

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Luiza de Paula Ghisleni

COGRAFOS INTEGRAIS

Santa Maria, RS  
2021

**Luiza de Paula Ghisleni**

**COGRAFOS INTEGRAIS**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

**Orientador: Prof. Dr. Fernando Colman Tura**

**Santa Maria, RS**

**2021**

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001

de Paula Ghisleni, Luiza  
Cografos Integrais / Luiza de Paula Ghisleni.- 2021.  
59 p.; 30 cm

Orientador: Fernando Colman Tura  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2021

1. Cografos 2. Espectro integral 3. Coárvore balanceada 4. Triângulo combinatório I. Colman Tura, Fernando II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

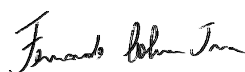
Declaro, LUIZA DE PAULA GHISLENI, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

**Luiza de Paula Ghisleni**

**COGRAFOS INTEGRAIS**


Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

**Aprovado em 16 de Setembro de 2021:**



---

**Fernando Colman Tura (UFSM)**  
(Presidenta/Orientador)



---

**João Roberto Lazzarin (UFSM)**



---

**Luiz Emílio Allem (UFRGS)**

**Santa Maria, RS**

**2021**

# Agradecimentos

Agradeço a minha família por todo apoio durante o mestrado. Vocês foram e são minha base, muito obrigada. Amo vocês!

Agradeço aos meus amigos, que estiveram comigo durante o mestrado, de longe ou de perto, presente ou distante. Por todos os momentos compartilhados na sala do PPGMat, sejam eles de estudos ou de truco e campeonato de truco nas junções. Na pandemia a distância, agradeço as videos chamadas e os áudios compridos. Todos vocês estão no meu coração!

Gostaria também de agradecer meu orientador Fernando Colman Tura. Foi um imenso prazer trabalhar com você no período que estive na UFSM. Tenho imensa gratidão pela forma como acreditou no meu potencial, e me ajudou e enxergá-lo até mesmo quando eu não mais o via. Extendo aqui, através da figura deste professor, meu agradecimento a todos os professores que fizeram parte da minha formação.

Agradeço aos professores João Roberto Lazzarin e Luiz Emílio Allem, por aceitarem ser minha banca de defesa, e pelas considerações que melhoraram a dinâmica e o aspecto do texto.

E por último, mas não menos importante, agradeço a meu amor Maxiny e nossa gatinha Phoebe, vocês são minhas doses de inspiração e amor diárias!

Também agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

*“Estudar não é um ato de consumir idéias, mas de criá-las e recriá-las .”*

*- Paulo Freire.*

# RESUMO

## COGRAFOS INTEGRAIS

AUTORA: Luiza de Paula Ghisleni

ORIENTADOR: Prof. Dr. Fernando Colman Tura

Dentre os temas de interesse da Teoria Espectral de Grafos, está a busca por cografos integrais. A partir disso, e motivados pelas características estruturais desses grafos, e por suas propriedades espectrais, propomos, na presente dissertação, mostrar que duas técnicas distintas (algorítmica e combinatória) podem ser efetivamente usadas para caracterizar, ou determinar classes de cografos integrais. Por via coárvores balanceadas, partimos de cografos associados a coárvores do tipo balanceadas, e com o auxílio do *Algoritmo de Diagonalização*( $T_{G_r}, x$ ) determinamos os autovalores do respectivo cografo, que são inteiros; e por via triângulos combinatórios, determinamos quais cografos, dos tipos associados ao triângulo *Determinante do Triângulo de Hosoya*  $\mathcal{H}$ , são integrais. Os principais resultados obtidos são o Teorema 3.4.4, do artigo de Allem e Tura (2020), o Teorema 4.3.8 e a Proposição 4.3.6, do artigo de Ching, Flórez e Mukhrjee (2020). Esses, nos levam a caracterizar que para  $w = 3t$  e  $w = 3t + 1$ , os cografos, respectivamente, com e sem laços, associados as matrizes de adjacência  $\mathcal{S}_w^* \text{ mod } 2$  e  $\mathcal{S}_w \text{ mod } 2$ , são integrais; como também, determinar que cografos com coárvores balanceadas  $T_{G_r}$  são integrais.

**Palavras-chaves:** Cografos. Espectro integral. Coárvore balanceada. Triângulo combinatório.

# ABSTRACT

## INTEGRAL COGRAPHS

AUTHOR: Luiza de Paula Ghisleni

ADVISOR: Prof. Dr. Fernando Colman Tura

The search for integral cographs is a topic of interest in Spectral Graph Theory. From this, and motivated by the structural characteristics of these graphs, and by their spectral properties, we propose, in this dissertation, to show that two distinct techniques (algorithmic and combinatorial) can be effectively used to characterize, or determine classes of integral cographs. Through balanced cotrees, we started from cographs associated with balanced cotrees, and with the aid of *Algorithm Diagonalize*( $T_{G_r}, x$ ) we determine the eigenvalues of the respective cograph, which are integers; and through combinatorial triangles, we determine which cographs are integrals, of the associates with the triangle *Determinant Hosoya Triangle*  $\mathcal{H}$ . The main results obtained are the Theorem 3.4.4, from the article by Allem and Tura (2020), the Theorem 4.3.8 and the Proposition 4.3.6, from the article by Ching, Flórez and Mukhrjee (2020). These lead us to characterize that for  $w = 3t$  and  $w = 3t + 1$ , the cographs, respectively, with and without loops, associated to the adjacency matrices  $\mathcal{S}_w^* \bmod 2$  and  $\mathcal{S}_w \bmod 2$ , are integrals; and cographs with balanced cotrees  $T_{G_r}$ , also they are integrals.

**Key-words:** Cographs. Integral cographs. Balanced cotrees. Combinatorial triangles.



# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	PRELIMINARES . . . . .	14
2.1	Conceitos Básicos . . . . .	14
2.2	Operações entre grafos . . . . .	15
2.3	Cografos . . . . .	17
2.4	Invariantes Espectrais . . . . .	18
3	COGRAFOS INTEGRAIS VIA COÁRVORES BALANCEADAS . . .	21
3.1	O algoritmo de Diagonalização . . . . .	21
3.2	Cografos com coárvores balanceadas . . . . .	25
3.3	Buscando os autovalores de $T_G(a_1, \dots, a_{r-1}, 0 0, \dots, 0, a_r)$ . . . . .	29
3.4	O Espectro de $T_G(a_1, \dots, a_{r-1}, 0 0, \dots, 0, a_r)$ . . . . .	36
3.5	Aplicação e Algoritmo de Determinação do $\text{spect}(G)$ . . . . .	39
4	COGRAFOS INTEGRAIS VIA TRIÂNGULOS COMBINATÓRIOS .	42
4.1	O Determinante do Triângulo de Hosoya . . . . .	42
4.2	Grafos obtidos de matrizes simétricas . . . . .	43
4.3	Cografos não regulares e integrais . . . . .	49
4.4	Aplicação . . . . .	56
5	CONCLUSÃO . . . . .	57
	REFERÊNCIAS . . . . .	58

# 1 Introdução

Minimizar os custos de uma rede de transportes públicos, ou analisar um efeito social, são exemplos de problemas que envolvem relação entre objetos. Ao abstrair matematicamente estes problemas, decodificamos as relações entre os pares de objetos - relações (em arestas) e objetos (em vértices) - para simplificar a análise e assim obter uma possível solução. Essa abstração origina estruturas matemáticas, chamadas *grafos*.

Um grafo  $G$  é uma estrutura  $G(V, E)$  que consiste de um conjunto  $V$  finito e não vazio cujo os elementos são chamados de vértices, e um conjunto  $E$  de subconjuntos de dois elementos de  $V$  denominados arestas. A Figura abaixo ilustra a representação de um grafo.

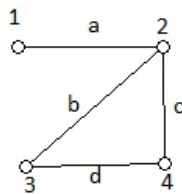


Figura 1 – Um grafo  $G$

Os grafos por sua vez são classificados em diferentes classes, de acordo com suas características estruturais. Um exemplo é a classe dos *grafos regulares* que são estruturas em que todo vértice de  $V$  admite o mesmo grau (número de arestas incidentes à um vértice). Outra classe de grafos são os bipartidos. Um grafo  $G$  é dito bipartido se o conjunto de vértices é particionado em dois conjuntos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que toda aresta conecta um vértice de  $U$  a um vértice de  $V$ .

Uma vez que a estrutura de um grafo está definida, a seguinte pergunta é razoável: ao decodificar problemas que envolvam relações entre objetos em grafos, estamos também decodificando as possíveis soluções desses problemas? Mais especificamente, se associamos ao grafo a matriz adjacência, que consiste em uma matriz simétrica de zeros e uns, e calculamos os autovalores do polinômio característico associado, podemos afirmar que esses autovalores descrevem propriedades do grafo? Caso afirmativo, estamos diante do objetivo central da Teoria Espectral de Grafos.

Historicamente, a conexão da estrutura de um grafo e seus autovalores vem da teoria quântica. O químico Hückel, desenvolveu uma teoria associando um grafo a uma estrutura molecular, onde autovalores associados a tal grafo correspondem aos níveis de energia dos elétrons.

Hückel decodificou o problema de determinação de energia de cada orbital, na determinação do espectro do grafo correspondente (ABREU, DEL-VECCHIO, TREVISAN, VINAGRE, 2014). No estudo da Teoria de Hückel, os grafos são de grau máximo 3, e são chamados de grafos moleculares. Posteriormente, essa teoria deu origem ao conceito de energia de grafos, introduzida por I. Gutman e que vem cada vez mais ganhando contribuições (GUTMAN, 1978).

Outro exemplo que relaciona a estrutura de um grafo e seus autovalores é dado pelos grafos bipartidos. Sabe-se, que um grafo é bipartido se e somente se o conjunto dos autovalores é simétrico em relação a origem. A figura abaixo, ilustra o grafo bipartido  $K_{4,6}$  cujo autovalores são  $\{-\sqrt{24}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{24}\}$ .

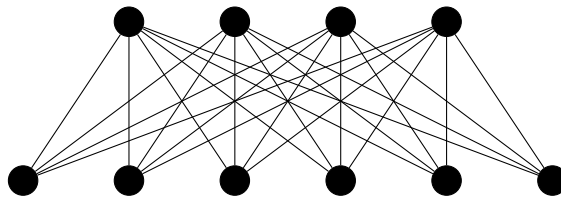


Figura 2 – Grafo bipartido  $K_{4,6}$

Um tema bastante estudado em Teoria Espectral de Grafos é a procura por grafos integrais. Quando a matriz de adjacência associada a um grafo possui o espectro inteiro, isto é, todos os seus autovalores são números inteiros, dizemos que o grafo é integral.

O interesse por grafos com essa propriedade foi iniciada por Harary e Schwenk, em 1974, pelo artigo *Which graphs have integral spectra?* (HARARY, SCHWENK, 1974). Desde então, vários pesquisadores começaram a investigar grafos integrais.

Vale ressaltar aqui, que caracterizar ou determinar grafos integrais não é uma tarefa fácil. Apesar de haver alguns resultados mais gerais, grande parte dos artigos publicados na literatura são de casos particulares. Um dado que confirma essa afirmação é o artigo de Balínska, Kupczyk, Simić e Zwi-erzýnski (2001), onde os autores apresentam, usando experimentos computacionais, que de 164.059.830.476 grafos conexos de 12 vértices, existem exatamente 325 grafos integrais.

Nessa dissertação estamos interessados no estudo de cografos integrais. Existem diversas formas de caracterizar um grafo desta classe. Uma maneira é verificando se o grafo pode ser gerado a partir de um vértice, tomando cada um dos outros vértices através das operações de união e join de grafos. Isso nos permite representar essa classe através de uma árvore única que chamamos de coárvore. Mais detalhes, serão dados no próximo capítulo.

Desta forma, no presente texto, objetivamos determinar, por duas vias diferentes

(coárvores balanceadas e triângulos combinatórios), famílias de cografos integrais. Para isso, iniciamos apresentando conceitos preliminares no Capítulo 2. Além disso, ressaltamos que calcular os autovalores da matriz de adjacência dos grafos pode ser uma tarefa bem árdua e demorada, posto que a ordem da matriz de adjacência depende da quantidade de vértices do grafo. Assim, quanto mais vértices o grafo possui, mais trabalhoso se torna o processo de calcular os autovalores associados, pois mais operações e mais tempo são necessários.

Afim de otimizar tempo no procedimento do cálculo dos autovalores de um cografo, abordamos no Capítulo 3 um algoritmo linear que localiza os autovalores no intervalo real. O algoritmo, para além de auxiliar no processo de determinação dos autovalores, também nos fornece resultados teóricos. No Capítulo 3, verificamos que os cografos com *coárvores balanceadas* são integrais. Partimos do algoritmo de diagonalização *Algoritmo de Diagonalização( $T_G, x$ )*, e segundo Allem e Tura (2020) construímos resultados que desencadeiam na obtenção do espectro de um cografo  $G$ , que em se tratando de coárvores balanceadas, é inteiro.

Já no Capítulo 4, fortemente baseados em Ching, Flórez e Mukhrjee (2020), construímos resultados que garantem a integralidade de cografos quando esses estiverem associados a matrizes simétricas construídas dos *Determinantes do Triângulo Hosoya*. Em cada triângulo combinatório  $\mathcal{H}$ , está embutida uma matriz simétrica  $\mathcal{S}_w^*$ . E a cada matriz simétrica  $\mathcal{S}_w^*$ , associamos uma matriz de adjacência  $\mathcal{S}_w^* \bmod 2$ , cujas entradas são 0 ou 1 dependendo da ordem ( $w = 3t; w = 3t + 1; w = 3t + 2, w \in \mathbf{Z}_{>0}$ ) da matriz  $\mathcal{S}_w^*$ . A matriz adjacência  $\mathcal{S}_w^* \bmod 2$  indica que o grafo  $\mathcal{G}_w^*$  está sendo associado a matriz simétrica  $\mathcal{S}_w^*$ . Os grafos do tipo  $\mathcal{G}_w^*$  são, por definição, cografos. Além disso, demonstramos ao longo do Capítulo 4 que dependendo da ordem  $w$ , esses cografos são também integrais.

Assim, de modo geral, ao final concluímos determinando famílias de cografos integrais, por duas vias diferentes: coárvores balanceadas e triângulos combinatórios. Pela via de *coárvores balanceadas*, partimos de cografos que possuem coárvores balanceadas  $T_{G_r} = (a_1, a_2, \dots, 0 | 0, \dots, a_r)$ , aplicamos recursivamente o algoritmo de diagonalização *Algoritmo de Diagonalização( $T_G, x$ )*, para então exibirmos o espectro do cografo, que é inteiro.

Já pela via de *triângulos combinatórios*, partimos da matriz simétrica  $\mathcal{S}_w^*$  embutida no triângulo combinatório *Determinante do Triângulo de Hosoya*  $\mathcal{H}$ , cujas entradas são termos consecutivos da sequência de Fibonacci, e associamos a essa matriz simétrica, uma matriz adjacência  $\mathcal{S}_w^* \bmod 2$ . A matriz  $\mathcal{S}_w^* \bmod 2$  está associada a três diferentes famílias de cografos, conforme  $w = 3t$ , ou  $w = 3t + 1$  ou  $w = 3t + 2$ . Dessas três famílias, sabendo a forma dos polinômios característicos dos três diferentes tipos de matrizes, determinamos quais são composta por cografos integrais. Além disso, quando consideramos  $\mathcal{G}_w$  cografos sem laços, também determinamos para quais  $w$  os cografos são integrais. A saber, para

$\mathcal{G}_w^*$ , é quando  $w = 3t$ , e para  $\mathcal{G}_w$ , é quando  $w = 3t + 1$ .

## 2 Preliminares

No capítulo que segue, apresentamos algumas definições básicas de grafos assim como a classe de grafos escolhida para esse trabalho. Finalizamos o capítulo apresentando alguns invariantes espectrais da teoria espectral de grafos. Para mais detalhes, sugerimos ao leitor as referências (ABREU, DEL-VECCHIO, TREVISAN, VINAGRE, 2014), (ABRISHAMI, 2019), (COELHO, 2005), (FRITSCHER, 2011), (JACOBS, TREVISAN, TURA, 2021), (SOUZA, 2016) e (TOLEDO, 2016).

### 2.1 Conceitos Básicos

Grafos são estruturas matemáticas, originárias de problemas envolvendo um conjunto de elementos e as relações entre eles. Os elementos são denominados vértices, e as relações arestas. Sua representação gráfica é como na Figura 3.

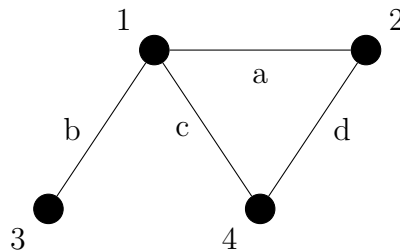


Figura 3 – Representação de um grafo

Observe que, em prol da precisão, denotamos cada vértice e aresta do grafo. No caso do exemplo da Figura 3, temos  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{a, b, c, d\}$ . Ou seja, temos os vértices 1, 2, 3, 4, e as arestas  $a, b, c, d$ . Como as arestas conectam pares de vértices, é possível denotar  $a, b, c$  e  $d$ , por exemplo, em função de 1, 2, 3 e 4 da seguinte forma  $a = \{1, 2\}, b = \{1, 3\}, c = \{1, 4\}$  e  $d = \{2, 4\}$ . Assim, cada entrada do par ordenado vai representar um vértice do grafo, e a aresta representada pelo par ordenado estará conectando estes dois vértices. Quando dois vértices estão conectados por uma aresta são chamados de *vértices adjacentes*.

É possível representar um grafo também como na Figura 4. Nesse caso, existe orientação nas arestas, além de que uma delas (aresta  $3 = \{d, d\}$ ) incide sobre o mesmo vértice (vértice  $d$ ). Quando isso ocorre dizemos que o grafo é *orientado* e possui *laço*. Observe ainda, como o grafo da Figura 4 não conecta todos os seus vértices, ou seja,  $a$  é um *vértice isolado*, sem adjacência com qualquer outro vértice do grafo. Um grafo com tal característica é chamado *desconexo*.

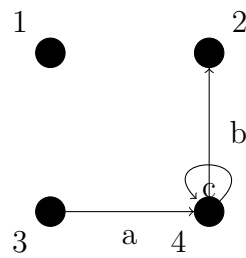


Figura 4 – Representação de um grafo

Além das características já observadas na Figura 3 e Figura 4, um grafo também pode possuir mais de uma aresta conectando dois mesmos vértices, ou aresta conectando um vértice nele mesmo. Quando isso ocorre o grafo possui arestas *múltiplas* ou *laços*.

**Definição 2.1.1.** Denominamos **grafo** a estrutura  $G = G(V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto finito e não vazio, cujos elementos são denominados **vértices**, e  $E$  um conjunto de pares ordenados de elementos pertencentes à subconjuntos de  $V$ , cujos elementos são denominados **arestas**.

Quando  $u, v \in V$  e  $e = \{u, v\} \in E$  os vértices  $u$  e  $v$  são ditos adjacentes, pois a aresta  $e$  incide em  $u$  e  $v$ . O número de arestas que incide em um vértice  $v$  é denominado grau do vértice  $v$  e denotado por  $d(v)$ . Um grafo  $G$  que possua apenas um vértice e  $E = \emptyset$  é dito grafo trivial. O número de vértices e arestas de um grafo  $G = (V, E)$  são representados por  $|V|$  e  $|E|$ , respectivamente.

**Definição 2.1.2.** Um grafo é dito *r-regular* se todos os seus vértices têm o mesmo grau de valor  $r$ .

Um grafo  $G = K_n$ , com  $n$  vértices, é dito completo se quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. Um grafo  $G = (V, E) = K_n$  é dito  $(n - 1)$ -partido completo, se existe uma partição de seus vértices em  $(n - 1)$  subconjuntos não vazios e disjuntos dois a dois de modo que os vértices de cada subconjunto não sejam adjacentes. Se  $k = 2$ , dizemos que  $G$  é bipartido.

Dizemos que um grafo  $G = (V, E)$  é bipartido completo, se  $G$  é bipartido ( $V = V_1 \cup V_2$ ) e cada vértice do conjunto  $V_1$  for adjacente a todo vértice de  $V_2$ . Supondo que  $|V_1| = r$  e  $|V_2| = s$ , denotamos por  $K_{r,s}$  o grafo bipartido completo.

## 2.2 Operações entre grafos

Dados dois grafos é possível realizar operações entre eles, e obter um terceiro grafo. Das operações existentes, *união* e *join* são as que serão abordadas ao longo do texto. E

ainda, dado um grafo  $G$  é possível extrair um novo grafo  $\overline{G}$ , chamado *complementar* de  $G$ , e seu comportamento ante estas operações.

**Definição 2.2.1.** *Sejam  $G_1 = G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2 = G_2(V_2, E_2)$ . O grafo **união** entre  $G_1$  e  $G_2$ , denotado por  $G_1 \cup G_2$ , é aquele cujo o conjunto de vértices e arestas são, respectivamente,  $V_1 \cup V_2$  e  $E_1 \cup E_2$ , tal que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .*

A Figura 5, representa a união entre  $K_4$  e o grafo bipartido completo  $K_{2,3}$ .

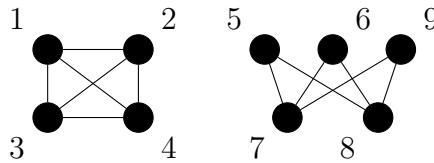


Figura 5 – União entre dois grafos

**Definição 2.2.2.** *Sejam  $G_1 = G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2 = G_2(V_2, E_2)$ . O grafo **join** entre  $G_1$  e  $G_2$ , denotado por  $G_1 \otimes G_2$ , é aquele cujo o conjunto de vértices é  $V_1 \cup V_2$ , e o conjunto de arestas é a união das arestas já existentes em  $G_1$  e  $G_2$ , mais as arestas obtidas da conexão entre cada vértice de  $G_1$  à todos os vértices de  $G_2$ .*

A Figura 6, mostra o join entre os grafos  $K_4$  e bipartido completo  $K_{2,3}$ .

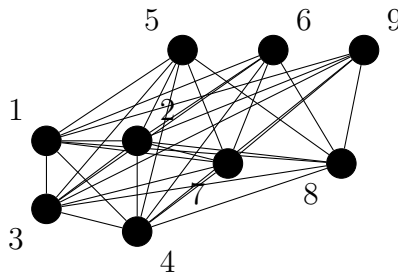


Figura 6 – Join entre dois grafos

**Definição 2.2.3.** *Seja  $G = (V, E)$ . O grafo **complementar**  $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$  é aquele tal que  $V = \overline{V}$  e  $E \neq \overline{E}$ , ou seja,  $\{v_i, v_j\} \in \overline{E} \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \notin E$ .*

A Figura 7, mostra um grafo bipartido completo  $K_{2,2}$  e seu complementar  $\overline{K}_{2,2}$ .

Observamos que essas operações estão relacionadas, pois dados dois grafos  $G$  e  $H$ ,  $\overline{G \cup H} = \overline{G} \otimes \overline{H}$  e  $\overline{G \otimes H} = \overline{G} \cup \overline{H}$ .



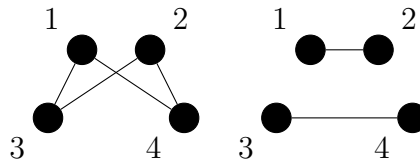


Figura 7 – Um grafo e seu complementar

## 2.3 Cografos

As operações de união e join definidas na seção anterior induzem um tipo de grafo, deno minado *cografo*, conforme a definição a seguir.

**Definição 2.3.1.** *Um grafo  $G = (V, E)$  é um **cografo** se ele pode ser gerado recursivamente através de um único vértice e através de operações de união e join. Em outras palavras:*

- $K_1$  é um cografo;
- Se  $G_1$  e  $G_2$  são cografos, então  $G_1 \cup G_2$  é um cografo;
- Se  $G_1$  e  $G_2$  são cografos, então  $G_1 \otimes G_2$  é um cografo.

Uma definição equivalente pode ser feita em relação às operações de união e complementar. Nesse caso, o que muda em relação a definição acima é que no lugar da operação join aparecerá a operação complementar.

Um cografo pode ser representado através de uma árvore, denominada coárvore. A importância dessa representação é devido ao algoritmo de localização de autovalores dessa classe de grafos ser operado diretamente nos vértices dessa árvore, o qual será abordado no próximo capítulo.

Dado um cografo  $G$ , a sua coárvore  $T_G$  é uma árvore enraizada, isto é, um grafo conexo (existe caminho entre quaisquer dois de seus vértices) e acíclico (não possui ciclos), com vértices interiores  $w$  do tipo  $\cup$  (correspondente a união) ou do tipo  $\otimes$  (correspondente ao join). As folhas representam os vértices de  $G$ . A profundidade da coárvore é o número de arestas que estão no maior caminho entre a raiz e as folhas, e os níveis de profundidade são definidos a partir da raiz no sentido das folhas, onde a cada alternância entre as operações  $\otimes$  e  $\cup$  temos um novo nível constituído.

Existem outras maneiras de construir essa representação em árvore, mas dessa forma como definimos, colocando  $\otimes$  na raiz da coárvore,  $\cup$  nos vértices interiores de profundidade par e  $\otimes$  nos vértices interiores de profundidade ímpar, estamos garantindo, a menos de permutações entre as folhas de um vértice interno, que a representação minimal da coárvore é única.

A figura 8 ilustra um cografo  $G$  e a sua coárvore  $T_G$ .

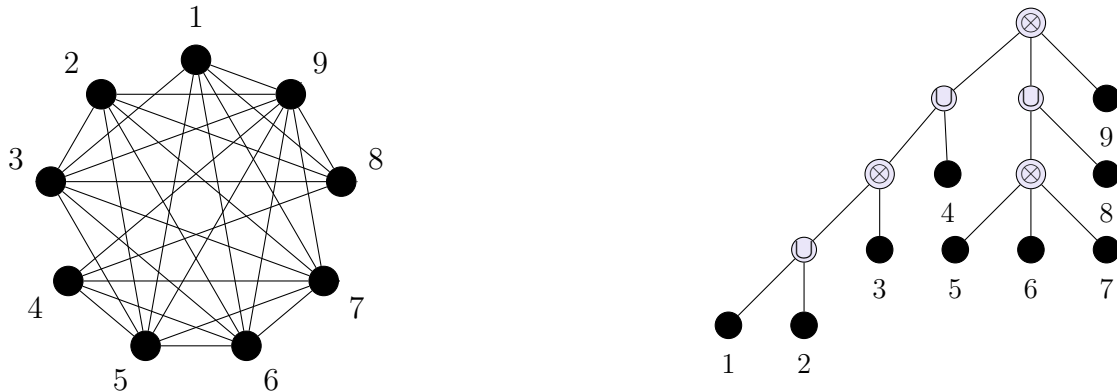


Figura 8 – O cografo  $G = (((((v_1 \cup v_2) \otimes v_3) \cup v_4) \otimes (((v_5 \otimes v_6) \otimes v_7) \cup v_8)) \otimes v_9$ , e sua coárvore.

Dado  $G = (V, E)$ , para  $v \in V$ ,  $N(v)$  denota a *vizinhança aberta* de  $v$ , isto é,  $\{w | \{v, w\} \in E\}$ . A *vizinhança fechada* de  $v$  é  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . Dois vértices  $u$  e  $v$  são ditos *duplicados* se  $N(u) = N(v)$  e *coduplicados* se  $N[u] = N[v]$ . De fato, qualquer coleção de vértices coduplicados (respectivamente duplicados) pode ser identificada na coárvore, isto é, vértices com os mesmos vizinhos e adjacentes (respectivamente não adjacentes), tem em comum o mesmo pai do tipo  $\otimes$  (respectivamente  $\cup$ ).

## 2.4 Invariantes Espectrais

Como as relações entre elementos de um conjunto  $V$  podem ou não existir, isso faz com que grafos difiram uns dos outros, entre outros fatores, pela quantidade de arestas que conectam seus vértices. Ou seja, propriedades estruturais diferentes podem ser observadas em um grafo  $G$  quando existem, ou não, arestas entre seus vértices. E a forma pela qual manipulamos grafos para obtermos estas propriedades, é através das matrizes.

Podemos definir as entradas de uma matriz de um grafo de diferentes formas, mas no presente texto estaremos considerando a adjacência entre seus vértices, do seguinte modo, se existe aresta entre dois vértices  $v, s \in V$ , então os elementos  $a_{v,s}$  e  $a_{s,v}$  da matriz são 1, no caso de não existir, estes elementos são 0.

**Definição 2.4.1.** *Seja o grafo  $G = G(V, E)$ , com  $|V|=n$ . A **matriz de adjacência** do grafo  $G$ , denotada por  $A(G)$ , é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , tal que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ são adjacentes;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, a matriz  $A(G)$  é simétrica e com diagonal principal nula:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Definição 2.4.2.** *Seja  $A(G)$  a matriz de adjacência de um grafo  $G$ . Denominamos de **polinômio característico** de  $A(G)$  o polinômio  $\det(xI - A(G))$ . E denotamos  $P_G(x) = \det(xI - A(G))$ .*

Observe que a matriz de adjacência  $A(G)$  é construída a partir da numeração dos vértices do grafo, portanto, tomando numerações diferentes associamos matrizes  $A(G)$  diferentes a um mesmo grafo  $G$ . Isso pode despertar o questionamento: todas as diferentes representações de  $A(G)$  possuem os mesmos autovalores associados? A resposta é positiva, pois, pela Teoria Geral Espectral, os chamados autovalores associados a  $A(G)$  e suas possíveis repetições são invariantes. A esse número damos o nome de **multiplicidade do autovalor**  $\lambda_i$ , e denotamos por  $m(\lambda_i), \forall i \in I = \{1, 2, \dots, s\}$ , onde  $s$  é o número de autovalores distintos que a matriz de adjacência possui.

**Definição 2.4.3.** *Sejam  $A(G)$  a matriz de adjacência do grafo  $G$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  os autovalores distintos da matriz  $A(G)$ , e  $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_s)$  as multiplicidades destes autovalores. Denominamos **espectro de um grafo** a matriz  $2 \times s$ , onde a primeira linha é composta por  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , e a segunda linha composta por  $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_s)$ .*

Denotamos o espectro de um grafo  $G$  por

$$\text{spect}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

Como exemplo, considere o grafo completo  $K_3$  da Figura 9.

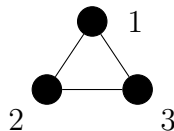


Figura 9 – Grafo completo  $K_3$

E, a matriz de adjacência  $A(G)$  associada ao  $K_3$  é

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando os autovalores, a partir do polinômio característico  $P_G(x) = x^3 - 3x - 2$ , obtemos  $-1, -1$  e  $2$ . Portanto, o espectro do grafo  $K_3$  é apresentado da seguinte forma:

$$\text{spect}(G) = \left( \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right).$$

## 3 Cografos integrais via coárvores balanceadas

Neste capítulo, embasados nos conceitos cografo e invariantes espectrais definidos anteriormente, exibimos famílias infinitas de cografos regulares e integrais, através de uma ferramenta algorítmica que auxilia na obtenção dos autovalores da classe de grafos em questão.

### 3.1 O algoritmo de Diagonalização

**Definição 3.1.1.** *Seja  $A$  uma matriz real simétrica. A terna  $(p, j, s)$  de inteiros não negativos é a **inércia da matriz  $A$**  quando  $p$  é o número de autovalores positivos de  $A$ ,  $j$  é o número de autovalores negativos de  $A$  e  $s$  é a multiplicidade do autovalor 0 de  $A$ .*

Os grafos integrais começaram a ser investigados em 1974, em consequência do artigo publicado por Harary e Schwenk, no qual a interrogação *Quais grafos têm espectro integrais?* (FRITSCHER, 2011) foi lançada. Desde então, a integralidade de muitos grafos foi analisada, inclusive a integralidade de cografos.

Nosso principal objeto de estudo são os cografos integrais. Para isso, iniciemos compreendendo que calcular os autovalores de grafos pode ser uma tarefa bem árdua e demorada, uma vez que a ordem da matriz de adjacência depende da quantidade de vértices do grafo. Quanto mais vértices o grafo possui, mais difícil é concluir quais autovalores estão associados ao grafo, pois mais operações e mais tempo são necessários para o cálculo do determinante desta matriz.

Em matrizes diagonais, o cálculo do determinante resume-se em multiplicar as entradas da diagonal, diferente de matrizes não diagonais na qual o cálculo do determinante envolve mais operações e mais elementos. Por isso, abordaremos na próxima seção a teorização de um algoritmo capaz de diagonalizar uma matriz sem perder suas propriedades espectrais.

**Definição 3.1.2.** *Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes reais quadradas de mesma ordem  $n \times n$ . Dizemos que  $A$  e  $B$  são **congruentes** quando existe uma matriz quadrada de mesma ordem  $P$  invertível tal que  $A = P^T B P$ . Quando  $A$  e  $B$  são congruentes denotamos  $A \cong B$ .*

Um importante resultado que será usado na sequência do trabalho é *Lei da Inércia de Sylvester*, cuja demonstração pode ser encontrada no artigo de Bradley (1975).

**Proposição 3.1.3.** *Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes reais simétricas de ordem  $n \times n$ .  $A \cong B$  se e somente se a inércia de  $A$  e  $B$  é a mesma.*

Seja  $A$  uma matriz de adjacência de um cografo  $G$  e  $x$  um número real, o Algoritmo de Diagonalização que iremos apresentar a seguir, determina uma matriz diagonal  $D$  que é congruente a  $A + xI$ . Dessa forma, usando a proposição 3.1.3 será possível determinarmos o número de autovalores de  $G$  que são maiores, menores ou iguais a  $x$ .

Na prática o algoritmo é executado diretamente nas folhas da coárvore  $T_G$ , e assim não é necessário trabalharmos na matriz de adjacência de  $G$ . Assim iniciamos com todas as folhas de  $T_G$  com valor igual a  $-x$ . A execução é nas folhas de  $T_G$ , de baixo para cima. A cada passo, um par de vértices  $\{v_k, v_l\}$  é operado, de forma que  $v_k$  recebe uma atribuição permanente  $d_k$ , e então é removido de  $T_G$ , enquanto que  $v_l$  recebe uma atribuição  $d_l$  que será usada na iteração seguinte.

O Algoritmo de Diagonalização tem dois casos gerais, dependendo se  $\{v_k, v_l\}$  são duplicados (vértice não adjacentes denotados por  $\cup$ ) ou se eles são coduplicados (vértice adjacentes denotados por  $\otimes$ ). Cada um desses casos possui três subcasos, conforme Figura 10.

INPUT: cotree  $T_G$ , scalar

OUTPUT: diagonal matrix  $D = [d_1, d_2, \dots, d_n]$  congruent to  $A(G) + xI$

Algorithm Diagonalize ( $T_G, x$ )

initialize  $d_i := x$ , for  $1 \leq i \leq n$

while  $T_G$  has  $\geq 2$  leaves

select a pair  $(v_k, v_l)$  (co)duplicate of maximum depth with parent  $w$

$\alpha \leftarrow d_k$   $\beta \leftarrow d_l$

if  $w = \otimes$

if  $\alpha + \beta \neq 2$  //subcase 1a

$d_l \leftarrow \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2}$ ;  $d_k \leftarrow \alpha + \beta - 2$ ;  $T_G = T_G - v_k$

else if  $\beta = 1$  //subcase 1b

$d_l \leftarrow 1$   $d_k \leftarrow 0$ ;  $T_G = T_G - v_k$

else //subcase 1c

$d_l \leftarrow 1$   $d_k \leftarrow -(1 - \beta)^2$ ;  $T_G = T_G - v_k$ ;  $T_G = T_G - v_l$

else if  $w = \cup$

if  $\alpha + \beta \neq 0$  //subcase 2a

$d_l \leftarrow \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ;  $d_k \leftarrow \alpha + \beta$ ;  $T_G = T_G - v_k$

else if  $\beta = 0$  //subcase 2b

$d_l \leftarrow 0$ ;  $d_k \leftarrow 0$ ;  $T_G = T_G - v_k$

else //subcase 2c

$d_l \leftarrow \beta$ ;  $v_k \leftarrow -\beta$ ;  $T_G = T_G - v_k$ ;  $T_G = T_G - v_l$

end loop

Figura 10 – Algoritmo de Diagonalização.

**Proposição 3.1.4.** *Sejam  $T_G$  e  $A$ , respectivamente, a cóarvore e a matriz de adjacência associadas ao cografo  $G$ , e  $x$  um escalar. O Algoritmo de Diagonalização calcula uma matriz diagonal  $D$  congruente a  $A + xI$ .*

Combinando a Proposição 3.1.4 com a Proposição 3.1.3, justifica-se o seguinte resultado.

**Teorema 3.1.5.** *Seja  $D$  a matriz diagonal obtida da Diagonalização de  $(T_G, -x)$ , tais que o número de entradas positivas é  $a_+$ , o número de entradas negativas é  $a_-$ , e o número de zeros é  $a_0$ . Então,*

1. o número de autovalores de  $G$  maiores que  $x$  é igual a  $a_+$ ;
2. o número de autovalores de  $G$  menores que  $x$  é igual a  $a_-$ ;
3. a multiplicidade de  $x$  como autovalor de  $G$  é igual a  $a_0$ .

A seguir, apresentamos um exemplo da execução do Algoritmo de Diagonalização em um cografo  $G$  cuja cóarvore associada é  $T_G$ .

**Exemplo 3.1.6.** *Considere o cografo  $G = (K_2 \cup K_2) \otimes (K_2 \cup K_2)$  cuja cóarvore  $T_G$  é dada pela figura 11. Iremos aplicar o algoritmo para  $T_G$  com  $x = -1$ . Assim, iniciamos com todas as folhas tendo o valor 1.*

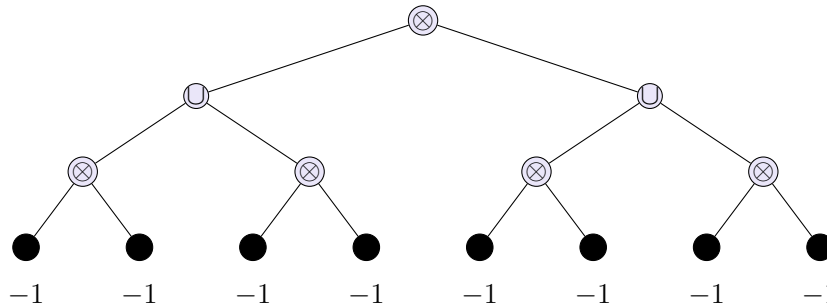


Figura 11 – Inicialização com  $x = -1$ .

Como todas as folhas de  $T_G$  estão no mesmo nível, podemos tomar qualquer par de vértices coduplicados, uma vez que podemos fazer isso simultaneamente. O primeiro passo do algoritmo é executar o **subcaso 1a** já que  $\alpha + \beta = -1 + -1 \neq 2$ . Portanto, cada vértice removido recebe a atribuição  $v_k \leftarrow -4$ , e cada vértice pendente  $v_l \leftarrow 0$ , como ilustra a Figura 12. Após isso, cada vértice pendente sobe para um nível superior como é ilustrado na Figura 13.

O passo seguinte é executarmos o **subcaso 2b**, uma vez que cada par de vértices duplicados, possui valores  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha + \beta = 0$ .

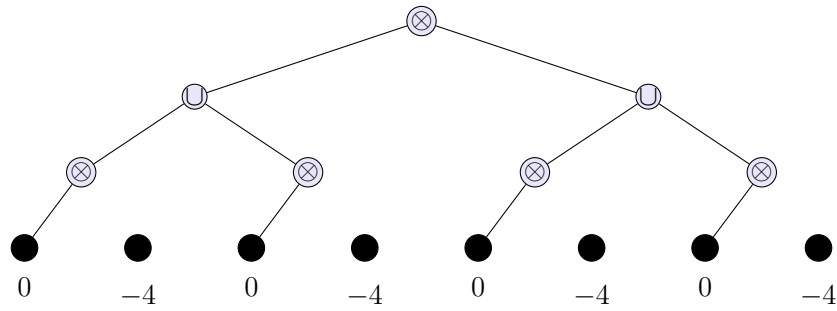


Figura 12 – Iterações no nível 3.

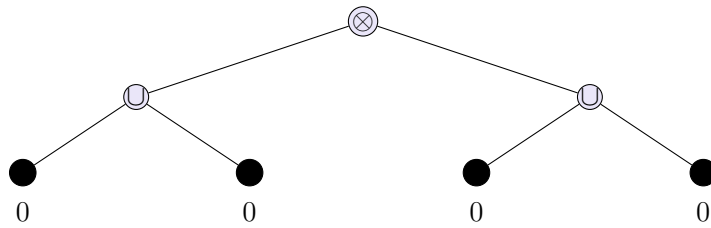


Figura 13 – Iterações no nível 2.

Assim os vértices removidos recebem a atribuição  $v_k = 0$ , enquanto que os vértices pendentes  $v_l = 0$ , como ilustra a Figura 14. Após isso, os vértices pendentes sobem de nível, como ilustra a Figura 15.

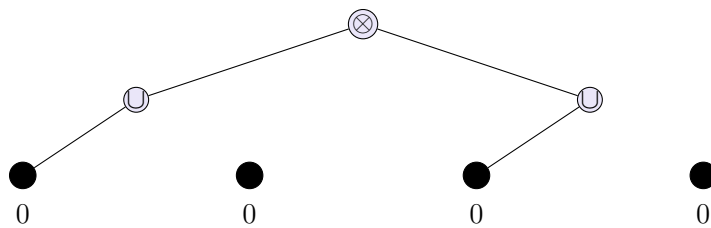


Figura 14 – Iterações no nível 2.

Finalmente, o último passo do algoritmo é executar o **subcaso 1a** para os vértices coduplicados da Figura 15.

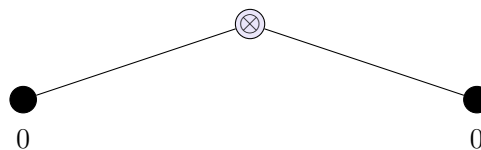


Figura 15 – Iteração no nível 1.



Assim, o vértice removido recebe a atribuição  $v_k = -2$ , enquanto que o vértice pendente  $v_l = \frac{1}{2}$ , como ilustra a Figura 16.

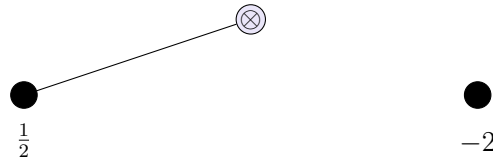


Figura 16 – Iterações no nível 1.

E assim, o algoritmo nos fornece a matriz diagonal

$$D = [-4, -4, -4, -4, 0, 0, \frac{1}{2}, -2]$$

congruente a  $A(G) - 1I$ , onde o número de entradas positivas, negativas e nulas são respectivamente,  $a_+ = 1$ ,  $a_- = 5$  e  $a_0 = 2$ . Portanto, pelo Teorema 3.1.5, o cografo  $G$  possui 1 autovalor maior que 1, 5 autovalores menores que 1, e 2 autovalores iguais a 1.

## 3.2 Cografos com coárvores balanceadas

Cografos podem ser denotados em termos do número de vértices internos do tipo  $w = \otimes$  ou  $w = \cup$ , e do número de folhas em cada nível de profundidade da coárvore. Quando a quantidade de vértices sucessores é a mesma entre vértices internos de mesmo nível, e as folhas ficam restritas ao último nível de profundidade, temos que a coárvore é uma *coárvore balanceada*, e denotamos por  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 0|0, 0, \dots, 0, a_r)^1$ , onde  $a_i$  são inteiros positivos para  $i = 1, 2, \dots, r$ , tais que  $a_1$  é o número de vértices internos do nível 1,  $a_2$  é o número de vértices internos no nível 2, e assim sucessivamente. A profundidade da coárvore é  $r$ , e tem  $\otimes$  como vértice raiz. Sendo assim, o número de vértices do cografo é igual a  $a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_r$ . Mais detalhes sobre coárvores balanceadas, consultar o artigo de Allem e Tura (2020).

O cografo  $G = (K_2 \cup K_2) \otimes (K_2 \cup K_2)$  do Exemplo 3.1.6 tem coárvore balanceada, pois possui 2 vértices internos  $w = \cup$  no nível 1 de profundidade, a partir dos quais originam outros 2 vértices internos  $w = \otimes$  no nível 2 de profundidade, e por fim, possui 2 folhas somente no nível 3 de profundidade. Portanto, a coárvore, com profundidade  $r = 3$ , deste cografo, é representada por  $T_G(2, 2, 0|0, 0, 2)$ .

Cografos que possuem coárvores balanceadas nos fornecem informações espectrais interessantes conforme iremos apresentar na sequência. O primeiro resultado é o Teorema

<sup>1</sup> Do lado esquerdo da barra, as entradas  $a_i$  correspondem aos números de vértices internos em cada nível da coárvore, e do lado direito da barra, as entradas  $a_i$  correspondem ao número de folhas (vértices) em cada nível da coárvore. Como só há folhas no último nível, os zeros do lado esquerdo da barra correspondem a falta de vértices internos no último nível, e do lado direito da barra correspondem a falta de folhas nos níveis anteriores ao último.

3.2.4 que trata da multiplicidade dos autovalores  $-1$  e  $0$ . Para a demonstração deste Teorema utilizamos o Lema 3.2.2 e o Lema 3.2.3, cujas demonstrações são baseadas no seguinte lema técnico.

**Lema 3.2.1.** *Se  $0 \leq \alpha, \beta < 1$  e  $\alpha + \beta \neq 0$ , então  $0 < \frac{(\alpha\beta-1)}{(\alpha+\beta-2)} < 1$  e  $0 \leq \frac{(\alpha\beta)}{(\alpha+\beta)} < 1$ .*

*Demonstração.* Note, temos pelas hipóteses, que

$$\alpha - 1 < 0 \quad e \quad \beta - 1 < 0 \quad (3.1)$$

$$\alpha\beta - 1 < 0 \quad e \quad \alpha + \beta - 2 < 0 \quad (3.2)$$

$$0 \leq \alpha\beta \quad e \quad 0 < \alpha + \beta \quad (3.3)$$

Considerando (3.2), temos que  $0 < \frac{(\alpha\beta-1)}{(\alpha+\beta-2)}$ , e  $(\alpha\beta-1) - (\alpha+\beta-2)$  deve ser positivo, para que ocorra  $\frac{(\alpha\beta-1)}{(\alpha+\beta-2)} < 1$ . A partir de (3.1) temos  $(\alpha\beta-1) - (\alpha+\beta-2) = (\alpha-1)(\beta-1) > 0$ , portanto, segue o primeiro resultado. Agora considerando (3.3), temos  $0 \leq \frac{(\alpha\beta)}{(\alpha+\beta)}$ , e precisamos que  $\alpha\beta - (\alpha + \beta) \leq 0$ , para que ocorra  $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < 1$ . Novamente, é fato que por (3.1),  $\alpha\beta - (\alpha + \beta) = (\alpha - 1)(\beta - 1) - 1 \leq 0$ , portanto segue o segundo resultado.  $\square$

**Lema 3.2.2.** *Se  $\{v_k, v_l\}$  é um par de vértices duplicados processados pelo Algoritmo de Diagonalização, com valores  $0 < d_k, d_l \leq 1$ , então  $d_k$  torna-se permanentemente positivo, e  $d_l$  assume um valor em  $(0, 1)$ .*

*Demonstração.* Uma vez que temos um par de vértices duplicados com valores  $0 < d_k, d_l \leq 1$ , o Algoritmo de Diagonalização executa o **Subcaso 2a**, pois  $\alpha = d_k > 0$  e  $\beta = d_l > 0$ , o que implica  $\alpha + \beta > 0$ .

Da execução do **Subcaso 2a** obtemos  $d_l = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$  e vértice permanente  $d_k = \alpha + \beta$ . Assim,  $d_k$  torna-se permanentemente positivo, e  $d_l > 0$ . Restando apenas a verificação de  $d_l < 1$ . Para isso analisamos quatro casos:

1. se  $\alpha = \beta = 1$ , então  $d_l = \frac{1}{2} < 1$ ;
2. se  $\alpha = 1$  e  $0 < \beta < 1$ , então  $d_l = \frac{\beta}{\beta+1} < 1$ ;
3. se  $\beta = 1$  e  $0 < \alpha < 1$ , então  $d_l = \frac{\alpha}{\alpha+1} < 1$ ;
4. se  $0 < \alpha, \beta < 1$ , então pelo **Lema 3.2.1**,  $d_l < 1$ .

Logo, segue que  $d_l$  assume um valor em  $(0, 1)$ .  $\square$

**Lema 3.2.3.** *Se  $\{v_k, v_l\}$  é um par de vértices coduplicados processados pelo Algoritmo de Diagonalização, com valores  $0 \leq d_k, d_l < 1$ , então  $d_k$  torna-se permanentemente negativo, e  $d_l$  assume um valor em  $(0, 1)$ .*

*Demonstração.* Uma vez que temos um par de vértices coduplicados com valores  $0 \leq d_k, d_l < 1$ , o Algoritmo de Diagonalização executa o **Subcaso 1a**, pois  $\alpha = d_k < 1$  e  $\beta = d_l < 1$ , o que implica  $\alpha + \beta < 2$ .

Da execução do **Subcaso 1a** obtemos  $d_l = \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2}$  e vértice permanente  $d_k = \alpha + \beta - 2$ . Assim, pelo **Lema 3.2.1**,  $d_k$  torna-se permanentemente negativo e  $d_l \in (0, 1)$ .  $\square$

Denotaremos por  $m(\lambda, G)$  a multiplicidade de um autovalor  $\lambda$  de  $G$ .

**Teorema 3.2.4.** *Seja  $G$  um cografo com coárvore balanceada*

$$T_G(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 0|0, 0, \dots, 0, a_r)$$

de profundidade  $r$  e ordem  $n = a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_r$ .

1. Se  $r$  é par, então  $0$  é um autovalor de  $G$  tal que  $m(0, G) = a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$ .
2. Se  $r$  é ímpar, então  $-1$  é um autovalor de  $G$  tal que  $m(-1, G) = a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$ .

*Demonstração.* Seja a coárvore balanceada  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 0|0, 0, \dots, 0, a_r)$  de profundidade  $r$ :

1. se  $r$  é par, os vértices folhas são todos filhos de vértices duplicados ( $\cup$ ). Nesse caso, tomando  $x = 0$  e processando o Algoritmo de Diagonalização ( $T_G, -x$ ), através do **Subcaso 2b**, obtemos ao final das iterações entre os vértices folhas,  $a_r - 1$  zeros permanentes em cada um dos  $a_1 a_2 \dots a_{r-1}$  vértices duplicados. Ou seja,  $a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$  zeros permanentes ao final das iterações realizadas no nível  $r$ .

Os  $a_1 a_2 \dots a_{r-1}$  vértices pendentes assumem valor diagonal  $0$ , e sobem de nível tornando-se filhos de vértices coduplicados ( $\otimes$ ). Então, pelo **Lema 3.2.3**, obtemos  $a_1 a_2 \dots (a_{r-1} - 1)$  valores negativos permanentes e  $a_1 a_2 \dots a_{r-2}$  vértices pendentes assumindo valor diagonal em  $(0, 1)$ .

Os  $a_1 a_2 \dots a_{r-2}$  vértices pendentes sobem de nível tornando-se filhos de vértices duplicados. Então, pelo **Lema 3.2.2**, obtemos  $a_1 a_2 \dots (a_{r-2} - 1)$  valores positivos permanentes e  $a_1 a_2 \dots a_{r-3}$  vértices pendentes assumindo valor diagonal em  $(0, 1)$ .

Na sequência, os vértices pendentes tornam-se filhos de vértices coduplicados, como ocorreu nas iterações do nível  $r - 1$ . Então, pelo **Lema 3.2.3**, obtemos valores negativos como permanentes e vértices pendentes assumindo valor diagonal em  $(0, 1)$ . E novamente, os vértices pendentes que sobem um nível tornam-se filhos de vértices duplicados como no nível  $r - 2$ .

Esta sequência de utilização dos **Lema 3.2.2** e **Lema 3.2.3** ocorre, consecutivamente, em níveis par e ímpar, de modo que, obtemos valores permanentes positivos

e negativos, até o vértice da raiz. Portanto, não havendo mais zeros, como valores permanentes, ao final de processar  $(T_G, -x)$ .

Deste modo, obtemos um total de números zeros, ao final da Diagonalização de  $(T_G, -x)$ , igual a  $a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$ . Logo, pelo **Teorema 3.1.5**, a multiplicidade de  $x = 0$  como autovalor de  $G$  é igual a  $a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$ .

2. se  $r$  é ímpar, os vértices folhas são todos filhos de vértices coduplicados ( $\otimes$ ). Nesse caso, tomando  $x = 1$  e processando o Algoritmo de Diagonalização  $(T_G, -x)$ , através do **Subcaso 1b**, obtemos  $a_r - 1$  zeros permanentes para cada um dos  $a_1 a_2 \dots a_{r-1}$  vértices coduplicados, e  $a_1 a_2 \dots a_{r-1}$  vértices pendentes com valor diagonal igual a 1, todos filhos de vértices internos duplicados ( $\cup$ ). Nos fornecendo até então um total de  $a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$  zeros como valores permanentes.

Na sequência, processando os vértices remanescentes ( $a_1 a_2 \dots a_{r-1}$ ), filhos de vértices duplicados, e com valor diagonal igual a 1, obtemos, pelo **Lema 3.2.2**,  $a_1 a_2 \dots (a_{r-1} - 1)$  valores positivos permanentes, e  $a_1 a_2 \dots a_{r-2}$  vértices pendentes com valor diagonal em  $(0, 1)$ .

A sequência desta argumentação é análoga à sequência da argumentação do item anterior. Utilizando os **Lema 3.2.2** e **Lema 3.2.3**, consecutivamente, para níveis de profundidade par e ímpar, obtendo valores permanentes positivos e negativos, até o vértice da raiz.

Então, obtemos um total de  $a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$  zeros como resposta ao final de processar  $(T_G, -x)$ . Portanto, pelo **Teorema 3.1.5**, concluímos que a multiplicidade de  $x = -1$  como autovalor de  $G$  é igual a  $a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$ .

□

**Corolário 3.2.5.** *Seja  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 0 | 0, 0, \dots, 0, a_r)$  a coárvore balanceada de um grafo  $G$  de profundidade  $r$  e ordem  $n = a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_r$ . O número de autovalores de  $G$  distintos de 0, se  $r$  é par, e distintos de  $-1$ , se  $r$  é ímpar, é igual a  $a_1 a_2 \dots a_{r-1}$ .*

*Demonstração.* Seja a coárvore balanceada  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 0 | 0, 0, \dots, 0, a_r)$ . Se  $r$  é par, e como a ordem é  $n = a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_r$ , obtemos pelo **Teorema 3.2.4**,  $m(0, G) = a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$ . Portanto, o número de autovalores distintos de 0 é  $n - m(0, G) = a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_r - (a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r - 1)) = a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r - a_r + 1) = a_1 a_2 \dots a_{r-1}$ .

Se  $r$  é ímpar, argumentamos de modo análogo a  $r$  par, e nesse caso obtemos que o número de autovalores distintos de  $-1$ , é também igual a  $a_1 a_2 \dots a_{r-1}$ . □

### 3.3 Buscando os autovalores de $T_G(a_1, \dots, a_{r-1}, 0|0, \dots, 0, a_r)$

Após mostrarmos que 0 ou  $-1$  são autovalores de cografos cujas coárvores são balanceadas, iremos determinar os outros autovalores. Para tanto, necessitaremos dos seguintes lemas técnicos.

**Lema 3.3.1.** *Se  $v_1, v_2, \dots, v_m$  são vértices filhos de  $w = \otimes$ , assumindo como valores diagonais  $d_i = y \neq 1$ , onde  $1 \leq i \leq m$ , então o Algoritmo de Diagonalização executa  $m - 1$  iterações do **subcaso 1a**, assumindo durante a iteração  $j$ , para  $1 \leq j \leq m - 1$ ,*

$$d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(y-1) \quad (3.4)$$

$$d_l \leftarrow \frac{y+j}{j+1}. \quad (3.5)$$

*Demonstração.* Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_m$  vértices filhos de  $w = \otimes$ , onde cada valor diagonal assume  $d_i = y \neq 1$ , para  $1 \leq i \leq m$ . Ao executar *Algorithm Diagonalize* ( $T_G, y$ ) notamos que a primeira iteração ocorre do **Subcaso 1a**, pois  $\alpha = d_1 = y \neq 1$  e  $\beta = d_2 = y \neq 1$ , o que implica  $\alpha + \beta \neq 2$ .

Da execução do **Subcaso 1a** obtemos  $d_2 = \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2} = \frac{y^2-1}{2y-2} = \frac{(y-1)(y+1)}{2(y-1)} = \frac{y+1}{2}$  e vértice permanente  $d_1 = \alpha + \beta - 2 = 2y - 2 = 2(y - 1)$ . Assim, para a iteração  $j = 1$  é válido que  $d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(y-1)$  e  $d_l \leftarrow \frac{y+j}{j+1}$ . Perceba que as iterações ocorrem a cada dois vértices subsequentes, isso implica em um total de  $j = m - 1$  iterações.

Agora, supondo como Hipótese Indutiva que na iteração  $j - 1$  o **Subcaso 1a** nos fornece  $d_k \leftarrow \frac{j}{j-1}(y-1)$  e  $d_l \leftarrow \frac{y+j-1}{j}$ , mostremos que na próxima iteração  $j$ , o **Subcaso 1a** nos fornece  $d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(y-1)$  e  $d_l \leftarrow \frac{y+j}{j+1}$ .

Observamos que cada iteração fornece um vértice permanente (denotado  $d_k$ ) e um vértice pendente (denotado  $d_l$ ). O vértice pendente torna-se permanente na iteração seguinte e um novo vértice torna-se o pendente. Assim, na iteração  $j$ ,  $\alpha = d_k = \frac{y+j-1}{j} \neq 1$  e  $\beta = d_l = y \neq 1$  implicando na execução do **Subcaso 1a**, pois  $\alpha + \beta \neq 2$ . Dessa iteração obtemos  $d_l = \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-2} = \frac{\frac{y+j-1}{j}y-1}{\frac{y+j-1}{j}+y-2} = \frac{y^2+j(y-1)-y}{y+j(y-1)-1} = \frac{(y-1)(y+j)}{(y-1)(1+j)} = \frac{y+j}{1+j}$  e vértice permanente  $d_k = \alpha + \beta - 2 = \frac{y+j-1}{j} + y - 2 = \frac{(y-1)+j(y-1)}{j} = \frac{1+j}{j}(y-1)$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Lema 3.3.2.** *Se  $v_1, v_2, \dots, v_m$  são vértices filhos de  $w = \cup$ , assumindo como valores diagonais  $d_i = y \neq 0$ , onde  $1 \leq i \leq m$ , então o Algoritmo de Diagonalização executa  $m - 1$  iterações do **Subcaso 2a**, assumindo durante a iteração  $j$ , para  $1 \leq j \leq m - 1$ ,*

$$d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}y \quad (3.6)$$

$$d_l \leftarrow \frac{y}{j+1} \quad (3.7)$$

*Demonstração.* Análoga a demonstração do **Lema 3.3.1**.  $\square$

Usaremos estes dois lemas na demonstração dos Lema 3.3.3 e Lema 3.3.4 que vêm a seguir. Estes lemas da sequência por sua vez demonstram a Proposição 3.3.5 que determina, de maneira recursiva, o espectro de um cografo cuja coárvore é balanceada. O compilado de afirmativas e suas correspondentes demonstrações a seguir, fazem parte de uma releitura da seção 4 do artigo de Allem e Tura (2020).

Na execução do algoritmo os vértices assumem valores  $x_i$ , então para facilitar a escrita podemos confundir os vértices com seus valores assumidos. Iniciando a execução do *Algoritmo de Diagonalização*  $(T_{G_i}, x_i)$  em algum nível  $i$  tal que  $1 \leq i \leq r - 1$ , atribuindo  $x_i = 0$  se  $i$  é par, e  $x_i = 1$  se  $i$  é ímpar, o próximo passo será seguir para os níveis anteriores, ou seja, vamos da coárvore  $T_{G_i}$  para a coárvore  $T_{G_{i+1}}$ , que possui um nível a mais de vértices em relação a coárvore  $T_{G_i}$ , com valor das folhas  $x_{i+1}$ . Depois, seguimos da coárvore  $T_{G_{i+1}}$  para a coárvore  $T_{G_{i+2}}$ , com valor das folhas  $x_{i+2}$ , e assim sucessivamente, até chegarmos no último nível  $r$  e calcular as folhas de valor diagonal  $x = x_r$  do cografo  $T_{G_r}$ . Este processo nos fornece uma relação de recorrência cuja solução  $x_r$  leva a um autovalor inteiro  $-x_r$  do cografo  $G$ .

**Lema 3.3.3.** *Seja  $G$  um cografo com coárvore balanceada  $T_{G_r}$  de ordem  $n = a_1 \dots a_{r-1} a_r$ . O Algoritmo de Diagonalização produz vértices com valor  $x_i$  na coárvore  $T_{G_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, 0 | 0, \dots, 0, a_i)$  com valor 0 no nível  $i$  se  $i$  é par, e com valor 1 se  $i$  é ímpar, para  $1 \leq i \leq r - 1$ , se e somente se a coárvore balanceada  $T_{G_{i+1}}(a_1, \dots, a_i, 0 | 0, \dots, 0, a_{i+1})$  na etapa anterior, tem valores*

$$x_{i+1} = \begin{cases} 1 - a_{i+1} & , \text{ se } i \text{ é par} \\ a_{i+1} & , \text{ se } i \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (3.8)$$

para  $1 \leq i \leq r - 1$ . E, na iteração de nível  $i + 1$ , os vértices permanentes têm valores diferentes de 0.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Dado  $1 \leq i \leq r - 1$  e a coárvore  $T_{G_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, 0 | 0, \dots, 0, a_i)$ :

1. se  $i$  é par, assumindo valor  $x_i = 0$  em cada vértice de nível  $i$ , sabemos que em um nível imediatamente anterior,  $i + 1$ , a coárvore  $T_{G_{i+1}}(a_1, \dots, a_i, 0 | 0, \dots, 0, a_{i+1})$  possui vértices  $x_{i+1}$  coduplicados, ou seja, vértices filhos de vértices do tipo  $w = \otimes$ . Se supormos que  $x_{i+1} = 1$ , então o **Subcaso 1b** do *Algoritmo de Diagonalização* é aplicado  $a_{i+1} - 1$  vezes em cada vértice  $\otimes$  do nível  $i$ , nos quais obtemos como valor para os vértices pendentes  $x_i = d_l \leftarrow 1$ . Mas isso contradiz a informação inicial  $x_i = 0$ . Portanto,  $x_{i+1} \neq 1$ . Sendo assim, pelo **Lema 3.3.1**, o *Algoritmo de Diagonalização* executa  $a_{i+1} - 1$  iterações do **Subcaso 1a** em cada vértice  $w = \otimes$  de nível  $i$ , de modo que a última iteração, em cada vértice  $w$ , atribui, segundo (3.5), o valor  $x_i = d_l \leftarrow \frac{x_{i+1} + a_{i+1} - 1}{a_{i+1}}$  para o vértice pendente, e segundo (3.4), os valores  $d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(x_{i+1} - 1) \neq 0$  para os  $1 \leq j \leq a_{i+1} - 1$  vértices permanentes. Com isso e por  $x_i = 0$  obtemos  $x_{i+1} + a_{i+1} - 1 = 0$ , que implica  $x_{i+1} = 1 - a_{i+1}$ .

2. se  $i$  é ímpar assumindo valor  $x_i = 1$  em cada vértice de nível  $i$ , sabemos que em um nível imediatamente anterior,  $i + 1$ , a coárvore  $T_{G_{i+1}}(a_1, \dots, a_i, 0 | 0, \dots, 0, a_{i+1})$  possui vértices  $x_{i+1}$  duplicados, ou seja, vértices filhos de vértices do tipo  $w = \cup$ . Se supormos que  $x_{i+1} = 0$ , então o **Subcaso 2b** do *Algoritmo de Diagonalização* é aplicado  $a_{i+1} - 1$  vezes em cada vértice  $\cup$  do nível  $i$ , nos quais obtemos como valor para os vértices pendentes  $x_i = d_l \leftarrow 0$ . Mas isso contradiz a informação inicial  $x_i = 1$ . Portanto,  $x_{i+1} \neq 0$ . Sendo assim, pelo **Lema 3.3.2**, o *Algoritmo de Diagonalização* executa  $a_{i+1} - 1$  iterações do **Subcaso 2a** em cada vértice  $w = \cup$  de nível  $i$ , de modo que a última iteração, em cada vértice  $w$ , atribui, segundo (3.7), o valor  $x_i = d_l \leftarrow \frac{x_{i+1}}{a_{i+1}}$  para o vértice pendente, e segundo (3.6), os valores  $d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(x_{i+1}) \neq 0$  para os  $1 \leq j \leq a_{i+1} - 1$  vértices permanentes. Com isso e por  $x_i = 1$  obtemos  $x_{i+1} = a_{i+1}$ .

( $\Leftrightarrow$ ) Dado  $i + 1$  tal que  $1 \leq i \leq r - 1$ , e a coárvore  $T_{G_{i+1}}(a_1, \dots, a_i, 0 | 0, \dots, 0, a_{i+1})$ :

1. se  $i$  é par, assumindo valor  $x_{i+1} = 1 - a_{i+1}$ , como  $a_{i+1} \geq 2$ , obtemos  $x_{i+1} \neq 1$ . Sendo assim, pelo **Lemas 3.3.1**, o *Algoritmo de Diagonalização* executa  $a_{i+1} - 1$  iterações do **Subcaso 1a** em cada vértice  $w = \otimes$  de nível  $i$ , de modo que obtemos em cada vértice  $w$ , segundo (3.5), os valores  $x_i = d_l \leftarrow \frac{x_{i+1} + a_{i+1} - 1}{a_{i+1}} = \frac{1 - a_{i+1} + a_{i+1} - 1}{a_{i+1}} = 0$  para os vértices pendentes, e segundo (3.4), os valores  $d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(x_{i+1} - 1) = \frac{j+1}{j}(1 - a_{i+1} - 1) = \frac{j+1}{j}(-a_{i+1}) \neq 0$  para cada vértice permanente  $1 \leq j \leq a_{i+1} - 1$ .
2. se  $i$  é ímpar, assumindo valor  $x_{i+1} = a_{i+1}$ , como  $a_{i+1} \geq 2$ , obtemos  $x_{i+1} \neq 0$ . Sendo assim, pelo **Lema 3.3.2**, o *Algoritmo de Diagonalização* executa  $a_{i+1} - 1$  iterações do **Subcaso 2a** em cada vértice  $w = \cup$  de nível  $i$ , de modo que obtemos em cada vértice  $w$ , segundo (3.7), os valores  $x_i = d_l \leftarrow \frac{a_{i+1}}{a_{i+1} + 1 - 1} = 1$  para os vértices pendentes, e segundo (3.6), os valores  $d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(x_{i+1}) = \frac{j+1}{j}(a_{i+1}) \neq 0$  para cada vértice permanente  $1 \leq j \leq a_{i+1} - 1$ .

□

O Lema 3.3.3 é complementado com o Lema 3.3.4, culminando na Proposição 3.3.5.

**Lema 3.3.4.** *Seja  $G$  um cografo com coárvore balanceada  $T_{G_r}$  de ordem  $n = a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_r$ . Se o Algoritmo de Diagonalização  $(T_{G_r}, x)$  produz vértices com valores  $x_i$  no nível  $i$ , com  $x_i = 0$  se  $i$  é par, ou  $x_i = 1$  se  $i$  é ímpar,  $1 \leq i \leq r - 1$ . Então, nos níveis anteriores, o algoritmo produziu vértices na coárvore  $T_{G_{i+j}}$  com valores  $x_{i+j}$ , para  $j \geq 1$  tal que*

$$x_{i+j} \begin{cases} \neq 0, \\ \neq 1, \\ \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Além disso, em cada nível, os vértices permanentes têm valores diferentes de 0.

*Demonstração.* Fazemos indução em  $j$ . Para  $j = 1$ , se  $i$  é

1. par, os vértices desse nível têm  $x_i = 0$  como valor diagonal. Então, pelo **Lema 3.3.3** obtemos  $x_{i+1} = 1 - a_{i+1}$ . Como  $a_{i+1} \geq 2$  e  $a_{i+1} \in \mathbb{Z}$ , segue que  $x_{i+1} \leq -1$  e  $x_{i+1} \in \mathbb{Z}$ , além de que, na iteração  $i + 1$ , os vértices permanentes têm valores diferente de 0.
2. ímpar, os vértices desse nível têm  $x_i = 1$  como valor diagonal. Então, pelo **Lema 3.3.3** obtemos  $x_{i+1} = a_{i+1}$ . Como  $a_{i+1} \geq 2$  e  $a_{i+1} \in \mathbb{Z}$ , segue que  $x_{i+1} \geq 2$  e  $x_{i+1} \in \mathbb{Z}$ , além de que, na iteração  $i + 1$ , os vértices permanentes têm valores diferente de 0.

Agora, suponha como Hipótese Indutiva que, até o nível  $i + j - 1$ , o *Algoritmo de Diagonalização* produziu vértices com valores  $x_{i+j-1} \neq 0$ ,  $x_{i+j-1} \neq 1$  e  $x_{i+j-1} \in \mathbb{Z}$ , para  $j \geq 1$ . Além de que, em cada nível, os vértices permanentes têm valores diferentes de 0. Mostremos que no nível anterior, ou seja, no nível  $i + j$ , o *Algoritmo de Diagonalização* produz vértices com valores  $x_{i+j}$  diferentes de 0 e 1 tal que  $x_{i+j} \in \mathbb{Z}$ , além de produzir vértices permanentes diferentes de 0.

Se  $i + j - 1$  é

1. par, os vértices desse nível são do tipo  $w = \otimes$ . Se  $x_{i+j} = 0$ , por (3.5) do **Lema 3.3.1**, obtemos como valores para os vértices pendentes  $x_{i+j-1} = d_l \leftarrow \frac{x_{i+j} + a_{i+j} - 1}{a_{i+j} - 1 + 1} = \frac{a_{i+j} - 1}{a_{i+j}} \notin \mathbb{Z}$ , mas isso contradiz a Hipótese Indutiva  $x_{i+j-1} \in \mathbb{Z}$ . Sendo assim,  $x_{i+j} \neq 0$ . Suponha agora  $x_{i+j} = 1$ , nesse caso aplicando o **Subcaso 1b**  $a_{i+j} - 1$  vezes em cada vértice  $w$ , obtemos vértices pendentes com o valor  $x_{i+j-1} = d_l \leftarrow 1$ , mas isso contradiz a Hipótese Indutiva  $x_{i+j-1} \neq 1$ . Sendo assim,  $x_{i+j} \neq 1$ .

Como  $x_{i+j} \neq 1$ , por (3.5) do **Lema 3.3.1** obtemos vértices pendentes com valores  $x_{i+j-1} = d_l \leftarrow \frac{x_{i+j} + a_{i+j} - 1}{a_{i+j} - 1 + 1}$ , por isso  $x_{i+j-1} a_{i+j} = x_{i+j} + a_{i+j} - 1$  que implica  $x_{i+j} = a_{i+j}(x_{i+j-1} - 1) + 1 \in \mathbb{Z}$ , e vértices permanentes com valores  $d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(x_{i+j} - 1) = \frac{j+1}{j}(a_{i+j})(x_{i+j-1} - 1) \neq 0$ , para  $1 \leq j \leq a_{i+j} - 1$ .

2. ímpar, os vértices desse nível são do tipo  $w = \cup$ . Se  $x_{i+j} = 1$ , por (3.7) do **Lema 3.3.2**, obtemos como valores para os vértices pendentes  $x_{i+j-1} = d_l \leftarrow \frac{x_{i+j}}{a_{i+j} - 1 + 1} = \frac{1}{a_{i+j}} \notin \mathbb{Z}$ , mas isso contradiz a Hipótese Indutiva  $x_{i+j-1} \in \mathbb{Z}$ . Sendo assim,  $x_{i+j} \neq 1$ . Suponha agora  $x_{i+j} = 0$ , nesse caso aplicando o **subcaso 2b**  $a_{i+j} - 1$  vezes em cada vértice  $w$ , obtemos vértices pendentes com o valores  $x_{i+j-1} = d_l \leftarrow 0$ , mas isso contradiz a Hipótese Indutiva  $x_{i+j-1} \neq 0$ . Sendo assim,  $x_{i+j} \neq 0$ .

Como  $x_{i+j} \neq 0$ , por (3.7) do **Lema 3.3.2** obtemos vértices pendentes com valores  $x_{i+j-1} = d_l \leftarrow \frac{x_{i+j}}{a_{i+j} - 1 + 1}$ , o que implica  $x_{i+j} = x_{i+j-1} a_{i+j} \in \mathbb{Z}$ , pois  $x_{i+j-1} a_{i+j} \in \mathbb{Z}$ ,



e vértices permanentes com valores  $d_k \leftarrow \frac{j+1}{j}(x_{i+j}) = \frac{j+1}{j}a_{i+j}x_{i+j-1} \neq 0$ , para  $1 \leq j \leq a_{i+j} - 1$ .

□

**Proposição 3.3.5.** *Seja  $G$  um cografo com coárvore balanceada  $T_{G_r}$ , de ordem  $n = a_1a_2 \dots a_{r-1}a_r$ . Iniciando no nível  $i$ , para  $1 \leq i \leq r - 1$ . Então, os valores anteriores  $x_{i+j+1}$ , para  $0 \leq j \leq r - i - 1$ , são obtidos pela seguinte relação de recorrência*

$$\begin{cases} x_i = 1 & \text{se } i \text{ é ímpar,} \\ x_i = 0 & \text{se } i \text{ é par,} \\ x_{i+j+1} = a_{i+j+1}x_{i+j} & \text{se } i + j \text{ é ímpar,} \\ x_{i+j+1} = a_{i+j+1}x_{i+j} - a_{i+j+1} + 1 & \text{se } i + j \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.10)$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um cografo com coárvore balanceada  $T_{G_r}$ , de ordem  $n = a_1a_2 \dots a_{r-1}a_r$ . Iniciando em  $i$ , para  $1 \leq i \leq r - 1$ , e considerando a coárvore balanceada  $T_{G_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, 0 | 0, \dots, 0, a_i)$  que possui vértices no nível  $i$  com valores  $x_i$  iguais a

- 1, se  $i$  é ímpar. Façamos indução em  $j$ , para  $j \geq 0$ . Para  $j = 0$ , segundo o **Lema 3.3.3**, no nível  $i + 1$ , obtemos vértices pendentes com valores  $x_{i+1} = a_{i+1} = a_{i+1}1 = a_{i+0+1}x_{i+0}$ , onde  $i + 0$  é ímpar. Agora, suponha como Hipótese Indutiva que para  $j - 1$ , os valores dos vértices pendentes no nível  $i + j$  sejam  $x_{i+j} = a_{i+j}x_{i+j-1}$ , onde  $i + j$  é ímpar. Mostremos que, para  $j$ , os valores dos vértices pendentes no nível  $i + j + 1$  são  $x_{i+j+1} = a_{i+j+1}x_{i+j}$ , onde  $i + j$  é ímpar.

Note que pela Hipótese Indutiva,  $i + j$  é ímpar. Assim, pela demonstração do **Lema 3.3.4** obtemos que os valores dos vértices pendentes, no nível  $i + j + 1$ , são  $x_{i+j+1} = a_{i+j+1}x_{i+j}$ , como queríamos demonstrar.

- 0, se  $i$  é par. Façamos indução em  $j$ , para  $j \geq 0$ . Para  $j = 0$ , segundo o **Lema 3.3.3**, no nível  $i + 1$ , obtemos vértices pendentes com valores  $x_{i+1} = 1 - a_{i+1} = a_{i+1}0 - a_{i+1} + 1 = a_{i+0+1}x_{i+0} - a_{i+0+1} + 1$ , onde  $i + 0$  é par. Agora, suponha como Hipótese Indutiva que para  $j - 1$ , os valores dos vértices pendentes no nível  $i + j$  sejam  $x_{i+j} = a_{i+j}x_{i+j-1} - a_{i+j} + 1$ , onde  $i + j$  é par. Mostremos que, para  $j$ , os valores dos vértices pendentes no nível  $i + j + 1$  são  $x_{i+j+1} = a_{i+j+1}x_{i+j} - a_{i+j+1} + 1$ , onde  $i + j$  é par.

Note que pela Hipótese Indutiva,  $i + j$  é par. Assim, pela demonstração do **Lema 3.3.4** obtemos que os valores dos vértices pendentes, no nível  $i + j + 1$ , são  $x_{i+j+1} = a_{i+j+1}(x_{i+j} - 1) + 1 = a_{i+j+1}x_{i+j} - a_{i+j+1} + 1$ , como queríamos demonstrar.

□

Com a Proposição 3.3.5, podemos calcular os autovalores do cografo  $G$ , cuja coárvore balanceada é  $T_{G_r}$ . Para isso precisamos resolver a relação de recorrência estabelecida em (3.10) para cada  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ , correspondente a cada nível da coárvore  $T_{G_r}$ . Os próximos Teorema 3.3.7 e Teorema 3.3.8 nos fornecem as fórmulas da resolução da relação de recorrência da Proposição 3.3.5. Para isso, a Definição 3.3.6 denota os parâmetros destas fórmulas considerando,  $T_{G_r} = (a_1, a_2, \dots, 0 | 0, \dots, 0, a_r)$  a coárvore balanceada associada ao cografo  $G$ , e  $r, i$ , respectivamente, no lugar de  $n, l$ .

**Definição 3.3.6.** Considerando  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  uma sequência fixa de inteiros positivos, definamos o seguinte parâmetro

$$\gamma_{n,l} = \begin{cases} a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_l, & \text{se } 1 \leq l \leq n-1 \\ a_n, & \text{se } l = n \end{cases} \quad (3.11)$$

**Teorema 3.3.7.** Sejam  $r > 2$  e  $i \in \{1, \dots, r-1\}$  par fixado. Considerando a recorrência  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}, \dots, x_{r-i-j+1})$  sobre valores de  $j$ , para  $j \geq 0$  com valor inicial  $x_i = 0$ , temos

$$\begin{cases} x_{i+j} = a_{i+j} x_{i+j-1} & \text{se } i+j \text{ é ímpar,} \\ x_{i+j} = a_{i+j} x_{i+j-1} - a_{i+j} + 1 & \text{se } i+j \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Então, a solução é

$$\begin{cases} x_{i+j} = \sum_{k=1}^j \gamma_{i+j,i+k} (-1)^k + 1 & \text{se } i+j \text{ é ímpar,} \\ x_{i+j} = \sum_{k=1}^j \gamma_{i+j,i+k} (-1)^k & \text{se } i+j \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.13)$$

*Demonstração.* Para  $i \in \{1, \dots, r-1\}$  par, façamos indução em  $j \geq 1$ . Para  $j = 1$ , aplicando a relação de recorrência (3.12) obtemos  $x_{i+1} = a_{i+1} x_i - a_{i+1} + 1 = -a_{i+1} + 1$ , e como  $i$  é par,  $i+j = i+1$  é ímpar. E ainda,  $-a_{i+1} + 1$  pode ser comparada a uma outra expressão relacionada a **Definição 3.3.6**,  $-a_{i+1} + 1 = \gamma_{i+1,i+1} (-1)^1 + 1 = \sum_{k=1}^1 \gamma_{i+j,i+k} (-1)^k + 1 = x_{i+1}$ . Se realizarmos analogamente os passos para  $i+2$  par, obtemos a comparação análoga do valor obtido pela recorrência com a fórmula de (3.17). Assim, podemos supor, como Hipótese Indutiva, que para  $j-1$  aplicando a relação de recorrência (3.12) obtemos

$$\begin{cases} x_{i+j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_{i+j-1,i+k} (-1)^k + 1 & \text{se } i+j-1 \text{ é ímpar,} \\ x_{i+j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_{i+j-1,i+k} (-1)^k & \text{se } i+j-1 \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Agora, resta-nos mostrar que para  $j$  aplicando a relação de recorrência (3.12) obtemos

$$\begin{cases} x_{i+j} = \sum_{k=1}^j \gamma_{i+j,i+k} (-1)^k + 1 & \text{se } i+j \text{ é ímpar,} \\ x_{i+j} = \sum_{k=1}^j \gamma_{i+j,i+k} (-1)^k & \text{se } i+j \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Para isso analisamos quando  $i+j$  é

1. par. Nesse caso  $i + j - 1$  é ímpar, e aplicando a relação de recorrência (3.12) obtemos  $x_{i+j} = a_{i+j}x_{i+j-1}$  que pela Hipótese Indutiva é igual a  $a_{i+j} \left( \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_{i+j-1, i+k} (-1)^k + 1 \right) = \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_{i+j, i+k} (-1)^k + a_{i+j} = \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_{i+j, i+k} (-1)^k + \gamma_{i+j, i+j} (-1)^j$ . Observe que  $(-1)^j = 1$ , pois de  $i$  e  $i + j$  serem par,  $j$  é par fazendo com que  $x_{i+j} = \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_{i+j, i+k} (-1)^k + \gamma_{i+j, i+j} = \sum_{k=1}^j \gamma_{i+j, i+k} (-1)^k$ , como queríamos demonstrar.
2. ímpar. Nesse caso  $i + j - 1$  é par, e aplicando a relação de recorrência (3.12) obtemos  $x_{i+j} = a_{i+j}x_{i+j-1} - a_{i+j} + 1$  que pela Hipótese Indutiva é igual a  $a_{i+j} \left( \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_{i+j-1, i+k} (-1)^k \right) - a_{i+j} + 1 = \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_{i+j, i+k} (-1)^k - a_{i+j} + 1$ . Observe que  $-a_{i+j} = -\gamma_{i+j, i+j} = \sum_{k=j}^j \gamma_{i+j, i+k} (-1)^j$ , onde  $(-1)^j = -1$  pois  $j$  é ímpar. Assim, temos que  $x_{i+j} = \sum_{k=1}^j \gamma_{i+j, i+k} (-1)^k + 1$ , como queríamos demonstrar.

□

**Teorema 3.3.8.** *Sejam  $r > 2$  e  $i \in \{1, \dots, r-1\}$  ímpar fixado. Considerando a recorrência  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}, \dots, x_{r-i-j+1})$  sobre valores de  $j$ , para  $j \geq 0$  com valor inicial  $x_i = 0$ , temos*

$$\begin{cases} x_{i+j} = a_{i+j}x_{i+j-1} & \text{se } i+j \text{ é ímpar,} \\ x_{i+j} = a_{i+j}x_{i+j-1} - a_{i+j} + 1 & \text{se } i+j \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Então, a solução é

$$\begin{cases} x_{i+j} = \sum_{k=1}^j \gamma_{i+j, i+k} (-1)^{k+1} + 1 & \text{se } i+j \text{ é ímpar,} \\ x_{i+j} = \sum_{k=1}^j \gamma_{i+j, i+k} (-1)^{k+1} & \text{se } i+j \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.17)$$

*Demonstração.* Análoga a demonstração do **Teorema 3.3.7**. □

Retomando ao Teorema 3.1.5, obtemos que  $-x$  é autovalor do grafo  $G$  se o Algoritmo de Diagonalização  $(T_G, x)$  produz algum zero como vértice permanente. Atribuindo inicialmente aos vértices os valores  $x_r^i$  na execução do Algoritmo de Diagonalização  $(T_{G_r}, -x_r^i)$ , para  $1 \leq i \leq r-1$ , pela recorrência construída anteriormente, obrigatoriamente em algum nível o valor 0 é atribuído como valor diagonal para todos os vértices, então podemos supor pelo método de recorrência desenvolvido e pelo Teorema 3.1.5 que, determinar os autovalores de um cografo  $G_r$ , com cóarvore balanceada  $T_{G_r}(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 0 | 0, \dots, 0, a_r)$ , é o mesmo que calcular pela fórmula de recorrência a solução dos  $x_r^i$ . Desta maneira, os próximos Corolário 3.3.9 e Corolário 3.3.10 fornecem essa solução.

**Corolário 3.3.9.** *Se  $r$  é ímpar,  $-x_r^i$  é um autovalor do cografo  $G$  com coárvore  $T_{G_r}$ , para  $1 \leq i \leq r-1$ , onde*

$$\begin{cases} x_r^i = \sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r,i+k}(-1)^k + 1 & \text{se } i \text{ é par,} \\ x_r^i = \sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r,i+k}(-1)^{k+1} + 1 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.18)$$

*Demonstração.* Seja  $j = r - i$ . Sabendo que por hipótese  $r = i + j$  é sempre ímpar, fazamos indução em  $i$ . Para  $i = 1$  ímpar, pelo **Teorema 3.3.8**, a solução da relação de recorrência é  $x_r^1 = \sum_{k=1}^{r-1} \gamma_{r,1+k}(-1)^{k+1} + 1$ . Para  $i = 2$  par, pelo **Teorema 3.3.7**, a solução da relação de recorrência é  $x_r^2 = \sum_{k=1}^{r-2} \gamma_{r,2+k}(-1)^k + 1$ .

Suponhamos, como Hipótese Indutiva que para  $i-1$  a solução da relação de recorrência seja

$$\begin{cases} x_r^{i-1} = \sum_{k=1}^{r-i-1} \gamma_{r,i-1+k}(-1)^k + 1 & \text{se } i-1 \text{ é par,} \\ x_r^{i-1} = \sum_{k=1}^{r-i-1} \gamma_{r,i-1+k}(-1)^{k+1} + 1 & \text{se } i-1 \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Queremos mostrar que para  $i$  a solução da relação de recorrência é

$$\begin{cases} x_r^i = \sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r,i+k}(-1)^k + 1 & \text{se } i \text{ é par,} \\ x_r^i = \sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r,i+k}(-1)^{k+1} + 1 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.20)$$

Mas note que, pelo **Teorema 3.3.7** obtemos  $x_r^i = \sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r,1+k}(-1)^k + 1$ , para  $i$  par, e pelo **Teorema 3.3.8** obtemos  $x_r^i = \sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r,1+k}(-1)^{k+1} + 1$ , para  $i$  ímpar, como queríamos demonstrar.  $\square$

**Corolário 3.3.10.** *Se  $r$  é par.  $-x_r^i$  é um autovalor do cografo  $G$  com coárvore  $T_{G_r}$ , para  $1 \leq i \leq r-1$ , onde*

$$\begin{cases} x_r^i = \sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r,i+k}(-1)^k & \text{se } i \text{ é par,} \\ x_r^i = \sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r,i+k}(-1)^{k+1} & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.21)$$

*Demonstração.* Análoga a demonstração do **Corolário 3.3.9**.  $\square$

### 3.4 O Espectro de $T_G(a_1, \dots, a_{r-1}, 0|0, \dots, 0, a_r)$

Nesta seção iremos calcular a multiplicidade dos autovalores  $-x_r^i$ ,  $1 \leq i \leq r-1$  de  $T_{G_r}$  determinados na seção anterior, e exibiremos o espectro de  $G$ .

Considere a coárvore  $T_{G_i}(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 0|0, \dots, 0, a_i)$ . Se  $i$  é:

1. par e cada vértice tem valor  $x_i = 0$ , então o *Algoritmo de Diagonalização* executa o **Subcaso 2b**,  $a_1 a_2 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$  vezes e restam  $a_1 a_2 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$  zeros nos vértices permanentes, e zeros nos vértices pendentes. Nesse caso, sabemos então que  $m(-x_r^i, G) \geq a_1 a_2 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$ .
2. ímpar e cada vértice tem valor  $x_i = 1$ , então o *Algoritmo de Diagonalização* executa o **Subcaso 1b**,  $a_1 a_2 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$  vezes e restam  $a_1 a_2 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$  zeros nos vértices permanentes, e 1 nos vértices pendentes. Também nesse caso, sabemos que  $m(-x_r^i, G) \geq a_1 a_2 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$ .

Agora, para verificarmos a igualdade  $m(-x_r^i, G) = a_1 a_2 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$ , precisamos do Lema 3.4.1 a seguir.

**Lema 3.4.1.** *Para  $1 \leq i \leq r - 1$ , o Algoritmo de Diagonalização não produz zeros permanentes nos vértices da etapa após o nível  $i$ .*

*Demonstração.* Considere a cóarvore  $T_{G_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, 0|0, \dots, 0, a_i)$ , se  $i$  é:

1. par e  $x_i = 0$ , então a cóarvore no próximo nível é  $T_{G_{i-1}}(a_1, \dots, a_{i-2}, 0|0, \dots, 0, a_{i-1})$  com  $x_{i-1} = 0$  em cada vértice. Note que os vértices de valor  $x_{i-1} = 0$  são filhos de vértices  $w = \otimes$ , portanto o **Subcaso 1a** é repetido  $a_1 a_2 \dots a_{i-2} (a_{i-1} - 1)$  vezes produzindo valores permanentes diferentes de zero. Com isso e pelo **Teorema 3.2.4** concluímos que  $m(0, G_{i-1}) = 0$ , onde  $G_{i-1}$  é o cografo cuja cóarvore balanceada é  $T_{G_{i-1}}(a_1, \dots, a_{i-2}, 0|0, \dots, 0, a_{i-1})$ . Isso significa que nas próximas iterações  $1 \leq j \leq i - 1$ , os valores permanentes serão diferentes de zero.
2. ímpar e  $x_i = 1$ , então a cóarvore no próximo nível é  $T_{G_{i-1}}(a_1, \dots, a_{i-2}, 0|0, \dots, 0, a_{i-1})$  com  $x_{i-1} = 1$  em cada vértice. Note que os vértices de valor  $x_{i-1} = 1$  são filhos de vértices  $w = \cup$ , portanto o **Subcaso 2a** é repetido  $a_1 a_2 \dots a_{i-2} (a_{i-1} - 1)$  vezes, produzindo valores permanentes diferentes de zero. Com isso e pelo **Teorema 3.2.4**, concluímos que  $m(-1, G_{i-1}) = 0$ . Isso significa que nas próximas iterações  $1 \leq j \leq i - 1$ , os valores permanentes serão diferentes de zero.

Desta forma, de  $T_{G_{i-1}}(a_1, a_2, \dots, a_{i-2}, 0|0, \dots, 0, a_{i-1})$  em diante, o *Algoritmo de Diagonalização* não produz zeros permanentes.

□

**Teorema 3.4.2.** *Para  $1 \leq i \leq r - 1$ , temos que  $m(-x_r^i, G) = a_1 a_2 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  o cografo com cóarvore balanceada  $T_{G_r}$ . Considere  $T_{G_i}$  a cóarvore cujo  $i = 1, 2, \dots, r - 1$ , com valor diagonal  $x_i$  tal que pelo *Algoritmo de Diagonalização*  $x_i = 0$  se  $i$  é par, ou  $x_i = 1$  se  $i$  é ímpar. Então, pelo **Lema 3.3.4** a cóarvore  $T_{G_{i+j}}$ ,

$j \geq 1$ , não possui valores permanentes zero. E, pelo **Lema 3.4.1**, não produz zeros nos vértices permanentes após o nível  $i$  na coárvore  $T_{G_i}$ . Com isso e considerando que  $m(-x_r^i, G) \geq a_1 a_2 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$ , temos  $m(-x_r^i, G) = a_1 a_2 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$ .  $\square$

Com o Teorema 3.4.2 obtemos a multiplicidade de autovalores diferentes de 0 e  $-1$ , agora resta determinar quantos autovalores do espectro de  $G$  ainda estão indeterminados. Para isso, considere a coárvore balanceada  $T_{G_r}(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 0|0, \dots, a_r)$  de ordem  $n = a_1 a_2 \dots a_r$ . Pelo Teorema 3.2.4 sabemos que se  $r$  é ímpar então  $m(-1, G) = a_1 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$ , e se  $r$  é par então  $m(0, G) = a_1 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$ . Com isso e pelo Teorema 3.4.2, para  $r$  ímpar ou par o número de autovalores inteiros do cografo é o mesmo:

$$\sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G) + a_1 \dots a_{r-1} (a_r - 1) = (a_1 - 1) + a_1 (a_2 - 1) + a_1 a_2 (a_3 - 1) + \dots + a_1 \dots a_{r-2} (a_{r-1} - 1) + a_1 \dots a_{r-1} (a_r - 1) = a_1 - 1 + a_1 a_2 - a_1 + a_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 + \dots + a_1 \dots a_{r-1} a_r - a_1 \dots a_{r-1} = a_1 \dots a_{r-1} a_r - 1 = n - 1.$$
 Sendo assim, falta determinar um autovalor  $\lambda$  de multiplicidade 1. Pela equivalência entre matrizes, podemos determinar o autovalor pendente  $\lambda$  pelo traço da matriz de adjacência.

**Corolário 3.4.3.** *Seja  $G$  um cografo com  $n$  autovalores associados tal que  $n - 1$  estão determinados. Então, o autovalor pendente é*

$$\lambda = \begin{cases} - \sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G)(-x_r^i) & \text{se } r \text{ é par} \\ - \sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G)(-x_r^i) - (-1)a_1 \dots a_{r-1} (a_r - 1) & \text{se } r \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad t \quad (3.22)$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um cografo e  $T_{G_r} = (a_1, \dots, a_{r-1}, 0|0, \dots, a_r)$  a coárvore de ordem  $n = a_1 a_2 \dots a_r$  associada. Sabendo que o traço da matriz de adjacência  $A(G)$  é zero e que  $A(G)$  é equivalente à matriz diagonal dos autovalores de  $G$ , podemos determinar o autovalor pendente  $\lambda$  pelo somatório dos autovalores de  $G$  igualado a zero.

Se  $r$  é:

1. par, pelos **Teorema 3.2.4** e **Teorema 3.4.2**,  $m(0, G) = a_1 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$  e  $m(-x_r^i, G) = a_1 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$ ,  $1 \leq i \leq r - 1$ . Portanto,  $m(0, G)0 + \sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G)(-x_r^i) + \lambda = 0$ , logo  $\lambda = - \sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G)(-x_r^i)$ .
2. ímpar, pelos **Teorema 3.2.4** e **Teorema 3.4.2**,  $m(-1, G) = a_1 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$  e  $m(-x_r^i, G) = a_1 \dots a_{i-1} (a_i - 1)$ ,  $1 \leq i \leq r - 1$ . Portanto,  $m(-1, G)(-1) + \sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G)(-x_r^i) + \lambda = 0$ , logo  $\lambda = - \sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G)(-x_r^i) - (-1)a_1 \dots a_{r-1} (a_r - 1)$ .

$\square$

Finalmente, o último Teorema 3.4.4 desta seção nos apresenta o espectro completo de qualquer cografo que possua coárvore balanceada associada a ele.

**Teorema 3.4.4.** *Seja  $G$  um cografo de ordem  $n$  com coárvore balanceada  $T_{G_r}$ . Então o espectro de  $G$  é dado por*

$$\{(-x_r^i)^{a_1 \dots (a_i-1)} \text{ para } 1 \leq i \leq r-1, (0)^{a_1 \dots (a_r-1)}, -\sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G)(-x_r^i)\}, \text{ se } r \text{ é par. E}$$

$$\{(-x_r^i)^{a_1 \dots (a_i-1)} \text{ para } 1 \leq i \leq r-1, (-1)^{a_1 \dots (a_r-1)}, -\sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G)(-x_r^i) - (-1)a_1 \dots a_{r-1} (a_r - 1)\}, \text{ se } r \text{ é ímpar.}$$

*Demonstração.* Segue dos resultados anteriores. □

### 3.5 Aplicação e Algoritmo de Determinação do $\text{spect}(G)$

Finalizamos este capítulo, apresentando uma aplicação dos resultados obtidos nas seções anteriores. Considere o cografo  $G = (K_3 \cup K_3) \otimes (K_3 \cup K_3)$  cuja coárvore balanceada  $T_G(2, 2, 0|0, 0, 3)$  é dada pela figura 17.

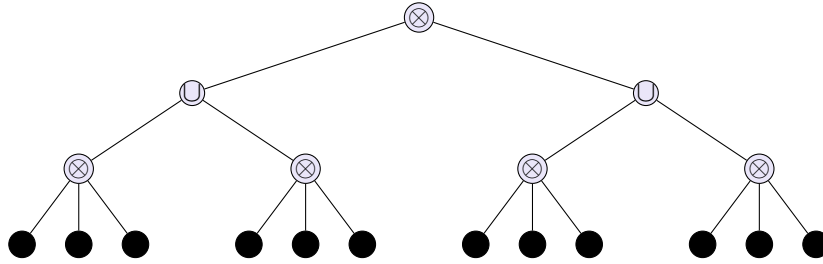


Figura 17 – Coárvore balanceada

Note que a profundidade  $r$  do cografo  $G$  é igual a 3, de modo que  $r$  é ímpar, e  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 2$  e  $a_3 = 3$ . Então, pelo Teorema 3.2.4, a multiplicidade do autovalor  $-1$  é igual a 8. Pelo Teorema 3.2.5, determinamos que o número de autovalores de  $G$ , distintos de  $-1$ , é igual a 4, assim concluímos que este cografo possui um total de 12 autovalores, dos quais faltam ainda determinarmos 4.

Pelo Corolário 3.3.9,  $-x_3^i$  é autovalor de  $G$ , para  $1 \leq i \leq 2$ , onde  $x_3^1 = \sum_{k=1}^2 \gamma_{3,1+k}(-1)^{k+1} + 1 = a_3 a_2 - a_3 + 1 = 4$  e  $x_3^2 = \sum_{k=1}^1 \gamma_{3,2+k}(-1)^k + 1 = -a_3 + 1 = -2$ . Ou seja,  $-4$  e  $2$  também são autovalores de  $G$ . Pelo Teorema 3.4.2,  $m(-4, G) = (a_1 - 1) = 2 - 1 = 1$  e  $m(2, G) = a_1(a_2 - 1) = 2(2 - 1) = 2$ . Portanto, falta determinar o autovalor pendente  $\lambda$ . Pelo Corolário 3.4.3,  $\lambda = -\sum_{i=1}^2 m(-x_3^i, G)(-x_3^i) - (-1)a_1 a_2 (a_3 - 1) = -m(-x_3^1, G)(-x_3^1) - m(-x_3^2, G)(-x_3^2) + 2 \cdot 2(3 - 1) = -m(-4, G)(-4) - m(2, G)(2) + 8 = -1(-4) - 2(2) + 8 = 4 - 4 + 8 = 8$ . Assim,  $\text{spect}(G) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Ou ainda, podemos determinar o espectro de  $G$  pelo Teorema 3.4.4. Nesse caso os autovalores e suas multiplicidades são determinados de imediato aplicando as informações da coárvore direto na fórmula

$\{(-x_r^i)^{a_1 \dots (a_i - 1)} \text{ para } 1 \leq i \leq r - 1, (-1)^{a_1 \dots (a_r - 1)}, -\sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G)(-x_r^i) - (-1)a_1 \dots a_{r-1} (a_r - 1)\}$ . Inspirados nisso, definimos o **Algoritmo de Determinação de  $\text{spect}(G)$**  ( $T_G, r$ ) (Figura 18).

INPUT: coárvore balanceada  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 0|0, \dots, a_r)$ , inteiro  $r$   
 OUTPUT:  $\text{spect}(G) = \{d_1^{a_1 \dots (a_r - 1)}, (-x_r^i)^{a_1 \dots (a_i - 1)} \text{ para } 1 \leq i \leq r - 1, \lambda\}$

Algoritmo de Determinação de  $\text{spect}(G)(T_G, r)$

iniciando por  $r \geq 2$ , para  $T_G(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 0|0, \dots, 0, a_r)$

analise  $r$

se  $r$  é ímpar

$d_1$  é autovalor com multiplicidade  $a_1 a_2 \dots (a_r - 1)$  //subcaso 1a

$d_1 \leftarrow -1$

$-x_r^i$  é autovalor com multiplicidade  $a_1 a_2 \dots (a_i - 1)$  //subcaso 1b

para  $1 \leq i \leq r - 1$  par, //subcaso 1ba

$-x_r^i \leftarrow -\sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r, i+k} (-1)^k - 1$

para  $1 \leq i \leq r - 1$  ímpar, //subcaso 1bb

$-x_r^i \leftarrow -\sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r, i+k} (-1)^{k+1} - 1$

$\lambda$  é autovalor com multiplicidade 1 //subcaso 1c

$\lambda \leftarrow -\sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G)(-x_r^i) - (-1)(a_1 \dots a_{r-1}(a_r - 1))$

se  $r$  é par

$d_1$  é autovalor com multiplicidade  $a_1 a_2 \dots (a_r - 1)$  //subcaso 2a

$d_1 \leftarrow 0$

$-x_r^i$  é autovalor com multiplicidade  $a_1 a_2 \dots (a_i - 1)$  //subcaso 2b

para  $1 \leq i \leq r - 1$  par, //subcaso 2ba

$-x_r^i \leftarrow -\sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r, i+k} (-1)^k$

para  $1 \leq i \leq r - 1$  ímpar, //subcaso 2bb

$-x_r^i \leftarrow -\sum_{k=1}^{r-i} \gamma_{r, i+k} (-1)^{k+1}$

$\lambda$  é autovalor com multiplicidade 1 //subcaso 2c

$\lambda \leftarrow -\sum_{i=1}^{r-1} m(-x_r^i, G)(-x_r^i)$

\*para todo  $r$  considere  $\gamma_{r, i+k} \begin{cases} a_r a_{r-1} a_{r-2} \dots a_{i+k}, & \text{se } 1 \leq i+k \leq r-1 \\ a_r, & \text{se } i+k = r \end{cases}$

Figura 18 – Algoritmo de Determinação de  $\text{spect}(G)$ .

Cosidere o cografo  $G = (K_{3,3} \cup K_{3,3}) \otimes (K_{3,3} \cup K_{3,3}) \otimes (K_{3,3} \cup K_{3,3})$  cuja coárvore balanceada é  $T_G(3, 2, 2, 0|0, 0, 0, 3)$ . Ao aplicarmos o Algoritmo de Determinação de  $\text{spect}(G)$  nessa coárvore com  $r = 4$ , obtemos, por  $r$  ser par, que 0 é autovalor com mul-



tiplicidade igual a 24. Além disso, pelos Subcasos 2ba e 2bb,  $-9$ ,  $3$  e  $-3$  também são autovalores com respectivas multiplicidades 2, 3 e 6. Pois,

$$x_4^1 = \gamma_{4,2}(-1)^2 + \gamma_{4,3}(-1)^3 + \gamma_{4,4}(-1)^4 = a_4 a_3 a_2 - a_4 a_3 + a_4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 3 = 9$$

$$x_4^2 = \gamma_{4,3}(-1) + \gamma_{4,4}(-1)^2 = -a_4 a_3 + a_4 = -6 + 3 = -3$$

$$x_4^3 = \gamma_{4,4}(-1)^2 = a_4 = 3$$

$$m(-x_4^1, G) = a_1 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$m(-x_4^2, G) = a_1(a_2 - 1) = 3 \cdot 1 = 3$$

$$m(-x_4^3, G) = a_1 a_2 (a_3 - 1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Por último, obtemos pelo Subcaso 2c, que  $\lambda = -(2 \cdot (-9) + 3 \cdot 3 + 6 \cdot (-3)) = -(-18 + 9 - 18) = 27$  também é autovalor, com multiplicidade igual a 1. Assim, o espectro de  $G$  é  $\text{spect}(G) = \{0^{24}, -9^2, 3^3, -3^6, 27\}$ .

## 4 Cografos integrais via triângulos combinatórios

No presente capítulo, embasados no artigo de Ching, Flórez e Mukhrjee (2020), apresentamos uma família infinita de cografos não regulares e integrais, obtidos pela técnica envolvendo matrizes de triângulos combinatórios. A técnica envolve associar uma matriz de adjacência, a uma matriz simétrica embutida no Determinante do Triângulo de Hosoya. Essa associação é realizada tomando o *mod 2* das entradas da matriz simétrica. Após, mostramos que essa matriz de adjacência está associada a um cografo, e pelo seu respectivo polinômio característico, determinamos o espectro.

### 4.1 O Determinante do Triângulo de Hosoya

O *Determinante do Triângulo de Hosoya* é um triângulo ordenado cujas entradas  $\{H_{r,k}\}_{r,k>0}$  são definidas recursivamente, da esquerda para a direita, por  $H_{r,k} = H_{r-1,k} + H_{r-2,k}$  e  $H_{r,k} = H_{r-1,k-1} + H_{r-2,k-2}$  com condição inicial  $H_{1,1} = 0, H_{2,1} = H_{2,2} = 1$  e  $H_{3,2} = 3$  onde  $r \geq 1$  e  $1 \leq k \leq r$  como ilustra a Figura 19.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 0 \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 3 & 1 \\
 & & 2 & 4 & 4 & 2 \\
 3 & 7 & 5 & 7 & 3
 \end{array}$$

Figura 19 – Determinante do Triângulo de Hosoya  $\mathcal{H}$

Esta definição é equivalente a definição  $H_{r,k} := F_{k-1}F_{r-k+2} + F_kF_{r-k}$ , onde cada  $F_i$ ,  $i \geq 0$ , é um termo da sequência de Fibonacci. Por Blair, Flórez, Mukherjee e Ramírez (2020), obtemos também que as entradas do triângulo são determinantes, ou seja,  $H_{r,k} = \begin{vmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_{r-k+1} & F_{r-k+2} \end{vmatrix}$ . Com esta notação conseguimos demonstrar propriedades sobre a divisibilidade das entradas, usando a notação  $mdc$  para maior divisor comum e  $\mathbb{Z}_{>0}$  para números inteiros positivos. Essas propriedades por sua vez, auxiliam na determinação de matrizes de adjacência, e com isso, na determinação de grafos associados. Considerando  $q$  um inteiro e  $a, b, c, d$  inteiros positivos, então as propriedades são

1.  $mdc(F_a, F_b) = F_{mdc(a,b)}$ ;

2.  $\text{mdc}(F_a, F_{a+1}) = 1$ ;
3. se  $\text{mdc}(a, c) = \text{mdc}(b, d) = 1$ , então  $\text{mdc}(ab, cd) = \text{mdc}(a, d)\text{mdc}(b, c)$ ;
4.  $\text{mdc}(bq + r, b) = \text{mdc}(r, b)$ .

## 4.2 Grafos obtidos de matrizes simétricas

Como o Determinante do Triângulo de Hosoya  $\mathcal{H}$  é simétrico em relação a mediana, fixando  $r = w$  para algum  $w \in \mathbb{Z}_{>0}$  definimos uma matriz simétrica  $\mathcal{S}_w^*$ , embutida em  $\mathcal{H}$ , cujas  $w$  linhas e colunas são restrições das diagonais de  $\mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{S}_w^* = \begin{pmatrix} H_{1,1} & H_{2,1} & H_{3,1} & \cdots & H_{w,1} \\ H_{2,2} & H_{3,2} & H_{4,2} & \cdots & H_{w+1,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{w,w} & H_{w+1,w} & H_{w+2,w} & \cdots & H_{2w-1,w} \end{pmatrix}_{w \times w} \quad (4.1)$$

A cada matriz simétrica  $\mathcal{S}_w^*$  associamos uma matriz de adjacência  $\mathcal{S}_w^* \bmod 2$ , que é construída tomando o  $\bmod 2$  de cada entrada da matriz simétrica  $\mathcal{S}_w^*$ ,

$$\mathcal{S}_w^* \bmod 2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{w \times w} \quad (4.2)$$

Por exemplo, para  $w = 4$  obtemos a matriz simétrica  $\mathcal{S}_4^*$ , embutida em  $\mathcal{H}$  (triângulo da Figura 19), e a matriz de adjacência  $\mathcal{S}_4^* \bmod 2$ :

$$\mathcal{S}_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 7 & 9 & 16 \end{pmatrix} \quad \mathcal{S}_4^* \bmod 2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Observe ainda, que pela definição equivalente  $H_{r,k} := F_{k-1}F_{r-k+2} + F_kF_{r-k}$  referente as entradas de  $\mathcal{H}$ , podemos reescrever  $\mathcal{S}_w$  como

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} F_0F_2 + F_1F_0 & F_0F_3 + F_1F_1 & F_0F_4 + F_1F_2 & \dots & F_0F_{w+1} + F_1F_{w-1} \\ F_1F_2 + F_2F_0 & F_1F_3 + F_2F_1 & F_1F_4 + F_2F_2 & \dots & F_1F_{w+1} + F_2F_{w-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{w-1}F_2 + F_wF_0 & F_{w-1}F_3 + F_wF_1 & F_{w-1}F_4 + F_wF_2 & \dots & F_{w-1}F_{w+1} + F_wF_{w-1} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} F_0F_2 & F_0F_3 & F_0F_4 & \dots & F_0F_{w+1} \\ F_1F_2 & F_1F_3 & F_1F_4 & \dots & F_1F_{w+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{w-1}F_2 & F_{w-1}F_3 & F_{w-1}F_4 & \dots & F_{w-1}F_{w+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1F_0 & F_1F_1 & F_1F_2 & \dots & F_1F_{w-1} \\ F_2F_0 & F_2F_1 & F_2F_2 & \dots & F_2F_{w-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_wF_0 & F_wF_1 & F_wF_2 & \dots & F_wF_{w-1} \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{w-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 & F_3 & F_4 & \dots & F_{w+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{w-1} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz simétrica  $\mathcal{S}_w$  é decomposta na soma do produto de duas matrizes com posto um  $(u_1^T v_1 + u_2^T v_2)^1$ , cujas entradas de  $u_1, u_2, v_1$  e  $v_2$  são números de Fibonacci em ordem consecutiva. Assim, a matriz  $\mathcal{S}_4$  de (4.3) é igual a

$$\mathcal{S}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

O grafo associado a  $\mathcal{S}_4$ , segundo sua matriz de adjacência *mod* 2, é um grafo quase regular (grafo cuja a diferença entre o grau máximo e grau mínimo é 1) com dois laços, denotado por  $\mathcal{G}_4^* = (K_1^* \cup K_1^*) \otimes \overline{K_2}$  (Figura 20). Ou seja, é um grafo obtido através do triângulo  $\mathcal{H}$  tal que a ordem é a soma da ordem de outros três grafos, dois quase regulares com laços ( $K_1^*$ ) e um complementar de um regular ( $\overline{K_2}$ ). Assim, nos perguntamos: todos os grafos obtidos do triângulo  $\mathcal{H}$  são produto das operações de join e união disjunta de outros 3 grafos?

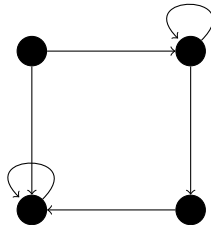


Figura 20 – Grafo  $\mathcal{G}_4^*$  associado a matriz  $\mathcal{S}_4$

A resposta é obtida pela Proposição 4.2.1 a seguir.

<sup>1</sup> A matriz  $A^T$  é a matriz transposta da matriz  $A$ , para toda  $A$ .

**Proposição 4.2.1.** *Seja  $\mathcal{S}_w \bmod 2$  uma matriz simétrica embutida em  $\mathcal{H}$ , então o grafo associado a ela é da forma  $\mathcal{G}_w^* = \begin{cases} (K_t^* \cup K_t^*) \otimes \bar{K}_t & , \text{ se } w = 3t; \\ (K_t^* \cup K_t^*) \otimes \bar{K}_{t+1} & , \text{ se } w = 3t + 1; \\ (K_t^* \cup K_{t+1}^*) \otimes \bar{K}_{t+1} & , \text{ se } w = 3t + 2. \end{cases}$*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{S}_w \bmod 2$  uma matriz simétrica obtida através de  $\mathcal{H}$ , tal que  $w = 3t+1$ . Estabelecemos a seguinte notação para a  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de  $\mathcal{S}_w \bmod 2$ :  $z_{ij}$ , onde  $i, j = 3k + 1$ , para  $0 \leq k \leq t$ ;  $v_{ij}$ , onde  $i, j = 3k - 1$ , para  $1 \leq k \leq t$ ;  $u_{ij}$ , onde  $i, j = 3k$ , para  $1 \leq k \leq t$ . A essa notação associamos  $\{z_k\}_{1 \leq k \leq t+1}$ ,  $\{v_k\}_{1 \leq k \leq t}$  e  $\{u_k\}_{1 \leq k \leq t}$  referentes aos vértices do grafo  $\mathcal{G}_w^*$ , como ilustra a Figura 21.

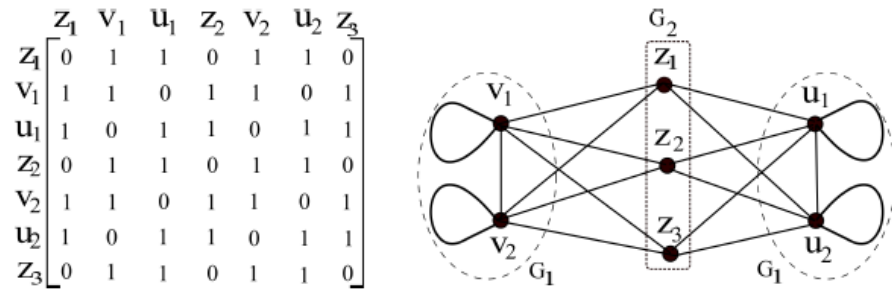


Figura 21 – Notação das entradas da matriz  $S_4 \bmod 2$

Agora façamos o comparativo entre a matriz  $\mathcal{S}_w \bmod 2$  e sua notação associada aos vértices do grafo  $\mathcal{G}_w^*$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{w \times w}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 z_1 & z_1 v_1 & z_1 u_1 & z_1 z_2 & \dots & z_1 v_{3t-1} & z_1 u_{3t} & z_1 z_{3t+1} \\ v_1 z_1 & v_1 v_1 & v_1 u_1 & v_1 z_2 & \dots & v_1 v_{3t-1} & v_1 u_{3t} & v_1 z_{3t+1} \\ u_1 z_1 & u_1 v_1 & u_1 u_1 & u_1 z_2 & \dots & u_1 v_{3t-1} & u_1 u_{3t} & u_1 z_{3t+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{3t-1} z_1 & v_{3t-1} v_1 & v_{3t-1} u_1 & v_{3t-1} z_2 & \dots & v_{3t-1} v_{3t-1} & v_{3t-1} u_{3t} & v_{3t-1} z_{3t+1} \\ u_{3t} z_1 & u_{3t} v_1 & u_{3t} u_1 & u_{3t} z_2 & \dots & u_{3t} v_{3t-1} & u_{3t} u_{3t} & u_{3t} z_{3t+1} \\ z_{3t+1} z_1 & z_{3t+1} v_1 & z_{3t+1} u_1 & z_{3t+1} z_2 & \dots & z_{3t+1} v_{3t-1} & z_{3t+1} u_{3t} & z_{3t+1} z_{3t+1} \end{pmatrix}.$$

Notemos que os vértices  $\{z_k\}_{1 \leq k \leq t+1}$  não possuem laços, pois ocupam as entradas nulas da diagonal da matriz, enquanto que os vértices  $\{v_k\}_{1 \leq k \leq t}$  e  $\{u_k\}_{1 \leq k \leq t}$  possuem, pois ocupam as entradas não nulas da diagonal da matriz. Além de que os  $t + 1$  vértices

denotados por  $z$  não são adjacentes, pois as entradas correspondentes  $z_{ij}$  são iguais a zero, portanto o conjunto desses  $t + 1$  vértices compõem um grafo  $\overline{K}_{t+1}$ .

Além de possuir laços, os  $t$  vértices denotados por  $v$  são adjacentes, pois as entradas correspondentes  $v_{ij}$  são iguais a um, compondo assim um grafo  $K_t^*$ . O mesmo observamos para os  $t$  vértices  $u$ . Restando a análise das entradas da matriz correspondentes as combinações entre os vértices  $v$  e  $u$ . Essas ocupam as entradas nulas da matriz. Assim, a união entre os grafos gerados pelos vértices  $\{v_k\}_{1 < k < t}$  e  $\{u_k\}_{1 < k < t}$  é uma união disjunta resultando em um grafo  $K_t^* \cup K_t^*$ .

Por último analisamos as entradas da matriz correspondentes as combinações entre os vértices  $z$  e  $v$ , e os vértices  $z$  e  $u$ . Essas ocupam as entradas com valor 1. Então existe uma operação de join entre o grafo  $\overline{K}_{t+1}$  e cada um dos grafos  $K_t^*$ . Portanto, o grafo associado a matriz  $\mathcal{S}_{3t+1} \bmod 2$  é da forma  $\mathcal{G}_{3t+1}^* = (K_t^* \cup K_t^*) \otimes \overline{K}_{t+1}$ .

De maneira similar provamos que para  $w = 3t$  e  $w = 3t + 2$ , os grafos associados as matrizes  $\mathcal{S}_{3t} \bmod 2$  e  $\mathcal{S}_{3t+2} \bmod 2$  são da forma  $\mathcal{G}_{3t}^* = (K_t^* \cup K_t^*) \otimes \overline{K}_t$  e  $\mathcal{G}_{3t+2}^* = (K_t^* \cup K_{t+1}^*) \otimes \overline{K}_{t+1}$ .  $\square$

Ao substituir a mediana de  $\mathcal{H}$ ,  $(0, 3, 5, 16, \dots)$ , por  $(0, 0, 0, 0, \dots)$ , obtemos uma nova matriz simétrica  $\mathcal{S}_w \bmod 2$  cujo grafo associado  $\mathcal{G}_w$  não possui laços. Pela Proposição 4.2.1 esse grafo é da forma  $\mathcal{G}_w = \begin{cases} (K_t \cup K_t) \otimes \overline{K}_t & , \text{ se } w = 3t; \\ (K_t \cup K_t) \otimes \overline{K}_{t+1} & , \text{ se } w = 3t + 1; \\ (K_t \cup K_{t+1}) \otimes \overline{K}_{t+1} & , \text{ se } w = 3t + 2. \end{cases}$

**Proposição 4.2.2.** *Seja  $\mathcal{S}_w \bmod 2$  uma matriz simétrica embutida em  $\mathcal{H}$ . Então, para mediana  $(0, 3, 5, 16, \dots)$  o grafo  $\mathcal{G}_w^*$  é um cografo, e para mediana  $(0, 0, 0, 0, \dots)$  o grafo  $\mathcal{G}_w$  é um cografo.*

*Demonstração.* Segue direto da **Definição 2.3.1**.  $\square$

Denotaremos por  $\mathcal{G}_{ttt}^*$  ( $\mathcal{G}_{ttt}$ ),  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}^*$  ( $\mathcal{G}_{tt(t+1)}$ ) e  $\mathcal{G}_{t(t+1)(t+1)}^*$  ( $\mathcal{G}_{t(t+1)(t+1)}$ ) os grafos associados, consecutivamente, as matrizes simétricas de ordem  $w = 3t$ ,  $w = 3t + 1$  e  $w = 3t + 2$ .

**OBS:** Agora que obtemos grafos do *Determinante do Triângulo de Hosoya*, é natural investigarmos seus espectros. Antes disso buscamos caracterizar, dentre os três tipos de ordem da matriz  $\mathcal{S}_w \bmod 2$ , quais geram grafos regulares. Para isso, é fácil ver que o join de dois grafos,  $G_1 \otimes G_2$ , pode ser representado pela matriz

$$M_{(m+n) \times (m+n)} = \left( \begin{array}{c|c} A(G_1)_{m \times m} & J_{m \times n}^T \\ \hline J_{n \times m} & A(G_2)_{n \times n} \end{array} \right).$$

Onde,  $A(G_1)_{m \times m}$  e  $A(G_2)_{n \times n}$  são matrizes de adjacência de  $G_1$  e  $G_2$ , e  $J_{n \times m}$  é matriz de entradas todas iguais a 1.

**Teorema 4.2.3.** *Seja  $\mathcal{S}_w \text{ mod } 2$  uma matriz simétrica e o grafo  $\mathcal{G}_w$  associado a ela. Então,  $\mathcal{G}_w$  é regular, se e somente se,  $w = 3t + 1$ ,  $t \geq 0$ . Além disso,  $\mathcal{G}_w$  é  $2t$ -regular.*

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Para  $w = 3t + 1$ , mostremos que  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}$  é regular.

Seja  $A = (a_{i,j})$  a matriz de adjacência de  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}$ , portanto,

$$a_{i,j} = \begin{cases} (F_{i+1}F_{j+1} - F_iF_j) \text{ mod } 2, & \text{para } i \neq j; \\ 0, & \text{para } i = j. \end{cases}$$

**Afirmção:** As entradas  $a_{i,j}$ , de  $A$ , são iguais a  $0 \text{ mod } 2$  se  $a_{i,j} \in \xi = \{a_{1,3k+1}, a_{2,3k}, a_{3,3k-1}, \dots, a_{3k+1,1}\}$ , para  $1 \leq k \leq t$ , e são iguais a  $1$  caso contrário.

*Demonstração da Afirmção:* Para  $a_{1,3k+1}$ ,  $a_{2,3k}$ ,  $a_{3,3k-1}$  e  $a_{4,3k-2}$  conseguimos observar a validade da **Afirmção** comparando essas entradas com a matriz  $A \text{ mod } 2$ , de maneira semelhante ao que foi feito na demonstração da **Proposição 4.2.1**. Agora, para as outras entradas do conjunto  $\xi$ , consideramos  $a_{i,3k+2-i} = F_{i+1}F_{3k+2-i+1} - F_iF_{3k+2-i}$ . E assim, demonstramos a **Afirmção** separando em três casos:  $i = 3s - 1$ ,  $i = 3s$  e  $i = 3s + 1$  para  $s > 1$ .

Para  $i = 3s - 1$ , temos  $a_{3s-1,3(k-s+1)} = F_{3s}F_{3(k-s)+4} - F_{3s-1}F_{3(k-s)+1}$ .

Como  $\text{mdc}(F_{3s-1}, F_{3s}) = 1 = \text{mdc}(F_{3(k-s)+1}, F_{3(k-s)+4})$ , então

$$\begin{aligned} \text{mdc}(F_{3s}F_{3(k-s)+4}, F_{3s-1}F_{3(k-s)+1}) &= \text{mdc}(F_{3s}, F_{3(k-s)+1})\text{mdc}(F_{3s-1}, F_{3(k-s)+4}) \\ &= F_{\text{mdc}(3s,3(k-s+1))}F_{\text{mdc}(3s-1,3(k-s)+4)}. \end{aligned}$$

Portanto,  $F_{\text{mdc}(3s-1,3(k-s)+4)}$  e  $F_{\text{mdc}(3s,3(k-s+1))}$  dividem  $a_{3s-1,3(k-s)+1}$ . Como a sequência de Fibonacci gera uma sequência de dois números ímpares e um par, consecutivamente, concluímos que  $F_{3s}$  é um número par, assim  $F_{\text{mdc}(3s,3(k-s+1))}$  é par, logo  $a_{i,3k+2-i}$  é par.

Para  $i = 3s$  e  $i = 3s + 1$ , obtemos, de maneira análoga aos passos traçados para  $i = 3s - 1$ , que  $a_{i,3k+2-i}$  é par. Assim, as entradas pares de  $A \text{ mod } 2$  fazem parte do conjunto  $\xi$ . Como  $\text{mod } 2$  é uma matriz de zeros e uns, e a sequência de Fibonacci é uma sequência de um número par e dois ímpares, segue o resultado da **Afirmção**.

Sendo assim, e pela representação matricial do join de dois grafos (conferir **OBS** imediatamente anterior ao **Teorema 4.2.3**), a matriz  $A$  é da forma

$$A_{(3t+1) \times (3t+1)} = \left( \begin{array}{cc|c} A(K_t)_{t \times t} & 0_{t \times t} & J_{2t \times (t+1)}^T \\ 0_{t \times t} & A(K_t)_{t \times t} & \\ \hline J_{(t+1) \times 2t} & & A(\overline{K}_{t+1})_{(t+1) \times (t+1)} \end{array} \right)$$

Perceba que as duas matrizes  $A(K_t)$  de  $A$  não possuem vértices adjacentes entre si, pois as entradas correspondentes dessa conexão fazem parte das matrizes  $0_{t \times t}$ . No entanto, ambas possuem conexão com  $\overline{K}_{t+1}$ , uma vez que as entradas correspondentes fazem parte das matrizes  $J_{(t+1) \times 2t}$  e  $J_{2t \times (t+1)}^T$ , que são matrizes de 1. Por isso, temos que o grafo  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}$  é conexo. Além disso, o grau dos vértices do subgrafo  $K_t$ , que é  $(t-1) + (t+1) = 2t$ , é o mesmo que o grau dos vértices do subgrafo  $K_{t+1}$ , que é  $t + t = 2t$ . Então, todos os vértices de  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}$  têm o mesmo grau  $2t$ , portanto  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}$  é  $2t$ -regular.

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $\mathcal{G}_w$  é um grafo regular e  $w \neq 3t + 1$  :  $w = 3t$  e  $w = 3t + 2$ .

1. Se  $w = 3t$ , então  $\mathcal{G}_{ttt}$  é o grafo associado, segundo a **Proposição 4.2.1**. Pela **Proposição 4.2.2**, e pela definição de **cografo (Definição 2.3.1)**, esse grafo é conexo. Além disso, sabemos pela **Proposição 4.2.1** que  $\mathcal{G}_{ttt} = (K_t \cup K_t) \otimes \overline{K}_t$ , por isso o grau máximo (denotado por  $\Delta$ ) e o grau mínimo (denotado por  $\delta$ ) desse grafo são, respectivamente, o dobro dos  $t$  vértices isolados do complementar de  $K_t$ , e a soma do grau de  $K_t$  com os  $t$  adjacentes agregados do complementar de  $K_t$  (ou seja,  $\Delta = 2t$  e  $\delta = d(K_t) + |K_t| = (t-1) + (t) = 2t - 1$ ). Desta forma, obtemos  $\Delta - \delta = 2t - (2t - 1) = 1$ , o que nos faz concluir que  $\mathcal{G}_w$  é quase regular, e isso contradiz a hipótese dele ser regular.
2. Se  $w = 3t + 2$ , então  $\mathcal{G}_{t(t+1)(t+1)}$  é o grafo associado, segundo a **Proposição 4.2.1**. Pela **Proposição 4.2.2**, e pela definição de **cografo (Definição 2.3.1)**, esse grafo é conexo. Além disso, sabemos pela **Proposição 4.2.1** que  $\mathcal{G}_{t(t+1)(t+1)} = (K_t \cup K_{t+1}) \otimes \overline{K}_{t+1}$ , por isso o grau máximo ( $\Delta$ ) e o grau mínimo ( $\delta$ ) desse grafo são, respectivamente, a soma do grau de  $K_{t+1}$  com os  $t + 1$  adjacentes agregados do complementar de  $K_{t+1}$ , e a soma do grau de  $K_t$  com os  $t + 1$  adjacentes agregados do complementar de  $K_{t+1}$  (ou seja,  $\Delta = d(K_{t+1}) + |\overline{K}_{t+1}| = (t+1) - 1 + (t+1) = 2t + 1$  e  $\delta = d(K_t) + |K_{t+1}| = (t) - 1 + (t+1) = 2t$ ). Desta forma, obtemos  $\Delta - \delta = 2t + 1 - 2t = 1$ , o que nos faz concluir que  $\mathcal{G}_w$  é quase regular, e isso entra em contradição com a hipótese sobre o grafo ser regular.

Então,  $w = 3t + 1$ . □

Observe que os vértices que possuem grau mínimo  $\delta = 2t - 1$ , do grafo  $\mathcal{G}_{ttt}^*$ , são os vértices que possuem laço, assim como os vértices que possuem grau mínimo  $\delta = 2t$ , do grafo  $\mathcal{G}_{t(t+1)(t+1)}^*$ , são os vértices que possuem laço. No grafo  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}^*$ , como é regular, seu grau é o mesmo para todos os vértices ( $\Delta = \delta = 3t$ ), sendo que os vértices que não possuem laço são os vértices cujas entradas diagonais correspondentes  $a_{ii}$  para  $i = 3k + 1$ ,  $0 \leq k \leq t$ , da matriz simétrica, são pares ( $0 \pmod{2}$ ), ou seja, apenas uma quantidade  $t$  de vértices, correspondentes ao grau que o grafo  $\overline{K}_{t+1}$  soma no grau de  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}^*$ , que implica o número de vértices com laço de  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}^*$  ser  $(3t) - t = 2t$ .



### 4.3 Cografos não regulares e integrais

Após vermos que nem todos os grafos do tipo  $\mathcal{G}_w$  são regulares, partimos para a investigação do espectro de grafos não regulares.

Os grafos chamados *integrais*, são aqueles cujos todos seus autovalores são números inteiros. Na sequência, exibimos um resumo de alguns resultados clássicos, que podem ser encontrados no artigo de Balínska, Cvetković, Rarosavljević, Simić e Stevanović (2002), que serão usados nas Proposição 4.4 e Proposição 4.3.3, a seguir.

Começamos denotando  $G_i$  o grafo com  $n_i$  vértices e  $r_i$  regularidades, para  $i = 1, 2$ . A partir disso, e pela representação matricial do join de dois grafos da seção anterior (**OBS**), seguem os resultados:

- [1] O grafo  $G_1 \otimes G_2$  é integral, se e somente se,  $G_1$  e  $G_2$  são grafos integrais e  $(r_1 - r_2)^2 + 4n_1n_2$  é um quadrado perfeito.
- [2] O polinômio característico,  $P_{G_1 \otimes G_2}(\lambda)$ , do grafo  $G_1 \otimes G_2$  é igual a  $(-1)^{n_2} P_{G_1}(\lambda) P_{\overline{G_2}}(-\lambda - 1) + (-1)^{n_1} P_{G_2}(\lambda) P_{\overline{G_1}}(-\lambda - 1) - (-1)^{n_1+n_2} P_{\overline{G_1}}(-\lambda - 1) P_{\overline{G_2}}(-\lambda - 1)$ .

Os resultados [1],[2] acima, são de grafos em geral. Mas podemos particularizar para grafos  $r_i$  regulares,  $i = 1, 2$ .

- [3] Se  $G_i$  é  $r_i$ -regular, para  $i = 1, 2$ , então o polinômio característico de  $G_1 \otimes G_2$  é obtido por  $P_{G_1 \otimes G_2}(\lambda) = \frac{P_{G_1}(\lambda) P_{G_2}(\lambda)}{(\lambda - r_1)(\lambda - r_2)} ((\lambda - r_1)(\lambda - r_2) - (n_1 n_2))$ .

Temos ainda, em adição da **matriz de adjacência** do grafo  $G_1 \otimes G_2$  (**OBS** da seção anterior), o resultado

- [4] Se  $\tilde{A}_1 = ac^T - A(G_1)$  e  $\tilde{A}_2 = bd^T - A(G_2)$ , então o polinômio característico de  $M$  é obtido por  $P_M(\lambda) = (-1)^m P_{\tilde{A}_1}(-\lambda) P_{A(G_2)}(\lambda) + (-1)^n P_{A(G_1)}(\lambda) P_{\tilde{A}_2}(-\lambda) - (-1)^{m+n} P_{\tilde{A}_1}(-\lambda) P_{\tilde{A}_2}(-\lambda)$ .

A combinação destes resultados com o Lema 4.3.1 culmina em uma condição necessária e suficiente para que o grafo  $\mathcal{G}_{nmr} = (K_n \cup K_m) \otimes \overline{K_r}$  seja integral. Para assim obtermos uma família infinita de cografos não regulares e integrais. A demonstração do Lema a seguir pode ser encontrada no artigo de Machado e Trevisan (1999).

**Lema 4.3.1.** *Se  $n$  é um inteiro positivo, então*

1. O polinômio característico de  $K_n$  é obtido por  $p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - (n - 1)) (\lambda + 1)^{n-1}$ .
2. O polinômio característico de  $K_{m,n}$  é obtido por  $p(\lambda) = (-1)^{m+n} \lambda^{m+n-2} (\lambda^2 - nm)$ .
3. O polinômio característico de  $\overline{K}_n$  é obtido por  $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$ .
4. O polinômio característico de  $K_m \cup K_n$  é obtido por  $p(\lambda) = (-1)^{m+n} (\lambda - (n - 1)) (\lambda - (m - 1)) (\lambda + 1)^{m+n-2}$ .

**Proposição 4.3.2.** *Sejam  $n, m, r \in \mathbb{Z}_{>0}$ , e  $P(\lambda)$  o polinômio característico de  $\mathcal{G}_{nmr}$ . Então,*

1. *se  $n \neq m$ ,  $P(\lambda) = (-1)^{m+n+r} \lambda^{r-1} (\lambda + 1)^{m+n-2} [\lambda^3 - (m+n-2)\lambda^2 - ((m+n)(r+1) - mn - 1)\lambda - ((m+n)r - 2mnr)]$ .*
2. *Se  $n = m > 1$ ,  $P(\lambda) = (-1)^r \lambda^{r-1} (\lambda + 1)^{2(n-1)} (\lambda - (n-1)) (\lambda^2 - (n-1)\lambda - 2nr)$ .*

*Demonstração.* Do **Lema 4.3.1** segue que

1. para  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ , o polinômio característico de  $K_r$  é  $p(\lambda) = (-1)^r (\lambda - (r-1)) (\lambda + 1)^{r-1}$  e o polinômio característico de  $\overline{K}_r$  é  $p(\lambda) = (-1)^r \lambda^r$ ;
2. para  $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ , o polinômio característico de  $K_{n,m}$  é  $p(\lambda) = (-1)^{n+m} \lambda^{m+n-2} (\lambda^2 - nm)$  e o polinômio característico de  $K_n \cup K_m$  é  $p(\lambda) = (-1)^{m+n} (\lambda - (n-1)) (\lambda - (m-1)) (\lambda + 1)^{m+n-2}$ .

Denotamos  $G_1 = K_n \cup K_m$ ,  $\overline{G}_1 = K_{n,m}$ ,  $G_2 = \overline{K}_r$  e  $\overline{G}_2 = K_r$  os grafos tais que  $G_1 \otimes G_2 = (K_n \cup K_m) \otimes \overline{K}_r = \mathcal{G}_{nmr}$ , para  $n, m, r \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Ou seja, determinar  $P_{\mathcal{G}_{nmr}}(\lambda)$  é o mesmo que determinar  $P_{G_1 \otimes G_2}(\lambda)$ . Para  $n_1$  (número de vértices de  $G_1$ ), temos  $n_1 = n+m$ , e para  $n_2$  (número de vértices de  $G_2$ ), temos  $n_2 = r$ . Assim, segue pelo segundo resultado ([2]), anterior ao **Lema 4.3.1**, que

$$P_{\mathcal{G}_{nmr}}(\lambda) = P_{G_1 \otimes G_2}(\lambda) = (-1)^r P_{G_1}(\lambda) P_{\overline{G}_2}(-\lambda - 1) + (-1)^{n+m} P_{G_2}(\lambda) P_{\overline{G}_1}(-\lambda - 1) - (-1)^{n+m+r} P_{\overline{G}_1}(-\lambda - 1) P_{\overline{G}_2}(-\lambda - 1).$$

Substituindo os polinômios dos itens 1. e 2. em  $P_{\mathcal{G}_{nmr}}(\lambda)$ , e como

$$\begin{aligned} P_{G_1}(\lambda) &= P_{K_n \cup K_m}(\lambda) = (-1)^{m+n} (\lambda - (n-1)) (\lambda - (m-1)) (\lambda + 1)^{m+n-2} \\ P_{\overline{G}_1}(-\lambda - 1) &= P_{K_{n,m}}(-\lambda - 1) = (\lambda + 1)^{m+n-2} ((\lambda + 1)^2 - nm) \\ P_{G_2}(\lambda) &= P_{\overline{K}_r}(\lambda) = (-1)^r \lambda^r, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} &(-1)^r (-1)^{m+n} (\lambda - (n-1)) (\lambda - (m-1)) (\lambda + 1)^{m+n-2} (\lambda + r) \lambda^{r-1} + (-1)^{n+m} (-1)^r \lambda^r \\ &(\lambda + 1)^{m+n-2} ((\lambda + 1)^2 - nm) - (-1)^{n+m+r} (\lambda + 1)^{m+n-2} ((\lambda + 1)^2 - nm) (\lambda + r) \lambda^{r-1}, \end{aligned}$$

que simplificando fica

$$\begin{aligned} &(-1)^{m+n+r} \lambda^{r-1} (\lambda + 1)^{m+n-2} [\lambda^3 - (m+n-2)\lambda^2 - ((m+n)(r+1) - mn - 1)\lambda - \\ &((m+n)r - 2mnr)]. \end{aligned}$$

Com isso, segue o primeiro resultado, de que para  $n \neq m$ ,  $P(\lambda) = (-1)^{m+n+r} \lambda^{r-1} (\lambda + 1)^{m+n-2} [\lambda^3 - (m+n-2)\lambda^2 - ((m+n)(r+1) - mn - 1)\lambda - ((m+n)r - 2mnr)]$  é o polinômio característico de  $\mathcal{G}_{nmr}$ .

Se  $n = m$ , então

$$\begin{aligned} (-1)^{m+n+r} &= (-1)^{2n}(-1)^r = (-1)^r \\ (\lambda + 1)^{m+n-2} &= (\lambda + 1)^{2n-2} = (\lambda + 1)^{2(n-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[\lambda^3 - (m+n-2)\lambda^2 - ((m+n)(r+1) - mn - 1)\lambda - ((m+n)r - 2mnr)] = \\ &[\lambda^3 - 2(n-1)\lambda^2 - (2nr\lambda + 2n\lambda - n^2\lambda - \lambda) - (2nr - 2n^2r)] = (\lambda - n + 1)(\lambda^2 - \lambda n + \\ &\lambda - 2nr) = (\lambda - (n-1))(\lambda^2 - (n-1)\lambda - 2nr) \end{aligned}$$

Seguindo assim, o segundo resultado.  $\square$

**Proposição 4.3.3.** *Sejam  $n, r \in \mathbb{Z}_{>0}$ .  $\mathcal{G}_{nmr}$  é integral se e somente se  $2nr = pq$  e  $n - 1 = p - q$  para certos  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese  $\mathcal{G}_{nmr}$  é integral. Suponhamos que  $2nr \neq pq$  ou  $n - 1 \neq p - q$  para todo  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Pelo primeiro resultado [1], dos resultados apresentados no início desta seção,  $(r_1 - r_2)^2 + 4n_1n_2$  é um quadrado perfeito, para  $r_1$  e  $r_2$  regularidades de  $K_n \cup K_n$  e  $\bar{K}_r$ , consecutivamente, e  $n_1$  e  $n_2$ , números de vértices de  $K_n \cup K_n$  e  $\bar{K}_r$ . Como  $r_1 = n - 1, r_2 = 0, n_1 = 2n$  e  $n_2 = r$ , então  $(r_1 - r_2)^2 + 4n_1n_2 = (n - 1)^2 + 8nr = n^2 + (8r - 2)n + 1$  é quadrado perfeito. Ou seja,  $n^2 + (8r - 2)n + 1 = (n + p)(n + q)$  para algum  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Daí,

$$\begin{aligned} n^2 + (8r - 2)n + 1 &= (n + p)(n + q) = n^2 + (p + q)n + pq \\ &\iff 8r - 2 = p + q \text{ e } 1 = pq \\ &\iff p = q = 1 \text{ ou } p = q = -1. \end{aligned}$$

Se  $p = q = 1$ , então  $8r - 2 = 2 \iff 2r = 1$ , absurdo, pois  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Se  $p = q = -1$ , então  $8r - 2 = -2 \iff 8r = 0$ , absurdo, pois  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Portanto,  $2nr = pq$  e  $n - 1 = p - q$  para algum  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

( $\Leftarrow$ ) Observamos que o grafo  $G_1 = K_n \cup K_n$  é um cografo com coárvore balanceada associada  $T_{G_1} = (2, 0|0, n)$ . Por isso, pelo Capítulo 3, sabemos que  $G_1$  é integral, assim como  $G_2 = \bar{K}_r$ , pois o único autovalor associado a  $G_2$  é o zero. Além disso, o grafo  $(K_n \cup K_n)$  tem  $n_1 = 2n$  vértices e é  $(n - 1)$ -regular ( $r_1 = n - 1$ ); o grafo  $(\bar{K}_r)$  tem  $n_2 = r$  vértices e é  $0$ -regular ( $r_2 = 0$ ). Substituindo  $r_1, r_2, n_1$  e  $n_2$  na expressão  $(r_1 - r_2)^2 + 4n_1n_2$ ,

considerando a hipótese  $pq = 2nr$  e  $p - q = n - 1$ , para  $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ , obtemos o seguinte quadrado perfeito

$$(r_1 - r_2)^2 + 4n_1n_2 = (n - 1)^2 + 8nr = (p - q)^2 + 4pq = p^2 + 2qp + q^2 = (p + q)^2.$$

Portanto, pelo primeiro resultado [1], dos apresentados no início desta seção, segue que  $(K_n \cup K_n) \otimes \overline{K}_r$  é integral.  $\square$

Na sequência, analisamos a integralidade dos grafos do tipo  $\mathcal{G}_w^*$  e  $\mathcal{G}_w$ , oriundos da Proposição 4.2.1. Começamos pelos grafos sem laços.

**Proposição 4.3.4.** *Para  $t > 0$ , o polinômio característico de  $\mathcal{G}_w$ ,*

1. para  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}$ , é  $p(\lambda) = \begin{cases} \lambda^2(\lambda + 2)(\lambda - 2), & \text{se } t = 1; \\ \lambda^t(\lambda - 2t)((\lambda + 1)^2 - t^2)(\lambda + 1)^{2(t-1)}, & \text{se } t > 1. \end{cases}$
2. para  $\mathcal{G}_{ttt}$ , é  $p(\lambda) = \begin{cases} \lambda(\lambda^2 - 2), & \text{se } t = 1; \\ \lambda^{t-1}(\lambda + 1)^{2(t-1)}(\lambda - t + 1)(\lambda^2 - (t - 1)\lambda - 2t^2), & \text{se } t > 1. \end{cases}$
3. para  $\mathcal{G}_{t(t+1)(t+1)}$ , é  $p(\lambda) = \begin{cases} \lambda(\lambda + 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda + 2), & \text{se } t = 1; \\ \lambda^t(\lambda + 1)^{2(t-1)}(\lambda^3 + (1 - 2t)\lambda^2 - (t^2 + 4t + 1)\lambda + (2t^2 - 1)(t + 1)), & \\ \text{se } t > 1. \end{cases}$

*Demonstração.* Os polinômios característicos são obtidos pela **Proposição 4.3.2**. No caso  $\mathcal{G}_{ttt}$ , mudamos a notação para  $n = m = r = t$ , no caso  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}$ , para  $n = m = t$ ,  $r = t + 1$ , e no caso  $\mathcal{G}_{t(t+1)(t+1)}$ , para  $n = t$ ,  $m = r = t + 1$ . Como os polinômios seguem de imediato dessa mudança de notação, suprimimos as contas.  $\square$

**Lema 4.3.5.** *Se  $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ , então nenhum polinômio linear mônico em  $\mathbb{Z}[x]$  fatora os polinômios seguintes,*

1.  $p_1(x) = x^2 + (1 - t)x - 2t^2$ ,
2.  $p_2(x) = x^3 + (1 - 2t)x^2 - (t^2 + 4t + 1)x + (2t^3 + 2t^2 - t - 1)$ ,
3.  $p_3(x) = x^2 - tx - 2t(t + 1)$ ,
4.  $p_4(x) = x^3 - (2t + 1)x^2 - (t + 1)^2x + 2t(t + 1)^2$ .

*Demonstração.* 1. Suponha que existam polinômios lineares mônicos em  $\mathbb{Z}[x]$  que factorem  $p_1$ . Sejam eles  $x + a$  e  $x + b$ , tais que  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Com isso, é verdade que

$$x^2 + (1 - t)x - 2t^2 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \iff 1 - t = a + b \text{ e } -2t^2 = ab$$

Como  $t > 0$ , para  $t = 1$  temos  $a + b = 1 - t = 1 - 1 = 0 \iff a = -b$ . Substituindo  $a = -b$  em  $-2t^2 = ab$  obtemos  $-2t^2 = -b^2 \iff b = t\sqrt{2}$ , absurdo, pois  $b \in \mathbb{Z}$ . Portanto, nenhum polinômio linear mônico fatora  $p_1$ .

2. Suponha que existe um polinômio linear mônico em  $\mathbb{Z}[x]$ , que fatora  $p_2$ . Seja  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $x - q$  fatora  $p_2$ , isso implica que  $q$  é uma raiz de  $p_2$ , ou seja,  $p_2(q) = 0$

$$\begin{aligned} &\iff q^3 + (1 - 2t)q^2 - (t^2 + 4t + 1)q + (2t^3 + 2t^2 - t - 1) = 0 \\ &\iff q^3 + (1 - 2t)q^2 - (t^2 + 4t + 1)q = -(2t^3 + 2t^2 - t - 1) = (1 - 2t^2)(t + 1). \end{aligned}$$

Então,  $q$  divide  $(1 - 2t^2)(t + 1)$ , por isso  $q \neq 0$  e  $1 \leq q \leq (2t^2 - 1)(t + 1)$ . Como

$$q^3 + (1 - 2t)q^2 - (t^2 + 4t + 1)q = (1 - 2t^2)(t + 1), \quad (4.4)$$

consideramos os cinco casos seguintes.

**Caso**  $q = 1$ , substituímos esse valor em (4.4) e obtemos a seguinte igualdade  $1 - 6t - t^2 = (1 - 2t^2)(t + 1)$ . Como  $t > 0$ , observamos que para  $t = 1$  a igualdade obtida é equivalente a  $1 - 7 = (-1)(2) \iff 6 = 2$ , mas isso é um absurdo.

**Caso**  $1 < q < t + 1$ , existe um inteiro  $h \geq 2$  tal que  $t + 1 = q + h$ . Substituindo  $q = t + 1 - h$  em (4.4) obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} (t + 1 - h)^3 + (1 - 2t)(t + 1 - h)^2 - (t^2 + 4t + 1)(t + 1 - h) &= (1 - 2t^2)(t + 1) \iff \\ 1 - 2t^3 - 2t - 5t^2 - h^3 + 4h^2 - 4h + h^2t + 2ht^2 &= t + 1 - 2t^3 - 2t^2 \end{aligned}$$

. Como  $t > 0$  e  $q \neq 0$ , para  $t = 1$ ,  $h > 2$ , então, observamos que para  $h = 3$  a igualdade obtida é equivalente a  $-2 + 6 = (-1)(2) \iff 4 = -2$ , mas isso é um absurdo.

**Caso**  $q = t + 1$ , obtemos um absurdo de maneira análoga ao realizado no **Caso**  $q = 1$ .

**Caso**  $t + 1 < q \leq 2t - 1$ , substituímos  $q = 2t - 1$  do lado esquerdo da igualdade (4.4) e obtemos  $-2t^3 - 7t^2 + 2t + 1$ . Como  $q \leq 2t - 1$  temos que  $q^3 + (1 - 2t)q^2 - (t^2 + 4t + 1)q \leq -2t^3 - 7t^2 + 2t + 1$ . Por outro lado  $t > 0$ , então a desigualdade  $1 < 5t$  é verdadeira, assim como a sequência de desigualdades equivalentes a seguir

$$\begin{aligned} 1 < 5t \iff -7t + 1 < -2t \iff -7t + 2 < -2t + 1 \iff -7t^2 + 2t < -2t^2 + t \iff \\ -2t^3 - 7t^2 + 2t + 1 < -2t^3 - 2t^2 + t + 1. \end{aligned}$$

Deste modo, a desigualdade  $q^3 + (1 - 2t)q^2 - (t^2 + 4t + 1)q < -2t^3 - 2t^2 + t + 1$  é verdadeira, mas isso é um absurdo.

**Caso**  $2t - 1 < q$ , existe  $h > 1$  tal que  $q = 2t - 1 + h$  e assim, de maneira análoga ao realizado no **Caso**  $1 < q < t + 1$ , obtemos um absurdo.

Portanto, nenhum polinômio linear mônico fatora  $p_2$ .

3. Como  $p_3$  é um polinômio de grau 2, mostramos por absurdo, analogamente ao realizado com  $p_1$ , que nenhum polinômio linear mônico fatora  $p_3$ .
4. Mostramos por absurdo, análogo ao realizado com  $p_2$ , para os casos  $q = 1$ ,  $0 < q < t$ ,  $q = t + 1$ ,  $t + 1 < q \leq 2t + 1$  e  $2t + 1 < q$ .

□

**Proposição 4.3.6.** *O grafo  $\mathcal{G}_w$  é integral, se e somente se,  $w = 3t + 1$  para  $t > 0$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese  $\mathcal{G}_w$  é integral. Suponhamos que  $w \neq 3t + 1$ . Caso  $w = 3t$ , o polinômio característico de  $\mathcal{G}_{tt}$  é, segundo a **Proposição 4.3.4**,

$$p(\lambda) = \begin{cases} \lambda(\lambda^2 - 2), & \text{se } t = 1; \\ \lambda^{t-1}(\lambda + 1)^{2(t-1)}(\lambda - t + 1)(\lambda^2 - (t-1)\lambda - 2t^2), & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

Para  $t = 1$ , o polinômio característico de  $\mathcal{G}_w$ ,  $p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2)$ , possui três raízes ( $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = -\sqrt{2}$ ) das quais apenas uma é inteira, mas isso é um absurdo. Para  $t > 1$ , o polinômio característico de  $\mathcal{G}_w$ ,  $p(\lambda) = \lambda^{t-1}(\lambda + 1)^{2(t-1)}(\lambda - t + 1)(\lambda^2 - (t-1)\lambda - 2t^2)$ , possui como último fator um polinômio do tipo  $p_1$ , do **Lema 4.3.5**. Portanto, nem todas as raízes do polinômio associado a  $\mathcal{G}_w$  são números inteiros, mas isso é um absurdo.

Para o caso  $w = 3t + 2$ , o polinômio característico de  $\mathcal{G}_{t(t+1)(t+1)}$  é, segundo a **Proposição 4.3.4**,

$$p(\lambda) = \begin{cases} \lambda(\lambda + 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda + 2), & \text{se } t = 1; \\ \lambda^t(\lambda + 1)^{2(t-1)}(\lambda^3 + (1 - 2t)\lambda^2 - (t^2 + 4t + 1)\lambda + (2t^2 - 1)(t + 1)), & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

Para  $t = 1$ , o polinômio característico de  $\mathcal{G}_w$  possui um fator,  $(\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda + 2)$ , que possui três raízes não inteiras,  $\lambda_1 \approx 0,3216\dots, \lambda_2 \approx -2,1774\dots, \lambda_3 \approx 2,8557\dots$ , contradizendo a hipótese. Para  $t > 1$ , o último fator do polinômio característico de  $\mathcal{G}_w$ ,  $p(\lambda) = \lambda^t(\lambda + 1)^{2(t-1)}(\lambda^3 + (1 - 2t)\lambda^2 - (t^2 + 4t + 1)\lambda + (2t^2 - 1)(t + 1))$ , é um polinômio do tipo  $p_2$ , do **Lema 4.3.5**. Portanto, nem todas as raízes do polinômio associado a  $\mathcal{G}_w$  são números inteiros.

Logo,  $w = 3t + 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Como  $w = 3t + 1$ , pela **Proposição 4.2.1**,  $\mathcal{G}_{tt(t+1)} = (K_t \cup K_t) \otimes \overline{K}_{t+1}$ . Note que  $G_1 = K_t \cup K_t$  e  $G_2 = \overline{K}_{t+1}$  são grafos integrais e regulares, cuja regularidade de  $G_1$  é  $r_1 = t - 1$ , e de  $G_2$  é  $r_2 = 0$ . Além disso, o número de vértices de  $G_1$  é  $n_1 = 2t$ , e de  $G_2$  é  $n_2 = t + 1$ .

Fazendo  $(r_1 - r_2)^2 + 4n_1n_2$  obtemos  $(3t + 1)^2$ , que é um quadrado perfeito. Então, pelo primeiro resultado [1], dos apresentados no início desta seção, segue que  $\mathcal{G}_w = \mathcal{G}_{tt(t+1)} = (K_t \cup K_t) \otimes \overline{K}_{t+1}$  é integral. □

**Proposição 4.3.7.** Para  $t > 0$ , o polinômio característico de  $\mathcal{G}_w^*$ ,

1. para  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}^*$ , é  $p^*(\lambda) = (-1)^{3t+1} \lambda^{3t-2} (\lambda - t) (\lambda^2 - t\lambda - 2t(t+1))$ .
2. para  $\mathcal{G}_{ttt}^*$ , é  $p^*(\lambda) = (-1)^{3t} \lambda^{3(t-1)} (\lambda - 2t) (\lambda^2 - t^2)$ .
3. para  $\mathcal{G}_{t(t+1)(t+1)}^*$ , é  $p^*(\lambda) = (-1)^{3t+2} \lambda^{3(t-1)} (\lambda^3 - (2t+1)\lambda^2 - (t+1)^2\lambda + 2t(t+1)^2)$ .

*Demonstração.* Segundo a representação matricial do join de dois grafos (olhar **OBS** da seção anterior), para  $\mathcal{G}_{ttt}^* = (K_t^* \cup K_t^*) \otimes \bar{K}_t$  associamos a matriz de adjacência

$$A(\mathcal{G}_{ttt}^*)_{3t \times 3t} = \left( \begin{array}{c|c} A(K_t^* \cup K_t^*)_{2t \times 2t} & J_{2t \times t}^T \\ \hline J_{t \times 2t} & A(\bar{K}_t)_{t \times t} \end{array} \right).$$

Onde,  $A(K_t^* \cup K_t^*)_{2t \times 2t}$  e  $A(\bar{K}_t)_{t \times t}$  são matrizes de adjacência de  $K_t^* \cup K_t^*$  e  $\bar{K}_t$ , e  $J$ , e  $J^T$  são matrizes retangulares, cujas entradas são todas iguais a 1. O polinômio característico de  $A(\mathcal{G}_{ttt}^*)$  é obtido pelo quarto resultado [4], dos resultados apresentados no início desta seção:

$$p_{A(\mathcal{G}_{ttt}^*)}(\lambda) = (-1)^{2t} p_{\tilde{A}(K_t^* \cup K_t^*)}(-\lambda) p_{A(\bar{K}_t)}(\lambda) + (-1)^t p_{A(K_t^* \cup K_t^*)}(\lambda) p_{\tilde{A}(\bar{K}_t)}(-\lambda) - (-1)^{3t} p_{\tilde{A}(K_t^* \cup K_t^*)}(-\lambda) p_{\tilde{A}(\bar{K}_t)}(-\lambda),$$

$$\text{onde } \tilde{A}(K_t^* \cup K_t^*) = J^T - A(K_t^* \cup K_t^*) \text{ e } \tilde{A}(\bar{K}_t) = J - A(\bar{K}_t).$$

Notemos que

$$\tilde{A}(K_t^* \cup K_t^*) = J^T - A(K_t^* \cup K_t^*) = \left( \begin{array}{c|c} 1_{t \times t} & 1_{t \times t} \\ \hline 1_{t \times t} & 1_{t \times t} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c|c} 1_{t \times t} & 0_{t \times t} \\ \hline 0_{t \times t} & 1_{t \times t} \end{array} \right)$$

$= \left( \begin{array}{c|c} 0_{t \times t} & 1_{t \times t} \\ \hline 1_{t \times t} & 0_{t \times t} \end{array} \right) = A(K_{t,t})$ . Sabemos, pelo **Lema 4.3.1**, que o polinômio característico de  $A(K_{t,t})$  é  $p(\lambda) = (-1)^{2t} \lambda^{2(t-1)} (\lambda^2 - t^2)$ , então

$$p_{\tilde{A}(K_t^* \cup K_t^*)}(-\lambda) = (-1)^{2t} (-\lambda)^{2(t-1)} ((-\lambda)^2 - t^2).$$

De maneira similar, obtemos

$$\begin{aligned} p_{\tilde{A}(\bar{K}_t)}(-\lambda) &= (-1)^t \lambda^{t-1} (\lambda - t) \\ p_{A(K_t^* \cup K_t^*)}(\lambda) &= (-1)^{2t} (-\lambda)^{2(t-1)} (\lambda - t)^2 \\ p_{A(\bar{K}_t)}(\lambda) &= (-1)^t \lambda^t \end{aligned}$$

Substituindo esses polinômios característicos em  $p_{A(\mathcal{G}_{ttt}^*)}(\lambda)$ , chegamos em

$$\begin{aligned} (-1)^{3t} [(\lambda)^{2t-2} (\lambda^2 - t^2) \lambda^t + (-1)^t \lambda^{2t-2} (\lambda - t)^2 (-\lambda)^{t-1} (-\lambda - t) - (-1)^{3t} t (\lambda)^{2t-2} (\lambda^2 - t^2) \\ (-\lambda)^{t-1} (-\lambda - t)]. \end{aligned}$$

Que simplificando fica  $p^*(\lambda) = (-1)^{3t} \lambda^{3(t-1)} (\lambda - 2t)(\lambda^2 - t^2)$ .

A maneira de determinar os polinômios característicos de  $\mathcal{G}_{tt(t+1)}^*$  e  $\mathcal{G}_{t(t+1)(t+1)}^*$  é similar.  $\square$

**Teorema 4.3.8.** *O grafo  $\mathcal{G}_w^*$  é integral, se e somente se,  $w = 3t$  para  $t \geq 1$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) O grafo  $\mathcal{G}_w^*$  é integral. Suponha que  $w \neq 3t$ . Se  $w = 3t + 1$  obtemos, pela **Proposição 4.3.7**, que o polinômio característico de  $\mathcal{G}_w^*$  é  $p^*(\lambda) = (-1)^{3t+1} \lambda^{3t-2} (\lambda - t)(\lambda^2 - t\lambda(t+1))$ . Segundo o **Lema 4.3.5**, nenhum polinômio linear mônico fatora o fator  $\lambda^2 - t\lambda - 2t(t+1)$  do polinômio  $p^*(\lambda)$ . Isso contradiz  $\mathcal{G}_w^*$  ser integral. Se  $w = 3t + 2$ , obtemos o mesmo absurdo que quando  $w = 3t + 1$  (passos análogos).

Portanto,  $w = 3t$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $w = 3t$ , o polinômio característico de  $\mathcal{G}_w^*$  é, segundo a **Proposição 4.3.7**,  $p^*(\lambda) = (-1)^{3t} \lambda^{3(t-1)} (\lambda - 2t)(\lambda^2 - t^2)$ , que é um polinômio integral com raízes  $2t, \pm t$  e  $0$ . Portanto,  $\mathcal{G}_w^*$  é integral.  $\square$

## 4.4 Aplicação

Considere três  $w$  diferentes:  $w = 3$ ,  $w = 4$  e  $w = 5$ . Assim estamos tomando três Determinante do Triângulo de Hosoya  $\mathcal{H}$  diferentes, e com isso três matrizes simétricas  $S_w^*$  de ordens diferentes. Se consideramos a mediana nula no Determinante do Triângulo de Hosoya  $\mathcal{H}$ , estamos tomando três outras matrizes simétricas  $S_w$  de ordens diferentes. Então, tomando o *mod 2* das entradas dessas seis matrizes simétricas, estamos associando seis matrizes de adjacência diferentes a essas matrizes simétricas embutidas em  $\mathcal{H}$ .

Da Proposição 4.2.1, sabemos que os respectivos cografos associados às matrizes de adjacência  $S_3^* \bmod 2$ ,  $S_4^* \bmod 2$ ,  $S_5^* \bmod 2$ ,  $S_3 \bmod 2$ ,  $S_4 \bmod 2$  e  $S_5 \bmod 2$ , são  $\mathcal{G}_{111}^*$ ,  $\mathcal{G}_{112}^*$ ,  $\mathcal{G}_{122}^*$ ,  $\mathcal{G}_{111}$ ,  $\mathcal{G}_{112}$  e  $\mathcal{G}_{122}$ . Desses cografos, segundo Teorema 4.2.3, apenas o  $\mathcal{G}_{112}$  é regular, com regularidade igual a 2. Além de regular, a Proposição 4.3.6 garante que esse cografo também é integral, e dos sem laços, esse é o único integral. Dos com laços, pelo Teorema 4.3.8, o único integral é o cografo  $\mathcal{G}_{111}^*$ .



## 5 Conclusão

A busca por grafos integrais é um tema de grande interesse na Teoria Espectral de Grafos. Dessa forma na presente dissertação, apresentamos famílias de cografos integrais, por duas vias diferentes: coárvores balanceadas e triângulos combinatórios. Esse estudo foi motivado pelas características estruturais desses grafos, e por suas propriedades espectrais.

Verificamos que um cografo  $G$  com coárvore balanceada  $T_G$  tem o espectro inteiro. Esse resultado foi obtido através do algoritmo de diagonalização *Algoritmo de Diagonalização*( $T_G, x$ ), que além de uma ferramenta prática para determinar os autovalores de cografos, mostrou-se uma ferramenta teórica de grande utilidade. Além disso, os autovalores de um cografo  $G$  que possui coárvore balanceada  $T_{G_r} = (a_1, a_2, \dots, 0|0, \dots, a_r)$ , foram exibidos através de fórmulas fechadas, incluindo suas multiplicidades.

Em relação ao método via *triângulos combinatórios*, partimos da matriz simétrica  $\mathcal{S}_w^*$  embutida no triângulo combinatório *Determinante do Triângulo de Hosoya*  $\mathcal{H}$ , cujas entradas são termos consecutivos da sequência de Fibonacci, e associamos a essa matriz simétrica, uma matriz de adjacência  $\mathcal{S}_w^* \bmod 2$ . Verificamos, que a matriz  $\mathcal{S}_w^* \bmod 2$  está associada a três diferentes famílias de cografos, conforme  $w = 3t$ , ou  $w = 3t + 1$  ou  $w = 3t + 2$ . Dessas três famílias, sabendo a forma dos polinômios característicos dos três diferentes tipos de matrizes, determinamos que os cografos do tipo  $\mathcal{G}_w^*$ , são integrais quando  $w = 3t$ , e os cografos do tipo  $\mathcal{G}_w$ , são integrais quando  $w = 3t + 1$ . Ou seja, quando o cografo  $\mathcal{G}_w^*$ , associado a matriz adjacência  $\mathcal{S}_w^* \bmod 2$ , embutida no triângulo combinatório *Determinante do Triângulo de Hosoya*  $\mathcal{H}$ , é do tipo  $w = 3t$ , o polinômio característico  $p^*(\lambda) = (-1)^{3t} \lambda 3(t-1)(\lambda-2t)(\lambda^2-t^2)$  associado é integral, segundo o Teorema 4.3.8, e quando o cografo  $\mathcal{G}_w$ , associado a matriz de adjacência  $\mathcal{S}_w \bmod 2$ , embutida no triângulo combinatório *Determinante do Triângulo de Hosoya*  $\mathcal{H}$ , é do tipo  $w = 3t + 1$ , o polinômio característico  $p(\lambda) = \begin{cases} \lambda^2(\lambda+2)(\lambda-2), & \text{se } t = 1; \\ \lambda^t(\lambda-2t)((\lambda+1)^2-t^2)(\lambda+1)^{2(t-1)}, & \text{se } t > 1. \end{cases}$  associado também é integral, segundo a Proposição 4.3.6.

De modo geral, essa dissertação mostrou que duas técnicas distintas (algorítmica e combinatória) podem ser efetivamente usadas para caracterizar ou determinar classes de cografos integrais e que nos permitem questionar a extensão delas para casos mais gerais de cografos ou até mesmo para classes mais gerais de grafos. Como por exemplo: *é possível substituir as entradas nulas de  $T_G(a_1, a_2, \dots, 0|0, \dots, 0, a_r)$  por um outro inteiro diferente de zero e continuar obtendo cografo integral?*

# Referências

- 1 ABREU, N.; DEL-VECCHIO, R.; TREVISAN, V.; VINAGRE, C.. **Teoria Espectral de Grafos - Uma introdução**. III<sup>o</sup> Colóquio de Matemática da Região Sul, Universidade Federal de Santa Catarina, 2014. 201 p.
- 2 ABRISHAMI, Tara. **A Combinatorial Analysis of the Eigenvalues of the Laplacian Matrices of Cographs**. Baltimore, Maryland: Johns Hopkins University, 2019.
- 3 ALLEM, Luiz Emilio; TURA, Fernando. **Integral cographs**. Discrete Appl. Math. 283 (2020) 153-167.
- 4 ALLEM, Luiz Emilio; TURA, Fernando. **Multiplicity of eigenvalues of cographs**. Discrete Appl. Math. 247 (2018) 43-52.
- 5 BALÍNSKA, K.; CVETKOVIĆ, D.; RADOSAVLJEVIĆ, Z.; SIMIĆ, S.; STEVANOVIĆ, D.. **A survey on integral graphs**, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 13 (2002), 42-65.
- 6 BALIŃSKA, K.T.; KUPCZYK, M.; SIMIĆ, S.K.; ZWI-ERZYŃSKI, K.T.. **On Generating All Integral Graphs on 12 Vertices**. Computer Science Center Report (482), Technical University of Poznań, 2001, p. 1–36.
- 7 BLAIR, Matthew; FLÓREZ, Rigoberto; MUKHERJEE, Antara; RAMÍREZ, José L. **Matrices in the Determinant Hosoya Triangle**. The Fibonacci Quarterly. v. 58 (2020) 34-54.
- 8 BRADLEY, G.L. **A Primer of Linear Algebra**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- 9 CHING, Hsin-yun; FLÓREZ, Rigoberto; MUKHERJEE, Antara. **Families of integral cographs within a triangular array**. Spec. Matrices. v. 8 (2020) 257-273.
- 10 COELHO, Flávio Ulhoa. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2 ed. revista e ampliada. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2005.
- 11 FRITSCHER, Eliseu. **Propriedades espectrais de um grafo**. Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2011. 116 p.
- 12 HARARY, F.; SCHWENK, A. J. **Which graphs have integral spectra?**. In Graphs and combinatorics. Springer, 1974, p. 45–51.

- 13 GUTMAN, I. **The energy of a graph**. Ber. Math. Statist. Sect. Forschungszentrum Graz., 103(1978), 1-22.
- 14 JACOBS, David P.; TREVISAN, Vilmar; TURA, Fernando C.. **Eigenvalue location in cographs**. Discrete Applied Mathematics, v. 145, p. 220 - 235. 2018. Ed. Elsevier. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0166218X17300926>>. Acesso em: 29 abr. 2021.
- 15 MACHADO, Catia Maria dos Santos; TREVISAN, Vilmar. **Espectro de Grafos**. Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 1999. 76 p.
- 16 SAXGNA, Nitin; SEVERINI, Simone; SHPARLINSKI, Igor E.. **Parameters of integral circulant graphs and periodic quantum dynamics**. Int J. Quantum, Inf. 5, p. 417 - 430. 2007. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219749907002918>>. Acesso em: 18 ago. 2021.
- 17 SOUZA, Bruna Santos de. **Produtos e Coespectralidade de Grafos**. Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2016. 83 p.
- 18 TOLEDO, Maikon Machado. **Integralidade de Grafos**. Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2016. 136 p.