

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT

Ana Lúcia Vaghetti Pinheiro

**ESTUDO DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM ÊNFASE NOS
CORPOS REDONDOS: CONCEPÇÕES E PRÁXIS DE UMA
SEQUÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DA TEORIA DE GUY BROUSSEAU**

Santa Maria, RS
2022

Ana Lúcia Vaghetti Pinheiro

**ESTUDO DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM ÊNFASE NOS CORPOS
REDONDOS: CONCEPÇÕES E PRÁXIS DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA À LUZ
DA TEORIA DE GUY BROUSSEAU**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Janice Rachelli

Santa Maria, RS
2022

Pinheiro, Ana

Estudo dos Sólidos de Revolução com Ênfase nos Corpos Redondos: Concepções e Práxis de Uma Sequência Didática à Luz da Teoria de Guy Brousseau / Ana Pinheiro.- 2022.

139 p.; 30 cm

Orientador: Janice Rachelli Rachelli

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2022

1. Sólidos de Revolução 2. Corpos Redondos 3. Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau 4. Princípio de Cavalieri 5. Teorema de Pappus I. Rachelli, Janice Rachelli II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, ANA PINHEIRO, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Ana Lúcia Vagheti Pinheiro

**ESTUDO DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM ÊNFASE NOS CORPOS
REDONDOS: CONCEPÇÕES E PRÁXIS DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA À LUZ
DA TEORIA DE GUY BROUSSEAU**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovada em 17 de fevereiro de 2022:



Janice Rachelli, Dr.^a (UFSM)
(Presidente/Orientadora)



Vanilde Bisognin, Dr.^a (UFN)



Tiago Martinuzzi Buriol, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2022

DEDICATÓRIA

Dedico essa pesquisa à minha mãe, irmãs e sobrinha, por sermos sempre juntas.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela saúde e pelo intelecto.

Aos meus pais Dilon Nickle Pinheiro, pelo exemplo e inspirador apreço a matemática e Neusa Vaghetti Pinheiro, pelo cuidado e amor incondicional.

As minhas irmãs Inês e Isa e adorável sobrinha Anninha, pelos fortes laços de afeto que nos unem, manifestados em apoio e encorajamento.

À minha orientadora Profa. Dra. Janice Rachelli, pela sua irretocável competência, compreensão, amizade e suporte ao longo dessa pesquisa.

As professoras Dra. Vanilde Bisognin, Dra. Carmen Vieira Mathias e ao professor Dr. Tiago Martinuzzi Buriol, pela disponibilidade em participarem da banca examinadora.

Ao trabalho de excelência desenvolvido pelos professores do PROFMAT da Universidade Federal de Santa Maria.

Aos colegas, que se fizeram amigos pelas trocas e incentivo ao longo dessa jornada.

A equipe diretiva e colegas da Instituição de Ensino onde a pesquisa foi realizada pela confiança e solicitude. E aos meus caros alunos cujos registros são as marcas desse percurso.

Enfim, a todos aqueles que de algum modo, em algum momento colaboraram para a realização dessa pesquisa...” E aprendi que se depende sempre de tanta, muita diferente gente, toda a pessoa sempre é as marcas das lições diárias de outras tantas pessoas” (Gonzaguinha).

RESUMO

ESTUDO DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM ÊNFASE NOS CORPOS REDONDOS: CONCEPÇÕES E PRÁXIS DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DA TEORIA DE GUY BROUSSEAU

AUTORA: Ana Lúcia Vaghetti Pinheiro

ORIENTADORA: Janice Rachelli

Nessa pesquisa apresentamos concepções e práxis de uma sequência didática acerca do objeto de estudo sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos. Para tanto buscamos na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau como caráter de instrumento científico o aparato para estruturação metodológica de tal proposta e arquitetamos uma sequência didática configurada em situações didáticas e adidáticas atendendo as habilidades e competências propostas na Base Nacional Comum Curricular para o objeto do conhecimento de referência visando a apropriação de saberes significativos que venham a desencadear nos sujeitos envolvidos uma postura de autonomia e protagonismo frente a esses novos saberes, de forma a corroborar no seu desempenho diante de desafios do conhecimento e em seus estudos posteriores. Desta forma, buscamos investigar quais contribuições a Teoria das Situações Didáticas podem fornecer acerca do estudo desse objeto do conhecimento e estejam voltadas a uma práxis que consolide esses saberes de forma significativa. A pesquisa de caráter qualitativo ocorreu em duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio em um Instituto Estadual de Educação localizado no município de Júlio de Castilhos, RS. O contexto da pesquisa se deu na modalidade de ensino híbrido, utilizando como mediador o aplicativo Google Classroom da Plataforma Google Suíte for Education. Nesse âmbito propomos a resolução de situações problemas acerca do cálculo de áreas de superfícies e de volumes de sólidos de revolução com a utilização do princípio de Cavalieri e dos teoremas de Pappus a partir de conceitos estudados no Ensino Médio. As situações adidáticas propostas envolveram a utilização de materiais manipuláveis como sólidos de acrílico e simulador de sólidos de revolução e atividade experimental para determinação do centroide de figuras planas, bem como a construção de maquetes físicas e virtual com a utilização do software SketchUp representativas de silos, um tipo de construção muito comum no município lócus da pesquisa e seus limítrofes, cuja arquitetura é privilegiada pela presença de corpos redondos. Os resultados da pesquisa sinalizaram que o desenvolvimento da sequência didática favoreceu a autonomia intelectual e a aprendizagem significativa acerca do objeto do conhecimento em pauta, bem como revelaram que a Teoria das Situações Didáticas forneceu subsídios importantes para organização didática e análise do processo de consolidação dos saberes envolvendo o estudo dos sólidos de revolução.

Palavras-chave: Sólidos de revolução. Corpos Redondos. Teoria das Situações Didáticas. Princípio de Cavalieri. Teorema de Pappus. Áreas e volumes.

ABSTRACT

STUDY OF REVOLUTIONAL SOLIDS WITH EMPHASIS ON ROUND BODIES: CONCEPTIONS AND PRAXIS OF A DIDACTIC SEQUENCE IN THE LIGHT OF GUY BROSSEAU'S THEORY

AUTHOR: Ana Lúcia Vaghetti Pinheiro
ADVISOR: Janice Rachelli

In this research we present conceptions and praxis of a didactic sequence about the solid object of study of revolution with an emphasis on round bodies. In order to do so, we seek in Guy's Theory of Didactic Situations Brousseau as a character of scientific instrument the apparatus for methodological structuring of such a proposal and we architect a didactic sequence configured in didactic and didactic situations, taking into account the skills and competencies proposed in the National Curricular Common Base for the object of reference knowledge aiming at the appropriation of significant knowledge that may trigger in the subjects involved a posture of autonomy and protagonism in the face of this new knowledge, in order to corroborate its performance in the face of challenges of knowledge and in its subsequent studies. In this way, we seek to investigate which contributions the Theory of Didactic Situations can provide about the study of this object of knowledge and are aimed at a praxis that consolidates this knowledge in a significant way. The qualitative research took place in two classes of the third year of high school in a State Institute of Education located in the municipality of Júlio de Castilhos, RS. The context of the research took place in the hybrid teaching modality, using as a mediator the Google Classroom application of the Google Suite for Education Platform. In this context we propose the resolution of problem situations concerning the calculation of surface areas and volumes of solids of revolution using Cavalieri's principle and Pappus' theorems from concepts studied in high school. The proposed didactic situations involved the use of manipulable materials such as acrylic solids and solids of revolution simulator and experimental activity for centroid determination of flat figures, as well as the construction of physical and virtual models using SketchUp software representative of silos, a very common type of construction in the municipality locus of the research and its borders, whose architecture is privileged by the presence of round bodies. The survey results indicated that the development of the didactic sequence favored intellectual autonomy and significant learning about of the object of knowledge in question, as well as revealing that the Theory of Didactic Situations provided important subsidies for didactic organization and analysis of the knowledge consolidation process involving the study of solids of revolution.

Keywords: Revolution solids. Round Bodies. Theory of Didactic Situations. Cavalieri's Principle. Pappus' theorem. Areas and volumes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Triângulo didático tradicional	21
Figura 2 – Triângulo didático	22
Figura 3 – Sistema didático	23
Figura 4 – Rotação	28
Figura 5 – Linha L	29
Figura 6 – Rotação de retângulo, triângulo e semicircunferência	29
Figura 7 – Pilhas com caixas idênticas	30
Figura 8 – Sólidos com o mesmo volume	32
Figura 9 – Disco com centro O , delimitado por um círculo C	32
Figura 10 – Um cilindro e sua geratriz AB	33
Figura 11 – Cilindro reto e cilindro oblíquo.....	33
Figura 12 – Um cilindro de revolução e um cilindro equilátero	34
Figura 13 – Planificação de um cilindro reto	34
Figura 14 – Planificação de um cilindro oblíquo	35
Figura 15 – Base de um cilindro e polígonos regulares	36
Figura 16 – Diferenças entre $A(D)h$ e $Vol(C)$ e entre $Vol(P_n)$ e $Vol(p_n)$	37
Figura 17 – As áreas das secções paralelas das bases são iguais.....	38
Figura 18 – Cone sólido de base D e vértice V	39
Figura 19 – Geratriz e uma secção paralela à base do cone	39
Figura 20 – Cone reto	40
Figura 21 – Ângulo de abertura de um cone reto	42
Figura 22 – Planificando a superfície lateral do cone	42
Figura 23 – Polígonos q_n e Q_n	44
Figura 24 – Pontos P e Q sobre a superfície esférica e ponto R em uma esfera correspondente	46
Figura 25 – A esfera é um sólido de revolução	46
Figura 26 – Lateral de um tronco de cone gerada pela revolução do segmento	47
Figura 27 – Esfera e cilindro.....	48
Figura 28 – Centro de gravidade G	50
Figura 29 – Um processo prático para encontrar o baricentro.....	50
Figura 30 – Tipos de figuras.....	51
Figura 31 – Triângulo.....	52
Figura 32 – Triângulo pendurado por um vértice.....	53
Figura 33 – Polígono.....	54
Figura 34 – Reta E , segmento AB e tronco de cone.....	55
Figura 35 – Linha L e linha poligonal.....	56
Figura 36 – Retângulo e sólido de revolução.....	57
Figura 37 – Região S e um polígono regular.....	59
Figura 38 – Figura F	60
Figura 39 – Triângulo retângulo e cone.....	60
Figura 40 – Rotação do círculo.....	61
Figura 41 – Geração de um toro por rotação de um círculo de raio r em torno do eixo OY	61
Figura 42 – Segmento AB	62
Figura 43 – Semicírculo e triângulo.....	63
Figura 44 – Semicírculo e triângulos.....	64
Figura 45 – Material de acrílico.....	72

Figura 46 Modelo de uma caixa geradora e de um simulador de sólidos de revolução.....	73
Figura 47– Material de acrílico utilizado para a resolução da Atividade 1.....	89
Figura 48 – Resolução da atividade 1(a) pelos alunos.....	90
Figura 49 – Resposta da Atividade 1(b) ,(c), (d) e (e) pelos alunos.....	91
Figura 50 – Confecção do simulador e realização da Atividade 2 pelos alunos.....	92
Figura 51 – Resposta da Questão 1 pelos alunos A2 e A3.....	95
Figura 52 – Resposta da Questão 2 pelo aluno A3.....	96
Figura 53 – Resposta da Questão 3 pelos alunos A4 e A5.....	97
Figura 54 – Resposta da Questão 4 pelo aluno A3.....	98
Figura 55 – Resposta da Questão 5 pelo aluno A6.....	99
Figura 56– Resposta da Atividade 4 (a) pelo aluno A7.....	100
Figura 57 – Resposta da Atividade 4 (b) pelo aluno A8.....	101
Figura 58 – Resposta da Questão 6 pelo aluno A1.....	102
Figura 59 – Resolução da Atividade 6 pelos alunos.....	103
Figura 60 – Respostas das Questões 7 e 8.....	106
Figura 61 – Resposta da Questão 9 pelo aluno A8.....	107
Figura 62 – Resposta da Questão 10 pelos alunos A9 e A10.....	108
Figura 63 – Resposta da Questão 11 pelos alunos A11 e A13.....	110
Figura 64 – Resposta da Questão 11 pelo aluno A9.....	111
Figura 65 – Resposta da Questão 12 pelos alunos A11 e A12.....	112
Figura 66 – Resposta da Questão 13 pelos alunos A13 e A12.....	114
Figura 67 – Resposta da Questão 14 pelo aluno A13.....	114
Figura 68 – Resposta da Questão 15 pelo aluno A14.....	115
Figura 69 – Resposta da Questão 16 (a) pelo aluno A13.....	116
Figura 70 – Resposta da questão 16 (b) pelo aluno A1.....	117
Figura 71 – Resposta da questão 17 pelo aluno A15.....	118
Figura 72 – Resposta da Questão 18 pelo aluno A15.....	119
Figura 73 – Resposta da Questão 19 pelo aluno A15.....	120
Figura 74 – Resposta da Questão 20 pelos aluno A1 e A 13.....	121
Figura 75 – Unidade da CESA: foto e maquete física confeccionadas pelos grupos G1 e G2.....	121
Figura 76 – Situação problema elaborada pelo grupo G1.....	123
Figura 77 – Cerealista Dom Manuel: foto e maquete física confeccionada pelo grupo G3.....	124
Figura 78 – Situação problema elaborada pelo grupo G3.....	124
Figura 79 – Sementeira Horizonte: foto e maquete física confeccionada pelo grupo G4.....	125
Figura 80 – Situação problema elaborada pelo grupo G4.....	125
Figura 81 – Cooperativa Tritícola de Júlio de Castilhos: fotos e maquetes físicas construídas pelos grupos G5, G6, G7 e G8.....	126
Figura 82 – Situação problema elaborada pelos grupos G6 e G7.....	126
Figura 83 – COTRIJUC/Alto Toropi: foto e maquete física construída pelo grupo G8.....	127
Figura 84 – Situação problema elaborada pelo grupo G8.....	128
Figura 85 – Silo Fazenda Posto Branco/Val de Serra: foto e modelagem 3D criada pelo grupo G9.....	129
Figura 86 – Situação problema elaborada pelo grupo G9.....	129
Figura 87 – Empresa Agrofel Grãos e Insumos: foto e maquete física construída pelo	

grupo G10.....	130
Figura 88 – Situação problema elaborada pelo grupo G10.....	130
Figura 89 – Silo localizado em uma propriedade rural no interior do município de Júlio de Castilhos: foto e maquete física confeccionada pelo grupo G11.....	131
Figura 90 – Situação problema elaborada pelo grupo G11.....	131

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Tipologia das situações didáticas	25
Quadro 2 – Organização das situações didáticas	70

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1 GUY BROUSSEAU E A ORIGEM DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	19
2.2 SITUAÇÃO DIDÁTICA – SIGNIFICADO E IMPORTÂNCIA.....	21
2.3 SITUAÇÃO DIDÁTICA, SITUAÇÃO ADIDÁTICA.....	24
2.4 CONTRATO DIDÁTICO.....	26
3 CORPOS REDONDOS	28
3.1.SUPERFÍCIES E SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO.....	28
3.2 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI.....	29
3.3 O CILINDRO.....	31
3.3.1 Área da superfície de um cilindro circular reto.....	34
3.3.2 Volume de um cilindro.....	36
3.4 O CONE.....	38
3.4.1 Área da superfície de um cone reto.....	42
3.4.2 Volume de um cone reto.....	43
3.5 A ESFERA.....	45
3.5.1 Área da superfície esférica.....	47
3.5.2 O volume da esfera.....	48
3.6 TEOREMAS DE PAPPUS.....	49
3.6.1 Centro de gravidade.....	50
3.6.1.1. Centro de gravidade de uma poligonal.....	51
3.6.1.2 Centro de gravidade de um polígono.....	53
3.6.1.3 Uma aplicação do centro de gravidade: área lateral de um tronco de cone....	55
3.6.2 Primeiro teorema de pappus.....	56
3.6.2.1 Uma aplicação do segundo teorema de pappus: volume de um sólido de revolução	57
3.6.3 O segundo teorema de pappus.....	58
3.6.3.1 Aplicação do segundo teorema de pappus: volume do cone	60
3.6.3.2 Aplicação do segundo teorema de pappus: área e volume de um toro.....	61
3.6.3.3 Aplicação do segundo teorema de pappus: área e volume da esfera.....	62
4 ASPECTOS METODOLÓGICOS	66
4.1 PESQUISA QUALITATIVA	67
4.2 CONTEXTO E SUJEITOS DA PESQUISA	67
4.3 PLATAFORMA GOOGLE CLASSROOM	68
4.4 SITUAÇÕES DIDÁTICAS PROPOSTAS.....	69
4.4.1 BLOCO 1 – Planificação dos sólidos de revolução	72
4.4.2 BLOCO 2 - Cálculo das áreas das superfícies dos sólidos de revolução através de sua planificação	77
4.4.3 BLOCO 3 - Conhecendo os teoremas de Pappus	78
4.4.4. BLOCO 4 - Resolução de situações problemas envolvendo o cálculo de	

áreas de superfícies e volumes de sólidos de revolução em contextos diversos	82
5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	88
5.1 BLOCO 1 – PLANIFICAÇÃO DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO.....	88
5.1.1 Atividade 1 - Sólidos de revolução com material de acrílico.....	89
5.1.2 Atividade 2 - Planificação dos sólidos de revolução por meio de um simulador.....	91
5.1.3 Atividade 3 – Resolvendo questões do ENEM	94
5.2 BLOCO 2 - CÁLCULO DAS ÁREAS DAS SUPERFÍCIES DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO ATRAVÉS DE SUA PLANIFICAÇÃO	99
5.2.1 Atividade 4 - Determinando o cálculo de áreas de superfícies de cilindros, cones e esferas através de sua planificação e o Princípio de Cavalieri.....	99
5.2.2 Atividade 5 - Resolvendo uma questão.....	102
5.3 BLOCO 3 – CONHECENDO OS TEOREMAS DE PAPPUS	103
5.3.1 Atividade 6 - Determinando o centro de gravidade de figuras planas	103
5.3.2 Atividade 7 - Cálculo da área das superfícies e volumes de sólidos de revolução com a aplicação dos teoremas de Pappus	104
5.4 BLOCO 4 - RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES PROBLEMAS ENVOLVENDO O CÁLCULO DE ÁREAS DE SUPERFÍCIES E VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO EM CONTEXTOS DIVERSOS.....	111
5.4.1 Atividade 8 - Resolvendo questões.....	112
5.4.2 Atividade 9 – Maquete.....	121
5.5 UMA SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS.....	132
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	135
REFERÊNCIAS.....	138

1 INTRODUÇÃO

Conforme aponta Wheeler (1981, p. 352): “melhor que o estudo do espaço, a geometria é a investigação do ‘espaço intelectual’, já que, embora comece com a visão, ela caminhe em direção ao pensamento, indo do que pode ser percebido para o que pode ser concebido”. Considerando o espaço intelectual que se refere o autor, sem dúvida a geometria espacial apresenta-se como um campo extremamente fértil para o desenvolvimento da capacidade de abstração, formalização, generalização e criatividade o que é imediatamente sensível quando nos referimos a proficiência geométrica pretendida no Ensino Médio.

Outra possibilidade irrefutável da geometria espacial alicerçada a conhecimentos historicamente construídos pelo homem é a percepção da harmonia das formas através da noção de profundidade que o espaço proporciona.

Dessa maneira, a importância de que esse objeto do conhecimento seja bem intensionalizado através de situações de ensino e aprendizagem que promovam significativamente a aquisição de saberes consolidados em uma práxis educativa que deve estar apoiada em uma metodologia dinâmica e emancipatória.

Neste sentido, estudos que abordam temas da geometria espacial, realizados no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, foram desenvolvidos com a utilização de materiais concretos (CUNHA, 2019), com o uso de novas tecnologias, mais especificamente, a Realidade Aumentada (DANTAS, 2018) e com a resolução de exercícios tendo por base os processos interpretativos próprios da geometria (MOSER, 2020). Esses estudos enfatizam que a utilização de materiais concretos, bem como o uso de ferramentas tecnológicas vem a ser uma estratégia pedagógica interessante, trazendo para a sala de aula aspectos de visualização geométrica que ajuda os alunos a compreenderem melhor várias situações que possam ser impostas a eles, além de despertar a atenção e curiosidade dos alunos promovendo, dessa forma a autonomia no seu processo de aquisição de saberes. Também é contundente que conceitos geométricos estão estritamente vinculados com suas representações e habilidades geométricas necessárias a resolução de situações problemas no contexto de suas apreensões exigem uma leitura interpretativa da geometria ao seu redor.

Sob essa perspectiva, abordamos nessa pesquisa, o objeto de estudo Sólidos de Revolução cujo tratamento geométrico é, de certa forma, negligenciado no Ensino Médio.

Sobre isso, em estudos correlatos, Madeira (2014) traz o seguinte questionamento: “Os sólidos de revolução são tratados como pequenas observações nos cantos dos livros didáticos. Mas porque isso? Por que não estudar com mais detalhes esses sólidos tão comuns no dia a dia?” (MADEIRA, 2014, p. 14). Compactuando com a indagação da autora, suscitamos ainda o fato de que como poderíamos explicar, por exemplo, o fascínio de Kepler pela harmonia das esferas, se ele desconhecesse como estas foram geradas em sua tridimensionalidade.

O que se percebe, portanto é que alguns sólidos de revolução são inseridos nos currículos de geometria espacial com o tratamento de corpos redondos. Entretanto a complexidade dos conceitos relacionados a esse tema, aliada a fragmentação do conteúdo e a sua descontextualização com a realidade, são determinantes razões para o pouco interesse e barreiras na aprendizagem percebidas por nossos alunos.

Nesse contexto enfatizamos os Corpos Redondos, materializados nas figuras de cilindros, cones e esferas, objeto de estudo na Matriz Referencial Curricular Gaúcha para o Ensino Médio (RIO GRANDE DO SUL, 2018), elaborada segundo as habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018).

Considerando os pressupostos acima à luz da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau configuramos uma sequência didática contemplando situações didáticas e adidáticas acerca do Estudo dos Sólidos de Revolução com ênfase nos Corpos Redondos. Dessa forma, buscamos investigar quais contribuições a Teoria das Situações Didáticas podem fornecer acerca do estudo desse objeto do conhecimento e estejam voltadas a uma práxis que consolide esses saberes de forma significativa, tornando possível, nesse sentido, disseminar as eventuais dificuldades e desinteresses dos sujeitos envolvidos. Sabemos que a educação como um todo requer competências múltiplas para elevar sua qualidade e surtir efeito no aprendiz de modo a romper paradigmas, evidenciado assim uma postura autônoma e protagonista.

Ao submetermos as situações didáticas e adidáticas que compõe a sequência aqui proposta, aliamos-nos de recursos da modelagem matemática, como a utilização de sólidos de acrílico e atividades experimentais para determinação dos centroides de figuras planas e simulação de sólidos de revolução. A partir de conceitos desenvolvidos no Ensino Médio, apresentamos o princípio de Cavalieri e os teoremas de Pappus para o cálculo de áreas de superfícies e volumes de tais sólidos.

Também propomos a construção de maquetes utilizando recursos físicos e virtuais de silos, um tipo de construção bastante evidenciado no município lócus da pesquisa. Todas as

atividades aqui desenvolvidas passaram pelo crivo da análise de cada um dos momentos que caracteriza a dialética da Teoria das Situações: ação, formulação, validação e institucionalização e consolidaram dessa forma uma práxis em que as relações pedagógicas entre o aluno, o professor e saber são ressignificadas, garantindo dessa forma eficácia do processo ensino aprendizagem, colocando os sujeitos como seres autônomos, reflexivos, criativos e argumentativos.

Tais opções metodológicas buscam responder a seguinte questão da pesquisa: “De que forma uma proposta de estudo embasada na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau pode contribuir para o ensino aprendizagem do objeto de conhecimento Sólidos de Revolução com ênfase em Corpos Redondos no Ensino Médio”?

O universo dessa pesquisa ocorreu em um Instituto de Estadual de Educação, no município de Júlio de Castilhos – RS. A população alvo foram alunos de dois terceiros anos do Ensino Médio. Esse desenvolvimento ocorreu na modalidade de ensino híbrido, mediado pelo aplicativo Google Classroom da Plataforma Google Suíte for Education. A fim de maior coesão na leitura dos resultados, a análise documental efetivou-se considerando os alunos da modalidade presencial.

Essa pesquisa está organizada em seis capítulos incluindo a introdução e as considerações finais os quais mencionamos a seguir.

No capítulo 1 apresentamos de forma sintética o objeto do trabalho e a sequência que será adotada para a descrição da pesquisa.

No capítulo 2 consta um recorte bibliográfico sobre a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau.

No capítulo 3 apresentamos os principais conceitos pertinentes a cilindros, cones e esferas, considerados como corpos redondos (BRASIL, 2018) e que são casos particulares de sólidos de revolução. Inicialmente definimos sólidos de revolução e apresentamos o Princípio de Cavalieri utilizado para a determinação de áreas e de volumes. Após, tratamos cada um dos corpos redondos em que apresentamos a definição e a determinação de áreas da superfície e de volumes. No que segue tratamos dos teoremas de Pappus, os quais podem ser utilizados para o cálculo de áreas de superfícies e de volumes de sólidos de revolução.

No capítulo 4, descrevemos as alternativas metodológicas empregadas nesta proposta. Inicialmente, são consideradas as principais características da pesquisa qualitativa e os instrumentos utilizados; em sequência apresentamos o contexto educativo no qual a pesquisa foi implementada, contendo uma caracterização da população alvo que compõe os sujeitos

participantes e relacionamos o problema norteador pressuposto da pesquisa. Posteriormente, apresentamos um compêndio de atividades elaboradas e propostas alicerçadas na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau como metodologia de pesquisa e ensino respectivamente.

No capítulo 5 apresentamos a análise configurada à luz da Teoria das Situações Didáticas em que realizamos uma predição das etapas categorizadas como dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização nas situações didáticas e adidáticas propostas dispostas em quatro blocos, bem como a discussão dos resultados que foram subsidiados por meio da transcrição documental de registros dos alunos nas atividades desenvolvidas em sala de aula e devoluções efetivadas através do Google Classroom.

Por fim, no capítulo 6 são apresentadas as considerações finais dessa pesquisa no sentido de comprovar que é possível através de uma sequência didática à luz da Teoria de Guy Brousseau tornar o estudo dos sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos significativo, onde ao aluno protagonista é permitido criar, conjecturar, elaborar hipóteses e consequentemente validar suas ações.

Além disso, fazem parte deste trabalho, as Referências, constituídas por livros, dissertações, trabalhos científicos e publicações utilizadas para fundamentar esta pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, faremos uma abordagem dos principais aspectos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvida na França por Guy Brousseau em 1996, relativa à forma de apresentação dos conteúdos matemáticos aos alunos, que permitem aos professores criarem sequências didáticas levando em consideração a autonomia do educando na construção de seus saberes. Como ponto de partida apresentamos uma sucinta biografia do referido autor e a origem da Teoria das Situações Didáticas; em seguida uma caracterização, apontando seus principais conceitos estruturantes, evidenciando sua significância para o processo de ensino aprendizagem, de modo genérico, e para esta pesquisa, especificamente.

2.1 GUY BROUSSEAU E A ORIGEM DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Guy Brousseau nasceu em 4 de fevereiro de 1933, em Taza, no Marrocos, e desde muito cedo mostrou-se interessado pela Matemática. Jovem, decidiu abandonar o curso de Matemática Superior e retornar à Escola Normal, pois estava interessado em estudar a maneira como as crianças adquirem os conhecimentos matemáticos; abandonou o curso de Matemática Superior para fazer um ano de formação profissional na Escola Normal de Agen, cidade da Aquitânia, localizada no sudoeste da França.

Brousseau iniciou o trabalho como professor após completar 20 anos. Em 1958, durante o serviço militar na Argélia, redigiu lições e tarefas matemáticas propostas aos professores da época. Retomou os estudos de Matemática Superior na universidade em Bordeaux, em 1962.

Propôs a criação de um Centro de Pesquisa do Ensino de Matemática (CREM), no Centro Regional de Documentação Pedagógica de Bordeaux. Depois, com a ajuda de universitários e professores da Escola Normal, publicou cadernos dedicados a professores, com a intenção de sugerir inovações e tornar precisas as condições de pesquisa.

Em 1970, licenciado em Matemática, tornou-se assistente de Matemática na Universidade de Bordeaux. No mesmo ano, em conferência do Congresso da Associação dos Professores de Matemática do Ensino Público de Clermont-Ferrand apresentou os primeiros elementos da Teoria das Situações Didáticas. Em 1991, tornou-se docente do Instituto Normal Superior local. Recebeu o título de doutor *honoris causa* das universidades de Montreal, Genebra e Córdoba.

Brousseau é atualmente considerado um dos maiores pesquisadores em todo o mundo da área da didática da matemática, a ponto de ter sido premiado em 2003 com a primeira Medalha Felix Klein pelo desenvolvimento da Teoria das Situações Didáticas.

No início da década de 70 do século XX, na Universidade de Bordeaux (França), Brousseau promoveu uma pesquisa científica objetivando analisar, e eventualmente criticar, modelos das situações usadas no ensino da Matemática sugerindo a construção de outras mais adequadas. Nesse contexto, em 1970, na Universidade de Bordeaux, estruturaram-se as condições institucionais necessárias para Brousseau propor o seu próprio projeto científico que girava em torno da “construção de modelos das situações usadas no ensino – a fim de analisá-las e, eventualmente, criticá-las – e sugerir outras mais adequadas” (BROUSSEAU, 2008, p. 20).

Brousseau teve como objetivos, inicialmente, “propiciar a reflexão sobre as relações entre os conteúdos do ensino e os métodos educacionais” e, depois e de forma mais ampla, “abordar a didática como campo de pesquisa cujo objeto é a comunicação dos conhecimentos matemáticos e suas transformações” (BROUSSEAU, 2008, p. 16).

De acordo com Freitas (2016) a TSD foi criada a partir dos estudos de Brousseau sobre o construtivismo em pedagogia, baseado na teoria da epistemologia genética de Piaget. Daí foi desenvolvido o tratamento científico do trabalho didático, que teve como base a problematização matemática e a hipótese de que a aprendizagem ocorre por adaptação a um meio que produz contradições e desequilíbrios.

Surge então a Teoria das Situações Didáticas em um momento em que a visão cognitiva, fortemente influenciada pela epistemologia piagetiana, dominava o ensino e a aprendizagem da matemática. Para Brousseau (2008) era necessário ter um novo enfoque: uma construção que permitisse a compreensão das interações sociais de alunos, professores e conhecimentos matemáticos que ocorrem em uma sala de aula e que condicionam o que se aprende e a forma como isso se dá.

No Brasil, as obras de Brousseau passaram a ser reconhecidas como referencial teórico para pesquisas, a partir dos anos 1990, por pesquisadores que se interessavam pela Educação Matemática. Nesta pesquisa, destacam-se as contribuições de Almouloud (2007), Pais (2011), Silva (2015), Freitas (2016) e Reges (2020).

Brousseau (1996) define a didática como uma relação específica entre conteúdos de ensino e a maneira como os alunos adquirem conhecimentos e métodos. Em vista disso, desenvolveu uma teoria para compreender as relações que acontecem entre alunos, professor e

saber, em sala de aula, e, ao mesmo tempo, propôs situações que foram experimentadas e analisadas “cientificamente”.

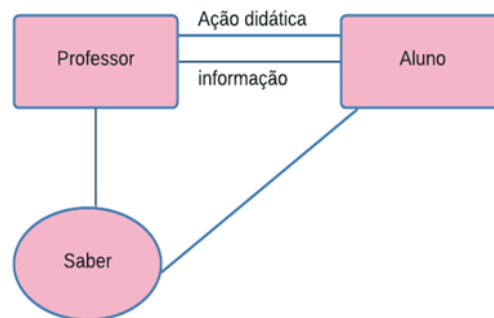
Dessa forma, a Teoria das Situações Didáticas passou a ser reconhecida como aquela que “trata das formas de apresentação, a alunos, do conteúdo matemático, possibilitando melhor compreender o fenômeno da aprendizagem matemática” (FREITAS, 2016 apud REGES, 2020). Tem como objeto central, não o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno, saber e o *milleu*.

2.2 SITUAÇÃO DIDÁTICA – SIGNIFICADO E IMPORTÂNCIA

Considera-se como situação didática todo o contexto em que o aluno está inserido, incluindo-se aí o saber, o professor e o sistema educacional. De acordo com Brousseau (2008), uma interação torna-se didática, “[...] se, e somente se, um dos sujeitos demonstra a intenção de modificar o sistema de conhecimentos do outro (os meios de decisão, o vocabulário, as formas de argumentação, as referências culturais)” (BROUSSEAU, 2008, p. 53).

Nessa perspectiva, Brousseau (2008) critica a prática de, em situações de ensino, ser considerado apenas o que ele denomina triângulo didático tradicional em que se consideram tão somente as relações entre os sistemas professor e aluno. O autor aponta esse esquema como algo inconveniente porque reduz o entorno didático à ação do professor, além de omitir as relações que se estabelecem entre o sujeito e o meio adidático. Na Figura 1, está ilustrado um triângulo didático tradicional.

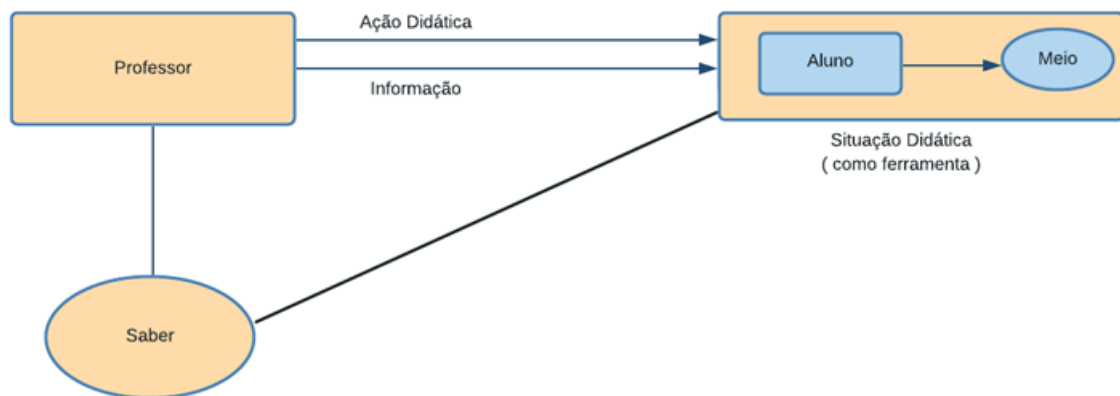
Figura 1 – Triângulo didático tradicional



Fonte: Adaptação de Brousseau (2008, p. 54).

Brousseau (2008) considera que o professor ensina com o objetivo de que seu aluno se aproprie do saber, e que este tenha funcionalidade em outros contextos que não somente em situações com fins didáticos (exercícios ou problemas propostos). Sendo assim, o aluno precisa adquirir autonomia para a qual a TSD, efetivamente, indica a utilização do *milieu*, ou meio, como componente indispensável no processo de aprendizagem; o que nos leva a um esquema como da Figura 2.

Figura 2 – Triângulo didático



Fonte: Adaptação de Brousseau (2008, p. 54).

A situação didática ocorre na presença de professor e alunos, mas inicia-se bem antes, no momento do planejamento de aulas. Ao planejar, cabe ao professor considerar os obstáculos (epistemológicos, didáticos, cognitivos) relacionados ao objeto matemático (conteúdo) com o qual o grupo vai lidar. Também é necessário conhecer as diretrizes e orientações curriculares e os livros didáticos (BROUSSEAU, 2008 apud REGES, 2020), indicados para o nível de conhecimento de seus alunos.

Nesse momento, é o professor que precisa refletir e decidir sobre o *milieu* que vai ser utilizado para desafiar o aluno a enfrentar o problema que se apresenta e encontrar a resposta. Há também momentos em que o estudante passa a refletir, a partir do *milieu* que deve ter sido estruturado pelo professor, no sentido de ele passar a ser o responsável por seu processo de construção do conhecimento e apropriação do saber construído socialmente.

Para Almouloud (2007), ao teorizar sobre os fenômenos ligados a essas interações, buscando a especificidade do conteúdo ensinado, Guy Brousseau considera como fundamental a estrutura formada pelo sistema minimal: sistema didático *stricto sensu*, consideradas as interações entre professor e alunos mediadas pelo saber nas situações

de ensino, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Sistema didático



Fonte: Adaptação de POMMER (2008, p. 2).

Este triângulo didático relaciona os elementos que compõem seus vértices, sendo eles, o saber, o professor e o aluno. Nessa relação triangular, a relação saber-professor contempla a didática, a gestão das informações e o processo de ensinar; na relação professor-aluno, encontra-se a interação da epistemologia do professor com o aluno em prol de sua formação; e na relação aluno-saber, situa-se a construção dos conhecimentos pelo aluno, ou seja, o processo de aprendizagem.

A Teoria das Situações Didáticas apoia-se em três pressupostos, que apresentamos a seguir:

1. O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é um fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem [...].
2. O *milieu* não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar o *milieu* no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens.
3. [...] esse *milieu* e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. (ALMOLOUD, 2007, p. 32-33).

As situações didáticas e as situações adidáticas são elementos principais da Teoria das Situações Didáticas e desempenham papel central na análise e construção de situações para o ensino e a aprendizagem da matemática.

Cabe destacar que na TSD, o trabalho do aluno é aproximado ao trabalho de um

pesquisador, testando conjecturas, formulando hipóteses, provando, construindo modelos, conceitos e teorias. Cabe ao professor efetuar não a simples comunicação de um conhecimento, mas a devolução de um bom problema. O erro cometido pelo aluno constitui-se uma valiosa fonte de informação para a elaboração de boas questões ou novas situações que possam atender melhor os objetivos desejáveis.

2.3 SITUAÇÃO DIDÁTICA, SITUAÇÃO ADIDÁTICA

O objeto central da teoria das situações é a situação didática definida como

[...] o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um certo *milieu* (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1986 apud ALMOLOUD, 2007, p. 33).

Na situação adidática, como parte essencial da situação didática, o aluno trabalha de forma independente, devendo perceber as características e padrões que o ajudarão a compreender um novo saber. O professor deve agir apenas como mediador/observador, apenas efetuando a devolução do problema.

Para Brousseau,

Quando o aluno torna-se capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele mesmo o conhecimento que ele está construindo, em situação não prevista de qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo o que pode ser chamado de situação adidática (BROUSSEAU, 1986 apud PAIS, 2011, p. 68).

Na situação adidática, o professor escolhe atividades de forma que o aluno possa aceitá-las e que o leve a agir, a falar, a refletir e ainda a evoluir por si próprio.

Conforme Almouloud (2007), as situações adidáticas potencializam a capacidade que os alunos têm de agir, raciocinar e transformar crenças e concepções anteriores em conhecimentos mais próximos do saber universal. As situações adidáticas trazem em si a característica de que “a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este, condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar” (ALMOULOU, 2007, p. 33).

Para analisar o processo de aprendizagem, a teoria das situações didáticas observa e decompõe esse processo em quatro fases distintas: situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de institucionalização.

No Quadro 1, expõe-se as fases componentes das situações didáticas, compreendendo uma descrição e um esquema para cada uma das fases. Essas fases compreendem os momentos vividos por professor e alunos, utilizando-se de um *milieu* que seja desafiador e gere aprendizagem e de um saber previamente selecionado. O Quadro 1 foi elaborado seguindo as descrições e os esquemas estabelecidos em Brousseau (2008) e Almouloud (2007).

Quadro 1 - Tipologia das situações didáticas

Situação de ação
A dialética da ação ocorre a partir do momento em que os alunos assumem, como sua, a proposta de atividade feita pelo professor. A dialética da ação, como a própria nomenclatura já indica, corresponde a uma situação típica da ação. Trata-se de um conhecimento mais experimental e intuitivo do que teórico, pois o aluno consegue encontrar a solução do problema, mas, não consegue explicitar os argumentos que ele utilizou na sua elaboração.
Situação de formulação
Na dialética da formulação, o aluno já se aproxima de alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, ou seja, usa linguagem mais apropriada para viabilizar a solução da atividade. Nessa situação o aluno explicita os procedimentos realizados, mas não existe a intenção de julgar a validade do conhecimento utilizado.
Situação de validação
A dialética da validação ocorre a partir da explicitação, pelo sujeito, sobre o que ele fez, como fez e por que escolheu determinada forma de realizar a atividade. É o momento de confrontar ideias e criar argumentos para defendê-las. O professor deve estimular os alunos a expressarem suas ideias na forma de convicções. É o momento de provar a validade de seus argumentos. É o tempo de advogar a respeito da adequação de sua resposta, e, mesmo que mais de uma tenham sido aceitas, pode-se argumentar a respeito da economia, em termos de esforço e de tempo de resolução, ou seja, sendo o caminho mais curto para a solução procurada.
Situação de institucionalização
Esta situação ocorre quando o professor retoma o papel principal no contexto da sala de aula e desenvolve a discussão dos resultados dos trabalhos realizados pelos alunos, articulando os conhecimentos elaborados com o saber universal. Nesta situação, o professor tenta auxiliar o aluno a proceder à passagem do conhecimento do plano individual e particular para a dimensão histórica e cultural do saber científico.

Fonte: Adaptação de Brousseau (2008) e Almouloud (2007).

Para Brousseau, o processo de ensino e aprendizagem ocorre por meio da devolução e da institucionalização. Na devolução, o professor cede ao aluno uma parte da responsabilidade pela aprendizagem, enquanto que a institucionalização é destinada a estabelecer convenções sociais e a intenção do professor é revelada. A institucionalização é onde o professor retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos e define os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização.

A devolução é considerada por Brousseau (2008) como um componente essencial do contrato didático. Levando em consideração o *milieu*, o professor deve realizar o processo de

convencimento do grupo, visando que este tome para si a tarefa de efetivamente aprender. Espera-se, com isso, que o aluno desenvolva papel ativo na sua aprendizagem, aceitando o desafio colocado pelo professor e passando a agir, a formular hipóteses e a validar seus argumentos sobre o conteúdo em questão. Durante tal processo, o professor abre mão de seu protagonismo na condução do processo de investigação e de construção do conhecimento, evitando interferência direta sobre a construção que está sendo realizado pelos alunos; cada um dentro de sua condição naquele momento. Nessa fase, os alunos são postos em ação diante de situações problema, de modo que sejam levados a mobilizar estratégias de base e conhecimentos anteriores para que sejam capazes de realizar as operações de seleção, organização e interpretação de informações, representando-as de diferentes formas e tomando decisões, de modo que o processo de construção do conhecimento matemático efetivamente ocorra e, como consequência, haja a formação de sentido para o aluno (POMMER, 2013 apud REGES, 2020).

A situação didática deve incluir momentos de trabalho independente para os alunos, em que seja possível o debate e a troca de ideias, oportunizando descobertas próprias, a partir de uma situação problematizadora. Esse trabalho independente constitui o que Brousseau denomina de situações didáticas. Dessa forma, as situações didáticas contém em seu bojo situações didáticas.

2.4 CONTRATO DIDÁTICO

A interação de professor, aluno e meio (*milieu*) pressupõe regras, que são chamadas, por Brousseau (2008), de contrato didático. O contrato didático refere-se ao estudo das regras e das condições que condicionam o funcionamento da educação escolar e diz respeito às obrigações mais imediatas e recíprocas que se estabelecem entre professor e alunos. Certas características do saber matemático, tais como formalismo, abstração e rigor, condicionam algumas regras implícitas do contrato didático.

Brousseau (2008) estabelece três exemplos de contrato didático.

No primeiro, a ênfase está na importância do conteúdo. Neste caso, o professor considera que detém o monopólio do conhecimento; o aluno não sabe nada do que vai ser ensinado. O professor impõe o uso de um único método de organização e apresentação do conteúdo (sequência linear de axiomas, definições, teoremas, demonstrações e exercícios). Cabe ao aluno prestar muita atenção à aula, tomar notas, repetir os exercícios clássicos,

estudar e fazer provas. Geralmente, o aluno considera que o nível de exigência das provas é superior ao nível das aulas, podendo haver um nível de conflito entre alunos e professor e a avaliação pode ser usada como instrumento de controle.

No segundo exemplo, a ênfase está no relacionamento entre o aluno e o saber. Aqui, o aluno é quem efetivamente deve aprender e não é o professor quem tem o poder de transmitir conhecimentos. O professor propõe a realização de trabalhos em grupo e faz poucas intervenções para não “atrapalhar” (educação não diretiva). Neste caso, o professor deixa de analisar os conceitos em formação como se a aprendizagem escolar fosse uma atividade espontânea (saber cotidiano) e a ideia tradicional de currículo fica essencialmente modificada.

No último exemplo, a ênfase está no relacionamento do aluno com o saber. Neste caso, o professor não é considerado fonte de conhecimento, mas tenta estabelecer um nível de intervenção. O professor planeja as situações didáticas (problemas, jogos, atividades, trabalhos de pesquisa,...) e os alunos podem trabalhar individualmente, ou em pequenos grupos ou ainda a classe como um todo. Neste exemplo de contrato didático há uma maior valorização da resolução de problemas, fazendo com que o aluno seja levado a atuar ativamente na elaboração dos conceitos matemáticos.

Em ambos os casos de contrato didático, podem ocorrer rupturas. O aluno pode apresentar desinteresse pela resolução de problemas propostos pelo professor ou não demonstrar envolvimento necessário nas atividades propostas. Também, o professor pode propor a resolução de um problema para a qual a estratégia de solução não está compatível com o nível intelectual e cognitivo do aluno, ou ainda, o professor pode apresentar uma postura pedagógica não compatível com sua função de orientador das situações de aprendizagem.

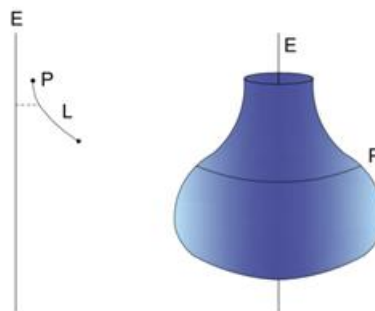
3 CORPOS REDONDOS

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos pertinentes a cilindros, cones e esferas, considerados como corpos redondos (BRASIL, 2018) e que são casos particulares de sólidos de revolução. Inicialmente definimos sólidos de revolução e apresentamos o Princípio de Cavalieri utilizado para a determinação de áreas e de volumes. Após, tratamos cada um dos corpos redondos em que apresentamos a definição e a determinação de áreas da superfície e de volumes. No que segue tratamos dos teoremas de Pappus, os quais podem ser utilizados para o cálculo de áreas de superfícies e de volumes de sólidos de revolução. Para isso, usamos como principais referenciais o livro *A Matemática no Ensino Médio v. 2* (LIMA et al, 2013) e o *Material Teórico - Módulo: Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindros, Cones e Esferas do Portal da OBMEP* (NETO, 2020a, 2020b, 2020c).

3.1 SUPERFÍCIES E SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

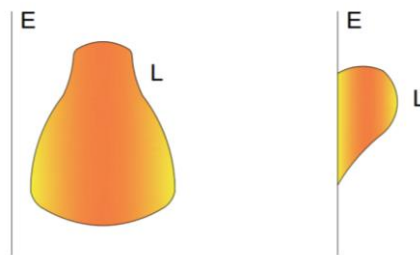
Consideremos em um plano, uma reta E chamada eixo e uma linha L , simples, que não corta esse eixo. Imagine que essa linha gira em torno do eixo, ou seja, cada ponto L descreva uma circunferência em um plano perpendicular a E e com centro sobre E (Figura 4).

Figura 4 – Rotação



Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 275).

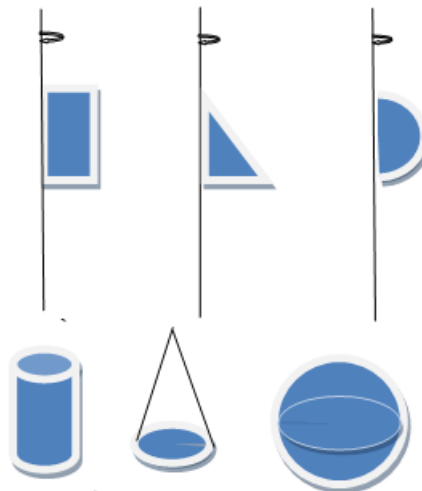
Cada ponto $P \in L$ percorre então uma circunferência cujo raio é a sua distância ao eixo e a reunião de todas essas circunferências é chamada uma superfície de revolução. Se a linha L for fechada ou se seus dois extremos pertencerem ao eixo (Figura 5), a superfície de revolução delimita um sólido chamado sólido de revolução.

Figura 5 – Linha L 

Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 276).

Reparemos que a rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados produz um cilindro, a rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um dos catetos produz um cone e a rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém o diâmetro produz uma esfera (Figura 6).

Figura 6 – Rotação de retângulo, triângulo e semicircunferência



Fonte: Adaptação de LIMA et al (2013, p. 276).

Assim, cilindros, cones e esferas podem ser considerados sólidos de revolução.

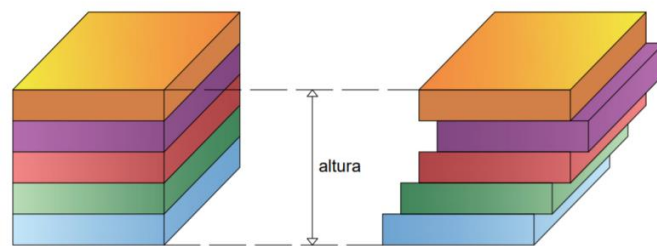
3.2 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

O Princípio de Cavalieri é uma estratégia comumente adotada no Ensino Médio para a determinação de volumes. É a ferramenta usualmente encontrada nos livros didáticos (MELLO, 2005; SOUZA, 2020) quando estes abordam de uma maneira simples o cálculo de

volumes de sólidos geométricos em geral, trazendo uma comparação entre sólidos em que a razão das áreas das secções é igual a 1.

Vejamos uma situação que ilustra o Princípio de Cavalieri. Sobre uma mesa, formamos uma pilha com cinco caixas de dimensões idênticas e ao lado modificamos a forma da pilha sem retirar nem acrescentar caixa alguma (Figura 7).

Figura 7 – Pilhas com caixas idênticas



Fonte: A autora.

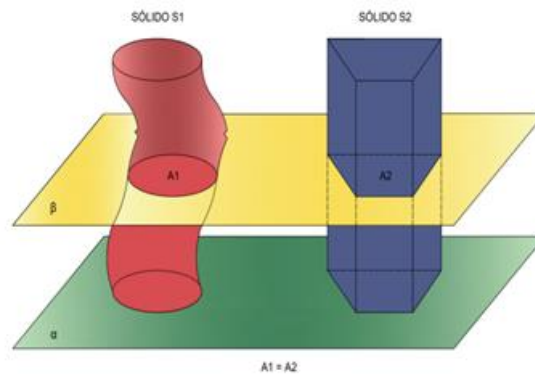
Observando as pilhas, é possível notar que:

- A altura das duas pilhas é a mesma, pois elas têm a mesma quantidade de caixas;
- As caixas que ficam a mesma distância da mesa têm a mesma área, pois elas são idênticas;
- A segunda pilha tem o mesmo volume da primeira, já que é formada por as mesmas caixas e, portanto, ocupa a mesma porção do espaço.

O Princípio de Cavalieri, afirma que: Dois sólidos S_1 e S_2 , apoiados num plano α e contidos num mesmo semiespaço, terão o mesmo volume V se todo plano β , paralelo a α , secciona os dois sólidos segundo regiões planas de mesma área A .

Uma ilustração dos sólidos pode ser vista na Figura 8.

Figura 8 – Sólidos com mesmo volume



Fonte: Adaptação de MELLO (2005, p. 463).

No sentido hermenêutico o Princípio de Cavalieri, não é um princípio e sim um teorema e requer demonstração. Segundo Paterline (2010, p. 42):

Não nos esqueçamos de que o Princípio de Cavalieri, normalmente adotado como postulado nos textos para ensino da Matemática Elementar é, na verdade, um teorema. Para demonstrá-lo é suficiente usar alguns poucos conceitos da teoria de integração de funções reais. O Princípio de Cavalieri é adotado sem demonstração para evitar as dificuldades de se apresentar precocemente essa teoria. As dificuldades ficam concentradas em uma única afirmação, que é assumida como plausível mediante uma boa explicação do professor. A ideia traduzida por esse princípio é fácil de entender, e parece que os estudantes do ensino médio não têm resistência em aceitá-la.

Segundo Lima (1991), a demonstração envolve conceitos avançados da Teoria da Medida e por isso deve ser abordada em cursos de matemática avançada.

Os argumentos utilizados na ilustração das pilhas com caixas (Figura 7) não constituem uma demonstração do Princípio de Cavalieri, mas, dão uma forte indicação de que ele é verdadeiro.

Segundo Eves (2004), os princípios de Cavalieri para o cálculo de áreas e volumes, respectivamente, apresentam os seguintes enunciados:

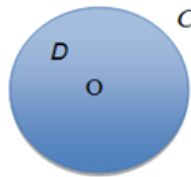
1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles é paralelo a um plano dado determina nos sólidos, secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante (EVES, 2004, p. 426).

O Princípio de Cavalieri será utilizado nas seções 3.3, 3.4 e 3.5 para estabelecer o volume de cilindro, cone e esfera.

3.3 O CILINDRO

Seja C um círculo de centro O e raio $r > 0$. A região D do plano delimitado pelo círculo C é chamada de disco de centro O e raio r (Figura 9). Enfatizamos que o círculo C está contido no disco D . A parte do disco que não está contida em C é chamada interior do disco.

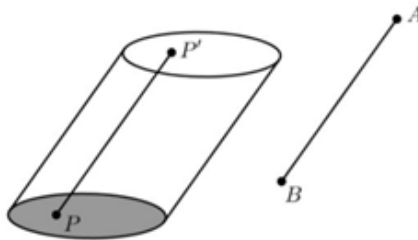
Figura 9 – Disco com centro O , delimitado pelo círculo C .



Fonte: A autora.

Consideremos, agora, um disco D contido em um plano e um segmento AB não contido no plano do disco D . Podemos supor que uma das extremidades do segmento, digamos o ponto A , não está no plano que contém o disco D (Figura 10).

Figura 10 – Um cilindro e sua geratriz AB .



Fonte: (NETO, 2020a, p. 1).

Para cada ponto $P \in D$, consideremos o segmento PP' que satisfaz as três condições:

(1) a reta que passa por P e P' é paralela à reta determinada por A e B ;

(2) $\overline{PP'} = \overline{AB}$

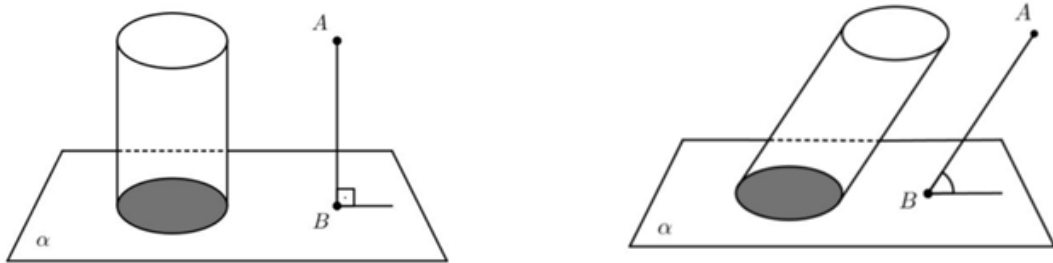
(3) para cada $P \in D$, o ponto P' está no mesmo semiespaço que o ponto A , em relação ao plano que contém o disco D .

O conjunto formado por todos os segmentos PP' satisfazendo (1), (2) e (3), com $P \in D$, é um sólido, chamado cilindro circular de base D e geratriz AB . Chamaremos o plano que contém a base D do cilindro de plano da base do cilindro.

O conjunto dos segmentos PP' satisfazendo (1), (2) e (3), com $P \in D$, é uma superfície, chamada superfície cilíndrica circular com base C e geratriz AB . Intuitivamente, a superfície cilíndrica é a “casca” do cilindro. Como todos os cilindros e superfícies cilíndricas que vamos estudar aqui são circulares, vamos chamá-los apenas de cilindros e superfícies cilíndricas.

Quando a geratriz de um cilindro é perpendicular ao plano da base, dizemos que esse cilindro é reto. Caso contrário, dizemos que o cilindro é oblíquo. Na Figura 11, estão representados um cilindro reto e um cilindro oblíquo.

Figura 11 – Cilindro reto e cilindro oblíquo

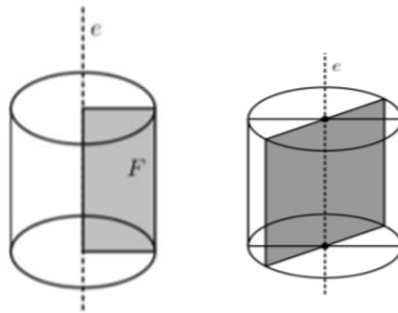


Fonte: (NETO, 2020a, p. 1).

Os extremos dos segmentos que determinam um cilindro formam dois discos os quais chamamos, de bases do cilindro. Se um cilindro é reto, a reta determinada pelos centros de suas bases é chamada eixo de simetria do cilindro. A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm suas bases. Se um cilindro é reto, sua altura coincide com a distância entre os centros de suas bases.

Como já vimos, podemos obter um cilindro por meio da rotação de um retângulo em torno de um eixo de simetria. Considerando uma reta e , que passa por um dos lados do retângulo F , como o eixo de simetria, ao girarmos o retângulo em torno de e , obtém-se um cilindro circular reto (Figura 12). Reciprocamente, todo cilindro reto pode ser construído dessa maneira. Por isso, também chamamos um cilindro reto de cilindro de revolução.

Figura 12 – Um cilindro de revolução e um cilindro equilátero



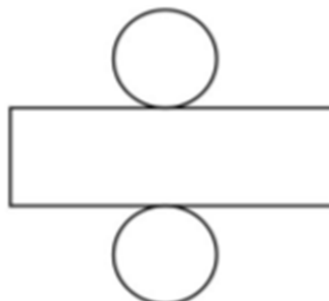
Fonte: (NETO, 2020a, p. 1-2).

Suponhamos que um cilindro de revolução seja obtido a partir da rotação de um retângulo com lados de comprimento r e h em torno de um lado que tenha comprimento h . A intersecção de um cilindro reto com um plano que contém seu eixo de simetria é chamada de secção meridiana do cilindro. Quando a secção meridiana de um cilindro é um quadrado (isto é, quando $h = 2r$), dizemos que o cilindro é equilátero (Figura 12).

3.3.1 Área da superfície de um cilindro circular reto

A superfície de um cilindro circular reto é formada por suas duas bases, que são discos, juntamente com a superfície cilíndrica em si a qual chamamos superfície lateral do cilindro. Para calcularmos a área dessa superfície é suficiente encontrar uma região do plano que tenha a mesma área que ela e, em seguida, calcular a área dessa região do plano. Uma região do plano com essa propriedade é dita uma planificação da superfície cilíndrica (Figura 13).

Figura 13 – Planificação de um cilindro circular reto



Fonte: (NETO, 2020a, p. 2).

No caso de um cilindro circular reto, essa planificação é relativamente simples (Figura

13), sendo composta pelos dois círculos, que são as bases do cilindro, e por um retângulo, que corresponde à sua superfície lateral. A altura desse retângulo é igual à altura do cilindro, enquanto a sua base é igual ao comprimento do círculo C que delimita a base do cilindro (isso porque desenrolamos a superfície lateral do cilindro para formar o retângulo).

Assim, se um cilindro circular reto tem raio da base r e altura h , então a área das duas bases é $2\pi r^2$ e a área lateral do cilindro é $2\pi r \cdot h$.

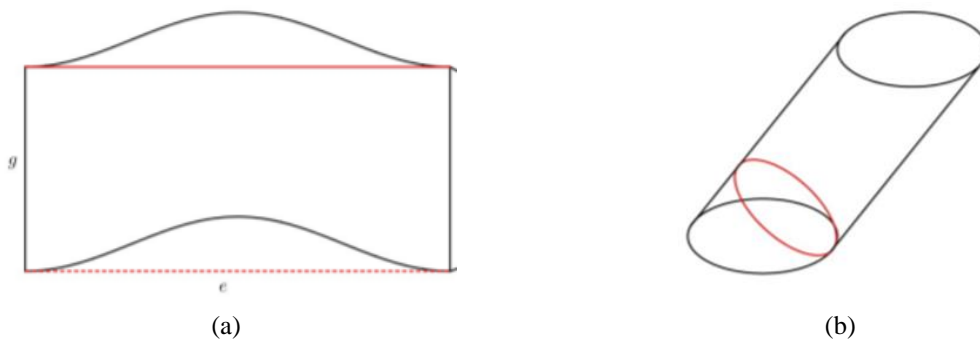
Desse modo, a área total da superfície de um cilindro reto de raio da base r e altura h , é

$$A_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h).$$

No caso particular do cilindro equilátero, vimos que $h = 2r$. Logo, a área de sua superfície é $A_c = 2\pi r(r + 2r) = 6\pi r^2$

Uma pergunta natural que surge a partir do que foi discutido acima é: qual é a área da superfície de um cilindro oblíquo? Para responder a esta pergunta, podemos imprimir e recortar a figura da Figura 14a, ignorando o segmento tracejado. Depois, enrolamos o pedaço de papel recortado e colamos ao longo da pequena aba (Figura 14b).

Figura 14 – Planificação de um cilindro oblíquo



Fonte: (NETO, 2020a, p. 3).

A figura resultante será um cilindro oblíquo, sem as bases. A curva em vermelho corresponde a uma elipse que é a interseção de um plano perpendicular à geratriz do cilindro passando pela extremidade de um dos segmentos que formam a superfície cilíndrica (Figura 14).

Observamos que a área planificada, desenhada na Figura 14, é igual a área do retângulo de altura igual ao comprimento g da geratriz do cilindro e base igual ao comprimento do segmento vermelho da Figura 14 que é a planificação da elipse que aparece

em vermelho.

Dessa forma, a área lateral de um cilindro circular oblíquo é igual à área lateral de um cilindro reto cuja base é uma elipse. Esse cilindro pode ser obtido deslocando-se parte do cilindro oblíquo da Figura 14 que está abaixo da elipse vermelha para a parte superior desse cilindro. Isso corresponde, na planificação, a deslocar a parte que está acima do segmento vermelho na Figura 14 para a parte inferior dessa figura de modo a produzir um retângulo.

Portanto, a área lateral do cilindro oblíquo é $A_L = g \cdot l$, em que g é o comprimento da geratriz do cilindro e l é o comprimento da elipse obtida como secção do cilindro por um plano perpendicular à reta que passa pelos centros de suas bases.

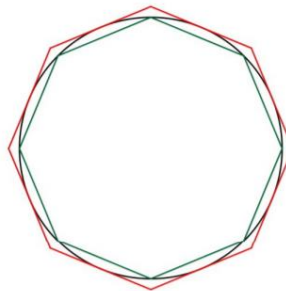
No entanto, não há uma fórmula simples para calcular o comprimento de uma elipse, mesmo se usarmos ferramentas mais sofisticadas, como o Cálculo. O problema de se determinar o comprimento de uma elipse aparentemente foi considerado pela primeira vez pelo matemático inglês John Wallis (1616-1703) em 1665. Esse problema deu origem à noção de integral elíptica e é assunto que foi objeto de estudo de muitos matemáticos famosos, como Euler, Legendre, Gauss, Abel e Jacobi.

3.3.2 Volume de um cilindro

Vamos demonstrar que o volume de um cilindro circular é igual a área de sua base multiplicada por sua altura. Para isso, iremos usar o princípio da exaustão e o Princípio de Cavalieri.

Dado um cilindro circular reto C , cuja base é um disco D de raio r , vamos construir, para cada natural $n \geq 3$, dois prismas retos p_n e P_n , cujas bases são polígonos regulares.

Figura 15 – Base de um cilindro e polígonos regulares inscrito e circunscrito



Fonte: (NETO, 2020a, p. 4).

A base do prisma p_n é um polígono regular q_n de n lados, inscrito no disco D , enquanto a base de P_n é um polígono regular Q_n de n lados, circunscrito ao disco D . Vamos denotar as áreas de q_n e Q_n por $A(q_n)$ e $A(Q_n)$. Uma vez que as alturas de p_n , P_n e do cilindro são todas iguais a h , os volumes dos prismas p_n e P_n são dados, respectivamente, por:

$$\text{Vol}(p_n) = A(q_n)h \text{ e } \text{Vol}(P_n) = A(Q_n)h.$$

Agora, se $A(D)$ é a área da base do cilindro, então:

$$A(q_n) < A(D) < A(Q_n).$$

Assim, $A(q_n)h < A(D)h < A(Q_n)h$, ou seja

$$\text{Vol}(p_n) < A(D)h < \text{Vol}(P_n), \text{ para todo } n \geq 3. \quad (4)$$

Por outro lado, como o prisma p_n está contido no cilindro e o prisma P_n contém o cilindro, temos que

$$\text{Vol}(p_n) < \text{vol}(C) < \text{Vol}(P_n), \quad (5)$$

para todo $n \geq 3$, onde $\text{vol}(C)$ indica o volume do cilindro C .

A seguir, mostraremos que as validades de (4) e (5) para todo $n \geq 3$ não deixa outra alternativa além de que seja: $\text{Vol}(C) = A(D)h$.

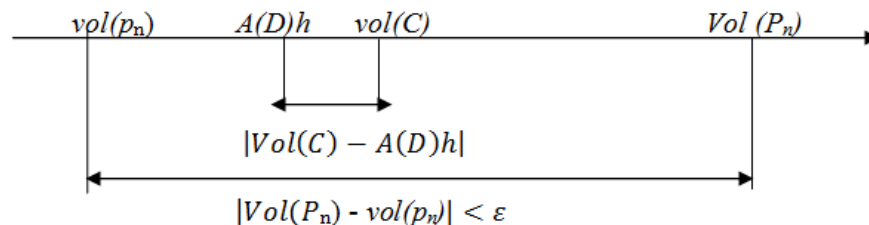
Para tanto, notemos inicialmente que, para cada erro $\varepsilon > 0$, é possível escolher n suficientemente grande, tal que

$$|\text{Vol}(P_n) - \text{Vol}(p_n)| < \varepsilon.$$

Se $\text{Vol}(C)$ fosse diferente de $A(D)h$ a diferença $\text{vol}(C) - A(D)h$ seria diferente de zero, e poderíamos escolher $\varepsilon = |\text{vol}(C) - A(D)h| > 0$. Para esse ε , existe n suficientemente grande tal que $|\text{Vol}(P_n) - \text{Vol}(p_n)| < \varepsilon = |\text{vol}(C) - A(D)h|$.

Porém, isso contradiz o fato (veja a Figura 16) de que: $|\text{Vol}(C) - A(D)h| < |\text{Vol}(P_n) - \text{Vol}(p_n)|$ para todo $n \geq 3$.

Figura 16 - Diferenças entre $A(D)h$ e $\text{Vol}(C)$ e entre $\text{Vol}(P_n)$ e $\text{Vol}(p_n)$



Fonte: Adaptação de Neto (2020a, p. 4).

Assim, concluímos que $\text{vol}(C) = A(D)h$, isto é, o volume do cilindro reto em questão é igual à

área da sua base multiplicada pela sua altura.

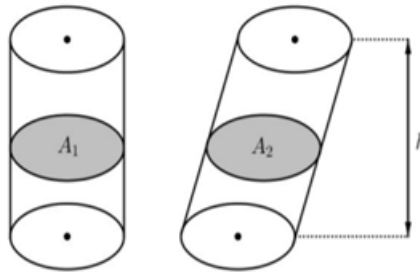
Se r é o raio da base D , então $A(D) = \pi r^2$; logo o volume de um cilindro reto de altura h e raio da base r é igual a

$$\text{vol}(C) = \pi r^2 h.$$

No caso particular em que o cilindro é equilátero, temos $h = 2r$, logo $\text{vol}(C_E) = 2\pi r^3$.

Vejamos, agora, o caso do cilindro oblíquo C , de altura h e base D de área $A(D)$. Para isso, construímos um cilindro reto C_1 de mesma altura e cuja base seja um círculo de mesmo raio que C (Figura 17).

Figura 17 – As áreas das secções paralelas as bases são iguais



Fonte: (NETO, 2020a, p. 5).

Para cada plano α paralelo ao plano que contém as bases dos dois cilindros, as interseções $\alpha \cap C$ e $\alpha \cap C_1$, de α com cada um dos cilindros, são círculos de raios iguais aos raios dos círculos das bases de C e C_1 , respectivamente. Mas, como os círculos das bases de C e C_1 têm raios iguais, concluímos que as áreas A_1 e A_2 de $\alpha \cap C$ e $\alpha \cap C_1$, respectivamente, são iguais, para cada plano α tomado como acima. Então, pelo Princípio de Cavalieri, os dois cilindros têm um mesmo volume, ou seja, $\text{vol}(C) = \text{vol}(C_1) = A(D)h$

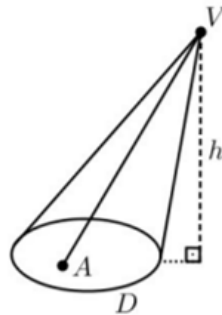
3.4 O CONE

Assim como para cilindros, usaremos a palavra círculo para designar uma curva plana formada por todos os pontos situados a uma distância dada de um ponto dado, e usaremos a palavra disco, para designar a região do plano delimitada por um círculo, incluindo o próprio círculo. Os pontos que pertencem a um disco, mas não pertencem ao círculo que o delimita formam o interior do disco. Assim, o interior do disco é formado pelos pontos cuja distância até o ponto O é estritamente menor que r . Feitas essas observações, passamos à definição de

cone e de superfície cônica limitada.

Seja V um ponto fora do plano α que contém o disco D (Figura 18). Chamamos de cone circular de base D e vértice V o sólido formado por todos os pontos do espaço que pertencem a algum segmento de reta AV , onde A é um ponto do disco D . Por outro lado, se C é o círculo que delimita D , então o conjunto dos pontos que pertencem a um segmento AV , com A pertencente a C , é chamada superfície cônica circular limitada de base C e vértice V .

Figura 18 – Cone sólido de base D e vértice V

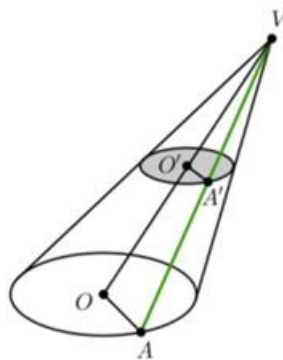


Fonte: (NETO, 2020b, p. 3).

Consideramos apenas cones circulares, razão pela qual usaremos o nome cone para indicar um cone sólido circular e superfície cônica para indicar uma superfície cônica circular. A distância h entre o vértice V do cone e o plano α que contém sua base D é chamada de altura do cone.

Se A é um ponto pertencente ao círculo C da base do cone, então o segmento AV é dito uma geratriz do cone. Na Figura 19 a geratriz AV aparece na cor verde.

Figura 19 – Geratriz e uma seção paralela à base do cone



Fonte: (NETO, 2020b, p. 3).

Note que, se o ponto A percorre o círculo C , então a geratriz AV pode, em geral, aumentar ou diminuir de tamanho. Como veremos mais adiante, isso só não ocorre se a reta for perpendicular ao plano que contém C .

Afirmção 1. Se seccionarmos um cone por um plano β paralelo ao plano α que contém a base, obteremos um disco.

Para justificarmos a Afirmção 1, consideremos a curva C'' de interseção do plano β com a superfície cônica. Se O é o centro da base do cone, sejam A' a interseção da geratriz AV com C'' e O' a interseção de OV com o plano β . Os pontos O' e A' estão no plano determinado por O , A e V . Como a reta determinada por O' e A' está contida no plano β , que é paralelo ao plano α que contém a base do cone, temos que $O'A'$ é paralelo a OA . Conseqüentemente, os triângulos $O'A'V$ e OAV são semelhantes, o que nos dá a igualdade

$$\frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{O'V}}{\overline{OV}}$$

Por outro lado, se B' é outro ponto qualquer de C' , então o mesmo argumento acima se aplica e nos dá

$$\frac{\overline{O'B'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{O'V}}{\overline{OV}}$$

onde B é a interseção de $\overrightarrow{VB'}$ com α . Comparando as duas igualdades anteriores, obtemos que

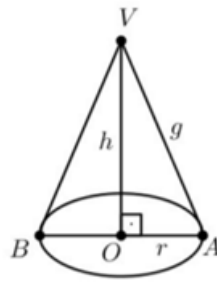
$$\frac{\overline{O'B'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}}.$$

Então, como $\overline{OB} = \overline{OA}$ (pois $A, B \in C$ e C é um círculo), concluímos que $\overline{O'B'} = \overline{O'A'}$. Isso mostra que quaisquer dois pontos de C' são equidistantes de O' , ou seja, que C' é um círculo de centro O' .

De posse da informação anterior, se a reta \overrightarrow{OV} determinada pelo vértice V do cone e pelo centro O de sua base for perpendicular ao plano α que contém a base do cone, diremos que o cone é reto. Caso contrário, diremos que o cone é oblíquo.

Cones retos têm propriedades interessantes. A primeira delas é que, conforme mencionamos anteriormente, todas as suas geratrizes têm um mesmo comprimento. Isso porque cada geratriz é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimentos fixos: r (raio da base do cone) e h (altura do cone) (Figura 20).

Figura 20 – Cone reto



Fonte: (NETO, 2020b, p. 3).

Assim, o Teorema de Pitágoras fornece a seguinte relação entre o comprimento r do raio da base, a altura h e o comprimento g da geratriz de um cone reto: $r^2 + h^2 = g^2$.

Outra propriedade importante de um cone (circular) reto é que ele pode ser obtido a partir da revolução de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Por exemplo, em relação ao cone reto da Figura 20, isso significa que ele pode ser obtido fazendo-se o triângulo AOV dar uma volta completa em torno do cateto OV . Evidentemente, a revolução desse mesmo triângulo em torno do cateto OA , isto é, o giro de 360° em torno desse outro cateto, gerará outro cone.

Para um cone não necessariamente reto, sua interseção com um plano que contém o vértice e o centro da base é chamada uma seção meridiana do cone. O triângulo VAB é uma seção meridiana do cone reto em questão. Por sua vez, este conceito nos leva a outra afirmação importante acerca de cones retos.

Afirmação 2. Um cone é reto se, e somente se, todas as suas seções meridianas são congruentes a um mesmo triângulo isósceles.

De fato, se o cone é reto, vimos que todas as suas geratrizes têm um mesmo comprimento g ; portanto, uma seção meridiana será sempre um triângulo isósceles com dois lados, iguais a g .

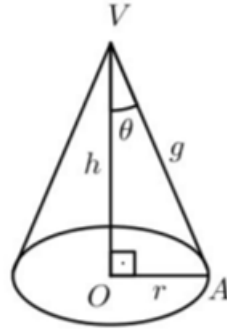
Reciprocamente, suponha que a seção meridiana é sempre um triângulo isósceles. Se VAB é um desses triângulos, então os triângulos VAO e VBO são congruentes por LLL, de forma que $\widehat{VOA} = \widehat{VOB} = 90^\circ$. Então, $VO \perp AB$ para todo diâmetro AB da base do cone, de forma que \overrightarrow{VO} é perpendicular ao plano que contém a base do cone (isto é, o cone é reto).

Um caso particular importante de cone reto é aquele em que a seção meridiana é um triângulo equilátero. Nesta situação, dizemos que o cone é equilátero. Pela Afirmação 2, todo cone equilátero é necessariamente um cone reto. Além disso, se um cone é equilátero, então

suas geratrizes têm medida g igual a medida do diâmetro da base, ou seja, $g = 2r$.

Para cones retos em geral, o ângulo de abertura é a medida θ do ângulo entre sua altura e uma de suas geratrizes (Figura 21).

Figura 21 – Ângulo de abertura de um cone reto



Fonte: (NETO, 2020b, p. 3).

Uma vez que $V\hat{O}A = 90^\circ$, vemos que o ângulo θ de abertura de um cone reto satisfaz $0 < \theta < 90^\circ$. Além disso, temos as seguintes relações, as quais seguem imediatamente do triângulo $V\hat{O}A$ (Figura 21): $\cos\theta = \frac{h}{g}$, $\text{sen}\theta = \frac{r}{g}$ e $\text{tg}\theta = \frac{r}{h}$.

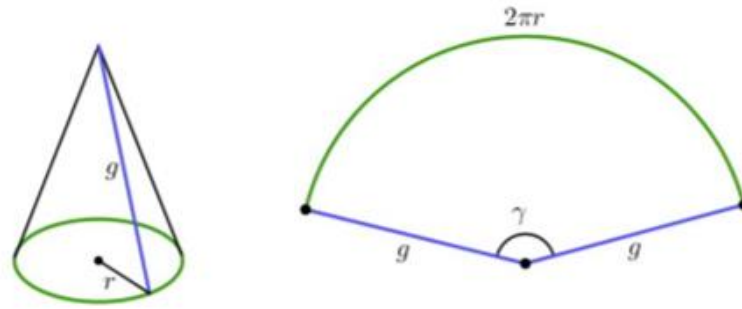
Em particular, o cone reto é equilátero se, e somente se, $\text{sen}\theta = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$, isto é, se, e somente se, $\theta = 30^\circ$.

3.4.1 Área da superfície de um cone reto

Para calcular a área da superfície de um cone reto, observamos que essa área é a soma da área da base do cone com a área da superfície lateral (a superfície cônica correspondente ao cone sólido). A área da base do cone é a área de um círculo: πr^2 , onde r é o raio da base do cone. Assim, a dificuldade aqui está em calcular a área lateral do cone.

Como estamos considerando um cone reto, as geratrizes desse cone têm todas um mesmo comprimento g . Assim, se planificarmos sua superfície lateral, cortando o cone ao longo de uma geratriz e, em seguida, abrindo-o, obteremos um setor circular de raio g e vértice V (Figura 22), onde V não aparece nomeado, por simplicidade.

Figura 22 – Planificando a superfície lateral de um cone



Fonte: (NETO, 2020b, p. 3).

Observe que o arco do setor tem comprimento $2\pi r$ porque ele é originado a partir do círculo de raio r que forma a base do cone, e $2\pi r$ é o comprimento de tal círculo. Então, calcular a área lateral A_L do cone é o mesmo que calcular a área desse setor. Por sua vez, para fazê-lo, precisamos descobrir seu ângulo de abertura γ (Figura 22). Para isso, observamos que um ângulo de uma volta completa (2π radianos) corresponde ao comprimento inteiro do círculo de raio g ($2\pi g$); assim como o ângulo γ corresponde ao comprimento $2\pi r$ do arco do setor de abertura γ e raio g . Assim, uma regra de três simples nos dá $\frac{2\pi}{2\pi g} = \frac{\gamma}{2\pi r}$, de sorte que $\gamma = \frac{2\pi r}{g}$.

Continuando, observamos agora que o ângulo uma volta completa (2π radianos) corresponde a área inteira do círculo de raio g (πg^2), enquanto o ângulo $\gamma = \frac{2\pi r}{g}$ corresponde a área lateral A_L . Portanto, uma nova regra de três simples fornece $\frac{A_L}{\gamma} = \frac{\pi g^2}{2\pi}$, ou seja,

$$A_L = \frac{g^2 \gamma}{2} = \frac{g^2}{2} \cdot \frac{2\pi r}{g} = \pi r g.$$

Concluimos que a área total A_T da superfície de um cilindro reto com raio da base r e geratriz g é igual a soma da área $A_B = \pi r^2$ da base com a área lateral $A_L = \pi r g$, ou seja,

$$A_T = \pi r(r + g).$$

Caso sejam conhecidos o raio r da base e a altura h de um cone reto, podemos escrever que a área total de sua superfície é dada por

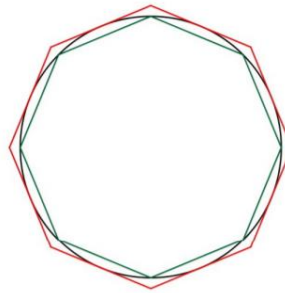
$$A_T = \pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2}).$$

3.4.2 Volume de um cone reto

Vamos mostrar que o volume de um cone (circular) é igual a um terço da área de sua base multiplicada por sua altura. Essa é a mesma expressão do volume de uma pirâmide. Demonstraremos que vale essa igualdade usando o princípio da exaustão, que já usado em determinar o volume de um cilindro.

Seja K um cone circular, de vértice V e altura h , cuja base é um disco D de raio $r > 0$. Para cada natural $n \geq 3$, sejam q_n e Q_n polígonos regulares de n lados, sendo que q_n está inscrito em D e Q_n está circunscrito a D .

Figura 23 – Polígonos q_n e Q_n , respectivamente inscrito e circunscrito à base do cone



Fonte: (NETO, 2020b, p. 4).

Consideremos duas pirâmides p_n e P_n , ambas de vértice V e cujas bases são, respectivamente, os polígonos q_n e Q_n . Então, p_n e P_n tem altura h , de sorte que seus volumes são dados por

$$\text{vol}(p_n) = \frac{h}{3} \cdot \text{área}(q_n) \text{ e } \text{vol}(P_n) = \frac{h}{3} \cdot \text{área}(Q_n).$$

Por outro lado, por construção, temos $p_n \subset K \subset P_n$. Daí,

$$\text{vol}(p_n) < \text{vol}(K) < \text{vol}(P_n), \text{ para cada } n \geq 3. \quad (5)$$

Agora, uma vez que $q_n \subset D \subset Q_n$, temos uma desigualdade similar para as áreas de q_n , D e Q_n :

$$\text{área}(q_n) < \text{área}(D) < \text{área}(Q_n).$$

Multiplicando as desigualdades acima por $\frac{h}{3}$, obtemos

$$\frac{h}{3} \cdot \text{área}(q_n) < \frac{h}{3} \cdot \text{área}(D) < \frac{h}{3} \cdot \text{área}(Q_n), \text{ ou seja, para cada natural } n \geq 3,$$

$$\text{vol}(p_n) < \frac{h}{3} \cdot \text{área}(D) < \text{vol}(P_n). \quad (6)$$

Neste ponto, vamos assumir a validade do seguinte fato geométrico, intuitivamente

plausível: é possível considerar n suficientemente grande de modo que os volumes de p_n e P_n estejam arbitrariamente próximos. De outro modo, para cada erro $\varepsilon > 0$, existe um número natural n , suficientemente grande, tal que

$$|vol(P_n) - vol(p_n)| < \varepsilon.$$

Por outro lado, das desigualdades (5) e (6) segue que, para cada $n \geq 3$,

$$|vol(K) - \frac{h}{3} \text{área}(D)| < |vol(P_n) - vol(p_n)|. \quad (7)$$

Se $vol(K)$ fosse diferente de $\frac{h}{3} \text{área}(D)$, poderíamos tomar o erro ε como sendo

$$\varepsilon = |vol(K) - \frac{h}{3} \text{área}(D)| > 0.$$

Então, para um natural n suficientemente grande, teríamos

$$|vol(P_n) - vol(p_n)| < \varepsilon = |vol(K) - \frac{h}{3} \text{área}(D)|. \quad (8)$$

Uma vez que a desigualdade (8) contradiz a desigualdade (7), concluímos que $vol(K)$ não pode ser diferente de $\frac{h}{3} \text{área}(D)$. Assim,

$$vol(K) = \frac{h}{3} \text{área}(D). \quad (9)$$

Assim, o volume de um cone reto é $vol(K) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Como exemplo, vamos calcular o volume de um cone reto equilátero, cujo raio da base mede r .

Sendo g e h os comprimentos da geratriz e da altura do cone, sabemos que $g = 2r$ e, por (1), que

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$$

Portanto, (9) nos dá

$$vol = \frac{h}{3} \cdot \text{área}(D) = \frac{r\sqrt{3}}{3} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^3}{3} \sqrt{3}.$$

3.5 A ESFERA

O conjunto formado por todos os pontos do espaço que estão a uma distância dada $r > 0$ de um ponto fixado O é chamado superfície esférica S de centro O e raio r :

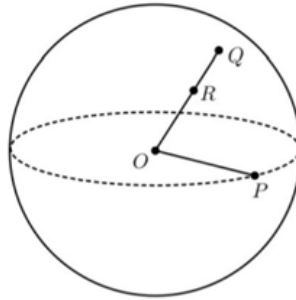
$$S = \{P / \overline{OP} = r\}.$$

O conjunto E formado por todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a r de um ponto fixado O é chamado a esfera de centro O e raio r

$$E = \{P / \overline{OP} \leq r\}.$$

Dessa forma, consideramos aqui a esfera E como sendo um sólido delimitado pela superfície esférica S de mesmo centro e mesmo raio (Figura 24).

Figura 24 – Pontos P e Q sobre a superfície esférica e ponto R em uma esfera correspondente



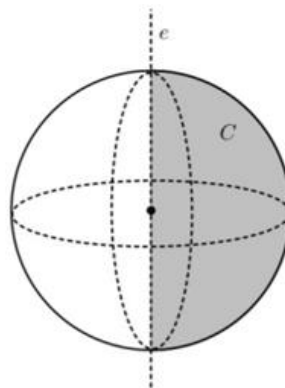
Fonte: (NETO, 2020c, p. 3).

Uma reta que passa pelo centro O de uma esfera E intersecta a superfície S dessa esfera em dois pontos A e B . Esses dois pontos são chamados antípodas, nome que vem do grego e significa pés contrapés. A explicação para isso é que, vendo o globo terrestre como uma esfera, duas pessoas que estiverem em pontos antípodas do globo estarão exatamente nessa posição: pés contrapés.

Um segmento de reta cujos extremos são pontos antípodas A e B é denominado um diâmetro dessa esfera. O centro O da esfera é ponto médio do segmento AB e $AB = 2r$, o dobro do raio da esfera.

Seja C um semicírculo e e a reta suporte do diâmetro de C (Figura 25).

Figura 25 – A esfera é um sólido de revolução



Fonte: (NETO, 2020c, p. 3).

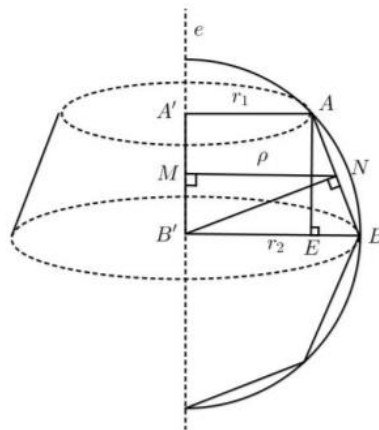
Uma revolução de C em torno de e é um giro de 360° de C em torno da reta e . Essa

reta é chamada de eixo de revolução. O sólido obtido pela revolução do semidisco delimitado por C em torno de e é uma esfera cujos, centro e raio, coincidem com o centro e o raio de C .

3.5.1 Área da superfície esférica

Para o cálculo da área da superfície de uma esfera, usaremos um argumento devido, essencialmente, ao matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C - 212 a.C). Consideremos uma superfície esférica gerada pela revolução em torno do eixo e de um círculo C , como na Figura 26. Vamos considerar uma poligonal P cujos vértices estão sobre o círculo C .

Figura 26 – Lateral de um tronco de cone gerada pela revolução do segmento



Fonte: (NETO, 2020c, p. 3).

Sendo a área lateral de um tronco de cone dada por $A_L = (r_1 + r_2)g$, onde $r_1 = \overline{AA'}$ e $r_2 = \overline{BB'}$ são os raios das bases do tronco de cone (Figura 26) e $g = \overline{AB}$ são o comprimento da geratriz do tronco. Seja $\rho = \overline{MN}$, onde M é o ponto médio de $A'B'$ e MN é paralela AA' e BB' . Usando semelhança de triângulos podemos concluir facilmente que $\rho = \frac{r_1+r_2}{2}$. Assim,

$$A_L = 2\pi \left(\frac{r_1+r_2}{2} \right) g = 2\pi\rho g.$$

Na Figura 26, os triângulos ABE e $NB'M$ (por terem dois ângulos iguais) são semelhantes. Logo, $\frac{\overline{AE}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{B'N}}$, ou seja, $\frac{h}{\rho} = \frac{g}{a}$, onde h é a altura do tronco de cone e $a = \overline{B'N}$ é o apótema da poligonal. Assim, $\rho g = ah$, o que nos permite escrever $A_L = 2\pi ah$.

Agora, tomemos uma poligonal $P_1, P_2 \dots P_n$, com $P_1=N$ e $P_n= S$ e $P_i P_{i+1}$, com i variando de 1 a $n-1$, gera a lateral de um tronco de cone, cuja área é dada por $A_i = 2\pi a h_i$, sendo a o apótema da poligonal e h_i a altura do tronco correspondente ao segmento $P_i P_{i+1}$.

Suponhamos que, à medida que n aumenta, a área A_s da superfície da esfera pode ser aproximada, com precisão arbitrariamente grande, pela soma das áreas laterais dos troncos de cone acima. Então,

$$\begin{aligned} A_s &\cong 2\pi a h_1 + \dots + 2\pi a h_n \\ &= 2\pi a (h_1 + \dots + h_n) \end{aligned}$$

Mas, como a soma das alturas dos troncos de cone é igual ao diâmetro $2R$ da esfera, temos $h_1 + \dots + h_n = 2R$ e, daí,

$$A_s \cong 2\pi a \cdot 2R.$$

Conforme comentamos, a aproximação acima é tanto melhor quanto maior for o número n de lados da poligonal. Por outro lado, quando o n aumenta, o apótema a se aproxima cada vez mais do raio da esfera, de sorte que

$$A_s = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

A área da superfície da esfera é obtida usando-se o método de Arquimedes. Evitamos aqui o Princípio da Exaustão, que deve ser usada para justificar que a soma das áreas dos troncos de cone realmente aproxima, com precisão arbitrariamente grande a área da superfície esférica.

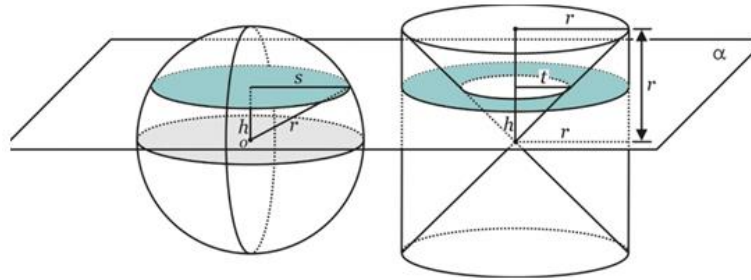
3.5.2 O Volume da esfera

Proposição 1: O volume V de uma esfera de raio r é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Demonstração: Consideremos uma superfície esférica S , de raio r , apoiada em um plano horizontal α e, ao lado de um cilindro equilátero C de raio da base r , também sobre esse mesmo plano (Figura 27).

Figura 27 – Esfera e cilindro



Fonte: (NETO, 2020c, p. 3).

Do cilindro C vamos retirar dois cones iguais, com bases que coincidem com as do cilindro e vértices no ponto médio do seu eixo, cujo volume corresponde a $\frac{4}{3}\pi r^3$. Seja G o sólido obtido.

Seja β um plano paralelo a α , que intercepta a superfície esférica e o sólido G , distante h de seus centros, determinando na superfície esférica uma circunferência de raio s e no sólido G uma coroa circular limitada por duas circunferências, uma de raio r e outra de raio h . A área do círculo $S \cap \beta$ é πs^2 . Temos que $s^2 + h^2 = r^2$, ou seja, $s^2 = r^2 - h^2$. Logo,

$$\pi s^2 = \pi(r^2 - h^2).$$

Dessa forma a área da coroa circular é $\pi r^2 - \pi h^2$, que é igual a área do círculo de raio s .

Assim, pelo Princípio de Cavalieri, temos que S e G , tem o mesmo volume. Logo, basta calcular o volume do sólido G para obtermos o volume de S .

Temos que o volume de S é dado pela diferença entre o volume do cilindro C e o volume dos dois cones iguais, equiláteros, retirados anteriormente, ou seja:

$$V_G = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^3 \text{ e } V_S = V_G = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

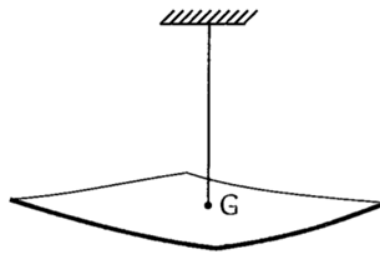
3.6 TEOREMAS DE PAPPUS

Apresentamos aqui os teoremas de Pappus, também denominados teoremas de Pappus-Guldin, que permitem demonstrar fórmulas que envolvem o cálculo de áreas das superfícies e os volumes dos sólidos de revolução de forma trivial. Esse teorema oferece ao aluno do Ensino Médio a possibilidade de solucionar situações problemas aparentemente difíceis para esse nível de ensino. Para tanto, torna-se necessário entender o conceito de centro de gravidade.

3.6.1 Centro de gravidade

Intuitivamente, o centro de gravidade (ou baricentro) de uma figura plana é um ponto tal que se fixarmos nele um fio, a figura pendurada por ele ficará em equilíbrio indiferente. Em particular, se a figura estiver em um plano horizontal, depois de pendurada permanecerá horizontal (Figura 28).

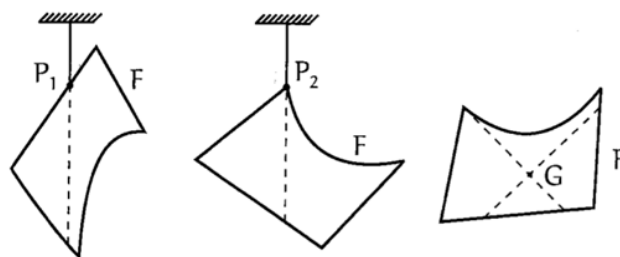
Figura 28 – Centro de gravidade G



Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 277).

Podemos encontrar o baricentro de uma figura F por um processo prático que é o seguinte. Primeiro penduramos a figura por um ponto P_1 de seu bordo e traçamos sobre F a reta vertical que contém esse ponto, ou seja, a reta que contém o fio. Depois, penduramos a figura por um outro ponto P_2 de seu bordo e traçamos também sobre F a reta vertical que contém P_2 . A interseção das duas retas é o baricentro de F (Figura 29).

Figura 29 – Um processo prático para encontrar o baricentro

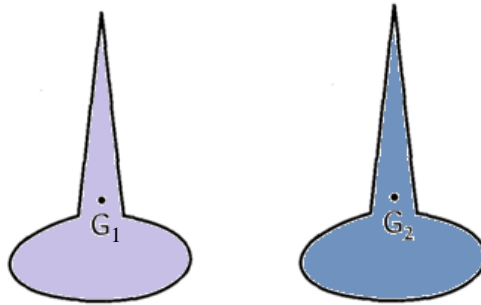


Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 277).

Vamos agora observar que, quando desenhamos uma linha plana fechada simples (ou seja, sem autointersecções), o termo figura pode se referir em geral tanto ao conjunto de pontos dessa linha, quanto ao conjunto dos pontos interiores. A palavra triângulo por exemplo, tanto pode se referir à união dos três lados quanto à região interior. Naturalmente

que para a determinação do centro de gravidade é preciso saber que conjunto estamos considerando. Na Figura 30, mostramos dois desenhos aparentemente iguais. Entretanto, no primeiro a figura consiste no conjunto dos pontos interiores à linha desenhada e no segundo a figura consiste apenas nos pontos da própria linha.

Figura 30 – Tipos de figuras



Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 278).

Para dar uma ideia mais concreta ao que dissemos, imagine que no primeiro caso a figura foi recortada de uma chapa de madeira e no segundo caso, a figura foi feita apenas com arame. Os centros de gravidade dessas figuras são G_1 e G_2 .

Vamos tratar agora de mostrar como se determina o centro de gravidade de figuras simples. Mas, para isso, devemos estabelecer como axiomas as proposições seguintes conforme Lima et al (2013):

- 1) O centro de gravidade de um segmento é o seu ponto médio.
- 2) Se uma figura possui um eixo de simetria então o seu centro de gravidade pertence a esse eixo.

Como consequência, se uma figura possui um centro de simetria (interseção de dois eixos de simetria), então esse ponto é o seu centro de gravidade.

3.6.1.1 Centro de gravidade de uma poligonal

Consideremos uma linha poligonal formada por segmentos consecutivos, l_1, l_2, \dots, l_n , de comprimentos a_1, a_2, \dots, a_n , respectivamente. Para justificar a definição que daremos, vamos imaginar que os lados dessa poligonal sejam varetas feitas do mesmo material e com mesma seção reta (seção perpendicular a cada vareta). Desta forma, a massa de cada vareta é proporcional ao seu comprimento, ou seja, $m_k = c \cdot a_k$, para $1 \leq k \leq n$. Como o centro, de

gravidade de cada vareta é o seu ponto médio, as noções que mostramos no exemplo anterior permitem aceitar a seguinte definição:

Definição. Se uma poligonal P é formada por segmentos consecutivos l_1, l_2, \dots, l_n , de comprimentos a_1, a_2, \dots, a_n , respectivamente e sendo (x_k, y_k) o ponto médio do segmento l_k , o centro de gravidade de P é o ponto $G = (x, y)$ onde:

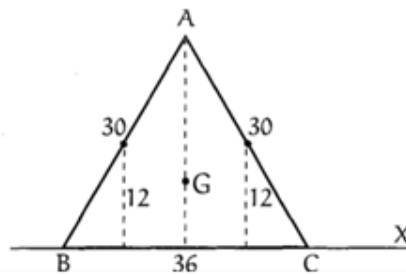
$$x = \frac{ax_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

e

$$y = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Vamos mostrar um exemplo onde calcularemos a posição do centro de gravidade do bordo de um triângulo (Figura 31), cujos lados medem 30cm, 30cm e 36cm.

Figura 31 – Triângulo



Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 281).

Para resolver, seja ABC o triângulo em questão com $AB = AC = 30$ e $BC = 36$. Vamos apoiá-lo em uma reta X que contém BC. Como o triângulo é isóscele então o centro de gravidade procurado está em seu eixo de simetria, ou seja, ele pertence à altura relativa ao lado BC. Logo, para determinar sua posição, basta determinar a que distância ele está da reta X. A altura relativa à BC divide o triângulo dado em dois triângulos retângulos com hipotenusa igual a 30 e um cateto igual a 18. Pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que distância de A à reta X mede 24 e, conseqüentemente, as distâncias dos pontos médios de AB e AC à reta X valem 12. De acordo com nossa definição, a distância do centro de gravidade desse triângulo ABC à reta X é:

$$y = \frac{30 \cdot 12 + 30 \cdot 12 + 36 \cdot 0}{30 + 30 + 36} = 7,5$$

Sabemos que a distância do baricentro de um triângulo a um lado é igual a um terço da altura relativa a esse lado. Logo, a distância do baricentro de ABC à reta X é igual a $24/3 = 8$.

Entretanto nossos cálculos mostraram que essa distância é 7,5. Onde está o erro?

Na realidade, não há erro nenhum. Neste exemplo, o triângulo é apenas a reunião dos três lados, ou seja, aqui a palavra triângulo refere-se a uma linha poligonal fechada formada por três segmentos e o centro de gravidade dessa figura está mesmo a 7,5 cm de distância do lado BC. O que ocorre é que o baricentro do triângulo que conhecemos – intersecção de suas medianas – é o centro de gravidade de sua superfície.

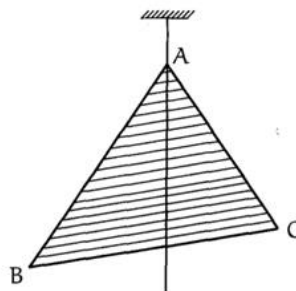
3.6.1.2 Centro de gravidade de um polígono

Vamos agora considerar polígonos como a região do plano limitada por uma linha poligonal fechada. Estaremos a seguir, nos preparando para determinar a posição do centro de gravidade da superfície das figuras planas.

Em primeiro lugar, vamos entender por que o ponto de intersecção das medianas de um triângulo é o centro de gravidade de sua superfície.

Imagine um triângulo ABC recortado de uma chapa de madeira e pendurado pelo vértice A (Figura 32). Porque a reta vertical que passa por A, passa também no ponto médio de BC?

Figura 32 – Triângulo pendurado por um vértice



Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 286).

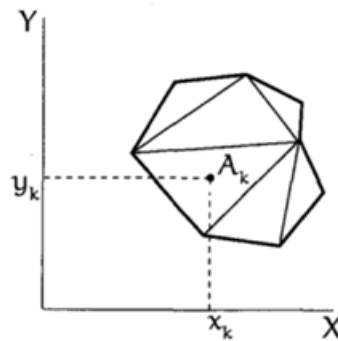
Para responder, imagine o triângulo ABC cortado por retas paralelas a BC em fatias muito finas. Cada fatia é "quase" um segmento e, portanto, só fica equilibrada se pendurada pelo seu ponto médio. Logo, a reta vertical que contém A passa pelos pontos médios de todas as fatias e, em particular, pelo ponto médio de BC. Ora, se o centro de gravidade da superfície de um triângulo pertence a uma mediana, então (repetindo-se a experiência) ele é o ponto de intersecção das três medianas. Concluímos então que o ponto de intersecção das medianas de

um triângulo é o centro de gravidade de sua superfície.

Para determinar a posição do centro de gravidade da superfície de um polígono, vamos imaginá-lo, por exemplo, dividido em triângulos T_1, T_2, \dots, T_n , com áreas A_1, A_2, \dots, A_n , respectivamente. Consideremos um sistema de coordenadas no plano do polígono e seja (x_k, y_k) o baricentro do triângulo T_k .

Apelando novamente para o raciocínio físico de considerar a figura recortada em uma chapa uniforme de espessura constante, temos que a massa de cada triângulo é proporcional à sua área, ou seja, a massa m_k do triângulo T_k é igual a $c \cdot A_k$ para uma certa constante c (que depende do material) (Figura 33). Podemos então imaginar o polígono transformado em um conjunto de partículas, cada uma delas no baricentro de um triângulo e com massa proporcional à sua área. Em outras palavras, estamos imaginando que toda a massa de um triângulo esteja concentrada no seu baricentro.

Figura 33 – Polígono



Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 286).

Essas considerações permitem aceitar a definição seguinte.

Definição. Se um polígono P está dividido em figuras,

$$T_1, T_2, \dots, T_n$$

de áreas A_1, A_2, \dots, A_n , respectivamente e sendo (x_k, y_k) o baricentro da figura T_k , o centro de gravidade da superfície de P é o ponto $G = (x, y)$, tal que:

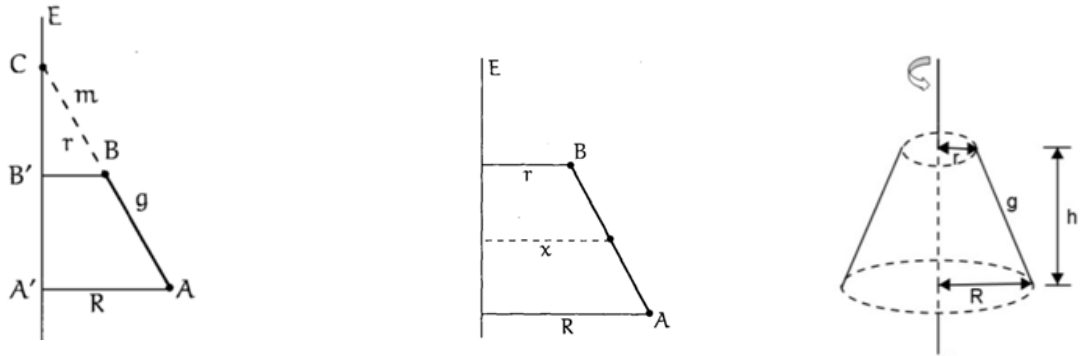
$$x = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} \quad \text{e}$$

$$y = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + \dots + A_ny_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}.$$

3.6.1.3 Uma aplicação do centro de gravidade: área lateral de um tronco de cone

Consideremos em um plano uma reta E e um segmento AB como mostrado a Figura 34.

Figura 34 – Reta E , segmento AB e o tronco de cone



Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 282-283).

O segmento AB quando gira em torno do eixo E forma a superfície lateral de um tronco de cone. Observando a Figura 34, se C é o ponto de interseção da reta AB com E , o tronco de cone é a diferença entre o cone de raio AA' e altura CA' e o cone de raio BB' e altura CB' .

Vamos então determinar a área lateral desse tronco de cone pela diferença das áreas laterais dos dois cones.

Sejam R e r as distâncias de A e B ao eixo E , respectivamente. Seja $AB = g$, a geratriz do tronco de cone e seja $BC = m$, a geratriz do cone menor (Figura 34). Como os triângulos CBB' e CAA' são semelhantes, temos:

$$\frac{r}{m+g} = \frac{r}{m} = \frac{R-r}{g}$$

ou seja, $(R-r) \cdot m = rg$.

Como a área lateral de um cone é igual a πRg , onde R é o raio de sua base e g é sua geratriz. Logo, a área lateral do tronco de cone é:

$$\begin{aligned} A &= \pi R(m+g) - \pi rm \\ &= \pi Rm + \pi Rg - \pi rm \\ &= \pi Rg + \pi(R-r)m \\ &= \pi Rg + \pi rg \end{aligned}$$

$$= \pi(R + r)g$$

Finalmente, sendo x a distância do ponto médio de AB ao eixo E então $x = \frac{R+r}{2}$ e, portanto, a área lateral do tronco de cone toma a forma:

$$A = 2\pi \left(\frac{R+r}{2} \right) g,$$

ou seja,

$$A = 2\pi xg.$$

Isto indica que a área do tronco de cone pode ser calculada pelo produto do perímetro de sua superfície geratriz pela distância do seu baricentro ao eixo de rotação.

Veremos a seguir, o primeiro Teorema de Pappus a qual associa a área da superfície de revolução com o baricentro.

3.6.2 Primeiro teorema de Pappus

1º teorema de Pappus: Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.

Em outras palavras, se uma linha plana (Figura 35) tem comprimento L e se x é a distância do baricentro dessa linha a um eixo E , o 1º Teorema de Pappus afirma que a área da superfície de revolução que gerada pela rotação da linha em torno de E vale $A = 2\pi xL$. Ainda estamos usando aqui a palavra baricentro significando o centro de gravidade.

Vamos fazer a demonstração para uma linha poligonal. Consideremos então como na figura a seguir, uma poligonal plana cujos lados têm comprimentos a_1, a_2, \dots, a_n , e cujos pontos médios distam x_1, x_2, \dots, x_n , de E , respectivamente (Figura 35). Seja ainda, $L = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Figura 35 – Linha L e linha poligonal



Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 284-285).

A rotação de cada segmento em torno de E , gera a superfície lateral de um tronco de cone e, portanto, a área da superfície de revolução gerada pela poligonal é a soma das áreas de todos os troncos. Temos então para a área da superfície gerada pela poligonal:

$$A = 2\pi x_1 a_1 + 2\pi x_2 a_2 + \cdots + 2\pi x_n a_n ,$$

ou seja,

$$A = 2\pi(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n)$$

Entretanto, se x é a distância do centro de gravidade da poligonal ao eixo E então:

$$x = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

ou seja,

$$xL = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

Portanto, a área da superfície de revolução gerada pela rotação da poligonal em torno do eixo é:

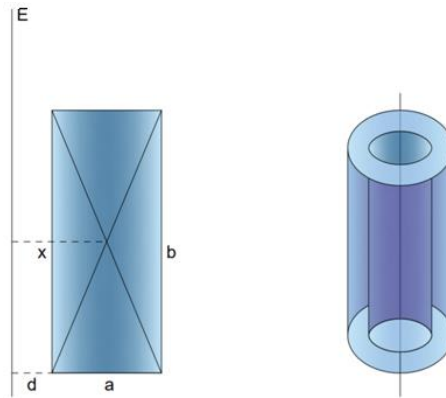
$$A = 2\pi xL.$$

Nota. A demonstração do caso geral não é feita aqui pois envolve elementos de Cálculo. Entretanto, a maior parte do caminho foi mostrada. O passo final consiste em definir o comprimento de uma curva pelo limite do comprimento de poligonais cujos vértices estão sobre a curva e tais que a distância entre dois consecutivos se torna arbitrariamente pequena. Mas, cremos que os resultados alcançados nesse texto, sejam suficientes para as aplicações no Ensino Médio.

3.6.2.1 Uma aplicação segundo teorema de Pappus: volume de um sólido de revolução

Observemos agora o que acontece quando giramos um retângulo em torno de um eixo de seu plano e paralelo a um dos lados (Figura 36).

Figura 36 – Retângulo e sólido de revolução



Fonte: A autora.

Na Figura 36 está ilustrado um retângulo de base a e altura b , e um eixo E , paralelo a um lado do retângulo e distando d do lado mais próximo. Seja ainda, $S = ab$, a sua área. A rotação desse retângulo em torno de E produz um sólido de revolução (Figura 36) que é a diferença entre dois cilindros: o maior, com raio $a + d$ e altura b , e o menor com raio d e altura b . O volume desse sólido é, portanto,

$$\begin{aligned} V &= \pi(a + d)^2 b - \pi d^2 b \\ &= \pi a^2 b + 2\pi a d b \\ &= \pi ab(a + 2d) \\ &= 2\pi \left(\frac{a}{2} + d\right) S \end{aligned}$$

Observe que $x = \frac{a}{2} + d$ é a distância do centro desse retângulo ao eixo. Concluimos então que se um retângulo de área S gira em torno de um eixo paralelo a um de seus lados e que não o atravessa, o volume gerado é

$$V = 2\pi x S$$

onde x é a distância do centro do retângulo ao eixo.

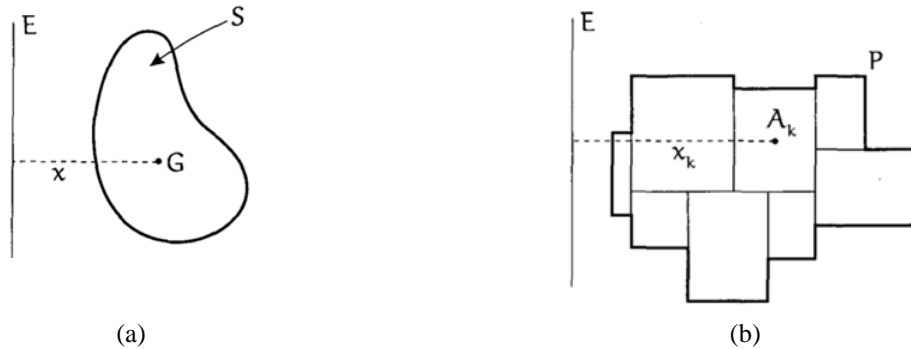
Ou seja, o volume do sólido de revolução pôde ser obtido por meio do produto da área da superfície geratriz S pela distância x do seu centro ao eixo de rotação.

3.6.3 O segundo teorema de Pappus

2º teorema de Pappus: Se uma figura plana gira em torno de um eixo de seu plano, o volume gerado é igual à área dessa figura multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.

Em outras palavras, se uma figura plana tem área S e se x é a distância do baricentro dessa figura a um eixo E (Figura 37a), o 2º teorema de Pappus afirma que o volume do sólido de revolução gerado pela rotação desta figura em torno de E vale $2\pi xS$.

Figura 37 – Região S e um polígono regular



Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 290-291).

Vamos mostrar uma demonstração no caso em que a figura é um polígono retangular, ou seja, um polígono que é a reunião de vários retângulos justapostos, e o eixo é paralelo a um lado desses retângulos (Figura 37b).

Consideramos então o polígono retangular P , dividido em retângulos R_1, R_2, \dots, R_n , de áreas A_1, A_2, \dots, A_n , respectivamente.

Seja $S = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, a área de P e seja x_k a distância do centro do retângulo R_k ao eixo E , que é paralelo a um lado desses retângulos e não atravessa nenhum deles.

O volume do sólido gerado pela rotação de P em torno de E é a soma dos volumes gerados pela rotação de cada um dos retângulos. A partir do que concluímos no item anterior, teremos para esse volume a expressão:

$$V = 2\pi x_1 A_1 + 2\pi x_2 A_2 + \dots + 2\pi x_n A_n.$$

Ou seja,

$$V = 2\pi(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n)$$

Entretanto, se x é a distância do centro de gravidade da superfície do polígono P ao eixo E então:

$$x = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}.$$

E assim,

$$xS = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n.$$

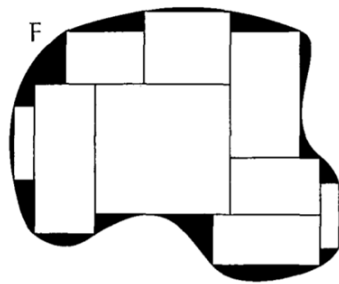
Portanto, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação do polígono retangular

P em torno do eixo E é:

$$V = 2\pi xS.$$

Nota. A demonstração se completa com um passo a mais. Definimos a área de uma figura plana F como o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F (Figura 38). Desta forma, o volume do sólido gerado pela rotação de F em torno de um eixo é o número real cujas aproximações por falta são os volumes gerados pelos polígonos retangulares contidos em F .

Figura 38 – Figura F



Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 292).

3.6.3.1 Aplicações do segundo teorema de Pappus: volume do cone

Podemos calcular facilmente o volume de um cone de revolução como aplicação do teorema de Pappus. Um cone de revolução é obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um dos catetos. Na Figura 39 está ilustrado um triângulo retângulo ABC com catetos $AB = R$ e $AC = h$ e o eixo E que contém AC .

Figura 39 – Triângulo retângulo e o cone



Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 293).

O baricentro de ABC é o ponto G , situado sobre a mediana AM tal que $CG = \frac{2}{3}CM$. Se x é a distância de G ao eixo, então $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R}{3}$. Como a área de ABC é, $S = \frac{Rh}{2}$, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação de ABC em torno de E , será igual a:

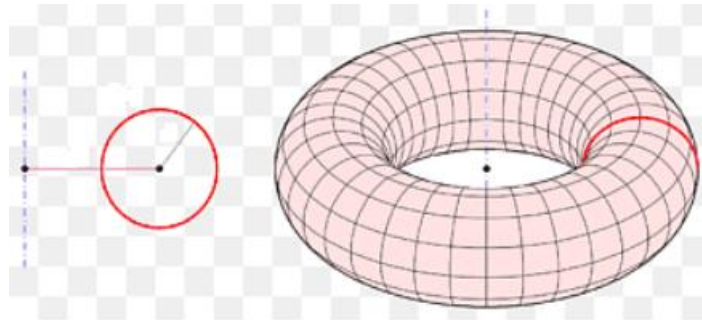
$$V = 2\pi xS = 2\pi \frac{R}{3} \cdot \frac{Rh}{2} = \frac{\pi R^2 h}{3},$$

ou seja, a terça parte do produto da área da base pela altura.

3.6.3.2 Aplicações do segundo teorema de Pappus: área e volume de um toro

Um toro é o sólido gerado pela rotação de um círculo em torno de um eixo de seu plano (Figura 40). Como exemplo, podemos citar uma câmara de ar de automóvel que tem a forma de um toro.

Figura 40 – Rotação do círculo em torno de um eixo

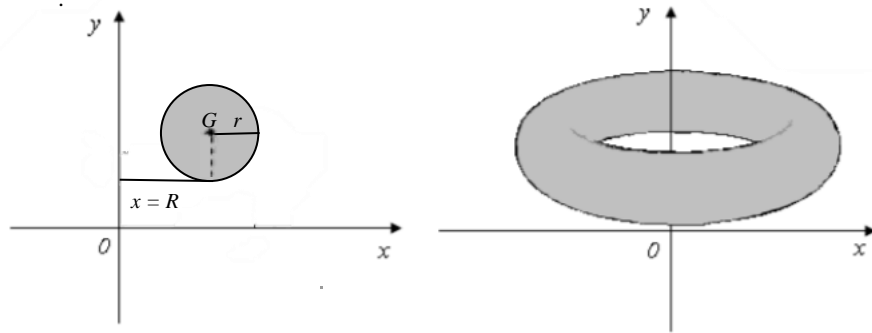


Fonte: <https://www.pngwing.com/pt/> Acesso em: 10 set. 2021.

Com os teoremas de Pappus, podemos calcular facilmente a área de borracha dessa câmara e o volume de ar que existe dentro dela.

Considere um toro circular de revolução. A sua superfície é gerada por um círculo de raio r girando 2π radianos em torno do eixo OY , conforme mostrado na Figura 41.

Figura 41 – Geração de um toro por rotação de um círculo de raio r em torno do eixo OY



Fonte: Adaptação de Rautetenberg (2013, p. 49).

Considere um círculo de raio r , cujo baricentro em G está situado a uma distância x do eixo de rotação OY , tendo $x=R$ (Figura 41) e $L=2\pi r$, o perímetro da superfície geratriz. Temos, pelo 1º teorema de Pappus, que:

$$A = 2\pi xL = 2\pi \cdot R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr,$$

é a área da superfície de um toro de revolução.

Seja $A_C = \pi r^2$ a área do círculo de raio r , então, pelo 2º teorema de Pappus:

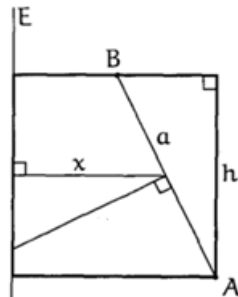
$$V = 2\pi xA_C = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2$$

é o volume do toro de revolução.

3.6.3.3 Aplicações do segundo teorema de Pappus: área e volume da esfera

Para calcular a área e o volume da esfera como aplicação dos teoremas de Pappus, precisamos de um resultado preliminar. Na Figura 42 está ilustrado uma reta E e um segmento AB no mesmo plano.

Figura 42 – Segmento AB



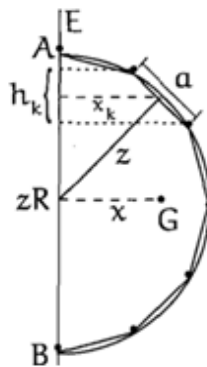
Fonte: (LIMA et al, 2013, p. 294).

Seja $AB = \alpha$, seja x a distância do ponto médio de AB à reta E , seja h o comprimento da projeção de AB sobre E e finalmente, seja z o comprimento do segmento da mediatriz de AB compreendido entre AB e E . Esse segmento será chamado de apótema de AB . Por semelhança de triângulos, temos $\frac{h}{a} = \frac{x}{z}$, ou seja, $ax = zh$.

Esta simples relação nos permitirá obter facilmente a área da esfera como aplicação do 1º teorema de Pappus.

A superfície da esfera pode ser obtida através da rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém seu diâmetro. Consideremos então uma semicircunferência de raio R e um eixo E que contém seu diâmetro AB . Dividimos a semicircunferência em n partes iguais para formar uma linha poligonal regular inscrita nela (Figura 43).

Figura 43 – Semicircunferência e linha poligonal



Fonte: (LIMA et al, 2013, p.295).

Os lados l_1, l_2, \dots, l_n da poligonal têm comprimento a . Seja h_k o comprimento da projeção do lado l_k sobre E . Como a poligonal é regular, todos os lados têm o mesmo apótema z . Calculemos então a distância x do centro de gravidade dessas superfícies e sólidos de revolução poligonal ao eixo. Sendo x_k a distância do ponto médio de l_k ao eixo e levando em conta a relação $ax = zh$ que demonstramos anteriormente, temos:

$$x = \frac{ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n}{a + a + \dots + a} = \frac{zh_1 + zh_2 + \dots + zh_n}{na} = \frac{z}{na} 2R.$$

Quando o número de lados da poligonal aumenta, então na tende para o comprimento da semicircunferência que é igual a πR e o apótema z , tende para R . Concluimos então que a distância do centro de gravidade de uma semicircunferência ao seu diâmetro é:

$$x = \frac{R}{\pi R} 2R = \frac{2R}{\pi}.$$

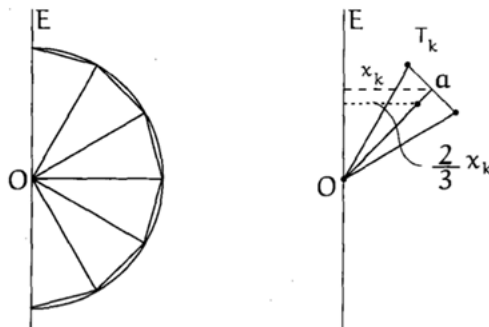
Pelo 1º teorema de Pappus, quando a semicircunferência gira em torno de seu

diâmetro, a área da superfície gerada é:

$$A = 2\pi xL = 2\pi \frac{2R}{\pi} \pi R = 4\pi R^2.$$

Para encontrar o volume da esfera como aplicação do 2º teorema de Pappus, consideremos, como no caso anterior, uma semicircunferência de raio R e diâmetro AB , e uma reta E que contém esse diâmetro. Dividimos a semicircunferência em n partes iguais formando a poligonal regular inscrita, e unimos todos os vértices ao centro O (Figura 44).

Figura 44 – Semicírculo e triângulos



Fonte: (LIMA et al, 2013, p.297).

Temos então um polígono P , inscrito no semicírculo e dividido em triângulos isósceles T_1, T_2, \dots, T_n , todos iguais, com base a e altura z .

Cada um desses triângulos têm área $A = \frac{az}{2}$, e a distância do baricentro do triângulo T_k ao eixo E é igual a $\frac{2}{3}x_k$, onde x_k é, como no item anterior, a distância do ponto médio de sua base ao eixo. Vamos então determinar a distância x do baricentro desse polígono ao eixo E :

$$\begin{aligned} x &= \frac{A \frac{2x_1}{3} + \dots + A \frac{2x_n}{3}}{A + \dots + A} = \frac{\frac{2}{3}(ax_1 + \dots + ax_n)}{A + \dots + A} \\ &= \frac{\frac{z}{3}(ax_1 + \dots + ax_n)}{nA} = \frac{\frac{z}{3}(zh_1 + \dots + zh_n)}{nA} \\ &= \frac{\frac{z^2}{3}(h_1 + \dots + h_n)}{nA} = \frac{z^2}{3} \frac{2R}{nA} \end{aligned}$$

Quando n cresce, nA que é a área do polígono P , tende para $\frac{\pi R^2}{2}$, que é a área do semicírculo, e o apótema z tende a R . Temos então que a distância do centro de gravidade de um semicírculo ao eixo é igual a $x = \frac{R^2}{3} \frac{2R}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$.

Assim, pelo 2º teorema de Pappus, o volume da esfera é:

$$V = 2\pi xS = 2\pi \frac{4R}{3\pi} \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, descrevemos as alternativas metodológicas empregadas nesta proposta. Inicialmente, são consideradas as principais características da pesquisa qualitativa e os instrumentos utilizados; em sequência apresentamos o contexto educativo no qual a pesquisa foi implementada, contendo uma caracterização da população alvo que compõe os sujeitos participantes e relacionamos o problema norteador pressuposto da pesquisa. Posteriormente, apresentamos um compêndio de atividades elaboradas e propostas alicerçadas na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau como metodologia de pesquisa e ensino respectivamente.

Optamos por uma abordagem qualitativa e sistematizamos nossa proposta de atividades pautada no Estudo dos Sólidos de Revolução, de acordo com a tipologia da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau em suas cinco fases: ação, formulação, validação, institucionalização e devolução. As situações de ensino aprendizagem, devido ao momento atual, foram planejadas para serem desenvolvidas no modelo de ensino híbrido, que utiliza o espaço da sala de aula para alunos da modalidade presencial e para os alunos da modalidade de ensino remoto exclusivamente o Google Classroom ou Google Sala de Aula, que consiste em um sistema de gerenciamento de conteúdos, de acesso gratuito disponibilizado pela Secretaria da Educação do Estado do Rio Grande do Sul (SEDUC-RS) para professores, gestores e alunos. Os dados foram obtidos por meio dos registros das atividades produzidas pelos alunos em classe, postagem no Google Classroom e registros das observações do professor pesquisador.

A implementação das situações didáticas delimita formas estruturantes a fim de propiciar o desenvolvimento das atividades, promover as discussões, o diálogo em classe e a resolução de situações problemas, com a finalidade de fomentar uma aprendizagem com efetiva significância acerca do objeto de estudo Sólidos de Revolução tendo como contexto alunos do terceiro ano do ensino médio de um Instituto Estadual de Educação, situado em município localizado no interior do Rio Grande do Sul.

Tais opções metodológicas buscam responder a seguinte questão da pesquisa: “De que forma uma proposta de estudo embasada na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau pode contribuir para o ensino aprendizagem do objeto de conhecimento Sólidos de Revolução com ênfase nos Corpos Redondos no Ensino Médio”?

Ao procurar responder à questão, desejamos também submeter se as atividades

propostas e tratadas como situações didáticas e adidáticas favorecem a apropriação de novos saberes com relação ao Estudo dos Sólidos de Revolução por parte dos educandos desencadeando nos sujeitos envolvidos uma postura de autonomia e protagonismo frente a esses novos saberes, de forma a corroborar no seu desempenho diante de desafios do conhecimento e em seus estudos posteriores. Uma abordagem analítica dos resultados obtidos será apresentada no capítulo 5.

4.1 PESQUISA QUALITATIVA

A pesquisa qualitativa é uma modalidade de pesquisa que tem como foco a investigação de fenômenos em toda a sua complexidade, com questões que visam, essencialmente, à compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos. Nesse tipo de pesquisa, os dados são recolhidos em função de um contato aprofundado com os sujeitos nos seus contextos naturais (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Para Creswell (2014), “a pesquisa qualitativa começa com pressupostos e o uso de estruturas interpretativas/teóricas que informam o estudo dos problemas da pesquisa, abordando os significados que os indivíduos ou grupos atribuem a um problema social ou humano” (p. 49-50). Para o autor, na pesquisa qualitativa, a coleta de dados ocorre no contexto natural dos participantes, a análise dos dados estabelece padrões e o relatório final inclui as vozes dos participantes, a reflexão, descrição e interpretação do problema pelo pesquisador, além de sua contribuição para a literatura.

É com base no exposto acima que desenvolvemos este estudo, como instrumento válido de observação dos estudantes em seu lócus de ensino aprendizagem, suas vivências na construção dos saberes e postura frente às etapas das situações didáticas propostas.

4.2 CONTEXTO E SUJEITOS DA PESQUISA

Os participantes desta pesquisa são alunos do Terceiro Ano do Ensino Médio de um Instituto Estadual de Educação, localizado no município de Júlio de Castilhos - RS. O Instituto possui 47 alunos matriculados no Terceiro Ano do Ensino Médio Diurno, distribuídos em duas turmas; a primeira, turma 301, apresenta um total de 22 alunos, sendo 7 destes na modalidade de ensino presencial e os demais na modalidade de ensino remoto, a segunda turma, 302, contempla um total de 25 alunos, dos quais 17 assistem às aulas na modalidade presencial e os

demais de forma remota. A situação descrita configura a modalidade de ensino híbrido, que está sendo adotado em virtude da Pandemia do Covid-19.

Os alunos na modalidade de ensino remoto têm acesso às atividades propostas pelas disciplinas via Plataforma Google Sala de Aula (Google Classroom) em períodos quinzenais. Para a realização da pesquisa, optamos por testar nossa proposta didática na modalidade presencial, utilizando como recurso a Plataforma Google Sala de Aula como ferramenta auxiliar, pois entendemos que a análise da observação direta dos alunos pode enriquecer os resultados da pesquisa, cuja realização ocorreu durante o terceiro trimestre do ano letivo de 2021 atendendo às disposições das Matrizes de Referência para o Modelo de Ensino Híbrido 2021-RS, documento onde as habilidades e competências elencadas para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos foram elaboradas de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

4.3 PLATAFORMA GOOGLE CLASSROOM

O Google Classroom ou Google Sala de Aula é um sistema de gerenciamento de conteúdo para escolas que procuram simplificar a criação, a distribuição e a avaliação de trabalhos. Ele é um recurso do Google Apps para a área de educação e foi lançado para o público em agosto de 2014.

A SEDUC-RS desde 2020 disponibiliza turmas no Google Classroom para gestores, professores e alunos que fazem o login utilizando o e-mail @educar.rs.go.br.

O Google Sala de Aula é um serviço gratuito para escolas, organizações sem fins lucrativos e qualquer usuário com uma conta do Google pessoal. Ele facilita a interação entre os alunos e os professores, dentro e fora da escola. Com o Google Sala de Aula, é possível poupar tempo e eliminar o uso de papel. Além disso, possibilita a criação de turmas, distribuição de atividades, comunicação e organização de forma fácil.

O ambiente é considerado agradável e fácil de trabalhar por ser um ambiente limpo, sem informações excessivas, bastando apenas o acesso via e-mail, que geralmente o aluno já possui ou pode criar dentro da plataforma Google. Sua interface é semelhante a uma rede social, onde de forma lúdica é possível que o aluno visualize todo o conteúdo de forma ágil. Seu acesso também é possível via smartphone através do site e do aplicativo disponibilizado para Android e IOS (DINIZ et al., 2020).

Moran (2012), em seu livro *A educação que desejamos: novos desafios e como chegar*

lá, afirma que:

“Os alunos já estão nas redes. Elas são importantes para conhecer seus interesses e expectativas, para criar vínculos afetivos, empatia, aproximação emocional que facilita a comunicação e que aproxima professores e alunos e também os assuntos que vão ser tratados na aula. É fácil utilizar esses espaços para motivá-los a aprender, disponibilizando materiais interessantes (vídeos, charges, pequenos textos, infográficos, apresentações), pedindo que os estudantes também compartilhem suas descobertas e contribuam com os assuntos que estão sendo tratados. As redes são também importantes para promover discussões sobre temas polêmicos, incentivando a que todos se manifestem. Muitos estudantes mais tímidos costumam participar de forma ativa nestes espaços digitais, às vezes, melhor do que numa discussão presencial. As redes são também interessantes para que os estudantes aprendam juntos, se ajudem mutuamente, percebam que podem trazer contribuições significativas. O professor pode orientar grupos diferentes de forma rápida e fácil. As redes podem ser utilizadas também para publicar os projetos, para comentá-los e para avaliá-los e também para avaliar os problemas que o mau uso das redes traz como bullying, divulgação de visões preconceituosas ou distorcidas ou a excessiva dependência de estar sempre conectado”. (MORAN, 2012, p. 47).

Corroborando com o exposto acima, fizemos uso do Google Classroom como suporte de apoio pedagógico para a otimização do desenvolvimento dessa pesquisa.

4.4 SITUAÇÕES DIDÁTICAS PROPOSTAS

No texto que segue apresentamos as situações didáticas e adidáticas elaboradas para o desenvolvimento desta pesquisa, divididas em quatro blocos:

- BLOCO 1 – Planificação dos sólidos de revolução;
- BLOCO 2 – Cálculo das áreas das superfícies dos sólidos de revolução através de sua planificação;
- BLOCO 3 – Conhecendo os teoremas de Pappus;
- BLOCO 4 – Resolução de situações problemas envolvendo o cálculo de áreas de superfícies e volumes de sólidos de revolução em contextos diversos.

Cada bloco é composto por atividades a serem desenvolvidas pelos alunos e contempla situações didáticas e adidáticas conforme descrito por Brousseau (2008).

No Quadro 2 está apresentado uma síntese de como as situações didáticas estão organizadas.

Quadro 2 – Organização das situações didáticas

BLOCO	Atividades	Situação
	Atividade 1 – Sólidos de revolução com material acrílico	adidática
	Atividade 2 – Planificação dos sólidos de revolução por meio de um simulador	adidática

1	Atividade 3 – Resolvendo questões do ENEM: Questão 1 - Torre Questão 2 - Foguete Questão 3 - Anticlepsidra Questão 4 – Forma de bolo I Questão 5 – Porta canetas	didática
2	Atividade 4 – Cálculo de áreas de superfícies de sólidos de revolução através de sua planificação e o Princípio de Cavalieri	didática
	Atividade 5 – Resolvendo uma questão: Questão 6 – Projeções cartográficas	didática
3	Atividade 6 - Determinando o centro de gravidade de figuras planas	adidática
	Atividade 7 - Cálculo da área das superfícies e volumes de sólidos de revolução com a aplicação dos teoremas de Pappus: Questão 7 – Rotação de um retângulo Questão 8 – Rotação de um triângulo Questão 9 – Rotação de um triângulo Questão 10 – Rotação de um triângulo Questão 11 – Forma de bolo II	didática
4	Atividade 8 – Resolvendo questões Questão 12 – Poço Questão 13 – Silos Questão 14 – Frascos de perfume Questão 15 – Caixa d’água Questão 16 – Bocha e bolim Questão 17 – Donuts e o toro Questão 18 – Rolo de papelão Questão 19 – Mapa do hemisfério celestial Questão 20 – Peão	didática
	Atividade 9 – Construção de maquetes	adidáticas

Fonte: Autora.

No quadro acima, configuramos as atividades propostas na sequência didática em situações didáticas e adidáticas conforme definições empregadas na TSD.

Segundo Guy Brosseau, o professor deve organizar a situação didática de uma maneira que permita ao aluno agir de forma semelhante à de um pesquisador em uma atividade científica. Dessa forma, as situações-problemas têm de proporcionar ao aluno condições para que ele “aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com os outros, reconheça aqueles que são conformes à cultura, retire desta aqueles que lhe são úteis, Etc” (BROSSEAU, 1996, p. 38).

Diante dessa premissa selecionamos as atividades 3, 4, 5, 7 e 8 respectivamente, para compor a sequência didática, de modo que ao cumprir a definição de situação didática, segundo a TSD, possibilite aos sujeitos envolvidos uma aprendizagem significativa acerca do objeto do conhecimento corpos redondos também denominados sólidos de revolução.

Na TSD, considera-se que o aluno aprendeu quando ele consegue usar os novos saberes

para resolver outros problemas, sem a intervenção do professor. Estas situações são chamadas por Brousseau (2006) de situações adidáticas, por não terem o controle do professor. Numa situação adidática, o aluno apresenta esforço próprio e independente, buscando superar seus limites e construir conhecimentos novos.

A noção de situação adidática parece contraditória, porque é algo que não foi definido intencionalmente como uma etapa para ensinar, no entanto, é essencial para o processo pedagógico, pois é quando o aluno se torna independente e a esse fato atribui-se a ela extrema relevância. Nesse sentido, o planejamento do professor deve direcionar o aluno para situações adidáticas. O aluno precisa ter a oportunidade de se aproximar dos conhecimentos ele mesmo usando suas próprias técnicas e raciocínios. Numa perspectiva construtivista, o professor precisa estimular o aluno a elaborar novos saberes, a estar sempre se superando, por esforço próprio, que é o processo da situação adidática (FREITAS, 2000).

Diante do exposto e da percepção de características e padrões que proporcionam a compreensão um novo saber, escolhemos atividades de forma que o aluno possa aceitá-las e que os leve a agir, a falar, a refletir e ainda a evoluir por si próprio. Nesse aspecto selecionamos as atividades 1, 2, 6 e 9 respectivamente, configuradas expressivamente como situações adidáticas.

Destaca-se que as situações didáticas e adidáticas propostas atendem as competências e habilidades previstas pela BNCC para o Ensino Médio:

EM13MAT201 – Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa;

EM13MAT309 – Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para o revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições de sólidos estudados), com ou sem o apoio de tecnologias digitais.

Considerando a competência e habilidade EM13MAT201, incluímos então, nesta sequência didática, a Atividade 9, cuja proposta é a construção de maquetes que reproduzam silos, um tipo de construção muito comum em nosso município e seus entornos, cuja arquitetura é realçada pela presença de corpos redondos. Atendem a competência e habilidade EM13MAT309 as atividades 3, 4, 5, 7 e 8.

A seguir apresentamos a descrição relativa a cada uma das situações propostas distribuídas nos 4 blocos.

4.4.1 BLOCO 1 – Planificação dos sólidos de revolução

As atividades que configuram o BLOCO 1, visam levar o aluno a desenvolver a capacidade de associar uma figura gerada no espaço com o respectivo sólido de revolução, reconhecer o sólido quando representado por uma figura plana identificando seus elementos e vice-versa, perceber que figuras planas com a mesma forma potencializam a geração de distintos sólidos de revolução.

Atividade 1 – Sólidos de revolução com material acrílico

Na Atividade 1 será utilizado material de acrílico e base de isopor (Figura 46), composto por uma haste metálica na qual é fixado na sua parte superior uma figura plana, a saber, triângulo, retângulo e semicírculo.

Figura 45 – Material de acrílico.



Fonte: Da pesquisa.

Nesta atividade foram introduzidos os conceitos iniciais do objeto de estudo: sólidos de revolução e para tal prática, optamos pelo emprego de materiais de acrílico. De acordo com Sousa (2011), as habilidades espaciais estão diretamente relacionadas com as habilidades geométricas, que são habilidades como gerar, reter e manipular imagens espaciais abstratas. Desta forma, o uso de materiais manipuláveis favorece de forma direta o desenvolvimento da imaginação espacial, proporcionando ao aluno o desenvolvimento das habilidades espaciais e das habilidades geométricas em geral.

Uma vez organizada a turma em grupos, cada um destes receberá um material de acrílico e base de isopor. A seguir é lançada a seguinte proposta:

- a) Encaixe cada um dos objetos de acrílico na base de isopor e gire. Você consegue ver os sólidos determinados por esse giro?
- b) Dentre os demais objetos que se encontram sobre a mesa, identifique aqueles que se

assemelham com aqueles obtidos através da rotação efetuada no item anterior. Denomine esse conjunto de R.

c) Represente através de um diagrama os sólidos geométricos que formam os elementos do conjunto R.

d) Utilize nomenclatura adequada para nomear os elementos do conjunto R.

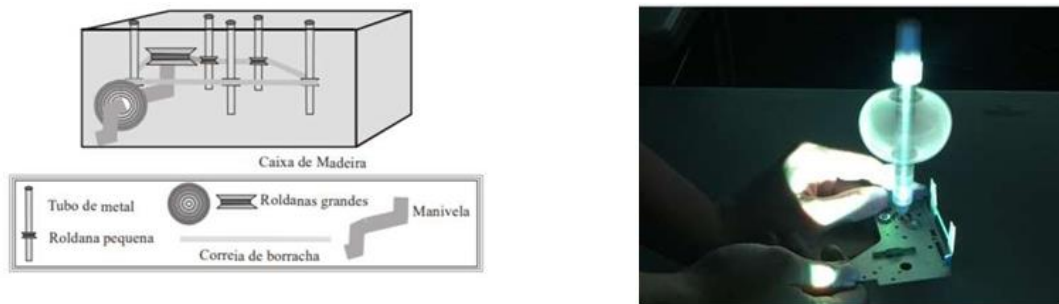
e) A partir das propostas acima elabore suas conclusões.

Atividade 2 - Planificação dos sólidos de revolução por meio de um simulador

Essa atividade tem por objetivo conduzir o aluno, a perceber que as superfícies dos sólidos de revolução geradas por figuras planas de seu conhecimento, podem ser planificadas. A seguir, por meio dessa planificação, busca-se potencializar o aluno a reconhecer que, cada uma das superfícies corresponde respectivamente a uma figura plana.

Para essa atividade será utilizado um simulador de sólidos de revolução, tela para projeção, triângulos, retângulos, quadrados, trapézios, semicírculos confeccionados com fios de arame revestidos. Dois modelos de simuladores de sólido de revolução mostram-se representado nas Figura 46.

Figura 46 - Modelo de uma caixa geradora e de um simulador de sólidos de revolução.



Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000011903.pdf> e da pesquisa.

Cada grupo deverá escolher uma das figuras planas e utilizar o simulador de sólidos de revolução e apresentar para os demais colegas, nomeando seus respectivos elementos no plano e no espaço.









As simulações realizadas visam elucidar conceitos de superfícies de revolução geradas por figuras planas e, sólidos de revolução por meio de uma visão espacial. Aprender segundo (PEREIRA, 2008), é substituir valores, reformular visões de mundo, acrescentar conhecimentos aos modelos da vida social e confrontar com o novo. Sendo assim, a utilização

do simulador deve ter grande significância como fator de estímulo e motivação para a aprendizagem.

Atividade 3 - Resolvendo questões do ENEM

Nesta atividade são propostas, ao aluno, uma lista de cinco questões extraídas de avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que tratam de conceitos desenvolvidos nas práticas anteriores, atividades 1 e 2.

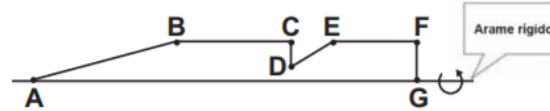
Questão 1

<p>No desenho técnico, é comum representar um sólido por meio de três vistas (frontal, perfil e superior), resultado da projeção do sólido em três planos, perpendiculares dois a dois.</p> <p>A figura representa as vistas de uma torre.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Vista frontal</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Vista perfil</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Vista superior</p> </div> </div> <p><small>Disponível em: www.uems.br. Acesso em: 11 dez. 2012 (adaptado).</small></p> <p>Com base nas vistas fornecidas, qual figura melhor representa essa torre?</p>	<p>A </p> <p>B </p> <p>C </p>	<p>D </p> <p>E </p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Questão 139 – Caderno Cinza – ENEM 2020 PPL. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> Acesso em: 5 mar. 2021.

Questão 2

Numa feira de artesanato, uma pessoa constrói formas geométricas de aviões, bicicletas, carros e outros engenhos com arame inextensível. Em certo momento, ele construiu uma forma tendo como eixo de apoio outro arame retilíneo e rígido, cuja aparência é mostrada na figura seguinte:



Ao girar tal forma em torno do eixo, formou-se a imagem de um foguete, que pode ser pensado como composição, por justaposição, de diversos sólidos básicos de revolução.

Sabendo que, na figura, os pontos B, C, E e F são colineares, $AB = 4FG$, $BC = 3FG$, $EF = 2FG$, e utilizando-se daquela forma de pensar o foguete, a decomposição deste, no sentido da ponta para a cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos:

- A** pirâmide, cilindro reto, cone reto, cilindro reto.
- B** cilindro reto, tronco de cone, cilindro reto, cone equilátero.
- C** cone reto, cilindro reto, tronco de cone e cilindro equilátero.
- D** cone equilátero, cilindro reto, pirâmide, cilindro.
- E** cone, cilindro equilátero, tronco de pirâmide, cilindro.

Fonte: QUESTÃO 140 – Prova Azul – ENEM 2010 – Reaplicação PPL. Disponível em:

<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

Acesso em: 5 mar. 2021.

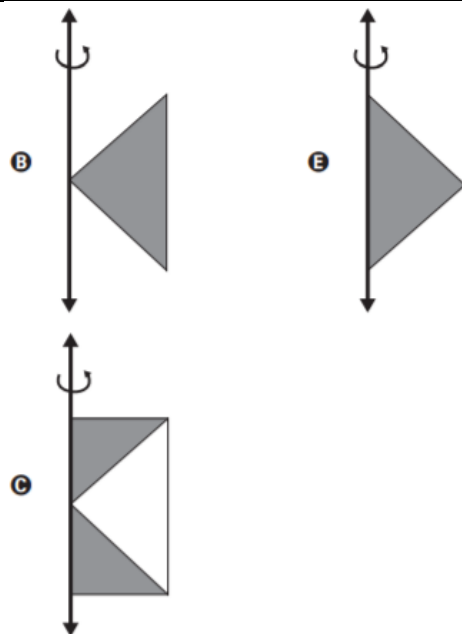
Questão 3

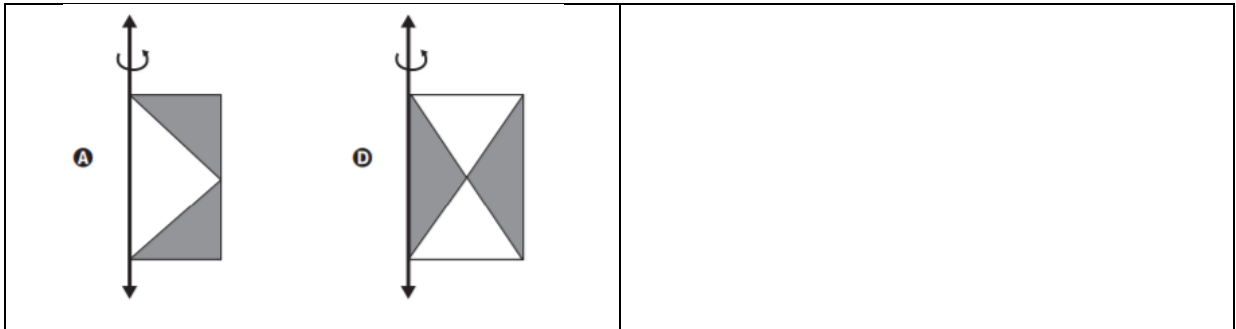
A figura mostra uma anticlepsidra, que é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero, cujas bases coincidam com as bases desse cilindro. A anticlepsidra pode ser considerada, também, como o sólido resultante da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.



Disponível em: www.klickeducacao.com.br. Acesso em: 12 dez. 2012 (adaptado).

A figura plana cuja rotação em torno do eixo indicado gera uma anticlepsidra como a da figura acima é





Fonte: QUESTÃO 170 – Prova Amarela – ENEM 2018 – Reaplicação PPL. Disponível em:

<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

Acesso em: 5 mar. 2021.

Questão 4

Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:

Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais.

Essas figuras são

- A** um tronco de cone e um cilindro.
- B** um cone e um cilindro.
- C** um tronco de pirâmide e um cilindro.
- D** dois troncos de cone.
- E** dois cilindros.

Fonte: QUESTÃO 169 – Prova Amarela – ENEM 2013. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> Acesso em: 5 mar. 2021.

Questão 5

Para divulgar sua marca, uma empresa produziu um porta-canetas de brinde, na forma do sólido composto por um cilindro e um tronco de cone, como na figura.

Para recobrir toda a superfície lateral do brinde, essa empresa encomendará um adesivo na forma planificada dessa superfície.

Que formato terá esse adesivo?

A

B

C

D

E

Fonte: Questão 140 – Caderno verde – ENEM 2017 Libras. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> Acesso em: 5 mar. 2021.

4.4.2 BLOCO 2 - Cálculo das áreas das superfícies dos sólidos de revolução através de sua planificação

O BLOCO 2, contempla o estabelecimento de áreas da superfície de cilindros, cones e esferas através de sua planificação, bem como, por meio do princípio de Cavalieri, a determinação do volume desses sólidos. Também, neste bloco, é proposto o reconhecimento desses sólidos como parte do universo que os cerca e para tal utilizamos representação fotográfica.

Atividade 4 – Determinando o cálculo de áreas de superfícies de cilindros, cones e esferas através de sua planificação e o Princípio de Cavalieri

O objetivo da Atividade 4 é fazer com que os alunos determinem por meio das fórmulas utilizadas em Geometria Plana as áreas das superfícies de cilindros, cones e esferas e identifiquem respectivamente seus elementos. Também, é proposto que o aluno utilize o Princípio de Cavalieri para estabelecer um modelo matemático para o cálculo de volume dos cilindros, cones e esferas, e, na Questão 6, explore uma aplicação de um destes cálculos.

Para a realização dessas atividades serão utilizados moldes de regiões planas que constituem as superfícies de cilindros, cones e esfera.

a) Com base nos moldes recebidos insira os dados solicitados no quadro:

	Área da superfície da base	Área da superfície lateral	Área da superfície total	Representação no plano	Representação por meio de fotos
Cilindro reto					
Cilindro equilátero					
Cone reto					
Cone equilátero					
Tronco de cone					
Esfera					

Fonte: Autora.

b) Revisite o Princípio de Cavalieri e com base no quadro acima determine o volume do

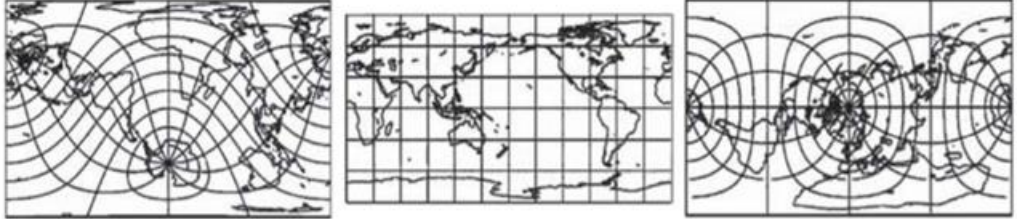
cilindro reto, cone reto e esfera.

Atividade 5 – Resolvendo uma questão

Na Atividade 5 é proposta uma questão que envolve o conhecimento sobre projeções cartográficas.
















Questão 6

Projeção cartográfica é uma transformação que faz corresponder, a cada ponto da superfície terrestre, um ponto no plano.



GASPAR, J. A. Cartas e projeções cartográficas. Lisboa: Lidel, 2005.

As relações do plano de projeção à superfície projetada mostradas nas figuras são identificadas, respectivamente, em:

<p>1. </p> <p>2. </p> <p>3. </p> <p>A</p>	<p>1. </p> <p>2. </p> <p>3. </p> <p>B</p>	<p>1. </p> <p>2. </p> <p>3. </p> <p>C</p>
<p>1. </p> <p>2. </p> <p>3. </p> <p>D</p>	<p>1. </p> <p>2. </p> <p>3. </p> <p>E</p>	

Fonte: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> Acesso em: 10 set.2021.

4.4.3 BLOCO 3 - Conhecendo os teoremas de Pappus

As atividades que configuram o BLOCO 3 tem por objetivo, que o aluno, utilize o teorema de Pappus, para resolver situações problemas que envolvam o cálculo de áreas e volumes de superfícies e sólidos de revolução, tais como da área de um círculo e do volume de um cilindro de modo muito trivial. Cabe destacar que os teoremas de Pappus para o cálculo das áreas das superfícies e volumes dos sólidos de revolução, são poucos explorados no Ensino Médio.

Atividade 6 - Determinando centro de gravidade de figuras planas

A Atividade 5 tem como objetivo, através de uma testagem simples, fazer com que os alunos identifiquem o centro de gravidade de figuras planas, bem como relacionem com o

baricentro das mesmas. Para essa atividade foram utilizados recortes de triângulos, quadrados, retângulos, trapézios e círculos em cartolina, barbante e um suporte com tripé e pêndulo disponível no laboratório de física da escola. Esta atividade contempla uma atividade experimental para a determinação do centro de gravidade de figuras planas, definição valiosa na aplicação dos teoremas de Pappus-Guldin.

As etapas para esta atividade são as seguintes:

- i) Faça diversos furos nas bordas do triângulo, em um desses furos introduza um barbante e suspenda o triângulo na base do pêndulo, trace a primeira mediana, repita o procedimento para os outros três furos traçando as respectivas medianas.
- ii) Identifique o ponto de encontro das três medianas.
- iii) Repita o processo descrito anteriormente com o retângulo e quadrado, nesses casos trace as diagonais.
- iv) Repita o processo com o trapézio e semicírculo.
- v) Represente graficamente suas conclusões.

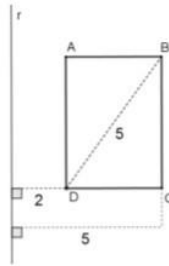
Na sequência, são propostas as questões 7, 8, 9, 10 e 11, respectivamente, extraídas de provas de vestibulares, de livros e do Portal da Matemática da OBMEP.

Atividade 7 – Resolvendo questões

Nesta atividade são propostas questões que contemplam o cálculo de áreas de superfícies e volumes de sólidos de revolução obtidos através da rotação de retângulos e triângulos em torno de um eixo, cuja solução pode facilmente ser encontrada com a devida aplicação do teorema de Pappus e uma questão que contempla o cálculo de dois troncos de cone.

Questão 7

Considere o sólido obtido pela revolução do retângulo $ABCD$ em torno da reta r , conforme indicado na figura a seguir.



O volume do sólido obtido é

- (A) 16π .
- (B) 84.
- (C) 100.
- (D) 84π .
- (E) 100π .

Fonte: Questão 17 – Vestibular UFRGS 2019. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/coperse/provas-e-servicos/baixar-provas/cv-2019-provas-comentadas>. Acesso em: 10 set. 2021.

Questão 8

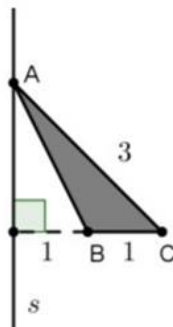
Sejam ABC um triângulo equilátero de lado 2 cm e r uma reta situada no seu plano, distante 3 cm do seu baricentro. Calcule a área da superfície gerada pela rotação deste triângulo em torno da reta r .

- A) $8\pi \text{ cm}^2$
- B) $9\pi \text{ cm}^2$
- C) $12\pi \text{ cm}^2$
- D) $16\pi \text{ cm}^2$
- E) $36\pi \text{ cm}^2$

Fonte: 13ª Questão – Concurso de Admissão IME 2009/2010. Disponível em: <http://www.ime.eb.mil.br/provas-antiores-cfg.html>. Acesso em: 10 set. 2021.

Questão 9

O triângulo ABC sofre uma rotação sobre o eixo s da figura. Determine o volume do sólido gerado.



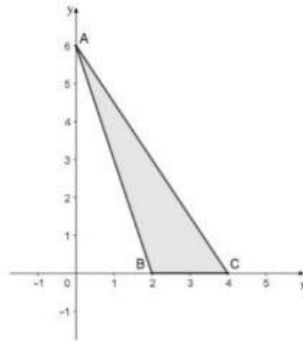
Fonte: Exercício 13 - Portal da Matemática OBMEP.

Disponível em: <https://portaldabmp.impa.br/uploads/material/5phlpk0gta0w0.pdf> Acesso em: 10 set. 2021.

Questão 10

Considere os pontos A, B e C, de coordenadas inteiras, que determinam os vértices do triângulo ABC, representado no sistema de coordenadas cartesianas abaixo.

A revolução do triângulo ABC, em torno do eixo x, gera o sólido P, e a revolução do triângulo ABC, em torno do eixo y, gera o sólido Q.



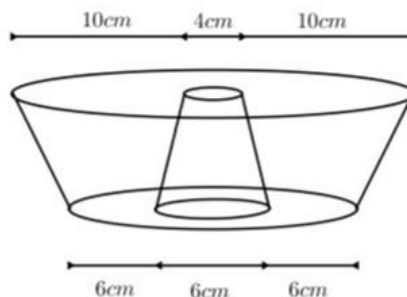
A razão entre os volumes de P e Q é

- (A) $\frac{2}{3}$.
- (B) 1.
- (C) $\frac{3}{2}$.
- (D) 18.
- (E) 36.

Fonte: Questão 9 – Vestibular UFRGS 2020. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/coperse/provas-e-servicos/baixar-provas/provas-comentadas-2020-versao-digital>. Acesso em: 10 set. 2021.

Questão 11

Uma fôrma de bolo, de 10cm de altura, é formada por dois troncos de cone, conforme a figura. Determine a quantidade máxima de massa líquida de bolo que pode ser colocada na forma, se esta massa deve ocupar apenas 80% de sua capacidade, pois deve existir uma margem para que o bolo cresça.



Fonte: Exercício 10 - Portal da Matemática OBMEP.
Disponível em: <https://portaldabmp.impa.br/uploads/material/5phlpk0gta0w0.pdf> Acesso em: 10 set. 2021.

4.4.4. BLOCO 4 - Resolução de situações problemas envolvendo o cálculo de áreas de superfícies e volumes de sólidos de revolução em contextos diversos

O BLOCO 4 é constituído pelas atividades 8 e 9. Na Atividade 8 são propostas nove questões extraída de variadas fontes que contempla o cálculo das áreas das superfícies e volumes dos sólidos de revolução e sua aplicação em situações problemas em diversos contextos.

A Atividade 9 envolve a produção de maquetes de silos – um tipo de construção muito evidente no município onde se desenvolve a pesquisa, e em cuja arquitetura há o predomínio dos corpos, como cilindros, cones e semiesferas –, a apresentação de relatório teórico constando os cálculos desenvolvidos e a apresentação e resolução comentada de uma situação problema de elaboração própria relativa ao estudo dos sólidos de revolução.

Atividade 8 – Resolvendo questões

As questões propostas nesta atividade contemplam a determinação de cálculos de elementos, áreas de superfícies e volumes de sólidos de revolução envolvendo diversos contextos de aplicação.

Questão 12

Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.

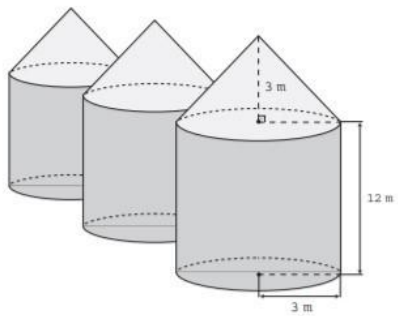
Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

- A 1,44
- B 6,00
- C 7,20
- D 8,64
- E 36,00

Fonte: Questão 167 – Caderno Cinza – ENEM 2015. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> Acesso em: 10 set. 2021.

Questão 13

Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

A 6.
B 16.
C 17.
D 18.
E 21.

Fonte: Questão 175 – Caderno Amarelo – ENEM 2016. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> Acesso em: 10 set. 2021.

Questão 14

Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R , com volume dado por $\frac{4}{3}\pi \cdot (R)^3$.

Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot h$, sendo h a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a

A $2R$.
B $4R$.
C $6R$.
D $9R$.
E $12R$.

Fonte: Questão 156 – Caderno Azul – ENEM 2016. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> Acesso em: 10 set. 2021.

Questão 15

Uma loja de materiais de construção vende dois tipos de caixas-d'água: tipo A e tipo B. Ambas têm formato cilíndrico e possuem o mesmo volume, e a altura da caixa-d'água do tipo B é igual a 25% da altura da caixa-d'água do tipo A.

Se R denota o raio da caixa-d'água do tipo A, então o raio da caixa-d'água do tipo B é

A $\frac{R}{2}$
B $2R$
C $4R$
D $5R$
E $16R$

Fonte: Questão 138 - Caderno Amarelo – ENEM 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> Acesso em: 10 set. 2021.

Questão 16

a)

A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada. A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5 cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2 cm, conforme ilustra a Figura 2.


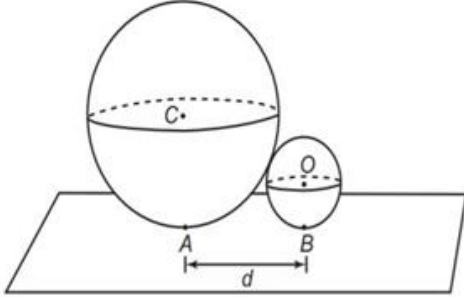



Figura 1

Figura 2

Considere o ponto C como o centro da bocha, e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d . Nessas condições, qual a razão entre d e o raio do bolim?

A 1
 B $\frac{2\sqrt{10}}{5}$
 C $\frac{\sqrt{10}}{2}$
 D 2
 E $\sqrt{10}$

Fonte: Questão 169 – Prova Azul- ENEM 2016. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> Acesso em: 10 set. 2021.

b) De acordo com os dados da questão anterior, determine a razão entre o volume da bocha e o volume do bolim, respectivamente.

Fonte: A autora.

Questão 17

Os Donuts são pequenos bolos em forma de rosca bastante populares nos Estados Unidos, conhecidos também por ser a comida preferido de Homer Simpson, personagem da série de animação Os Simpsons. Seu termo em inglês de origem, “doughnut” significa exatamente isso: rosca frita. O que você acharia se seu colega, gentilmente lhe perguntasse: “Aceita um toro” e mostrasse um delicioso donuts, com certeza seria no mínimo muito estranho. Em matemática, um toro é o nome que usamos para descrever a forma tridimensional de um donut. Diante disso e dos seus conhecimentos em geometria espacial: Determine o volume do donuts, sabendo que o raio interno do seu orifício mede 0,5 cm e a medida do seu raio externo é 2,5cm.

Use 3 um valor aproximado para π .



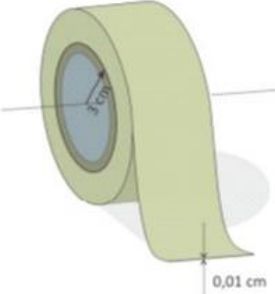
Fonte: A autora.

Questão 18

O cilindro de papelão central de uma fita crepe tem raio externo de 3 cm. A fita tem espessura de 0,01 cm e dá 100 voltas completas. Considerando que, a cada volta, o raio externo do rolo é aumentado no valor da espessura da fita, o comprimento total da fita é de, aproximadamente,

(A) 9,4 m.
 (B) 11,0 m.
 (C) 18,8 m.
 (D) 22,0 m.
 (E) 25,1 m.

Note e adote:
 $\pi \approx 3,14$.



Fonte: Questão 15 – Vestibular FUVEST 2020. Disponível em:

https://acervo.fuvest.br/fuvest/2020/fuvest_2020_primeira_fase_prova_V.pdf Acesso em: 10 set. 2021.

Questão 19

Toda a esfera visível ao longo do ano, nos hemisférios celestes Norte e Sul, está dividida em 88 partes, incluindo, cada uma delas, um número variável de estrelas. A unidade de medida utilizada pelos astrônomos para calcular a área de uma constelação é o grau quadrado. Algumas constelações são imensas, como Eridano, o rio celeste, localizada no hemisfério celeste Sul e ocupa uma área de 1 138 graus quadrados. Em contraponto, a constelação Norma, localizada no mesmo hemisfério, não passa de 165 graus quadrados.

CAPOZZOLI, U. Origem e Evolução das Constelações. *Scientific American Brasil*. Nº 2. 2010.

Em um mapa do hemisfério celestial feito em uma escala de 1:1 000, as constelações Eridano e Norma ocuparão, respectivamente, uma área, em graus quadrados, de

(A) 0,1138 e 0,0165.
 (B) 0,1138 e 0,165.
 (C) 1,138 e 0,165.
 (D) 11 380 e 1 650.
 (E) 1 138 000 e 165 000.

Fonte: Questão 175 – Caderno Cinza – ENEM 2011. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> Acesso em: 8 out. 2021.

Questão 20

Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura 4 cm, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

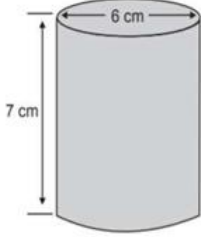


Figura 1

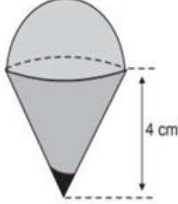


Figura 2

Dados:

O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$;

O volume do cilindro de altura h e área da base S é $S \cdot h$;

O volume do cone de altura h e área da base S é $\frac{1}{3}S \cdot h$;

Por simplicidade, aproxime π para 3.

A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é

A 45.

B 48.

C 72.


D 90.

E 99.

Fonte: Questão 166 – Prova cinza – ENEM 2014. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> Acesso em: 10 set. 2021.

Atividade 9 – Maquetes

A Atividade 9 - Aspectos Arquitetônicos dos Silos de Nosso Município e seus Corpos Redondos, articula uma situação adidática, com a habilidade EM13MAT201 da BNCC, ao propor aos alunos que realizem uma ação envolvendo medições e cálculo de áreas e de volume, de acordo com as demandas da sua comunidade.

Título: Aspectos Arquitetônicos dos Silos de Nosso Município e seus Corpos Redondos	
<p>Proposta de Atividade:</p> <p>Caro aluno!</p> <p>Escolha um silo localizado em nosso município ou em seus entornos, preferencialmente que faça parte dos seus itinerários e reproduza através de uma maquete:</p> <p>Na construção da maquete utilize uma escala conveniente de acordo com as dimensões reais do silo a ser representado;</p> <p>Não esqueça dos dados de identificação, inclua também uma foto do local. Preferencialmente utilize material reciclável e... bastante criatividade!</p> <p>Caso preferir, a maquete pode ser virtual, desde que fidedigna com o silo escolhido.</p> <p>Após elabore uma situação-problema que envolva o cálculo de áreas e volumes relacionado com este tipo de construção.</p>	 <p>Fonte: Foto da autora.</p>

As situações descritas no contexto acima nos conduzem a uma práxis pedagógica à luz da Teoria das Situações Didáticas acerca do estudo dos sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos onde o aluno apropria-se dos saberes através da observação, indagação, comunicação e criação exercendo assim o protagonismo no processo de aquisição dos saberes.

Embora nas questões do ENEM, o aluno só precisa marcar uma alternativa correta, neste estudo, foi requerido que o aluno apresentasse o desenvolvimento da resolução de cada uma das

questões da sequência didática, como forma de perceber as apreensões acerca do conteúdo matemático envolvido.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos a análise e discussão dos resultados que foram subsidiados por meio da transcrição documental de registros dos alunos nas atividades desenvolvidas em sala de aula, bem como das devoluções efetivadas através do Google Classroom. A análise se configurou à luz dos pressupostos teóricos e metodológicos presentes na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, em que realizamos uma predição das etapas categorizadas como dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização nas situações didáticas propostas, levando em conta o objeto matemático a ser ensinado, bem como o processo vivenciado pelos educandos na construção dos saberes.

Inicialmente, dividimos esta análise de acordo como foram propostas as situações didáticas e adidáticas, dispostas em quatro blocos constituintes do arcabouço da sequência didática elaborada. Também discutimos os resultados obtidos com o desenvolvimento de uma atividade final envolvendo a construção de maquetes físicas e virtuais representativas de silos, um tipo de construção muito frequente em nosso município e seus limifrontes, as quais contemplam em sua arquitetura corpos redondos e posterior elaboração de situações-problemas pelos alunos a cerca do tema. Para tanto, apresentamos uma descrição de como foram desenvolvidas as aulas, quais as situações antagônicas, os obstáculos e dificuldades apresentadas e a forma postural de como os alunos desenvolveram os exercícios presentes em cada atividade e, analisamos como se deu a compreensão do estudo dos corpos redondos pelos alunos e se as situações de ensino apresentadas a eles facilitaram tal compreensão. Na descrição das situações didáticas desenvolvidas, os alunos serão denominados por A1, A2, ..., A25.

Os resultados dessa análise indicam as conclusões deste estudo, que são apresentadas em síntese no final deste capítulo.

5.1 BLOCO 1 – PLANIFICAÇÃO DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

O estudo sobre a planificação dos sólidos de revolução teve início com uma apresentação, pela professora pesquisadora, do tema sólidos de revolução, a qual lançou algumas indagações acerca do porquê os corpos redondos são assim caracterizados. Foram ressaltados a importância do conhecimento das características e propriedades desses sólidos o que nos permite representar geometricamente uma vasta quantidade de elementos da vida cotidiana e do universo. Também foi disposto previamente ao momento da aula no Google Classroom um texto introdutório e a proposta

da Atividade 1 a ser desenvolvidas pelos alunos, sendo que ela foi demandada para as duas turmas do terceiro ano, turmas 301 e 302, obedecendo os seus respectivos horários. Salientamos então, que consideramos uma análise genérica a esse respeito, destacando peculiaridades ou distorções somente diante de tais ocorrências.

Os alunos participaram das discussões introdutórias e mostraram-se bastante interessados em entender como figuras planas potencializam a geração de diferentes sólidos de revolução, bem como emitiram referências a uma vasta gama desses sólidos presentes no seu cotidiano. Essa postura foi igualmente perceptível em ambas as turmas.

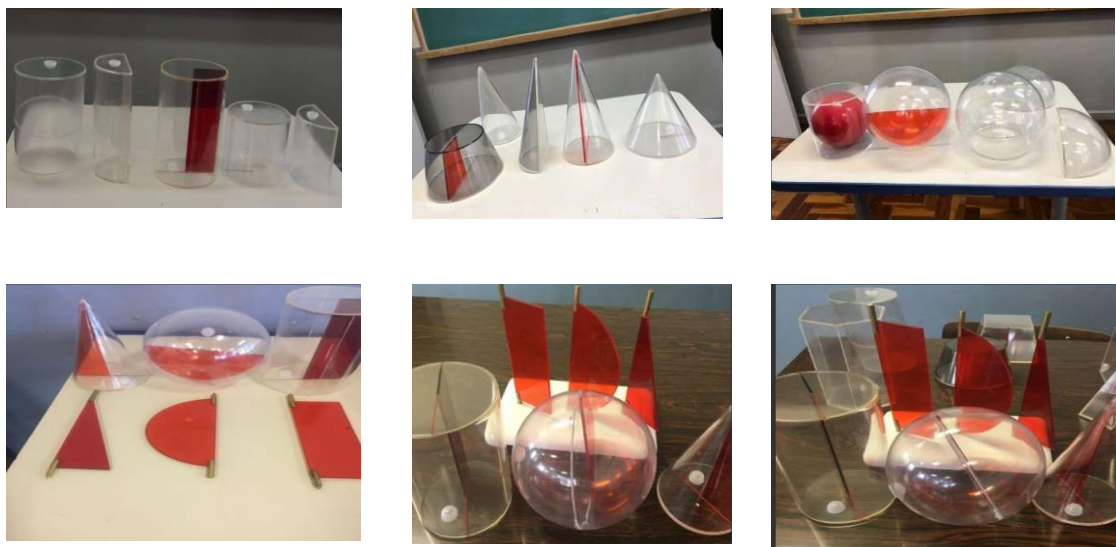
O professor pesquisador propôs em linhas gerais a dinâmica e a metodologia das atividades a serem desenvolvidas e neste momento implicitamente foi estabelecido o contrato didático.

No que segue, apresentamos a análise das atividades que compõe o BLOCO 1. Acrescentamos que a descrição das situações propostas e as respectivas atividades estão apresentadas no capítulo anterior.

5.1.1 Atividade 1 - Sólidos de revolução com material de acrílico

Após a divisão da turma em pequenos grupos respeitando as regras vigentes de distanciamento social, por conta do COVID-19, e estes de posse dos materiais de acrílico e uma placa de isopor (Figura 47) que serviu de substrato para a realização da testagem das hipóteses (item (a)), os alunos resolveram com relativa facilidade os itens (b), (c), (d) e (e).

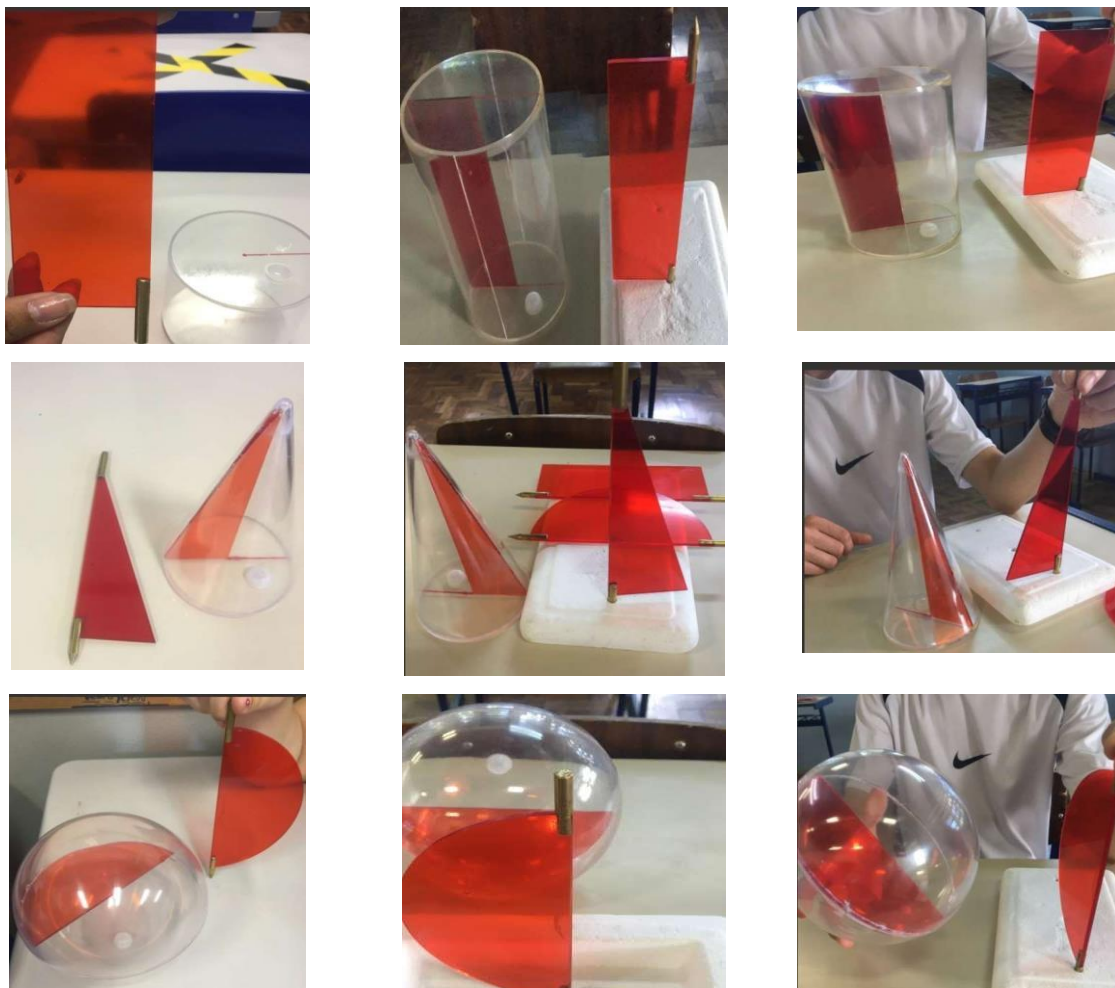
Figura 47 - Material de acrílico utilizado para a resolução da Atividade 1.



Fonte: Da pesquisa.

Na Figura 48, está ilustrado a resolução da Atividade 1(a), com a manipulação dos materiais de acrílico, por parte dos alunos. Percebemos evidente motivação por parte dos grupos e autonomia na execução da atividade proposta.

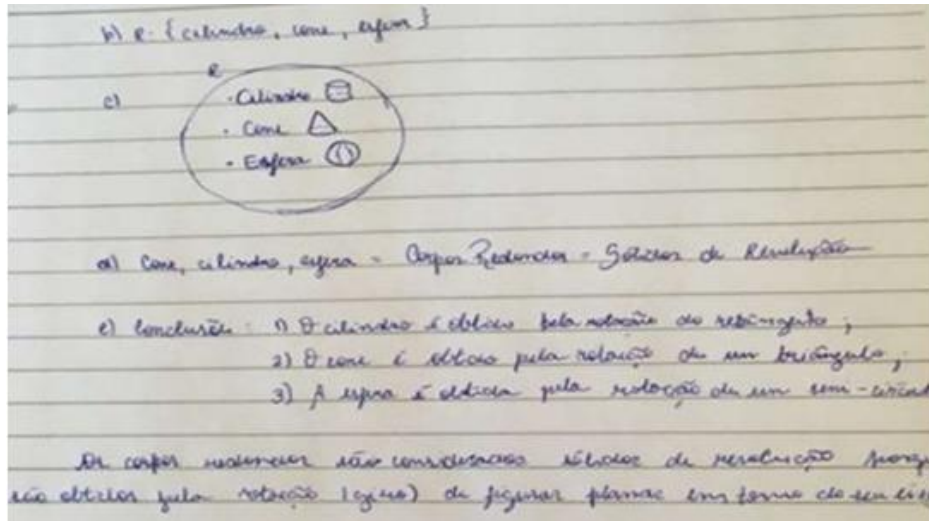
Figura 48 - Resolução da Atividade 1(a) pelos alunos.



Fonte: Da pesquisa.

Com relação a resolução, todos os alunos, como o aluno A1, cuja resposta está apresetada na Figura 50, responderam corretamente os itens propostos pela Atividade 1, identificando e caracterizando os corpos redondos como sólidos de revolução obtidos através da rotação de figuras planas.

Figura 49 - Resposta da Atividade 1(b), (c), (d) e (e) pelo aluno A1.



Fonte: Registro do aluno A1 no Google Classroom.

Em relação a tipologia das situações didáticas ocorridas nesta atividade, podemos considerar os seguintes momentos: Na fase que caracteriza a dialética de ação, os alunos participantes dos pequenos grupos, montaram suas estratégias elaborando as hipóteses para a resolução da atividade. Na dialética seguinte, a formulação, os grupos apresentaram-nas. Já na validação, os grupos testaram as hipóteses e efetivaram a resolução dos itens (b), (c), (d) e (e). Por fim, na fase que representa a dialética de institucionalização o professor emitiu uma apreciação dos resultados e conclusões produzidas pelos alunos, utilizando nomenclatura adequada para os sólidos de revolução obtidos a partir da rotação de figuras planas e seus elementos constituintes.

5.1.2 Atividade 2 - Planificação dos sólidos de revolução por meio de um simulador

Para a realização da Atividade 2 foi utilizado um simulador de sólidos de revolução produzido por um grupo de três alunos sendo dois destes integrantes da turma 301 e o outro da turma 302, que se dispuseram a confeccionar o instrumento em um período extraclasse. Em momento prévio a aula, a professora pesquisadora postou no Google Classroom um material teórico sobre a geração de sólidos de revolução e algumas possibilidades de visualização espacial disponíveis nos seguintes endereços:

<https://www.geogebra.org/t/solids?lang=pt> Acesso em: 1 set. 2021;

<https://www.casadasciencias.org/recurso/7165> Acesso em: 1 set. 2021.

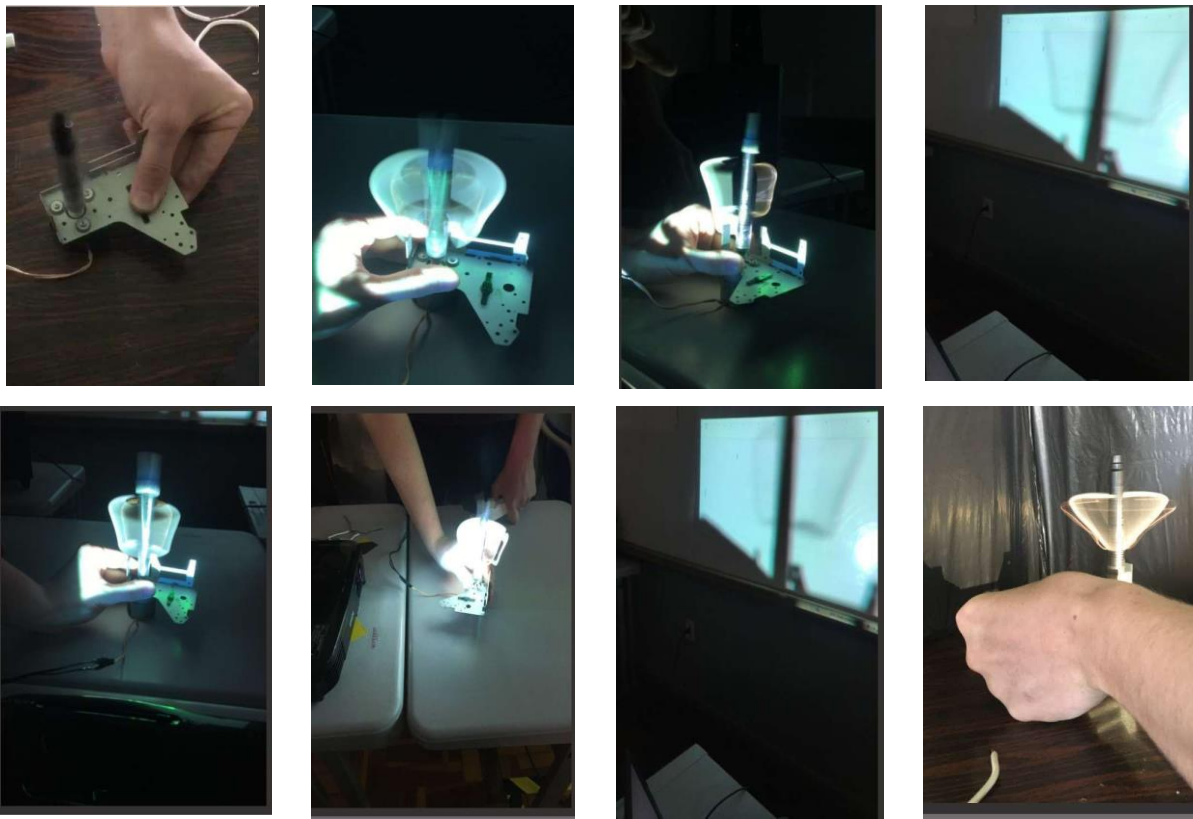
Tal material interveio como fomento para a confecção de um modelo de simulador de sólidos de revolução. Para tanto, segundo relato dos alunos envolvidos foi utilizado um mini

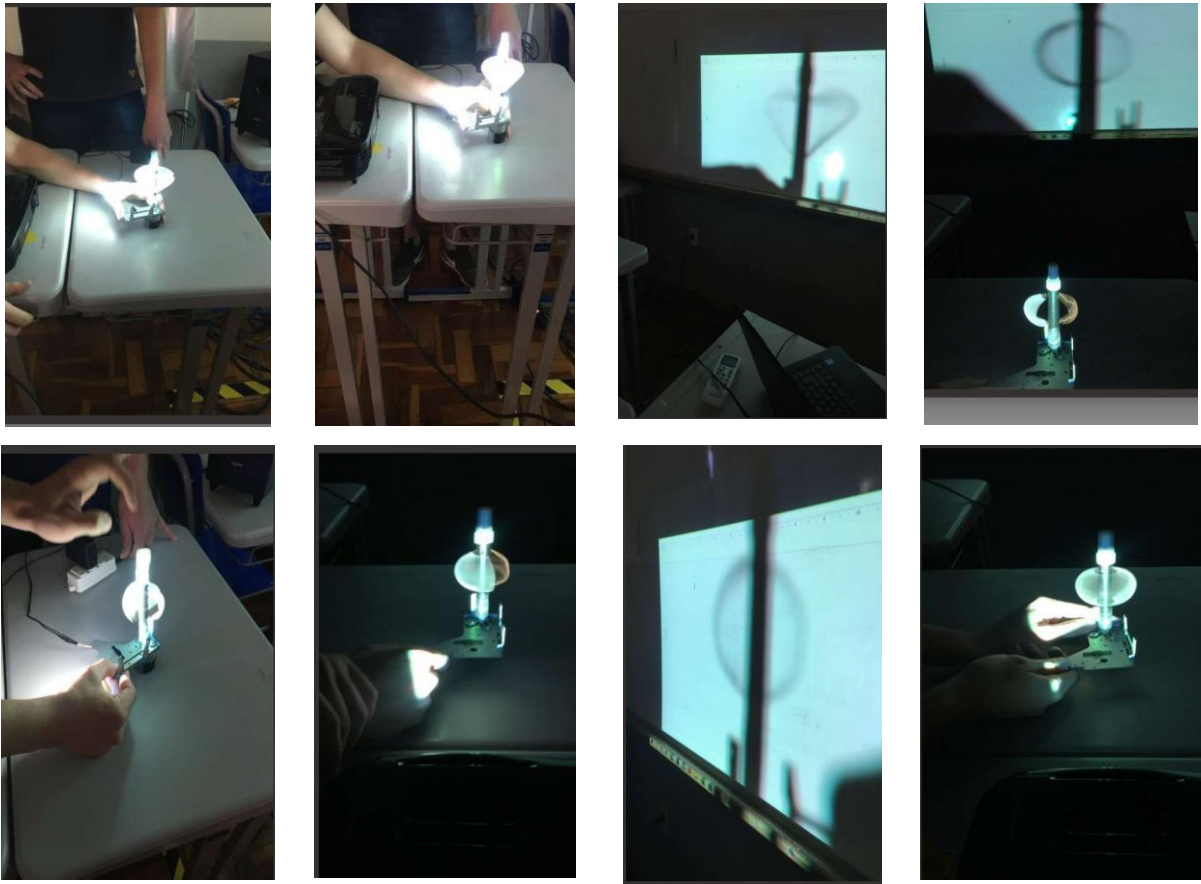
motor retirado de um rádio antigo que possuía um toca-fitas; esse serviu de dispositivo pois o movimento giratório apresenta velocidade constante. Uma vez isolado o fio condutor de energia do mini motor, os fios foram juntados a uma fonte de 12V e intensidade de corrente de 2A, para ligá-lo na tomada. Então, utilizando uma caneta, com furos em ambas as partes para manter o equilíbrio foi montado a haste que serviria como eixo de rotação das figuras planas. Estava pronto o simulador para ser utilizado juntamente com um projetor em uma sala escura.

Inicialmente o professor pesquisador orientou a turma para a formação de pequenos grupos, aos quais foram distribuídos fios de cobre que serviram de moldes para confeccionar as figuras planas. Aleatoriamente os grupos escolheram uma figura plana para iniciar a simulação de sólidos de revolução.

Os passos realizados pelos alunos envolvendo a montagem do simulador e a realização da Atividade 2 podem ser observados na Figura 50.

Figura 50 – Confeção do simulador e realização da Atividade 2 pelos alunos.





Fonte: Da pesquisa.

Durante a execução da atividade houve efetiva participação por parte dos alunos envolvidos, que conjecturam sobre os sólidos formados e a distinção entre sólido e superfície de revolução. Tecnicamente a visualização do cilindro a partir da rotação de um retângulo ocorreu com mais dificuldade; por conta de ao moldá-los as arestas devem estar perfeitamente retas e ortogonais.

Relacionamos nessa atividade os seguintes momentos de acordo com a tipologia das situações didáticas. Na dialética de ação, os alunos em pequenos grupos montaram suas estratégias e adotaram suas escolhas; na fase seguinte a formulação houve intensa comunicação de ideias a cerca da simulação dos sólidos de revolução. Na fase posterior, a validação, a partir da comunicação de ideias iniciadas na etapa anterior os alunos demonstraram através do simulador que superfícies planas potencializam sólidos de revolução, identificaram a geratriz desses sólidos e perceberam a notável diferença entre superfície e sólido de revolução.

Por fim a institucionalização, etapa que o conhecimento se manifesta em seu caráter de universalidade, se deu com a interferência do professor pesquisador que formalizou os conceitos geométricos envolvidos durante a simulação dos sólidos de revolução, contando

também com a intervenção do professor de física da turma que realizou uma interessante explicação sobre o fenômeno da persistência retiniana e a relação com a visão das imagens dos sólidos gerados através do simulador.

5.1.3 Atividade 3 – Resolvendo questões do ENEM

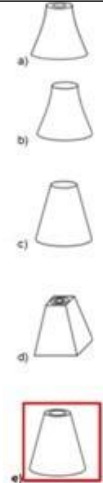
Para a resolução dessa atividade foram distribuídas pelo professor pesquisador folhas de material impresso contendo uma lista de cinco questões extraídas de avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que envolve os conceitos previamente estudados.

A referida atividade também foi criada no Google Classroom. Os educandos foram orientados a resolverem as questões durante o período de aula apresentando uma justificativa formal para suas resoluções, e posteriormente efetivarem as respectivas postagens.

Considerando as atribuições (número de alunos que receberam a atividade) e as devoluções (número de retorno das atividades) através da plataforma Google Classroom, as aferimos os seguintes dados: Na turma 301 das 8 atribuições, ocorreram oito (8) devoluções e na turma 302 das 17 atribuições ocorreram 14 devoluções.

Com relação a Questão 1, a qual intitulamos de A Torre, obtivemos os seguintes dados: Apenas dois alunos da turma 302 não assinalaram corretamente a alternativa referente a questão, ambos assinalaram a alternativa (c); percebemos também que alguns alunos apresentaram dificuldade na justificativa formal da resposta, muitos argumentavam com a seguinte afirmação:” dá para ver que a letra E é a certa”. Na Figura 51, está ilustrada a resposta elaborada por dois alunos.

Figura 51 – Resposta da Questão 1 pelos alunos A2 e A3



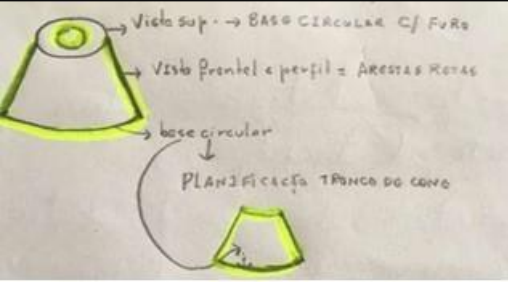
a) Não. As arestas laterais das faces não são retas (trapezoidais)

b) Não. As arestas das faces laterais não são (trapezoidais) retas e falta o furo na base circular correspondente a vista superior.

c) Não. Falta o furo na base circular

d) Não. As bases superior e inferior não são circulares. (quadrados) e cone.

e) **Letra (E)**



Fonte: Registro dos alunos A2 e A3 no Google Classroom.

A grande maioria dos alunos utilizaram como estratégia para encontrar a alternativa correta, assim como o aluno A2, o confronto dos dados apresentados no enunciado com as alternativas mostradas, excluindo assim as improváveis. Já a estratégia utilizada pelo aluno A3 foi a representação geométrica, utilizando os dados do enunciado e encontrando diretamente a alternativa correta.

Podemos observar de acordo com a tipologia das situações didáticas as seguintes fases: Na dialética de ação, momento de análise e conhecimento da questão os alunos elegeram um procedimento estratégico de resolução, buscando algumas características para identificar qual a torre é correta. Na dialética de formulação, os educandos trocam informações com os demais colegas, discutindo nos pequenos grupos acerca das semelhanças entre as três vistas mostradas na questão e a projeção da torre. A validação ocorreu quando os alunos comprovam a veracidade das estratégias adotadas, e elegem a alternativa correta. No momento da institucionalização o professor pesquisador retomou ao controle explicitando que a questão envolveu geometria e projeção formalizando dialogicamente os resultados obtidos.

Sobre a Questão 2, intitulada de Foguete, obtivemos os seguintes resultados: três (3) alunos não assinalaram a resposta correta, sendo dois (2) da turma 301 e o outro, por sua vez

da turma 302. Percebemos uma dificuldade inicial na interpretação da questão; alguns alunos necessitaram da releitura sucessiva até encontrar uma estratégia conveniente. Considerando as alternativas assinaladas incorretamente, dois (2) alunos assinalaram a alternativa (e) e um aluno a alternativa (d), e estes não emitiram justificativas para essas escolhas. Na Figura 52 está apresentada a resolução correta da Questão 2, realizada pelo aluno A3.

Figura 52 - Resposta da Questão 2 pelo aluno A3.

a) pirâmide, cilindro reto, cone reto, cilindro reto.

b) cilindro reto, tronco de cone, cilindro reto, cone equilátero

c) cone reto, cilindro reto, tronco de cone e cilindro equilátero

d) cone equilátero, cilindro reto, pirâmide, cilindro

e) cone, cilindro equilátero, tronco de pirâmide, cilindro.

1. Cone Reto (AB=4FG)
 2. Cilindro
 3. Tronco de Cone
 4. Cilindro Equilátero (EF=2FG)

Fonte: Registro do aluno A3 no Google Classroom.

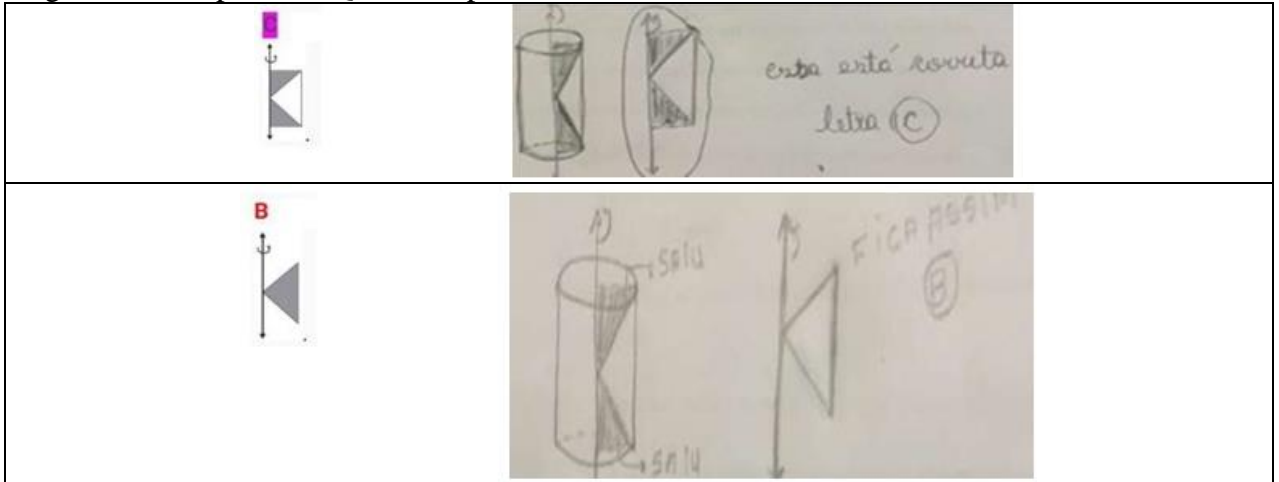
Todos os alunos, assim como o aluno A3, resolveram a questão por meio da representação geométrica, embora apresentando inicialmente dificuldade na interpretação do enunciado da questão, evidenciaram habilidades de percepção geométrica e reconheceram corretamente a relação entre o raio e a geratriz de um cone e de um cilindro, para identificá-los como cone equilátero e cilindro equilátero respectivamente.

Na dialética de ação, os alunos montaram estratégias para a resolução da questão, ora por desenho simulando a rotação do foguete, ora por conjecturas. Quanto a formulação, os alunos trocaram informações com os colegas sobre a maneira de como o foguete poderia ser gerado, em particular nessa percebemos a fase de formulação bastante intensa. Na dialética seguinte, a validação ocorreu quando os alunos estabelecem a relação entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos na decomposição do foguete. No momento da institucionalização, o professor pesquisador conferiu explicações sobre a resolução da questão, evidenciando os conceitos empregados.

Com relação à Questão 3, a qual chamamos de Anticlepsida, acuramos os seguintes dados: Apenas (1) aluno da turma 301 assinalou a alternativa de forma incorreta. Percebemos que facilmente os alunos identificaram qual a alternativa correta ao traçar o eixo de rotação e

retirar os dois cones. O aluno que equivocadamente assinalou a alternativa (c) não efetuou a retirada dos cones. Isto pode ser observado na Figura 53, com a resposta incorreta do aluno A4 e a resposta correta do aluno A5.

Figura 53 - Resposta da Questão 3 pelos alunos A4 e A5



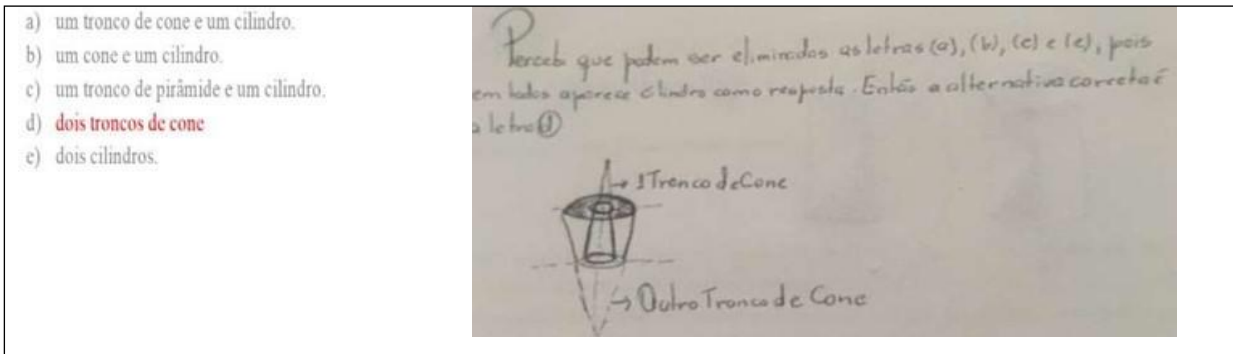
Fonte: Registro dos alunos A4 e A5 no Google Classroom.

Os alunos, exceto o Aluno A4, conforme registro acima (Figura 53) elaboram boas estratégias para suas ações, retirando o espaço do plano correspondente aos dois cones e resolvendo de forma semelhante mostrado na solução encontrada pelo Aluno A5.

Percebemos, então dessa forma os seguintes momentos da tipologia das situações didáticas: A ação se deu, ao passo que os alunos elaboraram estratégias para a resolução da questão, retirando os dois cones opostos e traçando o eixo de rotação. No momento seguinte, a formulação onde os alunos dialogaram acerca das alternativas apresentadas para identificar a figura plana cuja rotação gera a anticlépsida. Em sequência, os momentos das dialéticas de validação e institucionalização respectivamente, onde os alunos estabelecem partir das etapas anteriores a solução para a questão da anticlépsida e o professor confere o status do saber comentando sobre a resolução da questão e os conceitos envolvidos.

Na Questão 4, a qual denominamos Forma de bolo I, todos os alunos assinalaram corretamente a alternativa correspondente, identificando facilmente os dois troncos de cone. A resolução feita pelo aluno A3 está apresentada na Figura 54.

Figura 54 – Resposta da Questão 4 pelo aluno A3.



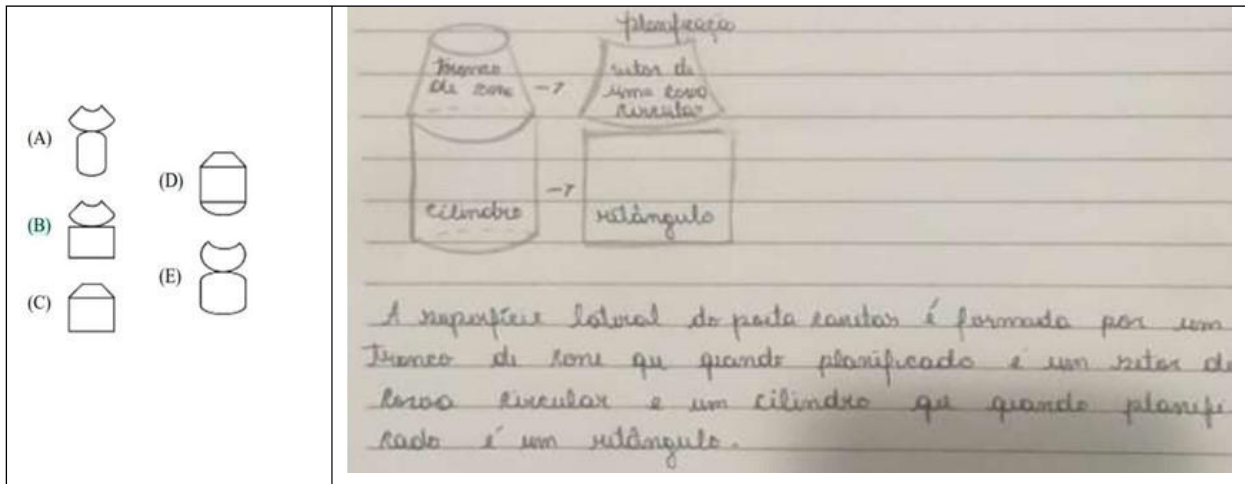
Fonte: Registro do aluno A3 no Google Classroom.

Todos os alunos, assim como o aluno A3 escolheram estratégias adequadas, ora percebendo que exceto a alternativa (d) não apresentava cilindro como resposta, ora identificando diretamente os dois troncos de cone.

O momento da dialética de ação ocorreu quando os educandos traçaram suas estratégias para a identificação dos troncos de cone, seja por percepção geométrica ou por conjecturas excluindo as alternativas que apresentavam cilindro como resposta. No momento seguinte, a formulação os alunos dialogaram a respeito das alternativas apresentadas. Em sequência, ocorreu a validação quando os alunos assumiram como correta a alternativa (d), e na dialética da institucionalização, o professor interveio conferindo a solução e os conceitos envolvidos.

Na Questão 5, nomeada de Porta canetas, obtivemos os seguintes dados: Dois (2) alunos assinalaram a resposta incorreta, sendo um da turma 301 e o outro da turma 302. Percebemos, em relação a planificação do tronco de cone, referenciada na questão a ocorrência de uma associação incorreta com o trapézio, o que levou, desta forma os alunos a atribuírem a alternativa (c) como correta. Com relação a planificação do cilindro todos associaram corretamente com o retângulo, conforme podemos observar na resolução feita pelo aluno A6 que está apresentada na Figura 55.

Figura 55 - Resposta da Questão 5 pelo aluno A6.



Fonte: Registro do aluno A6 no Google Classroom.

Considerando a tipologia das situações didáticas, percebemos dessa forma: Na dialética de ação os alunos organizaram as estratégias de resolução através da planificação do cilindro e tronco de cone, conforme o enunciado da questão, na dialética seguinte a formulação, ocorreu o diálogo sobre as possibilidades de respostas, durante a validação os alunos assumiram como verdadeira a solução da questão, de acordo com a visão espacial e do plano. A institucionalização ocorreu, quando o professor apresentou a solução da questão e esclarecendo sobre os prováveis enganos.

5.2 BLOCO 2 - CÁLCULO DAS ÁREAS DAS SUPERFÍCIES DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO ATRAVÉS DE SUA PLANIFICAÇÃO

Para a realização das atividades do BLOCO 2, o professor pesquisador no dia anterior a realização da aula prevista para o desenvolvimento das mesmas, utilizando postagem no Google Classroom recomendou que os alunos retomassem alguns pré-requisitos, como cálculo de áreas de figuras planas e o Princípio de Cavalieri, estudados anteriormente. Para tanto dispôs material teórico de apoio elaborado pelo autor e indicou o acesso no Portal da Matemática da OBMEP, módulos de ensino, disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/>.

5.2.1 Atividade 4 - Determinando o cálculo de áreas de superfícies de cilindros, cones e esferas através de sua planificação e o Princípio de Cavalieri

Para a realização dessa atividade foram disponibilizados moldes impressos em folha de papel branca A4, a saber: cilindros, cones e troncos de cones. Foi proposto que a turma desenvolvesse o roteiro da atividade configurada em pequenos grupos; também foram instruídos pelo professor pesquisador sobre o devido preenchimento da tabela onde o espaço destinado a representação fotográfica deveria ser realizado extraclasse.








Com relação as atribuições e devoluções através do Google Classroom, obtivemos os seguintes valores: Das oito atribuições na turma 301, ocorreram oito devoluções e da mesma forma na turma 302, das 17 atribuições ocorreram 17 devoluções.

Durante a realização da atividade proposta, percebemos que os alunos se mostraram interessados e autônomos, partindo das definições de área de figuras planas com relativa facilidade determinaram relações para o cálculo das áreas das superfícies dos corpos redondos em estudo. O questionamento geral foi sobre a planificação da esfera, onde com estranheza os alunos manifestaram frases do tipo: Como planificar um sólido que não possui planos retos? Ah! Então a Terra é plana! Seria através de um círculo? Então não existe!

A resolução da Atividade 4(a) pelo aluno A7 está apresentada na Figura 56.

Figura 56 – Resposta da Atividade 4 (a) pelo aluno A7.

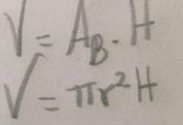
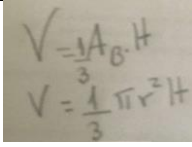
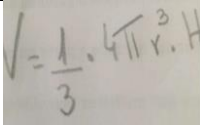
	Área da Superfície da Base	Área da Superfície Lateral	Área da Superfície Total	Representação no Plano	Representação Através de Fotos
Cilindro Reto	$A_B = \pi R^2$	$A_L = 2\pi RH$	$A_T = 2A_B + A_L$		 Caixas d'água
Cilindro Equilátero	$A_B = \pi R^2$	$A_L = \pi R^2$	$A_T = 2A_B + A_L$		 Lata de leite condensado
Cone Reto	$A_B = \pi R^2$	$A_L = \pi Rg$	$A_T = A_B + A_L$		
Cone Equilátero	$A_B = \pi R^2$	$A_L = \pi Rg$	$A_T = A_B + A_L$		

Tronco de Cone	$A_B = \pi r^2$ $A_D = \pi r^2$	$A_L = \pi g (r+R)$	$A_T = A_B + A_D + A_L$		 <p>Vaso de planta da escola</p>
Esfera			$A = 4\pi R^2$		 <p>Luminárias da praça</p>  <p>Semente de soja</p>

Fonte: Registro do Aluno A7 no Google Classroom.

O registo das relações para o cálculo do volume, solicitado na Atividade 4(b) está apresentado na Figura 57, com a resolução correta feita pelo aluno A8.

Figura 57 – Resposta da Atividade 4 (b) pelo aluno A8.

Corpos Redondos	Cilindro	Cone	Esfera
Volume			

Fonte: Registro do aluno A8 no Google Classroom.

Os demais alunos, assim como o aluno A7 e aluno A8 preencheram os itens (a) e (b) da tabela estabelecendo relações para o cálculo das áreas das superfícies de cilindros, cones e esferas, utilizando a definição de área e fórmulas conhecidas da geometria plana. Sobre a representação fotográfica, foram bastante criativos e fizeram registros peculiares com olhar geométrico acerca dos objetos do cotidiano e da paisagem. Constatamos que a maioria dos alunos não estabeleceram uma relação para o cálculo das áreas das superfícies de um cilindro equilátero em função do seu raio (ou altura). Em relação ao item (b) todos os alunos expressaram corretamente as fórmulas para o cálculo dos volumes, mas não apresentaram pormenores a respeito do Princípio de Cavalieri.

Com relação a tipologia das situações didáticas, identificamos as seguintes fases da dialética: Durante a ação, os alunos montaram suas estratégias para determinar o cálculo das áreas das superfícies e volumes dos corpos redondos sugeridos, na etapa posterior a formulação ocorreu um intenso diálogo à respeito das ideias pensadas pelos grupos, posteriormente na etapa da validação os alunos determinaram as expressões matemáticas para o cálculo de áreas de superfícies dos corpos redondos a partir de sua planificação, exceto no caso da esfera e para o cálculo do volume empregando o Princípio de Cavalieri. A institucionalização ocorreu quando o professor pesquisador articula sobre as definições usuais e emite uma apreciação em vista aos resultados obtidos, inclusive sobre a planificação da esfera, e a obtenção da relação que permite o cálculo da área de sua superfície, assunto que trataremos no BLOCO 4.

5.2.2 Atividade 5 - Resolvendo uma questão

A Atividade 5 é constituída de uma questão, extraída da Prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que denominamos Questão 6 – Cartografia. Realizamos tal escolha, pois consideramos que a Cartografia é uma importante ferramenta para a compreensão do fato que superfícies esféricas não podem ser apresentadas em superfícies planas, exceto com adaptações, como o caso do planeta Terra que lembra uma esfera.

O professor pesquisador sugeriu que fossem utilizadas as seguintes fontes como suporte: <https://atlascolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/historia-da-cartografia> Acesso em: 30 de set. 2021;

<https://www.geogebra.org/m/btfr5zww> Acesso em: 30 de set. de 2021.

Na Figura 58 está apresentada a resposta dada pelo aluno A1 a Questão 6.

Figura 58 - Resposta da Questão 6 pelo aluno A1

Projeção cartográfica é uma transformação que faz corresponder, a cada ponto da superfície terrestre um ponto no plano.

As relações do plano de projeção à superfície projetada mostradas nas figuras são identificadas, respectivamente, em

1. 2. 3.

Quando os paralelos e meridianos são "desenrolados" sobre superfície plana eles ficam moldados na superfície de um cilindro, então a resposta é a letra A, que todos são CILINDROS.

Fonte: Registro do Aluno A1 no Google Classroom.

Todos os alunos, assim como o aluno A1 responderam corretamente, assinalando a letra (a), estabelecendo dessa forma a correlação entre as representações do mundo e as projeções utilizadas, associando as três mostradas na questão como do tipo cilíndrica.

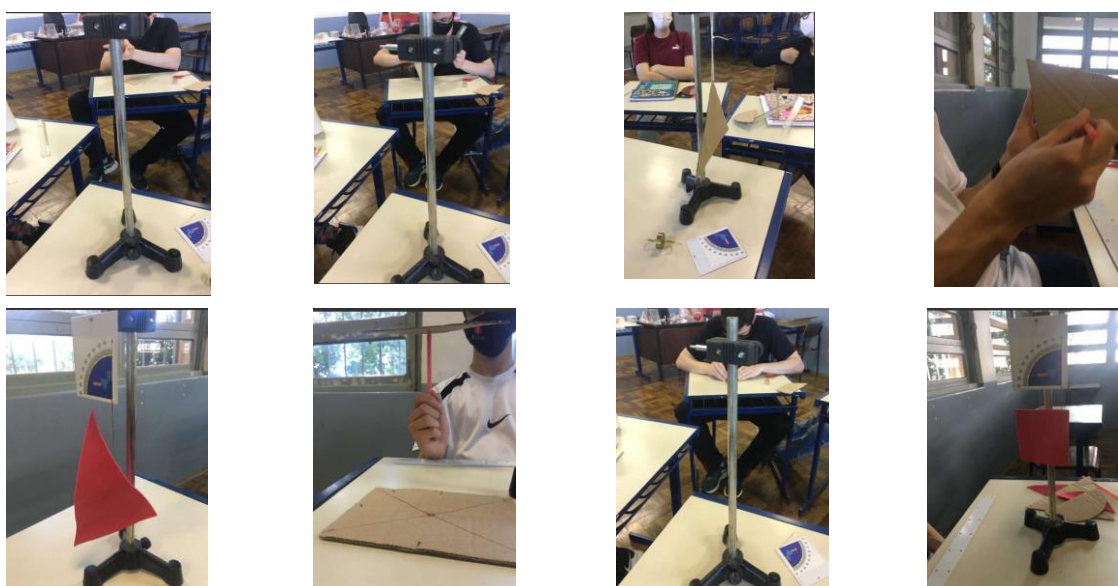
5.3 BLOCO 3 – CONHECENDO OS TEOREMAS DE PAPPUS

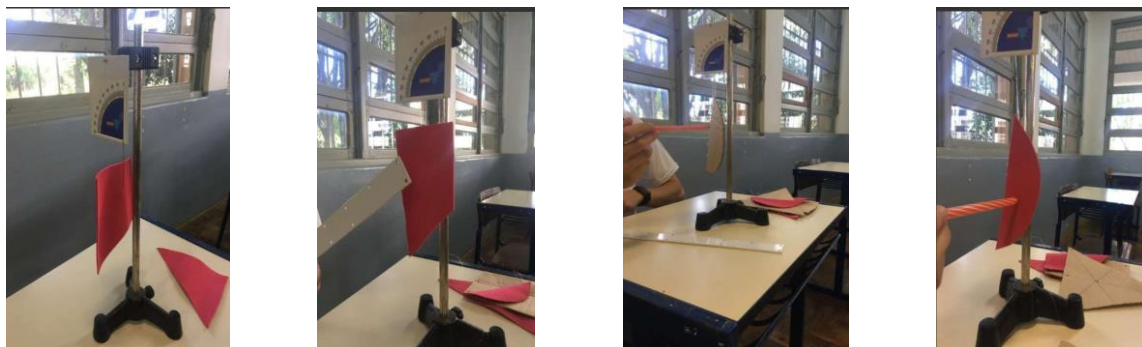
Nesse bloco foram trabalhadas duas atividades: Atividade 6, em que identificamos através de um simples experimento o centro de gravidade de algumas figuras planas, e assim podemos determinar as relações matemáticas para os cálculos das mesmas, requisito necessário para o desenrolar da Atividade 7 que envolve a aplicação de um belo teorema para o cálculo de áreas de superfícies e volumes dos sólidos de revolução estudados.

5.3.1 Atividade 6 - Determinando o centro de gravidade de figuras planas

Para a realização da Atividade 6, o professor pesquisador orientou sobre a organização da turma em pequenos grupos, e após distribuiu para os mesmos pedaços de cartolina e papelão. Foi utilizado também um tripé metálico com gancho na base superior e uma pequena placa metálica circular medindo um quarto de circunferência contendo uma agulha suspensa (Figura 59).

Figura 59 - Resolução da Atividade 6 pelos alunos.





Fonte: Da pesquisa.

O professor pesquisador orientou verbalmente as etapas do experimento à medida que estas sucederam. Os alunos participaram efetivamente da atividade proposta; para alguns era desconhecida a noção de centro de gravidade de figuras planas; mesmo sabendo responder por exemplo, que o baricentro de um triângulo é o encontro das três medianas, não estabeleciam nenhuma analogia com o seu centro de gravidade. Durante o desenvolvimento percebemos que intuitivamente os alunos foram traçando boas estratégias e executando com sucesso a sucessão das etapas previstas.

Durante a fase que caracteriza a dialética de ação os alunos estabeleceram suas estratégias para a determinação do centro de gravidade de triângulos, alguns quadriláteros e semicírculos, utilizando o traçado de medianas e experimentalmente. Na fase posterior, a formulação, ocorreram as discussões, a confrontação das hipóteses e conjecturas sobre o processo para determinar o centro de gravidade também considerado baricentro. O professor pesquisador instigou os sujeitos através questionamentos sobre a localização do centro de gravidade das figuras em análise e a determinação de suas medidas. Em sequência, os educandos constataram a veracidade das suas hipóteses determinando, assim o centro de gravidade das figuras, ocorreu, então a validação. Por fim, a institucionalização, onde o professor pesquisador retoma e formaliza o conhecimento matemático, apresentando as relações para o cálculo do centro de gravidade ou baricentro das figuras planas, destacando que a determinação dessas variáveis será de suma importância para as aplicações dos próximos teoremas a serem estudados.

5.3.2 Atividade 7 - Cálculo da área das superfícies e volumes de sólidos de revolução com a aplicação dos teoremas de Pappus

O professor pesquisador, 72 horas antecedendo o momento das aulas em que sucederia a

Atividade 7, efetuou postagem no Google Classroom de um texto introdutório elaborado pelo próprio, usando como referência o livro *A Matemática no Ensino Médio*, v. 2 (LIMA et al, 2006), páginas 294 a 299, sobre os dois teoremas de Pappus para o cálculo das áreas de superfícies e volumes de sólidos de revolução. Evidentemente, diante do nível de ensino de nossos educandos não apresentamos demonstrações sofisticadas como a utilização de ferramentas do Cálculo Integral e Diferencial. Para a demonstração de tais teoremas, mostramos, pois, diante dos conhecimentos prévios dos alunos, como determinar tais fórmulas, com o intento que estes utilizem sabiamente para solucionar questões aparentemente difíceis.

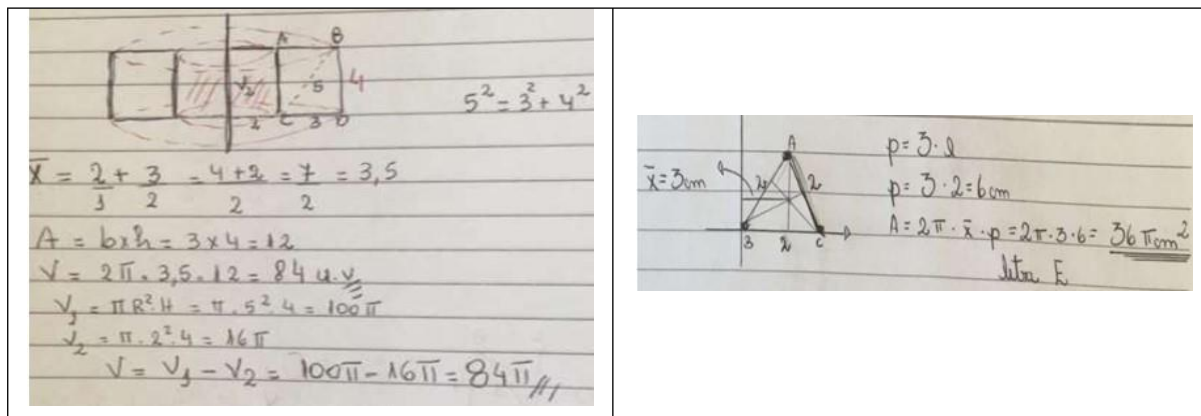
As cinco questões que compõe esse bloco, foram distribuídas para os alunos em material impresso e criada como atividade pelo professor pesquisador no Google Classroom, para posterior devolução da qual obtivemos os seguintes resultados: De oito atribuições, obtivemos oito devoluções na turma 301 e das 17 atribuições foram realizadas 15 devoluções na turma 302. A respeito das questões 7 e 8, denominadas, respectivamente por, Rotação de um retângulo e Rotação de um triângulo, percebemos que os alunos identificaram claramente as variáveis envolvidas no problema e rapidamente encontraram a solução utilizando o Teorema de Pappus. Alguns alunos por opção também utilizaram o Princípio de Cavalieri para confrontar a veracidade do resultado obtido, e dentre outros que iniciaram essa tentativa, percebemos situações de desistências motivadas por obstáculos encontrados na visualização do sólido gerado.

Na Questão 7, utilizando-se das devoluções no Google Classroom, obtivemos os seguintes dados: Todos os alunos da turma 301 resolveram de forma correta a questão, e dois alunos da turma 302 encontraram a solução, porém identificaram a afirmativa erroneamente assinalando a letra (b).

Na maioria das resoluções apresentadas, para a Questão 8, percebemos a ausência da representação geométrica da figura gerada. Todos os alunos submetidos encontraram a alternativa (e) como resposta.

Na Figura 60 está apresentada a resposta elaborada pelo aluno A1 a Questão 7 e a resposta feita pelo aluno A7 a Questão 8 .

Figura 60 - Resposta das questões 7 e 8.



Fonte: Registro dos alunos A1 e A7 no Google Classroom.

Conforme mencionamos acima, da mesma forma que o aluno A1, foi consensual o emprego do Teorema de Pappus para solucionar a questão. Ressalvamos também, que na Questão 7, a maioria dos alunos identificaram diretamente os elementos da terna pitagórica 3, 4 e 5. Os alunos consideraram a questão de fácil resolução diante do emprego do Teorema de Pappus para o cálculo de áreas de superfícies geradas por rotação de figuras planas.

Percebemos que na Questão 8, o aluno A7, empregou corretamente o Teorema de Pappus para o cálculo de áreas, encontrando a solução esperada, porém representou de forma incorreta o triângulo equilátero no plano, localizando um de seus vértices sob a origem. Com relação a tipologia das situações didáticas, percebemos os seguintes momentos da dialética: Se fez a ação quando os alunos montaram suas estratégias considerando as possibilidades de resolução, em sequência a formulação onde estabeleceram o diálogo e a permuta de informações sobre as variáveis envolvidas, após a validação onde os alunos desenvolveram a questão a partir das estratégias elaboradas. Convém ressaltar que em contexto os alunos validaram suas ações a partir da aplicação direta do Teorema de Pappus para o cálculo de áreas de superfícies; ocorreu a institucionalização quando o professor pesquisador retoma o status do saber discutindo as soluções encontradas e apresentando a resolução da questão.

Sobre a Questão 9, denominada Rotação de um triângulo, ao contrário das duas questões propostas anteriormente, percebemos que os alunos encontraram alguns obstáculos. Estrategicamente rotacionaram o triângulo ABC sobre o eixo s apresentado, encontrando um cone como sólido gerado de geratriz 3 , raio da base 2 e altura $\sqrt{5}$. Utilizando o Teorema de Pappus determinaram o volume desse cone. Dessa forma omitindo o fato de que o sólido gerado seria uma espécie de “casca de cone”. Não efetuaram a retirada do volume do outro cone de

raio da base 1 e altura $\sqrt{5}$. Diante disso, constatamos os seguintes dados: quatro alunos da turma 301, e seis alunos da turma 302 desenvolveram da maneira supracitada; os demais encontraram a solução, via Teorema de Pappus para o cálculo de volumes, ou utilizando o Princípio de Cavalieri, ou como, dentre os quais, três alunos utilizaram as duas possibilidades, afim de confrontar os resultados. Uma resolução correta apresentada pelo aluno A8, encontra-se na Figura 61.

Figura 61 - Resposta da Questão 9 pelo Aluno A8.

Exercício 09) Pelo teorema de Pappus

$v_1 = 2\pi \times 1 \times A_1$

$r = \frac{2}{3}$

$A_1 = b \times h = 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$

$v_1 = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{5}$

$v_1 = \frac{4\pi \cdot \sqrt{5}}{3}$

$v_2 = 2\pi \times 2 \times A_2$

$r_2 = 1$

$A_2 = 1 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$

$v_2 = 2\pi \cdot 1 \cdot \sqrt{5}$

$v_2 = \frac{2\pi \sqrt{5}}{3}$

$v_1 - v_2 = \frac{4\pi \sqrt{5}}{3} - \frac{2\pi \sqrt{5}}{3} = \frac{2\pi \sqrt{5}}{3}$

$\frac{2\pi \sqrt{5}}{3} = \sqrt{5} \pi \text{ u.v.}$

Handwritten notes include: $a^2 = b^2 + c^2$, $(5)^2 = (2)^2 + c^2$, $9 - 4 = c^2$, $c^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$.

Fonte: Registro do aluno A8 no Google Classroom.

Apreciamos, então, os sucessivos momentos da tipologia das situações didáticas em suas dialéticas e em sequência temos que: a ação quando os alunos elaboraram os recursos para a resolução da questão e neste contexto. A maioria adotou a rotação do triângulo para obtenção do sólido gerado e aplicação do Teorema de Pappus para o cálculo do volume desse sólido; ocorreu a formulação quando os alunos através do diálogo debateram as hipóteses da questão; a validação quando os alunos colocam em prática os momentos anteriores, resolvendo assim a questão. A institucionalização, quando o professor pesquisador formaliza o saber apresentando uma resolução comentada da questão.

A Questão 10 também trata da rotação de um triângulo em torno de um eixo, considerando de forma intencional as meras semelhanças com a anterior, incluímo-la em nossa sequência com a reta intensão de ressaltar a importância da prática do exercício matemático no processo ensino aprendizagem, mostrando que questões oriundas de fontes distintas por muitas vezes apresentam raciocínio recorrente.

A partir das devoluções dos alunos, aferimos os seguintes dados: dois alunos da turma 301 não encontraram o resultado correto, mediante equívocos de cálculo numérico e interpretação incorreta dos dados; três alunos da turma 302 também não apresentaram os dados corretamente e erraram a questão.

Na Figura 62, é mostrada a resolução feita pelos alunos A9 e A10.

Figura 62 - Resposta Questão 10 pelos alunos A9 e A10

The figure displays two pages of handwritten student work. The left page shows a student's solution for Question 10, involving the rotation of a triangle around two different axes. The student calculates the volume of the resulting cones and finds their ratio to be 1. The right page shows another student's solution, also calculating the volumes of the cones and finding the ratio to be 1. Below these pages is a printed version of the question, which includes a diagram of a triangle with base 8 and height 6, and a list of multiple-choice options (A) 2/3, (B) 1, (C) 3/2, (D) 18, (E) 36. A handwritten note next to the diagram states 'Base = 8, H = 6' and 'A razão entre os volumes de P e Q é', followed by the calculation $V_p = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow \frac{V_p}{V_q} = 1 //$.

Fonte: Registro dos alunos A9 e A10 no Google Classroom.

Mostramos acima a resolução dos alunos A9 e A10, respectivamente, onde apresentam estratégias de ação particularmente distintas, enquanto o aluno A9, desenvolve duas propostas de resolução e conclui que o caminho mais fácil de acordo com sua compreensão seria o emprego do Teorema de Pappus para o cálculo de volumes, o aluno A10, utiliza uma estratégia genérica, percebendo as relações das variáveis envolvidas apenas simulando as duas rotações sugeridas na questão.

Observamos, então de acordo com a tipologia das situações didáticas os seguintes momentos sequenciais de suas dialéticas: Durante a ação, os alunos elaboraram estratégias para a resolução da questão, na formulação ocorreu o intercâmbio de ideias sobre as possibilidades de resolução, consolida-se a validação com o desenvolvimento da questão embasada nas etapas anteriores, percebemos então, diante do cenário envolvido, que a grande maioria validou suas ações com o emprego do Teorema de Pappus para o cálculo de volumes. O professor pesquisador assume o status do saber e executa a resolução comentada da questão, dessa forma ocorreu a institucionalização.

A Questão 11, trata de uma forma de bolo, formada por dois troncos de cone, o qual estruturalmente distinto dos anteriores foi acrescentado nessa atividade, para que possamos discorrer em análise das estratégias de ação otimizadas pelos alunos.

Dos resultados obtidos, obtivemos os seguintes dados: Na turma 301, cinco alunos obtiveram êxito em seus resultados, um aluno não observou corretamente o centro de gravidade, e o outro não concluiu a questão, também na turma 302, dez alunos encontraram a solução correta para a questão e os demais não a concluíram.

As resoluções feitas pelos alunos A11 e A3, estão na Figura 63.

Figura 63 - Resposta da Questão 11 pelos alunos A11 e A3

Onda Maior:

Diagram: A trapezoid with top base 12, bottom base 9, and height 10. A vertical axis of rotation is shown to the left.

$$\bar{x}_1 = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$\bar{x}_2 = \frac{9+12}{3} = 10$$

$$A_1 = 9 \times 10 = 90$$

$$A_2 = 3 \times 10 = 30$$

$$V_1 = 2\pi \cdot 4,5 \cdot 90 = 810\pi \text{ cm}^3$$

$$V_2 = 2\pi \cdot 10 \cdot 30 = 600\pi \text{ cm}^3$$

$$V_1 + V_2 = 810\pi + 600\pi = 1410\pi \text{ cm}^3 = 1410 \times 3,14 = 4427,4 \text{ cm}^3$$

Onda Menor:

Diagram: A trapezoid with top base 2, bottom base 1, and height 10. A vertical axis of rotation is shown to the left.

$$\bar{x}_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$A_1 = 2 \times 10 = 20 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 1 \times 10 = 10 \text{ cm}^2$$

$$V_1 = 2\pi \cdot 1 \cdot 20 = 40\pi = 40 \cdot 3,14 = 125,6 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = 2\pi \cdot 1 \cdot 10 = 20\pi = 20 \cdot 3,14 = 62,8 \text{ cm}^3$$

$$V_1 + V_2 = 125,6 + 62,8 = 188,4 \text{ cm}^3$$

Final calculation:

$$4427,4 - 188,4 = 4239 \text{ cm}^3$$

Onda Maior (Alternative Method):

Diagram: A trapezoid with top base 9, bottom base 12, and height 10. A vertical axis of rotation is shown to the left.

$$\bar{x}_1 = \frac{9+12}{2} = 10,5$$

$$A_1 = \frac{(9+12) \cdot 10}{2} = 105$$

$$V_1 = 2\pi \cdot 10,5 \cdot 105 = 2152,5\pi \text{ cm}^3 = 2152,5 \times 3,14 = 6758,85 \text{ cm}^3$$

Diagram: A trapezoid with top base 2, bottom base 1, and height 10. A vertical axis of rotation is shown to the left.

$$\bar{x}_2 = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$A_2 = 1 \times 10 = 10$$

$$V_2 = 2\pi \cdot 1 \cdot 10 = 20\pi = 62,8 \text{ cm}^3$$

$$V_1 - V_2 = 6758,85 - 62,8 = 6696,05 \text{ cm}^3$$

Final calculation:

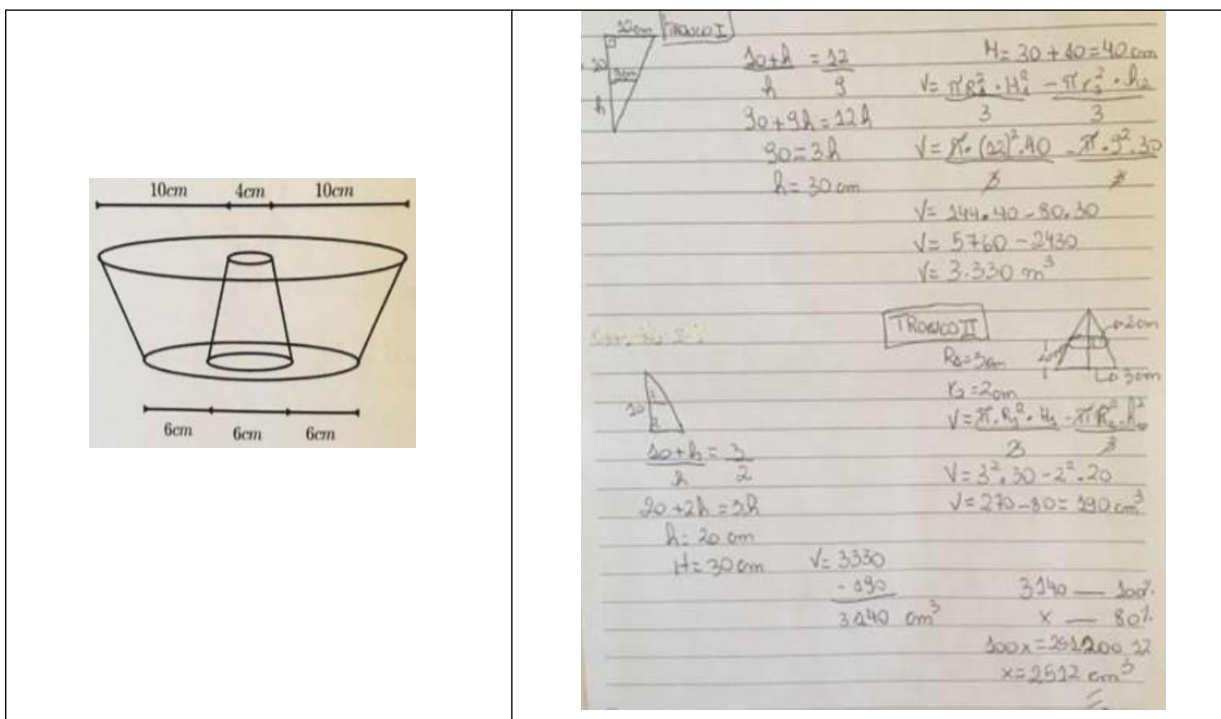
$$6696,05 \times 0,8 = 5356,84 \text{ cm}^3$$

Fonte: Registro dos alunos A11 e A3 no Google Classroom.

Assim como o aluno A11, a maioria dos alunos que desenvolveram a questão utilizaram o Teorema de Pappus para o cálculo de volumes, simulando um eixo de rotação, seccionando o sólido em figuras planas a serem rotacionadas e estruturando o problema em etapas. Dentre esses o aluno A3, conforme mostrado na Figura 64, determinou de forma equivocada a distância do baricentro (centroide) do trapézio ao eixo de rotação, decompondo-o em retângulo e triângulo, após somando respectivamente as duas distâncias ao eixo de rotação, considerando o valor encontrado como a distância do baricentro do trapézio ao eixo de rotação e adotando o valor encontrado subsequentemente em sua resolução.

Já o aluno A9 desenvolveu a questão de maneira correta, utilizando semelhança de triângulos para determinar a altura dos dois cones, após determinou o volume destes através do Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes, efetuando a diferença desses volumes encontrou o volume do tronco de cone maior, utilizando do mesmo raciocínio determinou o volume do tronco interno e através das diferenças desses volumes, encontrou o volume total ou capacidade como se refere o problema, finalizando com o cálculo da porcentagem requerida na questão (Figura 64).

Figura 64- Resposta da Questão 11 pelo aluno A9



Fonte: Registro do aluno A9 no Google Classroom.

Com relação a tipologia das situações didáticas em que vivenciamos os momentos de suas dialéticas observamos que: Durante a ação os sujeitos envolvidos elaboraram, de forma intensa e não única estratégias para solucionar a questão da forma de bolo, em sequência a formulação onde ocorreu a troca de conhecimentos através do diálogo, percebemos que em particular nessa fase que os alunos procuraram contextualizar a linguagem matemática para atender seus objetivos preestabelecidos. A validação quando os alunos partem das etapas anteriores coloca em pratica o conhecimento construído. Por fim a institucionalização, onde o professor aponta a solução através da resolução comentada da questão.

5.4 BLOCO 4 - RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES PROBLEMAS ENVOLVENDO O CÁLCULO DE ÁREAS DE SUPERFÍCIES E VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO EM CONTEXTOS DIVERSOS

Para o desfecho da sequência didática aqui exposta, trazemos duas atividades 8 e 9 ou seja, duas situações, que a luz da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau podem ser definidas, respectivamente, como didática e adidática, em contextos diversos.

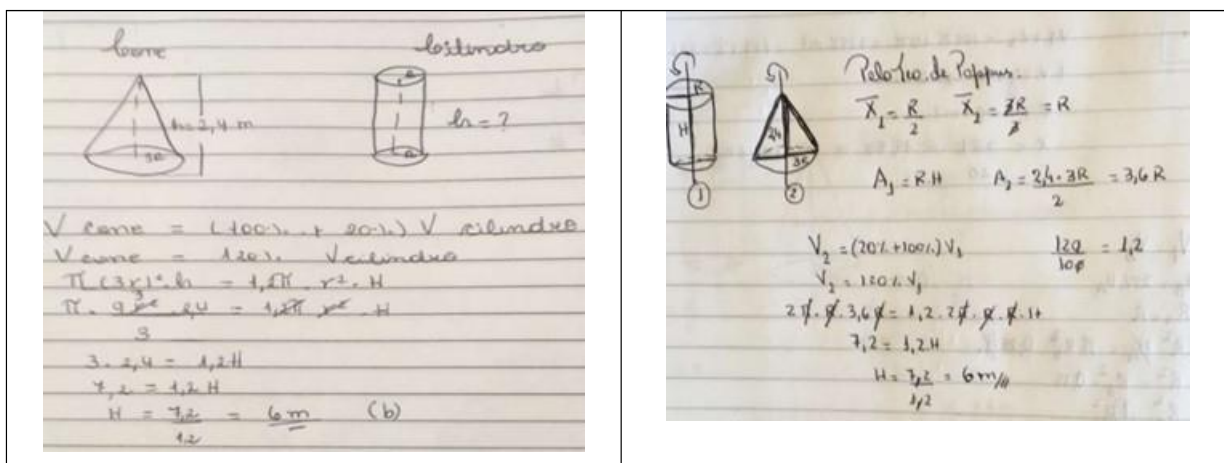
5.4.1 Atividade 8 - Resolvendo questões

O professor previamente ao momento das aulas cria no Google Classrooma Atividade 8, que compreende uma lista de nove questões envolvendo o cálculo de áreas e superfícies de sólidos de revolução. Para tanto os alunos são instruídos a utilizarem todo o material de apoio disponibilizado como fonte de pesquisa. Os alunos submetidos a essa tarefa organizaram-se em pequenos grupos para efetivarem a resolução da mesma e posterior postagem no Google Classroom.

Com relação as atribuições e devoluções da Atividade 8 acuramos os seguintes dados de forma respectiva: Turma 301 oito atribuições e oito devoluções e turma 302, 17 atribuições e 16 devoluções.

No desenvolvimento da Questão 12, denominada Poço, foi notório o fato de que ao perceberem os dados apresentados optaram por solucioná-la de forma direta, e nesse caso utilizando o Princípio de Cavalieri em que a variável solicitada na questão aparece explicitamente. Também, escutadas as discussões, o fato de o problema expressar a relação entre o volume do cone e cilindro com a expressão 20% maior inicialmente trouxe dúvidas quanto a interpretação, mas em consenso utilizaram a relação correta. Apresentamos na Figura 65 a resolução feita pelos alunos A11 e a 12.

Figura 65 - Resposta da Questão 12 pelos alunos A11 e A12.



Fonte: Registro dos alunos A11 e a12 no Google Classroom.

O aluno A11, diante da ausência da variável altura, achou conveniente utilizar o Princípio de Cavalieri para determinar a altura do cilindro, encontrando assim o resultado correto. O aluno A12 utilizou o teorema de Pappus para o cálculo de volumes e

determinou de forma correta o resultado.


Considerando as devoluções, obtivemos os seguintes dados: todos os alunos da turma 301 resolveram corretamente a questão, ou utilizando o Princípio de Cavalieri para o Cálculo de volumes ou via teorema de Pappus. Apenas um aluno da turma 302 não encontrou solução para a questão, pois desconsiderou a relação entre o volume do cone e o volume do cilindro mencionado na questão.

Também, de acordo com a tipologia das situações didáticas observamos os seguintes momentos de sua dialética: Na fase da ação os alunos estabeleceram suas estratégias e possibilidades para resolução da questão de acordo com as variáveis apresentadas, seja via teorema de Pappus para o cálculo de volumes ou optando pelo Princípio de Cavalieri e a partir da relação mostrada no problema, tal escolha os levassem de maneira mais factível ao encontro da altura do cilindro, segue a fase de formulação, quando os alunos dialogaram entre si e com a questão, ocorreu a validação quando utilizando-se das etapas anteriores os alunos desenvolvem a questão utilizando os meios que segundo eles são convenientes. Por fim, a institucionalização quando o professor pesquisador, retoma a cena e formaliza o conhecimento efetivando assim, a correção de forma comentada da questão.

Sobre a Questão 13, a qual chamamos de Silos, os alunos resolveram com relativa facilidade. Percebemos também que suas ações foram estabelecidas de modo com o que lhes fosse mais acessível; a maioria utilizou o Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes e determinou corretamente o número de viagens conforme o proposto na questão. Na Turma 301 um aluno desenvolveu os cálculos de forma correta, porém assinalou a alternativa errada; os demais alunos dessa turma, resolveram corretamente a questão. Todos os alunos da turma 302, acertaram a questão.

Na Figura 66 estão apresentadas as soluções elaboradas pelos alunos A13 e A12, em que um deles utilizou o Princípio de Cavalieri e outro o Teorema de Pappus.

Figura 67 - Resposta da Questão 13 pelos alunos A13 e A12

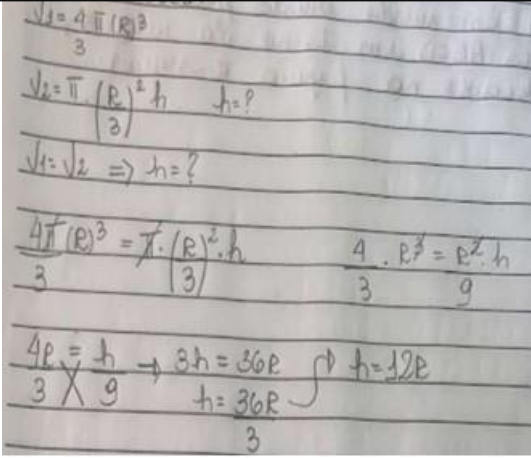
<p>1) Volume do Silo:</p> $V = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Cone}}$ $V = \pi \cdot R^2 \cdot H + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$ $V = 8 \cdot 8^2 \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3$ $V = 351 \text{ m}^3$ <p>\rightarrow m² de viagem</p> $m = \frac{351}{20} = 17,55$ $m = 18$ <p><u>R: letra d) 18</u></p>	<p>$\bar{X}_1 = 3$ $A_1 = 12 \times 3 = 36 \text{ m}^2$</p> <p>$\bar{X}_2 = 3 = 1$ $A_2 = \frac{3 \times 3}{2} = 4,5 \text{ m}^2$</p> <p>$V_1 = 2\pi \cdot 3 \cdot 36 = 108\pi \text{ m}^3$</p> <p>$V_2 = 2\pi \cdot 1 \cdot 4,5 = 9\pi \text{ m}^3$</p> <p>$V_1 + V_2 = 108\pi + 9\pi = 117\pi \text{ m}^3 = 117 \times 3 = 351 \text{ m}^3$</p> <p>1 Viagem $\rightarrow 20 \text{ m}^3$</p> <p>$X = \frac{351}{20} = 17,55 = 18 \text{ Viagens}$</p> 
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Registro dos alunos A13 e a12 no Google Classroom.

Sob a óptica da tipologia das situações didáticas, percebemos os momentos de ação quando as possibilidades de resolução são cogitadas pelos educandos, a formulação com o compartilhamento de informações entre os pequenos grupos e diálogo com a questão, a validação quando a partir das etapas anteriores o raciocínio elaborado é colocado em prática e os alunos resolvem a questão, e por fim a institucionalização, em um cenário onde o professor formaliza o conhecimento através da correção comentada da questão.

Na Questão 14, a qual denominamos Frascos de perfume, percebemos que devido ao fato do enunciado da questão, apresentar as fórmulas para a determinação dos frascos esféricos e cilíndricos, os alunos imediatamente adotaram essa possibilidade. Frente as devoluções, constatamos que três alunos erraram a questão, sendo um da turma 301 e os demais da turma 302. Tal erro, foi considerado devido a efetivação do cálculo no momento de substituir as variáveis. Uma resposta correta feita pelo aluno A13 está apresentada na Figura 67.

Figura 67 - Resposta da Questão 14 pelo Aluno A13

<p> <input type="radio"/> A 2R. <input type="radio"/> B 4R. <input type="radio"/> C 6R. <input type="radio"/> D 9R. <input checked="" type="radio"/> E 12R. </p>	 <p> $V_1 = \frac{4\pi(R)^3}{3}$ $V_2 = \pi(R)^2 \cdot h \quad h = ?$ $V_1 = V_2 \Rightarrow h = ?$ $\frac{4\pi(R)^3}{3} = \pi(R)^2 \cdot h$ $\frac{4 \cdot R^3}{3} = R^2 \cdot h$ $\frac{4R}{3} = \frac{h}{9} \rightarrow 3h = 36R \rightarrow h = 12R$ $h = 36R$ 3 </p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Registro do Aluno A13 no Google Classroom.

Da mesma forma que na questão anterior, percebemos a tipologia das situações didáticas e os momentos de sua dialética na seguinte sequência: ação, formulação, validação e institucionalização, vivenciados dentro do contexto da questão em análise, isto é, o processo foi percebido da mesma forma, porém os momentos inerentes a cada fase ocorreram de acordo com a prática da questão em voga e seus elementos estruturantes. Cabe aqui ressaltar, que diante a apresentação das fórmulas a serem utilizadas no enunciado da questão, percebemos a fase de ação como imediata, assim digamos, pois as possibilidades de resolução segundo o entendimento dos alunos estavam expressas no enunciado da questão.

Sobre a Questão 15, referida aqui como Caixa d'água, percebemos que os alunos solucionaram com relativa facilidade, adotando estratégias de ação de acordo com a visibilidade dos dados apresentados, relacionando ambos os volumes utilizando o Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes ou o Teorema de Pappus. Apenas um aluno, justificou sua resposta, percebendo a relação entre as grandezas raio e altura.

Diante das devoluções, obtivemos os seguintes dados; Dois alunos da turma 301, não encontraram a resposta correta, pois ao manipularem com as fórmulas efetuaram o cálculo de maneira incorreta e três alunos da turma 302 cometeram o mesmo equívoco.

Na Figura 68 está apresentada a resolução correta feita pelo aluno A14.

Figura 68 – Resposta da Questão 15 pelo aluno A14.

The image shows a handwritten solution on lined paper. At the top, two cylinders are drawn. The left cylinder has radius R and height h_A . The right cylinder has radius r_0 and height $0,25 h_A$. A note next to the second cylinder says $\frac{25}{100} = 0,25$. Below the drawings, the area formulas are written: $A_A = \pi R h_A$ and $A_B = \pi r_0 \cdot 0,25 h_A$. The radii are also noted: $\frac{R}{A} = R$ and $\frac{r_0}{B} = \frac{r_0}{2}$. The volume equality is set up as $V_A = V_B$, leading to $2\pi \cdot \frac{R}{A} \cdot R h_A = 2\pi \cdot \frac{r_0}{B} \cdot 0,25 r_0 h_A$. This simplifies to $\frac{R^2}{A} h_A = \frac{0,25 r_0^2}{B} h_A$. Taking the square root of both sides gives $\sqrt{R^2} = \sqrt{0,25 r_0^2}$, which results in $R = 0,5 r_0$. Finally, the relationship between the radii is given as $r_0 = \frac{R}{0,5} = 2R$.

Fonte: Registro do aluno 14 no Google Classroom.

Em nossa análise vivenciamos os seguintes momentos considerando a tipologia das situações didáticas em sua sequência: Durante a ação os alunos elaboram as hipóteses, como a utilização do Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes, ou o Teorema de Pappus para o cálculo de volume, e também de forma direta, estabelecendo as relações entre as grandezas envolvidas, após a formulação com o diálogo entre os pequenos grupos e com a questão, a validação com a resolução da questão utilizando-se das etapas anteriores, por fim o professor-pesquisador, retoma ao cenário, formalizando o conhecimento através da resolução comentada, ocorreu, então a institucionalização.

Para a resolução da Questão 16 – A Bocha e o bolim, item (a), os alunos utilizaram como estratégia a aplicação do Teorema de Pitágoras para a determinação da distância d , conforme requer o problema e após calcularam o valor da razão requerida na questão.

Diante das devoluções apresentadas, constatamos que todos os alunos desenvolveram de forma assertiva a questão. Uma das respostas está apresentada na Figura 69.

Figura 69 - Resposta da Questão 16 (a) pelo Aluno A13.

The image shows a student's handwritten solution on lined paper. At the top, there is a diagram of a right-angled triangle. The vertical leg is labeled '3cm', the horizontal leg is labeled 'd', and the hypotenuse is labeled '4cm'. To the left of the diagram, the text reads 'P = 5cm' and 'd = ?'. Below this, it says 'r = 2cm' and 'r'. The student then writes the Pythagorean theorem: $a^2 = b^2 + c^2$. This is followed by the equation $4^2 = 3^2 + d^2 \rightarrow 16 = 9 + d^2$. The next step is $16 - 9 = d^2$, which simplifies to $d^2 = 7$. The final result is $d = \sqrt{7}$. To the right of the main calculation, there are additional steps: $d = \sqrt{4 \cdot 10}$, $d = 2\sqrt{10}$, and $\frac{d}{r} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$.

Fonte: Registro do aluno A13 no Google Classroom.

Destacamos que todos os alunos adotaram as mesmas estratégias de resolução do aluno A13.

Acrescentamos o item (b) nessa questão, no intuito, que o aluno percebesse a intrínseca relação entre o raio e o volume da esfera. Diante as resoluções apresentadas, todos os alunos utilizaram o Princípio de Cavalieri para determinar o quociente entre os volumes da bocha e do bolim, conforme pode ser observado na Figura 70, com a resolução do aluno A1.

Figura 70 - Resposta da Questão 16 (b) pelo Aluno A1.

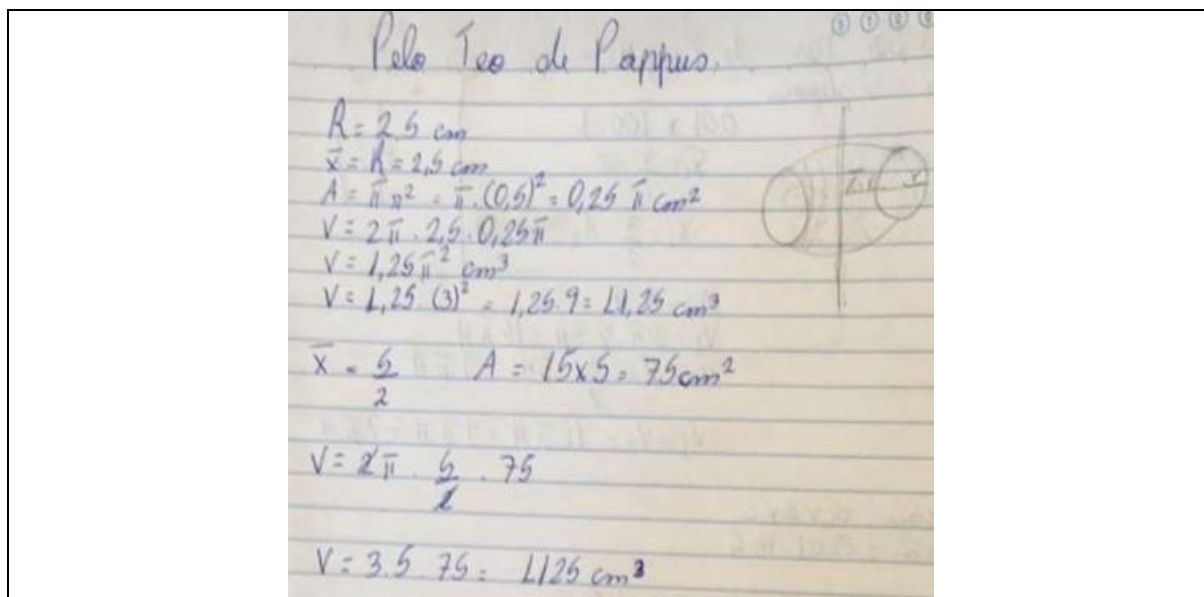
$$\frac{V_{b0}}{V_{b0}} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{(5)^3}{(2)^3} = \frac{125}{8} = 15,625\pi$$

Fonte: Registro do Aluno A1 no Google Classroom.

Percebemos, dessa forma, com relação a tipologia das situações didáticas os subsequentes momentos: Ação, os alunos elaboraram suas hipóteses, percebendo, a partir do triângulo retângulo configurado no item (a), qual teorema deveria ser utilizado, da mesma forma no item (b), conjecturando sobre as variáveis apresentadas na questão e as relações com o cálculo dos volumes envolvidos. Formulação, os alunos compactuaram os dados levantados na questão e dialogaram com o problema, esse diálogo foi evidente, no item (a) quando eles efetivaram a representação geométrica da questão. Validação, as hipóteses foram validadas, bem como os argumentos foram formulados, assim os alunos encontraram a solução esperada.

Quanto à Questão 17 – Donuts e o toro, ao lerem a questão os alunos sentiram necessidade de revisar o material teórico; outros, porém como estratégia, utilizaram a representação geométrica para simularem a comparação exigida na questão proposta. Mediante as devoluções constatamos os seguintes dados: Dois alunos da turma 301 não encontraram a solução procurada, visto que utilizaram o Princípio de Cavalieri, para o cálculo de volumes, executando a mesma fórmula em ambas as situações, considerando o toro como cilindro de raio 3cm e altura 1cm respectivamente. Já na turma 303, três alunos não concluíram a questão e um aluno, utilizou a representação geométrica para solucionar a questão não obtendo êxito em sua resposta. Uma das soluções encontradas para a questão está apresentada na Figura 71, onde o aluno não adotou de maneira correta os valores de R e r e não considerou o volume da região central limitada pelo toro emitindo a resposta final de forma equivocada. O volume correto para o toro é $V = 2\pi^2 Rr^2 = 27$, visto que $R = 1,5$ e $r = 1$.

Figura 71 - Resposta da Questão 17 pelo aluno A15.



Fonte: Registro do Aluno A15 no Google Classroom.

Testemunhamos, então, os momentos relativos a tipologia das situações didáticas, a saber: A ação se fez quando os alunos elaboraram suas hipóteses para o cálculo dos volumes envolvidos, ora alguns elegendo o teorema de Pappus para o cálculo de volumes, ora o Princípio de Cavalieri ou da mesma forma a representação gráfica. Por sua vez, segue a formulação, onde pudemos perceber um empolgante diálogo, entre os grupos, que partindo do enunciado proposto, emitiram várias analogias, enumerando outros objetos do cotidiano que apresentam forma geométrica coincidente com o toro referido na questão, porém, de uma forma geral, não houve validação da questão, visto que somente um aluno resolveu de forma correta a questão. Isto posto, ocorre a institucionalização, quando o professor pesquisador retoma a questão, discute as soluções apresentadas emite sua correção.

Sobre a Questão 18 – Fita crepe, ao contrário que nos parece claramente se fazer necessários a utilização de conceitos da geometria plana (comprimento de circunferência) e progressão aritmética (soma dos termos de uma PA), constatamos, através das devoluções recebidas e percebendo as manifestações durante a etapa da formulação que os alunos utilizaram a definição de volume para resolver tal questão. A maioria dos alunos utilizaram a seguinte linha de raciocínio: O volume da fita ao ser desenrolado, deve ser exatamente o mesmo que o volume quando a fita se mostra

totalmente enrolada, e dessa forma de acordo com os dados apresentados, relacionaram algebricamente os volumes. Acreditamos que tal linha de raciocínio tenha sido influenciada em detrimento do contexto até aqui desenvolvido.

Dois alunos da turma 301, não concluíram a questão, as demais devoluções dessa turma foram exitosas, por sua vez, na turma 302, três alunos não finalizaram a questão. Na Figura 72, está apresentada uma das respostas corretas a questão.

Figura 72 - Resposta da Questão 18 pelo aluno A15.

$V_{antes} = V_{depois}$
 $V_{antes} = ?$
 $V_1 = 2\pi$
 $0,01 \times 100 = 1$
 $\bar{x}_1 = \frac{4}{2} = 2$
 $x_2 = \frac{3}{2}$ $A_2 = 3 \times H = 3H$
 $A_1 = 4H$
 $V_1 = 2\pi \cdot 2 \cdot 4H = 16\pi H$
 $V_2 = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot 3H = 9\pi H$
 $V_1 - V_2 = 16\pi H - 9\pi H = 7\pi H$
 $V_{depois} = a \times b \times c$
 $V_{depois} = 0,01 H C$
 $7,314 H = 0,01 H C$
 $C = \frac{21,98}{0,01} = 2198 \text{ cm} \div 100 =$
 $\approx 22 \text{ cm}$

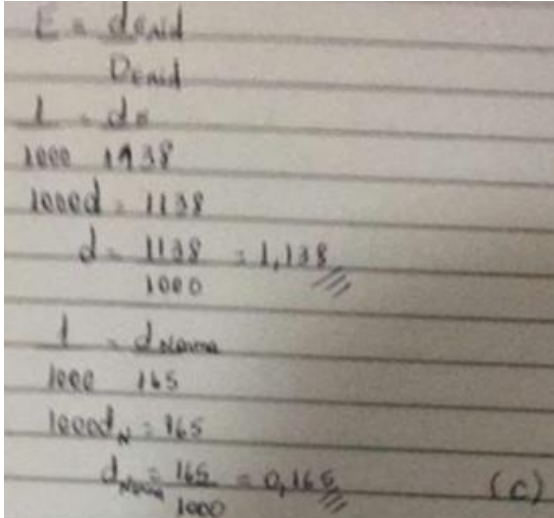
Fonte: Registro do Aluno A15 no Google Classroom.

Podemos, então, considerar os seguintes momentos da tipologia das situações didáticas: ação os alunos elaboraram suas hipóteses embasados na comparação entre os volumes, utilizando em maioria, para tal o teorema de Pappus. Durante a formulação os alunos dialogaram entre si, nos pequenos grupos e com a questão apresentada, após validaram suas hipóteses, assumindo-as como verdadeiras, resolvendo dessa maneira a questão, assim aconteceu a validação. Em último momento, a institucionalização, quando o professor fixa convencionalmente o estatuto cognitivo do saber, através da correção dialogada, ilustrando com outra possibilidade, nesse caso, em particular, utilizando conceitos de geometria plana e a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética finita.

A Questão 19 – Hemisfério celestial, traz um agradável contexto, possibilitando a conversa da matemática com a área das humanas e requer como pré-requisito conhecimento sobre escalas. Todos os alunos que foram submetidos a tal questão

apresentaram a solução correta, como pode ser observado na Figura 73, com uma das respostas.

Figura 73 - Resposta da Questão 19 pelo aluno A15

	<p> <input type="radio"/> 0,1138 e 0,0165. <input type="radio"/> 0,1138 e 0,165. <input checked="" type="radio"/> 1,138 e 0,165. <input type="radio"/> 11 380 e 1 650. <input type="radio"/> 1 138 000 e 165 000. </p>
-----------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Registro do aluno A15 no Google Classroom.

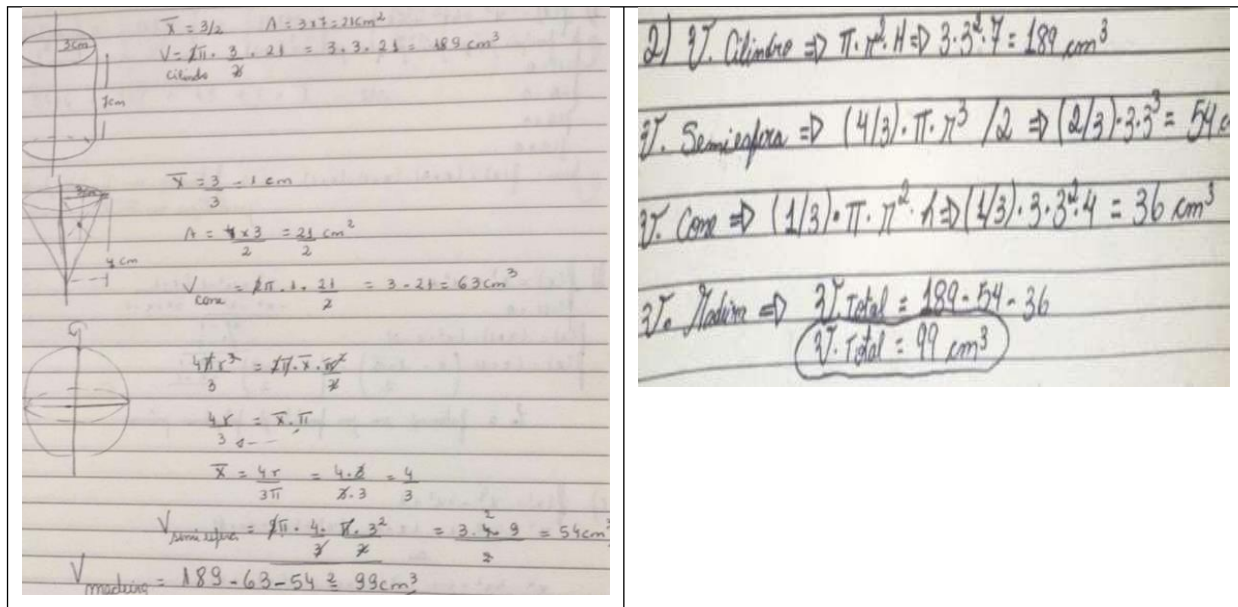
De acordo com a tipologia das situações didáticas percebemos os seguintes momentos: Ação: os alunos elaboraram as hipóteses de acordo com a escala apresentada na questão; após, a formulação, onde os alunos dialogaram com a questão e configuraram a discussão, baseada nos argumentos por eles formulados e partindo dos pressupostos anteriores os alunos chegaram a solução esperada, ou dividindo as áreas apresentadas diretamente por 1000, ou aplicando a definição de escala, ocorrendo, dessa maneira a validação. Em sequência, o professor pesquisador entra em cena com a formalização do conhecimento matemático, conferindo a solução da questão de forma dialogada, para que fique evidente o saber em jogo.

E por fim, diante da Questão 20 – Peão, os alunos demonstraram relativa facilidade em elaborar as hipóteses e encontrar a solução correta. Visto isso, temos que, dos alunos submetidos a questão, apenas um aluno da turma 301, não encontrou a solução correta, devido a um equívoco de cálculo, e todos os alunos da turma 302 resolveram corretamente optando pela utilização das fórmulas sugeridas na questão.

Na Figura 74 estão as resoluções apresentadas pelos alunos A1 A13, onde o aluno A1 empregou o teorema de Pappus, como a distância do centóide de uma semiesfera não pode ser obtida de maneira trivial, o referido aluno utiliza uma relação de igualdade

com o princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes, para assim obtê-la. O Aluno A13 utilizou o Princípio de Cavalieri em sua resolução.

Figura 74 - Resposta Questão 20 pelos alunos A1 e A13



Fonte: Registro dos alunos A1 e A13 no Google Classroom.

Sob a luz da Teoria das Situações Didáticas presenciamos os seguintes momentos de sua dialética: ação; os alunos elaboraram suas hipóteses de acordo com a viabilidade das variáveis apresentadas no enunciado da questão, no momento da formulação ocorreram as discussões e o confronto das conjecturas e hipóteses sobre o processo de resolução da questão, percebemos, então a validação, momento em que os alunos colocaram em prática suas elaborações extraídas dos momentos anteriores adotando assim suas escolhas, servindo-se do Teorema de Pappus para o cálculo de volumes ou do Princípio de Cavalieri. Por fim, o professor pesquisador, apresentou a resolução comentada da questão, para os sujeitos da pesquisa, com o intuito de que o conhecimento matemático se torne objeto de apropriação do saber, dessa forma ocorreu a institucionalização.

5.4.2 Atividade 9 - Maquete

A Atividade 9 - Aspectos Arquitetônicos dos Silos de Nosso Município e seus Corpos Redondos, articula uma situação didática, com a habilidade EM13MAT201 da BNCC, ao propor aos alunos que realizem uma ação envolvendo medições e cálculo de

áreas e de volume, de acordo com as demandas da sua comunidade. Nesse âmbito, a criação da atividade no Google Classroom pelo professor pesquisador ocorreu simultaneamente ao introduzir o objeto de estudo em pauta. Ficou estipulando o prazo de trinta dias a partir da data da propositura para ocorrência das devoluções. Também foi estipulado que o grupo constituído elaborasse uma situação problema envolvendo o tema estudado. As turmas foram divididas em 11 grupos, que chamaremos de G1, G2,...,G11. Sete grupos ficaram constituídos por 3 alunos e dois, por dois alunos cada. Para as apresentações os alunos utilizam amostras de vídeos com o registro fotográfico dos silos, além dos detalhes sobre a construção das maquetes descrevendo aspectos significativos do trabalho desenvolvido. As maquetes físicas foram construídas com a utilização da escala 1:100. Como produto final os alunos realizaram uma exposição virtual na página da turma. Todos os alunos submetidos a Atividade 9 efetuaram as respectivas devoluções.

Os grupos G1 e G2 confeccionaram maquetes físicas relativas aos silos da antiga unidade da CESA (Companhia Estadual de Silos e Armazéns) de Júlio de Castilhos atualmente incorporada a COTRIJUC (Cooperativa Triticola de Júlio de Castilhos). A Figura 75 mostra a foto e as respectivas maquetes físicas confeccionadas pelos grupos G1 e G2.

Figura 75 - Unidade da CESA: foto e maquete física confeccionada pelos grupos G1 e G2





Foto: Registro do grupo G1 e G2 no Google Classroom.

A situação problema elaborada pelo grupo G1 é mostrado na Figura 76.

Figura 76 – Situação problema elaborada pelo grupo G1.

A capacidade de armazenagem da unidade da CESA representada é de 38500 t. Supondo que o peso específico é de $0,75\text{t/m}^3$ para soja e milho e a compactação é de 5%.

a) Determine o volume equivalente em m^3 de soja que pode ser armazenado.

$$0,75 = \frac{38500}{V}$$

$$0,75V = 38500$$

$$V = 38500/0,75 = 51333,33\text{m}^3$$

$$V = 51333,33 \times 5\% = 256,66$$

$$V = 51333,33 - 256,66 = 51076,67 \text{ m}^3$$

b) Se a unidade da CESA é representada por seis silos, com altura da base cilíndrica de aproximadamente 15m, determine a medida do raio da base. Use $\pi \cong 3$

$$51333,33/6 = 3 \cdot R^2 \cdot 15 \Rightarrow R^2 = 8555,55/45 \Rightarrow R = \sqrt{190.123} \cong 13,7\text{m}$$

Fonte: Registro do grupo G1 no Google Classroom.

Como podemos perceber, os alunos do grupo G1 utilizaram o valor da massa específica da soja (o problema refere-se como peso específico), para encontrar a capacidade dos silos em metros cúbicos e de posse dessa informação, dada a altura calcularam o raio do silo.

A maquete física confeccionada pelo grupo G3, mostrada na Figura 77 representa a cerealista Dom Manuel.

Figura 77 - Cerealista Dom Manuel: foto e maquete física confeccionada pelo Grupo G3



Foto: Registro do Grupo G3 no Google Classroom.

A situação problema elaborada pelo Grupo G3 é apresentada na Figura 78.

Figura 78 - Situação problema elaborada pelo grupo G3

Uma maquete de silos foi feita, usando a escala 1:100 e um aluno precisou fazer os cálculos da parte cilíndrica de um dos silos, cujo raio é 4,0m e a altura do corpo é de 10m. Determine o volume real em m^3 .

Obs.: Esses dados são valores aproximados relativos a um silo da cerealista Dom Manuel, pois não conseguimos obter maiores informações.

Dados:

$R = 4m$ $\bar{x} = 2$

$H = 10$ $A = \pi r^2 = 3.16 = 48$

$V = 2\pi\bar{x}A = 2.3.2.48 = 576m^3$

Fonte: Registro do grupo G3 no Google Classroom.

O problema elaborado pelo grupo G3 solicita o cálculo do volume da parte cilíndrica do silo, cuja maquete foi confeccionada, usando valores aproximados para o raio e altura respectivamente; para tanto foi utilizado o Teorema de Pappus, não sendo o mesmo validado de forma correta, pois a área em questão a ser calculada deveria ser do retângulo de rotação e não do círculo, conforme resolução do grupo G3.

O grupo G4 confeccionou uma maquete física representativa da Sementeira Horizonte, conforme é mostrado na Figura 79.

Figura 79 - Sementeira Horizonte: foto e maquete física confeccionada pelo grupo G4



Foto: Registro do Grupo G4 no Google Classroom.



O grupo elaborou uma situação problema envolvendo o cálculo da área de uma parte da cobertura do prédio cujo formato corresponde a metade de um cilindro que é apresentada na Figura 80.

Figura 80 - Situação problema elaborada pelo grupo G4

A parte superior de um dos prédios da Sementeira Horizonte apresenta a forma da metade de um cilindro de diâmetro 20m e comprimento 50m. Determine a área total dessa região.

$$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2.3.10^2 + 2.3.10.50 = 600 + 3000 = 3600 \div 2 = 1800 \text{m}^2$$

Fonte: Registro do grupo G4 no Google Classroom.

Como podemos observar, a situação problema elaborada pelos alunos do grupo G4 trata do cálculo da área da superfície de uma região do prédio da Sementeira Horizonte, que corresponde a metade de um cilindro. O grupo efetivou esse cálculo utilizando a soma das áreas das superfícies das bases e lateral do cilindro, após dividiram por dois validando a resolução.

O grupo G5 construiu uma maquete digital enquanto os grupos G6, G7 e G8 construíram maquetes físicas representativas da COTRIJUC (Cooperativa Tritícola de Júlio de Castilhos), conforme mostrado na Figura 81.

Figura 81 - Cooperativa Tritícola de Júlio de Castilhos: fotos e maquetes físicas construídas pelos Grupos G5, G6, G7 e G8

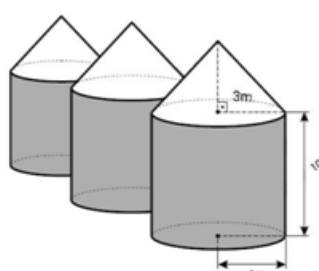


Fonte: Registro dos Grupos G5, G6, G7 e G8 no Google Classroom.

As situações problemas elaboradas pelos grupos G6 e G7 aparecem na Figura 82.

Figura 82 - Situação problema elaborada pelos grupos G6 e G7

Na COTRIJUC há um silo, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone. Dimensões indicadas na figura:



Qual a sua área total?
Use $\pi=3$ e $R=2$

$$A_b = \pi \cdot R^2 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$A_l = 2 \pi R H = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 = 120$$

$$A_T = 2 \cdot A_b + A_l = 2 \cdot 12 + 120 = 144$$

O conjunto de unidades de Silos da COTRIJUC Matriz apresenta capacidade estática de armazenagem de 858000 sacas. Considere que uma saca de soja equivale a 60kg. Determine o valor dessa capacidade em toneladas.

$$1\text{saca} \rightarrow 60\text{Kg}$$

$$858000 \rightarrow x$$

$$X=60.858000= 51480000 \text{ kg} = 51480 \text{ t.}$$

Foto: Registro dos grupo G6 e G7 no Google Classroom.

Podemos observar que a situação problema, elaborada pelo grupo G6, trata da área lateral e da área da base de um cilindro, em que na figura é indicado que o raio é 4m, porém, há um equívoco, visto que na questão foi indicado o uso de $R=2$. Já o problema elaborado pelo grupo G7, envolve a conversão de sacas de soja em toneladas de soja usando uma regra de três simples.

O Grupo G8 confeccionou uma maquete física da unidade da COTRIJUC, situada na localidade de Alto Toropi, conforme é mostrado na Figura 83.

Figura 83 – COTRIJUC/Alto Toropi: foto e maquete física construída pelo Grupo G8





Fonte: Registro do grupo G8 no Google Classroom.

A situação problema elaborada pelo grupo G8, conforme mostrado na Figura 84 apresenta uma conversão da capacidade em toneladas para quilogramas e sucessivamente de quilogramas para litros e finalmente de litros para m^3 . O correto nas condições do problema seria utilizar a massa específica da soja.

Figura 84 - Situação problema elaborada pelo grupo G8

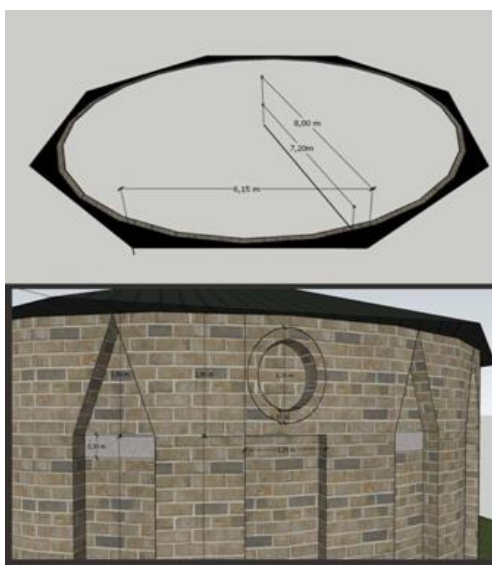
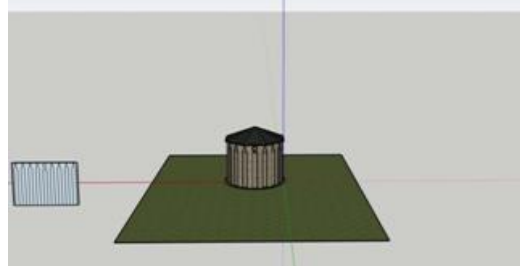
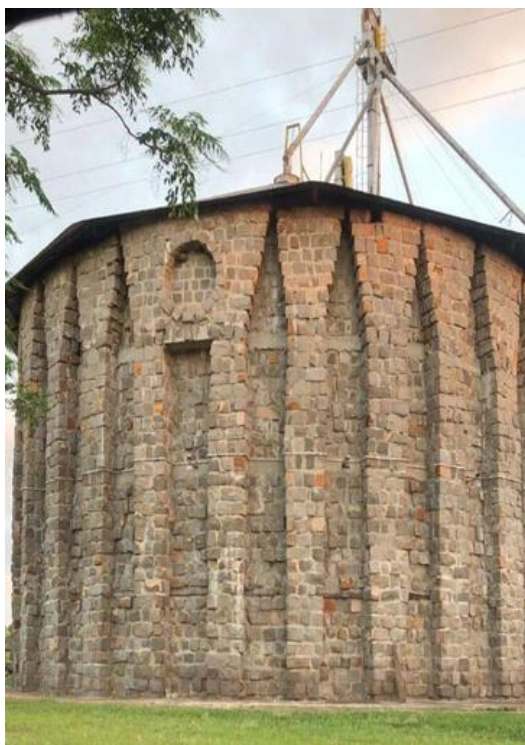
A capacidade estática de armazenagem da Unidade COTRIJUC Alto Toropi é de 180000 sacas. Se umasaca possui 60 kg determine essa capacidade em m^3 .

$$\begin{array}{l}
 180.000 \times 60 = 10.800.000 \text{ Kg} = 10.800.000 \text{ L} \\
 1 \text{ kg} = 1 \text{ litro} \quad 1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3 \\
 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L} \quad 10.800.000 \text{ L} = 10.800 \text{ m}^3 \\
 x = 10.800 \text{ m}^3
 \end{array}$$

Foto: Registro do grupo G8 no Google Classroom.

O grupo G9 criou uma maquete virtual de um silo situado em fazenda no interior do município em um logradouro chamado Val de Serra; para isso o grupo utilizou o software SketchUp, próprio para modelagem 3D e lumion para renderização (fotorrealismo). Os dados que são apresentados foram obtidos de maneira informal e através da visita ao local. A maquete criada pelo grupo G9 é mostrada na Figura 85.

Figura 85 - Silo Fazenda Posto Branco/Val de Serra: foto e modelagem 3D criada pelo grupo G9



Fonte: Registro do grupo G9 no Google Classroom.

Com os dados simulados o grupo elaborou uma situação problema apresentada na Figura 86.

Figura 86 - Situação problema elaborada pelo grupo G9.

Determine o volume correspondente a base cilíndrica. Considere o raio 7m e a altura 10m. Use para π uma aproximação de 3.

$$V = 2\pi \bar{x} A \quad | \quad \bar{x} = \frac{R}{2} = 3,5 \quad V = 2 \cdot 3 \cdot 3,5 \cdot 3,7 = 3087m^3$$

Fonte: Registro do Grupo G9 no Google Classroom.

O problema elaborado pelo grupo G9, solicita o volume da base cilíndrica do silo cuja representação foi realizada pela maquete. Esse cálculo foi realizado utilizando o Teorema de Pappus.

A maquete física construída pelo grupo G10 representa os silos da Empresa Agrofel Grãos e Insumos, conforme mostra a Figura 87.

Figura 87 - Empresa Agrofel Grãos e Insumos: foto e maquete física construída pelo grupo G10



Fonte: Registro do grupo G10 no Google Classroom.

A situação problema elaborada pelo grupo G10 está apresentada na Figura 88.

Figura 88 - Situação Problema elaborada pelo grupo G10

	<p><u>Questão</u></p> <p>Calcule o Volume do Silo:</p> <p>Dados $\Rightarrow R=5$; $H=25$; $A=10$</p> <p>Volume do Cilindro + Volume do Cone</p> $V = \pi \cdot R^2 \cdot H + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot A$ $V = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 25 + \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^2 \cdot 10$ $V = 3,14 \cdot 25 \cdot 25 + \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 25 \cdot 10$ $V = 1962,50 + 261,6$ $V = 2224,10$ <p>Volume Total = 2.224,10 m³</p>	
--	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

Fonte: Registro do grupo G10 no Google Classroom.

O problema elaborado pelo Grupo G10 sugere o cálculo do volume de um silo composto por um cone e uma base cilíndrica. Dados os valores do raio e alturas do cilindro e cone, respectivamente, para tal o grupo utilizou o Princípio de Cavalieri.

O grupo G11 construiu uma maquete física de um silo localizado em uma propriedade rural, situada no interior do município de Júlio de Castilhos, onde um dos componentes reside. A foto do silo e a maquete são mostradas na Figura 89.

Figura 89 - Silo localizado em uma propriedade rural no interior de Júlio de Castilhos: foto e maquete física construída pelo grupo G11



Foto: Registro do grupo G11 no Google Classroom.

A situação problema elaborada envolve o cálculo da área mínima de um silo de base cilíndrica, conforme mostra a Figura 90.

Figura 90 - Situação problema elaborada pelo grupo G11

Um agricultor deseja construir a base e a área lateral de um silo cilíndrico de raio entre 5m até 7m, de modo que o volume seja 750 metros cúbicos. Ele pretende economizar com o material, então a área construída deve ser menor possível. Que tipo de cilindro deve ser a área lateral do cilindro?

O cilindro deve ser equilátero. Testando, se o raio for 5m a altura será 10m e a área é de 375 m². Para o raio de 6m a altura é 6,9m e a área 356m².

Testando para 7m,

$$750 = 3.49h$$

$$h = 3.49 = h = 5,1m$$

$$A = 2.3.7.5,1 + 3.49 = 376,5 \text{ m}^2$$

Fonte: Registro do grupo G11 no Google Classroom.

Esta situação problema, elaborada pelo grupo G11, propõe que seja determinado um tipo de cilindro de área mínima. Por meio de sucessivas tentativas, dados o volume e um intervalo de 5m à 10m para o raio concluíram que o cilindro de área mínima é o equilátero, não validando de forma coerente com a solução desenvolvida.

Com relação a tipologia das situações didáticas e os momentos de sua dialética, em

particular nessa situação de caráter adidático percebemos da seguinte forma. A ação ocorreu no momento de tomadas de decisões a cerca do silo que seria escolhido para as construções das maquetes pelos grupos, bem como a distribuição dos grupos. Nessa fase surgiram conhecimentos não matemáticos como modelos basilares. As estratégias formuladas pelos grupos foram explicitadas verbalmente, dessa forma ocorreu a formulação. Quando os grupos expressaram os argumentos utilizados na construção da maquete proposta e justificaram os cálculos realizados, bem como elaboraram uma situação problema com respeito ao tema proposto ocorreu a validação. No momento em que todos os procedimentos adotados, desde a ação até a validação se tornaram devidamente organizados com a ajuda do professor pesquisador ocorreu a institucionalização. Nesse âmbito a institucionalização também foi vivenciada quando o professor emitiu considerações relacionadas as apresentações das maquetes e as situações problemas elaboradas pelos sujeitos no exercício dos seus protagonismos.

5.5 UMA SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Diante da transcrição documental das atividades desenvolvidas mostradas nos itens predecessores desse capítulo consideramos de maneira genérica que a práxis dessa sequência didática desenvolvida a luz da Teoria das Situações Didáticas teve comprovada funcionabilidade tanto considerando os aspectos empíricos dos saberes geométricos que permeiam o Estudo dos Sólidos de Revolução e Corpos Redondos quanto no comportamento autônomo e protagonista evidenciados nos sujeitos envolvidos.

Em atenção aos resultados obtidos com a proposta de atividades do Bloco 1, de forma exituosa os alunos demonstraram habilidades espaciais, bem como percepção geométrica e utilização do raciocínio lógico dedutivo para potencializar o reconhecimento de superfícies de sólidos de revolução gerados por meio de figuras planas identificando corretamente os elementos constituintes desses sólidos. Acreditamos que as ferramentas utilizadas como os materiais manipuláveis na figura dos sólidos de acrílico e principalmente o experimento com o simulador de sólidos de revolução com seu caráter lúdico científico deram propriedade ao saber significativo evidenciado pela postura autônoma dos sujeitos envolvidos. De fato, a Teoria das Situações das Situações Didáticas como aporte para arquitetar as atividades e expor o objeto do conhecimento teve inestimável importância, bem como a análise dos quatro momentos da tipologia das situações didáticas em seu caráter instrumental científico validou a

mediação do saber acerca do objeto do conhecimento em um viés de participação efetiva dos alunos nas atividades propostas nesse bloco.

As atividades do Bloco 2 de maneira similar ao registro acima também denotaram o protagonismo dos sujeitos, em particular destacamos a importância do registro fotográfico como subsídio de leitura geométrica espacial. Com relação a tipologia das situações didáticas e os momentos da sua dialética, percebemos que a formulação foi intensamente vivenciada na atividade que envolvia a planificação dos corpos redondos, visto as conjecturas elaboradas com relação a planificação da esfera.

Com relação as atividades que configuram o Bloco 3 em que os alunos conheceram o teorema de Pappus, empregando-os em situações problemas que envolvem o cálculo de áreas e volumes de sólidos de revolução, e expressivamente na grande maioria das vezes de forma plenamente satisfatória evidenciamos a importância da extrapolação dos conhecimentos meramente formais restritos apenas ao livro didático, e como a Geometria é uma área do saber matemático muito fértil em se tratando de possibilidades, cabe ao professor o compartilhamento desses saberes. Vale salientar que ao resolver situações problemas específicas, os alunos confrontaram o emprego do Princípio de Cavalieri com o Teorema de Pappus para o cálculo de áreas de superfícies e volumes e no momento da validação podemos fraseá-los assim: “ Com o Teorema de Pappus é mais fácil!” Ou também: “Com o Teorema de Pappus a gente vê o que está calculando!”. O experimento para determinar o baricentro de figuras planas foi propulsor para esse aprendizado.

Na realização das atividades que configuraram o Bloco 4 cujo contexto envolviam situações didáticas expressas em forma de questões extraídas de provas do ENEM, vestibulares de instituições de ensino superior, Portal da Matemática da Obemep e autorais, frente as devoluções e mediando uma análise a partir de cada um dos momentos da tipologia da TSD, acuramos e consideramos sua desenvoltura bastante positiva. Cabe salientar que todos os sujeitos envolvidos iriam prestar exame do ENEM e vestibulares, advindo também de tal circunstância pré disposição para a aprendizagem do objeto do estudo em pauta.

A apresentação das maquetes dos silos, bem como a elaboração de situações problemas a respeito dos sólidos de revolução e corpos redondos marcaram o desfecho desse bloco e de forma incondicional como contributo a essa pesquisa realizada à luz da Teoria das Situações Didáticas, a qual enfatiza a criticidade, autonomia e protagonismo dos sujeitos na aquisição de saberes significativos. Dito isso, baseado em considerações lançadas nas apresentações dos grupos que respaldados em informações obtidas durante a coleta de dados

para realização da tarefa apontaram considerações pertinentes a sujeitos com desenvolvida criticidade e capacidade de metacognição, das quais citamos as seguintes inquirições por parte dos sujeitos envolvidos: Problemas que fornecem as dimensões dos silos e solicitam o cálculo do volume de soja, e em alguns casos o número viagens que um caminhão deve realizar para o transportá-la, por exemplo, não condizem com a realidade, pois desconsideram a capacidade estática de armazenamento e outras variáveis como a massa específica da soja e compactação, que determinam dessa forma a capacidade estática de armazenamento. Na realidade um silo não apresenta 100% do seu volume ocupado por um determinado produto, isso é inviável. Achamos importante elucidar esse relato como contundência da intrínseca relação entre o saber significativo e a autonomia do indivíduo ao inquirir esse saber nas suas apreciações.

A guisa de síntese, podemos afirmar que os resultados dessa pesquisa apresentaram concretas evidências de que a Teoria das Situações Didáticas contribuiu para o ensino e aprendizagem do objeto do conhecimento sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos para o Ensino Médio e que a práxis da sequência didática sob essa perspectiva oferece nuances interessantes que podem contribuir para o desenvolvimentos de estudos posteriores.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa buscou por meio do seu percurso laboral, responder a seguinte pergunta foco: Quais contribuições uma sequência didática à luz da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau pode trazer para a construção de saberes significativos a respeito do objeto do conhecimento sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos para o Ensino Médio? Dessa forma, abstraindo de nossa experiência segundo a práxis desenvolvida, inferimos na narrativa que segue considerações a cerca dessa trajetória.

Frente ao cenário mundial globalizado onde as ferramentas virtuais de aprendizagem configuram-se em toda a sua efervescência, o protagonismo do sujeito envolvido torna-se condição *sine qua non* para que o processo da construção do conhecimento assim ocorra e os torne seres autônomos capazes de pensar, agir, [trans]formar e decidir de forma crítica. Nessa perspectiva orientados pela Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, onde o sujeito é o aluno protagonista, a práxis é a simbiose entre a teoria e prática, planejamos, organizamos e vivenciamos a aplicação de uma sequência didática, dispostas em quatro blocos configuradas em situações didáticas e adidáticas segundo a classificação da TSD a cerca do tema Sólidos de revolução com ênfase nos Corpos redondos, objeto do conhecimento de extrema importância tanto no aspecto empírico do saber geométrico como na sua presença no universo em sua tridimensionalidade.

Ao propormos situações didáticas em forma de questões extraídas de avaliações do ENEM, Portal da Matemática da OBEMEP, vestibulares de instituições de ensino e autorais, alicerçadas nos preceitos das habilidades e competências BNCC constatamos frente as devoluções a participação efetiva dos sujeitos envolvidos, e também passando pelo crivo da análise criteriosa de cada uma dos momentos da dialética que constitui a tipologia das situações didáticas, observando a partir do momento da ação, posterior formulação e validação, até a institucionalização que os aspectos favoráveis se sobrepuseram aos obstáculos de aprendizagem, e o fato em si da sequência apresentar narrativa, contrato e desafio privilegiou no sentido de devolução.

Para promover o contexto supracitado, vivenciamos situações adidáticas, entre as quais utilizamos materiais manipuláveis, um experimento para simular sólidos de revolução e uma atividade experimental para determinar o centro de massa de figuras planas, essas foram fomento para a compreensão do objeto a ser ensinado, como resposta obtivemos o envolvimento e a participação dos educandos como sujeitos autônomos, capaz de conjecturar,

elaborar hipótese, enfim validar suas ações.

Para o cálculo de áreas das superfícies e volumes dos sólidos de revolução, mostramos outra possibilidade, através de um interessante Teorema clássico: Teorema de Pappus-Guldin para o cálculo da área das superfícies e volume, que é incomum nos livros didáticos voltados ao ensino médio, de um modo distinto das práticas pedagógicas correntes, que privilegiam a utilização de fórmulas, para tanto utilizamos um experimento com o qual foi possível determinar o baricentro das figuras planas e utilizando os conceitos formais de área e volume, assim como o Princípio de Cavalieri, demonstramos sua obtenção, tal fato, despertou o interesse e curiosidade dos alunos, cujo emprego foi utilizado na maioria das vezes de forma satisfatória na busca pela solução das situações problema propostas, fato evidenciado através das ações, das formulações e validações, bem como visto os dados satisfatórios acurados através das devoluções.

A construção de maquetes físicas e virtuais reproduzindo os Silos, um tipo de construção muito comum no município lócus da pesquisa e seus entornos, os quais agregam em sua arquitetura corpos redondos, foi motivo de interesse e contagiante participação por parte dos sujeitos envolvidos. Essa situação de caráter adidático estabeleceu uma ponte entre a geometria que trata os corpos redondos estudada na sala de aula e a geometria que inspira os formatos e oferece personalidade aos seus itinerários.

Assim, podemos considerar que os objetivos aos quais essa pesquisa se propôs alcançar foram particularmente viabilizados com a práxis desenvolvida. Cabe salientar que a utilização da plataforma Google Classroom, foi um importante aliado no sentido da complementariedade entre os espaços físico e virtual, pois essa perspectiva de ambiente articulado oportunizou aos sujeitos da pesquisa, produtivos momentos de interação ao aspecto teórico do objeto ensinado.

No papel de professor pesquisador comungamos com ideia e acreditamos de forma despretensiosa termos cumprido o que sugere Brousseau quando estabelece que: “Cabe ao professor (...) simular na sala de aula uma microssociedade científica, se quer que os conhecimentos sejam meios econômicos para colocar boas questões e resolver debates, se quer que as linguagens sejam meios para dominar situações de formulação e que as demonstrações sejam provas” (BROUSSEAU, 1996a, p. 37).

Por fim, esperamos que a sequência didática, resultado dessa pesquisa elaboradaa luz da Teoria das Situações Didáticas sirva de sugestão para prática docente, bem como para novos construtos acerca do estudo dos sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos

destinados ao Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto, 1994.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. Brasília, DF, 2018.
- BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, J. (Org.). **Didática das matemáticas**. Tradução de M. J. Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, p. 35-113, 1996.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.
- CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa: escolhendo entre cinco abordagens**. Porto Alegre: Penso, 2014.
- CUNHA, L. G. **Cálculo de volumes usando o Princípio de Cavalieri mediado por materiais concretos**. 2019. 95 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – PROFMAT/UDESC, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2019.
- DANTAS, E. H. **Uso da Realidade Aumentada no estudo da Geometria Espacial**. 2018. 96 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – PROFMAT/UEPB, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018.
- EVES, H. **Introdução a história da matemática**. 5 ed. Campinas: Editora Unicamp, 2004.
- FREITAS, J. L. M. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática. Uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2012.
- LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 2. Rio de Janeiro: SBM Coleção do Professor de Matemática, 2013.
- MADEIRA, L. L. **Sólidos de Revolução: Uma proposta de estudo**. 2014. 78 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – PROFMAT/UFJF, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014.
- MELLO, J. L. P. **Matemática: construção e significado**. São Paulo: Moderna, 2005.
- MORAN, J. M. **A Educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá**. 5.ed. Campinas: Papirus, 2012.

MOSER, A. **As apreensões em geometria na resolução de exercícios de geometria espacial na terceira série do ensino médio**. 2020. 262 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – PROFMAT/UDESC, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2020.

NETO, A. P. **Material Teórico** - Módulo: Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindros, Cones e Esferas. Cilindro. Rio de Janeiro: Portal da OBMEP, 2020a. Disponível em:
<https://portaldaobmp.impb.br/index.php/modulo/ver?modulo=45&tipo=7> Acesso em: 15 mar. 2020.

NETO, A. P. **Material Teórico** - Módulo: Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindros, Cones e Esferas. Cone. Rio de Janeiro: Portal da OBMEP, 2020b. Disponível em:
<https://portaldaobmp.impb.br/index.php/modulo/ver?modulo=45&tipo=7> Acesso em: 15 mar. 2020.

NETO, A. P. **Material Teórico** - Módulo: Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindros, Cones e Esferas. Esfera. Rio de Janeiro: Portal da OBMEP, 2020c. Disponível em:
<https://portaldaobmp.impb.br/index.php/modulo/ver?modulo=45&tipo=7> Acesso em: 15 mar. 2020.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PATERLINI, R. R. "Os Teoremas" de Cavalieri. **Revista do Professor de Matemática**, nº 72, p. 43-47, 2010.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em Sala de Aula**: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, 2013. Disponível em:
<https://scholar.google.com.br/citations?user=z-Lup7cAAAAJ&hl=pt-BR> Acesso em: 15 mar. 2020.

REGES, M. A. G. **Formação de professores que ensinam matemática** fundamentada na Teoria das Situações Didáticas: explorando o campo conceitual multiplicativo. 2020. 196 p. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2020.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular Gaúcho**: Matemática. Porto Alegre, RS, 2018.

SILVA C. F. **Analisando contribuições da Teoria das Situações Didáticas no ensino e aprendizagem da estatística e da probabilidade no ensino fundamental**. 2015. 162 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade de Ouro Preto. Ouro Preto, 2015.

SOUZA, J. **Matemática**: Geometria. São Paulo: FTD, 2020.

WEELER, D. Imagem e pensamento geométrico. CIEAEM - Comtes Rendus. **Reencontro Internationale**, Pallanza, p. 351-353, 1981.