UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

A MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS ESTADUNIDENSES E BRASILEIROS: UMA ANÁLISE SOBRE O ENSINO DE LOGARITMOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CRÍSTIAM WALLAO ROSA

Santa Maria, RS, Brasil

2015

A MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS ESTADUNIDENSES E BRASILEIROS: UMA ANÁLISE SOBRE O ENSINO DE LOGARITMOS

CRÍSTIAM WALLAO ROSA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Ensino em aprendizagem da Matemática e seus fundamentos Filosóficos, Históricos e Epistemológicos, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM,RS) como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Fajardo

Santa Maria, RS, Brasil

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Wallao Rosa, Crístiam
A MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS ESTADUNIDENSES E BRASILEIROS: UMA ANÁLISE SOBRE O ENSINO DE LOGARITMOS / Crístiam Wallao Rosa.-2015.
168 p.; 30cm

Orientador: Ricardo Fajardo
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2015

1. Logaritmos 2. Livros Didáticos 3. Educação Matemática 4. História da Matemática 5. Pesquisa Bibliográfica I. Fajardo, Ricardo II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

A comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

A MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS ESTADUNIDENSES E BRASILEIROS: UMA ANÁLISE SOBRE O ENSINO DE LOGARITMOS

elaborada por
Crístiam Wallao Rosa

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Educação Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Ricardo Fajardo, Dr.
(Presidente/Orientador)

Rodolfo Chaves, Dr. (IFES)

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

Sandra Eliza Vielmo, Dra. (UFSM)

Santa Maria, 28 de Agosto de 2015.

Dedico este trabalho a minha amada Isabel Cristina Frozza, minha maravilhosa mãe Eva de Fátima Wallao e meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Ricardo Fajardo por ter contribuído em toda minha trajetória de mestrando como orientador e amigo me apoiando ao longo de todo esse processo.

A minha mãe Eva de Fátima Wallao, por me auxiliar moral e financeiramente e por sempre acreditar em minha capacidade na realização desse trabalho.

A minha companheira e amada Isabel Cristina Frozza por estar sempre ao meu lado, me apoiando nos momentos mais difíceis.

A meu irmão Marco Aurélio Wallao Dornelles pelos momentos de lazer, descontração e conversas em meio a tantas horas de trabalho.

A minha irmã Cristiane Wallao Rosa pelo apoio em momentos de dificuldade financeira e por ter gerado minhas duas lindas sobrinhas Manuela e Vallentini que me enchem de alegria.

Aos amigos que me incentivaram nessa jornada, em especial á nossos padrinhos, Elizandre dos Santos e Jair Moura.

As amigas de Mestrado Elisa Splett e Marinela da Silveira Boemo pelo companheirismo e apoio.

As professoras Carmen Vieira Mathias e Luciane Gobbi Tonet pelo apoio na hora mais difícil desse percurso.

A FAPERGS, pela bolsa de estudos, que permitiu uma maior dedicação à pesquisa no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física.

Creio que o principal objetivo da educação deve ser encorajar os jovens a duvidarem de tudo aquilo que se considera estabelecido. O importante é a independência do espírito.

Bertrand Russel

Tudo o que eu digo e faço, aos seus olhos está errado. Diga-me onde eu me encaixo nessa sociedade doente.

Ozzy Osborne

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física
Universidade Federal de Santa Maria

A MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS ESTADUNIDENSES E BRASILEIROS: UMA ANÁLISE SOBRE O ENSINO DE LOGARITMOS

AUTOR: CRÍSTIAM WALLAO ROSA
ORIENTADOR: RICARDO FAJARDO
Data e local de defesa: Santa Maria, 28 de agosto de 2015.

O objetivo desse trabalho é investigar as semelhanças e as diferenças em relação à abordagem metodológica encontrada em livros didáticos escritos em língua inglesa e língua portuguesa versando sobre Logaritmos. Para tal foram utilizados vinte e dois livros didáticos de Matemática publicados entre a década de 1960 e os dias atuais que contemplassem tal conteúdo. Primeiramente realizou-se um apanhado histórico sobre Logaritmos desde sua invenção por Napier em 1614 por meio de sua obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* e a colaboração por parte de outros grandes matemáticos, como Bürgi e Briggs. Logo após passou-se à análise dos livros didáticos e para tal foi realizada uma pesquisa bibliográfica, qualitativa e descritiva Gil (2002) em um segundo momento, os princípios da análise de conteúdo Bardin (2011). Ao final da análise concluiu-se que os livros escritos em Língua Inglesa são mais bem fundamentados e mais voltados à aprendizagem, principalmente da década de 1980 para diante, contendo uma quantidade muito maior de exemplos e exercícios, tanto de aplicação direta de definições e propriedades, quanto contextualizados de alguma maneira. No entanto os livros em Língua Portuguesa são voltados ao ensino clássico sem muitos exemplos e bastantes diretos.

Palavras Chave: Logaritmos; Livros didáticos; Educação Matemática; História da Matemática; Pesquisa Bibliográfica.

ABSTRACT

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física
Universidade Federal de Santa Maria

THE MATHEMATICS IN USA AND BRAZILIAN TEXTBOOKS: A COMPARISON ON TEACHING LOGARITHMS

AUTHOR: CRÍSTIAM WALLAO ROSA
ADVISER: RICARDO FAJARDO
Data e local de defesa: Santa Maria, August 28th 2015

The aim of this study is to investigate the similarities and differences regarding the methodological approach found in USA and Brazilian textbooks dealing with logarithms. For this purpose we researched on twenty-two textbooks of Mathematics that addressed such content. At first we carried out a historical overview about logarithms since its invention by Napier in 1614 through his work *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, also considering the collaboration by other great mathematicians like Bürgi and Briggs. After, we carried on an analysis of textbooks research by means of a bibliographical search, qualitative and descriptive according to Gil (2002), and on a second moment, the principles of Bardin content analysis (2011). As a result of the analysis we concluded that USA books are more well founded and focused on learning, especially from 1980 onward, having a much larger number of examples and exercise, by direct application, settings, properties, or contextualized in some way. However, the Brazilian books are geared toward classical education without many examples, being quite direct.

Keywords: Logarithms; Textbook; Mathematics Education; History of Mathematics; Bibliographic search.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EM - Ensino Médio

EF - Ensino Fundamental

Dr. - Doutor

Dra. - Doutora

Prof. - Professor

LD - Livros Didáticos

TCC - Trabalho de conclusão de curso

MSc. - Mestre

PNLEM - Plano Nacional do Livro do Ensino Médio

PNLD - Plano Nacional do Livro Didático

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A disciplina de Matemática vem sendo considerada por grande parte das pessoas como a mais complicada das escolas, pois é muito difícil de ser compreendida e entendida. Essa dificuldade fica mais evidente quando ocorre a inserção de letras no lugar de números, ou seja, quando a Álgebra é inserida. As pessoas não estão habituadas a utilizar a escrita matemática por meio da linguagem formal, utilizada na academia, ou por meio de símbolos, utilizados principalmente no Ensino Médio.

Em grande parte das escolas de Ensino Médio (EM), os professores encontram alunos muitas vezes desmotivados e sem as noções básicas de Matemática necessárias à compreensão dos conteúdos. No caso da abordagem metodológica utilizada no ensino de Logaritmos, essa inquietação constitui o objeto de estudo deste trabalho.

O conceito de Logaritmo é tido como um dos mais difíceis de ser compreendido pelos alunos desde o nível médio até o superior. Normalmente é incluído em livros didáticos direcionados ao primeiro ano do ensino médio brasileiro e no início da chamada *High School* estadunidense. Segundo alguns professores de Matemática, tanto no Brasil como nos Estados Unidos, o ensino/aprendizagem de Logaritmos é tomado como desafiador.

Em muitos livros didáticos, os conteúdos de Logaritmos e de Funções Logarítmicas são dispostos em capítulos distintos para que a conexão com os demais seja dada da forma mais clara possível. No entanto, a grande maioria das obras analisadas define a Função Logarítmica como a função inversa da Função Exponencial, afirmativa essa que se diferencia do contexto histórico, pois a invenção dos Logaritmos ocorreu em 1614, enquanto os prenúncios da função exponencial só foram colocados no papel por Leibniz no final do século 17.

Os livros didáticos são um poderoso auxiliar para professores que desejam dar mais intensidade as suas aulas, pois detém muitas atividades e exercícios que podem instigar o aluno a se interessar. Dessa forma, contribuem para o aprendizado, mas não deveriam ser utilizados exclusivamente como um roteiro a ser seguido transformando as aulas em momentos de tensão e ansiedade, gerados por meio da leitura e resolução mecânica dos exercícios propostos, e, além disso, existem muitos outros recursos a serem utilizados.

Atentos ao que foi citado anteriormente elaborou-se o objetivo fundamental desse trabalho, que considera uma investigação de possíveis semelhanças e diferenças relacionadas à abordagem metodológica encontrada em livros didáticos em língua inglesa e língua portuguesa com foco no conteúdo de Logaritmos. A seguir, apresenta-se uma descrição sucinta dos assuntos abordados em cada capítulo de modo a proporcionar uma visão geral do trabalho de pesquisa realizado. Nesse sentido, essa dissertação está estruturada em cinco partes.

No capítulo 1, apresentam-se estudos iniciais baseados em dissertações e teses a respeito de pesquisas bibliográficas, e outras sobre Logaritmos, que fundamentarão o desenvolvimento dessa pesquisa, ou seja, uma visão geral da problemática estudada que seria um estado do conhecimento de obras publicadas em língua portuguesa.

No capítulo 2, realiza-se um estudo histórico da Matemática com ênfase nos Logaritmos, cujo intuito é retomar o conceito desse conteúdo desde sua invenção por meio de estudos e de trabalhos de alguns matemáticos. Além disso, busca-se traduzir alguns trechos do livro *The construction of the wonderful Canon of logarithms*, que se traduz em língua portuguesa por "A construção do maravilhoso princípio de Logaritmos". Essa obra foi traduzida para o inglês em 1889, pelo também escocês William Rae MacDonald, a partir da obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* escrita em latim no ano de 1614 pelo artífice dos Logaritmos, o escocês John Neper (1550-1617) mais conhecido por Napier.

No capítulo 3, contempla-se metodologia utilizada para realizar a pesquisa, que será uma pesquisa bibliográfica, qualitativa e descritiva. Em um segundo momento utilizamos os princípios da análise de conteúdo (BARDIN, 2011) como uma forma de organizar o material analisado.

No capítulo 4, procede-se com a investigação de como é abordado o conteúdo de Logaritmos em livros didáticos de matemática estadunidenses e brasileiros, dando ênfase no conceito, definições e propriedades, mas também olhando para as atividades propostas, exercícios, contextualizados ou não, e o uso de novas tecnologias, como por exemplo, calculadoras, programas computacionais, etc.

No que segue no capítulo intitulado Fendas Conclusivas, menciona-se particularidades das abordagens metodológicas dos livros analisados e se elabora uma comparação entre os modos que são trabalhados os conteúdos, como estão dispostos e quantificados os exercícios e atividades, averiguando se a(s) obra(s) utilizam exemplos contextualizados ou simplesmente utilizam exercícios que exigem resolução mecânica, voltados somente à aplicação de fórmulas.

Para finalizar o capítulo faz-se um estudo sobre as principais características das abordagens metodológicas utilizadas nos livros didáticos, estabelecendo possíveis ligações ou dissonâncias entre elas. Buscando verificar quais são os motivos que levam um ou outro serem considerados mais ou menos adequados para determinado modelo educacional, no que se refere ao ensino de Matemática, especificamente no que toca o conteúdo de Logaritmos.

1. ESTUDOS INICIAIS

Neste capítulo, apresenta-se o tema da pesquisa, as questões norteadoras, bem como o objetivo geral, os objetivos específicos, alguns estudos a respeito do tema e os procedimentos teórico-metodológicos.

1.1 A PROBLEMÁTICA

O uso de Logaritmos em sala de aula, atualmente, ocorre no 1º ano do Ensino Médio, na disciplina de Matemática, ainda que seja muito utilizado em outras áreas de ciências exatas e naturais. A abordagem desse conteúdo ocorre em uma fase de transição do estudante do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, e normalmente dá-se por meio de livros didáticos de matemática. Esses livros geralmente atuam como principal, ou até mesmo único, recurso didático no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

A ideia inicial para o desenvolvimento dessa pesquisa surgiu de uma pergunta, “Será que os conteúdos de Matemática são abordados da mesma forma nos livros escritos em língua inglesa e nos escritos em língua portuguesa?”. Porém, entendíamos que optar por um conteúdo específico seria a melhor solução e, após algumas conversas e pesquisas percebemos que um dos objetos matemáticos ainda pouco estudado em termos de Brasil é o de Logaritmos.

Então começou nossa busca por materiais sob a orientação do Prof. Ricardo Fajardo e verificamos que existe muito material a ser investigado. Assim, decidimos realizar a pesquisa tomando alguns livros didáticos de Matemática que tenham sido publicados em língua inglesa e em língua portuguesa entre a década de 1960 e os dias atuais, determinando esse “recorte” devido à disponibilidade de exemplares a serem pesquisados.

No que toca os livros didáticos de Matemática estadunidenses, tivemos um pouco de facilidade ao obter os primeiros exemplares para iniciar a investigação, pois o orientador atuou por alguns anos como docente no Ensino Médio nos Estados Unidos, tendo trazido consigo uma quantidade considerável de livros publicados entre a década de 1960 e 2000. No entanto, ainda faltavam alguns exemplares referentes principalmente à década de 1980 e dos anos que precediam o ano de 2000, esses que fomos conseguindo aos poucos até o momento.

Já no que diz respeito aos livros didáticos brasileiros de Matemática, essa pesquisa iniciou durante os anos de graduação, em que se teve a oportunidade de receber por meio de doações de escolas públicas alguns livros da década de 1990 e de 2000. Obtivemos também vários exemplares que vão desde o ano de 1960 até a década de 1990, por meio de buscas em sebos e livrarias digitais, além de obtermos alguns exemplares por meio de doações de escolas do município de Santa Maria.

1.2 QUESTÕES NORTEADORAS

Quando o conteúdo de Logaritmos é trabalhado em sala de aula, muitas vezes parece que não tem ligação com os anteriores e, daí, professores e alunos começam a viver em mundos completamente distantes, em que o professor age como propagador de um conteúdo solto e sem aplicações e o aluno tem esse como um empecilho para sua aprovação. Baseados nisso temos os seguintes questionamentos norteadores:

- Como o conteúdo de Logaritmos é abordado nos livros didáticos de Matemática estadunidenses e brasileiros?
- O conceito de Logaritmo é construído de maneira que o aluno possa entendê-lo como um processo e não como um produto a ser trabalhado?
- Os exemplos, atividades e exercícios visam apenas à mecanização ou se valem da contextualização e uso de novas tecnologias?

Com base nos questionamentos supracitados, descreve-se a seguir, o objetivo geral, os objetivos específicos e alguns estudos a respeito dos Logaritmos.

1.3 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é: Investigar semelhanças e/ou diferenças em relação à abordagem metodológica encontrada em livros didáticos estadunidenses e brasileiros versando sobre Logaritmos.

1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analisar o material selecionado a partir do estudo sobre alguns livros didáticos de Matemática estadunidenses e brasileiros;

- Analisar os livros didáticos de Matemática estadunidenses e brasileiros versando sobre Logaritmos separadamente, a fim de categorizá-los a partir das definições, propriedades e a quantidade de exercícios e atividades;
- Comparar os resultados obtidos na análise entre os livros didáticos de Matemática em língua inglesa e língua portuguesa.

1.5 ALGUNS ESTUDOS A RESPEITO DE LOGARÍTMOS

Buscando analisar a história da construção do conceito de Logaritmos, toma-se como livro base o *The construction of the wonderful Canon of logarithms* traduzido para a língua inglesa e publicado no ano de 1889 pelo escocês William Rae MacDonald, a partir do *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* de autoria do escocês John Neper (1550-1617) publicado em latim no ano de 1614.

O trabalho de John Neper, também conhecido como Napier, despertou no decorrer dos séculos que sucederam sua morte a curiosidade e atenção de muitos outros matemáticos. Porém, somente no princípio do século XX é que o conteúdo de Logaritmos tornou-se aos poucos parte dos conteúdos que deveriam ser trabalhados ao longo do ensino básico.

O conteúdo de Logaritmos sempre foi tratado nas últimas séries do ensino básico, que no Brasil foi chamado até o ano de 1967 de ensino secundário e dividido em curso científico, curso normal e curso clássico. Nos anos que seguiram o 2º grau, como ficou conhecido, era dividido em PPT (Preparação para o trabalho) e Cursos Técnicos, como por exemplo, Técnico em Contabilidade. Nos dias de hoje é conhecido simplesmente como Ensino Médio.

Por muito tempo, até por volta da década de 1960, tudo que era produzido no Brasil sobre Matemática ficava apenas nas Universidades ou Institutos de Pesquisa e estava disponível apenas a Catedráticos ou a estudantes de nível de Mestrado ou Doutorado da própria instituição. No entanto, com a inserção da Internet no mundo acadêmico na década de 1990, os trabalhos produzidos foram aos poucos se tornando mais fáceis de serem divulgados e explorados.

Hoje, existem inúmeros trabalhos publicados no Brasil que envolvem o conteúdo de Logaritmos, muitos deles infelizmente inacessíveis ao público em geral. Por outro lado existe uma grande parte desses trabalhos disponíveis em bibliotecas digitais de vários institutos de ensino em todo território brasileiro, além de muitos artigos, trabalhos de conclusão de curso

(TCC) e monografias que estão disponíveis em vários sites como, por exemplo, a biblioteca nacional de trabalhos acadêmicos.

Na realização de uma pesquisa em bibliotecas digitais e em vários *sites* encontramos inúmeros trabalhos que envolvem Logaritmos. Porém, seria uma ideia no mínimo presunçosa imaginar que todos os trabalhos que servem ao propósito de realizar essa pesquisa fossem citados aqui. Dessa forma, busca-se citar apenas alguns que foram considerados mais instigadores e que tenham mais em comum com nosso objeto de pesquisa, que é a abordagem metodológica no ensino de Logaritmos.

O primeiro deles é a Dissertação de Mestrado de Evanildo Costa Soares, orientada pelo Prof. Dr. Iran de Abreu Mendes e intitulada: Uma investigação histórica sobre os Logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula. Foi defendida no ano de 2011 junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Exatas da Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN.

Nessa obra, Soares (2011), a partir de uma pesquisa preliminar, identificou a abordagem conceitual e didática dada aos Logaritmos nos principais livros didáticos de Matemática adotados pelos professores das escolas estaduais do Ensino Médio do Município de Natal, no Rio Grande do Norte. Destacou dentre esses livros os capítulos sobre Logaritmos e buscou dar ênfase ao conceito, definições e quais os exercícios mais trabalhados, contextualizados ou não.

Soares (2011) concluiu que é possível abordar o conteúdo em sala de aula de forma transversalizante e interdisciplinar, isto é, que não é preciso explorar conteúdos matemáticos, em particular, apenas da forma tradicional, mas que é possível estabelecer relações com outras disciplinas, como a Física, a Química e a Geografia.

Como critério investigativo de toma-se um TCC e dois artigos, que julgamos muito instigantes, publicados em bibliotecas digitais e em anais de eventos. As seguir faz-se uma breve descrição de cada um deles, levando em conta o tema, os objetivos e as conclusões apresentadas nessas obras e quais são as possibilidades de que o trabalho venha a contribuir na investigação do presente problema de pesquisa.

O terceiro trabalho que se utiliza como instigador dessa pesquisa é a monografia de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da cidade de São Paulo defendida no ano de 2012. A monografia é de autoria de

Diogo Oliveira Soares sob orientação do Prof. MSc. Henrique Marins de Carvalho e recebe o título de: “Napier *versus* Dante”.

Em seu trabalho, Soares (2012) destaca a importância da História da Matemática no ensino, e deixa claro que o objetivo dessa pesquisa é “resgatar a essência dos Logaritmos e situá-los nos dias de hoje”. Para tanto, comparou “os conceitos de função logarítmica extraídos da obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* publicada em 1614 por John Neper (Napier)”, com o livro didático *Matemática contexto e aplicações* de autoria de Luiz Roberto Dante.

Dante (1999), bem como outras obras do mesmo autor, pois as mesmas são aprovadas pelo Programa Nacional do Livro do Ensino Médio (PNLEM) e são distribuídas gratuitamente pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Por esses motivos é que Soares (2012) buscou fazer essa comparação a fim de averiguar as semelhanças e diferenças postas em relação aos Logaritmos.

Soares (2012), devido em grande parte aos contextos históricos em que foram produzidos os dois livros, conclui que haveria diferenças entre eles, tanto nas definições quanto na terminologia. No entanto, o que mais ficou claro foi o fato de que a base usada por Napier, a famosa base *e*, é diferente da que utilizada em Dante (1999) que é a base 10.

O ponto de convergência entre as ideias de Napier com as obras supracitadas e analisadas foi que em todas elas buscam-se estudantes e professores que entendam sua formulação e para tanto objetiva-se ser o mais claro possível em suas definições e propriedades juntamente com os exercícios contextualizados. Já em relação às obras Dante (1999, 2002, 2005), os diversos tópicos abrangendo a História da Matemática chamam muito a atenção de alunos e professores, procedendo em melhores resultados em relação à aprendizagem.

O quarto trabalho que julgamos importante é o artigo, de autoria de José Carlos S. Queiroz, professor de Educação Matemática na Universidade do Estado da Bahia – UNEB intitula-se “Os Logaritmos nos livros didáticos de matemática: análise da abordagem na perspectiva da Educação Matemática”. Este trabalho foi publicado nos anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática que ocorreu no ano de 2013 na PUC – PR.

Tal artigo tem como objetivo central pesquisar sobre a abordagem que é dada aos Logaritmos incluídos nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, amplamente utilizados pelas escolas públicas baianas, editados na primeira década do século XXI. Ao concluir Queiroz (2013) constatou que nos livros pesquisados a apresentação dos Logaritmos está apenas relacionada a problemas de resolução mecânica que não dão margem ao aluno para que relacione a outros conteúdos. Enfim, (QUEIROZ, 2013, p.13) conclui que “os livros didáticos precisam de alguns ajustes na abordagem de Logaritmos, pois a grande maioria dos professores os tem como única ferramenta de apoio para planejar e conduzir suas aulas”.

O quinto trabalho utilizado como referência é o artigo dos autores Maria Isabel da Costa Pereira e José Damião Souza de Oliveira, ambos, estudantes do curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN intitulado “Da origem dos Logaritmos ao uso da régua de cálculo no Ensino de Matemática”. Este trabalho foi publicado nos anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática que ocorreu no ano de 2013 na PUC – PR.

Propõem o uso pedagógico de um artefato histórico originado da criação e uso dos Logaritmos: “a régua de cálculo”. Para atingir tal objetivo, (Pereira; Oliveira, 2013, p.07) investigaram, mediante pesquisa bibliográfica, “o desenvolvimento prático das réguas na história, suas contribuições para o avanço tecnológico, mostrando seu potencial pedagógico para uso na sala de aula, com uma parte empírica”.

Como conclusão Pereira e Oliveira (2013) defende que para se tornar concreta uma experiência didática significativa seria necessário buscar os princípios das réguas de cálculo e das barras de Napier na História da Matemática para utilizar esses conhecimentos na construção de atividades didáticas que possibilitassem o ensino desse tópico matemático.

Em todos os trabalhos supracitados encontra-se algo em comum com o propósito dessa pesquisa, dentre eles: a análise de livros didáticos de matemática, a investigação histórica em relação aos Logaritmos e a comparação entre abordagens metodológicas. Dessa forma entende-se que todos os trabalhos citados são de grande utilidade e que com certeza estimularam a ideia e a constituição dessa pesquisa.

2. A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E OS LOGARITMOS

De acordo com Boyer (1996) o desenvolvimento dos Logaritmos surgiu da necessidade de facilitação de alguns cálculos matemáticos, principalmente por conta do desenvolvimento da Astronomia e da ampliação do comércio causada pelas grandes navegações. A maior intensidade nesse desenvolvimento ocorreu entre os séculos XVI e XVII e os Logaritmos foram construídos como meios de cálculos, que transformavam complexas operações de multiplicação e divisão em simples operações de adição e subtração.

2.1 NAPIER, O ARTÍFICE DOS LOGARITMOS

O artífice dos Logaritmos foi o escocês, sob o título de Barão de Murchiston, John Neper (1550-1617), mais conhecido por Napier. Não era matemático profissional, pois foi somente no século XIX que surgiu essa profissão e, além disso, era impetuosamente anticatólico.

Ainda sobre as façanhas envolvendo Napier, Eves (2011) afirma que o Barão de Murchiston:

> Para se descontrair de suas polêmicas políticas e religiosas, Napier deleitava-se estudando matemática e ciência, resultando daí que produtos de seu gênio tenham entrado para a história da matemática. São: (1) a invenção dos logaritmos; (2) um engenhoso dispositivo mnemônico, conhecido como *regra das partes circulares,* para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos; (3) pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de quatro conhecidas como *analogias de Napier,* úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos; (4) a invenção de um instrumento conhecido como *barras de Napier* ou *ossos de Napier,* usado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números. (EVES, 2011, p. 342)

Sobre sua considerada maior invenção, Napier chamou originalmente os Logaritmos de “números artificiais” e os antilogaritmos de “números naturais”. Mais tarde, compôs a palavra *Logaritmo*, para significar um número que indica uma razão: Em grego, λογος (*logos*) que significa razão, e αριθμος (*arithmos*) significando número (BOYER, 1996, p. 228).

Baseado em ideias que envolviam a Astronomia, particularmente na *prostaférese* (que nada mais é do que a diferença entre o movimento real e o movimento médio de um planeta) Napier “restringiu seus Logaritmos inicialmente aos senos de ângulos”, e dedicou “pelo menos 20 anos de trabalho a essa teoria culminando os princípios de seu trabalho em termos geométricos” (EVES, 2011, p. 344). Napier mandou seus primeiros resultados para o astrônomo holandês Tycho Brahe (1546-1601) que, a partir deles, estudou detalhadamente as fases da lua e codificou muitos dados que, mais tarde, serviriam a Kepler.

2.2 OS LOGARITMOS DE BÜRGI

O suíço Jobst Bürgi (1552-1632) era um homem eclético, construtor de instrumentos e relojoeiro e é considerado até hoje o único rival de Napier quanto à prioridade da construção dos Logaritmos. "Bürgi era assistente do astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) em Praga, e por meio da facilitação de cálculos astronômicos, inventou, independentemente, os Logaritmos, por volta de 1600. Esses só foram apresentados em livro publicado em 1620 que contém a primeira ideia sobre antilogaritmos e é intitulado *Progress Tabulen"* (EVES, 2011, p. 346).

A grande diferença entre a ideia de Bürgi e de Napier é que o suíço considerava a abordagem algébrica e o escocês a geométrica, e, além disso:

> Ficou sugerido até agora, que a invenção dos Logaritmos foi obra de um só homem, mas tal impressão não deve permanecer. Napier foi de fato o primeiro a publicar uma obra sobre Logaritmos, mas as ideias muito semelhantes foram desenvolvidas independentemente na suíça por Jobst Bürgi mais ou menos ao mesmo tempo. Na verdade é possível que a ideia de Logaritmo tenha ocorrido a Bürgi em 1588, o que seria meia dúzia de anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma direção. (BOYER, 1974, p. 230)

Bürgi muito provavelmente foi levado a guiar suas investigações acerca de Logaritmos seguindo as mesmas influências de Napier, de acordo com sequências aritméticas e geométricas a partir de suas propriedades. No entanto, mesmo sem saber, divergiam no fato de um ter auxiliado Tycho Brahe e o outro a Kepler, ambos astrônomos.

2.3 BRIGGS, SEUS LOGARITMOS E A RELAÇÃO COM O TRABALHO DE NAPIER

O inglês Henry Briggs (1561-1631), segundo Eves (2011) era um eminente professor de Geometria do *Gresham College* de Londres, onde ocupava a primeira cátedra de Matemática criada na Inglaterra. Mais tarde foi professor em Oxford, quando teve contato com a obra mais grandiosa de Napier, o *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, pela qual ficou muito interessado.

Briggs, por volta de 1615, realizou uma viagem a Edimburgo (cidade em que residia Napier). Seu intuito com o translado foi parabenizar o inventor dos Logaritmos e enaltecer sua obra que, no ano seguinte havia sacudido a Matemática da época, chegando a permanecer por cerca de um mês na cidade natal de Napier (BAUMGART, 1992).

Em sua visita, o inglês propôs a Napier que as tábuas criadas por ele seriam mais úteis se fossem alteradas, de modo que o Logaritmo de 1 fosse 0 e o Logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10. Assim, surgiram os *briggsianos* ou *comuns*. Os Logaritmos utilizados nos dias de hoje, de base 10, devem sua ascendência nos cálculos ao fato de nosso sistema numérico ser decimal.

Nos anos seguintes à visita, Briggs empenhou todas as suas energias na construção de uma inovadora tábua, baseada na ideia sugerida e aceita por Napier. Com base nisso publicou em 1624 sua obra *Arithmetica logarithmica* contendo, segundo Eves (2011, p. 46) uma "tábua de Logaritmos comuns, com 14 casas decimais, dos números de 1 a 20000 e de 90000 a 100000". Os Logaritmos dos números compreendidos entre 20000 e 90000 foram preenchidos mais tarde com a ajuda de um livreiro holandês chamado Adrien Vlacq (1600-1660).

2.4 O CONCEITO DE LOGARITMOS

"Muito dificilmente na História da Ciência, particularmente na História da Matemática, uma ideia abstrata foi recebida de modo mais caloroso por toda a comunidade científica como a invenção dos Logaritmos" (MAOR, 1994, p.15). Além de sua gigantesca utilidade na realização de cálculos práticos, os Logaritmos têm, também, um papel muito importante em Matemática teórica. Antecedente à invenção de calculadoras e computadores, era constantemente usada como uma ferramenta em observações, navegação e outros ramos da Matemática.

Napier escolheu sua forma entendendo que a diferença entre dois Logaritmos determina a razão entre os números dos quais eles são assumidos, de forma que existe uma correspondência entre uma série aritmética e uma série geométrica de números. O termo antilogaritmo foi introduzido nos últimos anos do século XVII e, apesar de nunca ter sido usado muito na Matemática, persistiu em coleções de tabelas até não ser mais usado.

Apesar do Francês Nicolas Chuquet (1455-1500) e do Alemão Michael Stifel (1487-1567) já haverem observado uma correspondência entre as séries citadas anteriormente, seu uso prático só foi realizado pelo matemático escocês John Neper (Napier) (1550-1617), por volta de 1594, e apresentado em dois livros: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* "Descrição do Maravilhoso Princípio de Logaritmos", publicado em 1614 (Figura 1), e *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* "Construção do Maravilhoso Princípio de Logaritmos", publicado postumamente em 1619.

Figura 1: Capa do trabalho de Napier Publicado em 1614.

Fonte: Knott (1915).

É conveniente destacar que o matemático inglês Henry Briggs (1561-1631) foi quem sugeriu a Napier, em 1615, o uso da base 10, mais tarde registrou seus próprios cálculos, nessa base, no livro *Arithmetica Logarithmica* (Aritmética Logarítmica), editado em 1624. Note que, os Logaritmos, decimal e neperiano, representados atualmente por: log e ln, e apresentam as seguintes propriedades:

$$\log(a.b) = \log a + \log b \quad e \quad \ln(a.b) = \ln a + \ln b$$

$$\log(a^n) = n\log(a) \quad e \quad \ln(a^n) = n\ln(a)\,;$$

$$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b \quad e \quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

Por sua vez, o valor de e foi calculado por Eüler em um manuscrito datado de 1777, (MAOR, 1994, p.17) por intermédio da expressão (em notação atual):

$$e = \lim_{h \to +\infty} (1 + h^{-1})^h = 2,7182818284\,...$$

É importante destacar que nos livros: *Introductio in Analysis Infinitorum* (Introdução à Análise do Infinito), em dois volumes e publicados, em Lausanne, em 1748, *Institutiones Calculi Differentialis* (Livros sobre o Cálculo Diferencial) publicado em Berlin, em 1755; e *Institutiones Calculi Integralis* (Livros sobre o Cálculo Integral), obra em três volumes, publicada em São Petersburgo, entre 1768 e 1770, Eüler introduz a noção de função e sua notação $f(x)$ ou $f[(x)]$ e a relação entre as funções trigonométricas e exponenciais, por intermédio da equação de E**ü**ler, conhecida como:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Apenas como uma forma de investigação Matemática pode-se verificar as aproximações para ***e***, utilizando noções de sequências e de aproximações, como segue no Quadro 1:

x	$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2
10	2,59374246010
100	2,70481382942
1000	2,71692393224
10000	2,71814592682
100000	2,71826823720
1000000	2,71828046916
10000000	2,71828169398
100000000	2,71828178640
1000000000	2,71828203081
....	....

Quadro 1: Aproximações para o número *e*.

Fonte: MAOR, 1994, p.19.

Nota-se a partir dos valores tabelados acima, que o valor de $f(x)$ cresce à medida que os valores de x crescem e tendem ao infinito. Logo, a precisão do número irracional e é dada quando calculamos o limite da função com x tendendo ao infinito. Também é importante frisar que, em termos de ensino de Matemática, particularmente no Ensino Médio, a ideia de limite de uma determinada função é bastante abstrata e por vezes difícil de ser introduzida.

3. A METODOLOGIA

A metodologia utilizada para elaborar esse trabalho foi a Pesquisa Bibliográfica, que *é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos* (GIL, 2002, p.44). Ainda sobre a pesquisas bibliográficas, Gil (2002) coloca que as mesmas podem se propor à análise de diversas posições acerca de um problema e também costumam ser desenvolvidas quase exclusivamente mediante fontes bibliográficas.

As fontes bibliográficas são encontradas em grande número e podem ser classificadas conforme a figura 2:

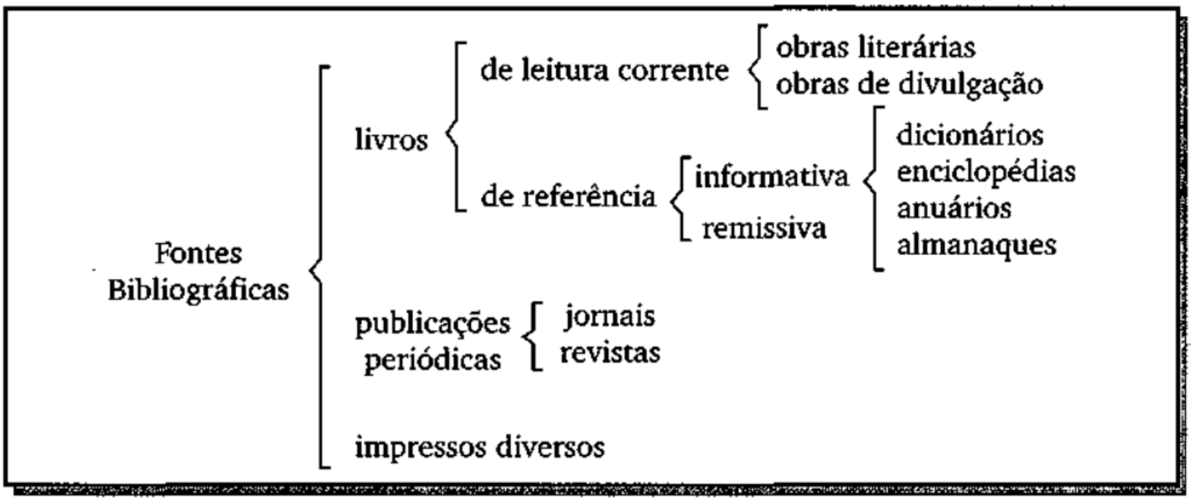

Figura 2: Classificação das fontes bibliográficas.

Fonte: GIL (2002).

As fontes bibliográficas utilizadas nesse trabalho são caracterizadas como Livros de leitura corrente, isto é, aqueles que abrangem diversas obras alusivas a gêneros literários e também as obras de divulgação, que visam proporcionar conhecimentos técnicos ou científicos. Desse modo:

> A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. Essa vantagem torna-se particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispersos pelo espaço. (GIL, p.45, 2002)

A pesquisa é também descritiva, pois segundo (GIL, p.42, 2002), *têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então,* *o estabelecimento de relações entre variáveis.* Contudo, a análise realizada é qualitativa, pois segundo (GIL, 2002, p.133) *depende de muitos fatores, tais como a natureza dos dados coletados, a extensão da amostra, os instrumentos de pesquisa e os pressupostos teóricos que nortearam a investigação.* Para realizar tal análise, verificaram-se vários métodos, adotamos os princípios da análise de conteúdo, conforme colocado na sequência.

3.1 A ANÁLISE DE CONTEÚDO

Análise de Conteúdo (BARDIN, 2011, p. 31), "não se trata de um instrumento, mas de um leque de utensílios adaptáveis a um campo de pesquisa muito vasto além de recorrer ao método de análise sistemática para verificar hipóteses no sentido de invalidá-las ou de confirmá-las e enriquecer a tentativa exploratória, aumentando a propensão à descoberta".

A análise de conteúdo é desenvolvida em três etapas, a primeira é chamada de pré-análise, onde ocorre "a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, à formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração dos indicadores que fundamentam a interpretação" (BARDIN, 2011, p. 126). Nessa fase, sintetizamos as ideias iniciais, ou seja, constituímos o *corpus* documental da pesquisa.

A segunda etapa da análise de conteúdo é onde ocorre a exploração do material. É a etapa mais duradoura e trabalhosa. É a realização das decisões tomadas na pré-análise. É o momento da codificação, em que os dados brutos são transformados de forma organizada e, se "as diferentes operações da pré-análise forem convenientemente concluídas, a fase de análise propriamente dita não é mais do que a aplicação sistemática das decisões tomadas". (BARDIN, 2011, p. 131)

A terceira etapa é constituída pelo tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação, "onde os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos ("falantes") e válidos". Aqui são estabelecidos "quadros de resultados, diagramas, figuras e modelos, os quais condensam e põe em relevo as informações fornecidas pela análise" (BARDIN, 2011, p. 131).

4. LOGARITMOS EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA ESTADUNIDENSES E BRASILEIROS

No intuito de averiguar como é abordado o conteúdo de Logaritmos em livros didáticos Estadunidenses e Brasileiros, tomou-se vinte e dois (22) livros, onze (11) escritos em língua inglesa (Estadunidenses) e outros onze (11) escritos em nossa língua vernácula, publicados entre as décadas de 1960 e 2010.

Para iniciar esse capítulo realizar-se-á uma breve descrição dos livros analisados, contando com título, autor (es), ano de publicação, editora, local de publicação, e número de páginas. Na sequência estabelecer-se-á a investigação envolvendo os livros didáticos seguindo os pressupostos da metodologia da HP.

4.1 Abordagem histórica sobre o Livro Didático no Brasil

O livro didático só foi legitimado nacionalmente em 1929 quando o Estado criou um órgão específico para estabelecer sobre políticas do livro didático, o Instituto Nacional do Livro (INL), colaborando para dar maior credibilidade ao livro didático nacional e, consequentemente, ajudando no aumento de sua produção. Já em 1938, o Estado institui a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), estabelecendo sua primeira política de legislação e controle de produção e circulação do livro didático no País.

No ano de 1945 o Estado consolida a legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático, restringindo ao professor a escolha do livro a ser utilizado pelos alunos. Em 1966 foi lavrado um acordo entre o Ministério da Educação (MEC) e a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (USAID) permitindo a criação da Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (COLTED), com o objetivo de coordenar as ações referentes à produção, edição e distribuição do livro didático.

Em 1970 o Ministério da Educação implementou o sistema de coedição de livros com as editoras nacionais, com recursos do Instituto Nacional do Livro (INL). Logo após, em 1971 o Instituto Nacional do Livro (INL) passa a desenvolver o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF). A contrapartida das Unidades da Federação torna-se necessária com o término do convênio MEC/USAID, efetivando-se com a implantação do sistema de contribuição financeira das unidades federadas para o Fundo do Livro Didático.

No ano de 1976, o governo assume a compra de boa parcela dos livros para distribuí-los às escolas e das unidades federadas. Com a extinção do INL, a Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME) torna-se responsável pela execução do programa do livro didático. Os recursos provêm do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e das contribuições das contrapartidas mínimas estabelecidas para participação das Unidades da Federação.

Passados alguns anos, em 1983 em substituição à FENAME, é criada a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), que incorpora o PLIDEF. Na ocasião, o grupo de trabalho encarregado do exame dos problemas relativos aos livros didáticos propõe a participação dos professores na escolha dos livros e a ampliação do programa, com a inclusão das demais séries do Ensino Fundamental.

Em 1985 o PLIDEF dá lugar ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Mais tarde, já em 1992 a distribuição dos livros é comprometida pelas limitações orçamentárias e há um recuo na abrangência da distribuição, restringindo-se o atendimento até a 4ª série do Ensino Fundamental. Após isso em julho de 1993 a Resolução FNDE nº 6 vincula, recursos para a aquisição dos livros didáticos destinados aos alunos das redes públicas de ensino, estabelecendo-se, assim, um fluxo regular de verbas para a aquisição e distribuição do livro didático.

A partir do ano de 1995, de forma gradativa, volta à universalização da distribuição do livro didático no Ensino Fundamental, onde são contempladas as disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, em 1996 a de Ciências e, em 1997, as de Geografia e História. Ainda é importante frisar que em 1996 é iniciado o processo de avaliação pedagógica dos livros inscritos para o PNLD 1997. Os livros que apresentam erros conceituais, indução a erros, desatualização, preconceito ou discriminação de qualquer tipo são excluídos do Guia do Livro Didático.

Ocorre em 1997 a extinção da Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), passando assim a responsabilidade pela política de execução do PNLD, integralmente para o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). O programa é ampliado e o Ministério da Educação passa a adquirir, de forma continuada, livros didáticos de alfabetização, língua portuguesa, matemática, ciências, estudos sociais, história e geografia para todos os alunos de 1ª a 8ª série do Ensino Fundamental público.

No ano de 2000, pela primeira vez na história do programa, os livros didáticos passam a ser entregues no ano anterior ao ano letivo de sua utilização. Os livros para 2001 foram entregues até 31 de dezembro de 2000. Tempos depois, em 2004, é feita distribuição de livros didáticos de todos os componentes curriculares aos alunos de 1ª a 4ª série e em 2005, são distribuídos livros didáticos de todos os componentes curriculares de 1ª série, 2ª a 4ª série reposição e complementação e a todos os alunos de 5ª a 8ª série.

Em 2006, a Distribuição de livros didáticos de todos os componentes curriculares de 1ª série; a segunda complementação do PNLD/2004 aos alunos de 2ª a 8ª série e a primeira reposição e complementação do PNLD 2005 aos alunos de 5ª a 8ª série. Após isso em 2007 o FNDE adquire 110,2 milhões de livros para reposição e complementação de matrículas para 2ª a 4ª serie (3º ao 5º ano) e a grade completa para alunos de 1ª e 5ª a 8ª série (1º e 2º e 6º ao 9º ano) para beneficiar, no ano letivo de 2008, 31,1 milhões de alunos de 139,8 mil escolas públicas.

São adquiridos, ainda, 18,2 milhões de livros para 7,1 milhões de alunos de 15,2 mil escolas públicas de Ensino Médio. Seguindo a meta progressiva de universalização do livro para o ensino médio, o atendimento do livro didático amplia-se com a aquisição de livros didáticos de história e de química. A grade é completada em 2008, com a compra de livros de física e geografia, finalizando, em 2008, com a distribuição de livros didáticos de todos os componentes curriculares, alfabetização, língua portuguesa, matemática, história, geografia e ciências.

4.2 Livros Didáticos de Matemática Brasileiros: Uma breve descrição.

No que segue, listamos os livros brasileiros analisados dispondo o título, os autores e o ano de publicação, conforme o quadro 2 abaixo:

Livro	Título	Autores	Ano de publicação
1	Logaritmos e Equações Exponenciais	Luiz Mauro Rocha	1965
2	A função exponencial, Logaritmos, Equações exponenciais e logarítmicas	Scipione de Pierro Netto	1967
3	Matemática na escola renovada	Scipione di Pierro Netto Célia Contin Góes.	1972
4	Matemática – Segundo grau	José Guilherme Tizziotti Damiam Schor	1975
5	Matemática.	Vários autores	1981
6	Trigonometria e Logaritmos – Notas de aula	Desconhecidos	1984
7	Exponencial e Logaritmos	Glaciete Jardim Zago Walter Antonio Sciani	1996
8	Matemática aula por aula	Benigno Barreto Filho Cláudio Xavier da Silva	1998
9	Matemática – Edição Compacta	Carlos Alberto Marcondes dos Santos Nelson Gentil Sérgio Emílio Greco	2001
10	Matemática: Ciência e Aplicações	Gelson Iezzi Osvaldo Dolce David Degenszajn Roberto Périgo Nilze de Almeida	2002
11	Matemática completa	José Ruy Giovanni José Roberto Bonjorno	2005

Quadro 2: Informações sobre os livros brasileiros analisados.

4.3 Abordagem histórica sobre o Livro Didático nos Estados Unidos

Os Estados Unidos da América (EUA) são conhecidos mundialmente por seu sistema um tanto diferenciado de ensino, contando com a chamada *High School*, que equivale ao Ensino Médio brasileiro. No entanto o período da *High School* é composto por quatro anos de estudo. Os livros didáticos de Matemática utilizados neste período eram, até a década de 1970 divididos por áreas, a saber, Álgebra, Aritmética e Geometria.

Atualmente os livros didáticos utilizados nos EUA, de acordo com os exemplares que tivemos contato, são muito semelhantes aos distribuídos no Brasil pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), com os conteúdos dispostos separadamente para cada ano de estudo. Contanto, os livros são todos muito bem escritos e cheios de questões que envolvem a tecnologia e contextualização.

A questão é que nem sempre foram assim, de acordo com (WALMSLEY, 2003, p.19) "antes da segunda guerra mundial, a maioria dos conteúdos matemáticos trabalhados nas escolas secundárias estadunidenses eram baseados em procedimentos matemáticos que interessavam diretamente as empresas, governo e as indústrias", o que fazia dos livros didáticos da época apenas instrumentos de resolução direta de problemas que servissem ao governo e ao capital.

Porém, ainda de acordo com (WALMSLEY, 2003, p.20), "muitos educadores tinham o desejo de atualizar o currículo tradicional, pois se queixavam que o currículo tradicional era baseado em tópicos matemáticos desenvolvidos centenas de anos atrás", dessa forma, já por volta de 1945, iniciaram-se algumas mudanças na elaboração do material didático, onde parte era voltado para quem pretendia fazer um curso superior e outra àqueles que iriam diretamente ao mercado de trabalho.

Em 1947 foram instituídos alguns modelos para a matemática a ser ensinada na *High School*, a saber: a matemática para uso pessoal, matemática utilizada no local de trabalho, matemática para o *college*, matemática preparatória para o mercado de trabalho, mulheres na matemática e a matemática utilizada por funcionários do governo. Cada qual, com seu campo de atuação bem definido e devidamente estruturado.

Já por volta de 1960, quando a matemática já estava bem definida para cada ser utilizada em diferentes campos da sociedade, é que os livros didáticos começaram a ser utilizados de fato em todas as escolas seguindo uma espécie de programa do governo que instituía o uso. Os livros didáticos de Matemática utilizados ainda eram divididos em Álgebra, Geometria e Aritmética.

Isso somente veio a mudar por volta de 1980 quando os conteúdos foram separados de forma que os livros trouxessem um apanhado de conteúdos condizente com os conhecimentos prévios dos alunos que vieram do ensino fundamental. Foram divididos os conteúdos de Álgebra, Geometria e Aritmética em quatro volumes, estes a serem utilizados nos quatro anos da *High School.*

Atualmente os livros didáticos de matemática estadunidenses são muito bem elaborados e trabalham os conteúdos de forma clara e contextualizada, sempre utilizando a tecnologia da informação como uma ferramenta muito importante no ensino e aprendizagem. No entanto ainda não existe um programa nacional de distribuição semelhante ao PNLD, desse modo cada estado tem autonomia para adquirir o material a ser utilizado nas escolas.

4.4 Livros Didáticos de Matemática Estadunidenses: uma breve descrição.

No que segue, listamos os livros estadunidenses analisados dispondo o título, os autores e o ano de publicação, conforme o quadro 3 abaixo:

Livro	Título	Autores	Ano de publicação
12	Basic concepts of Elementary Mathematics.	William L. Schaaf	1960
13	Integrated algebra and trigonometry	Lester W.Schumpf Thomas Munro	1967
14	Advanced Algebra	Edgerton and Carpenter's – Revisado por Myron R. White	1968
15	Intermediate Algebra with trigonometry	Scott, Foresman and company	1972
16	Algebra and Trigonometry – Structure and Method – Book 2.	Mary P. Dolciani Robert H. Sorgenfrey William Wooto Robert B. Kane	1977.
17	HBJ Algebra 2 with Trigonometry	Arthur F.Coxford Joseph N.Payne	1983
18	Algebra 2 With Trigonometry	Clyde A. Dilley Steven P. Meiring John E. Tarr Ross Taylor	1990
19	Advanced Mathematics.	Richard G.Brown	1997.
20	Advanced Algebra Through Data Exploration: A Graphing Calculator Approach.	Jerald Murdock Ellen Kamischke Eric Kamischke	1998
21	New York Math B an Integrated Approach.	Allan Bellman Sadie Chavis Bragg Suzanne H. Chapin Theodore J. Gardella Bettye C. Hal William G. Handlin Edward Manfre	2002
22	Beggining & Intermediate Algebra.	K. Elayn Martin-Gay	2005

Quadro 3: Informações sobre os livros estadunidenses analisados.

4.5 Logaritmos nos livros didáticos de Matemática Brasileiros

No que segue realizamos a análise dos livros didáticos de matemática brasileiros, onde buscamos dar enfoque as questões mais importantes trabalhadas nos textos, principalmente no que toca a definição e propriedades de Logaritmos.

4.5.1 Livro 1: Logaritmos e Equações exponenciais

A obra (Figura 2) está dividida em seis capítulos, Noções preliminares, Logaritmos Algébricos, Propriedades operativas dos logaritmos, Teoria especial dos logaritmos decimais, Cálculo de logaritmos pelas tabuas, Equações exponenciais. O conteúdo especificamente sobre Logaritmos está disposto entre as páginas 5 e 61.

A obra inicia com noções preliminares e Logaritmos deduzidos de progressões, onde dada uma P.G, em que um dos termos seja 1, e uma P.A onde um dos termos seja 0, se fizermos uma correspondência entre os termos das duas progressões, de modo que 1 e 0 se correspondam, os termos da P.A serão os logaritmos dos termos correspondentes da P.G e os termos da P.G serão os antilogaritmos dos correspondentes da P.A.

Os logaritmos usados na aritmética prática são dados pelas Tabuas de logaritmos e se denominam **Logaritmos de Briggs**, **vulgares** ou **decimais**; a base desse sistema é o número 10. São indicados pelo símbolo **log**, omitindo-se a base. A obra nos trás a propriedade do Logaritmo do produto, como a propriedade fundamental dos Logaritmos, pois ao multiplicar dois termos de uma PG **o Logaritmo do produto é igual à soma dos Logaritmos dos fatores**.

Colocam também a seguinte propriedade: **Para se achar o produto de dois números da P.G, basta adicionar os seus Logaritmos em P.A e procurar o antilogaritmo da soma na P.G**. Esta foi concluída a partir da multiplicação de potências de mesma base $(a^n \times a^m = a^{n+m})$. Segue uma nota histórica em que a propriedade da multiplicação de potências de mesma base já era conhecida por Arquimedes (287-221 A.C).

A obra traz uma contextualização histórica sobre Logaritmos e uma retomada sobre os conceitos básicos de potências e expoentes vistos no extinto curso ginasial. Na sequência traz os chamados Logaritmos algébricos, onde é dado a definição de Logaritmo, que é:

Chama-se de <u>Logaritmo</u> de um número dado r, real e positivo, numa <u>base a,</u> positiva e diferente da unidade, o expoente <u>b</u>, ao qual devemos elevar a base <u>a</u>, para obtermos uma potência igual ao número r.

Ou ainda na forma algébrica:

$$a^b = r \rightarrow \log_a r = b$$

Na sequência a obra traz oito exercícios para passar expressões exponenciais a forma logarítmica, oito para passar expressões na forma logarítmica a exponencial e outros seis para encontrar alguns Logaritmos aplicando a definição. A seguir escrevem uma nota para que os alunos resolvam alguns outros exercícios de um livro, somente sobre exercícios, ao qual não tivemos acesso.

As *propriedades imediatas dos Logaritmos* são dispostas em: a base de um sistema de Logaritmos deve ser positiva e diferente da unidade, o Logaritmo do número 1 vale 0 e o Logaritmo da própria base vale 1 e ainda, sendo a > 1, os Logaritmos dos números maiores do que 1 são positivos e os dos compreendidos entre 0 e 1 (excluindo os extremos) são negativos.

A função logarítmica é colocada como a inversa da função exponencial, e são relacionadas na obra em suas formas algébricas:

$$y = \log_a x \quad e \quad a^y = x$$

A partir do gráfico de Logaritmos conclui que "*quando a > 1 a função é crescente e que, quando 0 < a < 1 a função é decrescente*", colocando que "*o Logaritmo de zero só tem sentido como limite*", pois:

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty \quad (para\ a > 1)$$

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = +\infty \quad (para\ 0 < a < 1)$$

A obra apresenta em seguida as Propriedades operativas dos Logaritmos, que como já foi dito anteriormente traz o Logaritmo do produto como fundamental:

$$\log_a A_1.A_2....A_{n-1}.A_n = \log_a A_1 + \log_a A_2 + ... + \log_a A_{n-1} + \log_a A_n$$

A seguir dispões que "*em qualquer sistema, o Logaritmo de um quociente é igual a diferença entre os Logaritmos do dividendo e do divisor*", ou que "*o Logaritmo de uma fração é igual a diferença entre os Logaritmos do numerador e do denominador",* na forma algébrica:

$$\log_a A : B = \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - Log_a B$$

O chamado cologaritmo de um número é colocado na obra como o simétrico do Logaritmo do mesmo número, isto é:

$$co\log\ _a B = \log_a \frac{1}{B} = \log_a 1 - \log_a B = 0 - \log_a B = -\log_a B$$

Disso tem-se que: $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A + co\log_a B$

A terceira propriedade exposta na obra é *"o Logaritmo de uma potência de um número é igual ao produto do expoente pelo Logaritmo do número, podendo esse expoente ser um número real qualquer"*. Ou ainda na forma algébrica:

$$\log_a B^r = r.\log_a B$$

Da propriedade supracitada pode-se extrair o Logaritmo de uma raiz que *"é igual ao Logaritmo do radicando, dividido pelo índice"*, isto é:

$$\log_a \sqrt[m]{B} = \frac{\log_a B}{m} = \frac{1}{m}.\log_a B$$

Para finalizar o que toca as propriedades operativas, a obra traz um resumo das mesmas e uma nota que *"estas propriedades permitem calcular cada operação, exceto adição e subtração, por meio de outras mais simples"*. A seguir é denotada uma expressão logarítmica que é dada somente quando não se tem indicação de adição nem subtração; caso contrário, sem tivermos, por exemplo, $\log_a (B+C)\ ou \log_a (B-C)$ só se podem achar os Logaritmos efetuando primeiro a adição ou subtração dos números B e C.

Na sequência a obra nos traz a *mudança de sistema,* onde *"se quisermos obter o Logaritmo de um número em uma base não decimal, temos que achar primeiro o Logaritmo decimal e depois multiplicar por um fator de conversão, denominado módulo decimal do novo sistema".* De tudo isso o livro conclui que:

$$\log_b c = \frac{1}{\log_{10} b}.\log_{10} c$$

Além disso:

$$\log_b A = \frac{1}{\log_a b}.\log_a A$$

A partir das relações acima, o livro conclui que:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad ou \quad \log_b a.\log_a b = 1$$

Finalmente, convém conhecer, dada a sua utilidade, a seguinte relação:

$$a^{\log_a b} = b$$

Após todas as propriedades e relações trabalhadas ao longo do texto, é colocada uma lista de exercícios, contendo cinquenta e quatro questões envolvendo propriedades fundamentais e operativas de expoentes e Logaritmos, equações e inequações Logarítmicas.

A seguir a obra nos traz o que chama de *Teoria especial dos Logaritmos decimais*, onde é dito que *daqui por diante apenas a palavra Logaritmo e o símbolo log serão utilizadas com o significado de Logaritmo decimal.* Um teorema afirma que "*todos os números exceto as potencias de 10 com expoente inteiro e os números irracionais da forma* $\sqrt[m]{10^n}$ *tem Logaritmos irracionais, ou seja, números decimais com infinitas casas".*

Desse teorema segue que, *"os Logaritmos em geral são números decimais irracionais, cuja parte inteira se denomina característica e cuja parte decimal se denomina mantissa"*. É dado o primeiro teorema da característica, esse afirma que, *"a característica do Logaritmo de um número maior do que 1 é igual ao número de algarismos da parte inteira diminuindo da unidade"* .

Exemplo:

Dado o número 352,45, temos que:

$$100 < 352,45 < 1000$$
$$ou \quad 10^2 < 352,45 < 10^3$$
$$donde \quad \log 10^2 < \log 352,45 < \log 10^3$$
$$ou \quad 2 < \log 352,45 < 3$$

Portanto o Logaritmo está entre 2 e 3, isto é, log 352,45 = 2,...ou seja c = 3-1 = 2

O segundo teorema da característica reside no fato que “*a característica do Logaritmo de um número positivo menor que 1 é um número negativo, cujo módulo é igual ao número de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo”*.

Exemplo:

Seja 0,00436 o número, c a característica e 0,m a mantissa.

$$\log 0,00436 = \log \frac{436}{10^5} = \log 436 - \log 10^5 = \log 436 - 5 =$$
$$2,m - 5 = -5 + 2 + 0,m = -3 + 0,m$$

Este resultado se escreve na forma de Logaritmo misto: $\bar{3},m$

Portanto log 0,00436 = $\bar{3},m$

O cálculo do cologaritmo de um número se dá primeiramente procurando o Logaritmo do número, e em segundo lugar encontrar seu simétrico, como não existe mantissa negativa na tábua de Logaritmos será necessário que se transforme este Logaritmo em um Logaritmo misto.

Sobre gráficos da função Logaritmo decimal, a obra nos traz que “o gráfico da função $y = \log x$ é mais inclinado do que o da função $y = \log_2 x$ e, no intervalo (0,∞) se confunde sensivelmente com uma reta. Por isso “*podemos considerar para pequenas variações, os Logaritmos como sendo proporcionais aos números”*. O erro cometido admitindo essa convenção é muito pequeno.

O último assunto trabalhado no capítulo é o cálculo de Logaritmos pelas tábuas, onde é visto como achar o Logaritmo de um número dado.

Exemplo:

$\log 7256 = 3,86070 \quad \textit{procura} - \textit{se na tábua } 7256 \rightarrow 86070$

A possibilidade de interpolação é sempre dada de maneira que encontremos os Logaritmos mais próximos do procurado e assim temos uma noção do valor procurado. O cálculo de expressões numéricas por Logaritmos implica em primeiro lugar na necessidade da expressão ser *monômia* (ou logarítmica) isto é, não deve conter indicação de adição ou subtração.

Exemplo:

Calcular $23,886 \times 0,0561$

Indicação
$$\begin{aligned}
&y = \ 23,886 \times 0,0561 \\
&\log y = \log 23,886 \times 0,0561 = \log 23,886 + \log 0,0561 \\
&\textit{daí} \\
&\log 23,886 = 1,37814 \quad e \quad \log 0,0561 = \bar{2},74896 \\
&\textit{disso temos que } \log y = 1,37814 + \bar{2},74896 = 0,12710 \\
&\textit{então } \ y = 1,34
\end{aligned}$$

A obra apresenta na sequência alguns exemplos e em seguida uma série de cento e quarenta (147) exercícios, envolvendo expoentes e Logaritmos envolvendo todos os tópicos discorridos até o momento, entre eles: equações exponenciais e logarítmicas e funções exponenciais e logarítmicas. Ao findar o capítulo têm-se trinta e quatro (34) questões propostas em exames vestibulares, um pouco mais elaboradas e que abordam os mais diversos tópicos sobre Logaritmos e expoentes.

Considerações sobre o capítulo

O capítulo é dividido de forma coerente e é iniciado com uma tomada histórica sobre o estudo e o uso dos Logaritmos, o que de certa forma surpreende por ser um livro antigo, o diferenciando da maioria dos outros livros publicados nessa mesma época, como veremos a seguir. As chamadas *propriedades imediatas dos Logaritmos* são apenas citadas e em seguida utilizadas na resolução de exercícios. A mudança de base é tratada na obra como *mudança de sistema*, pois é utilizada para trocar Logaritmos de uma base não decimal para a base decimal.

Porém, em relação à definição e as propriedades, dispõe de vários exemplos e cento e quarenta e sete (147) exercícios sobre todos os conteúdos trabalhados no capítulo. Também chama muito a atenção o fato de terem sido dispostos trinta e quatro (34) exercícios prepatórios para o vestibular, de aplicação direta da definição de Logaritmo, das propriedades e o uso da tábua de Logaritmos para sejam trabalhados a característica e a mantissa.

4.5.2 Livro 2: A função exponencial, Logaritmos, Equações exponenciais e logarítmicas

Essa obra (Figura 3) foi elaborada para uso no curso colegial e concursos vestibulares de ingresso a escolas superiores (faculdades). O livro é composto de uma apresentação, feita pelo autor, cinco capítulos, a saber: A função exponencial, Logaritmos, equações exponenciais e equações logarítmicas e um específico de exercícios, além do apêndice e o índice remissivo.

Buscando alcançar os objetivos desse trabalho iremos nos ater ao capítulo 2 intitulado Logaritmos. O capítulo inicia abordando a definição de Logaritmo, onde:

“Dados dois números **a** e **b** positivos, com **a ≠ 1**, chama-se Logaritmo do número **b** na base **a** ao número *x* tal que”

$$a^x = b \leftrightarrow \log_a b = x$$

Na sequência são dados quatro exemplos utilizando a propriedade supracitada. A seguir sã indicados alguns casos sem significado pela definição de Logaritmos, a saber; $\log_1 b, \log_a 0$ e $\log_a(-b)$. Também enfatiza que: como a base é maior que zero qualquer potência de um número positivo dá um resultado sempre positivo, logo:

Não existe Logaritmo de um número negativo

Em seguida são é utilizada a aplicação direta da definição de Logaritmos na resolução de cinco (5) exercícios que envolvem equações exponenciais e logarítmicas. Na sequência são dados dois exemplos:

a) $\log_5 625 = x \rightarrow 5^x = 625 \rightarrow 5^x = 5^4 \rightarrow x = 4$;

b) $\log_a 7 = \dfrac{1}{4} \rightarrow a^{\frac{1}{4}} = 7 \rightarrow (a^{\frac{1}{4}})^4 = 7^4 \rightarrow a = 7^4 \rightarrow a = 2401$;

A obra define uma função logarítmica do seguinte modo: *Numa determinada base* ***a****, chamando-se de y os Logaritmos dos números que representaremos por x, obtém-se uma correspondência entre o conjunto dos valores de* ***x*** *e o conjunto dos valores de* ***y****.*

Isto é:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Após isso chega a algumas conclusões, são elas:

- *Os Logaritmos dos números compreendidos entre 0 e 1 são negativos e os Logaritmos dos números maiores que 1 são positivos*;
- *O Logaritmo de 1 vale 0 ($a^0 = 1$)*;
- *Quando* ***x*** *tende a zero, o Logaritmo de* ***x*** *decresce indefinidamente e quando* ***x*** *cresce* ***y*** *também cresce*;

As propriedades dos Logaritmos são citadas na obra na seguinte ordem:

- Teorema do produto:

$$\log_a(x_1.x_2...x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + ... + \log_a x_n$$

- Teorema do quociente:

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

- Teorema da potência:

$$\log_a x^p = p.\log_a x$$

- Teorema da raiz:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$$

O cologaritmo de um número é definido na obra, tal que: *Chama-se cologaritmo de um número, numa determinada base*, *ao Logaritmo do inverso desse número na mesma base*.

$$co\log_a x = \log_a \frac{1}{x}$$

Propriedade:

$$co\log_a x = -\log_a x$$

Na próxima seção é retomado o uso das propriedades de Logaritmos para resolver problemas que envolvem expressões monômias que envolvem apenas, multiplicações, divisões, potências e raízes, essas expressões são ditas logarítmicas. Além disso, são colocados cinco (5) exemplos de resolução direta de algumas expressões logarítmicas dadas.

A propriedade de mudança de base é inserida na obra utilizando os passos a seguir:
A obra parte do seguinte,

$$\log_b x = \log_a x . \log_b a$$

e, utiliza a propriedade de

$$\log_a b . \log_b a = 1$$

conclui

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Finalizando com dois exemplos utilizando a propriedade de mudança de base, para resolver expressões logarítmicas.

OBS: Ao final do livro, em um capítulo composto somente por exercícios, são apresentados (ou propostos) 191 problemas que necessitam da definição e das propriedades para serem resolvidos.

Considerações sobre o capítulo

O livro em questão, bem como a grande maioria dos publicados nessa década era voltado quase que exclusivamente ao ensino objetivo e pouco ilustrativo. Essa obra adota definições seguidas de exemplos e as propriedades básicas de Logaritmos são chamadas de teoremas a fim de serem provadas como critério de convencimento aos estudantes.

Finalmente, temos o fato de que $\log_b x = \log_a x . \log_b a$ e $\log_a b . \log_b a = 1$ colocadas na obra sem prova ou demonstração, colocando em dúvida a veracidade da demonstração da propriedade de mudança de base. Em relação aos 191 exercícios, como já foi citado, possuem resoluções que podem ser classificadas como simples, pois utilizam diretamente a definição de Logaritmo e suas propriedades operacionais.

4.5.3 - Livro 3: Matemática na escola renovada

Esse livro (Figura 4) é um dos primeiros da década de 1970 a apresentar conteúdos que dizem respeito a toda a 1ª série do 2º grau, o antigo colegial. A divisão é feita da seguinte forma: elementos sobre teoria dos conjuntos e lógica matemática; relações – produto cartesiano; aplicações ou funções; função linear; função quadrática; função exponencial; e equações; Trigonometria; relações fundamentais; operações com arcos; transformações em produtos; equações trigonométricas; resolução de triângulos.

No entanto, o foco será o capítulo VII, intitulado Logaritmos e Equações Logarítmicas, disposto entre as páginas 114 e 149 e que está subdividido da seguinte maneira:

Sobre a definição de Logaritmos a obra nos diz que consideremos a função exponencial; isto é, a função f, tal que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$

$$x \mapsto y = a^x, a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$$

A função é crescente para $a>1$ e decrescente para $a<1$, ou seja, é monótona para qualquer dos casos. Logo f é uma aplicação bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ e, portanto admite a função inversa f^{-1}.

Isto é, se um par (b, c) $\in f$, então, (c, b) $\in f^{-1}$ o que significa dizer:

$$f: x \mapsto y = a^x \Leftrightarrow f^{-1}: x \mapsto y / x = a^y$$

Essa nova função f^{-1} chama-se função logarítmica de base a e se representa por: $y = \log_a x$

Então vale a equivalência

$$x = a^y \Leftrightarrow \log_a x = y$$

Em seguida, a obra nos traz as ditas propriedades gerais da função logarítmica, que são ordenadas da forma a seguir:

L1. $\log_a 1 = 0$;

L2. $\log_a a = 1$;

L3. $(a>1)\wedge(>1)\Rightarrow \log_a x>0$;

L4. $(a>0)\wedge(0<x<1)\Rightarrow \log_a x<0$;

L5. $(0<a<1)\wedge(x>1)\Rightarrow \log_a x<0$;

L6. $(0<a<1)\wedge(0<x<1)\Rightarrow \log_a x>0$;

L7. $(a>1)\wedge\left\{\begin{matrix}(x\to 0)\Rightarrow \log_a x\to -\infty\\ (x\to\infty)\Rightarrow \log_a x\to\infty\end{matrix}\right\}$;

L8. $(0<a<1)\wedge^{1}\left\{\begin{matrix}(x\to 0)\Rightarrow \log_a x\to \infty\\ (x\to\infty)\Rightarrow \log_a x\to -\infty\end{matrix}\right\}$.

Na sequência são apresentadas as propriedades operatórias da função logarítmica, que são:

Propriedade do produto.

$$\log_a(x_1.x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$$

Propriedade do quociente.

$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$$

Propriedade da potência.

Seja r um número real qualquer. Então

$$\log_a x^r = r\log_a x$$

No que segue são dados quatro exemplos envolvendo a terceira propriedade;

Propriedade da mudança de base.

$$a,b\in\mathbb{R}_+^*, a\neq 1 \text{ e } b\neq 1 \Rightarrow \log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Na seção de aplicações de Logaritmos são explorados sete exercícios subdivididos em nove itens envolvendo a utilização direta das propriedades operatórias, Logaritmo neperiano (mesmo sem ter sido enunciado ou definido), determinação do domínio de funções e do conjunto verdade de inequações.

Muitos exercícios são dispostos a seguir em forma de sequências. A sequência um traz quatro exercícios subdivididos em 37 itens para resolver a partir da definição, determinar o valor de *x* nas relações dadas, determinar o valor da base nas relações dadas, determinar o valor de Logaritmos em diversas bases, dados dois valores iniciais quaisquer.

A sequência dois traz um exercício subdividido em 15 itens para desenvolver expressões aplicando as propriedades operatórias dos Logaritmos. A sequência três um exercício subdividido em 10 itens para determinar o domínio de funções logarítmicas e a sequência quatro um exercício subdividido em 10 itens para determinar o conjunto verdade de inequações logarítmicas.

O sistema de numeração usual é de base 10, por essa razão interessa particularmente o Sistema de Decimais, também chamado de Logaritmos vulgares ou de Briggs. A primeira propriedade citada diz que: O Logaritmo decimal de uma potência de 10 é igual ao expoente dessa potência.

A segunda propriedade traz que:

Se $x \geq 1$ e x tem p algarismos na parte inteira, então: $10^{p-1} \leq x < 10^{p}$

$0 < x' < 1$ e x' tem p zeros antes do 1º algarismo significativo, então:

$$10^{-p} \leq x' < 10^{-p+1}$$

Sobre a característica e a mantissa de um Logaritmo decimal a obra diz que, se convencionaremos para escrever o Logaritmo decimal de um número, a parte fracionária sempre positiva, entre 0 e 1.

$$\text{Log } x = c + m$$

Onde $c \in \mathbb{Z}$

e $m \in \mathbb{R}$ e $0 \leq m < 1$

O Logaritmo decimal escrito nesta forma é chamado Logaritmo preparado e sua parte inteira recebe, então, o nome de característica e a parte fracionária, mantissa.

As aplicações sobre esta parte apresentam três (3) exercícios resolvidos subdivididos em doze (12) itens, para: a partir do valor de Logaritmos dados determinar o valor de outros, expressar as relações dadas em função de um só Logaritmo e representar na forma preparada alguns Logaritmos. Para tanto é disposta uma tábua de Logaritmos decimais visando auxiliar nos cálculos.

Na sequência a obra apresenta as operações com cologaritmo de um número

Definição:

$$co\log aritmo\ x = -\log x$$

Ou:

$$co\log x = -\log x \quad \text{x}$$

Sobre as tábuas de Logaritmos decimais são apresentados problemas para encontrar o Logaritmo de um número dado e encontrar o número, dado o seu Logaritmo. A seguir dão alguns exemplos de fixação explorando os casos em que a mantissa do Logaritmo está na tábua e outros em que ela não se encontra na tábua. Nessa seção foram explorados dois (2) exercícios envolvendo o cálculo do valor do quociente entre dois números quaisquer e sua resolução por Logaritmos e o cálculo do valor da raiz quinta de um número entre zero e um, fazendo uso das propriedades e da tábua de Logaritmos.

A Sequência um, traz um exercício subdividido em vinte (20) itens para, a partir, de valores de Logaritmos dados, calcular outros sem o uso de tábuas e a sequência dois, um exercício subdividido em 7 itens para calcular o valor de algumas raízes dadas, com o uso de tábuas.

As Equações exponenciais e equações logarítmicas são trabalhadas na sequência e conjuntamente. Uma equação é exponencial quando a incógnita figura como expoente de uma ou mais potencias dessa equação.

Exemplo:

a) $15^x = 728,6 \rightarrow x = \dfrac{\log 728,6}{\log 15} = \dfrac{2,8621}{1,1761} = 2,43$

Primeiro tipo: Equações cujos membros são redutíveis a potenciais de mesma base

Exemplo:

$$4^{x+1}.8^{2x-3}=\frac{2^{1+x}}{16}\Leftrightarrow 2^{x+2}.2^{6x-9}=\frac{2^{1+x}}{2^4}\Leftrightarrow 2^{8x-7}=2^{x-3}\Rightarrow 8x-7=x-3\Rightarrow 7x=4\Rightarrow x=\frac{4}{7}$$

Segundo tipo: As equações são redutíveis a um dos tipos.

$am^x+b=0$ ou $am^{2x}+bm^x+c=0$, daí fazemos $m^x=y$ e temos $ay+b=0$ ou $ay^2+by+c=0$ que são equações do 1º ou do 2º graus.

A definição de Equação Logarítmica traz que, *Uma equação se diz logarítmica em x, quando contém um termo onde figure log x ou log [f(x)]*.

OBS: A resolução de toda equação logarítmica se dá utilizando as propriedades operatórias.

A seguir são trabalhadas três sequências e exercícios. A sequência um apresenta dois (2) exercícios subdivididos em vinte (20) itens para determinar o conjunto verdade das equações dadas sem utilizar Logaritmos e o conjunto verdade de equações aplicando Logaritmos. A sequência dois exibe um exercício subdividido em dezenove (19) itens para determinar o conjunto verdade de equações exponenciais.

A sequência três expõe um exercício subdividido em vinte (20) itens para determinar o conjunto verdade de equações logarítmicas e por fim a sequência 4 traz três exercícios de revisão subdivididos em 30 itens para determinar o com junto verdade de algumas inequações, resolver sistemas de equações logarítmicas e exponenciais e provar que algumas afirmações são verdadeiras.

Considerações sobre o capítulo

O capítulo é dividido em dezessete (17) seções, em que duas são as propriedades gerais e as propriedades operatórias sobre Logaritmos e funções logarítmicas, que de certa forma estão relacionadas, além de mencionar o uso da mantissa e da característica e definir muito bem o uso das propriedades através de exemplos. Um detalhe que chamou bastante atenção é que o (^) é utilizado no texto como o "e" lógico, na página 49.

O capítulo é composto por duzentos exercícios que vão desde o uso direto da definição de Logaritmo até itens que exigem a aplicação de propriedades em conjunto e na ordem correta. No entanto os itens são diretos e objetivos, com exceção da inserção do termo "vulgares" ou de "Briggs" para designar os Logaritmos de base 10 ou decimais.

4.5.4 – Livro 4: Matemática - Segundo Grau

O livro (Figura 5) inicia com uma apresentação da edição (que foi reformulada), Índice, Revisão sobre tópicos básicos do 1º grau. Logo após está dividido em duas partes, a Parte I diz respeito à Álgebra e contém os capítulos sobre, Conjuntos, Relações e Funções, Sequências e Logaritmos. A parte II aborda sobre Trigonometria e contêm os capítulos intitulados, Arcos e ciclo trigonométrico, Números Trigonométricos, Relações entre números trigonométricos, Arcos de extremidades associadas e equações fundamentais, Estudo dos triângulos, Transformações trigonométricas e Funções trigonométricas. Finalizando com as respostas dos exercícios, siglas, funções trigonométricas naturais e a Bibliografia. O que nos interessa é o capítulo que leva o nome de Logaritmos, disposto entre as páginas 164 e 202.

O capítulo intitulado Logarítmos (com acento agudo), inicia com o que obra nomeia um estudo dos Logaritmos. Inicialmente traz a definição da seguinte forma:

> *Chamamos* ***Logaritmo*** *de um número real o positivo* ***b*** *em relação a uma base* ***a****, positiva e diferente de um, ao* ***expoente*** *que se deve dar a base* ***a****, para que resulte uma potência igual a* ***b****.*

Ou seja:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Logo após são colocadas as condições de existência do Logaritmo *c*.

$$b > 0 \; e \; 0 < a \neq 1 \quad ou \quad b \in \mathbb{R}_+^* \; e \; a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

Ou seja, para que exista o Logaritmo **c** é preciso que o logaritmando **b** seja positivo e a base **a** seja positiva e diferente da unidade.

Na sequência são colocados quatro (4) exemplos para calcular Logaritmos em diferentes bases e mais seis (6) exercícios subdivididos em vinte e dois (22) itens, em que é necessário calcular o Logaritmo, o logaritmando e a base de algumas expressões. Após são introduzidas as chamadas “propriedades decorrentes da definição”, a saber:

$$P_1 \rightarrow \log_a 1 = 0 \quad pois\ a^0 = 1$$
$$P_2 \rightarrow \log_a a = 1 \quad pois\ a^1 = a$$
$$P_3 \rightarrow \log_a a^n = n \quad pois\ a^n = a^n$$
$$P_4 \rightarrow a^{\log_a b} = b \quad pois\ \log_a b = c \Rightarrow a^c = b \Rightarrow a^{\log_a b} = b$$

Novamente no que segue são postos cinco (5) exemplos e sete (7) exercícios subdivididos em vinte e dois (22) itens, em que são utilizadas as propriedades supracitadas direta ou indiretamente.

As propriedades operatórias de Logaritmos são introduzidas a partir do **Logaritmo do produto**, seja ela igual à soma dos Logaritmos dos fatores, ou ainda na forma algébrica:

$$\log_a (A.B) = \log_a A + \log_a B$$

No que segue é introduzida a propriedade do **Logaritmo do quociente** que é igual à diferença entre o Logaritmo do dividendo e o Logaritmo do divisor, ou ainda na forma algébrica:

$$\log_a \left(\frac{A}{B} \right) = \log_a A - \log_a B$$

O chamado **cologaritmo** de um número $b \in \mathbb{R}_+^*$, numa base $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, ao oposto do Logaritmo de **b** na base **a**, ou ainda na seguinte notação:

$$co\log_a b = -\log_a b$$

A seguinte propriedade é a do **Logaritmo da Potência**, que é igual ao produto do expoente pelo Logaritmo da base da potência, ou ainda:

$$\log_a (B^n) = n.\log_a B$$

A última propriedade trabalhada é o **Logaritmo da raiz n-ésima**, que é igual ao inverso do índice da raiz multiplicado pelo logaritmo do radicando, ou seja:

$$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}.\log_a A$$

No que diz respeito às três últimas propriedades citadas foram dispostos três exemplos, sendo um de cada propriedade e todas elas, com exceção do Cologaritmo, foram devidamente demonstradas. Na sequência a obra apresenta a **Mudança de base**, não como uma propriedade, mas como um método de resolver exercícios com Logaritmos dados em diferentes bases, então:

O Logaritmo de **b** na base **a** é igual ao Logaritmo de **b** numa outra base **c** dividido pelo Logaritmo de **a** na base **c**, ou seja:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Essa operação, também é demonstrada e a seguir colocada em um exemplo. Também é importante frisar que ao final da listagem das propriedades a obra trás um resumo de todas elas, devidamente ordenadas. Na sequência é disposta uma lista contendo sete (7) exercícios, sendo três (3) resolvidos, ou seja, modelos e outros quatro (4) subdivididos em dezesseis (16) itens para que sejam resolvidos a partir das propriedades supracitadas.

As **Equações Logarítmicas** são introduzidas deixando claro que o uso das propriedades, já trabalhadas e demonstradas e também observando as condições de existência já analisadas. Após isso são colocados três exemplos nos quais são utilizadas as propriedades operacionais de Logaritmos. Ao final desse conteúdo é disposta uma lista de exercícios, contendo seis (6) exercícios, subdivididos em nove (9) itens muito semelhantes aos exemplos.

As **Inequações Logarítmicas**, segundo a obra, são resolvidas da mesma forma que as Equações, porém respeitando algumas propriedades que iremos ver a seguir:

Comparação de Logaritmos → Desigualdades

$$D_1.\ para\ a > 1, \log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$$

$$D_2.\ para\ 0 < a < 1, \log_a b > \log_a b \Leftrightarrow b < c$$

Na sequência são colocados quatro (4) exemplos nos quais se utilizam as desigualdades citadas acima. Para encerrar o conteúdo a obra apresenta uma lista composta por cinco (5) exercícios subdivididos em doze (12) itens, para utilizar na resolução as condições de existência e encontrar o conjunto solução de inequações logarítmicas.

A **Função Logarítmica** é colocada juntamente à Função Exponencial, e a obra as expõe da seguinte forma:

Seja ***e*** a função definida em $\mathbb{R}$ com imagens em $\mathbb{R}_+^*$, que associa a cada número *x* um número real estritamente positivo a^x, para $0 < a \neq 1$, ou ainda:

$$e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, \, tal \; que \; e(x) = a^x$$

Seja ***l*** a função definida em $\mathbb{R}_+^*$ com imagens em $\mathbb{R}$, que associa a cada número real estritamente positivo x um número real $\log_a x$, para $0 < a \neq 1$, ou ainda:

$$l : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \, tal \; que \; l(x) = \log_a x$$

São trabalhados na sequência os gráficos das funções Exponenciais e Logarítmicas, juntamente ao estudo de seus respectivos domínio e imagem. No entanto não nos aprofundaremos no assunto, pois não é o foco dessa pesquisa. Ainda é importante frisar que a obra trás a Função Logaritmo decimal como uma particularidade das Funções Logarítmicas, e nesse caso trabalha a característica e a mantissa de um Logaritmo.

$$\log N = \underbrace{c}_{\downarrow \; característica} + \underbrace{0,m}_{\downarrow \; mantissa} \qquad para \; 0 < 0,m < 1$$

Também na sequência são trabalhados três (3) exemplos em que são determinadas a característica e a mantissa de alguns logaritmos. Ainda sobre esse assunto, na página seguinte é disposta uma tábua de Logaritmos Decimais $\log_{10} N$, com $0 < N < 25$, e doze exemplos de uso da tábua.

O capítulo é encerrado com doze (12) exercícios subdivididos em trinta e quatro (34) itens, para que sejam utilizadas na resolução, as propriedades operacionais de Logaritmos e a tábua disposta anteriormente. Além disso, é disposta uma lista de exercícios de revisão, contendo trinta e dois exercícios, nos quais para sua resolução é necessário lançar mão de todo o conteúdo supracitado.

Considerações sobre o capítulo.

A obra apresenta um capítulo muito bem desenvolvido, com todas as definições e propriedades decorrentes do estudo de Logaritmos. No entanto, mais uma vez, mostra um conteúdo, sem ilustrações, exemplos contextualizados ou intervenções diferenciadas. As condições de existência do Logaritmo, $b > 0 \, e \, 0 < a \neq 1$ *ou* $b \in \mathbb{R}_+^* \; e \; a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, são inseridas sem nenhuma sem justificativas.

Os exercícios totalizam quarenta e três (43) subdivididos em cento e dezesseis (116) itens, além de onze (11) exemplos de aplicação direta da definição de Logaritmo e de suas respectivas propriedades.

4.5.5 – Livro 5: Matemática

A presente obra (Figura 6) é dividida em Prefácio, índice e nove capítulos, a saber: Conjuntos, Números, Relações e Funções, Função do 1º Grau, Função Quadrática, Função Modular, Função Exponencial, Função Logarítmica, Funções Circulares, além de respostas dos exercícios propostos e bibliografia.

O que nos interessa é o capítulo 8 que leva o nome de Função Logarítmica, disposto entre as páginas 151 e 198 e que está particionado em: Preliminares, Definição, Propriedades, Sistemas de Logaritmos, Propriedades operatórias, Mudanças de base, Funções inversíveis, Função Logarítmica, Aplicações dos Logaritmos e Exemplos.

O capítulo inicia com um subtítulo chamado **preliminares**, que remetem as equações exponenciais trabalhadas no capítulo anterior, com foco principalmente nas propriedades e verificando equações do tipo $a^x = b$ como, por exemplo, $3^x = 17$. Surge dai a necessidade do uso de logaritmos para que seja possível resolver tais tipos de equações.

Em seguida a obra contempla a **definição** de Logaritmos:

Vamos considerar um número ***a****, positivo e diferente de 1, e um número* ***b*** *positivo. Chama-se Logaritmo de* ***b*** *na base* ***a*** *ao expoente* ***x*** *que se deve dar à base* ***a*** *de modo que a potência obtida seja igual a* ***b****.*

Em símbolos: $\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b \qquad (0 < a \neq 1, b > 0)$

Diz-se ainda que **b** é o logaritmando ou antilogaritmo, **a** é a base e **x** é o Logaritmo.

A seguir são abordadas as **propriedades** de Logaritmos, que decorrem naturalmente da definição abordada acima, são elas:

$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a a^m = m \quad e \quad \log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

São trabalhados 10 exercícios resolvidos que buscam revisar as propriedades de exponenciação e de Logaritmos concomitantemente a partir de equações dadas na forma logarítmica, juntamente com a ideia de função logarítmica. Após isso são propostos mais 10 exercícios subdivididos em 41 itens para que sejam determinados alguns logaritmos, resolvidas equações, determinar bases e encontrar o domínio de funções logarítmicas.

No quarto item do capítulo são trabalhados os **sistemas de Logaritmos**, divididos em Sistemas de Logaritmos Decimais (base 10) e Sistemas de Logaritmos Neperianos (base *e = 2,718...*). Em seguida são propostos 12 exercícios subdivididos em 50 itens em que é necessário que se encontre o Logaritmo de alguns números em diferentes bases, verificar o domínio de funções logarítmicas e as condições de existência de algumas sentenças.

As **propriedades operatórias** são dadas detalhadamente, bem exemplificadas e com muitos exercícios resolvidos e propostos para fixação. A primeira propriedade é o Logaritmo do produto, em que, sendo $0 < a \neq 1, b > 0 \; e \; c > 0$, temos:

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

São exibidos alguns exemplos de aplicação direta da propriedade e em seguida quatro exercícios resolvidos em que são trabalhadas equações logarítmicas e as condições de existência dos logaritmos. Finalizando com cinco exercícios propostos em que também é necessário o uso direto da propriedade do Logaritmo do produto em equações logarítmicas.

A segunda propriedade que a obra apresenta é o Logaritmo do quociente, em que, sendo $0 < a \neq 1, b > 0 \; e \; c > 0$, temos:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Da mesma forma que ocorreu com o Logaritmo do produto, são trabalhados cinco exemplos de aplicação direta da propriedade do Logaritmo do quociente.

Já para questões em que são necessárias aplicações de Logaritmos a obra coloca a necessidade de, às vezes, utilizar os chamados Cologaritmos, e os definem de modo que dados $0 < a \neq 1 \; e \; x > 0$ denominamos cologaritmo de x na base a ao oposto do logaritmo de x na mesma base.

$$co\log_a x = -\log_a x$$

A obra não dá muito mais ênfase aos cologaritmos do que dar sua definição, tanto que não trabalha nenhum exemplo e muito menos exercícios.

Na sequência são trabalhados cinco exercícios resolvidos e propostos outros cinco para que sejam trabalhadas expressões e equações logarítmicas, utilizando as propriedades já vistas.

A terceira propriedade a ser trabalhada é o Logaritmo da potência, que segundo a obra provém diretamente da propriedade do Logaritmo do produto. Desse modo: sendo $0 < a \neq 1, b > 0 \; e \; m \in \mathbb{R},$ temos:

$$\log_a b^m = m.\log_a b$$

Desse modo o logaritmo da potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

A obra dispõe em seguida de oito exemplos que trabalham e buscam revisar as propriedades vistas até o momento e buscam também verificar que a propriedade do Logaritmo da raiz recai sobre o logaritmo da potência, pois:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a b = \frac{\log_a b}{n}$$

Na sequência é colocado um resumo sobre as propriedades operatórias, cinco exercícios resolvidos e outros oito propostos para que sejam desenvolvidas a partir de logaritmos decimais e naturais algumas expressões, verificar as condições de existência e resolver algumas equações logarítmicas.

A obra também apresenta uma das propriedades mais importantes sobre o estudo de Logaritmos, a **mudança de base**, a mesma é colocada de forma que sendo $0 < a \neq 1, b > 0 \; e \; 0 < c \neq 1$, tem-se:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Na sequência são disponibilizados quatro exemplos, que utilizam da propriedade de mudança de base, além de quinze exercícios que utilizam todas as propriedades operatórias já trabalhadas juntamente a mudança de base.

O sétimo item trabalhado neste capítulo chama-se **funções inversíveis**, que é uma introdução a funções logarítmicas utilizando a ideia de, a partir de algumas funções dadas, encontrar suas inversas observado o domínio e imagem das mesmas através de cálculos em alguns pontos e gráficos das mesmas. Concluindo que, de modo geral: " $f : A \to B$ é *inversível* se, e somente se, para *cada* $y \in B$ existe em correspondência um único $x \in A$ tal que $y = f(x)$. A *relação inversa* de f ainda é função e representa-se por f^{-1}".

Em seguida a obra dispõe de quatorze exercícios, entre resolvidos e propostos para seja feita a verificação de existência ou não das inversas de algumas funções e esboçar graficamente algumas delas.

O penúltimo item do capítulo é a **função logarítmica** que segundo a obra já pode ser introduzida, compreendida e assimilada, utilizando todos os outros itens trabalhados até aqui de forma fundamental para a construção do conceito. Alguns exemplos são utilizados de forma a estudar o domínio e verificar a histórica convenção de ser a inversa da função exponencial.

Após os exemplos estudam-se algumas casos importantes, como o domínio, a imagem e o crescimento e decrescimento dessas funções, primeiramente a partir de dois exemplos e após isso, três exercícios subdivididos em vinte e um itens. A seguir a obra nos trás a definição de função logarítmica:

Dado um número a, $0 < a \neq 1$, denominamos função logarítmica a função:

$$f(x) = \log_a x$$

Definida para todo *x positivo*.

Após isso a função logarítmica e a função exponencial são definidas como inversas uma da outra.

A obra dispõe de vinte e um exercícios, entre resolvidos e propostos que abordam funções inversas, domínio das funções, condições de existência, resolução de equações e inequações logarítmicas.

O último item contempla **aplicações dos logaritmos**, contextualizando um pouco seu uso. A obra trás a régua de cálculo como um item muito utilizado dentro da engenharia e tem uma aplicação prática das propriedades operatórias e das tábuas de logaritmos. Traz também considerações sobre a característica e a mantissa de um logaritmo.

A característica é expressa na obra como “a parte inteira que não supera o logaritmo” a mantissa é “o logaritmo menos a sua característica”. O logaritmo é dividido, portanto em característica e mantissa e pode-se denotar log x como:

$$\log x = c + 0,m$$

Onde o número inteiro *c* é chamado característica do logaritmo e *0,m* é um número decimal, compreendido entre 0 e 1, chamado mantissa do logaritmo. Na sequência são colocados quatro exemplos em que a característica e a mantissa de alguns logaritmos são encontradas.

A obra também exibe uma preocupação pertinente com o caso de a característica de um logaritmo ser negativa. Nesse caso costuma-se escrever o logaritmo na chamada *forma mista* ou o *logaritmo preparado* que alguns acham mais conveniente para os cálculos.

Exemplo 1: $\log 0,2 = -1 + 0,301030 = \bar{1},301030$

Exemplo 2:

$$\log x = -2,522879 = -2 - 0,522879 = -2 - 1 + 1 - 0,522879 = -3 + 0,477121 = \overline{3,477121}$$

Na sequência são propostos treze exercícios subdivididos em cinquenta e três itens em que é pedido para encontrar a mantissa e a característica de alguns logaritmos decimais.

Finalizando a parte teórica do capítulo e ainda sobre característica e mantissa de um logaritmo, é introduzida a famosa *tábua de logaritmos* de base decimal compreendo logaritmos de 0 até 1000. Após são colocados seis exemplos em que a tábua de logaritmos é utilizada para que sejam encontradas a característica e a mantissa de alguns logaritmos.

O capítulo culmina em vinte e quatro exercícios entre resolvidos e propostos para que utilizando tudo que já foi visto sobre logaritmos, se faça a aproximação de logaritmos, encontrar um modelo de resolução de conteúdos de matemática financeira, resolver equações exponenciais, encontrar logaritmos a partir da tábua e resolver problemas geométricos.

Considerações sobre o capítulo:

O livro apresenta os conteúdos relacionados em uma sequência bastante objetiva. O capítulo 8 que leva o nome de Função Logarítmica traz inicialmente uma ligação com o capítulo anterior chamado função exponencial, a seguir a partir de exemplos, constrói a o conceito de logaritmo, iniciando pela definição, trabalhando as propriedades básicas e operatórias (todas devidamente demonstradas), introduzindo a ideia de funções inversíveis para colocar as funções logarítmica e exponencial como inversas entre si.

Ao longo do capítulo foram trabalhados noventa e sete (97) exercícios subdivididos em cento e quarenta e nove (149) itens sobre todos os assuntos abordados, envolvendo aplicação direta de propriedades, cálculo pela definição, entre outros. O capítulo é finalizado com vinte e quatro (24) exercícios sobre aplicações de logaritmos que vão desde o uso da régua de cálculo ao desenvolvimento de resoluções de questões envolvendo matemática financeira.

4.5.6 – Livro 6: Trigonometria e Logaritmos

O livro em questão (Figura 7) está dividido em dois capítulos, o primeiro, intitulado Trigonometria está subdividido em Índice, Trigonometria, Seno, Cosseno, Tangente, Cotangente, Cosecante, Secante, Relações Trigonométricas de ângulos complementares, Resolução de triângulos retângulos, Resolução de triângulos equiláteros, Resolução de triângulos isósceles, Resolução de triângulos quaisquer, Lei dos senos, Leis dos cossenos e Tabelas Trigonométricas.

O segundo, intitulado Logaritmos e disposto entre as páginas 35 e 56, é o que nos interessa e está subdividido em Índice, Logaritmos, Característica de um logaritmo, Mantissa de um logaritmo, Interpolação, Achar o logaritmo de um número, Antilogaritmo de um logaritmo, Cologaritmo de um número, Emprego dos logaritmos, Multiplicação, Divisão, Potenciação, Radiciação, Aplicação geral dos logaritmos e Tabela de mantissas dos logaritmos decimais.

Na introdução desse capítulo intitulado Logaritmos, são retomados os conceitos de aritmética, nesse caso a potenciação com base 10, e através desse exemplo é construída a seguinte definição de logaritmo:

"*O logaritmo de um número é o expoente ao qual certo número, chamado base, precisa ser elevado para que possamos obter novamente o número dado*".

A obra ainda busca dar uma explicação de que, como foi tomada como exemplo a base 10, este mesmo sistema é dito "Decimal", e que é o mais utilizado de todos, colocando também que nesse caso escreve apenas "Log" ao invés de "Log_{10}".

A característica de um logaritmo é definida na obra como sendo a parte "inteira" de um logaritmo.

Exemplo: $Log1000 = 3 = 3,0000$, onde o número 3 é a característica do logaritmo.

A mantissa de um logaritmo é definida na obra como a parte "decimal" de um logaritmo e ainda escrevem que *a mantissa do logaritmo é determinada utilizando-se tabelas destinadas a esse fim*.

Exemplo: Achar a mantissa de 42 na tabela posta no final do capítulo, como $log\,42 = 1,623249$, e a tabela em questão utiliza somente 4 casas decimais, então a mantissa nesse caso é 0,6232.

A obra apresenta a interpolação a partir da tabela que nos dá as mantissas com até quatro números significativos e que algumas mantissas de números como 5316, e 0,03648 não podem ser lidas diretamente na tabela.

Exemplo: Para calcular a mantissa de 5315 devemos:

- Encontrar a mantissa de 532 e de 531;

- Encontrar a diferença entre elas, no caso 0,0008;

- Fazer uma regra de três simples

$1 \rightarrow 0,0008$

$0,5 \to x$

O que resulta em x = 0,0004. Somemos esse resultando a mantissa de log 531 que é 0,7251 + 0,0004 = 0,7255, ou seja, a mantissa no número 5315 é 0,7255.

Na sequência são colocados dezoito (18) exercícios com soluções, para encontrar a característica e a mantissa de alguns números e outro doze (12) exercícios para encontrar o logaritmo de alguns números**.**

No que diz respeito a determinação do antilogaritmo de um logaritmo aplica-se o processo inverso ao utilizado para encontrar o logaritmo de um número. Na sequência são colocados doze (12) exercícios para encontrar os antilogaritmos de alguns números. A obra chama a atenção para o cologaritmo de um número, que é o logaritmo de um número com o sinal trocado e dispões oito (8) exercícios para achar os cologaritmos de alguns números.

Sobre o emprego dos logaritmos a obra frisa que “A logaritmação facilita bastante os cálculos”, mas que sua aplicação é possível somente quando há, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, mas nunca em adições e subtrações.

As propriedades operatórias de Logaritmos são colocadas iniciando pela **multiplicação**, que diz:

“O logaritmo de um produto é dado pela soma dos logaritmos dos fatores”.

Notação: $log\ (a \cdot b \cdot c) = log\ a + log\ b + log\ c$

Após é dado um (1) exemplo utilizando a propriedade e dez (10) exercícios para efetuar as operações indicadas por meio de logaritmos.

Sobre a propriedade de **divisão**, a obra trás que, “O logaritmo de um quociente é dado pela diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor”.

Notação: $log \frac{a}{b} = log\, a - log\, b$

Na sequência são dados dois exemplos que utilizam a propriedade de divisão, além de oito (8) exercícios para efetuar as operações indicadas por meio de logaritmos.

A operação de **potenciação** é dada como, “O logaritmo de uma potência é dado pelo produto do expoente pelo logaritmo da base”.

Notação: $log\ a^n = n \cdot log\ a$

Sobre essa propriedade são dados dois (2) exemplos e dez (10) exercícios para efetuar as operações indicadas por meio de logaritmos.

A última operação apresentada é a de **radiciação** que é dada por**,** “O logaritmo de uma raiz é dado pelo quociente do radicando e o índice da raiz”.

Notação: $log\sqrt[n]{a} = \dfrac{\log a}{n}$

Após é dado um exemplo de aplicação direta da propriedade de radiciação e doze (12) exercícios para resolver as questões fazendo o uso das quatro propriedades de operações com logaritmos. Finalizando o capítulo com uma tabela de mantissas de logaritmos decimais.

Considerações sobre o capítulo

O capítulo é enxuto e objetivo, trazendo cinco (5) exemplos e cinquenta e dois (52) exercícios de aplicação direta da definição e das propriedades de Logaritmos. Observou-se que o livro é voltado quase estritamente para auxiliar os estudantes na inserção em Universidades e outras instituições semelhantes, o capítulo não traz nada de inovador, somente a resolução de exercícios por meio do uso de lápis e papel.

A notação da propriedade do Logaritmo do produto, colocada na forma $log(a \cdot b \cdot c) = log\ a + log\ b + log\ c$, deveria, ser precedida pelo produto de apenas dois termos, ou seja, $log(a \cdot b) = log\ a + log\ b$, para que o estudante compreendesse que pode ser utilizada para resolver multiplicações muito trabalhosas utilizando a adição.

4.5.7 – Livro 7: Exponencial e Logaritmos

A obra (Figura 8) está dividida inicialmente em Objetivos e Índice, além de três capítulos, a saber: Capítulo 1 intitulado Potências, contendo os conteúdos de Potências, raízes e suas propriedades, potências de expoente racional e potências de expoente real. O capítulo 2 intitulado Função exponencial contendo os conteúdos de Equações exponenciais, Função Exponencial, Representação Gráfica e Inequações Exponenciais.

Fechando com o capítulo 3 intitulado Função Logarítmica que contém Introdução, Sistemas de Logaritmos, Propriedades, Mudança de base, Função Logarítmica, Inequações Logarítmicas e Logaritmos Decimais, e no final do livro tem-se as respostas dos exercícios.

Porém o que nos interessa é o capítulo 3 que leva o nome de "Função Logarítmica" disposto entre as páginas 31 e 69, o mesmo inicia com uma Introdução abordando sobre a história dos logaritmos e a necessidade de sua invenção devido a problemas relacionados principalmente a Navegação e a Astronomia. Os personagens citados são John Napier (1550-1617) e sua obra "*Mirifici Logarithmorum canonis*" escrito por volta de 1614, Henry Briggs (1561-1631) responsável pela elaboração da primeira tabela de logaritmos e Jobst Bürg (1552-1632) que teria desenvolvido ideias semelhantes às de Napier só que em outro espaço cultural.

Na sequência é apresentada a definição de Logaritmo, onde, dados dois números reais positivos **a** e **b** com **a ≠ 1**, chama-se logaritmo de b na base a, o expoente x que satisfaz a igualdade $\mathbf{a^x = b}$, além de cinco Exemplos que englobam o uso direto da definição e também traz a nomenclatura utilizada, como segue:

$$\begin{array}{l} \quad \textit{Logaritmando} \\ \qquad \uparrow \\ \log_a b = x \rightarrow \textit{Logaritmo} \\ \quad \downarrow \\ \ \ \textit{base} \end{array}$$

São consideradas na obra algumas consequências diretamente da definição, são elas:

Para $a \neq 1,\ b > 0\ e\ c > 0\ e\ m \in \mathbb{R}$;

1º) $log_a 1 = 0$ 2º) $log_a a = 1$ 3º) $log_a a^m = m$

4º) $\log_a \sqrt[m]{a} = \dfrac{1}{m}$ 5º) $a^{\log_a b} = b$ 6º) $log_a b = log_a c \leftrightarrow b = c$

A seguir são listados sete (7) exercícios subdivididos em trinta e um (31) itens envolvendo uso direto da definição e o uso das "consequências" além de um exercício contextualizado sobre a escala Richter.

Os sistemas de Logaritmos trazem os sistemas de logaritmos decimais onde tem-se $\log_{10} x = \log x$ e os sistemas de logaritmos neperianos onde $\log_e x = \ln x$. Em seguida a obra trás as famosas propriedades operacionais de Logaritmos, ou simplesmente, propriedades, são elas:

Logaritmo do produto

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

Logaritmo do quociente

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Consequência

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a 1 - \log_a b = -\log_a b$$

Cologaritmo;

$$co\log_a x = -\log_a x$$

Logaritmo da Potência

1º caso - Potência no logaritmando → $log_a b^{\alpha} = \alpha. Log_a b, \ com \ \alpha \in \mathbb{R}^*$

2º caso – Potência na base → $log_a \beta^{b} = \frac{1}{\beta} log_a b, \ com \beta \in \mathbb{R}^*$

São dados ao final da apresentação de cada propriedade, três exemplos verificando a validade das mesmas e ao fim do conteúdo, dezenove (19) exercícios subdivididos em cinquenta e cinco (55) itens que envolvem aplicação direta da definição, consequências, problemas contextualizados, resolução de equações, aplicação de propriedades e resolução de sistemas de logaritmos.

A mudança de base também é enunciada como uma propriedade seja ela:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Para finalizar são listados doze (12) exercícios subdivididos em vinte e nove (29) itens envolvendo mudança de base, simplificação de logaritmos, resolução de equações e sistemas logaritmos.

A função Logarítmica é colocada na obra como a inversa da função exponencial, isto é, dada uma função do tipo, $y = a^{x}$ em funções do tipo $y = \log_{a} x$. Logo após os autores colocam alguns exemplos com alguns valores tabelados e traçam os primeiros gráficos relacionados.

Disso decorre a seguinte definição: *Chama-se função logarítmica de base* ***a****, a função* ***f(x) = log*** $_{\boldsymbol{a}}$ ***x*** *onde* ***a*** *é um número real positivo e diferente de* ***1 (1 ≠ a > 0)*** *definida para todo x real positivo*.

Ainda sobre a definição traz algumas considerações, onde o gráfico da função é crescente para **a > 1** e gráfico é decrescente para **0 < a < 1.** Findando com cinco (5) exercícios subdivididos em quinze (15) itens envolvendo, crescimento e decrescimento, gráficos e domínio de funções logarítmicas.

As Inequações Logarítmicas são colocadas na obra como um método de comparar Logaritmos para tanto lista-se as seguintes propriedades

$$a > 1 \rightarrow log_a x_1 < log_a x_2 \leftrightarrow x_1 > x_2$$

$$0 < a < 1 \rightarrow log_a x_1 > log_a x_2 \leftrightarrow x_1 < x_2$$

Encerrando essa etapa com oito (8) exercícios subdivididos em vinte e três (23) itens envolvendo condições de existência, gráficos e resolução de inequações logarítmicas.

Sobre os Logaritmos decimais, a obra traz a característica e a mantissa de um logaritmo e o Logaritmo de um número entre 0 e 1. Vale ainda frisar que é a primeira vez que a obra traz uso, mesmo que indiretamente, da calculadora. Para encerrar o capítulo são listados doze (12) exercícios subdivididos em trinta e dois (32) itens utilizando, característica e mantissa de logaritmos, propriedades de logaritmos, resolução de equações, uso de calculadora em atividades de investigação e problemas com matemática financeira.

Considerações sobre o capítulo

A obra traz detalhamentos, principalmente em relação à definição, as propriedades e suas consequências, com quinze (15) exemplos e sessenta e três (63) exercícios subdivididos em cento e oitenta e três (183) itens, todos muito diretos. Porém o que chama mais a atenção é o fato de ter sido introduzido um exemplo contextualizado e também o uso da calculadora como auxílio na resolução de exercícios, o que mostra a inserção de tecnologias em sala de aula.

4.5.8 – Livro 8: Matemática aula por aula

O livro (Figura 9) conta inicialmente com uma apresentação, a organização da coleção e um sumário. Logo após está dividido em oito capítulos, a saber: Conjuntos, Funções, Função Polinomial do 1º Grau, Função Polinomial do 2º Grau, Função Exponencial, Função Logarítmica, Função Modular e Trigonometria. Finalizando pelas respostas dos exercícios e as Referencias Bibliográficas. No entanto, que nos interessa é o capítulo 6, que leva o nome de Função Logarítmica disposto entre as páginas 165 e 204.

A obra inicia com uma breve introdução colocando sobre a necessidade da invenção dos logaritmos e relacionando como “O logaritmo e as navegações” envolvendo a expansão comercial e a necessidade de aprimorar técnicas de navegação, além de citar o Escocês John Napier (1550-1617) e Jobst Burgi (1552-1632) como os precursores do estudo de logaritmos, finalizando com a contribuição do Inglês Henry Briggs (1561-1639) que elaborou a primeira tabela de logaritmos contribuindo muito com esses estudos.

A seguir, a obra coloca que a “descoberta de logaritmos está ligada à ideia de simplificar o trabalho de cálculo”, pois valendo-se deles transformamos multiplicações em somas, divisões em subtrações, potenciações em multiplicações e radiciação em divisão.

Nessa etapa a obra aborda sobre exemplos com o uso de logaritmos, além de introduzir os conceitos de “logaritmação” e “logaritmo”, a seguir apresenta a definição e a existência da seguinte forma:

$$log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$$
$$\textit{Condições de existência } (C.E): b > 0 \; e \; 0 < a \neq 1$$

Após apresentar a definição e as condições de existência dão a **“Nomenclatura”** utilizada que é:

- O número ***b*** é chamado de **logaritmando** ou **antilogatimo;**

- Base é o número ***a;***

- Logaritmo é o número ***c.***

A seguir a obra apresenta sete (7) exemplos utilizando diretamente a definição, propõem um exercício resolvido que deve servir de modelo e um exercício composto de quatro itens **a, b, c** e **d** para resolver logaritmos dados usando a ideia da no exercício resolvido. Abordando novamente, ao finalizar, sobre as condições de existência dando alguns exemplos para que seja possível fixá-las melhor.

As consequências da definição são dispostas na obra da seguinte forma:

$- log_a 1 = 0, \forall a \in \mathbb{R};$
$- log_a a = 1, pois \forall a \in \mathbb{R},\ a^a = 1;$
$- log_a a^\beta = \beta,\ pois\ log_a a^\beta = x \rightarrow a^x = a^\beta \rightarrow x = \beta;$
$- log_a b = log_a c \leftrightarrow a = c;$
$- a^{log_a b} = b,\ pois\ a^{log_a b} = x \rightarrow b = x.$

Na sequência, são colocados os chamados Sistemas de logaritmos, a saber, sistemas de logaritmos decimais (base 10) e sistemas de logaritmos neperianos (base ε). Seis (6) exercícios resolvidos são dispostos na sequência, além de quatro (4) exercícios que exigem a utilização da definição e verificação das condições de existência. Finalizando com dez (10) exercícios propostos subdivididos em trinta e seis (36) itens, que exigem cálculo direto de logaritmos e verificação de bases convenientes.

As propriedades operatórias são colocadas da seguinte maneira:

O Logaritmo de um produto:

$$Log_a(m.n) = Log_a m + Log_a n,\ sendo\ 1 \neq a > 0,\ m > 0\ e\ n > 0$$

O Logaritmo de um quociente:

$$Log_a = Log_a m - Log_a n,\ sendo\ 1 \neq a > 0,\ m > 0\ e\ n > 0$$

O Logaritmo de uma potência:

$$Log_a n^k = k.Log_a n,\ sendo\ 1 \neq a > 0\ e\ n > 0$$

Na sequência são dispostos dois (2) exercícios resolvidos envolvendo a propriedades supracitadas, dez (10) exercícios subdivididos em vinte e cinco (25) itens, que exigem o uso de todas as propriedades supracitadas, sejam individualmente ou mais de uma em cada questão.

A propriedade de mudança de Base é dada da seguinte forma:

$$Log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ sendo: b > 0,\ 0 < a \neq 1,\ 0\ ,\ c \neq 1$$

O cologaritmo de um número é:

$$Colog_a b = -log_a b$$

A seguir é dado um exercício resolvido para determinar o cologaritmo de um número, cinco (5) exercícios propostos subdividos em dez (10) itens para calcular logaritmos dados utilizando alguns valores pré-definidos.

As Equações Logarítmicas, segundo o livro, são aquelas que apresentam a incógnita no logaritmando ou na base do logaritmo, podendo apresentar três tipos principais:

1º) Aquelas em que aplica-se apenas a definição de logaritmo para sua resolução.

2º) Aquelas que aplica-se as propriedades de logaritmos para a resolução.

3º) Aquelas em que aplicaremos a mudança de base para a resolução.

Finalizando cada parte são colocados exercícios resolvidos, respectivamente, três (3), um (1) e um (1), e exercícios para resolução respectivamente, três (3), oito (8) e oito (8), subdividos em, treze (13), quinze (15) e onze (11) itens. Objetivando, resolver a equação dada e encontrar o conjunto verdade, determinar o conjunto solução e conjunto verdade de equações logarítmicas e determinar o conjunto verdade e resolver algumas equações logarítmicas.

A função logarítmica é colocada na obra como a inversa da função exponencial e traz as características, o conjunto domínio, o conjunto Imagem; o gráfico e a comparação entre as inversas, (logarítmica e exponencial). A seguir a obra traz um (1) exercício resolvido onde é esboçado o gráfico de uma função logarítmica e outros seis (6) exercícios subdivididos em vinte e quatro (24) itens, para esboçar gráficos, e determinar os conjuntos domínio e imagem de funções logarítmicas.

As inequações logarítmicas, segundo o livro, se caracterizam por envolverem a função logarítmica. Para convencimento dos alunos são dispostos, três (3) exercícios resolvidos envolvendo condições de existência, conjunto solução, estudo de gráficos e resolução de inequações logarítmicas e, a seguir, nove (9) exercícios subdivididos em vinte e oito (28) itens para discutir a veracidade de sentenças, condição de x e resolução de inequações logarítmicas.

O Logaritmo decimal é introduzido na obra a partir da notação científica, apresentando dois (2) exercícios propostos para escrever números dados em notação científica. Também são trazidas algumas considerações sobre o logaritmo decimal (base 10), o cálculo de um logaritmo e as propriedades da mantissa.

Um (1) exercício resolvido é colocado na sequência, para determinar o logaritmo de quatro números dados fazendo uso da tabela de logaritmos. Também são dispostos dois (2) exercícios subdivididos em sete (7) subitens para determinar o logaritmo de números dados. Finalizando com a forma mista ou forma preparada de um Logaritmo.

Um exercício resolvido para calcular o valor aproximado de um dado número através de logaritmos e outros dois (2) exercícios subdivididos em dez (10) subitens para calcular logaritmos através da tabela e determinar o logaritmo discriminando a mantissa e a característica.

A seguir é colocada no livro a uma tabela de Logaritmos decimais, com valores de 0 a 99, a seguir uma lista de treze exercícios (13) complementares subdivididos em vinte e seis (26) itens englobando todo o conteúdo abordado no capítulo.

O capítulo é encerrado com “Saiba um pouco mais”, onde é dada uma contextualização do uso de logaritmos falando sobre “Acústica e logaritmo”.

Considerações sobre o capítulo:

O capítulo é objetivo, sem detalhamentos e detêm um total de 10 exemplos e cento e oito (108) exercícios subdivididos em cento e cinquenta e oito (158) itens. As propriedades não têm provas e em nenhum momento o estudante é instigado a refletir sobre elas. Os pontos diferenciais são a parte introdutória que aborda sobre a história da matemática e o encerramento do capítulo que traz uma contextualização sobre a relação entre Logaritmos e a Acústica.

4.5.9 – Livro 9: Matemática: Edição Compacta

A obra (Figura 10) inicia com uma apresentação dos autores e o sumário. A seguir é dividido em três (3) partes. A primeira conta com os módulos de 1 a 51 e uma Revisão do ensino fundamental, conjuntos, Plano cartesiano, relações e funções, Função polinomial do 1º grau, Função Quadrática, Inequações, Funções definidas por várias sentenças, uma revisão de potenciação e radiciação, Equação e função exponencial, Logaritmos e função logarítmica, PA e PG e Matemática financeira.

A segunda parte conta com os módulos de 52 a 117, e Relações métricas no triângulo retângulo, Circunferência trigonométrica e trigonometria, Equações trigonométricas, Resolução de triângulos quaisquer, Matrizes, Sistemas lineares, Análise combinatória, Binômios, Probabilidade e Estatística, Geometria Plana e Geometria Espacial.

A terceira parte conta com os módulos de 118 a 145, e Geometria Analítica, Números Complexos, Polinômios e uma Tabela Trigonométrica. Finalizando a obra com uma Prova do ENEM e o Manual do Professor. No entanto, o que nos interessa são os módulos 38 a 43 que abordam sobre Logaritmos, disposto entre a páginas 82 e 93 e que estão particionado da seguinte maneira:

A obra inicia com a ideia de que como seria impossível resolver certas equações exponenciais usando apenas as propriedades de potenciação, é necessário que seja introduzido um novo conceito, o de Logaritmo, e que com ele podemos resolver problemas de potências com qualquer expoente real.

A definição de Logaritmo é posta da seguinte maneira:

*Sendo **a** e **b** números reais positivos, com b ≠ 1, chamamos de logaritmo de **a** na base **b** o expoente real **x** ao qual se eleva **b** para obter **a***, ou ainda na forma algébrica:

$$log_b a = x \leftrightarrow b^x = a, \, com\, a > 0,\, b > 0\, e\, b \neq 1$$

Após são exibidos quatro (4) exemplos utilizando diretamente a definição de logaritmos.

As condições de existência de um logaritmo são dadas como segue:

$$1 \neq b > 0 \rightarrow b^x > 0 \rightarrow a > 0$$

As notações de um logaritmo são colocadas na obra do seguinte modo:

$$\begin{array}{l} \quad Logaritmando(anti\log x) \\ \qquad \uparrow \\ \log_b a = x \rightarrow Logaritmo \\ \quad \downarrow \\ \quad base \end{array}$$

Na sequência são dispostos dois (2) exercícios resolvidos subdivididos em quatro (4) itens, para calcular os valores de x segundo as condições de existência de logaritmos e determinar o domínio de uma função logarítmica. Além de dois exercícios propostos subdivididos em quatro (4) itens, para calcular os valores de x segundo as condições de existência de logaritmos e determinar o domínio de funções logarítmicas.

Da definição e das condições de existência de logaritmo, a obra conclui:

$$a)\ log_b 1 = 0;\ b)\ log_b b = 1;\ c)\ log_b b^m = m;\ d)\ b^{log_b a} = a.$$

A seguir são colocados três (3) exercícios Resolvidos subdivididos em oito (8) itens, para calcular os valores de x aplicando a definição de logaritmo, calcular a base dos logaritmos e calcular o valor de cada expressão. Além de nove (9) exercícios subdivididos em vinte e oito (28) itens, para calcular os valores de x aplicando a definição de logaritmo, calcular o valor de uma expressão logarítmica dada.

Os últimos exercícios objetivam determinar o valor de x, a base dos logaritmos dados e o logaritmo de um número e a base determinar o número, encontrar a base de um determinado logaritmo, calcular pela definição o valor de x, calcular o valor de cada expressão e calcular x em cada caso.

As propriedades dos logaritmos são listadas na obra da seguinte maneira:

- Logaritmo do produto:

$$Log_a(b.c) = Log_a b + Log_a c$$

- Logaritmo do quociente:

$$Log_a \frac{b}{c} = Log_a b - Log_a c$$

- Logaritmo da potência:

$$Log_a b^m = m. Log_a b$$

Também são propostos três (3) exercícios resolvidos visando calcular um logaritmo utilizando a propriedade do produto, um logaritmo dados alguns valores e calcular log 50 dados log 2 = x. Além de oito (8) exercícios subdivididos em (16) dezesseis itens.

Os exercícios objetivam calcular um logaritmo utilizando as propriedades operatórias, o logaritmo ($a^2 + b^2$) sabendo que a + b = m e a – b = 100, os logaritmos sabendo que a = log 2, um logaritmo em função de a = log 2 e b = log 3, $\log_q$ p dado $\log_p$ (p^2q^2) = 5, determinar o produto de dois números dada a soma dos logaritmos desses números, calcular $\log_2$ ($a^2 + b^2$) tal que a + b = 8 e $\log_2$ (a – b) = m e achar log 3 sendo log 27/10 = k.

A mudança de base é dada como:

$$Sendo\ a > 0, 1 \neq b > 0, 1 \neq c > 0, temos:$$

$$Log_b a = \frac{Log_c a}{Log_c b}$$

Além disso, são dados dois (2) exemplos envolvendo mudança de base e as consequências decorrentes da mesma, que são:

$$log_b a = \frac{1}{log_a b} \qquad log_a b \ . \ log_c a = log_c b$$

Dois exercícios resolvidos são colocados a seguir, a saber: Dado $log\ 2 = x$, calcule $log_2 20$, calcular $log_2 72$ dado $log\ 2 = a\ e\ log\ 3 = b$, e simplificar uma expressão que envolve mudança de base e outras propriedades de logaritmos. Além de seis (6) exercícios subdivididos em quatorze (14) itens.

Os exercícios visam classificar algumas expressões como verdadeiras ou falsas, calcular $log_3 5 \ . \ log_{25} 27$, encontrar o número $x > 1,\ tq,\ log_x 2 = log_4 x$, calcular alguns logaritmos, calcular log 45 e log 240 dado que $log_5 2 = k\, e\, log_5 3 = l$ e simplificar algumas expressões.

A obra chama de função logarítmica de base a $(1 \neq a > 0)$ a função que associa a cada elemento x positivo o seu logaritmo nessa base:

$$f(x) = log_a x \text{ definida de } \mathbb{R}^* \text{em} \mathbb{R},\ com 1 \neq a > 0$$

A seguir insere um exercício resolvido em que são construídos em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de duas funções logarítmicas dadas a fim de estabelecer uma comparação entre elas. Além de três (3) exercícios subdivididos em seis (6) itens para construir o gráfico de funções logarítmicas, construir dois gráficos em um mesmo plano cartesiano e determinar o domínio de funções logarítmicas dadas.

As equações logarítmicas são dadas na obra como equações com logaritmos, em que as variáveis podem aparecer no logaritmando ou na base, são chamadas equações logarítmicas. Para resolvê-las aplicamos a definição, as condições de existência e as propriedades de logaritmos.

Finalizando o capítulo é colocado um (1) exercício resolvido subdividido em três (3) itens para resolver as equações em ℝ. Além de sete exercícios propostos subdivididos em vinte e quatro (24) itens para resolver as equações em ℝ, resolver as equações em ℝ, determinar o valor de x nas equações, determinar o valor de x em cada uma das equações, resolver um sistema de equações logarítmicas, dados x e y reais, encontrar o produto das duas raízes reais de $log_3 x = 1 + log_x 9$ e encontrar o conjunto solução da equação logarítmica $log_4 (x^2 + x) = \frac{1}{2}$.

Considerações sobre o capítulo:

O capítulo dispõe de todas as propriedades operacionais exemplificadas, porém a mudança de base é abordada de forma simplória. Todos os sete (7) exemplos e os quarenta e três (43) exercícios subdivididos em noventa e cinco (95) itens, são bem variados e englobam muitas possibilidades de resolução e para resolvê-los é necessário lançar mão da definição e das propriedades operatórias.

4.5.10 – Livro 10: Matemática - Ciência e Aplicações

O livro inicia com a apresentação e a seguir o sumário, além de contar com treze (13) capítulos, a saber: Conjuntos numéricos, Funções, Função Afim, Função Quadrática, Função Modular, Função Exponencial, Logaritmos, Função Logarítmica, Progressões, Noções de matemática financeira, Semelhança de Triângulos, Trigonometria no triângulo retângulo e Resolução de triângulos, finalizando com as respostas dos exercícios e testes.

O capítulo de interesse sete que leva o nome de Logaritmos, disposto entre as páginas 197 e 215. O capítulo inicia com uma introdução sobre o que será tratado no decorrer do mesmo, esta dispõe de um exemplo introdutório contextualizado sobre crescimento exponencial e colocando o Logaritmo como uma forma de simplificar os cálculos.

A seguir é apresentada a definição de Logaritmo, que segundo a obra: *Sendo a e b positivos, com* $a \neq 1$*, chama-se Logaritmo de* ***b*** *na base* ***a*** *o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência* a^x *seja igual a b.*

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Onde *a* é a base do Logaritmo, *b* é o logaritmando e *x* é o Logaritmo. Na sequência são dispostos nove (9) exemplos de Logaritmos encontrados a partir da definição. As restrições para *a* e *b*, colocadas na definição, garantem a existência e a unicidade de $\log_a b$.

As consequências decorrentes da definição são dispostas na obra como propriedades, a saber:

- O Logaritmo de 1 em qualquer base *a* é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \quad pois \quad a^0 = 1$$

- O Logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \quad pois\ a^1 = a$$

- A potência de base a e expoente $\log_a b$, é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b\ ,$$

  pois o Logaritmo de *b* na base *a* é justamente o expoente que se deve dar à base a para que a potência fique igual a *b*.
- Se dois Logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c \,,$$

pois $\log_a b = \log_a c \Rightarrow a^{\log_a c} = b \Rightarrow c = b.$

Na sequência são dados dois (2) exemplos que aplicam diretamente as propriedades supracitadas. Os sistemas de Logaritmos são colocados no livro como um *conjunto formado por todos os Logaritmos dos números reais positivos em uma base* $a\ (0 < a \neq 1)$. Também são citados, particularmente, o sistema de Logaritmos decimais (base 10) e o sistema de Logaritmos neperianos (base *e*), conhecidos comumente como *Log x e Ln x*.

É introduzido o uso da calculadora cientifica no cálculo de Logaritmos, propondo que o aluno tecle primeiro o logaritmando e logo após a tecla LOG ou a tecla LN. São dados três (3) exemplos em que é necessário calcular Logaritmos utilizando a calculadora. No que segue é disposta uma lista contendo quinze (15) exercícios subdivididos em trinta e três (33) itens, onde é necessário utilizar na resolução a definição e todas as propriedades vistas até o momento.

As propriedades operatórias são três e listadas na obra respectivamente como:

- Logaritmo do produto

  Se $0 < a \neq 1, b > 0\ e\ c > 0,$ então:

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

- Logaritmo do quociente

  Se $0 < a \neq 1, b > 0\ e\ c > 0,$ então:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

- Logaritmo da potência

  Se $0 < a \neq 1, b > 0\ e\ r \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^r = r.\log_a b$$

São propostos quatro (4) exemplos de uso direto das propriedades, além de quinze (15) exercícios subdivididos em quarenta e um (41) itens onde é necessário lançar mão de todas as propriedades vistas, além da definição de Logaritmo, para a resolução.

A mudança de base, não é dada como uma propriedade, mas sim como um meio de resolução de problemas que envolvam Logaritmos em diferentes bases, podendo ou não fazer uso da calculadora. A fórmula da mudança de base é dada por:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplos:

$$\begin{array}{c} \textit{CALCULADORA} \\ \downarrow \\ \log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \dfrac{0,6999}{0,3010} \approx 2,32 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \textit{CALCULADORA} \\ \downarrow \\ \log_5 7 = \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5} = \dfrac{0,8451}{0,6999} \approx 1,207 \end{array}$$

Finalizando essa parte com uma lista de dez (10) exercícios, subdivididos em dezessete (17) itens para efetuar a resolução de sentenças logarítmicas, dezoito (18) questões retiradas de exames vestibulares e duas questões desafio, para que os estudantes possam utilizar, em sua resolução, todas as propriedades e fórmulas vistas no decorrer do capítulo.

O último item explorado no capítulo é o que a obra intitula como a *Matemática no tempo*, trazendo o tópico, *A invenção dos Logaritmos.* O texto traz acontecimentos do século XVI correlacionados com o estudo e a invenção dos Logaritmos por John Napier, considerando, porém que o início de todo esse processo ocorreu a partir de uma tabela de progressão geométrica de razão dois feita por Nicolas Chuquet em 1484.

Considerações sobre o capítulo

O capítulo é sucinto e objetivo, trazendo a definição, suas consequências e as propriedades de um modo rápido e bem exemplificado. Um exemplo contextualizado é dado no início do capítulo. O livro aborda o uso da calculadora como uma possibilidade e esta abre caminho para uma forma diferente de ensinar matemática, finalizando com a retomada histórica sobre a invenção dos Logaritmos.

4.5.11 – Livro 11: Matemática Completa

O livro inicia com uma apresentação dos autores. O sumário e está dividido em 11 capítulos, a saber: Geometria Métrica Plana; Trigonometria nos Triângulos; Conjuntos; Funções; Função Polinomial; Função Modular; Função Exponencial; Função Logarítmica;

Noções de Matemática Financeira; Trigonometria no ciclo e Progressões, finalizando com respostas para os exercícios, alguns sites e livros para leitura e pesquisa, Siglas e Bibliografia.

Para interesse da presente pesquisa tomamos o capítulo intitulado Função Logarítmica, disposto entre as páginas 243 e 282 e é iniciado a partir de uma pergunta, "O que é Logaritmo?" e desse modo segue com uma pequena introdução histórica, a etimologia da palavra e algumas aproximações racionais. A seguir vem a definição de Logaritmo que é dada da seguinte forma:

Dizemos que o logaritmo de um número positivo ***b****, na base* ***a****, positiva e diferente de 1, é o expoente* ***x*** *ao qual se deve elevar* ***a*** *para se obter* ***b****.*

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x, com\, b > 0, a > 0\ e\ a \neq 1$$

Chama-se atenção a seguir para a diferença entre as operações de potenciação, composta por base, potência e expoente e a de logaritmação, composta por base do Logaritmo, logaritmando ou antilogaritmo e Logaritmo. Ainda é importante frisar que a obra traz as duas como relacionadas, mas não inversas.

São contemplados três (3) exemplos, envolvendo cálculo direto de Logaritmos a partir da definição e um contextualizado em que é necessário utilizar, além da definição, alguns conceitos já vistos e algumas propriedades de exponenciação. Finalizando com oito (8) exercícios, subdivididos em vinte e sete itens, em que para sua resolução é necessário lançar mão do uso da calculadora, aplicação direta da definição e interpretação de problemas contextualizados ao lançamento de foguetes e à escala Richter.

Salienta-se a condição de existência de um Logaritmo, observando a partir de alguns exemplos, que não existe o Logaritmo x quando o logaritmando é negativo ou quando a base é negativa ou igual a 1.

Isto é:

Para $\log_a b$ existir, devemos ter:

Logaritmando positivo: b > 0

Base positiva e diferente de 1: $a > 0\ e\ a \neq 1$

É disposta a seguir, uma sequência com dois (2) exemplos e quatro (4) exercícios, subdivididos em dez (10) itens para realizar a verificação da existência de alguns Logaritmos, além de determinar valores reais para que existam e uma segunda sequência com outros dois (2) exemplos e quatro (4) exercícios subdivididos em dezenove (19) itens para encontrar o valor de alguns Logaritmos.

As equações logarítmicas são introduzidas a partir de exemplos e chamam a atenção pela necessidade de envolver a incógnita log. Para resolvê-las é necessário utilizar, além da definição de Logaritmo, a seguinte propriedade:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c, com\, 1 \neq a > 0, b > 0\; e\; c > 0$$

São dispostos quatro (4) exemplos para encontrar a solução, o conjunto verdade e resolver um problema contextualizado à produção de madeira. A obra também traz a ideia de contextualizar o uso dos Logaritmos a partir da meia-vida de algum elemento qualquer. Finalizando com quatorze (14) exercícios, subdivididos em vinte e três (23) itens, envolvendo resolução e conjunto solução de equações e a interpretação problemas contextualizados a produção industrial, plantações e matemática financeira.

As propriedades dos Logaritmos foram constituídas, segundo a obra, por uma tentativa de simplificar cálculos complexos em uma época em que nem se cogitava a invenção de uma calculadora, desse modo substituindo multiplicações por adições, potenciações por multiplicações e divisões por subtrações.

A primeira propriedade apresentada é o Logaritmo do Produto, que é igual à soma dos Logaritmos dos fatores, tomados na mesma base, isto é:

$$\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c, com\; a > 0, c > 0\; e\; 1 \neq b > 0$$

Logo após a segunda propriedade, é o Logaritmo do Quociente, que é igual ao Logaritmo do dividendo menos o Logaritmo do divisor, isto é:

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c, com\; a > 0, c > 0\; e\; 1 \neq b > 0$$

Na sequência são dispostos dois (2) exemplos e nove (9) exercícios subdivididos em vinte e dois (22) itens envolvendo em sua resolução as duas propriedades supracitadas, sejam individualmente ou conjuntamente, além de resolução de um sistema de equações Logarítmicas.

A terceira propriedade que a obra dispõe é o Logaritmo da Potência, que é igual ao produto do expoente pelo Logaritmo da base da potência, isto é:

$$\log_b a^n = n\log_b a, com\, a > 0, 1 \neq b > 0\; e\; n \in \mathbb{R}$$

Também são propostos três exemplos (3) e onze (11) exercícios subdivididos em vinte e dois (22) itens, que englobam todas as propriedades já estudadas, além de trazer problemas contextualizados relacionados à Lei do resfriamento de Newton, escalada, demografia, taxa de desemprego, PH, vazão e crescimento populacional.

A parte quatro do capítulo traz a Mudança de base, muito utilizada em problemas mais elaborados que envolvem Logaritmos, para tal, a obra apresenta a fórmula conhecida como Fórmula de mudança de base. Para tal tomemos $\log_a b = x$.

Assim:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

Aplicando logaritmo na base c em ambos os lados temos:

$$\log_c a^x = \log_c b \Rightarrow x.\log_c a = \log_c b \Rightarrow x = \frac{\log_c b}{\log_c a}, com\, b > 0, 0 < a \neq 1\; e\; c \neq 1$$

A obra dispõe de dois (2) exemplos, um (1) exercício resolvido e nove (9) exercícios propostos, subdivididos em dezesseis (16) itens são dispostos na sequência, sendo necessários à sua resolução todas as propriedades de Logaritmos e encontrar o conjunto solução de algumas equações.

A função logarítmica é definida como a inversa da função exponencial, e coloca que isto só pode acontece por que a função exponencial é bijetora, observe que:

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y\; ou,\; y = \log_a x$$

A obra traz inclusive o gráfico da função exponencial como simétrico do gráfico da função logarítmica em relação à reta $y = x$. Na sequência são trabalhados dois (2) exemplos e um (1) exercício sobre o gráfico de uma função logarítmica relacionado com a construção da torre Eiffel, além de outros dez (10) exercícios subdivididos em quatorze (14) itens que englobam construção de gráficos, estudo do domínio e campo de existência de funções logarítmicas.

A parte que diz respeito às inequações logarítmicas é direta e inicia com alguns exemplos e as duas propriedades fundamentais, a saber:

$$\textit{Quando } a > 1, \textit{temos } x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$$

$$\textit{Quando } 0 < a < 1, \textit{temos } x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$$

São dispostos na sequência três (3) exemplos para efetuar a resolução de inequações logarítmicas, com ênfase no estudo dos sinais e dos gráficos. Além disso, são colocados onze (11) exercícios subdivididos em dezoito (18) itens que englobam resolução e conjunto solução de inequações logarítmica finalizando com questões contextualizadas.

Os logaritmos decimais iniciam com uma abordagem histórica sobre a invenção dos logaritmos por Napier disposto em sua obra *Descrição da maravilhosa Lei dos Logaritmos*, publicada em 1614. A seguir traz informações sobre a característica e mantissa de um Logaritmo, ale de averiguar seu uso e sua interpretação nas famosas tábuas de Logaritmos, desse modo é disposta uma tábua de mantissas com valores e 1 a 99.

São colocados dois (2) exemplos sobre a maneira de encontrar valores de logaritmos a partir da consulta às tábuas e na sequência seis (6) exercícios subdividos em vinte e três (23) itens trabalhando a determinação da característica e da mantissa de alguns Logaritmos fazendo uso ou não da tábua disposta na obra.

O uso das calculadoras é abordado de forma geral chamando atenção para as teclas dispostas, entre elas a tecla **LOG**, utilizada para obter o Logaritmo de um número positivo qualquer na base 10. A seguir são colocados três (3) exemplos e onze (11) exercícios subdivididos em quarenta e um (41) itens para utilizar a tábua de Logaritmos e/ou a calculadora para encontrar o Logaritmo de alguns números.

O logaritmo natural **LN** também é colocado em destaque na obra, pois a calculadora também dispões de uma tecla que dá o valor do Logaritmo natural dado um número positivo qualquer. A seguir são dispostos cinco (5) exercícios contextualizados, envolvendo materiais radioativos e estimativas etárias.

Finalizando o capítulo são colocados quarenta e dois (42) exercícios de múltipla escolha de exames vestibulares de algumas das mais conhecidas universidades do país como uma forma de revisão de todos os conteúdos relativos a Logaritmos e também como um meio de preparar os estudantes para futuros exames.

Considerações sobre o capítulo

O capítulo está formatado e dividido em partes semelhantes relativas a cada conteúdo, são colocados muitos exemplos, num total de vinte e oito (28), explicados e resolvidos. Traz também cento e dois cento e dois (102) exercícios, subdivididos em duzentos trinta e três itens (233) itens que englobam todos os conteúdos e trazem algumas resoluções, finalizando com quarenta e dois (42) exercícios de revisão. O uso da calculadora é muito frisado no decorrer do capítulo, e também são colocadas algumas formas de resolução mais conservadoras como o uso das tábuas de características e mantissas.

4.6 Logaritmos nos livros didáticos de Matemática Estadunidenses

No que segue realizamos a análise dos livros didáticos de matemática estadunidenses, onde buscamos dar enfoque as questões mais importantes trabalhadas nos textos, principalmente no que toca a definição e propriedades de Logaritmos.

4.6.1 – Livro 12: Basic concepts of Elementary Mathematics

O livro está dividido inicialmente em dedicatória, prefácio e sumário e em seguida em onze capítulos, a saber: matemática moderna, lógica elementar, geometria, o conceito de número, estendendo o sistema numérico, numeração, expoentes e logaritmos, medidas (*measurement*), medição, mensuração (*mensuration*), funções e gráficos, juros e valores atuais, probabilidade e garantia (*probability and insurance*), a obra é finalizada por uma lista geral de leituras (referências), respostas para problemas e índice remissivo.

O que nos interessa é o capítulo 6 que leva o nome de Numeration, Exponents and Logarithms, isto é, Numeração, Expoentes e Logaritmos, disposto entre as páginas 165 e 202, onde o conteúdo de Logaritmos é dado especificamente entre as páginas 183 e 202.

A obra inicia a exploração do conteúdo de Logaritmos expondo a **notação exponencial**, onde um expoente, por definição "é um número que indica quantas vezes outro número é usado como fator".

Ex: a^5 *means a.a.a.a.a*, isso quer dizer, a^5 *é o mesmo que a.a.a.a.a* .

Em seguida temos as **leis dos expoentes**, iniciando pela multiplicação de potencias de mesma base, onde $a^m.a^n = a^{m+n} \quad a \neq 0$. Dando sequência com a divisão de potências de mesma base, onde $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0.$

Ainda sobre a segunda lei temos que: $\frac{a^m}{a^m} = \ 1$,isso ocorre naturalmente, mas também aplicando a lei da divisão de potencias de mesma base, veja: $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$. Onde temos a prova do porquê de $a^0 = 1, a \in \mathbb{R}^*$. Ainda sobre a segunda lei temos que: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \, onde \; a \neq 0.$

A lei que segue "preocupa-se com uma potência elevada a outra potência" onde pela definição de expoente temos, por exemplo: $\left(a^3\right)^4 = a^3.a^3.a^3.a^3 = a^{12}$. Disso conclui-se que para encontrar uma potência de potência multiplica-se seus expoentes, veja: $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ e obviamente $\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m$.

Existe também a preocupação em demonstrar que $x = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$, essa que é dada da seguinte forma:

$$x = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \left(x\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \Rightarrow x^n = a^1 \Rightarrow \sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

Utilizando a transitividade de *x* prova-se que $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Em geral $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, m \neq n$.

Exemplos: $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$ e $k^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{k^4}$.

Após a exploração das leis para os expoentes a obra nos trás a ideia de **notação cientifica** e contextualizada seu uso por muitos cientistas, principalmente Astrônomos e Físicos. A ideia principal gira em torno de fatorar números muito grandes ou muito pequenos em potências de 10.

Exemplos: $43.26\times1000=43,260=43.26\times10^3$ e $0.000000695=69.5\times10^{-8}$.

A obra apresenta um primeiro conjunto de exercícios contendo dezesseis (16) questões subdivididas em setenta e um (71) subitens, em cuja resolução devem ser utilizadas todas as leis de expoentes e notação científica. Na sequência é colocada uma tabela das potências de dois que vai de 2^0 até 2^{21}, de três e de dez que vão desde o expoente 0 até o 10. Ainda com relação a expoentes são dispostos quatro exemplos para que seja utilizada a tabela supracitada das potências.

Após toda essa introdução sobre expoentes, chegamos ao ponto foco do capítulo, que relaciona **logaritmos e expoentes**. A obra traz a seguinte definição para um Logaritmo:

*Se **b** é um número positivo diferente de 1, e $b^x = N$, então o expoente **x** é chamado de **Logaritmo** do número **N** na base **b**.*

Em símbolos: $x=\log_b N$

Exemplos: $\begin{matrix} \log_2 8=3,\ pois\ 2^3=8 \\ \log_5 125=3,\ pois\ 5^3=125 \end{matrix}$

Ainda podemos colocar da seguinte forma: $b^x = N\ ou\ b^{(\log_b N)} = N$

A obra traz também os logaritmos de base 10 como os *Logaritmos comuns* e coloca o número *e* = 2.718... como base do sistema dos chamados *Logaritmos Naturais.* Outro importante detalhe muito bem colocado é que "quando não tiver base alguma explicita no Logaritmo a base fica subentendida 10, assim, $\log 29=\log_{10} 29$ e $\log A=\log_{10} A$.

Com mais ênfase na parte algébrica são dispostas "três leis fundamentais de Logaritmos que derivam das leis básicas dos expoentes" são elas:

$$\log_b(PQ)=\log_b P+\log_b Q$$

$$\log_b(\frac{P}{Q}) = \log_b P - \log_b Q$$

$$\log_b(P^K) = K \log_b P$$

A segunda lista de exercícios conta com dezenove (19) questões subdivididas em sessenta e seis (66) itens, em que são usadas para sua resolução as leis de expoentes e Logaritmos, e uma tabela com os valores dos logaritmos comuns que vão de 10 a 99. A seguir são estudados os Logaritmos comuns dos números de 1 a 10 devido à necessidade de resolver algumas questões corriqueiras.

Exemplo:

$$8000 = 10^x$$
$$8 = 10^{0.9031}$$
$$assim\ 8000 = 10^{0.9031} \times 10^3 = 10^{3.9031}$$
$$ou\ \log 8000 = 0.9031 + 3 = 3.9031$$

À medida que o conceito de Logaritmo vai sendo construído, algumas coisas importantes são especificadas, como por exemplo, **encontrar um Logaritmo na tabela**, dessa forma introduz-se a noção de característica, que é a parte inteira e a mantissa que é a parte decimal de um Logaritmo.

A obra apresenta a ideia de **interpolação linear**, que é utilizada quando é necessário encontrar um valor de Logaritmo não tabelado.

Segue um exemplo apresentado para encontrar o valor de $\log 2724$ precisamos primeiro saber o valor de $\log 2720 = 3.4346$ e $\log 2730 = 3.4362$. Nota-se que o intervalo entre o valor de log 2720 e log 2730 é dado por $3.4362 - 3.4346 = 0.0016$ e a diferença entre 2730 e 2720 é 10 e 2724 e 2720 é 4, daí temos que $\log 2724 = 3.4352$.

Para finalizar o capítulo, antes dos últimos exercícios, é dada a ideia de como proceder para **encontrar um antilogaritmo**. O processo de encontrar o valor de um antilogaritmo na tabela é o inverso do utilizado para encontrar o valor de um Logaritmo.

O último conjunto de exercícios traz vinte e três (23) questões subdivididas em setenta e oito (78) itens, onde para resolvê-los é necessário lançar mão de todo aparato de leis e propriedades que foram verificadas desde o inicio do estudo da relação entre expoentes e Logaritmos.

Considerações sobre o capítulo:

O conteúdo estudado é dividido e estruturado relacionando de forma clara os conteúdos de expoentes e Logaritmos, no entanto, acredita-se que por ser um livro antigo (o mais antigo que foi analisado) não tenha exemplos e/ou exercícios contextualizados, mas segue um padrão formal e pragmático de ensino. As demonstrações são um ponto forte e refletem a subjetividade do texto.

4.6.2 - Livro 13: *Integrated algebra and trigonometry*

O livro é composto por: Prefácio, Sumário e 21 capítulos que dispõe os conteúdos de: Conjuntos e operações, Equações e inequações, Números racionais e expressões, Relações e funções, Equações e inequações quadráticas, Números irracionais e números reais, Números imaginários e complexos, Trigonometria no triângulo retângulo, ângulos, Medidas em radianos, identidades e equações, Relações trigonométricas generalizadas, Conjuntos solução, seus gráficos e sistemas de sentenças, Gráficos de funções trigonométricas, Funções trigonométricas inversas, Variação, Solução de triângulos oblíquos, Encontrar áreas usando trigonometria, Sequências e séries, Teoremas e equações de grau elevado, finalizando com o apêndice.

No entanto, o capítulo que diz respeito a nossa pesquisa originalmente recebe o título de Expoentes e Logaritmos ou, originalmente na obra, *Exponents and logarithms* e está disposto entre as páginas 261 e 304. O capitulo é iniciado abordando sobre Expoentes, especificamente pelo modo de uso as leis dos expoentes para expoentes inteiros positivos, como segue:

- Lei dos expoentes para multiplicação: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$;
- Lei dos expoentes para divisão: $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, a > b, x \neq 0$;
- Lei dos expoentes para potencias: $(x^a)^b = x^{a.b}$;
- Lei dos expoentes para obter raízes $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$, se a for múltiplo de **b**;

Na sequência são colocados setenta e dois (72) exercícios de aplicação direta das leis supracitadas e oito exercícios (8) para encontrar o erro cometido e solucionar de acordo com tais leis.

A obra também traz a extensão do domínio dos expoentes para o conjunto dos números racionais (expoente zero, negativo e fracionário) dividia nos seguintes itens:

- Significado de um expoente zero, $x^0 = 1, x \neq 0$;
- Três exemplos;
- Significado de um expoente negativo $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ se x $\neq$ 0;
- Quatro exemplos;
- Significado de um expoente fracionário $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ **ou** $(\sqrt[n]{x})^m$ para n $\neq$ 0;
- Quatro exemplos;

A seguir são colocados cento e trinta (130) exercícios para aplicação direta das leis supracitadas, seja utilizando apenas uma ou mais de uma delas, onze (11) exercícios mais elaborados em que são dados alguns valores e exigem um pouco mais de domínio do conteúdo e sessenta e quatro (64) exercícios de simplificação utilizando tais leis.

A parte que diz respeito a escrever números em notação padrão ou científica traz o uso do FORTRAN, em números maiores que 1 e em números menores que 1. A seguir são colocados doze (12) exercícios para expressar números como potencias de 10, vinte (20) exercícios para expressar números em notação científica e dois (2) exercícios para encontrar o erro cometido nas sentenças dadas.

A transformação de um número em notação científica para decimal traz vinte (20) exercícios para expressar os números dados na forma decimal, seis (6) exercícios mais elaborados para utilizar as leis dos expoentes já trabalhadas, e após escrever em notação científica e forma decimal e dois (2) exercícios para encontrar o erro cometido nas sentenças dadas e dar a solução correta.

A obra contempla a resolução de equações com expoentes negativos e fracionários por meio de: Vinte e um (21) exercícios para expressar cada uma das potencias em sua forma decimal e três (3) exercícios para encontrar o erro cometido e dar a solução correta sem o uso de calculadoras.

A resolução de uma equação exponencial simples traz alguns exemplos, um modelo de solução, trinta e três (33) exercícios de resolução direta de equações exponenciais simples e sete (7) exercícios para encontrar o erro cometido e dar a solução correta.

É realizada na obra uma retomada sobre a construção do conceito de Logaritmos ocorrido no século XVII. No entanto, foca-se a apresentação do conteúdo, na utilidade do mesmo, na resolução de cálculos mais elaborados e também a usabilidade de programas computacionais que o utilizam.

A utilização de expoentes para simplificar resultados é dado por meio de exemplos, um modelo de solução e quinze exercícios para utilizar a tabela das potencias de 2 e encontrar o resultado das sentenças dadas.Também é descrita a impossibilidade de alguns números, como por exemplo, 23 ou 57 serem associados com uma potência de 10, e que dessa forma seria necessário utilizar raízes que envolvam índices grandes.

Exemplo: $10^{1.36} = \sqrt[100]{10^{136}}$;

A função exponencial é introduzida e definida como: Para cada expoente *x*, b^x tem um único valor se b > 0. Se b é sempre > 0 e b ≠ 1, a função

$$\{(x, y)\} : y = b^x\}$$

é chamada função exponencial para base b.

A função logarítmica definida como sendo: O Logaritmo, *y*, de um número positivo, *x*, para a base, b, é o segundo número do par ordenado (*x*, *y*) pertencente a $\{(x, y)\} : y = b^x\}$.

A afirmação $2^5 = 32$ está na forma exponencial. A mesma relação pode ser escrita na forma logarítmica como $\log_2 32 = 5$. Isso nos leva a perceber que $x^a = b$ e $\log_x b = a$ são afirmações equivalentes. Na sequência são dados quatro (4) exemplos para expressar formas exponenciais em formas logarítmicas. Além de trinta e quatro (34) exercícios para expressar formas exponenciais na forma logarítmica, expressar formas logarítmicas na forma exponencial e encontrar o valor de **x** em expressões logarítmicas**.**

A característica de um Logaritmo comum é definida como a parte inteira e a parte decimal de um Logaritmo como é dita a mantissa. Nesse ponto abre-se a possibilidade do uso de tabelas, entre elas das potências de 10, o que facilita um pouco a busca e a torna mais rápida. No entanto, frisa-se que a posição padrão da característica é logo após o primeiro dígito.

Na sequência são colocados vinte (20) exercícios para encontrar a característica dos números dados e quinze (15) exercícios para encontrar o número mínimo de dígitos de um número dado. O conteúdo seguinte é bastante direto, contando apenas com um modelo de solução para encontrar o logaritmo de um número de três ou menos dígitos significantes, quatro (4) exemplos adicionais e vinte e quatro (24) exercícios para encontrar Logaritmos de números com três ou menos dígitos significantes.

A parte que diz respeito a encontrar o antilogaritmo de um número o define o antilogaritmo de um Logaritmo dado como o número cujo Logaritmo é encontrado.

Exemplo: $\log 2 = 0,3010$, *então* 2 *é antiLogaritmo de* 0,3010

Finalizando com um modelo de solução, dois (2) exemplos adicionais e vinte e sete exercícios (27) para encontrar o antilogaritmo dos Logaritmos dados.

As operações com Logaritmos são dadas como segue:

- Multiplicação: $\log(a.b) = \log a + \log b$;
- Divisão: $\log(\frac{a}{b}) = \log a - \log b$;
- Logaritmo de uma Potencia: $\log a^n = n \log a$;
- Logaritmo de uma raiz: $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$;

A multiplicação pelo uso do Logaritmo do produto é dada por:

$$\log XY = \log X + \log Y$$

E apresenta uma sequência bem objetiva, trazendo somente a fórmula acima Modelo de solução e vinte e cinco exercícios (25) envolvendo multiplicações pelo uso de Logaritmos.

A divisão pelo uso do Logaritmo do quociente é dada por:

$$\log \frac{X}{Y} = \log X - \log Y$$

Essa sequência é bem objetiva, apresentando somente a fórmula acima, um modelo de solução e dezoito exercícios (18) envolvendo divisões pelo uso de Logaritmos. A sequência que versa sobre subtrair um Logaritmo grande de um Logaritmo pequeno, também muito objetiva, traz somente um modelo de solução e doze (12) exercícios envolvendo Logaritmos e divisões.

A obra coloca que é possível reduzir uma potencia a uma multiplicação pelo uso da seguinte propriedade:

$$\log X^n = n \log X$$

Essa sequência traz somente a fórmula acima, um modelo de solução e vinte e dois (22) exercícios envolvendo redução de potências a uma multiplicação.

A raiz de um número pode ser encontrada pelo uso de

$$\log \sqrt[n]{X} = \frac{1}{n} \log X$$

Essa parte trazendo além da fórmula acima, um modelo de solução e vinte e cinco (25) exercícios envolvendo raízes e Logaritmos.

No item seguinte mostra-se que é possível encontrar o valor aproximado de um Logaritmo, em uma base qualquer, não tabelado tomando o Logaritmo que antecede e o que precede o número que se deseja descobrir o Logaritmo. A seguir é dado um modelo de solução e vinte e quatro (24) exercícios envolvendo interpolações de Logaritmos de quatro dígitos.

Se a mantissa de um dado Logaritmo não aparece na tabela, o antilogaritmo pode ser encontrado corretamente para quatro dígitos significantes por meio de interpolação. Na sequência é dado um modelo de solução e vinte e quatro (24) exercícios envolvendo interpolações e antilogaritmos.

A seguir consideram-se exemplos em que dificuldades muito grandes envolvendo diversas operações são simplificadas utilizando Logaritmos, além de um modelo de solução e trinta e cinco (35) exercícios envolvendo a resolução de expressões com muitas operações por meio de Logaritmos.

Os Logaritmos são utilizados por meio de várias fórmulas, envolvendo desde multiplicação, divisão, radiciação até potenciação. No entanto adições e subtrações não podem ser resolvidas mais facilmente por meio de Logaritmos. Na sequência é dado um exemplo e dezesseis exercícios (16) envolvendo fórmulas para resolução de diversos tipos de problemas.

Aqui a obra apresenta que é possível, e muito interessante, resolver problemas muito difíceis que envolvam equações exponenciais por meio de Logaritmos. A seguir é dado um modelo de solução e vinte e quatro (24) exercícios para resolver equações exponenciais utilizando Logaritmos.

Como na maioria dos cálculos que envolvem juros compostos, também envolvem expoentes, é interessante que se utilize as propriedades de para facilitá-los sempre que necessário. A seguir é dado um modelo de solução e trinta e um (31) exercícios para resolver problemas envolvendo juros compostos por meio das propriedades de Logaritmos.

As funções cosseno e cotangente de ângulos agudos, segundo o livro, são funções decrescentes. A interpolação por meio dessas funções pode ser uma boa alternativa para encontrar valores de Logaritmos de cossenos e de cotangentes.

Exemplo: Encontrar o valor do $\log \cos 46^{\circ} 52'$ conhecidos outros dois valores

Ângulo	log cos
46º 50´	9,8351
46º 52´	?
47º 00´	9,8338

$$\frac{-8}{-10} = \frac{x}{13} \Rightarrow -10x = -104 \Rightarrow x = 10,4 \text{ ou } 10$$

Onde o *x* no exemplo acima é a diferença entre o valor de log cos 46º52’ e log cos 47º, deste modo $log\ cos\ 46^{\circ} 52' \approx 9,8348$. Na sequência é dado um modelo de solução e sessenta e sete (67) exercícios para resolver problemas que envolvem todas as partes deste capítulo.

Considerações sobre o capítulo

A obra nos traz um texto conteudista, sem abordar historicamente, intuitivamente ou de qualquer outra forma. O capítulo em questão traz um total de 795 exercícios, resolvidos ou não, o que mostra que a obra é direta e objetiva em respeito ao conteúdo trabalhado. A obra não coloca a restrição do domínio de **a** e **b**. A interpolação é colocada no texto como uma possibilidade para encontrar o Logaritmo de números não tabelados.

Outro detalhe que chama bastante atenção, de forma positiva, é a divisão bastante detalhada de cada parte do conteúdo, o que facilita a ligação e interpretação entre eles. Além disso, exibe a inserção do programa computacional FORTRAN, que auxilia na compreensão escrevendo números em notação padrão ou científica.

4.6.3 – Livro 14: Advanced Algebra

O livro inicia com Prefácio e Sumário, após dispõe de treze (13) capítulos, a saber: Fundamental laws and operations, Trigonometric Analysis, Complex Numbers, The linear function, The quadratic function, General Theory of equations, Exponential an Logarithmic functions, Permutations, combinations and probability, Variation, sequences, and the binomial Theorem, Introduction to Analytical Geometry an Calculus, Statiscs, Supplementary Topics e General Review.

Encerrando, a obra traz quatro (4) tabelas, a saber: Powers and roots, Mantissas, Values of trigonometrical functions e Logarithms of Trigonometric functions, além do Index. O que nos interessa é o capítulo 7 que leva o nome de “Exponential and logarithmic functions” isto é “Funções exponencial e logarítmica” disposto entre a página 183 e 198.

O capítulo é introduzido por meio das **Funções exponenciais** e relembra a fórmula do enésimo termo da série geométrica $l = ar^{n-1}$. A seguir coloca a definição e um exemplo e o gráfico da função exponencial $y = b^x$, dois (2) exemplos e cinco (5) exercícios para encontrar os pares ordenados das funções e construir seus respectivos gráficos.

A **Função logarítmica** é colocada na obra como a inversa da exponencial e define como:

$$Toda\ função\ f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ dada\ por\ f(x) = \log x\ com\ a \in \mathbb{R}_+^* e\ a \neq 1.$$

Seguindo com três (3) exercícios para escrever na forma exponencial a partir da logarítmica e vice versa e a seguir encontrar seus valores. Também são colocados na sequência alguns teoremas envolvendo logaritmos, como segue:

- Teorema 1 – O logaritmo de 1 em qualquer base é 0;
- Teorema 2 – O logaritmo de base igual é 1;
- Teorema 3 – O logaritmo do produto é a soma dos logaritmos de seus fatores;
- Teorema 4 – O logaritmo do quociente é o logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador;
- Teorema 5 – O logaritmo da potencia de um numero é igual ao logaritmo do número multiplicado pelo expoente da potencia;
- Teorema 6 – O logaritmo da raiz de um número é o logaritmo do número dividido pelo índice da raiz.

A Característica e a mantissa são definidas respectivamente como, a parte que precede o ponto decimal e a parte decimal de um Logaritmo. Além de introduzir o modo de uso direto das tabelas para encontrar o logaritmo de um número dado.

A interpolação é utilizada, segundo a obra, em situações que não é possível encontrar diretamente o logaritmo de um número dado fazendo uso direto da tabela, sendo realizada entre um número menor e um menor. No que segue são colocados vinte e cinco (25) exercícios para encontrar os logaritmos e os antilogaritmos de alguns números dados.

Os cologaritmos são introduzidos diretamente por sua definição, como segue:

O cologaritmo de um número é o logaritmo do inverso de um número.

$$colog\ x = log\frac{1}{x} = log\ 1 - log\ x = 0 - log\ x = -log\ x$$

As equações exponenciais são introduzidas por meio da resolução direta em alguns exemplos, após é colocada a variação de pressão atmosférica fazendo uso de equações exponenciais e logarítmicas. São colocados na sequência dois grupos de exercícios.

O grupo A conta com dezessete (17) exercícios para resolver problemas envolvendo logaritmos utilizando a definição e sem o uso de tabelas, por sua vez o grupo B dispõe de quinze (15) exercícios para calcular logaritmos, com ou sem o uso de tabelas e resolver algumas equações em o uso de Logaritmos. Finalizando com dois (2) exercícios para resolver equações logarítmicas e sete (7) exercícios de múltipla escolha.

O capítulo é finalizado com uma revisão cumulativa que dispõe de dezoito (18) questões envolvendo equações mais difíceis envolvendo as definições e teoremas abordados no decorrer do capítulo.

Considerações sobre o capítulo

As definições e teoremas são dispostos no capítulo de forma básica trazendo apenas a ideia principal de cada conteúdo. As consequências da definição e as propriedades de Logaritmos são colocadas como teoremas a fim de que o estudante demonstre cada um deles de acordo com a definição.

A mantissa e a característica são abordadas com pouca ênfase, porém as tabelas de Logaritmos são dadas como uma ferramenta bastante interessante para resolver problemas relacionados ao conteúdo. Além de trazer setenta e dois (72) exercícios de resolução direta, dispostos no decorrer do capítulo e numa revisão cumulativa, onde são colocados sem contextualização ou uso de ferramentas tecnológicas.

4.6.4 - Livro 15: Intermediate Algebra with trigonometry

O livro é composto por dezoito (18) capítulos, a saber: Números inteiros e polinômios, números racionais e expressões racionais, condições sobre os racionais, números reais, potências e raízes quadradas, mapeamentos, funções e o plano cartesiano, funções constantes e lineares, funções quadráticas, curvas no plano cartesiano, sistemas de condições, funções exponenciais, funções logarítmicas, triângulos e funções trigonométricas, funções trigonométricas e vetores, funções circulares, identidades trigonométricas e equações e números complexos.

Finalizando a obra com tabelas de valores de funções trigonométricas, de Logaritmos comuns e de quadrados e raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas, finalizando com respostas para os exercícios selecionados e o índice remissivo. No entanto, o foco é o capítulo 13 que leva originalmente o nome *Logarithmic Functions*, ou seja, “Funções Logarítmicas”, disposto entre as páginas 423 e 449.

Ao iniciar o capítulo a obra traz as funções inversas em que:

Dada uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se f for injetora então existe uma função inversa a f denotada por f^{-1}.

Na sequência são dados dois (2) exemplos para encontrar, se possível, as inversas de funções afim. Seguindo por uma lista de dezoito (18) exercícios subdivididos em vinte e sete (27) itens para verificar através dos pares ordenados dados se a função geradora possui ou não inversa, encontrar, se possível, as inversas das funções dadas, encontrar por meio de gráficos dados, os gráficos das respectivas funções inversas.

Finalizando a lista com a necessidade de responder e justificar algumas propriedades de funções inversas, decidir e justificar se entre as funções constantes, lineares, quadráticas e exponenciais, todas possuem inversas, algumas possuem inversas ou nenhuma delas possui inversa?

A obra inicia o tratamento das funções logarítmicas utilizando o que foi visto no capítulo anterior sobre função exponencial e relaciona a ela a função inversa verificado no item passado, desse modo estabelecendo um convencimento de que as funções logarítmicas na verdade são as inversas das funções exponenciais e para tanto, fazem uso de tabelas.

Na sequência são dados quatro exemplos em que é colocada a necessidade da função Logarítmica para resolver problemas relacionados à função exponencial, tomando como exemplo $y = 2^x$, assim, temos que sua inversa não pode ser encontrada da forma tradicional, disso surge a necessidade da função logarítmica, logo a inversa é $y = \log_2 x$.

Após isso são dados os exemplos abaixo:

- Exemplo 2: $2^6 = 64,\ pois \log_2 64 = 6;$
- Exemplo 3: $2^{-2} = \frac{1}{4},\ pois \log_2 \frac{1}{4} = -2$;
- Exemplo 4: $2^0 = 1,\ pois \log_2 1 = 0.$

A seguir, a obra traz claramente a definição da função logarítmica, particularmente como a inversa da função exponencial. No entanto, ainda exemplifica-se, mais como um modo de convencimento utilizando outras bases, como segue.

- Exemplo 5: $3^4 = 81,\ pois \log_3 81 = 4;$
- Exemplo 6: $10^{-2} = 0,01,\ pois \log_{10} 0,01 = -2;$
- Exemplo 7: $7^{-1} = \frac{1}{7},\ pois \log_7 \frac{1}{7} = -1.$

Finalmente definem a função logarítmica da seguinte forma:

Em suma, a inversa da função exponencial f dada por:

$$f : f(x) = a^x,\ para\ x \in \mathbb{R}, a > 0\ e\ a \neq 1$$

É a função logarítmica f^{-1}, tal que:

$$f^{-1} : f^{-1}(x) = \log_a x,\ para\ x \in \mathbb{R}^+$$

Na sequência o livro apresenta os exemplos em forma de gráficos de algumas propriedades de função inversa e sugerem alguns passos para que o estudante seja capaz de decidir se uma função dada graficamente possui ou não inversa. Além de uma lista de quarenta e três (43) exercícios para escrever expoentes em termos de Logaritmos, escrever Logaritmos em termo de expoentes, encontrar o valor de y de acordo com os expoentes dados e o valor de x de acordo com os Logaritmos dados.

A lista segue com a necessidade de encontrar a base que valida cada expressão logarítmica, construir o gráfico das funções dadas e suas inversas e, finalizando, para com o uso das propriedades já citadas, listar algumas propriedades da função definida por $y = \log_a x$ quando $0 < a < 1$.

Os Logaritmos e a computação (cálculo) é um item do texto apresentado por meio de uma parte histórica e da elaboração inicial do conceito de Logaritmos por meio de sequências aritméticas e sequências geométricas, explorando quadros.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Quadro 4: Relação entre uma sequência aritmética e uma sequência geométrica.

Fonte: Autoria própria.

Aborda-se que a partir da tabela é possível resolver exercícios do tipo $\frac{1024}{32}$, tomando seus correspondentes 10 e 5 e notando que:

$$\log_2 \frac{1024}{32} = \log_2 1024 - \log_2 32 = 10 - 5 = 5$$

Onde os valores tomados para o cálculo são retirados da sequência geométrica e utilizando para as respostas os respectivos valores da sequência aritmética.

Logaritmo do produto

Se $a,b \in \mathbb{R}^{+}$, então $\log_2(a.b) = \log_2 a + \log_2 b.$

- Exemplo 1: $\log_2(2.5) = \log_2 2 + \log_2 5$;
- Exemplo 2: $\log_2(16.32) = \log_2 16 + \log_2 32 = 4 + 5 = 9$

Logaritmo do quociente

Mais uma vez utiliza-se tabelas como critério de convencimento, logo após isso estabelecem a seguinte definição.

Se a e b são números positivos, então $\log_2\left(\frac{a}{b}\right) = \log_2 a - \log_2 b$

- Exemplo 1: $\log_2\left(\frac{512}{32}\right) = \log_2 512 - \log_2 32;$
- Exemplo 2: $\log_2\left(\frac{6}{2}\right) = \log_2 6 - \log_2 2.$

Na sequência são colocados quinze (15) exercícios para resolver multiplicações e divisões utilizando as propriedades de Logaritmos e encontrar os valores do Logaritmo na base 2 de cada número a partir de uma tabela de dados. Após tem-se o exercício dezesseis abordando o fato de que se $log_2 9 = 3.3$, então:

$$\log_2 9 = \log_2 3 + \log_2 3, \textit{ só que } \log_2 3 = 1,58, \textit{ dai } \log_2 3 + \log_2 3 = 1,58 + 1,58 = 3,16$$

mas temos por tabela que $\log_2 9 = 3,17$. Pergunta-se onde está o erro?

Finalizando com dois (2) exercícios, subdividido em 4 itens para mostrar algumas propriedades de Logaritmos a partir de exemplos e provar a propriedade de divisão de Logaritmos.

Nesse item o livro aborda sobre os Logaritmos de base 10, ou seja, os chamados comuns. Utilizando as propriedades já vistas e o fato de que:

$$se\ n \in \mathbb{Z}, então\ \log(10^n) = n$$

A seguir são propostos seis exemplos envolvendo encontrar o Logaritmo de um número muito grande decompondo em uma soma de Logaritmos e aplicando as propriedades, encontrar o Logaritmo de números entre 0 e 1.

Os exercícios referentes a essa parte do conteúdo estão dispostos em uma lista de trinta (30), subdivididos em quarenta e dois (42) itens para encontrar o Logaritmo de alguns números dado um valor inicial de um Logaritmo particular, aproximar valores de Logaritmos de alguns números dados, encontrar o valor de *r* dado o valor inicial do Logaritmo de um número particular e o valor de *t* dado o valor inicial de um Logaritmo particular., aproximar o valor de *r* em cada caso utilizando as propriedades de Logaritmos e encontrar o valor de x em equações exponenciais utilizando as propriedades de Logaritmos.

Nessa parte a obra cita alguns exemplos de aproximações de alguns produtos e divisões através do uso de Logaritmos e suas propriedades. A seguir, são dados três (3) exemplos envolvendo aproximações de produtos e quocientes utilizando as propriedades de Logaritmos. Sabemos que $\log_2 2 = 1$, mas não temos como saber com exatidão, sem o uso de tábuas de Logaritmos o valor de $\log_2 5$, mas sabemos que $\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$ e também sabemos que $\log_2 4 = 2\ e \log_2 8 = 3$,assim $2 < \log_2 5 < 3$, logo pode-se concluir que:

$$\log_2 10 = \log_2(2.5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + 2,... = 3,...$$

Na sequência são dispostos vinte e seis (26) exercícios subdivididos em vinte e oito (28) itens para aproximar o produto entre alguns números utilizando, a partir do valor do Logaritmo de um número em particular, encontrar o valor de Logaritmos de números dados, aproximar o valor de algumas divisões utilizando comuns e expressar algumas somas e subtrações de Logaritmos a partir do uso das propriedades de Logaritmos.

A seguir a obra frisa que: como $\log(10^n) = n$, então segue que por definição de Logaritmo, para algum número real *x*, $\log(10^x) = x$. A seguir são dados dois (2) exemplos envolvendo o uso da propriedade supracitada na resolução de equações do tipo $\log(10^x) = x$.

Logaritmo de uma potência

A obra traz o fato de que: Se *a* e *k* são números reais com *a > 0,* então $\log(a^k) = k(\log a).$ Na sequência traz cinco (5) exemplos para utilização direta da propriedade supracitada na resolução de equações logarítmicas. Além de uma lista com trinta (30) exercícios subdivididos em trinta e três (33) itens para encontrar o valor de r de Logaritmos de potências, dado o valor inicial de $\log r$ e o valor de t de Logaritmos de potências dado o valor inicial de $\log t$,para com o uso dos Logaritmos comuns, encontrar o valor do Logaritmo decimal das expressões dadas, aproximar o valor de x em algumas equações exponenciais e logarítmicas dadas e, assumindo $\log x = a \; e \log y = b$, expressar cada uma das sentenças em termos de *a* e *b*.

No que segue a obra coloca que, com o auxílio de uma tabela de Logaritmos, é possível resolver cálculos complicados, se eles envolvem multiplicações, divisões, encontrar raízes de números, ou ainda resolver uma potência. A seguir dá três (3) exemplos para resolver algumas equações complicadas utilizando todas as propriedades vistas até o momento.

Os exercícios referentes a essa parte são disposto numa lista de dezoito (18), onde é necessário aproximar o valor de *r* com três dígitos significantes por meio do cálculo utilizando Logaritmos comuns, o valor de x utilizando Logaritmos na resolução de equações exponenciais e aproximar o volume de um cone circular reto a partir do uso de Logaritmos. Calcular o tempo em que um pêndulo demora para percorrer determinada distância, aproximar a área de um triângulo, por meio do uso de Logaritmos dados os comprimentos dos lados e calcular a meia vida de uma substância, a partir do uso de Logaritmos na resolução de uma fórmula exponencial dada.

Segundo a obra, a interpolação é uma maneira conveniente para encontrar aproximações de três ou menos dígitos significantes, a partir do valor imediatamente menor tabelado e do imediatamente maior tabelado.

- Exemplo: Através da Tábua de Logaritmos, calcule por intermédio da interpolação linear o Logaritmo decimal de 128,4.

  Resolução
  Da Tábua de Logaritmos obtemos $\log 128 = 2{,}1072$ e $\log 129 = 2{,}1196$. Logo vemos que $2{,}1072 < \log 128{,}4 < 2{,}1106$.

A seguir são colocados quatorze (14) exercícios, para aproximar: o valor do Logaritmo de alguns números, *t* para quatro dígitos significantes, o volume de uma esfera por meio de , dado seu raio, o valor de *k* em uma fórmula que envolve juros compostos e os valores utilizando Logaritmos em fórmulas que envolvem juros compostos.

A revisão do capítulo e dada através de vinte e dois (22) exercícios subdivididos em trinta e quatro (34) itens que envolvem a definição e as propriedades de Logaritmos, resolução de equações exponenciais e resolução de problemas que utilizam fórmulas geométricas e financeiras. Além disso, a obra finaliza com uma revisão cumulativa, onde se revisa todas as particularidades que envolvem o uso de Logaritmos por meio de vinte e dois (22) exercícios subdivididos em trinta e um (31) itens.

Considerações sobre o capítulo

O capítulo inicia com o conceito de função inversa, importante para introduzir o conceito de Logaritmo, sem mencionar na ideia de que Logaritmos são utilizados apenas para resolver problemas envolvendo equações ou funções exponenciais. A obra dispõe no decorrer do capítulo, 241 exercícios, sendo eles em grande maioria para utilizar diretamente as propriedades e a definição de Logaritmo.

Um fato interessante introduzido é o uso de um quadro relacionando uma sequência aritmética e uma geométrica para relatar uma das primeiras ideias acerca dos Logaritmos, porém sem muito detalhamento. Também se vale de um item sobre os Logaritmos comuns, os de base 10, para em outros itens discorrer sobre alguns cálculos mais elaborados e a interpolação para encontrar valores de alguns Logaritmos de números não tabelados, finalizando com importantes revisões do capítulo e cumulativa.

4.6.5 – Livro 16: Algebra and Trigonometry – Structure and Method – Book 2

O livro está dividido em dezesseis capítulos, a saber: Vocabulário e operações algébricas, Propriedades dos números reais, Sentenças lineares abertas, Funções e polinômios, Fatorando polinômios, Expressões racionais, Radicais e números racionais, Equações e funções quadráticas, Relações quadráticas e sistemas, Funções exponenciais e logarítmicas, Sequências e séries, Permutações, combinações e probabilidade, Matrizes, Trigonometria, Identidades trigonométricas e fórmulas, Funções circulares e suas inversas além de Tabelas, Respostas para autotestes, Glossário e Índice.

O que nos interessa é o capítulo 10 que leva o nome de *Exponential and Logarithmic Functions*, isto é Funções Exponenciais e Logarítmicas, disposto entre as páginas 358 e 383.

A obra inicia abordando sobre a Função Exponencial e coloca seu objetivo como "aprender o significado das potências tendo números reais como expoentes", a seguir aborda um pouco sobre expoentes inteiros e expoentes racionais. A seguir, a partir da função $y = 2^x$ são substituídos alguns valores aleatórios para x em uma tabela e a partir dos pontos encontrados é construído o gráfico da função.

Assim é dada a definição de função exponencial como:

> "Para $a > 0, a \neq 1$, a função definida por $y = a^x$ é chamada função exponencial com base a."

A seguir são dados dois (2) exemplos para resolver equações utilizando o fato de que $a^p = a^q$ *se e somente se* $p = q$. Também é disposta uma lista com vinte e quatro (24) exercícios para serem resolvidos utilizando a definição de função exponencial e o fato utilizado para resolução dos exemplos.

A função logarítmica é introduzida sob o objetivo de "aprender sua definição e a relação existente com a função exponencial". No entanto a obra nos traz um exemplo para introduzir o estudo dos Logaritmos, explorando a função $y = 10^x$ e relacionando a seu crescimento a ideia de Logaritmos. A obra utiliza os seguintes passos:

$$10^{0.9} = 8$$
$$10^{0.5} = 3$$

Dessa forma, obtidos dois pontos da função foi construído o seguinte gráfico:

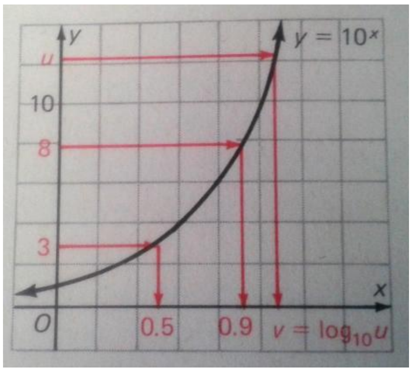

Figura 3: Gráfico da função introdutória a definição de Logaritmo.

Fonte: Algebra and Trigonometry Structure and Method Book 2, 1977, p.364.

Assim, dado qualquer número positivo, pode-se encontrar a potência na qual a base 10 deve ser elevada para dar esse número. Isto é, se $u > 0$, então há um unico número v tal que:

$$u = 10^v$$

Chamamos v o Logaritmo de u na base 10 e escrevemos como

$$\log_{10} u = v$$

Ainda , tomando qualquer número positivo, exceto 1. Então, para qualquer número positivo u há um único número v ,chamado Logaritmo de u na base a, tal que $u = a^v$. Escreve-se como $\log_a u = v$. Então:

$$\log_a u = v \textit{ se e somente se } u = a^v.$$

A partir da definição conclui-se que:

$$\log_a a^v = v \;\; e \quad a^{\log_a u} = u.$$

Na sequência são dispostos quatro (4) exemplos que exigem do estudante que utilize a definição de Logaritmo para simplificar algumas expressões. A obra também trata a função Logaritmica como a inversa da função exponencial por meio de seus respectivos gráficos, além disso coloca as funções citadas como inversas uma da outra.

A obra também coloca seis (6) exercícios para expressar equações exponenciais na forma Logarítmica e outros seis (6) exercícios para expressar equações logarítmicas na forma exponencial, além de três (3) exercícios que deverão ser resolvidos a partir de da definição de Logaritmo, todos eles devendo ser resolvidos e colocados de forma oral.

O livro apresenta também quarenta (40) exercícios para resolução no caderno em que é necessário encontrar valores de Logaritmos, resolver, construir o gráfico e simplificar algumas equações logarítmicas.

Na sequência, são introduzidas as chamadas leis dos Logaritmos, com o objetivo de que o aluno aprenda as propriedades básicas dos mesmos. A obra traz a prova do Logaritmo do produto por meio da lei dos expoentes, como segue:

$$b^m.b^n = b^{m+n}$$
$$\textit{Tomando } \log_a p = m \textit{ e } \log_a q = n.$$
$$\textit{Segue que } p = a^m \textit{ e } q = a^n.$$
$$\textit{Como } p.q = a^m.a^n \textit{ e } \log_a p.q = m+n$$
$$\textit{Então } \log_a p.q = \log_a p + \log_a q$$

A obra traz um teorema dizendo que Tomando qualquer número positivo diferente de 1, tomando *p* e *q*, números positivos, e tomando *n* um número real qualquer . Então:

$$1. \log_a p.q = \log_a p + \log_a q$$
$$2. \log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$$
$$3. \log_a p^n = n \log_a p$$

Também são colocados dois (2) exemplos nos quais são utilizadas as propriedades supracitadas na resolução. Dezoito (18) exercícios para expressar alguns Logaritmos como a soma ou a diferença entre dois outros Logaritmos e resolver expressões encontrando um único Logaritmo de coeficiente 1, todos eles devendo serem resolvidos de forma oral.

São dispostos vinte e oito (28) exercícios para serem resolvidos no caderno, em que é necessário lançar mão da definição e de todas as propriedades de Logaritmos na resolução, além de realizar a prova da propriedade 2 e 3. A seguir é proposto um auto teste composto por oito (8) exercícios e que para resolvê-los é necessário que o aluno utiliza de tudo que já foi visto no capítulo até o momento.

Os Logaritmo comuns (de base 10) são inseridos com o objetivo de que o aluno aprenda a usar a tábua de Logaritmos para encontrar os valores de Logaritmos e cologaritmos. Além disso traz o Logaritmo comum como a soma de um número inteiro, chamado *característica*, e outro não negativo e menor que 1, chamado de mantissa, os quais são encontrados nas tábuas de Logaritmos.

A seguir são apresentados três exemplos de uso dos Logaritmos comuns e do modo que devem ser encontrados na tábua de Logaritmos. Além de trinta (30) exercícios para usar uma tabela dada ao fim do livro para encontrar valores de Logaritmos e de antilogaritmos.

Uma nota histórica sobre a descoberta dos Logaritmos é colocada na sequência como um modo de convencimento e atratividade sobre o uso de Logaritmos para os alunos. O cálculo envolvendo os Logaritmos comuns é dado de forma que sejam resolvidas multiplicações, divisões e potenciações de modo mais simples por meio de três (3) exemplos.

No que segue são colocados doze (12) exercícios para resolver, de forma oral, multiplicações, divisões e potenciações utilizando Logaritmos. Além de dez (10) exercícios, para encontrar o valor de cada expressão dos exercícios orais, encontrar o valor de algumas expressões e resolver problemas geométricos por uso de Logaritmos.

As aplicações de Logaritmos são dispostas na obra com o objetivo de resolver problemas que envolvam equações exponenciais. São dados na sequência três (3) exemplos de como proceder com a resolução. Dezenove (19) exercícios para encontrar o valor de algumas expressões, resolver equações e dispô-las em termos de logaritmos comuns.

A fórmula de mudança de base é proposta como um desafio aos estudantes de modo que a provém por meio de tudo que já viram sobre o conteúdo de Logaritmos. São colocados também nove (9) problemas envolvendo contextualizações em forma de júros compostos, substancias radiotivas e outros problemas envolvendo matemática financeira.

No segundo auto teste do capítulo são colocados oito (8) problemas, envolvendo o uso da tabua de Logaritmo, resolução de operações por meio de Logaritmos e a resolução de um exercício envolvendo crescimento de bactérias. Finalizando essa parte com um resumo do que foi visto no capítulo.

Um teste sobre todas as definições, leis e propriedades vistas no capítulo é inserido na forma de dez (10) exercícios. No entanto o capítulo é encerrado com o que é chamado na obra por *extras para especialistas* que detém dois exemplos de aplicações de Logaritmos relacionadas a funções inversas, os dois em conteúdos distintos.

Considerações sobre o capitulo

O capítulo apresenta uma grande quantidade de exemplos e exercícios, dezesseis (16) e duzentos e trinta e um (231), respectivamente, selecionados e divididos em questões de resolução direta a partir da definição e das propriedades de Logaritmo e problemas contextualizados a matemática financeira e a materiais radiotivos. Finalizando com problemas mais elaborados disposto no que a obra intitula de extras para especialistas, onde são colocados exemplos com aplicações de Logaritmos.

4.6.6 - Livro 17: HBJ Algebra 2 with Trigonometry

O livro é introduzido com um comentário a respeito dos autores e conselheiros de edição e logo após é introduzido à lista de conteúdos. A primeira unidade, chamada “Relações lineares e aplicações”, compreende quatro capítulos, a saber: “números reais”, “equações e inequações”, “gráficos e sistemas de sentenças”. A unidade dois recebe o título de “relações polinomiais e aplicações” e compreende os seguintes capítulos: “relações e funções”, “polinômios” e “expressões racionais”.

A unidade três, chamada “relações quadráticas e aplicações” compreende três capítulos, a saber: “funções quadráticas”, “equações quadráticas” e “cônicas”. A unidade quatro recebe o título de “outras relações e aplicações” e é dividida nos capítulos “funções exponenciais e logarítmicas” e “sequências e séries”. Por fim a unidade cinco, intitulada “tópicos avançados e aplicações”, compreende quatro capítulos, a saber: “sistemas de sentenças: três variáveis”,” probabilidades”,” funções trigonométricas” e “ mais tópicos em trigonometria”.

A obra é finalizada por uma “tabela de valores de funções trigonométricas”, “tabela de Logaritmos comuns”, “tabela de quadrados, cubos, raízes quadradas e raízes cúbicas”, “glossário”, “índice remissivo” e “respostas para exercícios selecionados”.

O que nos interessa é o capítulo 11 que leva o nome de *Exponencial and Logarithmic Functions,* isto é, Funções exponenciais e logarítmicas.

Inicialmente aborda sobre expoentes negativos, dando sua definição e dois exemplos, seguindo com dez (10) exercícios para sala de aula, sessenta (60) exercícios para escrever uma expressão equivalente com expoentes positivos, dez (10) exercícios para resolver as expressões dados os valores de a=2 e b=3 e dez (10) exercícios para resolver as expressões dados os valores de a=-1 e b=-2.

Na sequência é necessário que o aluno esboce o gráfico de $y = 2^x$ para alguns valores dados e o gráfico de $y = (-2)^x$ para alguns valores dados, comparando com o gráfico de $y = 2^x$. Finalizando com um jogo para completar a sequência de valores dada e uma revisão para a seção anterior onde é pedido que se escrevesse alguns números em termos de potências de 10, dados dois (2) exemplos e dez (10) exercícios.

A notação científica é introduzida no livro por meio da definição, o procedimento a ser realizado e três (3) exemplos. A seguir são colocados quatorze (14) exercícios para sala de aula, vinte (20) exercícios para escrever números dados em notação científica, doze (12) exercícios para escrever números dados na forma decimal, treze (13) exercícios para usar números em notação científica e escrevê-los na forma decimal, dez (10) exercícios para escrever os números em notação científica e sete (7) exercícios para escrever os números na forma decimal.

A simplificação de expressões com expoentes é elaborada por meio de três (3) exemplos, onze (11) exercícios para sala de aula, trinta e cinco (35) exercícios para simplificar com denominadores diferentes de zero, oito (8) exercícios para escrever os que seguem de modo a evitar o uso de frações e sete (7) exercícios para simplificar as expressões dadas. Finalizando com uma revisão para a seção anterior feita por meio de dez (10) exercícios para avaliar as expressões dadas.

Os expoentes racionais são trabalhados a partir da definição, dois (2) exemplos para avaliar as expressões dadas e um teorema. A seguir é dado mais um exemplo para avaliar a expressão dada, dez (10) exercícios para sala de aula para avaliar as expressões dadas, trinta (30) exercícios para avaliar as expressões dadas e quinze (15) exercícios para escrever em forma de raízes as expressões dadas.

São dados ainda, quinze (15) exercícios para escrever em forma de expoentes fracionários as expressões dadas, onze (11) exercícios para completar uma tabela com Forma radical, Forma exponencial, valor numérico, equação radical e equação exponencial, doze (12) exercícios para avaliar as expressões quando a=8, b=1 e c=4, cinco exercícios para escrever as expressões que seguem usando expoentes racionais e negativos, deixando todos os denominadores iguais a um. Finalizando com uma revisão para a seção anterior por meio de dezesseis (16) exercícios para simplificar expressões e multiplicar e dividir raízes.

Radicais e expoentes são introduzidos através de cinco (5) teoremas relacionando os dois temas e colocando propriedades. A seguir são dados quatro (4) exemplos envolvendo simplificações e os teoremas dados, além de sessenta e quatro nove (64) exercícios para sala de aula para simplificar e resolver expressões, resolver e simplificar expressões em sua forma radical, resolver e conferir as expressões, simplificar radicais em sua forma exponencial, escrever expoentes de tal forma que $a^{0,5} = a^{\frac{1}{2}}$,resolver e conferir as expressões, resolver de acordo com a variável dada, e provar algumas propriedades. Finalizando com uma revisão sobre as sessões anteriores.

As funções exponenciais e equações são introduzidas a partir da definição e um exemplo. A seguir são dados nove (9) exercícios para sala de aula, sobre completar tabelas com valores e resolver e conferir expressões, cinco (5) exercícios para usar as tabelas que foram preenchidas nos exercícios de sala de aula para construir os gráficos das expressões dadas.

Seguindo com onze (11) exercícios para utilizar os gráficos encontrados nos exercícios de 1 a 5 e responder o que é perguntado. Vinte e seis (26) exercícios para resolver e conferir as expressões dadas, construir através de uma tabela de valores dada o gráfico de $y = e^x$ e utilizar o gráfico encontrado no exercício 37 e aproximar o valor das expressões dadas. O exercício 43 pede que o aluno prove graficamente o seguinte:

$$y = a^{-x} \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

Finalizando com Quatro (4) exercícios para resolver e conferir as expressões e uma revisão para a seção anterior com oito (8) exercícios.

A função logarítmica é apresentada na obra como a inversa da função exponencial, e é dada através da definição e dois exemplos. Seguindo com dezesseis (16) exercícios para sala de aula para expressar nas formas logarítmica e exponencial e setenta e quatro exercícios sobre o domínio da função logarítmica, expressar expoentes na forma logarítmica e Logaritmos na forma exponencial.

Avaliar as expressões dadas, resolver as expressões de acordo com a variável dada e construir o gráfico de funções logarítmicas em alguns pontos dados em uma tabela. Utilizar os gráficos construídos nos exercícios passados e responder a algumas questões, completar as lacunas com potências de 10 que estejam imediatamente abaixo ou acima de um número dado e aplicações da calculadora. Finalizando com uma revisão da seção anterior.

As propriedades dos Logaritmos são apresentadas como teoremas, do seguinte modo:

Teorema do produto:

$$\log_a(M.N) = \log_a M + \log_a N$$

Teorema do quociente:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Teorema da potência:

$$\log_a N^p = p\log_a N$$

Na sequência é feita a prova do teorema do produto e dados quatro exemplos utilizando as propriedades supracitadas e alguns valores tabelados de Logaritmos. Além disso, são colocados doze (12) exercícios para sala de aula que utilizam as propriedades supracitadas, e setenta e oito (78) exercícios para expressar as resoluções das expressões sem utilizar os teoremas do produto e da divisão.

Avaliar as sentenças como verdadeiro (V) ou falso (F) e encontrar os valores dos Logaritmos utilizando uma tabela dada nas páginas finais do livro. Dados os valores de $log\ 2$, $log\ 3$ e $log\ 5$ resolver algumas expressões, provar o teorema do quociente e o teorema da potência. Finalizando com alguns exercícios para resolver as equações e abordando a estatística e amostragem populacional.

A computação utilizando Logaritmos é introduzida por meio de seis exemplos englobando uma série de cálculos que utilizam: os teoremas trabalhados na seção anterior e uso da tabela. Seguindo com vinte e seis (26) exercícios para sala de aula para mostrar a característica de um número dado, encontrar o Logaritmo e o antilogaritmo, mantissa positiva e colocar as expressões em suas formas padrão.

Além de cinquenta e três (53) exercícios para resolver algumas expressões dado valor de $log\ 3,63 = 0,5587$, além de expressões dado o valor $log\ 0,7230 = 9,8591 - 10.$ Encontrar o Logaritmo de números dados e quando a característica for negativa colocar em sua forma padrão, o antilogaritmo de alguns números, utilizar Logaritmos e calcular os valores e utilizar todas as propriedades possíveis na resolução. Finalizando com aplicações da calculadora.

A interpolação, segundo a obra, pode ser associada de certa forma com semelhança de triângulos, pois se baseia em suas propriedades e também é introduzida utilizando o plano cartesiano fazendo uso do gráfico de $y = \log x$. Para tal, são dados três (3) exemplos nos quais é necessário o uso da interpolação e quarenta e sete (47) exercícios para encontrar o Logaritmo dos números utilizando interpolação, encontrar o antilogaritmo de cada número dado, calcular usando Logaritmos, encontrar o sinal das expressões dadas e se possível encontrar seu Logaritmo e resolver equações utilizando as propriedades de Logaritmos;

O cálculo por Logaritmos é introduzido por meio de cinquenta e cinco (55) exercícios para calcular por Logaritmos dando as respostas para o décimo mais próximo. Quando isso não for possível, de a eles para o centésimo mais próximo e usar mudança de base no cálculo de expressões, provando e utilizando o seguinte:

Se N, a e b são números reais positivos, $a \neq 1 \; e \; b \neq 1, \; então \; \log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

Se N, a e b são números reais positivos, então $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Os juros compostos são introduzidos por meio da fórmula $A = p(1 + \frac{r}{n})^{kn}$ e dois exemplos utilizando a fórmula e as propriedades de Logaritmos para facilitar a resolução. A seguir são colocados dezessete (17) exercícios para resolver os problemas dados utilizando sempre que possível os conhecimentos prévios de Logaritmos. As aplicações computacionais utilizando Logaritmos são dadas por meio do software BASIC para expoentes inteiros, realizando uma análise e dispondo de nove (9) exercícios fazendo uso de juros compostos, Logaritmos e computação.

O capítulo é finalizado com uma revisão composta por trinta e quatro (34) exercícios referentes a todas as seções e o sumário do capítulo. A seguir são revisados termos importantes, ideias importantes, o objetivo do capítulo, os objetivos específicos de cada seção com exemplos e testes do capítulo. Exercícios envolvendo, simplificação e resolução de expressões, números em notação científica, equações e cálculo utilizando as propriedades trabalhadas no decorrer do capítulo, preparação para exames vestibulares com exemplo e seis questões de múltipla escolha com justificativa.

Considerações sobre o capítulo

O capítulo é interessante, pois apresenta informações relativas ao uso de Logaritmos, como por exemplo, o uso na resolução de problemas envolvendo juros compostos e do programa computacional BASIC para expoentes inteiros. Alguns dos itens mais importantes são os que abordam sobre notação científica e uma seção exclusiva com uma “preparação para testes vestibulares” muito importantes para fixar os conteúdos.

O uso de gráficos para encontrar soluções de equações e exercícios resolvidos para uso em sala de aula é importante pois revisam a definição e as propriedades de Logaritmos. O capítulo é composto por setecentos e vinte e um (721) exercícios, além de muitos exemplos, que exploram o uso direto da definição e a aplicação das propriedades. Em suma é organizado e desenvolvido, levando em conta o ensino clássico e o inovador.

4.6.7 – Livro 18: Algebra 2 With Trigonometry

O livro é composto por Sumário e dezoito capítulos, Real Numbers (Números reais), Linear equations an inequalities (Equações lineares e inequações), Functions an Graphs (Funções e gráficos), Systems of linear equations an inequalities (Sistemas de equações lineares e inequações), Polynomials (Polinômios), Rational Expressions (Expressões Racionais) e Radicals an irrationals (Radicais e irracionais).

Quadratic Functions and Complex Numbers (Funções quadráticas e números complexos), Conic Sections (Secções cônicas), Polynomial Functions (Funções polinomiais), Exponential and logarithmic functions (Funções exponenciais e logarítmicas), Sequences and series (Sequências e séries), Probability (Probabilidade), Statistics (Estatística), Matrices (Matrizes), Circular Functions (Funções circulares), Applications of Trigonometric Functions (Aplicações de funções trigonométricas), Trigonometric identities and equations (Identidades trigonométricas e equações).

Finalizando com: Tables (Tabelas), Glossary (Glossário), Selected Answers (Respostas para alguns exercícios) e Index (Índice). No entanto o que nos interessa é o capítulo 11 que leva o nome de “Exponential and Logarithmic Functions” isto é Funções exponenciais e logarítmicas, disposto entre a página 441 e 484.

A obra inicia a lição 11-1, abordando sobre Funções exponenciais, por meio da definição, da propriedade da igualdade de funções exponenciais, dois exemplos com soluções envolvendo resolução de equações e interpretação de gráfico e dois exercícios para sala de aula envolvendo interpretação de três gráficos e resolução de uma equação exponencial.

Na sequência são colocados cinquenta e nove (59) exercícios subdivididos em setenta e dois (72) itens, para completar as tabelas com valores dados a partir de funções exponenciais, construir o gráfico de funções dadas em um domínio restrito com a possibilidade do uso da calculadora gráfica, usar gráficos para estimar a solução de cada equação em um decimal mais próximo.

Resolver equações envolvendo potências, construir o gráfico das funções com o auxílio da calculadora gráfica ou algum programa computacional gráfico, comparar funções dadas com um gráfico dado e indicar se o gráfico da função dada é congruente com o gráfico de $y = 7^x$. Além de oito (8) exercícios de revisão envolvendo simplificação de expressões e fatoração referentes ao capítulo sobre Polinômios, fechando com uma nota Histórica sobre expoentes fracionários.

As Funções logarítmicas (lição 11-2) são introduzidas por meio de uma revisão sobre funções inversas e a definição abaixo:

$$\textit{Para todos os números reais positivos } x \textit{ e } b,\ b \neq 1$$
$$\textit{existe um número real } y \textit{ tal que } y = log_b x \textit{ se e somente se } x = b^y.$$

A seguir são dados dois (2) exemplos com solução para escrever expressões exponenciais em sua forma logarítmica e expressões logarítmicas em sua forma exponencial.

As propriedades das funções logarítmicas são dadas da seguinte maneira:

I - Para todo número real $x,\ y \text{ e } b,\ b \neq 1,\ \textit{se } log_b x = log_b y,\ \textit{então } x = y$;

II - Para todo número real x e todo número real positivo b, $b \neq 1,\ log_b b^x = 1$;

III - Para todo número real positivo x e b, $b \neq 1,\ b^{log_b x} = x$;

IV – Para todo número rela positivo b, $b \neq 1,\ log_b b = 1$;

V - Para todo número rela positivo b, $b \neq 1,\ log_b 1 = 0$;

São dados na sequência três exemplos com solução para resolver equações logarítmicas dadas. Oito (8) exercícios para sala de aula para escrever expressões com expoentes na forma logarítmica e expressões logarítmicas na forma exponencial. Quarenta e seis (46) exercícios subdivididos em cinquenta e sete (57) para escrever expressões com expoentes na forma logarítmica, escrever expressões logarítmicas na forma exponencial, resolver equações logarítmicas dadas e construir o gráfico de funções exponenciais e da inversa das mesmas.

Traçar o gráfico de funções dadas com o auxílio da calculadora gráfica ou um programa computacional gráfico, resolver equações dadas e usar notação logarítmica para expressar as soluções, resolver equações utilizando $\log_2 10 = 3.322$ e $\log 2 = 0.301$ e provar que $log_b b^x = x,\ b > 1\ e\ b^{log_b x} = x,\ b > 1$. Finalizando com sete (7) exercícios de revisão sobre as lições que envolvem expressões racionais e um autoteste com oito (8) exercícios sobre as lições anteriores completando tabelas de valores, traçando gráficos, escrevendo na forma logarítmica e resolvendo equações logarítmicas.

A lição 11-3 traz a simplificação de expressões logarítmicas é realizada por meio das propriedades de expoentes e logaritmos. Em que para todos os valores admissíveis de b, m e m.

Para os expoentes valem as seguintes propriedades:

$$b^m + b^n = b^{m+n}$$

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$$

$$\left(b^m\right)^n = b^{mn}$$

Para os logaritmos valem:

$$log_b m \cdot n = log_b m + log_b n,\ m, n > 0;$$

$$log_b \frac{m}{n} = log_b m - log_b n,\ m, n > 0;$$

$$log_b \left(m^n\right) = n\left(log_b m\right),\ m > 0;$$

Na sequência são dados três (3) exemplos com solução para resolver expressões logarítmicas dadas, expandir na forma logarítmica e escrever em um único Logaritmo. Além disso, oito exercícios para sala de aula envolvendo resolução de expressões logarítmicas, expansão na forma logarítmica e escrita em um único logaritmo e sessenta e três (63) exercícios para utilizar valores previamente dados de logaritmos na base sete e resolver expressões logarítmicas dadas, escrever na forma expandida, simplificando quando possível e escrever expressões dadas em um único logaritmo.

Dez (10) exercícios para indicar se as expressões dadas são verdadeiras ou falsas, com justificativa, doze (12) exercícios para resolver equações dadas, e três (3) exercícios para provar algumas propriedades que envolvem operações com Logaritmos. Finalizando com nove exercícios de revisão sobre as lições do capítulo Radicais e irracionais e uma nota histórica sobre Logaritmos.

A obra inicia a lição 11-4 abordando sobre os Logaritmos comuns por meio de cinco (5) exemplos com soluções envolvendo logaritmos e tabelas. Além de cinquenta e seis (56) exercícios subdivididos em setenta e cinco (75) itens para sala de aula. Os exercícios envolvem o uso de calculadora ou de algumas tabelas dadas, usar valores pré-definidos para resolver expressões logarítmicas e resolução de equações logarítmicas utilizando a tabela de valores e o uso da calculadora ou de uma tabela dada, encontrar uma aproximação dos valores dados em forma de logaritmos.

Além de exercícios para mostrar que a soma de dois Logaritmos dados é igual a um terceiro, mostrar que o logaritmo do item *a* é igual ao do item *b* para quatro casas decimais, resolver equações logarítmicas dadas, utilizar as variáveis $a = log\ x$ e $b = log\ y$, no cálculo de expressões e resolver equações logarítmicas, dados os valores de alguns logaritmos.

A seguir são colocados dois exemplos de aplicações de Logaritmos, um relacionado à escala Richter e outro sobre intensidade sonora. Também são colocados doze (12) exercícios de revisão sobre algumas lições do capítulo sobre Funções quadráticas e números complexos. Finalizando com uma extensão sobre interpolação linear juntamente com quatro (4) exercícios para encontrar valores aproximados de expressões dadas através de interpolação e uso de uma tabela dada.

A lição 11-5 versa sobre Logaritmos naturais, iniciando com um exemplo envolvendo encontrar os inteiros menores e maiores que os valores dos logaritmos naturais dados. Em seguida é colocado o chamado *teorema de mudança de base* onde:

Para todos os números reais positivos *a* e *b* (exceto 1) e qualquer real positivo x:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Na sequência a obra apresenta dois (2) exemplos utilizando a base 10 para calcular logaritmos dados. Além de quatro (4) exercícios para sala de aula onde é necessário mostrar como resolver equações calculando os logaritmos naturais. Seguido de quarenta e oito (48) exercícios subdivididos em sessenta e dois (62) itens, para, com uso, da calculadora ou de uma tabela dada encontrar os logaritmos naturais de cada número dado e mostrar que a soma de dois logaritmos dados é igual à de um terceiro dado.

O livro propõe a resolução de equações logarítmicas dadas, encontrar logaritmos utilizando logaritmos naturais dados, escrever uma equação logarítmica usando logaritmos naturais, dadas as equações seguintes, encontrar a área da região hachurada. Finalizando com seis exercícios de revisão envolvendo algumas lições do capítulo sobre secções cônicas.

Também é colocado um auto teste com dezessete exercícios sobre as lições 11-3, 11-4 e 11-5 para avaliar Logaritmos, escrever na forma logarítmica, escrever na forma de um único Logaritmo, utilizar a calculadora ou uma tabela dada para encontrar valores de logaritmos dados e utilizar a mesma tabela para encontrar os logaritmos naturais da cada número dado.

A lição 11-6 aborda as equações exponenciais, iniciando uma aplicação relacionada a juros compostos e quatro exemplos sobre resolução de equações exponenciais. Na sequência são dispostos dois (2) exercícios de sala de aula para resolver equações exponenciais dadas. Além de quarenta e quatro (44) exercícios para resolver as equações usando duas casas decimais e utilizar juros compostos em problemas de investimentos financeiros.

Seguindo com exercícios que visam encontrar o valor decimal mais próximo do ponto que intersecta o gráfico, resolver equações que envolvem logaritmos naturais, resolver as equações dadas sem utilizar tabelas logarítmicas. Finalizando com oito exercícios de revisão envolvendo algumas lições do capítulo 9 sobre secções cônicas.

A lição 11-7 envolve equações logarítmicas e é iniciada com uma aplicação envolvendo metabolismo de base e o cálculo da quantidade de calorias que são queimadas por dia, seguidos por quatro (4) exemplos com equações logarítmicas e quatro (4) exercícios de sala de aula para resolver equações logarítmicas. No que segue são colocados vinte e nove (29) exercícios para resolver equações logarítmicas, encontrar os valores de c nas equações logarítmicas e expressar funções logarítmicas em termos de alguns valores dados.

Finalizando essa lição são colocadas duas aplicações sobre custo total dividida em doze (12) exercícios para que dada uma fórmula sejam encontrados o custo da produção de uma determinada quantidade de produtos e velocidade do sinal de telégrafo divididas dividida em quatro (4) exercícios para que sejam descritos valores para a velocidade em termos de algumas incógnitas.

Também são dispostos quatro (4) exercícios de revisão envolvendo algumas lições sobre o capítulo de Funções polinomiais. Além de oito (8) exercícios para resolver equações envolvendo as lições 11-6 e 11-7 sobre resolver equações que envolvam logaritmos e logaritmos naturais, além de custo de produtos e uma extensão sobre o uso de Logaritmos.

A lição 11-8 versa sobre resolução de problemas, crescimento e decrescimento, para tal são colocados inicialmente dois exemplos envolvendo investimentos financeiros e materiais radiativos. Além de três exercícios de sala de aula para encontrar o valor de k na fórmula $R = Se^{kt}$ para alguns valores seguintes de R, S e t.

São colocados a seguir dezoito (18) exercícios, onde, dada uma fórmula $A = Pe^{rt}$ para um investimento de 1000 nas seguintes taxas e períodos de tempo, encontrar alguns valores, dado o investimento inicial para determinadas taxas e períodos de tempo, encontrar o tempo em que um investimento irá dobrar considerando-se algumas taxas dadas e, para que, dada a fórmula $N = N_0e^{-kt}$ para encontrar o valor de k em algumas substanciais.

Algumas aplicações são trabalhadas por meio de vinte e seis (6) exercícios subdivididos em onze (11) itens para calcular a depreciação através de uma fórmula dada para alguns valores e para que, através de fórmulas dadas seja calculada a temperatura, peso de materiais e massa corporal. Além de outros três (6) exercícios subdivididos em oito (8) itens sobre crescimento e decrescimento populacional e datação por carbono radioativo.

Em seguida são dispostos três (3) exercícios de revisão envolvendo algumas lições do capítulo Funções Polinomiais e um resumo do capítulo. Além de trinta (30) exercícios sobre todas as lições do capítulo em questão juntamente a um autoteste sobre o capítulo dividido em dezenove (19) exercícios sobre todas as lições trabalhadas. Finalizando com treze (13) exercícios para os testes de admissão de faculdades, que englobam encontrar pontos dada uma função, resolver equações e interpretar gráficos.

Considerações sobre o capítulo

O capítulo é bem dividido, explorando as definições, propriedades e teoremas, com suas devidas provas por vezes na sequência dos conteúdos por outras colocadas em forma de exercícios. A calculadora científica e gráfica e programas computacionais são utilizados como possibilidade na resolução de exercícios, que subdividem-se entre os clássicos (aplicação direta ou quase direta da teoria) e os interpretativos (contextualizados) como crescimento e decrescimento populacional calculo da temperatura, peso de materiais e massa corporal, datação por carbono radioativo, velocidade do sinal de telégrafo, custo total e Intensidade sonora. O capítulo é extenso e engloba um total de vinte e cinco (25) exemplos, quinhentos e vinte (520) exercícios subdivididos em quinhentos e sessenta e três (563) itens, além de quarenta e quatro (44) autotestes (exercícios mais elaborados) e treze (13) exercícios preparatórios para exames vestibulares. Além de notas históricas sobre Logaritmos e Funções Logarítmicas interessantes para utilizar em sala de aula.

4.6.8 – Livro 19: Advanced Mathematics

O livro está dividido inicialmente em *Features and Benefits* (Características e benefícios), *Presentation* (Apresentação), *Introduction* (Introdução) e *Contents* (Conteúdos). Além de cinco seções, a saber: *Functions, Graphs and applications* (Funções Gráficos e aplicações), que compõe seis capítulos, *Linear and quadratic functions* (Funções lineares e quadráticas), *Polynomial Functions* (Funções polinomiais), *Inequalities* (Desigualdades), *Functions* (Funções), *Exponents and logarithms* (Expoentes e logaritmos) e *Analytic Geometry* (Geometria Analítica).

A segunda seção leva o nome de *Trigonometry* (Trigonometria) e é composta por cinco capítulos: *Trigonometric Functions* (Funções trigonométricas), *Trigonometric Equations an applications* (Funções trigonométricas e aplicações), *Triangle Trigonometry* (Trigonometria no triângulo), *Trigonometric Addition Formulas* (Fórmulas trigonométricas adicionais) e *Polar Coordinates and Complex Numbers* (Coordenadas polares e números complexos).

A terceira seção, intitulada *Discrete Mathematics and data Analysis* (Matemática discreta e análise de dados), é composta por sete capítulos, *Vectors and determinants* (Vetores e determinantes), *Sequences an Series* (Sequências e séries), *Matrices* (Matrizes), *Combinatorics* – (Combinatórias), *Probability* (Probabilidade), *Statistics* (Estatística) e *Curve Fitting and Models* (Curvas e modelos).

A quarta seção recebe o título de *Limits and introduction to calculus* (Limites e introdução ao cálculo) e contém dois capítulos, *Limits, series, and Iterated Functions* (Limites, séries e Funções Interativas) e *An Introduction to Calculus* (Uma introdução ao Cálculo).A seção extra intitulada *Applications* (Aplicações) está dividida em aplicações sobre, *Social Science* (Ciências Sociais), *Business* (Negócios), *Daily Life* (Cotidiano), *Earth Science* (Ciências da terra), *Life Science* (Ciências Naturais) e *Physical Science* (Ciências Físicas).

A seção extra, *Solved Problems*, (Problemas Resolvidos), contém: *Sections* (Sessões), *Activies* (Atividades), *Investigations* (Investigações), *Projects* (Projetos) e *Current Technology* (Tecnologia atual). Além de duas outras seções extras, intituladas *Reasoning* (Raciocínio) e *Technology* (Tecnologia). No entanto o que nos interessa é o capítulo 5 da sessão Funções, Gráficos e aplicações que leva o nome de *Exponents and Logarithms*, isto é, Expoentes e Logaritmos disposto entre as páginas 168 e 185.

O capítulo é iniciado abordando sobre Expoentes, especificamente sobre crescimento e decrescimento com expoentes Inteiros, colocando o objetivo e um exemplo. Algumas **c**uriosidades sobre o uso de matemática na resolução de problemas e mais um exemplo. A seguir são dadas segundo a obra as leis dos expoentes, como segue:

1) $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$

2) $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

3) $Se\ b \neq 0,\ 1\ ou\ -1,\ então\ b^x = b^y se\ e\ somente\ se\ x = y;$;

4) $(ax)^x = a^x \cdot b^x$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

6) $Se\ x \neq 0,\ a > 0,\ and\ b > 0,\ então\ a^x = b^x se\ e\ somente\ se\ a = b$

7) $Potência\ de\ uma\ potência \rightarrow (b^x)^y = b^{xy}$

Na sequência são dados três (3) exemplos utilizando as leis dos expoentes, dezesseis (16) exercícios para a sala de aula, utilizando completamento de tabelas e simplificações de expressões e quarenta e nove (49) exercícios subdivididos em setenta e dois (72) itens para simplificar expressões, copiar e completar uma tabela dada com o custo de produtos na forma exponencial, copiar e completar cada tabela com o valor de cada item na forma exponencial, simplificar cada expressão, que envolvem matemática financeira, expoentes e economia do consumidor.

Outros exercícios para simplificar expressões fazendo uso de potências de mesma base, escrever as expressões dadas em potências de b, simplificar as expressões multiplicando o denominador e o numerador por 2^3 e resolver equações usando as propriedades dos expoentes.

Em seguida é dado o conteúdo sobre crescimento e decrescimento com expoentes racionais, inicialmente por meio do objetivo e cinco (5) exemplos que utilizam simplificação de expressões e uso de matemática financeira e expoentes. Ainda na mesma seção são colocados dezoito (18) exercícios para sala de aula que utilizam simplificação de frações usando as propriedades dos expoentes, resolução de equações e problemas contextualizados.

Ainda sobre os exercícios, são propostas cinquenta e oito (58) questões, subdivididas em oitenta e sete (87) itens para escrever cada expressão usando radicais e expoentes não negativos, escrever cada expressão usando expoentes racionais positivos, simplificar expressões com expoentes diversos, utilizando matemática financeira e expoentes, simplificar expressões, resolver equações. Além alguns itens que abordam sobre, finanças, investigação, educação e música.

No que toca o conteúdo de Funções Exponenciais a obra traz inicialmente o objetivo e uma atividade contextualizada e dois (2) exemplos com soluções utilizando os conceitos de expoentes e a famosa regra do 72, utilizada em problemas que envolvem matemática financeira e um outro exemplo que utiliza meia-vida de um isótopo radioativo.

Também é disposta uma lista com dez (10) exercícios para sala de aula subdivididos em quatorze (14) itens utilizando Finanças, Biologia e tabelas, além de clássicos envolvendo propriedades e estudo de gráficos. Ainda são colocados outros vinte e nove (29) exercícios para utilizar a calculadora na resolução de cada expressão, encontrar a função exponencial a partir de valores dados em alguns pontos e estudo de tabelas e meia vida de isótopos.

Continuando os exercícios com, o uso de uma tabela e crescimento populacional, matemática financeira, completar a tabela com os valores de $f\left(x\right)=2^x$ para $x=-2\ ,-1,0,1\,e\,2$, desenhar o gráfico dessa função, dar a inversa da função, e encontrar o domínio de f e de f^{-1}, construir o gráfico de funções e suas inversas, análise de gráficos de crescimento populacional e observação sobre investigar funções e seus respectivos gráficos e descrever seus comportamentos.

Na seção que versa sobre o número e e a função e^x, o livro nos traz inicialmente o objetivo e uma atividade e um item que trata de juros compostos e o número e. A seguir são dados nove (9) exercícios para sala de aula envolvendo calculadora, finanças juros compostos. Além de vinte e três (23) exercícios subdivididos em trinta (30) itens.

Os exercícios trabalham os conteúdos que envolvem utilizar fórmulas de juros compostos e estimar e^x em alguns valores de x, juros compostos, crescimento populacional e fórmulas de juros compostos, a calculadora ao calcular valores de e^x e traçar o gráfico de cada um dos valores e calcular alguns valores de e^x e traçar seus gráficos além de provar que $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+ \ ... \ +\frac{1}{n!}+ ...$, finalizando com uma questão para utilizar o computador envolvendo um valor fixo e várias taxas de juros.

Os Logaritmos são introduzidos por meio das funções Logarítmicas e seu objetivo**,** a seguir são dados três (3) exemplos com solução envolvendo cálculo de expressões com expoentes e logaritmos e nove exercícios para sala de aula subdivididos em 34 subitens envolvendo propriedades de logaritmos, simplificação e cálculo de expressões.

Os exercícios são dispostos em uma lista de cinquenta e dois (52) subdivididos em cento e vinte (120) itens para escrever cada equação em suas formas exponenciais, encontrar cada logaritmo sem o uso de calculadoras, sobre “Física” para utilizar aceleração e a velocidade do som, traçar o gráfico de algumas funções e encontrar as inversas e o domínio de cada uma, calcular funções em pontos dados e encontrar seus domínios e os zeros das funções.

Ainda sobre os exercícios, são utilizados conteúdos já trabalhados para resolver as equações em x sem o uso de calculadora e se possível expressar em termos de e, resolver as equações em x usando a calculadora e colocar as respostas com três casas após a vírgula, para utilizar valores dados em uma tabela e comparar o PH de alguns líquidos, utilizar logaritmos e calcular a distancia entre os astros, comparar valores de logaritmos dados e verificar se expressões dadas estão corretas e estimar o número de primos entre faixas dadas e provar que log 2 é irracional.

A obra traz na sequência as leis de Logaritmos, iniciando com o objetivo e colocado que:

Se M e N são números reais positivos e b é um número positivo diferente de um então:

$Log_b M \cdot N = Log_b M + Log_b N$.

$Log_b \frac{M}{N} = Log_b M - Log_b N$.

$log_b M = log_b N$, *se e somente se* $M = N$.

$log_b M^k = k \ log_b M$, para qualquer número real k.

Na sequência são colocados cinco (5) exemplos envolvendo as leis de logaritmos, além de vinte e um (21) exercícios para sala de aula envolvendo propriedades de logaritmos e discussão sobre maior ou menor. Ainda é disposta uma lista contendo cinquenta e quatro (54) exercícios subdivididos em cento e três (103) itens.

Nos exercícios é necessário escrever expressões dadas em termos de log N e Log M, escrever cada expressão dada em forma de um número racional ou um logaritmo simples, simplificar expressões, expressar em termos de x, traçar gráficos de funções logarítmicas dadas onde pode, ou não, ser usada a calculadora gráfica, encontrar a inversa de uma função dada, e mostrar determinadas propriedades associadas a funções logarítmicas.

Ainda sobre os exercícios, é necessário para a resolução, utilizar logaritmo natural em recursos naturais do planeta, expressar logaritmos dados na forma de dois valores pré-definidos, resolver equações logarítmicas dadas, resolver inequações dadas, explorar a escala Richter e o uso de logaritmos e provar algumas proposições que envolvam logaritmos.

As equações exponenciais são relacionadas à mudança de base, colocando o objetivo e dois (2) exemplos que envolvem crescimento populacional e investimentos financeiros e oito (8) exercícios para sala de aula que utilizam resolução de equações, uso de calculadora e uma discussão sobre mudança de base.

A seguir é disposta uma lista de exercícios contendo quarenta e cinco (45) subdivididos em sessenta (60) exercícios, que envolvem o uso da calculadora e resolução de equações reduzindo a forma radical, resolver as equações com uso de potencias e de logaritmos, Geografia e crescimento populacional, Finanças e investimentos financeiros.

No que segue, para resolver os exercícios que restam, é necessário que, sejam utilizados, a meia vida de um isótopo e potências, conceitos de mudança de base, resolução de equações e derivadas, seja realizada uma discussão envolvendo resoluções de equações, resolver equações expressando a variável x como um logaritmo se necessário, utilizar as propriedades de potenciação e decidir qual das expressões dadas é maior.

Também é abordado, como estimar a idade de determinados fósseis através do carbono 14 e uso de logaritmos, provar propriedades já citadas no decorrer do capítulo, avaliar cada expressão dada envolvendo operações com logaritmos, resolver cada inequação com uso da calculadora gráfica, uso de equações que envolvem expoentes e logaritmos e demonstrar duas propriedades de logaritmos.

Na sequência é realizado um resumo do capítulo, são colocadas as palavras chave e ideias, além de um teste do capítulo contendo treze (13) questões relativas a todas as seções trabalhadas no capítulo. O capítulo é finalizado com a lei do resfriamento de Newton e a relação com o estudo dos Logaritmos.

Considerações sobre o capítulo

O livro apresenta um conjunto completo de conteúdos que vão desde funções até uso de tecnologias como a calculadora científica e calculadora gráfica. O capítulo de nosso interesse é muito bem estruturado e completo em relação ao conteúdo abordado, contando com detalhes importantes, tais como: a regra do 72, utilizada em problemas que envolvem matemática financeira, pois o número 72 é múltiplo de 2, 3, 4, 6, 8 9 e 12, muito utilizados nessa área. Além do fato de introduzir as "leis de Logaritmos", também conhecidas como propriedades de Logaritmos.

Também conta com uma quantidade grande de exercícios totalizando quatrocentos (400) e mais treze (13) em forma de testes referentes às sessões do mesmo. Os exercícios e testes contêm várias contextualizações que versam sobre: Física e a velocidade do som, PH de alguns líquidos, distância entre astros, além de realizar a datação de material arqueológico a partir do carbono 14 e provar que log 2 é um número irracional.

4.6.9 – Livro 20: Advanced Algebra Through Data Exploration A Graphing Calculator Approach

A obra está dividida em *Author Acknowledgements* (Agradecimentos do autor) e Foreword (prefácio), escrito por Glena Lappan – Universidade Estadual do Michigan. Além disso, dispõe de *Contents* (Uma lista de conteúdos) e treze capítulos, a saber: Introducing the calculator (introduzindo a calculadora), Patterns an recursion (Padrões e recursão), Sequences and Explicit Formulas (Sequências e formulas explicitas), Introduction to Statistics (Introdução à estatística), Data Analysis (Análise de dados) e Functions (Funções).

Parametric Equations and Trigonometry (Equações paramétricas e trigonometria), Exponential and Logarithmic Functions (Funções exponencial e logarítmica), Topics in Discrete Mathematics (Tópicos em matemática discreta), Systems of Equations (Sistemas de equações), Polynomials (Polinômios), Probability and Statistcs (Probabilidade e estatística) ,Functions and relations (Funções e relações) e finalizando com Trigonometric Functions (Funções trigonométricas).

O que nos interessa é o Capítulo 7 que leva o nome de Exponential and Logarithmic Functions, isto é, Funções exponencial e logarítmica disposto entre as páginas e 301 e 374. O capítulo está dividido em seções. A primeira explora a *Função exponencial*, que é iniciada fazendo um apanhado histórico sobre, crescimento populacional, isto é colocando o fato de que no mundo todo nascem a cada dois segundos, nove bebês enquanto morrem três pessoas, e isso, primordialmente foi utilizado pelo Inglês Thomas Malthus (1766 – 1834) que era professor de História Moderna e Economia Política na Inglaterra.

Na sequência são dados dois (2) exemplos com soluções envolvendo crescimento populacional e Matemática Financeira e uma investigação sobre quadrados radioativos. Além de um exemplo que trabalha modelagem matemática e radioatividade. Também de colocado um conjunto de problemas com sete (7) exercícios subdivididos em trinta e quatro (34) itens utilizando crescimento populacional e uso de calculadora para encontrar o valor das expressões e Funções exponenciais. Finalizando a seção com um projeto intitulado Baseball for bucks (Baseball para dólares).

A segunda seção aborda sobre *Expoentes Racionais e Raízes***,** inicia com Expoentes Fracionais e acaba com um exercício subdivido em dez (10) itens, em que é necessário utilizar a calculadora para encontrar os pares ordenados da forma $\left(x,\ x^{0.5}\right)$ dados alguns valores para x, construir o gráfico de $y_1 = x^{0.5}$ e, outra função y_2 a fim de comparar os gráficos encontrados.

A seção segue com cinco (5) exercícios, onde é necessário, dado que raiz quadrada de 25 é igual a 5, decidir se existem outras operações que levariam o 25 a se tornar 5, encontrar relações entre números que levam expoentes racionais como $\frac{1}{2}$, logo após dar um exemplo, encontrar em uma tabela dada os valores de $f(x) = 25^x$ com o auxílio da calculadora, explicar porque $25^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{25})^3$, escrever uma equação y_2 envolvendo a raiz que seja equivalente a $y = x^{\frac{3}{2}}$, copiar e completar uma tabela de valores dados. Finalizando com dois (2) itens envolvendo questões de ordem teórica, ou seja, demonstrações, envolvendo domínio de funções.

Na sequência é dada a *Definição de expoentes fracionais,* conforme segue:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \, ou \, \sqrt[n]{a^m} \; para \; a \geq 0$$

A seguir são dados quatro (4) exemplos, para resolver $9^{\frac{5}{2}} = x$, um subdividido em três (3) itens para encontrar o valor de algumas expressões, resolver a equação $4^x = 8$ e resolver a equação 2. 125^x = 50**.** O segundo conjunto de Problemas contém onze exercícios (11) subdivididos em trinta e quatro (34) itens para: Colocar em forma de raízes a expressões envolvendo expoentes fracionários, resolver um problema envolvendo proporção entre altura e peso através do expoente $\frac{2}{3}$ e converter os radicais dados à forma de expoentes.

Além de, avaliar cada expressão com o uso da calculadora, averiguar o significado da mensagem criptografada $\sqrt[\frac{1}{2}]{cin \; nati}$[1], reescrever cada expressão, dadas na forma exponencial e forma de raízes, resolver um problema envolvendo fórmulas recursivas e formulas explicitas, construir o gráfico de $y = \sqrt[5]{x}$ com o auxílio da calculadora, decidir quais são as partes e após calcular a mesma para alguns valores de x, dada uma equação e construir o gráfico das equações paramétricas $x(t) = t^4$ e $x(t) = t^3$ para t ≥ 0 e encontrar a função f(x) que dá o mesmo gráfico.

A seção é finalizada com a subseção intitulada *tendo outro olhar* com o tema criando números aleatórios (NA) numa sala de aula tal que, 0 < número aleatório < 1, estudantes que

[1] Essa atividade visa escrever a palavra cincinnati, utilizando as propriedades de potenciação.

tiverem o número aleatório tal que, $0 < NA < 0.15$ permanecem sentados, os demais devem ficar em pé, após repete-se esse processo até que todos estejam em pé, para modelar uma situação através de equações exponenciais.

A terceira seção aborda *propriedades dos expoentes*. Para iniciá-la a obra utiliza a construção do jogo de xadrez e o fato dele ter sido criado a partir de um problema envolvendo 2^n e grãos, assim na primeira casa temos $2^0 = 1$, na segunda $2^1 = 2$ e assim por diante, até que na última casa temos 2^{63} que está na ordem dos trilhões. Seguindo com um exemplo envolvendo multiplicação de potências de mesma base sem o uso da propriedade.

Propriedade da multiplicação de expoentes

$$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}, \, para \; a > 0$$

Propriedade de potências de potências de expoentes

$$(a^m)^n = a^{mn}, \, para \; a > 0$$

Um segundo exemplo, subdividido em três (3) itens, utiliza as propriedades dadas acima para reescrever as expressões dadas em potências de menor base. No que segue é dada um investigação intitulada *Ratios and Exponents* (Relações e Expoentes), a mesma subdivide-se em seis (6) itens que utilizam relações envolvendo expoentes para escrever expressões exponenciais, e, além disso, também aprender mais sobre as propriedades de logaritmos. No que segue e dada a ***Propriedade da divisão de Expoente.***

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}, \, para \, a > 0.$$

Outra investigação sobre expoentes negativos está subdividida em onze (11) itens onde o estudante pode explorar o conceito de expoente negativo e ver que as aplicações no mundo real são muito interessantes. A seguir são dadas:

Definição de expoente zero e expoentes negativos.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \, para \; a > 0 \; ou \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \, para \, a, b > 0$$

Propriedade da potência de um produto

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n, \, para\, a > 0\, e\, b > 0$$

Seguindo com três (3) exemplos, onde é reescrita sem expoente a expressão exponencial com expoente negativo e detalhar os passos efetuados, uma expressão utilizando a propriedade da potência do produto e é resolvida uma equação exponencial dada sem o uso do gráfico. Finalizando com o terceiro conjunto de problemas que traz onze exercícios (11) subdividos em trinta e cinco (35) itens.

Para resolver os exercícios é necessário que o estudante: reescreva expressões com expoentes fracionais sem o uso de expoentes ou radicais, encontre um caminho alternativo para escrever cada expressão, resolva uma equação a partir de um exemplo contextualizado, indique quando cada equação é verdadeira ou falsa e no caso de ser falsa, justificar.

Resolva equações dadas utilizando as propriedades de expoentes, faça o gráfico das seguintes equações no mesmo plano a fim de compará-los, faça o gráfico das seguintes equações no mesmo plano a fim de compará-los e, referindo-se aos gráficos encontrados nos exercícios 6 e 7, descobrir o que as equações dadas tem em comum. Para finalizar é necessário que os estudantes resolvam alguns itens que incluem o estudo de funções com seus respectivos sinais, verificando o crescimento e o decrescimento.

A seção quatro versa sobre a *construção da inversa das funções*, e inicia retomando conteúdos já vistos, além de trabalhar com a calculadora para comparar o gráfico de algumas funções, utilizando como exemplo a temperatura em graus Celsius em função da temperatura em graus Fahrenheit e vice-versa. A obra revisa conteúdos já vistos a e através do comparativo entre seus gráficos introduzir a ideia de função inversa e define a *Inversa de uma relação*, como segue:

A inversa de uma relação é obtida pela troca das variáveis x e y em todos os pontos. O gráfico da relação inversa será a reflexão do gráfico da relação original sobre a reta y = x.

Imediatamente após a definição são colocados dois (2) exemplos para encontrar a relação inversa de uma função dada e construir seu gráfico, através de três métodos citados na resolução e encontrar e construir o gráfico das funções paramétricas, escrever as equações não paramétricas da função e sua inversa. Ainda envolvendo a definição é colocada mais uma investigação sobre composições de funções inversas, englobando cinco itens exemplificando os passos necessários para que se faça a composição entre funções e entre funções inversas.

A seção quatro é finalizada com o quarto conjunto de problemas, que traz treze (13) exercícios subdivididos em quarenta e um (41) itens, para encontrar a inversa de cada par de equações paramétricas e construir o gráfico das equações originais e suas inversas, determinar qual gráfico expressa a inversa da função dada no primeiro gráfico, eliminar a forma paramétrica para resolver a equação original em x, eliminar a forma paramétrica para resolver a equação original em y e encontrar o alcance dos valores, em x e y, da função de modo que tanto as originais e as inversas sejam funções.

Além de usar o conhecimento já obtido para encontrar as equações paramétricas de funções dadas, escrever cada função usando a notação f(x) e encontrando suas inversas, encontrar a inversa e a inversa nos pontos dados. Também, dados em uma tabela as relações entre a altitude e a temperatura do ar, encontrar as funções que as descreve em pés e metros, as inversa delas e a composição delas.

Finalizando com converter a temperatura na escala Celsius dada hoje naquela dita a original do século 18, reescrever uma expressão dada em uma forma diferente e reescrever as funções inversas na forma racional. Na subseção tendo outro olhar é necessário que, através do uso da calculadora, o estudante determine o gráfico de funções e investigar o limite de funções para valores pré-determinados e uma subseção sobre Geômetras apoiando a investigação são trabalhados conceitos de funções inversas e seus respe3ctivos gráficos tendo um olhar geométrico.

A seção cinco é intitulada *equações com expoentes racionais* e é iniciada com um exemplo contextualizado que utiliza uma equação com expoente inteiro, em seguida faz uso do expoente racional para solucionar o problema de modo mais rápido e eficaz. Após isso é dada a Propriedade da igualdade de potências, como segue:

$$Se\ a = b,\ e\ a, b\ são\ números\ reais\ positivos,\ então\ a^n = b^n,\ para\ qualquer\ valor\ de\ n.$$

Na sequência são apresentados três (3) exemplos, subdivididos em cinco (5) itens, para resolver cada equação para x, quando apresentado um problema contextualizado sobre possibilidades de nevar, utilizando inicialmente um expoente inteiro e um expoente racional na resolução e, dada uma função f(x), com expoente fracionário, deverá ser encontrada a $f^{-1}(x)$ e construir o gráfico de ambas. Acabando essa parte com uma investigação sobre Bactérias em uma garrafa.

O quinto conjunto de problemas compreende dez (10) exercícios subdivididos em vinte e oito (28) itens, onde é necessário que o estudante resolva equações em x, onde x é um número real, reescreva expressões sem o uso de parênteses. Além de abordar sobre intensidade da luz incidente em um óculos, crescimento populacional, matemática financeira e astronomia. Finalizando com um desafio, em que o estudante deve criar um problema, explorar suas possíveis soluções e aplicabilidade com uma detalhada descrição e explanação.

A subseção *Tendo um outro olhar*, relaciona os conteúdos explanados em problemas anteriores, como por exemplo, aqueles envolvendo crescimento populacional e uma função exponencial do tipo $f(x) = ab^x$, para completar uma tabela de valores através do modelo. O projeto dessa seção é chamado encontrando e**,** e lança mão do uso da calculadora para construir situações onde o uso da matemática financeira e o crescimento populacional, ficam bem claros, e, a partir disso, cria situações que envolvam crescimento, decrescimento e gráficos.

A seção número seis é intitulada *A função logarítmica* e inicia com uma retomada sobre funções exponenciais das sessões passadas e de certo modo relaciona o uso das mesmas e das que serão abordadas nessa**.** Após coloca dois (2) exemplos subdivididos em cinco (5) itens, para resolver equações dadas encontrando uma base comum e resolver equações exponenciais com bases diferentes e resultados iguais.

Na sequência é dada a definição de Logaritmo, como seque:

$$Dado\ a = b^x e\ a, b > 0,\ então\ log_b\, a\ =\ x$$

Cinco (5) exemplos são dados a seguir, onde a obra aborda uma nova resolução para um problema já visto agora com o uso da definição de logaritmo, a resolução de uma equação exponencial dada, fazendo uso da definição de logaritmos, explora um exemplo contextualizado sobre investimento financeiro e resolve uma equação logarítmica dada.

A seguir é colocado o sexto conjunto de problemas, composto por dez (10) exercícios, subdivididos em trinta e quatro (34) itens, para reescrever cada logaritmo na forma exponencial, resolver as equações encontrando uma base comum a todas, encontrar os inteiros anteriores e próximos, A e B, para cada inequação, escrever uma sentença comparando y = 10^x com outras funções dadas e utilizar uma função que descreve a temperatura em graus

Celsius em termos de x para encontrar em que é necessário encontrar o valor de x para que a temperatura seja 5º C.

Além de abordar contextualizações sobre: matemática financeira a partir da divida pública estadunidense, notas musicais e números fracionários juntamente a frequências, sobre o carbono 14 e suas propriedades, o rádio e suas frequências e, para encontrar um problema das últimas seis sessões, ainda não resolvido, e reescrevê-lo de uma forma que a solução seja encontrada com mais facilidade.

A sétima seção aborda sobre as *Propriedades de Logaritmos* e inicia com uma investigação sobre a função Log expondo a relação que há entre a base, o expoente e o logaritmo e, para tal propõe preenchimento de tabelas e resoluções de equações envolvendo expoentes. Logo após a obra traz a Propriedade de mudança de base, onde:

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}, \, para \; b, x > 0.$$

Colocando após um exemplo onde é utilizada a propriedade de mudança de base ao resolver uma equação exponencial. Acabando com uma nova investigação que faz uso de uma régua logarítmica. O sétimo conjunto de problemas conta com treze (13) exercícios subdivididos em cinquenta (50) itens, para utilizar a régua logarítmica construída encontrar a resposta para as expressões dadas, qualificar cada equação logarítmica como verdadeira ou falsa e com as próprias palavras as propriedades de logaritmos abordadas nessa sessão.

Além de ser necessário construir o gráfico de uma função e o gráfico da inversa da mesma, após descrever os passos efetuados e comparar os mesmos, determinar se é mais fácil de resolver sem o uso da calculadora, resolver expressões, dados alguns valores de logaritmos a serem utilizados, avaliar cada expressão utilizando a propriedade de mudança de base, construir o gráfico de cada par de curvas, se necessário utilizando a propriedade de mudança de base, determinar se cada afirmativa é verdadeira ou falsa e listar detalhadamente os possíveis métodos de resolução da equação $4^{x} = 15$.

A seção número oito aborda sobre *Aplicações de logaritmos* e traz as Propriedades de expoentes e logaritmos, como segue:

$$\left(a^m\right).\left(a^n\right) = a^{(m+n)} \leftrightarrow log_a xy = log_a x_+ log_a y$$

$$\frac{\log a^m}{\log a^n} = a^{(m-n)} \leftrightarrow log_a = log_a x - log_a y$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} \leftrightarrow log_a x^n = n\ log_a x$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_a x}$$

$$\left(ab\right)^n = a^n \cdot b^n$$

$$Se\ x = a^m,\ então\ log_a x = m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Logo após são dados quatro (4) exemplos, envolvendo terremotos sua magnitude e intensidade através de logaritmos, PH de duas soluções e as comparando, a “Curva de aprendizado” que nada mais é do que uma representação gráfica do aumento de aprendizagem (eixo vertical) com a experiência (eixo horizontal) e a respeito da “taxa de concentração” de determinado elemento químico em uma solução em Gramas por hora.

Finalizando com uma investigação sobre *a xícara de água quente*, onde o estudante poderá encontrar a relação entre o tempo de resfriamento da água quente e a temperatura da água enquanto esfria. O conjunto de problemas número oito traz dez (10) exercícios subdivididos em trinta e sete (37) itens, sobre matemática financeira e juros compostos e resolução de uma equação exponencial dada fazendo uso de logaritmos e explanar sobre a resolução.

Além da resolução de equações exponenciais dadas fazendo uso do logaritmo na base 10, modelagens que envolvem conteúdos de biologia que relacionam superfície do corpo humano, altura humana e massa corpórea, além de pedir ao estudante que descreva o método pelo qual será mais interessante para a resolução, sobre o tempo em que o leite se conserva fresco depende diretamente da temperatura de armazenamento e sobre a intensidade do som.

Colocando nos últimos itens a altitude e a pressão atmosférica, o uso do carbono-14 na datação arqueológica de fósseis, sobre o carbono-14 e sua taxa de decrescimento e para que fazendo uso de uma tabela de dados os estudantes calculem alguns custos de produtos no decorrer das décadas de 70, 80 e 90.

A nona seção trata sobre a *Curva de alisamento e mais análise de dados* e aborda sobre tabelas de dados, gráficos, somas de resíduos, e lotes de resíduos, coeficientes de correlação e experimentação e diz que são algumas ferramentas usadas para obter um bom modelo para explicar os dados. Trazendo logo em seguida uma investigação sobre Linearização de dados.

Na primeira parte são descritos os seis passos que devem ser realizados para que se possa linearizar os dados colocados em uma curva, logo após na segunda parte explora alguns exemplos que exigem o uso da calculadora e mostra que o logaritmos lineariza uma função exponencial. Acabando com dois (2) exemplos sobre o crescimento do número de salmões em um determinado lago e a relação entre algumas luas do sistema solar relacionando, seus raios (em 100,000 Km) e suas órbitas (em dias).

O conjunto de problemas número nove contém oito (8) exercícios subdivididos em trinta e um (31) itens, onde é necessário encontrar o melhor modelo possível para $y = 0.21\sqrt{x}$ para um pendulo utilizando logaritmos, uma equação relacionando os dados, construir o gráfico com uso da calculadora e comparar os gráficos e, com o auxílio de M&MS, realizar um experimento relacionando o número de itens com o tamanho do recipiente em que estão distribuídos.

Esse capítulo também aborda o cálculo do tempo em que uma xícara d'água quente irá resfriar em uma geladeira, construir seu gráfico utilizando a calculadora e linearizar os resultados obtidos, a partir de uma tabela dada, calcular com auxílio da calculadora a relação entre o raio e o período de cada planeta dos sistema solar, explorando o coeficiente de correlação e as equações de regressão.

A partir da investigação anterior, encontrar uma melhor equação justificando a escolha, o coeficiente de correlação e construir o gráfico. Encontrar uma melhor solução que descreva a relação entre a altura em que está um avião e a distancia que pode ser avistada do mesmo e explorar o uso de cloro e a evaporação do mesmo em uma piscina e quantidade que permanece na água após um determinado tempo, utilizando uma fórmula e explicitando um modelo de decrescimento.

A obra fecha a seção com o projeto intitulado *income by gender* (renda por sexo), onde é utilizada uma tabela que explora a renda anual entre o ano de 1970 e 1987 de homens e mulheres com mesmos tipos de capacitações e pede para que sejam relacionados: tempo/homem, tempo/mulher, mulher/homem, tempo-homem/mulher e tempo-mulher/homem, após encontrar um modelo para descrever cada relação e construir seu gráfico.

A seção de número dez, a última do capítulo, é destinada a fazer uma revisão sobre tudo já visto, revisando definições e conceitos que envolvem Logaritmos. Por sua vez, o conjunto de problemas número dez, traz sete (7) exercícios, subdivididos em trinta e oito (38) itens, para calcular, sem o uso de calculadora cada expressão dada, reescrever cada expressão em outra forma, resolver cada equação dada fazendo uso das propriedades de logaritmos, calcular, a partir de um modelo, o custo de ligações telefônicas.

Também trabalha a análise dos dados sobre os casos de AIDS no período de 1986 a 1992 e encontrar uma fórmula que descreva o crescimento, entre os anos de 1990 e 1995 e 2000 e quando o número atingiria um milhão de casos, encontrar uma fórmula que descreva e estimar quanto seria o mínimo em 2000, 2010 e 2020 além de estimar o valor que era pago no ano de 1938, dado o valor mínimo federal pago por hora e o crescimento entre os anos de 1955 e 1991 e para que o estudante aborde sobre o problema mais interessante da sessão dizendo o porquê da escolha.

A subseção Tendo um outro olhar, aborda sobre a investigação necessária envolvendo semilogaritmos isso é o logaritmo do logaritmo. Finalizando o capítulo é colocada a seção intitulada *Avaliando o que você aprendeu* que busca uma visão geral de auto-avaliação, para tanto se subdivide em: Organizando seu caderno de notas, como manter um diário, uma avaliação de desempenho, investigações sem data marcada, construção de questões teste e apresentações e ensaios de grupo.

Considerações sobre o capítulo

O capítulo é denso, trazendo muita informação das mais variadas formas, a divisão em seções é feita de maneira a separar os conteúdos ordenadamente. Uma questão fundamental é a forma com que são colocadas as investigações em pontos cruciais de cada seção, ou seja, em pontos que o estudante poderá estar em dúvida e necessite desta ajuda para passar a próxima seção.

Os exemplos não são dados em grande número, totalizando trinta e quatro (34). Os exercícios são dispostos em dez conjuntos e compreendem noventa e quatro (94) questões subdivididas em trezentos e vinte e nove (329) itens, e contém muita contextualização com as mais diversas áreas, como por exemplo, a Biologia e a Astronomia.

4.6.10 – Livro 21: New York Math B an integrated approach

A obra inicia com uma revisão dos conteúdos trabalhados em publicações anteriores principalmente revisando conteúdos de Geometria, logo após temos a tabela de conteúdos. A seguir temos uma série de informações interessantes ao professor, como motivações aos alunos e ferramentas para melhorar o ensino.

Em relação ao conteúdo, o livro está dividido em doze capítulos, a saber: Models, Functions, and Permutations; Linear relationships and Functions; Matrices; Linear Systems; Quadratic Equations and Functions; Polynomials and Polynomial Functions; Exponential and Logarithmic Functions; Rational Functions; Periodic Functions and Trigonometry; Quadratic Relations; More Probability and Statistics; Sequences and Series.

No entanto o capítulo que nos diz interesse é o sete, intitulado *"Exponential and Logarithmic Functions"* que quer dizer "Funções Logarítmicas e Exponenciais" e está disposto entre as páginas 302 e 347.

O capítulo inicia com a sessão 7.1 chamada, "Explorando Modelos Exponenciais", onde de certa forma contextualiza-se com "Artefatos antigos" e as maneiras de medir suas respectivas idades. É necessário e prudente constatar que desde o início a calculadora gráfica é colocada como possível ferramenta para criar gráficos a partir de valores tabelados.

Os estudantes são instigados a construir a partir dos valores tabelados, a relação existente entre eles e após isso construir o gráfico.

Exemplo:

A partir dos dados tabelados encontrar a relação entre eles:

X	0	1	2	3	4	5	6

y	64	32	16	8	4	2	1

Quadro 5: Relação entre números.

Fonte: New York Math B an integrated approach, 1998, p. 305.

A relação anterior é dada em forma da função $y = 64\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Pode-se notar a partir dos valores que essa função é decrescente, pois cada vez que o valor de x aumenta seu respectivo valor em y diminui. Além disso, cogita-se também o uso de software auxiliares como o “Secondary Math Lab Toolkit™” e o “Computer Item Generator 7-1” além da página de internet “Prentice Hall” onde os estudantes podem obter auxílio na resolução de exercícios.

Os modelos de crescimento e decrescimento de funções exponenciais são trabalhados através de exemplos que englobam vários conteúdos desde progressões geométricas até matemática financeira, sempre frisando a possibilidade do uso da calculadora gráfica.

A primeira sessão de exercícios do capítulo conta com vinte e sete (27) questões e são divididos entre identificar um modelo para as funções e determinar se são crescentes ou decrescentes, construir o gráfico de algumas funções com a possibilidade do uso da calculadora gráfica e softwares matemáticos, além da calculadora financeira.

A segunda parte da sessão conta com sete (7) exercícios mistos, de revisão, onde é necessário que o estudante resolva sistemas de equações, analise dados e construa relações e resolva questões relacionadas a raízes e juros simples. A seguir a obra traz dicas de uso da calculadora na resolução de problemas envolvendo expoentes, fechando essa parte com o chamado problema do dia, que engloba juros simples e expoentes.

A sessão 7-2 é intitulada “Exponential Functions”, ou seja, Funções Exponenciais, essa que inicia abordando detalhes sobre a fórmula de juros compostos, e sua relação com as funções exponenciais. A seguir são dados cinco (5) exemplos, onde o primeiro utiliza uma tabela que auxilia no cálculo sobre a fórmula. Os demais exemplos versam sobre cálculos envolvendo juros, crescimento e decrescimento das funções em questão, todos eles trabalhados com o auxílio do professor.

O gráfico da função exponencial é introduzido em forma de seis exemplos de funções na forma $y = a^x$, três com $a > 0$ e outros três com $a < 0$. Esses exemplos ilustram muito bem o crescimento e o decrescimento de uma função exponencial e com uso da calculadora gráfica servem como critério de convencimento ao aluno.

Na sequência são colocados três exemplos e dez (10) exercícios para fixação do conteúdo, que vão desde construir gráficos através de funções dadas até exercícios contextualizados com áreas da Química e Biologia, onde também podem ser utilizados como apoio, a calculadora gráfica e softwares matemáticos.

A segunda sessão de exercícios é composta por trinta e oito (38) questões que abordam crescimento e decrescimento de funções exponenciais, matemática financeira, estudos sociais, investimentos, química, crescimento populacional e medicina. Na sequência é dada uma revisão mista envolvendo a descrição do comportamento de algumas funções exponenciais, construção de um plano dadas as coordenadas e encontrar, quando possível, a inversa de algumas funções.

A chamada *"Lesson quiz"*, traz três (3) questões que visam desenvolver o raciocínio dos estudantes, seguida pelo "problema do dia" que envolve crescimento populacional. Na sequência a obra traz a famosa questão $n^0 = 1$ e propõe discussões em sala de aula sobre o assunto e uma outra questão pedindo que os estudantes reescrevam a função $x = 10^y$ em função de x.

A sessão 7-3, intitulada "Logarithmic Functions as Inverses", ou seja, Funções Logarítmicas como inversas, utilizam a expressão $y = 10^x$, e a partir dela pede que os estudantes completem o seguinte quadro (quadro 4):

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	10	100	1000	10000	100000	1000000

Quadro 6: Potências do número 10.

Fonte: New York Math B an integrated approach.

Logo após dispõe que cada um dos valores encontrados para y em função dos valores de x, é uma potencia de 10.

Exercícios para pensar e discutir são colocados na sequência como um modo de instigar o raciocínio dos estudantes. O primeiro aborda sobre abalos sísmicos relacionados à falha de San Andrea localizada na Califórnia. A famosa *Escala Richter* relaciona magnitude e energia liberada como segue no Quadro 5.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	$E.30$	$E.30^2$	$E.30^3$	$E.30^4$	$E.30^5$	$E.30^6$	$E.30^7$	$E.30^8$	$E.30^9$

Quadro 7: Expoentes utilizados na escala Richter.

Fonte: New York Math B an integrated approach.

A obra descreve que os expoentes utilizados na escala Richter são chamados Logaritmos, ou Logs, onde o **Logaritmo** de um número positivo y na base b é definido como segue:

$$\log_b y = x \quad se \quad y = b^x \text{ (lê-se } \log_b y \text{ como log de } y \text{ na base } b\text{)}$$

Na sequência dois exemplos e nove exercícios são colocados onde é necessário que os estudantes escrevam expressões exponenciais em suas respectivas formas logarítmicas além de um terceiro exemplo chamado “relacionado com o mundo real” onde expressões exponenciais e logarítmicas são relacionadas com o PH de alguns alimentos.

A seguir são introduzidos os Gráficos de Funções Logarítmicas, onde o gráfico da função exponencial $y = 10^x$ é colocado como inverso do gráfico da função logarítmica $y = \log_{10} x$ mais adiante, em forma de exemplo, dispõe as funções $y = 2^x \quad e \quad y = \log_2 x$ como simétricas em torno da reta $y = x$, onde se pode utilizar a calculadora gráfica para verificar tal relação.

O primeiro conjunto de exercícios dessa sessão compreende cinquenta (50) questões para escrever expressões exponenciais na forma logarítmica, resolver expressões logarítmicas e resolver problemas envolvendo, sismologia, fotografia e ciências. Na sequência são colocados oito (8) exercícios de revisão mista para escrever funções polinomiais na forma padrão e simplificar expressões.

A sessão 7-4, intitulada *Properties Of Logarithms* (Propriedades dos Logaritmos) inicia com sete (7) exemplos de convencimento envolvendo soma de logaritmos em base 10 e logaritmos de um produto e logaritmo de um quociente e a subtração de Logaritmos, finalizando com o logaritmo de uma potencia e a multiplicação do mesmo expoente pelo logaritmo.

Através disso concluem que, para quaisquer números M,N, e b, $b \neq 1$, cada uma das seguintes declarações é verdadeira :

- $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$ (Propriedade do produto)
- $\log_b \dfrac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$ (Propriedade do quociente)
- $\log_b M^k = k \log_b M$ (Propriedade da potencia)

A partir das propriedades abordadas são dados três (3) exemplos e oito (8) exercícios para utilizá-las diretamente na resolução. O primeiro conjunto de exercícios é introduzido a seguir composto por setenta e quatro (74) questões, para utilizar as propriedades na resolução de equações, escrever expressões logarítmicas como um único logaritmo e verificar, justificando, se algumas afirmativas são verdadeiras ou falsas.

Os exercícios de revisão apresentam dez (10) problemas para encontrar a inversa de funções dadas e simplificar expressões. A lição quiz e o problema do dia são voltados à utilização das propriedades em problemas contextualizados.

A sessão 7-5, intitulada *Exponential and Logarithmic Equations* (Equações exponenciais e logarítmicas), inicia com um problema dividido em seis (6) itens contextualizado a Biologia e a estimativa da quantidade de alimento necessário por dia a um elefante, de acordo com o peso do animal. A seguir são dados mais alguns exemplos de como resolver equações exponenciais.

A formula de mudança de base, onde para quaisquer números positivos M,b e c, com $b \neq 1$ e $c \neq 1$,é colocada da seguinte forma:

$$\log_b M = \frac{\log_c M}{\log_c b}$$

Exemplo: $\log_3 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \approx \dfrac{0,6990}{0,4771} \approx 1.465$

Para finalizar essa sessão é dado um conjunto com oitenta e um exercícios, para resolver equações exponenciais e logarítmicas, encontrar alguns valores de logaritmos, utilizar a calculadora gráfica pra encontrar gráficos logarítmicos além de resolver alguns problemas contextualizados ligados à biologia, meteorologia, música e geometria.

A última sessão, a 7-6 intitulada “Natural Logarithms”, ou seja, Logaritmos Naturais inicia abordando sobre a constante de Eüler, $e = 2,71828...$, e que, dada a função $y = e^x$, sua inversa é dita Função Logarítmica Natural e denotada por $y = \log_e x$ ou mais comumente $y = \ln x$.

A seguir são colocados três exemplos e trinta (30) exercícios envolvendo o uso direto das propriedades de Logaritmos, investigações com matemática financeira, Física, Pesca e Astronomia.

Para finalizar o capítulo é realizada uma retomada sobre todas as sessões analisando os pontos mais importantes. Sessenta e duas questões avaliativas e de preparação para os exames são dispostas em dois conjuntos, que visam construir e analisar gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, investigar problemas envolvendo matemática financeira, sismologia, física e muitas questões para resolver equações e expandir logaritmos de acordo com as propriedades estudadas.

Considerações sobre o capítulo:

O capítulo é detalhado e aborda assuntos dos mais variados cunhos da ciência, como sismologia, física e biologia, além de relacionar a matemática financeira ao uso de expoentes e Logaritmos. Os usos de calculadoras gráficas, científicas e financeiras parecem ser de grande valia para o melhor aprendizado dos alunos e os softwares matemáticos um poderoso auxiliar na resolução de problemas mais complicados.

Em suma, um capítulo interessante, de fácil compreensão aos estudantes e com uma quantidade grande de exemplos e exercícios, vinte e quatro (24) e duzentos e sessenta e um (261) respectivamente, que são, a meu ver, instigadores e visam à descoberta por parte dos alunos, dessa forma construindo os conceitos e não apenas dando formulas e propriedades prontas para que a possível aprendizagem se dê de forma mecânica.

4.6.11 – Livro 22: Beginning & Intermediate Algebra

O livro está dividido inicialmente em Prefácio e um índice de aplicações, a seguir os conteúdos são dispostos em quatorze capítulos, a saber: Review of real Numbers (Revisão dos números reais), Equations, Inequalities, and problem solving (Equações, inequações, e problemas resolvidos), Graphing (Gráficos), Systems of linear equations (Sistemas de equações lineares), Exponents and polynomials (Expoentes e Polynomios) e Factoring Polynomials (Fatorando polinômios).

Além de Rational Expressions (Expressões Racionais), Functions and graphs (Funções e gráficos), Inequalities and absolute value (Inequações e valor absoluto), Rational Exponents, radicals, and complex numbers (Expoentes racionais, radicais e números complexos), Quadratic equations and functions (Equações quadráticas e funções), Exponential and logarithimic functions (Funções exponenciais e Logarítmicas), Conic sections (Secções cônicas) e Sequences, series, and the binomial theorem (Sequências, séries e o teorema binomial). Finalizando a obra com os apêndices.

O capítulo que nos interessa leva o nome de *Exponential and logarithmic functions (*Funções exponenciais e Logarítmicas) disposto entre as páginas 701 e 760. O primeiro conteúdo disposto versa sobre funções inversas (Inverse functions) e objetiva determinar quando uma função é bijetora (one-to-one function), aplicar o teste da linha horizontal, encontrar a inversa de algumas funções e construir seus respectivos gráficos, determinando quando duas funções pode ser inversas uma da outra.

Este conteúdo em específico contém sete (7) exemplos que abordam todos os objetivos supramencionados. Além de utilizar a calculadora gráfica para verificar se, dada uma função existe sua inversa, apenas por meio de seu gráfico. Finalizando com um conjunto de exercícios que engloba sessenta e oito (68) questões subdivididas em setenta e quatro (74) itens que atendem perfeitamente todos os objetivos do conteúdo.

O segundo conteúdo a ser abordado intitula-se *Exponential Functions*, isto é, funções exponenciais e tem como objetivos, construir gráficos de funções exponenciais, resolver equações na forma $b^x = b^y$ e resolver problemas modelados por equações exponenciais. A função exponencial é definida da seguinte forma:

A função da forma

$$f(x) = b^x$$

É chamada de Função Exponencial se b > 0, b não for 1, e se x for um número real.

O conteúdo dispõe seis (6) exemplos subdivididos em dez (10) itens, abordando sobre gráficos de funções exponenciais, existência de uma inversa das funções exponenciais, resolução de equações exponenciais, uso de juros compostos e estimativa de percentual de material radioativo. Além de abordar a unicidade da $f(x) = b^x$, tal que:

$$Se\ b > 0\ e\ b \neq 1.\ Então\ b^x = b^y\ é\ equivalente\ a\ x = y.$$

A utilização da calculadora é dada quando há o uso da verificação da solução gráfica de problemas envolvendo funções exponenciais, com ênfase em questões do tipo:

$Y = 100(2.7)^{-0.1x}$, explorando o percentual de material radioativo contido no leite após um período de trinta dias.

Finalizando o conteúdo é dado um conjunto de exercícios que engloba setenta e seis (76) questões, subdivididas em oitenta (80) itens. Para sua resolução é necessário lançar mão da construção do gráfico de algumas funções, através dos gráficos determinar qual é função, resolver, além de algumas equações para x, muitos problemas que envolvem materiais radioativos, crescimento populacional, juros compostos e o uso da calculadora, gráfica ou cientifica.

O terceiro conteúdo versa sobre Funções Logarítmicas (*Logarithmic Functions*) e objetiva: Escrever equações exponenciais na forma logarítmica e vice-versa, resolver equações logarítmicas pelo uso da notação exponencial e identificar e construir o gráfico de funções logarítmicas. Inicialmente é tomada a função bijetora $f(x) = 2^x$ e através dela e de alguns valores é construída a sua inversa, dada por $f(y) = 2^y$.

Nesse ponto, para resolver esses tipos de funções o livro aborda o uso de uma nova notação, a logarítmica. Tal que:

> *O símbolo* $\log_b x$ *significa* "*a potência que b tem que ser elevado para que seja encontrado o resultado x*".

Isto é

$$\log_b x \textit{ significa } b^y = x$$

Onde $\log_b x$ é *"o logaritmo de x na base b"* ou *"o log de x na base b"*.

De tudo que foi colocado anteriormente chega-se a Definição de Logaritmo, tal que:

$\textit{Se } b > 0 \textit{ e } b \neq 1, \textit{então}$

$$y = \log_b x \textit{ significa } x = b^y$$

$\textit{para todo } x > 0 \textit{ e todo número real } y.$

Na sequência são dados sete (7) exemplos, subdivididos em vinte (20) itens que exploram a escrita de equações logarítmicas na forma exponencial e vice-versa, encontrar o valor de algumas expressões, tais como:

$\log_4 16$ e $\log_9 3$;

Resolver equações, para x, do tipo:

$\log_4 \frac{1}{4} = x$ e $\log_b 1 = x$

Além de explorar as chamadas *Propriedades de Logaritmos*, em que:

Se b é um número real , $b > 0$, e $b \neq 1$, então:

$1. \log_b 1 = 0$
$2. \log_b b^x = x$
$3. b^{\log_b x} = x$

Os exemplos seguem com a simplificação de expressões do tipo:

$\log_3 3^2 e \log_7 7^{-1}$.

Fazendo uso das propriedades supracitadas.

Concluindo os exemplos com a definição de Função Logarítmica, onde:

Se x é um número real positivo, b é uma constante real positiva, e b não é 1, então a ***Função Logarítmica*** *é a função que pode ser definida por*

$$f(x) = \log_b x$$

O domínio de f é o conjunto dos números reais positivos, e a imagem de f é o conjunto dos números reais.

O conteúdo sobre funções logarítmicas é finalizado com um conjunto de exercícios contendo noventa e sete (97) questões que abordam todos os objetivos, no entanto exploram muitas questões numéricas e apenas uma contextualizada a meia-vida de um material radioativo.

O quarto conteúdo abordado contém as Propriedades de Logaritmos (Logarithmic properties), a saber: A propriedade do produto, do quociente, da potência e de ambas quando usadas para resolver equações logarítmicas.

A propriedade do produto é dada, tal que:

Se *x, y,* e *b* são números reais positivos e $b \neq 1$, então:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

Após é dado um exemplo, onde é necessário encontrar a soma de alguns logaritmos como, por exemplo: $\log_{11} 10 + \log_{11} 3$.

A propriedade do quociente é dada, de forma que:

Se *x, y,* e *b* são números reais positivos e $b \neq 1$, então:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

Após é dado um exemplo, onde é necessário encontrar a diferença entre alguns logaritmos como, por exemplo: $\log_{10} 27 - \log_{10} 3$.

A propriedade da potência é dada, tal que:

Se *x,* e *b* são números reais positivos, $b \neq 1$ e *r* é um número real, então:

$$\log_b x^r = r \log_b x$$

Após é dado um exemplo, onde é necessário utilizar a propriedade da potência para reescrever as seguintes expressões: $\log_5 x^3 \; e \log_4 \sqrt{2}$.

Finalizando essa parte, são colocados mais três (3) exemplos, subdivididos em oito (8) itens, para utilizar as propriedades supracitadas, individualmente ou em conjunto, para resolver algumas expressões, tais como:

$$\log_3 \frac{5.7}{4} \quad e \quad \log_2 \frac{x^5}{y^2}$$

Uma revisão com as seis propriedades de Logaritmos citadas anteriormente é dada ao final dos exemplos. O conjunto de exercícios referente a esse conteúdo engloba setenta e quatro (74) questões em que é necessário utilizar todas as propriedades, seja individualmente ou em conjunto. Além disso, são dados outros seis (6) exercícios de múltipla escolha para serem efetuados mentalmente em sala de aula.

Outra, integrada de todos os conteúdos, é realizada ao final da lista de exercícios referente ao quarto conteúdo trabalhado. Divide-se em trinta e um (31) exercícios e revisa: funções bijetoras e inversas, funções logarítmicas e propriedades de logaritmos.

O quinto conteúdo visto no capítulo versa sobre Logaritmos comuns, Logaritmos naturais e mudança de base. Para tanto objetiva, identificar Logaritmos comuns e naturais e aproximá-los com auxílio da calculadora, avaliá-los como potências de 10 e de *e* respectivamente e utilizar a fórmula de mudança de base.

Inicia-se essa parte abordando sobre os Logaritmos comuns, ou seja, os de base 10, que são dados de forma que:

$$\log x \textit{ significa } \log_{10} x$$

Como exemplo, utiliza-se a calculadora para obter uma aproximação de $log\ 7$, desse modo, é necessário pressionar:

$\boxed{7}$ $\boxed{\text{LOG}}$ ou $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

Após são dados outros dois (2) exemplos, para encontrar valores exatos de alguns Logaritmos e resolver $\log x = 1.2$ encontrando o valor exato ou aproximado de x e um outro contextualizado com a escala Richter. Os três (3) exemplos seguintes são dedicados aos Logaritmos Naturais, ou seja, de base *e*, onde:

$$\ln x \textit{ significa } \log_e x$$

Para encontrar, o valor aproximado de ln 8, por exemplo, procede-se da mesma forma que para encontrar log 7, porém teclando ao invés de LOG a tecla LN. Os dois (2) últimos exemplos, são referentes a fórmula de mudança de base, onde:

Se *a,b* e *c* são números reais positivos e nem b nem c é 1, então:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

O conjunto de exercícios dedicado ao conteúdo de Logaritmos Comuns, Naturais e a Mudança de base, contém noventa e oito (98) exercícios, que abordam sobre todos os objetivos do conteúdo com bastante ênfase em questões contextualizadas a medidas, juros e uso da calculadora cientifica, mas também respeitando os exercícios de aplicação direta das propriedades.

A última seção do capítulo o conteúdo de Equações exponenciais e logarítmicas e aplicações, onde busca-se resolver, equações dos dois tipos particularmente, ou em conjunto. Para tanto é trazida a Propriedade de igualdade de um Logaritmo, de forma que:

Tomando *a,b* e *c* números reais tal que $\log_b a \; e \log_b c$ são números reais e b não é 1. Então:

$$\log_b a = \log_b c \; é \; equivalente \; a, \; a = c$$

Para dar ênfase a tal conteúdo, são inseridos seis (6) exemplos que abordam a resolução direta expressões com expoentes através do uso de Logaritmos, aplicação da propriedades de Logaritmos, estimação de crescimento populacional, investimentos financeiros e exploração gráfica na calculadora. Finalizando com oitenta e dois (82) exercícios dedicados a averiguar e revisar todos os conteúdos já trabalhados.

Ao término do capítulo são colocados: Um projeto para modelar temperaturas em que se deve efetuar cálculos através de Logaritmos; Programas para calculadoras gráficas, a saber: TI-83 e TI-85; Algumas questões para verificação da capacidade dos estudantes para um teste sobre o capítulo; Um vocabulário e esclarecimentos sobre o capítulo e finalmente a revisão do capítulo, englobando cento e nove (109) exercícios.

Para finalizar é inserido o teste sobre o capítulo contendo dezoito (18) questões de baixa, média e alta dificuldade, entre questões de resolução de equações, construção de gráficos e aplicação de propriedades, além de questões contextualizadas que vão desde juros compostos até crescimento populacional. A revisão cumulativa também dá bastante ênfase aos exercícios, para tanto dispõe de quarenta e dois (42) exercícios, subdivididos em noventa (90) itens, que visam retomar e fixar de modo muito interessante todos os conteúdos, incluindo definições e propriedades, vistas no decorrer de todos os capítulos.

Considerações sobre o capítulo:

O capítulo tem as seis seções que o compõe interligadas de forma que as definições e propriedades são, na grande maioria, formalizados através de exemplos. No decorrer de todo o capítulo o uso da calculadora, seja gráfica ou cientifica é bastante frequente, esclarecendo a necessidade, ou não de seu uso na resolução de vários exemplos e exercícios.

Acreditamos que o ponto forte do capítulo é o grande número de exemplos e exercícios, contendo respectivamente trinta e cinco (35) e setecentos e um (701). Sendo que os exercícios estão subdivididos em setecentos e cinquenta e nove (759) itens. No entanto ao final do capítulo alguns exercícios são colocados em forma de um teste (avaliação) sobre o capítulo onde o estudante é levado a resolver questões que contém vários níveis de dificuldade.

Dentre os exercícios são apresentados alguns em que a contextualização é dada de vários modos. Além do uso da calculadora na resolução de problemas previamente citados, também são trabalhadas questões que envolvem Matemática Financeira com ênfase em juros compostos, crescimento populacional, estimativa de porcentagem de radioatividade e meia vida de elementos químicos. Em suma, um capítulo que mescla a resolução direta de problemas e a contextualização, além de colocar de forma clara, as definições e propriedades.

FENDAS CONCLUSIVAS

A análise que buscamos fazer no decorrer desse texto leva em consideração vários aspectos sobre as vinte e duas obras analisadas. Nosso trabalho é uma pesquisa bibliográfica, qualitativa e descritiva e segue os princípios Análise de conteúdo (BARDIN, 2011). No entanto, no momento da análise e categorização, procuramos nos ater, principalmente, na definição e nas propriedades de Logaritmos. Além da quantidade de exemplos e exercícios que abordassem sobre Logaritmos, sempre buscando distinguir suas formas de elaboração e possíveis maneiras de resolução.

Um fato que chama atenção é que os livros brasileiros estão dispostos de forma compacta com poucos conteúdos, principalmente nas décadas de 1960, 1970 e 1980, muito diferentes dos estadunidenses que, com exceção do primeiro, detém um grande número de conteúdos. Além disso, os livros estadunidenses trazem as informações muito bem interligadas entre os diversos capítulos deixando claro, de certa forma, a dependência que exercem um sobre o outro.

As obras foram escritas em muito distintos. No entanto existem muitas coisas em comum entre os conteúdos descritos como, por exemplo, a definição de Logaritmo, colocada praticamente da mesma forma na grande maioria delas. As propriedades são divididas na maioria delas em quatro básicas, a saber: Logaritmo do produto, Logaritmo do quociente, Logaritmo da potencia e mudança de base.

A definição de Logaritmo é colocada na maior parte dos livros analisados do seguinte modo:

*Dizemos que o logaritmo de um número positivo **b**, na base **a**, positiva e diferente de 1, é o expoente **x** ao qual se deve elevar **a** para se obter **b**.*

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x, com\, b > 0, a > 0\; e\; a \neq 1$$

É importante frisar, que a definição não é dada exatamente como foi colocada acima no que diz respeito à parte literal, pois as palavras usadas, por muitas vezes são diferentes, mas objetiva passar a mesma informação. No entanto a parte algébrica é fiel a grande maioria dos livros. Também é muito interessante ressaltar que em algumas obras é chamada a atenção do estudante para a *Unicidade de um Logaritmo*, ou seja:

$$Se\; \log_a b = \log_a c \; então\; b = c.$$

Esta, que é colocada como decorrência da *Unicidade* da $f(x) = a^x$ onde:

$$Se\ a > 0\ e\ a \neq 1.\ Então\ a^x = a^y\ é\ equivalente\ a\ x = y.$$

São escritas também, na maioria das obras, como decorrência direta da definição de Logaritmos, as seguintes propriedades:

- O Logaritmo de 1 em qualquer base *a* é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \quad pois \quad a^0 = 1$$

- O Logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \quad pois\ a^1 = a$$

- A potência de base a e expoente $\log_a b$, é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b$$

As propriedades de Logaritmos, principalmente no que toca as obras Estadunidenses, como por exemplo, no livro dezenove, intitulado *Advanced Mathematics*, são colocadas como "Leis de Logaritmos", onde o estudante tem que tomá-las como ideias já formalizadas e deverão apenas ser utilizadas na resolução de exercícios. Já em outras, são dispostas como "Teoremas", onde a prova é efetuada, muitas vezes pelo estudante através de exercícios.

As propriedades de Logaritmos, são dispostas na maioria das obras do seguinte modo:

- Logaritmo do produto
  Se $0 < a \neq 1, b > 0\ e\ c > 0,$ então:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

- Logaritmo do quociente
  Se $0 < a \neq 1, b > 0\ e\ c > 0,$ então:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

- Logaritmo da potência
  Se $0 < a \neq 1, b > 0\ e\ r \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^r = r.\log_a b$$

Os conteúdos relacionados às propriedades de Logaritmos contidos nas obras Brasileiras, às vezes, são colocados de forma pouco clara. Como por exemplo, no livro seis, intitulado *Trigonometria e Logaritmos* em que a notação da propriedade do Logaritmo do produto, colocada na forma $log(a \cdot b \cdot c) = log\ a + log\ b + log\ c$. Porém, tal afirmação deveria ser precedida pelo produto de apenas dois termos, ou seja, $log(a \cdot b) = log\ a + log\ b$, para que o estudante compreendesse que a mesma pode ser utilizada para resolver multiplicações muito trabalhosas utilizando a adição.

Ainda nos livros Brasileiros, especificamente no livro dois, intitulado *A função exponencial, logaritmos, equações exponenciais e logarítmicas*, a propriedade, ou fórmula de mudança de base como é chamada, é demonstrada utilizando $\log_b x = \log_a x.\log_b a$ e $\log_a b.\log_b a = 1$, inseridas na obra sem prova ou demonstração, estas, que na verdade, são decorrentes da “fórmula” de mudança de base.

A propriedade de mudança de base é disposta nas obras analisadas da seguinte forma:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Onde, *a*, *b* e *c* são números reais positivos com $a \neq 1\, e\, b \neq 1$.

O grande número de exercícios é outro fator que diferencia muito as obras analisadas, tendo em vista que os estadunidenses possuem um quantitativo muito maior de atividades do que os brasileiros, como segue no quadro 6:

Atividade\Nacionalidade	Brasileiros	Estadunidenses
Exemplos	95	228
Exercícios	1036	4245
Itens	1673	4929

Quadro 8: Quantificação dos exemplos, exercícios e itens.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, os exemplos contidos nas obras estadunidenses são melhores elaborados buscando instigar o estudante a raciocinar e alguns exercícios são colocados em forma de desafios, não simplesmente para utilizar mecanicamente definições e propriedades, mas para entender que a sequência do conteúdo é necessária para que a aprendizagem seja dada de forma mais clara e rápida.

Particularmente nas obras Estadunidenses, os exercícios são colocados em conjuntos, nos quais, existem questões de resolução de aplicação direta de definições e propriedades, alguns colocados em forma de testes, nos quais os estudantes devem usar na resolução conteúdos trabalhados em conteúdos anteriores agregados ao atual. Além de exercícios contextualizados e que necessitem do uso de calculadoras e/ou programas computacionais.

Podemos ver nos exemplos a seguir, a diferença que há entre os colocados em livros brasileiros e aqueles que são exibidos nos livros estadunidenses:

Exemplo colocado em uma obra brasileira:

$$\log_5 625 = x \to 5^x = 625 \to 5^x = 5^4 \to x = 4$$

Exemplo disposto em uma obra estadunidense:

$$\begin{aligned}
&8000 = 10^x \\
&8 = 10^{0.9031} \\
&\mathit{assim}\ 8000 = 10^{0.9031} \times 10^3 = 10^{3.9031} \\
&\mathit{ou}\ \log 8000 = 0.9031 + 3 = 3.9031
\end{aligned}$$

Os exemplos apresentados acima são os tipos mais constantes nas obras analisadas, podemos notar que os colocados nas obras nacionais, são mais diretos e sugerem o uso da definição de Logaritmo para resolução. No entanto, os dispostos nos livros estadunidenses, são mais elaborados e necessitam o uso dos conteúdos anteriores para a resolução.

A calculadora gráfica e a cientifica são colocadas como ferramentas para resolução de um gama muito grande de problemas, seja para construir gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, para resolver problemas que usam cálculos mais elaborados, ou simplesmente para aprender a utilizar as possibilidades existentes, como por exemplo, no livro vinte e dois, intitulado *Beginning & Intermediate Algebra* em que o estudante pode utilizar a calculadora científica para encontrar os valores de $\log 7$ e *ln 8*.

As obras Estadunidenses trazem ainda programas computacionais como o FORTRAN, colocado na obra treze, como possibilidade para escrever números em notação padrão ou científica e o BASIC, citado na obra dezessete, para auxiliar em cálculos com expoentes inteiros. De modo mais simples e tardio, frente aos Estadunidenses, os livros Brasileiros só têm inserida a calculadora como ferramenta de simplificação de cálculos mais elaborados nas obras analisadas já no século XXI, mais precisamente no livro dez intitulado: *Matemática – Ciência e aplicações*.

O uso de gráficos, para explorar soluções e determinar o crescimento e decrescimento de funções exponenciais e logarítmicas, é utilizado tanto nas obras Estadunidenses quanto nas Brasileiras. No entanto, as obras estadunidenses são objetivas na exploração e utilizam a calculadora desde os primeiros livros analisados, iniciando com exemplos simples, em seguida introduzindo exercícios para sala de aula, finalizando com exercícios para casa.

A História da Matemática está presente tanto nas obras Estadunidenses quanto nas Brasileiras. Porém com mais ênfase na obra nacional intitulada *Matemática na Escola Renovada*, com a inserção do termo “vulgares” ou de “Briggs” para designar os conhecidos Logaritmos de base 10 ou decimais e no livro oito intitulado *Matemática aula por aula*, onde, na parte introdutória do capítulo se aborda sobre a invenção dos Logaritmos por Napier.

A obra dez, intitulada *Matemática - ciência e aplicações* traz também um texto sobre a invenção dos Logaritmos, esse que traz acontecimentos do século XVI correlacionados com o estudo e a invenção dos Logaritmos por John Napier, publicada no ano de 1624, considerando, porém que o início de todo esse processo ocorreu a partir de uma tabela de progressão geométrica de razão dois feita por Nicolas Chuquet em 1484.

A História da Matemática não foi encontrada como ponto forte em nenhuma das obras Estadunidenses analisadas. No entanto na obra quinze, intitulada *Intermediate Algebra with trigonometry* é disposto um quadro (Quadro 2) que mostra a relação entre uma sequência aritmética e uma sequência geométrica que seria, de acordo com a mesma, um passo inicial para que fosse elaborado o conceito de Logaritmos.

Não se poderia pensar em realizar a análise de vinte e duas obras sem tocar no assunto mais importante até o final da década de 1970, as conhecidas tábuas de Logaritmos. As tábuas, ou tabelas de Logaritmos, eram de extrema importância para que os estudantes pudessem determinar valores de Logaritmos difíceis de calcular. No entanto as mesmas tinham valores um tanto restritos, tendo somente em base dez e para valores, em grande parte das vezes até o noventa e nove.

Era importante que o estudante soubesse o que significava a Característica (parte inteira) e a Mantissa (parte decimal) de um Logaritmo, pois eram fundamentais para o uso das tábuas. A calculadora cientifica introduzida na High School Estadunidense no final da década de 1970 e no ensino médio nacional por volta da metade da década de 1990, tornou as famosas tábuas de Logaritmos defasadas e quase sem nenhuma utilidade para professores e estudantes.

Finalmente, a maior diferença encontrada entre os conteúdos analisados foi o modo que os mesmos são introduzidos. Os conteúdos nas obras Brasileiras são objetivos, diretos e a informação contextualizada é quase inexistente. Já os Estadunidenses englobam assuntos como resolução de problemas envolvendo juros compostos, uso de tabelas para explorar a construção da ideia de Logaritmos e a investigação de vários outros temas, como por exemplo: Crescimento populacional, análise de materiais radioativos e datação arqueológica por meio do carbono 14.

O que se pode sem dúvida dizer é que os livros Estadunidenses são mais fundamentados e mais voltados para a aprendizagem, pois contém formas distintas de abordar o mesmo assunto, esclarecendo assim de forma mais interessante os conteúdos. Já os Brasileiros, principalmente os publicados até a década de 1980, são voltados ao ensino clássico sem muitos exemplos contextualizados e bastante diretos, o que, de certo modo, dificulta o processo de Ensino/Aprendizagem.

Toda a análise realisada trouxe a luz muitas coisas importantes e que somente poderiam ser reveladas estabelecendo uma comparação entre obras publicadas em meios sociais tão distintos. No entanto o trabalho realizado contou com apenas vinte e dois livros dos milhares que acreditamos terem sido publicados desde a década de 1960.

Isso tudo nos dá margem para pesquisar em outros livros e cada vez mais chegar perto da real situação que se encontram os estadunidenses e brasileiros em relação a sua abordagem sobre o ensino de Logaritmos. A análise feita foi trabalhosa, porém muito delicada e gratificante, pois tivemos a ideia de que o ensino no Brasil está ainda atrás do Estadunidense. Acreditamos que a análise realizada nessa obra possa ser de grande valia para futuras pesquisas na área, instigando outros pesquisadores a elaborar outros trabalhos com temas semelhantes.

A busca por semelhanças e diferenças nas obras que analisamos foi realizada focando somente nos conteúdos relativos a Logaritmos, porém imaginamos que um trabalho muito maior e mais detalhado pode ser feito, obtendo mais material e tendo um período maior de tempo para outras perguntas pertinentes a área da Educação Matemática possam ser respondidas.

ANEXO A – OS LIVROS DIDÁTICOS BRASILEIROS ANALISADOS

Livro 1

Título: Logaritmos e Equações Exponenciais.

Autor(es): Luiz Mauro Rocha.

Editora: Livraria Nobel S.A.

Local de publicação: São Paulo – SP.

Ano de publicação: 1965.

Páginas: 95

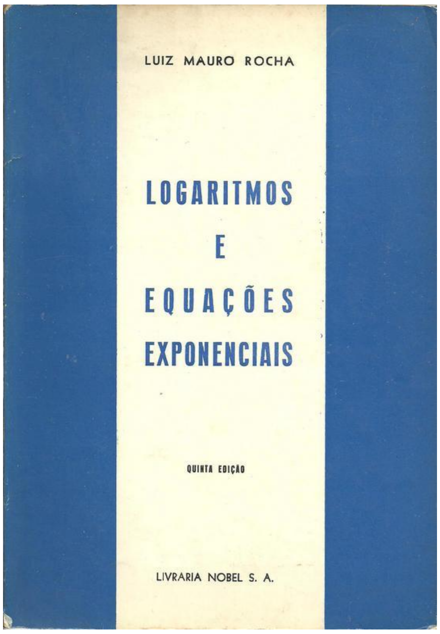

Figura 4: Capa do livro 1.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 2

Título: A função exponencial, Logaritmos, Equações exponenciais e logarítmicas.

Autor(es): Scipione de Pierro Netto.

Editora: Livraria Nobel S/A.

Local de publicação: São Paulo – SP.

Ano de publicação: 1967.

Páginas: 97.

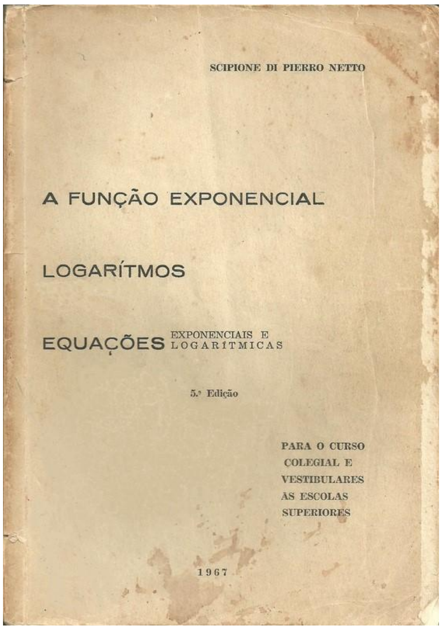

Figura 5: Capa do livro 2.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 3

Título: Matemática na escola renovada.

Autor(es): Scipione di Pierro Netto, Célia Contin Góes.

Editora: Saraiva.

Local de publicação: São Paulo – SP.

Ano de publicação: 1972.

Páginas: 246.

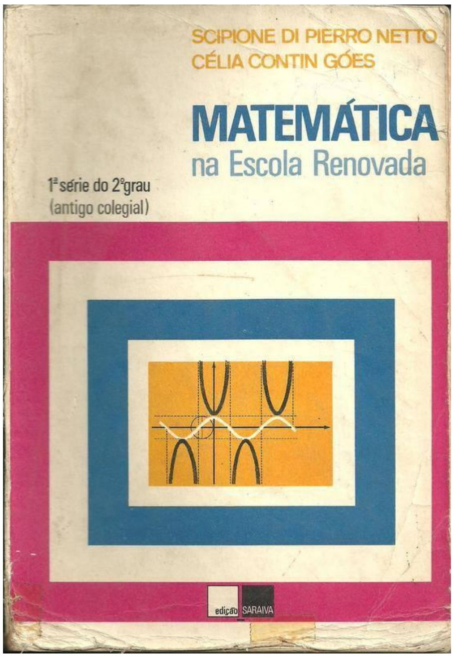

Figura 6: Capa do livro 3.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 4

Título: Matemática – Segundo grau.

Autor(es): José Guilherme Tizziotti, Damiam Schor.

Editora: Ática.

Local de publicação: São Paulo – SP.

Ano de publicação: 1975.

Páginas: 336.

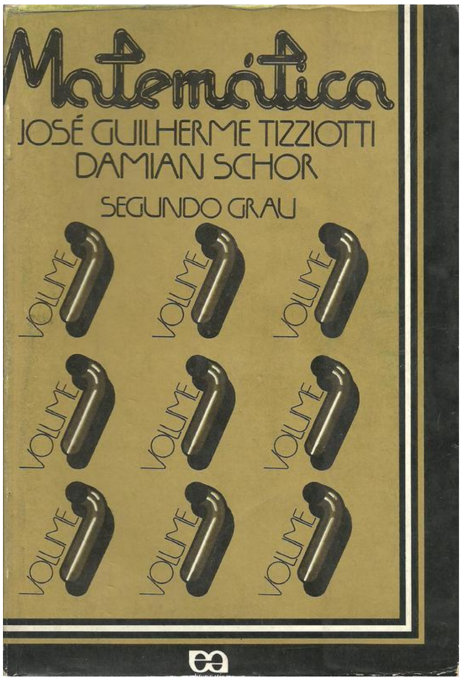

Figura 7: Capa do livro 4.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 5

Título: Matemática.

Autor(es): Vários autores.

Gelson Iezzi**,** Osvaldo Dolce, Jose Carlos Teixeira, Nilson José Machado, Marcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silva Castro e Antonio dos Santos Machado.

Editora: Atual Editora LTDA.

Local de publicação: São Paulo – SP.

Ano de publicação: 1981.

Páginas: 328.

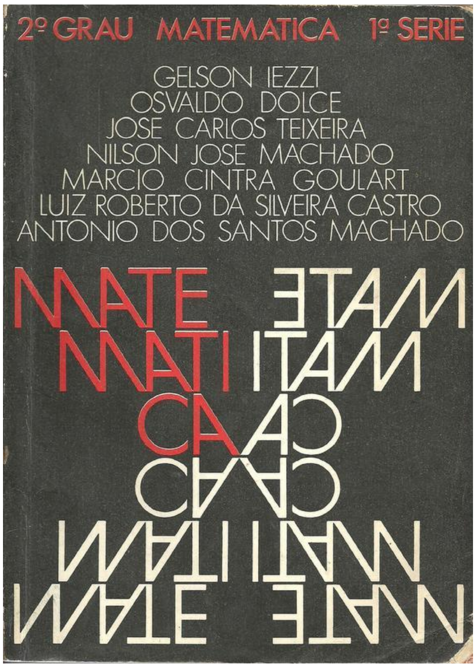

Figura 8: Capa do livro 5.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 6

Título: Trigonometria e Logaritmos – Notas de aula.

Autor(es): Desconhecidos.

Editora: Centro de Comunicação Gráfica Pro-Tec.

Local de publicação: São Paulo - SP

Ano de publicação: 1984

Páginas: 58

Figura 9: Capa do livro 6.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 7

Título: Exponencial e Logaritmos.

Autor(es): Glaciete Jardim Zago, Walter Antonio Sciani.

Editora: Érica.

Local de publicação: São Paulo – SP.

Ano de publicação: 1996.

Páginas: 86.

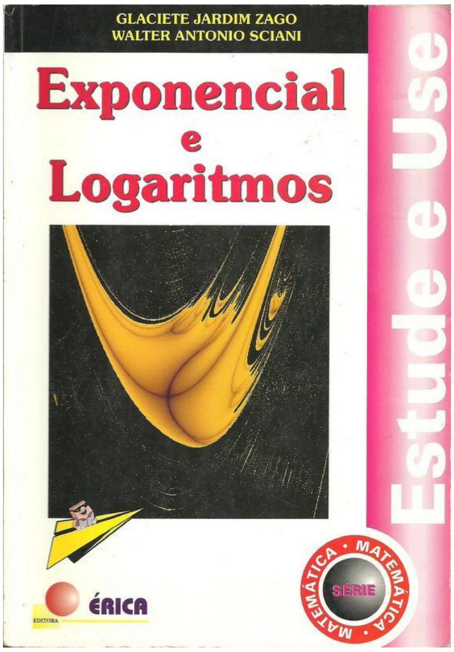

Figura 10: Capa do livro 7.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 8

Título: Matemática aula por aula.

Autor(es): Benigno Barreto Filho / Cláudio Xavier da Silva.

Editora: FTD.

Local de publicação: São Paulo – SP.

Ano de publicação: 1998.

Páginas: 336.

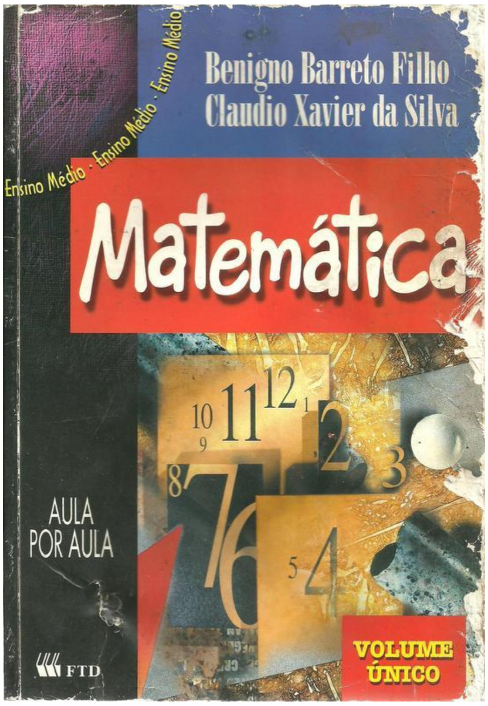

Figura 11: Capa do livro 8.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 9

Título: Matemática – Edição Compacta.

Autor(es): Carlos Alberto Marcondes dos Santos, Nelson Gentil, Sérgio Emílio Greco.

Editora: Ática.

Local de publicação: São Paulo – SP.

Ano de publicação: 2001.

Páginas: 432.

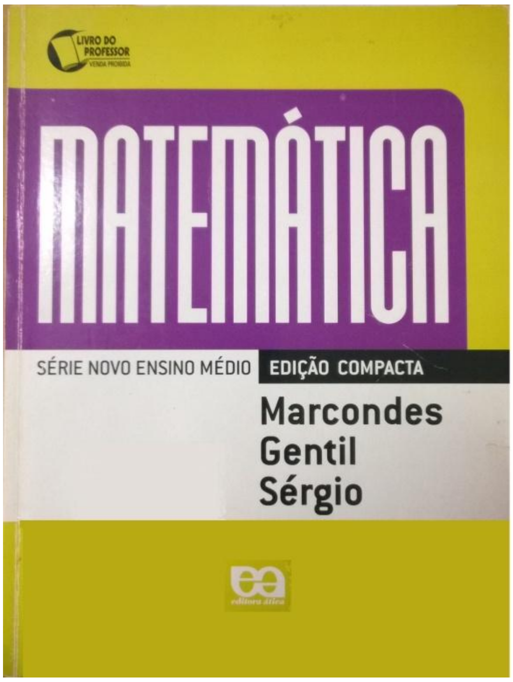

Figura 12: Capa do livro 9.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 10

Título: Matemática: Ciência e Aplicações.

Autor(es): Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida.

Editora: Atual.

Local de publicação: São Paulo – SP.

Ano de publicação: 2002.

Páginas: 589.

Figura 13: Capa do livro 10.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 11

Título: Matemática completa.

Autor(es): José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno.

Editora: FTD.

Local de publicação: São Paulo.

Ano de publicação: 2005.

Figura 14: Capa do livro 11.

Fonte: Elaborada pelo autor.

ANEXO B – LIVROS DIDÁTICOS ESTADUNIDENSES ANALISADOS

Livro 12

Título: Basic concepts of Elementary Mathematics.

Autor(es): William L. Schaaf.

Editora: John Wiley & Sons, Inc.

Local de publicação: New York, London.

Ano de publicação: 1960.

Páginas: 386

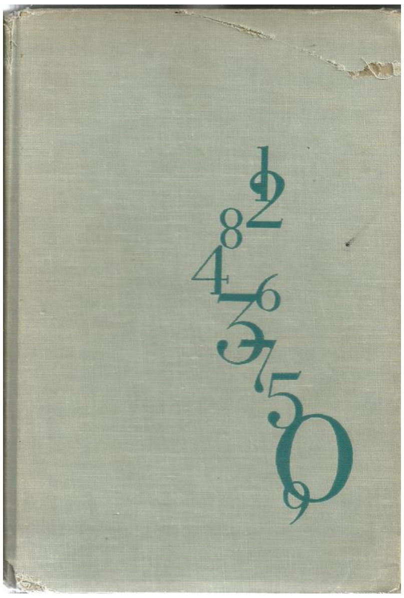

Figura 15: Capa do livro 12.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 13

Título: Integrated algebra and trigonometry.

Autor(es): Lester W.Schumpf, Thomas Munro.

Editora: Oxford Book Company.

Local de publicação: New York / USA.

Ano de publicação: 1967.

Páginas: 630 páginas.

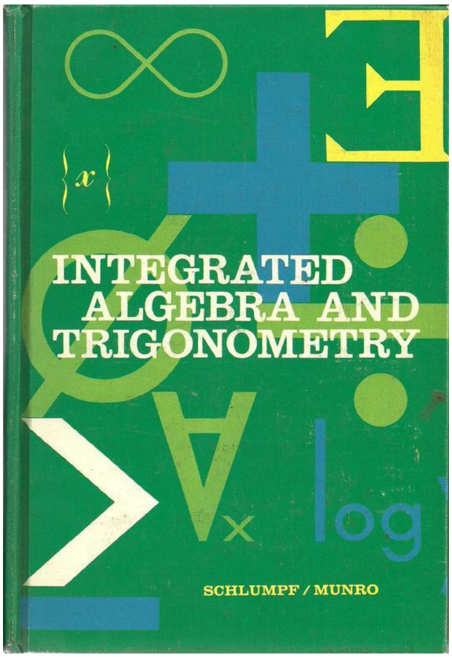

Figura 16: Capa do livro 13.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 14

Título: Advanced Algebra.

Autor(es): Edgerton and Carpenter's – Revisado por Myron R. White.

Editora: Allyn and Bacon.

Local de publicação: New York - USA.

Ano de publicação: 1968.

Páginas: 388.

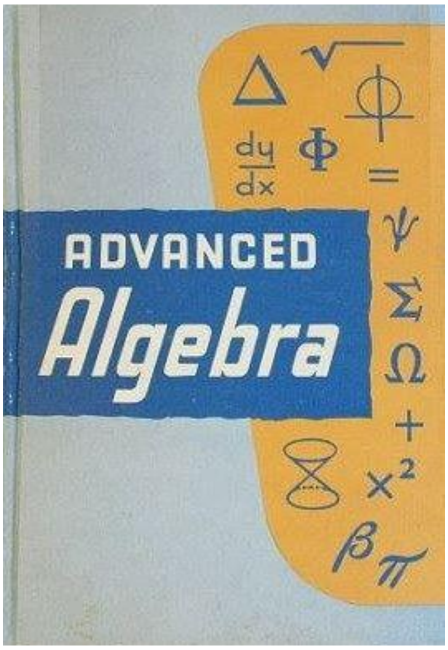

Figura 17: Capa do livro 14.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 15

Título: Intermediate Algebra with trigonometry.

Autor(es): John F. Devlin; Charles J.A. Halberg; Harold C.Trimble.

Editora: Scott, Foresman and company.

Local de publicação: Glenview, Illinois, USA.

Ano de publicação: 1972.

Páginas: 658.

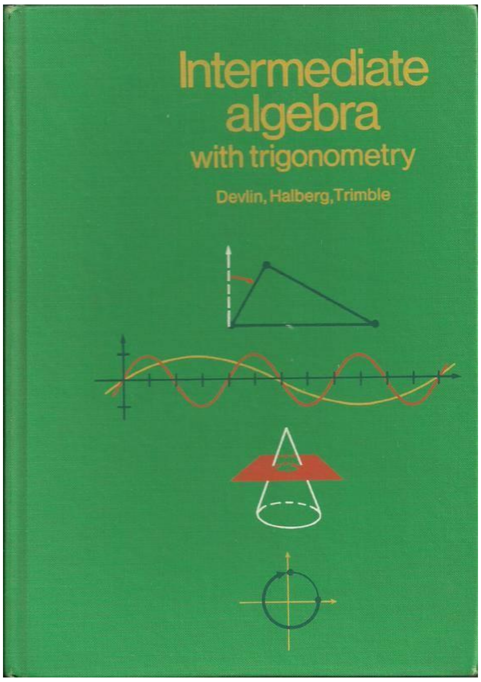

Figura 18: Capa do livro 15.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 16

Título: Algebra and Trigonometry – Structure and Method – Book 2.

Autor(es): Mary P. Dolciani; Robert H. Sorgenfrey; William Wooton; Robert B. Kane.

Editora: Houghton Mifflin Company.

Local de publicação: Boston - USA.

Ano de publicação: 1977.

Páginas: 620.

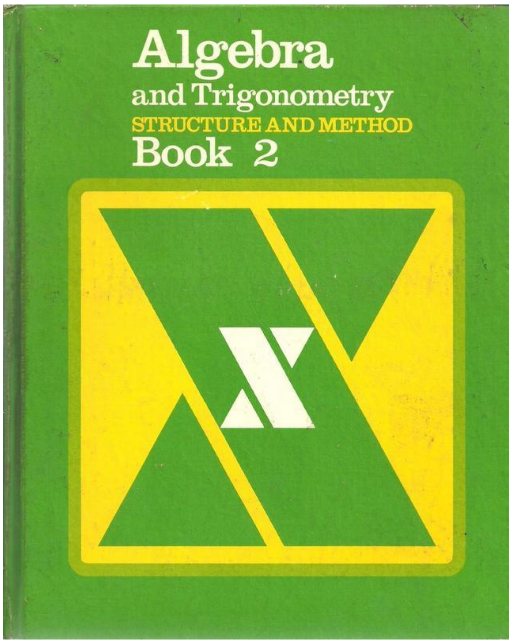

Figura 19: Capa do livro 16.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 17

Título: HBJ Algebra 2 with Trigonometry.

Autor(es): Arthur F.Coxford & Joseph N.Payne.

Editora: Harcourt Brace Jovanovich, Publishers (HBJ).

Local de publicação: New York – USA.

Ano de publicação: 1983.

Páginas: 694.

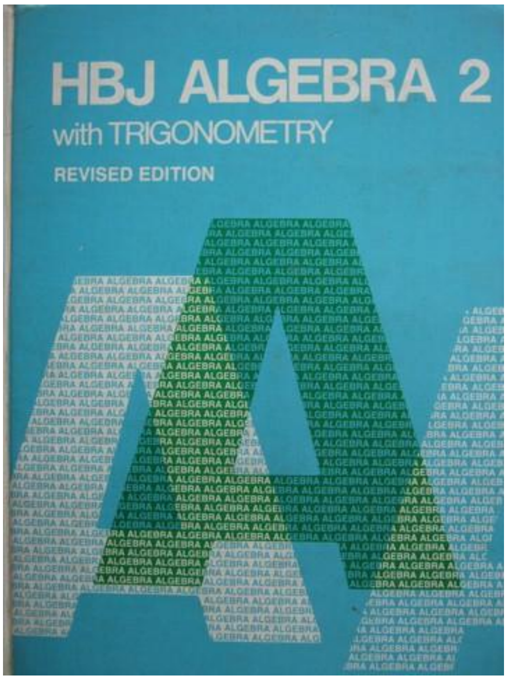

Figura 20: Capa do livro 17.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 18

Título: Algebra 2 With Trigonometry.

Autor(es): Clyde A. Dilley; Steven P. Meiring; John E. Tarr; Ross Taylor.

Editora: Heath.

Local de publicação: Lexinton, Massachussetts, USA.

Ano de publicação: 1990.

Páginas: 852

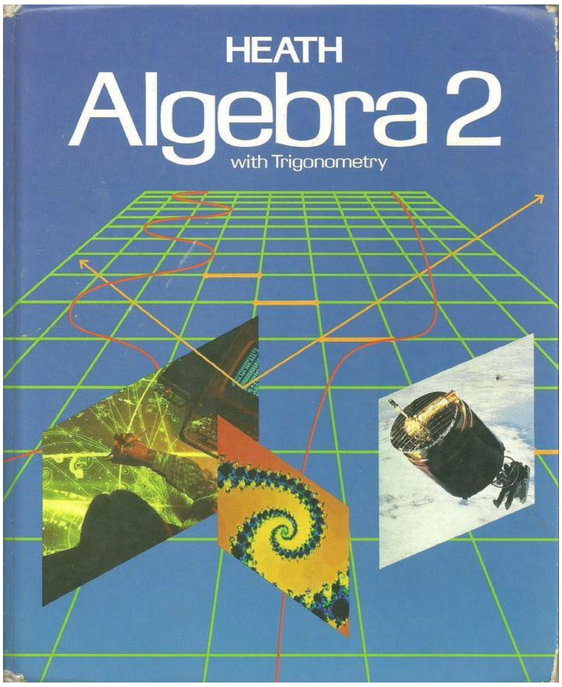

Figura 21: Capa do livro 18.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 19

Título: Advanced Mathematics: Pre-calculus with discrete mathematics and data Analysis.

Autor(es): Richard G.Brown.

Editora: McDougal Litell/Houghton Mifflin.

Local de publicação: New York – USA.

Ano de publicação: 1997.

Páginas: 930

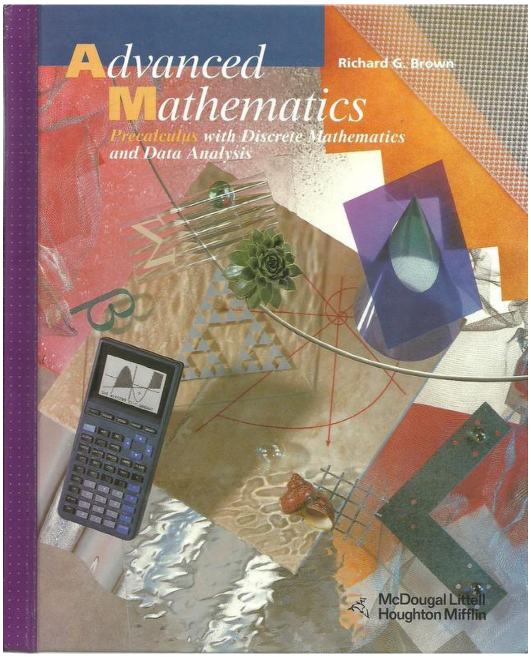

Figura 22: Capa do livro 19.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Livro 20

Título: Advanced Algebra Through Data Exploration: A Graphing Calculator Approach.

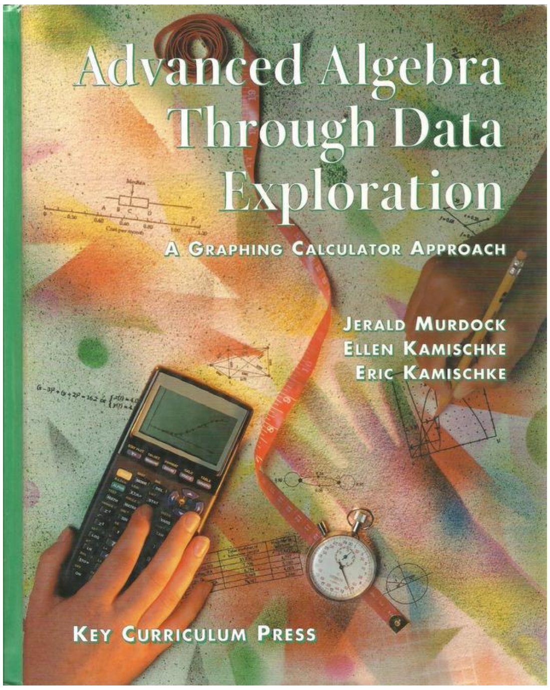

Figura 23: Capa do livro 20.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Autor(es): Jerald Murdock; Ellen Kamischke; Eric Kamischke.

Editora: Key Curriculum Press.

Local de publicação: Berkeley, California, USA.

Ano de publicação: 1998.

Páginas: 798.

Livro 21

Título: New York Math B an Integrated Approach.

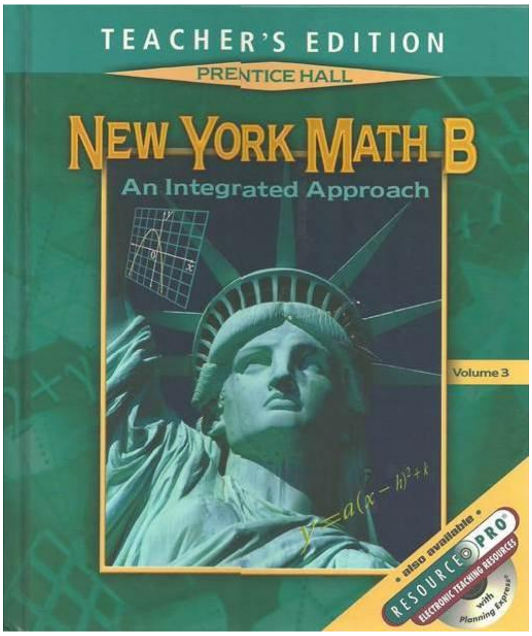

Figura 24: Capa do livro 21.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Autor(es): Allan Bellman, Sadie Chavis Bragg, Suzanne H. Chapin, Theodore J. Gardella, Bettye C. Hall, William G. Handlin, Sr. e Edward Manfre.

Editora: Prentice Hall.

Local de publicação: New York – USA.

Ano de publicação: 2002.

Páginas: 863.

Livro 22

Título: Beggining & Intermediate Algebra.

Autor(es): K. Elayn Martin-Gay.

Editora: Pearson Education, Inc.

Local de publicação: New Jersey – USA.

Ano de publicação: 2005.

Páginas: 950.

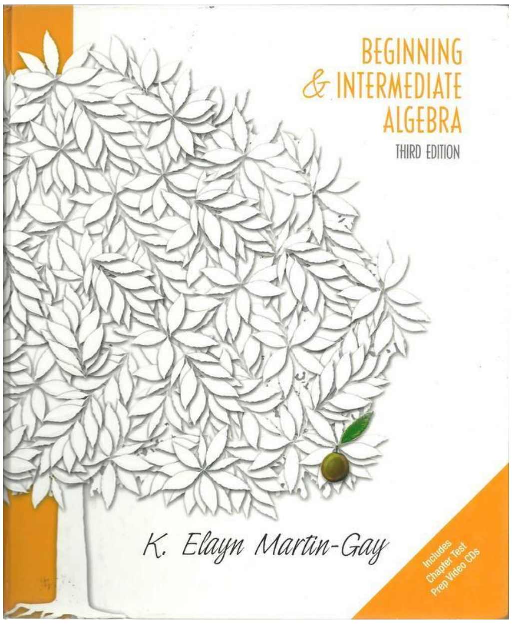

Figura 25: Capa do livro 22.

Fonte: Elaborada pelo autor.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa, Portugal: Edições 70, Persona, 2011.

BARRETO, B. F. SILVA, C. X. **Matemática aula por aula.** São Paulo: FTD, 1998.

BAUMGART, J. **História da álgebra**. Tradução Hygino H Domingues. São Paulo:

Atual, 1992. (Coleção tópicos de história da matemática para uso em sala de aula).

BELLMAN, A. et al. **New York Math B: An integrated Aproach.** New York: Prentice Hall, 2002.

BOYER, C. B. História da matemática / Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2ª ed. – São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BROWN, R. B. **Advanced Mathematics: Pre calculus with discrete mathematics and data Analysis.** New York: Houghton Mifflin Company, 1997.

COXFORD, A. F. PAYNE, J. N. **Algebra 2 with Trigonometry.** New York: HBJ, 1983.

DANTE, L.R. **Matemática: Contexto e Aplicações.** 1ª Ed. Vol1. São Paulo: Ática, 1999.

TRIGONOMETRIA e Logaritmos – Notas de aula. São Paulo: Pro-Tec, 1984.

DEVLIN, J. F; HALBERG, C.J.A; TRIMBLE, H. C. **Intermediate Algebra with trigonometry.** Glenview: Scott, Foresman and Company, 1972.

DILLEY, C. A. et al. **Algebra 2 with Trigonometry.** Lexinton: Heath, 1990.

DOLCIANI, M. P. SORGENFREY, R. H. WOOTON, W. KANE. R, B. **Algebra and Trigonometry – Structure and Method – Book 2.** Boston: Houghton Mifflin Company, 1977.

EDGERTON and Carpenter's – **Advanced Algebra.** New York: Allyn and Bacon, 1968.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática.** Campinas: Editora UNICAMP, 2011.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: ATLAS, 2002.

GIOVANI, J. R. BONJORNO, R. **Matemática completa.** São Paulo: FTD, 2005.

IEZZY, G. et al. **Matemática.** São Paulo: Atual Editora LTDA, 1981.

IEZZY, G. et al. **Matemática: Ciência e aplicações.** São Paulo: Atual, 2002.

KNOTT, C.G. **Napier tercentenary memorial volume.** Edinburg: Royal Society of Edinburg, 1915.

MAOR, E. ***e*: A história de um número.** Rio de Janeiro: Editora Record, 2003.

MACDONALD, W.R. **The construction of the wonderful Canon of logarithms**. Edinburgh: William Blackwood and sons,1889.

MARTIN – GAY, K. E. **Beggining & Intermediate Algebra.** New Jersey: Pearson Education, Inc, 2005.

MURDOCK, J. KAMISCHKE, E. KAMISCHKE, E. **Advanced Algebra Through Data Exploration: A Graphing Calculator Approach.** Berkeley: Key Curriculum Press, 1998.

NETTO, S, P. **A função exponencial, Logaritmos, Equações exponenciais e logarítmicas.** São Paulo: Livraria Nobel S.A., 1965.

NETTO, S, P. GOÉS, C, C. **Matemática na escola renovada.** São Paulo: Saraiva, 1972.

OLIVEIRA, F. D. **Análise de textos didáticos: Três estudos.** 2008. 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2008.

PEREIRA, M. I. C. OLIVEIRA, J. D. S. **Da origem dos Logaritmos ao uso da régua de cálculo no Ensino de Matemática.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XI, 2013, Curitiba, Anais, 12 f.

QUEIROZ, J. C. S. **Os Logaritmos nos livros didáticos de Matemática, Análise da perspectiva da Educação Matemática,** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XI, 2013, Curitiba, Anais, 15 f.

ROCHA, L. M. **Logaritmos e Equações Exponenciais.** São Paulo: Livraria Nobel S.A, 1965.

SANTOS, C. A. M. GENTIL, N. GRECO, S. E. **Matemática – Edição Compacta.** São Paulo: Ática, 2001.

SCHAAF, W. L. **Basic concepts of Elementary Mathematics.** New York: John Wiley & sons, Inc, 1960.

SCHUMPF, L.W. MUNRO, T. **Integrated algebra and trigonometry.** New York: Oxford Book Company, 1967.

SOARES, E.C. **Uma investigação histórica sobre os Logaritmos com sugestões didática para sala de aula.** 2011. 141f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2011.

SOARES, D. O. **Napier *versus* Dante.** 2012. 69 f. Monografia de Conclusão de Curso, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, São Paulo. 2012.

TIZZIOTI, J, G. SHOR, D. **Matemática – Segundo Grau.** São Paulo: Ática, 1975.

YOUSSEF, A. N; SOARES, Elizabeth; FERNANDEZ, Vicente Paz. – São Paulo: Scipione, 2005.

ZAGO, G. J; SCIANI, W. A. **Exponencial e Logaritmos.** São Paulo: Érica, 1996.

WALMSLEY, A. L.E. **A History of the "New Mathematics" Movement and its Relationship with Current Mathematical Reform.** Maryland: Universtity Press of America: 2003.