
& V\otimes(U\otimes W) \arrow[r, "id_V\otimes c_{U,W}"'] & V\otimes(W\otimes U) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& U\otimes(V\otimes W) \arrow[r, "id_U\otimes c_{V,W}"] \arrow[dl, "a^{-1}_{U,V,W}"'] & U\otimes(W\otimes V) \arrow[dr, "a^{-1}_{U,W,V}"] & \\
(U\otimes V)\otimes W \arrow[dr, "c_{U\otimes V,W}"'] & & & (U\otimes W)\otimes V \arrow[dl, "c_{U,W}\otimes id_V"] \\
& W\otimes(U\otimes V) \arrow[r, "a^{-1}_{W,U,V}"'] & (W\otimes U)\otimes V &
\end{tikzcd}
.
$$

Nesse caso, $(\mathcal{C}, c)$ é dita uma categoria monoidal pré-trançada.

Definição 2.1.16. *Uma categoria monoidal pré-trançada $(\mathcal{C}, c)$ é dita trançada se c é um isomorfismo natural.*

Exemplo 2.1.17. *A categoria monoidal **Set** é trançada com a trança definida por $c_{U,V}(u, v) = (v, u)$.*

Exemplo 2.1.18. *A categoria monoidal $\textbf{Vec}_{\Bbbk}$ é trançada com a trança definida por $c_{U,V}(u \otimes v) = v \otimes u$.*

Definição 2.1.19. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda $\mathcal{S}$. Diz-se que M é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H se M é um H-módulo à esquerda e um H-comódulo à esquerda e para todo $h \in H$ e $m \in M$, tem-se a seguinte condição de compatibilidade,*

$$\rho(h \cdot m) = h_1 m_{-1} \mathcal{S}(h_3) \otimes h_2 \cdot m_0.$$

Exemplo 2.1.20. *Seja H uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf. Qualquer $\Bbbk$-espaço vetorial V é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H com ação e coação triviais.*

Exemplo 2.1.21. *Seja H uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf. Tem-se que H é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre si mesmo considerando a ação $h' \cdot h = h'h$ e a coação $\rho(h) = h_1\mathcal{S}(h_3)\otimes h_2$, para todo $h, h' \in H$.*

Considere a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda ${}^H_H\mathcal{YD}$ que tem como objetos $\Bbbk$-espaços vetoriais que são módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda. As flechas são morfismo tanto de H-módulos quanto de H-comódulos, a composição e a associatividade são as usuais, a unidade é o morfismo identidade e o objeto identidade é o corpo $\Bbbk$.

Teorema 2.1.22. *Se H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetiva $\mathcal{S}$, então ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal trançada.*

Demonstração: Tem-se que $({}^H_H\mathcal{YD}, \otimes, a, l, r, \mathbf{1})$ é uma categoria monoidal, onde $\otimes$ é o funtor tensorial usual sobre o corpo $\Bbbk$, o objeto unidade de ${}^H_H\mathcal{YD}$ é $\mathbf{1} = \Bbbk$, o morfismo a dado por

$$\begin{aligned} a_{X,Y,Z} : (X\otimes Y)\otimes Z &\longrightarrow X\otimes(Y\otimes Z) \\ (x\otimes y)\otimes z &\mapsto x\otimes(y\otimes z) \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in {}^H_H\mathcal{YD}$, e os morfismos r_X e l_X, para todo $X \in {}^H_H\mathcal{YD}$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} l_X : \Bbbk\otimes X &\longrightarrow X \\ 1_{\Bbbk}\otimes x &\mapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} r_X : X\otimes\Bbbk &\longrightarrow X \\ x\otimes 1_{\Bbbk} &\mapsto x \end{aligned}$$

Note que $\otimes$ é um funtor. De fato, se $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$, então $M\otimes N$ é um H-módulo via $h\cdot(m\otimes n) = h_1\cdot m\otimes h_2\cdot n$ e um H-comódulo via $\rho(m\otimes n) = m_{-1}n_{-1}\otimes m_0\otimes n_0$, para todo $m\otimes n \in M\otimes N$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \rho(h\cdot(m\otimes n)) &= \rho(h_1\cdot m\otimes h_2\cdot n) \\ &= (h_1\cdot m)_{-1}(h_2\cdot m)_{-1}\otimes(h_1\cdot m)_0\otimes(h_2\cdot m)_0 \\ &= h_1 m_{-1}\mathcal{S}(h_3)h_4 n_{-1}\mathcal{S}(h_6)\otimes h_2\cdot m_0\otimes h_5\cdot n_0 \\ &= h_1 m_{-1}\varepsilon(h_3)n_{-1}\mathcal{S}(h_5)\otimes h_2\cdot m_0\otimes h_4\cdot n_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(h\cdot(m\otimes n)) &= h_1m_{-1}n_{-1}\mathcal{S}(h_5)\otimes(\varepsilon(h_3)h_2)\cdot m_0\otimes h_4\cdot n_0\\ &= h_1m_{-1}n_{-1}\mathcal{S}(h_4)\otimes h_2\cdot m_0\otimes h_3\cdot n_0\\ &= h_1m_{-1}n_{-1}\mathcal{S}(h_3)\otimes h_2\cdot(m_0\otimes n_0)\\ &= h_1(m\otimes n)_{-1}\mathcal{S}(h_3)\otimes h_2\cdot(m\otimes n)_0.\end{aligned}$$

Portanto, $M\otimes N$ é um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Além disso, sejam $f: M\longrightarrow M'$ e $g: N\longrightarrow N'$ morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Note que o morfismo $f\otimes g$ definido por $(f\otimes g)(m\otimes n) = f(m)\otimes g(n)$ pertence a ${}^H_H\mathcal{YD}$. De fato, tem-se

$$\begin{aligned}(f\otimes g)(h\cdot(m\otimes n)) &= (f\otimes g)(h_1\cdot m\otimes h_2\cdot n) = f(h_1\cdot m)\otimes g(h_2\cdot n)\\ &= h_1\cdot f(m)\otimes h_2\cdot g(n) = h\cdot(f(m)\otimes g(n))\\ &= h\cdot(f\otimes g)(m\otimes n),\end{aligned}$$

Logo, $f\otimes g$ é um morfismo de H-módulos. Além disso,

$$\begin{aligned}\rho((f\otimes g)(m\otimes n)) &= \rho(f(m)\otimes g(n)) = (f(m))_{-1}(g(n))_{-1}\otimes(f(m))_0\otimes(g(n))_0\\ &= m_{-1}n_{-1}\otimes f(m_0)\otimes g(n_0) = (id_H\otimes f\otimes g)(m_{-1}n_{-1}\otimes m_0\otimes n_0)\\ &= (id_H\otimes f\otimes g)(\rho(m\otimes n)).\end{aligned}$$

Assim, $f\otimes g$ é um morfismo de H-comódulos, e consequentemente $\otimes$ é um funtor.

Tem-se ainda que $\mathbf{1}=\Bbbk$ é um objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$, pois é um H-módulo via $h\cdot k = \varepsilon(h)k$, um H-comódulo via $\rho(k) = 1_H\otimes k$. Além disso,

$$\begin{aligned}\rho(h\cdot k) &= \rho(\varepsilon(h)k) = \varepsilon(h)1_H\otimes k = h_1\mathcal{S}(h_2)\otimes k = h_1\mathcal{S}(h_3)\varepsilon(h_2)\otimes k\\ &= h_1 1_H\mathcal{S}(h_3)\otimes\varepsilon(h_2)k = h_1 1_H\mathcal{S}(h_3)\otimes h_2\cdot k.\end{aligned}$$

É fácil verficar que a aplicação a é uma transformação natural. De fato, para cada trio $M,N,R\in^H_H\mathcal{YD}$, segue que $a_{M,N,R}$ é um morfismo de H-módulos, ou seja,

$$\begin{aligned}a_{M,N,R}(h\cdot((m\otimes n)\otimes r))) &= a_{M,N,R}(h_1\cdot(m\otimes n)\otimes h_2\cdot r)\\ &= a_{M,N,R}((h_1\cdot m\otimes h_2\cdot n)\otimes h_3\cdot r)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{M,N,R}(h\cdot((m\otimes n)\otimes r))) &= h_1\cdot m\otimes(h_2\cdot n\otimes h_3\cdot r)\\
&= h_1\cdot m\otimes h_2\cdot(n\otimes r)\\
&= h\cdot(m\otimes(n\otimes r))\\
&= h\cdot a_{M,N,R}((m\otimes n)\otimes r),
\end{aligned}
$$

para todo $m\in M, n\in N, r\in R, h\in H$, e também um morfismo de H-comódulos, ou seja,

$$
\begin{aligned}
\rho(a_{M,N,R}((m\otimes n)\otimes r)) &= \rho(m\otimes(n\otimes r))\\
&= m_{-1}(n\otimes r)_{-1}\otimes m_0\otimes(n\otimes r)_0\\
&= m_{-1}(n_{-1}r_{-1})\otimes m_0\otimes(n_0\otimes r_0)\\
&= (id_H\otimes a_{M,N,R})((m_{-1}n_{-1})r_{-1}\otimes((m_0\otimes n_0)\otimes r_0))\\
&= (id_H\otimes a_{M,N,R})((m\otimes n)_{-1}r_{-1}\otimes((m\otimes n)_0\otimes r_0))\\
&= (id_H\otimes a_{M,N,R})\rho((m\otimes n)\otimes r),
\end{aligned}
$$

para todo $m\in M, n\in N, r\in R$. Além disso, tomando $f: M\longrightarrow M'$, $g: N\longrightarrow N'$ e $s: R\longrightarrow R'$ flechas em ${}^H_H\mathcal{YD}$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
(f\otimes(g\otimes h))(a_{M,N,R}(m\otimes n)\otimes r) &= (f\otimes(g\otimes h))(m\otimes(n\otimes r))\\
&= f(m)\otimes(g\otimes h)(n\otimes r)\\
&= f(m)\otimes(g(n)\otimes h(r))\\
&= a_{M',N',R'}((f(m)\otimes g(n))\otimes h(r))\\
&= a_{M',N',R'}((f\otimes g)(m\otimes n)\otimes h(r))\\
&= a_{M',N',R'}((f\otimes g)\otimes h)((m\otimes n)\otimes r),
\end{aligned}
$$

para todo $m\in M, n\in N, r\in R$, de onde segue que a é uma transformação natural. Mais ainda, como é imediato verificar que a aplicação a^{-1} definida por $a^{-1}_{M,N,R}(m\otimes(n\otimes r)) = (m\otimes n)\otimes r$ é o inverso de a, para todo trio $M, N, R\in {}^H_H\mathcal{YD}$, segue que a é um isomorfismo natural.

Também é fácil verificar que r é um isomorfismo natural, onde $r^{-1}_M(m) = m\otimes 1_{\Bbbk}$, para qualquer $M\in {}^H_H\mathcal{YD}$ e $m\in M$. Analogamente, tem-se que l é um isomorfismo natural e $l_M^{-1}(m) = 1_{\Bbbk}\otimes m$, para todo $M \in {}^H_H\mathcal{YD}$ e $m \in M$.

A demonstração da comutatividade dos diagramas do pentágono e do triângulo é imediata. Portanto ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal.

Definindo $c_{M,N}(m\otimes n) = m_{-1}\cdot n\otimes m_0$, para todo $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$, $m \in M, n \in N$, mostra-se que c é uma pré-trança para ${}^H_H\mathcal{YD}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
c_{M,N}(h\cdot(m\otimes n)) &= c_{M,N}(h_1\cdot m\otimes h_2\cdot n) = (h_1\cdot m)_{-1}\cdot(h_2\cdot n)\otimes(h_1\cdot m)_0\\
&= ((h_1\cdot m)_{-1}h_2)\cdot n\otimes(h_1\cdot m)_0 = (h_1m_{-1})\cdot n\otimes h_2\cdot m_0\\
&= h_1\cdot(m_{-1}\cdot n)\otimes h_2\cdot m_0 = h\cdot(m_{-1}\cdot n\otimes m_0)\\
&= h\cdot c_{M,N}(m\otimes n),
\end{aligned}$$

para todo $h \in H$, ou seja, $c_{M,N}$ é um morfismo de H-módulos. Além disso, como

$$\begin{aligned}
\rho(c_{M,N}(m\otimes n)) &= \rho(m_{-1}\cdot n\otimes m_0) = (m_{-1}\cdot n)_{-1}(m_0)_{-1}\otimes(m_{-1}\cdot n)_0\otimes(m_0)_0\\
&= ((m_{-1})_1\cdot n)_{-1}(m_{-1})_2\otimes((m_{-1})_1\cdot n)_0\otimes m_0\\
&= (m_{-1})_1\cdot n_{-1}\otimes(m_{-1})_2\cdot n_0\otimes m_0\\
&= m_{-1}n_{-1}\otimes(m_0)_{-1}\cdot n_0\otimes(m_0)_0\\
&= (id_H\otimes c_{M,N})(m_{-1}n_{-1}\otimes m_0\otimes n_0)\\
&= (id_H\otimes c_{M,N})\rho(m\otimes n),
\end{aligned}$$

para todo $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$, $m \in M, n \in N$, segue que $c_{M,N}$ é um morfismo de H-comódulos.

Mais ainda, $c_{M,N}$ é uma transformação natural. De fato, dados $f : M \longrightarrow M'$ e $g : N \longrightarrow N'$ flechas em ${}^H_H\mathcal{YD}$, segue que

$$\begin{aligned}
(g\otimes f)\circ c_{M,N}(m\otimes n) &= (g\otimes f)(m_{-1}\cdot n\otimes m_0) = g(m_{-1}\cdot n)\otimes f(m_0)\\
&\overset{(1)}{=} m_{-1}\cdot g(n)\otimes f(m_0) \overset{(2)}{=} (f(m))_{-1}\cdot g(n)\otimes(f(m))_0\\
&= c_{M',N'}(f(m)\otimes g(n))\\
&= c_{M',N'}\circ(f\otimes g)(m\otimes n).
\end{aligned}$$

Observe que em (1) é usado o fato de que g é morfismo de H-módulo e em (2) que f é morfismo de H-comódulo. Por fim, basta verificar a comutatividade dos dois diagramas de pré-trança. Com efeito, para todo trio $M, N, R \in {}_H^H\mathcal{YD}$, e para todo $m \in M, n \in N, r \in R$, tem-se que

$$\begin{aligned}
a_{N,R,M} \circ c_{M,N\otimes R} \circ a_{M,N,R}((m\otimes n)\otimes r) &= a_{N,R,M} \circ c_{M,N\otimes R}(m\otimes(n\otimes r))\\
&= a_{N,R,M}(m_{-1}\cdot(n\otimes r)\otimes m_0)\\
&= a_{N,R,M}(((m_{-1})_1\cdot n\otimes(m_{-1})_2\cdot r)\otimes m_0)\\
&= (m_{-1})_1\cdot n\otimes((m_{-1})_2\cdot r\otimes m_0)\\
&= m_{-1}\cdot n\otimes((m_0)_{-1}\cdot r\otimes(m_0)_0)\\
&= (id_N\otimes c_{M,R})(m_{-1}\cdot n\otimes(m_0\otimes r))\\
&= (id_N\otimes c_{M,R})\circ a_{N,M,R}((m_{-1}\cdot n\otimes m_0)\otimes r)\\
&= (id_N\otimes c_{M,R})\circ a_{N,M,R}((m_{-1}\cdot n\otimes m_0)\otimes r)\\
&= (id_N\otimes c_{M,R})\circ a_{N,M,R}\circ(c_{M,N}\otimes id_R)((m\otimes n)\otimes r),
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
(c_{M,R}\otimes id_N)\circ a^{-1}_{M,R,N}\circ(id_M\otimes c_{N,R})(m\otimes(n\otimes r)) &= (c_{M,R}\otimes id_N)\circ a^{-1}_{M,R,N}(m\otimes(n_{-1}\cdot r\otimes n_0))\\
&= (c_{M,R}\otimes id_N)((m\otimes n_{-1}\cdot r)\otimes n_0)\\
&= (m_{-1}\cdot(n_{-1}\cdot r)\otimes m_0)\otimes n_0\\
&= ((m_{-1}n_{-1})\cdot r\otimes m_0)\otimes n_0\\
&= a^{-1}_{R,M,N}((m_{-1}n_{-1})\cdot r\otimes(m_0\otimes n_0))\\
&= a^{-1}_{R,M,N}((m\otimes n)_{-1}\cdot r\otimes(m\otimes n)_0)\\
&= a^{-1}_{R,M,N}\circ c_{M\otimes N,R}((m\otimes n)\otimes r)\\
&= a^{-1}_{R,M,N}\circ c_{M\otimes N,R}\circ a^{-1}_{M,N,R}(m\otimes(n\otimes r)).
\end{aligned}$$

Portanto ${}_H^H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal pré-trançada.

Por fim, defina c^{-1} como $c^{-1}_{N,M}(n\otimes m) = m_0\otimes\mathcal{S}^{-1}(m_{-1})\cdot n$. Note que $c^{-1}_{N,M}$ é a inversa de $c_{M,N}$, para quaisquer $M, N \in {}_H^H\mathcal{YD}$. De fato,

$$\begin{aligned}
c_{M,N}\circ c^{-1}_{N,M}(n\otimes m) &= c_{N,M}(m_0\otimes\mathcal{S}^{-1}(m_{-1})\cdot n)\\
&= (m_0)_{-1}\cdot(\mathcal{S}^{-1}(m_{-1})\cdot n))\otimes(m_0)_0\\
&= ((m_0)_{-1}\mathcal{S}^{-1}(m_{-1}))\cdot n\otimes(m_0)_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{M,N}\circ c^{-1}_{N,M}(n\otimes m)&=((m_{-1})_2\mathcal{S}^{-1}((m_{-1})_1))\cdot n\otimes m_0\\&=\varepsilon_H(m_{-1})1_H\cdot n\otimes m_0\\&=1_H\cdot n\otimes\varepsilon_H(m_{-1})m_0\\&=n\otimes m.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}c^{-1}_{N,M}\circ c_{M,N}(m\otimes n)&=c^{-1}_{N,M}(m_{-1}\cdot n\otimes m_0)=(m_0)_0\otimes\mathcal{S}^{-1}((m_0)_{-1})\cdot(m_{-1}\cdot n)\\&=m_0\otimes\mathcal{S}^{-1}((m_{-1})_2)(m_{-1})_1)\cdot n=m_0\otimes\varepsilon_H(m_{-1})1_H\cdot n\\&=\varepsilon_H(m_{-1})m_0\otimes 1_H\cdot n=m\otimes n.\end{aligned}$$

Logo c é invertível, consequentemente c é um isomorfismo natural. Portanto, ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal trançada.

□

Pode-se também definir álgebra e coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Definição 2.1.23. *Uma álgebra A em ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma álgebra (A,m,u) tal que m e u são flechas em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Analogamente, uma coálgebra C em ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma coálgebra (C,Δ,ε) tal que Δ e ε são flechas em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Proposição 2.1.24. *Sejam (R,m_R,u_R) e (S,m_S,u_S) álgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Então $(R\underline{\otimes}S,m,u)$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, onde $m=(m_R\otimes m_S)(id_R\otimes c_{S,R}\otimes id_S)$ e $u=(u_R\otimes u_S)l^{-1}_{\Bbbk}$. Além disso, se $(R,\Delta_R,\varepsilon_R)$ e $(S,\Delta_S,\varepsilon_S)$ são coálgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então $(R\underline{\otimes}S,\Delta,\varepsilon)$ é uma coálgebra em ${}^Y_H\mathcal{YD}$, onde $\Delta=(id_R\otimes c\otimes id_S)(\Delta_R\otimes\Delta_S)$ e $\varepsilon(r\otimes s)=\varepsilon_R(r)\varepsilon_S(s)$, para todo $r\in R, s\in S$.*

Demonstração: Será mostrado somente para álgebra pois para coálgebra é análogo.

Note que $m,u\in{}^H_H\mathcal{YD}$ pela forma como estão definidos, pois são composições de flechas em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Portanto, basta verficar que m,u satisfazem a comutatividade dos diagramas de álgebra. Para isso, sejam $r,r',r''\in R$ e $s,s',s''\in S$. Então

$$m(m\otimes id_{R\underline{\otimes}S})((r\otimes s)\otimes(r'\otimes s')\otimes(r''\otimes s''))=m((r(s_{-1}\cdot r')\otimes s_0s')\otimes(r''\otimes s''))$$

$$
\begin{aligned}
m(m\otimes id_{R\underline{\otimes}S})((r\otimes s)\otimes(r'\otimes s')\otimes(r''\otimes s''))&=r(s_{-1}\cdot r')(((s_0s')_{-1})\cdot r'')\otimes((s_0s')_0)s''\\
&=r(s_{-1}\cdot r')(((s_0)_{-1}s'_{-1})\cdot r'')\otimes((s_0)_0s'_0)s''\\
&=r((s_{-1})_1\cdot r')((s_{-1})_2\cdot(s'_{-1}\cdot r''))\otimes(s_0s'_0)s''\\
&=r(s_{-1}\cdot(r'(s'_{-1}\cdot r'')))\otimes s_0(s'_0s'')\\
&=m((r\otimes s)\otimes(r'(s'_{-1}\cdot r'')\otimes s'_0s''))\\
&=m(id_{R\underline{\otimes}S}\otimes m)((r\otimes s)(r'\otimes s')(r''\otimes s'')).
\end{aligned}
$$

Note que o diagrama da unidade também comuta pois, para quaisquer $r\in R, s\in S$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
m\circ(u\otimes id_{R\underline{\otimes}S})(1_{\Bbbk}\otimes r\otimes s) &= m(1_R\otimes 1_S\otimes r\otimes s)\\
&= 1_R(1_H\cdot r)\otimes 1_S s\\
&= r\otimes s\\
&\cong 1_{\Bbbk}\otimes r\otimes s.
\end{aligned}
$$

Logo, $(R\underline{\otimes}S, m, u)$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. □

Com isso, já é possível definir o que é uma biálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, e consequentemente, uma álgebra de Hopf em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Definição 2.1.25. *Seja H uma álgebra de Hopf. Uma biálgebra na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma coleção $(B,m,u,\Delta,\varepsilon)$ tal que B é um objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$, (B,m,u) é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, (B,Δ,ε) é uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$ e $\Delta : B\longrightarrow B\underline{\otimes}B$ e $\varepsilon : B\longrightarrow\Bbbk$ são morfismos de álgebras.*

Definição 2.1.26. *Seja H uma álgebra de Hopf e B uma biálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Caso exista a inversa da identidade com respeito ao produto de convolução em $End(B)$, B é dita uma álgebra de Hopf na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Observação 2.1.27. *Uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf usual é uma álgebra de Hopf trançada na categoria $Vec_{\Bbbk}$.*

É possível definir álgebra de Hopf trançada sem utilizar o conceito de categorias. Naturalmente há uma relação entre estas duas definições.

Considere H uma álgebra de Hopf e B uma álgebra de Hopf na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$. Então B tem estrutura de álgebra e de coálgebra e $c' = c_{B,B}$ é um isomorfismo linear, pois, por hipótese, c é um isomorfismo natural.

Note que, como a associatividade da categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$ é a trivial, a comutatividade dos diagramas da Definição 2.1.15 se resume nas igualdades,

$$\begin{aligned} c_{B,B\otimes B} &= (id_B \otimes c_{B,B})(c_{B,B} \otimes id_B), \\ c_{B\otimes B,B} &= (c_{B,B} \otimes id_B)(id_B \otimes c_{B,B}). \end{aligned}$$

Assim, como c é uma transformação natural, segue que o seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{tikzcd} F(B\otimes B, B) \arrow[r, "c_{B,B\otimes B}"] \arrow[d, "F(c_{B,B}, id_B)"'] & G(B\otimes B, B) \arrow[d, "G(c_{B,B}, id_B)"] \\ F(B\otimes B, B) \arrow[r, "c_{B\otimes B,B}"'] & G(B\otimes B, B) \end{tikzcd},$$

onde os funtores F e G são dados por

$$\begin{aligned} F: {}^H_H\mathcal{YD} \times {}^H_H\mathcal{YD} &\longrightarrow {}^H_H\mathcal{YD} \\ (A, B) &\longmapsto A \otimes B \\ (f, g) &\longmapsto f \otimes g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad G: {}^H_H\mathcal{YD} \times {}^H_H\mathcal{YD} &\longrightarrow {}^H_H\mathcal{YD} \\ (A, B) &\longmapsto B \otimes A \\ (f, g) &\longmapsto g \otimes f. \end{aligned}$$

Ou seja, tem-se que

$$\begin{aligned} (c' \otimes id)(id \otimes c')(c' \otimes id) &= c_{B\otimes B,B}(c' \otimes id) \\ &= (id \otimes c')c_{B,B\otimes B} \\ &= (id \otimes c')(c' \otimes id)(id \otimes c'). \end{aligned}$$

Ainda usando o fato de que c é uma transformação natural, segue que os diagramas abaixo também são comutativos,

$$\begin{tikzcd} B\otimes B\otimes B \arrow[r, "c_{B,B\otimes B}"] \arrow[d, "m_B\otimes id_B"'] & B\otimes B\otimes B \arrow[d, "id_B\otimes m_B"] \\ B\otimes B \arrow[r, "c_{B,B}"'] & B\otimes B \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd} B\otimes B\otimes B \arrow[r, "c_{B\otimes B,B}"] \arrow[d, "id_B\otimes m_B"'] & B\otimes B\otimes B \arrow[d, "m_B\otimes id_B"] \\ B\otimes B \arrow[r, "c_{B,B}"'] & B\otimes B \end{tikzcd}.$$

Ou seja, tem-se que

$$c(id\otimes m) = (m\otimes id)(id\otimes c)(c\otimes id),$$
$$c(m\otimes id) = (id\otimes m)(c\otimes id)(id\otimes c).$$

Analogamente mostra-se que

$$(\Delta\otimes id)c = (id\otimes c)(c\otimes id)(id\otimes\Delta),$$
$$(id\otimes c)c = (c\otimes id)(id\otimes c)(\Delta\otimes id).$$

Assim, a definição de álgebra de Hopf trançada na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld implica na seguinte definição.

Definição 2.1.28. *Seja H um $\Bbbk$-espaço vetorial com estrutura de álgebra e de coálgebra. Diz-se que H é uma álgebra de Hopf trançada se existe uma aplicação $\Bbbk$-linear invertível $c : H\otimes H \longrightarrow H\otimes H$, a qual satisfaz as seguintes condições:*

i. c é solução da equação das tranças

$$(c\otimes id)(id\otimes c)(c\otimes id) = (id\otimes c)(c\otimes id)(id\otimes c);$$

ii. as aplicações da estrutura de H comutam com a trança. Onde, m comuta com *c se e somente se*

$$c(id\otimes m) = (m\otimes id)(id\otimes c)(c\otimes id) \tag{2.1.1}$$

$$(id\otimes m)(c\otimes id)(id\otimes c) = c(m\otimes id) \tag{2.1.2}$$

Similarmente, Δ *comuta com* c *se e somente se*

$$(\Delta\otimes id)c = (id\otimes c)(c\otimes id)(id\otimes \Delta) \tag{2.1.3}$$

$$(id\otimes c)c = (c\otimes id)(id\otimes c)(\Delta\otimes id); \tag{2.1.4}$$

iii. $\varepsilon : H \longrightarrow \Bbbk$ *é um homomorfismo de álgebras,* $\Delta(1_H) = 1_H\otimes 1_H$*, e* $\Delta : H \longrightarrow H\underline{\otimes}H$ *é um homomorfismo de álgebras; onde o produto em* $H\underline{\otimes}H$ *é "torcido"por* c*, ou seja,* $m_{H\underline{\otimes}H} = (m_H\otimes m_H)(id\otimes c\otimes id)$*. Mais ainda, a aplicação identidade possui uma inversa* $\mathcal{S}$ *com respeito ao produto convolução, denominada antípoda.*

Se apenas as condições i. e iii. são satisfeitas, então H *é dita uma álgebra de Hopf pré-trançada.*

Mais ainda, se H for de dimensão finita e sua trança for rígida, segue que a Definição 2.1.28 implica na definição de álgebra de Hopf trançada na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld. O que será visto agora.

Definição 2.1.29. *Um dual à esquerda de um objeto* V *em uma categoria monoidal* $\mathcal{C}$ *é uma tripla* (V^*, e_V, d_v)*, onde* $V^* \in \mathcal{C}$ *e* $e_V : V^*\otimes V \longrightarrow \boldsymbol{1}$ *e* $d_V : \boldsymbol{1} \longrightarrow V\otimes V^*$ *são morfismos tais que*

$$V \longrightarrow \boldsymbol{1}\otimes V \xrightarrow{d_V\otimes id_V} V\otimes V^*\otimes V \xrightarrow{id_V\otimes e_V} V\otimes \boldsymbol{1} \longrightarrow V\ ,$$

$$V^* \longrightarrow V^*\otimes \boldsymbol{1} \xrightarrow{id_{V^*}\otimes d_V} V^*\otimes V\otimes V^* \xrightarrow{e_V\otimes \mathrm{id}_{V^*}} \boldsymbol{1}\otimes V^* \longrightarrow V^*\ ,$$

são a identidade de V *e de* V^**, respectivamente.*

As aplicações e_V e d_V são chamadas *evaluação* e *coevaluação*, respectivamente.

Definição 2.1.30. *Um dual à direita de um objeto* V *em uma categoria monoidal* $\mathcal{C}$ *é uma tripla* $({}^*V, e'_V, d'_v)$*, onde* ${}^*V \in \mathcal{C}$ *e* $e'_V : V\otimes {}^*V \longrightarrow \boldsymbol{1}$ *e* $d'_V : \boldsymbol{1} \longrightarrow {}^*V\otimes V$ *são* *morfismos tais que*

$$V \longrightarrow V \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{id_V \otimes d'_V} V \otimes {}^*V \otimes V \xrightarrow{e'_V \otimes id_V} \mathbf{1} \otimes V \longrightarrow V \ ,$$

$${}^*V \longrightarrow \mathbf{1} \otimes {}^*V \xrightarrow{d'_V \otimes id_{^*V}} {}^*V \otimes V \otimes {}^*V \xrightarrow{id_{^*V} \otimes e'_V} {}^*V \otimes \mathbf{1} \longrightarrow {}^*V \ ,$$

são a identidade de V e de ${}^*V$, respectivamente.

Definição 2.1.31. *Seja H uma álgebra de Hopf e V uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Assim, V é dita rígida se possui um dual à esquerda V^* e um dual à direita ${}^*V$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Proposição 2.1.32. *A subcategoria de ${}^H_H\mathcal{YD}$ formada pelos módulos de Yetter-Drinfeld de dimensão finita sobre H é rígida.*

Demonstração: Seja $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ com dimensão finita n. Tome $v^1, \cdots, v^n$ uma base de V e $f^1, \cdots, f^n \in V^*$ sua base dual. Tem-se que V^* é um módulo de Yetter-Drinfeld sobre H se forem consideradas as seguintes ação e coação, respectivamente,

$$(h \cdot f)(v) = f((S)(h) \cdot v), \qquad \rho(f) = f_{-1} \otimes f_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{S}^{-1}(v^i_{-1}) \otimes f(v^i_0) f^i,$$

para todo $h \in H, f \in V^*, v \in V$.

Considere agora $e_V : V^* \otimes V \longrightarrow \Bbbk$, $e_V(f \otimes v) = f(v)$, o morfismo usual de evaluação. Dados $v \in V, f \in V^*, h \in H$, segue que

$$\begin{aligned} e_V(h \cdot (f \otimes v)) &= (h_1 \cdot f)(h_2 \cdot v) = f(\mathcal{S}(h_1) h_2 \cdot v) = \varepsilon(h) f(v) \\ &= h \cdot e_V(f \otimes v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (id \otimes e_V)\rho(f \otimes v) &= (id \otimes e_V)(f_{-1} v_{-1} \otimes f_0 \otimes v_0) = f_{-1} v_{-1} \otimes f_0(v_0) \\ &= \mathcal{S}^{-1}(v_{-1}) f(v_0) v_{-2} \otimes 1 = \varepsilon(v_{-1}) f(v_0) \otimes 1 \\ &= 1 \otimes f(v) = \rho e_v(f \otimes v). \end{aligned}$$

Ou seja, $e_v \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Da mesma forma, mostra-se que o morfismo usual de coevaluação $d_V : \Bbbk \longrightarrow V \otimes V^*$, $1 \mapsto \sum_{i=1}^{n} v^i \otimes f^i$, está em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Mais ainda, como, para todo $v \in V$, tem-se que

$$\begin{aligned}(id\otimes e_V)(d_V\otimes id)(1\otimes v) &= (id\otimes e_V)(\sum_{i=1}^{n} v^i\otimes f^i\otimes v)\\ &= \sum_{i=1}^{n} v^i\otimes f^i(v) = \sum_{i=1}^{n} f^i(v)v^i\otimes 1\\ &= v\otimes 1.\end{aligned}$$

E para todo $f \in V^*$, tem-se que

$$\begin{aligned}(e_V\otimes id)(id\otimes d_V)(f\otimes 1) &= (e_V\otimes id)(f\otimes\sum_{i=1}^{n} v^i\otimes f^i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(v^i)\otimes f^i = 1\otimes\sum_{i=1}^{n} f(v^i)f^i\\ &= 1\otimes f,\end{aligned}$$

segue que V^* é um dual à esquerda de V.

Analogamente, considerando ${}^*V$ o mesmo $\Bbbk$-espaço vetorial V^*, mas com as seguintes ação e coação, respectivamente,

$$(h\cdot f)(v) = f(\mathcal{S}^{-1}(h)\cdot v), \qquad \rho(f) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{S}(v^i_{-1})\otimes f(v^i_0)f^i,$$

para todo $h \in H, f \in {}^*V, v \in V$, tem-se que ${}^*V$ é um dual à direita de V.

Portanto, V é rígido.

□

Pode-se definir álgebra de Hopf trançada rígida sem mencionar categorias. Essa definição aparece em [6]. Mas antes, segue a definição de trança rígida.

Definição 2.1.33. *Sejam H uma álgebra de Hopf trançada de dimensão finita, $\{e_i\}$ uma base para H e $\{e_i^*\}$ a base dual. Considere $e : H^*\otimes H \longrightarrow \Bbbk$ e $d : \Bbbk \longrightarrow H\otimes H^*$ a evaluação e coevaluação usuais, respectivamente, ou seja, $e(f\otimes h) = f(h)$, para todo $f \in H^*, h \in H$, e $d(1) = \sum_i e_i\otimes e_i^*$. A trança c de H é dita rígida se a aplicação*

$c^{\varsigma}: H^*\otimes H \longrightarrow H\otimes H^*$ *definida por* $c^{\varsigma} = (e\otimes id\otimes id)(id\otimes c\otimes id)(id\otimes id\otimes d)$ *é um isomorfismo.*

Definição 2.1.34. *Um álgebra de Hopf trançada H é dita rígida se tiver dimensão finita e sua trança for rígida.*

Observando a demonstração da Proposição 2.1.32, nota-se que a Definição 2.1.31 é equivalente à Definição 2.1.34.

Definição 2.1.35. *Sejam R uma álgebra de Hopf trançada e H uma álgebra de Hopf. Diz-se que R é realizável sobre H se existem uma ação à esquerda $H\otimes R \longrightarrow R$ e uma coação à esquerda $R \longrightarrow R\otimes H$, tais que R é uma álgebra de Hopf trançada na categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$ dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre H, onde a trança c corresponde a trança em ${}_H^H\mathcal{YD}$.*

O Teorema 5.7 em [6] afirma que uma álgebra de Hopf trançada de dimensão finita R é realizável sobre uma álgebra de Hopf H se e somente se R é uma álgebra de Hopf trançada rígida. Assim, como $R = \Bbbk^G *_{\sigma}^{\tau} \Bbbk F$ tem dimensão finita, basta encontrar uma trança rígida para R, afim de que R seja realizável sobre alguma álgebra de Hopf H. Isto será feito na próxima seção.

2.2 Álgebra de Hopf trançada associada a um par combinado de grupos

Nesta seção, considere $(G, F, \triangleleft, \triangleright)$ um par combinado de grupos, $\sigma : F\times F \longrightarrow (\Bbbk^{\times})^G$ e $\tau : G\times G \longrightarrow (\Bbbk^{\times})^F$ 2-cociclos normalizados satisfazendo

$$\sigma_1(x, y) = 1 = \tau_1(g, h),$$

para todo $x, y \in F, g, h \in G$.

O objetivo desta seção é apresentar condições necessárias e suficientes para que as estruturas de álgebra e de coálgebra associadas aos dados $\triangleleft, \triangleright, \sigma$ e τ definam uma álgebra de Hopf trançada.

Para isso, denote $R = \Bbbk^G *_{\sigma}^{\tau} \Bbbk F$ e defina $c : R\otimes R \longrightarrow R\otimes R$ por

$$c(\delta_g x\otimes \delta_h y) = Q_{g,h}^{x,y}\delta_h y\otimes \delta_g x, \tag{2.2.5}$$

para todo $x, y \in F, g, h \in G$, onde $Q : G^2 \times F^2 \longrightarrow \Bbbk^\times$ é uma aplicação.

Proposição 2.2.1. *Com as notações acima, (R, c) é uma álgebra de Hopf pré-trançada se e somente se vale a seguinte condição de compatibilidade:*

$$\sigma_{gh}(x,y)\tau_{xy}(g,h) = Q^{x,(g\triangleleft x)\triangleright y}_{g,h\triangleleft(g\triangleright x)}\sigma_g(h\triangleright x,(h\triangleleft x)\triangleright y)\sigma_h(x,y)\tau_x(g,h)\tau_y(g\triangleleft(h\triangleright x),h\triangleleft x), \quad (2.2.6)$$

para todo $x, y \in F, g, h \in G$.

Demonstração: Como c é diagonal, ou seja, R tem uma base $\{\delta_g x\}_{g\in G, x\in F}$ tal que $c(\delta_g x \otimes \delta_h y) = q_{(g,x),(h,y)}\delta_h y \otimes \delta_g x$, para algum $q_{(g,x),(h,y)} \in \Bbbk^\times$, então c satisfaz automaticamente a equação das tranças. Note que $q_{(g,x),(h,y)} = Q^{x,y}_{g,h} \in \Bbbk^\times$.

Além disso, pela Proposição 1.3.3 tem-se que a counidade é um morfismo de álgebras e $\Delta(1) = 1\otimes 1$. Pela Proposição 1.3.4 tem-se que existe a antípoda.

Resta mostrar que a condição (2.2.6) é equivalente a comultiplicação $\Delta : R \longrightarrow R\underline{\otimes}R$ ser um morfismo de álgebras. Com efeito,

$$\begin{aligned}\Delta((\delta_g x)(\delta_h y)) &= \Delta(\delta_{g\triangleleft x,h}\sigma_g(x,y)\delta_g xy)\\ &= \delta_{g\triangleleft x,h}\sigma_g(x,y)\sum_{t\in G}\tau_{xy}(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright xy)\otimes\delta_{t^{-1}g}xy.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\Delta(\delta_g x)\Delta(\delta_h y) &= (\sum_{t\in G}\tau_x(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x)\\ &\quad\times(\sum_{s\in G}\tau_y(s,s^{-1}h)\delta_s(s^{-1}h\triangleright y)\otimes\delta_{s^{-1}h}y)\\ &= \sum_{s,t\in G}\tau_x(t,t^{-1}g)\tau_y(s,s^{-1}h)Q^{x,s^{-1}h\triangleright y}_{t^{-1}g,s}\delta_{t\triangleleft(t^{-1}g\triangleright x),s}\delta_{t^{-1}g\triangleleft x,s^{-1}h}\\ &\quad\times\sigma_t(t^{-1}g\triangleright x,s^{-1}h\triangleright y)\sigma_{t^{-1}g}(x,y)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)(s^{-1}h\triangleright y)\otimes\delta_{t^{-1}g}xy\\ &= \sum_{\substack{s,t\in G\\ t\triangleleft(t^{-1}g\triangleright x)=s\\ t^{-1}g\triangleleft x=s^{-1}h}}\tau_x(t,t^{-1}g)\tau_y(s,s^{-1}h)Q^{x,s^{-1}h\triangleright y}_{t^{-1}g,s}\sigma_t(t^{-1}g\triangleright x,s^{-1}h\triangleright y)\\ &\quad\times\sigma_{t^{-1}g}(x,y)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)(s^{-1}h\triangleright y)\otimes\delta_{t^{-1}g}xy.\end{aligned}$$

Como $(G, F, \triangleright, \triangleleft)$ é um par combinado de grupos, segue que $h = s(t^{-1}g \triangleleft x) =$

$(t \triangleleft (t^{-1}g \triangleright x))(t^{-1}g \triangleleft x) = t(t^{-1}g) \triangleleft x = g \triangleleft x$, de onde segue que

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta_g x)\Delta(\delta_h y) = \delta_{g\triangleleft x,h} \sum_{t\in G} &\tau_x(t,t^{-1}g)\tau_y(t \triangleleft (t^{-1}g \triangleright x), t^{-1}g \triangleleft x) Q^{x,(t^{-1}g\triangleleft x)\triangleright y}_{t^{-1}g, t\triangleleft(t^{-1}g\triangleright x)} \\
&\times \sigma_t(t^{-1}g \triangleright x, (t^{-1}g \triangleleft x) \triangleright y)\sigma_{t^{-1}g}(x,y)\delta_t(t^{-1}g \triangleright x)((t^{-1}g \triangleleft x) \triangleright y) \\
&\otimes \delta_{t^{-1}g} xy \\
= \delta_{g\triangleleft x,h} \sum_{t\in G} &\tau_x(t,t^{-1}g)\tau_y(t \triangleleft (t^{-1}g \triangleright x), t^{-1}g \triangleleft x) Q^{x,(t^{-1}g\triangleleft x)\triangleright y}_{t^{-1}g, t\triangleleft(t^{-1}g\triangleright x)} \\
&\times \sigma_t(t^{-1}g \triangleright x, (t^{-1}g \triangleleft x) \triangleright y)\sigma_{t^{-1}g}(x,y)\delta_t(t^{-1}g \triangleright xy)\otimes\delta_{t^{-1}g} xy.
\end{aligned}$$

Portanto, Δ é um morfismo de álgebras se e somente se

$$\begin{aligned}
\sigma_g(x,y)\tau_{xy}(t,t^{-1}g) = \tau_x(t,t^{-1}g)&\tau_y(t \triangleleft (t^{-1}g \triangleright x), t^{-1}g \triangleleft x) Q^{x,(t^{-1}g\triangleleft x)\triangleright y}_{t^{-1}g, t\triangleleft(t^{-1}g\triangleright x)} \\
&\times \sigma_t(t^{-1}g \triangleright x, (t^{-1}g \triangleleft x) \triangleright y)\sigma_{t^{-1}g}(x,y),
\end{aligned}$$

quando $g \triangleleft x = h$. Pondo $s = t^{-1}g$, segue que Δ é um morfismo de álgebra se e somente se vale (2.2.6).

$\square$

Proposição 2.2.2. *Existe uma única trança $c : R\otimes R \longrightarrow R\otimes R$ que faz de R uma álgebra de Hopf pré-trançada, que é dada por (2.2.5), onde $Q : G^2 \times F^2 \longrightarrow (\Bbbk)^\times$ é a aplicação definida por*

$$\begin{aligned}
Q^{x,y}_{g,h} &= \sigma_{(h\triangleleft(g\triangleright x)^{-1})g}(x,(g \triangleleft x)^{-1} \triangleright y)\sigma_{h\triangleleft(g\triangleright x)^{-1}}(g \triangleright x, y)^{-1}\sigma_g(x,(g \triangleleft x)^{-1} \triangleright y)^{-1} \\
&\times \tau_{x((g\triangleleft x)^{-1}\triangleright y)}(h \triangleleft (g \triangleright x)^{-1}, g)\tau_{(g\triangleleft x)^{-1}\triangleright y}(h, g \triangleleft x)^{-1}\tau_x(h \triangleleft (g \triangleright x)^{-1}, g)^{-1}, \quad (2.2.7)
\end{aligned}$$

para todo $g, h \in G, x, y \in F$.

Em particular, toda estrutura de álgebra de Hopf trançada sobre R é realizável sobre alguma álgebra de Hopf H.

Demonstração: Note que a igualdade (2.2.7) é equivalente à (2.2.6), basta fazer uma mudança de variáveis, e, se c é obtida a partir de (2.2.7), (R, c) é uma álgebra de Hopf pré-trançada.

Os axiomas da associatividade, coassociatividade, unidade, counidade e antípoda em R, juntamente com a multiplicatividade de $\Delta : R \longrightarrow R\underline{\otimes}R$, ou seja, $\Delta m =$

$(m\otimes m)(id\otimes c\otimes id)(\Delta\otimes\Delta)$, determinam a unicidade da trança c, que é dada pela fórmula $(m\otimes m)(\mathcal{S}\otimes\Delta m\otimes\mathcal{S})(\Delta\otimes\Delta)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}(m\otimes m)(\mathcal{S}\otimes\Delta m\otimes\mathcal{S})(\Delta\otimes\Delta) &= (m\otimes m)(\mathcal{S}\otimes(m\otimes m)(id\otimes c\otimes id)(\Delta\otimes\Delta)\otimes\mathcal{S})(\Delta\otimes\Delta)\\ &= (m\otimes m)(id\otimes m\otimes m\otimes id)(\mathcal{S}\otimes id\otimes c\otimes id\otimes\mathcal{S})\\ &\circ (id\otimes\Delta\otimes\Delta\otimes id)(\Delta\otimes\Delta)\\ &= (m\otimes m)(m(\mathcal{S}\otimes id)\Delta\otimes c\otimes m(id\otimes\mathcal{S})\Delta)(\Delta\otimes\Delta)\\ &= (m\otimes m)(u\varepsilon\otimes c\otimes u\varepsilon)(\Delta\otimes\Delta)\\ &= c.\end{aligned}$$

Portanto, para τ e σ fixados, a trança c que faz de R uma álgebra de Hopf pré-trançada é única, a qual é dada a partir de (2.2.7).

Particularmente, todas as tranças são diagonais na base $\delta_g x, g\in G, x\in F$, sendo, então, rígidas. Assim, como a dimensão de R é finita, pelo Theorem 5.7 de [6], toda estrutura de álgebra de Hopf sobre R é realizável.

□

Observação 2.2.3. *Note que (1.3.10) é equivalente a afirmar que* $Q^{1,y}_{g,h} = Q^{x,1}_{g,h} = Q^{x,y}_{1,h} = Q^{x,y}_{g,1} = 1$

De fato,

$$\begin{aligned}Q^{1,y}_{g,h} &= \sigma_{hg}(1, g^{-1}\triangleright y)\sigma_h(1,y)^{-1}\sigma_g(1,g^{-1}\triangleright y)^{-1}\\ &\times \tau_{g^{-1}\triangleright y}(h,g)\tau_{g^{-1}\triangleright y}(h,g)^{-1}\tau_1(h,g)^{-1}\\ &= \tau_1(h,g)^{-1},\end{aligned}$$

ou seja, $Q^{1,y}_{g,h} = 1$ se e somente se $\tau_1(h,g) = 1$. De forma análoga, mostra-se as outras equivalências.

□

Para que R seja uma álgebra de Hopf trançada, resta apresentar as condições para que valha a condição $(ii.)$ da definição 2.1.28, ou seja, que m e Δ comutam com a trança. É o que será feito no seguinte resultado.

Lema 2.2.4. *A multiplicação* $m : R\otimes R \longrightarrow R$ *comuta com* c *se e somente se para todo* $x, y, z \in F, g, h \in G$,

$$
\begin{aligned}
Q^{x,yz}_{g,h} &= Q^{x,y}_{g,h} Q^{x,z}_{g,h\triangleleft y},\\
Q^{xy,z}_{g,h} &= Q^{x,z}_{g,h} Q^{y,z}_{g\triangleleft x,h}.
\end{aligned}
$$

E a comultiplicação $\Delta : R \longrightarrow R\otimes R$ *comuta com* c *se e somente se para todo* $g, h, l \in G, x, y \in F$,

$$
\begin{aligned}
Q^{x,y}_{g,hl} &= Q^{x,l\triangleright y}_{g,h} Q^{x,y}_{g,l},\\
Q^{x,y}_{gh,l} &= Q^{h\triangleright x,y}_{g,l} Q^{x,y}_{h,l}.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Será mostrado a equivalência da primeira igualdade com a primeira igualdade da definição de m comutar com c, pois as outras são mostradas de forma análoga. Note que para quaisquer $g, h, l \in G, x, y, z \in F$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
c(id\otimes m)(\delta_g x\otimes\delta_h y\otimes\delta_l z) &= c(\delta_g x\otimes\sigma_h(y,z)\delta_{h\triangleleft y,z}\delta_h yz)\\
&= Q^{x,yz}_{g,h}\sigma_h(y,z)\delta_{h\triangleleft y,z}\delta_h yz\otimes\delta_g x.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(m\otimes id)(id\otimes c)(c\otimes id)(\delta_g x\otimes\delta_h y\otimes\delta_l z) &= (m\otimes id)(id\otimes c)(Q^{x,y}_{g,h}\delta_h y\otimes\delta_g x\otimes\delta_l z)\\
&= (m\otimes id)(Q^{x,y}_{g,h}Q^{x,z}_{g,l}\delta_h y\otimes\delta_l z\otimes\delta_g x)\\
&= Q^{x,y}_{g,h}Q^{x,z}_{g,l}\sigma_h(y,z)\delta_{h\triangleleft y,z}\delta_h yz\otimes\delta_g x,
\end{aligned}
$$

ou seja, $c(id\otimes m) = (m\otimes id)(id\otimes c)(c\otimes id)$ se e somente se $Q^{x,yz}_{g,h} = Q^{x,y}_{g,h}Q^{x,z}_{g,h\triangleleft y}$. □

Os resultados obtidos podem ser resumidos no seguinte teorema.

Teorema 2.2.5. *Seja* $c : R\otimes R \longrightarrow R\otimes R$ *dada por (2.2.5), onde* $Q : G^2\times F^2 \longrightarrow (\Bbbk)^\times$ *é a aplicação definida por (2.2.7). Então* (R, c) *é uma álgebra de Hopf trançada se e somente se são asseguradas as seguintes condições de compatibilidade, para todo* $g, h, l \in G, x, y, z \in F$:

i. $Q^{x,yz}_{g,h} = Q^{x,y}_{g,h}Q^{x,z}_{g,h\triangleleft y}$;

ii. $Q^{xy,z}_{g,h} = Q^{x,z}_{g,h}Q^{y,z}_{g\triangleleft x}$;

iii. $Q^{x,y}_{g,hl} = Q^{x,l\triangleright y}_{g,h}Q^{x,y}_{g,l}$;

iv. $Q^{x,y}_{gh,l} = Q^{h\triangleright x,y}_{g,l}Q^{x,y}_{h,l}$.

Ou equivalentemente, se existe uma álgebra de Hopf H tal que R é uma álgebra de Hopf trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Essa álgebra de Hopf H não é necessariamente única, ver [6].

Definição 2.2.6. *Um par (τ, σ) de 2-cociclos $\tau : G^2 \longrightarrow (\Bbbk^\times)^F$ e $\sigma : F^2 \longrightarrow (\Bbbk^\times)^G$, satisfazendo (1.3.4), (1.3.6) e (1.3.10), junto com as condições de compatibilidade (i.) – (iv.) do Teorema 2.2.5 é denominado braided compatible datum para o par combinado $\triangleright : G \times F \longrightarrow F$, $\triangleleft : G \times F \longrightarrow G$.*

Observação 2.2.7. *Desde que R seja uma álgebra de Hopf trançada, então, por [6], a antípoda $\mathcal{S}$ comuta com a trança c, ou seja, $c(\mathcal{S}\otimes id) = (id\otimes\mathcal{S})c$. Assim, como*

$$\begin{aligned} c(\mathcal{S}\otimes id)(\delta_g x\otimes\delta_h y) &= c(\sigma_{(g\triangleleft x)^{-1}}((g\triangleright x)^{-1}, g\triangleright x)^{-1}\tau_x(g^{-1}, g)^{-1}\delta_{(g\triangleleft x)^{-1}}(g\triangleright x)^{-1}\otimes\delta_h y) \\ &= Q^{(g\triangleright x)^{-1},y}_{(g\triangleleft x)^{-1},h}\sigma_{(g\triangleleft x)^{-1}}((g\triangleright x)^{-1}, g\triangleright x)^{-1}\tau_x(g^{-1}, g)^{-1}\delta_h y\otimes\delta_{(g\triangleleft x)^{-1}}(g\triangleright x)^{-1}, \end{aligned}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned} (id\otimes\mathcal{S})c(\delta_g x\otimes\delta_h y) &= (id\otimes\mathcal{S})(Q^{x,y}_{g,h}\delta_h y\otimes\delta_g x) \\ &= Q^{x,y}_{g,h}\delta_h y\otimes\sigma_{(g\triangleleft x)^{-1}}((g\triangleright x)^{-1}, g\triangleright x)^{-1}\tau_x(g^{-1}, g)^{-1}\delta_{(g\triangleleft x)^{-1}}(g\triangleright x)^{-1}, \end{aligned}$$

segue a igualdade $Q^{x,y}_{g,h} = Q^{(g\triangleright x)^{-1},y}_{(g\triangleleft x)^{-1},h}$, para todo $g, h \in G, x, y \in F$.

Cohomológicamente, como já foi visto que $p_1(\delta_1^{tot}(\tau, \sigma)) = 1 = p_3(\delta_1^{tot}(\tau, \sigma))$, a Proposição 2.2.1 pode ser reformulada da seguinte maneira:

Corolário 2.2.8. *Seja $c : R\otimes R \longrightarrow R\otimes R$ dada por (2.2.5). Então R é uma álgebra de Hopf pré-trançada se e somente se*

$$\begin{aligned} Q^{x,y}_{g,h} &= p_2(\delta_1^{tot}(\tau, \sigma)(h\triangleleft(g\triangleright x)^{-1}, g; x, (g\triangleleft x)^{-1}\triangleright y)^{-1}) \\ &= [\partial\tau(h\triangleleft(g\triangleright x)^{-1}, g; x, (g\triangleleft x)^{-1}\triangleright y)\partial'\sigma(h\triangleleft(g\triangleright x)^{-1}, g; x, (g\triangleleft x)^{-1}\triangleright y)]^{-1} \end{aligned}$$

para todo $g, h \in G, x, y \in F$.

Demonstração: Basta ver que

$$
\begin{aligned}
Q_{g,h}^{x,y} &= p_2(\delta_1^{tot}(\tau,\sigma)(h \triangleleft (g \triangleright x)^{-1}, g; x, (g \triangleleft x)^{-1} \triangleright y)^{-1}) \\
&= [\partial\tau(h \triangleleft (g \triangleright x)^{-1}, g; x, (g \triangleleft x)^{-1} \triangleright y)\partial'\sigma(h \triangleleft (g \triangleright x)^{-1}, g; x, (g \triangleleft x)^{-1} \triangleright y)]^{-1} \\
&= \sigma_{(h\triangleleft(g\triangleright x)^{-1})g}(x, (g \triangleleft x)^{-1} \triangleright y)\sigma_{h\triangleleft(g\triangleright x)^{-1}}(g \triangleright x, y)^{-1}\sigma_g(x, (g \triangleleft x)^{-1} \triangleright y)^{-1} \\
&\times \tau_{x((g\triangleleft x)^{-1}\triangleright y)}(h \triangleleft (g \triangleright x)^{-1}, g)\tau_{(g\triangleleft x)^{-1}\triangleright y}(h, g \triangleleft x)^{-1}\tau_x(h \triangleleft (g \triangleright x)^{-1}, g)^{-1}.
\end{aligned}
$$

□

2.3 Braided compatible datum para ações triviais

Nessa seção, as ações $\triangleleft$ e $\triangleright$ serão consideradas as triviais, ou seja $\Sigma = F \times G$. A partir disso, serão estudadas as condições de compatibilidade sobre os cociclos σ e τ afim de que o produto bicruzado correspondente $R = \Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ seja uma álgebra de Hopf trançada com trança não trivial.

Sejam $\sigma : F \times F \longrightarrow (\Bbbk^\times)^G$ e $\tau : G \times G \longrightarrow (\Bbbk^\times)^F$ 2-cociclos satisfazendo as condições de normalização (1.3.4), (1.3.6) e (1.3.10).

Neta seção, serão usadas as definições e notações estabelecidas na seção 1.4.

Pela trivialidade da ação $\triangleright$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
\partial\sigma_g(x, y, z) &= \sigma_{g\triangleleft x}(y, z)\sigma_g(xy, z)^{-1}\sigma_g(x, yz)\sigma_g(x, y)^{-1} \\
&= \sigma_g(y, z)\sigma_g(xy, z)^{-1}\sigma_g(x, yz)\sigma_g(x, y)^{-1} = 1,
\end{aligned}
$$

para todo $g \in G, x, y, z \in F$.

Logo, $\sigma_g \in Map_+(F^2, \Bbbk^\times)$ é um 2-cociclo.

Desta forma, denotando por $Z_+^2(F, \Bbbk^\times)$ o subgrupo das aplicações $f \in Map_+(M^2, \Bbbk^\times)$ tais que f é um 2-cociclo, pode-se considerar $\sigma : G \longrightarrow Z_+^2(F, \Bbbk^\times)$. Analogamente, $\tau : F \longrightarrow Z_+^2(G, \Bbbk^\times)$.

Consequentemente, $\partial'\sigma : G \times G \longrightarrow Z_+^2(F, \Bbbk^\times)$ e $\partial'\sigma \in Z_+^2(G, Z_+^2(F, \Bbbk^\times))$. De fato, observe que

$$
\begin{aligned}
\partial'\sigma(h, g; x, y) &= \sigma(h; g \triangleright x, (g \triangleleft x) \triangleright y)\sigma^{-1}(hg; x, y)\sigma(g; x, y) \\
&= \sigma(h; x, y)\sigma^{-1}(hg; x, y)\sigma(g; x, y).
\end{aligned}
$$

Como a parcela que depende de x e y permanece inalterada, esta será omitida a partir daqui.

$$\begin{aligned}\partial'(\partial'\sigma)(l,h,g) &= \partial'(\sigma(h,g)\sigma(l,hg)\sigma(lh,g)^{-1}\sigma(l,h)^{-1}) \\ &= \sigma(h)\sigma(hg)^{-1}\sigma(g)\sigma(l)\sigma(lhg)^{-1}\sigma(hg) \\ &\times \sigma(lh)^{-1}\sigma(lhg)\sigma(g)^{-1}\sigma(l)^{-1}\sigma(lh)\sigma(h)^{-1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $\partial\tau \in Z^2_+(F, Z^2_+(G, \Bbbk^\times))$.

Lema 2.3.1. *i. Para todo $x, y \in F, g, h \in G$, tem-se*

$$Q^{x,y}_{g,h} = [\partial'\sigma(h,g;x,y)\partial\tau(h,g;x,y)]^{-1}; \tag{2.3.8}$$

ii. Suponha que $\tau : F \longrightarrow Z^2_+(G, \Bbbk^\times)$ seja um homomorfismo de grupos. Então R é uma álgebra de Hopf trançada se e somente se $\partial'\sigma \in \mathrm{Hom}(G/[G,G]\otimes G/[G,G], \mathrm{Hom}(F/[F,F]\otimes F/[F,F], \Bbbk^\times))$.
Nesse caso, a trança $c : R\otimes R \longrightarrow R\otimes R$ é trivial se e somente se σ é um homomorfismo de grupos.

Demonstração: A parte ($i.$) segue da fórmula $Q^{x,y}_{g,h} = \delta^{tot}_1(\tau,\sigma)(h\triangleleft(g\triangleright x)^{-1}, g; x, (g\triangleleft x)^{-1} \triangleright y)^{-1}$ reescrita com as ações triviais. Para mostrar a parte ($ii.$), considera-se τ um homomorfismo de grupos, segue que (pela trivialidade de $\triangleleft$, a parte "g, h"não interfere na conta, então será desconsiderada)

$$\partial\tau(x,y) = \tau(y)\tau(xy)^{-1}\tau(x) = \tau(x)\tau(x)^{-1}\tau(y)^{-1}\tau(y) = 1.$$

Assim, R é uma álgebra de Hopf trançada se e somente se $Q^{x,y}_{g,h} = \partial'\sigma(h,g;x,y)^{-1}$ que, pela parte ($i.$) do Lema 2.2.4, ocorre se e somente se $\partial'\sigma \in \mathrm{Hom}(G/[G,G]\otimes G/[G,G], \mathrm{Hom}(F/[F,F]\otimes F/[F,F], \Bbbk^\times))$. Mas então, c é trivial se e somente se $Q = 1$ ou, equivalentemente, σ é um homomorfismo de grupos.

□

No que segue, será apresentado um exemplo de álgebra de Hopf trançada que não é comutativa, nem cocomutativa.

Considere $\Bbbk$ o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Sejam p um número primo ímpar e $G = F = \mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_p$ o espaço vetorial de dimensão 2 sobre o corpo $\mathbb{F}_p$ com p elementos. Será considerada a notação de adição sobre G e F. Os elementos de F serão denotados por letras romanas $x, y, ...$ e os elementos de G por letras gregas $\alpha, \beta, ...$

Proposição 2.3.2. *Sejam a e b inteiros módulo p tais que $ab \neq 0$ mod p. Tome $\tau \in \mathrm{Hom}(F, Z^2_+(G, \mathbb{C}^\times))$ dado por*

$$\tau_{(x,y)}((\alpha,\beta),(\alpha',\beta')) = e^{\frac{2\pi i}{p}(x+y)(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}, \quad x, y, \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{F}_p,$$

e $\sigma : G \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^2 F, \mathbb{C}^\times)$ dado por

$$\sigma_{(\alpha,\beta)}((x,y)(x',y')) = e^{\frac{2\pi i}{p}(a\alpha^2+b\beta^2)(xy'-x'y)}, \quad x, y, x', y', \alpha, \beta \in \mathbb{F}_p.$$

Então, o produto bicruzado R associado a σ e τ é uma álgebra de Hopf trançada, com trança não trivial c dada por (2.2.5), e

$$Q^{(x,y),(x',y')}_{(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')} = e^{\frac{4\pi i}{p}(a\alpha\alpha'+b\beta\beta')(xy'-x'y)}$$

para todo $x, y, x', y', \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{F}_p$. Mais ainda, R é não comutativa e não cocomutativa.

Demonstração: Note que τ é um homomorfismo de grupos, pois

$$\tau_{(x,y)+(x',y')}((\alpha,\beta),(\alpha',\beta')) = e^{\frac{2\pi i}{p}(x+y)(\alpha\beta'-\alpha'\beta)} e^{\frac{2\pi i}{p}(x'+y')(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}.$$

Assim, resta mostrar que $Q = (\partial'\sigma)^{-1}$. De fato

$$\begin{aligned}
\partial'\sigma((\alpha',\beta'),(\alpha,\beta);(x,y),(x',y')) &= (\sigma_{(\alpha',\beta')})^{-1}\sigma_{(\alpha',\beta')+(\alpha,\beta)}(\sigma_{(\alpha,\beta)})^{-1} \\
&= e^{\frac{-2\pi i}{p}(a\alpha'^2+b\beta'^2)(xy'-x'y)} \\
&\times \; e^{\frac{2\pi i}{p}(a\alpha'^2+2a\alpha'\alpha+a\alpha^2+b\beta'^2+2b\beta'\beta+b\beta^2)(xy'-x'y)} \\
&\times \; e^{\frac{-2\pi i}{p}(a\alpha^2+b\beta^2)(xy'-x'y)} \\
&= e^{\frac{4\pi i}{p}(a\alpha'\alpha+b\beta'\beta)(xy'-x'y)}
\end{aligned}$$

para todo $x, y, x', y', \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{F}_p$. Note ainda, que $Q^{(1,0),(0,1)}_{(1,0),(1,0)} = e^{\frac{4a\pi i}{p}} \neq 1$ desde que p é ímpar e $a \neq 0$ mod p, consequentemente c não é trivial.

Observe que

$$\begin{aligned}\delta_{(1,1)}(1,0)\delta_{(1,1)}(0,1) &= \sigma_{(1,1)}((1,0),(0,1))\delta_{(1,1),(1,1)}\delta_{(1,1)}(1+0,0+1)\\ &= e^{\frac{2\pi i}{p}(a+b)(1-0)}\delta_{(1,1)}(1,1)\\ &= e^{\frac{2\pi i}{p}(a+b)}\delta_{(1,1)}(1,1).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\delta_{(1,1)}(0,1)\delta_{(1,1)}(1,0) &= \sigma_{(1,1)}((0,1),(1,0))\delta_{(1,1),(1,1)}\delta_{(1,1)}(0+1,1+0)\\ &= e^{\frac{2\pi i}{p}(a+b)(0-1)}\delta_{(1,1)}(1,1)\\ &= e^{\frac{-2\pi i}{p}(a+b)}\delta_{(1,1)}(1,1),\end{aligned}$$

ou seja, $m \neq m\tau$. Consequentemente, R não é comutativa. Analogamente mostra-se que

$$\begin{aligned}\Delta(\delta_{(0,1)}(1,0)) &= \sum_{(s,t)\in G} e^{\frac{2\pi i}{p}s}\delta_{(s,t)}(1,0)\otimes\delta_{(-s,1-t)}(1,0)\\ &\neq \sum_{(s,t)\in G} e^{\frac{2\pi i}{p}s}\delta_{(-s,1-t)}(1,0)\otimes\delta_{(s,t)}(1,0)\\ &= \tau\Delta(\delta_{(0,1)}(1,0)),\end{aligned}$$

ou seja, R é não cocomutativa.

□

2.3.1 Comutatividade

Nesta subseção será introduzido o conceito de uma álgebra de Hopf trançada R ser comutativa ou cocomutativa trançada. Este conceito não será utilizado neste trabalho, mas que é interessante citá-lo.

Definição 2.3.3. *Seja R uma álgebra de Hopf trançada com trança c. Diz-se que R é comutativa trançada se $m = mc$ e que é cocomutativa trançada se $\Delta = c\Delta$.*

Proposição 2.3.4. *Seja $R = \Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$. Então valem as seguintes afirmações:*

i. R é comutativa trançada se e somente se F é abeliano, $\triangleleft$ é trivial e

$$Q^{x,y}_{g,g} = \sigma_g(x,y)\sigma_g(y,x)^{-1}, \quad \textit{para todo } x, y \in F, g \in G;$$

ii. R é cocomutativa trançada se e somente se G é abeliano, $\triangleright$ é trivial e

$$Q^{x,x}_{g,h} = \tau_x(g,h)\tau_x(h,g)^{-1}, \quad \textit{para todo} x \in F, g, h \in G.$$

Demonstração: De fato, pois

$$m(\delta_g x \otimes \delta_h y) = \delta_{g\triangleleft x,h}\sigma_g(x,y)\delta_g xy$$

e

$$\begin{aligned} mc(\delta_g x \otimes \delta_h y) &= m(Q^{x,y}_{g,h}\delta_h y \otimes \delta_g x) \\ &= Q^{x,y}_{g,h}\delta_{h\triangleleft y,g}\sigma_h(y,x)\delta_h yx. \end{aligned}$$

Portanto $m = mc$ se e somente se

$$\delta_{g\triangleleft x,h}\sigma_g(x,y)\delta_g xy = Q^{x,y}_{g,h}\delta_{h\triangleleft y,g}\sigma_h(y,x)\delta_h yx$$

que é válido se e somente se $h \triangleleft y = g$, $g \triangleleft x = h$, $g = h$, $xy = yx$ e $Q^{x,y}_{g,g} = \sigma_g(x,y)\sigma_g(y,x)^{-1}$. Ou seja, F é abeliano, $\triangleleft$ é trivial e $Q^{x,y}_{g,g} = \sigma_g(x,y)\sigma_g(y,x)^{-1}$. Para mostrar a cocomutatividade, observa-se que

$$\Delta(\delta_g x) = \sum_{t\in G}\tau_x(t, t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g \triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x$$

e

$$\begin{aligned} c\Delta(\delta_g x) &= \sum_{t\in G}\tau_x(t,t^{-1}g)Q^{t^{-1}g\triangleright x,x}_{t,t^{-1}g}\delta_{t^{-1}g}x\otimes\delta_t(t^{-1}g\triangleright x) \\ &= \sum_{l\in G}\tau_x(gl^{-1},l)Q^{l\triangleright x,x}_{gl^{-1},l}\delta_l x\otimes\delta_{gl^{-1}}(l\triangleright x). \end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se que $\Delta = c\Delta$ se e somente se

$$\sum_{t\in G}\tau_x(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x = \sum_{l\in G}\tau_x(gl^{-1},l)Q^{l\triangleright x,x}_{gl^{-1},l}\delta_l x\otimes\delta_{gl^{-1}}(l\triangleright x),$$

ou equivalentemente, se $t^{-1}g\triangleright x = x$, $gt^{-1} = t^{-1}g$ e $Q^{x,x}_{t^{-1}g,g} = \tau_x(t^{-1}g,t)^{-1}\tau_x(t,t^{-1}g)$, para todo $x\in F, g,t\in G$. Ou seja, G é abeliano, $\triangleright$ é trivial e $Q^{x,x}_{g,h} = \tau_x(g,h)\tau_x(h,g)^{-1}$. □

2.4 Equivalência de álgebras de Hopf

Nessa seção, $R = \Bbbk^G *^{\tau}_{\sigma} \Bbbk F$ será considerada uma álgebra de Hopf.

Diz-se que a sequência de álgebras de Hopf e aplicações de álgebras de Hopf

$$1 \longrightarrow S \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 1$$

é uma extensão de álgebras de Hopf (ou somente extensão) se i é injetiva, π é sobrejetiva e $R^{co\pi} = \{a\in R; a_1\otimes\pi(a_2) = a\otimes\pi(1)\} = S$. Nesse caso, diz-se que esta extensão é uma extensão de $\Bbbk F$ por $\Bbbk^G$.

Com isso, sejam $i:\Bbbk^G \longrightarrow R$ a inclusão natural e $\pi: R\longrightarrow \Bbbk F$ a projeção natural.

Proposição 2.4.1. *Existe uma sequência exata de álgebras de Hopf*

$$1 \longrightarrow \Bbbk^G \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} \Bbbk F \longrightarrow 1\,. \tag{2.4.9}$$

Demonstração: De fato, note que

$$\begin{aligned} i(\delta_g\delta_h) &= i(\delta_{g,h}\delta_g) = \delta_{g,h}\delta_g 1\\ &= \delta_{g\triangleleft 1,h}\delta_g 1 = (\delta_g 1)(\delta_h 1)\\ &= i(\delta_g)i(\delta_h), \ \text{ e}\\ iu_{\Bbbk^G}(1_\Bbbk) &= i(1_{\Bbbk^G}) = 1_R = u_R(1_\Bbbk), \end{aligned}$$

de onde i é um morfismo de álgebras. Mais ainda, como $\tau_1(g,h) = 1$, para todo $g, h \in G$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\Delta_R i(\delta_g) &= \Delta_R(\delta_g 1) \\
&= \sum_{t\in G} \tau_1(t, t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g \triangleright 1) \otimes \delta_{t^{-1}g}1 \\
&= \sum_{t\in G} \delta_t 1 \otimes \delta_{t^{-1}g}1 \\
&= (i \otimes i)(\sum_{t\in G} \delta_t \otimes \delta_{t^{-1}g}) \\
&= (i \otimes i)\Delta_{\Bbbk^G}(\delta_g), \ \text{ e} \\
\varepsilon_R i(\delta_g) &= \varepsilon_R(\delta_g 1) = \delta_{g,1} = \varepsilon_{\Bbbk^G}(\delta_g),
\end{aligned}$$

de onde i é um morfismo de coálgebras. Analogamente, mostra-se que π é um morfismo de coálgebras e, usando que $\sigma_1(x,y) = 1$, para todo $x, y \in F$, mostra-se que π é um morfismo de álgebras.

Observe também que

$$\begin{aligned}
(id \otimes \pi)\Delta(\delta_g x) &= \sum_{t\in G} \tau_x(t, t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g \triangleright x) \otimes \delta_{t^{-1}g}x \\
&= \sum_{t\in G} \tau_x(t, t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g \triangleright x) \otimes \pi(\delta_{t^{-1}g}x) \\
&= \sum_{t\in G} \tau_x(t, t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g \triangleright x) \otimes \delta_{t^{-1}g,1}x \\
&= \tau_x(g,1)\delta_g(1 \triangleright x) \otimes x \\
&= \delta_g x \otimes x.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\delta_g x \otimes \pi(1) = \delta_g x \otimes 1,$$

de onde $(\delta_g x)_1 \otimes \pi((\delta_g x)_2) = \delta_g x \otimes \pi(1)$ se e somente se $x = 1$, ou seja, $R^{co\,\pi} = \Bbbk^G$, provando assim o resultado.

□

Definição 2.4.2. *Sejam R e R' duas álgebras de Hopf. A aplicação linear $\Theta : R \longrightarrow R'$ é dita um morfismo de álgebras de Hopf se preserva a multiplicação, a comultiplicação, a unidade e a counidade.*

Sejam

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & S \arrow[r, "i"] & R \arrow[r, "\pi"] & T \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & S \arrow[r, "i'"] & R' \arrow[r, "\pi'"] & T \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

duas extensões de álgebras de Hopf. Um isomorfismo de álgebras de Hopf $\Theta : R \longrightarrow R'$ é um isomorfismo de extensões de álgebras de Hopf se o seguinte diagrama comuta

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id"'] & R \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Theta"'] & T \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & S \arrow[r, "i'"] & R' \arrow[r, "\pi'"] & T \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
.
$$

Proposição 2.4.3. *Sejam $R = \Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ e $R' = \Bbbk^G *_{\sigma'}^{\tau'} \Bbbk F$ álgebras de Hopf e considere as extensões correspondentes como em (2.4.9). Seja $\nu \in Map_+(G \times F, \Bbbk^\times)$ e defina $\Theta : R \longrightarrow R'$ na forma $\Theta(\delta_g x) = \nu(g,x)\delta_g x$, para todo $g \in G, x \in F$. Então Θ é um isomorfismo de extensões de álgebras de Hopf se e somente se $(\tau,\sigma) = (\tau',\sigma')\delta_1^{tot}\nu$. Mais ainda, qualquer isomorfismo de extensões $\Theta : R \longrightarrow R'$ provém de um único ν.*

Demonstração: Note que Θ é um morfismo de álgebras se e somente se $\sigma_g(x,y)\nu(g,xy) = \sigma'_g(x,y)\nu(g,x)\nu(g \triangleleft x, y)$ e $\nu(g,1) = 1$ para todo $g \in G$. De fato, por um lado tem-se que

$$
\begin{aligned}
\Theta m(\delta_g x \otimes \delta_h y) &= \Theta((\delta_g x)(\delta_h y)) \\
&= \Theta(\delta_{g \triangleleft x, h}\sigma_g(x,y)\delta_g xy) \\
&= \delta_{g \triangleleft x, h}\sigma_g(x,y)\nu(g,xy)\delta_g xy,
\end{aligned}
$$

e por outro, tem-se que

$$
m(\Theta \otimes \Theta)(\delta_g x \otimes \delta_h y) = \Theta(\delta_g x)\Theta(\delta_h y)
$$

$$\begin{aligned} m(\Theta\otimes\Theta)(\delta_g x\otimes\delta_h y) &= \nu(g,x)\nu(h,y)(\delta_g x)(\delta_h y) \\ &= \nu(g,x)\nu(hy)\delta_{g\triangleleft x,h}\sigma'_g(x,y)\delta_g xy. \end{aligned}$$

De onde $\Theta m = m(\Theta\otimes\Theta)$ se e somente se $\sigma_g(x,y)\nu(g,xy) = \sigma'_g(x,y)\nu(g,x)\nu(g\triangleleft x,y)$. E mais, $\Theta(1) = \sum_{g\in G}\nu(g,1)\delta_g 1$ que é igual a 1 se e somente se $\nu(g,1) = 1$ para todo $g \in G$. Veja ainda que Θ é um morfismo de coálgebras se e somente se $\tau'_x(g,h)\nu(gh,x) = \tau_x(g,h)\nu(g,h\triangleright x)\nu(h,x)$ e $\nu(1,x) = 1$, para todo $x \in F$. Com efeito,

$$\begin{aligned} (\Theta\otimes\Theta)\Delta(\delta_g x) &= (\Theta\otimes\Theta)(\sum_{t\in G}\tau_x(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x) \\ &= \sum_{t\in G}\tau_x(t,t^{-1}g)\nu(t,t^{-1}g\triangleright x)\nu(t^{-1}g,x)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x. \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta\Theta(\delta_g x) &= \Delta(\nu(g,x)\delta_g x) \\ &= \sum_{t\in G}\tau'_x(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x. \end{aligned}$$

Desta forma, $(\Theta\otimes\Theta)\Delta(\delta_g x) = \Delta\Theta(\delta_g x)$ se e somente se $\tau'_x(g,h)\nu(gh,x) = \tau_x(g,h)\nu(g,h\triangleright x)\nu(h,x)$. Finalmente, $\varepsilon\Theta = \varepsilon$, ou seja, $\delta_{g,1} = \nu(g,x)\delta_{g,1}$, para todo $g \in G, x \in F$, se e somente se $\nu(1,x) = 1$, para todo $x \in F$. Além disso, o fato de $\nu(1,x) = 1$, para todo $x \in F$, e $\nu(g,1) = 1$, para todo $g \in G$, prova que $\pi = \pi'\Theta$ e $\Theta i = i'$, respectivamente. Consequentemente, Θ é um isomorfismo, provando a primeira afirmação.

Agora, suponha que $\Theta : R \longrightarrow R'$ é um isomorfismo de extensões de álgebras de Hopf. Desde que $\pi = \pi'\Theta$, segue que $\Theta(x)x^{-1} \in \Bbbk^G$, para todo $x \in F$. Defina $\nu(g,x)$ por $\Theta(x)x^{-1} = \sum_{g\in G}\nu(g,x)\delta_g$. Segue de $\Theta i = i'$ que $\Theta i(\delta_g) = \Theta(\delta_g 1) = i'(\delta_g) = \delta_g 1$ e, portanto, como Θ é um morfismo de álgebras, $\Theta(\delta_g x) = \Theta(\delta_g 1)\Theta(x) = \delta_g 1\Theta(x) = \delta_g 1(\sum_{t\in G}\nu(t,x)\delta_t x) = \nu(g,x)\delta_g x$. Note que a unicidade de ν é dada pela sua construção.

□

Essas informações serão utilizadas agora para a demonstração de um importante resultado que faz uma ligação entre os conceitos de extensão de álgebras de

Hopf trançadas e cohomologia.

Considere $Opext(\Bbbk F, \Bbbk^G)$ o conjunto das classes de equivalências de todas as extensões de $\Bbbk F$ por $\Bbbk^G$ associadas ao par combinado (F, G), as quais duas a duas estão relacionadas se existe um isomorfismo de extensões de álgebras de Hopf entre elas. Sendo assim, as extensões de R e R' estão relacionadas se e somente se $(\tau, \sigma) = (\tau', \sigma')\delta^{tot}\nu$, para algum $\nu \in Map_+(G \times F.\Bbbk^\times)$.

Proposição 2.4.4. *A aplicação* $(\tau, \sigma) \mapsto \Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ *de* $Z^1(Tot(C^{\cdot\cdot})) \longrightarrow Opext(\Bbbk F, \Bbbk^G)$ *define uma bijeção entre* $H^1(Tot(C^{\cdot\cdot}))$ *e* $Opext(\Bbbk F, \Bbbk^G)$.

Demonstração: Com efeito, é evidente que essa aplicação é sobrejetiva, e a Proposição 2.4.3 mostra que as relações de equivalências em $H^1(Tot(C^{\cdot\cdot}))$ (ver a Seção 1.4) e em $Opext(\Bbbk F, \Bbbk^G)$ são exatamente as mesmas, mostrando que a aplicação é injetiva.

$\square$

Corolário 2.4.5. *O grupo dos automorfismos da extensão (2.4.9) é isomorfo ao* $Z^0(Tot(C^{\cdot\cdot}))$.

Demonstração: Usando a Proposição 2.4.3, os automorfismos se dão quando $(\tau, \sigma) = (\tau', \sigma')$, ou seja, quando $\delta_1^{tot}\nu = 1$. E como cada automorfismo é dado por um único ν, segue o isomorfismo.

$\square$

Vale observar que se σ é uma cofronteira, ou seja, se existe uma aplicação $\nu \in Map_+(G \times F, \Bbbk^\times)$ tal que $\sigma = \partial\nu$, então R é isomorfo ao produto bicruzado $\Bbbk^G *^{\tau'} \Bbbk F$. Com efeito, tome τ' dada por $\tau'(h, g; x) = \tau(h, g; x)\nu(h; g \triangleright x)^{-1}\nu(hg; x)\nu(g; x)^{-1}$, de onde $(\tau, \sigma) = (\tau', 1)\delta_1^{tot}\nu$.

Capítulo 3

Realizações diagonais sobre grupos finitos

Nesse capítulo será discutida uma classe particular de realizações, as quais possibilitam a construção de exemplos de álgebras de Hopf.

Novamente, considera-se (F, G) um par combinado de grupos, $\sigma : F \times F \longrightarrow (\Bbbk^\times)^G$ e $\tau : G \times G \longrightarrow (\Bbbk^\times)^F$ dois 2-cociclos satisfazendo as condições de normalização (1.3.4), (1.3.6) e (1.3.10), e $R = \Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$.

Fixe um grupo finito C e considere $H = \Bbbk C$. Para cada grupo finito L, denota-se por $Z(L)$ o seu centro e por $\hat{L}$ o grupo dos homomorfismos $L \longrightarrow \Bbbk^\times$. Sejam $z : G \times F \longrightarrow Z(C)$ e $\chi : G \times F \longrightarrow \hat{C}$ funções, e considere $\mu : H \otimes R \longrightarrow R$ e $\rho : R \longrightarrow C \otimes R$ dadas, respectivamente, por

$$\mu(u \otimes \delta_g x) = \langle \chi(g, x), u \rangle \, \delta_g x, \;\; u \in C; \qquad\qquad \rho(\delta_g x) = z(g, x) \otimes \delta_g x,$$

para quaisquer $g \in G, x \in F, u \in C$. Essas aplicações definem uma estrutura de H-módulo e H-comódulo sobre R, respectivamente. Para que μ seja uma ação, esta deve satisfazer as seguintes igualdades $\mu(id \otimes \mu) = \mu(m \otimes id)$ e $\mu(u_C \otimes id) = \psi$, onde ψ denota o isomorfismo canônico. De fato, para quaisquer $u, v \in C, g \in G$ e $x \in F$, tem-se que

$$\begin{aligned} \mu(id \otimes \mu)(u \otimes v \otimes \delta_g x) &= \mu(u \otimes \langle \chi(g, x), v \rangle \, \delta_g x) = \langle \chi(g, x), u \rangle \, \langle \chi(g, x), v \rangle \, \delta_g x \\ &= \langle \chi(g, x), uv \rangle \, \delta_g x = \mu(uv \otimes \delta_g x) \\ &= \mu(m \otimes id)(u \otimes v \otimes \delta_g x), \end{aligned}$$

para todo $u, v \in C, \delta_g x \in R$. Além disso,

$$\mu(u_C \otimes id)(1_{\Bbbk} \otimes \delta_g x) = \mu(1_C \otimes \delta_g x) = \langle \chi(g,x), 1_C \rangle \, \delta_g x = \delta_g x.$$

Já ρ é uma coação se satisfaz as igualdades $(\Delta_C \otimes id)\rho = (id \otimes \rho)\rho$ e $(\varepsilon_C \otimes id)\rho = \varphi$. Seja $\delta_g x \in R$,

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)\rho(\delta_g x) &= (\Delta \otimes id)(z(g,x) \otimes \delta_g x) = z(g,x) \otimes z(g,x) \otimes \delta_g x \\ &= (id \otimes \rho)(z(g,x) \otimes \delta_g x) = (id \otimes \rho)\rho(\delta_g x), \text{ e}\end{aligned}$$

$$(\varepsilon_C \otimes id)\rho(\delta_g x) = (\varepsilon_C \otimes id)(z(g,x) \otimes \delta_g x) = 1_{\Bbbk} \otimes \delta_g x \approx \delta_g x.$$

Particularmente, se $R \in {}^H_H\mathcal{YD}$ e escrevendo $\rho(a) = a_{-1} \otimes a_0$, $a \in R$, a trança $c : R \otimes R \longrightarrow R \otimes R$ é dada por $c(a \otimes b) = a_{-1} \cdot b \otimes a_0$, para todo $a, b \in R$, ou seja,

$$c(\delta_g x \otimes \delta_h y) = z(g,x) \cdot \delta_h y \otimes \delta_g x = \langle \chi(h,y), z(g,x) \rangle \, \delta_h y \otimes \delta_g x.$$

O lema à seguir apresenta uma série de condições necessárias e suficientes para que R seja um módulo de Yetter-Drinfeld sobre H.

Lema 3.0.6. *Com as notações acima, valem as seguinte equivalências:*

i. A multiplicação de R dada por (1.3.2) é um morfismo de H-módulos se e somente se

$$\chi(g, xy) = \chi(g,x)\chi(g \triangleleft x, y), \text{ para todo } g \in G, x, y \in F. \tag{3.0.1}$$

ii. A comultiplicação de R dada por (1.3.7) é um morfismo de H-módulos se e somente se

$$\chi(gh, x) = \chi(g, h \triangleright x)\chi(h,x), \text{ para todo } g, h \in G, x \in F. \tag{3.0.2}$$

iii. A multiplicação de R é um morfismo de H-comódulos se e somente se

$$z(g, xy) = z(g,x)z(g \triangleleft x, y), \text{ para todo } g \in G, x, y \in F. \tag{3.0.3}$$

iv. A comultiplicação de R é um morfismo de H-comódulos se e somente se

$$z(gh,x) = z(g, h \triangleright x) z(h,x), \text{ para todo } g, h \in G, x \in F. \tag{3.0.4}$$

Demonstração: Sejam $a \in H, g, h \in G, x, y \in F$. Então

$$\begin{aligned} m\mu_{R\otimes R}(a \otimes \delta_g x \otimes \delta_h y) &= m(\langle \chi(g,x), a\rangle \, \delta_g x \otimes \langle \chi(h,y), a\rangle \, \delta_h y) \\ &= \langle \chi(g,x), a\rangle \, \langle \chi(h,y), a\rangle \, \delta_{g \triangleleft x, h} \sigma_g(x,y) \delta_g xy \\ &= \langle \chi(g,x), a\rangle \, \langle \chi(g \triangleleft x, y), a\rangle \, \sigma_g(x,y) \delta_g xy. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mu_R(id \otimes m)(a \otimes \delta_g x \otimes \delta_h y) &= \mu_R(a \otimes \delta_{g \triangleleft x, h} \sigma_g(x,y) \delta_g xy) \\ &= \langle \chi(g, xy), a\rangle \, \delta_{g \triangleleft x, h} \sigma_g(x,y) \delta_g xy). \end{aligned}$$

Consequentemente, $m\mu_{R\otimes R} = \mu_R(id \otimes m)$ se e somente se $\chi(g, xy) = \chi(g,x)\chi(g \triangleleft x, y)$, para todo $g \in G, x, y \in F$, ou seja, vale $(i.)$. De forma semelhante, Δ é um morfismo de H-módulos se vale $\Delta\mu_R = \mu_{R\otimes R}(id \otimes \Delta)$. Com efeito, por um lado tem-se

$$\begin{aligned} \Delta\mu_R(a \otimes \delta_g x) &= \Delta(\langle \chi(g,x), a\rangle \, \delta_g x) \\ &= \langle \chi(g,x), a\rangle \sum_{t \in G} \tau_x(t, t^{-1}g) \delta_t (t^{-1}g \triangleright x) \otimes \delta_{t^{-1}g} x, \end{aligned}$$

e por outro

$$\begin{aligned} \mu_{R\otimes R}(id \otimes \Delta)(a \otimes \delta_g x) &= \mu_{R\otimes R}(a \otimes \sum_{t \in G} \tau_x(t, t^{-1}g) \delta_t (t^{-1}g \triangleright x) \otimes \delta_{t^{-1}g} x) \\ &= \sum_{t \in G} \tau_x(t, t^{-1}g) \left\langle \chi(t, t^{-1}g \triangleright x), a \right\rangle \left\langle \chi(t^{-1}g, x), a \right\rangle \delta_t (t^{-1}g \triangleright x) \otimes \delta_{t^{-1}g} x. \end{aligned}$$

Como $\{\delta_g x \otimes \delta_h y; g, h \in G, x, y \in F\}$ é uma base para $R \otimes R$, segue (ii.). Já para que m seja um morfismo de H-comódulos, este deve satisfazer a igualdade $\rho_R m = (id \otimes m)\rho_{R\otimes R}$. Sejam $g, h \in G, c, y \in F$, então

$$\begin{aligned}\rho_R m(\delta_g x \otimes \delta_h y) &= \rho_R(\delta_{g \triangleleft x, h}\sigma_g(x,y)\delta_g xy) \\ &= \delta_{g \triangleleft x, h}\sigma_g(x,y)z(g,xy)\otimes\delta_g xy, \text{ e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(id\otimes m)\rho_{R\otimes R}(\delta_g x\otimes\delta_h y) &= (id\otimes m)(z(g,x)z(h,y)\otimes\delta_g x\otimes\delta_h y) \\ &= z(g,x)z(h,y)\otimes\delta_{g\triangleleft x,h}\sigma_g(x,y)\otimes\delta_g xy.\end{aligned}$$

Consequentemente, $\rho_R m = (id\otimes m)\rho_{R\otimes R}$ é equivalente à (3.0.3).

Por fim, para que Δ seja um morfismo de H-comódulos, deve valer $(id\otimes\Delta)\rho_R = \rho_{R\otimes R}\Delta$. Tem-se

$$\begin{aligned}(id\otimes\Delta)\rho_R(\delta_g x) &= (id\otimes\Delta)(z(g,x)\otimes\delta_g x) \\ &= z(g,x)\otimes\sum_{t\in G}\tau_x(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x \\ &= \sum_{t\in G} z(g,x)\otimes\tau_x(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x,\end{aligned}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned}\rho_{R\otimes R}\Delta(\delta_g x) &= \rho_{R\otimes R}(\sum_{t\in G}\tau_x(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x) \\ &= \sum_{t\in G} z(t,t^{-1}g\triangleright x)z(t^{-1}g,x)\otimes\tau_x(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)\otimes\delta_{t^{-1}g}x.\end{aligned}$$

Pondo $h = t^{-1}g$, tem-se $g = th$ e pelo fato de $\{\delta_g x\otimes\delta_h y; g,h\in G, x,y\in F\}$ ser uma base para $R\otimes R$, segue (iv.).

□

Observe que, se valem as igualdades (3.0.1)-(3.0.4), obtem-se as seguintes normalizações:

$$z(1,x)=1,\quad z(g,1)=1,\quad \chi(1,x)=1,\quad \chi(g,1)=1,\quad x\in F,\ g\in G, \tag{3.0.5}$$

Mais ainda,

$$\rho(a\cdot\delta_g x) = \rho(\langle\chi(g,x),a\rangle\,\delta_g x) = \langle\chi(g,x),a\rangle\, z(g,x)\otimes\delta_g x,$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} a_1(\delta_g x)_{-1}S(a_3)\otimes a_2 \cdot (\delta_g x)_0 &= az(g,x)a^{-1}\otimes a \cdot \delta_g x \\ &= z(g,x)\otimes \langle \chi(g,x), a\rangle\, \delta_g x. \end{aligned}$$

Portanto, $\rho(a\cdot \delta_g x) = a_1(\delta_g x)_{-1}S(a_3)\otimes a_2 \cdot (\delta_g x)_0$. Assim, para que R seja um módulo de Yetter-Drinfeld sobre H, basta que z e χ satisfaçam as igualdades (3.0.1)-(3.0.4), já que as normalizações (3.0.5) garantem que a unidade e a counidade de R sejam morfismos de módulos de Yetter-Drinfeld.

As condições que aparecem no Lema 3.0.6 podem ser interpretadas em termos de cohomologia. Sejam M um grupo abeliano e $Map_+(G^m \times F^n, M)$ o grupo abeliano das funções $f : G^m \times F^n \longrightarrow M$ tais que $f(g_m, \cdots, g_1; x_1, \cdots, x_n) = 1$ desde que um dentre os elementos $g_1, \cdots, g_m$ ou $x_1, \cdots, x_n$ seja igual à 1. Considere o complexo duplo $C^{\cdot\cdot}(M)$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \\
Map_+(G^2 \times F^1, M) \arrow[u] \arrow[r, "\partial"] & Map_+(G^2 \times F^1, M) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
Map_+(G^1 \times F^1, M) \arrow[u, "\partial'"] \arrow[r, "\partial"] & Map_+(G^1 \times F^2, M) \arrow[u, "\partial'"] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd},$$

onde os diferenciais ∂ e ∂' são definidos como em $C^{\cdot\cdot}$.

Lema 3.0.7. *Com as notações anteriores, valem as seguintes equivalências:*

i. *A função $\chi : G \times F \longrightarrow \hat{C}$ satisfaz as condições (3.0.1) e (3.0.2) se e somente se $\chi \in Z^0(Tot(C^{\cdot\cdot}(\hat{C})))$.*

ii. *A função $z : G \times F \longrightarrow Z(C)$ satisfaz as condições (3.0.3) e (3.0.4) se e somente se $z \in Z^0(Tot(C^{\cdot\cdot}(Z(C))))$.*

Demonstração: Basta mostrar que vale a equivalência (*i.*), pois a equivalência (*ii.*) é análoga. Note que $\delta_1^{tot}\chi = \partial'\chi \oplus \partial\chi$ e que

$$\begin{aligned} \partial'\chi(g,h;x) &= \chi(h; g \triangleright x)\chi(gh;x)^{-1}\chi(h;x), \\ \partial\chi(g;x,y) &= \chi(g \triangleleft x; y)\chi(g;xy)^{-1}\chi(g;x), \end{aligned}$$

para todo $g, h \in G, x, y \in F$. Assim, $\partial'\chi = 1$ se e somente se χ satisfaz (3.0.2), e $\partial\chi = 1$ se e somente se χ satisfaz (3.0.1).

$\square$

Exemplo 3.0.8. *A ação à esquerda* $\triangleright : G \times F \longrightarrow F$ *induz uma ação à direita* $\leftharpoonup : Map_+(F, Z(C)) \times G \longrightarrow Map_+(F, Z(C))$ *na forma* $(\phi \leftharpoonup g)(x) = \phi(g \triangleright x)$. *Seja* $\psi \in Map_+(F, Z(C))$ *e considere a função* $z_\psi : G \times F \longrightarrow Z(C)$ *dada por* $z_\psi(g, x) = \partial'\psi(g; x) = (\psi(g \triangleright x))^{-1}\psi(x)$. *Sejam* $g, h \in G$ *e* $x \in F$*, note que*

$$\begin{aligned} z_\psi(gh, x) &= (\psi(gh \triangleright x))^{-1}\psi(x) = (\psi(g \triangleright (h \triangleright x)))^{-1}\psi(h \triangleright x)(\psi(h \triangleright x))^{-1}\psi(x) \\ &= z_\psi(g, h \triangleright x)z_\psi(h, x), \end{aligned}$$

ou seja, z_ψ *satisfaz a propriedade (3.0.4). Mais ainda,* z_ψ *é a* 1*-cofronteira de* ψ *"na primeira variável".*

É possível ainda verificar o seguinte resultado.

Lema 3.0.9. *Seja* $\psi : F \longrightarrow Z(C)$ *um homomorfismo de grupos. Então* z_ψ *satisfaz a condição (3.0.3).*

Demonstração: Observe que

$$z_\psi(g, xy) = (\psi(g \triangleright xy))^{-1}\psi(xy).$$

Por outro lado,

$$z_\psi(g, x)z_\psi(g \triangleleft x, y) = (\psi(g \triangleright x))^{-1}(\psi((g \triangleleft g) \triangleright y))^{-1}\psi(x)\psi(y).$$

Desde que ψ seja um homomorfismo de grupos, como $g \triangleright xy = (g \triangleleft x)((g \triangleleft g) \triangleright y)$, tem-se que as duas expressões são iguais.

$\square$

O próximo teorema é uma consequência da Proposição 1.3.3 e uma aproximação do Teorema 2.2.5.

Teorema 3.0.10. *Suponha que* $z : G \times F \longrightarrow Z(C)$ *e* $\chi : G \times F \longrightarrow \hat{C}$ *satisfaçam as condições (3.0.1)-(3.0.4) do Lema 3.0.6. Então* R *é uma álgebra de Hopf trançada sobre* $\Bbbk C$ *se e somente se*

$$\sigma_{gh}(x,y)\tau_{xy}(g,h) = \langle \chi(g \triangleleft (h \triangleright x), (h \triangleleft x) \triangleright y), z(h,x)\rangle\, \sigma_g(h \triangleright x, (h \triangleleft x) \triangleright y)$$

$$\times \sigma_h(x,y)\tau_x(g,h)\tau_y(g \triangleleft (h \triangleright x), h \triangleleft x), \tag{3.0.6}$$

para todo $g, h \in G$ e $x, y \in F$. Se isso ocorre, diz-se que (z, χ) é uma realização diagonal de R sobre $\Bbbk C$.

□

Observação 3.0.11. *Considere as condições*

$$\sigma_{gh}(x,y) = \langle \chi(g \triangleleft (h \triangleright x), (h \triangleleft x) \triangleright y), z(h,x)\rangle\, \sigma_g(h \triangleright x, (h \triangleleft x) \triangleright y)\sigma_h(x,y), \tag{3.0.7}$$

$$\tau_{xy}(g,h) = \tau_x(g,h)\tau_y(g \triangleleft (h \triangleright x), h \triangleleft x), \tag{3.0.8}$$

para todo $g, h \in G$, $x, y \in F$. É fácil verificar que quaisquer duas condições entre (3.0.6), (3.0.7) e (3.0.8) implicam na terceira. Da mesma forma, pode-se considerar as condições

$$\sigma_{gh}(x,y) = \sigma_g(h \triangleright x, (h \triangleleft x) \triangleright y)\sigma_h(x,y), \tag{3.0.9}$$

$$\tau_{xy}(g,h) = \langle \chi(g \triangleleft (h \triangleright x), (h \triangleleft x) \triangleright y), z(h,x)\rangle\, \tau_x(g,h)\tau_y(g \triangleleft (h \triangleright x), h \triangleleft x). \tag{3.0.10}$$

Essa observação pode ser usada a fim de produzir exemplos de realizações diagonais e é uma ferramenta facilitadora na procura por *braided compatible datum* em muitos casos.

Por exemplo, supondo $R = \Bbbk^G *_\sigma^\tau \Bbbk F$ uma álgebra de Hopf trançada e o 2-cociclo $\sigma : F \times F \longrightarrow (\Bbbk^\times)^G$ uma cofronteira. Então R é isomorfo ao produto bicruzado $\Bbbk^G *_{\sigma'}^{\tau'} \Bbbk F$ com $\sigma' = 1$, de onde σ' satisfaz (3.0.9) e τ' deve satisfazer (3.0.10).

Suponha que R admite uma realização diagonal sobre $\Bbbk C$ e considere o biproduto de Radford $R\#\Bbbk C$, ou seja, $R\#\Bbbk C = R \otimes \Bbbk C$ como espaço vetorial com multiplicação, comultiplicação, unidade e counidade dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}(\delta_g x\#a)(\delta_h y\#b) &= \delta_g x(a \cdot \delta_h y)\#ab = \langle \chi(h,y), a\rangle\, \delta_g x \delta_h y\#ab \\ &= \langle \chi(h,y), a\rangle\, \delta_{g \triangleleft x, h}\sigma_g(x,y)\delta_g xy\#ab,\end{aligned}$$

$$\Delta(\delta_g x\#a) = \sum_{t\in G}[(\tau_x(t,t^{-1}g)\delta_t(t^{-1}g\triangleright x)\#z(g,x)a)\otimes(\delta_{t^{-1}g}x\#a)],$$

$$u(1_{\Bbbk}) = 1_R\#1_{\Bbbk C} = 1_{R\#\Bbbk C},$$

$$\varepsilon(\delta_g x\#a) = \varepsilon(\delta_g x)\varepsilon(a) = \delta_{g,1},$$

para todo $g,h\in G$, $x,y\in F$ e $a,b\in C$.

Proposição 3.0.12. *Com as notações anteriores, as seguintes afirmações são válidas:*

i. A extensão $1 \longrightarrow \Bbbk^G \xrightarrow{\ i\ } R \xrightarrow{\ \pi\ } \Bbbk F \longrightarrow 1$ *é realizável sobre* $\Bbbk C$*,*

ii. Existem sequências exatas de álgebras de Hopf

$$1 \longrightarrow \Bbbk^G \longrightarrow R\#\Bbbk C \longrightarrow \Bbbk F\otimes\Bbbk C \longrightarrow 1 \tag{3.0.11}$$

$$1 \longrightarrow \Bbbk^G\otimes\Bbbk C \longrightarrow R\#\Bbbk C \longrightarrow \Bbbk F \longrightarrow 1\ , \tag{3.0.12}$$

onde todas as aplicações são canônicas.

Demonstração: De fato, para provar ($i.$) basta considerar as ações e coações triviais de $\Bbbk C$ sobre $\Bbbk^G$ e $\Bbbk F$ de forma que $\Bbbk^G, \Bbbk F \in {}^H_H\mathcal{YD}$, já que as normalizações (3.0.5) garantem que as aplicações canônicas i e π sejam morfismos de módulos de Yetter-Drinfeld.
Para provar ($ii.$) note primeiramente que para os biprodutos de Radford correspondentes tem-se $\Bbbk^G\#\Bbbk C = \Bbbk^G\otimes\Bbbk C$ e $\Bbbk F\#\Bbbk C = \Bbbk F\otimes\Bbbk C$. Além disso, as condições (3.0.5) implicam que a ação e coação de $\Bbbk C$ nos elementos δ_g, com $g\in G$, assim como nos elementos $x\in F$, são ambas triviais. Usando isso e considerando a inclusão e a projeção, respectivamente, em (3.0.11) por

$$i(\delta_g) = \delta_g 1\#1_C, \qquad\qquad \pi(\delta_g x\#a) = \delta_{g,1}x\#a,$$

e analogamente para (3.0.12),

$$i(\delta_g \# a) = \delta_g 1 \# a, \qquad\qquad \pi(\delta_g x \# a) = \delta_{g,1} x,$$

para todo $g \in G$, $x \in F$, $a \in C$. Portanto, estas aplicações são de morfismos de álgebras de Hopf e fazem de (3.0.11) e (3.0.12) sequências exatas.

$\square$

3.1 Um exemplo de realização diagonal

Nesta seção será apresentado um exemplo de realização diagonal sob algumas considerações adicionais.

Seja $\Bbbk$ um corpo algebricamente fechado de característica zero. Seja $\triangleright$ a ação trivial, $\triangleleft : G \times F \longrightarrow G$ age por automorfismos de grupos e o grupo $\Sigma = FG$ é isomorfo ao produto semidireto associado $F \ltimes G$. Além disso, $\triangleleft$ induz por transposição ações à esquerda de F sobre $Hom(G, Z(C))$ e $Hom(G, \hat{C})$, ou seja, tem-se $(x \rightharpoonup \phi)(g) = \phi(g \triangleleft x)$, para todo $g \in G$, $x \in F$, e $\phi \in Hom(G, Z(C))$ (ou $Hom(G, \hat{C})$).

Lema 3.1.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i. *O conjunto das aplicações $\chi : G \times F \longrightarrow \hat{C}$ que satisfazem (3.0.1) e (3.0.2) está bijetivamente relacionado com $Z^1(F, Hom(G, \hat{C}))$.*

ii. *O conjunto das aplicações $z : G \times F \longrightarrow Z(C)$ que satisfazem (3.0.3) e (3.0.4) está bijetivamente relacionado com $Z^1(F, Hom(G, Z(C)))$.*

Demonstração: A prova será feita para a afirmação (*i.*), já que a prova de (*ii.*) é análoga. Basta corresponder χ à $\widetilde{\chi} : F \longrightarrow Hom(G, \hat{C})$ onde $\widetilde{\chi}(x)(g) = \chi(g, x)$, para todo $g \in G$, $x \in F$. A condição (3.0.2) garante que $\widetilde{\chi}(x) \in Hom(G, \hat{C})$, já que a ação $\triangleright$ está sendo considerada a trivial, e a condição (3.0.1) afirma que $\widetilde{\chi}$ é um 1-cociclo. De fato,

$$\partial\widetilde{\chi}(x, y) = (x \rightharpoonup \widetilde{\chi}(y))\widetilde{\chi}(xy)^{-1}\widetilde{\chi}(x)$$

e $\partial\widetilde{\chi} = 1$ se e somente se $(x \rightharpoonup \widetilde{\chi}(y))\widetilde{\chi}(xy)^{-1}\widetilde{\chi}(x) = 1$, para todo $x, y \in F$, se e somente se $((x \rightharpoonup \widetilde{\chi}(y))\widetilde{\chi}(xy)^{-1}\widetilde{\chi}(x))(g) = 1$, para todo $x, y \in F$ e $g \in G$, mas

$$\begin{aligned}((x \rightharpoonup \widetilde{\chi}(y))\widetilde{\chi}(xy)^{-1}\widetilde{\chi}(x))(g) &= (x \rightharpoonup \widetilde{\chi}(y))(g)\widetilde{\chi}(xy)^{-1}(g)\widetilde{\chi}(x)(g)\\ &= \widetilde{\chi}(y)(g \triangleleft x)\widetilde{\chi}(xy)^{-1}(g)\widetilde{\chi}(x)(g)\\ &= \chi(g \triangleleft x, y)\chi(g, xy)^{-1}\chi(g, x) = 1.\end{aligned}$$

□

Corolário 3.1.2. *Suponha que $|G|$ e $|Z(C)|$ sejam relativamente primos. Se $z : G \times F \longrightarrow Z(C)$ satisfaz (3.0.3) e (3.0.4), então $z(g, x) = 1$, para todo $x \in F$, $g \in G$.*

Demonstração: De fato, se $|G|$ e $|Z(C)|$ são relativamente primos, então $Hom(G, Z(C)) = 1$, de onde, pelo Lema 3.1.1, tem-se que $z(g, x) = 1$, para todo $x \in F$, $g \in G$. □

Exemplo 3.1.3. *Seja p um número primo e suponha que $\dim R = p^3$, ou seja, $|\Sigma| = p^3$. Com isso, pode-se assumir que $|G| = p^2$ e que G é normal em Σ. Com efeito, seja $l = gx \in \Sigma$, tem-se que $lhl^{-1} = (gx)h(x^{-1}g^{-1}) = g(h \triangleleft x)(h \triangleright x)x^{-1}g^{-1} = g(h \triangleleft x)xx^{-1}g^{-1} = g(h \triangleleft x)g^{-1} \in G$, para todo $h \in G$. Prosseguindo, assuma também que p não divide a ordem de C. Então, como $Z(C)$ é um subgrupo de C, segue que $|G|$ e $|Z(C)|$ são relativamente primos, de onde, pelo Corolário 3.1.2, $z = 1$. Assim $Q^{x,y}_{g,h} = \langle \chi(h, y), z(g, x) \rangle = 1$, para todo $x, y \in F$, $g, h \in G$, ou seja, a trança c é a trivial e portanto R é uma álgebra de Hopf usual.*

Fixe $\widetilde{z} \in Z^1(F, Hom(G, Z(C)))$ e $\widetilde{\chi} \in Z^1(F, \mathrm{Hom}(G, \hat{C}))$, ou seja,

$$(x \rightharpoonup \widetilde{z}(y))\widetilde{z}(x) = \widetilde{z}(xy), \text{ e } \qquad (x \rightharpoonup \widetilde{\chi}(y))\widetilde{\chi}(x) = \widetilde{\chi}(xy),$$

para todo $x, y \in F$, os quais são os 1-cociclos correspondentes as aplicações $z : G \times F \longrightarrow Z(C)$ e $\chi : G \times F \longrightarrow \hat{C}$, respectivamente, como no Lema 3.1.1. Suponha ainda que σ e τ satisfaçam as condições do Teorema 3.0.10.

Considere a ação de F sobre $Z^2(G, \Bbbk^\times)$ dada por $(x \cdot f)(g, h) = f(g \triangleleft x, h \triangleleft x)$, onde $g, h \in G$, $x \in F$, e que está bem definida pois $\triangleleft$ é uma ação por automorfismos de grupos.

Lembre que a aplicação $\tau : G \times G \longrightarrow (\Bbbk^{\times})^F$ pode ser vista como uma aplicação $F \longrightarrow Map_{+}(G \times G, \Bbbk^{\times})$, que será denotada por $\widetilde{\tau}$ ($\tau = \sum_{x \in F} \widetilde{\tau}_x \delta_x$). Note que τ é um 2-cociclo se e somente se a imagem de $\widetilde{\tau}$ está contida em $Z^2(G, \Bbbk^{\times})$. De fato, se $\widetilde{\tau}(F) \in Z^2(G, Bbbk^{\times})$, então

$$g \cdot \widetilde{\tau}_x(h,l)\widetilde{\tau}_x(g,hl) = \widetilde{\tau}_x(gh,l)\widetilde{\tau}(g,h),$$

para todo $g,h,l \in G$, $x \in F$, que ocorre se e somente se τ é um 2-cociclo, já que $\tau = \sum_{x \in F} \widetilde{\tau}_x \delta_x$.

Proposição 3.1.4. *Sejam $\widetilde{z} \in Z^1(F, Hom(G, Z(c)))$ e $\widetilde{\chi} \in Z^1(F, Hom(G, \hat{C}))$. Considere $\sigma \in Z^2(F, (\Bbbk^{\times})^G)$ um 2-cociclo normalizado tal que a seguinte igualdade ocorre*

$$\sigma_{gh}(x,y) = \langle (x \rightharpoonup \widetilde{\chi}(y))(h), \widetilde{z}(x)(g) \rangle \, \sigma_h(x,y)\sigma_g(x,y), \tag{3.1.13}$$

para todo $x,y \in F$, $g,h \in G$. Seja $\tau : G \times G \longrightarrow (\Bbbk^{\times})^F$ um 2-cociclo normalizado e assuma que a condição de normalização (1.3.10) é satisfeita.

Então R é uma álgebra de Hopf trançada sobre $\Bbbk C$ se e somente se $\widetilde{\tau} : F \longrightarrow Z^2(G, \Bbbk^{\times})$ é um 1-cociclo.

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} \sigma_{gh}(x,y) &= \langle (x \rightharpoonup \widetilde{\chi}(y))(h), \widetilde{z}(x)(g) \rangle \, \sigma_h(x,y)\sigma_g(x,y) \\ &= \langle \widetilde{\chi}(y)(h \triangleleft x), \widetilde{z}(x)(g) \rangle \, \sigma_h(x,y)\sigma_g(x,y) \\ &= \langle \chi(h \triangleleft x, y), z(g,x) \rangle \, \sigma_h(x,y)\sigma_g(x,y), \end{aligned}$$

para todo $g,h \in G$, $x,y \in F$. Como $\triangleright$ está sendo considerada a ação trivial, usando a Observação 3.0.11, pelo Teorema 3.0.10, R é uma álgebra de Hopf trançadase e somente se

$$\tau_{xy}(g,h) = \tau_x(g,h)\tau_y(g \triangleleft x, h \triangleleft x) = \tau_x(g,h)(x \cdot \tau_y)(g,h),$$

para todo $x,y \in F$, $g,h \in G$, que é exatamente a condição de 1-cociclo de $\widetilde{\tau}$.

□

Exemplo 3.1.5. *Se τ é o 2-cociclo trivial, então $\widetilde{\tau}$ é o 1-cociclo trivial, de onde R é uma álgebra de Hopf trançada com $R = \Bbbk^G \otimes \Bbbk F$ como coálgebra.*

Referências Bibliográficas

[1] ANDRUSKIEWITSCH, N.; NATALE, S. **Braided Hopf Algebras arising from matched pair of Groups**. Journal of Pure and Applied Algebra 182, 2003.

[2] ANGIONO, I. E. **Álgebras de Nichols sobre grupos abelianos**. Tesis de licenciatura, 2007.

[3] DASCALESCU, S.; NASTASESCU, C.; RAIANU, S. **Hopf Algebras**: an introduction. New York: Marcel Dekker, 2001.

[4] MASUOKA, A. **Extensions of Hopf Algebras**, Trabajos de Matemática **41/99**. Fa.M.A.F., 1999.

[5] TAKEUCHI, M. **Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras**. Communications in Algebra 9, 1981.

[6] TAKEUCHI, M. **Survey of Braided Hopf Algebras**. Mathematics Subject Classification, 2000.

[7] RADFORD, D. E. **Hopf Algebras**. World Scientific, 2012.

[8] WEIBEL, C. A. **An introduction to homological algebra**. Cambridge University Press, 1997.