UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Débora Dalmolin

SOBRE A EXISTÊNCIA, UNICIDADE E O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA TERMOELÁSTICO

Santa Maria, RS, Brasil
2016

Débora Dalmolin

SOBRE A EXISTÊNCIA, UNICIDADE E O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA TERMOELÁSTICO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração: Matemática Pura, Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Marcio Violante Ferreira

Santa Maria, RS, Brasil
2016

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dalmolin, Débora
Sobre a Existência, Unicidade e o Comportamento Assintótico das Soluções de um Sistema Termoelástico. / Débora Dalmolin.-2016.
72 p.; 30cm

Orientador: Marcio Violante Ferreira
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2016

1. Sistema Termoelástico. 2. Teoria de Semigrupos. 3. Decaimento Exponencial. I. Violante Ferreira, Marcio II. Título.

Débora Dalmolin

SOBRE A EXISTÊNCIA, UNICIDADE E O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA TERMOELÁSTICO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração: Matemática Pura, Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 01 de março de 2016:

Marcio Violante Ferreira, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

João Paulo Lukaszczyk, Dr. (UFSM)

Lineia Schutz, Dra. (UFRGS)

Santa Maria, RS, Brasil
2016

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me guiar, iluminar, dar força para superar as dificuldades e permitir que mais um objetivo fosse concluído com êxito.

À minha família, pelo apoio e torcida ao longo de minha trajetória acadêmica.

Aos meus amigos, próximos ou distantes, e aos colegas da sala 1213 e 1214, pela companhia nos estudos, pelas conversas, risadas, pelos momentos de descontração, pelo companheirismo, pela motivação e paciência.

Ao professor Marcio Violante Ferreira, pela orientação, por toda matemática que me fez aprender, por sua dedicação e pelas contribuições para a melhoria deste trabalho.

Ao Departamento de Matemática, em especial aos professores e funcionários da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, pela disponibilidade e atenção sempre que solicitados.

Aos professores João Paulo Lukaszczyk e Lineia Schutz, pela disponibilidade em compor a banca avaliadora e pelas sugestões.

À CAPES, pelo apoio financeiro para a realização desta dissertação durante esses dois anos.

Por fim, agradeço a todos que, mesmo não tendo seus nomes citados, com certeza sabem que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

"Mestre não é quem sempre ensina,
mas quem de repente aprende."
Guimarães Rosa

RESUMO

SOBRE A EXISTÊNCIA, UNICIDADE E O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA TERMOELÁSTICO

AUTORA: Débora Dalmolin
ORIENTADOR: Marcio Violante Ferreira

Neste trabalho estudamos a existência, unicidade e o comportamento assintótico da solução de um sistema termoelástico linear em dimensão um. Tal sistema é composto por um par de equações diferenciais parciais acopladas, sendo complementado por condições iniciais e de fronteira, a saber:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \sigma(x)u_t + \alpha\theta_x = 0, \quad 0 < x < L \ \text{ e } \ 0 < t < +\infty, \\ \theta_t - \theta_{xx} + \beta u_{xt} = 0, \quad 0 < x < L \ \text{ e } \ 0 < t < +\infty, \\ u(x,0) = u_0(x),\, u_t(x,0) = u_1(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad 0 < x < L, \\ u(0,t) = u(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

onde α e β são constantes de acoplamento reais estritamente positivas.

Fisicamente, o sistema modela a ação recíproca entre as vibrações de uma corda elástica e a variação de sua temperatura. Provamos, inicialmente, a existência e unicidade de solução do sistema fazendo uso da teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados. Para a análise do comportamento assintótico da solução, utilizamos um método que consiste em perturbar adequadamente a energia do sistema e, com isso, provamos que a energia total do sistema decai exponencialmente a zero quando $t \to \infty$.

Palavras-chave: Sistema termoelástico, teoria de semigrupos, decaimento exponencial.

ABSTRACT

ON THE EXISTENCE, UNIQUENESS AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTIONS OF A THERMOELASTIC SYSTEM

AUTHOR: Débora Dalmolin
ADVISOR: Marcio Violante Ferreira

In this work we study the existence, uniqueness and the asymptotic behavior of the solutions of a 1-dimensional linear thermoelastic system. Such a system is composed by a pair of coupled partial differential equations, being supplemented by initial and boundary conditions, namely:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \sigma(x)u_t + \alpha\theta_x = 0, \quad 0 < x < L \;\text{ e }\; 0 < t < +\infty, \\ \theta_t - \theta_{xx} + \beta u_{xt} = 0, \quad 0 < x < L \;\text{ e }\; 0 < t < +\infty, \\ u(x,0) = u_0(x),\, u_t(x,0) = u_1(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad 0 < x < L, \\ u(0,t) = u(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

where α and β are real strictly positive coupling constants.

Physically, the system models the reciprocal action between vibrations of an elastic string and variation of its temperature. We prove, initially, existence and uniqueness of solutions of the system, making use of the Theory of Semigroups of Bounded Linear Operators. In the analysis of the asymptotic behavior of the solution, we use a method that consists in adequately perturb the system's energy and, with that, prove that the total energy of the system decays exponentially to zero as $t \to \infty$.

Keywords: Thermoelastic system, semigroups theory, exponential decay.

LISTA DE SÍMBOLOS

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$	ponto do espaço $\mathbb{R}^n$;
$x.y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$	produto interno em $\mathbb{R}^n$;
$(\ ,\ )_X$	produto interno no espaço vetorial X;
$\\| \cdot \\|_X$	norma no espaço vetorial X;
$u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$	derivada de u em relação a t;
X^*	espaço dual do espaço normado X;
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$	multi-índice;
$\|\alpha\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$	ordem do multi-índice α;
q. s.	quase sempre;
$\langle\ ,\ \rangle$	produto na dualidade $X^* \times X$;
$\mathscr{L}(X, Y)$	conjunto dos operadores lineares e limitados de X em Y;
$\mathscr{L}(X)$	álgebra dos operadores lineares e limitados em X;
$\{T(t)\}_{t \geq 0}$	semigrupo de operadores lineares e limitados em X;
Ω	aberto do $\mathbb{R}^n$;
$(\ ,\ )$	produto interno em $L^2(\Omega)$;
$\| \cdot \|$	norma em $L^2(\Omega)$;
$C_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto;
$\mathscr{D}(\Omega)$	$C_0^\infty = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ com a noção de convergência;
$\mathscr{D}'(\Omega)$	$\{u : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}; u$ linear e contínua$\}$;
$\mathbf{D}^\alpha u$	$\dfrac{\partial^{\|\alpha\|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$;
$W^{m,p}(\Omega)$	$\{u \in L^p(\Omega); \mathbf{D}^\alpha u \in L^p(\Omega),$ para todo $\|\alpha\| \leq m\}$;
$H^m(\Omega)$	$W^{m,2}(\Omega)$;
$\\|u\\|_{W^{m,p}(\Omega)}$	$\left(\sum\limits_{\|\alpha\| \leq m} \int\limits_\Omega \|\mathbf{D}^\alpha u(x)\|_{L^p(\Omega)}^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, se $1 \leq p < \infty$;
$\\|u\\|_{W^{m,\infty}}$	$\max\limits_{\|\alpha\| \leq m} \\|\mathbf{D}^\alpha u(x)\\|_{L^\infty(\Omega)}$, se $p = \infty$;
$W_0^{m,p}(\Omega)$	fecho de C_0^∞ em $W^{m,p}(\Omega)$;
$H^1(\Omega)$	$\{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, ..., n\}$;
$H^2(\Omega)$	$\{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \in L^2(\Omega),\ i, j = 1, ..., n\}$;
$H_0^1(\Omega)$	$\{u \in H^1(\Omega); u\|_{\partial\Omega} = 0\}$;
$((\ ,\ ))$	produto interno em $H_0^1(\Omega)$;
$\\| \cdot \\|$	norma em $H_0^1(\Omega)$;
$C([0, \infty),\ X)$	espaço das funções contínuas de $[0, \infty)$ em X;
$C^1([0, \infty),\ X)$	espaço das funções de classe C^1 de $[0, \infty)$ em X;

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ gradiente da função escalar u.

Sumário

INTRODUÇÃO

Consideramos, neste trabalho, o sistema acoplado de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \sigma(x)u_t + \alpha\theta_x = 0, \quad 0 < x < L \ \text{ e } \ 0 < t < +\infty, \\ \theta_t - \theta_{xx} + \beta u_{xt} = 0, \quad 0 < x < L \ \text{ e } \ 0 < t < +\infty, \\ u(x,0) = u_0(x),\, u_t(x,0) = u_1(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad 0 < x < L, \\ u(0,t) = u(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde α e β são constantes de acoplamento reais estritamente positivas. Supõe-se que a função $\sigma(x)$, que aparece na primeira equação, é essencialmente limitada e estritamente positiva, isto é,

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_1, \ \text{q.s. em } (0\,,\,L), \tag{2}$$

onde σ_0 e σ_1 são constantes.

Como pode ser visto em Nowacki [16], Achenbach [1] e Ciarlet [6], o sistema de equações acima modela a ação recíproca entre as vibrações (deformações) de uma corda elástica de comprimento L (cuja amplitude do movimento é dada pela função $u(x,t)$) e a variação de temperatura em cada ponto da mesma em relação a uma temperatura referencial fixa (variação esta dada pela função $\theta(x,t)$). A função $\sigma(x)$, que aparece no sistema (1), representa um mecanismo de dissipação ("damping") interna variável.

A *Energia Total* do sistema (1) é dada por

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(u_t^2 + u_x^2 + \frac{\alpha}{\beta}\theta^2 \right) dx$$

e um cálculo direto nos dá, pelo menos formalmente,

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) = -\int_0^L \sigma(x)u_t^2\, dx - \frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta_x^2\, dx \leq 0,$$

o que mostra que a Energia decresce com o passar do tempo. O objetivo principal do nosso trabalho é, justamente, mostrar que $\mathscr{E}(t) \to 0$ exponencialmente quando $t \to +\infty$.

Dado o grande interesse em se entender matematicamente fenômenos físicos como o descrito pelo sistema (1), é vasta a literatura que trata do assunto. Podemos citar, por exemplo, o trabalho de Dafermos [7], que deu substanciais contribuições para o estudo da existência de soluções bem como da estabilidade assintótica das soluções do sistema de equações em termoelasticidade linear, em dimensão três. Para este mesmo problema, mas supondo que a força restauradora é proporcional ao vetor velocidade, Pereira e Menzala [18] provaram que, num meio isotrópico e não-homogêneo, a energia total associada ao sistema decai exponencialmente a zero quando $t \to +\infty$. Ressalte-se que, neste trabalho, os autores consideraram σ como constante.

No caso em que se considera o sistema termoelástico linear em dimensão um, Rivera [19] obteve resultados de decaimento exponencial para a energia, até terceira ordem, do problema (1), mas sem considerar mecanismos de dissipação interna, isto é, analisou o caso em que $\sigma \equiv 0$. O resultado obtido é de extrema relevância, haja vista que só a dissipação térmica é suficiente para a estabilização assintótica da energia. No entanto, o autor considerou dados iniciais com bem mais regularidade do que a considerada no presente trabalho. Além disso, a prova da existência e unicidade de solução de (1) que apresentamos aqui difere em alguns aspectos (ferramentas de análise funcional utilizadas) da apresentada por Rivera [19].

A análise matemática do comportamento da energia total é, obviamente, de grande interesse para outros sistemas de equações diferenciais parciais, que modelam diferentes fenômenos físicos. Por exemplo, utilizando multiplicadores adequados, Ferreira e Menzala [9] obtiveram a estabilização da solução de um sistema de ondas elásticas semi-linear em domínios exteriores e, em [10], resultados análogos para um sistema elasto-eletromagnético não-linear. Obviamente há, nesses casos em que se considera fenômenos em domínios exteriores, a dificuldade adicional de se trabalhar numa região não limitada do espaço.

Problemas ainda mais gerais podem ser estudados, como aqueles em que se consideram mecanismos de dissipação na fronteira ou mesmo dissipação localizada, isto é, atuando apenas numa parte do domínio. Os resultados que apresentamos neste trabalho são um caminho para tratar estes casos e outros ainda mais gerais como, por exemplo, o problema não-linear associado ao modelo (1).

Nosso trabalho está estruturado em três capítulos, dispostos da seguinte forma: No primeiro capítulo apresentamos as ferramentas necessárias que serão usadas no desenvolvimento desse trabalho. Iniciamos com as definições e resultados sobre Análise Funcional do nosso interesse. Posteriormente é feita uma breve revisão da teoria de Distribuições, dos Espaços L^P e Espaços de Sobolev. Finalizamos este capítulo com um estudo sobre a teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados a qual fornece um método que é usado para demonstrar resultados de existência de solução de EDPs.

No Capítulo 2 obtemos a existência e unicidade de solução de (1) utilizando a teoria de Semigrupos de Operadores Lineares. Aqui utilizamos fortemente os Teoremas de Lax-Milgram e de Lumer-Phillips, os quais foram apresentados no Capítulo 1.

No Capítulo 3 estudamos o comportamento assintótico da solução através do método da Perturbação da Energia. Utilizando um funcional adequado para perturbar a energia do sistema, provamos que a mesma decai exponencialmente no tempo.

As conclusões e as referências encerram a dissertação.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste capítulo pretendemos apresentar as ferramentas que consolidaram o desenvolvimento dos Capítulos 2 e 3. Salientamos que, para um estudo completo dos conceitos e resultados aqui tratados, referências serão indicadas no decorrer do texto.

1.1 RESULTADOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

Nesta seção, destacaremos o Teorema de Lax-Milgram, que generaliza o Teorema de Representação de Riesz. Vamos usá-lo para garantir a existência de solução do nosso problema de valor inicial e de contorno, o qual será abordado no Capítulo 2.

Baseados em [4] e [14], apresentamos inicialmente o Teorema de Hahn-Banch em sua forma analítica. Ele nos fornece condições para estendermos um funcional linear f definido em um subespaço Z a todo o espaço vetorial X, onde $Z \subset X$, sem alterarmos as suas propriedades.

Definição 1.1 *Seja X um espaço vetorial real. Uma aplicação $p : X \to \mathbb{R}$ diz-se um funcional sublinear se satifaz*

a) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \forall \ x \in X \ e \ \forall \ \lambda > 0;$

b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \ \forall \ x, y \in X.$

Teorema 1.1 ***(Hahn-Banach)*** *Seja X um espaço vetorial real e $p : X \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Seja, também, $Z \subset X$ um subespaço vetorial e $f : Z \to \mathbb{R}$ um funcional* *linear que satisfaz*

$$f(x) \leq p(x), \ \forall \ x \in Z.$$

Então existe um funcional linear $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ *que estende* f*, isto é,*

$$\tilde{f}(x) = f(x), \ \forall \ x \in Z \quad e \quad \tilde{f}(x) \leq p(x), \ \forall \ x \in X.$$

Definição 1.2 *Uma norma num espaço vetorial* K ($K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) *é uma função* $\| \ . \ \| : X \to \mathbb{R}$ *que satisfaz*

a) $\|x\| \geq 0, \ \ \forall \ x \in X$*;*

b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*

c) $\alpha\|x\| = |\alpha|\|x\|, \ \ \forall \ \alpha \in K \ \ e \ \ x \in X$*;*

d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \ \forall \ x, y \in X$*.*

Definição 1.3 *Um espaço vetorial normado completo, com a métrica proveniente da norma, é chamado espaço de Banach.*

Teorema 1.2 ***(Princípio da Limitação Uniforme)*** *Sejam* X *um espaço de Banach,* Y *um espaço normado e* (T_n) *uma sequência em* $\mathscr{L}(X, Y)$ *tal que, para cada* $x \in X$*,* $(\|T_n x\|)$ *é limitada, ou seja, para cada* $x \in X$

$$\|T_n x\| \leq C_x, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Então $(\|T_n\|)$ *é limitada, ou seja, existe* $C \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\|T_n\| \leq C, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

O Teorema da Limitação Uniforme estabelece que a limitação das normas $\|T_n x\|$ ponto a ponto implica a limitação uniforme das normas $\|T_n\|$. A sua demonstração pode ser encontrada em [4] e [14], bem como o corolário a seguir, o qual é consequência direta deste teorema.

Corolário 1.1 *Sejam* X *espaço de Banach,* Y *espaço normado e* (T_n) *sequência em* $\mathscr{L}(X, Y)$ *tal que, para cada* $x \in X$*,* $(T_n x)$ *converge a um limite denotado* Tx*. Então* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *e existe* $C \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\|T_n\| \leq C, \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.4 *Seja H um espaço vetorial sobre o corpo escalar K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um produto interno em H é uma aplicação $(\ . \ , \ . \ )_H : H \times H \to K$ que satisfaz as seguintes propriedades, $\forall \ x, y, z \in H$ e $\alpha \in K$:*

a) $(x + y, z)_H = (x, z)_H + (y, z)_H$;

b) $(\alpha x, y)_H = \alpha(x, y)_H$;

c) $(x, y)_H = \overline{(y, x)}_H$;

d) $(x, x)_H \geq 0$ *e* $(x, x)_H = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definição 1.5 *Seja H um espaço vetorial com produto interno $(\ . \ , \ . \ )_H$ e norma induzida $\| \ . \ \|_H = (\ . \ , \ . \ )_H^{1/2}$. Dizemos que H é um espaço de Hilbert se é completo com a norma $\| \ . \ \|_H$.*

A partir de agora representaremos a norma no espaço vetorial H, induzida pelo produto interno $(\ . \ , \ . \ )_H$, por $\| \ \cdot \ \|_H$. Além disso, H^* representará o dual topológico do espaço vetorial normado H.

O próximo resultado estabelece uma identificação entre um espaço de Hilbert e seu dual.

Teorema 1.3 ***(Representação de Riez-Fréchet)*** *Seja H um espaço de Hilbert. Dado $f \in H^*$, existe um único $z \in H$ tal que*

$$f(x) = (x, z)_H, \quad \forall \ x \in H.$$

Além disso, $\|f\|_{H^*} = \|z\|_H$.

Demonstração: Consultar [4] ou [14].

Definição 1.6 *Seja H um espaço vetorial real. Uma aplicação $a : H \times H \to \mathbb{R}$ é chamada forma bilinear se a é linear na primeira variável e na segunda variável, ou seja, satisfaz $\forall \ u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in H$ e $\forall \ \alpha \in \mathbb{R}$,*

a) $f(\alpha u_1 + u_2, v) = \alpha f(u_1, v) + f(u_2, v)$;

b) $f(u, \alpha v_1 + v_2) = \alpha f(u, v_1) + f(u, v_2)$.

Definição 1.7 *Seja H um espaço normado e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dizemos que*

a) a é contínua, se existe constante $K > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq K\|u\|_H\|v\|_H, \quad \forall \ u, v \in H;$$

b) a é coerciva, se existe constante $\beta > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq \beta \|u\|_H^2, \quad \forall\ v \in H.$$

O teorema enunciado a seguir é útil para se provar a existência de soluções, sob certas condições, para problemas de contorno.

Teorema 1.4 ***(Lax-Milgram)*** *Seja H um espaço de Hilbert real e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva sobre H. Se $f \in H^*$, então existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = f(v), \quad \forall\ v \in H.$$

Demonstração: Consultar [4] ou [14].

A seguir apresentamos um fato, simples, porém muito útil no decorrer do desenvolvimento desse trabalho, o qual pode ser encontrado em [4] (p. 105).

"Se H é um espaço de Hilbert com produto interno $(\, . \, , \, . \,)_H$ e $u \in C^1([0,+\infty);\ H)$, então

$$\|u\|_H^2 \in C^1([0,+\infty);\ \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\|u\|_H^2 = 2\left(\frac{d}{dt}u, u\right)_H."$$

1.2 OS ESPAÇOS L^p

Nesta seção enunciaremos alguns resultados clássicos referentes aos espaços de funções L^p. Para maiores detalhes desses resultados bem como um estudo completo, consultar [2], [3], [4], [11], [15] e [21].

Inicialmente indicamos [3] para uma apresentação dos conceitos de espaços de medida e de funções e conjuntos mensuráveis que estão diretamente relacionados com a definição do espaços de funções L^p.

Dizemos que u é equivalente a v em Ω com respeito a medida de Lebesgue, e escrevemos $u \equiv v$, se u e v têm valores diferentes apenas sobre um subconjunto de Ω de medida nula. A classe de equivalência determinada por u consiste de todas as funções que são equivalentes a u. Com base nisso, introduzimos a definição dos espaços L^p.

Definição 1.8 *Seja p um número real tal que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Representaremos por $L^p(\Omega)$ a classe de equivalência de todas as funções mensuráveis a Lebesgue, ou* *seja,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ \ u \ \ \text{é} \ \ \text{mensurável} \ \ e \int\limits_{\Omega} |u|^p \ dx < \infty \right\}.$$

Em outras palavras, na definição acima, podemos dizer que nos espaços $L^p(\Omega)$ duas funções, as quais são diferentes em um subconjunto de medida nula, são identificadas uma com a outra.

Proposição 1.1 *Seja* $1 \leq p < \infty$. *O espaço* $L^p(\Omega)$ *é um espaço vetorial real. Além disso, a seguinte função define uma norma em* $L^p(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Temos que $L^p(\Omega)$ com a norma $\|u\|_p$, é um espaço de Banach.

Observação 1.1 *Exigir que* $u \in L^p(\Omega)$ *é uma função mensurável, na definição anterior, é necessário, pois caso contrário não podemos garantir que de* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$, *resultaria que* $|u.v| \in L^1$, *por exemplo.*

Nos próximos capítulos trabalharemos com frequência com $L^2(\Omega)$, o qual é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(x)v(x) \ dx, \quad \forall \ u, v \in L^2(\Omega),$$

e, a respectiva norma

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} u^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \ u \in L^2(\Omega).$$

A fim de fixarmos notação para os capítulos seguintes, denotaremos, simplesmente, por $(\ . \ , \ . \ )$ o produto interno em $L^2(\Omega)$ e por $| \ . \ |$ quando se tratar da norma de uma função em $L^2(\Omega)$.

O ESPAÇO L^∞

As definições e propriedades explicitadas a seguir, foram baseadas em [2].

Uma função u, mensurável em Ω, é dita *essencialmente limitada* em Ω se existe constante real k tal que $|u(x)| \leq k$ quase sempre em Ω.

É chamado de supremo essencial de $|u|$ e é denotado por $\sup\limits_{x \in \Omega} ess|u(x)|$, a maior das cotas inferiores de tais constantes k.

Denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω.

Uma norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)| = \inf\{k \in \mathbb{R};\ |u(x)| \leq k \ \text{ q.s. em } \Omega\}$$

Temos que $L^\infty(\Omega)$ com a norma definida acima é um espaço de Banach.

A seguir enunciaremos algumas desigualdades conhecidas que serão usadas posteriormente no desenvolvimento desse trabalho. Uma demonstração dessas desigualdades pode ser encontrada em [4] ou [15].

Proposição 1.2 ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam a e b números reais não negativos. Se $1 < p, q < \infty$ são tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proposição 1.3 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $u \in L^p$ e $v \in L^q$, onde $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1$ e tem-se a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv|dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|u\|_p\|v\|_q.$$

Observação 1.2 *Os elementos de L^p são formados por classes de equivalência, pois a integral não se altera se mudarmos a função num conjunto de medida nula. Assim, qualquer dois representantes de uma mesma classe, digamos f e g, coincidem em quase todo ponto, isto é, $f = g$ q.t.p.*

Proposição 1.4 ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Se $u, v \in L^p$, onde $1 \leq p < \infty$, então*

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Teorema 1.5 *Dados $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, o conjunto das funções contínuas em Ω é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demostração: Consultar a referência [2] ou [21].

Definição 1.9 ***(Função Localmente Integrável)*** *Definimos $L^1_{loc}(\Omega)$ como o conjunto de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{C}$ mensuráveis a Lebesgue que têm a propriedade de que*

$$\int_K |u(x)|dx < \infty,$$

qualquer que seja $K \subset \Omega$ compacto. Os elementos de $L^1_{loc}(\Omega)$ são chamados de funções localmente integráveis de $\mathbb{R}^n$.

Observe que $L^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. No entanto a inclusão contrária não é válida, basta considerar as funções constantes. Além disso, $C(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Corolário 1.2 *$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

1.3 DISTRIBUIÇÕES

Nesta seção enunciaremos alguns resultados referentes a funções teste e distribuições. Para um estudo completo, sugerimos ao leitor consultar as referências [13], [4], [5] e [20].

1.3.1 Notações e Conceitos Básicos

No que segue vamos fixar algumas notações, a fim de estabelecermos de uma maneira mais clara passos do problema a ser estudado.

Seja $\mathbb{Z}_+$ o conjunto dos inteiros não-negativos. Chamaremos de multi-índice qualquer n-upla em $\mathbb{Z}^n_+$, ou seja,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \text{ é multi-índice se } \alpha_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, 2, 3, ..., n.$$

Definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ o comprimento de $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Seja $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ uma variável em $\mathbb{R}^n$ e α um multi-índice. Denotamos, para $j = 1, 2, ...n$,

$$\mathbf{D}^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Assim, o número $|\alpha|$ acima representa a ordem de derivação, enquanto que cada coordenada α_j representa a quantidade de derivadas na direção de x_j que serão calculadas.

Sendo $\alpha = (0, 0, 0, ..., 0)$, o operador derivação será igual ao operador identidade, ou seja, $\mathbf{D}^0 u = u$ para toda função u.

Dizemos que $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_j \leq \beta_j$, $\forall\ j = 1, 2, ..., n$. E $\alpha < \beta$, se ocorre $\alpha \leq \beta$ e, além disso, $\alpha_j < \beta_j$ para algum $j = 1, 2, ..., n$.

Os próximos resultados evidenciam a notação descrita acima.

Teorema 1.6 ***(Teorema Binomial)*** *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ tem-se*

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\alpha y^{\alpha-\beta}.$$

O teorema descrito a seguir generaliza a regra do produto. E, com a notação de multi-índice, é mais geral, pois pode ser usada para derivar composição de operadores diferenciais.

Teorema 1.7 ***(Fórmula de Leibniz)*** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, então vale*

$$\boldsymbol{D}^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \boldsymbol{D}^\alpha f \boldsymbol{D}^{\alpha-\beta} g.$$

1.3.2 Funções Teste

Neste tópico trabalharemos com as funções teste que formam o domínio das distribuições. Destacaremos algumas propriedades.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Com as notações de derivadas de ordem superior, vistas no tópico anterior, vamos denotar o seguinte conjunto

$$C^\infty(\Omega) = \{u \in C(\Omega);\ \mathbf{D}^\alpha u \in C(\Omega),\ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}.$$

Definição 1.10 *Se $u \in C(\Omega) = C^0(\Omega)$, definimos o suporte de u como sendo o conjunto*

$$supp u = \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}.$$

Note que o *suppu* é o menor fechado tal que u se anula em seu complementar.

A definição anterior, não é adequada quando se trabalha funções L^p, visto que as funções em L^p não necessariamente são funções contínuas. Consultando [4] é possível, no entanto, definir o suporte para funções em L^p trabalhando-se com suas classes de equivalência.

A próxima definição é útil para o desenvolvimento do nosso trabalho, pois mostraremos resultados, nos próximos capítulos, a partir de propriedades dessa definição e sua relação com outros espaços.

Definição 1.11 *Definimos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis e com suporte, $supp\varphi$, compacto em Ω. Os elementos do espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções teste.*

Definição 1.12 *Uma sequência de funções* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *de* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge para zero quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

a) Existe $K \subset \Omega$ *compacto tal que supp*$(\varphi_j) \subset K, \quad \forall\ j \in \mathbb{N}$*;*

b) $\boldsymbol{D}^\alpha \varphi_j \to 0$ *uniformemente em* $\mathbb{R}^n, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Definição 1.13 *Diz-se que uma sequência de funções* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *de* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge para uma função* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *quando*

$$(\varphi_j - \varphi) \to 0 \quad em \quad \Omega \quad quando \quad j \to \infty.$$

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência acima definida é denominado o espaço das funções teste é representado por $\mathscr{D}(\Omega)$.

Definição 1.14 *Uma função* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *é derivável no sentido fraco em* Ω*, quando existe uma função* $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}\ dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)\ dx, \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

A função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *denomina-se a derivada fraca de* u *em relação a* x_k *e representa-se* v *por* $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$.

1.3.3 Teoria das Distribuições

Nesta seção apresentaremos os conceitos básicos da teoria das distribuições, principalmente a noção de derivada distribucional, os quais serão necessários para introduzir os espaços de Sobolev. Na seção anterior definimos a convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, ao definir funcionais contínuos em $C_0^\infty(\Omega)$ temos que, tal funcional é uma distribuição, isto é

Definição 1.15 *Seja* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^n$*. Um funcional linear contínuo* $u : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ *é dito uma distribuição em* Ω.

De outra forma, a definição acima significa que se $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$, então se u satisfaz

a) $u(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = u(\varphi_1) + \lambda u(\varphi_2)$ (linearidade)

b) Se $\varphi_j \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$, então $u(\varphi_j) \to u(0) = 0$ (continuidade) então u é uma distribuição.

Denotamos o espaço das distribuições definidas em $C_0^\infty(\Omega)$ por $\mathscr{D}'(\Omega)$. O espaço das distribuições é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Além disso, representamos a ação de $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ em $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ por $u(\varphi)$ ou $\langle u, \varphi \rangle$.

Exemplo 1.1 *Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ definimos a distribuição "delta de Dirac" por $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Verifica-se que o funcional δ é linear e também contínuo, isto é, uma distribuição.*

Definição 1.16 *Dizemos que uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ converge a $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se*

$$\langle u_j, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Escrevemos $u_j \to u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Os próximos resultados esclarecem a noção de derivada no sentido das distribuições.

Definição 1.17 *Seja $u : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. A derivada de ordem α de u é definida por*

$$\langle \boldsymbol{D}^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \boldsymbol{D}^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Tem-se que $\mathbf{D}^\alpha u \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Lema 1.1 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então u possui derivada de todas as ordens no sentido das distribuições.*

Assim, vemos que toda função $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, possui derivada no sentido das distribuições.

1.4 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Inicialmente introduziremos a noção de espaço de Sobolev e algumas propriedades elementares. Para maiores detalhes e um estudo completo deste tópico consultar as referências [2], [20] e [8].

Vamos considerar u a função *Heaviside* definida em $\mathbb{R}$, por

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Verifica-se, via [13], que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e que $u' = \delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Logo, percebemos que $\mathbf{D}^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função $L^p(\Omega)$. No entanto, quando $\mathbf{D}^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. De modo geral, definimos os espaços de Sobolev da seguinte maneira:

Definição 1.18 *Define-se por $W^{m,p}(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tal que, $\forall\ |\alpha| \leq m$, $\boldsymbol{D}^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $\boldsymbol{D}^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições. Ou seja,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \boldsymbol{D}^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\ \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

Uma propriedade importante dos espaços $W^{m,p}(\Omega)$ é que eles se tornam espaços normados com as seguintes normas:

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\mathbf{D}^\alpha u(x)|^p_{L^p(\Omega)} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|\mathbf{D}^\alpha u(x)\|_{L^\infty(\Omega)}, \text{ se } p = \infty.$$

Mais do que isso, para estas normas temos

Proposição 1.5 *O espaço $(W^{m,p}(\Omega), \|\ .\ \|_{m,p})$ é um espaço de Banach, para $1 \leq p \leq \infty$.*

Quando $p = 2$, representa-se $W^{m,2}(\Omega)$ simplesmente por $H^m(\Omega)$. São espaços deste tipo, em particular, que mais utilizaremos neste texto.

Observação 1.3 *Tem-se que $H^m(\Omega)$ é espaço de Hilbert. Representamos a norma por*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\boldsymbol{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\ u \in H^m(\Omega),$$

associada ao produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \boldsymbol{D}^\alpha u(x) \boldsymbol{D}^\alpha v(x) dx, \quad \forall\ u, v \in H^m(\Omega).$$

Observação 1.4 *Quando $m = 0$, tem-se $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e $W^{m_2,p}(\Omega) \subset W^{m_1,p}(\Omega)$, quando $m_1 \leq m_2$.*

De acordo com [2], tem-se que $\mathscr{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$. Entretanto, não podemos afirmar que $\mathscr{D}(\Omega)$ seja sempre denso em $W^{m,p}(\Omega)$, para $m \geq 1$. Por exemplo, mostra-se que se Ω for limitado, $\mathscr{D}(\Omega)$ não é denso em $H^1(\Omega)$. Motivados por este fato, define-se um novo espaço de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathscr{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

De forma análoga, para $p = 2$, representa-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Resultado importante, que será utilizado repetidas vezes nos próximos capítulos, é a Desegialdade de Poincaré. Enunciamos a mesma na forma de teorema e indicamos [2], [4] ou [5] para sua demonstração.

Teorema 1.8 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com $\partial\Omega$ regular. Então existe constante $C > 0$ (dependendo somente de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}, \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)\ (1 \leq p < \infty).$$

Observação 1.5 *A Desigualdade de Poincaré garante, em particular, que a função*

$$u \longmapsto \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$$

é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente à norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Em $H_0^1(\Omega)$, que é o caso que nos interessa, a expressão

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx$$

é um produto interno que induz a norma $\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^n}$, equivalente à norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Enfim, em $H_0^1(0,L)$, consideraremos o produto interno

$$((u,v)) = \int_0^L u_x v_x\ dx$$

e a norma

$$\|u\| = \left(\int_0^L u_x^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quando $n = 1$, como é o caso em que trabalharemos, tem-se que $H^1(a,b) \hookrightarrow C([a,b])$. Assim, faz sentido falar-se em $u(a)$ e $u(b)$.

1.5 TEORIA DE SEMIGRUPOS

A teoria de semigrupos é usada para demonstrar resultados de existência e unicidade de solução de Equações Diferenciais em espaços de Banach. Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados importantes desta teoria, destacando o Teorema de Hille-Yossida e o Teorema de Lumer-Phillips.

1.5.1 Semigrupos de Operadores Lineares: Introdução.

Suponha que $\mathsf{A} : D(\mathsf{A}) \subset X \to X$ é um operador linear, definido num espaço vetorial normado X, e que se queira resolver o seguinte problema: Encontar $u : [0, +\infty) \to D(\mathsf{A})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \mathsf{A}u \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

com $u_0 \in D(\mathsf{A})$.

Quando $\mathsf{A} \in \mathbb{R}$, então sabemos que a única solução de (1.1) é $f(t) = e^{\mathsf{A}t}u_0$, onde u_0 é um número real. Recordemos que $e^{\mathsf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(t\mathsf{A})^n}{n!}$, sendo esta série uniformemente congervente.

Quando A é uma matriz $n \times n$ sabemos, da teoria clássica de Equações Diferenciais Ordinárias, que (1.1) tem única solução dada por $u(t) = e^{\mathsf{A}t}u_0$ onde, neste caso, a exponencial é o limite uniforme da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathsf{A})^n}{n!} = I + t\mathsf{A} + \frac{t^2\mathsf{A}^2}{2!} + \frac{t^3\mathsf{A}^3}{3!} + ...$$

e u_0 é uma matriz $n \times 1$.

De modo geral, se $\mathsf{A} : D(\mathsf{A}) \subset X \to X$ é um operador linear limitado no espaço de Banach X então, como veremos adiante, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathsf{A})^n}{n!} = I + t\mathsf{A} + \frac{t^2\mathsf{A}^2}{2!} + \frac{t^3\mathsf{A}^3}{3!} + ... \tag{1.2}$$

é, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, uniformemente convergente em $\mathscr{L}(X)$ definindo, portanto, um operador linear e limitado denotado por

$$e^{\mathsf{A}t}.$$

A notação $e^{\mathsf{A}t}$ é inspirada no seguinte resultado:

Teorema 1.9 *Uma função $u : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{L}(X)$ satisfaz as condições*

a) $u(0) = I$

b) $u(t+s) = u(t)u(s)$

c) $\lim\limits_{t \to 0^+} \|u(t) - I\|_{\mathscr{L}(X)} = 0$

se, e somente se, $u(t) = e^{\mathsf{A}t}$, onde $\mathsf{A} \in \mathscr{L}(X)$ e $e^{\mathsf{A}t}$ é definida pela série (1.2).

Demostração: Consultar [12].

Veremos também, mais adiante, que neste caso em que $\mathsf{A} \in \mathscr{L}(X)$ e $u_0 \in D(\mathsf{A})$, então $u(t) = e^{\mathsf{A}t}u_0$ é a única solução do problema (1.1).

A teoria de semigrupos de operadores lineares tem interesse em generalizar o conceito de exponencial (e, consequentemente, resolver o problema (1.1)) quando A é um operador linear não-limitado.

1.5.2 Semigrupos Uniformemente Contínuos

No que segue, a norma num espaço de Banach X será representada por $\| \ \|$. O espaço dual de X, denotaremos por X^*. O valor de um funcional $x^* \in X^*$ em $x \in X$ se escreve

$$\langle x^*, x \rangle \text{ ou } \langle x, x^* \rangle,$$

o que significa que $\langle \ , \ \rangle$ representa dualidade entre X^* e X.

Por último, $\mathscr{L}(X)$ denotará o espaço de todos os operadores lineares e limitados $T : X \to X$. A norma de um operador $T \in \mathscr{L}(X)$ é, como sabemos,

$$\|T\|_{\mathscr{L}(X)} = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\|.$$

Note que estamos utilizando a mesma notação $\| \ \|$ para as normas $\| \ \|_{\mathscr{L}(X)}$ e $\| \ \|_X$, o que não causa confusão.

Definição 1.19 *Seja X um espaço de Banach e $\mathscr{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Uma família de operadores $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de $\mathscr{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se*

a) $T(0) = I$, *onde I é o operador identidade de X;*

b) $T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall\ t, s\ \in \mathbb{R}^+.$

Dizemos que o semigrupo de operadores lineares limitados $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é *uniformemente contínuo* se

c) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathscr{L}(X)} = 0.$

A proposição abaixo justifica o nome de semigrupo uniformemente contínuo.

Proposição 1.6 *Se* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é um semigrupo uniformemente contínuo, então*

$$\lim_{s\to t} \|T(s) - T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} = 0.$$

Demonstração: Provaremos inicialmente que $\|T(t)\|$ é limitado em todo intervalo limitado $[0, t_0]$, ou seja, que existe $k > 0$ tal que

$$\|T(t)\| \leq k, \quad \forall\ t \in [0, t_0].$$

Com efeito, dado $\epsilon > 0$ existe, graças à *c*), $\delta > 0$ tal que $\|T(t) - I\| \leq \epsilon$, desde que $0 \leq t \leq \delta$. Assim,

$$\|T(t)\| - \|I\| \leq \|T(t) - I\| \leq \epsilon,$$

sempre que $0 \leq t \leq \delta$, ou seja,

$$\|T(t)\| \leq 1 + \epsilon = M, \quad \forall\ t \in [0, \delta].$$

Agora, para cada $t \geq 0$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$, tal que $t = n\delta + r$, com $r < \delta$. Temos, então, utilizando a propriedade de semigrupo,

$$\begin{aligned} \|T(t)\| =& \|T(n\delta + r)\| = \|T(n\delta)T(r)\| = \|T(\delta)^n T(r)\| \leq \|T(\delta)^n\| \|T(r)\| \\ &\leq \|T(\delta)\|^n \|T(r)\| \leq M^n M \leq M^{\frac{t}{\delta}} M = e^{\omega t} M, \end{aligned}$$

onde $\omega = \delta^{-1} \ln M > 0$. Ou seja, se $t \in [0, t_0]$, então $\|T(t)\|$ é limitado.

A continuidade uniforme segue, agora, do seguinte: Se $s > t$, então $s = t + h$, com $h > 0$ e, daí,

$$\begin{aligned} \|T(s) - T(t)\| &= \|T(t+h) - T(t)\| = \|T(t)T(h) - T(t)\| \\ &\leq \|T(t)\| \|T(h) - I\| \longrightarrow 0, \quad \text{se } h \to 0, \end{aligned}$$

já que $\|T(t)\|$ é limitado e $\|T(h) - I\| \longrightarrow 0$, quando $h \to 0$.

Por outro lado, se $s < t$, então $s = t - h$, com $h > 0$, e

$$\begin{aligned} \|T(s) - T(t)\| &= \|T(t-h) - T(t)\| = \|T(t-h) - T(t-h+h)\| \\ &= \|T(t-h) - T(t-h)T(h)\| \\ &\leq \|T(t-h)\|\|I - T(h)\| \longrightarrow 0, \quad \text{se } h \to 0, \end{aligned}$$

já que $\|T(t-h)\|$ é limitado para todo $0 \leq h < t$ e $\|T(h) - I\| \longrightarrow 0$, se $h \to 0$. ■

Definição 1.20 *Seja X um espaço de Banach e $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados em X. O operador linear $\mathsf{A} : D(\mathsf{A}) \subset X \to X$ definido por*

$$D(\mathsf{A}) = \left\{ x \in X, \ \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}$$

e

$$\mathsf{A}x = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall \ x \in D(\mathsf{A}),$$

é chamado o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

O teorema a seguir caracteriza os geradores infinitesimais de semigrupos de operadores lineares uniformemente contínuos. Sua demonstração pode ser encontrada em [17].

Teorema 1.10 *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é limitado.*

Observação 1.6 *O teorema anterior mostra que se $\mathsf{A} \in \mathscr{L}(X)$, então a série*

$$e^{\mathsf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathsf{A})^n}{n!}$$

é uniformemente convergente em $\mathscr{L}(X)$ e, portanto, define, para cada $t \geq 0$, um operador linear limitado $e^{\mathsf{A}t}$. Pondo

$$e^{\mathsf{A}t} = T(t),$$

vê-se que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo cujo gerador infinitesimal é A.

Reciprocamente, se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, conclui-se que

$$T(t) = e^{\mathsf{A}t},$$

com $\mathsf{A} \in \mathscr{L}(X)$. *Isso é garantido pelo próximo resultado, cuja demonstração também pode ser encontrada em [17].*

Teorema 1.11 *Se* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *são semigrupos uniformemente contínuos e*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)-I}{t} = \mathsf{A} = \lim_{s\to 0^+} \frac{S(t)-I}{t},$$

então $T(t) = S(t), \ \forall \ t \geq 0$.

Finalizamos esta seção com um resultado que resume todas as propriedades relativas a semigrupos uniformemente contínuos. Indicamos [17] para sua demonstração.

Teorema 1.12 *Se* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo, então:*

a) Existe constante $\omega \geq 0$ *tal que* $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}, \ \forall \ t \geq 0$;

b) Existe operador $\mathsf{A} \in \mathscr{L}(X)$ *tal que* $T(t) = e^{\mathsf{A}t}$, *onde* $e^{\mathsf{A}t}$ *é definida pela série* (1.2);

c) O operador A *do item anterior é o gerador infinitesimal de* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$;

d) A aplicação $t \to T(t)$ *é diferenciável em norma e vale*

$$\frac{d}{dt}T(t) = \mathsf{A}T(t) = T(t)\mathsf{A}.$$

1.5.3 Semigrupos de Classe C_0

Definição 1.21 *Dizemos que um semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores lineares limitados em* X *é fortemente contínuo se*

$$\lim_{t\to 0^+} \|(T(t)-I)(x)\| = 0, \quad \forall \ x \in X.$$

Os semigrupos fortemente contínuos são também chamados de *semigrupos de classe* C_0.

Observação 1.7 *Todo semigrupo uniformemente contínuo é, obviamente, fortemente contínuo.*

Teorema 1.13 *Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0, então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Demonstração: Mostremos, inicialmente, que existem constantes $\eta > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \forall\ t \in [0, \eta].$$

De fato, se assim não fosse existiria, para cada $n \in \mathbb{N}, t_n > 0$ tal que

$$\|T(t_n)\| > n \text{ e } t_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right],$$

ou seja, sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ e $\|T(t_n)\| > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, pelo Teorema da Limitação Uniforme, existiria $x \in X$ tal que $\|T(t_n)x\|$ não seria limitado. Mas isso contradiz o fato de ser

$$\lim_{n\to\infty} T(t_n)x = x,$$

já que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0. Assim,

$$\|T(t_n)\| \leq M, \quad \forall\ t \in [0, \eta]$$

e, como $\|T(0)\| = \|I\| = 1$, deve ser $M \geq 1$.

Seja agora $\omega = \eta^{-1} \ln M \geq 0$. Dado $t \geq 0$, temos $t = n\eta + \delta$ para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 \leq \delta \leq \eta$. Assim,

$$\begin{aligned}\|T(t)\| =& \|T(n\eta + \delta)\| = \|T(n\eta)T(\delta)\| = \|T(\eta)^n T(\delta)\| \leq \|T(\eta)^n\| \|T(\delta)\| \\ &\leq \|T(\eta)\|^n \|T(\delta)\| \leq M^n M \leq M^{\frac{t}{\eta}} M = e^{\omega t} M,\end{aligned}$$

provando o desejado. ∎

Observação 1.8 *Segue, do teorema anterior, que $\|T(t)\|$ é uma função limitada em cada intervalo limitado $[0, T_0]$, pois*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \leq Me^{\omega T_0}, \quad \forall\ t \in [0, T_0].$$

Definição 1.22 *Quando no teorema anterior $\omega_0 = 0$, então dizemos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente limitado. Se, além disso, $M = 1$, então $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 de contrações.*

O próximo resultado justifica o nome semigrupo fortemente contínuo.

Corolário 1.3 *Se* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é um semigrupo fortemente contínuo então, para todo* $x \in X$*,* $t \to T(t)x$ *é uma função contínua em* $[0, +\infty)$*, isto é, se* $t \in [0, +\infty)$*, então*

$$\lim_{s\to t} T(s)x = T(t)x, \quad \forall\ x \in X.$$

Demonstração: Sejam $t, h \geq 0$, com t fixado. Temos

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t)T(h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\|\|T(h)x - Ix\|\\ &\leq Me^{\omega t}\|T(h)x - Ix\| \longrightarrow 0, \quad \text{se } h \to 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{h\to 0^+} T(t+h)x = T(t)x,$$

mostrando que $T(t)x$ é contínua à direita de t.

Por outro lado, se $h \geq 0$ e $h < t$, temos

$$\begin{aligned}\|T(t-h)x - T(t)x\| &= \|T(t-h)x - T(t-h)T(h)x\| \leq \|T(t-h)\|\|T(h)x - x\|\\ &\leq Me^{\omega t}\|T(h)x - Ix\| \longrightarrow 0, \quad \text{se } h \to 0,\end{aligned}$$

mostrando a continuidade de $T(t)x$ à esquerda de t. Portanto, $T(t)x$ é contínua em todo $t \geq 0$. ■

Observação 1.9 *O corolário anterior diz que a aplicação* $U(t) = T(t)x$ *é, para cada* $x \in X$*, contínua em* $[0, +\infty)$*, isto é,*

$$U \in C\left([0, +\infty);\ X\right).$$

O teorema a seguir dá uma resposta quanto à possibilidade de se resolver o problema abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = \mathsf{A}U(t) \\ \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

quando A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0.

Teorema 1.14 *Se* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é um semigrupo de classe* C_0 *e* A *é o seu gerador infinitesimal, então:*

a) $\forall\ x \in X$,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\ ds = T(t)x; \tag{1.3}$$

b) $\forall\ x \in X$, $\int_0^t T(s)x\ ds \in D(\mathsf{A})$ *e*

$$\mathsf{A}\left(\int_0^t T(s)x\ ds\right) = T(t)x - x; \tag{1.4}$$

c) Se $x \in D(\mathsf{A})$, *então* $T(t)x \in D(\mathsf{A})$, $\forall\ t \geq 0$, *e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = \mathsf{A}T(t)x = T(t)\mathsf{A}x; \tag{1.5}$$

d) $\forall\ x \in D(\mathsf{A})$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \mathsf{A}T(\tau)x\ d\tau = \int_s^t T(\tau)\mathsf{A}x\ d\tau.$$

Demonstração:

a) Basta observar que, pelo corolário anterior, $T(t)$ é fortemente contínua e, portanto, integrável a Riemann relativamente a topologia forte de $\mathscr{L}(X)$ e vale (1.3).

b) Se $x \in X$ e $h > 0$, então

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h}\left(\int_0^t T(s)x\ ds\right) &= \frac{1}{h}\int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)\ ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)x\ ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\ ds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)x\ ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\ ds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\ ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\ ds.
\end{aligned}$$

Notando que, pelo item a),

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} T(s)x\ ds = T(t)x \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h} T(s)x\ ds = x,$$

conclui-se que existe o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}\left(\int_{0}^{t} T(s)x\ ds\right) = T(t)x - x,$$

o que significa que

$$\int_{0}^{t} T(s)x\ ds \in D(\mathsf{A})$$

e, além disso, vale (1.4).

c) Seja $x \in D(\mathsf{A})$ e $h > 0$. Temos,

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x = \left(\frac{T(h)-I}{h}\right)T(t)x. \tag{1.6}$$

Como $x \in D(\mathsf{A})$, existe o limite

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x = \mathsf{A}x.$$

Daí, como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínuo,

$$\lim_{h\to 0} T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x = T(t)\mathsf{A}x.$$

conclui-se, de (1.6), que existem os outros dois limites, isto é,

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)T(t)x = T(t)\mathsf{A}x,$$

ou seja, $T(t)x$ é derivável à direita, $T(t)x \in D(\mathsf{A})$ e

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = \mathsf{A}T(t)x = T(t)\mathsf{A}x.$$

Falta, agora, mostrar que $\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)\mathsf{A}x$. Com efeito, se $0 < h < t$, então

$$\begin{aligned}\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} &= \frac{T(t-h)x - T(t+h-h)x}{-h} = T(t-h)\left(\frac{T(h)-I}{-h}x\right) \\ &= T(t-h)\left(\frac{T(h)-I}{-h}x - \mathsf{A}x\right) + T(t-h)\mathsf{A}x,\end{aligned}$$

daí,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = T(t)\mathsf{A}x,$$

o que prova o desejado.

d) Segue por integração direta de (1.5) de s a t.

$\blacksquare$

Observação 1.10 *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 no espaço de Banach X, A o seu gerador infinitesimal e $x \in D(\mathsf{A})$. Ponhamos,*

$$U(t) = T(t)x.$$

Já sabemos, conforme a Observação 1.9, que $U \in C\left([0,+\infty);\ X\right)$. Mas, pelo Teorema 1.14, item c), $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)\mathsf{A}x$, donde segue que

$$\frac{d}{dt}U(t) \in C\left([0,+\infty);\ X\right)$$

e, portanto, $U \in C^1\left([0,+\infty);\ X\right)$. Além disso, como $\mathsf{A}U(t) = \mathsf{A}T(t)x = T(t)\mathsf{A}x$, conclui-se que

$$\mathsf{A}U \in C\left([0,+\infty);\ X\right)$$

e, portanto,

$$U \in C\left([0,+\infty);\ D(\mathsf{A})\right),$$

onde se considera $D(\mathsf{A})$ munido da norma $\|U\|_{D(A)} = \|U\|_X + \|\mathsf{A}U\|_X$. Em resumo, $U \in C\left([0,+\infty);\ D(\mathsf{A})\right) \cap U \in C^1\left([0,+\infty);\ X\right)$.

Corolário 1.4 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 no espaço de Banach X, então $D(\mathsf{A})$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração: A linearidade do operador A segue diretamente da sua definição. Para provar a densidade de $D(\mathsf{A})$ em X, seja $x \in X$ arbitrário e ponhamos, para cada $h > 0$,

$$x_h = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\ ds.$$

Então, pelo item $b)$ do Teorema 1.14, $x_h \in D(\mathsf{A})$, $\forall\ h > 0$. Também pelo Teorema 1.14, item $a)$,

$$\lim_{h\to 0^+} x_h = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\ ds = x,$$

o que mostra que $x \in \overline{D(\mathsf{A})}$ e, sendo $x \in X$ arbitrário, $\overline{D(\mathsf{A})} = X$.

Provemos agora que A é fechado. Para isso, seja (x_n) uma sequência em $D(\mathsf{A})$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ em } X \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{A}x_n = y \text{ em } X$$

e tratemos de mostrar que $x \in D(\mathsf{A})$ e $y = \mathsf{A}x$. Pelo Teorema 1.14, item $d)$, temos

$$T(h)x_n - x_n = \int_0^h T(t)\mathsf{A}x_n\ dt,\ \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Por outro lado, o Teorema 1.13 garante que $\|T(t)\|$ é uniformemente limitada em todo compacto $[0, h]$. Assim, se $t \in [0, h]$,

$$\|T(t)\mathsf{A}x_n - T(t)y\| \leq \|T(t)\|\|\mathsf{A}x_n - y\|.$$

Quando $n \to \infty$, temos $T(t)\mathsf{A}x_n \to T(t)y$, uniformemente em $[0, h]$.

Obtemos assim, de (1.7), fazendo $n \to \infty$,

$$T(h)x - x = \int_0^h T(t)y\ dt,$$

já que $T(h) \in \mathscr{L}(X)$. Logo,

$$\frac{T(h)x - x}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h T(t)y\ dt.$$

Mas, pelo Teorema 1.14, item a),

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(t)y\ dt = y,$$

o que significa que existe o

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}.$$

Daí, $x \in D(\mathsf{A})$ e $\mathsf{A}x = y$. ∎

Observação 1.11 *Temos, até aqui, duas importantes conclusões:*

a) Se A *é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo então* $\mathsf{A} \in \mathscr{L}(X)$*.*

b) Se A *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *então* $D(\mathsf{A})$ *é denso em* X *e* A *é fechado.*

Teorema 1.15 *Sejam* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *semigrupos de classe* C_0 *no espaço de Banach* X *com geradores infinitesimais* A *e* B*, respectivamente. Se* $\mathsf{A} = \mathsf{B}$*, então*

$$T(t) = S(t),\ \forall\ t \geq 0.$$

Demonstração: Para cada $x \in D(\mathsf{A}) = D(\mathsf{B})$ e $0 \leq s \leq t$, a função

$$\phi(s)x = T(t-s)S(s)x$$

é diferenciável e, pelo Teorema 1.14,

$$\frac{d}{ds}\phi(s)x = T(t-s)\mathsf{B}S(s)x - \mathsf{A}T(t-s)S(s)x = T(t-s)\mathsf{B}S(s)x - T(t-s)\mathsf{A}S(s)x = 0,$$

isso para todo $0 \leq s \leq t$. Isto significa que $\phi(s)x$ é constante, para $0 \leq s \leq t$. Tem-se, então,

$$T(t)x = \phi(0)x = \phi(t)x = S(t)x,$$

ou seja,

$$T(t)x = S(t)x,\ \forall\ t \geq 0 \text{ e } \forall\ x \in D(\mathsf{A}) = D(\mathsf{B}).$$

Seja agora $x \in X$ qualquer. Como $\overline{D(\mathsf{A})} = \overline{D(\mathsf{B})} = X$, existe sequência (x_n) em

$D(\mathsf{A}) = D(\mathsf{B})$ tal que
$$\lim_{h \to 0} x_n = x.$$
Daí, para cada $t \geq 0$,
$$T(t)x = \lim_{n \to \infty} T(t)x_n = \lim_{n \to \infty} S(t)x_n = S(t)x,$$
o que prova que
$$T(t)x = S(t)x, \ \forall \ t \geq 0 \text{ e } \forall \ x \in X.$$

■

1.5.4 Geração de Semigrupos

Definição 1.23 *Seja X um espaço de Banach e $\mathsf{A} : D(\mathsf{A}) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Chamamos de conjunto resolvente de A, e representamos por $\rho(\mathsf{A})$, o conjunto dos números $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $(\lambda I - \mathsf{A})$ é inversível, com inverso $(\lambda I - \mathsf{A})^{-1}$ limitado e domínio denso em X. A família de operadores*
$$R(\lambda, \mathsf{A}) = (\lambda I - \mathsf{A})^{-1}, \ \lambda \in \rho(\mathsf{A}),$$
é chamada Resolvente de A.

Observação 1.12 *Quando o operador linear A é fechado, $R(\lambda, \mathsf{A})$ é igualmente fechado. Logo, $\forall \ \lambda \in \rho(\mathsf{A})$, $R(\lambda, \mathsf{A})$ é um operador linear limitado e fechado em um conjunto denso em X. Seu domínio é, pois, X.*

Para demonstração do próximo teorema, usaremos o lema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [12].

Lema 1.2 *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0. Então existe o limite*
$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \omega_0$$
e, para cada $\omega > \omega_0$, existe constante $M \geq 1$ tal que
$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \forall \ t \geq 0.$$

Teorema 1.16 *Seja* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo de classe* C_0 *em* X *e* A *seu gerador infinitesimal. Suponhamos que* $Re\ \lambda > \omega_0$*, onde* $\omega_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln\|T(t)\|}{t}$*. Então* $\lambda \in \rho(\mathsf{A})$ *e*

$$R(\lambda, \mathsf{A})x = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\ dt,\ \forall\ x \in X.$$

Demonstração: Seja, então, $\lambda \in \mathbb{C}$ com $Re\ \lambda > \omega_0$. Sabemos, do Lema 1.2, que existe, para cada $\omega > \omega_0$, $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$. Logo,

$$\|e^{-\lambda t}T(t)x\| \leq |e^{-\lambda t}|\|T(t)\|\|x\| \leq e^{-(Re\ \lambda)t}Me^{\omega t}\|x\| = Me^{-(Re\ \lambda-\omega)t}\|x\|,\ \forall\ x \in X.$$

Notando que

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-(Re\ \lambda-\omega)t}\ dt = \frac{1}{Re\ \lambda - \omega},$$

e que $e^{-\lambda t}T(t)$ é contínua, conclui-se que é convergente a integral imprópria

$$R_\lambda(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\ dt = \frac{1}{Re\ \lambda - \omega},\ Re\ \lambda > \omega > \omega_0 \text{ e } x \in X.$$

Note que R_λ é linear e limitado, pois

$$\|R_\lambda(x)\| \leq \int\limits_0^{+\infty} \|e^{-\lambda t}T(t)x\| dt \leq \frac{M}{Re\ \lambda - \omega}\|x\|$$

isto é,

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{Re\ \lambda - \omega}.$$

O que queremos mostrar é que $R_\lambda = R(\lambda; \mathsf{A})$. Observemos que, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}R_\lambda(x) &= \frac{1}{h}T(h)R_\lambda(x) - \frac{1}{h}R_\lambda(x) \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(h+t)x\,dt - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,dt - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,dt - \frac{1}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda t}T(t)x\,dt
\end{aligned}$$

e, portanto, pelo Teorema 1.14,

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}R_\lambda(x) = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,dt - x = \lambda R_\lambda(x) - x$$

o que mostra que $R_\lambda(x) \in D(\mathsf{A})$ e $\mathsf{A}R_\lambda(x) = \lambda R_\lambda(x) - x$, isto é,

$$(\lambda I - \mathsf{A})R_\lambda(x) = x,\ \forall\ x \in X. \tag{1.8}$$

Temos também, que se $x \in D(\mathsf{A})$,

$$R_\lambda(\mathsf{A}x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)\mathsf{A}x\,dt = \mathsf{A}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,dt = \mathsf{A}R_\lambda(x), \tag{1.9}$$

já que A é um operador fechado, conforme demonstrado no Corolário 1.4. Segue então, de (1.8) e (1.9), que

$$\begin{aligned}
R_\lambda(\lambda I - \mathsf{A})x = R_\lambda(\lambda x - \mathsf{A}x) = \lambda R_\lambda(x) - R_\lambda(\mathsf{A}x) &= \lambda R_\lambda(x) - \mathsf{A}R_\lambda(x) \\
&= (\lambda I - \mathsf{A})R_\lambda(x) = x,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$R_\lambda(\lambda I - \mathsf{A})x = (\lambda I - \mathsf{A})R_\lambda(x) = Ix,\ \forall\ x \in D(\mathsf{A}).$$

Isto mostra que

$$R_\lambda = (\lambda I - \mathsf{A})^{-1} = R(\lambda, \mathsf{A}),$$

o que conclui a demonstração. ■

Como consequência do teorema anterior temos o corolário a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [12].

Corolário 1.5 *Nas mesmas hipóteses do teorema anterior, vale*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, \mathsf{A}) = (-1)^n n! R(\lambda, \mathsf{A})^{n+1}$$

e

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, \mathsf{A}) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(-t)^n T(t)x \, dt, \ \forall \, x \in X.$$

Teorema 1.17 ***(Hille-Yossida)*** *Para que um operador linear* $\mathsf{A} : D(\mathsf{A}) \subset X \longrightarrow X$*, onde* X *é um espaço de Banach, seja o gerador infinitesimal de um semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *de classe* C_0*, é necessário e suficiente que:*

a) O operador A *seja fechado e seu domínio seja denso em* X*.*

b) Existam constantes M *e* ω *tais que para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $\lambda > \omega$*, se tenha* $\lambda \in \rho(\mathsf{A})$ *e*

$$||R(\lambda, \mathsf{A})^n|| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: A necessidade da condição a) já foi provada no Corolário 1.4. Sendo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 existe, pelo Lema 1.2,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \omega_0$$

e, para cada $\omega > \omega_0$, existe $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, com $\lambda > \omega$, o Teorema 1.16 garante que $\lambda \in \rho(\mathsf{A})$ e, pelo corolário anterior,

$$R(\lambda, \mathsf{A})^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{n-1} T(t)x \, dt, \ \forall \, x \in X,$$

donde

$$\|R(\lambda, \mathsf{A})^n x\| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{(-\lambda+\omega)t} t^{n-1} \|x\| \, dt \ = \frac{M}{(n-1)!} \frac{(n-1)!}{(\lambda-\omega)^n}\|x\| = \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}\|x\|,$$

para todo $x \in X$, o que nos dá

$$\|R(\lambda, \mathsf{A})^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

mostrando assim que a condição $b)$ é necessária.

Para provarmos que $a)$ e $b)$ são condições suficientes para que A seja o gerador de um semigrupo de classe C_0, vamos definir, para cada $\lambda > \omega$, o operador linear limitado

$$\mathsf{A}_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, \mathsf{A}) - \lambda I$$

e provaremos que o semigrupo $e^{\mathsf{A}_\lambda t}$ tem, como limite forte, quando $\lambda \to \infty$, um semigrupo de classe C_0, cujo gerador infinitesimal é A. Dividiremos essa demonstração em etapas:
(1) O primeiro passo é provar que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathsf{A}_\lambda x = \mathsf{A}x, \quad \forall\, x \in D(\mathsf{A}). \tag{1.10}$$

De fato, como $R(\lambda, \mathsf{A})(\lambda I - \mathsf{A}) = I$, então

$$\lambda R(\lambda, \mathsf{A}) - I = R(\lambda, \mathsf{A})\mathsf{A}.$$

Daí, se $x \in D(\mathsf{A})$

$$\|\lambda R(\lambda, \mathsf{A})x - Ix\| = \|R(\lambda, \mathsf{A})\mathsf{A}x\| \leq \|R(\lambda, \mathsf{A})\|\|\mathsf{A}x\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)}\|\mathsf{A}x\| \longrightarrow 0,$$

quando $\lambda \to \infty$, graças a hipótese $b)$. Isso mostra que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, \mathsf{A})x = x, \quad \forall\, x \in D(\mathsf{A}).$$

Por outro lado, como

$$\|\lambda R(\lambda, \mathsf{A})\| \leq \frac{M|\lambda|}{\lambda - \omega} \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda \to \infty} \frac{|\lambda|}{\lambda - \omega} = 1,$$

então, para λ suficientemente grande,

$$\|\lambda R(\lambda, \mathsf{A})\| \leq 2M.$$

Se $x \in X$, sabemos que existe sequência $(x_n) \in D(\mathsf{A})$ tal que $x_n \to x$, já que, por hipótese, $\overline{D(\mathsf{A})} = X$. Assim, para λ suficientemente grande,

$$\lambda R(\lambda, \mathsf{A})x_n \longrightarrow \lambda R(\lambda, \mathsf{A})x, \quad \text{se } n \to \infty,$$

e, portanto,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda,\mathsf{A})x = x,\ \forall\, x \in X.$$

Por último, notando que

$$\begin{aligned}\lambda R(\lambda,\mathsf{A})\mathsf{A} &= \lambda(\lambda I-\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A} = \lambda(\lambda I-\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A} - \lambda^2(\lambda I-\mathsf{A})^{-1} + \lambda^2(\lambda I-\mathsf{A})^{-1}\\ &= -\lambda(\lambda I-\mathsf{A})^{-1}(\lambda I-\mathsf{A}) + \lambda^2 R(\lambda,\mathsf{A}) = -\lambda I + \lambda^2 R(\lambda,\mathsf{A}) = \mathsf{A}_\lambda,\end{aligned}$$

conclui-se que, $\forall\, x \in D(\mathsf{A})$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathsf{A}_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda,\mathsf{A})\mathsf{A}x = \mathsf{A}x.$$

(2) Da definição de A_λ e da hipótese b), obtemos

$$\begin{aligned}\|e^{\mathsf{A}_\lambda t}\| &= \|e^{t[\lambda^2 R(\lambda,\mathsf{A})-\lambda I]}\| = \|e^{t\lambda^2 R(\lambda,\mathsf{A})}e^{-\lambda I t}\| = e^{-\lambda t}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,\mathsf{A})}\| = e^{-\lambda t}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\lambda^2 R(\lambda,\mathsf{A}))^n}{n!}\right\|\\ &\leq e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\lambda^2)^n}{n!}\|R(\lambda,\mathsf{A})^n\| \leq e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\lambda^2)^n}{n!}\frac{M}{(\lambda-\omega)^n} = e^{-\lambda t}e^{\lambda^2 t(\lambda-\omega)^{-1}}M\\ &= Me^{\omega\lambda t(\lambda-\omega)^{-1}}.\end{aligned}$$

Ora, se $\gamma > \omega$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\dfrac{\omega\lambda}{\lambda-\omega} < \gamma$, para $\lambda > \lambda_0$. Portanto,

$$\|e^{\mathsf{A}_\lambda t}\| \leq Me^{\gamma}t,\ \text{se } \lambda > \lambda_0. \tag{1.11}$$

(3) Mostremos agora que $e^{t\mathsf{A}_\lambda}$ converge fortemente, quando $\lambda \to \infty$, para um operador linear limitado. Ponhamos, por simplicidade,

$$T_\lambda(t) = e^{t\mathsf{A}_\lambda}.$$

Como, para cada $\lambda > \omega$ e cada $\mu > \omega$, $R(\lambda,\mathsf{A})$ comuta com $R(\mu,\mathsf{A})$, segue que

$$\begin{aligned}\mathsf{A}_\lambda\mathsf{A}_\mu &= (\lambda^2 R(\lambda,\mathsf{A}) - \lambda I)(\mu^2 R(\mu,\mathsf{A}) - \mu I)\\ &= \lambda^2\mu^2 R(\lambda,\mathsf{A})R(\mu,\mathsf{A}) - \mu\lambda^2 R(\lambda,\mathsf{A}) - \lambda\mu^2 R(\mu,\mathsf{A}) + \lambda\mu I\\ &= (\mu^2 R(\mu,\mathsf{A}) - \mu I)(\lambda^2 R(\lambda,\mathsf{A}) - \lambda I) = \mathsf{A}_\mu\mathsf{A}_\lambda.\end{aligned}$$

Lembrando que $T_\mu(t) = e^{t\mathsf{A}_\mu} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n\mathsf{A}_\mu^n}{n!}$, teremos

$$\mathsf{A}_\lambda T_\mu = T_\mu\mathsf{A}_\lambda.$$

Assim, do item $d)$ do Teorema 1.14 teremos, para $x \in D(\mathsf{A})$,

$$\begin{aligned}
T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds}[T_\mu(t-s)T_\lambda(s)x]\; ds \\
&= \int_0^t [-\mathsf{A}_\mu T_\mu(t-s)T_\lambda(s)x - T_\mu(t-s)T_\lambda(s)\mathsf{A}_\lambda x]\; ds \\
&= \int_0^t T_\mu(t-s)[\mathsf{A}_\lambda - \mathsf{A}_\mu]T_\lambda(s)x\; ds \\
&= \int_0^t T_\mu(t-s)T_\lambda(s)[\mathsf{A}_\lambda - \mathsf{A}_\mu]x\; ds
\end{aligned}$$

donde, por (1.11),

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| &\leq \int_0^t \|T_\mu(t-s)\|\|T_\lambda(s)\|\|\mathsf{A}_\lambda x - \mathsf{A}_\mu x\|\; ds \\
&\leq \int_0^t Me^{\gamma(t-s)}Me^{\gamma s}\|\mathsf{A}_\lambda x - \mathsf{A}_\mu x\|\; ds \\
&\leq M^2 te^{\gamma t}\|\mathsf{A}_\lambda x - \mathsf{A}_\mu x\|
\end{aligned}$$

desde que $\mu, \lambda > \lambda_0$, isto é,

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \leq M^2 te^{\gamma t}\|\mathsf{A}_\lambda x - \mathsf{A}_\mu x\|, \;\; \forall\; \lambda, \mu > \lambda_0.$$

Sabemos no entanto que, graças à (1.10),

$$\|\mathsf{A}_\lambda x - \mathsf{A}_\mu x\| \longrightarrow 0, \text{ quando } \lambda, \mu \to \infty, \; \forall\; x \in D(\mathsf{A}).$$

Logo, para todo $x \in D(\mathsf{A})$, $T_\lambda(t)x$ converge uniformemente em relação à t, em cada intervalo finito $[0, T]$. Mas, como $\overline{D(\mathsf{A})} = X$, segue de (1.11) e do Teorema da Limitação Uniforme que existe um operador $T(t)$ tal que

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)x = T(t)x, \; \forall\; x \in X.$$

(4) Mostremos agora que $T(t)$, obtido no item anterior, é um semigrupo de classe C_0. Com efeito, para cada $\lambda > \omega$ tem-se que $T_\lambda(t) = e^{\mathsf{A}_\lambda t}$ é um semigrupo. Daí, para $x \in X$

e $t, s \geq 0$

$$T(0)x = \lim_{\lambda \to \infty} T_\lambda(0)x = x$$

e

$$T(t+s)x = \lim_{\lambda \to \infty} T_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda \to \infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s)x = T(t)T(s)x.$$

Além disso, $T(t)x$ é o limite uniforme de $T_\lambda(t)x$, portanto contínua. Consequentemente $T(t)$ é um semigrupo de classe C_0. Temos ainda, de (1.11), que $\|T(t)\| \leq Me^\gamma t$, para todo $\gamma > \omega$ e, portanto,

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \; \forall \; t > 0.$$

(5) Finalmente, provemos que o gerador infinitesimal de $T(t)$ é A. Temos, para $\lambda > \lambda_0$,

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)\mathsf{A}_\lambda x - T(t)\mathsf{A}x\| &\leq \|T_\lambda(t)\mathsf{A}_\lambda x - T_\lambda(t)\mathsf{A}x\| + \|T_\lambda(t)\mathsf{A}x - T(t)\mathsf{A}x\| \\ &\leq \|T_\lambda(t)\|\|\mathsf{A}_\lambda x - \mathsf{A}x\| + \|T_\lambda(t)\mathsf{A}x - T(t)\mathsf{A}x\| \\ &\leq Me^{\gamma t}\|\mathsf{A}_\lambda x - \mathsf{A}x\| + \|T_\lambda(t)\mathsf{A}x - T(t)\mathsf{A}x\|, \end{aligned}$$

isto válido para todo $x \in D(\mathsf{A})$. Mas, graças à (1.10) e ao item **(3)** desta demonstração,

$$T_\lambda(t)\mathsf{A}_\lambda x \longrightarrow T(t)\mathsf{A}x,$$

quando $\lambda \to \infty$, uniformemente em relação à t em todo intervalo limitado. Assim,

$$T_\lambda(t)\mathsf{A}_\lambda x \longrightarrow T(t)\mathsf{A}x$$

uniformemente em relação à t em todo intervalo limitado $[0, T]$ e para $x \in D(\mathsf{A})$. Com isso, podemos passar o limite, quando $\lambda \to \infty$, em ambos os membros da igualdade

$$T_\lambda(t)x - x = \int_0^t T_\lambda(s)\mathsf{A}_\lambda x \; ds$$

obtendo

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)\mathsf{A}x \; ds.$$

Portanto, se A_1 é o gerador infinitesimal de $T(t)$, teremos, para cada $x \in D(\mathsf{A})$

$$\mathsf{A}_1 x = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)\mathsf{A}x \, ds = \mathsf{A}x$$

o que nos diz que $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}_1$. Por outro lado, $\lambda \in \rho(\mathsf{A})$, para todo $\lambda > \omega$ e, como A_1 é o gerador infinitesimal de $T(t)$, o Teorema 1.16 garante que $\lambda \in \rho(\mathsf{A}_1)$, para λ suficientemente grande. Logo, se λ é suficientemente grande,

$$\lambda \in \rho(\mathsf{A}) \cap \rho(\mathsf{A}_1)$$

e para tais valores de λ,

$$(\lambda I - \mathsf{A})D(\mathsf{A}) = X \quad \text{e} \quad (\lambda I - \mathsf{A}_1)D(\mathsf{A}_1) = X$$

e como $\mathsf{A}_1 \supset \mathsf{A}$, tem-se

$$(\lambda I - \mathsf{A}_1)D(\mathsf{A}) \supset (\lambda I - \mathsf{A})D(\mathsf{A}) = X$$

donde,

$$D(\mathsf{A}) \supset (\lambda I - \mathsf{A}_1)^{-1}X = D(\mathsf{A}_1).$$

Conclui-se, pois, que $\mathsf{A}_1 = \mathsf{A}$ e A é o gerador infinitesimal de $T(t)$. Isso conclui a demonstração do teorema. ■

Uma consequência direta do teorema anterior é o

Corolário 1.6 *A condição necessária e suficiente para que um operador linear* A *seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0 *é que* A *seja fechado,* $\overline{D(\mathsf{A})} = X$, $(0, +\infty) \subset \rho(\mathsf{A})$ *e*

$$\|\lambda R(\lambda, \mathsf{A})\| \le 1, \ \forall \ \lambda > 0.$$

Note que o Teorema de Hille-Yosida caracteriza geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0. O corolário anterior, em particular, caracteriza os geradores infinitesimais de semigrupos de contrações. A seguir damos outra caracterização para geradores infinitesimais de semigrupos de contrações, que é a que foi utilizada no Capítulo 2 deste trabalho.

Antes da apresentação de tal resultado, algumas notações e definições são necessárias.

Dado um espaço de Banach X, para cada $x \in X$ definimos o *conjunto dualidade*

$F(x) \subset X^*$ por

$$F(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Lembre que $\langle x, x^* \rangle$ denota o valor do funcional $x^* \in X^*$ no ponto $x \in X$. O Teorema de Hahn-Banach garante que $F(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$.

Definição 1.24 *Seja X um espaço de Banach e X^* o seu dual. Um operador linear $\mathsf{A} : D(\mathsf{A}) \subset X \to X$ é dissipativo se, para todo $x \in D(\mathsf{A})$ existe $x^* \in F(x)$ tal que*

$$Re\ \langle \mathsf{A}x, x^* \rangle \leq 0.$$

Observação 1.13 *No caso em que X é um espaço de Hilbert com produto interno $(\, . \, , \, . \,)_X$, então $\mathsf{A} : D(\mathsf{A}) \subset X \to X$ é dissipativo quando*

$$Re(\mathsf{A}x, x^*)_X \leq 0, \ \forall \ x \in D(\mathsf{A}).$$

Teorema 1.18 *Se $\mathsf{A} : D(\mathsf{A}) \subset X \to X$ é um operador linear dissipativo, então*

$$\|(\lambda I - \mathsf{A})x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall \ \lambda > 0 \quad e \quad \forall \ x \in D(\mathsf{A}).$$

Demonstração: Sendo A dissipativo, para todo $x \in D(\mathsf{A})$ existe $x^* \in F(x) \subset X^*$ tal que

$$Re\ \langle \mathsf{A}x, x^* \rangle \leq 0.$$

Como

$$\langle (\lambda I - \mathsf{A})x, x^* \rangle = \langle \lambda x - \mathsf{A}x, x^* \rangle = \lambda \langle x, x^* \rangle - \langle \mathsf{A}x, x^* \rangle = \lambda \|x\|^2 - \langle \mathsf{A}x, x^* \rangle,$$

teremos

$$\begin{aligned} \lambda \|x\|^2 &= Re\ \langle (\lambda I - \mathsf{A})x, x^* \rangle + Re\ \langle \mathsf{A}x, x^* \rangle \leq Re\ \langle (\lambda I - \mathsf{A})x, x^* \rangle \leq |\langle (\lambda I - \mathsf{A})x, x^* \rangle| \\ &\leq \|(\lambda I - \mathsf{A})x\| \|x^*\| = \|(\lambda I - \mathsf{A})x\| \|x\|, \end{aligned}$$

donde

$$\lambda \|x\| \leq \|(\lambda I - \mathsf{A})x\|, \quad \forall \ \lambda > 0 \ \text{ e } \ \forall \ x \in D(\mathsf{A}).$$

■

Teorema 1.19 ***(Lumer-Phillips)*** *Seja X um espaço de Banach. Se o operador linear $\mathsf{A} : D(\mathsf{A}) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe*

C_0, então A é dissipativo e $Im(\lambda I - \mathsf{A}) = X$, $(Im(\lambda I - \mathsf{A})$ = imagem de $\lambda I - \mathsf{A})$, $\forall\ \lambda > 0$. Reciprocamente, se

a) $D(\mathsf{A})$ é denso em X;

b) A é dissipativo;

c) Existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - \mathsf{A}) = X$

então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.

Demonstração: Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, então $\overline{D(\mathsf{A})} = X$, A é fechado e, graças ao Corolário 1.6, $(0, +\infty) \subset \rho(\mathsf{A})$. Portanto,

$$Im(\lambda I - \mathsf{A}) = X,\ \forall\ \lambda > 0.$$

Também, se $x \in D(\mathsf{A})$ e $x^* \in F(x) \subset X^*$, teremos

$$|\langle T(t)x, x^*\rangle| \leq \|T(t)x\|\|x^*\| \leq \|x\|\|x\| = \|x\|^2,$$

pois, por hipótese,

$$\|T(t)x\| \leq \|x\|,\ \forall\ x \in D(\mathsf{A}).$$

Vemos, assim, que

$$\begin{aligned} Re\ \langle T(t)x - x, x^*\rangle &= Re\ (\langle T(t)x, x^*\rangle - \langle x, x^*\rangle) = Re\ \langle T(t)x, x^*\rangle - \|x\|^2 \\ &\leq |\langle T(t)x, x^*\rangle| - \|x\|^2 \leq \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0,\ \forall\ t > 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\ Re\ \langle T(t)x - x, x^*\rangle \leq 0,$$

o que significa que se $x \in D(\mathsf{A})$,

$$Re\ \langle \mathsf{A}x, x^*\rangle \leq 0,$$

mostrando que A é dissipativo.

Reciprocamente, suponhamos que A satisfaz $a) - c)$. Então, pelo teorema anterior,

$$\|(\lambda I - \mathsf{A})x\| \geq \lambda\|x\|,\ \ \forall\ \lambda > 0\ \text{ e }\ \forall\ x \in D(\mathsf{A}).$$

Isto nos diz que, em particular, $(\lambda I - \mathsf{A})$ é injetivo, para todo $\lambda > 0$. Daí, como $Im(\lambda_0 I - \mathsf{A}) = X$, conclui-se que $(\lambda_0 I - \mathsf{A})^{-1}$ existe e

$$\|x\| = \|(\lambda_0 I - \mathsf{A})(\lambda_0 I - \mathsf{A})^{-1}x\| \geq \lambda_0 \|(\lambda_0 I - \mathsf{A})^{-1}x\|,$$

ou seja,

$$\|(\lambda_0 I - \mathsf{A})^{-1}x\| \leq \frac{1}{\lambda_0}\|x\|, \ \forall\, x \in X,$$

o que significa que $(\lambda_0 I - \mathsf{A})^{-1}$ é um operador linear limitado definido em X (daí $\lambda_0 \in \rho(\mathsf{A})$) e, portanto, fechado. Segue que $\lambda_0 I - \mathsf{A}$ é fechado e A é, também, fechado.

Vemos, portanto, que o conjunto

$$\Lambda = \rho(\mathsf{A}) \cap (0, +\infty)$$

é não vazio. Como $\rho(\mathsf{A})$ é aberto (ver [4]), Λ é aberto em $(0, +\infty)$.

Por outro lado, Λ é fechado em $(0, +\infty)$. De fato, dada uma sequência $\lambda_n \in \Lambda$, com $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ e $\lambda \in (0, +\infty)$, teremos (conforme Observação 1.12)

$$Im(\lambda_n I - \mathsf{A}) = X, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, dado $y \in X$ qualquer, existe, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D(\mathsf{A})$, tal que

$$(\lambda_n I - \mathsf{A})x_n = y. \tag{1.12}$$

Novamente do teorema anterior, obtemos

$$\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1}\|(\lambda_n I - \mathsf{A})x_n\| = \lambda_n^{-1}\|y\| \leq C$$

para alguma constante $C > 0$, já que $\dfrac{1}{\lambda_n}$ é convergente. Também,

$$\lambda_n\|x_n - x_m\| \leq \|(\lambda_n I - \mathsf{A})(x_n - x_m)\| = \|(\lambda_n(x_n - x_m) - \mathsf{A}(x_n - x_m)\|. \tag{1.13}$$

Por outro lado, da definição de x_n temos

$$\lambda_n x_n - \lambda_m x_m - \mathsf{A}(x_n - x_m) = (\lambda_n I - \mathsf{A})x_n - (\lambda_m I - \mathsf{A})x_m = y - y = 0$$

e, portanto,

$$\lambda_n x_n - \lambda_n x_m + \lambda_n x_m - \lambda_m x_m - \mathsf{A}(x_n - x_m) = 0,$$

isto é,

$$\lambda_n(x_n - x_m) + (\lambda_n - \lambda_m)x_m - \mathsf{A}(x_n - x_m) = 0,$$

ou ainda,

$$\lambda_n(x_n - x_m) - \mathsf{A}(x_n - x_m) = (\lambda_m - \lambda_n)x_m. \tag{1.14}$$

De (1.13) - (1.14) seque que

$$\begin{aligned}\lambda_n\|(x_n - x_m)\| \leq \|\lambda_n(x_n - x_m) - \mathsf{A}(x_n - x_m)\| \leq \|(\lambda_m - \lambda_n)x_m\| \\ = |\lambda_m - \lambda_n|\|x_m\| \leq C|\lambda_m - \lambda_n|.\end{aligned}$$

Como (λ_n) é sequência de Cauchy (pois é convergente), conclui-se que (x_n) sequência de Cauchy em X e, portanto, convergente. Ponhamos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Teremos, então,

$$\lambda_n x_n \longrightarrow \lambda x,$$

quando $n \to \infty$, o que nos dá, junto com (1.12), a convergência

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{A}x_n = \lim_{n\to\infty}(\lambda_n x_n - y) = \lambda x - y.$$

Temos, em resumo,

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{e} \quad \mathsf{A}x_n \longrightarrow \lambda x - y.$$

Ora, como A é fechado, conclui-se que

$$x \in D(\mathsf{A}) \quad \text{e} \quad \mathsf{A}x = \lambda x - y,$$

isto é,

$$(\lambda I - \mathsf{A})x = y.$$

Como y é qualquer, isto prova que

$$Im(\lambda I - \mathsf{A}) = X$$

e, então, $\lambda \in \rho(\mathsf{A})$. Resulta, pois, que $\lambda \in \Lambda$ e, assim, Λ é fechado em $(0, +\infty)$.

Sendo $\Lambda \neq \emptyset$, conclui-se que $\Lambda = (0, +\infty)$ e, portanto,

$$(0, +\infty) \subset \rho(\mathsf{A}).$$

Finalmente, pelo teorema anterior,

$$\|x\| = \|(\lambda I - \mathsf{A})(\lambda I - \mathsf{A}^{-1}x\| \geq \lambda\|(\lambda I - \mathsf{A}^{-1}x\|$$

ou seja,

$$\|(\lambda I - \mathsf{A}^{-1}x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|, \; \forall \; x \in X \;\text{ e }\; \forall \; \lambda > 0,$$

o que implica, pelo Corolário 1.6, que A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações, o que conclui a prova do teorema. ■

O próximo resultado fornece o comportamento do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ quando seu gerador infinitesimal é perturbado por outro operador linear limitado. A demonstração pode ser encontrada em [12].

Proposição 1.7 *Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de contrações de classe C_0 no espaço de Banach X e B é um operador linear limitado em X, então $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0.*

Capítulo 2

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

2.1 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Neste capítulo estabeleceremos a existência e unicidade de solução para o sistema acoplado

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \sigma(x)u_t(x,t) + \alpha\theta_x(x,t) = 0, \quad 0 < x < L \text{ e } 0 < t < +\infty \tag{2.1}$$

$$\theta_t(x,t) - \theta_{xx}(x,t) + \beta u_{xt}(x,t) = 0, \quad 0 < x < L \text{ e } 0 < t < +\infty \tag{2.2}$$

complementado pelas condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad 0 < x < L \tag{2.3}$$

e condições de fronteira

$$u(0,t) = u(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2.4}$$

onde α e β são constantes de acoplamento reais estritamente positivas. Além disso, supõe-se que $\sigma \in L^\infty(0,L)$, com

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_1, \quad \text{q.s. em } (0,L), \tag{2.5}$$

onde σ_0 e σ_1 são constantes.

Utilizaremos a teoria de semigrupo de operadores lineares para estabelecermos a existência e unicidade de solução para o problema (2.1)-(2.4). A ideia, então, é reescrevê-lo na forma de um problema abstrato de primeira ordem. Introduzimos, para isso, o espaço funcional

$$\mathscr{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L).$$

o qual é um espaço de Hilbert com a norma

$$||(u,v,\theta)||_{\mathscr{H}}^2 = \int_0^L u_x^2\ dx + \int_0^L v^2\ dx + \int_0^L \theta^2\ dx, \quad \forall\ (u,v,\theta) \in \mathscr{H},$$

proveniente do produto interno

$$((u_1,v_1,\theta_1),(u_2,v_2,\theta_2))_{\mathscr{H}} = \int_0^L (u_1)_x(u_2)_x\ dx + \int_0^L v_1v_2\ dx + \int_0^L \theta_1\theta_2\ dx,$$

para todos $(u_1,v_1,\theta_1),(u_2,v_2,\theta_2) \in \mathscr{H}$.

Notemos que o sistema (2.1)-(2.2), com as condições iniciais (2.3), pode ser reescrito, via a substituição $v = u_t$ na equação (2.1), na forma

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = \mathscr{A}U(t) \\ \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$ e $\mathscr{A} : D(\mathscr{A}) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é o operador linear não-limitado dado por

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} & -\sigma(x)I & -\alpha\dfrac{\partial \cdot}{\partial x} \\ \\ 0 & -\beta\dfrac{\partial \cdot}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

com $D(\mathscr{A}) = H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$. Nestas condições, o operador $\mathscr{A}$ está bem definido, no sentido de que

$$D(\mathscr{A}) = \{U = (u,v,\theta) \in \mathscr{H};\ \mathscr{A}U \in \mathscr{H}\}.$$

Com as notações e definições anteriores, o problema (2.6) é equivalente ao problema (2.1)-(2.4). O que faremos, então, é mostrar que $\mathscr{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares o que implicará na existência de solução para (2.6) e, portanto, para o sistema (2.1)-(2.4).

Inicialmente, observemos que não se pode garantir que o operador $\mathscr{A}$ é dissipativo. Com efeito, se $U = (u, v, \theta) \in D(\mathscr{A})$, então

$$\begin{aligned}
(\mathscr{A}U, U)_{\mathscr{H}} &= ((v, u_{xx} - \sigma(x)v - \alpha\theta_x, -\beta v_x + \theta_{xx}), (u, v, \theta))_{\mathscr{H}} \\
&= \int_0^L v_x u_x \, dx + \int_0^L (u_{xx} - \sigma(x)v - \alpha\theta_x)v \, dx + \int_0^L (-\beta v_x + \theta_{xx})\theta \, dx \\
&= \int_0^L v_x u_x \, dx + \int_0^L u_{xx} v \, dx - \int_0^L \sigma(x)v^2 \, dx - \alpha \int_0^L v\theta_x \, dx - \beta \int_0^L v_x \theta \, dx \\
&+ \int_0^L \theta_{xx}\theta \, dx.
\end{aligned}$$

Daí, observando que

$$\int_0^L v_x u_x \, dx + \int_0^L u_{xx} v \, dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(u_x v) \, dx = 0,$$

$$\int_0^L v_x \theta \, dx = -\int_0^L v\theta_x \, dx$$

e

$$\int_0^L \theta_{xx}\theta \, dx = -\int_0^L \theta_x^2 \, dx,$$

já que $v, \theta \in H_0^1(0, L)$, obtemos

$$(\mathscr{A}U, U)_{\mathscr{H}} = -\int_0^L \sigma(x)v^2 \, dx + (-\alpha + \beta)\int_0^L v\theta_x \, dx - \int_0^L \theta_x^2 \, dx.$$

Ainda, utilizando a Desigualdade de Young e a hipótese (2.5), segue que

$$\begin{aligned}
(\mathscr{A}U, U)_{\mathscr{H}} &\leq -\sigma_0 \int_0^L v^2 \, dx + \frac{1}{2}(-\alpha + \beta)^2 \int_0^L v^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_0^L \theta_x^2 \, dx \\
&\leq -\sigma_0 |v|^2 + \frac{1}{2}(-\alpha + \beta)^2(|v|^2 + ||u||^2 + |\theta|^2) - \frac{1}{2}||\theta||^2
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$(\mathscr{A}U,U)_{\mathscr{H}} \leq -\sigma_0|v|^2 + \frac{1}{2}(-\alpha+\beta)^2||U||^2_{\mathscr{H}} - \frac{1}{2}||\theta||^2. \tag{2.7}$$

A desigualdade anterior nos leva a considerar uma perturbação limitada do operador $\mathscr{A}$, escolhida adequadamente, de modo que o novo operador seja dissipativo. Assim, definimos o operador $\mathscr{B} : D(\mathscr{B}) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, dado por

$$\mathscr{B} = -(\alpha-\beta)^2 I + \mathscr{A},$$

onde $D(\mathscr{B}) = D(\mathscr{A})$ e I o operador identidade em $\mathscr{H}$.

Nosso objetivo agora é mostrar que $\mathscr{B}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0. Para tanto, usaremos o Teorema de Lumer-Phillips, ou seja, vamos mostrar que $\mathscr{B}$ é maximal dissipativo e densamente definido.

Proposição 2.1 *$D(\mathscr{B})$ é denso em $\mathscr{H}$.*

Demonstração: Como $\mathscr{D}(0,L)$ é denso em $H_0^1(0,L)$ e

$$\mathscr{D}(0,L) \subset H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L) \subset H_0^1(0,L)$$

temos que $H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ é denso em $H_0^1(0,L)$. Ainda, $\mathscr{D}(0,L)$ é denso em $L^2(0,L)$ e

$$\mathscr{D}(0,L) \subset H_0^1(0,L) \subset L^2(0,L),$$

logo $H_0^1(0,L)$ é denso em $L^2(0,L)$. Portanto, $D(\mathscr{B})$ é denso em $\mathscr{H}$. ■

Proposição 2.2 *O operador $\mathscr{B}$ é dissipativo, isto é,*

$$(\mathscr{B}U,U)_{\mathscr{H}} \leq 0, \ \forall\ U = (u,v,\theta) \in D(\mathscr{B}).$$

Demonstração: Com efeito, seja $U = (u,v,\theta) \in D(\mathscr{B})$. Da definição de $\mathscr{B}$ obtemos

$$\begin{aligned}(\mathscr{B}U,U)_{\mathscr{H}} &= ((-(\alpha-\beta)^2 I + \mathscr{A})U,U)_{\mathscr{H}} \\ &= -(\alpha-\beta)^2(U,U)_{\mathscr{H}} + (\mathscr{A}U,U)_{\mathscr{H}} \\ &= -(\alpha-\beta)^2||U||^2_{\mathscr{H}} + (\mathscr{A}U,U)_{\mathscr{H}}.\end{aligned}$$

Disto, e da desigualdade (2.7), obtém-se

$$\begin{aligned}(\mathscr{B}U,U)_{\mathscr{H}} &\leq -(\alpha-\beta)^2||U||^2_{\mathscr{H}} - \sigma_0|v|^2 + \frac{1}{2}(-\alpha+\beta)^2||U||^2_{\mathscr{H}} - \frac{1}{2}||\theta||^2 \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2||U||_{\mathscr{H}} - \sigma_0|v|^2 - \frac{1}{2}||\theta||^2 \leq 0,\end{aligned}$$

o que mostra que o operador $\mathscr{B}$ é dissipativo. ■

Proposição 2.3 *$I - \mathscr{B}$ é um operador sobrejetivo, isto é, $Im(I - \mathscr{B}) = \mathscr{H}$, onde I é o operador identidade em $\mathscr{H}$.*

Demonstração: Devemos mostrar que para todo $G = (f, g, h) \in \mathscr{H}$ existe $U = (u, v, \theta) \in D(\mathscr{B})$ tal que

$$(I - \mathscr{B})U = G, \tag{2.8}$$

ou seja, devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} [(\alpha-\beta)^2+1]\, u - v = f \\ [(\alpha-\beta)^2+1]\, v - u_{xx} + \sigma(x)v + \alpha\theta_x = g \\ [(\alpha-\beta)^2+1]\, \theta + \beta v_x - \theta_{xx} = h, \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $f \in H_0^1(0, L)$, $g \in L^2(0, L)$ e $h \in L^2(0, L)$ são funções dadas.

Chamando $k = [(\alpha-\beta)^2 + 1]$, sendo $v = ku - f$ e $v_x = ku_x - f_x$ o sistema (2.9) se resume a encontrar $u, \theta \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ tais que

$$\begin{cases} (k^2 + \sigma(x)k)u - u_{xx} + \alpha\theta_x = (k + \sigma(x))f + g \\ k\theta + \beta k u_x - \theta_{xx} = \beta f_x + h, \end{cases} \tag{2.10}$$

com $f \in H_0^1(0, L)$, $g \in L^2(0, L)$ e $h \in L^2(0, L)$ funções dadas.

Assim, resolvendo (2.10), obtemos a solução procurada $(u, v, \theta) \in D(\mathscr{B})$ do problema (2.9) e, consequentemente, resolvemos (2.8). Com o intuito de resolver o sistema (2.10), vamos considerar o espaço de Hilbert

$$\mathscr{W} = H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L),$$

a forma bilinear

$$a : \mathscr{W} \times \mathscr{W} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\begin{aligned} a\left((u,\theta),(\psi,\phi)\right) =& k\beta \int_0^L (k^2 + \sigma(x)k)u\psi \; dx + k\beta \int_0^L u_x\psi_x \; dx + k\beta\alpha \int_0^L \theta_x\psi \; dx + \alpha k \int_0^L \theta\phi \; dx \\ &+ \alpha\beta k \int_0^L u_x\phi \; dx + \alpha \int_0^L \theta_x\phi_x \; dx, \end{aligned}$$

e a forma linear

$$F : \mathscr{W} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$F(\psi,\phi) = k\beta \int_0^L (k+\sigma(x))f\psi\ dx + k\beta \int_0^L g\psi\ dx + \alpha\beta \int_0^L f_x\phi\ dx + \alpha \int_0^L h\phi\ dx.$$

Note que, para $(u,\theta) \in \mathscr{W}$ qualquer, temos

$$\begin{aligned} a((u,\theta),(u,\theta)) = k\beta \int_0^L (k^2+\sigma(x)k)u^2\ dx + k\beta \int_0^L u_x^2\ dx + k\beta\alpha \int_0^L \theta_x u\ dx + \alpha k \int_0^L \theta^2\ dx \\ + \alpha\beta k \int_0^L u_x\theta\ dx + \alpha \int_0^L \theta_x^2\ dx, \end{aligned}$$

donde, integrando por partes e usando a hipótese (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} a((u,\theta),(u,\theta)) &\geq k\beta(k^2+\sigma_0 k) \int_0^L u^2\ dx + k\beta \int_0^L u_x^2\ dx + \alpha k \int_0^L \theta^2\ dx + \alpha \int_0^L \theta_x^2\ dx \\ &\geq k\beta \int_0^L u_x^2\ dx + \alpha \int_0^L \theta_x^2\ dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a((u,\theta),(u,\theta)) \geq C(||u||^2 + ||\theta||^2) = C||(u,\theta)||^2_{\mathscr{W}},$$

onde $C = \min\{k\beta, \alpha\}$, o que mostra que a é coerciva. Além disso, a é contínua. Com efeito, graças à hipótese (2.5) e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos, para quaisquer $(u,\theta),(\psi,\phi) \in \mathscr{W}$,

$$\begin{aligned} |a\left((u,\theta),(\psi,\phi)\right)| \leq k\beta(k^2+\sigma_1 k)\left|\int_0^L u\psi\ dx\right| + k\beta\left|\int_0^L u_x\psi_x\ dx\right| + k\beta\alpha\left|\int_0^L \theta_x\psi\ dx\right| \\ + \alpha k\left|\int_0^L \theta\phi\ dx\right| + \alpha\beta k\left|\int_0^L u_x\phi\ dx\right| + \alpha\left|\int_0^L \theta_x\phi_x\ dx\right|, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} |a((u,\theta),(\psi,\phi))| \leq k\beta(k^2+\sigma_1 k)|u||\psi| + k\beta\|u\|\|\psi\| + k\beta\alpha\|\theta\||\psi| + \alpha k|\theta||\phi| + \alpha\beta k\|u\||\phi| \\ + \alpha\|\theta\|\|\phi\| \end{aligned}$$

e, pela Desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}|a((u,\theta),(\psi,\phi))| &\leq C_1\left(\|u\|\|\psi\| + \|\theta\|\|\psi\| + \|u\|\|\phi\| + \|\theta\|\|\phi\|\right)\\ &\leq C_2\left(\|u\|^2 + \|\theta\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|\psi\|^2 + \|\phi\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= C_2||(u,\theta)||_{\mathscr{W}}||(\psi,\phi)||_{\mathscr{W}}.\end{aligned}$$

Finalmente, observemos que, para todo $(\psi,\phi) \in \mathscr{W}$, vale, graças à Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a hipótese (2.5),

$$|F(\psi,\phi)| \leq k\beta(k+\sigma_1)\left|\int_0^L f\psi\ dx\right| + k\beta\left|\int_0^L g\psi\ dx\right| + \alpha\beta\left|\int_0^L f_x\phi\ dx\right| + \alpha\left|\int_0^L h\phi\ dx\right|$$

logo,

$$\begin{aligned}|F(\psi,\phi)| &\leq k\beta(k+\sigma_1)|f||\psi| + k\beta|g||\psi| + \alpha\beta\|f\||\phi| + \alpha|h||\phi|\\ &= k\beta\left[(k+\sigma_1)|f| + |g|\right]|\psi| + \alpha\left[\beta\|f\| + |h|\right]|\phi|\\ &= C_3|\psi| + C_4|\phi| \leq C_5(|\psi|^2 + |\phi|^2)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

de onde se obtém, utilizando a Desigualdade de Poincaré,

$$|F(\psi,\phi)| \leq C_6(\|\psi\|^2 + \|\phi\|^2)^{\frac{1}{2}} = C_6||(\psi,\phi)||_{\mathscr{W}},$$

isto válido para todo $(\psi,\phi) \in \mathscr{W}$, o que significa que F é contínua.

Mostramos, até aqui, que a forma bilinear a é contínua e coerciva e a forma linear F é contínua. Então, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe único $(u,\theta) \in \mathscr{W} = H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$ tal que

$$a((u,\theta),(\psi,\phi)) = F(\psi,\phi), \quad \forall\ (\psi,\phi) \in \mathscr{W}, \tag{2.11}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}k\beta\int_0^L(k^2+\sigma(x)k)u\psi\ dx + k\beta\int_0^L u_x\psi_x\ dx + k\beta\alpha\int_0^L\theta_x\psi\ dx + \alpha k\int_0^L\theta\phi\ dx + \alpha\beta k\int_0^L u_x\phi\ dx\\ +\alpha\int_0^L\theta_x\phi_x\ dx = k\beta\int_0^L(k+\sigma(x))f\psi\ dx + k\beta\int_0^L g\psi\ dx + \alpha\beta\int_0^L f_x\phi\ dx + \alpha\int_0^L h\phi\ dx,\end{aligned}$$

para toda $(\psi,\phi) \in \mathscr{W}$.

Em particular, a igualdade (2.11) vale para todo $(\psi, 0)$, onde $\psi \in \mathscr{D}(0,L)$, ou seja,

$$\int_0^L (k^2+\sigma(x)k)u\psi\ dx + \int_0^L u_x\psi_x\ dx + \alpha\int_0^L \theta_x\psi\ dx = \int_0^L (k+\sigma(x))f\psi\ dx + k\int_0^L g\psi\ dx.$$

Assim, no sentido das distribuições,

$$\langle (k^2+\sigma(x)k)u, \psi\rangle + \langle u_x, \psi_x\rangle + \alpha\langle \theta_x, \psi\rangle = \langle (k+\sigma(x))f, \psi\rangle + \langle g, \psi\rangle,$$

para toda $\psi \in \mathscr{D}(0,L)$ e, portanto, vale em $\mathscr{D}'(0,L)$ a igualdade

$$u_{xx} = (k^2+\sigma(x)k)u + \alpha\theta_x - (k+\sigma(x))f - g.$$

Mas $u \in H_0^1(0,L)$, $\theta \in H_0^1(0,L)$, as funções dadas $f \in H_0^1(0,L)$, $g \in L^2(0,L)$ e $\sigma(x)u \in L^2(0,L)$, donde conclui-se que $u_{xx} \in L^2(0,L)$ e, consequentemente, $u \in H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)$.

Definamos agora

$$v = ku - f.$$

Então $v \in H_0^1(0,L)$ e

$$ku - v = f.$$

Além disso, como

$$k^2u + \sigma(x)ku - u_{xx} + \alpha\theta_x = kf + \sigma(x)f + g,$$

teremos

$$kv + \sigma(x)v - u_{xx} + \alpha\theta_x = g.$$

Por outro lado, a igualdade (2.11) vale para todo $(0, \phi)$, onde $\phi \in \mathscr{D}(0,L)$, ou seja,

$$k\int_0^L \theta\phi\ dx + \beta k\int_0^L u_x\phi\ dx + \int_0^L \theta_x\phi_x\ dx = \beta\int_0^L f_x\phi\ dx + \int_0^L h\phi\ dx.$$

Assim, no sentido das distribuições,

$$k\langle\theta,\phi\rangle + \beta k\langle u_x,\phi\rangle + \langle\theta_x,\phi_x\rangle = \beta\langle f_x,\phi\rangle + \langle h,\phi\rangle,$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}(0,L)$ e, portanto, vale em $\mathscr{D}'(0,L)$ a igualdade

$$\theta_{xx} = k\theta + \beta k u_x - \beta f_x - h.$$

Como u, θ, $f \in H_0^1(0,L)$ e $h \in L^2(0,L)$, conclui-se que $\theta_{xx} \in L^2(0,L)$. Portanto

$\theta \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ e

$$k\theta + \beta v_x - \theta_{xx} = h.$$

Em resumo, mostramos a existência de $(u, v, \theta) \in D(\mathscr{B})$ satisfazendo as equações do sistema (2.9) provando, assim, que $Im(I - \mathscr{B}) = \mathscr{H}$, o que encerra a demonstração da proposição. ∎

Provamos, até aqui, que $\mathscr{B}$ é um operador densamente definido e maximal dissipativo. Segue então, do Teorema de Lumer-Phillips, que $\mathscr{B}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0.

Ora, como o operador $(\alpha - \beta)^2 I$ é linear e limitado, utilizando a Teoria da Perturbação de Semigrupos garantimos que o operador $\mathscr{B} + (\alpha - \beta)^2 = \mathscr{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0.

Assim, $\mathscr{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 e se $U_0 \in D(\mathscr{A})$, $U(t) = T(t)U_0$ é solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = \mathscr{A}U(t) \\ \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

2.2 UNICIDADE DE SOLUÇÃO

A unicidade de solução do sistema (2.1)-(2.4) é provada de forma clássica. Com efeito, utilizamos a formulação abstrata e toma-se o procedimento padrão que é o método da energia. Suponhamos, pois, que U e V são soluções de (2.6), isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = (\mathscr{B} + (\alpha - \beta)^2 I)U(t) \\ \\ U(0) = U_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}V(t) = (\mathscr{B} + (\alpha - \beta)^2 I)V(t) \\ \\ V(0) = U_0 \end{cases}$$

Fazendo $W(t) = U(t) - V(t)$, tem-se que $W(t)$ é solução de

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}W(t) = (\mathscr{B} + (\alpha - \beta)^2 I)W(t) \\ \\ W(0) = 0. \end{cases}$$

Tomando o produto interno em ambos os membros da equação diferencial anterior por $W(t)$, obtemos

$$(W_t(t), W(t))_{\mathscr{H}} = \big(\mathscr{B} + (\alpha-\beta)^2 I)W(t), W(t)\big)_{\mathscr{H}}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\|W(t)\|^2_{\mathscr{H}} \leq 2(\alpha-\beta)^2\|W(t)\|^2_{\mathscr{H}}, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Disto se obtém a desigualdade

$$\|W(t)\|^2_{\mathscr{H}} \leq \|W(0)\|^2_{\mathscr{H}} e^{2(\alpha-\beta)^2 t} = 0,$$

donde segue que $W(t) = 0$, para todo $t \geq 0$ e, portanto,

$$U(t) = V(t), \quad \forall\ t \geq 0.$$

Resta provado, pois, o seguinte resultado de existência e unicidade de solução para o problema (2.6) e, consequentemente, para o sistema (2.1)-(2.4):

Teorema 2.1 *Suponhamos que σ satisfaz a hipótese* (2.5)*. Então, para cada $(u_0, u_1, \theta_0) \in D(\mathscr{A})$, o sistema* (2.1)-(2.4) *tem uma única solução global forte (u, θ) tal que*

$$u \in C([0,\infty);\ H^2(0,L) \cap H^1_0(0,L)) \cap C^1([0,\infty);\ H^1_0(0,L)) \cap C^2([0,\infty);\ L^2(0,L))$$

e

$$\theta \in\ C([0,\infty);\ H^2(0,L) \cap H^1_0(0,L)) \cap C^1([0,\infty);\ L^2(0,L)).$$

Capítulo 3

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA SOLUÇÃO

Neste capítulo estudaremos o comportamento assintótico da solução (u, θ) do sistema (2.1)-(2.4). A técnica analítica utilizada para obter o decaimento é o método de energia, que pode ser visto, por exemplo, em [18] e [19].

Como uma apresentação do método a ser utilizado para o estudo do comportamento assintótico da solução do sistema (2.1)-(2.4), obtida na seção anterior, vamos analisar o comportamento da solução do problema de valor inicial e de contorno

$$u_{tt} - u_{xx} + \sigma(x)u_t = 0, \quad 0 < x < L \text{ e } 0 < t < +\infty, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \ 0 < x < L, \tag{3.2}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \ t > 0, \tag{3.3}$$

onde a função $\sigma \in L^\infty(0, L)$ satisfaz a hipótese (2.5), isto é,

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_1, \ \text{ q.s. em } (0, L).$$

A existência e unicidade de solução para o problema acima pode ser obtida com aquele mesmo método empregado no capítulo anterior. De fato, se $(u_0, u_1) \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$, então existe uma única solução global forte u de (3.1)-(3.3) tal que

$$u \in C([0, \infty), \ H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, \infty), \ H_0^1(0, L)) \cap C^2([0, \infty), \ L^2(0, L)).$$

A *Energia Total* associada ao modelo (3.1)-(3.3) é dada pela integral

$$\mathscr{E}(t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^L \left(u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\right)\, dx \tag{3.4}$$

e um cálculo simples nos dá

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) = -\int_0^L \sigma(x) u_t^2(x,t)\, dx \leq -\sigma_0 \int_0^L u_t^2(x,t)\, dx \leq 0, \tag{3.5}$$

o que significa que a energia é decrescente e o modelo tem, pois, caráter dissipativo. O próximo resultado mostra que a energia decai exponencialmente a zero quando $t \to \infty$. A demonstração deste fato se baseia num método que consiste em perturbar adequadamente o funcional Energia $\mathscr{E}(t)$.

Teorema 3.1 *Seja* $\mathscr{E}(t)$ *a energia total do sistema* (3.1)-(3.3)*, definida pela identidade* (3.4)*. Então, existem constantes* $C, \gamma > 0$ *tais que*

$$\mathscr{E}(t) \leq C\mathscr{E}(0) \exp\left(-\gamma t\right), \,\forall\, t \geq 0.$$

Demonstração: Multiplicando ambos os membros da equação (3.1) pela função u e integrando em $(0, L)$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L u_t u\, dx + \frac{1}{2}\int_0^L \sigma(x) u^2\, dx\right\} = -\int_0^L u_x^2\, dx + \int_0^L u_t^2\, dx.$$

Ponhamos

$$G(t) = \int_0^L u_t u\, dx + \frac{1}{2}\int_0^L \sigma(x) u^2\, dx. \tag{3.6}$$

Então, obviamente,

$$\frac{d}{dt}G(t) = -\int_0^L u_x^2\, dx + \int_0^L u_t^2\, dx. \tag{3.7}$$

Agora, definimos o funcional *Energia Perturbada*

$$H(t) = \mathscr{E}(t) + \delta G(t), \tag{3.8}$$

onde δ é um parâmetro positivo a ser fixado posteriormente. Levando em conta (3.5) e

(3.7), vemos que

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -\delta \int_0^L u_x^2 \, dx - (\sigma_0 - \delta) \int_0^L u_t^2 \, dx.$$

Se fixarmos δ suficientemente pequeno de modo que $0 < \delta < \sigma_0$, obteremos

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -C_1 \mathscr{E}(t), \tag{3.9}$$

onde $C_1 = \min\{2\delta, 2(\sigma_0 - \delta)\} > 0$.

Mostremos agora a equivalência entre $H(t)$ e $\mathscr{E}(t)$. Com efeito, temos

$$|H(t) - \mathscr{E}(t)| \leq \delta \int_0^L |u||u_t| \, dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L |\sigma(x)||u|^2 \, dx.$$

Daí, utilizando a Desigualdade de Young, a Desigualdade de Poincaré e a hipótese (2.5), segue que

$$|H(t) - \mathscr{E}(t)| \leq \frac{\delta}{2} \int_0^L u_t^2 \, dx + \frac{\delta C_0}{2}(1 + \sigma_1) \int_0^L u_x^2 \, dx.$$

Tomando $C_2 = \max\{1, C_0(1 + \sigma_1)\} > 0$, obtemos

$$|H(t) - \mathscr{E}(t)| \leq \delta C_2 \mathscr{E}(t)$$

e, portanto,

$$(1 - \delta C_2)\mathscr{E}(t) \leq H(t) \leq (1 + \delta C_2)\mathscr{E}(t).$$

Escolhendo δ pequeno de modo que, além de ser $0 < \delta < \sigma_0$, satisfaça $1 - \delta C_2 > 0$, conclui-se que

$$K_1 \mathscr{E}(t) \leq H(t) \leq K_2 \mathscr{E}(t), \tag{3.10}$$

onde $K_1 = 1 - \delta C_2 > 0$ e $K_2 = 1 + \delta C_2 > 0$.

De (3.9) e (3.10) chega-se à desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq \frac{-C_1}{K_2} H(t),$$

da qual se obtém

$$H(t) \leq H(0) \exp\left(\frac{-C_1}{K_2}t\right).$$

Combinando a desigualdade acima com a (3.10), concluímos que

$$\mathscr{E}(t) \leq C\mathscr{E}(0) \exp\left(-\gamma t\right), \quad \forall\ t \geq 0,$$

onde $C = \frac{K_2}{K_1}$ e $\gamma = \frac{C_1}{K_2}$, provando assim o teorema. ∎

Nosso próximo passo, objetivo central deste trabalho, é o estudo do comportamento assintótico da solução (u, θ) do sistema (2.1)-(2.4), obtida no Capítulo 2. Recordemos que $u \in C([0,\infty);\ H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,\infty);\ H_0^1(0,L)) \cap C^2([0,\infty);\ L^2(0,L))$ e $\theta \in C([0,\infty);\ H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,\infty);\ L^2(0,L))$. Algumas considerações e resultados preliminares são necessários antes da apresentação do principal resultado.

Lema 3.1 *Sejam* $\alpha, \beta > 0$ *e* σ *satisfazendo a hipótese* (2.5). *Para cada solução* (u, θ) *do sistema* (2.1)-(2.4), *a energia total* $\mathscr{E}(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *do sistema, no instante de tempo* t, *é dada por*

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(u_t^2 + u_x^2 + \frac{\alpha}{\beta}\theta^2\right) dx \tag{3.11}$$

e satisfaz

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) = -\int_0^L \sigma(x) u_t^2\ dx - \frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta_x^2\ dx. \tag{3.12}$$

Demonstração: Multiplicando ambos os membros da equação (2.1) por βu_t e da equação (2.2) por $\alpha\theta$, adicionando ambas e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\beta\int_0^L u_{tt}u_t\ dx - \beta\int_0^L u_{xx}u_t\ dx + \beta\int_0^L \sigma(x)u_t^2\ dx + \alpha\beta\int_0^L \theta_x u_t\ dx + \alpha\int_0^L \theta_t\theta\ dx$$
$$- \alpha\int_0^L \theta_{xx}\theta\ dx + \alpha\beta\int_0^L u_{xt}\theta\ dx = 0.$$

Observando que

$$-\beta\int_0^L u_{xx}u_t\ dx = \beta\int_0^L u_x u_{xt}\ dx,$$

visto que $u_t(0,t) = u_t(L,t) = 0$ (lembre que $u_t(.,t) \in H_0^1$), e

$$-\alpha\int_0^L \theta_{xx}\theta\ dx = \alpha\int_0^L \theta_x^2\ dx,$$

visto que $\theta(0,t)=\theta(L,t)=0$, chegamos à identidade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L u_t^2\ dx+\int_0^L u_x^2\ dx+\frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta^2\ dx\right\}=-\int_0^L \sigma(x)u_t^2\ dx-\frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta_x^2\ dx.$$

Portanto, a *Energia Total* associada ao sistema é dada pela expressão

$$\mathscr{E}(t)\equiv\frac{1}{2}\int_0^L\left(u_t^2+u_x^2+\frac{\alpha}{\beta}\theta^2\right)dx$$

e satisfaz

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t)=-\int_0^L \sigma(x)u_t^2\ dx-\frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta_x^2\ dx.$$

■

A igualdade anterior nos leva a concluir que a energia é decrescente. Estamos interessados, pois, em analisar a forma que ocorre esse decaimento. O método utilizado é aquele empregado no início deste capítulo, quando se obteve o decaimento da energia da equação da onda com dissipação, que consiste em perturbar a energia do sistema por um funcional escolhido adequadamente. Com o intuito de encontrar a perturbação adequada para a energia, vamos multiplicar ambos os membros da equação (2.1) por u e integrar em $(0,L)$. Obtemos, com isso,

$$\int_0^L u_{tt}u\ dx-\int_0^L u_{xx}u\ dx+\int_0^L \sigma(x)u_tu\ dx+\alpha\int_0^L \theta_xu\ dx=0.$$

Observando que

$$\int_0^L u_{tt}u\ dx=\frac{d}{dt}\int_0^L u_tu\ dx-\int_0^L u_t^2\ dx,$$

$$\int_0^L u_{xx}u\ dx=-\int_0^L u_x^2\ dx,$$

$$\int_0^L \sigma(x)u_tu\ dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \sigma(x)u^2\ dx$$

e

$$\int_0^L \theta_xu\ dx=-\int_0^L \theta u_x\ dx,$$

graças às condições de contorno (2.4), chega-se a

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L u_t u \, dx + \frac{1}{2}\int_0^L \sigma(x)u^2 \, dx\right\} = -\int_0^L u_x^2 \, dx + \int_0^L u_t^2 \, dx + \alpha \int_0^L \theta u_x \, dx.$$

Consideremos, então, o funcional

$$G(t) = \int_0^L u u_t \, dx + \frac{1}{2}\int_0^L \sigma(x)u^2 \, dx. \tag{3.13}$$

Vale, com isso,

$$\frac{d}{dt}G(t) = -\int_0^L u_x^2 \, dx + \int_0^L u_t^2 \, dx + \alpha \int_0^L \theta u_x \, dx. \tag{3.14}$$

Definimos agora a *Energia Perturbada* $H(t)$ pondo

$$H(t) = \mathscr{E}(t) + \delta G(t), \tag{3.15}$$

onde δ é um parâmetro positivo a ser fixado.

Lema 3.2 *Existe constante* $C_1 > 0$ *tal que*

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -C_1 \mathscr{E}(t), \quad \forall\; t \geq 0.$$

Demonstração: Notemos inicialmente, que

$$\frac{d}{dt}H(t) = \frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) + \delta \frac{d}{dt}G(t).$$

Levando-se em conta a Desigualdade de Poincaré e a hipótese (2.5) obtemos, de (3.12),

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) \leq -\sigma_0 \int_0^L u_t^2 \, dx - \frac{\alpha}{\beta C_0}\int_0^L \theta^2 \, dx. \tag{3.16}$$

Por outro lado temos, de (3.14), aplicando-se a Desigualdade de Young,

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq -\frac{1}{2}\int_0^L u_x^2 \, dx + \int_0^L u_t^2 \, dx + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^L \theta^2 \, dx. \tag{3.17}$$

Segue, de (3.16)-(3.17), que

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -2(\sigma_0 - \delta)\frac{1}{2}\int_0^L u_t^2\ dx - \frac{\delta}{2}\int_0^L u_x^2\ dx - \left(\frac{2}{C_0} - \delta\alpha\beta\right)\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta^2\ dx.$$

Agora é só escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\sigma_0 - \delta > 0 \quad \text{e} \quad \frac{2}{C_0} - \alpha\beta\delta > 0 \tag{3.18}$$

e fazer

$$C_1 = \min\left\{2(\sigma_0 - \delta),\ \delta,\ \frac{2}{C_0} - \delta\alpha\beta\right\},$$

que teremos

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -C_1\mathscr{E}(t), \quad \forall\ t \geq 0,$$

provando o desejado. ■

Nosso próximo passo será mostrar a equivalência entre o funcional Energia Perturbada $H(t)$ e o funcional Energia $\mathscr{E}(t)$.

Lema 3.3 *Existem constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que*

$$K_1\mathscr{E}(t) \leq H(t) \leq K_2\mathscr{E}(t), \quad \forall\ t \geq 0.$$

Demonstração: De (3.15), obtemos

$$|H(t) - \mathscr{E}(t)| = |\delta G(t)| \leq \delta\left(\int_0^L |u||u_t|\ dx + \frac{1}{2}\int_0^L |\sigma(x)||u^2|\ dx\right).$$

Utilizando a hipótese (2.5), a Desigualdade de Hölder e a Desigualdade de Poincaré, segue que

$$\begin{aligned}
|H(t) - \mathscr{E}(t)| &\leq \delta\left(\int_0^L |u||u_t|\ dx + \frac{\sigma_1}{2}\int_0^L |u|^2\ dx\right)\\
&\leq \frac{\delta}{2}\int_0^L u_t^2\ dx + (1+\sigma_1)\frac{\delta}{2}\int_0^L u^2\ dx\\
&\leq \frac{\delta}{2}\int_0^L u_t^2\ dx + C_0(1+\sigma_1)\frac{\delta}{2}\int_0^L u_x^2\ dx
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$(1-\delta)\frac{1}{2}\int_0^L u_t^2\,dx + [1 - C_0(1+\sigma_1)\delta]\frac{1}{2}\int_0^L u_x^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta^2\,dx \leq H(t)$$
$$\leq (1+\delta)\frac{1}{2}\int_0^L u_t^2\,dx + [1 + C_0(1+\sigma_1)\delta]\frac{1}{2}\int_0^L u_x^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\int_0^L \theta^2\,dx.$$

Tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que, além de (3.18), satisfaça também

$$1 - C_0(1+\sigma_1)\delta > 0 \quad \text{e} \quad 1 - \delta > 0,$$

obtemos

$$K_1\mathscr{E}(t) \leq H(t) \leq K_2\mathscr{E}(t),$$

onde

$$K_1 = \min\{(1 - C_0(1+\sigma_1)\delta)\,, 1-\delta\} > 0$$

e

$$K_2 = \max\{(1 + C_0(1+\sigma_1)\delta)\,, 1+\delta\} > 0.$$

■

Finalmente, o próximo resultado mostra que $\mathscr{E}(t) \to 0$, exponencialmente, quando $t \to \infty$.

Teorema 3.2 *Seja $\mathscr{E}(t)$ a energia associada ao sistema* (2.1)-(2.4)*, dada pela expressão* (3.11)*. Então, existem constantes $C, \gamma > 0$ tais que*

$$\mathscr{E}(t) \leq C\mathscr{E}(0)\exp(-\gamma t)\,, \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração: Dos Lemas 3.2 e 3.3 sabemos que

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq -C_1\mathscr{E}(t) \leq -\frac{C_1}{K_2}H(t)$$

e, portanto,

$$H(t) \leq H(0)\exp\left(-\frac{C_1}{K_2}t\right).$$

Daí, utilizando novamente o Lema (3.3), obtemos

$$\mathscr{E}(t) \leq \frac{K_2}{K_1}\mathscr{E}(0)\exp\left(-\frac{C_1}{K_2}t\right),$$

isto é,

$$\mathscr{E}(t) \leq C\mathscr{E}(0)\exp(-\gamma t)\,,\ \forall\ t \geq 0,$$

onde, $C = \frac{K_2}{K_1}$ e $\gamma = \frac{C_1}{K_2}$. $\blacksquare$

CONCLUSÃO

A teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados mostrou-se uma ferramenta poderosa na demonstração de existência e unicidade de solução do problema (2.1)-(2.4). Na verdade, tal teoria pode ser aplicada a problemas muito mais gerais, incluindo os não-lineares.

Para o estudo do comportamento assintótico da solução, o método empregado pode ser utilizado em problemas de evolução mais gerais, com outras condições de contorno. O que se precisa, em geral, é encontrar multiplicadores mais adequados a cada situação considerada. Claro está que, dependendo do tipo de dissipação considerada no modelo (dissipação localizada ou dissipação na fornteira, por exemplo), o método pode requerer cálculos mais sofisticados. Fica, no entanto, a perspectiva futura de abordar modelos não-lineares associados ao sistema (2.1)-(2.2) bem como considerar outros mecanismos de dissipação da energia.

Referências Bibliográficas

[1] ACHENBACH, J. D. **Wave Propagation in Elastic Solids**. New York: North-Holland Publishing Company, 1973.

[2] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces.** New York: Academic Press, 1975

[3] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration**. New York: John Wiley and Sons, 1966.

[4] BREZIS, H. **Análisis funcional - Teoría y Aplicaciones**. Madrid: Alianza Editorial S. A., 1984.

[5] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGUES CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.** Maringá: Eduem, 2009.

[6] CIARLET, P. G. **Mathematical Elasticity**. Amsterdam: NorthHolland, 1993. 1 v.

[7] DAFERMOS, C. M. **On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity**. Arch. Rational Mech. Anal. 29, 241– 271, 1968.

[8] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. American Mathematical Society, 1998. 19 v.

[9] FERREIRA, M. V., MENZALA, G. P. Energy decay for solutions to semilinear systems of elastic waves in exterior domains. **Electronic Journal of Differential Equations**, p. 1–13, 2006.

[10] FERREIRA, M. V., MENZALA, G. P. Uniform stabilization of an electromagnetic-elasticity problem in exterior domains. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, v. 18, n. 4, p. 719–746, 2007.

[11] FOLLAND, G. **Real Analysis**. New York: John Wiley and Sons, 1984.

[12] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.

[13] HOUNIE, J. **Teoria Elementar das Distribuições**. IMPA, 1979.

[14] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. United States of America: John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[15] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E. A. **A integral de lebesgue**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 2008.

[16] NOWACKI, W. **Thermoelasticity**. Oxford: Pergamon Press, 1962.

[17] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.** Applied Mathematical Sciences. NewYork: Springer - Verlag, 1983.

[18] PEREIRA, D. C., MENZALA, G. P. Exponential decay of solutions to a coupled system of equations of linear thermoelasticity. **Comp. Appl. Math**. v. 8, p. 193–204, 1989.

[19] RIVERA, J. E. M. Energy decay rates in linear thermoelasticity. **Funkcialaj Ekvacioj**. v. 35, p. 19–30, 1992.

[20] RIVERA, J. E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. Série de Textos Avançados. Rio de Janeiro, 1999.

[21] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis.** New York: McGraw-Hill, 1970.