UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Rafael Descovi Galelli

# A HISTÓRIA (NÃO) SE REPETE

Santa Maria, RS
2022

**Rafael Descovi Galelli**

**A HISTÓRIA (NÃO) SE REPETE**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Denilson Gomes

Santa Maria, RS
2022

Galelli, Rafael Descovi
A história (não) se repete / Rafael Descovi Galelli.- 2022.
92 p.; 30 cm

Orientador: Denilson Gomes
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2022

1. História da Matemática 2. História do Cálculo 3. Autoria na Matemática 4. Origens do Cálculo I. Gomes, Denilson II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

**RAFAEL DESCOVI GALELLI**

**A HISTÓRIA (NÃO) SE REPETE**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**Aprovado em 23 de fevereiro de 2022:**

____________________________________________
**Denilson Gomes, Dr. (UFSM)**
(Presidente/Orientador)

Janice Rachelli
____________________________________________
**Janice Rachelli, Dra. (UFSM)**

____________________________________________
**Eduardo Gueron, Dr. (UFABC)**

SANTA MARIA, RS
2022

À Ruana Maíra Schneider, minha bússola e compasso,
pela paciência nas incansáveis conversas que viriam a se tornar este texto.

O bom senso é a característica mais bem repartida do mundo, porque todos pensam estar tão bem providos dele que mesmo os que mais custam a contentar-se com qualquer coisa, não costumam desejar mais do que a sensatez que têm; e, nesse ponto, parece que todos têm razão, pois, em princípio, isto prova que o poder de bem julgar e distinguir o verdadeiro do falso, que é exatamente o chamado bom senso ou razão, é, naturalmente, igual em todos os homens, do que resulta que a diversidade de opiniões existe, não porque alguns são mais sensatos que outros , mas somente por conduzirmos nossos pensamentos por diversos caminhos e não considerarmos as mesmas coisas.

Renè Descartes, 1637

# RESUMO

**A HISTÓRIA (NÃO) SE REPETE**

AUTOR: Rafael Descovi Galelli
ORIENTADOR: Denilson Gomes

Este estudo bibliográfico e exploratório da história da matemática, mais especificamente sobre a história do cálculo infinitesimal, apoia-se tanto na bibliografia clássica da história da matemática, notadamente nos nomes de Carl B. Boyer e Howard Eves quanto em textos mais recentes como os de Jason Socrates Bardi Amir Alexander e Tatiana Roque. Teve como objetivos, além de elencar os elementos históricos de diferentes momentos, estimular o interesse pelo estudo dos processos históricos presentes na construção do conhecimento matemático, desenvolver a compreensão da matemática como conhecimento socialmente construído, inacabado, motivado por problemas internos e externos à disciplina e moldado pelos modos de pensar, problemas, ferramentas e língua(gens) de diferentes culturas e períodos com o intuito de sensibilizar o leitor para os desafios envolvidos na produção do conhecimento matemático e sobretudo na forma como o mesmo é disseminado nas mais variadas formas e níveis da docência. A formulação de quadros em forma de linha do tempo permitiu uma análise mais aprofundada sobre os tópicos dados como as origens do cálculo que possuem maior incidência na bibliografia e resultou em discussão que abre margem para pesquisas mais aprofundadas sobre esses tópicos.

**Palavras-chave**: História da Matemática. História do Cálculo. Autoria na Matemática. Origens do Cálculo.

# ABSTRACT

## HISTORY DOES (NOT) REPEAT ITSELF

AUTHOR: Rafael Descovi Galelli
ADVISOR: Denilson Gomes

This bibliographical and exploratory study of the history of mathematics, more specifically on the history of infinitesimal calculus, relies both on the classical bibliography of the history of mathematics, notably in the names of Carl B. Boyer and Howard Eves and in more recent texts such as those by Jason Socrates Bardi Amir Alexander and Tatiana Roque. In addition to listing the historical elements from different moments, this research tries to stimulate interest in the study of historical processes present in the construction of mathematical knowledge, to develop an understanding of mathematics as socially constructed, unfinished knowledge, which is motivated by internal and external problems to the discipline and is shaped by ways of thinking, by problems, tools and language(s) of different cultures and historical periods in order to sensitize the reader to the challenges involved in the production of mathematical knowledge and above all in the way in which it is disseminated in the most diverse forms and levels of teaching. The formulation of tables in the form of a timeline allowed a more in-depth analysis of the topics given as the origins of calculus that have greater incidence in the bibliography and resulted in a discussion that opens the way for further research on these topics.

**Keywords**: History of Mathematics. History of Calculus. Authorship in Mathematics.Origins of Calculus.

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PNE – Plano Nacional de Educação

PNLD – Plano Nacional do Livro Didático

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

RBHM – Revista Brasileira de História da Matemática

RBHC – Revista Brasileira de História da Ciência

SBHC – Sociedade Brasileira de História da Ciência

SBHMat – Sociedade Brasileira de História da Matemática

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 POR QUE ESTUDAR HISTÓRIA?

O ditado popular ficou cunhado na língua portuguesa como algo nas linhas de: 'um povo que não conhece a própria história está fadado a repeti-la'. A anedota, normalmente atribuída ao filósofo e teórico político irlandês Edmund Burke (1729-1797), foi repetida com pequenas alterações por Winston Churchill (1874-1965) mas é apenas encontrada mesmo na publicação do filósofo espanhol George Santayana, pseudônimo de Jorge Augustín Nicolás Ruiz de Santayana (1863-1952) em *The Life of Reason: The Phases of Human Progress*; *Opus magnum* do autor publicada em cinco volumes entre os anos de 1905 e 1906.

Embora a citação acima tenha por si só o seu impacto, a intenção da exposição é de incitar o questionamento: quem é de fato o autor? Embora o conteúdo da citação possa ser tratado e discutido sem a necessidade desta resposta, para a história, e para a histografia mais especificamente, enquanto o estudo da escrita das atividades humanas, o registro acurado permite a estabilização do seu significado e de suas intenções pois, falava Burke sobre a situação política da Irlanda? Foi Churchill incitando a 2ª Guerra mundial ou foi a conclusão de um argumento intrincado de Santayana sobre a moralidade humana em *Reason in Common Sense*?

O argumento segue: a matemática não passa pela mesma problemática? Ou seja, o contexto de criação, sua função social, sua cultura de origem ou até mesmo sua autoria não são relevantes para o conhecimento matemático?

Seria razoável argumentar que para a matemática em si, segundo um ponto de vista adotado cuidadosamente, todos esses contextos são paralelos e, por que não, descartáveis, afinal, a matemática não muda(ria) por conhecimentos adjacentes ao próprio conteúdo. Esse, inclusive, é um ponto de vista que encontra uma fácil defesa, especialmente de um olhar atual em que a matemática já passou por reformulações e recodificações que agregaram um caráter universal e até mesmo *sui generis* em algumas instâncias.

Por outro lado, talvez com a mesma convicção de defesa, está o outro lado desta mesma moeda, um que acredita que o contexto de criação de qualquer conhecimento é igualmente importante ao seu conteúdo, aplicações e implicações propriamente ditas; um em que as condições socioeconômicas, políticas e sociais de um período ou outro favorecem ou não o desenvolvimento de certas ideias e, sobretudo, que todo este pacote indexado ao conteúdo matemático possui um valor negligenciado, sobretudo no ensino da matemática. E é exatamente sobre esse ponto de vista que se apoiam teorias mais atuais de, e sobre, a história e, particularmente, a história da matemática[1].

Beatriz D'Ambrosio já alertava em 1989 que:

> A história da matemática tem servido para alguns pesquisadores como motivação para o trabalho com o desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos. Esta linha de trabalho parte do princípio que o estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a maior compreensão da evolução do conceito, enfatizando as dificuldades epistemológicas inerentes ao conceito que está sendo trabalhado. Essas dificuldades históricas têm se revelado as mesmas muitas vezes apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem. (D'AMBROSIO, B.S., 1989, p.19).

Em 1992, Hygino Domingues, na apresentação de sua tradução do título *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula – Cálculo*, de Boyer, também anota:

[1] Tanto o termo matemática quanto história e, consequentemente história da matemática, serão utilizados sempre com letras minúsculas ainda que identifiquem as áreas de conhecimento mais amplas. Nas citações, quando os termos são utilizados de outra forma, foram mantidos tais quais estão nos textos originais.

> Nos últimos anos, vem se notando nos meios matemáticos preocupados com o ensino um certo empenho em valorizar a história da matemática como recurso didático. As manifestações nesse sentido são diversas, culminando com a inclusão de uma disciplina específica sobre o assunto nos currículos de vários cursos de licenciatura em matemática.
> Essa tendência nos parece sobremaneira auspiciosa, sendo de lamentar apenas não ter ocorrido bem antes. A matemática desde os seus primórdios entrelaça-se tão intimamente com a história da civilização, sendo mesmo uma das alavancas principais do progresso humano, que sua história é não só altamente motivadora em termos de ensino como também muito rica em aspectos culturais. (DOMINGUES in BOYER, 1992, np.)

Entretanto, é apenas em 1999 que é fundada a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), que promove e mantém desde 2001 a publicação internacional da Revista Brasileira de História da Matemática[2] (RBHM). Na última década, seja pelo volume de publicações ou pelo próprio engajamento dos pesquisadores, esse movimento vem ganhando ainda mais força e parece ter se tornado um consenso que a história da matemática tem um papel essencial e capital no ensino de matemática[3]. Talvez por esse motivo, especialmente no ensino superior, a maioria dos currículos, tanto em licenciaturas quanto em bacharelados e programas de pós-graduação voltados ao ensino, como o próprio PROFMAT, e também aqueles relacionados ao ensino de ciências pelo país, contém pelo menos uma cadeira direcionada à história. Ao mesmo tempo, no ensino básico, a história da matemática aparece cada vez mais como elemento motivador de tópicos nos livros do PNLD[4].

Isso não implica, entretanto, que a pesquisa em história tenha de forma alguma já se consolidado ou mesmo reestabelecido padrões. Ao contrário, no prefácio de *história da matemática: uma visão crítica*, *desfazendo mitos e lendas*, Gert Schubring, indica que além desse ser o primeiro livro de história geral da matemática brasileiro a partir de uma pesquisa original, as publicações no Brasil são, "[...] em geral, reedições de títulos de décadas atrás que seguem padrões atualmente considerados ultrapassados pela historiografia" (SCHUBRING in ROQUE, 2012, p.13). Já a própria autora complementa essa linha de pensamento no último capítulo quando informa que "Quase todos esses autores escreveram seus textos mais importantes antes dos anos 1970, logo, sua visão sobre a história da matemática já pode ser considerada ultrapassada" (ROQUE, 2012, p.478).

Vale nota que os autores mencionados na passagem são nomeadamente Boyer, Eves, Bell, Struik e Kline. Todos autores americanos e também professores de matemática em primeiro lugar. Vale também ressaltar aqui que a própria autora aponta duas faces importantes de sua historiografia quando explica:

> Não queremos desmerecer o trabalho desses pioneiros, que ajudaram a fundar a história da matemática como campo de pesquisa e motivaram o interesse de inúmeros jovens por essa área. A intenção aqui é ressaltar que suas obras continuam a ser citadas sem uma visão crítica, ainda que inúmeros trabalhos históricos, nas últimas décadas, tenham desmentido e questionado grande parte das afirmações nelas reproduzidas. (ROQUE, 2012, p.478).

É nesse espírito que fundamentamos a pesquisa que segue, não com o intuito de buscar por 'erros' nos textos solidificados e seminais da literatura da história da matemática, mas buscando, antes, identificar que essas mudanças na concepção da história e na historiografia da

---

[2] *International Journal on the History of Mathematics*.
[3] Ver Gutierre (2004). A autora descreve e analisa 12 formas, a saber: história como fonte de motivação, historia como fonte de seleção de problemas, história como fonte de objetivos para o ensino, história como fonte de métodos de ensino, história como instrumento de desmistificação da matemática, história como fonte de formalização de conceitos, história como instrumento de constituição do pensamento, historia como instrumento promotor de aprendizagem significativa e história como instrumento de resgate da identidade cultura.
[4] SCHUBRING et al., 2020, p.281.

matemática existem e que as inconsistências geradas, tanto pelos anos de hiato entre as obras quanto pelas diferentes abordagens, promovem uma dificuldade na sintetização dos conceitos aos que se aventuram.

## 1.2 POR QUE O CÁLCULO?

O cálculo infinitesimal ou cálculo diferencial e integral[5] é, sem dúvidas, uma das maiores revoluções da ciência e da matemática do século XVII. É, também, um dos tópicos da matemática que possui características interessantes para uma pesquisa exploratória de cunho historiográfico pois, 1.: sabe-se (e há documentação) da existência de problemas e situações políticas, sociais e econômicas envolvendo sua concepção; 2.: é suficientemente recente em comparação com outros tópicos da matemática mais fundamentais, estes podendo encontrar suas origens em momentos ainda mais obscuros da história da matemática para que se tenham registros mais acurados dos elementos históricos expostos nos documentos e nas fontes; 3.: é um dos tópicos da matemática que encontra ramificações em quase todas as ciências modernas, fazendo deste um dos assuntos de matemática superior mais trabalhado em cursos de graduação no Brasil e no mundo; e, finalmente, há relativamente uma vasta bibliografia cobrindo o tópico e, por consequência, aumenta-se a possibilidade de diferentes abordagens e de inconsistências entre elas.

Todos esses motivos justificam a escolha do tópico de interesse e, assim, com o foco sobre o advento do cálculo, esta pesquisa pretende, num primeiro momento, revisar a pesquisa em história da matemática nas publicações do PROFMAT para tentar identificar alguma linha de pensamento e pesquisa já estabelecidas, na intenção de não repetir tópicos já abordados.

Para aprofundar e possibilitar o paralelo de informações será necessário recorrer a fontes não só mais modernas, mas também mais moderadas sobre o período. Daí a necessidade de incluir uma pesquisa exploratória sobre o tema não apenas em textos consolidados da bibliografia da história da matemática, mas também em textos de divulgação científica e repositórios da internet. Por este motivo, serão revisitados os textos de Carl B. Boyer (*História da Matemática*, 1968) e Howard Eves (*Introdução à História da Matemática*, 1953) e textos mais recentes como os de Amir Alexander (*Infinitesimal*, 2016), de Jason Socrates Bardi (*As Guerras do Cálculo*, 2008) e o texto de Tatiana Roque (*História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, 2012), fazendo uma análise qualitativa em formato de resenha e já elencando pontos de especial interesse. Além disso, o repositório do *MacTutor*, situado e mantido pelo departamento de Matemática e Estatística da universidade escocesa St. Andrews traz um suporte paralelo, sobretudo para as biografias dos autores e matemáticos tratados.

Como exposto embora um dos objetivos principais desta pesquisa seja o de revisitar as referências históricas canônicas sobretudo em registros consolidados para contrastá-las com os registros mais modernos, num segundo momento[6], mostrar como foram tabulados alguns dados encontrados em cada uma das referências. A ideia principal deste passo será a de estabelecer uma espécie de linha do tempo entre os registros tentando identificar, em especial, as diferentes maneiras de ‘contar’ a história, qual o enfoque dado e, quando possível, identificar quaisquer inconsistências entre elas. Em última instância, a partir dessa identificação, faz-se uma discussão também mais qualitativa sobre alguns tópicos sinalizados em decorrência da incidência e relevância nos textos investigados onde foram dados como origens (ou não) do cálculo. A intenção aqui é a de mostrar como as diferentes abordagens e escolhas historiográficas acabam por alterar a percepção no estabelecimento dos fatos históricos.

---

[5] Tratado a partir daqui apenas como cálculo.

[6] Importante justificar que essa varredura e tabulação dos textos, embora apareçam na cronologia deste texto num segundo momento, na cronologia da pesquisa em si foram a primeira pauta.

## 2 AS FONTES

Este capítulo será dedicado às fontes da pesquisa que foram utilizadas em duas frentes. A primeira será a de localizar tais fontes, a bibliografia em si, sempre com um tipo de resenha de cada uma delas, identificando os aspectos de cada obra que se sobressaem e, ou, são identificados noutras pesquisas sobre a história do cálculo. Num segundo plano, aqui já são identificadas algumas das passagens que tratam das origens do cálculo que serão analisadas em maior detalhe no capítulo 4.

Ao localizar tais fontes, ressalta-se um aspecto mais qualitativo de análise nas obras[7] que será o da distinção entre as abordagens de historiografia internalista e externalistas. Para ilustrar brevemente a diferença entre ambas, a historiografia internalista se dedica a contar o desenvolvimento conceitual da matemática, desfavorecendo os aspectos sociais envolvidos no processo. Tal concepção dá ênfase para grandes personagens e privilegia o saber de determinadas culturas, apoia-se, na grande maioria das vezes, em narrativas que constroem uma visão linear e cumulativa dos conhecimentos matemáticos. Já a historiografia externalista, como o nome prevê, dá acesso a aspectos externos da disciplina em si, incluindo perspectivas sociais e pessoais na construção do saber específico. Schubring et al. (2020), comentam:

> Na metodologia, costuma-se falar que a dicotomia tradicional entre abordagens ‘internalistas’ e ‘externalistas’, está ultrapassada. No entanto, precisa avaliar se isto fica somente uma afirmação retórica ou se fica realizado – quer dizer, se o autor continua destacando os grandes homens com suas descobertas, acrescentando somente algumas informações gerais sobre a história e cultura da época, ou se o autor os apresenta nos moldes de uma história social da matemática, enfatizando as comunidades contemporâneas das práticas matemáticas (SCHUBRING et al., 2020, pp.281-282, grifos dos autores).

Roque (2012), inclui em sua introdução uma vasta explanação sobre a orientação de seu texto, culminando na indicação de que:

> As abordagens mais ‘externalistas’ se multiplicaram a partir da década de 1970, radicalizando-se em meados dos anos 1990. Nesse momento, diversos cientistas ligados às ciências naturais desencadearam um movimento público de contestação à história internalista da ciência e fundaram a sociologia da ciência, questionando até mesmo a objetividade dos objetos científicos. Obviamente, essa reformulação acabou por gerar certos exageros no sentido oposto. Atualmente foi alcançado um maior equilíbrio. Os pressupostos de objetividade continuam em franco declínio no meio dos historiadores da ciência e, cada vez mais, reconhece-se como relevante a investigação do que as pessoas pensavam que estava acontecendo, e de que modo suas percepções e narrativas sobre os fatos influenciaram ou foram influenciados pela realidade que viviam. De modo geral, a perspectiva histórica permite reconhecer que qualquer interpretação é provisória e pode tomar por objeto de reflexão os próprios atos interpretativos por meio dos quais as tradições se constituíram e os sentidos foram produzidos. (ROQUE, 2012, pp. 28-29, grifos da autora).

Vale nota que não é a intenção desta pesquisa a de incluir nem a de sintetizar tais aspectos às obras. Enquanto pesquisa exploratória, a intenção será apenas a de buscar e listar as passagens em que as obras indicam ou apresentam um ou outro desses aspectos historiográficos em sua escrita e composição como um indicativo de predicados distintos entre as obras. A intenção é a de apontar para as características como uma forma de advertência ou ressalva. Por esse motivo, não são ampliados em demasia os comentários a respeito desses enfoques historiográficos.

Colocar a organização dos capítulos, explicar porque não entrar na formalização

---

[7] Com exceção da varredura das dissertações do PROFMAT.

## 2.1 A PESQUISA NO PROFMAT

A busca no banco de dados do PROFMAT ocorreu com a palavra-chave 'história'. Os textos foram analisados na totalidade buscando inferências de como o tópico da história foi empregado em cada texto.

Embora seja uma disciplina eletiva da matriz curricular do PROFMAT e possua tanto material audiovisual quanto textual disponível, nota-se, ainda, pouca produção com a história da matemática como o tópico principal das dissertações. Ressalta-se, portanto, o viés da história da matemática como elemento motivador, tanto para os trabalhos de dissertação em si quanto como o objetivo das próprias pesquisas analisadas.

Nesse sentido, a pesquisa em história da matemática nas publicações do PROFMAT mostra a tendência de abordar tópicos que circundam a aplicabilidade em sala de aula e nas relações da história com a metodologias de ensino-aprendizagem, especialmente em séries iniciais. Tal é o caso de Silveira (2013), com o título *A História da Matemática como Elemento Motivador no Ensino de Matemática*; de Costa (2016), *A História da Matemática como Estímulo ao Ensino-Aprendizagem*; de Linck (2017), *A História da Matemática no Ensino da Geometria: Uma contextualização pela Razão Áurea*; de Parreira (2017), *Uma proposta de uso da História da Matemática como recurso didático no ensino de áreas*', de Borges (2018), *A História da matemática e ludicidade como proposta didática para o ensino da Matemática*; de Rodrigues da Silveira (2019), *A História Da Matemática Como Ferramenta Desmistificadora E Propulsora Do Processo De Ensino-Aprendizagem*; de Silva (2019), *A Contribuição da História da Matemática na Formação da Cidadania dos alunos: uma abordagem no ensino fundamental*; de Barboza (2019), *Uma proposta de ensino de funções usando a História da Matemática como recurso pedagógico*; e ainda em Santos (2020), *A História da Matemática como recurso didático na educação de Jovens e Adultos: propostas de atividades para os ciclos III e IV*. Todas com indicações claras da história da matemática e seu vínculo direto com o ensino propriamente dito.

São poucas as dissertações que trabalharam conceitos históricos com outra finalidade. Assim é o caso de Schena (2019) com o título: *A História do Surgimento da Geometria Não Euclidiana: o despertar para novos mundos e os modelos de Beltrami*; Mendes (2014): *Desenvolvimento do clube de história da matemática: um diálogo das ciências humanas com a matemática*.

Ainda em menor quantidade são as que circundam o cálculo. Nisso, valem nota as dissertações de Costa (2013) intitulada: *A Utilização da História da Matemática como Meio Facilitador da Compreensão do infinito*. Essa, embora ainda focada em particular no aspecto de ensino-aprendizagem, adentra os domínios do cálculo para, ao apontar aspectos históricos, contextualizar as dificuldades da época como elemento motivador do estudo do cálculo. Também em Assis (2017), intitulada: *Limites: história e aplicações*, a autora já trabalha com as mudanças na noção de limite no decorrer do tempo, além de como tais mudanças influenciaram no desenvolvimento da matemática. Nessa, a autora já aponta um detalhe de interesse quando informa que:

> Apesar da sistematização lógica da disciplina de Cálculo abordar, primeiramente, o conteúdo de limite, e depois o conteúdo de derivada e de integral, veremos, no decorrer desse trabalho, que o registro cronológico é justamente o oposto. (ASSIS, 2017, p.01).

A autora refaz o percurso da noção de limites partindo da noção dos números incomensuráveis, ao contrário do percurso histórico mais usual que inicia com o método da exaustão[8].

---

[8] Esse percurso é melhor trabalhado em Alexander (2016).

Esta reordenação da sequência de ensino *versus* a cronologia histórica é tópico de vasta bibliografia, especialmente quando a pesquisa tem o cunho mais voltado para o ensino. Na mesma ideia, Caetano Neto (2016) em: *Uma ideia sobre o conceito de limite ao longo da história da matemática* inclui uma pesquisa mais aprofundada sobre os conceitos de limite desde a antiguidade grega até antes da formulação de Newton e Leibniz, elencando e incluindo contribuições ao longo do tempo dos matemáticos como Arquimedes e Cavalieri, por exemplo. Optou-se, portanto, em não adentrar nesta reordenação nesta pesquisa, uma vez que é um tópico já coberto noutras. Entretanto, vale nota a disposição que contém sobre as origens dos conceitos do cálculo.

Embora alguns dos tópicos gerais já foram trabalhados nessas dissertações, esses serão rediscutidos nesta sob outra perspectiva. Recorrendo às categorias propostas por Gutierre (2004), esta pesquisa enquadra-se nas de *história como instrumento de desmistificação da matemática* e, em momentos, na *história como fonte de formalização de conceitos.*

## 2.2 A HISTÓRIA DE BOYER

Carl Benjamin Boyer (1906-1976) foi um matemático e historiador da matemática conhecido no Brasil especialmente por sua obra de 1968 intitulada simplesmente: *A history of Mathematics*.

Traduzida e publicada no Brasil pela primeira vez já em 1974, *História da Matemática*, é, sem dúvidas, uma das primeiras referências em qualquer consulta no Brasil e no mundo. Borges (2016), em artigo publicado na RBHM, embora com outra pretensão, faz um levantamento dos livros mais utilizados nos currículos de matemática pelo país e identifica 34 obras. Desses, os de Boyer e Eves são os com maior ocorrência na listagem. Tal inferência é reforçada por Roque (2012) em:

> Os livros de história da matemática mais conhecidos no Brasil são História da matemática, de Carl Boyer, e Introdução à história da matemática, de Howard Eves. Qualquer trabalho que mencione um fato ou um personagem histórico da matemática cita, obrigatoriamente, uma dessas obras. (ROQUE, 2012, p.477).

Boyer (1974) deixa claras suas intenções didáticas e historiográficas com a escrita, já no prefácio, ao alertar que:

> Cada capítulo termina com uma coleção de exercícios mais ou menos distribuídos em três categorias.
>
> [...] Esta obra difere do texto mais bem sucedido disponível até agora por aderir mais estritamente a um arranjo cronológico e por dar mais ênfase a elementos históricos. Há sempre a tentação, numa aula de História da Matemática, de supor que a finalidade principal do curso é ensinar Matemática. Uma quebra dos padrões de rigor matemático é então um pecado mortal, enquanto que um erro histórico é venial. Tentei evitar essa atitude, e o objetivo do livro é apresentar a História da Matemática com fidelidade não só para com a estrutura e exatidão matemáticas, mas também para com a perspectiva e detalhe históricos. (BOYER, 1974, np).

Embora não explicitado, pode-se conjecturar que a referência ao ‘texto mais bem sucedido’ na passagem pode ser ao texto de Florian Cajori, *A History of Mathematics*, ainda do ano de 1893 ou ao próprio *Introdução à História da Matemática* de Howard Eves, de 1953. Independente, o alerta já propicia uma breve comparação com o texto de Eves: enquanto o texto de Boyer talvez possa funcionar como um compêndio de prateleira para pesquisa, o de Eves realmente demonstra uma estrutura muito mais voltada para o ensino dos tópicos de matemática propriamente dita ‘através’ da história. O enfoque mais voltado para os elementos fatuais é facilmente identificado no texto de Boyer em comparação com o de Eves; mas, embora Boyer tenha proposto tal divisão cronológica de seu texto, não há, exatamente, uma divisão linear palpável de período, mas sim daquilo que poderia ser considerado atualmente como um tipo de troca de paradigma[9] da matemática. Não é surpresa, portanto, que os capítulos leiam, por exemplo, Egito, Euclides de Alexandria, Apolônio de Perga, China e Índia, A Renascença e, nosso foco aqui, Newton e Leibniz por exemplo.

Conquanto alguns dos títulos dos capítulos foram alterados nas 2ª e 3ª edições, revisadas por Uta Caecilia Merzbach em 1991 e 2011 respectivamente, não há *a priori* uma divisão fixa por conteúdos e, ou, por autores, e sim por tópicos que o autor julgou serem distintos o suficiente para suscitar uma divisão ou detalhamento. Também curioso é o fato de embora contenha uma farta bibliografia, o livro é escrito sem qualquer referência direta nas passagens. Ainda que corrobore com sua proposta também demonstra uma marca da tendência internalista de escrita de Boyer.

São poucas as páginas dedicadas pelo autor especificamente ao cálculo neste título; mais precisamente, apenas das páginas 287 a 303. A tentativa de incluir em tão breve passagem a história do surgimento do cálculo transcreve a tentativa de o expor como uma sucessão de eventos dependentes e com clara inclinação à retórica de Newton. Sem previsibilidade ou regularidade, as páginas tentam ao mesmo tempo trazer a biografia e a bibliografia de talvez duas das maiores mentes do século XVII. Além disso, ao abreviar ambas, biografia e bibliografia, não traz integridade aos eventos e discussões que já eram estudados com mais neutralidade mesmo no tempo de sua publicação. Boyer, por exemplo, descreve o desentendimento entre Leibniz e Newton sobre a autoria do cálculo na passagem:

> Na primeira edição dos *Principia* Newton reconheceu que Leibniz estava de posse de um método semelhante, mas na terceira edição em 1726, após a amarga disputa entre aderentes dos dois homens quanto à independência e prioridade da descoberta do cálculo, Newton omitiu a referência antedata a de Leibniz de cerca de dez anos, mas a descoberta de Leibniz foi independente da de Newton. Além disso, Leibniz tem prioridade de publicação, pois imprimiu uma exposição de seu cálculo em 1684 na *Acta Eruditorum*, espécie de 'periódico científico' mensal que fora fundado só dois anos antes. (BOYER, 1974, p.292, grifos do autor).

Mesmo dentro da seção designada com o título de Leibniz, a maior parte da prosa vai aos feitos de Newton e encerra com: "Em seus últimos anos as honrarias choveram sobre Newton" (BOYER, 1974, p.302). Repete, ainda, a fala anterior em:

> O azedume do sentimento nacionalista chegou a tal ponto que em 1726, uma década depois da morte de Leibniz, Newton retirou da terceira edição dos *Principia* toda referência ao fato de Leibniz ter tido um método no Cálculo semelhante ao de Newton. (BOYER, 1974, p.303).

As falas, praticamente repetidas nas duas passagens, reforçam não apenas o enfoque no embate sobre a autoria de maneira superficial, mas principalmente a inclinação à brevidade dada por Boyer ao cálculo[10]. Tal conjuntura talvez possa ser elucidada pelo fato de que Boyer, como um prolífico autor, publicou em 1949, *Newton como Originador das Coordenadas Polares*, na *American Mathematical Monthly*, e antes, em 1939, *History of the Calculus*, depois publicado sob o título *The History of the Calculus and Its Conceptual Development* em *1959.*

[9] Paradigma no sentido estrito de Thomas Kuhn em *A Estrutura das Revoluções Científicas*."Considero 'paradigmas' as realizações científicas universalmente reconhecidas que, durante algum tempo, fornecem problemas e soluções modelares para uma comunidade de praticantes de uma ciência". (KUHN, 2011, p.12).

[10] Inclusive, ora tratado com letra minúscula ora com maiúscula sem qualquer menção à diferença tanto no texto original quanto nas traduções que prorrogaram a diferença sem também mencionar os motivos.

Ambas precedem a primeira publicação de *A History of Mathematics* de 1968, obra essa substancialmente compacta para absorver o que já tinha escrito nas publicações anteriores. Um argumento a favor dessa sinteticidade dada ao cálculo aqui pode ser tanto pelo fato de ele próprio já ter coberto o assunto noutras obras quanto ao fato de que, considerando a totalidade do que queria tratar em a *História da Matemática* e pela maneira com a qual queria tratar o cálculo realmente compreende esse período breve na totalidade da história da matemática.

Seu título de 1959, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development* nunca foi traduzido no Brasil, esse talvez um dos fatores mais relevantes para explanação das características do texto de 1968, pois sendo o texto de Boyer um dos mais utilizados nas bibliografias no Brasil, soa especialmente importante ter consciência dessa brevidade atribuída ao tópico. Outro texto sobre o cálculo ainda menos conhecido de Boyer no Brasil é o da coleção *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*, da editora Atual. Traduzido em 1992 por Hygino Domingues, com fortes inclinações didáticas, contém muito mais da história e desenvolvimento do cálculo do que sua obra de 1968 e, embora repita algumas passagens e mantenha a narrativa da linha cronológica dos conceitos do cálculo desde os gregos até Newton e Leibniz, é mais rico em detalhes contendo, por exemplo, dois tópicos direcionados ao cálculo fora da linhagem mais comum, a saber: o Cálculo no Japão e os Infinitésimos na Índia.

A *História da Matemática* de Boyer é, sem dúvidas, uma das maiores referências para a história da matemática no Brasil. Isso não quer dizer que não existam elementos passíveis de alguma crítica, especialmente passados mais de 50 anos de sua primeira publicação. Do ponto de vista de pesquisa acadêmica, por exemplo, uma das mais explícitas dificuldades do texto de Boyer é o fato de não haver referências diretas nas passagens, i.e., o estilo de escrita autoritário, no sentido de que o leitor deve simplesmente acreditar na sua narrativa dos fatos pela autoridade do autor uma vez que não há como retraçar com facilidade as fontes dessas informações. Schubring et al. (2020) não só reforça essa leitura como vai além e chega a desaconselhar a utilização deste em bibliografias:

> O que faz ainda mais desaconselhar o uso deste livro - além do grande número de erros factuais e da falta de atualidade, em dar conta dos resultados novos consolidados da pesquisa – é o estilo que se pode chamar ‘autoritário’: escondendo as referências para as próprias afirmações e as fontes das citações, obrigando assim o leitor de simplesmente acreditar em tudo que é apresentado. (SCHUBRING et al., 2020, p.293, grifos dos autores).

Essa é uma característica que não é particular do texto de Boyer, mas, considerando a relevância e a incidência de outras pesquisas que o citam, vale ressalva que o texto se mantenha no topo das referências sem ele próprio indicá-las na maioria das vezes. Se seria o caso de desaconselhar a utilização por completo, pode vir a ser motivo de debate extenso. O fato é que o texto de Boyer não é apenas seminal, mas representa boa parte da historiografia conhecida, especialmente no Brasil, o que o torna fonte não só de pesquisa sobre o conteúdo de história da matemática, mas sobre sua forma, item até mais específico desta pesquisa.

## 2.3 INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DE EVES

Em 1953, Howard Whitley Eves (1911-2004) publica *Introduction to the History of Mathematics*. Embora com publicação anterior à de Boyer e com o título menos audacioso, a ‘introdução’ de Eves é um compêndio de quase 800 páginas incluindo a parte final com exercícios e sugestões para a resolução dos mesmos. Foi traduzido para o português apenas em 1995 como *Introdução à história da matemática* por Hygino Domingues.

As intenções didáticas do autor também são evidenciadas já na sua introdução ao comentar que:

> Este livro difere das muitas histórias da matemática existentes por não se tratar primordialmente de um trabalho de prateleira para consulta, mas sim de uma tentativa de introduzir a história da matemática aos alunos de graduação dos cursos superiores de matemática. Assim sendo, além da narrativa histórica, há muitos expedientes pedagógicos visando assistir, motivar e envolver o aluno. (EVES, 2004, p.17).

E descreve:

> Acreditando que um curso superior de história da matemática deve, antes de nada, ser um curso de matemática, fez-se um esforço para incluir um montante considerável de matemática genuína no livro. Espera-se que o estudante, ao usar este livro, aprenda muita matemática, além de história. (EVES, 2004, p.17).

Se, por um lado, o texto de Eves é amplamente vinculado à tendência internalista da história da matemática, traço do período no qual foi concebido, no prefácio da 6ª edição inglesa, Eves comenta as adições à edição pelo seu filho:

> [...] constituem um acréscimo muito significativo ao livro os Panoramas Culturais escritos por Jamie Eves. Na verdade eles vêm atender a solicitações de usuários de edições anteriores do livro para os quais um aprofundamento do cenário cultural das várias eras e épocas da história da matemática traria muitos benefícios para os alunos. Um aluno avisado deverá ler com atenção cada Panorama Cultural antes de se enfronhar no material histórico do capítulo associado. (EVES, 2004, p. 13).

Entretanto, ainda ao final da introdução, o autor sinaliza que tais panoramas históricos 'podem' ser deixados de lado, retomando a visão internalista de seu texto.

> Os Panoramas Culturais de autoria de Jamie H. Eves podem ser incluídos ou omitidos à escolha do professor. Eles foram inseridos no texto para atender à expectativa daqueles que sentem que a matemática não se desenvolve no vácuo. Como alguns professores podem preferir deixar de lado os Panoramas Culturais, algo do material que neles figura se repete no texto propriamente dito. (EVES, 2004, p.20).

Essa inferência é reforçada e comentada por Schubring et al. (2020):

> Eves colocou o subtítulo 'with cultural connections', aparentemente não mais satisfeito com o estilo exclusivo de história internalista. Parece que não se achou capaz desta parte e pediu seu filho de compô-la. Resultaram breves seções chamadas 'Panorama cultural I' (e II, III, etc.) inseridos na frente dos capítulos, em si não alterados. (SCHUBRING, et al., 2020, p.286, grifos dos autores).

Embora Eves destaque as adições ao texto, vale enfatizar que essas adições dos panoramas culturais ocorreram apenas na 6ª edição inglesa do texto (5ª edição em português), já no ano de 2004, após trabalhos em historiografia contemporâneos que advertiam sobre a influência de aspectos sociais e culturais sobre a história da matemática e que se mantém como a tendência na historiografia atual da matemática. As adições, e particularmente a advertência de que elas existem, parecem direcionadas para um leitor que já teve contato prévio com a obra e não demonstram necessariamente uma mudança em absoluto da posição de escrita do autor e sim um realce para aspectos que o próprio autor julgou de paralelos ao texto. Além disso, essas adições apontam que Eves tinha ao menos consciência de que haviam mudanças na percepção de sua obra à época e que também estava consciente das mudanças de interpretações sobre os textos. Isso dá possibilidade de inferir que a manutenção das escolhas textuais foi uma posição deliberada do autor, numa tentativa de ampliar o escopo do texto sem deixar de lado as características iniciais as quais tinha se proposto em primeiro lugar.

Na seção dedicada ao cálculo e à geometria analítica, por exemplo, Eves estabelece a narrativa mais internalista já na denominação dos subtítulos apenas com os nomes dos matemáticos em destaque. *Descartes*, *Fermat*, *Roberval e Torricelli*, *Huygens*, são cinco dos oito subtítulos no capítulo. Como reforça Schubring et al. (2020):

> A partir desse momento, que trata da virada do século XVI para XVII, o autor se torna muito personalista. A escolha por retratar os trabalhos de matemáticos como condutor da história, obscurece a compreensão global dos fatos. (SCHUBRING, et al., 2020, p.288).

Eves também abre a introdução do capítulo 11 com parágrafos que devem ser quebrados em partes para serem melhor analisados.

> Indubitavelmente, porém, a realização matemática mais notável do período foi a invenção do cálculo, perto do final do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou. (EVES, 2004, p. 417).

Além da introdução dos personagens e da escolha filosófica por 'invenção matemática', Eves expõe aqui um elemento que não se repete em seu texto: o uso de matemática elementar como uma divisão para as matemáticas. Essa distinção se destaca pois, embora faça uso largamente do termo 'elementar' ao longo do texto como em 'geometria elementar', 'aritmética elementar' por exemplo, é apenas no início do capítulo 12 em que Eves se refere novamente ao termo 'matemática elementar' quando expõe:

> A aritmética, a álgebra, a geometria e a trigonometria, que servem de base para a matemática que se ensina atualmente nas escolas de primeiro e segundo graus, bem como a álgebra clássica superior, a geometria analítica e o cálculo das séries básicas dos cursos superiores de matemática, constituem o que em geral se chama de 'matemática elementar'. Neste ponto do livro, portanto, virtualmente já concluímos a abordagem histórica da matemática elementar na forma em que ela se apresenta hoje. É interessante notar, sem levar aos últimos extremos o paralelo, que a sequência dos tópicos no ensino da matemática reproduz a ordem em que eles se desenvolveram historicamente. (EVES, 2004, p.461, grifo do autor).

Na passagem é possível isolar um ponto no texto de Eves que requer certa atenção na bibliografia moderna no ensino de matemática. O autor denomina de matemática elementar a matemática acumulada até o advento do cálculo para no capítulo imediatamente subsequente também incluir o próprio cálculo nesta denominação. Essa inconsistência aparece tanto porque a divisão à época (e atual) dos currículos de matemática escolares americanos e brasileiros são diferentes, quanto porque, na sequência de seu livro, a partir do século XVIII o autor adverte que adentrará os domínios da matemática já denominada como *análise*, esse sim um tópico exclusivo de currículos de ensino superior. Embora possa parecer inofensiva, essa inconsistência gera certa dificuldade na alocação de certos conceitos, especialmente o de função. Retornando à introdução do capítulo 11, Eves comenta ser:

> [...] curioso que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. (EVES, 2004, p.417).

Como já foi informado, a troca na sequência de ensino atual do cálculo é assunto de várias pesquisas, tanto nos ramos da educação quanto nos da história da matemática[11]. Esse é um tópico bem coberto por pesquisas em história que tentam dar conta dessa inversão na ordem do ensino, por vezes isolando as concepções da noção de limite, derivada e integral, noutras incluindo a própria formalização do conceito de função e sua inclusão nos currículos escolares fundamental e médio. Eves não tinha pretensões de criar uma sequência curricular propriamente dita (pelo menos não menciona explicitamente no texto), mas sua tentativa anacrônica de ilustrar, a partir de sua posição no século XX, a sequência de ensino daquele momento salta aos

[11] Ver o subtítulo 2.1 DISSERTAÇÕES PROFMAT.

olhos de um leitor mais atento, especialmente quando incluiu em notas a possibilidade de 'saltos' em seu texto para manter uma 'sequência cronológica' de um assunto. Ou seja, Eves parecia ter consciência de que seu relato era anacrônico em certa medida e embora corrobore com sua indicação na introdução de criar um texto de história da matemática para um curso de matemática, são essas pequenas escolhas textuais que corroboraram para a construção do imaginário da matemática única e linear, ponto de maior crítica na historiografia atual sobre seu texto.

Retornando à citação acima, Eves sucede esta passagem à elaboração de que a ideia de integração tem origem em processos de soma de áreas e volumes enquanto a diferenciação ligada a problemas de tangentes e máximos e mínimos e, a partir disso, recorre aos gregos para dar início à história do cálculo. Neste momento do texto, alternando passagens discursivas com elaborações e explicações teóricas sobre os conceitos matemáticos, recorre aos paradoxos de Zenão, ao método da exaustão de Eudoxo, ao que denominou o método de equilíbrio de Arquimedes, passando pelo subtítulo *Primeiros passos da integração na Europa Ocidental* até o método dos indivisíveis de Cavalieri[12]. Vale nota que na seção dedicada às biografias, ao tratar de Kepler o autor coloca:

> Kepler foi um dos precursores do cálculo. Para calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei dos movimentos planetários, teve de recorrer a uma forma tosca de cálculo integral. E também em seu *Stereometria doliorum vinorum* (Geometria sólida dos barris de vinho, 1615) aplicou processos de integração toscos para achar os volumes de 93 sólidos obtidos pela rotação de segmentos de secções cônicas em torno de um eixo de seu plano. (EVES, 2004, p.358, adição do autor).

A mesma sequência de eventos ocorre quando o autor tenta refazer o caminho da diferencial, passando dos conceitos rudimentares gregos imediatamente para Fermat, Kepler, Wallis e Barrow para, ao final, adentrar os eventos relacionados mais diretamente com Newton. Aqui sim o faz com prolixas passagens, tanto da biografia quanto da bibliografia, dedicando 6 páginas à Newton e tenta cobrir em parágrafos divididos e distintos todas as publicações que julgou importantes desse e encerra o subcapítulo com uma página toda de anedotas sobre a personalidade confusa e distraída de Newton.

Já a respeito de Leibniz, Eves também descreve um pouco de sua trajetória como diplomata, filósofo e teólogo. Enaltece as habilidades de Leibniz nas mais variadas áreas do conhecimento da época e destaca brevemente a notação criada por Leibniz para a integral e a utilização de $dx$ e $dy$ e prontamente informa que não adentrará as discussões com Newton sobre a autoria do cálculo resumindo todo o episódio em:

> Não entraremos aqui em discussões sobre a infeliz polêmica Newton-Leibniz. A opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético, e embora inferior ao seu rival inglês como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática. A controvérsia, que irrompeu por maquinações de outras partes, levou os britânicos a negligenciar por muito tempo os progressos da matemática no continente em prejuízo de sua própria matemática. (EVES, 2004, p.444).

Em seguida retrata um pouco das inclinações teológicas de Leibniz e finaliza com uma passagem enaltecendo as qualidades de Leibniz na matemática.

> Em segundo lugar, há o desenvolvimento de noções relacionadas com infinitésimos e infinitos e processos somatórios que só foram esclarecidos de vez com a invenção do cálculo nos tempos modernos. Os paradoxos de Zenão, o método de exaustão de

[12] Os paradoxos de Zenão, o método da exaustão de Eudoxo e Arquimedes e o princípio de Cavalieri serão revisitados em melhor detalhe no capítulo 4.

> Antífon e Eudoxo e a teoria atomística associada ao nome de Demócrito inserem-se nesta segunda linha de desenvolvimento; nas seções iniciais do capítulo 11, dedicadas às origens do cálculo, essa linha será discutida mais logicamente. (EVES, 2004, p.133).

> Os trabalhos de Arquimedes são obras-primas de exposição matemática e lembram, consideravelmente, artigos de revistas especializadas modernas. Além de exibirem grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações, são escritos numa linguagem altamente acabada e objetiva. Cerca de dez tratados de Arquimedes se preservaram até nossos dias e há vestígios de outros extraviados. Talvez a mais notável das contribuições feitas à matemática por esses tratados se traduzam no desenvolvimento inicial de alguns dos métodos do cálculo integral. Voltaremos a isso num capítulo posterior. (EVES, 2004, p.194).

A inclinação de Eves para a conexão dos gregos com as origens do cálculo se fortalece nas seções ‘Temas’ de cada capítulo. No capítulo 6, traz, por exemplo, ‘Arquimedes como inventor do cálculo integral’ assim como ‘Menaecmo e Apolônio como inventores da geometria analítica’ e no próprio capítulo 11, com ‘A relação dos paradoxos de Zenão com o cálculo’ e ‘A contribuição grega para o desenvolvimento do cálculo integral’. Schubring et al (2020) reforça essa leitura com:

> Ao tratar dos conceitos ligados ao cálculo e à geometria analítica, o autor retoma sua perspectiva personalista, já utilizada no século XVII, e busca encontrar origens dessas ideias. Inicia-se com o histórico de Descartes e suas contribuições do livro *La Geométrie* sendo destacado problemas de cálculo de tangentes e normais. Essa opção representa a intenção de ligar esses problemas às discussões feitas por Newton e Leibniz. Apresenta Fermat como um herdeiro de Diofanto e fundador da teoria dos números, embora não destaque o tratamento que o matemático francês deu a problemas semelhantes aos trabalhados por Descartes. Mais uma vez, observam-se comparações com a matemática produzida pelos gregos, numa perspectiva de matemática única. Uma breve exposição sobre os paradoxos de Zenão e o método da exaustão de Eudoxo leva a uma discussão sobre os conceitos do cálculo tratados por Newton e Leibniz (SCHUBRING, et al, 2020, pp.288-289)

Além disso, Eves escreve com liberdade sobre as personalidades dos personagens como se estivesse a escrever uma prosa como em:

> Johann Bernoulli contribuiu para a matemática mais ainda do que seu irmão Jakob. Embora ciumento e perverso, foi um dos professores mais inspirados de seu tempo. (EVES, 2004, p.463).

> Como já vimos (na Seção 11-10), foi com material fornecido por ele, num acordo financeiro no mínimo curioso, que o marquês de l’Hospital (1661-1704) compôs o primeiro texto de cálculo a ser publicado. (EVES, 2004, p.463).

Essa liberdade textual é bem caracterizada pelo fato de que embora haja bibliografia em cada capítulo, o livro todo não contém citações quaisquer em nenhum momento do texto. Tal característica remete não somente ao período, ao formato de escrita e às intenções didáticas do autor, mas carrega consigo a ideia de autoridade do escritor/historiador e, emprestando mais uma vez as palavras de Schubring et al. (2020) sobre o texto de Boyer, esse “[...] estilo que se pode chamar ‘autoritário’: escondendo as referências para as próprias afirmações e as fontes das citações, obrigando assim o leitor de simplesmente acreditar em tudo que é apresentado”. (SCHUBRING et al., 2020, p.293, grifos dos autores). Mais uma vez, essa não é uma característica particular nem do texto de Boyer nem mesmo do de Eves. É, de fato, um predicado notável de textos matemáticos em geral[13], especialmente de livros texto ou quaisquer que tenham quaisquer intenções mais didáticas do que de pesquisa bibliográfica.

[13] Ver Cap. 4.5 – Autoria.

Vale destaque que não há a adição do que chamou de ‘panorama cultural’ neste capítulo dedicado ao cálculo. É interessante notar, portanto, que a inclinação de Eves para a construção da sequência cronológica de eventos que levariam inevitavelmente à invenção do cálculo por Newton e Leibniz não poderia ser questionada dentro do próprio texto. Na narrativa de Eves, não se promove qualquer dúvida de que todos esses eventos são, não apenas relacionados entre si, mas um sendo o precursor imediato do outro. Destaca-se, então, não apenas a visão internalista, fortemente demarcada no texto de Eves, mas também a inclinação ao eurocentrismo mencionada acima. Não parece exagero, portanto, inferir que essa escolha textual e metodológica de Eves carrega intrinsicamente uma perspectiva linear da construção da matemática.

Isso não quer dizer que também seja possível inferir abertamente que tal perspectiva seja classificada como um equívoco. O que se pretende evidenciar com essa análise é que a crítica historiográfica ao texto tem fundamento nas escolhas do autor e, como toda escolha, acarreta nas interpretações que nem sempre podem ser controladas pelo próprio autor. Com ou sem intenção, o texto de Eves não é apenas uma das obras seminais da literatura em história da matemática do século XX, mas tornou-se uma espécie de modelo a ser seguido. O texto de Eves, longe de ser apenas uma introdução como sugere, deve ser agraciado pelo enorme esforço empreendido em acumular e sintetizar o conhecimento da história da matemática até os anos 1950, abrindo campo para a própria pesquisa especializada na história. A crítica tenaz e persistente ao texto só corrobora com o fato de que seu texto marcou uma geração da historiografia da matemática e que, não sem motivos, encontra apelo até os dias de hoje na composição de currículos.

A falta de atualização em suas edições para moldes mais contemporâneos da historiografia pode carregar certa dificuldade de adaptação e adequação de seu conteúdo para a construção de um curso que tentaria promover um aprendizado da história da matemática como uma história social. O questionamento que fica dessa leitura e análise é: a crítica atual ao texto é suficiente para que se deva abandonar o texto de Eves nas composições curriculares ou apenas ser reposicionado na hierarquia de obras a se consultar sobre a história da matemática? Independente da resposta, há de se convir que tomada essa escolha, poucas obras podem, efetivamente, assumir seu lugar.

## 2.4 A GUERRA DO CÁLCULO DE BARDI

Jason Socrates Bardi escreve em 2006 o título *The Calculus Wars: Newton, Leibniz,and the greatest mathematical clash of all time*. Traduzido para o português em 2008 apenas como *As Guerras do Cálculo*, a obra contempla mais especificamente os bastidores e as ramificações do período em que Newton e Leibniz disputaram a autoria do cálculo. O autor justifica sua bússola quando coloca:

> [...] muitos autores, incluindo historiadores e biógrafos, têm desprezado as guerras do cálculo como uma infeliz, até mesmo ridícula, perda de tempo - talvez porque mostre os dois em seu aspecto mais desfavorável. Leibniz e Newton tornaram-se realmente abomináveis, e é difícil conciliar isso com a fama que, sob outros aspectos, haviam granjeado como gênios ambiciosos, desprendidos, esforçados e prolíficos. (BARDI, 2008, p.14).

Embora não explicitado, Bardi pode realmente estar se referindo às passagens nos textos de Boyer e Eves[14]. Ao longo do texto, Bardi relembra em várias passagens que havia dois argumentos principais sobre a mesa: quem foi o primeiro a ter a ideia, independente da concepção

[14] Ver 2.3.

de invenção ou descobrimento, e quem foi o primeiro a publicá-la. Ele informa, já em sua introdução, que Newton foi o primeiro a propor a ideia, mas foi Leibniz quem a publicou antes. “Embora (Leibniz) tenha sido o segundo cronologicamente, foi o primeiro a publicar seu sistema de cálculo, o que fez em dois trabalhos que datam de 1684 e 1686” (BARDI, 2008, p.12, inclusão nossa).

Escrito quase todo em prosa regular em tom de documentário, possui pouca (ou nenhuma) rigidez acadêmica além de ter claras intenções de divulgação científica, *As Guerras do Cálculo* conseguem em menos de 300 páginas trazer tanto biografias completas de Leibniz e Newton, contextualizar com precisão (às vezes desnecessária) cada período de importância para o desenvolvimento do cálculo sem nenhuma pretensão (nem preocupação) com alguma formalidade de explicações mais aprofundadas sobre a matemática de que trata.

Sem dúvidas, Bardi continua a ressaltar os grandes homens do cálculo, numa orientação internalista explícita, mas talvez como nenhum outro desta lista e em qualquer outra publicação acerca do cálculo atentou tanto para o contexto social de cada uma das passagens. O nível de detalhamento impressiona. O trabalho de tradução por si só empregado com o acúmulo de cartas, notas e entrevistas já serviriam de base para uma pesquisa extensiva, ainda do ponto de vista acadêmico, e embora o texto não seja tratado como um exemplo de historiografia da matemática, Bardi, que é jornalista, tenta acumular numa só obra todo o contexto considerado paralelo da concepção e da disputa da autoria do cálculo no período de Leibniz e Newton.

Ainda que o enfoque maior do texto recaia sobre essa disputa da autoria, a respeito das origens mais longínquas do cálculo o autor faz apenas uma menção a Arquimedes em todo o texto quando descreve que:

> O cálculo permitiu que alguns dos grandes problemas da geometria fossem resolvidos. Newton não foi o primeiro a conceituar tais problemas. Nem foi ele o primeiro a dominar com êxito a matemática que lhe permitiria resolvê-los. Os antigos haviam calculado a área das formas geométricas por meio daquilo que hoje chamamos de ‘método da exaustão’ – preenchendo uma área com triângulos, retângulos ou algumas outras formas geométricas com área fácil de calcular, somando-as depois. Utilizando esse método, Arquimedes determinou a área de parábolas e segmentos esféricos. (BARDI, 2008, p.23, grifo do autor).

A passagem também serve para refletir sobre alguns aspectos do texto de Bardi. Antes de mais nada, confirma o estilo de escrita inegavelmente não direcionado para especialistas em matemática; em segundo lugar, Bardi teve o cuidado de redigir “(...)por meio daquilo que hoje chamamos de o ‘método da exaustão’ ”, entretanto, em nenhuma outra passagem do texto explica ou elabora o porquê de tal menção temporal ao termo; finalmente, também repete os indícios de uma sequência de ideias culminando no cálculo. Essa sequência, inclusive, segue com a inclusão de Kepler, Cavalieri, Descartes, Fermat e Pascal nas passagens:

> No século XVII, Johannes Kepler repetiu o trabalho de Arquimedes, considerando o círculo como composto de um número infinito de triângulos infinitamente pequenos e depois aplicou o mesmo raciocínio para determinar as áreas e os volumes de outras formas geométricas que Arquimedes não havia considerado. (É interessante notar que Kepler foi motivado, em parte, pelo fato de 1612 ter sido um excelente ano para a produção de vinho e não existirem na época bons métodos para se estimar o volume dos tonéis[15].) Um outro matemático, Bonaventura Cavalieri, amigo de Galileu e professor em Bolonha, considerou a linha uma infinidade de pontos; uma área, uma infinidade de linhas; e um sólido, uma infinidade de superfícies. (BARDI, 2008, pp.23-24, adições do autor, nota nossa.).

> Pierre Fermat [sic], conselheiro do parlamento de Toulouse, hoje lembrado por seu famoso último teorema, criou um método para determinar máximos e mínimos, traçando

[15] *Stereometria Doliorum Vinorum*, 1615, traduzido como a *Geometria sólida dos barris de vinho*.

> tangentes a curvas, tão semelhante ao cálculo diferencial que no século XVIII alguns iriam proclamá-lo o inventor do cálculo. (BARDI, 2008, p.24).

O caminho das ideias parece novamente consolidado. Embora não fazendo qualquer referência à Eudoxo ou mesmo aos *Elementos de Euclides*, Bardi também traça as origens das ideias do cálculo de Arquimedes à Newton e Leibniz. Uma recorrência factual intrigante visto que resta curioso o fato de que cita Boyer e Cajori[16], mas não Eves nem Struik, por exemplo, apesar de incluir vasta bibliografia.

A inclusão do texto de Bardi na exploração da história do cálculo desta pesquisa se faz pelo entendimento de que um dos maiores pontos de crítica da historiografia às obras jaz exatamente na supressão de contextos sociais mais amplos e elaborados. O texto de Bardi faz, talvez, exatamente o contrário: suprime a matemática do contexto.

Um exemplo imediato dessa caracterização pode ser a elaboração do contexto de publicação do cálculo por Newton. Enquanto os textos de Boyer, Eves e até mesmo o de Roque indicam certa estabilidade no fato de que Newton teria concebido o cálculo antes mas que Leibniz teria sido o primeiro a publicar, Bardi consome grande parte da narrativa do capítulo três descrevendo dois argumentos paralelos que explicariam o hiato entre a concepção e a publicação de Newton abreviada em:

> Havia muitos outros matemáticos que tinham resolvido a espécie de problemas a que o cálculo podia dar solução, usando outros métodos. Leibniz pensaria que estava fazendo avanços completamente novos, quando, na verdade, muito do que ele estava descobrindo já havia sido amplamente elaborado por Newton; apenas não havia sido publicado — em parte devido ao Grande Incêndio de Londres, em parte por causa do problema de Newton com Hooke. (BARDI, 2008, p.100).

O primeiro, de cunho econômico, mostrando a dificuldade à época em publicar textos que não teriam grande tiragem, como seria o caso de um texto obscuro de matemática; e o segundo, informando sobre motivos particulares que levaram Newton a não publicar imediatamente o cálculo, fato que soa absurdo nos dias de hoje.

Por fim, o que o texto de Bardi consegue evidenciar é que a separação do contexto social da produção matemática sempre parece ser duas 'faces' da mesma moeda. Embora esse possa ser o maior ponto de crítica aos textos mais consolidados da história da matemática como os de Eves e de Boyer por exemplo, a conjunção de ambos num texto só faria não apenas um texto exaustivo, até mesmo do ponto de vista de produção, mas também talvez o tornaria incompreensível. O fio condutor do relato histórico se tornaria disperso facilmente e talvez esse possa ser considerado o problema: não há espaço textual para que as duas 'faces' estejam no mesmo lugar. A crítica sobre a linearidade da construção da história da matemática pode ser também uma crítica à obrigatoriedade da linearidade de um texto, o que a torna um objeto de crítica à criatividade humana e não às intenções textuais em si.

Dito isso, o texto de Bardi poderia ser considerado apenas como uma obra complementar, não fosse a ideia de que poderia disputar esse mesmo espaço intelectual. Resta o juízo de ser o texto de Bardi complementar de outros ou que outros textos assumam o papel de complementares ao de Bardi. Essa inversão, por assim dizer, de qual enfoque deva ser o primordial é o que poderia educar a escolha final. Emprestando as palavras de Eves (2004, p.17), "Acreditando que um curso superior de história da matemática deve, antes de nada, ser um curso de *matemática*, (...) espera-se que o estudante, ao usar este livro,

[16] Cita as obras de 1919 e 1925, *A History of the conceptions and limits of Fluxions in reat Britain from Newton to Woodhouse* e *Leibniz, the Master Builder of Mathematical Notation* respectivamente. Não cita explicitamente a obra de 1893 *A History of Mathematics*.

aprenda muita matemática, além de história", no caso de Bardi, para aprender alguma matemática, deve-se recorrer aos textos de matemática. Suplementar, alternativo, suprimível

## 2.5 INFINITESIMAL DE AMIR ALEXANDER

Em 2014 o historiador e matemático Amir Alexander publica seu terceiro livro intitulado *Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shape The Modern World*, traduzido em 2016 para o português por George Schlesinger como *Infinitesimal: A teoria matemática que revolucionou o mundo.*

O texto de Alexander foca fundamentalmente na ideia dos infinitesimais e como esse conceito se disseminou no tempo. A narrativa de Alexander revela e ressalta a conexão íntima entre as ideias matemáticas e relações de poder, especialmente relacionados à igreja nos vários períodos em que os infinitesimais surgem e ressurgem como pressuposto filosófico no pensamento.

Assim como em *As Guerras do Cálculo,* o texto de Alexander prima pela contextualização, mas, neste, sem deixar de lado completamente as revelações matemáticas, fruto, de certo, do tato do autor com ambas, historiografia e matemática. Na prática, as passagens matemáticas não afrontam a leitura fluida para um iniciado, mas o que talvez se mostrará um desafio para um estudante de matemática ao se deparar com o texto de Alexander será estabelecer qual a relação da Reforma Protestante com a concepção do cálculo? Como poderia o Leviatã de Thomas Hobbes ter qualquer relação com a matemática? Nas palavras do próprio autor:

> Hoje, a ideia de que um ensaísta político analisando as instituições de um país estrangeiro pudesse colocar em foco um obscuro conceito matemático não nos parece apenas surpreendente, mas bizarra. Os conceitos de matemática superior nos parecem tão abstratos e universais que não podem ser relevantes para a vida cultural ou política. Pertencem ao domínio de especialistas altamente treinados, e nem sequer entram no registro da moderna crítica cultural, para não mencionar a política. Mas esse não era o caso no início do mundo moderno. (ALEXANDER, 2016, pp.8-9).

Alexander costura o contexto político, social e especialmente o religioso para criar uma narrativa que pende para a mudança filosófica iminente que os infinitesimais traziam. A ideia não era nova, mas as ramificações da absorção e operacionalização do 'infinito' nos mais variados contextos e suas implicações são o gancho da narrativa. O foco do texto todo fica bem demarcado na passagem:

> Por que as melhores cabeças do início do mundo moderno brigaram de forma tão feroz acerca dos infinitamente pequenos? A razão era que havia muito mais em jogo que um obscuro conceito matemático: a disputa era sobre o aspecto do mundo moderno. Dois campos se confrontavam a respeito dos infinitamente pequenos. De um lado estavam enfileiradas as forças da hierarquia e da ordem – jesuítas, hobbesianos, cortesãos reais franceses e a alta Igreja anglicana. Eles acreditavam numa ordem fixa e unificada do mundo, tanto natural quanto humano. E se opunham com firmeza aos infinitesimais. Do outro lado estavam relativos 'liberalizadores', como Galileu, Wallis e os newtonianos. Eles acreditavam numa ordem mais pluralista e flexível, que pudesse acomodar a gama de opiniões e diversos centros de poder, e defendiam os infinitesimais e seu uso na matemática. As linhas eram claras, e a vitória para um lado ou outro deixaria sua marca no mundo pelos séculos seguintes. (ALEXANDER, 2016, p.10, grifos do autor).

*Infinitesimal* também não é um exemplo de historiografia clássica da matemática, mas assim como Bardi, consegue compor o enredo da concepção do cálculo sob outra ótica e, embora (talvez) dando menos atenção a Newton e Leibniz como seria esperado, fomenta a conexão dos conceitos antes de sua consolidação como cálculo propriamente dito.

Já na introdução, por exemplo, coloca Arquimedes e os paradoxos de Zenão em foco.

> Os gregos antigos tinham plena consciência desses problemas, e o filósofo Zenão de Eleia (século V AEC) os codificou numa série de paradoxos com nomes pitorescos.
>
> (...)Plenamente consciente dos riscos matemáticos que estava assumindo, Arquimedes mesmo assim optou por ignorar, pelo menos por um tempo, os paradoxos dos infinitamente pequenos, demonstrando que poderosa ferramenta matemática o conceito podia ser. (ALEXANDER, 2016, p.11).
>
> Arquimedes teve o cuidado de não se apoiar demais no seu novo e problemático método. Depois de chegar aos resultados usando os infinitesimais, voltou ao começo e provou cada um deles por meios geométricos convencionais, evitando o uso dos infinitamente pequenos. Mesmo assim, apesar da cautela, e da sua fama de grande sábio do mundo antigo, Arquimedes não teve sucessores. Gerações futuras de matemáticos se mantiveram ao largo da novidade de sua abordagem, apoiando-se, em vez disso, nos métodos experimentados e comprovados da geometria e suas verdades irrefutáveis. Por mais de um milênio e meio, o trabalho de Arquimedes sobre infinitesimais continuou uma anomalia, o vislumbre de um caminho não trilhado. (ALEXANDER, p.13).

E segue relatando o hiato comum do desenvolvimento da matemática na Idade Média:

> Não foi antes de 1500 que uma nova geração de matemáticos adotou a causa dos infinitamente pequenos. Simon Stevin em Flandres, Thomas Harriot na Inglaterra, Galileu Galilei e Bonaventura Cavalieri na Itália e outros redescobriram os experimentos de Arquimedes com infinitesimais e começaram mais uma vez a examinar suas possibilidades. (ALEXANDER, 2016, p.13).

Mais do que dar uma pista da orientação eurocentrista, estas breves passagens expõem o caminho de Alexander acerca das origens do cálculo. Vale nota, portanto, a consolidação desta trilha de conceitos e personagens: Zenão e seus paradoxos, Arquimedes e seu método, Cavalieri e seu princípio. Por mais que o foco da narrativa de Alexander não recaia especificamente na relação desses com os conceitos modernos do cálculo, a exposição é rica e informa sobre uma ótica diferente esses momentos da concepção. Os infinitesimais são de longe um conceito marginal do cálculo; estão, como o autor tenta expor, no cerne de seu desenvolvimento, mas é entregue aqui numa perspectiva absolutamente diferente.

## 2.6 ROQUE E UMA VISÃO CRÍTICA, DESFAZENDO MITOS E LENDAS

Tatiana Marins Roque publica em 2012 o texto vencedor do prêmio Jabuti de 2013, *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* O texto de Roque se difere dos outros títulos aqui analisados em pelo menos duas frentes. Uma é a posição temporal em que se encontra, i.e., é um texto concebido já a partir de uma historiografia pautada no externalismo, mas que circunda os elementos já bem populares da história da matemática e as novas características da historiografia. A outra distinção do texto de Roque é o tom de crítica e a insistência em elucidar e desembaraçar os acúmulos de informações obtusas já consolidadas noutros textos mais populares. A autora inclusive informa:

> A ideia não é reconstruir uma visão global, sintética, do desenvolvimento da matemática, vista como um saber unitário composto pela acumulação de resultados que iriam se encaixando para constituir uma arquitetura ordenada e sistemática. Ou seja, nosso objetivo principal é, partindo dos modos como a história da matemática foi escrita, recontar essa história. (ROQUE, 2012, p.18).

Já na seção dedicada mais ao cálculo, algumas passagens reforçam essa leitura primária do texto de Roque:

> Diferentemente do que as narrativas tradicionais sugerem, o desenvolvimento das ideias fundamentais do cálculo não se deu no interior da matemática, como consequência dos trabalhos de uma comunidade imbuída em aperfeiçoar as lacunas formais de modo cumulativo. Durante os séculos XVII e XVIII, os métodos infinitesimais se inseriram em um domínio amplo que incluía não só a matemática, mas também a filosofia e a física. Além disso, as discussões acerca de sua natureza e legitimidade são inseparáveis do ambiente institucional em que aconteciam. (ROQUE, 2012, p.369).

> ‘Dentro do abrangente processo social de modernização que sucedeu a Revolução, o sistema de educação foi radicalmente reconstruído com base nas visões otimistas de que o conhecimento podia ser ensinado, e o método analítico podia ser geralmente ‘aplicável’’, afirma Gert Schubring em *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition* (Conflitos entre generalização, rigor e intuição) referindo-se à França do final do século XVIII. Essa reconstrução significou, na matemática, uma dominação do programa de algebrização, bem como sua separação em relação às outras disciplinas. Entretanto, a maioria dos livros de história do cálculo – inclusive alguns de ótima qualidade que constam da bibliografia deste livro – enumera os feitos de personagens importantes, como Euler, Lagrange e Cauchy, sem se preocupar com o modo como o contexto influenciou suas pesquisas. (ROQUE, 2012, p.382, grifos da autora).

Essas passagens sozinhas já seriam suficientes para indicar a mudança no tom e na direção que o texto pretende seguir. Diferente das obras analisadas anteriormente, Roque enfrenta o modelo tradicional de historiografia não apenas recontando as mesmas narrativas da história da matemática, mas apontando abertamente onde e no quê um novo olhar deve ser lançado.

Vale indicar, entretanto, que o texto de Roque (2012) não faz grandes explanações sobre o tópico do cálculo em si. Primeiro porque, aparentemente, na intenção de cobrir grande parte da história da matemática desde a Mesopotâmia e Egito antigo até “[...] o estabelecimento do rigor nas matemáticas nos séculos XVII e XVIII e na matemática pura no século XIX” (ROQUE, 2012, p.13), não há espaço para um detalhamento ainda maior sobre apenas um período em destaque como desejamos fazer nesta pesquisa. Segundo, e mais especificamente, a autora explica:

> Nosso objetivo, contudo, não é tratar da história do cálculo (ou da análise matemática, como passou a se chamar) em si mesma, visto que não pretendemos analisar a história da matemática superior. Mas é preciso abordar esse assunto, ainda que resumidamente, para entender a definição de noções centrais adotadas no ensino básico – como função, número real e número complexo. (ROQUE, 2012, pp.343-344).

Ainda que conte com o objetivo do capítulo bem delimitado, Roque levanta questionamentos intrigantes sobre a concepção do cálculo. Na introdução do capítulo, a autora faz um apanhado do que chama de ‘Relato Tradicional’. Resumidamente, traz e levanta questionamentos quando indica que tradicionalmente:

> A história do cálculo infinitesimal também recebe um tratamento retrospectivo. Apresentam-se diferentes técnicas que remontam aos paradoxos de Zenão, passando pelo método grego da ‘exaustão’ e pelos métodos de Cavalieri para calcular áreas até chegar a Leibniz e Newton. Mas será que podemos afirmar que Leibniz e Zenão tinham o mesmo objetivo de pesquisa? [...] Tem-se a impressão, assim, de que os procedimentos investigados evoluíram desde estágios mais rudimentares, nos quais certas inconsistências ainda não haviam sido reparadas, até o momento em que foram formalizados de modo como, hoje, consideramos válido. (ROQUE, 2012, p.342, grifos da autora).

Ao apontar tais questões, a autora abre margem para que possamos reconduzir e analisar com mais cuidado esses pontos em contraste com as outras obras mencionadas acima. Por exemplo, ao tratar sobre Leibniz, Roque (2012) volta sua atenção ao conceito de infinito e à simbolização do cálculo.

> Desde Viète, o programa analítico tinha transformado a análise em sinônimo de álgebra simbólica, tida como uma teoria das equações. Conforme visto no Capítulo 5, a arte analítica propunha uma linguagem simbólica para fazer matemática e lidar com curvas. Com o fim de inserir seus trabalhos nessa tradição, Leibniz começou a chamar seu cálculo de 'análise de indivisíveis e infinitos' (ROQUE, 2012, p.356, grifo da autora).

> Durante muitos anos, os matemáticos se debateram com o problema de fundamentar o uso de quantidades infinitamente pequenas, os 'elementos infinitesimais'. O problema dos fundamentos deriva do fato de que o cálculo leibniziano empregava as chamadas 'diferenciais', designadas na notação de Leibniz por $dx$ e $dy$. Tais quantidades eram utilizadas nos cálculos como quantidades auxiliares, e com êxito. (ROQUE, 2012, p.361), grifos da autora).

Na mesma nota de Boyer e Eves, a autora também atribui a Leibniz a utilização de $dx$ e $dy$ como 'diferenciais'. Importante perceber que essas diferenciais ainda não eram exatamente o que temos hoje como diferenciais.

Talvez o comentário de mais impacto de Roque em relação aos outros textos que tratamos aqui se dá quando explicita que:

> Diferentemente do que as narrativas tradicionais sugerem, o desenvolvimento das ideias fundamentais do cálculo não se deu no interior da matemática, como consequência de trabalhos de uma comunidade imbuída em aperfeiçoar as lacunas formais de modo cumulativo. Durante os séculos XVII e XVIII, os métodos infinitesimais se inseriram em um domínio amplo que incluía não só a matemática, mas também a filosofia e a física. Além disso, as discussões acerca de sua natureza e legitimidade são inseparáveis do ambiente institucional em que aconteciam. (ROQUE, 2012, p.369).

Deste ponto em diante do texto a autora opta por uma digressão em relação ao desenvolvimento do cálculo mais cronológico propriamente dito e volta suas atenções para o conceito de função, muito mais ligado à sua intenção de cobrir os assuntos presentes na matemática do ensino básico.

> Os métodos algébricos, associados aos nomes de Euler e Lagrange, representam um próximo passo na transformação da noção de rigor. Descrevemos adiante os trabalhos do primeiro para mostrar, em seguida que sua recepção na França está ligada ao contexto que acabamos de descrever. Antes disso, faremos um breve panorama sobre a noção de função até esse momento. (ROQUE, 2012, p.369).

Com o foco muito mais no conceito de função, Roque então encerra o capítulo que trata do cálculo numa nota muito mais apontada para a relação entre o rigor e o desenvolvimento da matemática em si.

> De modo similar, essa narrativa tradicional enxerga a construção dos diferentes conjuntos numéricos a partir de extensões sucessivas: primeiro os naturais, depois os inteiros, os racionais, os reais e os complexos. Mas essa construção, embora didática, não possui fundamento histórico, além de fornecer uma imagem da evolução da matemática tal qual um edifício estruturado, erigido sobre bases sólidas. A constituição da noção de rigor, ora vigente, está ligada à história da análise matemática. Na maioria dos livros que tratam do tema, as práticas dos analistas do século XVIII aparecem como inconsistentes em comparação com a análise moderna, desenvolvida a partir de Cauchy. Dentro desse espírito, chega-se a afirmar que, na virada do século XVIII para o XIX, os matemáticos começaram a se preocupar com a inconsistência dos conceitos e provas de amplos ramos da análise e resolveram colocar ordem no caos. (ROQUE, 2012, p.404).

Mais uma vez, Roque acende uma discussão atraente: até que ponto a liberdade didática permite uma transgressão da história? i.e., em que medida é válida a imagem de relacionar as ideias gregas e iluministas com os conceitos ensinados em sala de aula atualmente, por exemplo?

Talvez um ponto de debate seja que a maior parte das descrições históricas tentam seguir aquilo que poderia ser considerado um arranjo didático, ou seja, a história é contada a partir do momento atual, em que os embaraços, percalços, disputas e contradições que construíram o conhecimento hoje denominado como o cálculo já foram remanejados numa ordem apontada para o ensino do mesmo e não se atentam mais nem à cronologia nem à precisão de relato históricos. Longe de ser um debate direto, seria necessário pontuar essas instâncias em que os conceitos do cálculo contemporâneo são comparados com as ideias antigas e analisar com mais atenção. Essa, inclusive, será a proposta de análise mais aprofundada no capítulo 4.

Por fim, o texto de Roque enriquece e abre margem para discussões mais aprofundadas mesmo num ambiente de sala de aula. Menos impositivo e mais questionador em essência, a narrativa de Roque prioriza o externalismo tentando não deixar de lado por completo o tipo de informação que normalmente se busca num livro de história da matemática. Além do fato de ser um dos únicos textos já concebidos em língua portuguesa, se for acrescentado à bibliografia básica de um curso de história, seguramente trará um contraste de redação e orientação em relação às obras canônicas da disciplina.

## 2.7 A FERRAMENTA MACTUTOR

Designamos aqui de Ferramenta *MacTutor* o repositório de websites da internet alocados sob a curadoria Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St. Andrews na Escócia. *MacTutor History of Mathematics Archive*[17] como se denomina, contém "[...] mais de 3000 biografias de matemáticos e mais de 2000 páginas de ensaios e material de suporte[18]".

A ferramenta MacTutor contém um texto explicando a visão de história empregada na construção do site.

> Nós vemos a história da matemática a partir de nossa própria posição de entendimento e sofisticação. Não há outra maneira, no entanto nós temos que tentar apreciar a diferença entre o nosso ponto de vista e o de matemáticos de séculos atrás. Frequentemente, a maneira como a matemática é ensinada atualmente torna mais difícil de entender as dificuldades do passado[19].
>
> Uma compreensão dessas dificuldades beneficiaria qualquer professor que tentasse ensinar crianças do ensino fundamental. Mesmo os inteiros, que tomamos como o conceito mais básico, têm uma sofisticação que só pode ser devidamente compreendida examinando o cenário histórico[20].

A ferramenta Mactutor também indica em artigo de J.J. O'Connor e E.F. Robertson que o início do cálculo teve seus primeiros passos com os gregos. Entretanto, ao apontar que:

[17] Todas as citações diretas e indiretas referentes ao repositório MacTutor conterão a indicação do texto original do qual foram traduzidas e o link direto em nota de rodapé
[18] Tradução nossa de: containing biographies of more than 3000 mathematicians and over 2000 pages of essays and supporting materials. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/
[19] Tradução nossa de: We view the history of mathematics from our own position of understanding and sophistication. There can be no other way but nevertheless we have to try to appreciate the difference between our viewpoint and that of mathematicians centuries ago. Often the way mathematics is taught today makes it harder to understand the difficulties of the past. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/
[20] Tradução nossa de: An understanding of these difficulties would benefit any teacher trying to teach primary schoolchildren. Even the integers, which we take as the most basic concept, have a sophistication which can only be properly understood by examining the historical setting. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

> Para os gregos, os números eram razões de inteiros portanto a linha dos números tinha 'buracos'. Eles contornaram essa dificuldade utilizando medidas, áreas e volumes; além disso, para os gregos, nem todas as medidas eram números[21].

Embora o artigo ainda não aponte diretamente um período grego específico neste momento, também coloca em Zenão de Eléia, assim como tantos outros autores, a primeira ideia rudimentar infinito e de limite, ao menos do ponto de vista filosófico:

> Zenão de Eléia, por volta de 450 a.C., deu uma série de problemas que se baseavam no infinito. Por exemplo, ele argumentou que o movimento é impossível: Se um corpo se move de A para B, antes de chegar a B passa pelo ponto médio, digamos B1 de AB. Agora, para passar para B1, ele deve primeiro atingir o ponto médio B2 de AB1. Continue esse argumento para ver que A deve se mover por um número infinito de distâncias e, portanto, não pode se mover.[22]

A ferramenta também aponta para personagens em momentos anteriores como em:

> Leucipo, Demócrito e Antífon fizeram contribuições para o método grego de exaustão que foi colocado em uma base científica por Eudoxo por volta de 370 a.C.. O método de exaustão é assim chamado porque se pensa nas áreas medidas se expandindo para que elas representem cada vez mais a área requisitada[23].

Na sequência do artigo logo para Arquimedes:

> Entre outras 'integrações' de Arquimedes estavam o volume e a área de superfície de uma esfera, o volume e a área de um cone, a área da superfície da elipse, o volume de qualquer segmento de um paraboloide de revolução e um segmento de um hiperboloide de revolução[24].

É mister notar o uso das aspas no termo *integrations.* Embora não elucidado, informa sobre a escolha de terminologia difusa neste caso. Um trocadilho que talvez carregue a conotação da semelhança do processo de integração com o método de Arquimedes, mas sem maiores explanações, é apenas uma conjectura. O que não é conjectura é o salto imediato para século XVI em:

> Nenhum progresso foi feito até o século XVI, quando a mecânica começou a levar os matemáticos a examinar problemas como centros de gravidade. Luca Valerio (1552-1618) publicou *De quadratura parabolae* em Roma (1606) que continuou os métodos gregos de atacar este tipo de problemas de área. Kepler, em seu trabalho sobre o movimento planetário, teve que encontrar a área dos setores de uma elipse. Seu método consistia em pensar em áreas como somas de linhas, outra forma grosseira de integração,

---

[21] Tradução nossa de: To the Greeks numbers were ratios of integers so the number line had "holes" in it. They got round this difficulty by using lengths, areas and volumes in addition to numbers for, to the Greeks, not all lengths were numbers. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/The_rise_of_calculus/

[22] Tradução nossa de: Zeno of Elea, about 450 BC, gave a number of problems which were based on the infinite. For example he argued that motion is impossible: - If a body moves from A to B then before it reaches B it passes through the mid-point, say B1 of AB. Now to move to B1 it must first reach the mid-point B2 of AB1 . Continue this argument to see that A must move through an infinite number of distances and so cannot move. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/The_rise_of_calculus/

[23] Tradução nossa de: Leucippus, Democritus and Antiphon all made contributions to the Greek method of exhaustion which was put on a scientific basis by Eudoxus about 370 BC. The method of exhaustion is so called because one thinks of the areas measured expanding so that they account for more and more of the required area. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/The_rise_of_calculus/

[24] Tradução nossa de: Among other 'integrations' by Archimedes were the volume and surface area of a sphere, the volume and area of a cone, the surface area of an ellipse, the volume of any segment of a paraboloid of revolution and a segment of an hyperboloid of revolution. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/The_rise_of_calculus/

> mas Kepler tinha pouco tempo para o rigor grego e teve a sorte de obter a resposta correta depois de cometer dois erros de cancelamento neste trabalho[25].

A passagem, além de trazer outra referência à integração, também demonstra o caráter eurocentrista por vezes indicado noutros textos. Ao indicar o hiato entre Arquimedes e o século XVI, deixa de fora tantas outras tentativas de solução dos mesmos problemas que caracterizaram como formas cruas de integração.

> Três matemáticos, nascidos três anos de diferença entre eles, foram os próximos a fazer grandes contribuições. Eles eram Fermat, Roberval e Cavalieri. Cavalieri foi levado ao seu 'método dos indivisíveis' pelas tentativas de integração de Kepler. Ele não era rigoroso em sua abordagem e é difícil ver claramente como ele pensava sobre seu método. Parece que Cavalieri pensava em uma área como sendo composta de componentes que eram linhas e então somava seu número infinito de 'indivisíveis'. Ele mostrou, usando esses métodos, que a integral de $x^n$ de 0 até a é $a^{n+1}/\,(n+1)$ mostrando o resultado para vários valores de n e inferindo o resultado geral.[26].

Embora sem impacto algum, a passagem contém um problema factual. Cavalieri tem o nascimento localizado em 1598, Roberval em 1602 e Fermat em 1607[27]. Mas o detalhe mais importante aqui é a mudança da referência à integral, pois já relaciona Kepler com uma tentativa de integração e Cavalieri já com a própria integral de $x^n$, ou seja, já promove a ideia de uma sequência de eventos intimamente encadeados até as descobertas de Newton e Leibniz durante os próximos 60 anos.

As passagens continuam informando que Roberval considerou problemas da mesma natureza que Cavalieri, mas com mais rigor, enquanto Fermat, embora este ainda mais rigor do que aquele, não teria fornecido qualquer prova.

O texto passa por notas rápidas de personagens conhecidos da história do cálculo como Descartes, Huygens, Torricelli e Barrow para finalmente tratar de Newton. Aqui, logo dispõe Newton como 'autor' do teorema fundamental do cálculo.

> Em seu tratado de 1666, Newton discute o problema inverso, dada a relação entre x e y'/x' encontre y. Portanto, a inclinação da tangente foi dada para cada x e quando y'/x' = f(x) e assim Newton resolve o problema por antidiferenciação. Ele também calculou áreas por antidiferenciação e este trabalho contém a primeira afirmação clara do *Teorema Fundamental do Cálculo*[28].

---

[25] Tradução nossa de: No further progress was made until the 16th Century when mechanics began to drive mathematicians to examine problems such as centres of gravity. Luca Valerio (1552-1618) published *De quadratura parabolae* in Rome (1606) which continued the Greek methods of attacking these type of area problems. Kepler, in his work on planetary motion, had to find the area of sectors of an ellipse. His method consisted of thinking of areas as sums of lines, another crude form of integration, but Kepler had little time for Greek rigour and was rather lucky to obtain the correct answer after making two cancelling errors in this work. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/The_rise_of_calculus/

[26] Tradução nossa de: Three mathematicians, born within three years of each other, were the next to make major contributions. They were Fermat, Roberval and Cavalieri. Cavalieri was led to his 'method of indivisibles' by Kepler's attempts at integration. He was not rigorous in his approach and it is hard to see clearly how he thought about his method. It appears that Cavalieri thought of an area as being made up of components which were lines and then summed his infinite number of 'indivisibles'. He showed, using these methods, that the integral of $x^n$ from 0 to a was $a^{n+1}/\,(n+1)$ by showing the result for a number of values of $n$ and inferring the general result.

[27] O texto de Alexander (2016) traz o nascimento de Fermat em 1601. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/The_rise_of_calculus/

[28] Tradução nossa de: In his 1666 tract Newton discusses the converse problem, given the relationship between $x$ and $y'/x'$ find $y$. Hence the slope of the tangent was given for each x and when $y'/x' = f(x)$ then Newton solves the problem by antidifferentiation. He also calculated areas by antidifferentiation and this work contains the first clear statement of the *Fundamental Theorem of the Calculus*. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/The_rise_of_calculus/

Inclui uma pequena nota sobre Leibniz:

> Ao retornar a Paris, Leibniz fez um excelente trabalho sobre o cálculo, pensando nos fundamentos de maneira muito diferente de Newton. Newton considerou variáveis mudando com o tempo. Leibniz pensava nas variáveis x, yx,y como abrangendo sequências de valores infinitamente próximos. Ele introduziu dx e dy como diferenças entre valores sucessivos dessas sequências. Leibniz sabia que dy/dx daria a tangente, mas não a utilizou como propriedade definidora[29].

O próximo passo do artigo é atribuir à Leibniz a notação da diferencial e da integral nas publicações de 1684 e 1686 sob a denominação de *calculus summatorius* e informar que a nomenclatura de cálculo integral fora sugerida, na prática, por Jacob Bernoulli apenas em 1690. Encerra o artigo trazendo as contribuições de Jacob e Johann Bernoulli, Berkeley e Maclaurin além de indicar que o cálculo só teve uma base satisfatória mesmo com os trabalhos de Cauchy no século XIX.

Com a pouca informação disponível e repleta de excertos, talvez não seja adequado tentar analisar o artigo em relação à uma visão mais ampla do ponto de vista internalista ou externalista. Seria possível apontar pequenos indícios de uma ou outra, mas vale indicar que constam neste artigo sobre o cálculo 28 fontes de pesquisa; entre essas, estão os trabalhos de Boyer[30] e de Baron[31], e que teve a última atualização em 1996. É um resumo bem elaborado para uma leitura rápida e superficial sobre a vasta história do cálculo, sem dúvidas. Curioso também é o fato de não tratar em qualquer nota mais explícita a autoria, nem a disputa desta entre Newton e Leibniz; a única nota em relação à autoria em si, foi a de explicar porque Lagrange considerava Fermat o inventor do cálculo.

O importante, entretanto, do ponto de vista de nossa pesquisa aqui é o realce aos elementos e padrões encontrados também nas outras obras, a saber: a relação das origens do cálculo já com os gregos, a solução de problemas de quadraturas no século XVI e as distinções entre os escritos de Newton e Leibniz e a formalização do cálculo com Cauchy. Esse padrão nos promove uma análise em separado, o que faremos no capítulo 4.

---

[29] Tradução nossa de: On returning to Paris Leibniz did some very fine work on the calculus, thinking of the foundations very differently from Newton. Newton considered variables changing with time. Leibniz thought of variables x, yx,y as ranging over sequences of infinitely close values. He introduced dxdx and dydy as differences between successive values of these sequences. Leibniz knew that dy/dx gives the tangent but he did not use it as a defining property. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/The_rise_of_calculus/

[30] *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, 1959.

[31] *The origins of the infinitesimal calculus*, 1987.

# 3 LINHAS DO TEMPO

Como informado, a metodologia desta pesquisa se caracteriza como exploratória de cunho bibliográfico. Segundo Cervo, Brevian e Silva (2007) e Gil (2008), uma pesquisa exploratória é um ponto de partida, o primeiro passo que auxilia até mesmo na obtenção de hipóteses de pesquisa mais elaborados e precisos posteriores, pois tem a finalidade de propiciar uma visão mais geral de um determinado tema. Nas palavras de Gil (2007):

> Muitas vezes as pesquisas exploratórias constituem a primeira etapa de uma investigação mais ampla. Quando o tema escolhido é bastante genérico, tornam-se necessários seu esclarecimento e delimitação, o que exige revisão de literatura, discussão com especialistas e outros procedimentos. O produto final deste processo passa a ser um problema mais esclarecido, passível de investigação mediante procedimentos mais sistematizados. (GIL, 2008, p.27).

Em linhas gerais, uma das intenções desta pesquisa é a de tentar acompanhar as muitas diferenças entre as fontes e de buscar algum padrão nas narrativas históricas. Assim, além da revisão de literatura exposta no capítulo anterior, outro procedimento empregado aqui foi o de criar uma espécie de linha do tempo de cada uma e sobrepô-las de maneira que a diferença entre os registros (e por que não?) e das interpretações ficasse mais evidente.

Uma ‘escolha’ aparentemente contraditória, é verdade, para esta pesquisa uma vez que esta tentou se centrar em diretrizes menos positivistas e documentais; entretanto, para a tabulação das informações (e posterior inclusão num modelo wiki) é necessário algum ponto de partida. Faz-se, pois, esta escolha.

É importante frisar que embora esta exposição da construção das linhas do tempo esteja posterior à descrição e resenha das fontes entregues no capítulo anterior, foi, de fato, o primeiro passo exploratório das fontes, isto é, foi a partir desse compilado que os padrões analisados nas obras tanto no capítulo anterior quando no próximo emergiram.

As linhas do tempo, como foram denominadas aqui, foram compiladas como quadros de planilhas eletrônicas para que fosse possível inclusões posteriores e, principalmente, para que também fosse possível reorganizar as entradas do quadro a partir de qualquer uma das separações propostas.

Os quadros contêm seis possíveis entradas, a saber: Data; Quem/Autor; Nascimento e morte; Obra/tópico; texto e fonte. A coluna *Data* contém ou o período aproximado de uma entrada ou apenas o ano, mesmo quando a fonte original continha maior precisão como o dia exato. A coluna *Quem/Autor* foi assim designada pois nem toda entrada possui um personagem específico de interesse e nem todo personagem citado é necessariamente autor de alguma obra de interesse. A coluna *Nascimento e Morte* foi preenchida apenas quando a entrada explicitava um desses eventos ou, em menor número, quando a entrada continha apenas informações biográficas que não se repetiriam. A coluna *Obra/tópico*, contém, quando disponível, o nome da obra da entrada ou o tópico de referência, por vezes também não discriminada. A coluna *Texto* contém a citação propriamente dita e a coluna *Fonte* contém a referência bibliográfica em formato resumido de cada entrada no estilo Autor, ano, página.

As linhas do tempo compiladas serão discutidas abaixo e anexadas integralmente na forma de anexos à pesquisa.

## 3.1 LINHA DO TEMPO DE BOYER

O texto de Boyer (1974) também contém ao final o que denominou de *Tabela Cronológica*, varrendo acontecimentos não só da história da matemática das páginas 465 até a 474. É mais ambiciosa que a de Alexander (2016), quando inicia com a entrada de -5 000 000 000 000 dada como a origem do sol, por exemplo; e também indica que as datas anteriores à -776 são apenas aproximações, embora também inclua noutras entradas a marca de (aprox.) como, por exemplo, -300 *Os elementos de Euclides (aprox..) ou +75 Obras de Heron de Alexandria (aprox.)*.

Já a linha do tempo formulada aqui tentou se concentrar apenas nos períodos e eventos de interesse. Por esse motivo, contém entradas relacionadas às origens e àquelas levantadas a partir do capítulo específico do cálculo.

## 3.2 LINHA DO TEMPO DE EVES

A linha do tempo do texto de Eves se concentrou nas passagens da segunda parte, mais especificamente dos capítulos 9 ao 11 os quais contém as passagens mais relacionadas às origens do cálculo e alterna entre dados biográficos com pontos específicos sobre os tópicos.

## 3.3 LINHA DO TEMPO DE BARDI

A linha do tempo do texto de Bardi foi compilada durante a leitura com atenção especial às datas e aos eventos que antecedem a disputa da autoria entre Newton e Leibniz. Isso porque, embora o texto de Bardi tenha indicação de intervalos pequenos de anos nos capítulos, a narrativa de Bardi alterna os períodos seguindo os personagens e não necessariamente uma linha cronológica bem estabelecida.

Com o foco bem situado sobre a disputa de autoria entre Newton e Leibniz, as entradas varrem o texto até o final do capítulo 8, contemplando em maioria essas relações, mas também comtempla alguns dados bibliográficos. Como o próprio texto deu pouca atenção para relatos mais específicos sobre os conteúdos matemáticos, os personagens e o contexto são as características que se sobressaem. A partir do capítulo 9, o foco do texto é complemente a disputa de autoria e não mais relações com a origem propriamente dita do cálculo. Por esse motivo, as entradas posteriores foram suprimidas na versão final.

## 3.4 LINHA DO TEMPO DE ALEXANDER

Alexander (2016) propõe uma linha do tempo própria dos eventos que julgou relevantes em seu texto. Composta por 63 entradas, a linha do tempo de Alexander originalmente continha apenas a data e a informação. Para adequação ao modelo proposto nesta pesquisa, foram incluídas as informações para se adequar ao modelo explanado anteriormente com a exceção das datas de nascimento e morte dos personagens quando identificados.

Na linha do tempo de Alexander valem nota algumas observações como, por exemplo, o hiato temporal da 6ª entrada original, marcado em 250 a.C., para a 7ª entrada já em 1517. Embora o texto de Alexander (2016) não contenha tamanha separação na narrativa, ressalta a orientação eurocentrista das descobertas trazida por Roque (2012), Schubring et al. (2020).

Noutra nota, com a intenção de evidenciar também relações de poder, especialmente com a Igreja, as entradas de Alexander (2016) por vezes fazem referência à eventos desta natureza como é o caso de: *1618: Irrompe a Guerra dos Trinta Anos, lançando católicos contra protestantes*, ou *1631: Sob pressão dos tradicionalistas, Urbano renuncia às suas políticas liberais e restaura as graças dos jesuítas.* É importante salientar que embora essas entradas possam ser consideradas importantes na narrativa de Alexander (2016), as mesmas referências não foram buscadas nas outras obras para comparação.

## 3.5 LINHA DO TEMPO DE ROQUE

Na mesma direção, a linha do tempo do texto de Roque também se concentra nos capítulos 5 e 6, intitulados, *A Revolução Científica e a nova geometria do século XVII* e *Um rigor ou vários? A análise matemática dos séculos XVII e XVIII*, respectivamente, também os mais direcionados às origens do cálculo, tentando reconhecer a diferente abordagem que autora adotou.

# 4 DISCUSSÃO (PREENCHENDO AS LACUNAS)

Há, sem dúvidas, uma tendência de indicar conceitos e métodos gregos e alguns conceitos da idade média e da Renascença como precursores do cálculo. Nomeadamente, os paradoxos gregos de Zenão estão relacionados com a noção de limites moderna; o método da exaustão de Eudoxo e Arquimedes e o princípio de Cavalieri aproximando a noção moderna de integração. Mas até que ponto ou, em que medida podemos fazer essas inferências? Ainda, em que contexto, em quais parâmetros seria aceitável atribuir à Arquimedes ou à Cavalieri tais descobertas ou até mesmo a autoria do cálculo infinitesimal?

Podemos, pois, a partir da atualidade, olhar para o passado e indicar de certa forma que o 'tipo de pensamento' já estava presente em Euclides, que o raciocínio de Arquimedes e de Cavalieri já indicavam a maneira de resolver os problemas que hoje são resolvidos com as ferramentas do cálculo, mas são esses de fato vestígios da trajetória da construção do cálculo propriamente dito ou reminiscências saudosas aos grandes do passado? Até que ponto traçar as origens do cálculo aos gregos é historicamente acurado ou apenas uma alegoria pedagógica?

Para tentar responder questionamentos como esses, faz-se, pois, necessário analisar alguns desses pontos com mais densidade. Separamos aqui quatro tópicos de interesse por serem os que foram indicados pelas obras analisadas como precursores do cálculo ou pontos de debate e certa discordância entre as obras. Os paradoxos de Zenão como precursores da noção de limites, o método da exaustão de Eudoxo e posteriormente Arquimedes, o princípio de Cavalieri e os problemas de máximos e mínimos. Cada um destes tópicos receberá um tratamento especial para tentar elucidar as diferentes interpretações. Por fim, como quinto item de discussão, o conceito de autoria na matemática foi debatido com vistas ao que esta pesquisa exploratória pôde acumular.

Porque esta pesquisa tem muito mais o cunho de pesquisa bibliográfica e historiográfica do que alguma intenção de trazer e explicar sobre as diferentes 'matemáticas' de cada período, embora tenha elaborado sobre alguns, dá-se menos atenção às explanações teóricas dos conceitos do que as implicações dos mesmos na historiografia.

## 4.1 OS PARADOXOS DE ZENÃO

Zenão de Eleia (aprox. 490-425 a.C.) foi um filósofo grego pré-socrático, discípulo de Parmênides de Eleia que junto de Herácito, são considerados os fundadores da Ontologia[32]. Mais do que uma visão específica de mundo imutável e indivisível, a escola filosófica eleatica possui a peculiaridade da elaboração de paradoxos. Quatro desses paradoxos, atribuídos à Zenão, são especialmente conectados às noções atuais de limite no cálculo. A ferramenta *MacTutor* traz que:

> O livro que Zenão escreveu antes de sua visita a Atenas foi sua famosa obra que, de acordo com Proclo, continha quarenta paradoxos a respeito do continuum. Quatro dos paradoxos, que discutiremos em detalhes a seguir, teriam uma profunda influência no desenvolvimento da matemática[33].

---

[32] Ramo da filosofia que trata da existência, da natureza e da realidade. A partir do século XVII e dos trabalhos de Christian Wolff, também é denominada metafísica geral. Curiosamente, Wolff foi um dos responsáveis por difundir a filosofia de Leibniz.

[33] Tradução nossa de: The book Zeno wrote before his visit to Athens was his famous work which, according to Proclus, contained forty paradoxes concerning the continuum. Four of the paradoxes, which we shall discuss in detail below, were to have a profound influence on the development of mathematics. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zeno_of_Elea/

Os paradoxos comumente denominados apenas *Dicotomia*, *Aquiles*, *Flecha* e o *Estádio*, todos possuem em seu cerne alguma conexão com a noção de infinito, de incomensurabilidade e até mesmo dos infinitesimais comparáveis com as noções atuais. Não há fonte direta dos escritos de Zenão e os paradoxos nos chegam através de Aristóteles em sua *Física*, inclusive, com a pura intenção de refutá-los.

O primeiro, enunciado como *a Dicotomia* na *Física* de Aristóteles, descreve: "Não há movimento porque aquilo que se move deve primeiro transcorrer a metade do percurso que lhe falta a percorrer[34]".

Já Boyer (1974) explica a dicotomia como:

> [...] antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disto, deve percorrer o primeiro quarto; e antes disso, o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões. O corredor que quer pôr-se em movimento precisa fazer infinitos contatos num tempo finito; mas é impossível exaurir uma coleção infinita, logo é impossível iniciar o movimento. (BOYER, 1974, p.55).

Eves (2004) também descreve *a Dicotomia* e *a Flecha em sequência* como:

> A Dicotomia: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se, então, que o movimento jamais começará.
> *A Flecha*: Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move. (EVES, 2004, p.418).

Nos concentraremos antes na *Dicotomia*. É importante notar que inclusão sutil do 'segmento de reta' pode parecer neutra, mas é ponderada com cuidado pelos historiadores quando a relação dos gregos com as provas geométricas entra em questão. O próprio Eves dá indícios disso ao fim de:

> Já se deram muitas explicações para os paradoxos de Zenão. Por outro lado, não é difícil mostrar que eles desafiam as seguintes crenças da intuição comum: de que a soma de um número infinito de quantidades positivas é infinitamente grande, mesmo que cada uma delas seja extremamente pequena
> $$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \infty\right)$$
> e de que a soma de um número finito ou infinito de quantidade de dimensão zero é zero $(n \times 0 = 0)$ e $(\infty \times 0 = 0)$. Qualquer que tenha sido a motivação dos paradoxos, o fato é que eles excluíram os infinitésimos da geometria demonstrativa grega. (EVES, 2004, p.418).

A simplificação final de Eves com notação moderna não apenas parece desestimular o interesse no tópico como também parece desqualificá-los para dar seguimento ao texto. Com tão pouca atenção dada aos paradoxos, é curioso que Eves os trate posteriormente como os fundamentos do cálculo e, como comentamos, sem maiores explicações de suas relações estritas com o cálculo. Alexander (2016), conclui:

> Platão (c. 428-348 AEC) seguiu adiante e tornou a geometria o modelo para o raciocínio correto, em seu sistema, e (segundo a tradição) entalhando as palavras 'Que ninguém

[34] Tradução nossa de: There is no motion because that which is moved must arrive at the middle of its course before it arrives at the end. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zeno_of_Elea/

> ignorante de geometria entre aqui' na entrada da Academia. Seu discípulo Aristóteles (c. 384-322 AEC) diferia do mestre sob muitos aspectos, mas também concordava que os infinitesimais deviam ser evitados. Numa detalhada e competente discussão acerca dos paradoxos do continuum no Livro 6 de Física, concluiu que o conceito de infinitesimais estava errado, e que grandezas contínuas podem ser divididas *ad infinitum*. (ALEXANDER, 2016, pp. 25-26, adições e grifos do autor).

Tanto Boyer quanto Eves comentam a relação dos paradoxos com a descoberta pitagórica dos incomensuráveis e, enquanto é objeto de grande discussão a exata diferença entre os paradoxos desde Cajori (1915), também é interessante notar que ambos, Boyer e Eves, referem-se exatamente ao mesmo artigo da *American Mathematical Monthly* do próprio Cajori, intitulado *History of Zeno's Arguments on Motion* para maiores informações, com exatamente as mesmas indicações de páginas do trabalho[35]!

Há argumentos que sustentam que os paradoxos sejam realmente o mesmo conceitualmente. Boyer é um dos que sustentam tal inferência quando propõe que "a *Dicotomia* e *o Aquiles* argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de subdivisibilidade indefinida do espaço e do tempo" (BOYER, 1974, p.55) mas, advertindo apenas que "o segundo paradoxo é semelhante ao primeiro apenas a subdivisão infinita é progressiva em vez de regressiva" (BOYER, 1974, p.55), e explica o paradoxo de Aquiles com:

> Aqui Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Pois, quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com o resultado que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga. (BOYER, 1974, p.55).

Embora Boyer trate com maior relevância do que Eves os paradoxos, tanto Roque (2012) quanto Alexander (2016) elaboram com ainda mais detalhe; a primeira, na tentativa de desmistificar sua relação com os incomensuráveis e o segundo tratando mais densamente a relação com os infinitesimais. Se, por um lado, Alexander (2016) propõe que:

> A descoberta desses antigos enigmas de Zenão de Eleia e dos seguidores de Pitágoras nos séculos VI e V AEC mudou o curso da matemática antiga. Daí por diante, a matemática clássica afastou-se das considerações inquietantes dos infinitamente pequenos e mudou o foco para as deduções claras, sistemáticas da geometria. (ALEXANDER, 2016, p. 25).

Roque (2012), por outro, é enfática ao declarar que:

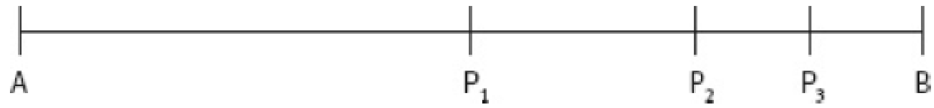
> A afirmação de que a descoberta da incomensurabilidade produziu uma crise nos fundamentos da matemática grega foi consolidada por trabalhos de historiadores da primeira metade do século XX. P. Tannery já havia afirmado que tal descoberta significou um escândalo lógico na escola pitagórica do século V a.E.C., sendo mantida em segredo inicialmente, até que, ao se tornar conhecida, teve como efeito desacreditar o uso das proporções na geometria. Um dos artigos mais influentes a propalar a ocorrência de uma crise foi 'Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik' (A crise dos funda-

[35] Para um tratamento histórico informativo dos paradoxos de Zenão, ver Florian cajori, "History of Zeno's arguments on motion", The American Mathematical Monthly, no 22, 1915, pp. 1-6, 39-47, 77-82, 109-15, 145-9, 179-86, 215-20, 253- 8, 292-7.

> mentos da matemática grega), de Hasse e Scholz, publicado em 1928, que fazia referência somente à possibilidade de ter havido uma crise dos fundamentos da matemática grega. Esses autores também são responsáveis por associar esse problema aos paradoxos de Zenão, relação desmentida há tempos. (ROQUE, 2012, p.125, grifos e adições da autora).
>
> Tais paradoxos são mencionados algumas vezes em conexão com o problema dos incomensuráveis. No entanto, os argumentos de Zenão se voltam contra pressupostos filosóficos. Além disso, a descoberta da incomensurabilidade deve ter se dado depois da época de Zenão, o que nos leva a concluir que seus paradoxos nada têm a ver com a questão. (ROQUE, 2012, pp.132-133).

Roque (2012) inverte a ordenação e inicia pela explanação do paradoxo de Aquiles. Em linguagem contemporânea, a autora explica:

> Suponhamos que Aquiles e uma tartaruga precisem realizar o percurso que vai de um ponto A até um ponto B. A tartaruga parte do ponto A em direção ao ponto B e, quando ela passa pelo ponto P1, ponto médio entre A e B, Aquiles parte em direção a esse ponto.




> Mas quando Aquiles chega em P1, a tartaruga já está passando por um ponto P2, entre P1 e B. Aquiles caminhará, em seguida, em direção a P2. Entretanto, quando passar por P2, a tartaruga já estará passando por um ponto P3 entre P2 e B. E assim por diante… Ou seja, se o espaço é infinitamente divisível, o percurso realizado pela tartaruga pode ser infinitamente dividido. Sendo assim, se Aquiles realizar o mesmo percurso da tartaruga subdividindo o percurso realizado por ela, ele jamais conseguirá alcançá-la. (ROQUE, 2012, pp.134-135).

Roque (2012) ainda explica ao final que o paradoxo indica a dificuldade de somar uma infinidade de quantidades cada vez menores e conceber que essa soma deve deva ser finita e 'traduz' o problema em notação moderna para:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1.$$

Neste momento, a autora passa imediatamente para a explanação da *Dicotomia* com:

> Para que possamos percorrer uma dada distância AB entre os pontos A e B, é preciso percorrer primeiro a metade de AB, ou seja, AP1. Mas para percorrer AP1 é necessário percorrer primeiro a metade desse segmento, ou seja, AP2. Sendo assim, o paradoxo consiste em concluir que, se a distância AB pode ser infinitamente subdividida, para iniciar um movimento é preciso, em tempo finito, começar por percorrer infinitas subdivisões menores do espaço, o que é impossível. Esse exemplo é o contrário do anterior, pois teríamos de mostrar que o espaço que sobra, após essas subdivisões infinitas, é zero. (ROQUE, 2012, pp.135-136).

Embora com o mesmo tom da explanação anterior, talvez a parte mais distinta aqui é o final, indicando a diferença entre os paradoxos de *Aquiles* e da *Dicotomia*. Conquanto simplória, essa explicação carece tanto nos textos de Boyer[36] e Eves quanto em livros-texto de cálculo

[36] É verdade que Boyer adverte que "o segundo paradoxo é semelhante ao primeiro apenas a subdivisão infinita é progressiva em vez de regressiva". Mas o próprio comentário favorece a semelhança entre os paradoxos e não a diferença conceitual a qual Roque (2012) tenta fazer referência.

modernos. Stewart, por exemplo, embora cite ambos os paradoxos, (consciente ou não) parece seguir a linha de pensamento aristotélica que dispõe ambos os paradoxos como sendo praticamente o mesmo e não apenas os introduz na apresentação de seu *Calculus* como os ‘responde’ utilizando o próprio cálculo. Roque (2012) reforça:

> Em livros de história da matemática, é comum também relacionar esses paradoxos ao desenvolvimento do cálculo infinitesimal e do conceito de limite. Trata-se, no entanto, de uma interpretação *a posteriori*. É incerto afirmar que houvesse qualquer procedimento infinitesimal na época de Zenão e podemos questionar até mesmo se seus paradoxos, para além de seu papel filosófico, tiveram alguma relevância para o desenvolvimento da matemática propriamente dita. (ROQUE, 2012, p.133).

Talvez fosse necessário argumentar que os gregos não possuíam essa noção numérica abstrata como podemos descrever com naturalidade atualmente; alternativamente, possuíam sim a noção geométrica de divisibilidade de um segmento na metade e na noção intuitiva de que algo que pode ser dividido na metade pode ‘indefinidamente’ ser dividido na metade, mas como vimos, essa divisão indefinida é motivo de questionamentos. Alexander (2016) traz:

> Os gregos antigos tinham plena consciência desses problemas, e o filósofo Zenão de Eleia (século V AEC) os codificou numa série de paradoxos com nomes pitorescos. ‘Aquiles e a tartaruga’, por exemplo, demonstra que o ágil Aquiles jamais alcançará a tartaruga, por mais lenta que ela seja, se Aquiles tiver de alcançar primeiro a posição inicial da tartaruga, depois a posição seguinte, depois a seguinte, e assim por diante. Contudo, sabemos pela experiência que Aquiles alcança sua rival mais vagarosa, levando a um paradoxo. O paradoxo da ‘flecha’ de Zenão afirma que um objeto que preencha um espaço igual a si mesmo está em repouso. Isso, porém, é verdade para uma flecha em cada instante de seu vôo, o que leva à paradoxal conclusão de que a flecha não se move. Embora aparentemente simples, os enigmas de Zenão mostram-se extremamente difíceis de resolver, baseadas como são numa contradição inerente apresentada pelos indivisíveis. (ALEXANDER, 2016, p.23, grifo do autor).

Dito isso, o que podemos inferir com essas passagens é que embora os paradoxos de Zenão sejam muitas vezes colocados como precursores do cálculo, pouca ou nenhuma atenção metodológica é dada à essa conexão. Parece, inclusive, haver discordância entre as obras sobre o quanto influentes os paradoxos foram na construção da própria matemática, quiçá da noção de limites moderna propriamente dita.

O alerta de Roque (2012) sobre a maneira com a qual os paradoxos são colocados como precursores do cálculo encontra fundamento bibliográfico nas passagens ilustradas acima, mas seria mesmo o caso de recolher ou subtraí-los das composições didáticas ou apenas enfatizar o alerta de que apesar de encontrar fontes para tal inferência, existem controvérsias?

Além disso, mesmo que a relação dos paradoxos de Zenão com os princípios do cálculo ou mesmo com os infinitesimais seja uma análise *a posteriori*, talvez seja o caso de fazer uma distinção mais clara entre a origem do cálculo e a origem do conceito e do entendimento matemáticos para o infinito, por exemplo; este sim, seguramente no cerne do cálculo como o conhecemos e concebemos atualmente. Isso não quer dizer que as inconsistências e controvérsias estariam resolvidas em absoluto; ao contrário, ficam expostas outras. Na prática, a escolha de uma ou outra maneira de contar a história causará uma interpretação diferente, exatamente um dos pontos que pretendíamos evidenciar.

Para estender a pesquisa, o caminho a seguir aqui seria o de realmente isolar e fazer uma compararão mais densa e específica dos conceitos de limite e de infinito, o que certamente foge do escopo desta pesquisa.

## 4.2 O MÉTODO DA EXAUSTÃO DE ARQUIMEDES

O anacronismo "Arquimedes conhecia a integral" (CAJORI, 2007, p.26), é uma das repetições mais constantes nos textos e falas de matemáticos. O método ou princípio da exaustão de Arquimedes aparece em grande parte da bibliografia como um precursor do cálculo integral. É citado, tanto em Boyer (1974), Eves (1954), quanto em Bardi (2008), Alexander (2016) e Roque (2012) além da ferramenta *MacTutor* mas em contextos diferentes. Vale, portanto, explanar novamente aqui sobre esses contextos, especialmente porque em alguns, (particularmente os mais recentes) a referência à exaustão de Arquimedes como precursora do cálculo é mais uma vez questionada sob diferentes correntes da historiografia da matemática. Schubring et al. (2020) é um desses casos de questionamento explícito em:

> É muito comum historiadores da matemática tentarem atribuir aos gregos ideias que depois resultariam no cálculo diferencial e integral desenvolvido no período moderno. Essa justificativa se dá, na maioria das vezes, pela interpretação do método da exaustão como precursor do cálculo integral. O eurocentrismo aqui se dá pela ideia de que os gregos tiveram as concepções precursoras do cálculo e, depois de um período de inércia de mais de mil anos, os europeus modernos o teriam retomado e desenvolvido o cálculo que se conhece hoje. (Schubring et al., 2020, p.284).

Independente da relação com o eurocentrismo levantada, a ideia de que tomar o método da exaustão como um precursor do cálculo é apenas uma interpretação é o foco aqui, pois não é elaborada em melhor detalhe em Schubring et al. (2020). Essa escolha pedagógica (ou filosófica talvez) é reforçada pelas repetições nos livros-texto e especialmente nos textos seminais da história da matemática como os de Boyer, Eves e Cajori que, inclusive, remetem à Arquimedes como o 'autor' do método. Conquanto, a própria origem da 'exaustão' pode ser localizada já nos Elementos de Euclides e, com algum grau de confiança, atribuída de fato à Eudoxo. Roque (2012), e.g., indica que a solução de Arquimedes é análoga "[...] ao empregado na proposição XII-2 dos *Elementos* de Euclides, atribuída a Eudoxo" (ROQUE, 2012, p.166).

Roque (2012), no capítulo 3, dedica um subcapítulo aos *cálculos de áreas e problemas de quadraturas*, outro aos *processos infinitos e área do círculo* e particularmente outro nomeado *Arquimedes, outros métodos*. No início do intitulado: *processos infinitos e área do círculo*, a autora corrobora com a crítica de Schubring et al. (2020) e sugere que a própria nomenclatura não é mais adequada em:

> No século XVII, esse tipo de procedimento ficou conhecido como 'método da exaustão'. Essa nomenclatura, no entanto, não é a mais adequada, uma vez que o método se baseia justamente no fato de que o infinito não pode ser levado à exaustão, isto é, não admite ser exaurido – pois por mais que nos aproximemos, nunca chegamos até ele. Analisaremos, em seguida, o modo como Arquimedes 'calculava' a área de um círculo na primeira proposição de um de seus livros mais antigos: Medida do círculo. 'Calcular' está entre aspas porque essa proposição é uma maneira de determinar a área do círculo encontrando uma figura retilínea, um triângulo, no caso, cuja área seja igual à área do círculo (ROQUE, 2012, p.204, grifos da autora).

Ao tratar mais especificamente do cálculo, a autora renova o questionamento em:

> A história do cálculo infinitesimal também recebe um tratamento retrospectivo. Apresentam-se diferentes técnicas que remontam aos paradoxos de Zenão, passando pelo método grego da 'exaustão' e pelos métodos de Cavalieri para calcular áreas até chegar a Leibniz e Newton. Mas será que podemos afirmar que Leibniz e Zenão tinham o mesmo objeto de pesquisa? (ROQUE, 2012, p.342, grifo da autora).

Stewart (2006b) propõe já na apresentação que:

> As origens do cálculo remontam à Grécia antiga, pelo menos 2500 anos atrás, quando foram encontradas as áreas usando o chamado 'método da exaustão'. Naquela época os gregos já sabiam encontrar a área de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na Figura 1 e, em seguida, somando-se as áreas obtidas.
> É muito mais difícil achar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e então aumentar o número de lados deles.
> Seja $A_n$ a área do polígono inscrito com $n$ lados. À medida que aumentamos $n,$ fica evidente que $A_n$ ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos então que a área do círculo e o limite das áreas dos polígonos inscritos, e escrevemos:
>
> $$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$
>
> Os gregos, porém, não usavam explicitamente os limites. (STEWART, 2006b, p.3, grifo do autor).

Até que ponto, então, é possível considerar o método da exaustão como um precursor do cálculo? A resposta inicial parte do pressuposto que o cálculo integral resolve um 'tipo' de problema matemático, mais especificamente o das quadraturas. Nesse sentido, o método da exaustão de Arquimedes pode sim ser considerado um precursor da integral como a conhecemos hoje.

Além disso, uma vez levantada a aproximação do conceito com o cálculo, por rigor, o crédito deveria ser pelo menos dado à Euclides nos Elementos, ou melhor, à Eudoxo, num trocadilho curioso de repetição da história de quem o publicou e quem o inventou. Tal é o entendimento de Eves (1953) melhor resumido em Schubring et al. (2020):

> Mais uma vez, observam-se comparações com a matemática produzida pelos gregos, numa perspectiva de matemática única. Uma breve exposição sobre os paradoxos de Zenão e o método da exaustão de Eudoxo leva a uma discussão sobre os conceitos do cálculo tratados por Newton e Leibniz. (SCHUBRING, et al., 2020, p.289).

Há de se considerar, também, que nenhuma das obras utilizadas como fonte aqui puderam considerar as novas descobertas sobre o palimpsesto de Arquimedes[37], este contendo excertos de seu texto *O Método dos teoremas Mecânicos*, supostamente contendo o primeiro registro dos infinitesimais. Alexander (2012) comenta sobre o palimpsesto na passagem:

> Ao mesmo tempo que essas provas tradicionais eram perfeitamente corretas, elas apresentavam, segundo Torricelli, algumas desvantagens. A mais óbvia é que as provas por exaustão exigem que se saiba de antemão o resultado desejado – nesse caso, a relação entre as áreas da parábola e do triângulo. Uma vez conhecido o resultado, o método da exaustão pode mostrar que qualquer outra relação levaria a uma contradição, mas não se fornece nenhuma pista de por que a relação vale, ou como descobri-la. Essa ausência levou Torricelli e muitos de seus contemporâneos a acreditar que os antigos possuíam um método secreto para descobrir essas relações, e tiveram então o cuidado de omiti-lo na edição de suas obras. (A descoberta no século XX de um tratado de Arquimedes sobre seu método não rigoroso de descoberta no texto apagado de um palimpsesto do século X sugere que eles podiam não estar totalmente errados.). (ALEXANDER, 2012, p.110, adições do autor).

Embora seja conhecido desde 1906, o palimpsesto foi submetido à novas análises apenas entre os anos de 1999 e 2008; dessas é que foi possível concluir com um grau maior de certeza que Arquimedes, de fato, utilizou algo conceitualmente muito próximo do que seria posteriormente entendido como os infinitesimais.

[37] O palimpsesto de Arquimedes disponível em versão digital em: http://archimedespalimpsest.org

Embora ainda tema de profundo debate, a utilização de algo conceitualmente próximo dos infinitesimais por Arquimedes é um ponto de discussão a respeito da inclusão ou não na cronologia do cálculo infinitesimal.

Se, por um lado, ao analisarmos conceitualmente o método da exaustão, ele parece estar próximo da integral, formalmente, e em relação à matemática atual, é (ou deveria ser) complicado conciliar suas diferenças conceituais. Repetindo o exposto por Roque (2012), “[...] uma vez que o método se baseia justamente no fato de que o infinito não pode ser levado à exaustão, isto é, não admite ser exaurido – pois por mais que nos aproximemos, nunca chegamos até ele” (Roque, 2012, p.204), há de se aceitar aqui uma contradição conceitual muito saliente para passar despercebida a um olhar mais atento.

O fato é, em pormenores, que o argumento de contraponto é o de que o método da exaustão não pode ser considerado um precursor da integral pelo simples fato de não utilizar de fato um conceito de infinito matemático. Embora a autora siga seu texto ilustrando como, de fato, Arquimedes resolvia o problema da quadratura do círculo, há de ser ponderada aqui a relação com o conceito de infinito. Este, apenas proposto da forma matemática utilizável no cálculo atual também com Leibniz e Newton.

O resultado de Arquimedes via *reductio ad absurdum* para estabelecer o valor de $\pi$ é extraordinário, sem dúvidas, mas o quanto apropriado é estabelecê-lo como um precursor do cálculo integral depende de um desprendimento não apenas do rigor matemático moderno, mas com os conceitos ali incluídos em si. Um argumento semelhante poderia ser construído a partir de duas maneiras de se ‘provar’ o teorema de Pitágoras, por exemplo: uma, a grega, a partir apenas de recursos geométricos e outra, algébrica, com argumentos posteriores e puramente numéricos. A dúvida que se expõe não é a de que as duas demonstrações são ou não análogas, tampouco se são duas maneiras diferentes de resolver o mesmo problema, mas sim se uma é precursora da outra, ou seja, se uma deu ‘origem’ à outra como é proposto com o método da exaustão e o cálculo.

O que fica elucidado é que houve por muitos anos a inclusão nos textos de Arquimedes como um dos pioneiros do cálculo e que essa inclusão foi naturalizada sem muito apreço pelas explicações adjacentes necessárias. Regressando ao anacronismo de Cajori, Arquimedes não conhecia a integral - não teria como conhecê-la; mas é sedutor remontar o conceito aos gregos o que o esforço conjunto de inúmeras mentes, ao longo de quase 2000 anos, custou para a humanidade.

## 4.3 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), matemático italiano publica em 1635 *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Nova Geometria dos indivisíveis contínuos). A obra contém um método capaz de determinar a área e volume de algumas figuras sólidas e planas sem a necessidade da utilização do método da exaustão.

O agora denominado 'Princípio de Cavalieri', junto com o método da exaustão, possui uma das maiores quantidades de referências como uma das origens do cálculo integral, porém, ao contrário do método da exaustão que utiliza uma dupla redução ao absurdo, o princípio de Cavalieri faz uma prova direta, pois tem em seu cerne a ideia de que uma superfície era composta por uma 'infinidade de linhas' e que um sólido era formado por uma 'infinidade de planos'. A ideia pode parecer exótica até mesmo para um estudante de matemática moderno, quiçá aos seus contemporâneos. O próprio livro-texto de geometria do PROFMAT, de Antônio Caminha Muniz Neto, traz o seguinte alerta:

> No ensino da Geometria existem alguns resultados que não podemos demonstrar de forma satisfatória e que, naturalmente, causam incômodo ao professor. Os principais são os seguintes: o Teorema de Tales (das paralelas), a área do quadrado, o volume do paralelepípedo e o Princípio de Cavalieri.
>
> [...] A sua demonstração envolve conceitos avançados de Teoria da Medida e portanto só podemos oferecer aos alunos alguns exemplos. Mas, cremos que esses exemplos sejam suficientes para que possamos adotar sem traumas o Princípio de Cavalieri como axioma. (MUNIZ NETO, 2013, p. 333).

Neste mesmo texto, o autor enuncia o Princípio de Cavalieri como um axioma:

> São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.

E descreve o exemplo do prisma:

> Com o Princípio de Cavalieri, podemos obter sem dificuldade o volume de um prisma. Imaginemos um prisma de altura h, e cuja base seja um polígono de área A, contido em um plano horizontal. Construímos ao lado um paralelepípedo retângulo com altura h e de forma que sua base seja um retângulo de área A.
>
> Suponha agora que os dois sólidos sejam cortados por um outro plano horizontal, que produz seções de áreas $A_1$ e $A_2$ no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. Ora, o paralelepípedo é também um prisma e sabemos que em todo prisma, uma seção paralela à base é congruente com essa base. Logo, como figuras congruentes têm mesma área, temos que $A_1 = A = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm mesmo volume. Como o volume do paralelepípedo é $Ah$ , o volume do prisma é também o produto da área de sua base por sua altura. (MUNIZ NETO, 2013, pp.333-334).

$$\text{Volume do prisma} = (\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

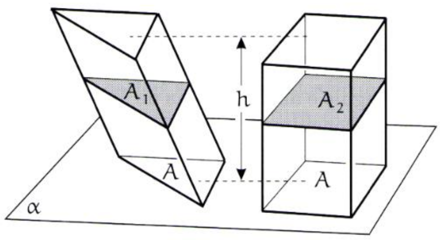



Figura 23.5

O autor passa a descrever outros exemplos mais elaborados como o da pirâmide e posteriormente o dos cilindros e cones e o da esfera. Entretanto, para a necessidade momentânea, basta o exemplo acima, pois aqui já é possível identificar as características do argumento de Cavalieri. As longas citações de Alexander (2016) que seguem informam bem sobre essa mudança de direção na argumentação de Cavalieri:

> Suponha, sugeria Cavalieri, que tenhamos uma figura plana e tracemos uma linha reta dentro dela; e suponha, além disso, que desenhemos todas as possíveis retas dentro da figura que sejam paralelas à primeira. 'Nesse caso', escreve ele, chamo as retas assim desenhadas de 'todas as retas' daquela figura plana. Da mesma maneira, dado um sólido tridimensional, todos os possíveis planos dentro do sólido que sejam paralelos a um plano dado são 'todos os planos' daquele sólido. É permitido, indagava ele a Galileu, equiparar a figura plana com 'todas as retas' da figura e o sólido com 'todos os planos' do sólido? Indo além disso, se houver duas figuras, é permitido comparar 'todas as retas' de uma a 'todas as retas' da outra, ou 'todos os planos' de um a 'todos os planos' do outro? A pergunta de Cavalieri parece simples, mas vai direto ao paradoxal núcleo dos infinitamente pequenos. Num nível intuitivo, o plano parece composto de linhas paralelas, e o sólido parece composto de planos paralelos. Mas, como Cavalieri comenta em sua carta, podemos desenhar infinitas linhas paralelas atravessando qualquer figura e um número infinito de planos através de qualquer sólido, o que significa que o número de 'todas as retas' ou 'todos os planos' é sempre infinito. Agora, se cada uma dessas linhas tem largura positiva, por menor que seja, então um número infinito delas resultará numa figura infinitamente grande – não naquela pela qual começamos. Mas se as linhas não têm largura (ou largura zero), então, qualquer acúmulo delas, não importa quão grande seja, ainda terá largura zero e magnitude zero, e acabamos sem figura alguma. O mesmo se aplica a 'todos os planos' de um sólido tridimensional: se tiverem espessura, por menor que seja, inevitavelmente irão se combinar formando um sólido de tamanho infinito; mas, se não tiverem espessura, seu acúmulo sempre resultará numa soma zero. (ALEXANDER, 2016, pp. 197-198, grifos e adições do autor).
>
> Mesmo assim, fica claro que Cavalieri, como Galileu, começou suas especulações matemáticas não com axiomas universais abstratos, mas com a humilde matéria. Daí ele se elevou, generalizando nossas intuições do mundo material e transformando-as num método matemático geral. Para se ter uma ideia do método de Cavalieri, consideremos a proposição 19 no primeiro exercício de *Exercitationes*:
>
> *Se num paralelogramo é desenhada uma diagonal, o paralelogramo é o dobro de cada um dos triângulos formados pela diagonal.*

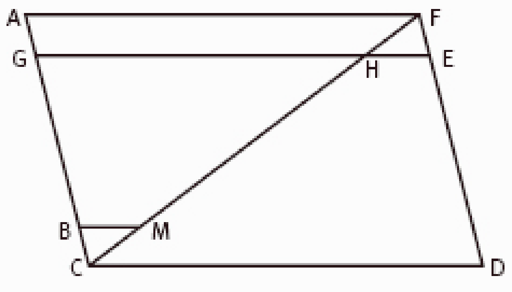



Figura 3.3.

> Isso significa que, se for desenhada uma diagonal FC no paralelogramo AFDC, a área do paralelogramo é o dobro da área de cada um dos triângulos FAC e CDF. Se abordarmos a prova do modo tradicional euclidiano, então ela é quase trivial: os triângulos FAC e CDF são congruentes, porque, primeiro, têm o lado CF em comum; segundo, o ângulo ACF é igual ao ângulo CFD (porque AC é paralelo a FD); e terceiro, o ângulo AFC é igual ao ângulo DCF (porque AF é paralelo a CD). Como os dois triângulos

> juntos compõem o paralelogramo, e como, sendo congruentes, eles têm áreas iguais, conclui-se que a área do paralelogramo é o dobro da área de cada um deles. CQD. (ALEXANDER, 2016, pp.223-224).

Há por certo uma mudança filosófica considerável nos argumentos de Cavalieri. Alexander (2016) descreve:

> E é precisamente essa abordagem material de figuras geométricas que distingue a abordagem de Cavalieri da abordagem clássica euclidiana. Esta última ordena objetos geométricos, e, em última análise, o mundo, por meio de seus primeiros princípios universais e de seu método lógico. A abordagem de Cavalieri, em contraste, começa com uma intuição do mundo como nós o vemos, e então prossegue para generalizações matemáticas mais amplas e mais abstratas. (ALEXANDER, 2016, p.227).

> Essa é a velha questão da composição do continuum que havia confundido filósofos e matemáticos desde os dias de Pitágoras e Zenão. A essa questão familiar, ainda que problemática, Cavalieri agora acrescentava: é permitido comparar 'todas as retas' de uma figura com 'todas as retas' de outra? Isso, observa ele em sua carta, envolve comparar um infinito com outro, coisa estritamente proibida pelas regras tradicionais da matemática. Isso ocorre porque, segundo o 'axioma de Arquimedes', duas grandezas têm uma razão entre si se, e somente se, for possível multiplicar a grandeza menor tantas vezes que se torne maior que a grandeza maior. Isso, porém, não ocorre com infinitos, pois, por mais que se multiplique um infinito, sempre se chegará ao mesmo resultado imutável: infinito. (ALEXANDER, 2016, p.199, grifos do autor).

Roque (2012) é curiosamente mais superficial sobre Cavalieri do que outros tópicos relacionados às origens do cálculo, dedicando pouco a seu respeito.

> Para obter esse resultado, Roberval usou o método dos indivisíveis, que havia sido formulado pelo aluno de Galileu chamado Bonaventura Cavalieri, autor de um modo geométrico para calcular áreas publicado em 1635. Essa técnica era baseada na decomposição de uma figura em tiras indivisíveis, pois Cavalieri argumentava que uma linha é composta de pontos, assim como um cordão é formado por contas; um plano é feito de linhas assim como uma roupa, de fios; e um sólido é composto de planos assim como um livro, de páginas. (ROQUE, 2012, p.347).

Bardi (2008) traz uma descrição familiar da relação de Leibniz com Cavalieri:

> Leibniz leu também Bonaventura Cavalieri, um amigo de Galileu e professor de matemática em Bolonha. Cavalieri havia desenvolvido a idéia do indivisível — uma pequena secção de uma forma geométrica a qual, quando tomada com todas as outras pequenas secções, iria reconstituir a mesma forma inicial. Ele considerava uma linha como sendo feita de uma infinidade de pontos, uma área de uma infinidade de linhas, e um sólido de uma infinidade de superfícies. Pense nisso como uma pilha de panquecas. A pilha é feita de todas as panquecas planas individuais. O livro de Cavalieri, Geometria, publicado em 1635, provava fatos como o de que o volume de um cone é um terço do volume do cilindro que se ajustaria em volta dele. (BARDI, 2008, p.80).

Mas suspende a introdução de Cavalieri nessas poucas linhas. Eves (2004) é menos cauteloso ao informar que:

> Mas a obra que mais o projetou, aliás sua grande contribuição à matemática, é o tratado *Geometria indivisibilibus*, publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Nesse trabalho ele apresenta seu *método dos indivisíveis*, cujas raízes remontam a Demócrito (c. 410 a.c.) e Arquimedes (c. 287-212 a.c.) mas cuja motivação direta talvez se encontre nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes. (EVES, 2004, p.425).

Sem delongas, Eves mais uma vez vai direto aos gregos para encontrar a inspiração de Cavalieri. Ao contrário de sua explanação sobre os paradoxos de Zenão, Eves aqui é mais pretencioso e não só dedica algumas páginas à Cavalieri como traz explicações mais completas de seus métodos. O mesmo faz Boyer (1974); e mais uma vez encontra-se uma repetição entre os dois textos como, por exemplo, ao comentar que Cavalieri fazia parte da ordem religiosa dos "[...] jesuados, não dos jesuítas como se tem dito frequentemente mas incorretamente" diz Boyer (1974, p.241) e Eves, comenta que Cavalieri "[...] tornou-se jesuado (e não jesuíta, como muitas vezes se afirma erradamente)." (EVES, 2004, p.425).

A discussão final aqui mais uma vez remete à diferença entre a origem do conceito e a origem do método e, enfim, da formalização. O método de Cavalieri parece disposto na linha sucessória das origens do cálculo muito mais porque resolvia o mesmo tipo de problema do que por uma aproximação propriamente dita com o que seria posteriormente denominado cálculo integral. Nenhum dos autores aqui analisados tenta realmente aproximar o princípio de Cavalieri aos métodos da integral, mas sim introduzir que seu *método dos indivisíveis* foi um ponto de partida para outras especulações e resultados de outros. Essa distinção, embora possa parecer superficial, fomenta a discussão sobre a diferença entre conceito-método-formalização proposta.

De todas as propostas de quadraturas informadas nas fontes, a de Cavalieri ganha destaque por suas diferenças conceituais ao utilizar a comparação de 'infinitos'; vai além e propõe um método para operar as quadraturas. Aqui é onde a ideia de generalização e formalização matemáticas se deparam com os relatos. O método de Cavalieri é limitado, comparativo por assim dizer. Depende estritamente de uma relação geométrica entre as superfícies; além disso, ainda no nível conceitual, Cavalieri não pretendia 'somar' todas as linhas ou todos os planos, este um fundamento mais preciso na formalidade do cálculo integral. Como bem coloca Alexander (2016), Cavalieri evitou o raciocínio através dos infinitesimais e os supriu com relações finitas, seja por motivos religiosos ou por inconsistências metodológicas. Mas é exatamente esse cuidado para se afastar dos conflitos que o afastam da concepção do cálculo.

De todo modo, é mister perceber a mudança entre as narrativas. Se, por um lado, é possível argumentar contra a inclusão do princípio de Cavalieri por motivos conceituais, por outro, sua contribuição ao 'modo de pensar' os problemas das quadraturas abriram o caminho para as construções imediatamente posteriores como as de Fermat e Roberval e, assim como questionado acima acerca dos paradoxos de Zenão e da exaustão de Arquimedes, pergunta-se até que ponto o princípio de Cavalieri pode ser postado como uma das origens do cálculo?

Retornando ao texto de Muniz Neto (2013), uma pequena passagem pode ilustrar bem o espírito:

> É preciso deixar claro que esses cálculos não demonstram nada. Afinal, usamos a palavra 'aproximadamente' muitas vezes e com significado pouco preciso. No Ensino Médio, atitudes desse tipo são corretas. Se não podemos demonstrar resultados, deveremos mostrar argumentos que, pelo menos os façam plausíveis, aceitáveis, e dizer honestamente aos alunos, que a demonstração requer o uso de Cálculo ou de outras ferramentas que eles vão aprender depois. Afinal de contas, a forma de ensinar e os argumentos que podemos utilizar, dependem do nível de desenvolvimento dos estudantes. Como dizia o professor Zoroastro, a verdade nem sempre pode ser dita de uma vez só. (MUNIZ NETO, 2013, p.348).

Ainda que apontando para o ensino da geometria no Ensino Médio como colocado pelo autor, o argumento poderia ser estendido para o momento da introdução das ideias do cálculo no ensino superior. Neste caso, resguardando que além da ordem cronológica entre o cálculo e Cavalieri serem inversas, foram as ideias deste que abriram caminho para aquelas.

## 4.4 TANGENTES, MÁXIMOS, MÍNIMOS E A DIFERENCIAL

A solução de problemas envolvendo tangentes e a busca por máximos e mínimos estão intimamente relacionadas às definições modernas de limite e derivada. Por isso, nada mais conveniente tentar traçar como esses problemas foram tratados nas obras de referência nesta pesquisa. Mas, ao contrário dos tópicos anteriores, este não pode ser ligado a apenas um nome da história da matemática pois os problemas envolvendo as tangentes atravessam não apenas vários séculos, mas também ganham nuances ao longo desses. Em Eves (2004), por exemplo, encontramos as passagens:

> A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2004, p.417).

> Pode-se dizer que a diferenciação se originou de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões objetivando a determinação de máximos e mínimos de funções. Embora essas considerações remontem aos gregos antigos, parece razoável afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra em algumas ideias de Fermat, expostas em 1629. (EVES, 2004, pp.428-429).

Já Roque (2012) menciona tais problemas separadamente ao final do capítulo 5 entre as páginas 267 e 273 com a finalidade de introduzir o tópico do rigor matemático, seu objeto de análise mais aprofundada durante todo o capítulo 6.

> Junto com a Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos, Fermat havia enviado a Mersenne a tradução de Lugares geométricos planos, de Apolônio, e mais outro texto, de sua autoria, *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum et des tangentes aux lignes courbes* (Método para determinar máximos e mínimos e tangentes a linhas curvas). Foi por essa obra que alguns matemáticos do círculo de Mersenne começaram a admirar Fermat, caso de Roberval, que ajudou a divulgar o talento desse matemático até então desconhecido. (ROQUE, 2012, p.336, adições da autora).

A autora introduz inicialmente a diferença entre o tipo de problema relacionado à tangente encontrado nos gregos com àqueles do início do século XVII.

> As pesquisas envolvendo curvas técnicas foram acompanhadas, desde o início do século XVII, por um novo interesse pela determinação de suas tangentes. Por exemplo, a exposição das propriedades ópticas dos ovais motivou Descartes a propor um método algébrico para determinar a tangente a um ponto de uma curva. No livro III dos Elementos de Euclides encontramos a definição da tangente a um círculo – uma reta que encontra o círculo e que pode ser prolongada sem voltar a cortá-lo – e algumas proposições sobre essa reta. Arquimedes havia determinado tangentes a diversas curvas, como a espiral, usando os mesmos movimentos que serviram para defini-la. No entanto, a ideia antiga de tangente dizia respeito ao comportamento de retas com relação a curvas dadas, definidas de modo geométrico. Agora, os teoremas sobre tangentes não são vistos somente como resultados especulativos da geometria, possuindo também um significado técnico ou físico. As curvas procuradas representam, por exemplo, trajetórias de pontos ou curvas ópticas, e encontrar suas tangentes permite determinar a direção de um projétil ou o formato de lentes. (ROQUE, 2012, pp.337).

> A busca de tangentes se insere em problemas relacionados ao estudo do movimento, e, a partir dos anos 1630, alguns matemáticos do círculo de Mersenne, como Roberval, já determinavam tangentes por meio do movimento dos pontos que geram a curva. Estudando a composição de um movimento uniforme com um movimento uniformemente acelerado, Galileu havia concluído que a trajetória de um projétil que desliza sobre um plano e cai em seguida é dada por uma parábola. (ROQUE, 2012, pp.337-338).

A autora tenta brevemente diferenciar o tipo de problema a partir do objetivo de pesquisa, uma ideia que já havia proposto fazer sob outros tópicos e, embora a linha de raciocínio na escrita de Roque (2012) já esteja bem estabelecida, ressalta-se aqui a advertência de como uma mudança no enfoque pode alterar a visão do todo na historiografia proposta. Para os gregos, por exemplo, a busca pela tangente de uma circunferência ou de outras curvas no caso de Arquimedes era um exercício geométrico, baseado nos padrões gregos de solução e principalmente de rigor e orientação; já o tipo de problema que se estabelece no século XVI, tinha uma orientação muito mais prática e situada num contexto de solução de um problema real por assim dizer, o que também informa sobre os padrões de solução e rigor empregados nessas propostas.

A partir disso, a autora passa a descrever com mais detalhe matemático essas diferenças e inclusive introduz um exemplo de como utilizar o método de Descartes e introduz Fermat:

> Por isso Fermat será mais citado quando os trabalhos sobre o cálculo infinitesimal de Leibniz e Newton começarem, na segunda metade do século XVII, a lidar com curvas mais gerais, incluindo as que serão ditas 'transcendentes'. (ROQUE, 2012, p.341, grifo da autora).

E encerra com a nota:

> Como visto no capítulo 5, questões mistas, de natureza não puramente matemática, levaram os matemáticos do século XVII a investigar problemas relacionados à procura de tangentes. A busca da tangente de uma curva não era mais uma questão de geometria especulativa, possuía uma significação técnica ou física. Um bom exemplo é a cicloide, que já tinha sido abordada por Galileu mas cujo estudo ganhou um novo impulso com o papel a ela atribuído por Mersenne. (ROQUE, 2012, p.346).

Duas alusões podem ser consideradas aqui: a primeira é a relação de Fermat e do círculo de Mersenne e a segunda sobre a significação da busca por soluções dos problemas envolvendo as tangentes. Dessa, o fato de que hoje podemos olhar para esses problemas e até mesmo encontrar a beleza ao mostrar certa equivalência entre suas soluções não subtrai os aspectos diferentes que cada proposta de resposta teve ao longo do tempo. No entanto, é exatamente nesta série de propostas e soluções diferentes que se firma a ideia de que podemos encontrar as origens do cálculo neste tipo de problema. Já sobre a introdução de outros personagens, abre-se margem para analisar outra diferença entre os relatos. Disso, é interessante notar os diferentes enfoques dados pelos autores, pois, ao dar mais ou menos importância aos eventos, é possível conduzir a narrativa.

A ferramenta MacTutor, por exemplo, coloca:

> Fermat também investigou máximos e mínimos considerando quando a tangente à curva era paralela ao eixo x. Ele escreveu a Descartes oferecendo o método essencialmente como utilizado hoje, ou seja, encontrar máximos e mínimos calculando quando a derivada da função era 0. De fato, por causa desse trabalho, Lagrange afirmou claramente que considera Fermat o inventor do cálculo[38].

Corroborada pela passagem já citada de Eves (2004, p. 429) em "[...] que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra em algumas ideias de Fermat, expostas em 1629", Eves (2004) ilustra o procedimento de Fermat para encontrar máximos e mínimos:

[38]Tradução nossa de: Fermat also investigated maxima and minima by considering when the tangent to the curve was parallel to the x-axis. He wrote to Descartes giving the method essentially as used today, namely finding maxima and minima by calculating when the derivative of the function was 0. In fact, because of this work, Lagrange stated clearly that he considers Fermat to be the inventor of the calculus. Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/The_rise_of_calculus/

> Fermat usava a notação de Viète em que as consoantes maiúsculas representavam constantes e as vogais maiúsculas representavam variáveis. Seguindo essa notação, seja B a quantidade dada e denotemos as partes procuradas por A e B A. Formando
>
> $$(A\ E)[B\ (A\ E)]$$
>
> e igualando esse produto a $A(B\ A)$, obtemos
>
> $$A(B\ A) = (A\ E)\ (B - A + E)$$
>
> ou
>
> $$2AE - BE - E2 = 0.$$
>
> Dividindo por E chegamos a
>
> $2A - B - E = 0.$
>
> Fazendo, então, $E = 0$, conclui-se que $2A = B$, estabelecendo-se assim a divisão desejada.
>
> Embora a lógica do processo de Fermat deixe muito a desejar, vê-se que o método equivale a impor
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$
>
> isto é, a impor que a derivada de $f(x)$ em $x$ seja nula. Esse é o método habitual de se acharem máximos e mínimos de uma função $f(x)$, às vezes referido nos textos elementares de cálculo como método de Fermat. Fermat, porém, ignorava que a condição de a derivada de $f(x)$ se anular não é suficiente para se ter um máximo ou mínimo comum, mas apenas necessária. O método de Fermat também não distinguia entre valor máximo e valor mínimo. (EVES, 2004, p.429).

Na descrição, ressalta que Eves atribua, ainda que indiretamente, a noção de limite moderna à Fermat, mas que não faça maiores discussões. Encerra com:

> Fermat desenvolveu um trabalho pioneiro não só no que se refere à diferenciação, mas também no que se refere à integração, como se insinuou ao fim da Secção 11-6. Fermat foi um matemático singularmente brilhante e versátil. (EVES, 2004, p.431).

Remontando à passagem já citada de Eves na introdução de seu capítulo sobre o cálculo, este indicou que o cálculo integral teria surgido antes e “(...) só muito tempo depois o cálculo diferencial”. Embora não haja referências temporais palpáveis ao redor das citações, a implicação seria a de que haveria de fato um hiato substancial de tempo, pelo menos em relação à cronologia da história da matemática. Conquanto, ao dispor Fermat como um dos pioneiros do cálculo diferencial, cria-se certa incoerência, visto que Fermat, Newton e Leibniz foram contemporâneos. Talvez aqui, mais do que noutras instâncias, pode-se inferir que Eves realmente pretendia localizar as origens do cálculo integral com os métodos gregos enquanto que do cálculo diferencial, apenas após os trabalhos de Newton e Leibniz.

Essa breve digressão permite reforçar a característica de que as narrativas conduzem a historiografia. Retornando à ideia da introdução de personagens, sempre com vistas aos indivisíveis, Alexander (2016) também toca o tópico das tangentes na passagem:

> Torricelli mostrou então como fazer uso matemático dos indivisíveis com ‘largura’ calculando a inclinação da tangente* de uma classe de curvas que nós caracterizamos como $y^m = kx^n$, e que ele chamou de ‘parábola infinita’. Nisso ele foi muito mais longe que

> Cavalieri, que calculou áreas e volumes inseridos em curvas geométricas, mas nunca suas tangentes. (ALEXANDER, 2016, p.261, grifos do autor).

Disso, o autor passa a descrever o processo de Torricelli para encontrar a inclinação da reta tangente em cada ponto do que chamou de parábola infinita. Segundo Alexander (2016), Torricelli utilizou o paradoxo do paralelogramo para encontrar a razão entre as áreas dos semignômons[39], o que hoje consideramos exatamente como a inclinação da reta tangente num ponto desta parábola. A descrição do paradoxo inicia com pela apresentação de um paralelogramo ABCD de maneira que o lado AB seja maior do que o lado BC como na figura abaixo.

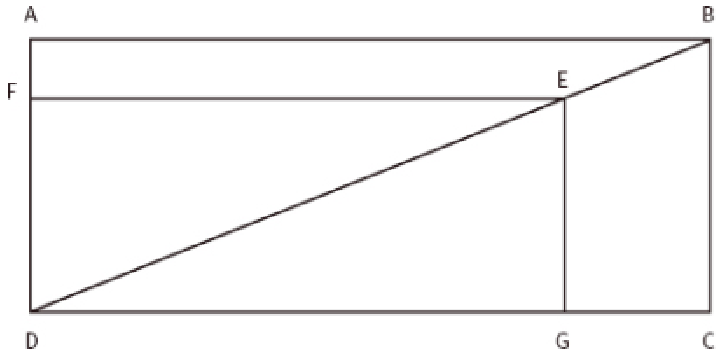



*Figura 4-1 - O paralelogramo do paradoxo de Torricelli com os semignômons descritos. Fonte: Alexander (2016)*

A partir disso, traça-se a diagonal BD. Toma-se um ponto E nesta diagonal de maneira a criar EF e EG paralelas à AD e BC respectivamente, criando assim a ideia dos semignômons ABFE e BCGE. Isso deve garantir que AB seja maior do que EF e que CD seja maior do que DG. Além disso, pela composição, EF também deve ser maior do que EG. O paradoxo aparece quando se estipula que todos os segmentos do triângulo ABD se tornam maiores do que os do triângulo BCD com a conclusão de que o triângulo ABD seja daí maior do que o triângulo BCD, o que é evidentemente falso, pois a diagonal BD dividiu o paralelogramo exatamente ao meio. Alexander (2012) neste momento informa:

> A conclusão de que as duas metades do retângulo diferem em tamanho é absurda, mas parece ser consequência fácil do conceito de indivisíveis. O que fazer? Os matemáticos antigos, bem cientes de que os infinitesimais podiam levar a essas contradições, simplesmente os baniram da matemática. (ALEXANDER, 2016, p.114).

A conexão com Cavalieri aparece aqui:

> Cavalieri reintroduziu os indivisíveis, mas tentou lidar com essas contradições inscrevendo regras em seus procedimentos para garantir que elas não surgissem. Por exemplo, ele insistia em que, para comparar 'todas as retas' de uma figura com 'todas as retas' de outra, as linhas em ambas as figuras deviam ser todas paralelas a uma única linha que ele chamou de 'regula'. Como as retas EF e EG no paradoxo de Torricelli não são paralelas, então Cavalieri podia alegar que não deviam absolutamente ser comparadas, e o paradoxo podia ser evitado. Na prática, porém, as limitações artificiais de Cavalieri eram ignoradas tanto pelos seus seguidores, que as viam como estorvos inconvenientes, quanto pelos seus críticos, que não acreditavam que elas resolvessem o problema fundamental. (ALEXANDER, 2016, p.114, grifos do autor).

Enquanto o procedimento de Cavalieri indicava a comparação entre 'todas as retas', como coloca Alexander (2016), os de Torricelli iam mais a fundo na percepção dos indivisíveis e "num único golpe, Torricelli transformou uma especulação bastante dúbia sobre a composição

---

[39] Na geometria, um gnômon pode ser descrito como uma figura geométrica que é gerada pela extensão dos lados de uma figura dada gerando assim uma figura de mesmo formato.

do continuum numa grandeza matemática quantificável e utilizável. (ALEXANDER, 2016, p.115), e conclui:

> A significação do procedimento de Torricelli aqui se estende para além da engenhosidade da prova em si (que é considerável) e do desafio que ela representava para a tradição matemática. Desde os tempos antigos, os matemáticos haviam procurado evitar os paradoxos, tratando-os como obstáculos intransponíveis, e um sinal de que seus cálculos haviam chegado a um beco sem saída. Mas Torricelli afastou-se dessa venerável tradição: em vez de evitar paradoxos, ele os buscava e os submetia à sua causa. Galileu especulara sobre a estrutura infinitesimal do continuum, mas atenuou seus comentários admitindo que o continuum era um grande 'mistério'. Cavalieri fez o possível para evitar paradoxos e conformar-se com os cânones tradicionais, mesmo à custa de tornar seu método incômodo. Mas Torricelli, sem se desculpar, usou paradoxos para conceber uma ferramenta matemática precisa e poderosa. Em vez de banir o paradoxo do continuum do reino da matemática, Torricelli o colocou no coração da disciplina. (ALEXANDER, 2016, p.117, grifos do autor).

E introduz:

> Apesar dos claros riscos lógicos, o método de Torricelli causou profunda impressão em seus contemporâneos matemáticos. Embora constantemente beirando o erro, era também flexível e incrivelmente efetivo. Nas mãos de um matemático habilidoso e imaginativo, era uma ferramenta poderosa, que podia levar a resultados novos e até surpreendentes. Na década de 1640, o método se difundiu rapidamente na França, onde foi desenvolvido por pessoas como Gilles Personne de Roberval e Pierre de Fermat (1601-1665), que se corresponderam diretamente com Torricelli. O padre mínimo Marin Mersenne, que era o núcleo da 'República das Letras' europeia, também se correspondeu com Torricelli e difundiu o método do italiano na Inglaterra, onde Wallis e Barrow, erroneamente, o atribuíram a Cavalieri. (ALEXANDER, 2016, p.117).

Vale nota aqui que enquanto Alexander (2016) enaltece a importância de Torricelli para a linha de sucessão da diferencial, Eves (2004) pouco trata de Torricelli e o inclui apenas em breves passagens junto com Roberval, inclusive dispondo sem referência: "Um relato talvez excessivamente romântico conta que Torricelli morreu de desalento e humilhação ao ser acusado de plágio por Roberval". (EVES, 2004, p.396).

Boyer (1974), por outro lado, dedica três páginas praticamente à biografia de Torricelli e embora também não coloque tamanha importância aos trabalhos de Torricelli na linha sucessória do cálculo propriamente dita, informa que a publicação *De Dimentione Parabolae* de 1644 continha a construção das tangentes que foi acusada de plágio por Roberval:

> Torricelli não mencionou o fato de Roberval ter chegado a esses resultados antes dele, e por isso em 1646 Roberval escreveu uma carta acusando Torricelli de plágio, dele e de Fermat (sobre máximos e mínimos). É claro agora que a prioridade na descoberta cabe a Roberval, mas a prioridade de publicação é de Torricelli, que provavelmente redescobriu a área e a tangente independentemente. (BOYER, 1974, p.260).

Boyer (1974) não ilustra o método de Torricelli, nem sua relação mais direta com o cálculo, mas o trata com certa reverência e encerra com:

> Torricelli percebeu o caráter inverso dos problemas de quadratura e tangente. Se tivesse vivido mais é possível que se tornasse o inventor do cálculo; mas sua vida terminou prematuramente em Florença poucos dias antes de completar trinta e nove anos. (Boyer, 1974, pp.261-262).

Aparentemente não foi só a disputa de autoria entre Newton e Leibniz que marcou a história do cálculo. Apesar de circundar os mesmos nomes, Alexander (2016) também não cita nem explica em maior detalhe o 'erro' cometido por Wallis e Barrow ao difundir o método de

Torricelli como sendo de Cavalieri, mas seu comentário torna esse tópico uma possibilidade de pesquisa isolada. Roque (2012) não inclui qualquer menção à Torricelli[40].

Já do ponto de vista mais amplo de uma busca pelas origens do cálculo, talvez aqui seja encontrado realmente uma via de discussão menos taxativa e mais metodológica, no sentido de que, ao alocar um tipo de problema matemático (e não um conceito) como a origem do desenvolvimento do cálculo, também se aloca o próprio cálculo como a consequência final das inúmeras tentativas de solução desses problemas. Não é o caso de incluir Euclides ou Arquimedes como os precursores/autores, nem mesmo Torricelli, Cavalieri ou Fermat (embora este apareça em alguns casos), mas de colocar o desenvolvimento das ferramentas do cálculo no foco principal. Como bem coloca Bardi (2008, p.36), "todo o trabalho básico estava feito alguém apenas tinha que dar o próximo passo e juntar tudo. Se Newton e Leibniz não o houvessem descoberto, alguém o teria feito".

## 4.5 AUTORIA

Embora o conceito de autoria apareça marginalmente em uma grande variedade de discussões acadêmicas, raramente está no centro da discussão ou, ao menos, é objeto de uma discussão mais aprofundada. Esse contexto é particularmente verdadeiro dentro do universo da matemática, em que as relações de autoria encontram dificuldades ainda mais intricadas, como a dispersão temporal e geográfica da matemática ao longo dos séculos e problemas filosóficos correlatos a respeito da noção de descoberta *versus* invenção, por exemplo.

Todavia, é sobretudo durante o movimento Romancista do final do século XVIII que a imagem do autor se modifica e começa a capturar diferentes aspectos da produção intelectual. A personificação da identidade autoral e suas relações com o texto tomam contornos diferentes e essa mudança na perspectiva do autor é justamente o que coloca a discussão sobre a autoria numa luz diferenciada. Isso porque, além do fato de que o conceito de autoria ser largamente compreendido na contemporaneidade como parte fundamental da produção intelectual, ele também carrega uma idealização específica sobre o conceito de autor, i.e., uma personificação da noção de autoria como se o texto em si fosse impregnado pela consciência do autor ou autora. Assim, a noção de autoria fica também imediatamente relacionada com a ideia de propriedade; ou ainda, com a ideia transversal de propriedade intelectual moderna.

Entretanto, essa relação se torna ainda mais desafiadora quando colocada fronte a diferentes contextos, como, por exemplo, o de textos técnicos e científicos, especialmente aqueles das ciências duras[41] e, particularmente o da matemática[42]. A dificuldade para se estabelecer uma relação entre o autor e um texto matemático é latente e aparece por duas razões iniciais: num primeiro momento, é necessário estabelecer ao menos a existência da controvérsia filosó-

[40] Roque (2012) em várias passagens cita o que é considerado o *Círculo de Mersenne*, assim denominado a partir de Marin Mersenne (1588-1648), mas não aponta nem faz menção a Torricelli que fora aluno de Galileu e de Cavalieri.

[41] Embora a classificação em ciências duras não seja formal, a intenção é apenas distinguir superficialmente as ciências naturais das sociais. Os termos natural e social não foram utilizados pela complexidade de distinção da matemática como uma ciência natural ou social. Ver POPPER, 2000 e Kuhn, 1962.

[42] A matemática não é geralmente considerada nem uma ciência dura nem uma ciência natural. Popper (2000) argumenta que a uma vez que a matemática não pode ser propriamente falsificada, não pode ser classificada como ciência. Sua solução para tal problema normalmente cria a divisão entre matemática pura e aplicada, com a primeira não sendo classificada como ciência propriamente dita, enquanto a segunda, sim. Thomas Kuhn (1962) também argumenta que a matemática não opera com mudanças de paradigma, mas apenas com adições, portanto também possui um problema com sua definição; além disso, a falta de procedimentos empíricos deslocaria a matemática para o ramo das ciências formais, junto com a lógica e a estatística ele argumenta.

fica envolvendo os conceitos de criação e descobrimento na matemática; num segundo momento, mesmo que essa dicotomia filosófica seja deixada de lado, ainda existe um problema mais profundo que é o de identificar estritamente a autoria da repetição ou reescrita ou até mesmo de apenas novas aplicações e reinterpretações.

Conquanto distintas, essas dificuldades têm uma conexão maior do que com a aparente subjetividade do conceito de autoria na matemática (ou em qualquer domínio): a noção de original. Essa sim, no centro da discussão sobre a autoria em qualquer esfera de produção acadêmica e, ou, cultural.

Definir originalidade pode parecer simples *a priori*, mas a tarefa se torna intrincada quando colocada fronte a contextos como o da matemática. Além disso, há um problema menos subjetivo do ponto de vista legal no entendimento de o que exatamente pode ser considerado original na matemática, ao menos atualmente e do ponto de vista de propriedade. Na lei brasileira, por exemplo, está explícito no inciso 1º, artigo 8º da lei 9.160 do Código Civil:

> Art. 8º Não são objeto de proteção como direitos autorais de que trata esta Lei:
> I - as idéias, procedimentos normativos, sistemas, métodos, projetos ou conceitos matemáticos como tais; (BRASIL, 1998).

Segue de uma interpretação, ainda que superficial, que os 'conceitos matemáticos como tais' devem, na pior das hipóteses, ou ser melhor explicitados ou, na melhor, serem realmente definidos. Entretanto, nenhuma outra menção mais específica é feita na lei. Não seria exagero, portanto, ao menos colocar como tópico de uma discussão maior que a autoria na matemática sofre de um tipo de suspensão do conceito de autoria. De uma maneira simplificada: o que faz um texto matemático ter um autor quando a matemática propriamente dita não pode 'pertencer' a ninguém? Seria aqui o equivalente a estabelecer a relação entre a língua portuguesa nunca pertenceu a Camões mas certamente *Os Lusiadas* são inegavelmente sua obra?

Aceito esse entendimento, também seria inegável a interpretação direta de que a matemática é em si apenas uma linguagem, o veículo das ideias tal qual seria o entendimento do Português para como veículo para Camões e Machado de Assis igualmente. Mas, assim como é possível diferenciar e estabelecer a autoria nas obras desses, também deve (ou deveria) ser possível estabelecer a autoria dos textos matemáticos.

Esse entendimento, entretanto, está longe de ser consensual em qualquer esfera e, como já indicado, existe uma profunda discussão filosófica em torno dos argumentos que devem ser postados para qualquer conclusão sobre esse assunto. Ainda que não seja o objetivo explícito fazer essa discussão mais ampla, o fato é que livros são escritos, organizados em forma de livro-texto e apostilas e, ainda que orientados para o ensino, todos com a designação de um autor. Embora esses últimos sejam reconhecidos por não trazerem contribuições essencialmente originais, existem circunstâncias que chamam a atenção num primeiro olhar.

O livro-texto de cálculo de Stewart[43], por exemplo: 1300 páginas divididas em dois grandes volumes, não possui qualquer referência bibliográfica. Deve-se isso ao fato de que não há necessidade de indicar a bibliografia ou há aqui, também, outras causas? Vale ressalva que se esse fosse o único exemplo, indicá-lo-íamos como um equívoco de publicação e seguiríamos sem objeto de qualquer análise mais aprofundada; mas esse não é o caso. *Calculus,* de Michael Spivak, já em 1967 mostrava a mesma ausência; os três grandes volumes de George B. Thomas, já em sua 12ª edição, o mesmo. Seria apenas uma coincidência sobre o cálculo ou há algo a mais a respeito dessa característica na matemática?

Uma tentativa inicial de responder a esse questionamento nos levaria novamente às origens do cálculo infinitesimal, ao menos como o conhecemos, para o final do século XVII. Bardi

---

[43] James Drewry Stewart (1941-2014).

(2008), colocou a importância da questão da propriedade intelectual como uma das premissas de sua narrativa quando expõe:

> Por mais verdadeiras que possam ser, as guerras do cálculo são fascinantes porque nelas Newton e Leibniz desempenharam o maior debate sobre propriedade intelectual de todos os tempos – um debate que, do princípio ao fim, revelou como esses dois gigantes da matemática, esses dois expoentes das matemáticas alemã e britânica, eram brilhantes, orgulhosos, por vezes loucos – e, no final, completamente humanos.(BARDI, 2008, p.15).

Como já descrevemos nos subcapítulos anteriores, mesmo que se neutralizem os indícios do cálculo anteriores, a história positiva conta que Newton e Leibniz teriam desenvolvido o cálculo simultaneamente sem aparente contato entre eles. Depois da publicação de Leibniz, Newton, que era o então presidente da Royal Society, lançou-se numa disputa pública para recuperar o crédito que o cálculo vinha conquistando entre os matemáticos da época. Essa disputa durou mais de dez anos e só acabou realmente com a morte de Leibniz em 1716. Embora Newton tenha sido agraciado, à época, com a autoria do cálculo, o debate sobre a propriedade intelectual de conceitos matemáticos já havia se espalhado o suficiente na comunidade matemática para reacender a chama de uma velha disputa: invenção *versus* criação. Após anos dessa controvérsia e uma verdadeira guerra de gigantes, o empate técnico de que Newton teria concebido antes a ideia, mas Leibniz tem prioridade de publicação é veredito final.

Mas se isso deve ser tomado como o fim da história, como podem Spivak, Stewart, Thomas e tantos outros ‘autores’ dispensarem as referências por completo? Como podem esses textos serem tão similares e não serem considerados como cópias, ao menos entre si? Não estariam estes plagiando, no sentido estrito da palavra, ou o cálculo ganha atualmente outra designação? Seriam esses tratados como traduções? Ou ainda, por serem livros-texto, orientados para o ensino, são isentos dessa necessidade?

O que podemos notar de um texto para outro é que existem diferenças tangíveis mesmo que o contexto e os resultados principais sejam de fato os mesmos. Entretanto, se considerarmos essas diferenças como indicativos de algum tipo de autoria, é inevitável transpor o questionamento e indagar: seria essa uma característica particular da matemática?

O físico e filósofo indiano Sundar Sarukkai (2001; 2002) argumenta, como contraponto, que a natureza dos textos matemáticos não permite que sejam estabelecidos quaisquer tipos de autoria propriamente dita porque qualquer que seja o texto hoje proposto, este já seria uma ‘tradução’ de certo modo de algo do mundo. Além de fortemente enraizada em premissas filosóficas controversas, essa linha de raciocínio levaria, inevitavelmente, a enfatizar a importância da terminologia empregada em textos técnicos, científicos e especialmente os matemáticos além de seu predicado de universalidade. Embora breve, Montgomery (2000) nos dá outra perspectiva sobre o problema quando comenta:

> Parece justificado propor que os trabalhos matemáticos, pela natureza dos sistemas simbólicos envolvidos, representam o caso extremo de expressão universal na ciência (e talvez em qualquer campo). Tais textos, isto é, parecem invulneráveis a mudanças significativas entre as línguas. O discurso matemático é a forma mais pura da lógica científica, ocupando um espaço acima da topologia mais problemática da fala humana normal. Na realidade, porém, não é esse o caso. Mesmo a pesquisa mais densamente matemática ocorre dentro de um contexto linguístico. Isso pode ser facilmente confirmado por um olhar através de jornais, monografias e livros didáticos em áreas como física teórica, bioestatística, físico-química e cosmologia, bem como qualquer ramo da própria matemática. Equações, fórmulas, proposições, medidas e expressões alfanuméricas ou geométricas de todos os tipos podem ser encontradas dentro de explicações e dis-

> cussões escritas. Isso é inevitável: por enquanto, a articulação matemática não se aproxima de um sistema de comunicação totalmente autossuficiente (entre seres humanos, pelo menos)[44]. (MONTGOMERY, 2000, p.255, adições do autor).

Montgomery aponta, até com certa dose de humor, que os textos matemáticos, além de não serem compostos apenas por um código próprio, não escapam das condições de produção e existência de qualquer outro tipo de texto, i.e., os textos são, como quaisquer outros, uma produção e criação humanas. Isso talvez permitiria se aproveitar ainda mais de estudos nos ramos literários e sociais, que certamente fogem do escopo desta pesquisa[45], para uma análise mais aprofundada. Essa breve digressão, na prática, levanta mais questionamentos do que os responde e uma resposta definitiva não é imediata e requer pelo menos o estabelecimento de alguns parâmetros.

Para dar ao menos um panorama do assunto, é preciso antes estabelecer uma noção de autoria que dê conta dos predicados da matemática indicados. Disso, surge uma questão ainda mais fundamental: existe alguma definição de autoria, ampla o suficiente para conter diferentes contextos de produção textual? Mais especificamente, existe alguma que poderia dar conta dos textos matemáticos, por exemplo?

À primeira vista, a resposta seria direta: não. Parece que a matemática requer um ponto de partida diferente (ao menos em relação aos textos literários e mesmo científicos e acadêmicos de outra natureza, por exemplo) para que seja possível dar alguma estabilidade ao conceito de autoria. Um desses pontos de partida distintos pode ser exatamente o conceito de originalidade.

### 4.5.1 Originalidade

Os (des)entendimentos mais comuns a despeito da autoria estão invariavelmente conectados à noção de originalidade. Embora a conexão entre o original e a autoria pareça relativamente óbvia, é imperativo considerar que também é escorregadia e aberta à múltiplas interpretações. Ainda, considerando que "[…] a noção de 'original' é central para ambos: tradução e ciência" (Sarukkai, 2001, p.648), é necessário tentar definir um ponto de partida para este 'original' entre os diferentes contextos.

Nessa tentativa inicial de procurar por uma definição funcional para autoria vem à tona o conceito de uma ideia primitiva ou primária, particularmente quando é relacionado à origem ou, no caso de ser tratado como uma invenção, quando é propriedade de uma entidade. O conceito delimitador do tempo (i.e., o que foi feito por quem e quem fez primeiro) é especialmente conectado com as concepções de materialismo histórico e, é claro, com a visão atual de era da informação[46]. Dentro desses contextos, as conexões entre original-autoria-autor criam uma relação estrita entre os conceitos de original e de autor no plano de fundo de maneira que a autoria,

---

[44] Tradução nossa de: It would seem justified to propose that mathematical works, due to the nature of the symbolic systems involved, represent the extreme case of universal expression in science (and perhaps in any field). Such texts, that is, appear invulnerable to significant change between languages. Mathematical discourse is the purest form of scientific logic, occupying a space above the more troubled topology of normal human speech. In reality, however, such is not the case. Even the most densely mathematical research takes place within a linguistic context. This can easily be confirmed by a glance through journals, monographs, and text-books in such fields as theoretical physics, biostatistics, physical chemistry, and cosmology, as well as any branch of mathematics itself. Equations, formulas, propositions, measurements, and alphanumerical or geometrical expressions of all kinds are to be found nested within written explanation and discussion. This is inevitable: as yet, mathematical articulation does not approach a fully self-sufficient system of communication (among human beings, at least).

[45] A discussão do problema de textos matemáticos serem analisados sob a luz de teorias literárias já foi elaborada em Galelli (2015).

[46] Ver Venuti (1995;1998).

a cola que une esses conceitos, mostra-se e define-se mais como a intersecção entre o autor e o original do que, de fato, aquilo que os define *a priori*.

Nesses termos, a autoria é reconhecida, mas não propriamente definida; é circunscrita por ambos, original e autor, e, quando o conceito de autoria é quebrado, ou ao menos quando a definição não é clara o suficiente num dado momento de uma disputa, por exemplo, a saída comum é buscar aquilo que se acredita ser o original, ou ainda, por facilidade operacional, tentar apontar aquilo que não é original, ou seja, o que é a cópia, a reprodução ou até mesmo a tradução e a reescrita. Embora simples em essência, essa distinção é suficiente para a maioria dos casos onde o conceito de original se revela necessário para abalizar, por exemplo, a autoria do plágio.

Embora seja crucial para o entendimento de autoria, essa relação simplificada carece da clareza necessária para reconhecer a própria natureza da ideia de original de uma maneira mais prática. Além, não contemplaria os casos mais extremos de conceitos matemáticos como até mesmo os tratados aqui do cálculo. Venuti (1995;1998) aponta que essa definição simplista é insuficiente para uma conceituação precisa do que seja o original (consequentemente do que seria de autoria) simplesmente ao colocá-la fronte o contexto da tradução de textos, por exemplo.

Um argumento simples do que Venuti tenta elucidar é o de que, no momento da tradução de um texto, na falta de um equivalente direto entre um idioma e outro, é a criatividade (e por que não a autoria) do tradutor que faz as escolhas para a recodificação das sentenças noutro idioma. Mas isso quer dizer que algo deve ter sido perdido. Para uma mente positivista[47], esse problema poderia ser destilado em dois pressupostos comuns: o primeiro o da ineficiência do tradutor em conhecer os idiomas ou com a incompatibilidade natural entre os idiomas. Mas esse não é sempre o caso. Essa, inclusive, exatamente o que Venuti designa como uma visão ingênua do que deva ser a tradução, pois, mesmo quando esses dois pressupostos são ultrapassados, há a possibilidade de que uma língua 'diga' algo que a outra não diga, ou não soe como outra soa. Esse exemplo pode ser exagerado e melhor vislumbrado na tradução de um poema, por exemplo, em que a possibilidade de encontrar equivalentes linguísticos de significado não implique na equivalência fonética e rítmica do poema, parte integral da construção deste. Assim, será a criatividade e as escolhas do tradutor que farão o texto 'atravessar' de um idioma com mais ou menos semelhança. Venuti finalmente argumenta que tanto o texto primário quanto a tradução são originais, o que daria ao tradutor ao menos um tipo de autoria ao texto traduzido. Essa concepção pode parecer exagerada, especialmente porque desconsidera a 'ideia' original como parte substancial da originalidade, mas guarda semelhança com a argumentação sobre a autoria na matemática.

Essa breve digressão pode parecer despretensiosa, mas pretende mostrar que ainda há espaço para a discussão do conceito de original, assim como houve no tempo de Leibniz e Newton. Ainda, se é a concepção da ideia original que firma a autoria, seria esse o motivo pelo qual tantos autores da história da matemática remontam as ideias gregas para indicar as origens do cálculo? Seria Zenão o autor da ideia original? Seria Arquimedes, Cavalieri ou Fermat? Seria essa a característica primordial da autoria na matemática?

### 4.5.2 Autoria na matemática

O físico e filósofo indiano Sundar Sarukkai, em seu livro de 2002 intitulado *Translating the World*, discute com amplitude tanto o conceito de autoria quanto o da tradução de textos científicos. Ele argumenta que textos científicos, especialmente os matemáticos, pressupõem

---

[47] Utilizado aqui como no sentido do Positivismo lógico.

um entendimento diferenciado sobre as definições de originalidade e, consequentemente, de autoria.

É claro que o entendimento de Sarukkai é fundamentado em interpretações estritamente filosóficas, pouco ou nada conectadas com realidades econômicas e suas consequências imediatas ou futuras, ou até mesmo com os desusos possíveis de sua interpretação. O ponto mais importante para ser levantado aqui, entretanto, é o de que, ao contrário de Venuti (1995,1998), Sarukkai (2002) se afasta da necessidade de conectar o autor à obra, característica basilar do movimento pós-romântico, e reitera que tais mudanças das interpretações não tiveram a mesma influência sobre a visão das criações e desenvolvimentos científicos.

Sarukkai (2002) argumenta que nas ciências exatas, embora as invenções/descobertas apresentem um autor/inventor[48], elas também demonstram uma mudança no posicionamento do que é chamado de original. Sua visão é bem enfatizada quando argumenta que:

> Mesmo em um nível fundamental, a ciência só é possível porque ela vê o mundo como o original. O mundo é o original, a pedra-de-toque em da qual provém o discurso científico e pela qual ele é sustentado[49]. (SARUKKAI, 2002, p.128).

Embora não apontada para textos científicos, Roland Barthes, em seu texto controverso de 1967 intitulado *The death of the author*, demonstra uma argumentação similar:

> […] o autor apenas pode imitar um gesto sempre anterior, nunca original; seu único poder é combinar os diferentes tipos de escrita, contrapor uns com os outros, para que nunca se sustente por apenas um deles[50]. (BARTHES, 1967, pp.4-5).

É claro que existem premissas filosóficas a serem estabelecidas em ambas argumentações. Uma delas é a de que Sarukkai posiciona o mundo material como um original de maneira que é a partir disso que atribui aos cientistas o trabalho de escrever e descrever esse já amalgamado conceito de mundo. Seu argumento principal necessita que pelo menos uma de duas direções sejam seguidas: ou se considera o mundo como original (e consequentemente já posiciona qualquer texto como uma tradução num sentido menos metafórico) ou se considera o primeiro texto como o original (o que consequentemente o faz possuir um conceito de autor similar ao daquele de um romance ou de uma poesia, o que não parece ser uma definição funcional para a matemática e para a física nos seus exemplos).

Ao seguir a primeira direção, a discussão do autor segue para assegurar o entendimento de que, especialmente na matemática e na física, os textos só conseguem funcionar e se sustentar exatamente porque interpretam o mundo como esse original; qualquer produção textual seria, portanto, uma recodificação em termos de um idioma apenas com função de usufruto humano. E neste sentido é similar à argumentação de Barthes ao indicar que qualquer escritor é sempre uma consequência inclusive involuntária do que veio antes dele.

Embora pareçam demasiado controversas, essas visões apresentam um fator importante para a discussão: ambas indicam que existe a possibilidade de uma mudança no posicionamento do autor. Uma variação que culmina, para melhor ou para pior, no reposicionamento daquela conexão entre original-autoria-autor. Esse é um ponto que talvez mereça uma reflexão maior,

---

[48] É importante assinalar que Sarukkai é o tempo todo consciente da diferença entre invenção e descoberta nas ciências e na matemática; por isso a escrita invenção/descoberta quando o argumento indefere desta posição filosófica.

[49] Tradução nossa de: Even at the foundational level, science is possible only because it sees the world as the given original. The world is the original, the touchstone around which scientific discourse emanates and by which it is sustained.

[50] Tradução nossa de: the writer can only imitate a gesture forever anterior, never original; his only power is to combine the different kinds of writing, to oppose some by others, so as never to sustain himself by just one of them.

especialmente porque também, de acordo com Sarukkai (2001) esse reposicionamento infere que:

> Os cientistas nunca são os autores originais. Eles só podem escrever, reescrever e traduzir o mundo como o original. O primeiro autor, aquele que detém os direitos autorais sobre a tradução, é o mundo. O discurso científico só torna acessível o texto do mundo, um que já está 'escrito'[51].(SARUKKAI, 2001, p.654).

Dessa forma, Sarukkai (2001;2002) não só especifica um movimento para o entendimento de original, mas também para o que quer dizer com esse reposicionamento do autor. Poder-se-ia inferir, portanto, que a autoria tem um papel secundário no contexto da matemática, mesmo naquilo que poderia ser considerado como uma produção original. Uma vez aceito esse argumento, tornam-se ainda mais claras as consequências de uma extrapolação relacionada às traduções, i.e., no momento de uma tradução propriamente dita de um texto matemático, o papel da autoria seria não só marginal, mas praticamente abdicado em relação à uma tradução dita literária, por exemplo. É possível indicar também que o distanciamento entre os conceitos de autoria na matemática e na literatura, por exemplo, são impostos, principalmente, pela suposta imparcialidade dos construtos matemáticos; além, que essa suposta imparcialidade está ligada diretamente à validação do conteúdo do texto, também supostamente independente da figura autoral dentro do domínio da matemática.

É evidente que existem diferenças latentes entre o entendimento de autoria dentro dos contextos científico e literário. Entretanto, o que precisa ser colocado em evidência é o fato de que quando o original é tomado como essa criação primária que nunca tenha sido vista antes em oposição à noção de uma coisa secundária ou derivada, é preciso levar em consideração que dentro do contexto da matemática essa noção se apresenta de uma forma opositora (para não dizer contraditória).

Esse aspecto se torna ainda mais aparente quando é evidenciada a característica de a matemática estar sempre em construção e estar em constante desenvolvimento. O conhecimento matemático assim dito, sempre depende de definições anteriores, conclusões e especialmente de um modelo estrito de argumentação que difícil ou raramente invalida construtos anteriores. A autoria na matemática só pode ser, então, constituída como essa implementação, esse incremento, por menor que seja, naquilo que já foi previamente estabelecido. Por esses parâmetros, quase todos os textos matemáticos modernos deveriam ser considerados derivados, no sentido de que são dependentes de textos anteriores, de 'versões' anteriores. Esse argumento não apenas guarda semelhança com o argumento de Venuti em que a literatura também é dependente de aspectos culturais, mas também com o argumento de Barthes envolto com a diferença sobre a finalidade não ser tentar ser sempre diferente, mas ser sempre universal. Além disso, vai ao encontro com toda a argumentação sobre a autoria do cálculo.

Para além das argumentações de Venuti e Barthes, é possível entender, assim como Sarukkai entende, que aquilo que normalmente é compreendido como um trabalho original, nada mais é do que uma reescrita daquilo que já está escrito na natureza. Sendo assim, não haveria original. Isso bastaria para dar um primeiro indicativo do porquê da existência de tantos textos de cálculo, por exemplo. Entretanto, esse argumento não é aceito com tanta facilidade (e nem deveria). Ainda que seja apenas um passo a mais sobre a dissociação entre autor e texto matemáticos, o argumento soa muito dissociado, além do aceitável. Alegar que não há qualquer relação entre o autor e o texto seria descontruir a natureza da invenção humana e, consequentemente, desafiar o conceito de criatividade como uma atividade intrapessoal.

[51] Tradução nossa de: The scientists are never the original authors. They can only write, rewrite and translate the world as original. The first authorship, the one who holds the copyright over the translation, is the world. Scientific discourse only opens up the text of the world, one that is already 'written'.

Para elaborar um contexto mais atual, seria necessário aceitar que a própria matemática se beneficia de uma definição mista ou híbrida de autor: o primeiro autor é reconhecido até certa extensão, seja na referência aos nomes[52] ou a um campo de estudos particular[53], embora o conhecimento, o conteúdo propriamente dito, possa permanecer dissociado da figura personificada de um autor em si, i.e., não depende diretamente da autoridade da figura autoral. Há um lugar de respeito entre os pesquisadores, especialmente na pesquisa de ponta, em pesquisas avançadas, mas não há, aparentemente, um consenso bem estabelecido sobre o que deve ser a autoria matemática propriamente dita que abranja e alcance toda a história da matemática.

Atualmente, tal contexto é reforçado por leis de propriedade intelectual[54] e de patentes em vários países que colocam claramente que conceitos matemáticos não são passíveis de direitos autorais; portanto, como textos matemáticos contém essencialmente conceitos matemáticos, eles não são como um todo, submetidos aos mesmos padrões e regulações, especialmente sobre direitos autorais, da mesma maneira na qual textos de literatura são submetidos. Não há dúvida, portanto, de que os matemáticos gozam de uma liberdade autoral singular. Isso não quer dizer que não exista algum tipo de respeito intelectual nem que não existam disputas acirradas sobre a autoria na matemática. Nisso, não há momento mais notável e famoso na história da matemática do que o descobrimento/invenção do cálculo.

O que pode ser tirado dessa discussão é o fato de que a autoria é um conceito flutuante que se relaciona diretamente ao lugar e ao período em que se enraíza, i.e., ao período histórico e ao contexto de estudos. Esse argumento, entretanto, deve ser moldado com cuidado. Há o entendimento inocente de que textos matemáticos são apenas esses veículos de conteúdo. Entretanto, isso não significa que conteúdo é apenas o que carregam, nem que textos em si são veículos de significados. São, antes de mais nada, realizadores e construtores de significado, assim como quaisquer textos. Nesse sentido, romances e poemas também ‘carregam’ conteúdo da mesma maneira que textos matemáticos ‘carregam’ conteúdo. Uma análise nesse sentido não será nova; ao contrário, é objeto de pesquisa da linguística e até mesmo teorias literárias. Entretanto, analisar textos matemáticos baseados em teorias literárias é uma linha de pesquisa ainda pouco explorada em ambos os universos acadêmicos. Segue que pouca, ou nenhuma, atenção é dada aos progressos individuais dessas áreas ao menos nesta questão. A matemática, como área de pesquisa, não contempla desenvolvimentos das áreas da linguagem e da linguística modernas sistematicamente e estas, por sua vez, não focalizam suas maiores atenções na produção e estudo de textos técnicos e científicos, mais raro ainda na particularidade dos textos matemáticos. Talvez a área específica de estudos que poderia contemplar discussões mais aprofundadas desse tipo seria, de fato, dentro de aspectos da história da matemática, abrindo caminho para pesquisas mais específicas.

[52] Teorema de Cauchy-Schwarz por exemplo.
[53] Geometria Cartesiana, em referência ao nome em latim de Renè Descartes grafado como Rene Cartesius.
[54] Lei 9.160, artigo 8º, inciso primeiro do Código Civil Brasileiro.

# 5 CONCLUSÃO

Atualmente há, por certo, uma heterogeneidade de obras sobre a história da matemática, tanto do ponto de vista temporal quanto do metodológico. Disso, resulta que se encontram materiais dissociados uns dos outros. Uma visão homogênea da história da matemática só se torna possível com uma escolha cuidadosa de bibliografia, localizada no tempo e, como tentamos argumentar aqui, talvez até mesmo anacrônica do ponto de vista pedagógico.

Na busca de um material introdutório ou complementar para a composição de uma disciplina de cálculo ou até mesmo de um curso mais pautado na própria história da matemática, tal busca pode se tornar exaustiva para o leitor/professor desavisado que, com as restrições de tempo na preparação e na docência propriamente dita, acaba reproduzindo o discurso de textos que, por vezes, já poderiam ser considerados desatualizados, especialmente do ponto de vista historiográfico.

A pluralidade de obras, é, portanto, matéria prima farta de pesquisa, ainda que sobre um tópico específico, neste caso, o cálculo. É também notável que as obras com direcionamento didático, assim como os próprios livros-didáticos utilizados em sala de aula, não possuem a tendência de atualização de aspectos considerados paralelos à matemática ali proposta; daí, a necessidade também de trabalhos paralelos que agilizem e tentem sumarizar essas novas abordagens para a história da matemática. Isso porque, embora uma orientação mais externalista na redação dos textos seja a tendência da historiografia atual e que já existam à disposição obras com essa orientação, é também uma realidade fatual que a maioria das obras de maior impacto e reconhecimento na comunidade acadêmica não só foram compostas décadas atrás e com uma orientação mais internalista, característica do período certamente, e reproduzem um tipo de orientação que vem sendo questionada e criticada recentemente, como o eurocentrismo extremo, por exemplo, além de poderem conter informações que já foram contestadas até do ponto de vista factual.

Justifica-se esta pesquisa, portanto, no sentido de que embora não tenha objetivos bem delineados para o ensino, abre caminho para pesquisas mais pautadas nos paralelos e conexões da história e do ensino do cálculo. Na intenção de elaborar um tipo de guia para a construção de um curso, esta pesquisa, nos moldes exploratórios nos quais se propôs, talvez seja um bom ponto de partida para sensibilizar o leitor ou docente da diversidade de interpretações que contextos paralelos à matemática propriamente dita podem ter.

Conquanto não concentrada em demasiado em explicações mais teóricas sobre os conceitos trabalhados, isso por si só abre margem para pesquisas mais específicas sobre os temas levantados. Longe de ser um trabalho autocontido por assim dizer, esta pesquisa se concentrou muito mais nas divergências do que na exposição e comparação mais aprofundadas dos conceitos matemáticos em si. Primeiro porque, ao apontar para as divergências, abre-se margem para novas perguntas de pesquisa, objetivo principal de uma pesquisa exploratória; em segundo lugar, porque subjacente ao objeto de pesquisa em si, estava também a inquietação deste pesquisador com uma busca por uniformidade nunca encontrada entre as fontes.

Das análises qualitativas tratadas no capítulo 2, espera-se que o tipo de resenha das obras ao menos chame a atenção para alguns aspectos de cada uma, de maneira que as escolhas bibliográficas sejam mais educadas e conscientes a partir desta. Não é a intenção da análise a qualificação ou a desqualificação das fontes; ao contrário, ao ressaltar as características de cada uma, informa-se sobre a maneira como cada uma pode ou deve ser utilizada.

Do levantamento de dados do capítulo 3 foi possível elaborar um banco de dados do tipo wiki que pode ser implementado diretamente e complementado com pesquisas posteriores que agreguem ainda mais informação ressaltando ainda mais as características parecidas ou distintas de cada obra.

As explanações do capítulo 4 servem a expandir o escopo da percepção e consciência sobre a reprodução do teor da visão de apenas uma fonte, pois, por mais consolidada que esta fonte possa ser num momento específico, os predicados da historiografia são diferentes daquelas da matemática em si, ou seja, a estabilização de significados da matemática não implica, necessariamente, a mesma estabilização na historiografia. Os primeiros quatro itens do capítulo, por si só, podem ser objeto de uma pesquisa extensa sobre cada um. Além disso, deve servir para trazer atenção para temas adjacentes como a própria autoria na matemática, especialmente no período de conscientização autoral que passamos atualmente e cumprem o papel de estabelecer novas perguntas mais específicas de pesquisas posteriores.

Renè Descartes, nas primeiras palavras de seu *Discurso sobre o Método* de 1637 nos trouxe:

> O bom senso é a característica mais bem repartida do mundo, porque todos pensam estar tão bem providos dele que mesmo os que mais custam a contentar-se com qualquer coisa, não costumam desejar mais do que a sensatez que têm; e, nesse ponto, parece que todos têm razão, pois, em princípio, isto prova que o poder de bem julgar e distinguir o verdadeiro do falso, que é exatamente o chamado bom senso ou razão, é, naturalmente, igual em todos os homens, do que resulta que a diversidade de opiniões existe, não porque alguns são mais sensatos que outros, mas somente por conduzirmos nossos pensamentos por diversos caminhos e não considerarmos as mesmas coisas. (DESCARTES, 2006, p.29).

Um paralelo importante pode ser traçado aqui: ao fazer as escolhas bibliográficas para a condução de uma disciplina de história da matemática, por exemplo, o docente não só está fazendo as escolhas pelos alunos, mas também está, talvez, ocultando outros caminhos por considerar ou não como essenciais certos aspectos e perspectivas sobre o assunto. Esse é um fardo da docência que não pode ser facilmente desprendido, mas pode ser evitado. Ainda que conscientes, as escolhas didáticas são consideradas, por vezes, muito mais do que simples escolhas, mas como evangelho na visão dos alunos. Aqui reside uma dificuldade específica da história da matemática: a estabilidade de significado, ora atribuída à matemática em si, não pode (ou não deveria) ser transferida para uma disciplina como a história da matemática. Os conceitos de ‘demonstração’ e ‘prova’, por exemplo, verdades irrefutáveis do ponto de vista da matemática são fundamentalmente inexistentes em contextos como o de sua própria história.

Por fim, gostaríamos de ilustrar que é legítima a pluralidade de material como é legítima a escolha deste material com uma intenção pedagógica específica; não é legítima, entretanto, a ocultação intencional de ambas, afinal, quanto mais fontes são consultadas, mais aparente é a tendência da história não se repetir.

**REFERÊNCIAS**


ALEXANDER, Amir. **Infinitesimal**, Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

ASSIS, Eliane Maria do Nascimento. **Limites**: história e aplicações. 2017. 67 f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal de Viçosa, 2017.

BARBOZA, Maria Teresa Costa. **Uma proposta de ensino de funções usando a História da Matemática como recurso pedagógico**, 2019. 68f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2019.

BARTHES, Roland. **The death of the author**. Aspen, 1-7, 1967.

BARDI, Jason S. **A guerra do cálculo**. Trad. Aluizio Pestana da Costa. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

BORGES, Claudiany Narciso. **A história da matemática e ludicidade como proposta didática para o ensino de matemática**. 2018. 55f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal do Tocantins, 2018.

BORGES, Marcos Francisco. **Um estudo sobre a relação entre a matemática e a religião presente nos livros de história da matemática utilizados em cursos de licenciatura.** HISTEMAT-SBM. Ano 2, N. 1, 2016. ISSN 2447-6447.

BOYER, C.B. **Cálculo.** (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: v.6). Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BOYER, C.B. **História da Matemática (1ª ed.)** Trad.Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BOYER, C.B. **History of Mathematics** (2nd Ed.). New York: 1968.

BRASIL, Código Civil, **Lei no. 9.160, de 19 de fevereiro de 1998**. Legislação Federal. Sítio eletrônico internet – planalto.gov.br.

CAETANO NETO, Gustavo Alves. **Uma ideia sobre o conceito de limite ao longo da história da matemática**. 2016. 118f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2016.

CAJORI, Florian. **A history of mathematical notations**. New York: Dover Publications, Inc., 1993.

CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P.A.; SILVA, R. **Metodologia Científica**. 6ª ed. São Paulo: Person Prentice Hall, 2007.

COSTA, Cleomar Luiz da. **A história da matemática como estímulo ao ensino-aprendizagem.** 2016. 49f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal de Goiás, 2016.

D’AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates SBEM, II, n.

2, p.15-19, 1989.

DESCARTES, Renè. **Discurso do método.** Trad. J. Nascimento Franco. São Paulo, SP: Editora Ícone, 2006.

DIAS, Andre Luis Mattedi. **Tendências e Perspectivas Historiográficas e Novos Desafios na História da Matemática e da Educação Matemática**. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v.14, n.3, pp.301-321, 2012.

EUCLIDES, **Os elementos**. Tradução e introdução. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP: 2009.

EUCLID, **The thirteen books of Euclid's elements**. Trad. Sir. Thomas Little Heath. New York: Dover, 1956.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GALELLI, Rafael D. **Entre a Tradução e a Matemática**. Curitiba: Appris, 2015.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GUTIERRE, L. S. História da Matemática e suas potencialidades pedagógicas. In: FOSSA, J. A. (Org.) **Presenças Matemáticas**. Natal, RN: EDUFRN, 2004.

HARDY, Godfrey H. **Em defesa de um matemático**. Trad. Luís Carlos Borges. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

KUHN, Thomas S. **A estrutura das revoluções científicas**. Trad. Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. 10ª Edição. São Paulo: Perspectiva, 2011.

LINCK, Leandro Alex. **A história da matemática no ensino de geometria:** uma contextualização pela razão áurea. 2017. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, UFSCar, 2017.

MENDES, Maurício. **Desenvolvimento do clube de história da matemática:** um diálogo de ciências humanas com a matemática. 2014. 67 f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, UERJ, 2014.

MONTGOMERY, Scott L. **Science in Translation**. Chicago: University of Chicago Press, 2000.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria – Coleção Profmat**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PARREIRA, Débora Souza. **Uma proposta de uso da História da Matemática como recurso didático no ensino de áreas.** 2017. 79 f. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2017.

RODRIGUES DA SILVEIRA, José Paulo. **A história da matemática como ferramenta desmistificadora e propulsora do processo de ensino-aprendizagem.** 2018. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus Três Lagoas, 2018.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** São Paulo: Zahar, 2012.

SANTOS, Cristiano Oliveira dos. **A história da matemática como recurso didático na educação de jovens e adultos:** propostas de atividades para os ciclos III e IV. 2020. 78f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, 2020.

SARUKKAI, Sundar. **Mathematics, Language and Translation**. *Érudit, 46*(4). doi:10.7202/004032ar, 2001.

SARUKKAI, Sundar. **Translation and Science**. *Érudit, 46*(4), pp. 646-663. doi:10.7202/004031ar, 2001.

SARUKKAI, Sundar. **Translating The World**. University Press of America, Inc, 2002.

SCHENA, Fernanda Mocelin. **A história do surgimento da geometria não euclidiana**: o despertar para novos mundos e os modelos de Beltrami. 2019. 98f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2019.

SILVA, Waldyr Collares Costa Neto. **A contribuição da história da matemática na formação da cidadania dos alunos**: uma abordagem no ensino fundamental. 2019. 84f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Estadual do Maranhão, 2019.

SILVEIRA, Antonio Carlos de Queiroz. A História da Matemática como Elemento Motivadorno Ensino de Matemática. 2013. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, UFERSA, 2013.

STEWART, James. **Calculus**. 5th ed. Boston: Thomson Learning, 2006a.

STEWART, James. **Cálculo**, 5ª ed. Tradução de Cyro C. Patarra, Ana Flora Humes & Márcia Tamanaha. São Paulo: Thomson Learning, 2006b.

SCHUBRING, Gert. et al. **A história da matemática nos livros-texto de Cajori, Eves, Boyer e Struik**. Revista Brasileira de História da Ciência, Rio de Janeiro, v.13, n.2, p.280-297, jul-dez 2020.

The Archimedes Palimpsest Project. < http://archimedespalimpsest.org/>. Consultado em 10 de outubro de 2021.

VENUTI, Lawrence. **The translator's invisibility: a history of translation**. London & New York: Routhledge, 1995.

VENUTI, Lawrence. **The Scandals of Translation: towards an ethics of difference**. London & New York: Routledge, 1998.

**ANEXO A – LINHA DO TEMPO ALEXANDER**

| Ano | Quem/Autor | Obra / tópico | Texto | Fonte |
|---|---|---|---|---|
| Séc IV a.C. | Pitágoras | | "Pitágoras e seus seguidores declaram que "tudo é número", querendo dizer que tudo no mundo pode ser descrito por números inteiros ou pela razão entre eles." | ALEXANDER, 2016, p.304 |
| Séc V a.C. | Demócrito de Abdera | infinitesimais | "Demócrito de Abdera usa infinitesimais para calcular o volume de cones e cilindros." | ALEXANDER, 2016, p.304 |
| Séc V a.C. | Hipaso de Metaponto | incomensurabilidade | "O pitagórico Hipaso de Metaponto descobre a incomensurabilidade (isto é, os números irracionais). Daí se deduz que diferentes grandezas não são compostas de minúsculos átomos distintos. Depois da descoberta, Hipaso desaparece misteriosamente no mar, possivelmente afogado por seus irmãos pitagóricos." | ALEXANDER, 2016, p.304 |
| Séc V a.C. | Zenão de Eleia | paradoxos de Zenão | "Zenão de Eleia propõe diversos paradoxos mostrando que infinitesimais levam a contradições lógicas. Depois disso, os infinitesimais são evitados pelos matemáticos antigos" | ALEXANDER, 2016, p.304 |
| Séc III a.C. | Euclides | Elementos | "Euclides propõe seu muito influente tratado sobre geometria, os Elementos, que cuidadosamente evita os infinitesimais. O tratado serve de modelo para o | ALEXANDER, 2016, p.304 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | estilo e a prática da matemática por quase 2 mil anos” | |
| 250 a.C | Arquimedes | infinitesimais | “Arquimedes de Siracusa foge do caminho geral e faz experimentos com infinitesimais. Chega a notáveis resultados referentes às áreas e aos volumes englobados por figuras geométricas” | ALEXANDER, 2016, p.304 |
| 1517 | Martinho Lutero | | “Martinho Lutero lança a Reforma pregando uma cópia de suas 95 teses na porta da igreja do castelo em Wittenberg. As subsequentes lutas entre católicos e protestantes prosseguem por dois séculos.” | ALEXANDER, 2016, p.304 |
| 1540 | Inácio de Loyola | | “Inácio de Loyola funda a Companhia de Jesus, popularmente conhecida como “jesuítas”, ordem dedicada a reviver doutrinas católicas e restaurar a autoridade da Igreja” | ALEXANDER, 2016, p.305 |
| 1544 | Arquimedes | infinitesimais | “Uma tradução latina das obras de Arquimedes é publicada em Basileia, tornando, pela primeira vez, o estudo dos infinitesimais amplamente acessível aos eruditos” | ALEXANDER, 2016, p.305 |
| 1560 | | | “Cristóvão Clávio começa a lecionar no Collegio Romano dos jesuítas. Cria a tradição matemática na ordem, sobre o leito da geometria euclidiana” | ALEXANDER, 2016, p.305 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Séc XVI e XVII | | infinitesimais | “Revive o interesse pelos infinitesimais entre os matemáticos europeus.” | ALEXANDER, 2016, p.305 |
| 1601-1615 | | infinitesimais | “Os 'revisores gerais' jesuítas, responsáveis por reger as doutrinas, produzem uma sequência de denúncias sobre os infinitesimais” | ALEXANDER, 2016, p.305 |
| 1616 | Galileu | | “Os jesuítas entram em choque com Galileu por causa de sua defesa do sistema de Copérnico, mas também pelo uso de infinitesimais. Galileu baixa o tom de sua retórica, mas aguarda a oportunidade para reabrir os debates” | ALEXANDER, 2016, p.305 |
| 1616 | Luca Valerio | | “O matemático Luca Valerio fica do lado dos jesuítas contra seu amigo Galileu. Ele morre em desgraça pouco depois” | ALEXANDER, 2016, p.305 |
| 1618 | | | “Irrompe a Guerra dos Trinta Anos, lançando católicos contra protestantes” | ALEXANDER, 2016, p.305 |
| 1623 | Galileu | | “Maffeo Barberini, amigo de Galileu, torna-se o papa Urbano VIII e se alinha abertamente a Galileu e seus seguidores” | ALEXANDER, 2016, p.305 |
| 1623-1631 | | | “Uma “era liberal” de ouro em Roma. Ascendência galileana” | ALEXANDER, 2016, p.305 |
| 1625-1627 | Grégoire de Saint-Vincent | | “O matemático jesuíta Grégoire de Saint-Vincent é proibido por seus superiores de publicar um trabalho considerado proximo | ALEXANDER, 2016, p.305 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | demais dos infinitesimais” | |
| 1628 | Hobbes | | “Thomas Hobbes encontra uma prova geométrica pela primeira vez, durante uma viagem pela Europa” | ALEXANDER, 2016, p.306 |
| 1629 | Cavalieri | | “Bonaventura Cavalieri é nomeado professor de matemática na Universidade de Bolonha” | ALEXANDER, 2016, p.306 |
| Década de 1630 | Torricelli | | “Evangelista Torricelli desenvolve seus métodos infinitesimais, mas não os publica. | ALEXANDER, 2016, p.306 |
| 1631 | | | “O rei protestante Gustavo Adolfo, da Suécia, derrota os exércitos do Sacro Império Romano na Batalha de Breitenfeld, durante a Guerra dos Trinta Anos. Sua vitória altera o equilíbrio de poder na Europa” | ALEXANDER, 2016, p.306 |
| 1631 | | | “Sob pressão dos tradicionalistas, Urbano renuncia às suas políticas liberais e restaura as graças dos jesuítas. Fim da ascendência galileana” | ALEXANDER, 2016, p.306 |
| 1632 | | | “Os revisores gerais jesuítas emitem a condenação mais abrangente dos infinitesimais até aquele momento. Decretos similares se sucedem nos anos posteriores” | ALEXANDER, 2016, p.306 |
| 1632 | | | “O geral jesuíta Mutio Vitelleschi escreve às províncias para | ALEXANDER, 2016, p.306 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | denunciar os infinitesimais” | |
| 1632-1633 | Galileu | | “Galileu é acusado de heresia, julgado pela Inquisição e condenado a passar o resto da vida em prisão domiciliar, o que ele cumpre em sua villa em Arcetri, nos arredores de Florença” | ALEXANDER, 2016, p.306 |
| 1635 | Cavalieri | | “Cavalieri publica Geometria indivisibilibus, que se torna a obra-padrão sobre infinitesimais em toda a Europa” | ALEXANDER, 2016, p.306 |
| 1638 | Galileu/Cavalieri | | “É publicado em Leiden, na Holanda, Discursos sobre duas novas ciências, de Galileu. O livro debate extensivamente os infinitesimais e louva Cavalieri como “novo Arquimedes” | ALEXANDER, 2016, p.306 |
| 1640-1660 | | | “O Interregno. A Guerra Civil entre o rei Carlos I e o Parlamento leva à execução do rei em 1649 e ao estabelecimento de uma ditadura militar sob o comando de Cromwell.” | ALEXANDER, 2016, p.306 |
| 1640 | Hobbes | | “Hobbes, adepto da realeza, foge para Paris e junta-se à corte de Carlos I no exílio, onde serve como tutor matemático do príncipe de Gales, futuro Carlos II” | ALEXANDER, 2016, p.307 |
| 1641 | Guldin | | “O matemático jesuíta Paul Guldin publica De centro gravitatis, com um ataque a Cavalieri e uma crítica sistemática a seu método” | ALEXANDER, 2016, p.307 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1642 | Torricelli | | “Torricelli é nomeado sucessor de Galileu na corte dos Médici e professor de matemática na Academia de Florença” | ALEXANDER, 2016, p.307 |
| 1642 | Hobbes | De cive | “Hobbes publica sua primeira obra filosófica, De cive, na qual argumenta que somente uma monarquia absoluta pode salvar a sociedade humana do caos e da guerra civil” | ALEXANDER, 2016, p.307 |
| 1644 | Torricelli | Opera Geometrica | “Torricelli publica sua obra mais importante sobre infinitesimais, Opera geometrica” | ALEXANDER, 2016, p.307 |
| 1644 | Wallis | | “John Wallis é nomeado secretário da Assembleia dos Sacerdotes de Westminster” | ALEXANDER, 2016, p.307 |
| 1645 | Wallis | | “Wallis se junta a outros entusiastas da ciência para realizar e debater experimentos científicos. O grupo, conhecido como “Colégio Invisível”, reúne-se regularmente durante anos” | ALEXANDER, 2016, p.307 |
| 1647 | Cavalieri | Exercitationes geometricae sex | “Cavalieri responde a Guldin em sua última obra, Exercitationes geometricae sex. Morre pouco depois.” | ALEXANDER, 2016, p.307 |
| 1647 | Torricelli | | Morte de Torricelli | ALEXANDER, 2016, p.307 |
| 1648 | | | “A Paz de Vestfália põe fim à Guerra dos Trinta Anos” | ALEXANDER, 2016, p.307 |
| 1648 | Mario Bettini | Aerarium philosophiae mathematicae | “O matemático jesuíta Mario Bettini denuncia os infinitesimais em seu livro Aerarium | ALEXANDER, 2016, p.307 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | philosophiae mathematicae” | |
| 1648 | Pietro Sforza Pallavicino | | "Pietro Sforza Pallavicino, jesuíta da nobreza e futuro cardeal, é forçado a retratar-se publicamente de sua defesa dos infinitesimais". | ALEXANDER, 2016, p.307 |
| 1649 | Carlos I | | Carlos I da Inglaterra é executado. | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1649 | Wallis | | Wallis é nomeado professor saviliano de matemática em Oxford. | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1649 | Vicenzo Carafa | | O geral superior jesuíta Vincenzo Carafa escreve às províncias para denunciar os infinitesimais. | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1651 | André Tacquet | *Cylindricorum et annularium libri IV* | O matemático jesuíta André Tacquet, em *Cylindricorum et annularium libri IV*, declara que os infinitesimais devem ser destruídos, ou então a matemática será destruída | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1651 | Hobbes | Leviatã | Hobbes publica Leviatã, no qual advoga por um Estado totalitário. Fundamenta seu raciocínio na geometria. | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1651 | | | Os jesuítas publicam uma lista de doutrinas permanentemente banidas, incluindo os infinitesimais | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1652 | Hobbes | | Hobbes se indispõe com a corte em Paris e volta à Inglaterra | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1655 | Wallis | *Sobre as seções cônicas* | Wallis publica Sobre as seções cônicas | ALEXANDER, 2016, p.308 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1655 | Hobbes | *De Corpore* | Hobbes publica De corpore, que inclui "provas" de antigos problemas não resolvidos, como o da quadratura do círculo. | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1655 | Wallis | *Elenchus Geometriae Hobbinae* | Wallis publica Elenchus geometriae Hobbianae, em que ridiculariza Hobbes e aponta seus erros matemáticos | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1656 | Wallis | *Aritmética do infinito* | Wallis publica Aritmética do infinito | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1656 | Hobbes | *Seis lições para os professores de matemática* | Hobbes responde com Seis lições para os professores de matemática, em que revida atacando o uso que Wallis faz dos infinitesimais, que considera sem sentido e indutores de erros, não da verdade | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1657-1679 | Hobbes e Wallis | | Hobbes e Wallis criticam-se, ridicularizam-se e agridem-se mutuamente em dezenas de livros, panfletos e ensaios. | ALEXANDER, 2016, p.308 |
| 1658-1668 | Stefano degli Angeli | | Stefano degli Angeli, professor de matemática na Universidade de Pádua, publica oito trabalhos sobre infinitesimais, todos eles ridicularizando abertamente as críticas jesuítas da matemática infinitesimal | ALEXANDER, 2016, p.309 |
| 1660 | Carlos II | | Carlos II é reconduzido ao trono inglês | ALEXANDER, 2016, p.309 |
| 1662 | | | O "Colégio Invisível" recebe licença de Carlos II e torna-se a Royal Society de Londres | ALEXANDER, 2016, p.309 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1665 | Newton | | O jovem Isaac Newton faz experimentos com infinitesimais e desenvolve uma técnica que será conhecida como cálculo. | ALEXANDER, 2016, p.309 |
| 1668 | | | A ordem monástica dos jesuatas, lar de Cavalieri e Angeli é suprimida por decreto papal | ALEXANDER, 2016, p.309 |
| 1675 | Leibniz | | Gottfried Wilhelm Leibniz desenvolve sua própria versão do cálculo | ALEXANDER, 2016, p.309 |
| 1679 | Hobbes | | Morre Hobbes, matematicamente desacreditado e politicamente isolado. | ALEXANDER, 2016, p.309 |
| 1684 | Leibniz | *Acta Editorum* | Leibniz publica seu primeiro artigo acadêmico sobre o cálculo na revista Acta Eruditorum | ALEXANDER, 2016, p.309 |
| 1687 | Newton | *Principia Mathematica* | Newton publica Principia mathematica, revolucionando a física e estabelecendo a primeira teoria moderna acerca do sistema solar. A obra baseiase no cálculo infinitesimal e contém a primeira exposição do método de Newton | ALEXANDER, 2016, p.309 |
| 1703 | Wallis | | Morre Wallis, enaltecido como matemático de primeira grandeza, precursor do cálculo e fundador da Royal Society | ALEXANDER, 2016, p.309 |

**ANEXO B – LINHA DO TEMPO BARDI, 2008.**

| **Ano** | **Quem** | **nasc.morte** | **Obra** | **Texto** | **Fonte** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1684 | Leibniz | 1646-1716 | cálculo | "Embora tenha sido o Segundo cronologicamente, foi o primeiro a publicar seu sistema de cálculo, o que fez em dois trabalhos que datam de 1684 e 1686". | BARDI, 2008, p.12. |
| 1704 | Newton | 1642-1726 | Opticks | publicação e impressão de *Opticks* | BARDI, 2008, p.17 |
| 1687 | Newton | 1642-1726 | Principia | publicação de *Principia Mathematica Philosophie Naturalis* | BARDI, 2008, p.19 |
| 1695 | John Wallis | 1616-1703 | | "não posso, de forma alguma, admitir sua desculpa por não publicar seu tratado sobre luz e cor" | BARDI, 2008, p.20 |
| 1672 | Newton | 1642-1726 | *Nova teoria sobre a luz e cores* | Philosophical Transactions de 19 de fevereiro de 1672 | BARDI, 2008, p.20 |
| 1703 | Newton | 1642-1726 | | "Passados mais de trinta anos, depois que Hooke morreu em março de 1703, Newton foi eleito presidente da Royal Society em 30 de novembro de 1703, e foi quando ocupava este cargo que publicou *Ótica"*. | BARDI, 2008, 21 |
| 1665 | Newton | 1642-1726 | Cálculo | "Newton havia descoberto o cálculo durante seus anos mais criativos, 1665 e 1666, quando, estudante da Universidade de Cambridge, retirou-se para a propriedade rural da família para escapar de uma epidemia de peste bubônica especialmente grave". | BARDI, 2008, p.21 |
| 1672 | Leibniz | 1646-1716 | Cálculo | "Leibniz descobriu o cálculo no decorrer do prolífico espaço de tempo que passou em Paris, entre 1672 e 1676. Embora fosse um advogado e não tivesse nenhum treinamento formal em matemática, mostrava uma incrível tendência para ela. Em alguns poucos anos conseguiu harmonizar todas as descobertas matemáticas de seus contemporâneos para conceber o cálculo. E uma vez que Leibniz preferia explicações simples | BARDI, 2008, p.25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | ao jargão, inventou, para complementá-lo, um sistema de registro original e engenhoso”. | |
| 1684 | Leibniz | 1646-1716 | *acta eruditorum* | “dois artigos publicados em 1684 e 1686. Leibniz criou a palavra 'cálculo' - *calculus* era um tipo de pedra que os romanos usavam para fazer contas”. | BARDI, 2008, p.25 |
| 1646 | Leibniz | 1646-1716 | | “Leibniz nasceu às 6h45 do 1o de julho de 1646, em uma casa próxima da Universidade de Leipzig. Era filho de Friedrich Leibniz e Catarina Scmuck, ambos pessoas de boa moral e bem educadas. Catarina era filha de um 'celebrado' advogado em Leipzig, e Friedrich era professor de ética e vice-presidente da faculdade de filosofia da universidade”. | BARDI, 2008, p.33 |
| 1643 | Newton | 1642-1726 | | “Embora Newton tenha nascido no mesmo ano em que a guerra civil começou, outra coincidência é lembrada com mais frequência por seus biógrafos - que Newton nasceu no mesmo ano em que morreu Galileu. [...]Há, entretanto, um fato inconveniente para qualquer um que acate essa noção romântica, pois Newton nasceu em 4 de janeiro de 1643, segundo o calendário gregoriano - o ano seguinte ao da morte de Galileu. A Inglaterra não adotou esse calendário no século XVII, porque os protestantes resistiam ao que consideravam uma contaminação católica”. | BARDI, 2008, p.37 |
| | John Wallis | 1616-1703 | Arithmetica infinitorum | “Seu livro, A*rithmetica infinitorum*, mostra alguns dos primeiros passos dados em direção ao cálculo. Nele, ele antevê o cálculo por prognosticar as perguntas a que o método viria a responder e discute as idéias geométricas de matemáticos que o haviam precedido e realizado algum trabalho nesse sentido. Lendo o livro de Wallis sobre as séries infinitas, Newton teve a inspiração para prolongar seu trabalho e inventar um método geral para analisar as curvas | BARDI, 2008, p.46 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | geométricas utilizando a álgebra - o cálculo, em essência". | |
| 1664 | Newton | 1642-1726 | | Newton é eleito membro da Trinity College em 28 de abril de 1664. | BARDI, 2008, p.46 |
| | Voltaire | 1694-1778 | Lenda da maçã | "Esta lenda é ainda uma das mais duradouras da história da ciência - ainda que provavelmente seja totalmente inventada. Talvez a única coisa verdadeira sobre ela é que Newton adorava maçãs. Essa história não é mais verdadeira do que aquela sobre os jacarés nos esgotos de Nova York, mas tem perdurado através dos séculos. Voltaire popularizou a lenda quando escreveu sobre Newton e a maçã quase 75 anos depois. A famosa história de Voltaire diz que Newton passeava num jardim quando viu uma maçã cair do galho de uma macieira ao chão. Isso, escreveu Voltaire, fez Newton meditar profundamente sobre a causa da queda da maçã". | BARDI, 2008, pp.49-50 |
| | Voltaire | 1694-1778 | Cálculo | "É a arte de enumerar e medir com exatidão uma coisa cuja existência não pode ser concebida". | BARDI, 2008, p.51 |
| 1669 | Newton | 1642-1726 | *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* | Sobre a análise por meio de equações tendo um número infinito de termos. | BARDI, 2008, p.53 |
| 1670-1671 | Newton | 1642-1726 | *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* | "Um tratado dos métodos das fluxões e das séries. De Analysi e Tractatus "[...]foram os primeiros livros a incluir o cálculo de Newton - na verdade, os primeiros de todos os textos a descrever o cálculo. O problema foi que ele não os publicou". | BARDI, 2008, p.53 |
| 1666 | | | | Grande Incêndio de Londres | BARDI, 2008, p.53 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1672 | Hooke | 1635-1703 | Embate com Hooke. | "O artigo de Newton foi lido para a sociedade em 8 de fevereiro de 1672". | BARDI, 2008, pp.61-64 |
| 1672 | Huygens | | | "Sua jornada no caminho da descoberta do cálculo começou no outono de 1672, quando conheceu Christian Huygens. Físico e matemático holandês, Huygens era filho de uma figura literária e diplomática famosa na Holanda". | BARDI, 2008, p.67 |
| | Cavalieri | | | "Um outro livro que recomendara fora escrito pelo matemático jesuíta belga Gregory St. Vincent, livro que Leibniz tomou por empréstimo da Biblioteca Real de Paris e começou a ler logo que Huygens o sugeriu. St. Vincent imaginava uma área geométrica como sendo a soma de um número infinito de retângulos infinitamente delgados. Este trabalho antecipava o cálculo integral, o segundo lado da moeda do cálculo que pode ser usado para determinar a área ou o volume de uma forma geométrica pela aplicação de um conjunto de truques algébricos que, em essência, somam todos esses minúsculos retângulos". | BARDI, 2008, p.79 |
| 1673 | Leibniz | 1646-1716 | Membro da Royal Society | "Apesar do ataque de Hooke, a Royal Society pouco depois elegeu Leibniz como seu membro em 19 de abril de 1673, com o apoio de Oldenburg". | BARDI, 2008, p.85 |
| 1635 | Cavalieri e Torricelli | | | "Leibniz leu o livro de Bonaventura Cavalieri, Geometria, publicado em 1635, no qual este havia desenvolvido novos métodos de analisar formas geométricas — um método para achar áreas e volumes de formas geométricas que podia ser considerado um precursor do cálculo. Leibniz leu também Evangelista Torricelli, que desenvolveu processos para determinar áreas sob curvas parabólicas e forneceu uma clara explicação dos mesmos". | BARDI, 2008, p.89 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Leibniz | 1646-1716 | | "(Leibniz) Leu ainda Gilles Personne de Roberval e Blaise Pascal, cujo trabalho sobre indivisíveis e infinitesimais antecipou o cálculo integral. Leibniz soube do trabalho de John Hudde, que em 1659 havia produzido sua própria regra para construir tangentes e para achar geometricamente os máximos e mínimos de equações algébricas. E leu René François de Sluse, que havia estabelecido uma regra para se construir tangentes a um ponto de uma curva". | BARDI, 2008, p.89 |
| 1673 | Leibniz | 1646-1716 | Cálculo | “Leibniz percebeu que o trabalho de Pascal podia ser combinado com a regra para a tangente de Sluse e aplicado a qualquer curva geométrica, e não apenas ao círculo. Foi isso o que o levou ao cálculo”. | BARDI, 2008, p.89 |
| 1675 | Leibniz | 1646-1716 | Símbolo da integral | "Além disso, Leibniz inventou os símbolos usados nos cálculos diferencial e integral, como os conhecemos hoje. Em 29 de outubro, por exemplo, ele criou o símbolo da integração, vista por ele como soma. De fato, esta é a razão por que ele lhe deu o símbolo '∫', que é um S estilizado, inventado por ele. O novo simbolismo propiciou um modo generalizado para tratar problemas infinitesimais do cálculo e iria demonstrar ser muito útil para sua divulgação". | BARDI, 2008, p.102 |
| 1682 | Leibniz e Menck | | *acta eruditorum* | "Foi a primeira revista científica editada na Alemanha, e Leibniz estava intimamente associado a ela, tendo nela publicado seus trabalhos até sua morte em 1716. Isso foi muito importante para Leibniz, que tinha encontrado algumas dificuldades para conseguir publicação e havia tentado repetidas vezes durante três anos, de 1677 a 1680, conseguir que um dos seus trabalhos matemáticos fosse publicado em Paris e Amsterdam sem sucesso. Mas agora podia publicar livremente nesse novo órgão, e muitas vezes ele contribuiu com artigos para ele". | BARDI, 2008, p.131 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1684 | Leibniz | 1646-1716 | Nova Methodus Pro Maximus et Minimis | "Em outubro de 1684, exatamente na fase de maior preocupação com seu projeto de mineração, ele publicou um artigo cujo curto nome é “Nova Methodus Pro Maximis et Minimis” (Novo método para máximos e mínimos) nas Acta Eruditorum. Essa foi a primeira publicação relativa ao cálculo a sair em qualquer parte do mundo, e nela Leibniz estabeleceu as regras para diferenciação". | BARDI, 2008, p.132 |
| 1685 | John Craig | | *The Method of Determining the Quadratures of Figures* | “Um escocês, John Craig, que vivia em Cambridge e era amigo de Newton, publicou a primeira obra sobre o cálculo na Inglaterra em 1685, um ano após Leibniz ter publicado seu artigo. Craig escreveu um livro, The Method of Determining the Quadratures of Figures, que descrevia o trabalho de Leibniz sobre diferenciais e usava a notação deste. Isso efetivamente apresentou a Inglaterra ao cálculo — ou pelo menos a maior parte da Inglaterra, já que Newton vinha escondendo seu próprio método por duas décadas”. | BARDI, 2008, p.138 |
| 1698 | Johann Bernoulli | | Integral | "Na realidade, Leibniz nunca pretendeu chamar sua “geometria recôndita” de cálculo integral. O termo “integral” foi usado pela primeira vez num artigo de um dos irmãos Bernoulli em 1690, e “cálculo integral” apareceu como um termo num artigo escrito por Johann Bernoulli juntamente com Leibniz em 1698". | BARDI, 2008, p.139 |
| 1696 | L'Hôspital | | *Analyse des Infiniment Petits* | "O cálculo também já estava em movimento. Em 1691, Johann Bernoulli foi para Paris e tornou-se professor do marquês de l’Hôpital. Esta foi uma ligação muito útil, porque l’Hôpital iria escrever alguns anos mais tarde, em 1696, um dos primeiros compêndios escritos sobre o cálculo, Analyse des Infiniment Petits (“Análise das quantidades infinitesimais”), com grande ajuda de Bernoulli”. | BARDI, 2008, p.157 |

**ANEXO C – LINHA DO TEMPO DE BOYER, 1974.**

| Ano | Quem | nasc.morte | Obra | Texto | Fonte |
|---|---|---|---|---|---|
| 1642 | Newton | 1642-1726 | Nasci-mento | Isaac Newton, o sucessor de Bar-row, nasceu prematuramente no dia de Natal de 1642, ano da morte de Galileu. | BOYER, 1974, p.287 |
| 1726 | Newton | 1642-1726 | autoria | "Na primeira edição dos Princi-pia Newton reconheceu que Leibniz estava de posse de um método semelhante, mas na ter-ceira edição em 1726, após a amarga disputa entre aderentes dos dois homens quanto à inde-pendência e prioridade da desco-berta do cálculo, Newton omitiu a referência antedata a de Leibniz de cerca de dez anos, mas a des-coberta de Leibniz foi indepen-dente da de Newton". | BOYER, 1974, p.292 |
| 1726 | Newton | 1642-1726 | autoria | "O azedume do sentimento naci-onalista chegou a tal ponto que em 1726, uma década depois da morte de Leibniz, Newton retirou da terceira edição dos Principia toda referência ao fato de Leibniz ter tido um método no Cálculo semelhante ao de Newton" | BOYER, 1974, p.303 |
| | Zenão | | paradoxos de Zenão | "[...] antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disto, deve percorrer o primeiro quarto; e antes disso, o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões. O cor-redor que quer pôr-se em movi-mento precisa fazer infinitos con-tatos num tem-po finito; mas é impossível exaurir uma coleção infinita, logo é impossível iniciar o movimento". | BOYER, 1974, p.55 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Zenão | | paradoxos de Zenão | "Aqui Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Pois, quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com o resultado que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga". | BOYER, 1974, p.55 |
| 1646 | Torricelli | | Máximos e mínimos | "Torricelli não mencionou o fato de Roberval ter chegado a esses resultados antes dele, e por isso em 1646 Roberval escreveu uma carta acusando Torricelli de plágio, de-le e de Fermat (sobre máximos e mínimos). É claro agora que a prioridade na descoberta cabe a Roberval, mas a prioridade de publicação é de Torricelli, que provavelmente redescobriu a área e a tangente independentemente". | BOYER, 1974, p.260 |
| | Torricelli | | TFC | "Torricelli percebeu o caráter inverso dos problemas de quadratura e tangente. Se ti-vesse vivido mais é possível que se tornasse o inventor do cálculo; mas sua vida ter-minou prematuramente em Florença poucos dias antes de completar trinta e nove anos". | BOYER, 1974, pp.261-262 |
| 1665 | Newton | 1642-1726 | | "Newton também começou a pensar, em 1665, na taxa de variação, ou fluxo, de quantidades variáveis continuamente, ou fluentes - tais como comprimentos, áreas, volumes, distâncias, temperaturas. Daí então Newton ligou esses dois problemas - das séries inifinitas e das taxas de variação - como 'meu método' ". | BOYER, 1974, p.287 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1669 | Newton | 1642-1726 | De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas | "O próprio Newton nunca publicou o teorema binomial, nem o provou; mas redigiu e finalmente publicou várias exposições de sua análise infinita. A primeira dessas, cronologicamente, foi a *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, composta em 1669 com base em idéias adquiridas em 1665-1666, mas publicada só em 1711. | BOYER, 1974, p.289 |
| 1687 | Newton | 1642-1726 | Principia | " A primeira exposição do cálculo que Newton imprimiu apareceu em 1687 em *Philosophiae naturalis principia mathematica* | BOYER, 1974, p.291 |
| | Newton | 1642-1726 | TFC | " Newton não foi o primeiro a diferenciar ou integrar, nem a ver a relação entre essas operações no teorema fundamental do cálculo. Sua descoberta consistiu na consolidação desses elementos num algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas, sejam trancendentes". | BOYER, 1974, p.292 |
| 1684 | Leibniz | | autoria | "Além disso, Leibniz tem prioridade de publicação, pois imprimiu uma exposição de seu cálculo em 1684 na Acta Eruditorum, espécie de ‘periódico científico’ mensal que fora fundado só dois anos antes". | BOYER, 1974, p.292 |
| 1684 | Leibniz | | *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, que nec irrationales quantitates moratur* | "A primeira exposição do cálculo diferencial foi publicada por Leibniz em 1684 sob o longo mas significativo título de *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, que nec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais)". | BOYER, 1974, p.296 |
| | Newton/Leibniz | | notação | "O raciocínio de Newton estava mais perto dos modernos fundamentos do cálculo que o de Leibniz, mas a plausabilidade da atitude de Leibniz e a eficácia de | BOYER, 1974, p.296 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | sua notação diferencial produziram uma maior aceitação das diferenciais que dos fluxos". | |
| | Leibniz | | notação | "No entanto, os símbolos de Leibniz para diferenciação e integração são seus maiores triunfos no campo da notação. Leibniz não é responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra 'função', praticamente no mesmo sentido em que é usada hoje". | BOYER, 1974, p.297 |
| | Hooke | | embate com Hooke e publicação do cálculo | "Cerca de quinze anos após o aparecimento dos Principia Hooke morreu, e então, finalmente, a aversão de Newton à publicação parece ter diminuído um pouco”. | BOYER, 1974, p.300 |

**ANEXO D – LINHA DO TEMPO DE EVES, 2004.**

| **Ano** | **Quem** | **nasc. morte** | **Obra / tópico** | **Texto** | **Fonte** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1615 | Kepler | | *Sterome-tria doli-orum vi-norum* | "Kepler foi um dos precursores do cálculo. Para calcular as áreas envolvidas em sua se-gunda lei dos movimentos planetários, teve de recorrer a uma forma tosca de cálcu- lo integral. e também em seu Stereometria doli-orum vinorum (Geometria sólida dos barris de vinho, 1615) aplicou processos de inte-gração toscos para achar os volumes de 93 sólidos obtidos pela rotação de segmentos de secções cônicas em torno de um eixo de seu plano. [...] É bem possível que esse trabalho de Kepler tenha influenciado cavalieri, que deu um passo à frente no cálcu- lo infinitesi-mal com seu método dos indivisíveis". | EVES, 2004, p.358 |
| 1676 | Leibniz | | *Corte de Hanover* | "Daí para a frente, pelo resto de sua vida, Leibniz esteve engajado no serviço di-plomático, primeiro a serviço do eleitor de Mainz e depois, de 1676 até sua morte, a ser-viço da corte de Hanover". | EVES, 2004, p.442 |
| 1682 | Leibniz | | *Acta Eru-ditorum* | "em 1682 ele e Otto Mencke fundaram uma revista chamada Acta eruditorum da qual se tornou o editor-chefe. Muitos de seus artigos matemáticos, em grande parte escritos no período de 1682 a 1692, apareceram nessa revista. A Acta eruditorum alcançou grande circulação na europa continental. em 1700 Leibniz criou a Academia de ciências de Berlim e posteriormente se empenhou em criar academias semelhantes em Dresden, Viena e São Petersburgo" | EVES, 2004, p.443 |
| 1672 - 1673 | Leibniz | | símbolo integral | "Leibniz inventou o seu cálculo entre 1673 e 1676. usou pela primeira vez o símbolo de integral, um *S* alongado, derivado da pri-meira letra da palavra latina *summa* (soma) em 29 de outubro de 1675. | EVES, 2004, p.443 |
| 1684 | Leibniz | | 1o artigo sobre o cálculo | "Seu primeiro artigo sobre o cálculo diferen-cial só apareceu em 1684". | EVES, 2004, p.443 |
| 1671 | Newton | 1642-1727 | *Method of Fluxi-ons* | "Por volta da mesma época Newton fez uma descoberta matemática mais importante, o método dos fluxos, cuja essência ele comuni- | EVES, 2004, p.438-439 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | cou a Barrow em 1669. Seu Method of Fluxions, embora escrito em 1671, só foi publicado em 1736". | |
| | Barrow | | *Lectiones* | "Apesar de indícios tênues que apontam noutra direção, em geral considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa importante descoberta é conhecida como *teorema fundamental do cálculo* e aparece enunciada e provada nas *Lectiones* de Barrow". | EVES, 2004, p.435 |
| 1642 | Newton | 1642-1727 | | "Isaac Newton nasceu na aldeia de Woolsthorpe no dia de natal de 1642, ano do passamento de Galileu". | EVES, 2004, p.436 |
| 1665 | | | | "Do final do verão de 1665 até o final do verão de 1667, salvo por um breve período de reabertura da metade de março à metade de junho de 1666, a universidade de cambridge esteve com suas portas praticamente fechadas, devido a uma violenta peste bubônica. Geralmente se relata que foi em 1665, durante o primeiro ano de fechamento da universidade, quando se encontrava em sua cidade natal, que Newton desenvolveu o seu cálculo (até o ponto em que lhe era possível achar a tangente a uma curva num de seus pontos e o raio de curvatura respectivo)". | EVES, 2004, p.436 |
| 1665 | Newton | | cálculo | "Pesquisas recentes mostram, porém, que esse relato é um mito, posteriormente disseminado pelo próprio Newton para ajudá-lo a ganhar a primazia na questão da descoberta do cálculo e que essas descobertas não foram feitas antes de sua estada em cambridge, em 1666, durante o breve período de reabertura da universidade" | EVES, 2004, p.436 |
| | Hooke | | Disputa com Hooke | "Acusações ciumentas de Hooke, com os desgostos subsequentes, quase o fizeram abandonar o terceiro livro, do que foi dissuadido por Halley". | EVES, 2004, p.438 |
| 1687 | Newton/Halley | | *Principia* | O tratado completo, intitulado *Philosophiae naturalis principia mathematica*, foi publicado, a expensas de Halley, na metade de 1687, sendo sua repercussão na europa imediata e impressionante. | EVES, 2004, p.437 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1692 | Newton | 1642-1727 | Alquimia | "(...) em 1692 foi acometido de uma curiosa doença que durou quase dois anos e que implicava uma certa forma de distúrbio mental. A maior parte de sua vida daí para a frente foi dedicada à química, à alquimia e à teologia". | EVES, 2004, p.437 |
| 1696 | Newton | 1642-1727 | Casa da Moeda | "(...) em 1696 foi indicado inspetor da casa da Moeda, sendo promovido a diretor dessa instituição em 1699". | EVES, 2004, p.437 |
| 1703 | Newton | 1642-1727 | Presidente Royal Society | "(...) em 1703 foi eleito presidente da Royal Society, reelegendo-se para essa posição anualmente até sua morte". | EVES, 2004, p.437 |
| 1704 | Newton | 1642-1727 | *Opticks* | *"Opticks*, com dois apêndices, *Cubic Curves* e *Quadrature and Rectification of Curves by the Use of Infinite Series".* | EVES, 2004, p.438 |
| 1705 | Newton | 1642-1727 | Título de Cavaleiro | | EVES, 2004, p.437 |
| 1707 | Newton | 1642-1727 | *Arithmetica Universalis* | | EVES, 2004, p.438 |
| 1711 | Newton | 1642-1727 | *Analysis per series, Fluxiones, etc. e Methodus differentialis* | | EVES, 2004, p.438 |
| 1727 | Newton | 1642-1727 | Morte | "Newton faleceu em 1727 aos 84 anos de idade, após uma demorada e penosa doença. Seu corpo foi enterrado na Abadia de Westminster". | EVES, 2004, p.438 |
| 1729 | Newton | 1642-1727 | *Lectiones Opticae* | | EVES, 2004, p.438 |
| 1736 | Newton/J.Colson | | *Method of Fluxions and Infinite Series* | *"The Method of Fluxions and Infinite Series*, traduzido do original latino de Newton por J. colson em 1736. caberia mencionar também duas importantes cartas escritas a H. Oldenburg, secretário da Royal Society, nas quais Newton descreve alguns de seus métodos". | EVES, 2004, p.438 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1696 | L'Hospital | 1661-1704 | 1o texto de Cálculo | "O primeiro texto de cálculo foi publicado em 1696; seu autor, o marquês de L'Hospital (1661-1704), por um acordo singular, publicou as lições que recebera de seu professor particular, Johann Bernoulli. Nesse livro encontra-se a chamada *regra de L'Hospital*, para determinar o limite de uma fração cujo numerador e cujo denominador tendem simultaneamente para zero". | EVES, 2004, p.464 |
| 1696 | Johann Bernoulli | | *Calculus integralis* | "(...) em 1696 Leibniz e Johann Bernoulli acordaram em chamá-lo de *calculus integralis*". | EVES, 2004, pp.464-465 |

**ANEXO E – LINHA DO TEMPO DE ROQUE, 2012.**

| Ano | Quem | nasc. morte | Obra | Texto | Fonte |
|---|---|---|---|---|---|
| | Fermat | 1601-1665 | *Método para determinar máximos e mínimos e tangentes a linhas curvas* | "Junto com a Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos, Fermat havia enviado a Mersenne a tradução de Lugares geométricos planos, de Apolônio, e mais outro texto, de sua autoria, *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum et des tangentes aux lignes courbes* (Método para determinar máximos e mínimos e tangentes a linhas curvas). Foi por essa obra que alguns matemáticos do círculo de Mersenne começaram a admirar Fermat, caso de Roberval, que ajudou a divulgar o talento desse matemático até então desconhecido. | ROQUE, 2012, p336 |
| | Arquimedes | | | "Arquimedes havia determinado tangentes a diversas curvas, como a espiral, usando os mesmos movimentos que serviram para defini-la. No entanto, a ideia antiga de tangente dizia respeito ao comportamento de retas com relação a curvas dadas, definidas de modo geométrico". | ROQUE, 2012, p337 |
| | Fermat | 1601-1665 | | "Fermat apresentou, de modo independente, uma maneira completamente distinta para encontrar tangentes, justificada por referências a Pappus e Viète". | ROQUE, 2012, p340 |
| | Fermat | 1601-1665 | | "[...] um procedimento análogo pode ser aplicado a qualquer curva, incluindo aquelas que não são algébricas, o que não ocorre com o método de Descartes. Por isso Fermat será mais citado quando os trabalhos sobre o cálculo infinitesimal de Leibniz e Newton começarem, na segunda metade do século XVII, a lidar com curvas mais gerais, incluindo as que serão ditas 'transcendentes'". | ROQUE, 2012, p341 |
| | | | cálculo | "A história do cálculo infinitesimal também recebe um tratamento retrospectivo. Apresentam- se diferentes técnicas que remontam aos paradoxos de Zenão, passando pelo método grego da “exaustão” e pelos métodos de Cavalieri para calcular áreas até chegar a Leibniz e Newton. Mas será que podemos afirmar que | ROQUE, 2012, p.342 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Leibniz e Zenão tinham o mesmo objeto de pesquisa?" | |
| | | | cálculo | "No entanto, como em grande parte eles foram motivados pelo advento do cálculo infinitesimal e pelas polêmicas envolvendo a legitimidade de seus procedimentos, este capítulo será dedicado ao seu desenvolvimento, ocorrido nos séculos XVII e XVIII, quando tais técnicas passaram a integrar o campo de pesquisas da análise matemática". | ROQUE, 2012, p.343 |
| | Fourier | 1768-1830 | | "Um problema físico, ligado à propagação do calor, foi fundamental nas discussões acerca da noção de função no século XIX. Os estudos a esse respeito foram iniciados por Fourier, matemático da virada do século XVIII para o XIX". | ROQUE, 2012, p.345 |
| 1630 | Roberval | 1602-1675 | | "Durante os anos 1630, Roberval desenvolveu uma técnica para encontrar tangentes baseada nas propriedades cinemáticas das curvas (descrita no Capítulo 5). Como ele identificava uma curva à trajetória de um ponto em movimento, a tangente (ou “tocante”) indicava a direção desse movimento em um certo ponto". | ROQUE, 2012, pp.346-347 |
| | Cavalieri | 1598-1647 | método dos indivisíveis | "Para obter esse resultado, Roberval usou o método dos indivisíveis, que havia sido formulado pelo aluno de Galileu chamado Bonaventura Cavalieri, autor de um modo geométrico para calcular áreas publicado em 1635. Essa técnica era baseada na decomposição de uma figura em tiras indivisíveis, pois Cavalieri argumentava que uma linha é composta de pontos, assim como um cordão é formado por contas; um plano é feito de linhas assim como uma roupa, de fios; e um sólido é composto de planos assim como um livro, de páginas. Logo, a área de uma figura seria dada pela soma de um número indefinido de segmentos de reta paralelos. O volume de um sólido seria a soma de um número indefinido de áreas paralelas, como vemos na Figura 2. Esses seriam, respectivamente, os indivisíveis de área e de volume". | ROQUE, 2012, pp.347 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Fermat e Pascal | | introdução das somas | "Além de Roberval, Fermat e Pascal utilizaram o método dos indivisíveis para encontrar áreas delimitadas por diferentes curvas. No entanto, foram propostas modificações importantes, constituindo-se um novo método dos indivisíveis no qual a área não era decomposta em um número infinito de linhas, mas concebida como a soma de um número indefinido de retângulos. Essa soma difere da área original por uma quantidade que pode ser tornada menor que qualquer quantidade dada. Surgiu, assim, uma nova maneira de calcular áreas por meio da aproximação de uma área por retângulos infinitamente finos, e essa ferramenta podia ser aplicada a qualquer figura curvilínea". | ROQUE, 2012, pp.348 |
| | Arquimedes | | Exaustão | "Há uma diferença fundamental entre essa técnica e o método de exaustão usado pelos gregos, entre eles Arquimedes, pois aqui não se usa nenhuma prova indireta para se chegar ao resultado final. Conforme visto no Capítulo 3, Arquimedes mostrava que duas áreas são iguais usando um raciocínio por absurdo, concluindo que a suposição de que uma é maior que a outra leva à contradição. Já no exemplo dado, o número de retângulos aumenta indefinidamente e considera- se uma aproximação da soma quando n se torna muito grande. Além disso, no caso dos gregos, o "cálculo" de uma área consistia em uma comparação entre áreas. Aqui, o objetivo é calcular uma área qualquer por meio de uma aproximação obtendo-se uma expressão analítica. Substituindo valores numéricos nessa expressão, tem-se o valor da área para cada caso particular. O procedimento de dupla redução ao absurdo, usado pelos antigos geômetras, era indireto, ao passo que o novo método permite obter a área diretamente". | ROQUE, 2012, pp.349 |
| | L'Hôspital | 1661-1704 | *Analyse des infiniments petits pour* | "Um dos primeiros a defender publicamente tal método foi o marquês de L'Hôpital, na obra que popularizou os métodos infinitesimais: Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes (Análise dos infinitamente pequenos para a compreensão das linhas | ROQUE, 2012, p.352 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | *l'intel-ligence des lignes courbes* | curvas), editada em 1696. No prefácio, L'Hôpital faz um histórico desse método, afirmando que Descartes foi o primeiro a deixar os antigos para trás, mas também cita Fermat, Barrow, Leibniz e Bernoulli". | |
| | | | cálculo | "A maior novidade introduzida na matemática por Newton e Leibniz reside no grau de generalidade e unidade que os métodos infinitesimais adquiriram com seus trabalhos. Os matemáticos já tinham um enorme conhecimento sobre como resolver problemas específicos do cálculo infinitesimal, mas não se dedicaram a mostrar a generalidade e a potencialidade das técnicas empregadas. Além disso, esses problemas eram tratados de forma independente e as semelhanças entre os métodos não eram ressaltadas". | ROQUE, 2012, pp.354-355 |
| 1684 | Leib-niz | 1646-1716 | *Acta Erudi-torum* | "Os artigos de Leibniz sobre o cálculo começaram a ser publicados a partir de 1684 em um jornal científico chamado Acta eruditorum (Ata dos eruditos). É desse ano um de seus textos mais importantes, introduzindo um novo método para encontrar máximos e mínimos". | ROQUE, 2012, p.355 |
| 1660 - 1670 | New-ton | 1643-1727 | Fluen-tes e Fluxões | "No final da década de 1660, isto é, antes mesmo do encontro entre Leibniz e Huygens, Newton já empregava procedimentos infinitesimais e, no início dos anos 1670, reformulou esses algoritmos na linguagem de 'fluentes' e 'fluxões' " . | ROQUE, 2012, p.364 |
| | L'Hôs-pital | 1661-1704 | *Analyse des ini-timents pepits pour l'intel-ligence des lignes courbes* | "O marquês de L'Hôpital, responsável pelo livro-texto que disseminou o cálculo leibniziano, pertencia ao seu círculo de influências. Como mencionado anteriormente, o livro Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes se refere a uma 'análise dos infinitamente pequenos' ". | ROQUE, 2012, p.365 |
| 1696 | Mele-bran-che | | | "A partir de 1696, houve uma mudança importante no funcionamento da pesquisa matemática, pois, sob influência do grupo de Malebranche, a Academia passou a se organizar em classes, instaurando, pela primeira vez, uma classe de matemáticos | ROQUE, 2012, pp. 365-366 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | com postos de trabalho remunerados que atuavam somente como pesquisadores". | |
| 1742 | MacLaurin | 1698-1746 | | "O matemático escocês Colin MacLaurin propôs, em 1742, uma resposta inspirada nos argumentos geométricos e cinemáticos de Newton na qual rejeitava os infinitesimais. Seus argumentos traziam de volta, por exemplo, as demonstrações indiretas, por dupla contradição, usadas por Arquimedes. Ele desprezava a algebrização e erigia a técnica geométrica de encontrar limites como base do cálculo, apesar de nem definir o que são limites nem as regras para operar com eles". | ROQUE, 2012, p.367 |
| 1751 | d'Alembert e Diderot | | Diferencial | "Essa definição é apresentada no verbete "Différentiel", publicado em 1751 na *Encyclopédie* ou *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, de d'Alembert e Diderot". | ROQUE, 2012, p.367 |
| 1765 | d'Alembert e Diderot | | Limite | "O verbete "Limite" é de 1765 e nele se lê que tal conceito está na base da verdadeira metafísica do cálculo diferencial". | ROQUE, 2012, p.367 |
| 1718 | Johann Bernoulli | 1667-1748 | Função | "A definição explícita da noção de função com base nessa perspectiva só começou a ser delineada alguns anos mais tarde em um artigo de Johann Bernoulli apresentado em 1718 à Academia de Ciências de Paris". | ROQUE, 2012, p.373 |
| 1755 | Euler | 1707-1783 | cálculo | "No prefácio da obra *Institutiones calculi differentialis* (Fundamentos do cálculo diferencial), publicada em 1755, Euler formula uma nova definição de função". | ROQUE, 2012, p. 378 |