

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DAS CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Silvia Barcelos Machado

MODELOS PARA A INTERAÇÃO DA LAGARTA *Anticarsia*
gemmatalis COM O FUNGO ENTOMOPATOGÊNICO
Metarhizium rileyi

Santa Maria, RS
2016

Silvia Barcelos Machado

MODELOS PARA A INTERAÇÃO DA LAGARTA *Anticarsia gemmatalis*
COM O FUNGO ENTOMOPATOGÊNICO *Metarhizium rileyi*

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Aplicada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Diomar Cristina Mistro

Santa Maria, RS
2016

Silvia Barcelos Machado


MODELOS PARA A INTERAÇÃO DA LAGARTA *Anticarsia gemmatalis*
COM O FUNGO ENTOMOPATOGÊNICO *Metarhizium rileyi*

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Aplicada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 22 de agosto de 2016:



Diomar Cristina Mistro, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)



Carolina Reigada, Dra. (ESALQ)



Salvador Lou Vega, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS

2016

DEDICATÓRIA

*Aos meus amados pais, José e Maria, que ensinaram-me que o esforço conquista tudo
que quisermos.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por tornar-me forte em momentos que senti-me fraca.

Aos meus pais, que sempre acreditaram e incentivaram meus sonhos.

À minha família: irmãs e irmão, cunhados e cunhada, sobrinhos e sobrinhas; pelo apoio, amor e pela alegria que trazem à minha vida.

À Prof^ª Diomar, pelos ensinamentos e orientação; agradeço-a pela dedicação, paciência e incentivo durante esta etapa.

Aos demais professores do PPGMat, que contribuíram para minha formação acadêmica.

À banca examinadora, Carolina Reigada e Prof^º Salvador Lou Vega, pela participação e contribuições feitas ao trabalho.

À Capes, pelo apoio financeiro.

À Jocélia, que ajudou-me infinitamente neste trabalho. Sem sua amizade e colaboração, tudo seria mais complicado.

À Bruna e a Mônica, que além de colegas, são queridas amigas.

Ao Diego, pelo carinho e apoio em momentos difíceis desta caminhada.

Aos colegas do PPGMat, que fizeram-se amigos e assim, certamente, permanecerão. As salas 1213 e 1214, neste tempo, tornaram-se nossa segunda casa e conseqüentemente, tornamo-nos família.

“No final, sempre dou risada. E não perco essa minha estranha mania de ter fé na vida.”

(Clarissa Côrrea)

RESUMO

MODELOS PARA A INTERAÇÃO DA LAGARTA *Anticarsia gemmatalis* COM O FUNGO ENTOMOPATOGÊNICO *Metarhizium rileyi*

AUTORA: Silvia Barcelos Machado

ORIENTADORA: Diomar Cristina Mistro

Neste trabalho propomos um modelo de tempo discreto, composto de um sistema de equações a diferenças, para representar a dinâmica de interação da lagarta-da-soja (*Anticarsia gemmatalis*) e do fungo entomopatogênico *Metarhizium rileyi*. *Anticarsia gemmatalis* é uma praga que ataca a cultura de soja, diminuindo a área foliar, e conseqüentemente, causando danos à produção. O fungo *M. rileyi* é um entomopatógeno de ocorrência natural e, desde que as condições climáticas sejam adequadas, funciona como um agente de controle biológico da lagarta-da-soja, podendo reduzir drasticamente a sua densidade populacional nas lavouras. Através de um modelo simples para a interação, observamos que, dependendo dos parâmetros tomados, a presença do fungo é capaz de reduzir a densidade de lagartas suscetíveis. Verificamos que a densidade de lagartas suscetíveis reduz-se drasticamente quando são feitas aplicações inundativas de fungo. Por fim, ao supormos que o fungo reproduz-se em uma escala de tempo mais rápida do que a lagarta, verificamos que o controle biológico exercido pelo fungo faz com que a densidade de lagartas suscetíveis diminua consideravelmente.

Palavras-chave: Modelos discretos. Dinâmica de populações. Manejo integrado de pragas. Controle biológico. Lagarta-da-soja. Fungo entomopatogênico. Múltiplas escalas.

ABSTRACT

MODELS FOR INTERACTION CATERPILLAR *Anticarsia gemmatalis* WITH ENTOMOPATHOGENIC FUNGUS *Metarhizium rileyi*

AUTHOR: Silvia Barcelos Machado

ADVISOR: Diomar Cristina Mistro

In this work we propose a discrete-time model, composed by a system of difference equations to represent the dynamics of interaction of the velvetbean (*Anticarsia gemmatalis*) and the entomopathogenic fungus *Metarhizium rileyi*. *Anticarsia gemmatalis* is a pest that attacks soybean crop, reducing the leaf area, and consequently causing damage to the production. The fungus *M. rileyi* is a naturally occurring entomopathogen and provided the weather conditions are appropriate, it acts as a biological control agent of the soybean caterpillar, it can drastically reduce the population density in crops. Through a simple model for the interaction, we note that, depending on the parameters taken, the fungal is able to reduce the susceptible caterpillars density. We verified that the susceptible caterpillars density is reduced drastically when inundative applications fungus are made. Finally, supposing that the fungus reproduces faster than the soybean caterpillar scale, we verified that the biological control exercised by the fungus causes susceptible caterpillars density to decrease considerably.

Keywords: Discrete models. Population dynamics. Integrated pest management. Biological control. Velvetbean. Entomopathogenic fungus. Multiple scales.

Lista de Figuras

1.1	Ciclo biológico da <i>Anticarsia gemmatalis</i>	24
1.2	(a) Micélio e corpo de frutificação de <i>Metarhizium rileyi</i> ; (b) Esporos de <i>Metarhizium rileyi</i> ; (c) Lagarta <i>A. gemmatalis</i> coberta pelo <i>M. rileyi</i>	26
1.3	Ciclo completo do fungo <i>M. rileyi</i> sobre a <i>A. gemmatalis</i>	27
2.1	Fração de lagartas suscetíveis que escapa da infecção, para $\delta = 0,2$ e $a = 1,3,5$	31
2.2	Regiões de Estabilidade para $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$. Na região I, o equilíbrio de extinção das espécies é estável; na região II, o equilíbrio de livre da infecção é estável; na região III, o equilíbrio de coexistência é estável e na região IV, surgem oscilações.	38
2.3	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 15; para $r = 0,5$, $\alpha = 5,0$, $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$, parâmetros na região I. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.	39
2.4	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 16; para $r = 1,2$, $\alpha = 2,0$, $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$, parâmetros na região II. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.	39
2.5	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 250; para $r = 2,6$, $\alpha = 5,0$, $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$, parâmetros na região III. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.	40
2.6	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 150; para $r = 4,2$, $\alpha = 15,0$, $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$, parâmetros na região III. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.	40

2.7	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 250; para $r = 4,2$, $\alpha = 28,0$, $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$, parâmetros na região IV. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.	40
2.8	Regiões de Estabilidade para $\delta = 0,1$ e $\gamma = 0,5$. Na região I, o equilíbrio de extinção das espécies é estável; na região II, o equilíbrio de livre da infecção é estável; na região III, o equilíbrio de coexistência é estável e na região IV, surgem oscilações.	41
2.9	Diagramas de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; para $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $0 < \alpha \leq 30$ e $r = 1 + \frac{4\alpha}{30}$	43
2.10	Regiões de Estabilidade para $r = 2,0$ e $\alpha = 2,0$. Na região II, o equilíbrio de livre da infecção é estável e na região III, o equilíbrio de coexistência é estável.	44
2.11	Regiões de Estabilidade para $r = 2,0$ e $\alpha = 10,0$. Na região II, o equilíbrio de livre da infecção é estável; na região III, o equilíbrio de coexistência é estável e na região IV, surgem oscilações.	44
3.1	Diagramas de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a q para $\delta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$. . .	49
3.2	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 300; para $\delta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$, $\alpha = 28,0$ e $q = 2,0$. As curvas em vermelho representam lagartas suscetíveis, azul representam lagartas infectadas e verde, o fungo.	50
3.3	Diagramas de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a q para $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$. . .	51
3.4	Tempo de extinção das lagartas suscetíveis em função de q , para $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$	52
3.5	Diagramas de bifurcação das lagartas suscetíveis em função de q para $\delta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$, para diferentes valores de d_c	53
3.6	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 400; para $\delta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$, $\alpha = 28,0$ e $q = 1,2$. As curvas em vermelho representam lagartas suscetíveis, azul representam lagartas infectadas e verde, o fungo.	54
3.7	Diagramas de bifurcação das lagartas suscetíveis em função de q para $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$, para distintos valores de d_c	55

3.8	Diagramas de bifurcação das lagartas suscetíveis (a) caso em que não há aplicações de fungos; (b) caso em que há aplicações de fungos e (c) comparação entre os diagramas; para $\delta = 0, 1$, $\gamma = 0, 5$, $r = 1 + \frac{4\alpha}{30}$ e $q = 0, 5$, com relação a α	56
3.9	Diagramas de bifurcação das lagartas suscetíveis (a) caso em que não há aplicações de fungos; (b) caso em que há aplicações de fungos e (c) comparação entre os diagramas; para $\delta = 0, 1$, $\gamma = 0, 5$, $r = 1 + \frac{4\alpha}{30}$ e $q = 1, 0$, com relação a α	57
4.1	Esquema de reprodução da lagarta e do fungo em escalas diferentes de tempo, com uma geração intermediária.	61
4.2	Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; em função de r para $\delta = 0, 2$, $\gamma = 0, 5$ e $\alpha = 30, 0$	62
4.3	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 1250; para $r = 1, 17$, $\alpha = 30, 0$, $\delta = 0, 2$ e $\gamma = 0, 5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.	63
4.4	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 500; para $r = 1, 5$, $\alpha = 30, 0$, $\delta = 0, 2$ e $\gamma = 0, 5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.	63
4.5	Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; em função de α para $\delta = 0, 2$, $\gamma = 0, 5$ e $r = 3, 0$	64
4.6	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 250; para $r = 3, 0$, $\alpha = 4, 0$, $\delta = 0, 2$ e $\gamma = 0, 5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.	65
4.7	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 400; para $r = 3, 0$, $\alpha = 15, 0$, $\delta = 0, 2$ e $\gamma = 0, 5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.	65
4.8	Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a δ para $\alpha = 30, 0$, $\gamma = 0, 5$ e $r = 3, 0$	66
4.9	(a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 400; para $r = 3, 0$, $\alpha = 30, 0$, $\delta = 0, 4$ e $\gamma = 0, 5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.	67

- 4.10 (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 400; para $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,8$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo. 67
- 4.11 (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 150; para $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,95$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo. 67
- 4.12 Reprodução da lagarta e do fungo em escalas diferentes de tempo, para duas gerações intermediárias. 68
- 4.13 Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a r para $\delta = 0,2$, $\gamma = 0,5$ e $\alpha = 30,0$ 69
- 4.14 (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 1000; para $r = 1,5$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo. 70
- 4.20 (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 250; para $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,95$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo. 70
- 4.15 Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a α para $\delta = 0,2$, $\gamma = 0,5$ e $r = 3,0$ 71
- 4.16 (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 250; para $r = 3,0$, $\alpha = 3,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo. 72
- 4.17 (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 300; para $r = 3,0$, $\alpha = 4,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo. 72
- 4.18 Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a δ para $\gamma = 0,5$, $r = 3,0$ e $\alpha = 30,0$ 73
- 4.19 (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 200; para $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,93$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo. 74

- 4.21 Densidade total de lagostas suscetíveis em função do tempo para $r = 3, 0$, $\alpha = 30, 0$, $\delta = 0, 2$ e $\gamma = 0, 5$ na escala lenta de tempo. A curva contínua espessa representa a densidade de lagartas quando as escalas são iguais; a curva contínua simples representa a densidade de lagartas para escalas distintas no caso I e a curva tracejada, a densidade de lagartas para escalas distintas no caso II. 74
- 4.22 Diagrama de bifurcação de lagartas suscetíveis (*a*) escalas iguais; (*b*) caso I e (*c*) caso II; com relação a α para $r = 3, 0$, $\gamma = 0, 5$ e $\delta = 0, 2$ 75

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros do sistema 3.1:	46
-----	--------------------------------------	----

Sumário

INTRODUÇÃO	17
1 CONCEITOS BIOLÓGICOS	19
2 MODELO PARA A INTERAÇÃO DA LAGARTA-DA-SOJA <i>Anticarsia gemmatalis</i> COM O ENTOMOFUNGO <i>Metarhizium rileyi</i>	29
2.1 DESCRIÇÃO DO MODELO	30
2.2 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO	32
2.3 SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO	33
2.4 ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO	34
2.5 SIMULAÇÕES	37
2.5.1 Caso I: δ e γ fixos	37
2.5.2 Caso II: r e α fixos	42
3 MODELO LAGARTA–FUNGO COM APLICAÇÕES INUNDATIVAS DE FUNGOS	45
3.1 FORMULAÇÃO E ANÁLISE DO MODELO	45
3.1.1 Simulações	47
3.1.2 Aplicação inundativa restrita de fungos	49
3.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
4 MODELO LAGARTA–FUNGO COM DUAS ESCALAS DE TEMPO	58
4.1 FORMULAÇÃO DO MODELO	59
4.2 CASO I	61
4.2.1 Simulações	61
4.3 CASO II	66
4.3.1 Simulações	68
4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
CONCLUSÃO	76

REFERÊNCIAS

APÊNDICE A

INTRODUÇÃO

Insetos-pragas atingem diversas culturas agrícolas causando prejuízos à produção. O Manejo Integrado de Pragas (MIP) é uma estratégia que associa diferentes técnicas de controle, selecionadas a partir de critérios econômicos, sociais e ambientais, a fim de reduzir e manter a densidade populacional de pragas em um nível que não cause prejuízos ao produtor (Castellani, 2000) e que visa interferir o mínimo possível no agroecossistema.

Dentre as culturas nas quais o MIP foi implementado, o MIP–Soja destaca-se pela sua efetividade. O Brasil é o segundo maior produtor de soja (*Glycine max*) do mundo. O cultivo ocorre, em maiores quantidades, nas regiões sul, centro-oeste e sudeste do Brasil (EMBRAPA, 2004), onde está sujeito ao ataque de diversas pragas durante todo o seu ciclo.

As lagartas desfolhadoras estão entre as pragas mais graves da soja. Neste trabalho, destacamos a importância da lagarta-da-soja *Anticarsia gemmatalis* Hübner, 1818, (Lepidoptera: *Noctuidae*) que causa a redução da área foliar. O ciclo de *A. gemmatalis* dura em torno de 30 dias e, durante a fase larval, é capaz de consumir em média 100 cm^2 de área foliar (Sósa-Gomez, 2000). Dessa forma, quando a densidade populacional de *A. gemmatalis* é alta, elas podem até devastar lavouras, causando grandes danos econômicos.

Com condições climáticas favoráveis, como temperaturas amenas e umidade alta, é possível contar com um inimigo natural da lagarta-da-soja para controlá-la. Este inimigo natural é o fungo entomopatogênico *Metarhizium rileyi* (Farlow) Kepler S. A. Rehner & Humber, 2014, que causa a doença-branca da lagarta. O fungo é capaz de acarretar epizootias na população de *A. gemmatalis*, isto é, reduzir drasticamente a densidade populacional de lagartas em um curto espaço de tempo, dispensando outras técnicas de controle (Bueno *et. al.*, 2012).

Uma ferramenta útil na implementação do MIP é a modelagem matemática, que pode reunir informações que descrevam uma ou mais espécies, ou ainda, a interação entre espécies e simular o comportamento desse sistema para diferentes situações.

Neste trabalho, modelamos a dinâmica de interação da lagarta-da-soja (*A. gemmatalis*) com o fungo *M. rileyi* através de um sistema de tempo discreto, com três equações a diferenças, que descrevem a dinâmica vital das lagartas, suscetíveis e infectadas, e do

fungo. O objetivo deste estudo é analisar a eficiência do fungo, como agente de controle biológico da lagarta.

No capítulo 1, apresentamos um breve referencial teórico sobre o manejo integrado de pragas, a soja, a lagarta-da-soja (*A. gemmatalis*) e o fungo entomopatogênico *M. rileyi*. No capítulo 2, apresentamos um modelo discreto simples de equações a diferenças que representa a dinâmica da lagarta *A. gemmatalis* com o fungo *M. rileyi*. Encontramos as soluções de equilíbrio do sistema, analisamos a estabilidade de cada solução e fazemos simulações numéricas, para diferentes cenários.

No capítulo 3, apresentamos uma modificação do modelo proposto, acrescentando a hipótese de aplicações inundativas de fungos. Isto é, fungos produzidos em laboratórios ou retirados da lavoura são aplicados massivamente nas culturas de soja a fim de que causem epizootias na população de lagartas, de forma imediata. Analisamos o comportamento populacional deste caso através de diagramas de bifurcação e fazemos simulações numéricas para diferentes conjuntos de parâmetros.

No capítulo 4, supomos que os ciclos de vida da lagarta-da-soja e do fungo ocorrem em escalas de tempo distintas, ou seja, não se reproduzem de forma sincronizada e modelamos essa situação através de dois sistemas de equações a diferenças. Um dos sistemas representa o comportamento das populações na escala rápida de tempo enquanto que o outro, na escala lenta. Analogamente ao capítulo anterior, analisamos esse modelo através de diagramas de bifurcação e simulamos diferentes situações.

Finalmente, reservamos as Conclusões para discussão dos resultados.

Capítulo 1

CONCEITOS BIOLÓGICOS

Diversos organismos vivem e dependem da sua interação com culturas agrícolas. A partir do momento que essa interação causa danos econômicos significativos às culturas, os organismos passam a ser denominados pragas (Degrande & Vivan, 2012). Baixas densidades de indivíduos, em uma lavoura, não levam à denominação de praga, uma vez que não causam prejuízos à produção. Portanto, a denominação de praga depende da densidade populacional.

O Manejo Integrado de Pragas (MIP) é uma estratégia que utiliza um conjunto de técnicas e métodos apropriados de controle, a fim de manter pragas em um nível no qual não causem danos à produção. Essas estratégias associam os métodos de controle a princípios econômicos, ecológicos e sociais, buscando-se a interferência mínima no agroecossistema (Castellani, 2000).

O Manejo Integrado de Pragas, por definição, compreende a utilização dos mais variados métodos de controle, sendo que para a implementação efetiva do MIP é necessário que se entenda e se planeje o agroecossistema em questão, que se analise o custo/benefício da execução do MIP e que se conheça a tolerância da cultura aos danos das pragas (Panizzi & Parra, 1991).

O MIP surgiu da necessidade de reduzir o uso excessivo de agrotóxicos, comumente visto e praticado nas culturas a partir dos anos 1940. O uso desmedido de agrotóxicos acarretou efeitos indesejados como ressurgimento das pragas após aplicações de defensivos químicos, resistência, surtos de pragas secundárias, redução de inimigos naturais, resíduos nos alimentos, persistência do defensivo no solo e desgaste ambiental (Carvalho & Barcellos, 2012).

Buscou-se então, já nos anos finais da década de 1950, alternativas que priorizassem o controle biológico natural e o uso controlado de defensivos químicos, quando o nível de dano superasse o nível de controle. A posteriori, o conceito de Manejo Integrado de Pragas tornou-se mais abrangente, sendo definido como “a escolha e o uso inteligente de

táticas de controle que produzem consequências favoráveis dos pontos de vista econômico, ecológico e sociológico”, segundo Kogan (1998).

O MIP envolve diversas áreas do conhecimento, como entomologia, fitotecnia, fisiologia animal, economia, matemática, ciência da computação, etc; construindo-se, assim, um conjunto-base para as tomadas de decisões e a execução de métodos de controle (Gallo *et al.*, 2002).

Ainda segundo Gallo *et al.* (2002), o desenvolvimento e implementação do MIP segue algumas etapas:

1. Identificação das pragas-chaves da cultura: consiste em reconhecer o agente causador de determinado dano à planta.
2. Avaliação dos inimigos naturais: verifica-se a mortalidade natural no agroecossistema e consideram-se técnicas de criação/inserção de inimigos naturais no meio.
3. Estudo de fatores climáticos: estes fatores afetam a dinâmica populacional da praga e seus inimigos naturais. Para determinadas condições climáticas, pode-se até dispensar o uso de defensivos químicos, de modo que o controle da praga é feito pelos seus inimigos naturais. Por exemplo, o fungo *M. rileyi*, causador da doença branca da lagarta, infecta e dizima a população de lagarta-da-soja (*A. gemmatalis*) em anos de alta umidade e temperaturas amenas.
4. Determinação dos níveis econômicos e de controle: definem-se os prejuízos ocasionados pela praga, o custo do controle e o preço da produção. Considerando-se os fatores acima, determina-se três tipos de densidades populacionais, para as pragas, relevantes para a tomada de decisão:
 - (a) Nível de equilíbrio: quando a densidade populacional de pragas mantém-se estável, por um longo período de tempo;
 - (b) Nível de dano econômico: menor densidade populacional de pragas que começa a causar prejuízos econômicos aos produtores;
 - (c) Nível de controle: refere-se à densidade populacional de pragas na qual deve-se tomar as medidas de controle para que não haja perdas econômicas. A ação de controle deve ser tomada antes que o nível de dano seja atingido.
5. Avaliação populacional: monitoram-se as densidades populacionais de pragas e de seus inimigos naturais através de amostragem. Esta etapa é fundamental para a tomada de decisão de controle, uma vez que decide-se se uma praga deve ser controlada, ou não, dependendo do nível em que esta se encontra.

6. Avaliação dos métodos mais adequados para incorporar em um programa de manejo: determinam-se as técnicas de controle mais indicadas a cada cultura e/ou praga; exigindo-se, assim, um amplo conhecimento do agroecossistema como um todo.

No Brasil, o MIP vem sendo empregado em diversas culturas de grande importância econômica, tais como arroz, milho, trigo e soja. Dentre esses, destaca-se o manejo integrado de pragas da soja, implantado desde 1975 e considerado um dos exemplos mais bem sucedidos de implementação (Hoffmann-Campo, 2012).

A soja (*Glycine max*) é uma planta leguminosa¹ pertencente à família *Fabaceae*, assim como o feijão, a lentilha e a ervilha. A soja vem sendo usada na alimentação humana, na forma de óleos vegetais, leites e derivados, proteína de soja (conhecida como carne de soja); na alimentação animal (ração) e ainda, na produção industrial de cosméticos, farmacêuticos, biodiesel, dentre outros. Além disso, do processamento do grão de soja obtém-se a lecitina², matéria-prima de produtos químicos, têxteis e alimentares.

Originária da Ásia, chegou ao Brasil em 1882, na Bahia, para estudos e testes de adaptação. No ano de 1914, foi cultivada pela primeira vez no município de Santa Rosa - Rio Grande do Sul, onde havia condições climáticas favoráveis para se desenvolver e expandir, de acordo com dados da Embrapa - Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária.

A partir dos anos 1940, passou a ser produzida em larga escala na região sul e tornou-se, já em 1960, uma das grandes produções agrícolas brasileira. Com o processo de modernização da agricultura, ocorrido a partir dos anos 1990, a soja tornou-se item de suma importância na economia do Brasil, sendo que, atualmente, o Brasil é o segundo maior produtor mundial de soja, superado apenas pelos EUA (EMBRAPA, 2004).

A safra de 2014/2015 contou com uma produção de 96.243,3 milhões de toneladas de grãos de soja, em uma área de 32.093,1 milhões de hectares plantados, representando um aumento de 11,8% com relação à produção da safra passada, segundo informações de setembro de 2015 da CONAB – Companhia Nacional de Abastecimento.

O plantio da soja é anual. Na região sul do Brasil, o plantio ocorre de setembro a janeiro e nas regiões centro-oeste e nordeste, de outubro a janeiro. Fatores como chuvas e temperatura influenciam nas datas de plantio e também na produtividade das lavouras. A colheita dos grãos é feita nos meses de janeiro até maio, nas regiões sul e centro-oeste e entre fevereiro e maio, no nordeste.

O ciclo da soja divide-se em duas fases: vegetativa e reprodutiva. A fase vegetativa compreende desde a emergência da plântula³ até o surgimento das primeiras flores. A fase reprodutiva engloba o período inicial da floração até a total maturação da cultura. O

¹Leguminosas são grãos produzidos em vagens (chamados também de legumes).

²Lecitina: agente emulsificante e lubrificante.

³Plântula: condição do embrião vegetal após a germinação.

tempo médio do ciclo da soja varia conforme o cultivar (genótipo) utilizado e condições climáticas, como por exemplo, o comprimento do dia. No Brasil, as culturas de soja duram de 100 a 160 dias.

O significativo aumento da produção de grãos, nas últimas décadas, deve-se à expansão de áreas cultivadas, implementação de novas tecnologias e de estudos na área de biotecnologia visando o melhoramento genético da soja. Este último possibilitou a expansão da cultura da soja para regiões de baixas latitudes, o desenvolvimento de cultivares altamente produtivos e também, resistentes a doenças.

A cultura da soja está sujeita a ataques de pragas que podem causar danos potenciais à produção durante todo o seu ciclo. Dentre os insetos-pragas que atacam a soja, destacam-se percevejos (*Euschistus heros*, *Nezara viridula* e *Piezodorus guildinii*) e lagartas desfolhadoras (*Anticarsia gemmatalis*, *Chrysodeixis includens*, *Spodoptera eridania*).

Segundo Moscardi (2012), com a “redução da área foliar fotossinteticamente ativa, as plantas da soja podem ter sua produtividade comprometida”. E ainda, se os insetos-pragas que atacam as folhas não forem devidamente manejados e desfolharem a planta acima do nível tolerado, “podem causar danos significativos à lavoura”.

Recomenda-se, então, executar o controle dessas pragas através de técnicas do manejo integrado, uma vez que garantem melhores resultados econômicos e ecológicos. A associação de diferentes técnicas garante a redução do uso de defensivos químicos, priorizando a produção de grãos mais saudáveis.

O manejo integrado de pragas da soja começou a ser implementado no Brasil no ano de 1975, com a ajuda de ações desenvolvidas pela Embrapa, criada em 1973. Com a adoção do MIP-Soja, uma gama de produtos químicos deixa de ser aplicada no meio ambiente, sendo utilizada de forma racionada e criteriosa.

A partir do reconhecimento taxonômico das pragas da soja, da verificação da mortalidade natural no agroecossistema, da amostragem e da determinação do nível de controle, escolhe-se o método de manejo (que pode conter uma ou mais técnicas), considerando-se fatores econômicos, sociais e biológicos. Dentre as técnicas de manejo mais conhecidas, destacamos:

- (a) Inseticidas: o uso de defensivos químicos ainda não pode ser completamente dispensado das lavouras, entretanto, seu uso deve ser limitado. É utilizado sempre que a população de pragas chega ao nível de controle;
- (b) Controle biológico: consiste na regulação populacional por inimigos naturais, que são agentes bióticos de mortalidade. Dessa forma, usam-se organismos naturais ou geneticamente modificados para reduzir os efeitos das pragas, como o vírus *Baculovirus anticarsia* e a bactéria *Bacillus thuringiensis* que são usados para o controle

da lagarta-da-soja (*A. gemmatalis*).

- (c) Feromônio: é uma substância química que provoca reações ou processos fisiológicos específicos em cada indivíduo. Os principais feromônios são os de agregação e os sexuais, ambos têm a finalidade de manter as pragas abaixo do nível de dano econômico. Isto pode ser feito por coleta massal ou confundimento. No primeiro, as pragas são recolhidas do meio, diminuindo a população. No segundo, o confundimento faz com que os machos não encontrem as fêmeas para reprodução, de modo que a população de pragas decresce;
- (d) Manipulação genética das pragas: controla-se a população de pragas através de modificação genética. Por exemplo, a manipulação genética pode tornar os machos de uma população de pragas estéreis e, após o acasalamento com fêmeas sadias resultar em ovos inviáveis, fazendo com que a densidade populacional decaia;
- (e) Variedades resistentes: o desenvolvimento da soja geneticamente modificada assegura cultivares mais resistentes a herbicidas, insetos e patógenos;
- (f) Manipulação do ambiente: busca-se, com essa técnica, prejudicar o desenvolvimento das pragas. Diversas estratégias podem ser adotadas a fim de desestabilizar o ciclo vital das pragas, tais como: espaçamento entre plantas, como por exemplo, o plantio adensado de soja favorece a proliferação do fungo *M. rileyi*, que ataca a lagarta-da-soja; rotação de culturas, produz um espaço temporal que inviabiliza o crescimento da praga por falta de alimento; preparo do solo, eliminam-se restos de cultura e habitats alternativos.

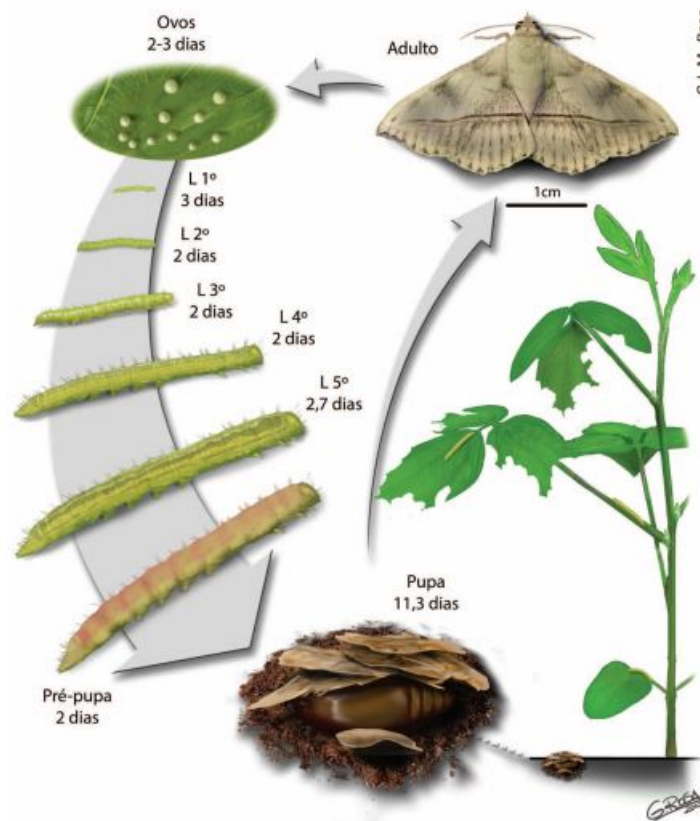
A lagarta-da-soja (*A. gemmatalis*) é considerada uma das pragas desfolhadoras mais severas da soja. É encontrada desde os EUA até a Argentina, e no Brasil, é encontrada em todas as regiões em que a soja é plantada (Ford *et al.*, 1975; Gazzoni *et al.*, 1988; Moscardi, 2012).

Anticarsia gemmatalis é uma espécie da ordem Lepidoptera⁴, tipicamente tropical e subtropical. No Brasil, o período de incidência da lagarta-da-soja é de novembro até abril, com maiores proporções da praga em anos mais secos, pois neste caso, as condições climáticas não são favoráveis para a ocorrência do seu inimigo natural, o fungo *M. rileyi* (Hoffmann-Campo, 2012).

O ciclo biológico da *A. gemmatalis* dura em torno de 30 dias (figura 1.1), sendo que o período larval dura 15 dias, aproximadamente. Na fase adulta, na forma de mariposa, a *A. gemmatalis* dura em média 20 dias e neste período, as fêmeas são capazes de ovipositar até 1000 ovos (Degrande & Vivan, 2008).

⁴Lepidoptera: ordem das borboletas e mariposas.

Figura 1.1: Ciclo biológico da *Anticarsia gemmatalis*.



Fonte: Reid (1975); Silva *et al.* (2012). Retirado de Hoffmann-Campo, 2012.

O processo de reprodução ocorre no período noturno, com os ovos sendo depositados no caule, ramos, pecíolos⁵ e na parte inferior da folha. Os ovos, durante o desenvolvimento embrionário, passam da coloração esbranquiçada à rosa ou marrom-avermelhada, tornando mais fácil a sua detecção em campo. Depois de 2 a 3 dias, os ovos eclodem e inicia-se a fase larval, neste período as lagartas possuem coloração verde clara, podendo chegar a tons mais escuros, entretanto, sempre com linhas longitudinais claras no dorso (Moreira & Aragão, 2009), característica bem específica de *A. gemmatalis*.

Usualmente, a lagarta-da-soja localiza-se na parte superior da folha, causando danos por redução da área foliar. Nos primeiros estádios larvais, a lagarta-da-soja alimenta-se raspando o tecido foliar da soja, formando sulcos e pequenas perfurações irregulares na folha; já quando mais desenvolvida, consome a parte principal da folha (chamada limbo), causando buracos e reduzindo a área foliar. Segundo Degrande & Vivan (2008), “em casos mais severos, há perda total da folha, inclusive das nervuras e do pecíolo”.

Na etapa seguinte, a lagarta lança-se ao chão e inicia o estágio de pré-pupa, esta fase dura 2 dias. Após, enterra-se abaixo de alguns centímetros de solo e transforma-se

⁵ Pecíolo: haste que prende a folha ao caule e ao ramo.

em pupa, ficando neste estágio por 12 dias, aproximadamente. Ao término deste período, emergem mariposas marrom-acinzentadas, com uma linha escura transversal, dividindo-a ao meio; outra característica particular de *A. gemmatalis*.

Os danos causados pela lagarta-da-soja, se não controlados, podem acarretar grandes perdas à produção. Cada lagarta consome, em média, 100 cm^2 de área foliar (Sosa-Gómez, 2000), durante todo o seu ciclo. Deste modo, quando em altas densidades populacionais, podem até devastar lavouras.

O controle da lagarta deve ser iniciado quando, através de amostragem, verifica-se a presença de cerca de 40 lagartas grandes a cada batida de pano⁶. Ou ainda, se o nível de desfolha da soja for de 30% antes da floração ou 15% após a floração (Sosa-Gómez, 2000).

No manejo de *A. gemmatalis*, diferentes fatores são considerados para se determinar os métodos de controle a serem adotados. Por exemplo, a aplicação do *Baculovírus anticarsia*, um vírus natural que também é base de vários produtos químicos seletivos, é recomendada quando constata-se, na batida de pano, a presença média de 10 lagartas grandes e 30 pequenas, sob condições de chuvas normais; ou quando há, no máximo, 20 lagartas pequenas, em períodos de estiagem.

No entanto, condições de umidade alta e temperaturas brandas são favoráveis ao desenvolvimento do fungo *M. rileyi*, que é um dos mais importantes inimigos naturais de *A. gemmatalis*, causador da doença-branca. O ataque do fungo *M. rileyi* à lagarta-da-soja pode causar epizootias, isto é, o fungo tem a capacidade de infectar um grande número de lagartas em um curto período de tempo, reduzindo consideravelmente a densidade de lagarta-da-soja e evitando, assim, o uso de produtos químicos (Bueno *et al.*, 2012). Por consequência, reduz-se o custo de controle e impactos ambientais negativos.

O fungo *M. rileyi* é um entomopatógeno, do filo dos ascomicetos⁷, que parasita preferencialmente lepidópteras, exterminando-as. Este fungo ocorre naturalmente sob condições climáticas adequadas, como temperaturas amenas (em torno de 25°) e alta umidade (maior do que 60%). Em períodos chuvosos, torna-se um grande aliado para o controle da lagarta-da-soja (*A. gemmatalis*) e da lagarta falsa-medideira (*C. includens*).

Na literatura, o fungo recebeu os seguintes nomes científicos: *Botrytis rileyi* (Farlow), 1883; *Spicaria rileyi* (Farlow) Charles, 1936; *Beauveria rileyi* (Farlow) Gösswald, 1939; *Nomuraea rileyi* (Farlow) Samson, 1974; *Metarhizium rileyi* (Farlow) Kepler S.A. Rehner & Humber, 2014. Sendo o penúltimo nome o mais difundido, uma vez que foi

⁶Batida de pano: método de amostragem no qual usa-se um pano de 0,5m x 1m, colocado entre duas fileiras de soja, onde as plantas são sacudidas vigorosamente, para que caia sobre ela o máximo de lagartas possível.

⁷Ascomicetos: no filo *Ascomycota*, os fungos produzem seus esporos em órgãos específicos chamados ascas.

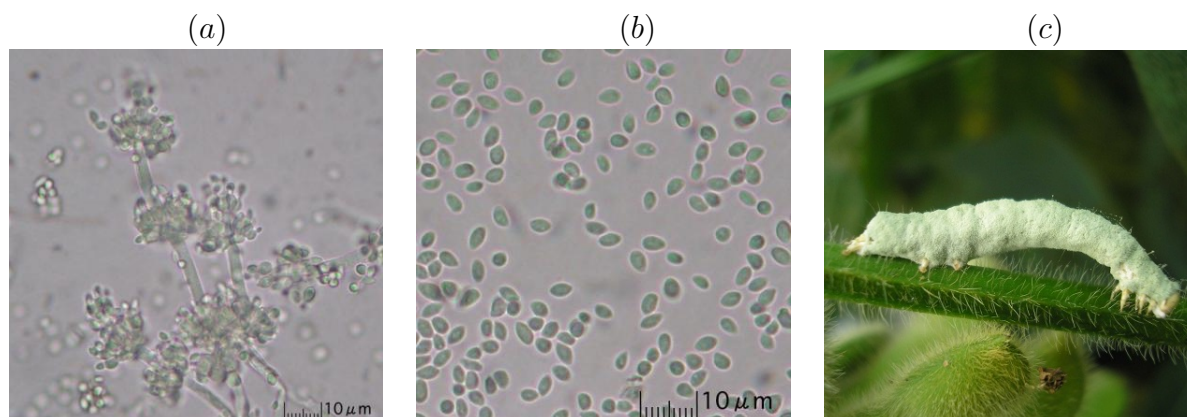
neste intervalo de 40 anos que o fungo foi amplamente estudado (Abati, 2015).

O fungo é formado pelo micélio e pelo corpo de frutificação, como ilustra a figura (1.2 –(a)). O micélio é um conjunto de longos filamentos, sendo que cada um desses filamentos é chamado de hifa, e efetua a sustentação e absorção de nutrientes. O corpo de frutificação é o responsável pela reprodução do fungo produzindo, por mitose, os esporos, que são as unidades de reprodução (figura 1.2 –(b)). O esporo também é conhecido como conídio (ou conidiósporo) e ao ser carregado para um lugar adequado ao seu desenvolvimento, é capaz de produzir um novo fungo (Moraes, 2013).

Enquanto as condições climáticas não são favoráveis ao desenvolvimento do fungo, os inóculos⁸ destes encontram-se no solo (Alves, 1986), e com o passar do tempo, vão perdendo a sua viabilidade de infecção. Sob o solo, os inóculos de fungo podem durar até 80 dias.

O crescimento das plântulas de soja carregam os conídios de fungo para a superfície da folha, onde duram aproximadamente 15 dias, facilitando o contato com as lagartas. Com condições climáticas adequadas, os esporos germinam sobre o tegumento⁹ da lagarta, desenvolvendo suas hifas e perfurando sua cutícula (pele). Então, colonizam as lagartas, liberando enzimas que as matam e as deixam com aspecto mumificado (figura 1.2 –(c)).

Figura 1.2: (a) Micélio e corpo de frutificação de *Metarhizium rileyi*; (b) Esporos de *Metarhizium rileyi*; (c) Lagarta *A. gemmatalis* coberta pelo *M. rileyi*.



Fonte: (a) – (b) <http://ignatius.blog3.fc2.com/blog-entry-280.html>; (c) Arquivo Embrapa Soja.

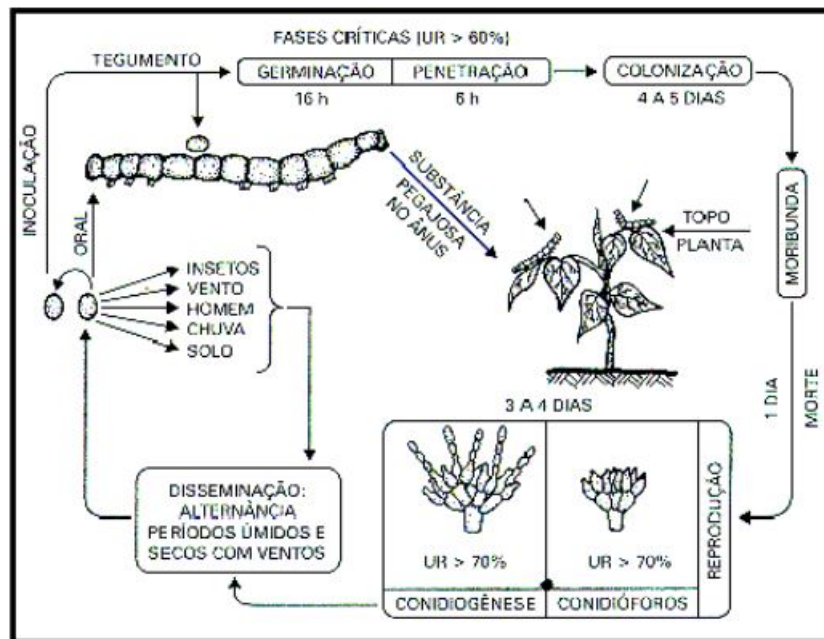
Conforme Alves (1986), os inóculos de fungos que estão sobre os cadáveres das lagartas mantêm sua viabilidade por longos períodos, de modo que estes tornam-se os primeiros focos da infecção na etapa seguinte da cultura de soja.

⁸Inóculos: quaisquer estruturas, tanto reprodutivas quanto vegetativas, que são capazes de causar a infecção (Bergamin Filho *et al.*, 1995).

⁹Tegumento: pele e anexos.

A germinação dos conídios de fungo sobre a lagarta ocorrem em até 16 horas. A penetração das hifas na cutícula dura em torno de 6 horas. A colonização total leva de 4 a 5 dias e após esse período, a lagarta morre em até um dia. Logo em seguida, inicia-se a fase de reprodução do fungo a qual dura 3 a 4 dias (Alves, 1986) e é nesse período que o fungo realiza a conidiogênese (esporulação), liberando os esporos de fungos para novas infecções. O ciclo completo do fungo dura de 8 a 12 dias, conforme as condições climáticas, e está representado na figura (1.3).

Figura 1.3: Ciclo completo do fungo *M. rileyi* sobre a *A. gemmatalis*.



Fonte: Alves, S. B., 1986.

Em ocasiões de condições climáticas ótimas, a epizootia causada pelo *M. rileyi* dispensa o controle químico, principalmente quando as lagartas estão nos primeiros estádios, pois nesta fase elas estão mais suscetíveis à ação do fungo e não causam grandes danos às plantas.

Resultados divulgados por Correa & Smith (1975) e por Galileo *et al.* (1977) relatam mortalidade de 94% e 83% das lagartas-da-soja (*A. gemmatalis*) nos estados do Paraná e Rio Grande do Sul, respectivamente. Sendo que, quanto maior o índice de chuvas, maior é a eficiência do fungo.

Pelo controle biológico, pode-se induzir a proliferação do fungo sobre as lagartas. Um desses métodos utiliza os cadáveres de lagartas infectadas anteriormente. Para isso, estes cadáveres são recolhidos da lavoura, macerados e aplicados na lavoura novamente. Esse procedimento pode até ser feito de um ano para outro. Outro método que pode ser utilizado é a produção de fungos em laboratório, como salienta Alves (1986), “através de conídios produzidos por hospedeiros alternativos”, como por exemplo, em batatas. Uma

das vantagens desta técnica, chamada de liberação ou aplicação inundativa (Bueno, V., 2000), é que a infecção induzida pode antecipar a epizootia, conferindo melhores resultados sobre a mortalidade das lagartas (Tessmann, 2011). Aplicações inundativas podem ser feitas quando deseja-se resultados imediatos de redução da densidade de lagartas infectadas.

Neste trabalho, apresentamos três modelos a fim de analisar a eficiência do fungo no controle da *A. gemmatalis*.

Capítulo 2

MODELO PARA A INTERAÇÃO DA LAGARTA-DA-SOJA

Anticarsia gemmatalis COM O ENTOMOFUNGO *Metarhizium* *rileyi*

Neste capítulo, apresentamos um modelo de tempo discreto para descrever a dinâmica de interação da lagarta-da-soja com o fungo. Este tipo de modelo é usado para representar populações cuja dinâmica vital ocorre em etapas bem definidas de tempo ou gerações. Como por exemplo, plantas anuais, animais que se reproduzem na primavera, espécies cujo ciclo de vida é mensal, dentre outros (Edelstein-Keshet, 1988).

Em um modelo de tempo discreto, a população de uma espécie em uma geração pode ser escrita em termos da população na geração anterior. Isto é, a população no tempo $t + 1$, denotada por N_{t+1} , é dada pela equação a diferenças

$$N_{t+1} = \varphi(N_t) \tag{2.1}$$

onde N_t representa a densidade da população no tempo t e φ é uma função que descreve as características de crescimento populacional da espécie.

De modo geral, não se pode obter uma solução analítica para a equação (2.1), se φ for não linear. Entretanto, dada uma população inicial $N_0 > 0$, as soluções de (2.1) podem ser obtidas recursivamente: $N_1 = \varphi(N_0)$, $N_2 = \varphi(N_1)$, ... e ainda, com um recurso computacional é possível calcular inúmeros valores N_i , $i \in \mathbb{N}$.

O estudo da equação que modela o comportamento de uma espécie é feito

encontrando-se suas soluções de equilíbrio e analisando-se a estabilidade de cada uma dessas soluções.

Neste modelo inicial, apesar do ciclo de vida do fungo ser mais curto do que o ciclo de vida da lagarta, vamos supor que as duas espécies têm ciclo sincronizado. Assim, vamos considerar que uma geração corresponde a 30 dias; ou seja, a duração do ciclo de vida da lagarta. Podemos pensar, nesse caso, que as condições ambientais não são favoráveis ao desenvolvimento do fungo de modo que seu crescimento é lento.

2.1 DESCRIÇÃO DO MODELO

Para a formulação do modelo que representa a dinâmica da lagarta-da-soja (*A. gemmatalis*) e do fungo entomopatogênico *M. rileyi*, consideramos as seguintes hipóteses:

I) A população de lagarta-da-soja divide-se em dois subconjuntos:

- lagartas suscetíveis - aquelas que estão expostas à ação do fungo. Representamos a população de lagartas suscetíveis no tempo t por S_t .
- lagartas infectadas - aquelas que já foram infectadas pelo fungo. Representamos a população de lagartas infectadas no tempo t por I_t .

II) A população de lagartas suscetíveis que escapa da infecção cresce segundo o modelo de Beverton-Holt (González-Guzmán, 1999), ou seja, a população se autorregula considerando um fator de competição intraespecífica.

O modelo de Beverton-Holt é representado pela equação a diferenças:

$$N_{t+1} = \varphi(N_t) = \frac{rN_t}{1 + bN_t}, \quad (2.2)$$

onde N_t representa a população de indivíduos no tempo t , r denota a taxa de crescimento da população ($r > 0$) e b é o fator de autorregulação da população ($b > 0$).

A fração de lagartas suscetíveis que escapa da infecção depende da densidade de fungos e é dada por

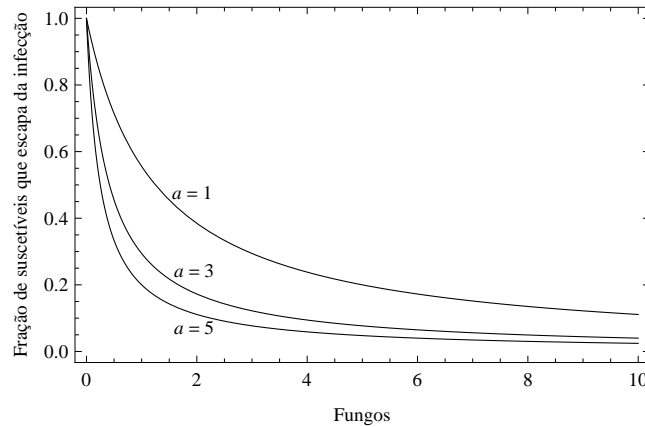
$$\frac{1}{1 + a(1 - \delta)F_t}, \quad (2.3)$$

onde F_t representa a densidade de esporos de fungo no tempo t , a representa a taxa de contágio do fungo ($a > 0$) e δ , a fração de conídios de fungo que não esporulou no tempo t ($0 < \delta < 1$).

Ao representarmos a expressão (2.3) graficamente, notamos que à medida que F_t aumenta, menor será o número de lagartas suscetíveis que escapa da infecção. Além

disso, o fator $a(1 - \delta)$ determina o decaimento da curva, quanto maior $a(1 - \delta)$, mais rapidamente a curva decrescerá, como mostra a figura (2.1), para $\delta = 0,2$ fixado e $a = 1, 3, 5$. Quando a densidade de fungo que esporulou for $\frac{1}{a}$, metade da população de lagartas será infectada. Isto significa que quanto maior for a , maior é a eficiência do fungo.

Figura 2.1: Fração de lagartas suscetíveis que escapa da infecção, para $\delta = 0,2$ e $a = 1, 3, 5$.



Fonte: da autora. Gerada no *Mathematica* 10.0.

Desta forma, a densidade de lagartas suscetíveis que escapa da infecção é dada por:

$$S'_t = S_t \frac{1}{1 + a(1 - \delta)F_t}.$$

Substituindo S'_t em (2.2), obtemos a equação que representa a dinâmica vital da lagarta-da-soja suscetível:

$$S_{t+1} = \varphi(S'_t) = \frac{rS_t}{1 + a(1 - \delta)F_t + bS_t}. \quad (2.4)$$

III) A fração de lagartas suscetíveis que foi inoculada pelo fungo dará origem à população de lagartas infectadas na geração $t + 1$. Como a fração de lagartas suscetíveis que foi infectada pelo fungo é

$$\left(1 - \frac{1}{1 + a(1 - \delta)F_t}\right),$$

a densidade de lagartas infectadas, no tempo $t + 1$, é dada por:

$$I_{t+1} = S_t \left(1 - \frac{1}{1 + a(1 - \delta)F_t}\right).$$

Isto é,

$$I_{t+1} = \frac{a(1-\delta)S_t F_t}{1 + a(1-\delta)F_t} \quad (2.5)$$

é a equação que descreve a dinâmica vital das lagartas infectadas.

IV) Uma vez inoculada pelo fungo, as lagartas morrem e os fungos crescem até cobrir toda a cutícula da lagarta. Assim, vamos supor que cada lagarta inoculada na geração t irá produzir uma densidade c de fungos na geração $t + 1$. Além disso, consideramos que uma fração de fungos que não esporulou na geração t pode ser ainda viável na geração $t + 1$. Assim:

$$F_{t+1} = cI_t + \gamma\delta F_t \quad (2.6)$$

onde c descreve a densidade de esporos de fungos por lagarta infectada ($c > 0$) e γ representa a fração de inóculos viáveis ($0 < \gamma < 1$).

Desta forma, propomos o seguinte sistema de equações a diferenças para modelar a interação da lagarta-da-soja *A. gemmatilis* e do fungo *M. rileyi*:

$$\begin{cases} S_{t+1} = \frac{rS_t}{1 + a(1-\delta)F_t + bS_t}, \\ I_{t+1} = \frac{a(1-\delta)S_t F_t}{1 + a(1-\delta)F_t}, \\ F_{t+1} = cI_t + \gamma\delta F_t. \end{cases} \quad (2.7)$$

2.2 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO

O sistema (2.7) possui seis parâmetros, o que dificulta não só a análise qualitativa das soluções como a realização de simulações numéricas. Assim, faremos uma mudança de variáveis adequada, a fim de adimensionalizar as variáveis, reduzir os parâmetros e trabalhar com os agrupamentos de parâmetros de fato relevantes para a dinâmica do modelo.

Inicialmente, analisamos as dimensões das variáveis e parâmetros do modelo:

- $[S_t]$ = densidade de lagartas suscetíveis na geração t ;
- $[I_t]$ = densidade de lagartas infectadas na geração t ;
- $[F_t]$ = densidade de esporos de fungos na geração t ;

- $[r] = [\delta] = [\gamma] =$ parâmetros adimensionais;
- $[a] = \frac{1}{\text{densidade de esporos de fungos}}$;
- $[b] = \frac{1}{\text{densidade de lagartas suscetíveis}}$;
- $[c] = \frac{\text{densidade de esporos de fungos}}{\text{lagarta infectada}}$.

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$S_t = \frac{s_t}{b}, \quad I_t = \frac{i_t}{ac} \text{ e } F_t = \frac{f_t}{a},$$

obtemos, então, a versão adimensional do sistema (2.7):

$$\begin{cases} s_{t+1} = \frac{rs_t}{1 + (1 - \delta)f_t + s_t}, \\ i_{t+1} = \frac{\alpha(1 - \delta)s_t f_t}{1 + (1 - \delta)f_t}, \\ f_{t+1} = i_t + \gamma\delta f_t; \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $\alpha = \frac{ac}{b}$.

2.3 SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO

Uma solução de equilíbrio é uma solução constante, ou seja, é aquela para a qual não ocorrem mudanças na densidade das espécies, com o decorrer do tempo. Assim, para a equação $N_{t+1} = \varphi(N_t)$, por exemplo, a solução de equilíbrio satisfaz a condição $N_{t+1} = N_t = N^*$.

A fim de encontrarmos as soluções de equilíbrio do sistema (2.8), fazemos:

$$s_{t+1} = s_t = s^*, \quad i_{t+1} = i_t = i^* \text{ e } f_{t+1} = f_t = f^*.$$

Desta forma, os pontos de equilíbrio são:

$(s_0^*, i_0^*, f_0^*) = (0, 0, 0)$, que corresponde à extinção de todas as populações.

$(s_1^*, i_1^*, f_1^*) = (r - 1, 0, 0)$, que tem sentido biológico desde que $r > 1$ e significa a extinção do fungo e conseqüentemente, das lagartas infectadas. É o equilíbrio livre da doença.

A solução de equilíbrio (s_2^*, i_2^*, f_2^*) é chamada solução de coexistência das espécies e é dada por:

$$s_2^* = \frac{r(1 - \gamma\delta)}{(1 - \gamma\delta) + \alpha(1 - \delta)},$$

$$i_2^* = \frac{(1 - \gamma\delta)[\alpha(1 - \delta)(r - 1) - (1 - \gamma\delta)]}{(1 - \delta)[(1 - \gamma\delta) + \alpha(1 - \delta)]} \quad \text{e}$$

$$f_2^* = \frac{\alpha(1 - \delta)(r - 1) - (1 - \gamma\delta)}{(1 - \delta)[(1 - \gamma\delta) + \alpha(1 - \delta)]}.$$

Para que esta solução de equilíbrio tenha sentido biológico é necessário que

$$r > 1 \text{ e } \alpha > \frac{1 - \gamma\delta}{(r - 1)(1 - \delta)}. \quad (2.9)$$

2.4 ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO

Seja $X_{t+1} = \varphi(X_t)$ um sistema de n equações a diferenças e $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ uma solução de equilíbrio desse sistema. Para determinarmos a estabilidade do ponto de equilíbrio X^* , analisamos o comportamento do sistema linearizado próximo a este ponto. Para isso, consideramos pequenas perturbações $U_t = X_t - X^*$ em torno do ponto de equilíbrio de tal modo que, se as perturbações tendem a zero com o tempo, o ponto de equilíbrio é estável e se as perturbações aumentam com o tempo, então o equilíbrio é instável.

Para linearizarmos o sistema $X_{t+1} = \varphi(X_t)$, consideramos

$$\begin{aligned} U_{t+1} &= X_{t+1} - X^* \\ &= \varphi(X_t) - X^* \\ &= \varphi(U_t + X^*) - X^*. \end{aligned}$$

Expandimos a função φ em série de Taylor, e consideramos somente os termos lineares, obtendo:

$$U_{t+1} = J_{X^*} U_t$$

onde J_{X^*} é a matriz jacobiana do sistema aplicada no ponto de equilíbrio X^* , dada por

$$J_{X^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1(X^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(X^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(X^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2(X^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(X^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(X^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n(X^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

A estabilidade da solução de equilíbrio X^* depende dos autovalores λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, da matriz jacobiana. Conforme o *Cr terio de Schur-Cohn* (Allen, 2007), se $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, as perturba es U_t tendem a zero e então a soluço de equilíbrio X^*   localmente assintoticamente estável.

Vamos determinar a estabilidade de cada soluço de equilíbrio (s^*, i^*, f^*) do sistema (2.8), analisando os autovalores da matriz jacobiana para cada ponto de equilíbrio. Para o sistema (2.8), a matriz jacobiana  :

$$J_{(s^*, i^*, f^*)} = \begin{pmatrix} \frac{r(1 + (1 - \delta)f^*)}{(1 + (1 - \delta)f^* + s^*)^2} & 0 & \frac{-r(1 - \delta)s^*}{(1 + (1 - \delta)f^* + s^*)^2} \\ \frac{\alpha(1 - \delta)f^*}{1 + (1 - \delta)f^*} & 0 & \frac{\alpha(1 - \delta)s^*}{(1 + (1 - \delta)f^*)^2} \\ 0 & 1 & \gamma\delta \end{pmatrix}.$$

Para o ponto de equilíbrio $(s_0^*, i_0^*, f_0^*) = (0, 0, 0)$, a matriz jacobiana  :

$$J_{(0, 0, 0)} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma\delta \end{pmatrix}.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = r$ e $\lambda_3 = \gamma\delta$.

Deste modo, para que a soluço de equilíbrio (s_0^*, i_0^*, f_0^*) seja estável   necessário que

$$0 < r < 1 \text{ e } 0 < \gamma\delta < 1. \quad (2.10)$$

Para a soluço de equilíbrio $(s_1^*, i_1^*, f_1^*) = (r - 1, 0, 0)$, na qual a infec o vai à

extinção, a matriz jacobiana associada é:

$$J_{(r-1, 0, 0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 & \frac{-(1-\delta)(r-1)}{r} \\ 0 & 0 & \alpha(1-\delta)(r-1) \\ 0 & 1 & \gamma\delta \end{pmatrix},$$

cujo polinômio característico é dado por

$$\left(\frac{1}{r} - \lambda\right) \left(\lambda^2 - \gamma\delta\lambda - \alpha(1-\delta)(r-1)\right) = 0.$$

Os autovalores de $J_{(r-1, 0, 0)}$ são

$$\lambda_1 = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \lambda_{2,3} = \frac{\gamma\delta \pm \sqrt{(\gamma\delta)^2 + 4\alpha(1-\delta)(r-1)}}{2}.$$

A fim que esta solução de equilíbrio seja localmente estável é necessário que

$$r > 1 \quad \text{e} \quad 0 < \alpha < \frac{1 - \gamma\delta}{(r-1)(1-\delta)}. \quad (2.11)$$

Por fim, a matriz jacobiana associada à solução de equilíbrio de coexistência é:

$$J_{(s_2^*, i_2^*, f_2^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(1-\delta)}{\alpha(1-\delta) + (1-\gamma\delta)} & 0 & \frac{-(1-\delta)(1-\gamma\delta)}{\alpha(1-\delta) + (1-\gamma\delta)} \\ -\frac{\alpha(1-\delta)(r-1) + (1-\gamma\delta)}{r(1-\delta)} & 0 & \frac{(1-\gamma\delta)(\alpha(1-\delta) + (1-\gamma\delta))}{\alpha r(1-\delta)} \\ 0 & 1 & \gamma\delta \end{pmatrix},$$

cujo polinômio característico é dado por:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

onde:

$$a_1 = -\frac{\alpha(1-\delta)(1+\gamma\delta) + \gamma\delta(1-\gamma\delta)}{\alpha(1-\delta) + (1-\gamma\delta)},$$

$$a_2 = \frac{\alpha\gamma\delta(1-\delta)}{\alpha(1-\delta) + (1-\gamma\delta)} - \frac{(1-\gamma\delta)(\alpha(1-\delta) + (1-\gamma\delta))}{\alpha r(1-\delta)} \quad \text{e}$$

$$a_3 = \frac{\alpha(1-\delta)(1-\gamma\delta)}{\alpha(1-\delta) + (1-\gamma\delta)}.$$

Neste caso, como a obtenção dos autovalores leva a expressões de grande complexidade, verificamos as condições de estabilidade do ponto de coexistência das populações usando o *Teste de Jury* (Allen, 2007), apresentado abaixo:

Teorema 2.4.1. (*Jury conditions, Schur-Cohn criteria, n=3*) *Suponha que o polinômio característico seja $p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$. As soluções λ_i , com $i = 1, 2, 3$, de $p(\lambda) = 0$ satisfazem $|\lambda_i| < 1$, ou seja, o equilíbrio correspondente é localmente assintoticamente estável, se as três condições a seguir forem satisfeitas:*

$$i) p(1) = 1 + a_1 + a_2 + a_3 > 0;$$

$$ii) (-1)p(-1) = 1 - a_1 + a_2 - a_3 > 0;$$

$$iii) 1 - (a_3)^2 > |a_2 - a_3a_1|.$$

Em síntese, o ponto (s_2^*, i_2^*, f_2^*) de coexistência das populações é localmente assintoticamente estável se

$$r > \frac{(1 - \gamma\delta) + \alpha(1 - \delta)}{\alpha(1 - \delta)} \quad e \quad (2.12)$$

$$r < \frac{[(1 - \gamma\delta) + \alpha(1 - \delta)]^3}{\alpha(1 - \delta)[\alpha^2(1 - \delta)^2 + \alpha(1 - \delta)(2\gamma\delta - 2 - (\gamma\delta)^2) - (1 - \gamma\delta)]}. \quad (2.13)$$

As condições de estabilidade dos pontos de equilíbrio dependem de quatro parâmetros. Desse modo, não é possível analisar, no espaço dos parâmetros, regiões em que as soluções de equilíbrio exibem diferentes comportamentos. Para contornar esse problema, escolhemos dois parâmetros para fixar e analisamos o comportamento das soluções de equilíbrio no espaço dos dois parâmetros restantes.

2.5 SIMULAÇÕES

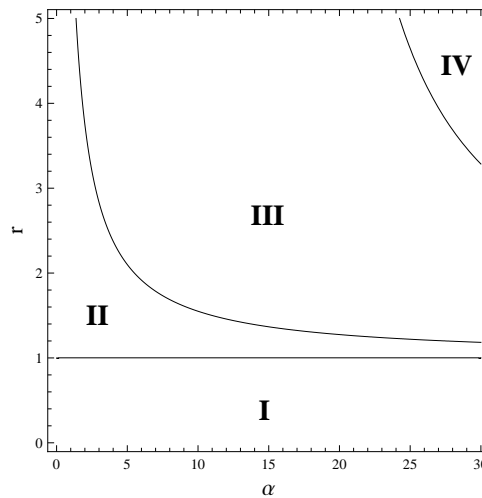
2.5.1 Caso I: δ e γ fixos

Ao considerarmos δ e γ fixos estamos pré-determinando a quantidade de conídios que não esporula de uma geração à outra e a fração de conídios viáveis.

A figura (2.2), mostra as regiões no espaço de parâmetros α, r , com $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$ fixados, nas quais o sistema exibe diferentes comportamentos. O valor $\delta = 0,9$ significa que somente 10% dos conídios que havia na geração t esporularam. Já $\gamma = 0,5$ significa que a viabilidade dos conídios de fungo é de 50%, ou seja, a cada geração, 50% dos conídios perde a capacidade de infectar lagartas.

Ao tomarmos os parâmetros r e α na região I, garantimos a estabilidade do ponto (s_0^*, i_0^*, f_0^*) , pois $r < 1$ implica na extinção de todas as populações. Parâmetros na região

Figura 2.2: Regiões de Estabilidade para $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$. Na região I, o equilíbrio de extinção das espécies é estável; na região II, o equilíbrio de livre da infecção é estável; na região III, o equilíbrio de coexistência é estável e na região IV, surgem oscilações.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

II satisfazem as condições de estabilidade do ponto de equilíbrio $(r - 1, 0, 0)$. Já na região III, verificamos a estabilidade do ponto de coexistência (s_2^*, i_2^*, f_2^*) . Enquanto que na região IV, o ponto de coexistência deixa de ser estável e ocorre o surgimento de ciclos-limite (ver Apêndice A).

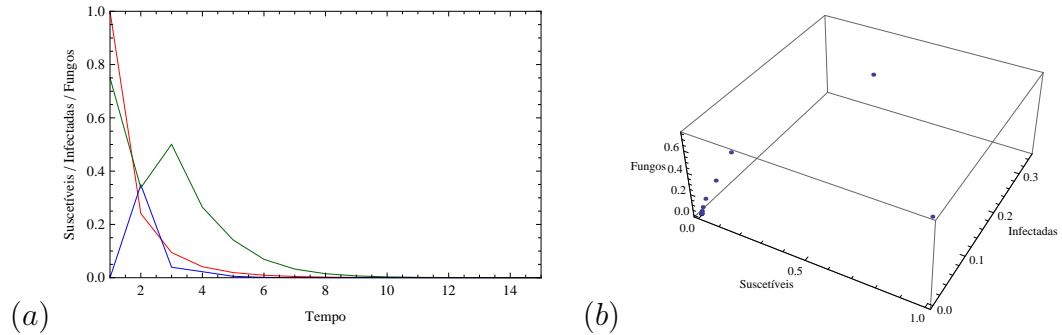
Vamos aplicar as equações (2.8) através de programa computacional confeccionado no *software Mathematica 10.0*. Como condição inicial, consideramos $s_0 = 1, 0, i_0 = 0, 0$ e $f_0 = 0, 75$ em todas as simulações. Os parâmetros serão tomados nas quatro regiões apresentadas na figura (2.2), com o intuito de ilustrar os diferentes comportamentos da solução. Apresentamos gráficos da evolução da densidade das populações com o tempo. Representamos a densidade de lagartas suscetíveis pela curva vermelha, as lagartas infectadas pela azul e os fungos pela verde. Também apresentamos o espaço de fase tridimensional.

Ao tomarmos r na região I, verificamos o rápido decaimento da densidade de lagartas suscetíveis devido à sua baixa taxa de crescimento. Além disso, um surto de infecção causado pelo fungo, logo nas primeiras etapas de tempo, contribui para a extinção de todas as populações, conforme mostra a figura (2.3).

Parâmetros na região II levam a população de fungos à extinção e como não há fungos, a densidade de lagartas infectadas também decai a zero, como ilustra a figura (2.4). A densidade de lagartas suscetíveis tende aproximadamente ao valor $r - 1$, neste caso, em que $r = 1, 2$ a densidade de lagartas suscetíveis tende a $0, 2$, após dos transientes.

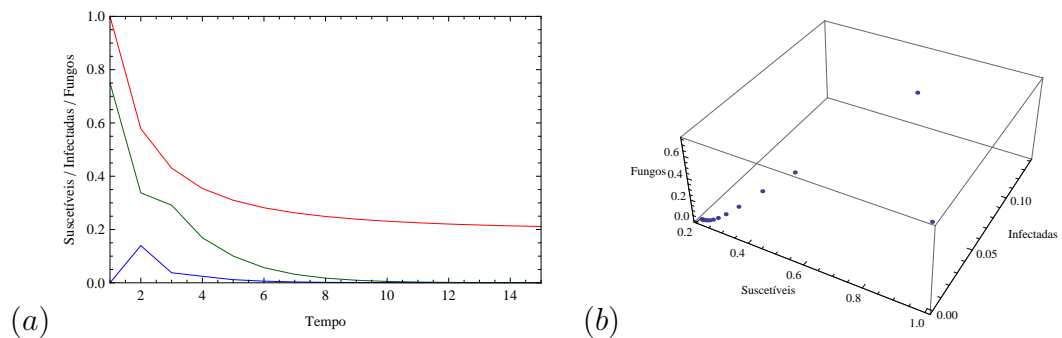
A coexistência das populações é verificada para parâmetros na região III, como ilustrado na figura (2.5), onde as densidades populacionais atingem o equilíbrio após os transientes. Ao tomarmos $r = 2, 6$, a densidade máxima que as lagartas suscetíveis podem

Figura 2.3: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 15; para $r = 0,5$, $\alpha = 5,0$, $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$, parâmetros na região I. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 2.4: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 16; para $r = 1,2$, $\alpha = 2,0$, $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$, parâmetros na região II. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

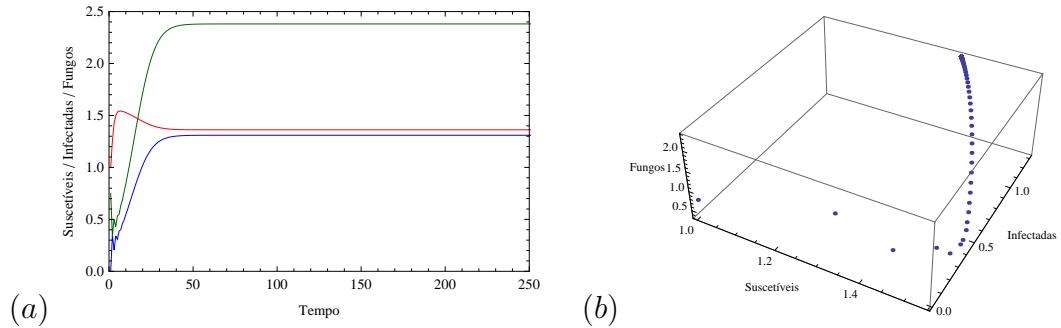
atingir é 1,6, entretanto devido a sua interação com os fungos, a densidade populacional de lagartas suscetíveis, após os transientes, é de aproximadamente 1,36, ou seja, há uma redução populacional de 15% para as lagartas suscetíveis.

Ao tomarmos $r = 4,2$ e $\alpha = 15,0$ que também são parâmetros da região III, observamos que há surtos de infecção nas primeiras gerações e após, as densidades populacionais atingem o equilíbrio, como ilustra a figura (2.6). Considerando que a densidade máxima de lagartas suscetíveis possível é de 3,2, a mortalidade das lagartas suscetíveis chega a 65% (figura 2.6), uma vez que a densidade tende a 1,13 aproximadamente.

Ciclos-limite surgem com a escolha de parâmetros na região IV e assim, as densidades populacionais oscilam periodicamente com o decorrer do tempo (figura 2.7). Neste caso, a densidade de lagartas suscetíveis mantém-se baixa, assumindo valores próximos a zero quando ocorrem surtos de infecção.

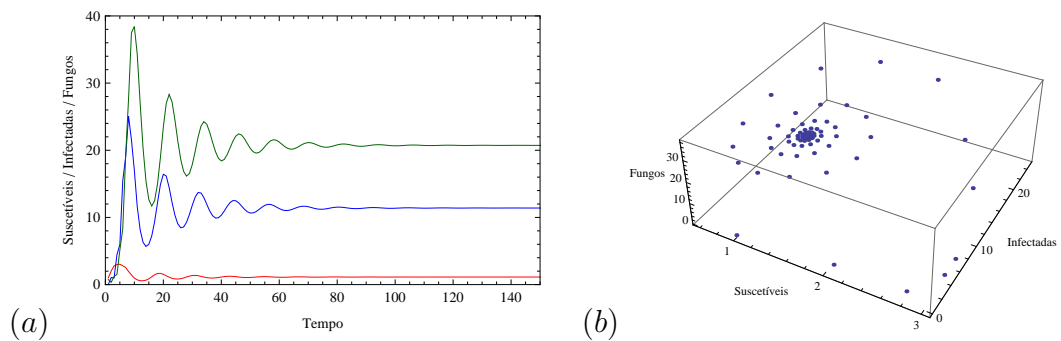
Consideramos agora a esporulação de 90% dos conídios de fungo em cada geração,

Figura 2.5: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 250; para $r = 2,6$, $\alpha = 5,0$, $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$, parâmetros na região III. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



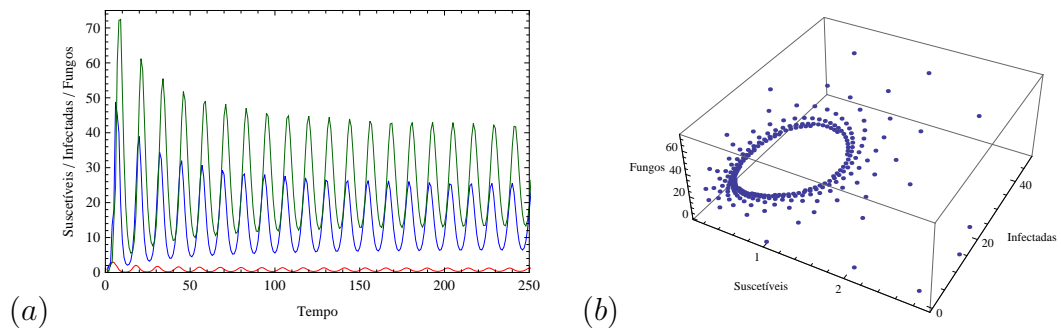
Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 2.6: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 150; para $r = 4,2$, $\alpha = 15,0$, $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$, parâmetros na região III. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

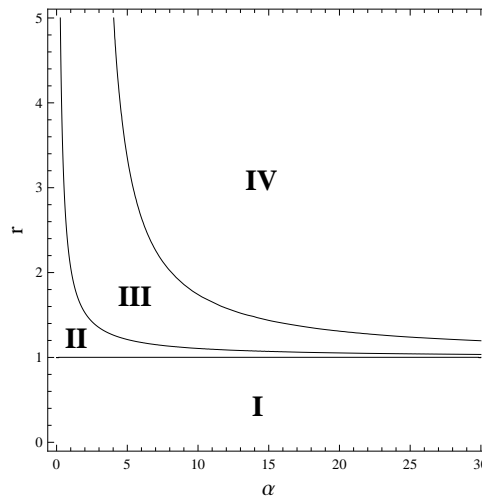
Figura 2.7: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 250; para $r = 4,2$, $\alpha = 28,0$, $\delta = 0,9$ e $\gamma = 0,5$, parâmetros na região IV. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

ou seja, a densidade de fungo no meio é alta. Para isso, tomamos $\delta = 0,1$ e mantemos ainda $\gamma = 0,5$. Obtemos o gráfico mostrado na figura (2.8) que ilustra diferentes regiões no espaço de parâmetros α, r .

Figura 2.8: Regiões de Estabilidade para $\delta = 0,1$ e $\gamma = 0,5$. Na região I, o equilíbrio de extinção das espécies é estável; na região II, o equilíbrio de livre da infecção é estável; na região III, o equilíbrio de coexistência é estável e na região IV, surgem oscilações.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

As regiões I, II, III apresentam a estabilidade do equilíbrio de extinção, do equilíbrio livre da infecção e de coexistência das populações, respectivamente, enquanto que a região IV apresenta ciclos-limite.

É possível notar que, na figura (2.2), a área da região II é maior do que na figura (2.8). Isso se deve ao fato de que, para $\delta = 0,9$, tomado na figura (2.2), a fração de inóculos de fungos que esporula é pequena, de modo que é possível que a infecção vá à extinção, para um conjunto maior de parâmetros. Ou seja, quanto menos esporos de fungos estiverem ativos no meio ambiente, maior será a chance de que a população de fungos vá à extinção.

Além disso, verificamos que, à medida que tomamos valores menores de δ , ocorre a diminuição da região III e o aumento da região IV, isto é, quando a densidade de conídios de fungo que esporula é baixa ($\delta = 0,9$), o equilíbrio de coexistência das populações é garantido para um conjunto maior de parâmetros enquanto que, quando a densidade de conídios de fungos que esporula é alta ($\delta = 0,1$), oscilações são conferidas para um conjunto maior de parâmetros.

As mudanças ocorridas nas regiões da figura acima podem ser verificadas através de um diagrama de bifurcação. Um diagrama de bifurcação descreve graficamente as mudanças no comportamento qualitativo assintótico das soluções de equilíbrio conforme ocorrem variações em um parâmetro de interesse (ver Apêndice A). O valor do parâmetro

para o qual ocorre uma mudança drástica no comportamento da solução de equilíbrio é chamado ponto de bifurcação (Allen, 2007).

Aqui, vamos fixar os parâmetros $\delta = 0,1$ e $\gamma = 0,5$ e variar α e r de modo que $r = 1 + \frac{4\alpha}{30}$; ou seja, tomando distintos valores para α , obtemos distintos valores de r , de modo a “percorrer” um segmento de reta no plano (α, r) com extremidades nos pontos $(\alpha_1, r_1) = (0, 1)$ e $(\alpha_{300}, r_{300}) = (30, 5)$. Faremos os diagramas de bifurcação das populações iterando 300 vezes o sistema (2.8) e plotando os últimos 100 valores de cada simulação para 300 valores distintos da combinação de α e r .

A figura (2.9) apresenta os diagramas de bifurcação para as densidades populacionais de lagartas suscetíveis, infectadas e fungos, respectivamente. Para $0 \leq \alpha \lesssim 2,8$ e $1 < r \lesssim 1,37$, o ponto de equilíbrio livre da doença é estável. Em $\alpha \approx 2,8$ e $r \approx 1,37$ ocorre uma bifurcação transcritical. Isto é, o equilíbrio livre da doença perde a estabilidade e surge o equilíbrio de coexistência que é estável. Para $2,8 \lesssim \alpha \lesssim 6,6$ e $1,37 \lesssim r \lesssim 1,88$, o ponto de coexistência é estável. $\alpha \approx 6,6$ e $r \approx 1,88$ é um ponto de bifurcação de Neimark-Sacker supercrítico: o equilíbrio de coexistência perde a estabilidade e surgem ciclos-limite.

2.5.2 Caso II: r e α fixos

Fixamos agora a taxa de crescimento das lagartas suscetíveis, r , e o parâmetro adimensional, α . As condições (2.9)–(2.12)–(2.13) determinam regiões do espaço de parâmetros γ, δ onde cada ponto de equilíbrio é estável.

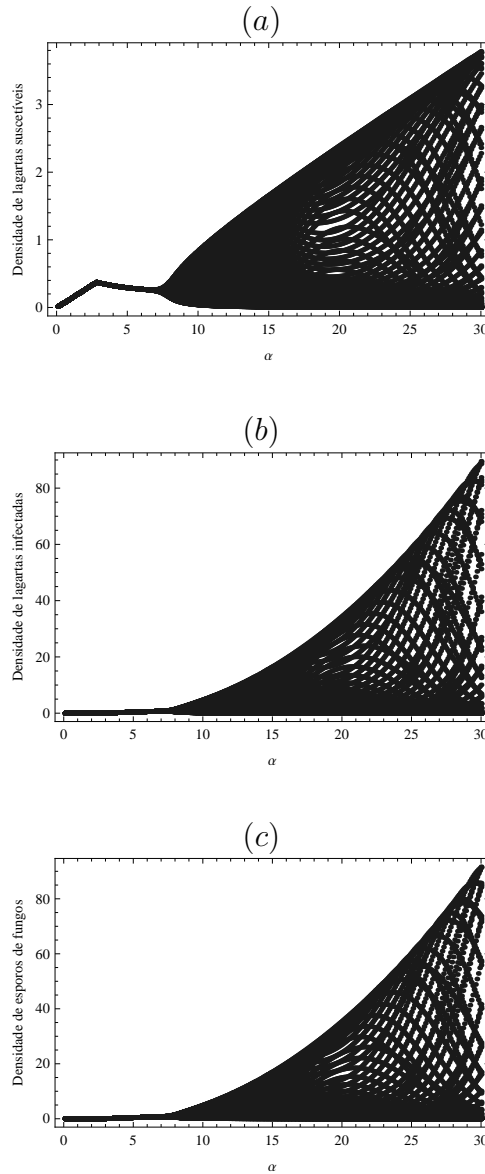
De antemão, notamos que ao fixarmos $r < 1$ garantimos a estabilidade do ponto de extinção das populações, $(s_0^*, i_0^*, f_0^*) = (0, 0, 0)$, para qualquer conjunto de parâmetros α, δ e γ , de maneira que não ilustraremos esta situação. Da mesma forma, ao fixarmos r e α de modo que não se satisfaçam a condição de existência do ponto de coexistência das populações, verificamos somente a estabilidade do ponto de extinção da infecção $(s_1^*, i_1^*, f_1^*) = (r - 1, 0, 0)$.

Tomamos, primeiramente, então $r = 2,0$ e $\alpha = 2,0$. Na figura (2.10) visualizamos as regiões II e III. Para parâmetros na região II, o ponto de extinção da infecção $(s_1^*, i_1^*, f_1^*) = (r - 1, 0, 0)$ é estável, enquanto que para parâmetros na região III, o ponto de coexistência (s_2^*, i_2^*, f_2^*) é estável.

Supomos agora $r = 2,0$ e $\alpha = 10,0$. Neste caso, variando os parâmetros δ e γ podemos verificar, além da estabilidade dos pontos (s_1^*, i_1^*, f_1^*) e (s_2^*, i_2^*, f_2^*) , a possibilidade de ocorrerem ciclos-limite. Na figura (2.11), a região II exibe a região dos parâmetros em que (s_1^*, i_1^*, f_1^*) é estável, a região III ilustra a região dos parâmetros em que o ponto de coexistência (s_2^*, i_2^*, f_2^*) é estável e na região IV, oscilações são observadas.

Podemos observar que, a medida que aumentamos o parâmetro α , ou seja, que

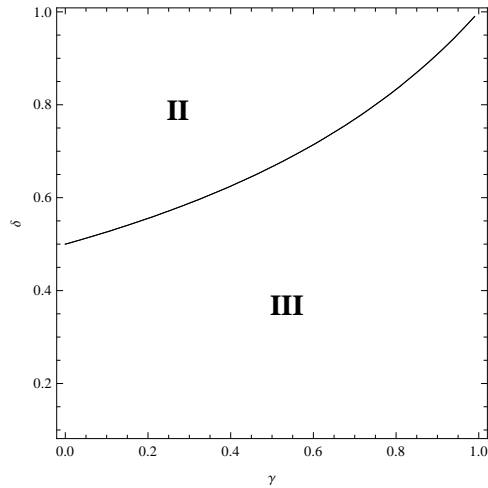
Figura 2.9: Diagramas de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; para $\delta = 0, 1$, $\gamma = 0,5$, $0 < \alpha \leq 30$ e $r = 1 + \frac{4\alpha}{30}$.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

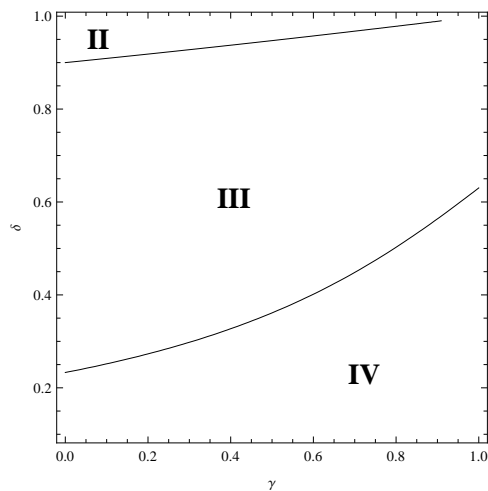
consideramos que a taxa de contágio do fungo e/ou a densidade de esporos de fungo produzidos por lagarta infectada é alta ou que o fator de autorregulação das lagartas é baixo, a região que representa o equilíbrio livre da doença diminui e a região de soluções periódicas aumenta consideravelmente.

Figura 2.10: Regiões de Estabilidade para $r = 2,0$ e $\alpha = 2,0$. Na região II, o equilíbrio de livre da infecção é estável e na região III, o equilíbrio de coexistência é estável.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 2.11: Regiões de Estabilidade para $r = 2,0$ e $\alpha = 10,0$. Na região II, o equilíbrio de livre da infecção é estável; na região III, o equilíbrio de coexistência é estável e na região IV, surgem oscilações.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Capítulo 3

MODELO LAGARTA–FUNGO COM APLICAÇÕES INUNDATIVAS DE FUNGOS

No capítulo anterior, estudamos a dinâmica da lagarta-da-soja *A. gemmatalis* após uma inoculação com o fungo entomopatogênico *M. rileyi*. Com o objetivo de aumentar a eficiência do controle, vamos analisar a dinâmica considerando que, a cada geração, são feitas aplicações inundativas de fungos.

É possível produzir fungos massivamente em laboratório, sob condições adequadas, utilizando culturas ricas em amido, como arroz, trigo e batata, e liberá-los periodicamente na lavoura. Outra alternativa para as aplicações inundativas de fungos consiste em recolher os cadáveres de lagartas infectadas anteriormente, macerá-los e então, aplicá-los na lavoura. Essa estratégia garante o controle imediato das lagartas-da-soja por uma ou mais gerações (Bueno, V., 2009).

3.1 FORMULAÇÃO E ANÁLISE DO MODELO

Para a formulação deste novo modelo, consideramos todas as hipóteses apresentadas no capítulo anterior, no entanto, para a equação que descreve a dinâmica vital do fungo acrescentamos a hipótese de que, a cada geração, são feitas aplicações constante de fungo.

Assim, o modelo que representa a dinâmica de interação da lagarta-da-soja *A. gemmatalis* com o fungo entomopatogênico *M. rileyi* com aplicações constantes de fungo é dado pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} S_{t+1} = \frac{rS_t}{1 + a(1 - \delta)F_t + bS_t}, \\ I_{t+1} = \frac{a(1 - \delta)S_tF_t}{1 + a(1 - \delta)F_t}, \\ F_{t+1} = cI_t + \gamma\delta F_t + Q, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde S_t , I_t e F_t representam as densidades de lagartas suscetíveis, lagartas infectadas e fungos, respectivamente, no tempo t , e $Q > 0$ representa a densidade de fungo aplicada a cada geração. Os demais parâmetros do sistema e seus significados estão descritos na tabela (3.1):

Tabela 3.1: Parâmetros do sistema 3.1:

Parâmetros	Significados
r	taxa de crescimento das lagartas suscetíveis
a	taxa de contágio do fungo
δ	fração de conídios que não esporularam no tempo t
b	fator de autorregulação das lagartas suscetíveis
c	densidade de conídios produzidos por lagarta infectada
γ	fração de conídios viáveis

Adimensionalizamos o sistema (3.1) a partir da seguinte mudança de variáveis:

$$S_t = \frac{s_t}{b}, \quad I_t = \frac{i_t}{ac} \quad \text{e} \quad F_t = \frac{f_t}{a}.$$

Obtemos, então, o sistema adimensional que representa a interação lagarta-fungo, com aplicação constante de fungo:

$$\begin{cases} s_{t+1} = \frac{rs_t}{1 + (1 - \delta)f_t + s_t}, \\ i_{t+1} = \frac{\alpha(1 - \delta)s_t f_t}{1 + (1 - \delta)f_t}, \\ f_{t+1} = i_t + \gamma\delta f_t + q, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\alpha = \frac{ac}{b}$ e $q = aQ$. Além disso, $r > 0$, $0 < \delta < 1$, $\alpha > 0$, $0 < \gamma < 1$ e $q > 0$.

O sistema (3.2) possui dois pontos de equilíbrio biologicamente viáveis:

1. Equilíbrio de extinção das lagartas suscetíveis e infectadas:

$$(s_1^*, i_1^*, f_1^*) = \left(0, 0, \frac{q}{1 - \gamma\delta} \right)$$

que é localmente assintoticamente estável sempre que

$$r < \frac{1 - \gamma\delta + q(1 - \delta)}{1 - \gamma\delta}.$$

Ressaltamos que este equilíbrio significa que as aplicações de fungo seriam repetidas mesmo após a extinção das lagartas suscetíveis. Na prática, após a densidade de lagartas atingir o valor nulo, não há necessidade de ainda aplicar fungo à cultura de soja.

2. Equilíbrio de coexistência das populações:

$$(s_2^*, i_2^*, f_2^*)$$

dados por:

$$s_2^* = \frac{(1 - \gamma\delta)(2r - 1) + (1 - \delta)[\alpha(r - 1) - q] - \sqrt{\Delta}}{2[(1 - \gamma\delta) + \alpha(1 - \delta)]}$$

$$i_2^* = \frac{(1 - \gamma\delta)[\alpha(1 - \delta)(r - 1) - (1 - \gamma\delta) + \sqrt{\Delta}]}{2(1 - \delta)[(1 - \gamma\delta) + \alpha(1 - \delta)]} - \frac{q[(1 - \gamma\delta) + 2\alpha(1 - \delta)]}{2[(1 - \gamma\delta) + \alpha(1 - \delta)]}$$

$$f_2^* = \frac{(1 - \delta)[q + \alpha(r - 1)] - (1 - \gamma\delta) + \sqrt{\Delta}}{2(1 - \delta)[(1 - \gamma\delta) + \alpha(1 - \delta)]}.$$

onde $\Delta = [(1 - \gamma\delta) - q(1 - \delta) - \alpha(r - 1)(1 - \delta)]^2 + 4q(1 - \delta)[(1 - \gamma\delta) + \alpha(1 - \delta)]$.

O ponto (s_2^*, i_2^*, f_2^*) existe biologicamente desde que $r > \frac{1 - \gamma\delta + q(1 - \delta)}{1 - \gamma\delta}$.

O estudo analítico clássico de estabilidade do ponto de coexistência não será feito devido à complexidade das expressões. O que faremos a seguir, então, é analisar as mudanças no comportamento qualitativo das soluções do sistema (3.2) com relação ao parâmetro q , através de simulações numéricas.

3.1.1 Simulações

Para o sistema (3.2), analisaremos os efeitos da variação de q sobre a solução de equilíbrio das lagartas suscetíveis, infectadas e do fungo, separadamente, para dois conjuntos de parâmetros fixados.

Para gerarmos os diagramas de bifurcação, iteramos 1500 vezes o sistema (3.2), plotando os últimos 100 valores de cada simulação para 160 valores distintos do parâmetro q , considerando $0 < q \leq 4,0$.

No primeiro caso, fixamos $\delta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$. Ou seja, a esporulação de fungo é baixa (10%), 50% dos conídios de fungos continuam viáveis de uma geração para outra enquanto que a taxa de crescimento das lagartas suscetíveis e o parâmetro α são altos.

Quando tomamos $0 < q \lesssim 0,8$, o sistema apresenta soluções periódicas, isto é, as populações coexistem, entretanto, suas densidades oscilam aproximando-se de um ciclo-limite. Para $q \cong 0,8$ ocorre uma bifurcação de Neimark-Sacker subcrítica e o ponto (s_2^*, i_2^*, f_2^*) passa a ser estável. As figuras (3.1 (a – c)) ilustram os diagramas de bifurcação para as densidades de lagartas suscetíveis, infectadas e da densidade de fungos, respectivamente, em função de q .

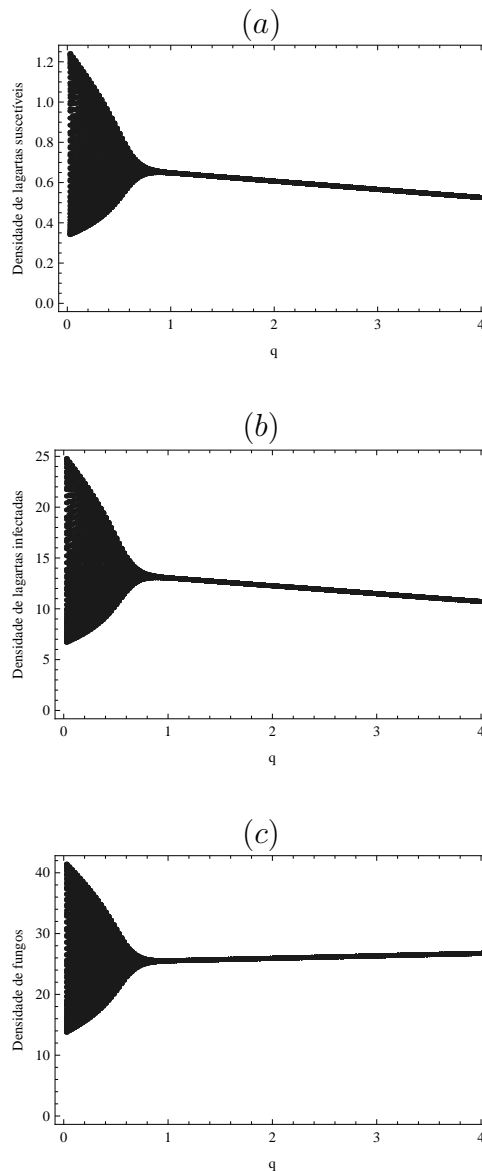
Para $q = 2,0$, por exemplo, obtemos densidades populacionais que depois dos transientes, tendem ao equilíbrio de coexistência, como mostra a figura (3.2). A densidade de lagartas suscetíveis mantém-se próxima da extinção, tendendo à densidade de 0,53, resultando em uma redução de 83,58% da densidade populacional de lagartas suscetíveis, uma vez que a densidade máxima que as lagartas suscetíveis poderiam atingir é de 3,2.

No segundo caso, fixamos $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$. Isto é, 90% dos conídios de fungo esporulam a cada geração, 50% dos inóculos de fungos continuam viáveis de uma geração para outra e ainda consideramos a taxa de crescimento das lagartas suscetíveis e o parâmetro α são altos. Nos diagramas de bifurcação, ilustrados nas figuras (3.3 (a – c)), observamos que $q \cong 0,9$ e $q \cong 3,1$ são pontos de bifurcação; o primeiro, é um ponto de bifurcação de Neimark-Sacker e o segundo, de bifurcação transcítica. Para $0 < q \lesssim 0,9$, as solução são periódicas, ocorrendo ciclos-limite. Para $0,9 \lesssim q \lesssim 3,1$, o ponto de coexistência (s_2^*, i_2^*, f_2^*) é estável. Já para $q \cong 3,1$, o ponto de coexistência (s_2^*, i_2^*, f_2^*) perde a estabilidade e o ponto (s_1^*, i_1^*, f_1^*) passa a ser estável. Com a estabilidade do ponto (s_1^*, i_1^*, f_1^*) , as aplicações de fungos não são mais necessárias após os transientes, uma vez que as densidades de lagartas suscetíveis e infectadas vão à extinção.

A partir de $q \cong 3,4$, quanto maior for o valor tomado para este parâmetro, menor é o número de aplicações de fungos necessário para que a densidade de lagartas suscetíveis vá à extinção; ou seja, o número de aplicações de fungos decai à medida que q aumenta, como ilustra a figura (3.4).

Observamos que, para possibilitar uma melhor visualização, as densidades de lagartas suscetíveis, infectadas e fungos, apresentadas nas figuras (3.1) e (3.3) estão em escalas distintas, uma vez que as soluções apresentam valores em diferentes ordens de grandeza.

Figura 3.1: Diagramas de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a q para $\delta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$.



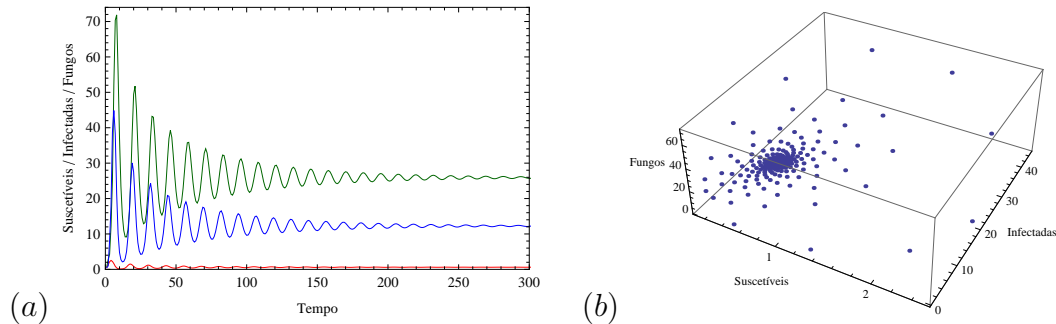
Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

3.1.2 Aplicação inundativa restrita de fungos

As medidas de controle, na prática, apenas são aplicadas quando necessário. Isto é, quando a população de insetos atinge o nível de controle e alguma medida deve ser tomada para se evitar perdas econômicas. Assim, supomos agora que a aplicação de fungo somente será realizada quando a população de lagartas suscetíveis atingir um certo limiar d_c , ou seja, quando a densidade de lagartas suscetíveis atingir ou ultrapassar o nível de controle.

Fixamos $\delta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$, parâmetros na região de

Figura 3.2: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 300; para $\delta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$, $\alpha = 28,0$ e $q = 2,0$. As curvas em vermelho representam lagartas suscetíveis, azul representam lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

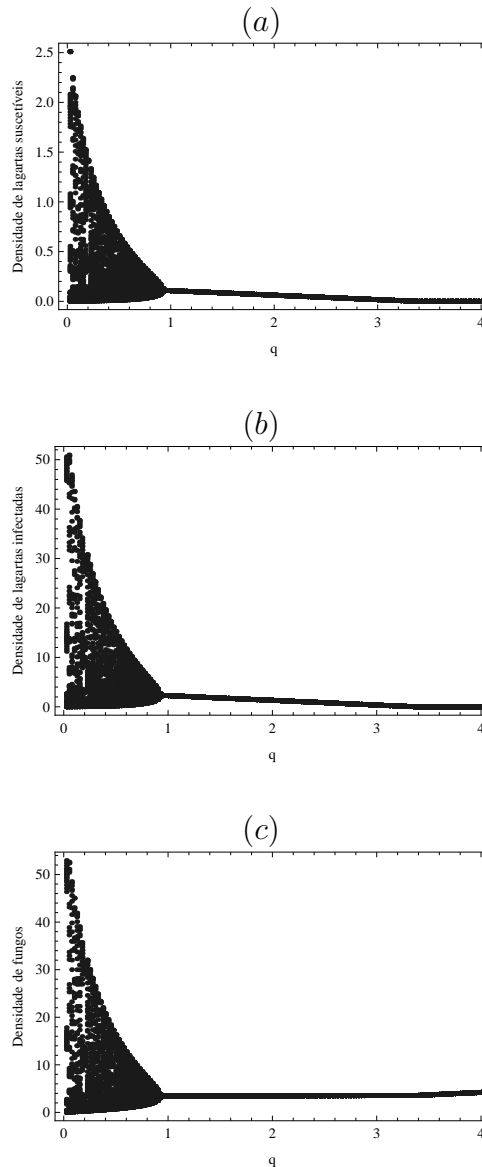
soluções periódicas quando $q = 0$ e construímos diagramas de bifurcação das populações de equilíbrio em relação a q , para diferentes valores de d_c . Observamos que os diagramas apresentam comportamentos análogos para as lagartas suscetíveis, infectadas e para os fungos, à exceção das grandezas das suas densidades, portanto, apresentaremos somente os diagramas das lagartas suscetíveis. Mudanças nos diagramas de bifurcação são observadas quando a densidade de lagartas suscetíveis atinge $d_c \cong 0,38$. Ou seja, para densidades críticas menores do que $d_c = 0,38$, as aplicações de fungos devem ocorrer em todas as gerações, recaindo na situação apresentada anteriormente.

Para $d_c \geq 0,38$, os diagramas de bifurcação apresentam descontinuidades, que variam conforme a condição inicial tomada. Além disso, surgem p -ciclos, com diferentes períodos para distintos valores de q . Um p -ciclo é uma órbita periódica composta por p densidades diferentes que se repetem após os transientes (Monteiro, 2006). Um p -ciclo, após os transientes, contem p valores para a população considerada, diferenciando-se de um ciclo-limite, que pode apresentar qualquer valor em um determinado intervalo da densidade populacional.

Por exemplo, quando $d_c = 0,38$, os diagramas de bifurcação das lagartas suscetíveis, infectadas e dos fungos apresentam ciclos-limite para $0 < q \lesssim 0,8$. Em $q \cong 0,8$ ocorre uma bifurcação de Neimark-Sacker subcrítica, e para $0,8 \lesssim q \lesssim 3,42$ o ponto de coexistência passa a ser estável. Em $q \cong 3,42$ ocorre uma bifurcação *flip* supercrítica e surgem ciclos de período 23 para $3,42 \leq q \leq 3,53$. Quando $q \cong 3,53$, ocorre uma bifurcação *flip* subcrítica e o ponto de coexistência volta a ser estável no intervalo $3,53 \lesssim q \leq 3,77$. Em $q \cong 3,77$, novamente ocorre uma bifurcação *flip* supercrítica e no intervalo $3,77 \lesssim q \leq 4$ surgem 23-ciclos, como ilustrado em (3.5 (a)).

Quando $d_c = 0,4$, cinco pontos de bifurcação são observados: em $q \cong 0,75$, as soluções passam de ciclos-limite para 12-ciclos; para $q \cong 0,85$ e $q \cong 2,95$ ocorrem bifurcações *flip* subcrítica e para $q \cong 2,7$ e $q \cong 3,15$, bifurcações *flip* supercrítica, como

Figura 3.3: Diagramas de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a q para $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

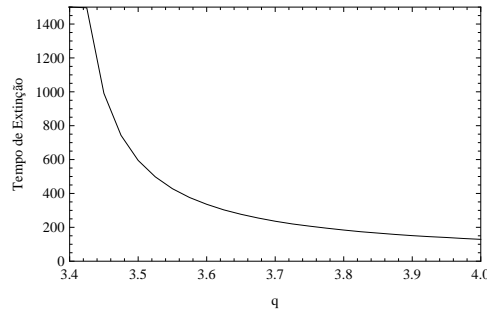
ilustra a figura (3.5 (b)).

Quando $d_c = 0,5$, além de ciclos-limite, p -ciclos são observados para um conjunto maior de valores q , com distintos períodos, como ilustrado na figura (3.5 (c)).

Por exemplo, as populações de lagartas suscetíveis, infectadas e dos fungos, no decorrer do tempo, para o conjunto de parâmetros $\delta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$, $\alpha = 28,0$ e $q = 1,2$, no caso em que $d_c = 0,5$, oscilam em um ciclo de período 12, como ilustra a figura (3.6).

Ao fixarmos $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$, o sistema apresenta mudanças qualitativas a partir da densidade crítica $d_c \geq 0,01$. Quando $d_c = 0,01$, verificamos que

Figura 3.4: Tempo de extinção das lagartas suscetíveis em função de q , para $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$.



Fonte: da autora. Gerada no *Mathematica* 10.0.

para $0 \leq q \lesssim 0,9$ surgem ciclos-limite; em $q \cong 0,9$, ocorre uma bifurcação de Neimark-Sacker subcrítica, e para $0,9 \lesssim q \lesssim 3,15$ o ponto de coexistência é estável; em $q \cong 3,15$, ocorre uma bifurcação *flip* supercrítica e p -ciclos são observados no intervalo $3,15 \lesssim q \leq 4$, como ilustra os diagramas da figura (3.7 (a)).

Quando $d_c = 0,03$, ocorrem ciclos-limite para $0 < q \lesssim 0,25$ e p -ciclos para $0,25 \lesssim q \lesssim 1,05$. Além disso, em $q \cong 1,05$ ocorre uma bifurcação *flip* subcrítica e o ponto de coexistência (s_2^*, i_2^*, f_2^*) passa a ser estável para $1,05 < q \leq 2,5$. P -ciclos voltam a surgir para $2,5 \lesssim q \leq 4$, após uma bifurcação *flip* supercrítica em $q \cong 2,5$, como ilustra a figura (3.7 (b)).

Quando $d_c = 0,1$, o ponto de extinção das lagartas (s_1^*, i_1^*, f_1^*) e o ponto de coexistência (s_2^*, i_2^*, f_2^*) perdem a estabilidade e para todos os valores de q surgem p -ciclos, com diferentes valores de p . Para $0 < q \lesssim 2,075$, os picos de infecção causados pelo fungo atingem valores maiores do que para os demais valores de q , como mostrado na figura (3.7 (c)).

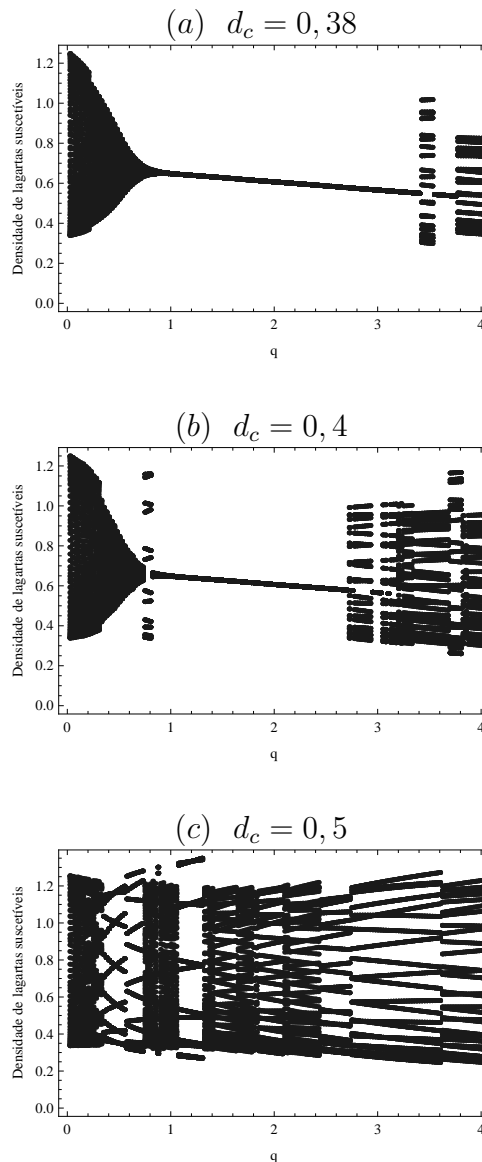
Notamos que, tanto no caso em que $\delta = 0,9$ como para $\delta = 0,1$, observamos que quanto maior for a densidade crítica de lagartas suscetíveis considerada para se realizar as aplicações inundativas de fungos, mais oscilações são observadas no sistema lagarta-fungo. Isto é, o controle biológico da lagarta-da-soja pode ser mais efetivo se o limiar de crítico for menor.

3.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação inundativa de fungos é feita quando se deseja resultados imediatos de controle sobre as pragas. Ou seja, o objetivo é causar uma epidemia na praga e reduzir drasticamente a sua densidade dispensando, assim, o uso de defensivos químicos.

Para conferirmos a eficiência da aplicação inundativa de fungos no modelo proposto, comparamos os diagramas de bifurcação para a densidade da lagartas suscetíveis

Figura 3.5: Diagramas de bifurcação das lagartas suscetíveis em função de q para $\delta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$, para diferentes valores de d_c .

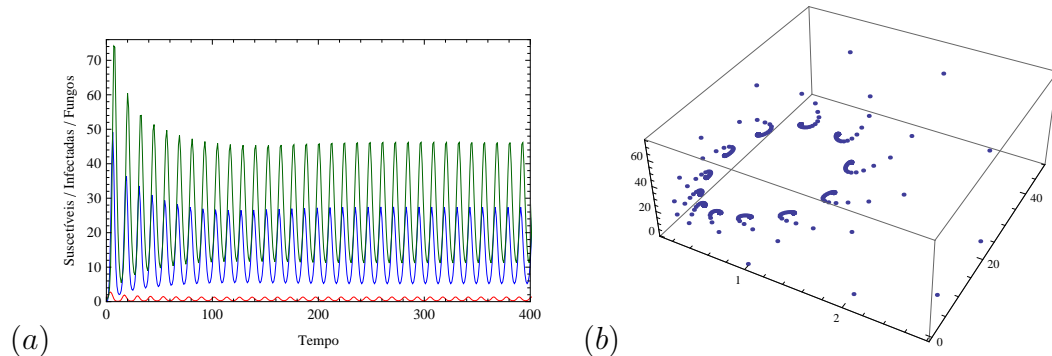


Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

em relação ao parâmetro α , para os casos em que não há aplicações inundativas de fungos (sistema 2.8) e para o caso em que há aplicações inundativas de fungos (sistema 3.2).

Diagramas de bifurcação para as densidades de lagartas suscetíveis com relação a α são apresentadas nas figuras (3.8 (a – c)), cujos parâmetros são $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $r = 1 + \frac{4\alpha}{30}$ e, quando há aplicações de fungos, $q = 0,5$. Para todos os valores de α , houve redução na densidade de lagartas suscetíveis quando se considerou aplicações de fungos. Para $\alpha = 30,0$, a densidade populacional de lagartas suscetíveis pode chegar a 3,8, como ilustra (3.8 (a)) e, com aplicações de fungos, a densidade chega a 1,4 apenas (figura 3.8 (b)), conferimos uma redução de aproximadamente 63% na densidade de lagartas suscetíveis, para os parâmetros tomados.

Figura 3.6: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 400; para $\delta = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$, $\alpha = 28,0$ e $q = 1,2$. As curvas em vermelho representam lagartas suscetíveis, azul representam lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Além disso, podemos verificar que as aplicações inundativas de fungos prologam a estabilidade do ponto de coexistência das populações e retardam o surgimento de soluções periódicas. Ou seja, o ponto de extinção ocorre para um conjunto maior de parâmetros, bem como o ponto de coexistência.

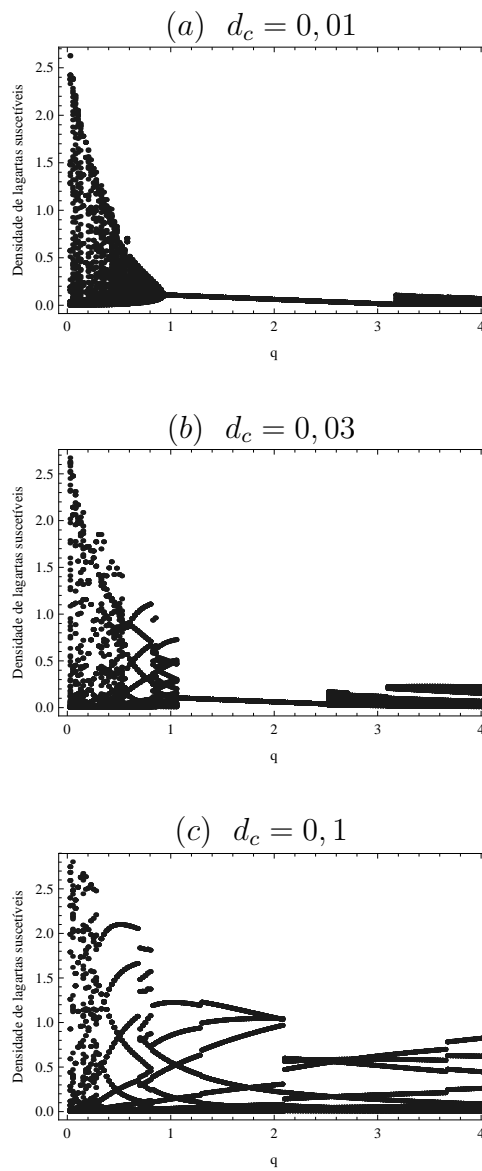
Ao aumentarmos ainda mais o parâmetro q , ou seja, ao considerarmos que as aplicações inundativas de fungos são feitas em maiores quantidades, por exemplo quando $q = 1$, verificamos que a densidade populacional de lagartas suscetíveis pode reduzir em até 90%, aproximadamente, para os parâmetros tomados, como ilustram as figuras (3.9 (a–c)), uma vez que o máximo da densidade de lagartas suscetíveis, quando há aplicações de fungos, é de 0,37 para $\alpha = 30,0$.

Novamente conferimos que os pontos de extinção das lagartas suscetíveis e de coexistência das populações ocorrem para um conjunto maior de parâmetros quando há aplicações inundativas de fungos.

Embora os diagramas de bifurcação para as densidades de lagartas infectadas e de fungos não estejam expostos, podemos concluir que, a redução da densidade de lagartas suscetíveis implica na redução da densidade de lagartas infectadas, que por sua vez, também diminui a densidade de fungos no meio.

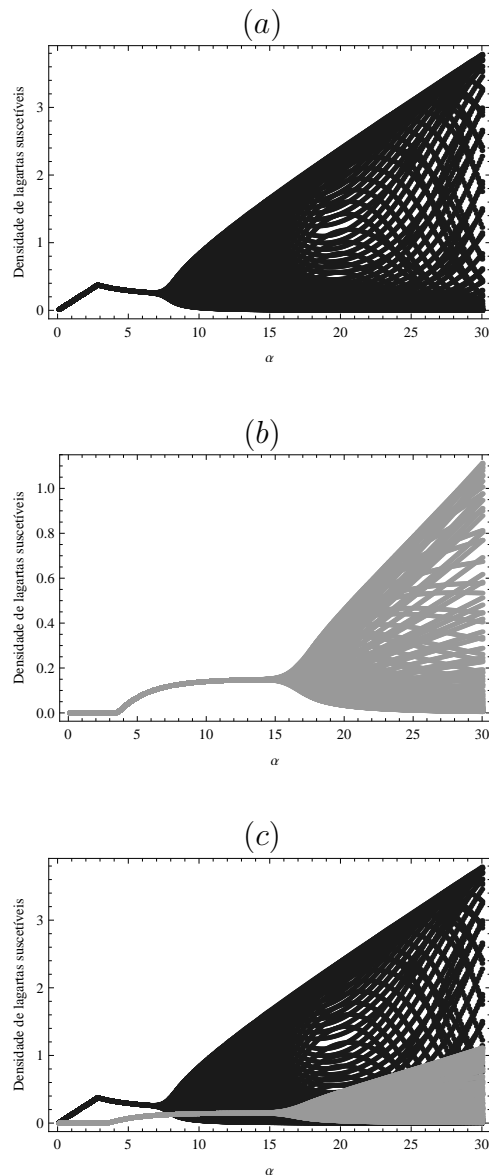
Por fim, concluímos que, dependendo dos parâmetros tomados, bons resultados sobre o controle das lagartas suscetíveis são observados, uma vez que as aplicações inundativas de fungos garantem redução significativa na densidade de lagartas suscetíveis.

Figura 3.7: Diagramas de bifurcação das lagartas suscetíveis em função de q para $\delta = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $r = 4,2$ e $\alpha = 28,0$, para distintos valores de d_c .



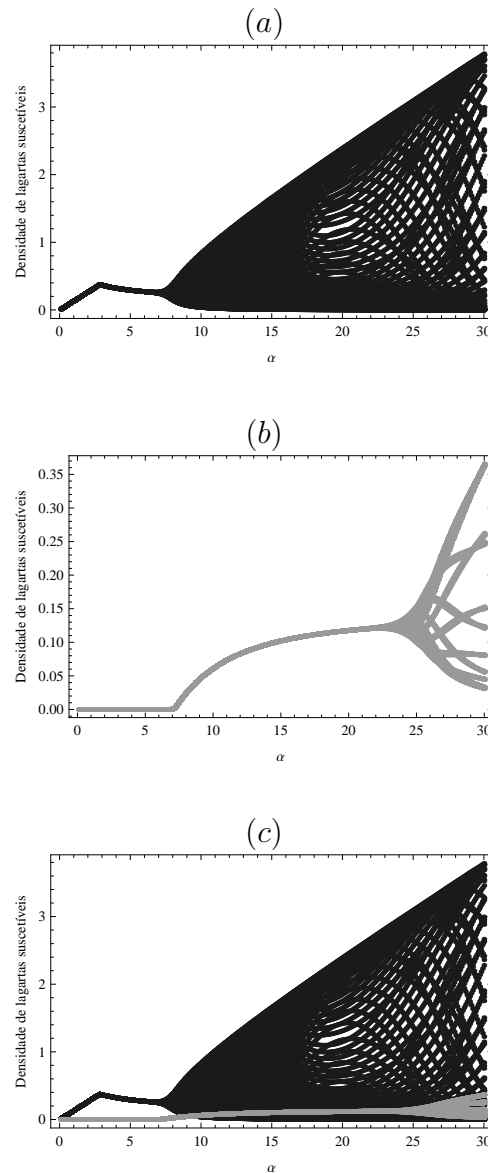
Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 3.8: Diagramas de bifurcação das lagartas suscetíveis (a) caso em que não há aplicações de fungos; (b) caso em que há aplicações de fungos e (c) comparação entre os diagramas; para $\delta = 0, 1$, $\gamma = 0, 5$, $r = 1 + \frac{4\alpha}{30}$ e $q = 0, 5$, com relação a α .



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 3.9: Diagramas de bifurcação das lagartas suscetíveis (a) caso em que não há aplicações de fungos; (b) caso em que há aplicações de fungos e (c) comparação entre os diagramas; para $\delta = 0, 1$, $\gamma = 0, 5$, $r = 1 + \frac{4\alpha}{30}$ e $q = 1, 0$, com relação a α .



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Capítulo 4

MODELO LAGARTA–FUNGO COM DUAS ESCALAS DE TEMPO

No capítulo 1, mencionamos que o ciclo biológico de *A. gemmatalis* dura em torno de 30 dias, enquanto que o ciclo do fungo *M. rileyi* varia de 8 a 12 dias, dependendo das condições climáticas. Isto é, as espécies reproduzem-se em escalas de tempo diferentes.

Situações como esta são comuns na natureza, pois nem sempre duas ou mais espécies que interagem dinamicamente reproduzem-se de forma sincronizada. Um outro exemplo é a interação entre o afídeo conhecido como pulgão-gigante-do-pinus (*Cinara atlantica*) e a joaninha-vermelha (*Cycloneda sanguinea*). O ciclo biológico de *C. atlantica*, que é uma praga potencial do *Pinus spp.*, é de aproximadamente 20 dias à temperatura de 25° (Penteado *et al.*, 2000). Já o ciclo de vida de *C. sanguinea*, comumente usada como controle biológico do pulgão, é de aproximadamente 4 meses (Oliveira, 2004). Embora a escala de reprodução do pulgão-gigante-do-pinus seja mais rápida do que a escala de reprodução da joaninha, a predação por parte da segunda é capaz de manter a população de pulgões em níveis muito baixo, sem a necessidade de outras técnicas de controle.

Neste capítulo, vamos considerar explicitamente a diferença entre as escalas de crescimento de *A. gemmatalis* e do fungo *M. rileyi*. Vamos adotar a formulação proposta por Rodrigues (2010) para descrever um sistema presa-predador de tempo discreto com diferentes escalas de crescimento das espécies.

No intervalo de um mês, tempo de desenvolvimento das lagartas, o fungo pode apresentar de duas a três gerações, dependendo das condições climáticas. Assim, dizemos que as lagartas crescem na escala lenta enquanto que o fungo se desenvolve na escala rápida.

Tomando o intervalo de tempo padrão de um mês, consideramos que a dinâmica do fungo *M. rileyi* é mais rápida que a dinâmica da lagarta-da-soja *A. gemmatalis*. Ou seja, do tempo t ao tempo $t + 1$, período em que ocorre uma fase de reprodução da lagarta,

consideraremos que há k unidades de tempo intermediários, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N$, em que ocorrem as reproduções do fungo.

A partir dessas informações, formularemos o modelo que representa a dinâmica com duas escalas de tempo e analisaremos os resultados desta interação.

4.1 FORMULAÇÃO DO MODELO

As equações que modelam este problema seguem as seguintes hipóteses:

- I) No tempo t , a densidade de lagartas suscetíveis é S_t , a densidade de lagartas infectadas é I_t e a densidade de fungos, F_t .
- II) Nas unidades de tempo intermediárias k , da t -ésima geração, uma parcela das lagartas suscetíveis mantem-se livre da infecção e a outra parcela é convertida em lagartas infectadas. Além disso, ocorre a reprodução dos fungos, de acordo com as equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_t^k = \frac{S_t^{k-1}}{1 + a(1 - \delta)F_t^{k-1}}, \\ I_t^k = \frac{a(1 - \delta) F_t^{k-1} S_t^{k-1}}{1 + a(1 - \delta)F_t^{k-1}}, \\ F_t^k = cI_t^{k-1} + \gamma\delta F_t^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

S_t^k , I_t^k e F_t^k representam as densidades de lagartas suscetíveis, infectadas e de fungos, nas gerações intermediárias k da t -ésima geração, respectivamente. Definimos, ainda, as condições iniciais: $S_t^0 = S_t$, $I_t^0 = I_t$ e $F_t^0 = F_t$.

- III) No tempo $t + 1$, as lagartas e os fungos se reproduzem:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{t+1} = \frac{r S_t^N}{1 + a(1 - \delta)F_t^N + bS_t^N}, \\ I_{t+1} = \frac{a(1 - \delta) F_t^N S_t^N}{1 + a(1 - \delta)F_t^N}, \\ F_{t+1} = cI_t^N + \gamma\delta F_t^N. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Os parâmetros das equações dos sistemas (4.1) e (4.2) e seus significados estão descritos na tabela (3.1), do capítulo anterior.

Tomando as seguintes mudanças de variáveis:

$$S_t = \frac{s_t}{b}, \quad I_t = \frac{i_t}{ac} \text{ e } F_t = \frac{f_t}{a},$$

obtemos as versões adimensionais dos sistemas (4.1) e (4.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} s_t^k = \frac{s_t^{k-1}}{1 + (1 - \delta)f_t^{k-1}}, \\ i_t^k = \frac{\alpha(1 - \delta) f_t^{k-1} s_t^{k-1}}{1 + (1 - \delta)f_t^{k-1}}, \\ f_t^k = i_t^{k-1} + \gamma\delta f_t^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{t+1} = \frac{r s_t^N}{1 + (1 - \delta)f_t^N + s_t^N}, \\ i_{t+1} = \frac{\alpha(1 - \delta) f_t^N s_t^N}{1 + (1 - \delta)f_t^N}, \\ f_{t+1} = i_t^N + \gamma\delta f_t^N, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

onde $\alpha = \frac{ac}{b}$.

Gerando os diagramas de bifurcação através de simulações numéricas dos sistemas (4.3) e (4.4), é possível verificar a existência dos três pontos de equilíbrio descritos no capítulo 2:

$(s_0^*, i_0^*, f_0^*) = (0, 0, 0)$, ponto de extinção das espécies,

$(s_1^*, i_1^*, f_1^*) = (r - 1, 0, 0)$, ponto que representa a sobrevivência das lagartas suscetíveis, livres da infecção, e que tem sentido biológico desde que $r > 1$ e

(s_2^*, i_2^*, f_2^*) , que é a solução de coexistência das espécies e que existe biologicamente se $r > 1$ e $\alpha > \frac{1 - \gamma\delta}{(r - 1)(1 - \delta)}$.

Além disso, ainda é possível verificar que, para certas combinações de parâmetros, o ponto de coexistência (s_2^*, i_2^*, f_2^*) perde a estabilidade e surgem soluções periódicas do tipo p -ciclos e ciclos-limite.

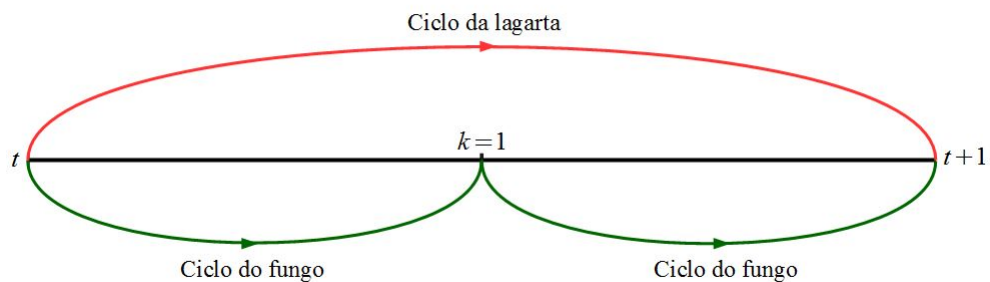
Tomaremos duas situações particulares nas quais analisaremos os diagramas de bifurcação:

- i) supomos que a cada mês, período em que a lagarta-da-soja reproduz-se, ocorrem dois ciclos de reprodução do fungo;
- ii) supomos que a cada mês ocorrem três fases completas de reprodução do fungo.

4.2 CASO I

No primeiro caso, consideramos que a cada ciclo de reprodução da lagarta-da-soja, o fungo reproduz-se duas vezes: a primeira, no tempo intermediário $k = 1$ e a segunda, no tempo $t + 1$, como ilustrado na figura (4.1).

Figura 4.1: Esquema de reprodução da lagarta e do fungo em escalas diferentes de tempo, com uma geração intermediária.



Fonte: da autora, gerada no *OpenOffice Impress*.

Faremos diagramas de bifurcação com relação aos parâmetros r , δ e α . Supondo condições favoráveis à proliferação do fungo fixaremos, sempre que necessário, $\delta = 0,2$, que significa que 80% dos fungos esporulam a cada geração.

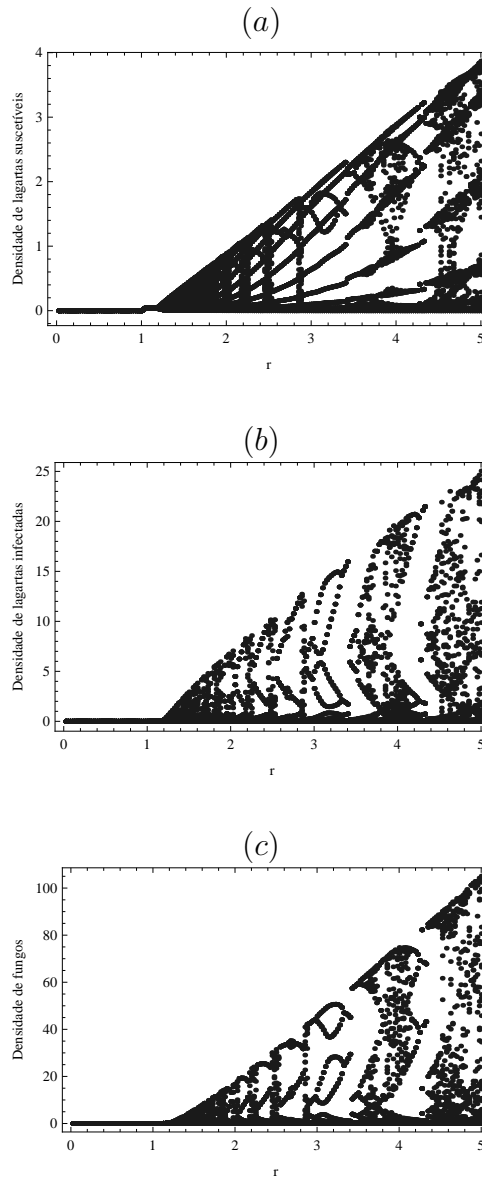
4.2.1 Simulações

Diagramas de bifurcação com relação a r

Fixando $\delta = 0,2$, $\gamma = 0,5$ e $\alpha = 30,0$, parâmetros que estão na região de soluções periódicas quando consideramos a mesma escala, obtemos o diagrama de bifurcação dos sistemas (4.3) e (4.4) com relação a r para as densidades de lagartas suscetíveis, infectadas e de fungos, conforme ilustrado na figura (4.2).

Para $r < 1$, as espécies vão à extinção após algumas gerações, como pode-se verificar nos diagramas da figura (4.2). Para $1 \leq r \approx 1,1$, os fungos vão à extinção e consequentemente, as lagartas infectadas também decaem a zero, enquanto que a densidade de lagartas suscetíveis tende à capacidade suporte do meio.

Figura 4.2: Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; em função de r para $\delta = 0,2$, $\gamma = 0,5$ e $\alpha = 30,0$.

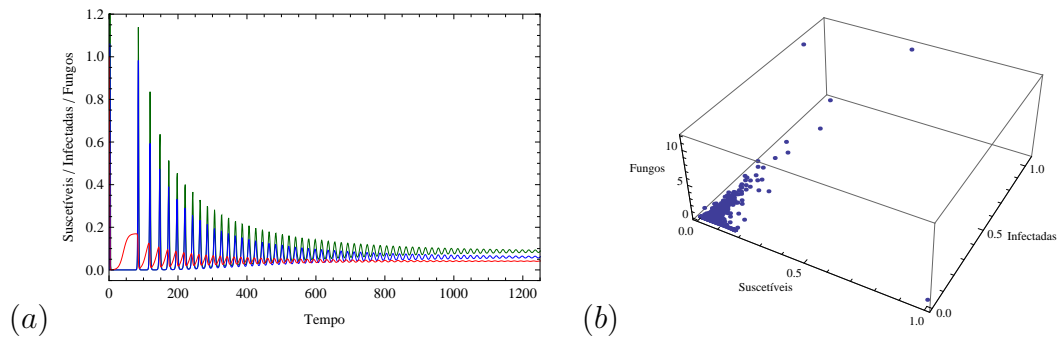


Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Para $1,1 \approx r \lesssim 1,8$, as espécies coexistem, sendo que as densidades populacionais decaem geração após geração até tender ao equilíbrio, bem próximo de zero. Os picos de infecção são cada vez menores, entretanto, ocorrem com mais frequência com o passar do tempo, como ilustra a figura (4.3), no caso em que $r = 1,17$. Como $r = 1,17$, a densidade máxima que as lagartas suscetíveis podem atingir é $0,17$, verificamos que a densidade tende a $0,042$ aproximadamente, após os transientes, garantindo a redução populacional de $75,32\%$ para as lagartas suscetíveis.

Para $1,8 \lesssim r \leq 5,0$, verifica-se que as densidades populacionais oscilam periodicamente. Por exemplo, quando $r = 1,5$, as soluções aproximam-se de um ciclo-limite,

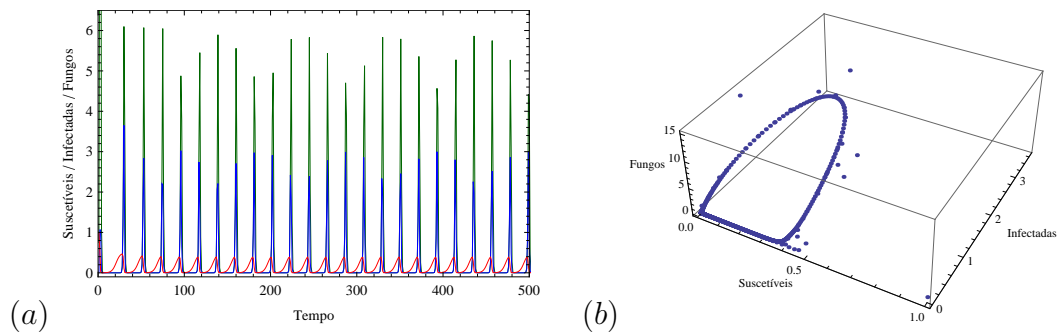
Figura 4.3: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 1250; para $r = 1,17$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

como mostra a figura (4.4).

Figura 4.4: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 500; para $r = 1,5$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



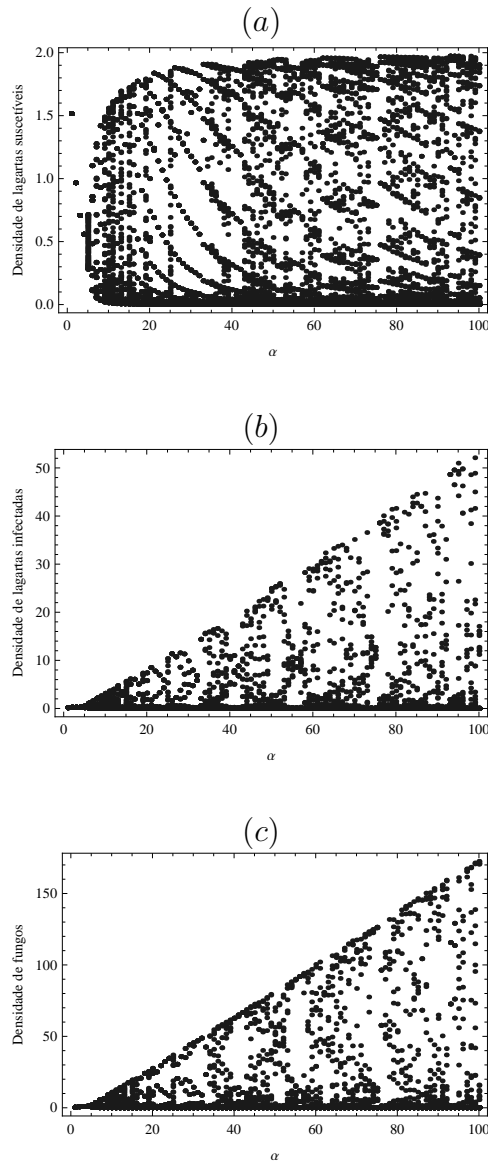
Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Diagrama de bifurcação com relação a α

Consideremos fixos os parâmetros $r = 3,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$. Neste caso, analisaremos o comportamento das populações de lagartas suscetíveis, infectadas e de fungos através dos diagramas de bifurcação com relação ao parâmetro adimensional α , conforme ilustra a figura (4.5). Lembramos que aumentos em α representam aumentos na taxa de contágio do fungo e/ou aumentos na densidade de fungo produzido por lagarta infectada ou ainda, diminuição da competição intraespecífica das lagartas.

Verificamos que para $0 < \alpha < 5$ as densidades populacionais de lagartas suscetíveis, infectadas e fungos tendem à coexistência, sendo que quanto maior for α no intervalo $(0, 5)$, menor é a densidade populacional das lagartas suscetíveis. À medida que se toma $\alpha \geq 5$, as soluções do sistema oscilam periodicamente, na forma de ciclos-limite.

Figura 4.5: Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; em função de α para $\delta = 0,2$, $\gamma = 0,5$ e $r = 3,0$.

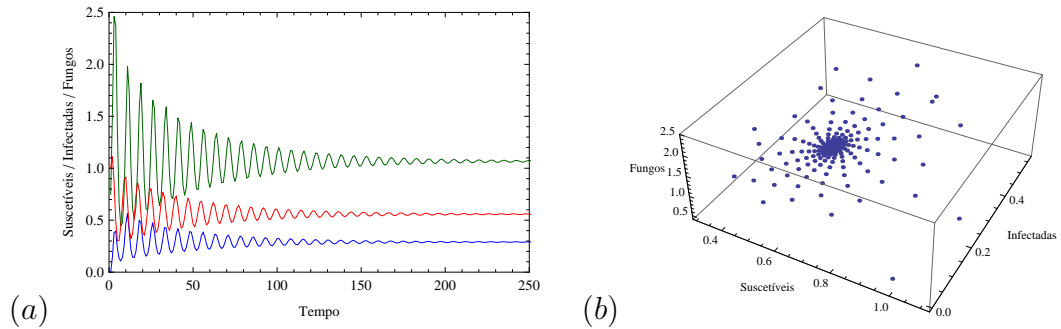


Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Para $\alpha = 4,0$, as populações de lagartas suscetíveis, infectadas e de fungos, após algumas gerações, tendem ao equilíbrio estável. Como α é baixo, a densidade de lagartas suscetíveis mantém-se maior do que a densidade de lagartas infectadas, como ilustra a figura (4.6). Neste caso, observamos a redução de aproximadamente 72,11% da densidade de lagartas suscetíveis.

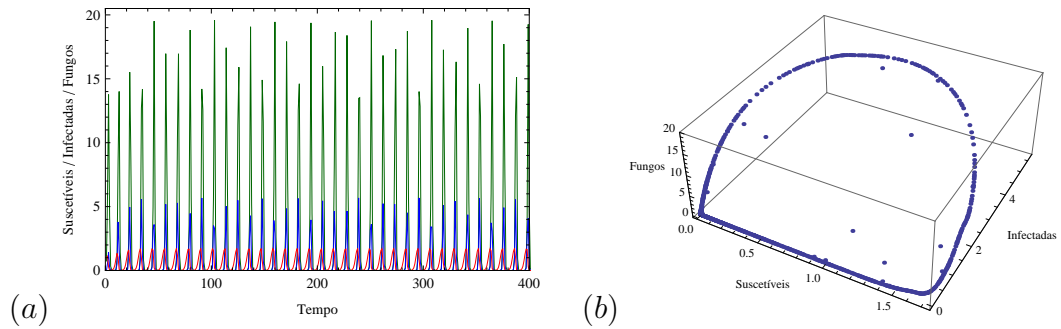
Quando $\alpha = 15,0$, as densidades populacionais oscilam em um ciclo-limite, como ilustra a figura (4.7).

Figura 4.6: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 250; para $r = 3,0$, $\alpha = 4,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 4.7: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 400; para $r = 3,0$, $\alpha = 15,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Diagrama de bifurcação com relação a δ

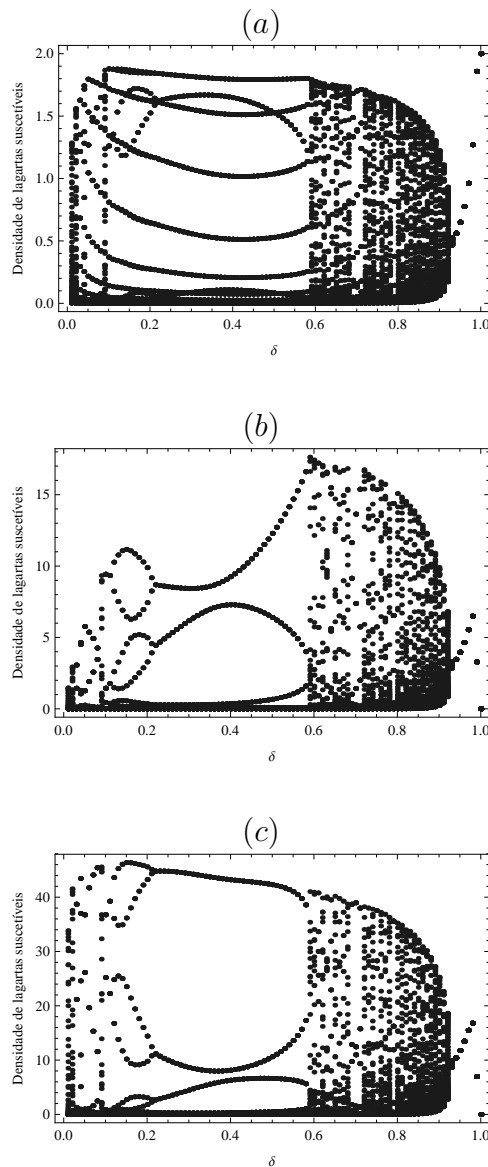
Fixamos os parâmetros $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$ e $\gamma = 0,5$. Neste caso, analisaremos o comportamento das populações de lagartas suscetíveis, infectadas e de fungos através dos diagramas de bifurcação com relação ao parâmetro δ , conforme ilustra a figura (4.8). Ou seja, a dinâmica do sistema depende da quantidade de conídios que não esporularam na geração anterior t .

Nesta situação, verificamos que para $0 \leq \delta \lesssim 0,92$, as soluções oscilam em p -ciclos ou ciclos-limite. E para $0,92 \lesssim \delta < 1$, ou seja, para baixa esporulação de fungos em cada geração, as soluções do sistema tendem ao equilíbrio de coexistência.

Por exemplo, tomando $\delta = 0,4$, as densidades populacionais oscilam em um 14-ciclo, como mostra a figura (4.9). Enquanto que para $\delta = 0,8$, verificamos que as densidades aproximam-se de um ciclo-limite, como ilustra a figura (4.10).

Ao tomarmos $\delta = 0,95$, ou seja, quando somente 5% dos inóculos de fungos esporulam a cada geração, as espécies atingem o equilíbrio após os transientes, como ilustra a

Figura 4.8: Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a δ para $\alpha = 30,0$, $\gamma = 0,5$ e $r = 3,0$.



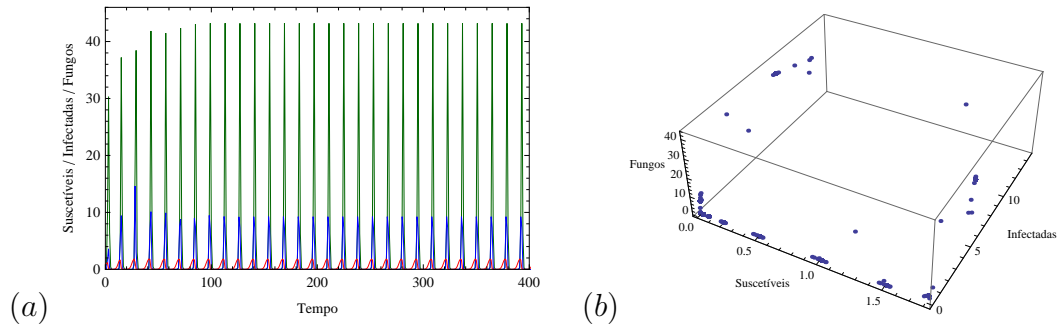
Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

figura (4.11). Verificamos a redução de 67,47% da densidade de lagartas suscetíveis, uma vez que a densidade máxima possível é 2,0 e que, neste caso, a densidade tende a 0,65 aproximadamente.

4.3 CASO II

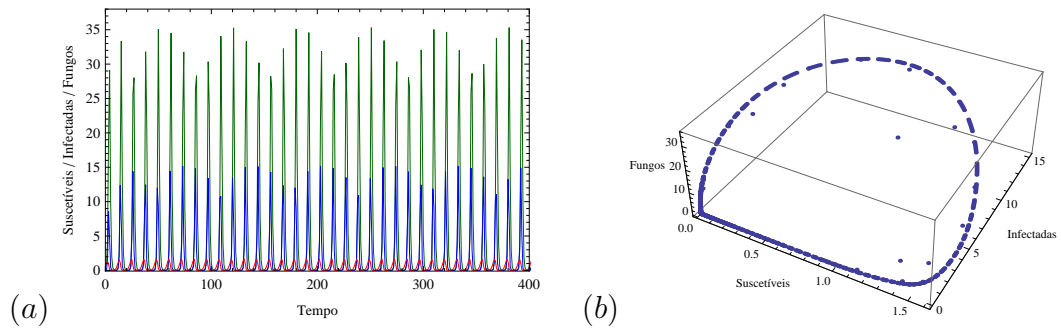
No segundo caso, consideramos que a cada ciclo de reprodução da lagarta-da-soja, o fungo reproduz-se três vezes. A primeira fase de reprodução ocorre no tempo intermediário $k = 1$, a segunda, no tempo intermediário $k = 2$ e a última, em $t + 1$,

Figura 4.9: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 400; para $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,4$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



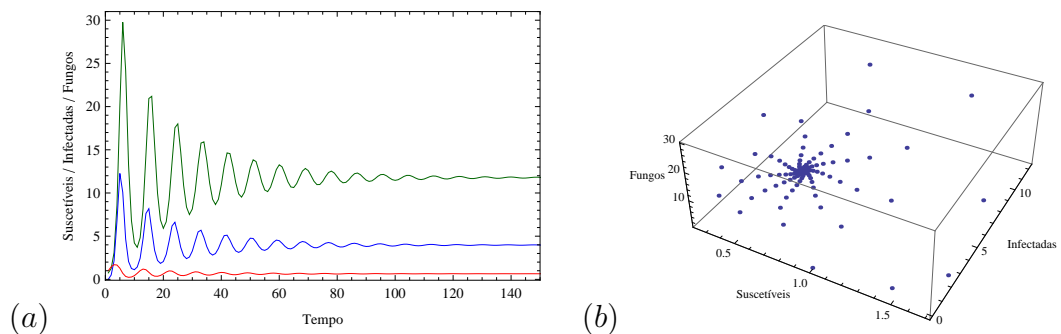
Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 4.10: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 400; para $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,8$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

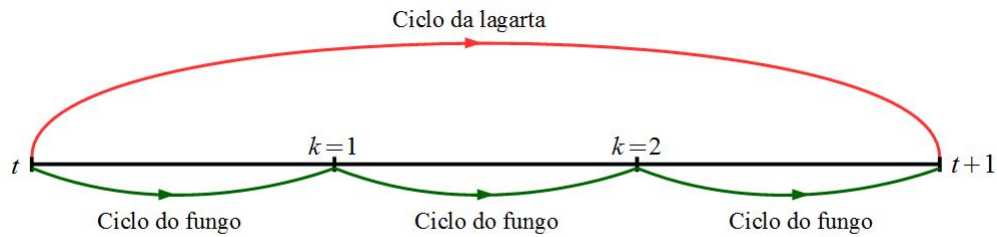
Figura 4.11: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 150; para $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,95$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

como ilustra a figura (4.12). Isto é, consideramos agora que as condições de temperatura e umidade propiciem que os fungos desenvolvam o ciclo de vida em aproximadamente 10 dias.

Figura 4.12: Reprodução da lagarta e do fungo em escalas diferentes de tempo, para duas gerações intermediárias.



Fonte: da autora, gerada no *OpenOffice Impress*.

Assim, aplicamos o sistema (4.3) com $N = 2$ às condições iniciais e, em seguida, o sistema (4.4).

4.3.1 Simulações

Diagrama de bifurcação com relação a r

Consideremos, agora, os parâmetros $\delta = 0,2$, $\gamma = 0,5$ e $\alpha = 30,0$ fixos. Os diagramas de bifurcação para os sistemas (4.3) e (4.4) com relação a r são apresentados na figura (4.13).

As mudanças qualitativas na dinâmica das populações ocorrem para os mesmos valores de r que no caso I. Verificamos que, no caso II, surgem p -ciclos para conjuntos de parâmetros que anteriormente haviam ciclos-limite.

Por exemplo, tomemos $r = 1,5$. No caso I, obtivemos um ciclo-limite. Neste caso, conferimos o surgimento de um 21-ciclo, como ilustra a figura (4.14).

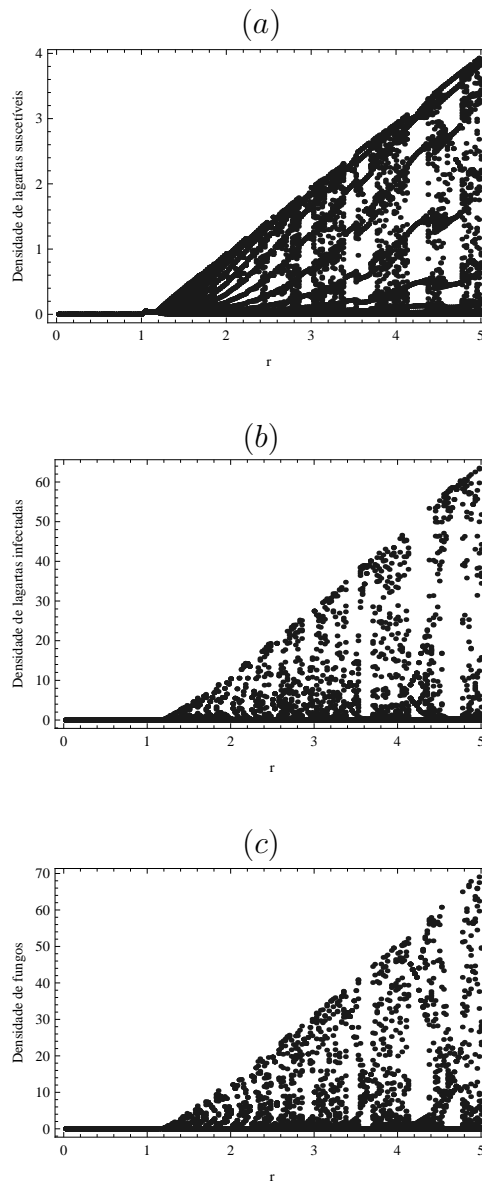
Diagrama de bifurcação com relação a α

Agora, fixamos $\delta = 0,2$, $\gamma = 0,5$ e $r = 3,0$, e iteramos os sistemas (4.3) e (4.4) para produzir diagramas de bifurcação com relação ao parâmetro α , como ilustra a figura (4.15), para as densidades de lagartas suscetíveis, infectadas e de fungos.

Neste caso, as soluções dos sistemas tendem ao equilíbrio de coexistência para $0 < \alpha \leq 3,0$. Para $3 < \alpha \leq 100$, as soluções se afastam do equilíbrio e oscilam em ciclos-limite ou p -ciclos. Tomamos, por exemplo, $\alpha = 3,0$ e $\alpha = 4,0$, e verificamos a solução de coexistência e o 25-ciclo, respectivamente, como ilustram as figuras (4.16) e (4.17).

Observamos que, no caso em $\alpha = 4,0$, houve uma redução de 67,64% da densidade de lagartas suscetíveis, uma vez que a densidade máxima possível é 2,0 e com a interação lagarta–fungo, a densidade de lagartas suscetíveis tende a 0,647 aproximadamente.

Figura 4.13: Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a r para $\delta = 0,2$, $\gamma = 0,5$ e $\alpha = 30,0$.



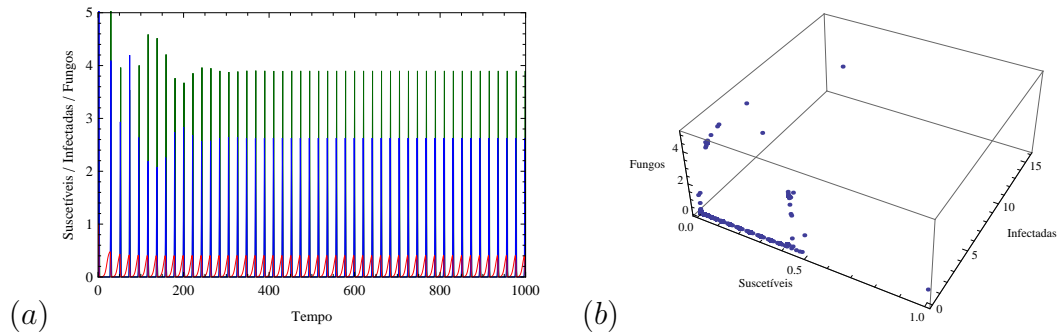
Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Diagrama de bifurcação com relação a δ

Por último, fixamos $\gamma = 0,5$, $r = 3,0$ e $\alpha = 30,0$, e produzimos diagramas de bifurcação para as populações de lagartas suscetíveis, infectadas e fungos, com relação ao parâmetro δ , ilustrados da figura (4.18).

Comparando os diagramas do caso I com os do caso II, apresentados nas figuras (4.8) e (4.18), respectivamente, verificamos que a região dos parâmetros para os quais são obtidas soluções periódicas, é maior no segundo caso. No segundo caso, obtemos soluções periódicas para $0 < \delta \leq 0,93$ e soluções de equilíbrio de coexistência para $0,93 < \delta < 1$.

Figura 4.14: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 1000; para $r = 1,5$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.

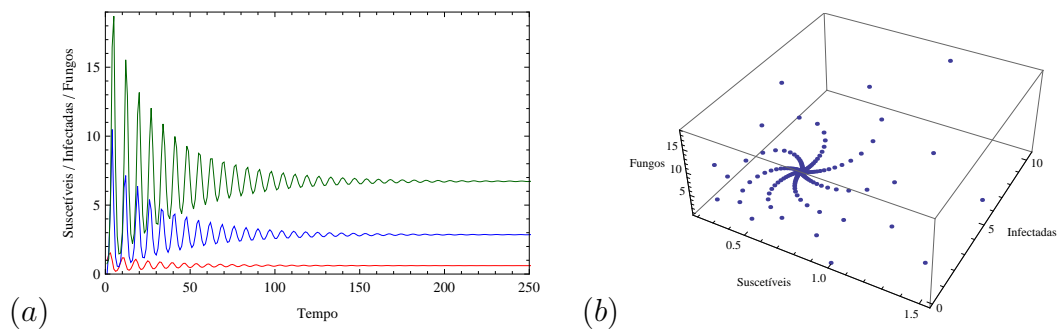


Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Quando $\delta = 0,93$, por exemplo, as soluções aproximam-se de um ciclo-limite, como ilustra a figura (4.19). Enquanto que, para $\delta = 0,95$, as soluções tendem a um equilíbrio estável, onde a densidade de lagartas suscetíveis tende a 0,609, como mostra a figura (4.20). Dessa forma, a interação lagarta–fungo reduz a densidade de lagartas suscetíveis em até 69,53%.

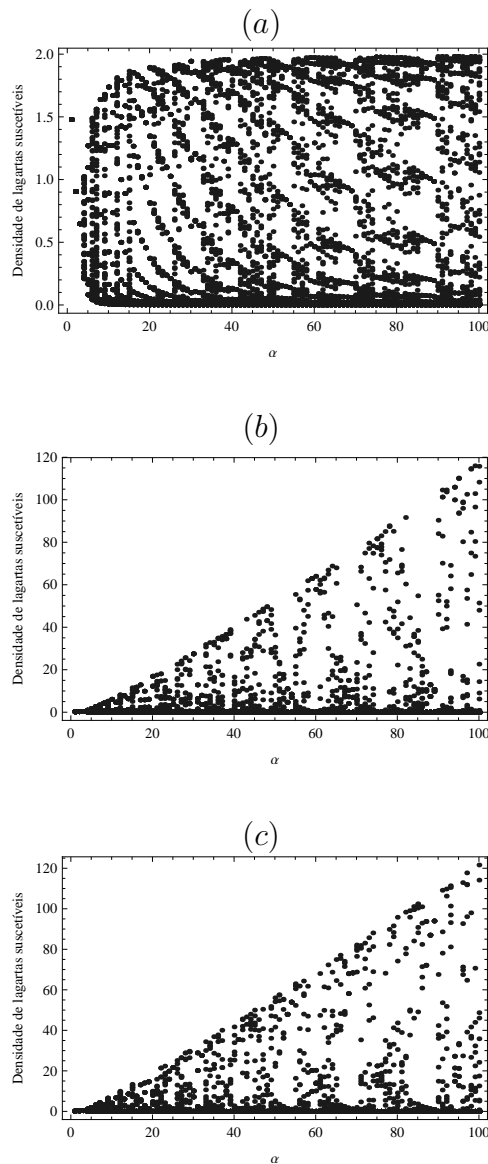
Reparemos que, no intervalo de soluções periódicas, quanto maior for o valor do parâmetro δ , ou seja, quanto menos fungos esporularem a cada geração, menor será a densidade populacional de lagartas suscetíveis que será infectada. Assim, concluímos que, para os parâmetros considerados, quanto maior a densidade de fungos no meio, mais oscilações ocorrerão no sistema.

Figura 4.20: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 250; para $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,95$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 4.15: Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a α para $\delta = 0,2$, $\gamma = 0,5$ e $r = 3,0$.



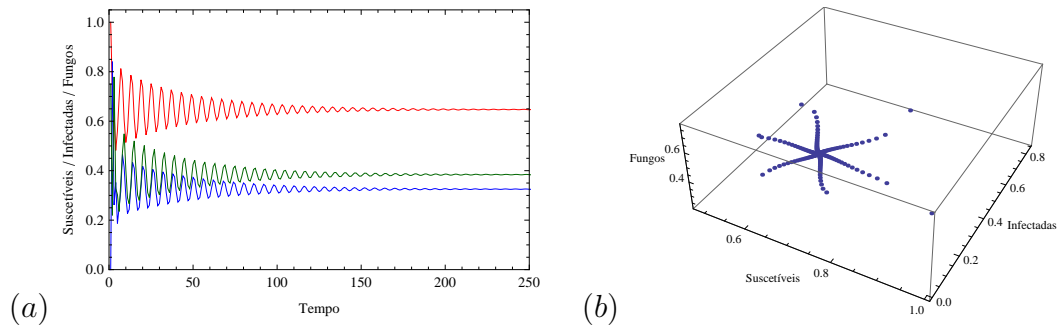
Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por fim, comparamos o modelo do capítulo 2, cujas escalas de tempo são iguais (um mês) para a população de lagartas e de fungos, com o modelo do capítulo 4, onde as escalas são distintas. Neste último, supomos que, dependendo das condições, o fungo pode se reproduzir a cada 15 dias (caso I) ou a cada 10 dias (caso II), enquanto que a lagarta se reproduz uma vez a cada mês.

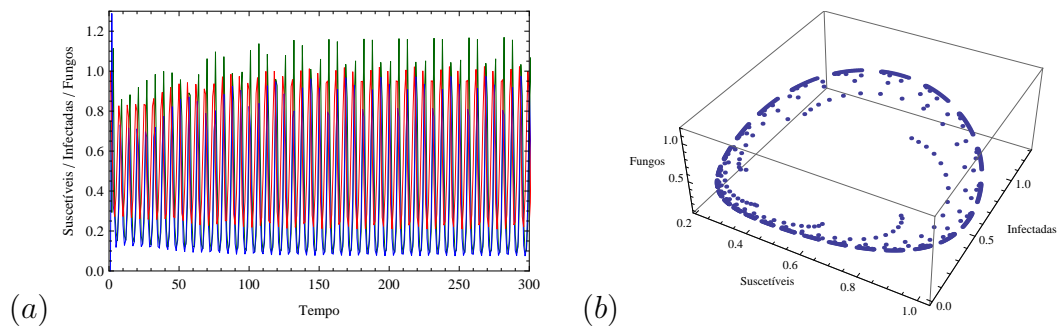
Ao considerarmos que o fungo se reproduz mais rapidamente que a lagarta, esperamos que, para o mesmo conjunto de parâmetros, a redução na densidade de lagartas

Figura 4.16: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 250; para $r = 3,0$, $\alpha = 3,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 4.17: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 300; para $r = 3,0$, $\alpha = 4,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



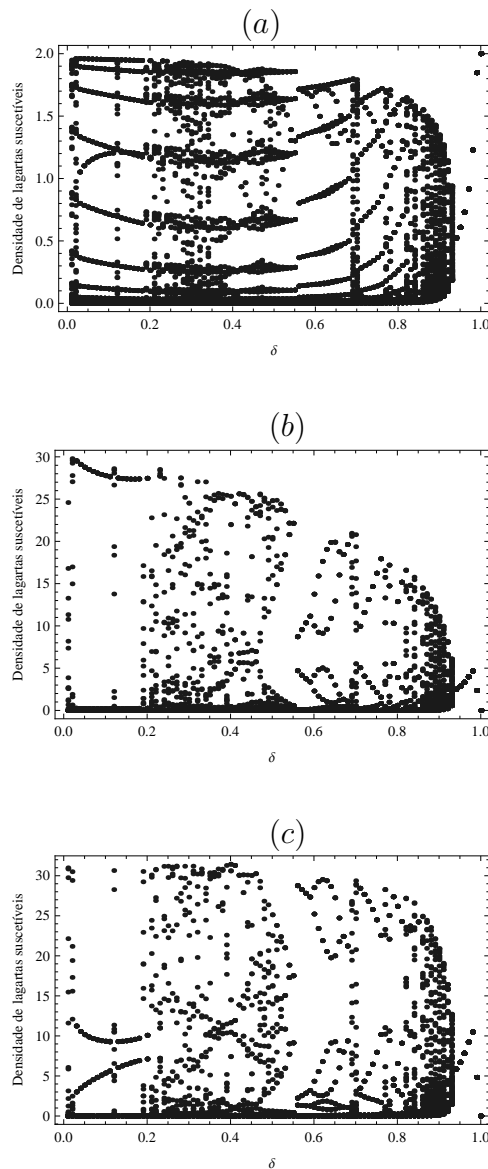
Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

suscetíveis seja mais significativa do que para escalas iguais.

Fixando os parâmetros $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$, $\gamma = 0,5$ e $\delta = 0,2$ simulamos a densidade total de lagartas suscetíveis para as três situações possíveis quanto a escala: escalas iguais, caso I e caso II. A figura (4.21) mostra o comportamento populacional da lagarta suscetível na escala rápida de tempo, para cada uma das situações, onde a densidade total de lagartas suscetíveis para escalas iguais, é representada pela curva contínua espessa; para o caso I, pela curva contínua simples e para o caso II, pela curva tracejada.

Verificamos que, para as primeiras cinco gerações de lagartas suscetíveis, a densidade decai mais rapidamente para os casos em que há diferenças na escala do que para o caso em que a escala é igual. Portanto, para as gerações iniciais, os casos I e II causam efeitos positivos de controle das lagartas. Entretanto, a longo prazo, não há um padrão para o comportamento das soluções de cada uma das situações. Podemos observar que, em certa geração, a densidade de lagartas suscetíveis é maior quando não há diferença de escalas (curva contínua espessa) e para outra geração, observar-se o oposto (curva contínua sim-

Figura 4.18: Diagrama de bifurcação (a) lagartas suscetíveis; (b) lagartas infectadas e (c) fungos; com relação a δ para $\gamma = 0,5$, $r = 3,0$ e $\alpha = 30,0$.



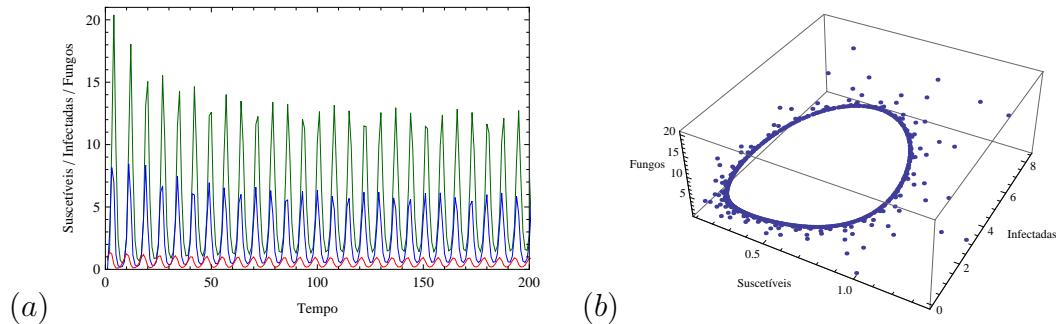
Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

ples e curva tracejada). Assim, não podemos garantir resultados satisfatórios para esta comparação.

Entretanto, se aumentarmos o parâmetro adimensional α tanto quanto possível, ou seja, se considerarmos que a taxa de contágio do fungo e/ou a densidade de conídios produzidos por lagarta infectada são altos ou, ainda, que o fator de autorregulação das lagartas é baixo, verificamos que, após várias gerações, é possível que a densidade de lagartas suscetíveis vá à extinção, para certos conjuntos de parâmetros.

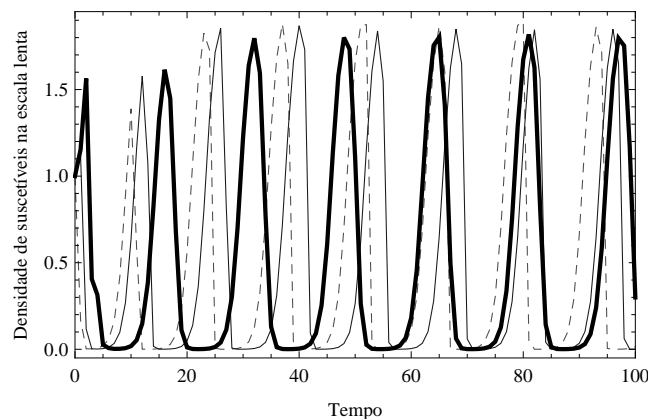
Por exemplo, fixando $r = 3,0$, $\gamma = 0,5$ e $\delta = 0,2$ e fazendo diagramas de bifurcação com relação a α , para as três situações: escalas iguais, caso I e caso II, onde iteramos 1300

Figura 4.19: (a) Densidade total das populações em função do tempo; (b) Retrato de fase para t variando de 0 a 200; para $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,93$ e $\gamma = 0,5$. A curva em vermelho representa lagartas suscetíveis, azul representa lagartas infectadas e verde, o fungo.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

Figura 4.21: Densidade total de lagostas suscetíveis em função do tempo para $r = 3,0$, $\alpha = 30,0$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 0,5$ na escala lenta de tempo. A curva contínua espessa representa a densidade de lagostas quando as escalas são iguais; a curva contínua simples representa a densidade de lagostas para escalas distintas no caso I e a curva tracejada, a densidade de lagostas para escalas distintas no caso II.

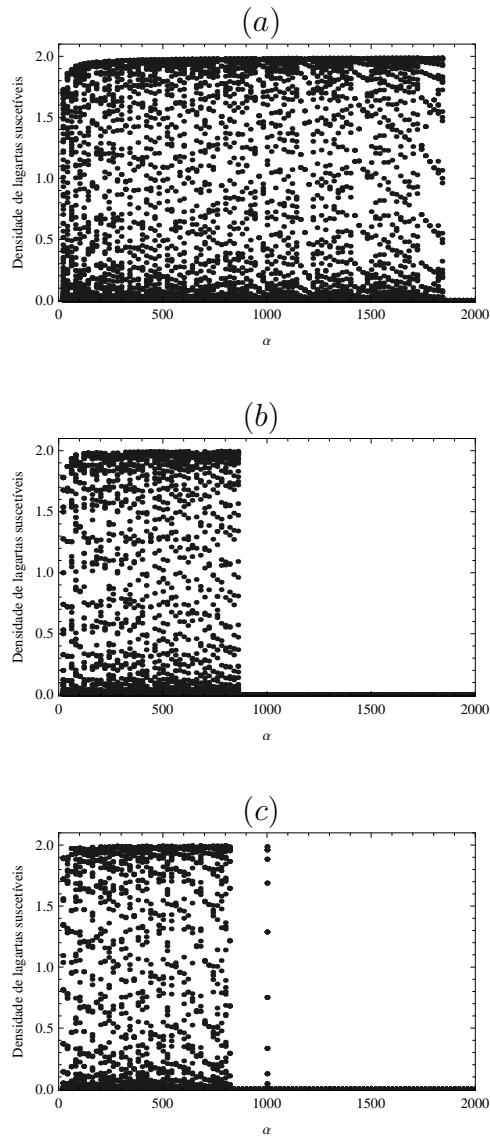


Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

vezes os sistemas (2.8) e (4.3)–(4.4) e plotamos os últimos 100 valores de cada simulação para 100 valores distintos de α no intervalo $0 \leq \alpha \leq 2000$, verificamos que, para as três situações, há possibilidade de extinção, em diferentes gerações, como ilustram as figuras (4.22 (a – c)).

Na situação de escalas iguais, ilustrada na figura (4.22 (a)), observamos que o ponto de coexistência é estável para $0 < \alpha \leq 5$, ocorrem soluções periódicas no intervalo $5 \leq \alpha \leq 1840$ e em $\alpha = 1840$ ocorre uma bifurcação e o ponto de extinção das espécies passa a ser estável. No caso I, (figura 4.22 (b)), soluções periódicas ocorrem até $\alpha = 860$, onde ocorre uma bifurcação e o ponto de extinção passa a ser estável. No caso II, a bifurcação do sistema é antecipada e ocorre em $\alpha = 820$, ou seja, para $0 \leq \alpha \leq 820$ o ponto de coexistência é estável, para $0 \leq \alpha \leq 820$ soluções periódicas são observadas e o

Figura 4.22: Diagrama de bifurcação de lagartas suscetíveis (a) escalas iguais; (b) caso I e (c) caso II; com relação a α para $r = 3, 0$, $\gamma = 0, 5$ e $\delta = 0, 2$.



Fonte: da autora, gerada no *Mathematica* 10.0.

ponto de extinção é estável para os demais valores de α .

Portanto, quando assumimos grandes valores para α , podemos garantir a redução drástica da densidade de lagartas suscetíveis, tendendo a extinção, para as três situações consideradas. Sendo que, quanto mais rápido o fungo se reproduzir, mais rápido ocorrerá a redução das lagartas.

CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos três modelos de tempo discreto para descrever a dinâmica de interação da lagarta-da-soja com o fungo *M. rileyi*. Para os modelos, assumimos que a população de lagartas divide-se em suscetíveis e infectadas e representamos cada uma delas por uma equação a diferenças. Além disso, consideramos também a dinâmica vital do fungo. Com esse sistema de equações, buscamos verificar os efeitos do fungo sobre a densidade de lagartas-da-soja (*A. gemmatalis*).

No modelo apresentado no capítulo 2, supomos que as escalas de tempo para reprodução das lagartas e dos fungos são iguais, que as lagartas suscetíveis crescem segundo o modelo de Beverton-Holt (González-Guzmán, 1999) e que ao entrar em contato com o fungo, uma parcela das lagartas suscetíveis converte-se em infectadas. Verificamos, para diversas combinações de parâmetros, a redução da densidade populacional de lagartas suscetíveis.

No capítulo 3, consideramos que aplicações inundativas de fungos são feitas periodicamente nas lavouras, isto é, libera-se uma grande quantidade de fungos a cada geração a fim de causar epizootias na população de lagartas e reduzir, de forma imediata, a sua densidade (Tessmann, 2011). Comparando-se os resultados obtidos neste caso com o modelo do capítulo anterior, verificamos que as aplicações inundativas de fungos colaboram significativamente para o controle biológico da lagarta-da-soja. Além disso, observamos que, se as aplicações de fungo são restritas, ou seja, só ocorrem a partir de um certo limiar crítico de densidade de lagartas suscetíveis, o controle é mais efetivo nos casos em que o limiar é menor, uma vez que quanto menor for a densidade de lagartas suscetíveis detectada na lavoura, mais rápido as lagartas podem ser controladas.

No capítulo 4, consideramos as diferenças nas escalas de tempo para reprodução da lagarta-da-soja e do fungo. Isto é, levamos em consideração que os fungos reproduzem-se em uma escala rápida de tempo enquanto que a lagarta, em uma escala lenta. Representamos a dinâmica vital de cada uma das populações através de dois sistemas de equações a diferenças, um para cada escala de tempo (Rodrigues, 2010). Neste caso, observamos uma redução significativa na densidade de lagartas suscetíveis. Entretanto, oscilações também foram observadas para um conjunto maior de parâmetros. Além disso, observamos o sur-

gimento de soluções do tipo p -ciclo, ou seja, soluções variando entre p valores distintos que se repetem periodicamente.

Ao compararmos os resultados do capítulo 2 e capítulo 4, observamos que, quando assumimos grandes valores para α , resultados significativos são observados, como por exemplo, a extinção das lagartas suscetíveis após diversas gerações. Notamos também que, a medida que consideramos que o fungo se reproduz mais rapidamente, mais rápido as lagartas suscetíveis vão à extinção.

Concluimos, portanto, que os efeitos do fungo *M. rileyi*, como controle biológico da lagarta-da-soja (*A. gemmatalis*), são positivos para um grande conjunto de parâmetros, para vários cenários. Ao considerarmos um modelo simples para a interação lagarta–fungo, como mostrado no capítulo 2, resultados satisfatórios são observados, como a redução de até 65% da densidade de lagartas suscetíveis. O uso de recursos adicionais, como a aplicação inundativa de fungos, auxilia o controle das lagartas, e pode resultar na redução de até 90% das lagartas suscetíveis, como ilustrado na figura (3.9) do capítulo 3. Para o modelo com múltiplas escalas, a densidade de lagartas suscetíveis pode tender até a extinção, quando tomamos grandes valores para α , como mostrado no capítulo 4.

Ressaltamos que, neste trabalho, apresentamos modelos que consideram somente o controle biológico da lagarta-da-soja, entretanto, como sugere o manejo integrado de pragas, o controle biológico associado a outra técnica de controle pode oferecer melhores resultados. Os modelos apresentados aqui podem incorporar essas modificações.

Por fim, esperamos que os resultados apresentados neste trabalho possam ser utilizados para incentivar o uso do controle biológico da lagarta-da-soja, através do fungo *M. rileyi*, isoladamente ou associado a outras técnicas, a fim de contribuir com a implementação do manejo integrado de pragas, buscando melhorias econômicas, sociais e ambientais aos produtores e consumidores.

REFERÊNCIAS

A SOJA NO BRASIL. In: Tecnologias de Produção de Soja - Região Central do Brasil. Londrina: Embrapa Soja, 2004. Disponível em : < <http://www.cnpso.embrapa.br/producaosoja/index.htm> >. Acesso em: 25 mai. 2016

ABATI, K. **Produção do fungo entomopatogênico *Metarhizium rileyi* (Farlow) por fermentação líquida e sólida**. 2015. 67 p. Dissertação (Mestrado em Entomologia) - Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2015.

ALLEN, L. J. S. **An introduction to mathematical biology**. New Jersey: Pearson Education, 2007.

ALVES, S. B. Fungos entomopatogênicos. In: ALVES, S. B. (Ed.) **Controle Microbiano de Insetos**. Piracicaba: FEALQ, 1986. p. 289–381.

BERGAMIN FILHO, A.; KIMATI, H.; AMORIN, L. (Ed.) **Manual de fitopatologia**. Volume 1: Princípios e conceitos. São Paulo: Editora Agronômica Ceres. 1995. 3^a ed.

BUENO, A. F.; SOSA-GÓMEZ, D. R.; MOSCARDI, F.; BUENO, R. C. O. F. Inimigos naturais da soja. In: HOFFMANN-CAMPO, C. B.; CORRÊA-FERREIRA, B. S.; MOSCARDI, F. **Soja: manejo integrado de insetos e outros artrópodes-praga**. Brasília: Embrapa, 2012. cap. 8, p. 493–630.

BUENO, V. H. P. **Controle biológico de pragas: produção massal e controle de qualidade**. 2. ed. Lavras: Editora UFLA. 2009. 429p.

CARVALHO, N. L.; BARCELLOS, A. L. Adoção do manejo integrado de pragas baseado na percepção e educação ambiental. **REGET/UFSM: Revista Eletrônica em Gestão**,

Educação e Tecnologia Ambiental, Santa Maria, v. 5, n. 5, p. 749–766, 2012. Disponível em: < <http://dx.doi.org/10.5902/223611704204> >. Acesso em: 26 mai. 2016.

CASTELLANI, M. A.; BRANDÃO, A. L. S. **Manejo integrado da soja**. 2000. Disponível em: < <http://www.uesb.br/entomologia/manejo.html> >. Acesso em: 01 jun. 2016.

COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO. **Acompanhamento da safra brasileira de grãos - v. 2, n. 12**. Brasília: Conab, 2015.

CORRÊA, B. S.; SMITH, J. G. **Nomuraea rileyi attacking the velvetbean caterpillar, *Anticarsia gemmatalis* Huebner, in Paraná**. Homestead: Florida Entomologist, v. 58, p. 280, 1975.

DEGRANDE, P. E.; VIVAN, L. M., Pragas da soja. In. CAJU, J. *et al.* **Boletim de Pesquisa de Soja**. Rondonópolis: Fundação MT, v. 12, 2008. 254p.

DEGRANDE, P. E.; VIVAN, L. M., **Tecnologia e Produção: Soja e Milho 2011/2012**. 2012.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. McGraw-Hill, New York, 1988.

FORD, B. J.; REID, J.; STRAYER, J. R.; GODFREY, G. L. **The literature of arthropods associated with soybean: a bibliography of the velvetbean caterpillar *Anticarsia gemmatalis* Hübner (Lepidoptera: Noctuidae)**. Illinois: Natural History Survival, 1975. 15p. Biological Notes, v. 92.

GALILEO, M. H. M.; GASTAL, H. A. DE O.; GRAZIA, J. **Levantamento populacional de *Pentatomidae* (Hemiptera) em cultura de soja (*Glycine max* (L.) Merr.) no município de Guaíba, Rio Grande do Sul**. Revista Brasileira de Biologia 37(1), 1977. p. 111–120.

GALLO, D.; NAKANO, O.; SILVEIRA NETO, S.; CARVALHO, R. P. L.; BAPTISTA, G. C.; BERTI FILHO, E.; PARRA, J. R. P.; ZUCCHI, R. A.; ALVES, S. B.; VENDRAMIM, J. A.; MARCHINI, L. C.; LOPES, J. R. S.; OMOTO, C. **Entomologia agrícola**. Piracicaba: FEALQ, 2002.

GAZZONI, D. L.; OLIVEIRA, E. B. de; CORSO, I. C.; CORRÊA-FERREIRA, B. S.; VILLAS BOAS, G. L.; MOSCARDI, F.; PANIZZI, A. R. **Manejo de pragas da soja**. Londrina: EMBRAPA - CNPSo, 1988. 44p. Circular Técnica n. 5.

GONZÁLEZ-GUZMÁN, J. **Ecología matemática, modelos de tiempo discreto de poblaciones sin estructura**. Valparaíso: Tomo 1, Universidad Católica de Valparaíso. 1999.

HOFFMANN-CAMPO, C. B.; CORRÊA-FERREIRA, B. S.; MOSCARDI, F. **Soja: manejo integrado de insetos e outros artrópodes-praga**. Brasília: Embrapa, 2012.

KOGAN, M. **Integrated Pest Management: Historical Perspectives and Contemporary Developments**. Annual Review of Entomology, v. 43, p. 243–270, jan. 1998.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2006. 2ª ed.

MORAES, A. M. L. DE; PAES, R. A.; HOLANDA, V. L. DE. Micologia. In: MOLINARO, E. M.; CAPUTO, L. F. G.; AMENDOEIRA, M. R. R. **Conceitos e Métodos para formação de profissionais em laboratórios de saúde vol. 4**. Rio de Janeiro: EPSJV, IOC, 2013. p. 399–496.

MOREIRA, H. J. C. ; ARAGÃO, F. D. **Manual de pragas da soja**. Campinas: [s.n.], 2009.

MOSCARDI, F. Artrópodes que atacam as folhas da soja. In: HOFFMANN-CAMPO, C. B.; CORRÊA-FERREIRA, B. S.; MOSCARDI, F. **Soja: manejo integrado de insetos e outros artrópodes-praga**. Brasília: Embrapa, 2012. cap. 4, p. 213–334.

OLIVEIRA, N. C.; WILCKEN, C. F.; MATOS, C. A. Ciclo biológico e predação de três espécies de coccinelídeos (Coleoptera, Coccinellidae) sobre o pulgão-gigante-do-pinus *Cinara atlantica* (Wilson) (Hemiptera, Aphididae). Curitiba: **Revista Brasileira de Entomologia**, V. 48, n. 4, pg. 529–533, dez. 2004.

PANIZZI, A. R.; PARRA, J. R. P. **Ecologia nutricional de insetos e suas implicações no manejo de pragas**. São Paulo: Manole/CNPq, 1991.

PENTEADO, S. R. C.; TRENTINI, R. F.; IEDE, E. T. & FILHO, W. R. Ocorrência, distribuição, danos e controle de pulgões do gênero *Cinara* em *Pinus spp.* no Brasil. Curitiba: **Revista Floresta** v. 30, n. 12, p. 55–64. 2000.

RODRIGUES, L. A. D.; MISTRO, D. C.; ANDRADE, C. L. Sistema Presa-Predador com Duas Escalas de Crescimento: Presa Rápida × Predador Lento. Campinas: **Biomatemática**, v. 20, 69–78, 2010.

SOSA-GÓMEZ, D. R. **Essa lagarta gosta de soja**. Pelotas: Cultivar, v. 2, n. 12, p. 40–42, jan. 2000.

TESSMANN, D. J. Controle biológico: aplicações na área de Ciência das Plantas Daninhas. In: OLIVEIRA JR, R. S.; CONSTANTIN, J.; INOUE, M. H. **Biologia e Manejo de Plantas Daninhas**. Curitiba: Omnipax, 2011. cap. 4, p. 79–93.

APÊNDICE A – BIFURCAÇÕES EM EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

Seja $N_{t+1} = \varphi(N_t)$ uma equação a diferenças não-linear de primeira ordem, onde N_t representa a população N no tempo t e φ é uma função não-linear que descreve as características de uma população. Consideremos r um parâmetro da função $\varphi(N_t)$ e analisaremos o comportamento da solução da equação a diferenças não-linear de primeira ordem:

$$N_{t+1} = \varphi(N_t, r). \quad (\text{A.1})$$

Denotamos por $N^*(r)$ a solução de equilíbrio de (A.1) para evidenciar a dependência do equilíbrio com relação ao parâmetro r . Mudanças em r implicam em mudanças não apenas no valor do equilíbrio como no comportamento qualitativo assintótico da solução de equilíbrio. Em particular, pontos de equilíbrio podem surgir ou desaparecer à medida que o parâmetro varia. Além disso, pode haver uma mudança na estabilidade do equilíbrio e surgirem soluções periódicas. Estas mudanças qualitativas na dinâmica são chamadas bifurcações e os valores de r para os quais elas ocorrem são referidos como pontos de bifurcação. O comportamento das soluções de equilíbrio é frequentemente representado através do chamado diagrama de bifurcação. As soluções de equilíbrio (estáveis ou instáveis, ciclos ou soluções periódicas) são representadas em função do parâmetro de interesse. O seguinte teorema (Allen, 2007) apresenta o critério de estabilidade para o equilíbrio $N^*(r)$ da equação (A.1).

Teorema 1. *Seja φ' contínua em um intervalo aberto I contendo $N^*(r)$, onde $N^*(r)$ é uma solução de equilíbrio de $N_{t+1} = \varphi(N_t)$. Então $N^*(r)$ é localmente assintoticamente estável se $|\varphi'(N^*(r))| < 1$ e instável se $|\varphi'(N^*(r))| > 1$.*

Quando $\varphi'(N^*(r)) = \pm 1$, ocorre uma mudança na estabilidade da solução de equilíbrio e portanto, o valor correspondente do parâmetro é um ponto de bifurcação. Para a equação (A.1) pode ocorrer as seguintes bifurcações:

- a) *sela-nó*: quando dois pontos de equilíbrio, um estável e outro instável, aproximam-se à medida que r varia, coincidem no ponto de bifurcação e desaparecem.

- b) *forquilha*: neste tipo de bifurcação, a partir do ponto de bifurcação, surgem dois pontos de equilíbrio já existente, que troca de estabilidade no ponto de bifurcação. A bifurcação é chamada *forquilha supercrítica* se dois pontos de equilíbrio estáveis são separados por um instável e *forquilha subcrítica* se dois pontos de equilíbrio instáveis são separados por um estável. Quando um sistema exibe dois equilíbrio estáveis diz-se que apresenta bi-estabilidade.
- c) *transcrítica*: ocorre quando dois pontos de equilíbrio, um deles estável e o outro instável; trocam de estabilidade quando o parâmetro passa pelo ponto de bifurcação. As bifurcações descritas em (a – c) podem surgir quando $\varphi'(N^*(r)) = 1$.
- d) *flip* ou duplicação de período: quando um ponto de equilíbrio estável passa a ser instável e surge um ciclo de período 2 estável. Isto é, a solução oscila entre dois valores N_1^* e N_2^* que correspondem aos pontos fixos de $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Mudanças do parâmetro r podem causar a instabilidade do 2-ciclo e produzir novos estados de equilíbrio estáveis de φ^4 , φ^8 , etc. A bifurcação do equilíbrio N^* em um ciclo de período 2 é seguida de uma “cascata de bifurcações” de duplicação de período que levam a ciclos de período 4, 8, etc.

Consideremos, agora, um sistema de equações a diferenças não-lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} N_{t+1} = \varphi(N_t, P_t), \\ P_{t+1} = \psi(N_t, P_t) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

onde N_t e P_t representam a densidade de populações N e P no tempo t , respectivamente e φ e ψ são funções não-lineares que descrevem a dinâmica. A estabilidade do ponto de equilíbrio (N^*, P^*) do sistema (A.2) pode ser determinada de acordo com o teorema:

Teorema 2. (Allen, 2007): *Sejam $\varphi(N, P)$ e $\psi(N, P)$ funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em N e P em um intervalo aberto de \mathbb{R}^2 que contenha o ponto (N^*, P^*) . Então o ponto de equilíbrio (N^*, P^*) do sistema não-linear (A.2) é localmente assintoticamente estável se os autovalores da matriz jacobiana J associada ao ponto de equilíbrio satisfazem $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$. Isto ocorre se, e somente se,*

$$|Tr(J)| < 1 + det(J) < 2. \quad (\text{A.3})$$

Quando uma das condições de (A.3) é violada, são observadas mudanças na estabilidade do ponto de equilíbrio e uma das seguintes bifurcações pode surgir:

- a) *transcrítica*: dois pontos de equilíbrio trocam de estabilidade quando um parâmetro de interesse é tal que $Tr(J) = 1 + det(J)$.

- b) *flip*: um ponto de equilíbrio e um p -ciclo trocam de estabilidade quando um parâmetro de interesse é tal que $Tr(J) = -1 - det(J)$.
- c) *Neimark-Sacker*: quando um ponto de equilíbrio deixa de ser estável e surgem soluções periódicas (ciclos-limite), dizemos que é uma *bifurcação de Neimark-Sacker supercrítica*. Caso contrário, chamamos de *bifurcação de Neimark-Sacker subcrítica*. Este tipo de bifurcação ocorre quando um parâmetro de interesse assume um valor de forma que $det(J) = 1$. A bifurcação de Neimark-Sacker corresponde à bifurcação de Hopf em sistemas contínuos e, de forma análoga, ocorre quando um par de autovalores complexos atingem módulo maior do que 1 quando um parâmetro é variado.