

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Rodrigo Bordignon

**MODELO MOMENTO-ROTAÇÃO DE LIGAÇÕES PARAFUSADAS
ENTRE VIGA E COLUNA EM AÇO COM DUPLA CANTONEIRA DE
ALMA**

Santa Maria, RS
2022

Rodrigo Bordignon

**MODELO MOMENTO-ROTAÇÃO DE LIGAÇÕES PARAFUSADAS ENTRE VIGA
E COLUNA EM AÇO COM DUPLA CANTONEIRA DE ALMA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Engenharia Civil**.

Orientador: Prof. Dr. João Kaminski Junior
Coorientador: Prof. Dr. Zacarias Martin Chamberlain Pravia

Santa Maria, RS
2022

Bordignon, Rodrigo
Modelo momento-rotação de ligações parafusadas entre
viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma /
Rodrigo Bordignon.- 2022.
212 p.; 30 cm

Orientador: João Kaminski Junior
Coorientador: Zacarias Martin Chamberlain Pravia
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil, RS, 2022

1. Ligações semirrígidas em aço 2. Modelo momento-rotação
3. Dupla cantoneira de alma 4. Otimização matemática 5.
Método dos elementos finitos I. Kaminski Junior, João
II. Pravia, Zacarias Martin Chamberlain III. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

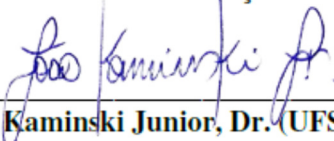
Declaro, RODRIGO BORDIGNON, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Tese) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Rodrigo Bordignon

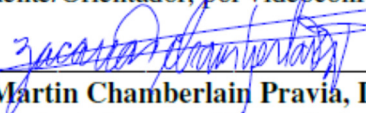
**MODELO MOMENTO-ROTAÇÃO DE LIGAÇÕES PARAFUSADAS ENTRE VIGA
E COLUNA EM AÇO COM DUPLA CANTONEIRA DE ALMA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Engenharia Civil**.

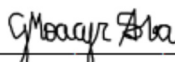
Aprovado em 31 de março de 2022:



João Kaminski Junior, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador, por videoconferência)



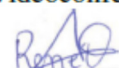
Zacarias Martin Chamberlain Pravia, Dr. (UPF)
(Coorientador, por videoconferência)



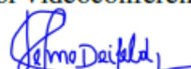
Gerson Moacyr Sisniegas Alva, Dr. (UFU)
(por videoconferência)



Marco Antonio Silva Pinheiro, Dr. (UFSM)
(por videoconferência)



René Quispe Rodríguez, Dr. (UFSM)
(por videoconferência)



Telmo Egmar Camilo Deifeld, Dr. (UNIPAMPA)
(por videoconferência)

Santa Maria, RS
2022

Ao Pedro e à Sofia.

AGRADECIMENTOS

À Universidade de Federal de Santa Maria, por sua magnitude. Foi uma honra mais uma vez.

Ao corpo docente e administrativo do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) da UFSM, por suas contribuições.

Aos professores João Kaminski Junior e Zacarias Martin Chamberlain Pravia, pelas orientações.

Ao Instituto Federal Sul-rio-grandense, por sua política de capacitação.

RESUMO

MODELO MOMENTO-ROTAÇÃO DE LIGAÇÕES PARAFUSADAS ENTRE VIGA E COLUNA EM AÇO COM DUPLA CANTONEIRA DE ALMA

AUTOR: Rodrigo Bordignon
ORIENTADOR: João Kaminski Junior
COORIENTADOR: Zacarias Martin Chamberlain Pravia

Um modelo preditor da relação não linear momento-rotação de ligações semirrígidas parafusadas entre viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma é proposto por este estudo. Este modelo é baseado em uma função matemática de formato exponencial de dois parâmetros, em que a variável de resposta expressa o valor da rotação relativa entre a viga e a coluna, a partir da variável preditora que corresponde ao momento fletor padronizado por um fator adimensional, definido em termos de três variáveis geométricas de projeto. Dois conjuntos de dados foram formados a partir dos resultados da análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos de 162 ligações. Os parâmetros de ajuste do modelo proposto são obtidos a partir da regressão não linear dos dados com o emprego de um método de otimização matemática (*Simulated Annealing*), a fim de minimizar a função-objetivo definida. Os valores dos parâmetros de ajuste do modelo são dados por equações em termos da altura do par de cantoneiras que forma a ligação, especificamente para as condições de rugosidade superficial representadas pelos coeficientes médios de atrito 0,2 e 0,4. O modelo proposto se apresenta em um formato simples e o valor da rigidez rotacional em qualquer ponto da curva momento-rotação pode ser obtida diretamente por sua derivada. As curvas momento-rotação preditas pelo modelo exponencial proposto apresentam uma capacidade preditiva satisfatória do comportamento das ligações, quando comparadas aos dados obtidos pela análise numérica. Foi evidenciado que as condições de rugosidade superficial afetam diretamente o comportamento das ligações, de modo que as simuladas com coeficiente médio de atrito 0,4 apresentaram um aumento médio de 21% no valor da rigidez inicial, quando comparados às simuladas com coeficiente médio de atrito 0,2.

Palavras-chave: Ligações semirrígidas em aço. Modelo momento-rotação. Dupla cantoneira de alma. Otimização matemática. Método dos elementos finitos.

ABSTRACT

MOMENT-ROTATION MODEL OF BOLTED STEEL BEAM-TO-COLUMN WITH DOUBLE WEB-ANGLES CONNECTIONS

AUTHOR: Rodrigo Bordignon
ADVISOR: João Kaminski Junior
CO- ADVISOR: Zacarias Martin Chamberlain Pravia

A predictor model of the non-linear moment-rotation relationship of semi-rigid connections steel beam-to-column with double web-angles is proposed by this study. This predictor model is based on a mathematical function of exponential format with two parameters in which the response variable expresses the value of the relative rotation beam-to-column from the predictor variable that corresponds to the bending moment acting on the connection, which is standardized by a dimensionless factor, defined in terms of three geometric design variables. Two data sets were formed from numerical analysis by the Finite Element Method of 162 connections. The adjustment parameters of the proposed model were obtained from the nonlinear regression of the data, using a mathematical optimization method (Simulated Annealing), in order to minimize the defined objective function. The values of the adjustment parameters of the model are given by equations in terms of the height of the pair of double web-angles that form the connection, specifically for the surface roughness conditions represented by the slip coefficient 0.2 and 0.4. The proposed model is presented in a simple format and the value of rotational stiffness at any point of the moment-rotation curve can be obtained directly from its derivative. The moment-rotation curves predicted by the proposed exponential model present a satisfactory predictive capacity of the behavior of the connections, when compared to the data obtained by the numerical analysis. It was evidenced that the surface roughness conditions affect directly the behavior of the connections, so that the simulated connections with a slip coefficient 0.4 presented an increase of 21% in the initial stiffness value, when compared to the simulated ones with a slip coefficient 0.2.

Keywords: Steel semi-rigid connections. Moment-rotation model. Double web-angle connection. Mathematical optimization. Finite element method.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	OBJETIVOS.....	19
1.1.1	Objetivo principal	19
1.1.2	Objetivos específicos	19
1.2	JUSTIFICATIVA.....	20
1.3	APRESENTAÇÃO DO ESTUDO	20
2	FUNDAMENTOS BÁSICOS	22
2.1	LIGAÇÕES ENTRE VIGA E COLUNA	22
2.1.1	Ligações com cantoneira simples de alma	23
2.1.2	Ligação com chapa simples	23
2.1.3	Ligações com dupla cantoneira de alma	24
2.1.4	Ligação com chapa de extremidade	24
2.1.5	Ligação com chapa de topo nivelada	25
2.1.6	Ligações com chapa de topo estendida	25
2.1.7	Ligações com cantoneiras de topo e de assento	26
2.1.8	Ligação com perfis T	27
2.2	CURVA MOMENTO-ROTAÇÃO.....	27
2.3	RIGIDEZ ROTACIONAL.....	29
2.4	METODOLOGIA DE MODELAGEM	31
2.4.1	Métodos analíticos	32
2.4.2	Modelos mecânicos	32
2.4.3	Modelos numéricos	32
2.4.4	Experimentos	32
2.4.5	Modelos empíricos	33
2.5	CLASSIFICAÇÃO DAS LIGAÇÕES	33
2.5.1	Classificação de acordo com o Eurocode 3 EN 1993-1-8 (2005)	33
2.5.1.1	Quanto à rigidez	33
2.5.1.2	Quanto à resistência.....	35
2.5.2	Classificação de acordo com norma ABNT NBR 8800 (2008)	35
2.5.3	Classificação segundo a norma ANSI/AISC 360-16 (2016)	37
3	ESTADO DA ARTE	40
3.1	PROPOSTAS DE MODELOS PREDITORES	40

3.1.1	Modelos com segmentos lineares	40
3.1.2	Modelos polinomiais	43
3.1.3	Modelos de potência	49
3.1.4	Modelos exponenciais	58
3.1.5	Modelos logarítmicos	61
3.1.6	Modelo de função trigonométrica	62
3.1.7	Modelo de função hiperbólica	63
4	METODOLOGIA	65
4.1	GEOMETRIA DA LIGAÇÃO	65
4.2	PARÂMETROS VARIÁVEIS DE PROJETO.....	68
4.3	MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS	70
4.4	DEFINIÇÃO DO CARREGAMENTO VERTICAL	72
4.5	CONDIÇÕES DE RUGOSIDADE SUPERFICIAL.....	77
4.6	OBTENÇÃO DOS PONTOS DA CURVA MOMENTO-ROTAÇÃO	82
4.7	IDENTIFICAÇÃO DAS LIGAÇÕES	85
5	ANÁLISE NUMÉRICA	87
5.1	CONTEXTO HISTÓRICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	87
5.2	ANÁLISE NUMÉRICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	88
5.2.1	Tipo e tecnologia do elemento finito	88
5.2.2	Malha de elementos finitos	91
5.2.3	Descontinuidades geométricas	94
5.2.3.1	Elementos de contato	95
5.2.3.2	Algoritmo de contato	97
5.2.4	Não linearidade física dos materiais	100
5.2.5	Não linearidade geométrica	100
5.3	FORÇAS E CARREGAMENTO	102
5.3.1	Força de protensão dos parafusos	102
5.3.2	Carga vertical	103
5.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO	104
5.5	RESULTADOS NUMÉRICOS	104
6	MODELAGEM DA CURVA MOMENTO-ROTAÇÃO	107
6.1	MODELO PREDITOR.....	107
6.1.1	Padronização do momento	109
6.1.2	Modelo exponencial	113

6.2	DIAGNÓSTICO DO MODELO.....	115
6.3	OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA.....	120
6.3.1	Método <i>Simulated Annealing</i>	122
6.3.2	Pacote <i>GenSA</i> do programa R	122
6.4	FUNÇÃO-OBJETIVO	123
6.5	PARÂMETROS DE AJUSTE DO MODELO PREDITOR.....	127
7	ANÁLISE DOS RESULTADOS	138
7.1	SOBREPOSIÇÃO DE CURVAS E R^2	138
7.2	COMPARAÇÃO COM OUTROS MODELOS PREDITORES	140
7.3	RIGIDEZ INICIAL	144
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	150
8.1	CONSIDERAÇÕES SOBRE MODELOS PREDITORES	150
8.2	AVALIAÇÃO DO MODELO PROPOSTO.....	151
8.3	SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS	153
	REFERÊNCIAS	155
	APÊNDICE A – GEOMETRIA DAS LIGAÇÕES ANALISADAS	163
	APÊNDICE B – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA $\mu = 0,2$	167
	APÊNDICE C – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA $\mu = 0,4$	181
	APÊNDICE D – CURVAS $M-\theta$: MEF x MODELO PROPOSTO	195

1 INTRODUÇÃO

Nos projetos de sistemas estruturais, quantificar os esforços internos e prever os possíveis deslocamentos são algumas das etapas do processo de análise estrutural. Para tanto, um modelo numérico idealizado capaz de simular de forma adequada seu comportamento se faz necessário.

Este modelo numérico idealizado é concebido a partir de simplificações aceitas, referenciadas em teorias e experimentos, e deve ser capaz de representar, basicamente, a geometria do sistema estrutural, prever o comportamento das ligações e o comportamento físico dos materiais, simular os efeitos dos carregamentos atuantes, além de outros fatores que interferem nos pressupostos de um sistema estrutural.

O comportamento das ligações em aço está associado à sua capacidade de deformação quando solicitadas pelos carregamentos atuantes. Quando em excesso, tais deformações provocam deslocamentos no sistema estrutural que podem levar ao surgimento de patologias, causar desconforto dos usuários e, em casos extremos, o seu colapso, uma vez que os valores dos esforços internos, mesmo de origem estática, são alterados pela mudança da posição geométrica do sistema estrutural.

Segundo Al-bermani *et al.* (1994), sob condições de carregamento dinâmico, o comportamento das ligações altera as características de vibração do sistema estrutural, que dependendo da sua frequência de excitação, a presença de ligações semirrígidas pode amortecer ou amplificar a resposta estrutural frente a estes carregamentos.

A compreensão do comportamento, atribuído à possibilidade de deformações das ligações, se manifesta como uma das maiores incertezas no processo de análise de um sistema estrutural. Estas incertezas estão relacionadas com a complexidade das ligações, associadas ao grande número de parâmetros sensíveis às pequenas alterações na sua geometria.

Isso dificulta propor um procedimento capaz de descrever com exatidão o comportamento das ligações, uma vez que apresentam características não lineares na relação entre esforços e deformações, o que faz com que as propostas sejam assumidas como aproximadas e restritas a alguns tipos de ligações.

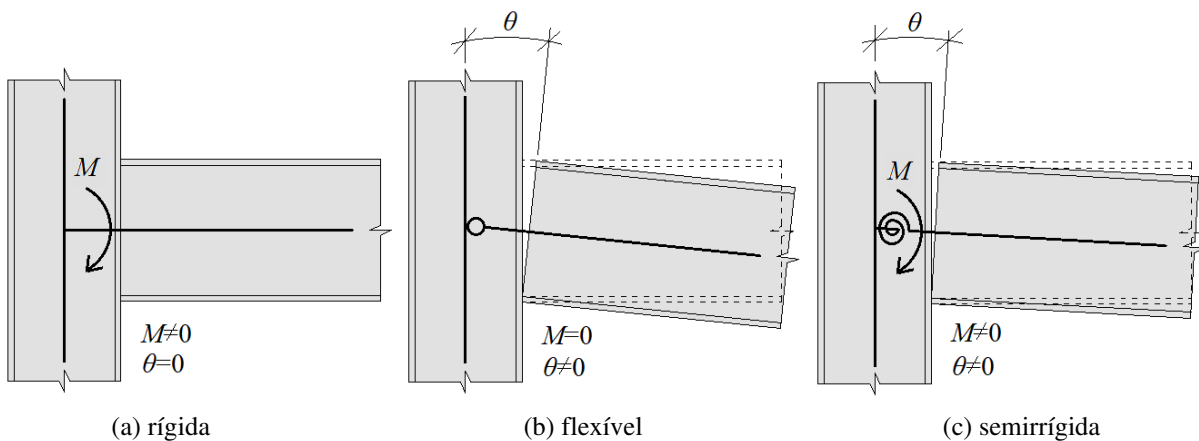
Frente a isso, o comportamento real das ligações é, na maioria dos casos, negligenciado e o projetista induzido a adotar simplificações idealizadas no modelo numérico de análise estrutural, o que pode levar a imprecisões do real comportamento do sistema estrutural, visto que as ligações influenciam no seu comportamento global, sobretudo nos constituídos em aço.

Uma destas simplificações parte do pressuposto que uma ligação entre viga e coluna pode ser considerada como perfeitamente rígidas ou com um valor elevado da sua rigidez, como mostra a Figura 1.1a. Em outras palavras, a ligação é considerada como tendo uma rigidez suficiente para que qualquer possibilidade de rotação relativa ou mudança no ângulo (θ) entre os elementos conectados possa ser ignorada à medida que os carregamentos ocorrem, da mesma forma que a transmissão de momentos fletores é considerado em sua totalidade.

A outra simplificação idealiza o comportamento da ligação entre viga e coluna como uma rótula perfeita, isto é, totalmente flexível. Neste caso a ligação é considerada com uma rigidez muito pequena e com liberdade irrestrita à rotação ou deslocamento angular relativo (θ), sem qualquer transmissão de momentos fletores entre os elementos conectados, tal como apresenta a Figura 1.1b.

No entanto, estudos realizados por diversos pesquisadores demonstram que, na prática, as ligações entre viga e coluna raramente possuem tais comportamentos idealizados, indicando que uma ligação considerada como perfeitamente rígida possui algum grau de flexibilidade rotacional, do mesmo modo, uma ligação idealizada como totalmente flexível apresenta certa rigidez rotacional. Isso conduz a um comportamento intermediário, como mostra a Figura 1.1c.

Figura 1.1 – Ligações entre viga e coluna



Fonte: Autor.

O termo semirrígido é usado para denominar tal comportamento intermediário, uma vez que sua capacidade de rotação relativa ou de deslocamento angular relativo (θ) varia de acordo com o momento fletor (M) atuante na ligação.

No projeto de sistemas estruturais em aço, em que as ligações semirrígidas são consideradas no processo de análise estrutural, a previsão do comportamento de cada tipo de ligação se dá com base na relação momento-rotação, representada de forma gráfica por uma

curva de mesmo nome. Tal previsão pressupõe que a ligação deve ser concebida antes da análise estrutural e do dimensionamento dos elementos, fato contrário ao processo corrente de projeto de estruturas em aço, em que primeiro os elementos estruturais são dimensionados e posteriormente as ligações.

Isso sugere que os atuais sistemas computacionais de análise estrutural sejam modernizados, uma vez que o processo passa a ser iterativo entre as etapas de projeto de um sistema estrutural em aço, e para tanto, uma formulação capaz de predizer de maneira satisfatória o comportamento das ligações, possível de ser implementada nos processos computacionais de uso corrente, pode ser usada.

As formulações matemáticas preditoras, também chamados de modelos preditores, podem ser obtidas a partir de um processo de regressão de dados, evidenciados por experimentos ou por análise numérica, cujo poder explicativo está associado à sua capacidade de descrever a relação entre as variáveis preditoras e as variáveis de resposta.

Entre muitas metodologias para a obtenção de dados referentes ao comportamento de ligações em aço, a análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) se apresenta capaz de fornecer um conjunto de evidências necessárias para que um modelo preditor possa ser proposto.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo principal

O objetivo principal deste estudo é apresentar uma proposta de modelo preditor da relação momento-rotação, baseado em uma formulação matemática, capaz de descrever o comportamento de ligações parafusadas entre viga e coluna em aço executadas com dupla cantoneira de alma.

1.1.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo principal, os seguintes objetivos específicos são necessários:

- a) a partir da análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos, obter a deformação rotacional da viga, relativa à coluna, para formar os conjuntos de dados;
- b) por análise de regressão, definir um formato de função matemática para o modelo preditor que melhor se adapte aos conjuntos de dados;

- c) comparar a capacidade preditora do modelo proposto, a partir dos dados obtidos pela análise numérica e com dados originados por outros modelos propostos.

1.2 JUSTIFICATIVA

O conceito de ligações semirrígidas em modelos matemáticos para análise de sistemas estruturais é previsto pela norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008) e por instrumentos normativos estrangeiros, entretanto, as diretrizes apresentadas podem ser ampliadas para a implementação dos conceitos na prática.

O comportamento real das ligações entre elementos estruturais em aço é baseado na determinação da rigidez rotacional, pouco difundido nas práticas de projetos de sistemas estruturais em aço no Brasil. Isso pode estar associado ao fato que as metodologias propostas demandam de uma formulação matemática por vezes complexa, pouco versátil no dia a dia dos engenheiros projetistas.

Outro fator que contribui para que as metodologias preditoras do comportamento semirrígido de ligações sejam poucos difundidas em nosso país, pode estar associado ao fato de terem sido desenvolvidas por estudos realizados em outros países, o que faz com que as propostas não se adaptem inteiramente aos padrões de projeto adotados no Brasil.

Alguns modelos preditores foram propostos nas décadas de 1970 e 1980, utilizando dados experimentais de estudos anteriores, alguns utilizando rebites como meio de ligação, além de outros que combinam dois meios de ligação, como soldas e parafusos, o que difere das ligações atuais executadas exclusivamente com parafusos.

Dessa forma, justifica-se a necessidade de estudos do comportamento de ligações em sistemas estruturais em aço de uso corrente nos projetos brasileiros.

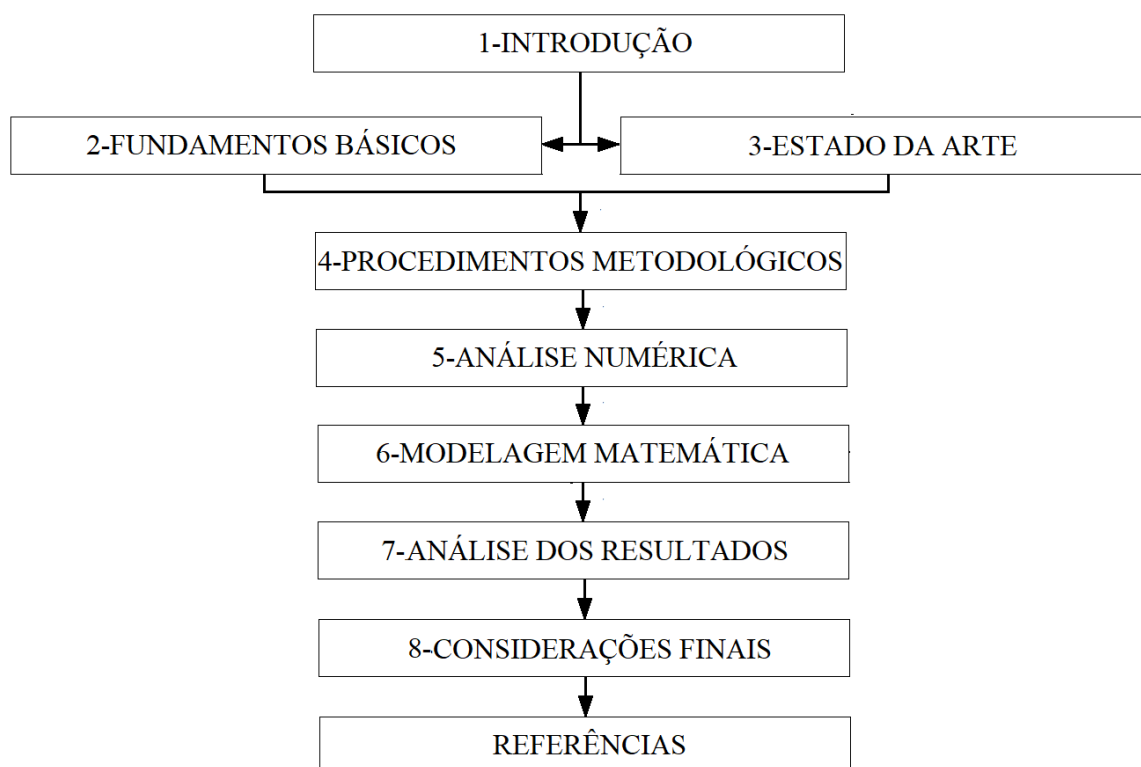
1.3 APRESENTAÇÃO DO ESTUDO

A apresentação deste estudo está disposta em nove capítulos, cuja estrutura sintetizada é mostrada na Figura 1.2.

O primeiro capítulo aborda algumas considerações sobre o comportamento das ligações, os objetivos e apresenta a justificativa para a realização do estudo.

No segundo capítulo são apresentados alguns fundamentos básicos que auxiliam no entendimento sobre o tema, enquanto o terceiro capítulo apresenta uma revisão bibliográfica sobre o atual estado da arte.

Figura 1.2 – Apresentação do estudo



Fonte: Autor.

O quarto capítulo mostra a metodologia adotada para a definição da geometria, as variáveis de projeto, os modelos constitutivos dos materiais, a definição do carregamento, um breve estudo sobre a influência das condições de rugosidade superficial no comportamento de ligações parafusadas entre viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma, os procedimentos para a obtenção da rotação relativa e por fim, os critérios para a identificação das ligações analisadas.

No quinto capítulo, os critérios adotados na análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos são apresentados.

O sexto capítulo apresenta a definição do formato do modelo preditor e seus parâmetros de ajuste, junto com a estratégia metodológica para a escolha da função-objetivo utilizada no processo de regressão de dados.

O sétimo capítulo compara a capacidade preditora do modelo exponencial proposto a outros modelos, junto com a estimativa da rigidez inicial das ligações analisadas.

Por fim, o oitavo capítulo apresenta as considerações finais do estudo, uma avaliação do modelo proposto e sugestões para estudos futuros.

2 FUNDAMENTOS BÁSICOS

Os sistemas estruturais em aço se caracterizam por terem sua produção em unidades fabris, o que exige que seus componentes estruturais tenham dimensões limitadas para fins de transporte e posterior montagem no local da construção.

O processo de montagem no local da construção se dá pela união dos componentes estruturais através de ligações previamente projetadas, comumente parafusadas, que desempenham um papel importante na manutenção da capacidade resistente e de serviço do sistema estrutural.

A norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008) considera que as ligações puramente em aço são constituídas por elementos de ligação, como enrijecedores, chapas de ligação, cantoneiras e consolos, e por meios de ligação, como soldas, parafusos, barras redondas rosqueadas e pinos. Entretanto, quando executadas no local da construção, as ligações com parafusos são hegemônicas frente as demais, visto sua versatilidade de execução.

A transmissão dos esforços que atuam nas ligações parafusadas ocorre basicamente por dois mecanismos: pelo contato do corpo dos parafusos com as paredes dos respectivos furos ou pelo atrito mobilizado entre as superfícies dos elementos da ligação e os componentes estruturais.

Nas ligações por contato, os esforços são transmitidos posteriormente ao deslizamento relativo entre as partes conectadas, visto que não há resistência pelo atrito superficial. Este tipo de ligação tem seu uso recomendado em casos de carregamentos estáticos em que a ocorrência de eventuais deslizamentos possa ser ignorada, sem afetar o comportamento do sistema estrutural.

Por outro lado, nas ligações por atrito os esforços são transmitidos pela resistência ao deslizamento relativo entre as superfícies, induzida pelo aperto suficiente e controlado dos parafusos, associado às condições de rugosidade superficial. Estas ligações são indicadas, quando os deslizamentos entre as partes conectadas representam um estado-limite, com efeitos prejudiciais ao comportamento do sistema estrutural, sobretudo em casos de carregamentos dinâmicos ou cíclicos com inversão de sentido.

2.1 LIGAÇÕES ENTRE VIGA E COLUNA

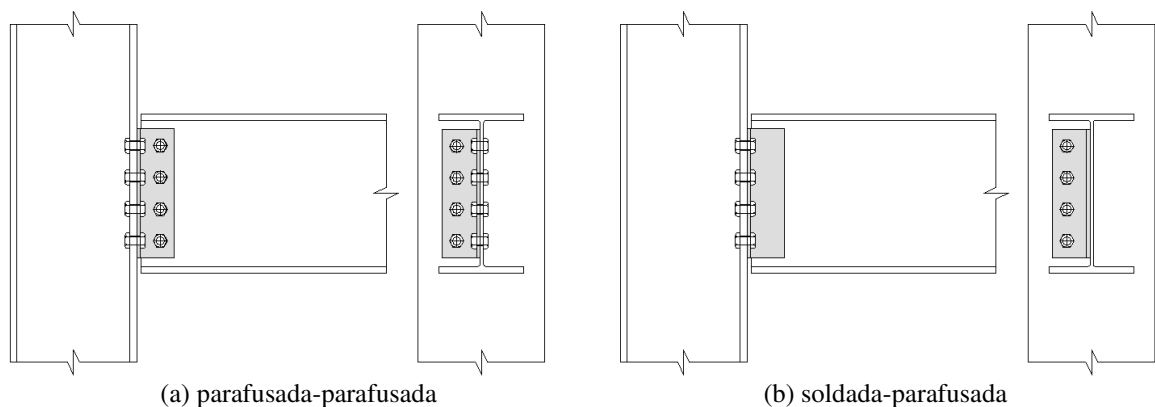
A definição do tipo de ligação pelo projetista estrutural se dá ainda na fase de projeto, quando seu comportamento deve ser previsto. Somado ao fator técnico, a ligação deve atender

critérios associados ao seu custo e, não menos importante, ser de fácil fabricação e montagem. Estes fatores induzem para que as ligações sigam padrões popularizados entre projetistas e fabricantes, sobretudo em nosso país.

2.1.1 Ligações com cantoneira simples de alma

As ligações entre viga e coluna podem ser executadas por uma única cantoneira parafusada na alma da viga e à mesa ou à alma da coluna, como mostra a Figura 2.1a. A mesma tipologia de ligação poderá ter a cantoneira soldada na alma da viga e parafusada à coluna no local de montagem, como apresenta a Figura 2.1b. Ambos os tipos possuem como vantagem o menor consumo de material, associado à facilidade de montagem.

Figura 2.1 – Ligações com cantoneira simples



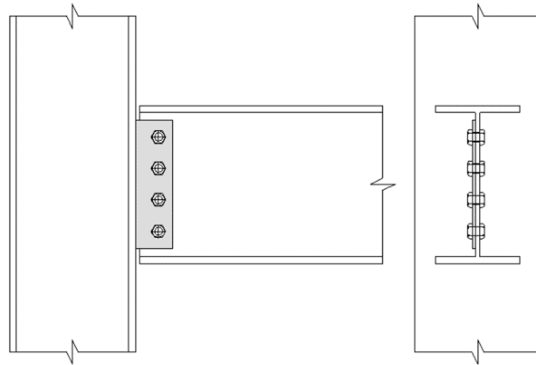
Fonte: Autor.

2.1.2 Ligação com chapa simples

Outro tipo de ligação entre viga e coluna utiliza uma única chapa soldada à coluna, que posteriormente terá a respectiva viga parafusada, tal como mostra a Figura 2.2.

Para Chen, Kishi e Komuro (2011) este tipo de ligação que utiliza chapa simples, por ter um dos lados soldado na coluna, apresenta rigidez igual ou superior quando comparadas com ligações que utilizam cantoneira simples, que por sua vez possuem rigidez próxima da metade das ligações com dupla cantoneira de alma.

Figura 2.2 – Ligação com chapa simples



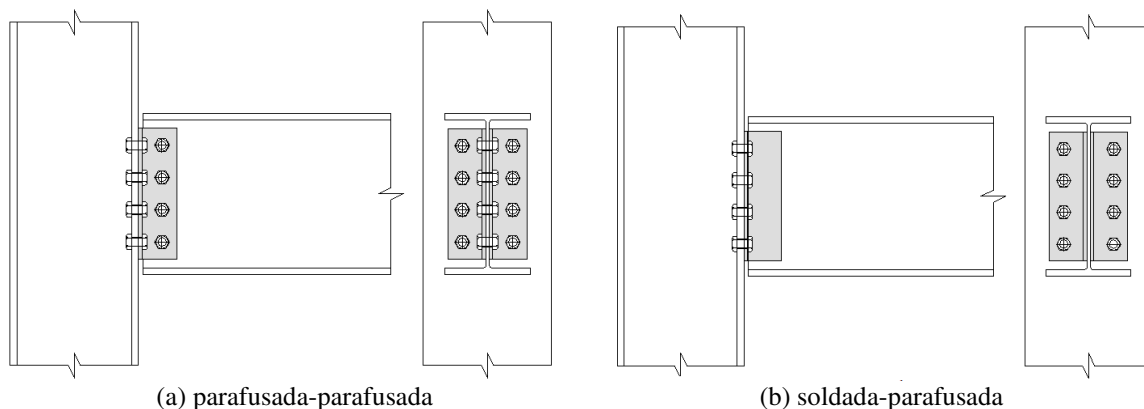
Fonte: Autor.

2.1.3 Ligações com dupla cantoneira de alma

As ligações com dupla cantoneira são constituídas por duas cantoneiras parafusadas à alma da viga, como mostra a Figura 2.3a, ou opcionalmente soldadas, conforme a Figura 2.3b. Ambas as opções são parafusadas à coluna durante a fase de montagem do sistema estrutural.

Este tipo de ligação entre viga e coluna com dupla cantoneira parafusada-parafusada se destaca por seu amplo uso em sistemas estruturais em aço, visto a versatilidade de fabricação e montagem.

Figura 2.3 – Ligações com dupla cantoneira de alma

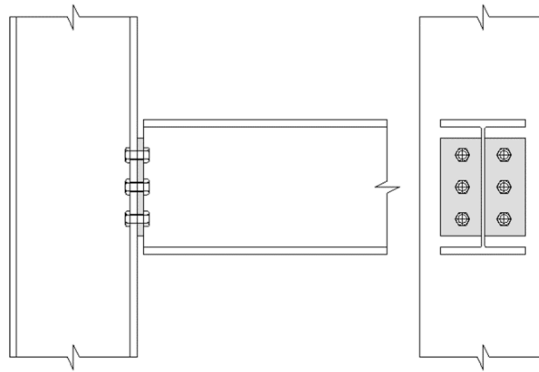


Fonte: Autor.

2.1.4 Ligação com chapa de extremidade

Outro tipo de ligação entre viga e coluna tem uma chapa de extremidade com altura inferior à altura da viga, soldada à alma e parafusada na coluna, conforme mostra a Figura 2.4.

Figura 2.4 – Ligação com chapa de extremidade

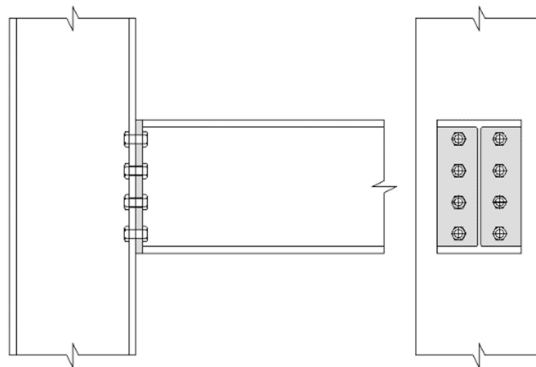


Fonte: Autor.

2.1.5 Ligação com chapa de topo nivelada

As ligações entre viga e coluna com chapa de topo se caracterizam por possuírem uma chapa soldada à alma e às mesas da viga e parafusadas à coluna, como mostrado na Figura 2.5. Este tipo de ligação transfere uma parte do momento fletor da viga para a coluna, visto que possui certa rigidez, mas inferior à que utiliza chapa de topo estendida.

Figura 2.5 – Ligação com chapa de topo nivelada



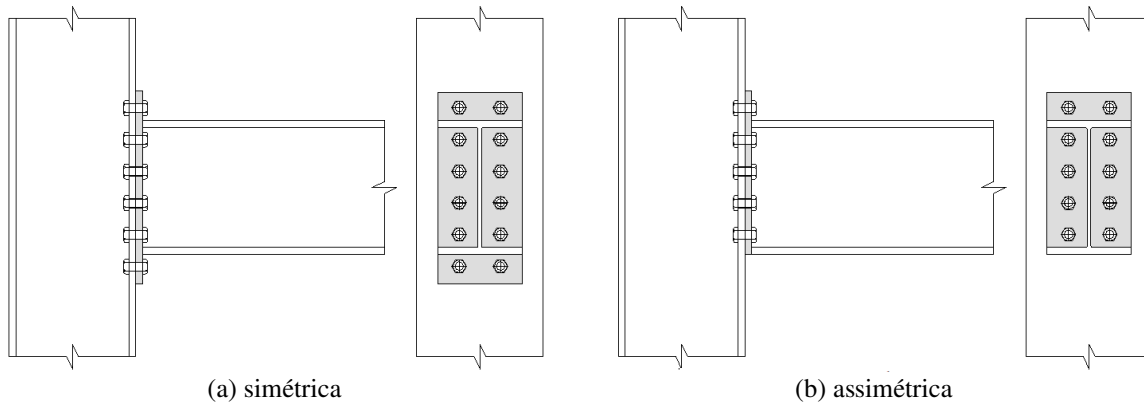
Fonte: Autor.

2.1.6 Ligações com chapa de topo estendida

Este tipo de ligação é amplamente usado em projetos e se caracteriza por possuir uma chapa soldada à alma e às mesas da viga, de forma estendida para além da altura da viga. A tipologia, cuja chapa de topo é estendida para ambos os lados de forma simétrica, tal como mostra a Figura 2.6a, é empregada quando há reversão do momento fletor atuante na ligação.

Não havendo reversão de esforços na ligação, esta chapa pode ser estendida apenas para o lado tracionado, de forma assimétrica, como mostrado na Figura 2.6b.

Figura 2.6 – Ligações com chapa de topo estendida



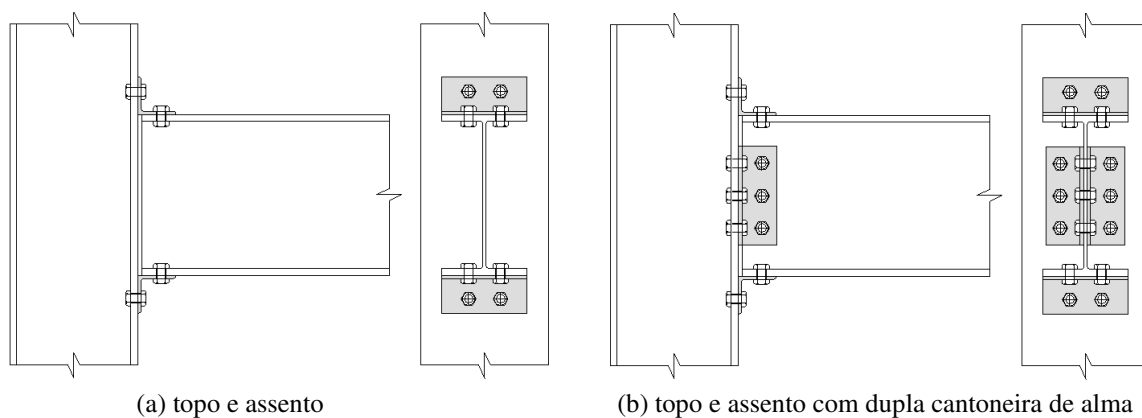
Fonte: Autor.

2.1.7 Ligações com cantoneiras de topo e de assento

Outros dois tipos de ligações entre viga e coluna que utilizam cantoneiras se destacam por serem amplamente empregadas e pela atenção dada em estudos, sobretudo por pesquisadores estrangeiros.

Num dos tipos, a ligação é composta por cantoneiras parafusadas à coluna e às mesas superior e inferior da viga (de topo e de assento), enquanto no outro tipo, um par de cantoneiras é parafusado à alma da viga, conforme mostram as Figuras 2.7a e 2.7b, respectivamente.

Figura 2.7 – Ligações com cantoneiras parafusadas

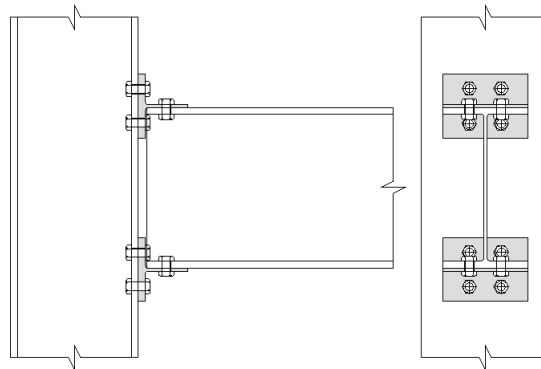


Fonte: Autor.

2.1.8 Ligação com perfis T

Neste tipo de ligação, os elementos de ligação são formados por dois perfis em formato de T, parafusados nas mesas superior e inferior da viga e à coluna, como mostra a Figura 2.8.

Figura 2.8 – Ligação com perfis T parafusados



Fonte: Autor.

2.2 CURVA MOMENTO-ROTAÇÃO

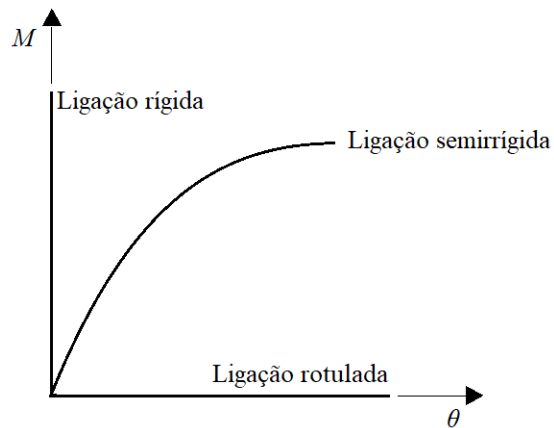
Uma ligação deve possuir a capacidade de unir os elementos estruturais e transmitir esforços de um para o outro. Especificamente para o caso de ligações entre viga e coluna, um conjunto de forças concomitantes podem ser transmitidas, incluído a força axial, força de cisalhamento, momento fletor e momento torçor.

Quando a análise estrutural se dá em um único plano, os efeitos dos momentos torçores são ignorados e que possíveis deformações causadas por forças axiais e de cisalhamento podem ser consideradas insignificantes, quando comparadas à magnitude da deformação rotacional causada por flexão.

Para Jones, Kirby e Nethercot (1980), a melhor descrição do comportamento de uma ligação se dá por sua curva momento-rotação, que é a relação entre o momento transmitido pela ligação e a respectiva rotação da viga em relação à coluna, como mostra a Figura 2.9.

Neste formato gráfico, uma reta sobre o eixo das abscissas representa as ligações idealizadas como uma rótula perfeita, sem transmissão de momento fletor entre viga e coluna e liberdade irrestrita ao giro. Por outro lado, uma reta sobre o eixo das ordenadas expressa o comportamento de ligações idealizadas como perfeitamente rígidas, com transmissão do momento fletor entre viga e coluna na sua totalidade e rotação relativa nula.

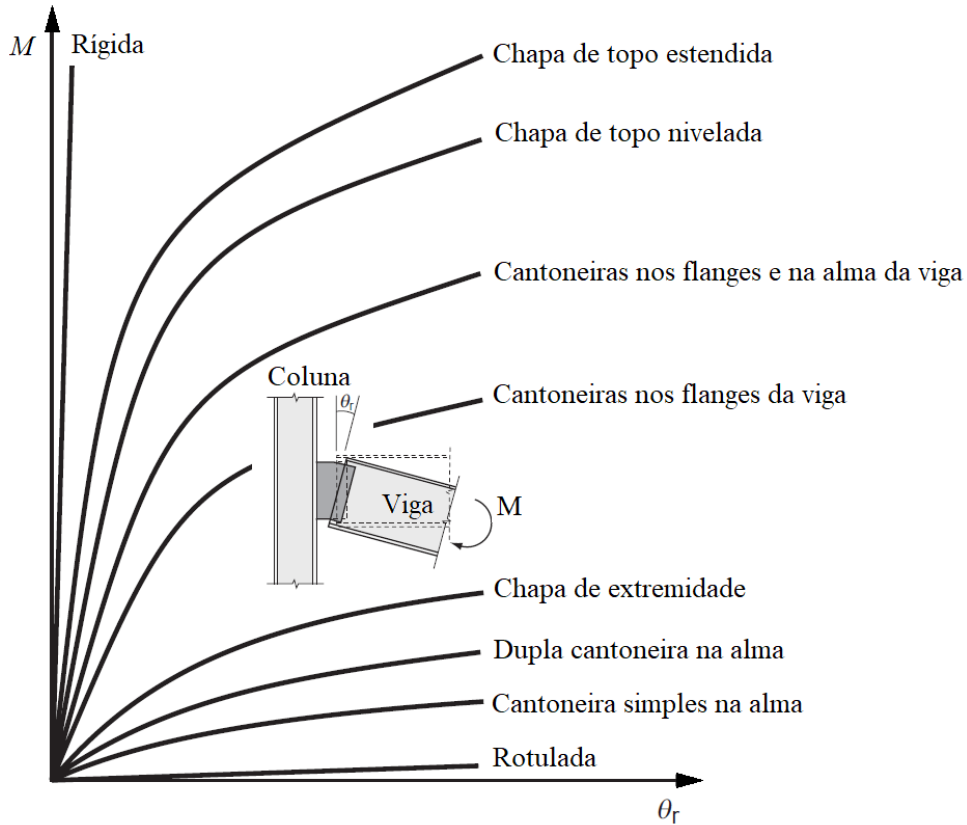
Figura 2.9 – Curvas momento-rotação



Fonte: Autor.

Os demais comportamentos, tidos como intermediários, são atribuídos à maioria das ligações usuais entre viga e coluna em aço e suas curvas se localizam no quadrante entre os dois eixos citados, visto suas características semirrígidas, tal como apresenta a Figura 2.10.

Figura 2.10 – Curvas momento-rotação típicas de ligações usuais entre viga e coluna



Fonte: Chen, Kishi e Komuro (2011).

Neste contexto, é possível afirmar que quanto mais próxima a curva momento-rotação estiver do eixo horizontal mais flexível é a ligação, enquanto que curvas verticalizadas representam ligações com maior rigidez.

De acordo com Frye e Morris (1975), as ligações mais flexíveis exibem um comportamento não linear desde o início do carregamento, enquanto nas ligações com maior rigidez rotacional a não linearidade se apresenta em um estágio mais avançado de carregamento.

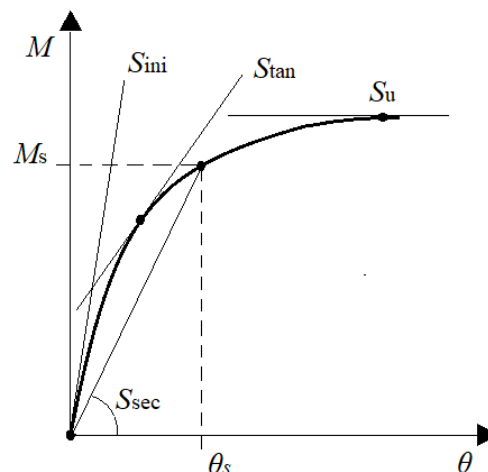
Para Jones, Kirby e Nethercot (1983), a natureza complexa das ligações faz com que as curvas momento-rotação sejam, geralmente, não lineares ao longo de todo o intervalo da curva. Esta não linearidade é produzida pela redução da rigidez rotacional da ligação à medida que o carregamento aumenta.

2.3 RIGIDEZ ROTACIONAL

A rotação de uma ligação causada pelo momento fletor atuante e descrita pela curva momento-rotação está associada à sua rigidez rotacional, cujo valor se apresenta útil no processo de análise estrutural, sobretudo quando as idealizações impostas são substituídas pela semirrigidez das ligações.

A literatura técnica apresenta ao menos quatro definições usuais para a rigidez rotacional de uma ligação, como mostra a Figura 2.11. De acordo com o autor, a rigidez rotacional é expressa de forma distinta pelos caracteres K , R ou S , sendo o último adotado pela norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008) e por este estudo.

Figura 2.11 – Rigidez rotacional de uma ligação



Fonte: Autor.

O valor da rigidez rotacional de uma ligação, cuja dimensão é unidade de momento por unidade de rotação, pode ser definido pela relação entre o momento fletor atuante e o respectivo valor da rotação.

A rigidez inicial de uma ligação (S_{ini}), cuja tangente está junto à origem, tem seu valor definido no instante que o carregamento inicia, isto é, no instante em que o valor do momento fletor atuante é próximo de zero e a ligação se apresenta em sua geometria plena, sem qualquer deformação ou deslizamento entre as partes e seu valor pode ser usado para representar, de forma idealizada, o comportamento elástico-linear de uma ligação.

De acordo com Alvarenga (2010), a rigidez inicial é o valor máximo apresentado pela ligação, mas há exceções, como após deslizamentos e acomodações em que há um aumento da rigidez devido o contato das partes conectadas.

Para Lewitt, Chesson e Munse (1966), a rigidez da ligação tende a diminuir à medida que a deformação rotacional aumenta. Essa diminuição da rigidez é responsável pelos incrementos decrescentes de momento necessários para aumentar a rotação em um determinado valor.

Segundo Owens e Cheal (1989), o que caracteriza a alta rigidez inicial das ligações é o fato que, inicialmente, os deslizamentos são inibidos pelo intertravamento entre os interstícios superficiais. No entanto, à medida que o carregamento aumenta, a plastificação devido as tensões de cisalhamento nos interstícios ocorre e, conseqüentemente, o deslizamento entre as superfícies leva a uma diminuição gradual da rigidez.

Muitos pesquisadores, entre eles Jones, Kirby e Nethercot (1983), apresentam alguns fatores importantes que afetam a rigidez rotacional das ligações, que somados a outros, podem ser citados:

- a) a tipologia da ligação;
- b) a altura da ligação;
- c) a distância entre furos;
- d) a distância dos furos às bordas;
- e) as espessuras dos elementos de ligação (cantoneiras ou chapas);
- f) o tipo e as dimensões dos parafusos;
- g) a força de protensão desenvolvida pelo aperto dos parafusos;
- h) o limite de escoamento dos materiais;
- i) as condições de rugosidade superficial;
- j) a dureza superficial do aço;
- k) o local da ligação (entre viga e coluna ou entre viga e viga);

- l) o ponto da ligação (nas mesas ou na alma da coluna);
- m) as espessuras das mesas ou da alma da coluna ou da viga de apoio;
- n) a presença ou a ausência de enrijecedores na coluna;
- o) a flambagem local da mesa da viga;
- p) as possíveis deformações na viga ou na coluna.

A rigidez tangente (S_{tan}) tem seu valor definido analiticamente pela derivada da função em um ponto qualquer da curva, entretanto uma função matemática que descreve o comportamento da ligação se faz necessário, como define a Equação 2.1.

$$S_{\text{tan}} = \frac{dM}{d\theta} \cdot \quad (2.1)$$

A rigidez secante (S_{sec}) é definida pela inclinação de uma reta que liga a origem a um ponto específico da curva. Essa metodologia é adotada por alguns instrumentos normativos, em que se pode citar o Eurocode 3, parte 1-8 (2005), a ANSI/AISC 360-16 (2016) e a norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008), a qual recomenda que este ponto seja correspondente a 2/3 do momento resistente de cálculo da ligação.

Próxima ao seu colapso, a ligação apresenta a rigidez última (S_u) ou de plastificação. Neste ponto o valor da rigidez da ligação tende a zero, uma vez que há o esgotamento da sua capacidade resistente.

2.4 METODOLOGIA DE MODELAGEM

Desde o início do século XX, diversos estudos apresentaram propostas capazes de descrever o comportamento de ligações em sistemas estruturais em aço através de curvas momento-rotação. Estas propostas são baseadas em formulações condicionadas a leis matemáticas, obtidas a partir do tratamento de dados obtidos por alguma metodologia de análise.

Basicamente, a análise para expressar o comportamento de ligações por meio de curvas momento-rotação consiste no emprego de métodos analíticos, modelos mecânicos, modelagem numérica, experimentos e modelos empíricos, sintetizados a seguir.

2.4.1 Métodos analíticos

Pela metodologia analítica, os conceitos básicos de análise estrutural são aplicados para determinar as deformações nos componentes da ligação e obter a curva momento-rotação para diferentes tipos de ligações entre viga e coluna. Posteriormente, os resultados obtidos de forma analítica são comparados a outros métodos ou a experimentos para sua validação. De forma geral, a formulação matemática que descreve a curva momento-rotação de métodos analíticos é baseada na rigidez elástica inicial, na rigidez plástica e no momento resistente da ligação.

2.4.2 Modelos mecânicos

Os modelos mecânicos são baseados na deformação dos elementos de forma análoga a molas, as quais representam os componentes da ligação. Este método também é conhecido como método dos componentes, introduzido ao procedimento normativo Eurocode 3, parte 1-8 (2005) para estimativa do comportamento de ligações entre viga e coluna. As leis constitutivas lineares ou não lineares para cada um dos componentes são obtidas por meio de experimentos ou de forma analítica.

2.4.3 Modelos numéricos

Na modelagem numérica o comportamento de ligações entre viga e coluna envolve simulações computacionais. Das diversas possibilidades, o Método dos Elementos Finitos tem sido continuamente utilizado em quase a totalidade dos casos para estudar o comportamento de ligações.

2.4.4 Experimentos

Uma forma de obter informações precisas do comportamento de ligações semirrígidas é por meio de experimentos. Estes experimentos também são utilizados para calibrar e testar a confiabilidade de dados obtidos por outra metodologia, no entanto, demandam de condições físicas e equipamentos laboratoriais, materiais e mão de obra especializada.

A concepção do mecanismo experimental de uma ligação depende dos recursos disponíveis e pode assumir configurações geométricas diversas. Estas configurações vão desde

experimentos em escala real, experimentos em que partes são suprimidas e experimentos em escala reduzida.

Vellasco *et al.* (2014) destaca a importância dos experimentos como fundamento para elucidar quaisquer dúvidas nos resultados. Ao mesmo tempo, alerta que a supressão de partes em experimentos pode provocar mudanças significativas nas condições de contorno e alterar os resultados finais.

2.4.5 Modelos empíricos

Os modelos empíricos são baseados em formulações matemáticas obtidas pelo emprego de técnicas de ajuste de curvas por análise de regressão de dados obtidos por meio de experimentos, modelos numéricos, métodos analíticos ou mecânicos.

2.5 CLASSIFICAÇÃO DAS LIGAÇÕES

A classificação de uma ligação tem como referência a sua rigidez ou resistência, e todas as ligações entre viga e coluna em aço podem ser classificadas como rotuladas, semirrígidas ou rígidas, a partir do valor da rotação relativa quando a ligação está submetida à flexão. Essa é uma classificação conveniente do ponto de vista de projeto das ligações e exerce influência direta no processo de análise estrutural. A seguir, uma breve descrição da classificação das ligações sob aspectos normativos.

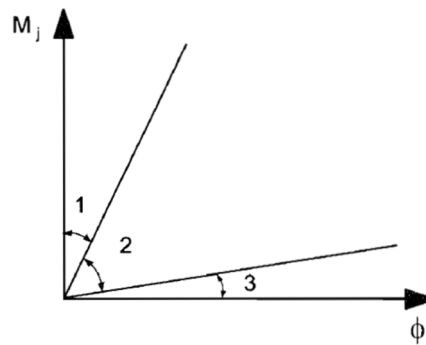
2.5.1 Classificação de acordo com o Eurocode 3 EN 1993-1-8 (2005)

O Eurocode 3 EN 1993-1-8 (2005) define que as ligações entre viga e coluna podem ser classificadas pela sua rigidez e pela sua resistência.

2.5.1.1 Quanto à rigidez

Quanto à rigidez rotacional, as ligações entre viga e coluna podem ser classificadas como rígidas, rotuladas ou semirrígidas, de acordo com os limites de classificação definidos por zonas, conforme apresenta a Figura 2.12.

Figura 2.12 – Limites de classificação da rigidez de ligações



Fonte: Eurocode 3 (2005).

As ligações são classificadas como rígidas por assumirem uma rigidez rotacional suficiente que justifique a consideração da continuidade total entre viga e coluna, dentro dos limites da zona 1, definido por:

$$S_{j,ini} \geq \frac{k_b \cdot E \cdot I_b}{L_b}, \quad (2.2)$$

na qual:

$k_b = 8$ em pórticos em que o sistema de contraventamento reduza o deslocamento horizontal em pelo menos 80%;

$k_b = 25$ para os outros pórticos, desde que em cada andar $K_b/K_c \geq 0,1$. No caso em que $K_b/K_c < 0,1$, a ligação passa a ser considerada como semirrígida.

Uma ligação rotulada é assim classificada se for capaz de transmitir esforços internos sem momentos significativos que possam afetar de maneira adversa os elementos ou o sistema estrutural como um todo, dentro dos limites da zona 3, definido por:

$$S_{j,ini} \leq \frac{0,5 \cdot E \cdot I_b}{L_b}, \quad (2.3)$$

nas quais:

E é o módulo de elasticidade longitudinal;

K_b é o valor médio de I_b/L_b para todas as vigas no topo do andar;

K_c é o valor médio de I_c/L_c para todas as colunas do andar;

I_b é o momento de inércia da viga;

I_c é o momento de inércia da coluna;

L_b é o vão da viga medido entre eixos das colunas;

L_c é a altura da coluna.

Todas as ligações que não atendem aos limites especificados anteriormente se encontram na zona 2 e devem ser classificadas como semirrígidas. Entretanto, o mesmo instrumento normativo considera que, opcionalmente, as ligações classificadas dentro das zonas 1 ou 3 também podem ser tratadas como semirrígidas.

2.5.1.2 Quanto à resistência

Quanto à resistência, as ligações entre viga e coluna podem ser classificadas como rotuladas, de resistência total ou de resistência parcial, comparando o momento resistente de cálculo da ligação ($M_{j,Rd}$) com o momento resistente de cálculo dos elementos ligados.

Nas ligações rotuladas, o momento resistente de cálculo da ligação ($M_{j,Rd}$) não deve ser maior que 0,25 vezes o momento resistente de cálculo dos elementos ligados, além de possuir suficiente capacidade de rotação.

Uma ligação é classificada de resistência total se o momento resistente de cálculo da ligação for superior ao momento resistente de cálculo dos elementos ligados (viga ou coluna), obedecendo aos seguintes critérios:

- a) em ligações entre viga e coluna de topo que não apresenta continuidade, o momento resistente da ligação deve ser maior que o momento de plastificação da viga e da coluna, simultaneamente;
- b) em ligações entre viga e coluna que apresenta continuidade, o momento resistente da ligação deve ser maior que o momento de plastificação da viga e maior do que duas vezes o momento de plastificação da coluna.

As ligações que não tenham sido classificadas de acordo com os critérios anteriores são consideradas como de resistência parcial.

2.5.2 Classificação de acordo com norma ABNT NBR 8800 (2008)

Quanto à rigidez, a ABNT NBR 8800 (2008) se assemelha ao Eurocode 3 EN 1993-1-8 (2005) na classificação das ligações, de modo que em uma análise estrutural elástica, a ligação

entre viga e coluna pode ser considerada rotulada se a condição apresentada pela Equação 2.4 for satisfeita.

$$S_i \leq \frac{0,5 \cdot E \cdot I_v}{L_v}. \quad (2.4)$$

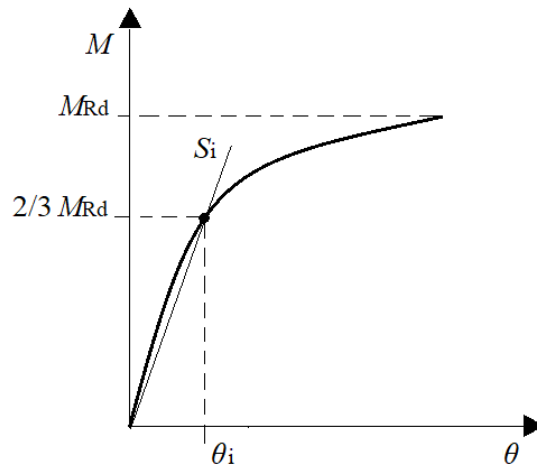
No caso das ligações rígidas, a condição da Equação 2.5 deve ser atendida, limitando-se, em cada andar, à relação $K_v/K_p \geq 0,1$. Mesmo que a Equação 2.5 seja satisfeita, mas $K_v/K_p < 0,1$, a ligação deve ser considerada como semirrígida.

$$S_i \geq \frac{25 \cdot E \cdot I_v}{L_v}, \quad (2.5)$$

nas quais:

S_i é a rigidez da ligação correspondente a 2/3 do momento resistente de cálculo da ligação, sendo denominada simplificada de rigidez inicial, como mostra a Figura 2.13;

Figura 2.13 – Rigidez inicial de acordo com a ABNT NBR 8800 (2008)



Fonte: Autor.

I_v é o momento de inércia da viga;

I_p é o momento de inércia da coluna;

L_v é o vão de uma viga considerado de eixo a eixo das colunas;

L_p é a altura do andar para uma coluna;

K_v é valor médio de I_v/L_v para todas as vigas no topo do andar;

K_p é valor médio de I_p/L_p para todas as colunas do andar.

Ainda, segundo a ABNT NBR 8800 (2008), a rigidez da ligação pode ser determinada de acordo com o Eurocode 3 Part 1-8 ou com base em resultados experimentais.

2.5.3 Classificação segundo a norma ANSI/AISC 360-16 (2016)

A norma americana ANSI/AISC 360-16 (2016) divide as ligações em dois grupos em função de sua rigidez:

- a) ligações simples: são ligações que transmitem um momento insignificante e permitem rotação relativa irrestrita entre os elementos ligados;
- b) ligações que transmitem momento: as ligações que transmitem momento são divididas em dois tipos:
 - totalmente restringidas (*FR - fully restrained*): são aquelas ligações que transferem momentos com uma rotação relativa desprezível entre os elementos ligados;
 - parcialmente restringidas (*PR - partially restrained*): são as ligações que transferem momentos, porém a rotação entre os elementos ligados não é desprezível.

A hipótese básica para a classificação das ligações é que seu comportamento característico pode ser modelado por uma curva momento-rotação.

Este comportamento não linear da ligação se manifesta mesmo para baixos valores de momento e rotação, e a rigidez inicial (K_i) da ligação, tangente à curva, pode não caracterizar adequadamente o comportamento da ligação. Além disso, alguns tipos de ligações não demonstram uma rigidez inicial confiável ou válida apenas para uma pequena faixa de valores de momento e rotação.

Diante disso, a ANSI/AISC 360-16 (2016) sugere que a rigidez secante (K_s), para cargas de serviço seja tomada como uma propriedade indicativa da rigidez da ligação, como mostra a Figura 2.14, especificamente como:

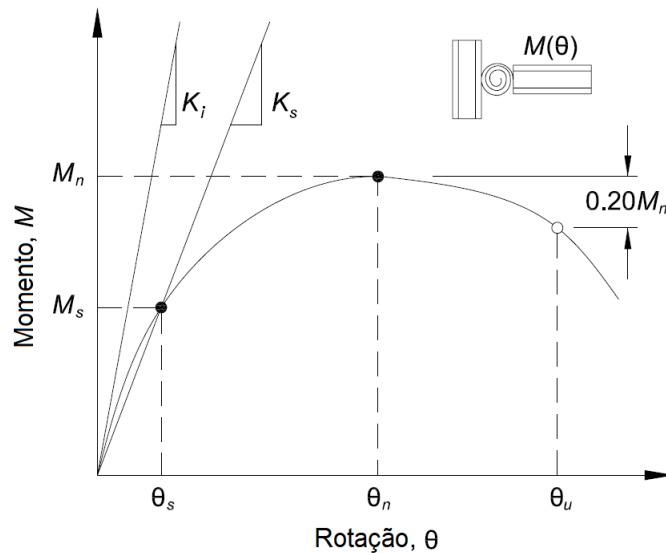
$$K_s = \frac{M_s}{\theta_s}, \quad (2.6)$$

na qual:

M_s é o momento de serviço;

θ_s é a rotação relativa sob momento de serviço.

Figura 2.14 – Definição das características de rigidez conforme ANSI/AISC 360-16 (2016)



Fonte: ANSI/AISC 360-16 (2016).

A mesma norma considerada a ligação totalmente restringida (rígida) se:

$$K_s \geq \frac{20 \cdot E \cdot I}{L}, \quad (2.7)$$

ou como ligação simples (rotuladas) se:

$$K_s \leq \frac{2 \cdot E \cdot I}{L}, \quad (2.8)$$

nas quais:

K_s é a rigidez secante da ligação;

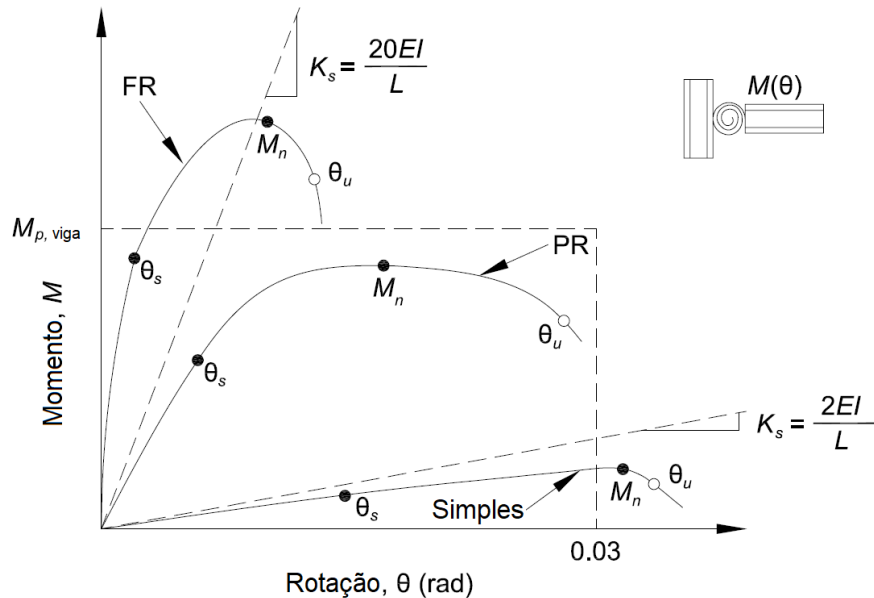
L representa o comprimento da viga;

$E \cdot I$ representa a rigidez à flexão da viga.

As ligações com rigidez secante definida entre esses dois limites são consideradas como parcialmente restringidas (semirrígidas). A classificação das ligações e as curvas momento-

rotação de ligações simples (rotuladas), totalmente restringidas (rígidas) e parcialmente restringidas (semirrígidas) são mostrados na Figura 2.15.

Figura 2.15 – Classificação das ligações de acordo com ANSI/AISC 360-16 (2016)



Fonte: ANSI/AISC 360-16 (2016).

Os pontos indicados com θ_s representam a rotação para um respectivo carregamento de serviço e, assim, definem a rigidez secante desta ligação.

O momento máximo suportado por uma ligação é definido por M_n e a máxima rotação relativa por θ_u . Se a curva momento-rotação não exibir um pico de carregamento, a referida norma recomenda que o valor do momento seja assumido para uma rotação respectiva de 0,02 radianos.

A mesma norma define um limite inferior de resistência, abaixo do qual a ligação pode ser considerada como uma ligação simples. As ligações que transmitem menos de 20% do momento de plastificação da viga a uma rotação de 0,02 radianos podem ser consideradas como sem resistência à flexão para fins de projeto, ou seja, rotuladas.

3 ESTADO DA ARTE

No início do processo de construção de sistemas estruturais em aço, a execução das ligações por meio de rebites predominava e a sua resistência estabelecia os únicos padrões de projeto, sem qualquer importância de seu comportamento. No entanto, o passar do tempo fez surgir os primeiros estudos com foco em mensurar o comportamento das ligações rebitadas, contribuindo para estabelecer outros parâmetros para o seu dimensionamento.

A literatura técnica atribui aos estudos sobre a rigidez de ligações rebitadas realizados na década de 1910 como precursores, servindo de estímulo para que novos estudos fossem realizados no campo das ligações em aço.

A partir da década de 1930, diversos estudos abordando o comportamento semirrígido das ligações foram publicados, surgindo as primeiras propostas de formulações matemáticas empíricas baseadas em observações experimentais.

Nos anos seguintes, o uso da solda e a substituição dos rebites por parafusos de alta resistência nas ligações impulsionaram outros estudos, que junto ao advento dos computadores, sobretudo a partir da década de 1970, fazem com que novas propostas de modelos preditores baseados em expressões matemáticas sejam apresentadas.

As propostas preditoras não apresentam um viés matemático consolidado, mas sim distintos formatos que vão desde modelos que utilizam funções lineares a modelos de funções não lineares em formatos polinomiais, de potência, exponenciais, logarítmicos, trigonométricos e hiperbólicos.

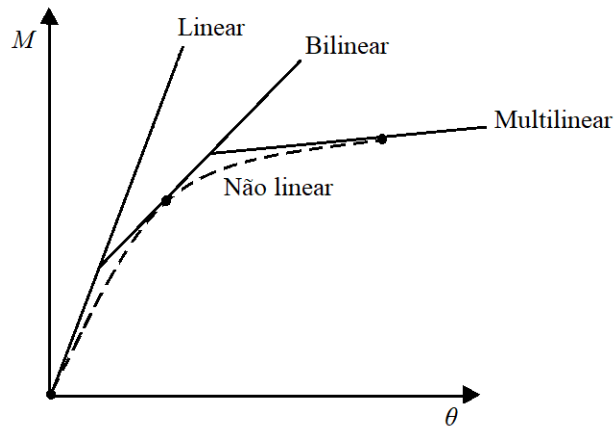
3.1 PROPOSTAS DE MODELOS PREDITORES

3.1.1 Modelos com segmentos lineares

De acordo com Lee e Moon (2002), a primeira tentativa de expressar de forma matemática o comportamento de ligações remonta a Rathbun (1936), que propôs uma linha tangencial única para definir a rigidez inicial da curva momento-rotação de ligações rebitadas.

Em anos posteriores, modelos com dois ou mais segmentos com inclinações distintas, como mostra a Figura 3.1, foram propostos para descrever a curva momento-rotação de ligações semirrígidas, com destaque aos estudos de Lewitt *et al.* (1966), Lionberger e Weaver (1969), Romstad e Subramanian (1970), Tarpay e Cardinal (1981), Melchers e Kaur (1982), Razzaq (1983), Sivakumaram (1988), Gerstle (1988), entre outros.

Figura 3.1 – Modelos com segmentos lineares



Fonte: Autor.

Al-Bermani e Kitipornchai (1992) e Al-Bermani *et al.* (1994) apresentaram um modelo que simula o comportamento de ligações, o qual consiste em dividir a curva momento-rotação em três segmentos, em que o primeiro e o terceiro são lineares representando os regimes elásticos e plásticos, respectivamente, enquanto o segundo segmento é uma curva de transição entre os dois segmentos lineares, conforme mostra a Figura 3.2.

O modelo proposto é descrito basicamente por quatro parâmetros, em que a relação momento-rotação é expressa em termos da rigidez tangente, conforme a Equação 3.1, pelo sistema inglês em que a força é expressa em *kilopound (kip)* e a unidade de comprimento em *polegada (in)*.

$$M = S_j \cdot \theta , \quad (3.1)$$

na qual:

M é o momento atuante na ligação, em *kip·in*;

S_j é a rigidez tangente, em *kip·in/rad*;

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

$$S_j = S_i \quad \text{quando } |M| < m_1 ; \quad (3.2)$$

$$S_j = S_i + \frac{|M| - m_1}{M_C - M_Y} (S_p - S_i) \quad \text{quando } m_1 \leq |M| < m_2 ; \quad (3.3)$$

$$S_j = S_p \quad \text{quando } |M| \geq m_2 ; \quad (3.4)$$

$$m_1 = M_Y + S_p \cdot \theta ; \quad (3.5)$$

$$m_2 = M_C + S_p \cdot \theta , \quad (3.6)$$

nas quais:

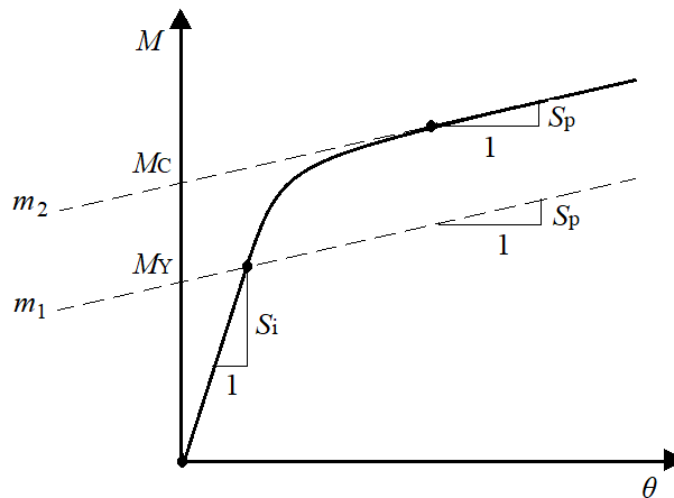
S_i é o parâmetro relativo à rigidez inicial da ligação, em *kip-in/rad*;

S_p é o parâmetro relativo à rigidez plástica da ligação, em *kip-in/rad*;

M_Y é o parâmetro relativo ao momento elástico, em *kip-in*;

M_C é o parâmetro relativo ao momento de plastificação da ligação, em *kip-in*.

Figura 3.2 – Modelo com curva de transição



Fonte: Adaptado de Al-Bermani *et al.* (1994).

Os valores dos quatro parâmetros das equações anteriores foram obtidos por Zhu *et al.* (1995), conforme mostra a Tabela 3.1, a partir de técnicas de ajuste de curva aos dados experimentais para sete tipos diferentes de ligações.

Shi, Y., Shi, G. e Wang (2007) utilizaram modelos trilineares para descrever a relação momento-rotação de ligações entre viga e coluna enrijecida com chapa de topo estendida, de modo que a transição entre o comportamento elástico e plástico se dá por uma reta.

De modo geral, por sua simplicidade, os modelos com trechos lineares fornecem informações resumidas do comportamento da ligação. Estas informações podem ser suficientes

para estimar a rigidez inicial ou a rigidez secante da origem a um ponto predefinido na curva que representa o valor de um momento atuante.

Tabela 3.1 – Parâmetros do modelo para diferentes tipos de ligações

Ligação	S_i	S_p	M_Y	M_C
	kips·in/rad	kips·in/rad	kips·in	kips·in
Cantoneira simples na alma	16000	700	50	110
Dupla cantoneira na alma	45000	8000	115	240
Chapa de extremidade	68000	4000	130	500
Chapa de topo	320000	24000	365	740
Cantoneiras parafusadas nos flanges	363000	30000	370	740
Chapa de topo estendida	550000	22200	350	1850
Duplo T	3940000	86000	800	2300

Fonte: Zhu *et al.* (1995).

3.1.2 Modelos polinomiais

O primeiro modelo polinomial a ser popularizado foi proposto por Frye e Morris (1975), baseado em um polinômio de potência ímpar, seguindo os procedimentos desenvolvidos anteriormente por Somner (1969) para obter a função que representa a relação momento-rotação de ligações entre viga e coluna em aço, em termos do momento padronizado, tal como apresenta a Equação 3.7.

$$\theta = C_1(K \cdot M) + C_2(K \cdot M)^3 + C_3(K \cdot M)^5, \quad (3.7)$$

na qual:

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

C_1 , C_2 e C_3 são os coeficientes de ajuste do polinômio;

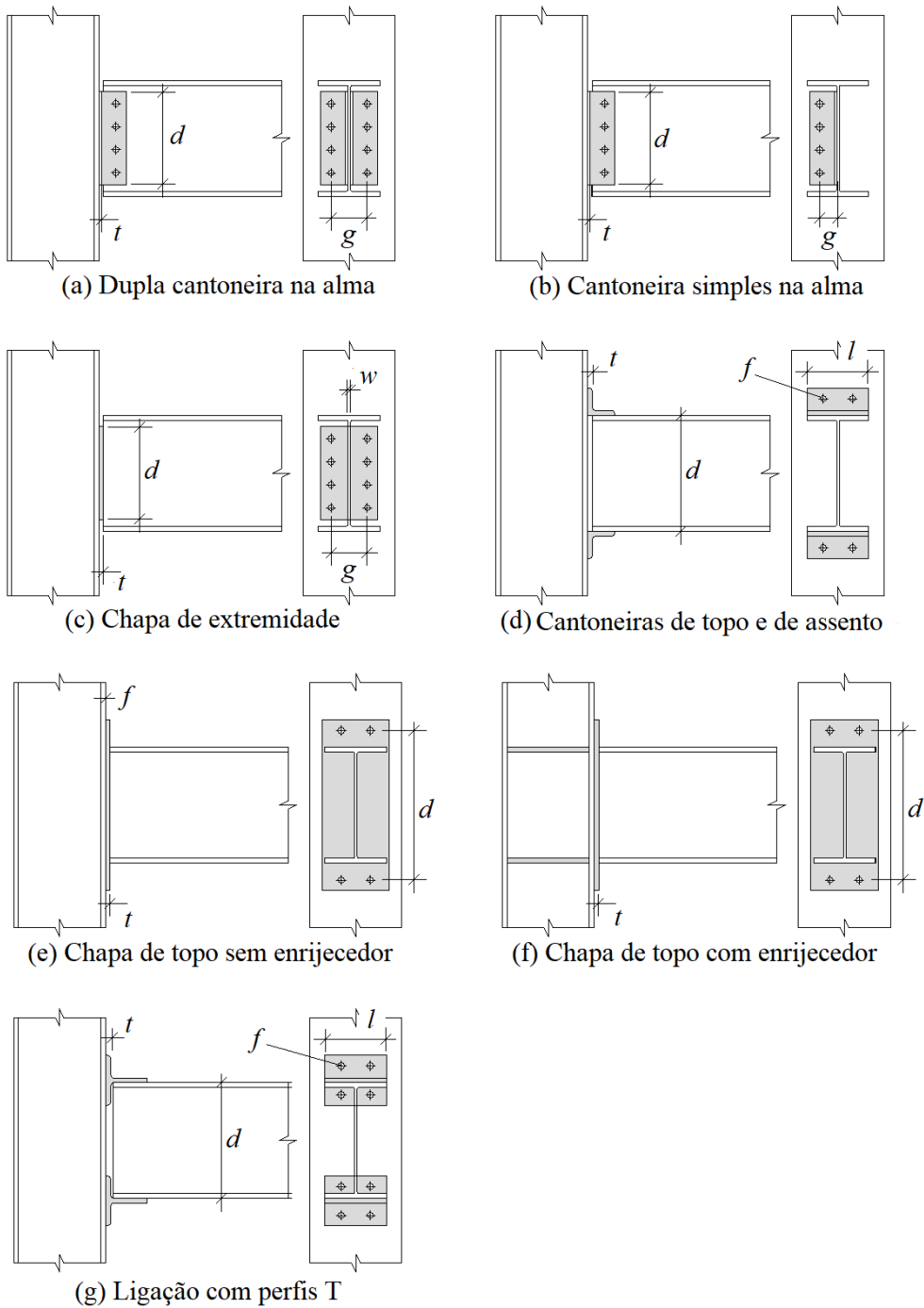
K é o fator adimensional de padronização;

M é o momento atuante na ligação, em *kip·in*.

Este modelo estima a rotação relativa de sete tipos de ligações comumente usadas em projetos, apresentados na Figura 3.3, cujos dados foram coletados a partir de experimentos conduzidos no período de 1934 a 1970.

O fator adimensional de padronização do momento é calculado de acordo com as equações contidas no Quadro 3.1, em termos dos parâmetros dimensionais, em polegadas (*in*), que também apresenta os respectivos valores dos coeficientes de ajuste do polinômio.

Figura 3.3 – Parâmetros dimensionais do modelo de Frye e Morris (1975)



Fonte: Adaptado de Frye e Morris (1975).

Quadro 3.1 – Coeficientes de ajuste e fatores de padronização do modelo de Frye e Morris (1975)

Tipo de ligação	Coeficientes de ajuste	Fator de padronização	
a)	$C_1 = 3,66 \cdot 10^{-4}$ $C_2 = 1,15 \cdot 10^{-6}$ $C_3 = 4,57 \cdot 10^{-8}$	$K = d^{-2,4} t^{-1,81} g^{0,15}$	(3.8)
b)	$C_1 = 4,28 \cdot 10^{-3}$ $C_2 = 1,45 \cdot 10^{-9}$ $C_3 = 1,51 \cdot 10^{-16}$	$K = d^{-2,4} t^{-1,81} g^{0,15}$	(3.9)
c)	$C_1 = 5,1 \cdot 10^{-5}$ $C_2 = 6,2 \cdot 10^{-10}$ $C_3 = 2,4 \cdot 10^{-13}$	$K = t^{-1,6} g^{1,6} d^{-2,3} w^{0,5}$	(3.10)
d)	$C_1 = 8,46 \cdot 10^{-4}$ $C_2 = 1,01 \cdot 10^{-4}$ $C_3 = 1,24 \cdot 10^{-8}$	$K = t^{-0,5} d^{-1,5} f^{-1,1} l^{-0,7}$	(3.11)
e)	$C_1 = 1,83 \cdot 10^{-3}$ $C_2 = -1,04 \cdot 10^{-4}$ $C_3 = 6,38 \cdot 10^{-6}$	$K = d^{-2,4} t^{-0,4} f^{1,1}$	(3.12)
f)	$C_1 = 1,79 \cdot 10^{-3}$ $C_2 = 1,76 \cdot 10^{-4}$ $C_3 = 2,04 \cdot 10^{-4}$	$K = d^{-2,4} t^{-0,6}$	(3.13)
g)	$C_1 = 2,10 \cdot 10^{-4}$ $C_2 = 6,2 \cdot 10^{-6}$ $C_3 = -7,6 \cdot 10^{-9}$	$K = d^{-1,5} t^{-0,5} f^{-1,1} l^{-0,7}$	(3.14)

Fonte: Frye e Morris (1975).

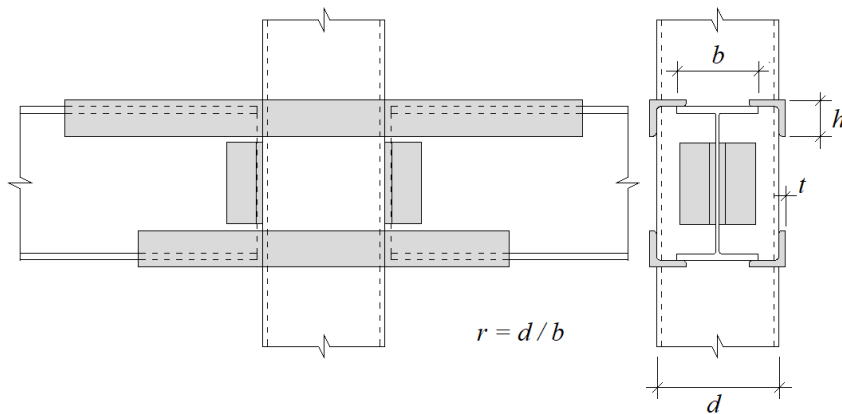
Tal método pressupõe que o sistema estrutural é carregado apenas por cargas estáticas, concentradas ou uniformemente distribuídas, o material é elástico-linear e as deflexões são suficientemente pequenas para não afetar significativamente a geometria, que se comporta de forma linear, exceto pelas características não lineares das ligações.

Ao mesmo tempo, os possíveis efeitos devidos ao cisalhamento e à carga axial na ligação são ignorados, do mesmo modo que o aumento da dureza devido à deformação plástica do material é negligenciado.

O modelo polinomial proposto por Frye e Morris (1975) é um dos mais conhecidos no meio acadêmico, sendo amplamente referenciado em estudos sobre ligações semirrígidas, fato que pode ser atribuído à sua simplicidade.

Seguindo os mesmos procedimentos apresentados por Frye e Morris (1975), Picard, Giroux e Brun (1976) desenvolveram uma equação capaz de descrever o comportamento da curva momento-rotação de ligações entre viga em formato de I e coluna tubular quadrada, executadas em forma de alça com quatro cantoneiras externas fixas nas mesas da viga e outras duas à alma, cujos parâmetros dimensionais considerados são mostrados na a Figura 3.4.

Figura 3.4 – Parâmetros dimensionais do modelo de Picard, Giroux e Brun (1976)



Fonte: Adaptado de Picard, Giroux e Brun (1976).

A rotação relativa, em função do momento padronizado, e o respectivo fator de padronização são dadas pelas Equações 3.15 e 3.16, respectivamente.

$$\theta = 1,04 \cdot 10^{-5}(K \cdot M) - 1,62 \cdot 10^{-11}(K \cdot M)^3 + 4,62 \cdot 10^{-16}(K \cdot M)^5, \quad (3.15)$$

$$K = h^{0,9553} t^{-0,7338} r^{-1,051}, \quad (3.16)$$

nas quais:

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

K é o fator adimensional de padronização;

M é o momento atuante na ligação, em *kip·in*;

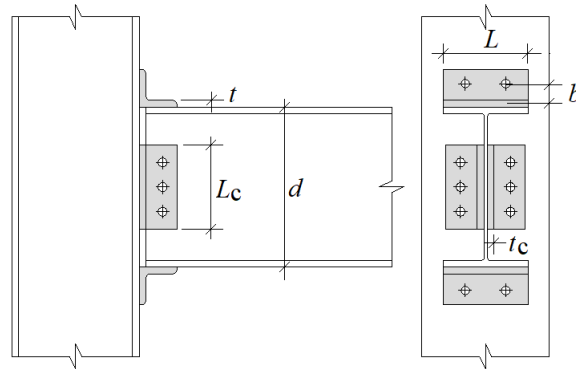
h é a dimensão da aba vertical das cantoneiras, em *in*;

t é a respectiva espessura da aba das cantoneiras, em *in*;

$r = d/b$, que é a relação entre a largura da coluna e a largura da viga.

Altman Jr. *et al.* (1982), a partir da metodologia proposta por Somner (1969), desenvolveram um modelo empírico para descrever a curva momento-rotação de ligações parafusadas compostas por cantoneiras de topo e de assento com dupla cantoneira de alma, tal como mostra a Figura 3.5.

Figura 3.5 – Parâmetros dimensionais do modelo de Altman *et al.* (1982)



Fonte: Adaptado de Altman *et al.* (1982).

Tal modelo propõe o mesmo formato polinomial apresentado por Frye e Morris (1975), tendo como coeficientes de ajuste os valores apresentados na Equação 3.17.

$$\theta = 2,232 \cdot 10^{-2}(K \cdot M) + 1,851 \cdot 10^{-5}(K \cdot M)^3 + 3,189 \cdot 10^{-9}(K \cdot M)^5, \quad (3.17)$$

na qual:

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

K é o fator adimensional de padronização;

M é o momento atuante na ligação, em *kip·in*.

Do mesmo modo, o fator de padronização do momento tem seus expoentes apresentados pela Equação 3.18, a partir dos parâmetros dimensionais da figura anterior.

$$K = t^{-1,1281} d^{-1,287} t_c^{-0,4145} L^{-0,6941} (b + t/2)^{1,3499}, \quad (3.18)$$

na qual:

t é a espessura das abas das cantoneiras, em *in*;

d é a altura da viga, em *in*;

t_c é a espessura das abas das cantoneiras da alma em *in*;

L é o comprimento das cantoneiras, em *in*;

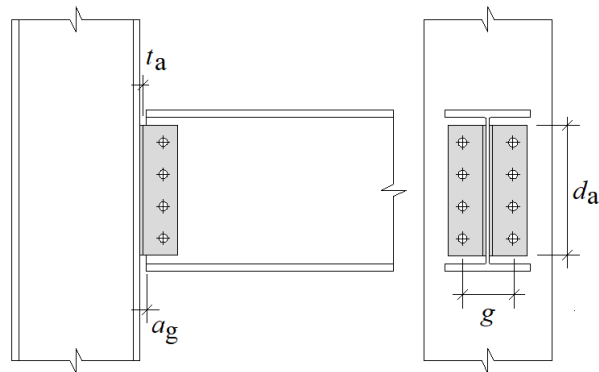
$b + t/2$ é a distância da borda do furo da cantoneira até a viga, em *in*.

O parâmetro dimensional L_c , que corresponde ao comprimento das cantoneiras da alma, não foi incluído, uma vez que os dados dos testes indicaram pouco efeito sobre o comportamento da ligação. No entanto, os autores sugerem uma relação L_c/d entre 0,6 e 0,75.

Em um outro estudo, Prabha *et al.* (2015) propuseram modificar o modelo polinomial de Frye e Morris (1975) para ligações parafusadas entre viga e coluna executadas com dupla cantoneira de alma, incorporando um novo parâmetro dimensional para cálculo do fator de padronização do momento.

Para os autores da proposta, este novo parâmetro mostrado na Figura 3.6, que corresponde à distância entre a extremidade da viga e a face externa da mesa da coluna (a_g - *air gap*), tem considerável influência no comportamento da ligação.

Figura 3.6 – Parâmetros dimensionais do modelo de Prabha *et al.* (2015)



Fonte: Autor.

Frente ao exposto, a proposta de modelo polinomial de Prabha *et al.* (2015), assume o formato expresso pelas Equações 3.19 e 3.20.

$$\theta = 75,043(K \cdot M) - 1,583 \cdot 10^3(K \cdot M)^3 + 9,816 \cdot 10^4(K \cdot M)^5, \quad (3.19)$$

$$K = d_a^{-1,55} t_a^{-1,14} g^{0,81} a_g^{0,39}, \quad (3.20)$$

nas quais:

θ é a rotação relativa entre a viga e a coluna, em graus;

M é o momento fletor atuante na ligação, em kN·m;

K é o fator adimensional de padronização;

d_a é o comprimento da cantoneira, em mm;

t_a é a espessura da aba das cantoneiras, em mm;

g é a distância entre parafusos na mesa da coluna, em mm;

a_g é a distância entre a extremidade da viga e a mesa da coluna, em mm.

Para Jones, Kirby e Nethercot (1982, 1983), os métodos de ajuste de curva com polinômios podem descrever a relação momento-rotação de maneira insatisfatória, entretanto, uma representação mais precisa do comportamento da ligação pode ser alcançado usando técnicas de ajuste de curva *B-spline* cúbica. Esta metodologia requer a divisão do intervalo dos dados de rotações da ligação em um número finito de intervalos menores, então, dentro de cada um, uma função cúbica é ajustada, de modo que a continuidade da primeira e da segunda derivada entre os intervalos seja mantida.

Wu e Chen (1990), entre outros, citam que os modelos polinomiais apresentam a possibilidade da primeira derivada da função, que indica a rigidez da ligação, ser negativa para alguns valores de momento, o que não condiz com a realidade. Isso pode causar inconsistências numéricas durante o processo de análise estrutural, quando a rigidez da ligação for considerada e é atribuído à natureza das funções polinomiais, uma vez que em um mesmo intervalo de dados podem haver trechos ascendentes e descendentes, além da possibilidade de valores negativos para a função, sobretudo em polinômios completos e de maior grau.

3.1.3 Modelos de potência

Os modelos que empregam expressões matemáticas de potências foram desenvolvidos e aprimorados por vários pesquisadores, sendo referenciado pela literatura o estudo de Batho e Lash (1936) como precursor.

Krishnamurthy *et al.* (1979) desenvolveram uma metodologia para a representação de curvas momento-rotação em ligações entre viga e coluna com chapa de topo parafusada, com base em resultados de ligações analisadas pelo Método dos Elementos Finitos. A partir dos resultados obtidos, uma função de potências de dois parâmetros foi gerada para fornecer a rotação da ligação em termos das suas dimensões, como expressa a Equação 3.21.

$$\theta = a \cdot M^b, \quad (3.21)$$

na qual:

θ é a deformação rotacional da ligação;

M é o momento atuante na ligação;

a e b são os parâmetros de ajuste da curva, na condição que $a > 0$ e $b > 1$.

A literatura relata que os resultados obtidos por este modelo preditor apresentaram um comportamento satisfatório apenas no trecho inicial da curva, além de que a rigidez inicial não é obtida a partir da primeira derivada da equação anterior, a menos que o valor de b seja imposto como unitário, tornando-a linear.

Kukreti, Murray e Abolmaali (1987) apresentaram uma metodologia, baseada na modelagem numérica pelo Método dos Elementos Finitos, para descrever analiticamente a relação momento-rotação de uma ligação com chapa de topo nivelada. Testes experimentais de alguns espécimes selecionados foram conduzidos para validar o modelo numérico para conduzir um estudo paramétrico afim de determinar o efeito das variáveis geométricas, cujos dados foram usados para desenvolver a Equação 3.22.

$$\theta = C \cdot M^\beta, \quad (3.22)$$

na qual:

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

M é o momento atuante na ligação, em *kip·ft*;

$\beta = 1,356$, para ligações com chapa de topo nivelada;

C é um coeficiente expresso em termos dimensionais das variáveis independentes associadas à geometria da ligação, tal como expressa a Equação 3.23.

$$C = (359 \cdot 10^{-6}) p_f^{2,227} h^{-2,616} t_w^{-0,501} t_f^{-0,038} d_b^{-0,849} g_b^{-0,519} b_p^{-0,218} t_p^{-1,539}, \quad (3.23)$$

na qual:

p_f é a distância do topo da viga até o centro dos parafusos;

h é a altura da viga;

t_w é a espessura da alma da viga;

t_f é a espessura da mesa da viga;
 d_b é o diâmetro nominal do parafuso;
 g_b é a largura da área retangular equivalente dos parafusos;
 b_p é a largura da chapa de topo;
 t_p é a espessura da chapa de topo, todas em *in*.

A função para descrever a relação não linear entre tensão e deformação de materiais elasto-plásticos proposta por Ramberg e Osgood (1943), quando aplicada à curva momento-rotação de ligações, é capaz de prever seu comportamento em termos do momento fletor, tal como expressa a Equação 3.24.

$$\theta = \frac{M}{S_i} \left[1 + K \left(\frac{M}{S_i} \right)^{n-1} \right], \quad (3.24)$$

na qual:

θ é a deformação rotacional da ligação;
 M é o momento atuante na ligação;
 K e n são parâmetros de ajuste da curva;
 S_i é a inclinação inicial da curva que corresponde à rigidez inicial da ligação, dada por:

$$S_i = \frac{M_0}{\theta_0}, \quad (3.25)$$

na qual:

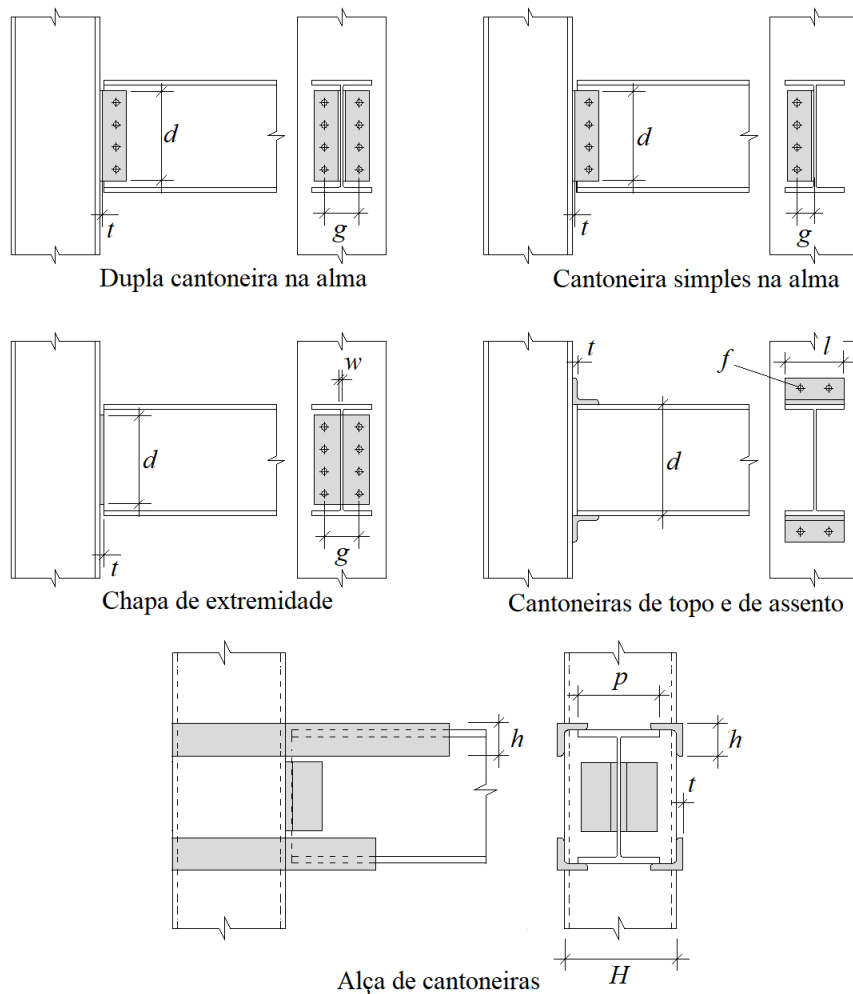
M_0 é o momento de referência;
 θ_0 é a respectiva rotação de referência.

A Equação 3.24, quando expressa de forma adimensional, assume o formato apresentado pela Equação 3.26.

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{M}{M_0} \left[1 + \left(\frac{M}{M_0} \right)^{n-1} \right]. \quad (3.26)$$

A partir da equação anterior e de dados coletados de experimentos conduzidos entre 1934 e 1976, Ang e Morris (1984) propuseram um modelo, expresso pela Equação 3.27, para descrever a relação momento-rotação padronizada de cinco tipos usuais de ligações entre viga e coluna, cujos parâmetros dimensionais são mostrados na Figura 3.7.

Figura 3.7 – Parâmetros dimensionais do modelo de Ang e Morris (1984)



Fonte: Adaptado de Ang e Morris (1984).

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{K \cdot M}{(KM)_0} \left[1 + \left(\frac{K \cdot M}{(KM)_0} \right)^{n-1} \right], \quad (3.27)$$

na qual:

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

K é o fator adimensional de padronização, apresentado no Quadro 3.2;

M é o momento atuante na ligação, em *kip·in*;

θ_0 , $(KM)_0$ e n são parâmetros de ajuste da curva, apresentados no Quadro 3.2.

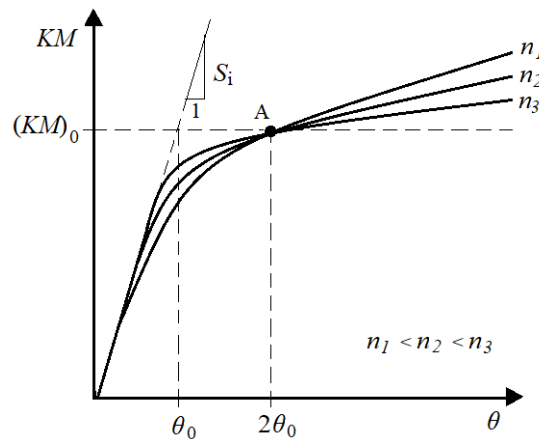
Quadro 3.2 – Parâmetros de ajuste e fatores de padronização do modelo de Ang e Morris (1984)

Tipo de ligação	Parâmetros de ajuste	Fator de padronização	
Dupla cantoneira na alma	$\theta_0 = 3,98 \cdot 10^{-3}$ $(KM)_0 = 0,63$ $n = 4,94$	$K = d^{-2,2} t^{0,08} g^{-0,28}$	(3.28)
Cantoneira simples na alma	$\theta_0 = 1,03 \cdot 10^{-2}$ $(KM)_0 = 32,75$ $n = 3,93$	$K = d^{-2,09} t^{-1,64} g^{2,06}$	(3.29)
Chapa de extremidade	$\theta_0 = 7,04 \cdot 10^{-3}$ $(KM)_0 = 186,77$ $n = 4,32$	$K = d^{-2,41} t^{-1,54} g^{2,12} w^{-0,45}$	(3.30)
Cantoneiras de topo e de assento	$\theta_0 = 5,17 \cdot 10^{-3}$ $(KM)_0 = 745,94$ $n = 5,61$	$K = d^{-1,06} t^{-0,54} l^{0,85} f^{-1,28}$	(3.31)
Alça de cantoneiras	$\theta_0 = 4,58 \cdot 10^{-5}$ $(KM)_0 = 753,26$ $n = 5,98$	$K = h^{-0,059} t^{-0,85} (H/p)^{-1,06}$	(3.32)

Fonte: Ang e Morris (1984).

Os parâmetros θ_0 e $(KM)_0$ definem a posição do ponto A, através do qual passa uma família de curvas da função de Ramberg e Osgood (1943), como mostra a Figura 3.8, enquanto o parâmetro n define o formato da curva.

Figura 3.8 – Curvas típicas do modelo de Ang e Morris



Fonte: Adaptado de Ang e Morris (1984).

Richard e Abbott (1975) apresentaram uma função de potência de quatro parâmetros para descrever o comportamento elástico-plástico de materiais, que posteriormente foi usado para representar a relação não linear entre momento e rotação de ligações, como expressa a Equação 3.33.

$$M = \frac{(S_i - S_p)\theta}{\left[1 + \left|\frac{(S_i - S_p)\theta}{M_0}\right|^n\right]^{1/n}} + S_p \cdot \theta, \quad (3.33)$$

na qual:

M é o momento atuante na ligação;

θ é a deformação rotacional da ligação;

S_i é a rigidez inicial da ligação;

S_p é a rigidez plástica da ligação;

M_0 é o momento de referência;

n é o parâmetro de ajuste da curva.

Kishi *et al.* (1987a, 1987b), com base na função proposta por Richard e Abbott (1975), propuseram um modelo de potência de três parâmetros para descrever o comportamento de ligações parafusadas com cantoneiras de topo e de assento com dupla cantoneira de alma, assumindo que o valor da rigidez plástica do modelo original seja nulo e o momento de referência pode ser tomado como o momento final ou de plastificação da ligação, tornando o modelo expresso pelas Equações 3.34 e 3.35.

$$M = \frac{S_i \cdot \theta}{\left[1 + \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^n\right]^{1/n}}, \quad (3.34)$$

ou

$$\theta = \frac{M}{S_i \left[1 - \left(\frac{M}{M_u}\right)^n\right]^{1/n}}, \quad (3.35)$$

nas quais:

M é o momento atuante na ligação, em $kip\cdot in$;

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

S_i é a rigidez inicial da ligação, em $kip\cdot in/rad$;

M_u é o momento final ou de plastificação da ligação, em $kip\cdot in$;

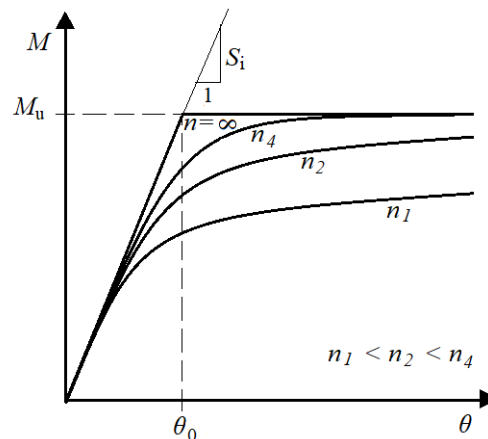
n é o parâmetro de ajuste da curva;

θ_0 é a rotação plástica de referência, em radianos, definida por:

$$\theta_0 = \frac{M_u}{S_i}. \quad (3.36)$$

A Figura 3.9 apresenta o formato característico das curvas do modelo proposto, onde se pode observar que quanto maior é o parâmetro de ajuste n , mais íngreme é a curva.

Figura 3.9 – Característica das curvas do modelo de Kishi *et al* (1987a, 1987b).



Fonte: Adaptado de Kishi e Chen (1990).

Abolmaali *et al.* (2005) desenvolveram equações de predição para os parâmetros independentes M_0 , θ_0 e n , da Equação 3.26, respectivos ao modelo de Ramberg e Osgood (1943), e M_u , θ_0 , e n , das Equações 3.34 e 3.35, respectivos ao modelo de potência de três parâmetros de Kishi *et al.* (1987a, 1987b), para ligações parafusadas entre viga e coluna com chapa de topo nivelada. Para tanto, um modelo de ligação com chapa de topo nivelada foi analisado pelo Método dos Elementos Finitos e os resultados verificados através de dados de testes apresentados na literatura. A partir de análises de regressão, os dados relativos à relação momento-rotação da ligação foram ajustados às curvas respectivas de ambos os modelos para obter os parâmetros que definem as equações desenvolvidas.

Attigbe e Morris (1991) demonstraram que a função de Richard e Abbott (1975) quando usada na forma adimensional fornece resultados comparáveis aos obtidos pelo método da curva *B-spline* cúbica, adquirindo maior precisão que os ajustes realizados com o emprego da função de Ramberg e Osgood (1943) para os tipos mais comuns de ligações.

Com o pressuposto que os valores de M_1 e θ_1 , correspondem às coordenadas do ponto final da curva momento-rotação da ligação, sua rigidez plástica pode ser determinada conforme a Equação 3.37.

$$S_p = \frac{M_1 - M_0}{\theta_1}. \quad (3.37)$$

Logo, substituindo as Equações 3.25 e 3.37 na Equação 3.33, a forma adimensional da função de Richard e Abbott (1975) é obtida, tal como apresentada por Onuah (1988) e expressa pela Equação 3.38.

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\theta}{\theta_0} \left[\frac{(1 - S_p \frac{\theta_0}{M_0})}{\left(1 + \left| \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{S_p}{M_0} \right) \theta \right|^n \right)^{1/n}} + S_p \frac{\theta_0}{M_0} \right]. \quad (3.38)$$

Este procedimento para expressar o comportamento de ligações parafusadas entre viga e coluna com dupla cantoneira de alma está baseado no estudo realizado por Onuah (1988), o qual apresenta as equações para determinar os parâmetros θ_0 , M_0 , S_p e n da função adimensional de Richard e Abbott (1975), como expressam as Equações 3.39 a 3.42, padronizadas em termos de parâmetros dimensionais apresentados na Figura 3.10.

$$\theta_0 = (t^{0,595} g^{-2,817} L^{4,737} d^{-0,784} b^{-5,957}) \cdot 10^{-3}, \quad (3.39)$$

$$M_0 = t^{1,136} g^{-1,515} L^{1,139} d^{0,258} b^{0,309}, \quad (3.40)$$

$$S_p = (t^{0,955} g^{2,044} L^{-4,445} d^{0,327} b^{7,555}) \cdot 10^3, \quad (3.41)$$

$$n = t^{0,522} g^{1,564} L^{-1,073} d^{-0,737} b^{1,704}, \quad (3.42)$$

nas quais:

M é o momento atuante na ligação, $\text{kN}\cdot\text{m}$;

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

θ_0 é a rotação de referência, em radianos;

M_0 é o momento de referência, em $\text{kN}\cdot\text{m}$;

S_p é a rigidez plástica da ligação, $\text{kN}\cdot\text{m}/\text{rad}$;

n é o parâmetro de ajuste da curva;

t é a espessura da aba das cantoneiras, em mm ;

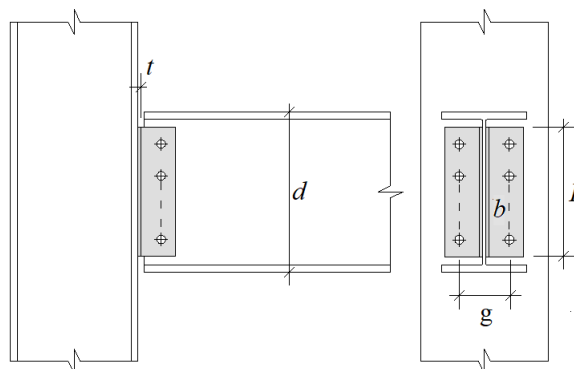
g é a distância entre parafusos na mesa da coluna, em mm ;

L é o comprimento da cantoneira, em mm ;

d é a altura da viga, em mm ;

b é o número de parafusos por aba da cantoneira.

Figura 3.10 – Parâmetros dimensionais da função de Richard e Abbott (1975)



Fonte: Adaptado de Onuah (1988).

Por fim, um modelo em formato de potência com três parâmetros, expressa pela Equação 3.43, é apresentado por Colson e Louveau (1983).

$$\theta = \frac{|M|}{S_i} \frac{1}{\left(1 - \left|\frac{M}{M_u}\right|^n\right)}, \quad (3.43)$$

na qual:

θ é a deformação rotacional da ligação;

M é o momento atuante na ligação;

S_i é a rigidez inicial da ligação;

M_u é o momento final da ligação;
 n é o parâmetro de ajuste da curva.

3.1.4 Modelos exponenciais

Uma formulação exponencial para descrever a relação momento-rotação de ligações entre viga e coluna com chapa de topo estendida foi proposta por Yee e Melchers (1986), levando em consideração os possíveis modos de falha e as características de deformação dos componentes da ligação. O modelo proposto e expresso pela Equação 3.44, possui quatro parâmetros, sendo três diretamente ligados ao comportamento da ligação e um fator de forma determinado empiricamente a partir dos dados experimentais.

$$M = M_p \left\{ 1 - \exp \left[\frac{-(S_i - S_p + C \cdot \theta)\theta}{M_p} \right] \right\} S_p \cdot \theta, \quad (3.44)$$

na qual:

M é o momento atuante na ligação, em *kip·in*;
 M_p é o momento de plastificação da ligação, em *kip·in*;
 θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;
 S_i é a rigidez inicial da ligação, em *kip·in/rad*;
 S_p é a rigidez de plastificação da ligação, em *kip·in/rad*;
 C é um fator de forma.

No estudo de Lui e Chen (1986), a relação não linear entre momento e rotação de ligações é modelada por uma função exponencial multiparâmetro, tal como expressa a Equação 3.45.

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^n C_j \left[1 - \exp \left(-\frac{|\theta|}{2 \cdot j \cdot \alpha} \right) \right] + S_p |\theta|, \quad (3.45)$$

na qual:

M é o momento atuante na ligação, em *kip·in*;
 θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;
 M_0 é o valor do momento inicial da ligação, em *kip·in*;

$|\theta|$ é o valor absoluto da deformação rotacional da ligação, em radianos;
 α é um fator de escala;
 S_p é a rigidez plástica da ligação, em *kip·in/rad*;
 C_j são constantes de ajuste da parte exponencial da curva.

Para Lui e Chen (1987), o número de parâmetros necessário é $3 + n$, sendo n o número de constantes de ajuste da curva, de modo que $n = 4$ a 6 é suficiente para a maioria dos casos.

O modelo de Lui e Chen (1986) foi aprimorado por Kishi e Chen (1986) para acomodar partes lineares ou mudanças súbitas na inclinação da curva momento-rotação de dados experimentais, referenciado a partir de então como modelo exponencial modificado, representado pela Equação 3.46.

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^n C_j \left[1 - \exp\left(-\frac{|\theta|}{2 \cdot j \cdot \alpha}\right) \right] + \sum_{k=1}^m D_k (|\theta| - |\theta_k|) H[|\theta| - |\theta_k|], \quad (3.46)$$

na qual:

D_k são constantes de ajuste da parte linear da curva;
 θ_k é a rotação inicial da k -ésimo componente linear da curva;
 $H[\theta]$ é a função de Heaviside, sendo 1 para $\theta \geq 0$ e 0 para $\theta < 0$.

Para Chen, Kishi e Komuro (2011), o modelo exponencial modificado apresenta uma formulação relativamente simples e direta. As constantes C_j e D_k , correspondentes aos termos exponenciais e lineares da função, respectivamente, são determinadas por regressão linear a partir de dados experimentais. A rigidez da ligação, para uma rotação qualquer, pode ser determinada diferenciando a equação anterior em relação a θ .

Para Chisala (1999), as curvas momento-rotação de ligações entre viga e coluna são caracterizadas por uma região elástica inicial, uma região plástica dominada por grandes rotações e uma região de transição definida pelas propriedades elasto-plásticas dos materiais que compõe a ligação.

Neste sentido, um modelo exponencial de três parâmetros, expresso pela Equação 3.47, é proposto para relacionar estas regiões e descrever a relação momento-rotação de ligações parafusadas entre viga e coluna com dupla cantoneira de alma, com cantoneira simples de alma,

com cantoneiras de topo e de assento e com cantoneiras de topo e de assento com dupla cantoneira de alma.

$$M = (M_0 + S_p \cdot \theta) \left[1 - \exp\left(-\frac{S_i \cdot \theta}{M_0}\right) \right], \quad (3.47)$$

na qual:

M é o momento atuante na ligação, em kN·m;

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

M_0 é o parâmetro de interceptação, em kN·m;

S_i é a rigidez inicial elástica da ligação, em kN·m/rad;

S_p é a rigidez plástica da ligação, em kN·m/rad.

Os parâmetros do modelo são gerados a partir das dimensões da ligação e das propriedades do material, por meio de expressões analíticas para avaliar S_i e S_p , e por uma expressão empírica para avaliar o parâmetro M_0 .

Mohamadi-Shoore e Mofid (2011) consideraram o modelo de Chisala (1999) para propor um novo modelo exponencial de cinco parâmetros, capaz de representar a relação momento-rotação de ligações entre viga e coluna com chapa de topo estendida, levando em consideração os possíveis modos de falha e as características de deformação da ligação, tal como expressa a Equação 3.48.

$$M = \alpha \cdot S_p \cdot \theta + [M_0 + (1 - \alpha)S_p \cdot \theta] \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(S_i - \alpha \cdot S_p)(1 + \beta \cdot \theta)\theta}{M_0}\right] \right\}, \quad (3.48)$$

na qual:

M é o momento atuante na ligação, em kN·m;

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

M_0 é o parâmetro de interceptação, em kN·m;

S_i é o parâmetro de rigidez inicial elástica da ligação, em kN·m/rad;

S_p é o parâmetro de rigidez plástica da ligação, em kN·m/rad;

α e β são os parâmetros de ajuste da curva.

Na equação anterior, os parâmetros M_0 , S_i e S_p são definidos conforme proposto no modelo de Chisala (1999), enquanto os parâmetros de ajuste da curva α e β são obtidos a partir de dados experimentais.

3.1.5 Modelos logarítmicos

Wu e Chen (1990) propuseram um modelo de três parâmetros para descrever a curva momento-rotação de ligações parafusadas executadas com cantoneiras de topo e de assento com dupla cantoneira de alma, expresso em formato de logaritmo natural, tal como apresenta a Equação 3.49.

$$\frac{M}{M_u} = n \cdot \ln \left(1 + \frac{\theta}{n \cdot \theta_0} \right), \quad (3.49)$$

na qual:

M é o momento atuante na ligação, em *kip·in*;

M_u é o momento resistente idealizado do mecanismo da ligação, em *kip·in*;

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

θ_0 é a rotação de referência, dada pela relação entre M_u e S_i ;

S_i é a rigidez inicial da ligação, em *kip·in/rad*;

n é um parâmetro de ajuste da curva.

Neste modelo, a rigidez inicial e o momento resistente idealizado do mecanismo da ligação são definidos por uma análise elástica e plástica, respectivamente, enquanto o parâmetro de forma n é um parâmetro de ajuste de curva, determinado de forma empírica a partir de dados experimentais.

Lee e Moon (2002) apresentaram um modelo preditor em formato logarítmico de dois parâmetros, para descrever a relação momento-rotação de ligações semirrígidas com dupla cantoneira de alma e ligações parafusadas com cantoneiras de topo e de assento, como expressa a Equação 3.50.

$$M = \alpha [\ln(n \cdot 10^3 \cdot \theta + 1)]^n, \quad (3.50)$$

na qual:

M é o momento atuante na ligação, em kN·m;

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

α e n são parâmetros de forma da curva.

Segundo os autores, o parâmetro de forma α tem efeito sobre a rigidez inicial e o momento final da ligação, enquanto que o parâmetro de forma n governa a forma da curva e ambos são determinados a partir de uma análise de regressão de dados pelo Método dos Mínimos Quadrados, em que os valores ótimos de α e n são expressos em função da rigidez inicial e da rigidez plástica da ligação, que por sua vez são determinadas por equações analíticas.

3.1.6 Modelo de função trigonométrica

Um modelo de três parâmetros que utiliza a função inversa da tangente, apresentado pelas Equação 3.51 e 3.52, foi proposto por Soleimani e Behnamfar (2017) para descrever a relação momento-rotação não linear de ligações soldadas entre viga e coluna em aço.

$$M = \frac{S_i - S_p}{2} \left[\frac{1}{\beta} \tan^{-1} (\beta \cdot \theta) + \frac{\theta}{1 + \beta^2 \cdot \theta^2} \right] + S_p \cdot \theta, \quad (3.51)$$

sendo:

$$\beta = \frac{(S_i - S_p)\pi}{M_0}, \quad (3.52)$$

nas quais:

M é o momento atuante na ligação, em kN·m;

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

S_i é a rigidez inicial, em kN·m/rad;

S_p é a rigidez plástica da ligação, em kN·m/rad;

M_0 é o momento de referência, em kN·m.

Os valores dos três parâmetros do modelo são determinados analiticamente por funções em termos que afetam o comportamento das ligações estudadas, com base nos dados obtidos

numericamente pelo Método dos Elementos Finitos, cuja precisão da análise é verificada com resultados de testes disponíveis por outros estudos.

3.1.7 Modelo de função hiperbólica

Kong e Kim (2017) desenvolveram um modelo preditor para a relação momento-rotação para ligações parafusadas com cantoneira simples de alma. Foram estabelecidos dois tipos diferentes para a relação momento-rotação, definidos por um fator de modo de falha estabelecido a partir da análise numérica realizada pelo Método dos Elementos Finitos.

No tipo I, a rigidez rotacional é baixa e a capacidade de deformação da ligação é grande, de maneira que a falha ocorre por escoamento do material da cantoneira. Neste caso, um modelo de dois parâmetros baseado em uma função inversa do seno hiperbólico é proposto, tal como apresentado pela Equação 3.53.

$$M = \varepsilon \cdot \sinh^{-1}(\eta \cdot \theta), \quad (3.53)$$

na qual:

M é o momento atuante na ligação, em kN·m;

θ é a deformação rotacional da ligação, em radianos;

ε e η são parâmetros de forma da curva, cujos valores ótimos são determinados pelas Equações 3.54 e 3.55, respectivamente.

$$\varepsilon = 0,0009 \left[\frac{M_u}{(1 + \theta_r)^3} \right]^2 + 0,21 \frac{M_u}{(1 + \theta_r)^3} + 1,21 \quad (3.54)$$

$$\eta = 0,0018 \left[\frac{S_i(1 + \theta_r)^3}{M_u} \right]^2 + 4,04 \frac{S_i(1 + \theta_r)^3}{M_u} - 106,60 \quad (3.55)$$

nas quais:

M_u é o momento final, em kN·m;

θ_r é a capacidade de rotação, em radianos;

S_i é a rigidez inicial, em kN·m/rad.

No tipo II, a rigidez rotacional é alta e a ligação apresenta uma pequena capacidade de deformação, com falha ocorrendo por cisalhamento do parafuso ou rasgamento do furo da cantoneira. Neste caso, um modelo de função tangente hiperbólica de dois parâmetros é proposto, tal como apresentado pela Equação 3.56.

$$M = \varepsilon \cdot \tanh(\eta \cdot \theta), \quad (3.56)$$

na qual α e η são parâmetros de forma da curva determinados pelas Equações 3.57 e 3.58, respectivamente.

$$\varepsilon = M_u, \quad (3.57)$$

$$\eta = \frac{S_i}{M_u}, \quad (3.58)$$

nas quais:

S_i é a rigidez inicial, em kN·m/rad;

M_u é o momento final, em kN·m;

As propostas preditoras apresentadas até então não indicam haver um modelo hegemônico capaz de expressar com exatidão a relação momento-rotação da maioria das ligações usuais. Neste sentido, a abordagem do tema permite que novos modelos preditores possam ser propostos a partir de formatos matemáticos factíveis, aplicável a um ou mais tipos de ligações e que posteriormente possam ser aprimorados, visto a complexidade e amplitude do tema.

4 METODOLOGIA

A complexidade em prever o comportamento de ligações em sistemas estruturais em aço por meio de modelos matemáticos está atribuída, sobretudo, ao grande número de parâmetros físicos e geométricos passíveis de variação, além das incertezas associadas à formulação de hipóteses, o que faz multiplicar a demanda cognitiva por interpretações. Algumas das hipóteses formuladas podem ser consideradas supérfluas, da mesma forma que alguns parâmetros podem ser ignorados, visto sua insignificância no comportamento da ligação, simplificando assim as análises associadas ao modelo.

Mesmo que o conceito de simplicidade seja algo subjetivo e de difícil quantificação, a metodologia científica moderna sugere que modelos mais simples, compreensíveis e parcimoniosos sejam priorizados, em que variáveis ou eventos supérfluos possam ser ignorados, uma vez que pouco ou nada contribuem para a formulação de hipóteses ou para a compreensão de um fenômeno.

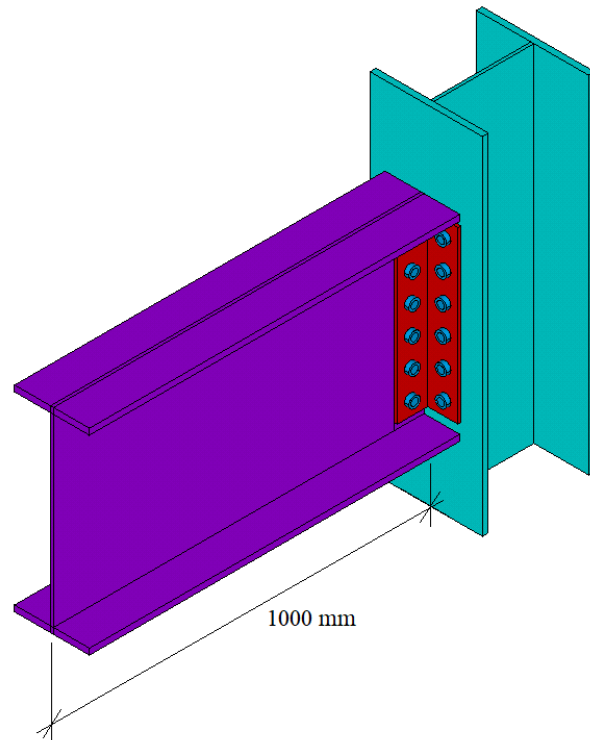
Em síntese, os métodos de pesquisa científica atuais sugerem modelos reducionistas, racionais e que as melhores hipóteses sejam, preferencialmente, simples e com parâmetros variáveis contribuintes, frente a hipóteses complexas e de difícil compreensão.

4.1 GEOMETRIA DA LIGAÇÃO

Diante do exposto, o escopo do estudo consiste na compreensão do comportamento de ligações entre viga e coluna em aço, constituídas por elementos em dupla cantoneira parafusadas à alma da viga e à face externa da mesa da coluna, por meio de parafusos de alta resistência, como ilustra a Figura 4.1.

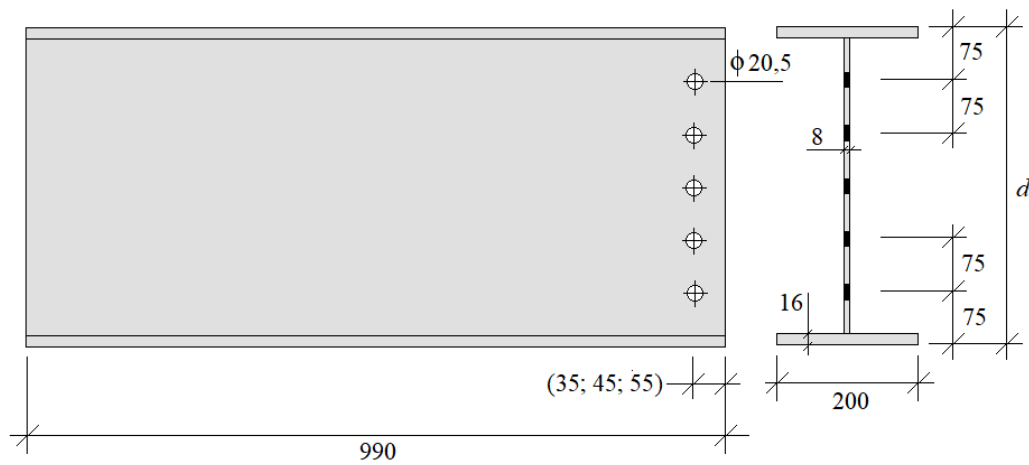
Para fins de análise numérica e possível validação experimental dos dados, as ligações analisadas possuem 1000 mm de comprimento, em balanço, a contar da face externa da mesa da coluna. Contudo, por se tratar de um sistema estrutural montado *in loco*, é previsto uma distância de afastamento de 10 mm entre a extremidade da viga e a mesa da coluna, o que resulta em vigas com 990 mm de comprimento efetivo, com furos distantes 35, 45 ou 55 mm da borda, de acordo com a largura da aba da cantoneira e seu gabarito de furação, tal como mostra a Figura 4.2.

Figura 4.1 – Geometria da ligação



Fonte: Autor.

Figura 4.2 – Geometria da viga, em milímetros



Fonte: Autor.

O perfil transversal das vigas se apresenta em formato de I, com nove alturas (d) que variam de 225 mm a 825 mm com incrementos de 75 mm, em função do número de parafusos dispostos na vertical. A espessura da alma (t_w) é fixa em 8 mm, do mesmo modo que todas as

mesas têm largura (b_f) e espessura (t_f) de 200 mm e 16 mm, respectivamente, como sintetiza a Tabela 4.1, na qual N representa o número de espaços entre parafusos.

Tabela 4.1 – Dimensões das vigas, em milímetros

N	d	b_f	t_w	t_f
1	225			
2	300			
3	375			
4	450			
5	525	200	8	16
6	600			
7	675			
8	750			
9	825			

Fonte: Autor.

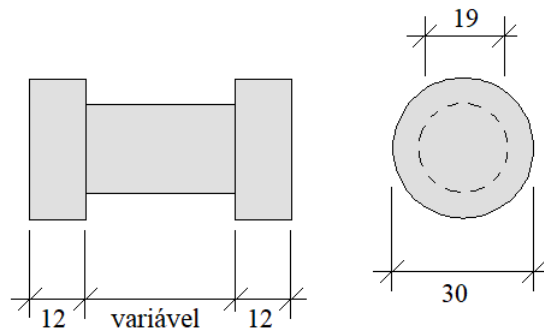
A viga descrita tem função única de transferir o efeito do carregamento aplicado em seu extremo livre à região da ligação. Mesmo com a altura da viga (d) sendo incremental a cada grupo, essa dimensão geométrica não representa uma variável de projeto.

Os parafusos considerados neste estudo possuem diâmetro nominal de 3/4 de polegada, considerados com 19 mm para fins de análise numérica. A escolha deste diâmetro único se dá por sua usualidade, além de ser um diâmetro intermediário entre os disponíveis no mercado, abrangendo também os parafusos com limitação de torque, tipo TC (*Tension Control*).

Essa definição faz com que a dimensão de cada furo padrão seja de 20,5 mm, já que a norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008) preconiza o acréscimo de 1,5 mm ao valor do diâmetro nominal do parafuso.

No processo de montagem das ligações é exigido o uso de arruelas sob a parte do parafuso que gira durante o aperto, enquanto que no outro extremo, imediatamente abaixo da cabeça sextavada (ou da porca) há uma superfície circular lisa, que efetivamente entra em contato com os constituintes da ligação. Segundo os fabricantes, para parafusos de 3/4 de polegada o diâmetro externo desta superfície se aproxima de 30 mm, valor adotado para simular a cabeça e também a respectiva porca, ambas com espessura de 12 mm, como mostra a Figura 4.3, cujo comprimento do corpo varia em função das espessuras das partes conectadas.

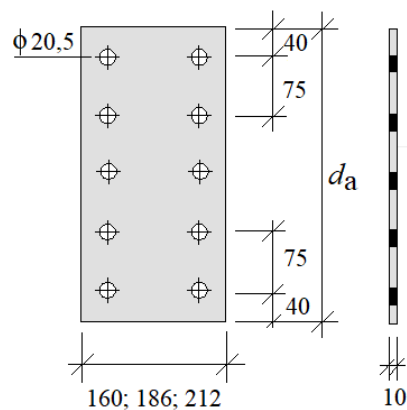
Figura 4.3 – Geometria do parafuso, em milímetros



Fonte: Autor.

A mesa da coluna, que tem função de apoio, é simulada por uma placa com espessura fixa de 10 mm, suficientemente rígida para que as deformações sejam muito pequenas e possam ser ignoradas, altura variável (d_a) e largura podendo assumir 160, 186 ou 212 mm, de acordo com a largura das abas das cantoneiras, como ilustra a Figura 4.4.

Figura 4.4 – Geometria da mesa da coluna, em milímetros



Fonte: Autor.

Alguns parâmetros passíveis de variação em projeto não foram considerados na formulação das hipóteses do comportamento da ligação, como exemplo, pode-se citar o diâmetro, o comprimento e o espaçamento dos parafusos, a possibilidade de deformações da viga e da coluna, o afastamento entre a extremidade da viga e a mesa da coluna da coluna.

4.2 PARÂMETROS VARIÁVEIS DE PROJETO

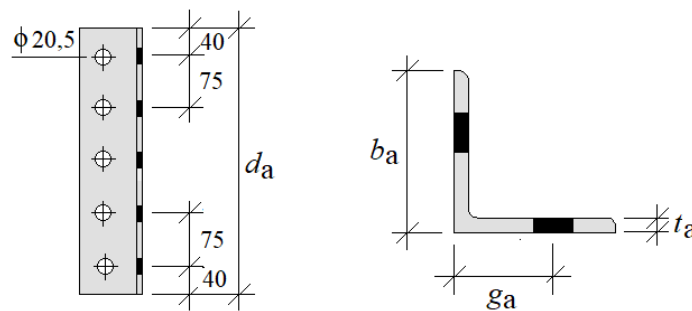
O par de cantoneiras de abas iguais, que constitui o elemento de ligação, exerce influência efetiva sobre o comportamento da mesma, sobretudo por sua deformação quando

solicitadas pela flexão. Diante da adoção de um conceito metodológico racional para a formulação de hipóteses, três parâmetros geométricos passíveis de alterações assumem o *status* de variáveis de projeto:

- a) a altura total das cantoneiras (d_a), cuja dimensão afeta o valor do momento de inércia da ligação e, conseqüentemente, sua rigidez;
- b) o gabarito de furação da cantoneira (g_a);
- c) a espessura da aba das cantoneiras (t_a), que junto ao parâmetro anterior, influenciam na rigidez da cantoneira à flexão, com influência na rigidez da ligação.

A Figura 4.5 apresenta a geometria básica, as dimensões fixas e os parâmetros variáveis de projeto das cantoneiras usadas como elemento de ligação nas análises.

Figura 4.5 – Geometria das cantoneiras e parâmetros variáveis de projeto, em milímetros



Fonte: Autor.

Em síntese, um valor menor do gabarito de furação (g_a), associado ao aumento da altura da cantoneira (d_a) e da respectiva espessura da aba (t_a), faz com que a rigidez das ligações com dupla cantoneira em aço aumente.

Como variáveis de projeto apresentadas na Tabela 4.2, a altura total das cantoneiras (d_a) tem seu valor alterado em função do número de parafusos da ligação, cujos espaços verticais entre si definem N . A distância (g_a) que representa o gabarito de furação varia de acordo com a largura da aba da cantoneira (b_a), atendendo aos padrões de projeto e de fabricação, enquanto a espessura das abas das cantoneiras (t_a) assume valores disponíveis no mercado.

O número de ligações a serem analisadas depende da combinação das variáveis de projeto. A existência de nove diferentes alturas para as ligações, com três possíveis larguras de abas das cantoneiras, que por sua vez podem assumir três diferentes espessuras, resulta em 81 ligações, geometricamente distintas.

Tabela 4.2 – Valores das variáveis de projeto, em milímetros

N	d_a	b_a	g_a	t_a
1	155			6,35
2	230	76x76	45	8,00
3	305			9,50
4	380			6,35
5	455	89x89	55	8,00
6	530			9,50
7	605			6,35
8	680	102x102	65	8,00
9	755			9,50

Fonte: Autor.

O posicionamento dos furos na ligação segue aos preceitos da norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008), a qual estabelece que a distância preferencial entre centros de furos seja três vezes o diâmetro do parafuso, não podendo ser inferior a 2,7 vezes.

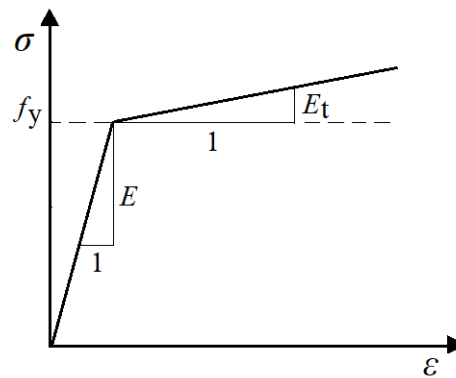
Da mesma forma, é estabelecido que a distância do centro de um furo a qualquer borda não pode ser inferior a 32 mm, no caso de o corte ser executado com serra ou tesoura, ou 26 mm, para bordas laminadas ou cortadas à maçarico.

4.3 MODELO CONSTITUTIVO DOS MATERIAIS

O modelo constitutivo dos materiais deve ser capaz de reproduzir da melhor maneira seu comportamento físico, de modo que os resultados obtidos pela análise numérica sejam confiáveis e o mais representativo possível da realidade.

O aço empregado em sistemas estruturais possui como característica um comportamento físico não linear. Esta não linearidade considera a ocorrência de plastificação do material após ultrapassar seu limite elástico e este comportamento pode ser descrito, de forma simplificada, por um diagrama tensão-deformação bilinear, como o mostrado na Figura 4.6. Neste diagrama, o primeiro segmento de reta, que começa na origem e termina no ponto correspondente à tensão de escoamento (f_y), representa a fase elástica do material cuja inclinação define o módulo de elasticidade longitudinal (E). O segundo segmento de reta representa a fase plástica do material e inclinação define o módulo tangente plástico (E_t).

Figura 4.6 – Diagrama tensão-deformação bilinear do aço



Fonte: Autor.

Os valores da tensão de escoamento (f_y) considerados nos modelos constitutivos dos materiais são apresentados na Tabela 4.3, enquanto o módulo de elasticidade longitudinal (E) e o coeficiente de Poisson (ν) seguem os valores prescritos pela norma ABNT NBR 8800 (2008), o que corresponde à 200 GPa e à 0,3, respectivamente.

Tabela 4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais, em MPa

	Aço	f_y
Viga	ASTM A572-G50	345
Cantoneiras	ASTM A36	250
Parafusos	ASTM A325	635

Fonte: Autor.

A escolha do tipo de aço estrutural empregado neste estudo se deve ao fato de que, como padrão no Brasil, as vigas em perfis laminados a quente são fornecidas em aço estrutural ASTM A572-G50 e os perfis soldados também podem ser fabricados com a mesma especificação. As cantoneiras de uso comum utilizam aço estrutural ASTM A36, do mesmo modo que os parafusos de alta resistência comumente usados seguem as prescrições da norma ASTM A325.

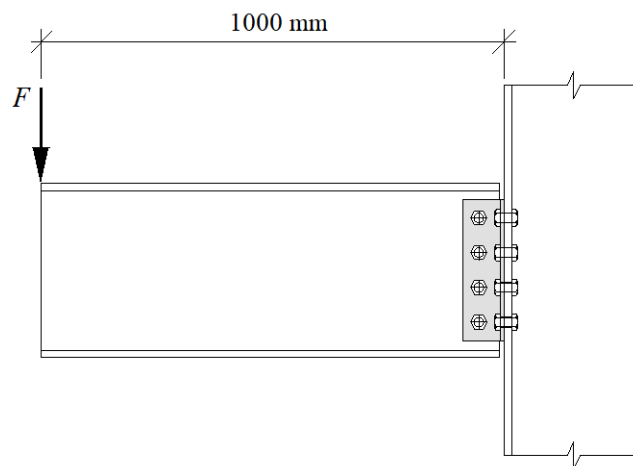
O módulo tangente plástico (E_t) tem seu valor aproximado em $E/100$, como preconizado pelo instrumento normativo Eurocode 3 EN 1993-1-5 (2006), o que corresponde a um valor de 2 GPa. Isso confirma os ensaios realizados por Ribeiro (1998), em que é possível verificar que a inclinação da curva tensão-deformação na fase de escoamento (E_t) se aproxima de 1/100 da inclinação da curva na fase elástica (E). A mesma relação foi adotada por Huang *et al.* (2010) em seu estudo sobre ligações por atrito em pontes de aço.

4.4 DEFINIÇÃO DO CARREGAMENTO VERTICAL

As forças atuantes na ligação durante o processo de análise numérica estão relacionadas à força mínima de protensão nos parafusos e à carga vertical aplicada na extremidade livre da viga em balanço, cujo objetivo é causar flexão na região da ligação.

O carregamento vertical, composto pela força (F) aplicada na extremidade livre da viga, tal como mostra a Figura 4.7, tem seu valor definido em função da força nominal de tração desenvolvida no par de parafusos mais afastado da linha neutra pelo momento fletor atuante na região da ligação.

Figura 4.7 –Carregamento vertical



Fonte: Autor.

Esta força nominal de tração (F_b) teve seu valor estimado em 40 kN, de modo que, somados aos 125 kN desenvolvidos pela força mínima de protensão (F_{Tb}) preconizados pela norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008), as tensões de tração geradas permaneçam próximas de 635 MPa, que corresponde ao limite de escoamento do material que compõe o corpo do parafuso, como demonstra analiticamente a Equação 4.1.

$$\sigma = \frac{F_T}{A_p} = \frac{(F_b + F_{Tb})}{A_p} = \frac{(40 + 125)}{\frac{\pi(19^2)}{4}} = 0,582 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} = 582\text{MPa} , \quad (4.1)$$

na qual:

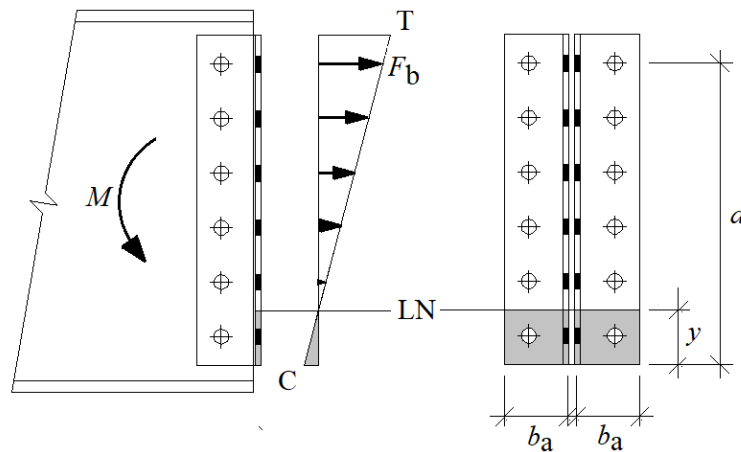
σ é a tensão nominal estimada nos parafusos mais afastados da linha neutra;

F_T é a força total de tração atuante no parafuso;

F_b é a força de tração desenvolvida pela flexão;
 F_{Tb} é a força mínima de protensão no parafuso;
 A_p é área bruta do parafuso.

Desta maneira, o momento atuante nas ligações pode ser estimado a partir do seu comportamento característico quando submetida a um momento fletor, em que ocorre a compressão (C) da parte inferior das cantoneiras contra a face da mesa da coluna, ao mesmo tempo que na parte acima da linha neutra os parafusos são tracionados (T), como ilustra a Figura 4.8.

Figura 4.8 – Distribuições das forças normais em ligações com dupla cantoneira de alma



Fonte: Autor.

Com o valor da força de tração no parafuso mais afastado da linha neutra (F_b) definido e admitindo, por simplificação, uma variação linear das tensões, o valor do momento fletor atuante é estimado de acordo com a Equação 4.2.

$$M = \frac{F_b \cdot I}{(d - y) A_p}, \quad (4.2)$$

na qual:

M é o momento fletor estimado;
 F_b é a força de tração desenvolvida pela flexão nos parafusos mais afastados;
 A_p é área bruta do parafuso;
 d é a distância do centro do parafuso à base da cantoneira;
 I é o momento de inércia da seção, determinado conforme a Equação 4.3:

$$I = \frac{2 \cdot b_a \cdot y^3}{3} + \sum_{i=1}^n A_i (d_i - y)^2, \quad (4.3)$$

na qual:

b_a é a largura da aba da cantoneira;

A_i é a área bruta do par de parafusos;

d_i é a distância do respectivo par de parafusos à base da cantoneira;

i é o número de pares de parafusos acima da linha neutra;

y é a posição da linha neutra, obtida pela Equação 4.4, a partir do equilíbrio entre o momento estático inferior e o superior.

$$M_{\text{inf}} = M_{\text{sup}} \rightarrow b_a \cdot y^2 = \sum_{i=1}^n A_i (d_i - y), \quad (4.4)$$

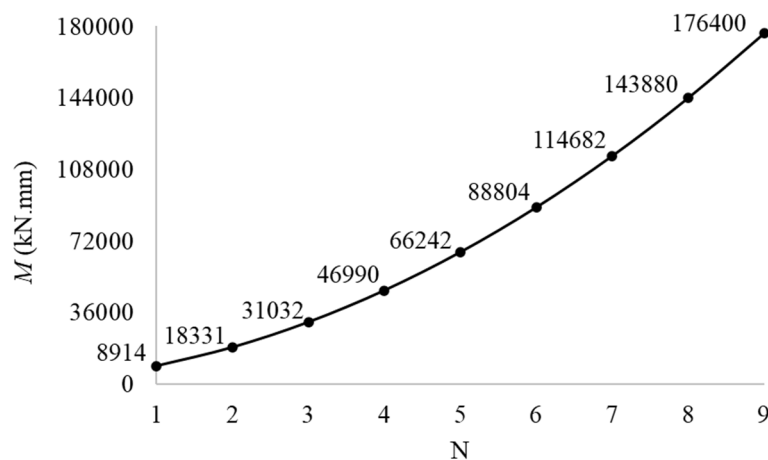
na qual:

M_{inf} é o momento estático abaixo da linha neutra;

M_{sup} é momento estático acima da linha neutra.

Desta forma, a Figura 4.9 apresenta os valores dos momentos fletores atuantes para cada grupo de ligações em função das suas diferentes alturas, representadas pela letra N.

Figura 4.9 – Valores dos momentos fletores atuantes



Fonte: Autor

Cada conjunto é formado por 81 ligações com distintas dimensões e, de maneira geral, o valor estimado do momento fletor atuante pode ser considerado como próximo ao valor do momento resistente das ligações que o compõe, uma vez que as tensões geradas nas cantoneiras são próximas ao valor da tensão de escoamento do material, como mostra a Figura 4.10, em são apresentadas as tensões equivalentes de von Mises para ligações de diferentes alturas com cantoneiras de dimensões intermediárias L89x89x8,0.

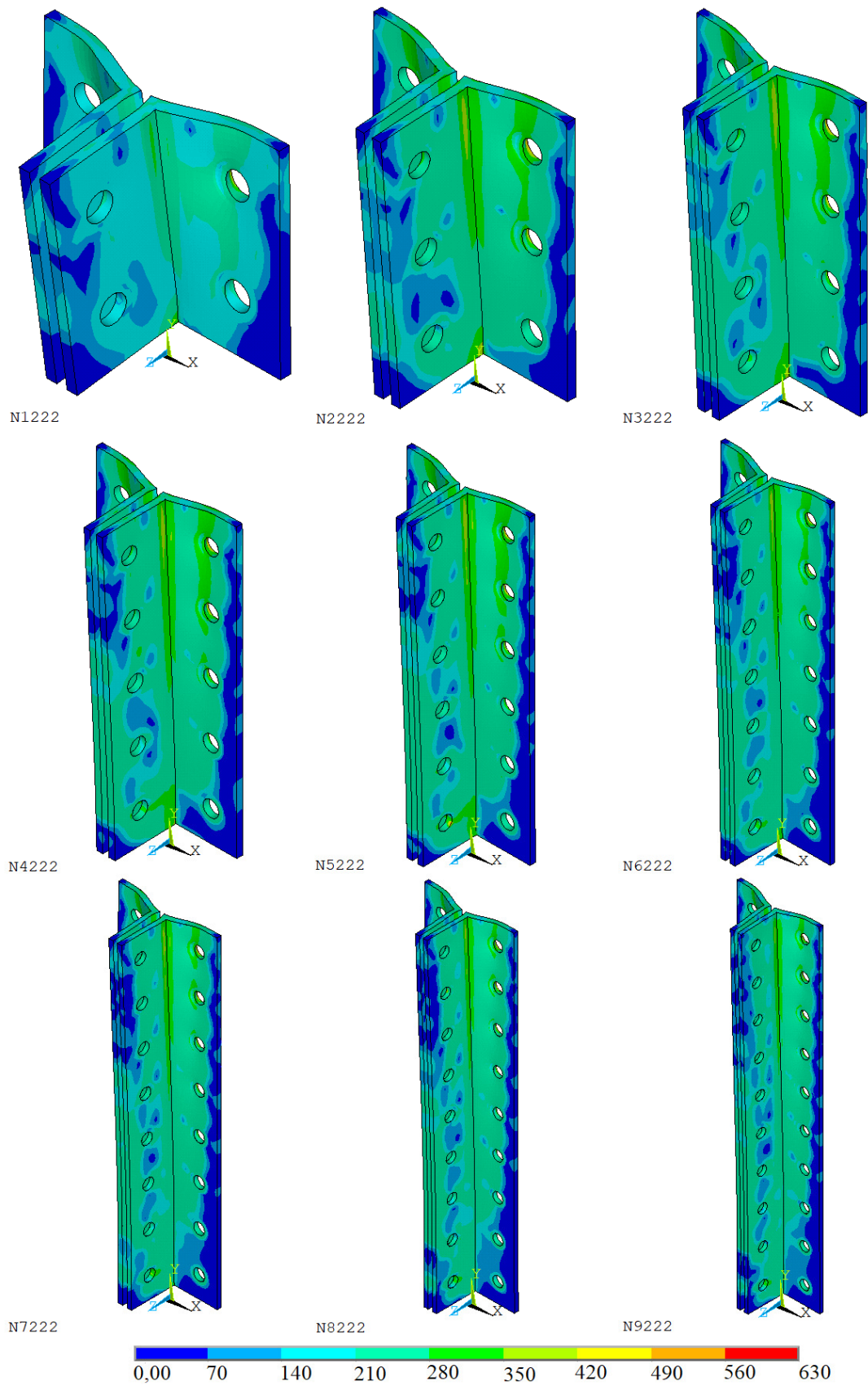
Com o objetivo de obter pontos suficientes para compor a curva momento-rotação, de maneira empírica o carregamento vertical (F) foi dividido em dezesseis etapas (LS - *Load Step*), com incrementos de 1/16 (6,25%, 12,5%, ..., 100%), de modo a integralizar na última etapa de carregamento. Estas 16 etapas de carregamento se somam à primeira, a qual corresponde exclusivamente à da força de protensão dos parafusos, totalizando assim dezessete etapas de carga, como apresenta a Tabela 4.4 os valores das cargas verticais aplicados às ligações analisadas.

Tabela 4.4 – Valores das cargas a cada etapa de carregamento, em kN

<i>Load Step</i>	<i>N</i>									<i>%</i>
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00
2	0,557	1,146	1,940	2,937	4,140	5,550	7,168	8,993	11,025	6,25
3	1,114	2,291	3,879	5,874	8,280	11,101	14,335	17,985	22,050	12,50
4	1,671	3,437	5,819	8,811	12,420	16,651	21,503	26,978	33,075	18,75
5	2,229	4,583	7,758	11,748	16,561	22,201	28,671	35,970	44,100	25,00
6	2,786	5,728	9,698	14,684	20,701	27,751	35,838	44,963	55,125	31,25
7	3,343	6,874	11,637	17,621	24,841	33,302	43,006	53,955	66,150	37,50
8	3,900	8,020	13,577	20,558	28,981	38,852	50,173	62,948	77,175	43,75
9	4,457	9,166	15,516	23,495	33,121	44,402	57,341	71,940	88,200	50,00
10	5,014	10,311	17,456	26,432	37,261	49,952	64,509	80,933	99,225	56,25
11	5,571	11,457	19,395	29,369	41,401	55,503	71,676	89,925	110,250	62,50
12	6,128	12,603	21,335	32,306	45,541	61,053	78,844	98,918	121,275	68,75
13	6,686	13,748	23,274	35,243	49,682	66,603	86,012	107,910	132,300	75,00
14	7,243	14,894	25,214	38,179	53,822	72,153	93,179	116,903	143,325	81,25
15	7,800	16,040	27,153	41,116	57,962	77,704	100,347	125,895	154,350	87,50
16	8,357	17,185	29,093	44,053	62,102	83,254	107,514	134,888	165,375	93,75
17	8,914	18,331	31,032	46,990	66,242	88,804	114,682	143,880	176,400	100,00

Fonte: Autor.

Figura 4.10 – Tensões de von Mises atuantes nas cantoneiras L89x89x8,0, em MPa



Fonte: Autor.

4.5 CONDIÇÕES DE RUGOSIDADE SUPERFICIAL

Por serem suscetíveis à fenômenos corrosivos superficiais, os sistemas estruturais em aço têm suas superfícies protegidas, inclusive nas regiões das ligações. Como exemplo, estão os revestimentos permanentes obtidos por galvanização a quente ou por pintura com tintas específicas, capazes de fornecer uma camada protetora resistente a fim de evitar a corrosão a longo prazo. Associado a isso, diferentes procedimentos fabris, como o jateamento ou escovação, alteram de forma significativa as condições de rugosidade superficial, quantificadas pelo valor do coeficiente médio de atrito (μ).

A norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008), admite que superfícies em contato de ligações por atrito possam ser jateadas e pintadas, desde que o coeficiente médio de atrito seja comprovado por ensaios, não definindo valores nestes casos. Entretanto, em conformidade com outros instrumentos normativos, estabelece que uma região mínima das superfícies em contato que deve ficar sem pintura, com o intuito de assegurar os valores definidos para o coeficiente médio de atrito, cujos valores são os seguintes:

- a) 0,35 para superfícies classe A, isto é, superfícies laminadas, limpas, isentas de óleos ou graxas e sem pintura; e para superfícies classe C, isto é, superfícies galvanizadas a quente com rugosidade aumentada manualmente por meio de escova de aço;
- b) 0,50 para superfícies classe B, isto é, superfícies jateadas sem pintura;
- c) 0,20 para superfícies galvanizadas a quente.

A especificação norte-americana para ligações estruturais usando parafusos de alta resistência (RCSC, 2020) estipula o valor do coeficiente médio de atrito para superfícies de classe A, $\mu = 0,30$, enquanto para superfícies classe B, $\mu = 0,50$.

O instrumento normativo europeu EN 1090-2 (2018) é mais específico, definindo o valor do coeficiente médio de atrito mínimo de acordo com a classe e tratamento superficial, conforme a seguir:

- a) para superfícies classe A, com ferrugem removida por jato de granalha ou de areia, sem corrosão, $\mu = 0,50$;
- b) para superfícies classe B, galvanizadas por imersão a quente e jateadas por varredura e pintadas com tinta à base de silicato de zinco alcalino com espessura nominal de 60 μm , $\mu = 0,40$;
- c) para superfícies classe B, jateadas com granalha ou areia: revestida com tinta à base de silicato de zinco alcalino com espessura nominal de 60 μm ; termicamente

- pulverizada com alumínio ou zinco ou a combinação de ambos para uma espessura nominal não superior a 80 μm , $\mu = 0,40$;
- d) para superfícies classe C, jateadas e galvanizadas por imersão a quente e jateadas, $\mu = 0,35$;
- e) para superfícies classe C, limpas por escova de aço ou a fogo, com ferrugem solta removida, $\mu = 0,30$;
- f) para superfícies classe D, laminadas, $\mu = 0,20$.

Segundo Owens e Cheal (1989), os diversos instrumentos normativos têm visões diferentes da variabilidade do coeficiente de atrito, uma vez que vários fatores influenciam nos valores de projeto. Frente a isso, apresentam alguns valores médios típicos para o coeficiente de atrito:

- a) superfícies laminadas limpas, $\mu = 0,33$;
- b) aço grau 43 ou 50 jateado, $\mu = 0,48$;
- c) idem, após leve oxidação, $\mu = 0,52$;
- d) aço de alta resistência jateado, $\mu = 0,33$;
- e) superfície com tinta vermelha a base de chumbo, $\mu = 0,1$ ou menos;
- f) superfície galvanizada a quente, $\mu = 0,22$;
- g) superfície galvanizada a quente seguida de escovação ou jateamento $\mu = 0,41$;
- h) superfície metalizada com zinco, $\mu = 0,46$;
- i) superfície metalizada com alumínio, $\mu = 0,51$;
- j) superfície metalizada com alumínio sobre zinco, $\mu = 0,49$;
- k) superfícies pintadas com silicato de zinco alcalino (50-80 μm), $\mu = 0,46$.

Para os mesmos autores, qualquer revestimento ou corpo estranho que possa atuar como lubrificante deve ser excluído. Tintas à base de óleo, resíduos de óleo usado na furação e escamas de laminação, por exemplo, atuam como lubrificantes e são prejudiciais. A ferrugem solta e o acúmulo excessivo de algum revestimento, como o zinco da galvanização a quente também podem reduzir o atrito entre superfícies.

No entanto, se o excesso de zinco for removido e a superfície for tornada áspera por jateamento, um coeficiente de atrito satisfatório pode ser obtido. O jateamento confere à superfície um bom coeficiente de atrito devido ao intertravamento entre os interstícios produzidos. Uma oxidação superficial leve melhora o intertravamento, desde que toda a

ferrugem solta seja removida por escova de aço antes da montagem, enquanto que superfícies com corrosão avançada apresentam atrito reduzido.

Para Kulak, Fisher e Struik (2001), os revestimentos para proteção dos sistemas estruturais em aço alteram as características superficiais das ligações parafusadas. Dependendo do tipo de tratamento superficial e dos procedimentos de fabricação, uma ampla gama de valores para o coeficiente de atrito é possível. Neste contexto, apresentam uma síntese com valores dos coeficientes médios de atrito recomendados para projeto:

- a) superfícies galvanizadas a quente, $\mu = 0,18$;
- b) superfícies galvanizadas a quente e escovadas ou jateadas, $\mu = 0,40$;
- c) superfícies tratadas com vinil, $\mu = 0,19$;
- d) superfícies jateadas e pulverizadas com zinco, $\mu = 0,40$;
- e) superfícies jateadas e pulverizadas com alumínio, $\mu = 0,55$;
- f) superfícies jateadas e pintadas com tinta orgânica rica em zinco, $\mu = 0,35$;
- g) superfícies jateadas e pintadas com tinta inorgânica rica em zinco, $\mu = 0,50$.

Kim *et al.* (2011) realizaram testes de tração em juntas parafusadas e metalizadas com Zn/Al para calcular o coeficiente de atrito e a rugosidade superficial. Em amostras tratadas apenas por jateamento com areia, o coeficiente de atrito variou de 0,448 a 0,502, enquanto que no processo de jateamento de areia e pintura metalizada com Zn/Al o coeficiente de atrito medido foi de 0,522 a 0,569.

Nos estudos realizados por Cruz, Simões e Alves (2012), superfícies jateadas e sem qualquer tratamento superficial, os valores do coeficiente de atrito chegaram a 0,50. Em superfícies jateadas e metalizadas com zinco ou galvanizadas a quente, o coeficiente de atrito ultrapassa 0,40. Já em superfícies jateadas e pintadas com tinta etil silicato de zinco foi obtido um valor característico de 0,40. Em superfícies jateadas e revestidas com epóxi rico em zinco os valores do coeficiente de atrito não ultrapassaram 0,30. Também, com base nos resultados apresentados, os autores concluem que o coeficiente de atrito é mais influenciado pelo tratamento superficial dado que pelo tipo de aço utilizado.

Heistermann *et al.* (2013) estudaram a influência do coeficiente de atrito em furos alongados com superfícies revestidas com tinta etil silicato de zinco, obtendo um valor médio do coeficiente de atrito de aproximadamente 0,36, não tendo influencia o tipo de aço utilizado.

No estudo de Annan e Chiza (2013) a resistência do processo de metalização de superfícies usadas em conexões por atrito também foram analisadas. Em superfícies não revestidas e jateadas, classificadas como classes A e B pela norma canadense CAN/CSA-S6-

06 (2006), os valores dos coeficientes médios de atrito encontrados foram de 0,36 e 0,53, respectivamente. Em superfícies metalizadas, a resistência ao escorregamento foi maior que na superfície classe B, com valores médios do coeficiente de atrito variando de 0,77 a 0,98.

Malite e Valenciani (2017) apresentaram os resultados dos ensaios de deslizamento realizados em superfícies de aço jateadas e revestidas por um esquema de pintura com três demãos (primer epóxi poliamida rico em zinco, primer epóxi poliamida de alto teor de sólidos com pigmentação à base de fosfato de zinco e, por fim, acabamento em tinta poliuretano acrílico alifático), destinado a ambientes de alta agressividade, resultando em um coeficiente médio de atrito de 0,23.

Maiorana, Zampieri e Pellegrino (2018) observaram aumento no valor do coeficiente de atrito em relação ao percentual de zinco no componente de revestimento. Em um de seus testes, a superfície foi jateada e pintada com produto rico em zinco, alcançando o valor médio de 0,45. Observaram que para obter um coeficiente de atrito maior, se faz necessário aumentar a rugosidade das superfícies e a força de protensão nos parafusos.

Wang *et al.* (2019) verificaram que a rugosidade superficial por jateamento tende a diminuir com o aumento da dureza do aço, o que induz a uma diminuição do coeficiente médio de atrito. De acordo com os resultados dos testes, o coeficiente médio de atrito sugerido para aços de alta resistência com superfícies jateadas é de 0,40. Além disso, para superfície oxidada após o jateamento, pode haver um incremento no coeficiente médio de atrito devido ao aumento da rugosidade, no entanto, não deve ser considerada em projeto, recomendando o mesmo valor de 0,40.

No estudo de Wang *et al.* (2020), superfícies jateadas e com revestimento rico em zinco inorgânico, com espessura de revestimento de 80 μm , apresentaram valores próximos de 10% maiores para o coeficiente médio de atrito, quando comparadas a superfícies com espessura de revestimento de 60 μm . Com base nos resultados dos testes, os autores recomendam o valor de 0,30 para o coeficiente médio de atrito para aços de alta resistência com superfície jateada e com revestimento rico em zinco inorgânico, que é menor ao especificado pelas normas de projeto atuais.

Diante da variabilidade, quatro ligações idênticas de dimensões intermediárias são usadas para testar efeito do coeficiente médio de atrito no comportamento das ligações parafusadas entre viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma, tendo como valores 0,5, 0,4, 0,3 e 0,2.

Os dados das rotações relativas obtidos a partir da análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos são apresentados na Tabela 4.5 e quando plotados na forma de curvas

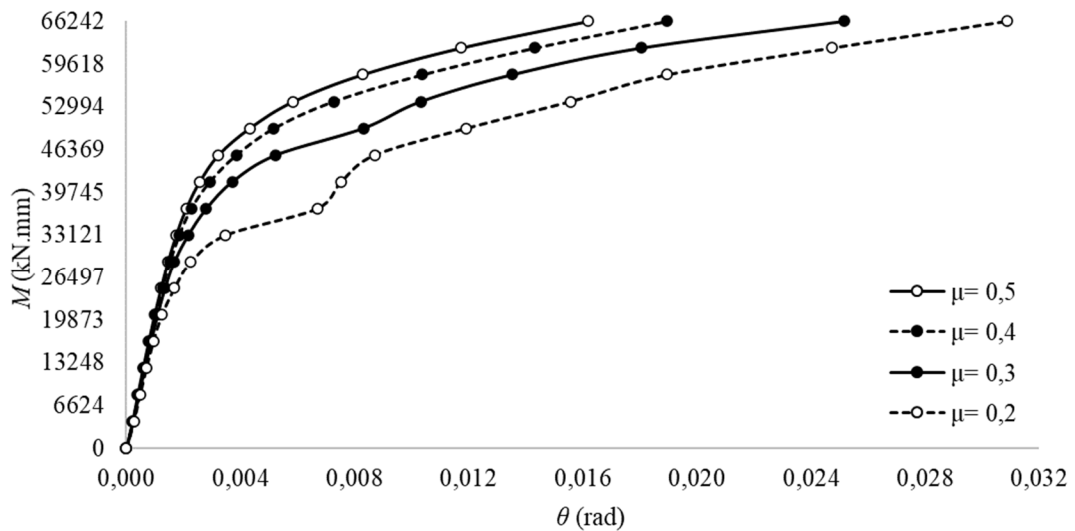
momento-rotação, conforme o gráfico da Figura 4.11, é possível evidenciar que as variações no valor do coeficiente médio de atrito afetam o comportamento das ligações parafusadas entre viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma, sobretudo nas etapas mais avançadas de carregamento, o que comprova o observado por Citipitioglu, Haj-Ali e White (2002).

Tabela 4.5 – Rotação relativa obtidos por análise numérica para diferentes valores de μ

<i>Load Step</i>	<i>M</i> (kN.mm)	θ (rad)			
		$\mu = 0,5$	$\mu = 0,4$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,2$
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	4140	0,000216	0,000228	0,000241	0,000261
3	8280	0,000398	0,000414	0,000437	0,000475
4	12420	0,000588	0,000611	0,000645	0,000702
5	16561	0,000785	0,000817	0,000863	0,000946
6	20701	0,000993	0,001034	0,001095	0,001248
7	24841	0,001216	0,001267	0,001356	0,001692
8	28981	0,001460	0,001527	0,001682	0,002268
9	33121	0,001743	0,001850	0,002165	0,003479
10	37261	0,002096	0,002272	0,002807	0,006696
11	41401	0,002569	0,002922	0,003715	0,007526
12	45541	0,003227	0,003856	0,005243	0,008705
13	49682	0,004321	0,005178	0,008307	0,011920
14	53822	0,005852	0,007266	0,010324	0,015557
15	57962	0,008268	0,010372	0,013513	0,018956
16	62102	0,011728	0,014320	0,018051	0,024718
17	66242	0,016186	0,018954	0,025161	0,030855

Fonte: Autor.

Figura 4.11 – Curvas $M-\theta$ obtidas por análise numérica para diferentes valores de μ



Fonte: Autor.

Tais comportamentos estão associados a ocorrência de deslizamentos entre as superfícies, que somados as deformações dos componentes da ligação, contribui para o aumento da deformação rotacional das ligações, sobretudo nas que possuem um coeficiente de atrito menor. De acordo com Owens e Cheal (1989), estes deslizamentos ocorrem à medida que a carga aumenta, cisalhando os interstícios superficiais. Carregamentos adicionais podem produzir um deslizamento repentino e levar o corpo do parafuso ao contato com a respectiva parede do furo, interrompendo de imediato o deslizamento.

Caso isso não aconteça, o deslizamento é cessado pelo equilíbrio de forças e um novo acréscimo no carregamento produzirá um novo deslizamento, e assim sucessivamente, até que o contato entre o corpo do parafuso e a parede do furo ocorra. Uma vez o corpo do parafuso em contato com a parede do furo, os esforços passam a ser transmitidos parcialmente pelo contato e parcialmente pelo atrito superficial. No entanto, como o acréscimo de tensões de cisalhamento no parafuso, já tracionado pela protensão, seu limite elástico pode ser ultrapassado, o que induz a relaxação do material e como consequência a diminuição da força de protensão. Deste modo, o atrito entre superfícies diminui e uma transição do comportamento para ligação por contato ocorre gradualmente.

Como visto, o valor do coeficiente de atrito é sensível a qualquer alteração na superfície, uma vez que os distintos revestimentos, associados a diferentes procedimentos fabris, modificam as condições de rugosidade superficial. Como parâmetro de projeto, o coeficiente de atrito se caracteriza como uma das maiores incertezas, visto que não há um consenso para o seu valor, exigindo assim, na maioria dos casos, ensaios para sua determinação.

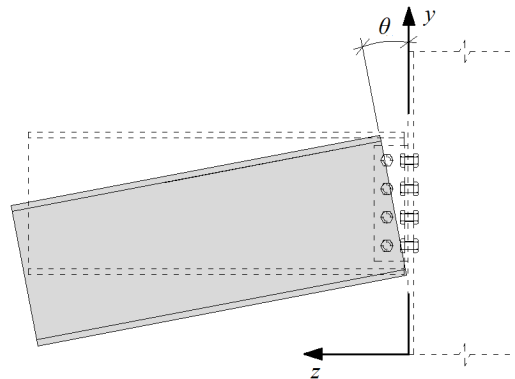
Neste contexto, o presente estudo analisa o comportamento de ligações com superfícies idealizadas com coeficientes médios de atrito 0,2 e 0,4, de modo a simular algumas das superfícies mais comuns.

4.6 OBTENÇÃO DOS PONTOS DA CURVA MOMENTO-ROTAÇÃO

A curva momento-rotação de cada ligação analisada é composta por dezessete pontos que correspondem à rotação relativa da viga em relação à coluna em cada etapa de carregamento (*LS – Load Step*).

Com o pressuposto que os deslocamentos nodais na placa que representa a coluna inexistem, qualquer possibilidade de deformação da coluna pode ser ignorada e apenas os deslocamentos nodais da viga são considerados para o cálculo da sua rotação relativa, como apresentado na Figura 4.12.

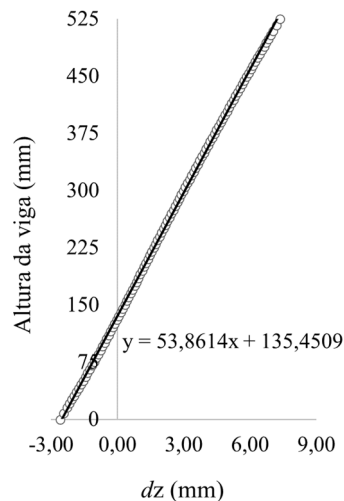
Figura 4.12 – Rotação relativa entre viga e coluna



Fonte: Autor.

O valor desta rotação pode ser obtido indiretamente a partir do processo de regressão linear dos dados, cujo procedimento consiste em ajustar os pontos correspondentes aos deslocamentos horizontais a uma reta. Desta maneira, a inclinação que representa a rotação relativa da viga é obtida a partir do valor do coeficiente angular da respectiva equação da reta, do mesmo modo que seu coeficiente linear ou intercepto fornece a ordenada do ponto de giro da viga, como mostrado na Figura 4.13.

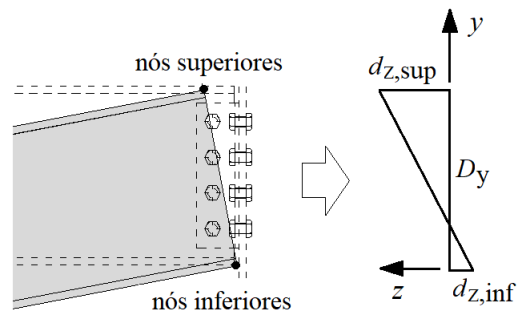
Figura 4.13 – Exemplo de regressão linear para cálculo da rotação da viga



Fonte: Autor.

Como alternativa ao procedimento anterior, o valor da referida rotação relativa é obtido de maneira direta a partir dos valores dos deslocamentos horizontais dos nós superiores e inferiores da alma viga na região da ligação, tal como apresentado na Figura 4.14.

Figura 4.14 – Deslocamentos horizontais dos nós superiores e inferiores



Fonte: Autor.

Assim, o valor da rotação relativa em cada etapa de carregamento é calculado de acordo com a Equação 4.5.

$$\operatorname{tg}\theta \cong \theta = \frac{|d_{z,\text{sup}} - d_{z,\text{inf}}|}{D_y}, \quad (4.5)$$

na qual:

θ é o valor absoluto da rotação relativa da viga-coluna, em radianos;

$d_{z,\text{sup}}$ é o deslocamento horizontal dos nós superiores, em mm;

$d_{z,\text{inf}}$ é o deslocamento horizontal dos nós inferiores, em mm;

D_y é a distância vertical, correspondente à altura total da viga, em mm.

Com a finalidade de comparar os dois procedimentos, a Tabela 4.6 apresenta os valores das rotações relativas de uma das ligações analisadas, cuja geometria intermediária apresenta 525 mm de altura da viga, idealizado com coeficiente médio de atrito 0,4. Uma vez comparados, ambos os procedimentos não apresentam diferenças significativas, logo, pela agilidade que o procedimento direto oferece, faz com seja o adotado neste estudo.

Tabela 4.6 – Rotações relativas obtidas partir dos deslocamentos horizontais e por regressão

<i>Load Step</i>	Deslocamentos horizontais (mm)			Rotação (rad)		Diferença %
	$d_{z,sup}$	$d_{z,inf}$	$d_{z,total}$	θ^1	θ^2	
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-
2	0,095934	-0,023666	0,119600	0,000228	0,000222	-2,7
3	0,166060	-0,051326	0,217386	0,000414	0,000398	-3,9
4	0,239780	-0,080928	0,320708	0,000611	0,000586	-4,1
5	0,317550	-0,111390	0,428940	0,000817	0,000784	-4,1
6	0,399960	-0,143040	0,543000	0,001034	0,000993	-4,0
7	0,489000	-0,176340	0,665340	0,001267	0,001220	-3,8
8	0,588580	-0,213160	0,801740	0,001527	0,001474	-3,5
9	0,710560	-0,260720	0,971280	0,001850	0,001794	-3,1
10	0,868130	-0,324810	1,192940	0,002272	0,002217	-2,4
11	1,099800	-0,434510	1,534310	0,002922	0,002880	-1,4
12	1,437600	-0,586960	2,024560	0,003856	0,003846	-0,3
13	1,924600	-0,793720	2,718320	0,005178	0,005225	0,9
14	2,709900	-1,104500	3,814400	0,007266	0,007425	2,2
15	3,884100	-1,561300	5,445400	0,010372	0,010718	3,3
16	5,450600	-2,067500	7,518100	0,014320	0,014921	4,2
17	7,357500	-2,593200	9,950700	0,018954	0,019864	4,8

¹ Pela Equação 4.5, ² Por regressão linear.

Fonte: Autor.

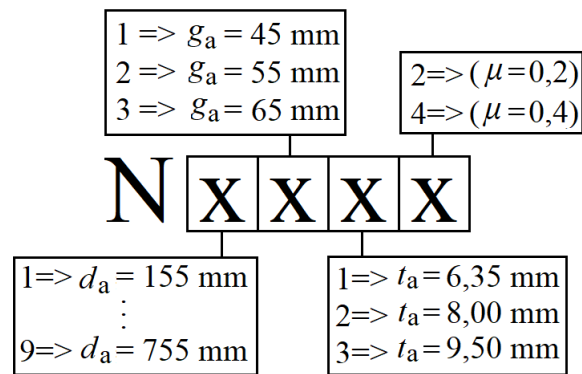
4.7 IDENTIFICAÇÃO DAS LIGAÇÕES

Com a finalidade de identificar cada uma das 162 ligações analisadas de maneira objetiva, uma vez que são 81 ligações geometricamente distintas e idealizadas com dois coeficientes médios de atrito, um padrão de nomenclatura foi criado com base na sua geometria e no valor do coeficiente de atrito adotado.

O princípio de identificação combina caracteres numéricos precedidos pela letra N. O primeiro caractere numérico representa o número de espaços verticais entre parafusos, que pode variar de 1 a 9. O segundo caractere numérico pode assumir 1, 2 ou 3, identificando a largura da aba da cantoneira (b_a), 76, 89 ou 102 mm e respectivamente o seu gabarito de furação (g_a), 45, 55 ou 65 mm. O terceiro caractere numérico especifica a espessura da aba das cantoneiras (t_a) e varia de 1 a 3, identificando 6,35, 8,0 ou 9,5 mm, respectivamente. Por fim, o último caractere numérico identifica o coeficiente médio de atrito, assumindo 2 para $\mu = 0,2$ ou 4 para $\mu = 0,4$.

Tal padrão de identificação das ligações analisadas é apresentado de forma esquemática na Figura 4.15.

Figura 4.15 – Padrão de identificação das ligações



Fonte: Autor.

Como exemplo, uma ligação composta por cinco parafusos dispostos na vertical, com elemento de ligação em dupla cantoneira L89x89x6,35 e, assumindo que as superfícies de contato possuem um coeficiente médio de atrito de 0,2, é identificado como N4212.

No Apêndice A, as dimensões de cada ligação analisada são apresentadas.

5 ANÁLISE NUMÉRICA

O avanço da tecnologia dos processos informatizados fez com que a necessidade de simplificações nos processos de análise computacional fosse reduzida, de modo que problemas complexos possam ser solucionados de maneira mais realística, gerando resultados precisos e confiáveis. Neste contexto, o Método dos Elementos Finitos se apresenta como uma ferramenta para a solução numérica de problemas de engenharia.

5.1 CONTEXTO HISTÓRICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos conhecido hoje teve seu desenvolvimento impulsionado pela análise estrutural, sobretudo pela demanda da indústria aeroespacial no final dos anos 60. No entanto, estudos publicados anos antes já apresentavam ideias e características básicas do método.

Embora não haja precisão da data de criação do Método dos Elementos Finitos, a literatura técnica é categórica em atribuir ao matemático e físico suíço Walter Ritz (1878-1909) a ideia primordial do método, quando em 1909 propôs um procedimento teórico para determinar a solução aproximada de problemas de mecânica dos sólidos.

Posterior a isso, no início da década de 1940, dois estudos são frequentemente relacionados como pioneiros para o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos: o estudo de Hrennikoff (1941), que apresenta uma formulação para a análise de placas em que o domínio contínuo é discretizado por analogia a uma grelha (*Lattice Analogy*) e o estudo de Courant (1943), que para a resolução de problemas de torção, sua proposta divide o domínio contínuo em sub-regiões triangulares de dimensões finitas.

Ambos os estudos compartilham uma característica básica do método: a discretização de um domínio contínuo em um conjunto de subdomínios discretos, que posteriormente foi denominado malha de elementos. Para Chandrupatla e Belegundu (2012), o método de análise por elementos finitos consiste em transformar um meio contínuo em formas geométricas simples e discretas, chamadas elementos finitos, e sua solução representa o comportamento aproximado do meio contínuo.

Outro pioneiro amplamente citado é o engenheiro e professor Dr. John Hadji Argyris (1913-2004), que de seus artigos publicados em 1954 e 1955 no periódico *Aircraft Engineering*, originaram em 1960 a publicação *Energy Theorems and Structural Analysis*, que trata sobre

teorema de energia e métodos matriciais de análise e que serviu como base para o desenvolvimento de novos estudos sobre o Método dos Elementos Finitos.

O trabalho de Turner *et al.* (1956) apresenta procedimentos para a derivação da matriz de rigidez para treliça, viga e outros elementos de estruturas delgadas, sendo reconhecido como importante contribuinte para o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos.

No entanto, a literatura atribui o uso do termo “elemento finito” pela primeira vez ao artigo *The finite element method in plane stress analysis* de 1960, publicado pelo engenheiro estadunidense Ray William Clough (1920-2016).

Nos anos sessenta, a aplicação do Método dos Elementos Finitos é ampliada e em 1967 o primeiro livro aplicado e fundamentado ao Método dos Elementos Finitos é publicado por Zienkiewicz e Cheung, com o título *The finite element method in structural and continuum mechanics*.

No final dos anos 60 e início da década seguinte, o Método dos Elementos Finitos tem estabelecido seus procedimentos matemáticos básicos e sua aplicação é ampliada para a solução de problemas não lineares, escoamento de fluídos, termodinâmica e outras áreas.

Desde seus primórdios no campo da análise de sistemas estruturais aeroespaciais até os dias de hoje, o Método dos Elementos Finitos é amplamente aplicado para a solução de problemas complexos e sua contribuição é vultuosa para o avanço científico da engenharia moderna.

5.2 ANÁLISE NUMÉRICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Atualmente, o Método dos Elementos Finitos é aplicado por diversos programas já consolidados, o que permite seu uso para simular distintos problemas de engenharia. Para tanto, neste estudo, as análises numéricas foram realizadas utilizando o programa ANSYS® MECHANICAL APDL (*ANSYS Parametric Design Language*).

5.2.1 Tipo e tecnologia do elemento finito

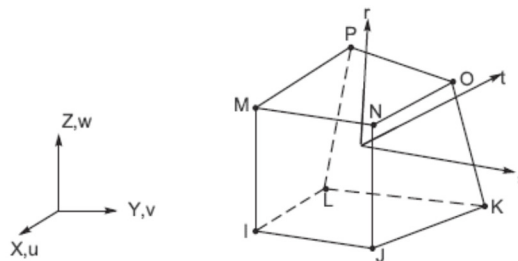
Para que as idealizações e os resultados produzidos pela análise numérica sejam satisfatórios, a escolha do tipo de elemento capaz de discretizar o meio contínuo e simular com maior exatidão possível o seu comportamento se faz necessária.

O programa ANSYS® possui uma biblioteca de elementos variados, identificados por um prefixo conforme sua categoria, seguido por um número exclusivo. O tipo do elemento é

determinado por seus graus de liberdade, que por sua vez implica no tipo análise a ser realizada, seja estrutural, térmica, magnética ou outra, e se o elemento está no espaço bidimensional ou tridimensional.

Para este estudo o elemento escolhido foi o SOLID185, cuja geometria é mostrada na Figura 5.1. Este elemento é usado para análise de sólidos em três dimensões, o qual possui uma estrutura hexaédrica composta por 8 nós, cada um com três graus de liberdade: translações nas direções x , y e z , além de apresentar características de grande elasticidade e plasticidade, fluência, possibilidade de alterações na rigidez, capacidade de assumir grandes deformações e deslocamentos, entre outras.

Figura 5.1 – Estrutura geométrica do elemento SOLID185



Fonte: ANSYS® (2013).

No entanto, existe a possibilidade de respostas numéricas desfavoráveis devido ao enrijecimento dos elementos pelo efeito do cisalhamento em problemas em que a flexão é preponderante (*shear locking*), e de enrijecimento volumétrico (*volumetric locking*), quando os materiais são idealizados como incompressíveis ou quase incompressíveis.

A tecnologia padrão do elemento SOLID185, denominada integração completa pelo método \bar{B} (*Full Integration with B-bar Method*), ajuda a impedir o enrijecimento volumétrico, mas não impede o enrijecimento por cisalhamento.

No caso das ligações analisadas, especificamente nas cantoneiras há preponderância de flexão e como efeito das deformações, o enrijecimento dos elementos por cisalhamento pode ocorrer e levar a respostas alteradas da análise numérica.

O fenômeno do enrijecimento volumétrico é descrito por Soriano (2003) como sendo a obtenção de valores de deslocamentos muito menores que os reais, com tendência a se anular à medida que o coeficiente de Poisson se aproxima de 0,5. Os materiais considerados como incompressíveis possuem o valor do coeficiente de Poisson igual a 0,5, enquanto os materiais quase incompressíveis este valor se aproxima de 0,5, o que leva o módulo de elasticidade volumétrico do material a assumir valores próximos do infinito, causando tal fenômeno.

O elemento SOLID185 possui como opção o uso da tecnologia *Simplified Enhanced Strain Formulation*, que introduz graus de liberdade internos necessários para prevenir problemas de enrijecimento causados por esforços de cisalhamento (*shear locking*). No entanto, tal tecnologia não previne o enrijecimento volumétrico, o que não representa um obstáculo para neste estudo, uma vez que os modelos constitutivos dos materiais foram idealizados com valor do coeficiente de Poisson igual a 0,3.

Para fins comparativos entre as tecnologias *Full Integration with B-bar Method* e *Simplified Enhanced Strain Formulation*, a ligação N5224 de dimensões intermediárias e com malha de elementos padrão descrita a seguir, foi usada para testes. Os valores das rotações relativas obtidas pela utilização de ambas as tecnologias são apresentados na Tabela 5.1 e as respectivas curvas momento-rotação são mostradas no gráfico da Figura 5.2.

Tabela 5.1 – Rotações relativa obtidas com duas tecnologias do elemento SOLID185

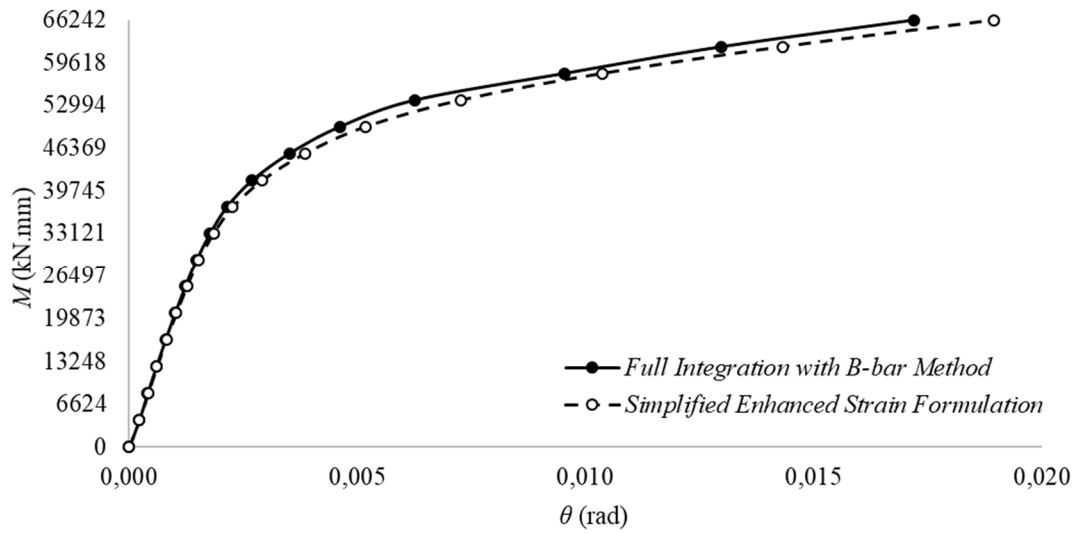
<i>Load Step</i>	<i>M</i> (kN.mm)	<i>Full integration</i> ¹ <i>θ</i> (rad)	<i>Simple strain</i> ² <i>θ</i> (rad)	Diferença %
1	0	0,00000000	0,00000000	-
2	4140	0,00022237	0,00022781	2,4
3	8280	0,00040330	0,00041407	2,7
4	12420	0,00059480	0,00061087	2,7
5	16561	0,00079520	0,00081703	2,7
6	20701	0,00100522	0,00103429	2,9
7	24841	0,00122937	0,00126731	3,1
8	28981	0,00147514	0,00152712	3,5
9	33121	0,00177105	0,00185006	4,5
10	37261	0,00214291	0,00227227	6,0
11	41401	0,00269810	0,00292250	8,3
12	45541	0,00351067	0,00385630	9,8
13	49682	0,00461469	0,00517775	12,2
14	53822	0,00626360	0,00726552	16,0
15	57962	0,00954114	0,01037219	8,7
16	62102	0,01298495	0,01432019	10,3
17	66242	0,01720438	0,01895371	10,2

¹ Full Integration with B-bar Method.

² Simplified Enhanced Strain Formulation.

Fonte: Autor.

Figura 5.2 - Curvas momento-rotação obtidas com duas tecnologias do elemento SOLID185

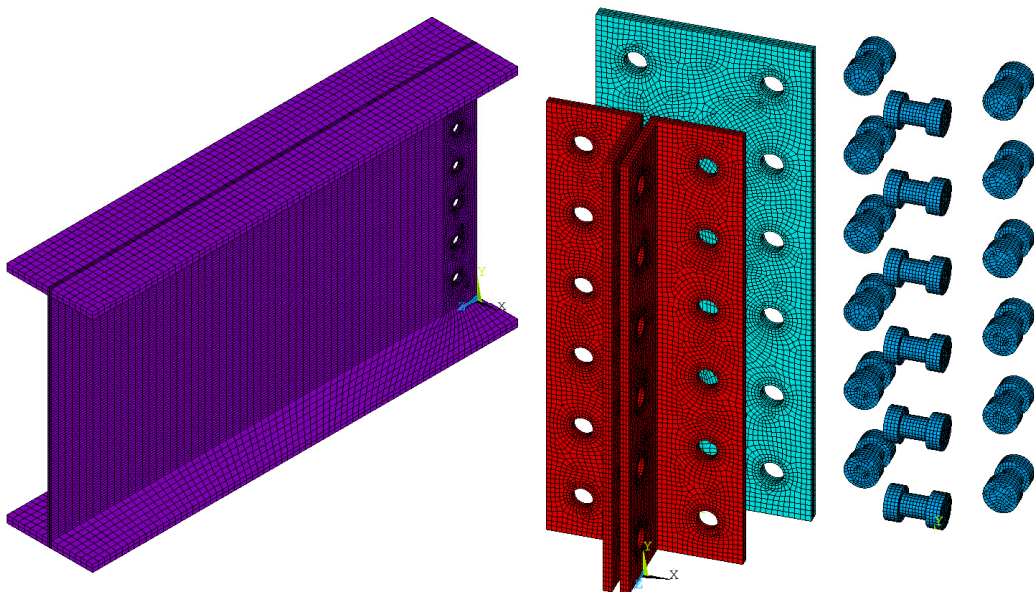


Fonte: Autor.

5.2.2 Malha de elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos consiste em dividir um meio contínuo em formas geométricas definidas e com dimensões finitas, denominada malha de elementos, tal como mostra a Figura 5.3.

Figura 5.3 – Malha de elementos finitos

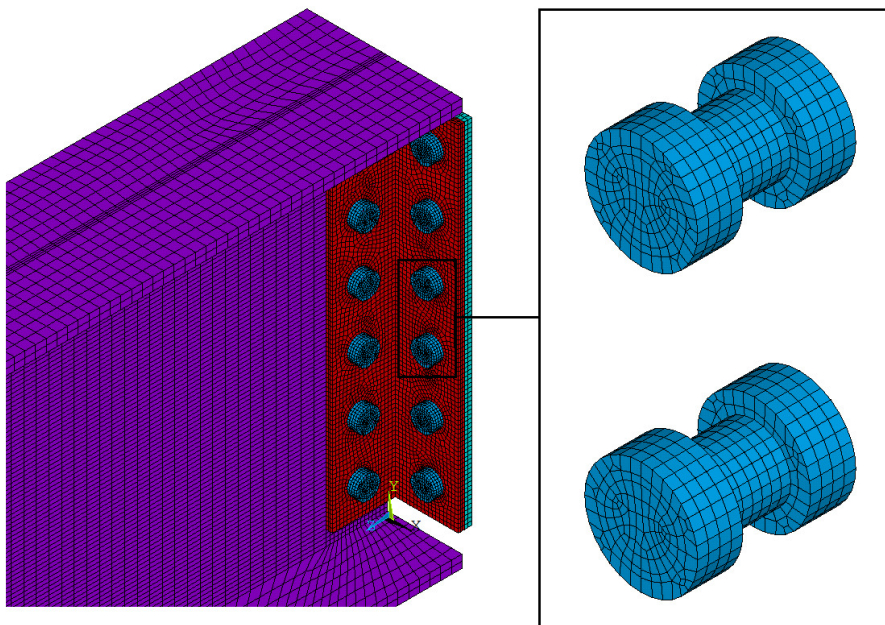


Fonte: Autor.

Neste estudo, a plastificação dos materiais e as descontinuidades geométricas são consideradas no processo de análise, o que demanda uma malha de elementos finitos mais refinada, sobretudo em regiões com altas tensões ou com esforços devidos aos contatos entre superfícies. De acordo com Bursi e Jaspart (1998), para se obter uma boa precisão em problemas dominados por flexão, ao menos três camadas de elementos sólidos devem ser usadas. No entanto, os mesmos autores citam que duas camadas podem ser suficientes para o caso de uma análise elástica.

Para garantir o número mínimo de elementos na direção de menor espessura, os parafusos foram discretizados com elementos de tamanho máximo de 3 mm, gerando assim, ao menos quatro camadas de elementos na direção de menor espessura, como pode ser visualizado na Figura 5.4.

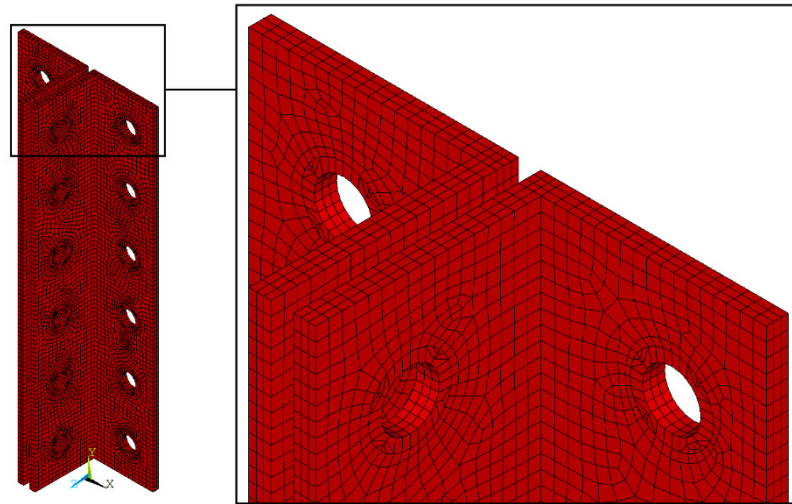
Figura 5.4 – Malha de elementos dos parafusos



Fonte: Autor.

Nas ligações em estudo, os esforços de flexão preponderam nas cantoneiras, as quais tiveram sua malha discretizada com ao menos três camadas de elementos na direção de sua espessura, tal como mostra a Figura 5.5. Para garantir esse número mínimo de elementos, adotou-se uma malha mais refinada com elementos de tamanho máximo de 3 mm na região de contato com os parafusos, enquanto restante do corpo da cantoneira os elementos possuem dimensões de até 5 mm, como modo de reduzir o número de elementos e consequentemente a demanda computacional, sem prejuízos aos resultados, conforme comprovado por testes.

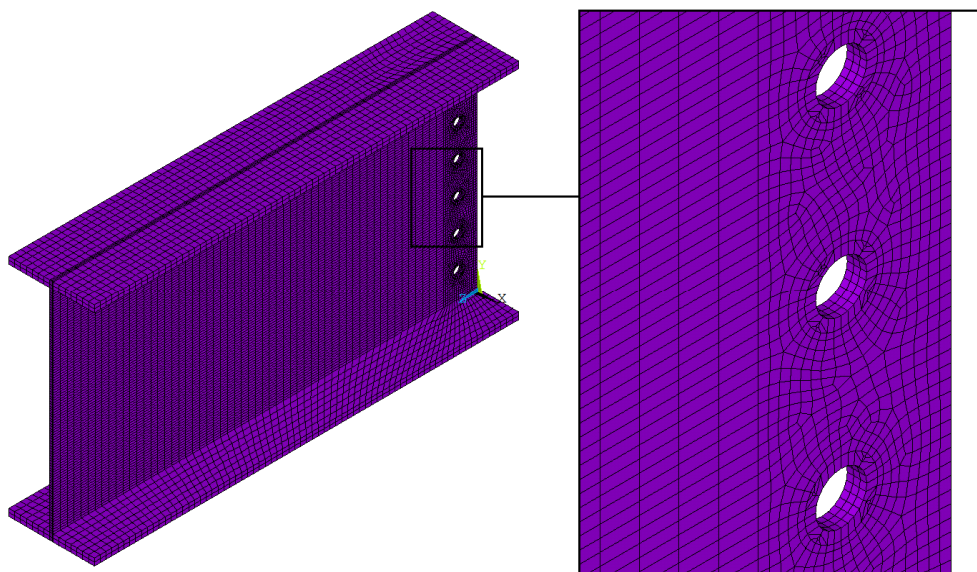
Figura 5.5 – Malha de elementos das cantoneiras



Fonte: Autor.

O mesmo critério anterior foi adotado para a malha de elementos na região da alma da viga em contato direto com os componentes da ligação, isto é, elementos com dimensões máximas de 3 mm foram adotados nas regiões próximas dos furos e de 5 mm nas regiões em contato com as cantoneiras. Na região da viga sem contato direto com os componentes da ligação, isto é, no restante da alma e nas mesas, uma malha menos refinada, constituída por elementos com até 15 mm na direção longitudinal foi adotada, como mostra a Figura 5.6.

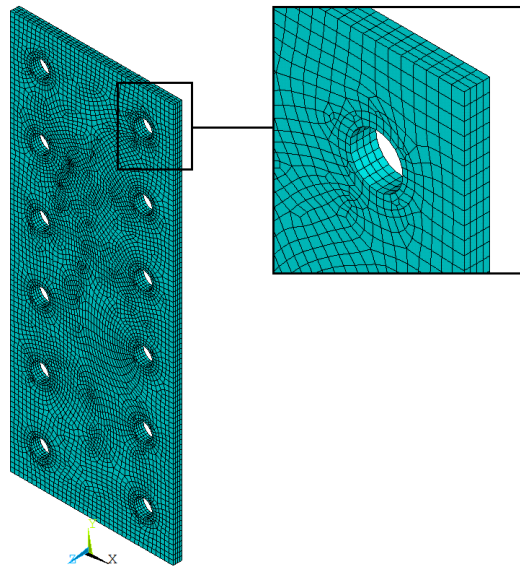
Figura 5.6 – Malha de elementos da viga



Fonte: Autor.

A chapa que representa a mesa da coluna, por se tratar de um componente com função única de apoio para a ligação, tem os nós da face interna restringidos. Este componente, seguindo o padrão dos demais, teve sua malha gerada com elementos de 3 mm nas regiões de contato com os parafusos, isto é, nas proximidades dos furos, e 5 mm na região de contato com as cantoneiras, como mostra a Figura 5.7.

Figura 5.7 – Malha de elementos da mesa da coluna



Fonte: Autor.

5.2.3 Descontinuidades geométricas

Os sistemas estruturais em aço se caracterizam pela existência de ligações parafusadas que funcionam por meio do contato e do atrito entre seus componentes e os meios de ligação, que no caso em estudo são cantoneiras e parafusos, respectivamente.

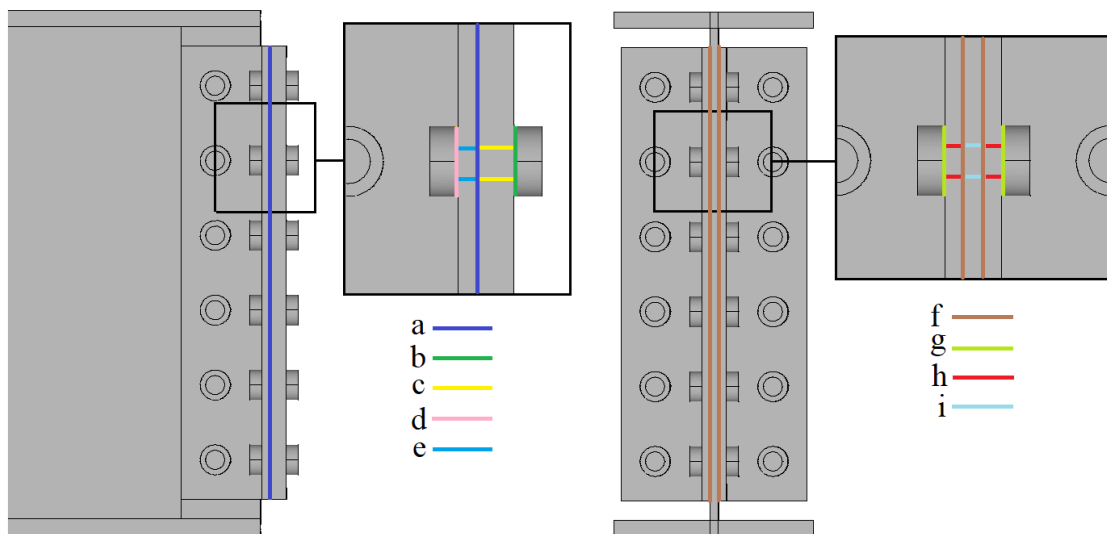
As possibilidades de contato e de atrito entre superfícies devem ser identificadas e seu comportamento simulado na análise numérica como uma descontinuidade geométrica, visto que há interação com transferência de esforços e deslocamentos relativos entre si.

Para o tipo de ligação em estudo foram identificadas nove possíveis interfaces de contatos entre superfícies, listados abaixo e mostrados na Figura 5.8:

- a) contato entre a cantoneira e a face externa da coluna;
- b) contato entre a cabeça/porca do parafuso e a face interna da coluna;
- c) contato entre o corpo do parafuso e a parede do furo na coluna;
- d) contato entre a cabeça/porca do parafuso e a cantoneira conectada à coluna;

- e) contato entre o corpo do parafuso e a parede do furo na cantoneira conectada à coluna;
- f) contato entre a cantoneira e a alma da viga;
- g) contato entre a cabeça/porca do parafuso e a cantoneira conectada à viga;
- h) contato entre o corpo do parafuso e a parede do furo nas cantoneiras;
- i) contato entre o corpo do parafuso e a parede do furo na alma da viga.

Figura 5.8 – Interfaces de contato da ligação com dupla cantoneira



Fonte: Autor.

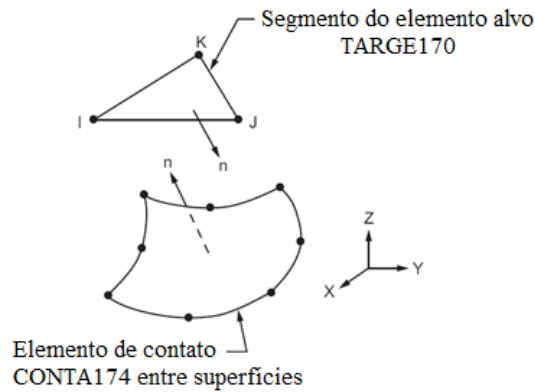
Para tanto, o programa ANSYS® possibilita o emprego de elementos que simulam essa interação de contato entre as interfaces.

5.2.3.1 Elementos de contato

O programa ANSYS® disponibiliza em sua biblioteca elementos capazes de simular as interfaces de contato entre duas superfícies ou par de contato. Uma das superfícies é convencionalmente discretizada por um conjunto de elementos alvo, enquanto a outra superfície é discretizada por elementos de contato.

O elemento TARGE170, mostrado na Figura 5.9, é usado para representar as superfícies alvo, enquanto os elementos de contato associados são representados pelo elemento CONTA174.

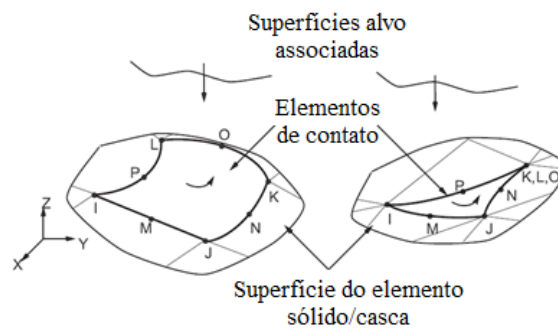
Figura 5.9 – Estrutura geométrica do elemento TARGE170



Fonte: ANSYS® (2013).

Os elementos de contato CONTA174, cuja estrutura geométrica é mostrada na Figura 5.10, se sobrepõem aos elementos sólidos, descrevendo o limite de um corpo que está em contato com a superfície alvo definida pelo elemento TARGE170. O CONTA174 é um elemento de 8 nós aplicável em análise tridimensional de contato superfície-superfície entre elementos sólidos ou de casca. Seu uso é para representar o contato e o deslizamento da superfície deformável do elemento finito, em relação a superfície alvo do elemento TARGE170. Este elemento está localizado na superfície dos elementos finitos ao qual está conectado.

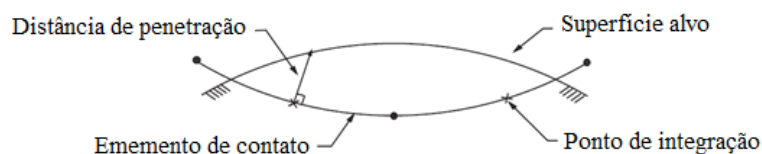
Figura 5.10 – Estrutura geométrica do elemento CONTA174



Fonte: ANSYS® (2013).

O contato entre superfícies ocorre quando a superfície do elemento de contato penetra na superfície alvo associada. Os pontos de detecção de contato, como padrão, são os pontos de integração ou pontos de Gauss, cuja distância de penetração é medida ao longo da direção normal à superfície de contato até a superfície alvo, como mostra a Figura 5.11.

Figura 5.11 – Distância de penetração



Fonte: ANSYS® (2013).

5.2.3.2 Algoritmo de contato

A resolução de problemas de programação não-linear com elementos finitos de contato superfície-superfície, requer a escolha de um algoritmo. Um dos algoritmos disponíveis e usado como padrão pelo programa ANSYS® é o Método Lagrangeano Aumentado, que consiste, basicamente, em uma série iterativa de penalizações em que as tensões de contato são aumentadas durante as iterações de equilíbrio, de modo que a penetração final seja menor do que a tolerância permitida.

You, Luo e Wang (2013) analisaram três diferentes algoritmos de contato disponíveis pelo programa ANSYS®. Os resultados mostraram que o algoritmo de contato tem influência nos resultados e no tempo de processamento, recomendando o uso do Método Lagrangeano Aumentado por apresentar o menor tempo de processamento.

Para seu uso, assim como em outros métodos, alguns parâmetros necessitam ser definidos, como o fator de rigidez normal de contato (FKN), o fator de rigidez tangencial de contato (FKT) o fator de tolerância à penetração ($FTOLN$), o coeficiente médio de atrito (μ).

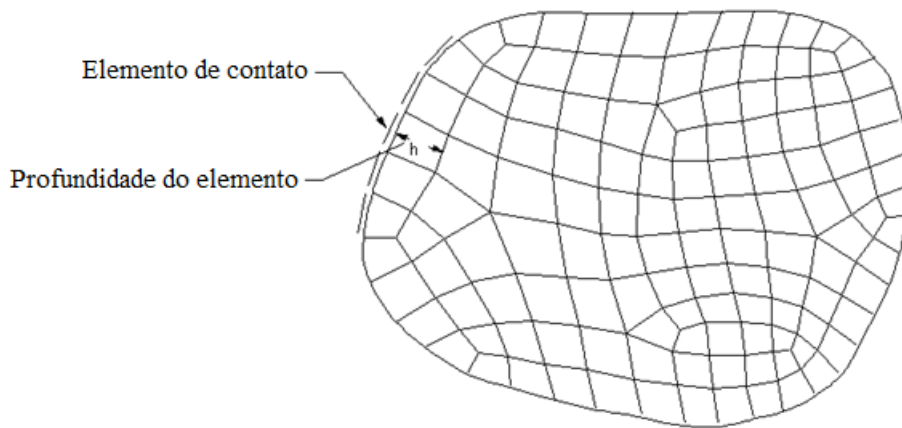
O fator de rigidez tangencial de contato (FKT) tem seu valor definido automaticamente pelo programa, sendo proporcional ao coeficiente médio de atrito e ao fator de rigidez normal de contato (FKN).

A penetração entre as superfícies de contato e alvo depende da rigidez normal de contato. O programa ANSYS® permite variar os valores do fator de rigidez normal de contato (FKN) entre 0,1 e 10,0, sendo o valor padrão 1,0.

Para o fator de tolerância à penetração na direção normal à superfície ($FTOLN$), o manual do programa define que os valores devem ser menores que 1,0, preferencialmente menor que 0,2 e adota como padrão 0,1. Este fator é usado para determinar se a compatibilidade de penetração é satisfeita. Esta compatibilidade é satisfeita se a penetração estiver dentro de uma tolerância permitida, definida pelo produto entre $FTOLN$ e a profundidade do elemento

subjacente. A profundidade (h) do elemento é definida pela profundidade média de cada elemento da primeira camada, como mostra a Figura 5.12.

Figura 5.12 – Profundidade do elemento subjacente



Fonte: ANSYS® (2013).

A tolerância à penetração varia em relação ao tamanho do elemento, de modo que elementos com maiores dimensões permitem uma penetração maior, e vice-versa. Caso a penetração seja maior que a tolerância definida, a solução é considerada sem convergência. Valores altos de rigidez diminuem a penetração e o deslizamento, mas podem levar ao mau condicionamento da matriz de rigidez global e à dificuldade de convergência. Porém, baixos valores de rigidez podem aumentar a penetração e o deslizamento e levar a uma solução imprecisa. Desta forma, o ideal é uma rigidez suficiente para que os valores da penetração ou deslizamento sejam aceitáveis, garantindo a convergência.

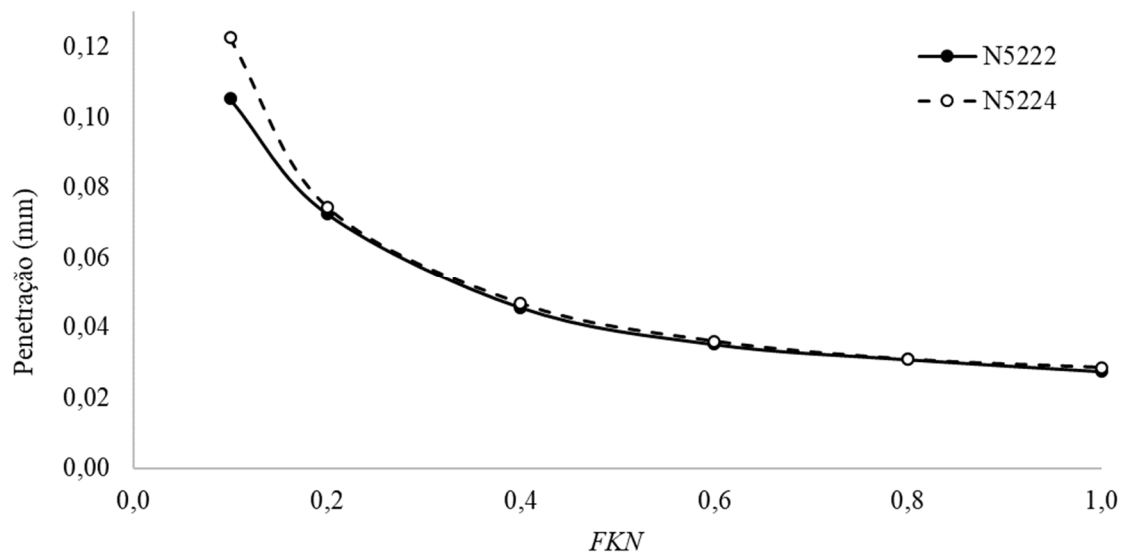
Gomes *et al.* (2019), em seu estudo sobre ligações parafusadas com protensão e tratamentos de superfície distintos considerou o valor único de 0,1 para os fatores FKN e $FTOLN$. Para Rodrigues, de Jesus e Silva (2011), os valores padrões do programa ANSYS® ($FKN = 1,0$ e $FTOLN = 0,1$) produzem resultados fisicamente consistentes. Estes mesmos valores foram usados por Visintainer (2017) e por Bergamasco (2012) em seus estudos referentes a ligações parafusadas.

A fim de definir o valor de FKN que conduza a valores de penetração suficientemente baixos e aceitáveis fisicamente, testes foram realizados com as ligações N5222 e N5224 para seis diferentes valores de FKN . Os valores da penetração máxima obtidos são apresentados na Tabela 5.2 e plotados no gráfico da Figura 5.13.

Tabela 5.2 – Valores de penetração máxima em função do parâmetro FKN

Modelo	N5222	N5224
μ	0,2	0,4
$FTOLN$	0,1	0,1
M (kN.mm)	66242	66242
FKN	Penetração máxima (mm)	
0,1	0,105170	0,122540
0,2	0,072517	0,074417
0,4	0,045560	0,046679
0,6	0,035132	0,035957
0,8	0,030837	0,030849
1,0	0,027456	0,028487

Fonte: Autor.

Figura 5.13 – Curvas de penetração máxima em função do parâmetro FKN 

Fonte: Autor.

No gráfico anterior é possível observar que os valores da penetração máxima diminuem ao passo que FKN aumenta e se aproxima do valor padrão usado pelo programa. Isso ampara a percepção que o valor padrão 1,0 para o parâmetro FKN conduz a valores fisicamente aceitáveis de penetração, que juntamente com $FTOLN$ igual 0,1, foram adotados para este estudo.

5.2.4 Não linearidade física dos materiais

O comportamento físico dos materiais, cujos modelos constitutivos estão descritos no item 4.3, são simulados pelo programa ANSYS® a partir da opção *Bilinear isotropic hardening* (BISO).

5.2.5 Não linearidade geométrica

O comportamento linear geométrico de um sistema estrutural presume que os deslocamentos sejam inexistentes ou pequenos o suficiente para que as mudanças na matriz de rigidez possam ser ignoradas.

Por outro lado, deslocamentos não desprezíveis alteram a posição do sistema estrutural quando submetido ao carregamento e, conseqüentemente, exigem atualização da matriz de rigidez a cada incremento de carga, caracterizando assim um comportamento não linear geométrico.

Como padrão, o programa ANSYS® realiza a análise de modo linear através da ativação automática da opção denominada *Small displacement static*, no entanto, a não linearidade geométrica pode ser considerada na análise ativando a opção *Large displacement static*.

Para avaliar a influência do tipo de análise nos resultados, testes foram realizados com ambas as opções de análise para a ligação N5224, cujos dados obtidos da rotação relativa são apresentados na Tabela 5.3.

Com base nos dados da rotação relativa apresentados, estes podem ser considerados como idênticos para ambos os tipos de análises, do mesmo modo que o tempo de processamento também pode ser considerado o mesmo.

Embora o exposto anteriormente indique que os resultados independem da tipologia de análise, em outro teste realizado com a ligação N1314, considerado a mais flexível dentro do conjunto de ligações analisadas, visto seu maior gabarito de furação e menor espessura de cantoneira, a convergência não foi obtida com a utilização da análise linear pela ativação da opção *Small displacement static*. Este mesmo problema também foi observado em outras análises de ligações, cujos deslocamentos causados por deformações são significativos, sobretudo a partir de certas etapas de carregamento.

Frente a isso, a adoção da análise não linear geométrica se torna necessária e padrão para todos as ligações analisadas.

Tabela 5.3 – Valores da rotação relativa obtidos por análise linear e não linear

<i>Load Step</i>	<i>M</i> (kN.mm)	<i>Análise Linear</i> θ (rad)	<i>Análise Não linear</i> θ (rad)	<i>Diferença</i> %
1	0	0,00000000	0,00000000	-
2	4140	0,00022781	0,00022781	0,0
3	8280	0,00041407	0,00041407	0,0
4	12420	0,00061087	0,00061087	0,0
5	16561	0,00081703	0,00081703	0,0
6	20701	0,00103429	0,00103429	0,0
7	24841	0,00126741	0,00126731	0,0
8	28981	0,00152712	0,00152712	0,0
9	33121	0,00185006	0,00185006	0,0
10	37261	0,00227227	0,00227227	0,0
11	41401	0,00292250	0,00292250	0,0
12	45541	0,00385630	0,00385630	0,0
13	49682	0,00517775	0,00517775	0,0
14	53822	0,00726552	0,00726552	0,0
15	57962	0,01037219	0,01037219	0,0
16	62102	0,01428419	0,01432019	0,3
17	66242	0,01900210	0,01895371	-0,3

Fonte: Autor.

A não linearidade geométrica, somada à plasticidade dos materiais e às discontinuidades geométricas farão com que a análise tenha uma solução não linear.

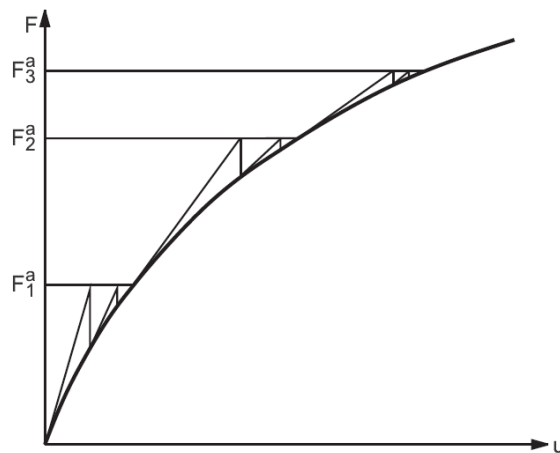
Este processo de solução não linear requer o equilíbrio em etapas a partir da subdivisão do carregamento, isto é, o vetor de carga final da equação é alcançado aplicando o carregamento de maneira incremental.

O programa ANSYS® usa de forma automática, para solução de problemas não lineares, o método incremental de Newton-Raphson, esquematizado graficamente na Figura 5.14. Este método executa as iterações de equilíbrio em cada etapa de carregamento e modifica automaticamente a matriz de rigidez, até que os critérios de convergência sejam satisfeitos ou o número máximo de iterações seja atingido.

O critério de convergência adotado para cada etapa incremental é o método *L2 norm*. Este método verifica a convergência de forças, ou de deslocamentos, comparando a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças de forças, ou de deslocamentos, com um valor de referência.

A convergência é atingida quando o valor da referida soma for menor que o produto entre este valor e a tolerância adotada. Nesse estudo, foram adotados os valores de tolerância padrões do programa que é de 0,001.

Figura 5.14 – Método incremental de Newton-Raphson



Fonte: ANSYS® (2013).

5.3 FORÇAS E CARRREGAMENTO

Na análise numérica foram aplicadas forças representativas do efeito do aperto dos parafusos (protensão), além de cargas verticais na extremidade livre da viga em balanço, capazes de causar flexão na região da ligação. A força de protensão foi imposta na primeira etapa de carga e mantida nas demais dezesseis etapas de carregamento.

5.3.1 Força de protensão dos parafusos

A norma brasileira ABNT NBR 8800 (2008) preconiza que os parafusos de alta resistência, instalados com protensão inicial, devem ser apertados de forma a se obter uma força mínima de protensão (F_{Tb}) que equivale a aproximadamente 70% da sua resistência nominal à tração. Este procedimento segue o que recomenda outros instrumentos normativos, como RCSC (2020), EN 1993-1-8 (2005) e EN 1090-2 (2018).

O valor mínimo da força de protensão, obtido pelo aperto dos parafusos, é fornecido pela referida norma brasileira, de acordo com o diâmetro e o tipo de parafuso. Nas ligações em estudo foram adotados parafusos de alta resistência do tipo ASTM A325 com diâmetro nominal de 3/4 de polegada, logo a força mínima de protensão desenvolvida por aperto deve ser de 125 kN.

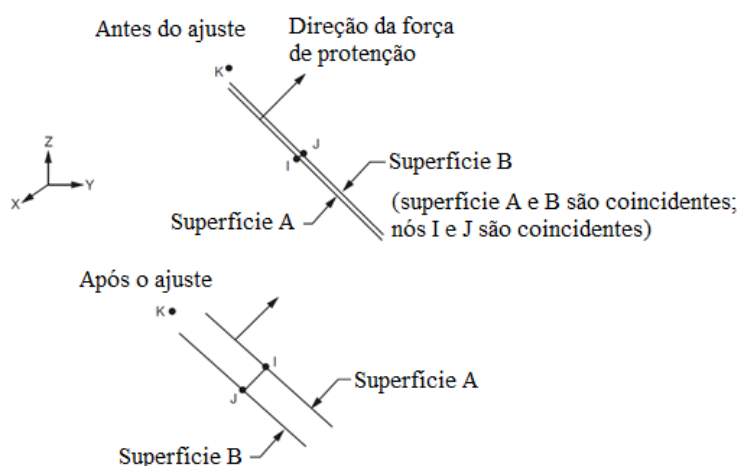
De acordo com Zhang (2013), três métodos diferentes podem ser usados para simular o efeito da força de protensão em parafusos: método do resfriamento, através da variação de temperatura negativa no corpo do parafuso; método do aperto, com base no movimento de

aperto imposta à porca, e; o método do elemento de protensão PRETS179, disponível no programa ANSYS®. Segundo o mesmo autor, baseado nos resultados de sua análise, quando existirem outras cargas além da força de protensão, o método do elemento de protensão é mais aplicável.

Segundo Visintainer (2017), que em seu estudo utilizou o método do resfriamento e o método do elemento de protensão, a utilização do elemento PRETS179 é muito mais simples, quando comparado à estratégia de variação de temperatura, e apresenta excelentes resultados.

O elemento PRETS179, segundo o manual do programa, é usado para representar uma seção bidimensional ou tridimensional de uma estrutura parafusada, por exemplo. Este elemento possui apenas um grau de liberdade à translação e sua geometria é definida pelos nós I, J, K que definem a direção da carga de protensão em relação à superfície A, tal como mostra a Figura 5.15.

Figura 5.15 – Geometria do elemento PRETS179



Fonte: ANSYS® (2013).

5.3.2 Carga vertical

As cargas verticais aplicadas nos processos de análise numérica foram divididas em dezessete etapas de carregamento (*LS - Load Steps*) e aplicadas na alma da viga, junto a sua extremidade livre. A partir da segunda etapa, uma vez que a primeira etapa corresponde unicamente à força de protensão imposta, cada parcela que corresponde a 6,25% da carga total, que é incrementada até sua integralização na décima sétima etapa. Essa divisão tem como objetivo determinar pontos suficientes para plotagem da curva momento-rotação.

5.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno, que representam as restrições de apoio impostas as ligações analisadas, consideram a coluna indeformável e sem a possibilidade de deslocamentos. Para tanto, os nós da face externa da placa rígida que representa a mesa da coluna, tiveram as translações nas direções x, y e z impedidas.

5.5 RESULTADOS NUMÉRICOS

O processamento da análise numérica foi realizado por um microcomputador portátil, marca Dell, modelo Inspiron 15 7572, com processador Intel® Core™ i7-8550U 1,80 GHz, com 16 GB de memória RAM, SSD de 128 GB e placa de vídeo dedicada NVIDIA® GeForce® MX150 com 2GB GDDR5.

O objetivo da análise numérica era a obtenção de 2754 soluções, que correspondem aos 17 pontos que formam cada curva momento-rotação das 162 ligações analisadas neste estudo. No entanto, 2619 soluções obtiveram convergência e 135 não.

Nas ligações analisadas e simuladas com coeficiente médio de atrito 0,2, 112 possíveis soluções não apresentaram convergência, enquanto que nas ligações simuladas com coeficiente médio de atrito 0,4, 23 possíveis soluções não convergiram.

Das soluções que obtiveram convergência, a demanda pelo tempo de processamento das ligações simuladas com coeficiente médio de atrito 0,2 foi de 649 horas (62%), enquanto para as demais simuladas com coeficiente médio de atrito 0,4 a demanda foi de 398 horas (38%), o que totaliza 1047 horas.

A dificuldade ou mesmo a não convergência se apresentaram em etapas de carregamento associadas a grandes deformações e consequentes deslocamentos nodais elevados, mesmo considerando a não linearidade geométrica no processo de análise. Isso foi mais evidente nas ligações simuladas com coeficiente médio de atrito 0,2, que de uma maneira geral, demandaram de mais tempo de processamento para convergência.

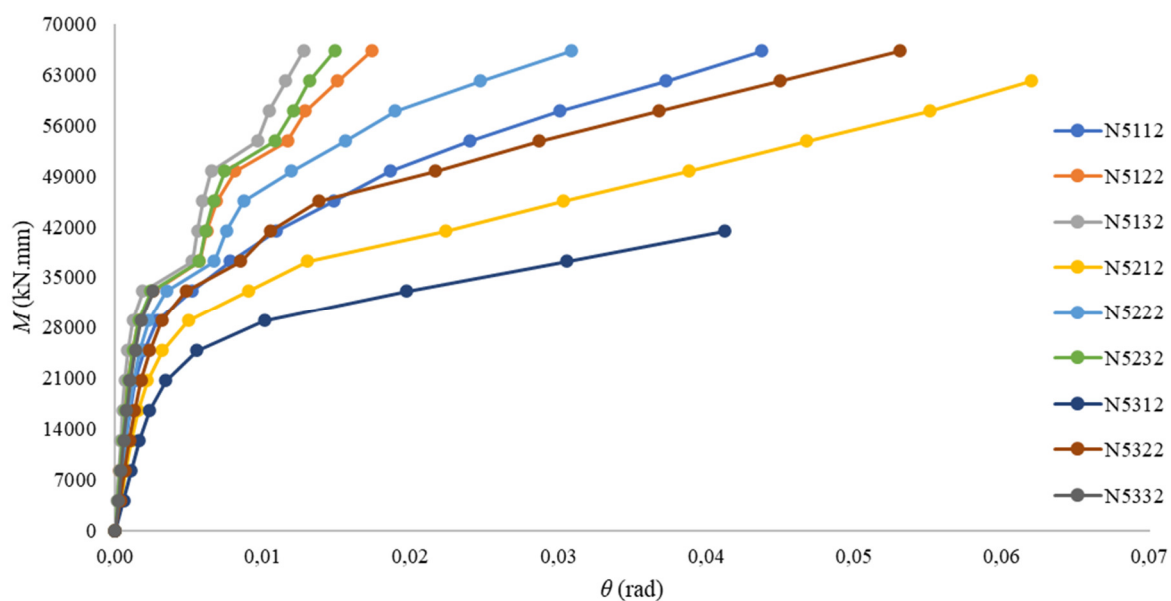
Os valores das rotações relativas, obtidos com a análise numérica, são apresentados nos Apêndices B e C, do mesmo modo que nas Tabelas 5.4 e 5.5 e nas Figuras 5.16 e 5.17, de ligações do grupo N5 com coeficientes médios de atrito 0,2 e 0,4, respectivamente.

Tabela 5.4 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N5 com $\mu = 0,2$

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu = 0,2$								
		N5112	N5122	N5132	N5212	N5222	N5232	N5312	N5322	N5332
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	4140	0,000273	0,000181	0,000138	0,000410	0,000261	0,000194	0,000586	0,000359	0,000224
3	8280	0,000499	0,000334	0,000260	0,000757	0,000475	0,000353	0,001108	0,000663	0,000401
4	12420	0,000737	0,000496	0,000388	0,001122	0,000702	0,000523	0,001651	0,000983	0,000589
5	16561	0,001000	0,000668	0,000524	0,001547	0,000946	0,000703	0,002338	0,001326	0,000789
6	20701	0,001361	0,000873	0,000677	0,002178	0,001248	0,000915	0,003450	0,001749	0,001025
7	24841	0,001944	0,001173	0,000881	0,003202	0,001692	0,001214	0,005551	0,002357	0,001356
8	28981	0,002839	0,001597	0,001208	0,004975	0,002268	0,001619	0,010109	0,003174	0,001750
9	33121	0,005173	0,002589	0,001863	0,009025	0,003479	0,002419	0,019728	0,004815	0,002588
10	37261	0,007796	0,005713	0,005224	0,013011	0,006696	0,005704	0,030586	0,008494	NC
11	41401	0,010893	0,006218	0,005561	0,022328	0,007526	0,006136	0,041213	0,010506	NC
12	45541	0,014764	0,006863	0,005946	0,030292	0,008705	0,006690	NC	0,013767	NC
13	49682	0,018609	0,008125	0,006517	0,038793	0,011920	0,007427	NC	0,021666	NC
14	53822	0,023991	0,011678	0,009619	0,046783	0,015557	0,010802	NC	0,028688	NC
15	57962	0,030082	0,012860	0,010423	0,055111	0,018956	0,012047	NC	0,036763	NC
16	62102	0,037286	0,015071	0,011533	0,061947	0,024718	0,013156	NC	0,044961	NC
17	66242	0,043742	0,017366	0,012748	NC	0,030855	0,014856	NC	0,053089	NC

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura 5.16 – Curvas M - θ das ligações do grupo N5 com $\mu = 0,2$ 

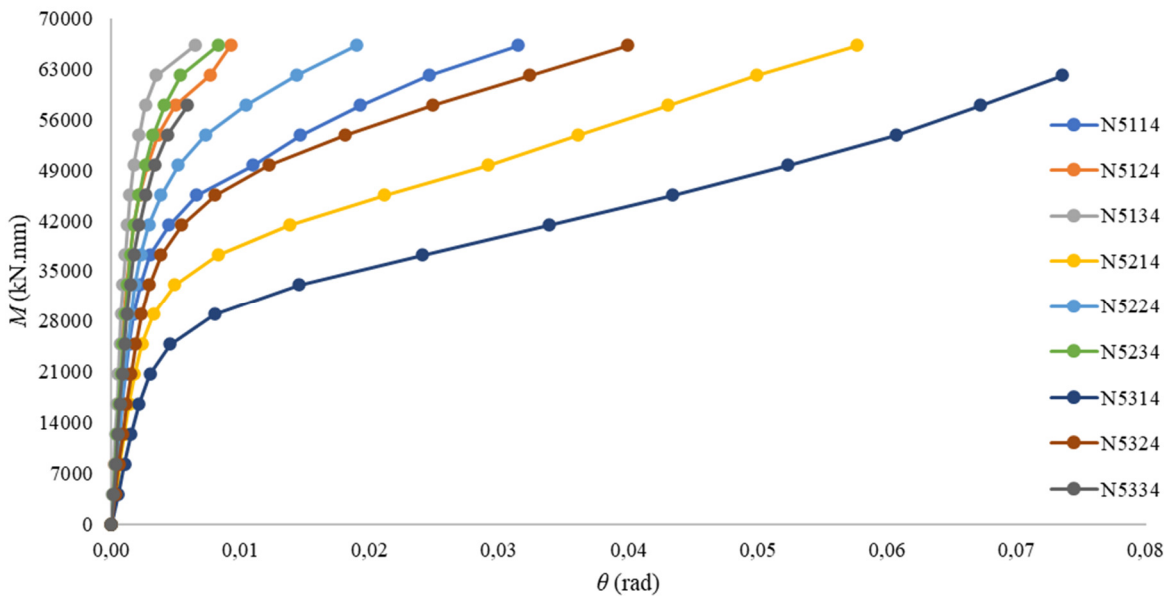
Fonte: Autor.

Tabela 5.5 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N5 com $\mu = 0,4$

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu = 0,4$								
		N5114	N5124	N5134	N5214	N5224	N5234	N5314	N5324	N5334
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	4140	0,000240	0,000155	0,000116	0,000369	0,000228	0,000167	0,000539	0,000319	0,000190
3	8280	0,000437	0,000283	0,000215	0,000681	0,000414	0,000301	0,001024	0,000593	0,000343
4	12420	0,000643	0,000418	0,000320	0,001013	0,000611	0,000444	0,001534	0,000879	0,000503
5	16561	0,000863	0,000559	0,000429	0,001373	0,000817	0,000594	0,002127	0,001180	0,000670
6	20701	0,001102	0,000707	0,000543	0,001799	0,001034	0,000750	0,002998	0,001502	0,000846
7	24841	0,001377	0,000863	0,000662	0,002371	0,001267	0,000912	0,004546	0,001863	0,001032
8	28981	0,001725	0,001030	0,000785	0,003277	0,001527	0,001084	0,007983	0,002310	0,001231
9	33121	0,002214	0,001220	0,000917	0,004917	0,001850	0,001273	0,014525	0,002929	0,001460
10	37261	0,003012	0,001451	0,001067	0,008261	0,002272	0,001497	0,024059	0,003845	0,001746
11	41401	0,004457	0,001743	0,001241	0,013776	0,002922	0,001766	0,033807	0,005441	0,002159
12	45541	0,006605	0,002211	0,001452	0,021133	0,003856	0,002156	0,043393	0,008010	0,002669
13	49682	0,010984	0,002780	0,001763	0,029169	0,005178	0,002619	0,052341	0,012167	0,003356
14	53822	0,014599	0,003610	0,002126	0,036034	0,007266	0,003201	0,060639	0,018053	0,004349
15	57962	0,019254	0,004931	0,002652	0,043037	0,010372	0,004087	0,067224	0,024813	0,005892
16	62102	0,024564	0,007636	0,003479	0,049856	0,014320	0,005360	0,073553	0,032368	NC
17	66242	0,031482	0,009228	0,006448	0,057651	0,018954	0,008238	NC	0,039943	NC

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura 5.17 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N5 com $\mu = 0,4$ 

Fonte: Autor.

6 MODELAGEM DA CURVA MOMENTO-ROTAÇÃO

Os problemas práticos nas mais diversas áreas podem ser formatados por modelos matemáticos preditores, também conhecidos como modelos de regressão de dados.

O poder explicativo de um modelo está associado à sua capacidade de descrever satisfatoriamente a relação entre as variáveis de resposta ou dependentes, condicionadas a um conjunto de variáveis preditoras ou independentes.

A origem metódica dos dados define um modelo empírico, fundamentado em conhecimentos práticos, experimentos ou dados de análise numérica, que fornecem um conjunto de evidências para pesquisa científica. No entanto, modelos empíricos não ignoram qualquer metodologia científica, mas sim, fazem uso para validar hipóteses e obter percepções conclusivas.

Neste estudo, a estratégia metodológica para definir um modelo matemático preditor prioriza a escolha do modelo mais simples ou de menor necessidade cognitiva, dentro de um conjunto de modelos com capacidades similares de predição. Modelos complexos, além da compreensão dificultosa, podem induzir a resultados errôneos ou mesmo viciados de difícil detecção e controle.

Mesmo que a medida de simplicidade seja algo subjetivo, a qualidade do ajuste de dados por um modelo preditor pode ser mensurável e capaz de fornecer informações sobre sua capacidade de predição.

6.1 MODELO PREDITOR

A relação momento-rotação relativa de ligações é, geralmente, modelada a partir de um conjunto de dados para dar origem a uma função matemática, expressa conforme a Equação 6.1 ou 6.2.

$$\theta = f(M), \quad (6.1)$$

$$M = g(\theta). \quad (6.2)$$

Para Wu e Chen (1990), um modelo preditor capaz de expressar as curvas momento-rotação de ligações semirrígidas deve satisfazer os seguintes requisitos:

- a) a curva deve passar pela origem;

- b) a inclinação da curva na origem deve ser igual à rigidez rotacional elástica inicial da ligação;
- c) conforme a rotação aumenta, a inclinação da curva deve se aproximar da rigidez rotacional plástica da ligação;
- d) para qualquer valor da rotação, a inclinação da curva representa a rigidez rotacional tangente da ligação;
- e) os parâmetros do modelo devem ter significado físico;
- f) os parâmetros devem ser determinados por procedimentos analíticos simples;
- g) o modelo deve ter um formato relativamente simples.

As curvas momento-rotação das ligações com dupla cantoneira de alma, obtidas no processo de análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), apresentam uma relação não linear abrandada nas etapas iniciais de carregamento, acentuando esta relação à medida que o carregamento aumenta, evidenciando a tipicidade de funções exponenciais com tendência assintótica superior.

Para tanto, diversos formatos de modelos matemáticos não lineares tiveram sua capacidade adaptativa testada, entre eles, modelos polinomiais de grau três a cinco e diversos outros exponenciais, como mostrados no Quadro 6.1.

Em um primeiro momento, testes com modelos polinomiais não tiveram êxito, inclusive com casos apresentando pontos de rigidez negativa. Posterior a isso, formatos exponenciais de uso em diversas áreas do conhecimento, como: o modelo de Michaelis-Menten, usado em bioquímica; o modelo Logístico, usado para modelar o crescimento de populações; o modelo de Mitscherlich, usado em estudos do crescimento de vegetais e; o modelo de Gompertz, muito aplicado em diferentes áreas, apresentaram pouca capacidade de adaptação aos dados deste estudo.

Por fim, outros formatos exponenciais foram testados, sendo que modelo preditor em formato exponencial de dois parâmetros, expresso pela Equação 6.10, apresentou, entre todos, a melhor capacidade adaptativa aos dois conjuntos de dados, e que junto ao conceito de padronização do momento, foi adotado para este estudo.

Quadro 6.1 – Modelos de equações não lineares

Modelo	Equação	
Polinomial	$f(x) = \sum_{i=0}^5 c_i(x)^i$	(6.3)
Michaelis-Menten	$f(x) = \frac{a \cdot x}{b + x}$	(6.4)
Logístico	$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(a + b \cdot x)}$	(6.5)
Mitscherlich	$f(x) = a(1 - \exp(b(c - x)))$	(6.6)
Gompertz	$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot e^{-c \cdot x}}$	(6.7)
Exponencial de um parâmetro	$f(x) = x^2 \cdot \exp(a \cdot x)$	(6.8)
Exponencial de dois parâmetros	$f(x) = x^a \cdot \exp(b \cdot x)$	(6.9)
	$f(x) = a \cdot \exp(b \cdot x) - 1$	(6.10)
Exponencial de três parâmetros	$f(x) = a \cdot \exp(b \cdot x) + c$	(6.11)
	$f(x) = \frac{a \cdot x^b}{\exp(c \cdot x)}$	(6.12)

Fonte: Autor.

6.1.1 Padronização do momento

O conjunto de dados da variável preditora, que corresponde aos valores do momento atuante na ligação, são modificados por um procedimento de padronização de dados proposto inicialmente por Somner (1969) e usado posteriormente em suas propostas preditoras por Frye e Morris (1975), Picard, Giroux e Brun (1976), Altman Jr. *et al.* (1982), Ang e Morris (1984) e Prabha *et al.* (2015).

Esta modificação resulta do produto entre o momento atuante e um fator adimensional de padronização (K_μ), determinado pela Equação 6.13, em termos das variáveis geométricas de projeto e específico para cada condição de rugosidade superficial.

$$K_{\mu} = \prod_{j=1}^m p_j^{a_j}, \quad (6.13)$$

na qual:

K_{μ} é o fator adimensional de padronização;

p_j representa o valor da j -ésima variável geométrica de projeto;

a_j é o valor do j -ésimo expoente, a ser determinado;

m é o número de variáveis geométricas de projeto.

Os expoentes adimensionais da Equação 6.13 são determinados a partir de um par de curvas momento-rotação de ligações idênticas, com exceção da variável geométrica de projeto p_j , que corresponde a um valor arbitrário da rotação relativa, como ilustra a Figura 6.1.

Para um valor arbitrário da rotação relativa, os respectivos momentos M_1 e M_2 tem a relação com as respectivas variáveis geométricas de projeto p_j , expressa pela Equação 6.14.

$$M_1 \cdot p_{j1}^{a_j} = M_2 \cdot p_{j2}^{a_j}. \quad (6.14)$$

Logo:

$$\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{p_{j2}}{p_{j1}} \right)^{a_j}. \quad (6.15)$$

Assim, reescrevendo a Equação 6.15, o expoente a_j tem seu valor determinado pela Equação 6.16.

$$a_j = \frac{\log(M_1/M_2)}{\log(p_{j2}/p_{j1})}, \quad (6.16)$$

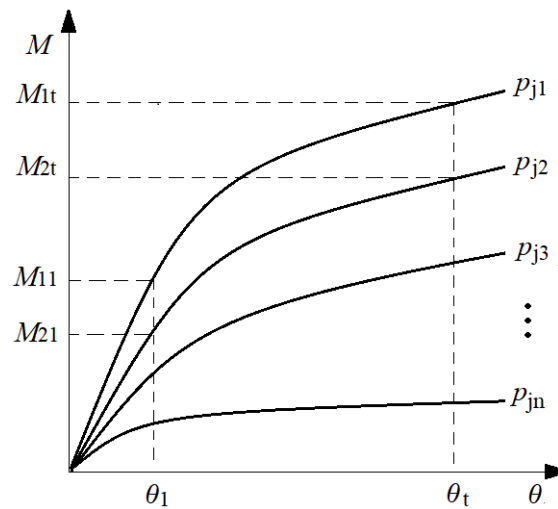
nas quais:

a_j é o expoente adimensional da j -ésima variável geométrica de projeto;

M_1 e M_2 são momentos atuantes para uma rotação arbitrária;

p_{j1} e p_{j2} correspondem aos valores das variáveis geométricas de projeto.

Figura 6.1 – Curvas momento-rotação para diferentes valores de p_j



Fonte: Adaptado de Zhu *et al.* (2018).

Para uma série de curvas, o valor final de a_j é definido pela média aritmética dos valores obtidos entre a quantidade de rotações selecionadas, que para este estudo foi empiricamente definido em quatro, e o respectivo número de combinações de pares de curvas, definido pela Equação 6.17.

$$\eta = \frac{n!}{2(n-2)!}, \quad (6.17)$$

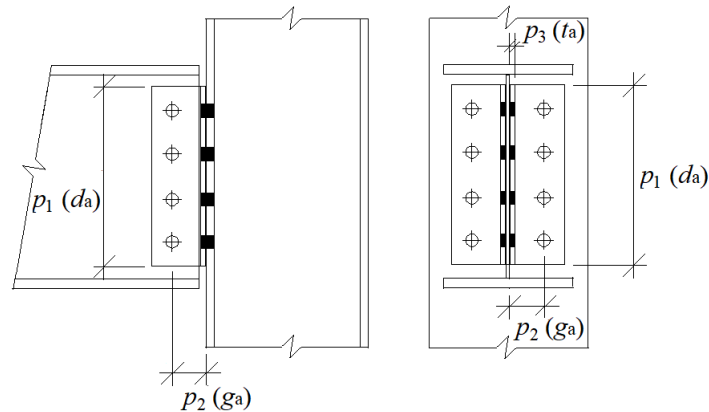
na qual:

- η é o número de combinações de pares de curvas;
- n representa o número de curvas.

Frente à Equação 6.13, as três variáveis geométricas de projeto consideradas neste estudo, ilustradas na Figura 6.2, são:

- a) p_1 , equivale à altura da cantoneira (d_a);
- b) p_2 , equivale ao gabarito de furação da cantoneira (g_a);
- c) p_3 , equivale à espessura da cantoneira (t_a).

Figura 6.2 – Variáveis geométricas de projeto



Fonte: Autor.

Em capítulos anteriores foi evidenciado que o coeficiente médio de atrito (μ) influencia no comportamento das ligações. Isso fez com que os expoentes adimensionais (a_j) tivessem seus valores médios determinados especificamente para grupos de ligações analisadas com coeficientes médios de atrito 0,2 e 0,4.

Considerando os procedimentos para sua determinação, a Tabela 6.1 apresenta os valores dos expoentes adimensionais do fator adimensional de padronização.

Tabela 6.1 – Valores médios dos expoentes adimensionais a_j

μ	a_1	a_2	a_3
0,2	-2,508	1,207	-1,468
0,4	-2,505	1,475	-1,706

Fonte: Autor.

Diante disso, a Equação 6.13, que define o valor do fator adimensional de padronização em termos das variáveis geométricas de projeto de ligações executadas com dupla cantoneira de alma, assume os formatos das Equações 6.18 e 6.19.

$$K_{0,2} = d_a^{-2,508} g_a^{1,207} t_a^{-1,468}, \quad (6.18)$$

$$K_{0,4} = d_a^{-2,505} g_a^{1,475} t_a^{-1,706}, \quad (6.19)$$

nas quais:

$K_{0,2}$ representa o fator adimensional de padronização para ligações com $\mu = 0,2$;

$K_{0,4}$ representa o fator adimensional de padronização para ligações com $\mu = 0,4$;

d_a é a altura da cantoneira;

g_a é o gabarito de furação da cantoneira;

t_a é a respectiva espessura das abas da cantoneira.

De posse do valor do fator de padronização específico para cada ligação, o produto com o momento atuante é definido e denominado como momento padronizado ($K \cdot M$), assumindo o status de variável preditora, que junto aos respectivos valores da rotação relativa, obtidos pelo processo de análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos, formam o conjunto de dados usados no processo de regressão.

6.1.2 Modelo exponencial

Diante de suas características não lineares, um modelo exponencial natural de dois parâmetros é proposto para descrever a relação entre a variável preditora e a variável de resposta, que formam as curvas momento-rotação de ligações parafusadas entre viga e coluna em aço executadas com dupla cantoneira de alma, tal como expressa a Equação 6.20.

$$\theta = \alpha_\mu [\exp(\beta_\mu \cdot K_\mu \cdot M) - 1], \quad (6.20)$$

na qual:

θ é a variável de resposta que corresponde à rotação relativa da viga, em radianos;

α_μ e β_μ são os parâmetros de ajuste do modelo preditor, específicos para cada condição de rugosidade superficial;

$\exp()$ é a função exponencial natural cuja base é o número de Euler;

K_μ é o fator adimensional de padronização, específico para cada condição de rugosidade superficial;

M é a variável preditora que corresponde ao momento atuante na ligação, em kN·mm.

A combinação de diferentes valores para os parâmetros α_μ e β_μ faz com que o modelo preditor apresente diferentes curvaturas, o que facilita seu ajuste ao conjunto de dados obtidos na análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos.

Uma das restrições do modelo está no limite inferior da função, mais precisamente quando o valor da variável preditora é nulo. Esta restrição é resolvida com a presença do valor

unitário negativo na Equação 6.20, fazendo com que a curva obrigatoriamente passe pela origem.

De posse dos conjuntos de dados para ambos os coeficientes médios de atrito, os parâmetros de ajuste α_μ e β_μ do modelo preditor são estimados por análise de regressão de dados com o uso do programa R, v. 4.0.5 (R Core Team, 2021).

O programa R é uma ferramenta para uso em ciência de dados, visto sua capacidade de gerir dados, executar cálculos e testes estatísticos, gerar gráficos e outras necessidades específicas que podem ser supridas pela criação de funções ou pacotes (*Packages*).

Em sua versão básica, o programa R possui instalado algumas funções, entre as quais se encontra a *nls()*, acrônimo para *nonlinear least squares*, usada para regressão não linear de dados, cuja sintaxe básica é mostrada abaixo.

```
nls(formula, data, start, control, algorithm,
    trace, subset, weights, na.action, model, lower, upper, ...)
```

Esta função utiliza como padrão o algoritmo de Gauss-Newton para resolver problemas de otimização, o qual faz uso de sucessivos processos iterativos para obter os valores dos parâmetros de ajuste do modelo preditor, que variam pouco a pouco, de modo a se aproximarem dos valores que melhor se ajustam ao conjunto de dados.

Para tanto, o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) é adotado como função-objetivo padrão pela função *nls()*, cujo propósito é minimizar a soma dos quadrados dos resíduos, ou de forma sintética, das diferenças entre os valores obtidos pela análise numérica e os valores preditos pelo modelo, até um valor ótimo mais próximo de zero, tal como expressa a Equação 6.21.

$$\text{MMQ} = \min \sum_i^n (y_i - f(x_i))^2, \quad (6.21)$$

na qual:

n representa o número de dados do conjunto;

y_i representa o valor da rotação relativa obtida na análise numérica;

$f(x_i)$ representa o valor predito da rotação relativa pelo modelo.

O processo de regressão de dados realizado pela função $nls()$ resulta em valor mínimo da função-objetivo (f_{\min}) para ambos os conjuntos de dados e são apresentados na Tabela 6.2, junto com o respectivo coeficiente de determinação R^2 .

Tabela 6.2 – Parâmetros de ajuste do modelo exponencial

μ	α	β	f_{\min}	R^2
0,2	0,017253	11,156876	0,076023	0,93
0,4	0,014869	5,384507	0,094099	0,89

Fonte: Autor.

O coeficiente de determinação R^2 , cujos valores podem variar entre zero e um, é uma referência estatística conhecida para avaliar a qualidade do ajuste de dados por regressão. Porém, a literatura é categórica em afirmar que valores altos de R^2 não garantem que o modelo se ajusta bem aos dados, nem mesmo valores muito próximos de um garantem o ajuste perfeito aos dados, sobretudo em regressão não linear.

No entanto, o coeficiente R^2 pode ser útil como comparativo inferencial entre dois ou mais modelos, indicando que quanto maior for seu valor, melhor o modelo preditor se ajusta ao conjunto de dados.

6.2 DIAGNÓSTICO DO MODELO

A definição do modelo preditor mais adequado pode ter amparo em uma variedade de medidas e procedimentos de inferência estatística, no entanto, algumas particularidades exigidas pelo modelo podem não ser captadas por essas técnicas.

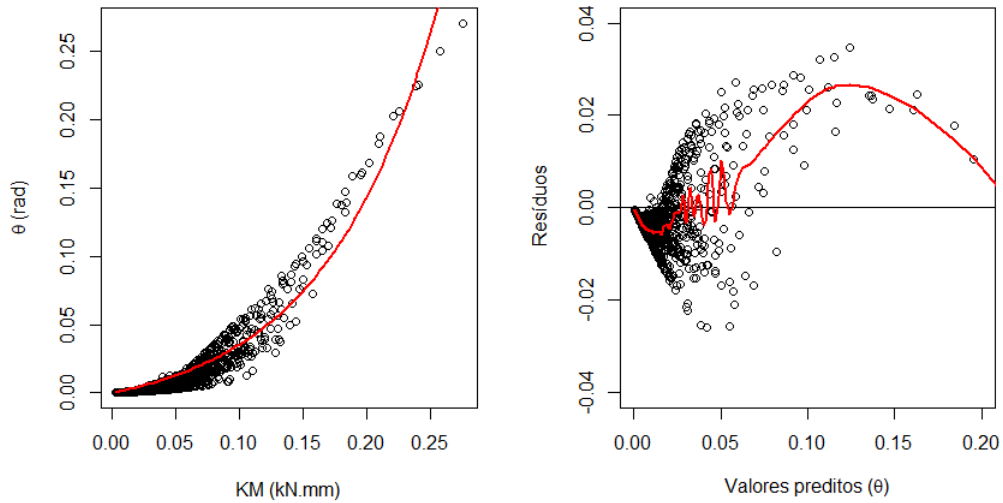
Em síntese, nenhuma metodologia estatística isolada é capaz de afirmar categoricamente qual modelo preditor melhor se adapta ao conjunto de dados, o que demanda de conhecimento empírico para entendimento claro e aceitação do modelo.

O formato de apresentação gráfica de curvas momento-rotação de ligações, no processo de regressão de dados, difere do convencional pela literatura para descrever tal relação. Isso se deve ao padrão cartesiano em que as variáveis predictoras ou independentes são arranjadas no eixo das abcissas, enquanto as variáveis de resposta ou dependentes se apresentam no eixo das ordenadas, reafirmando a convenção de que $y = f(x)$ e, por analogia neste estudo, θ varia em termos de $K_{\mu} \cdot M$.

O diagnóstico dos processos de regressão pela função $nls()$, pode ser realizado pela sobreposição das curvas de regressão ao respectivo conjunto de dados, como mostram as Figuras 6.3 e 6.4, junto à respectiva dispersão dos resíduos das ligações analisadas com coeficientes médios de atrito 0,2 e 0,4, respectivamente.

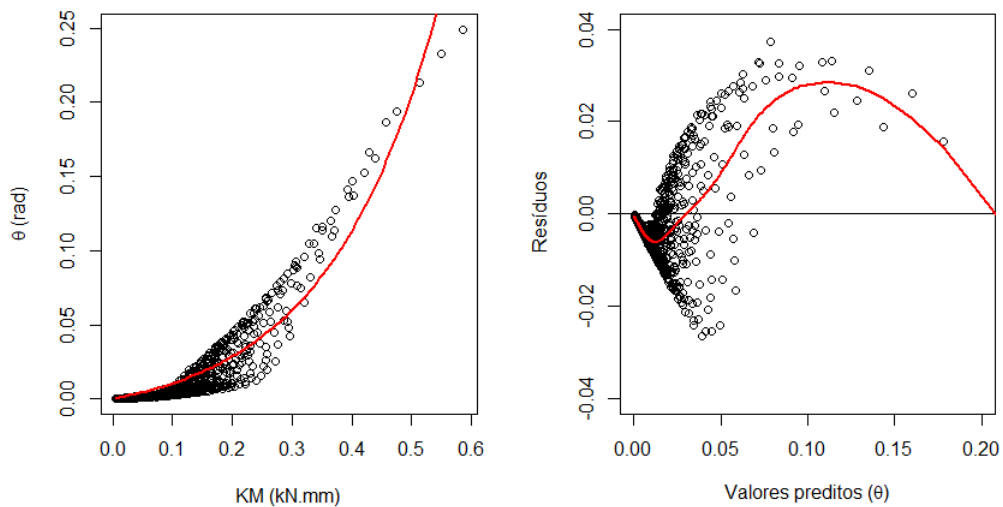
A capacidade de ajuste de um modelo preditor pode ser considerada satisfatória se os valores residuais se apresentam dispersos de forma aleatória e simétrica, não viesados, ou seja, é desejável que os resíduos tenham uma distribuição normal e valores mais próximos de zero ao longo da faixa de ajuste.

Figura 6.3 – Curvas de regressão e de dispersão de resíduos de ligações com $\mu = 0,2$



Fonte: Autor.

Figura 6.4 – Curvas de regressão e de dispersão de resíduos de ligações com $\mu = 0,4$

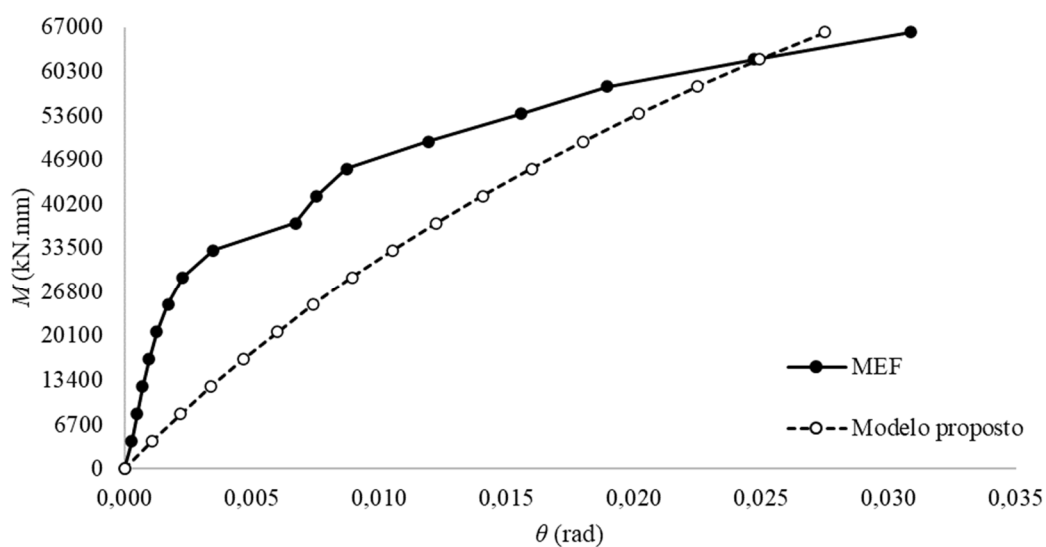


Fonte: Autor.

Os dados de inferência apresentados anteriormente evidenciam um ajuste precário dos dados pelo modelo preditor, sobretudo em etapas iniciais de carregamento, quando os valores das rotações ainda são baixos.

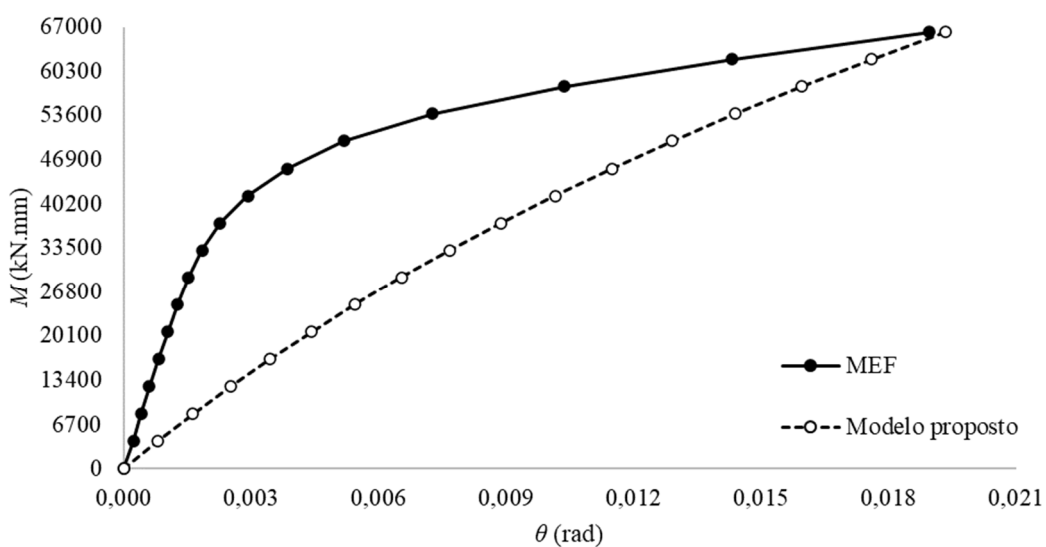
Esta afirmação pode ser atestada por uma análise individual, como apresentam os gráficos das Figuras 6.5 e 6.6, das ligações N5222 e N5224, respectivamente.

Figura 6.5 – Curvas $M-\theta$ da ligação N5222



Fonte: Autor.

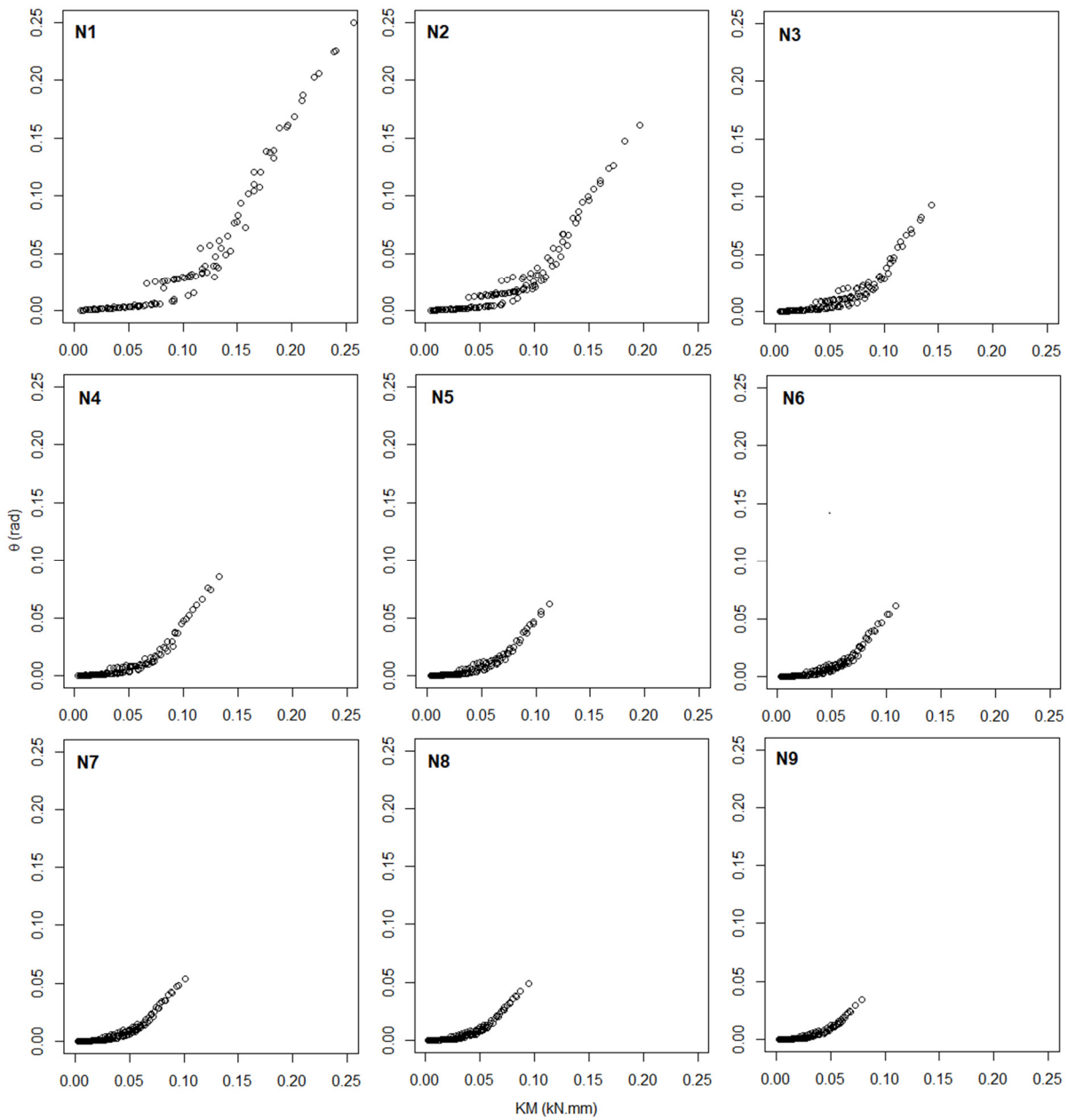
Figura 6.6 – Curvas $M-\theta$ da ligação N5224



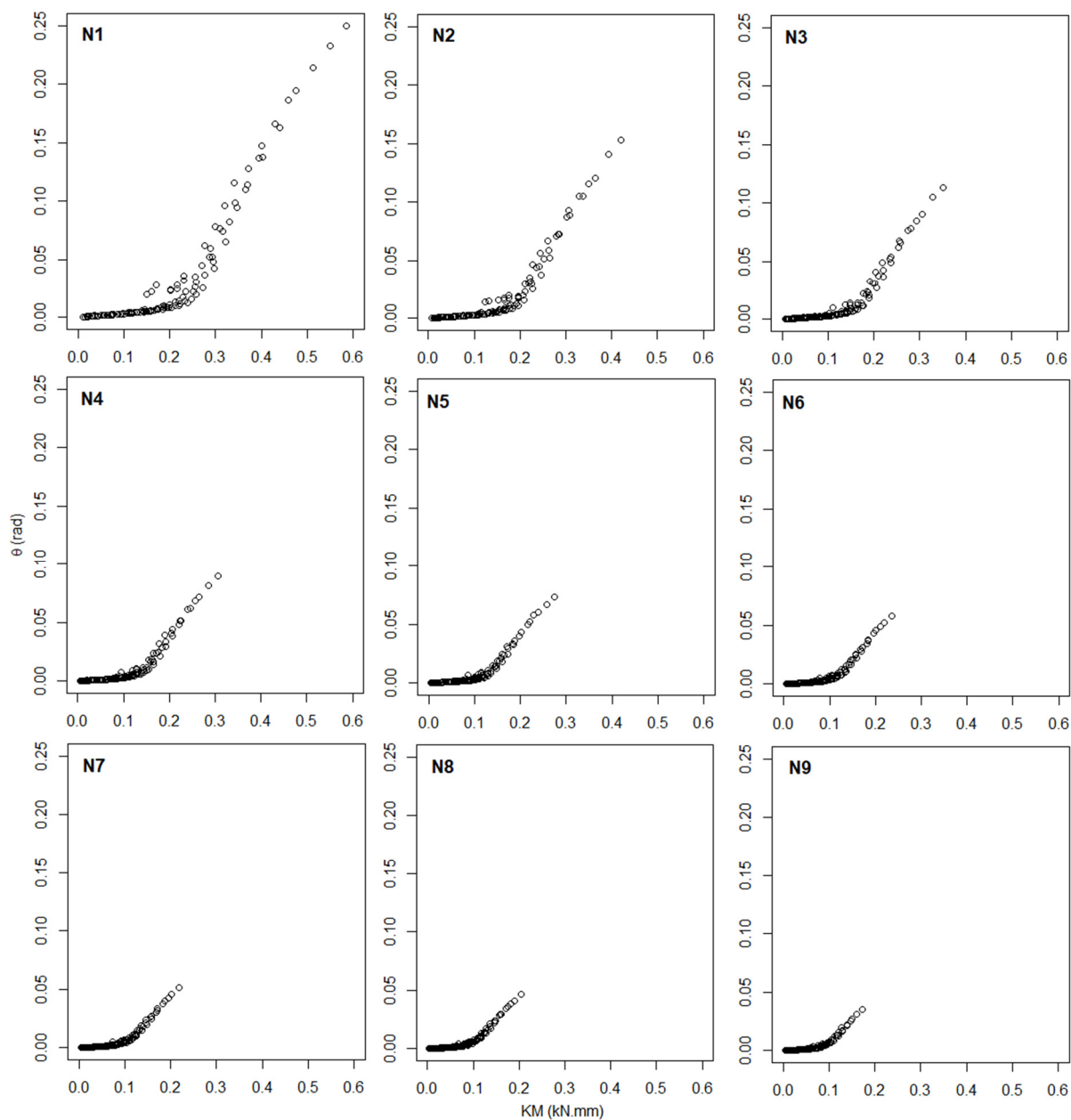
Fonte: Autor.

Frente a isso, é evidente a ineficiência preditiva do modelo nos termos até aqui propostos. Isso pode ser atribuído, em parte, à dispersão dos dados pela amplitude dos valores da variável geométrica de projeto relativa à altura da cantoneira (d_a), como se pode observar nos gráficos das Figuras 6.7 e 6.8, em que os dados dispersos são apresentados por grupos de ligações de mesma altura.

Figura 6.7 – Dispersão dos dados em grupos de ligações com $\mu = 0,2$



Fonte: Autor.

Figura 6.8 – Dispersão dos dados em grupos de ligações com $\mu = 0,4$ 

Fonte: Autor.

Esta amplitude dos valores dimensionais faz com que as ligações do mesmo grupo apresentem características de semirrígidez distintas, com variações desde o “menos rígido”, como para ligações do grupo N1 com d_a igual a 155 mm, ao “mais rígido”, como é o caso do grupo N9, cujo valor da altura da cantoneira é de 755 mm.

Outro agente contribuinte para o comportamento ineficiente do modelo preditor está associado ao formato da função-objetivo empregada pela função $nls()$. Isso corrobora o citado por Tucci (2005), em que o formato de função-objetivo que utiliza o conceito do Método dos Mínimos Quadrados tende a priorizar o ajuste dos dados de valores maiores.

Essa tendência apresentada pelo Método dos Mínimos Quadrados, pode ter explicação no exemplo hipotético apresentado na Tabela 6.3, cujos valores simulam de maneira análoga um processo de regressão.

Tabela 6.3 – Analogia de regressão com o Método dos Mínimos Quadrados

Ponto	Observado	Predito	Resíduo	MMQ	% MMQ
1	1	2	100%	1	0%
2	10	20	100%	100	0%
3	100	200	100%	10000	3%
4	200	400	100%	40000	13%
5	300	600	100%	90000	30%
6	400	800	100%	160000	53%
Σ				300101	100%

Fonte: Autor.

Neste exemplo, os valores residuais se apresentam proporcionalmente iguais, isto é, com o dobro do respectivo valor observado. No entanto, à medida que o valor residual aumenta, sua representatividade no valor ótimo da função-objetivo da Equação 6.11 se torna mais expressiva, visto a característica de função quadrática do Método dos Mínimos Quadrados.

Assim, o Método dos Mínimos Quadrados, que busca minimizar o valor da respectiva função-objetivo, naturalmente dará prioridade a reduzir os valores residuais nos pontos mais expressivos da curva, tornando-o vulnerável para uso em modelos não lineares em que o conjunto de dados apresenta valores amplos, uma vez que há esta predisposição em ajustar os dados com valores maiores em detrimento aos menores.

Estas dificuldades preditivas pelo modelo exponencial proposto podem ser mitigadas, adotando o processo de regressão de dados por grupo de ligações, somado ao emprego de outro formato para a função-objetivo, cuja minimização do seu valor pode ser alcançada por técnicas de otimização matemática.

6.3 OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

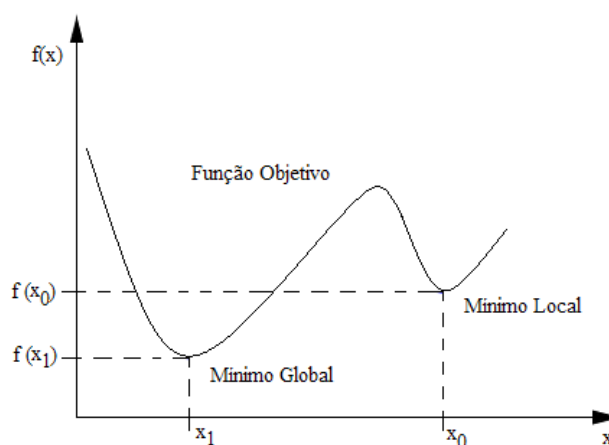
A otimização matemática pode ser descrita como sendo a busca pelo valor máximo ou mínimo de uma função-objetivo, a qual possui uma ou múltiplas variáveis, podendo ou não estar sujeita a restrições. Esta busca pelo valor “ótimo” se dá com o emprego de um algoritmo que utiliza técnicas para a solução de tais problemas de otimização.

Para solucionar o problema de minimização da função-objetivo, cuja dependência está atrelada à definição dos parâmetros de ajuste do modelo predictor, técnicas de otimização matemática podem ser aplicadas para encontrar uma solução “ótima” de um problema qualquer.

Tais técnicas usam métodos matemáticos para a solução de problemas de otimização, que são comumente classificados em dois grupos:

- a) métodos determinísticos: usam algoritmos de solução exata, em que para uma dada entrada, a mesma saída é produzida em tantas vezes solucionada. Isso possibilita que uma parada prematura ocorra em um ponto de valor mínimo ou de valor máximo local da função-objetivo;
- b) métodos probabilísticos ou estocásticos: usam algoritmos aproximativos, o que reduz a possibilidade de o resultado estacionar aleatoriamente em um ponto de mínimo ou de máximo local, tendendo a encontrar o valor ótimo global, ou muito próximo, de uma função-objetivo, como apresenta a Figura 6.9.

Figura 6.9 – Pontos de valores de máximo e de mínimo de uma função-objetivo



Fonte: Bordignon (2010).

Alguns métodos estocásticos foram desenvolvidos a partir da inspiração de alguns princípios baseados em mecanismos físicos de auto-organização, no comportamento adaptativo ou em processos biológicos evolutivos da natureza.

A estratégia de busca pela solução de um problema complexo por um algoritmo de otimização estocástico é chamada de heurística. Mesmo que num primeiro momento a solução se apresente imperfeita, estratégias de busca capazes de melhorar esta solução, de modo a escapar dos mínimos locais são realizados.

Este processo que emprega não apenas uma heurística, mas sim um conjunto delas é conhecido como meta-heurística, que no grego, “meta” significa nível superior e “heurística”, encontrar (BORDIGNON, 2010), constituindo assim um nível heurístico superior, o que melhora a eficiência do processo de busca por soluções ótimas globais em um problema de otimização.

Para tanto, o método *Simulated Annealing* é adotado neste estudo, tendo em conta sua familiaridade e testes realizados apresentarem resultados satisfatórios para a estimativa dos parâmetros de ajuste do modelo preditor, que são as variáveis que se alteram durante o processo de otimização.

6.3.1 Método *Simulated Annealing*

Um algoritmo para modelagem do processo de recozimento de metais foi apresentado por Metrópolis *et al.* (1953) e posteriormente adaptado por Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983), simulando (*simulated*) o conceito termodinâmico de recozimento de metais (*annealing*), em que um metal é aquecido até próximo ao seu ponto de fusão e então resfriado lentamente até sua estabilidade, resultando em um sólido íntegro e livre de defeitos.

Em síntese, a analogia matemática ao processo de recozimento de metais inicia com um valor suficientemente alto da temperatura, e de forma iterativa várias soluções são geradas para a escolha da melhor, e assim o equilíbrio térmico nesse ponto é atingido. Então, a temperatura é gradativamente reduzida e o equilíbrio restabelecido sucessivamente até o resfriamento total, o que evidencia que o valor “ótimo” da função-objetivo foi encontrado.

O valor da temperatura inicial, o número de iterações e a razão de resfriamento são parâmetros de ajuste do algoritmo e influenciam no tempo de execução e na qualidade dos resultados. Uma temperatura inicial elevada, quando reduzida lentamente e com um grande número de iterações, conduzem a uma melhor solução final.

6.3.2 Pacote *GenSA* do programa R

O programa R, v. 4.0.5 (R Core Team, 2021), possibilita utilizar uma gama de funções extras, denominadas pacotes. Por sua flexibilidade, a linguagem R permite o desenvolvimento de variados pacotes para os mais distintos fins, incluindo ferramentas capazes de resolver problemas de otimização.

Um desses pacotes disponíveis e denominado *GenSA* (XIANG *et al.*, 2013), acrônimo de *Generalized Simulated Annealing*, emprega o método de otimização matemática *Simulated Annealing* e é usado neste estudo para a busca do mínimo global de uma função-objetivo não linear, cuja sintaxe básica é apresentada abaixo.

```
GenSA(par, fn, lower, upper, control=list(), ...)
```

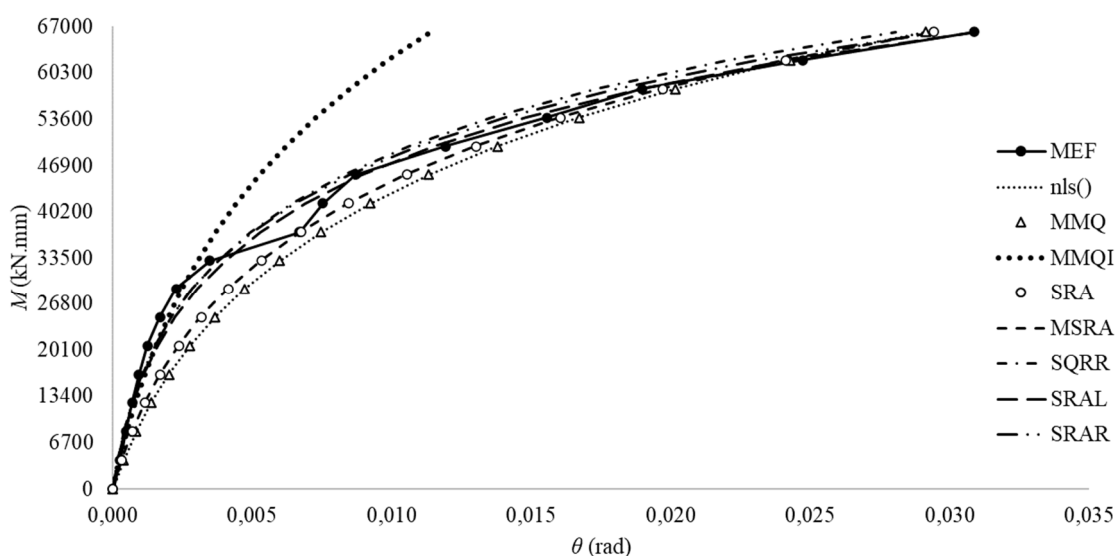
Este pacote, diferente da função *nls()*, permite que qualquer formato de função-objetivo possa ser usado para a estimativa dos valores das variáveis de um problema matemático a ser otimizado.

6.4 FUNÇÃO-OBJETIVO

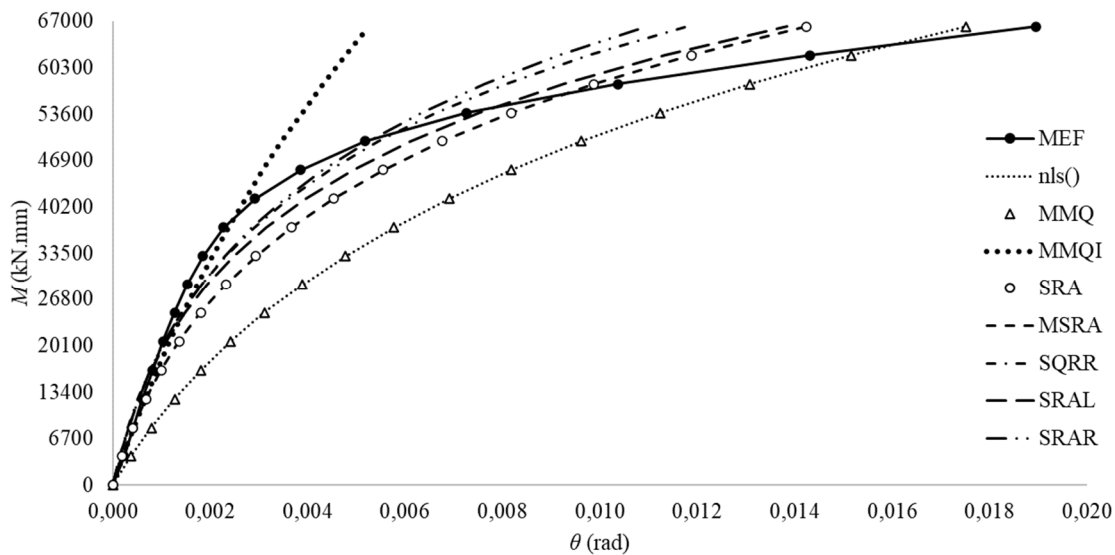
O desempenho do processo de análise de regressão de dados por um modelo preditor depende, além da escolha do algoritmo de otimização, do formato adequado da função-objetivo que busca minimizar as diferenças (ou resíduos) entre os valores de um conjunto de dados e os respectivos valores preditos por um modelo.

O formato da função-objetivo exerce influência no resultado do processo de regressão de dados, sobretudo quando o problema se apresenta na forma não linear. Esta afirmação pode ser constatada nos gráficos das Figuras 6.10 e 6.11, respectivos às ligações N5222 e N5224.

Figura 6.10 – Curvas $M-\theta$ da ligação N5222 obtidas por diferentes formatos de função-objetivo



Fonte: Autor.

Figura 6.11 – Curvas $M-\theta$ da ligação N5224 obtidas por diferentes formatos de função-objetivo

Fonte: Autor.

A escolha de uma função-objetivo eficiente envolve a avaliação empírica e inferencial entre diversos formatos factíveis capazes de minimizar a soma dos resíduos a partir da estimativa dos parâmetros de ajuste dos modelos preditores, como os apresentados no Quadro 6.2.

Quando o Método dos Mínimos Quadrados tem seu formato invertido (MMQI), conforme a Equação 6.23, os resultados da análise de regressão apresentam efeito oposto, priorizando desta vez o ajuste dos dados com valores menores, visto a representatividade no valor final a ser minimizado, como mostrado na Tabela 6.4.

O mais simples entre os formatos testados, apresentado pela Equação 6.24, consiste na soma dos resíduos absolutos (SRA), de modo que valores positivos e negativos não sejam anulados no processo de regressão, o que afetaria de maneira indesejável o resultado. Suas características no processo de regressão se assemelham ao MMQ, apresentando tendência ao ajuste dos dados com valores maiores.

A função-objetivo SRA, quando fracionada pelo número de dados do conjunto, passa a expressar a média da soma dos resíduos absolutos (MSRA), conforme a Equação 6.25, no entanto, seu comportamento é semelhante ao formato SRA.

As características dos três formatos descritos acima podem ser exemplificadas de maneira hipotética pela Tabela 6.4, onde é evidenciado a predisposição das funções-objetivo SRA e MSRA em priorizar o ajuste dos dados de valores maiores, da mesma forma que ocorre com o MMQ.

Quadro 6.2 – Formatos de funções-objetivo

Descrição	Equação
Método dos mínimos quadrados	$\text{MMQ} = \min \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \quad (6.22)$
Método dos mínimos quadrados inverso	$\text{MMQI} = \min \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{f(x_i)} \right)^2 \quad (6.23)$
Soma dos resíduos absolutos	$\text{SRA} = \min \sum_{i=1}^n y_i - f(x_i) \quad (6.24)$
Média da soma dos resíduos absolutos	$\text{MSRA} = \min \frac{\sum_{i=1}^n y_i - f(x_i) }{n} \quad (6.25)$
Soma dos quadrados dos resíduos relativos	$\text{SQRR} = \min \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - f(x_i)}{y_i} \right)^2 \quad (6.26)$
Soma dos resíduos absolutos dos logaritmos	$\text{SRAL} = \min \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - \ln(f(x_i)) \quad (6.27)$
Soma dos resíduos absolutos relativos	$\text{SRAR} = \min \sum_{i=1}^n \frac{ y_i - f(x_i) }{y_i} \quad (6.28)$

Fonte: Autor.

Tabela 6.4 – Analogia de regressão com formatos MMQI, SRA e MSRA

Ponto	Obs.	Predito	Resíduo	MMQI	%	SRA	%	MSRA	%
1	1	2	100%	0,25000	99%	1,00	0%	0,17	0%
2	10	20	100%	0,00250	1%	10,00	1%	1,67	1%
3	100	200	100%	0,00003	0%	100,00	10%	16,67	10%
4	200	400	100%	0,00001	0%	200,00	20%	33,33	20%
5	300	600	100%	0,00000	0%	300,00	30%	50,00	30%
6	400	800	100%	0,00000	0%	400,00	40%	66,67	40%
Σ				0,25254	100%	1011,00	100%	168,50	100%

Fonte: Autor.

A qualidade do ajuste de dados no processo de regressão pode ser melhorada com o uso de uma função-objetivo que abrange por igual todos os valores. Este propósito pode ser alcançado pelo uso dos formatos de função-objetivo, caracterizados pela soma dos quadrados dos resíduos relativos (SQRR), pela soma dos resíduos absolutos dos logaritmos (SRAL) ou pela soma dos resíduos absolutos relativos (SRAR), em que os resíduos apresentam um peso similar no valor final da função, não havendo prioridade no ajuste de dados, como exemplifica a Tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Analogia de regressão com formatos SQRR, SRAL e SRAR

Ponto	Obs.	Predito	Resíduo	SQRR	%	SRAL	%	SRAR	%
1	1	2	100%	1,00	17%	0,301	17%	1,00	17%
2	10	20	100%	1,00	17%	0,301	17%	1,00	17%
3	100	200	100%	1,00	17%	0,301	17%	1,00	17%
4	200	400	100%	1,00	17%	0,301	17%	1,00	17%
5	300	600	100%	1,00	17%	0,301	17%	1,00	17%
6	400	800	100%	1,00	17%	0,301	17%	1,00	17%
Σ				6,00	100%	1,806	100%	6,00	100%

Fonte: Autor.

Os valores dos parâmetros α_μ e β_μ , para o grupo de dados N5 e que originaram as curvas apresentadas nos gráficos das Figuras 6.10 e 6.11, são mostrados na Tabela 6.6, onde é possível constatar as semelhanças entre os valores obtidos com os formatos SRA e MSRA, do mesmo modo entre os formatos SQRR, SRAL e SRAR, o que corrobora coma a analogia de regressão apresentadas nas tabelas anteriores.

Tabela 6.6 – Valores dos parâmetros α_μ e β_μ obtidos para grupo N5

Formato	$\alpha_{0,2}$	$\beta_{0,2}$	$\alpha_{0,4}$	$\beta_{0,4}$
<i>nls()</i>	0,002089	31,648230	0,002866	12,681280
MMQ	0,002089	31,648230	0,002866	12,681280
MMQI	0,001756	23,569707	0,003624	5,796441
SRA	0,001512	35,323788	0,001034	17,404177
MSRA	0,001484	35,523646	0,001032	17,416489
SQRR	0,000690	43,643310	0,000748	18,230540
SRAL	0,000708	44,461850	0,000696	19,646840
SRAR	0,000653	44,882190	0,000824	17,208730

Fonte: Autor.

Entre as diversas opções, dentro de um conjunto de soluções factíveis para um ajuste de curvas satisfatório, o mais simples deve ser escolhido. Neste sentido, a função-objetivo

escolhida para o ajuste dos dados tem como base a Equação 6.28, cujo formato fracionário se caracteriza pela somatória das razões entre os valores residuais absolutos e os respectivos valores obtidos pela análise numérica (SRAR). Este formato, a cada razão, fornece a taxa residual absoluta, o serve como um indicativo de qualidade do ajuste a cada ponto.

6.5 PARÂMETROS DE AJUSTE DO MODELO PREDITOR

Os parâmetros de ajuste α_μ e β_μ do modelo exponencial proposto pela Equação 6.20, se apresentam como variáveis no processo de regressão de dados e são definidos ao atingir o valor ótimo ou mínimo da função-objetivo expressa pela Equação 6.28.

Uma vez que o processo de regressão de dados se dá por grupos de ligações com a mesma altura da cantoneira, isso resulta em nove modelos preditores com parâmetros de ajuste distintos para ambos os coeficientes médios de atrito, como apresenta a Tabela 6.7, junto com os respectivos valores mínimos da função-objetivo (f_{\min}) e do coeficiente de determinação R^2 .

Tabela 6.7 – Parâmetros α_μ e β_μ do modelo exponencial, valor mínimo da função-objetivo e R^2

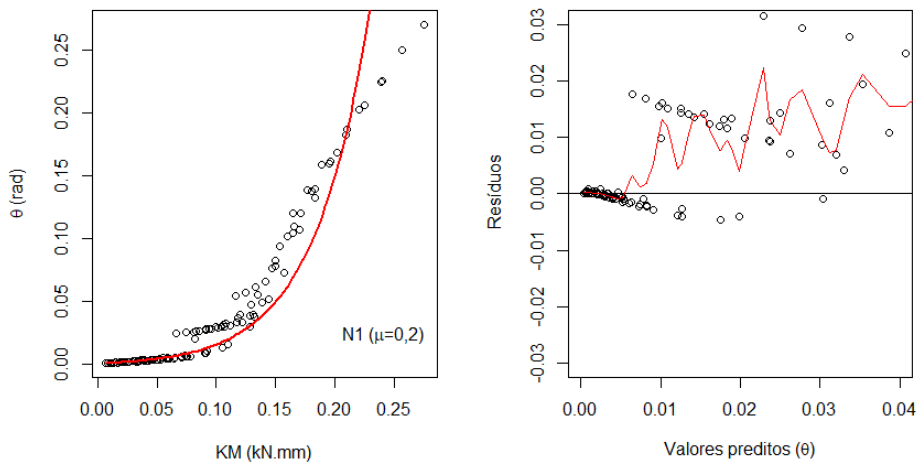
N	d_a (mm)	$\alpha_{0,2}$	$\beta_{0,2}$	f_{\min}	R^2	$\alpha_{0,4}$	$\beta_{0,4}$	f_{\min}	R^2
1	155	0,002046	21,49879	36,27327	0,74	0,002332	8,66858	36,88403	0,79
2	230	0,001271	29,02314	39,13599	0,83	0,001359	12,01777	34,30853	0,85
3	305	0,000974	34,28831	32,35455	0,93	0,001113	13,95858	30,95601	0,87
4	380	0,000803	39,05569	25,40979	0,91	0,000950	15,58514	29,22096	0,88
5	455	0,000653	44,88219	27,92724	0,93	0,000824	17,20873	29,59948	0,88
6	530	0,000642	46,63703	27,95026	0,92	0,000641	20,47977	26,95618	0,92
7	605	0,000565	51,02366	27,08931	0,91	0,000566	22,51462	25,84991	0,91
8	680	0,000511	55,08054	25,61328	0,91	0,000512	24,35780	25,35303	0,91
9	755	0,000417	60,79690	21,09647	0,94	0,000455	26,23945	24,52145	0,95

Fonte: Autor.

Uma avaliação gráfica da capacidade preditora do modelo pode ser feita pela sobreposição das curvas de regressão ao respectivo conjunto de dados. Esta sobreposição fornece um diagnóstico preliminar da capacidade preditora dos modelos, porém, por si só, não é capaz de atestar sua qualidade.

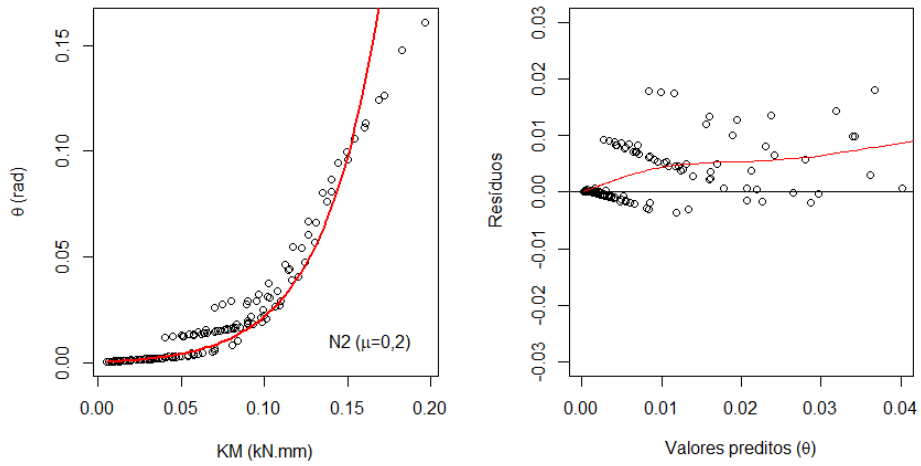
No entanto, tal diagnóstico pode ser subsidiado pela respectiva dispersão dos resíduos, tal como apresentado nos gráficos das Figuras 6.12 a 6.29, de forma sintetizada na região que concentra a maioria dos pontos de predição.

Figura 6.12 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N1 com $\mu = 0,2$



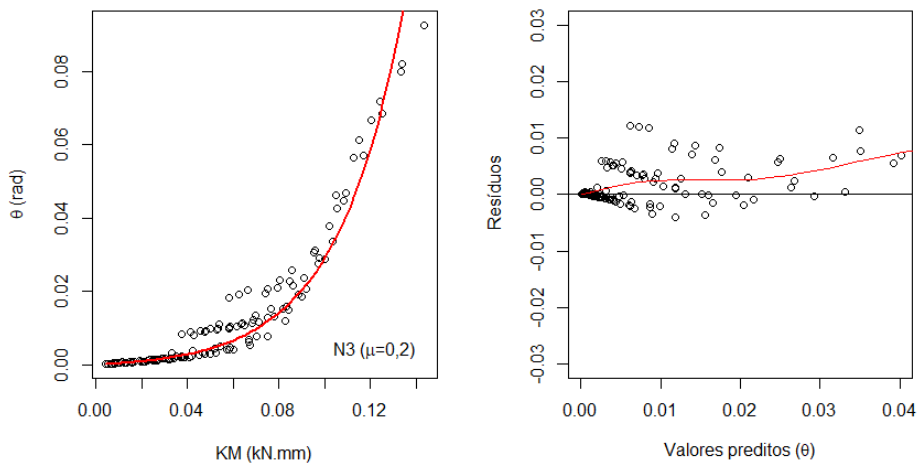
Fonte: Autor.

Figura 6.13 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N2 com $\mu = 0,2$



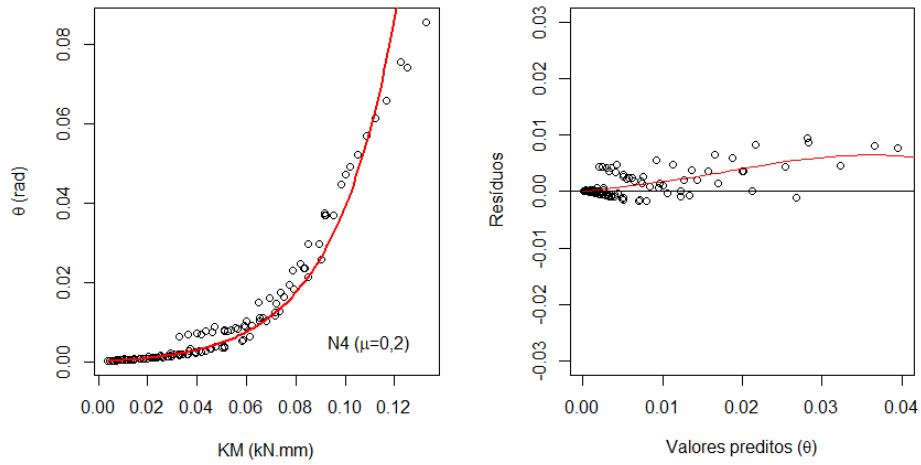
Fonte: Autor

Figura 6.14 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N3 com $\mu = 0,2$



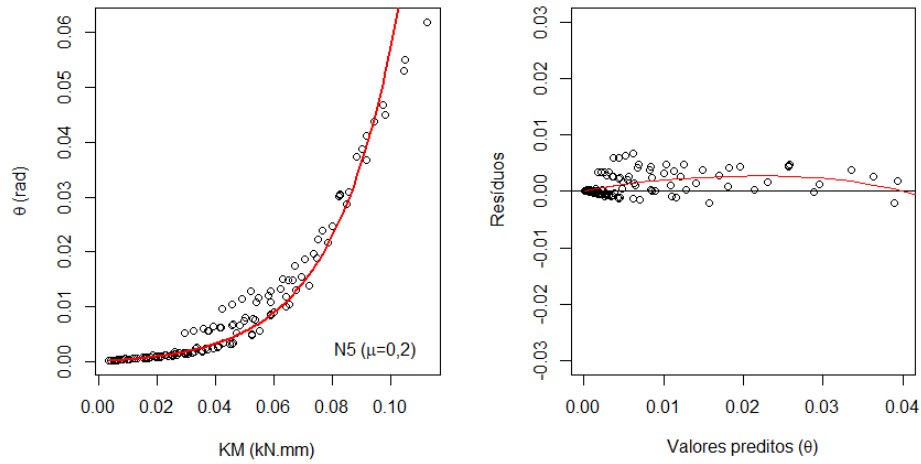
Fonte: Autor

Figura 6.15 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N4 com $\mu = 0,2$



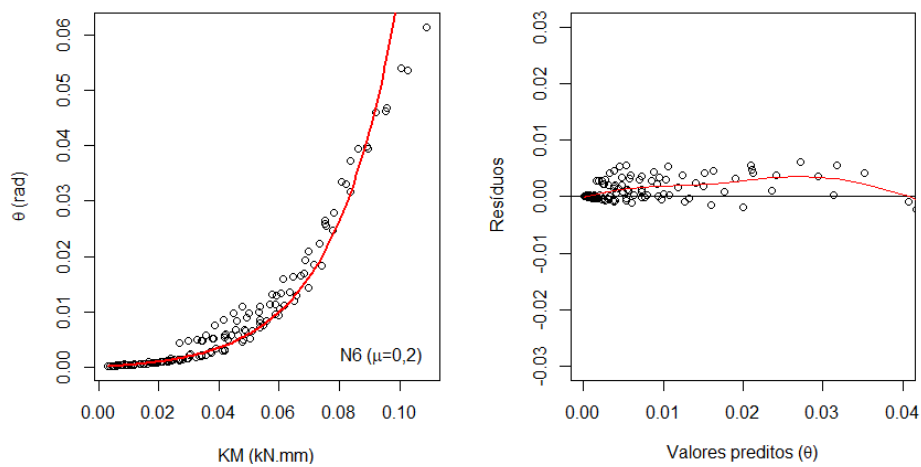
Fonte: Autor

Figura 6.16 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N5 com $\mu = 0,2$



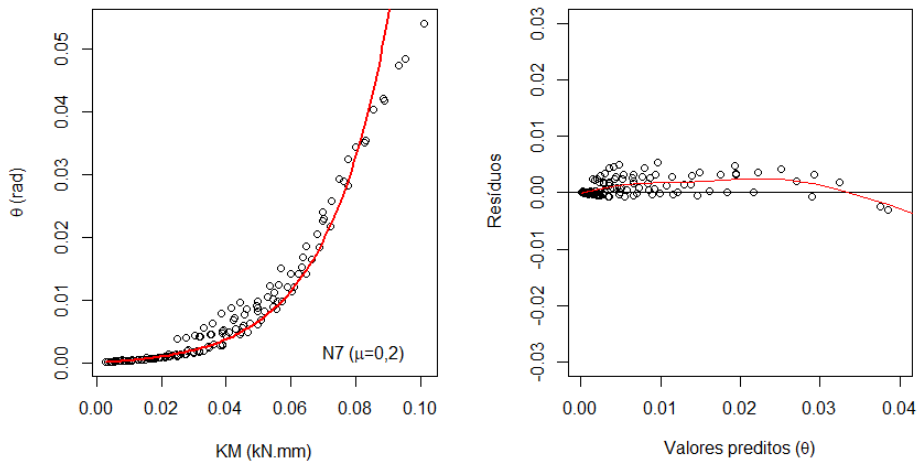
Fonte: Autor

Figura 6.17 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N6 com $\mu = 0,2$



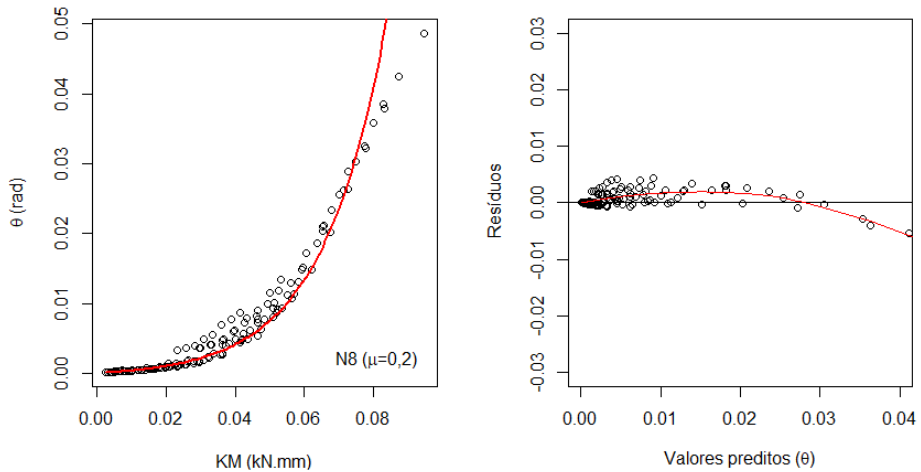
Fonte: Autor

Figura 6.18 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N7 com $\mu = 0,2$



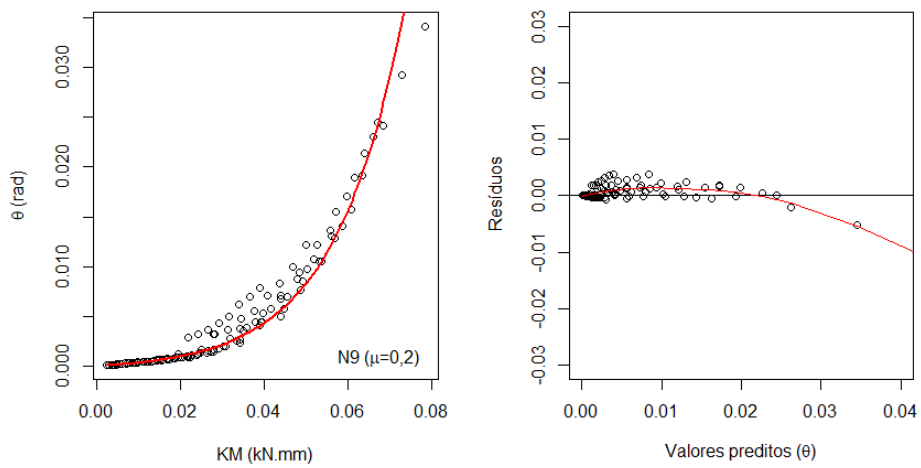
Fonte: Autor

Figura 6.19 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N8 com $\mu = 0,2$



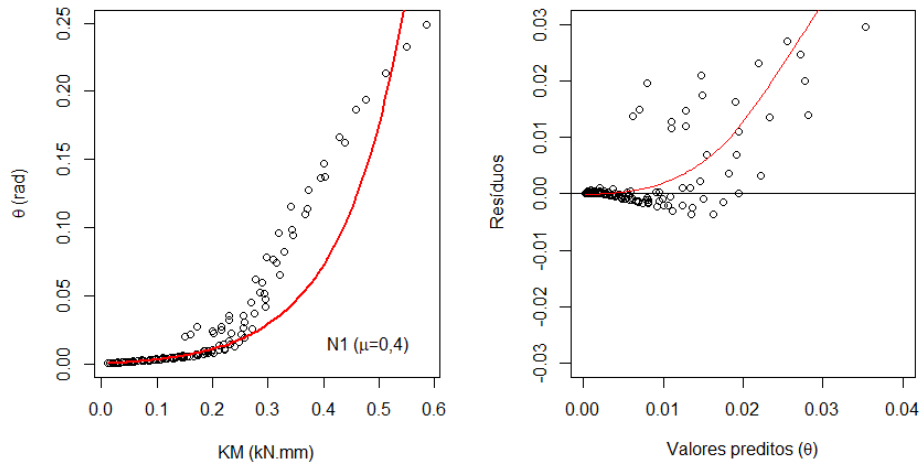
Fonte: Autor

Figura 6.20 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N9 com $\mu = 0,2$



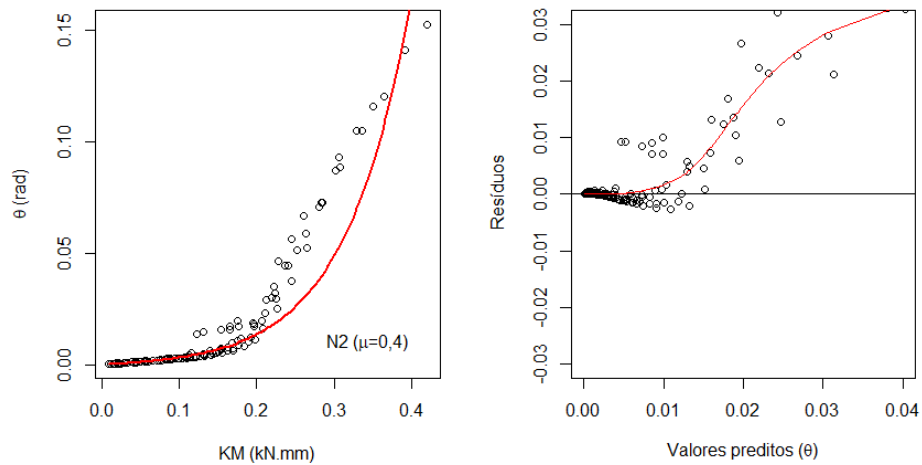
Fonte: Autor

Figura 6.21 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N1 com $\mu = 0,4$



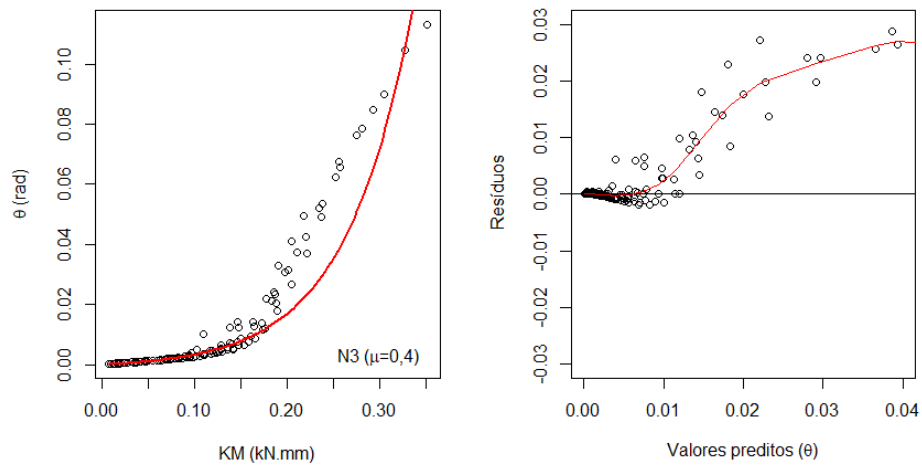
Fonte: Autor

Figura 6.22 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N2 com $\mu = 0,4$



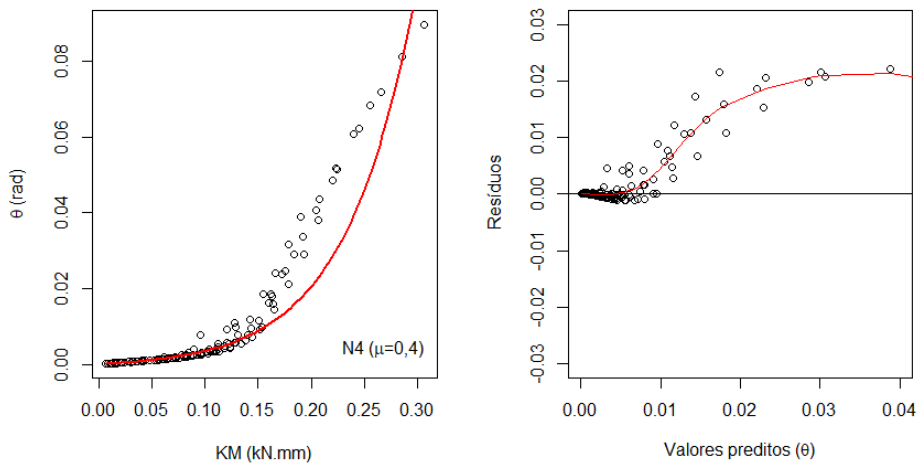
Fonte: Autor

Figura 6.23 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N3 com $\mu = 0,4$



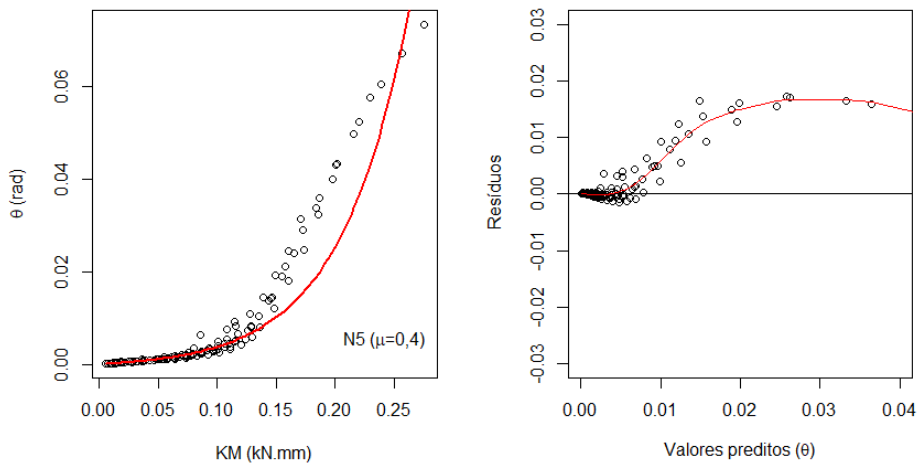
Fonte: Autor

Figura 6.24 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N4 com $\mu = 0,4$



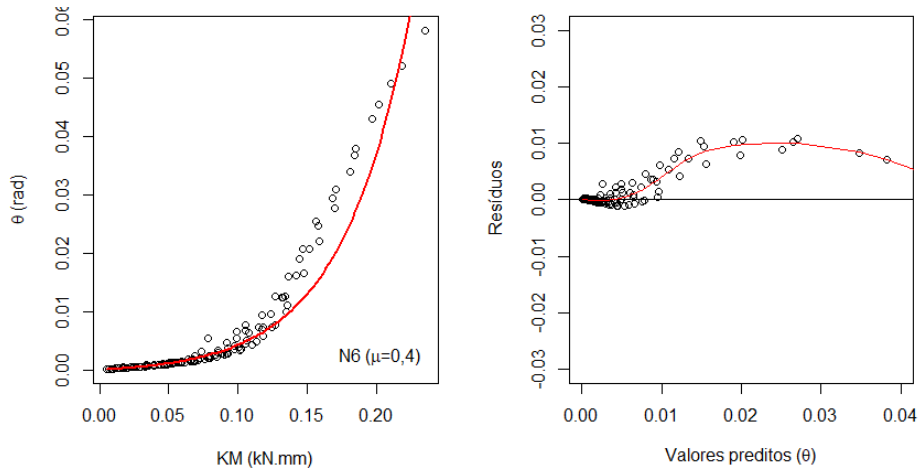
Fonte: Autor

Figura 6.25 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N5 com $\mu = 0,4$



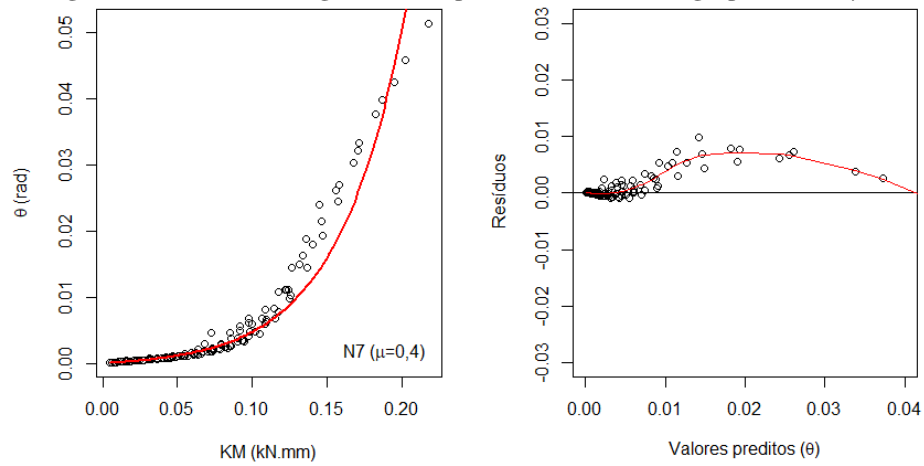
Fonte: Autor

Figura 6.26 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N6 com $\mu = 0,4$



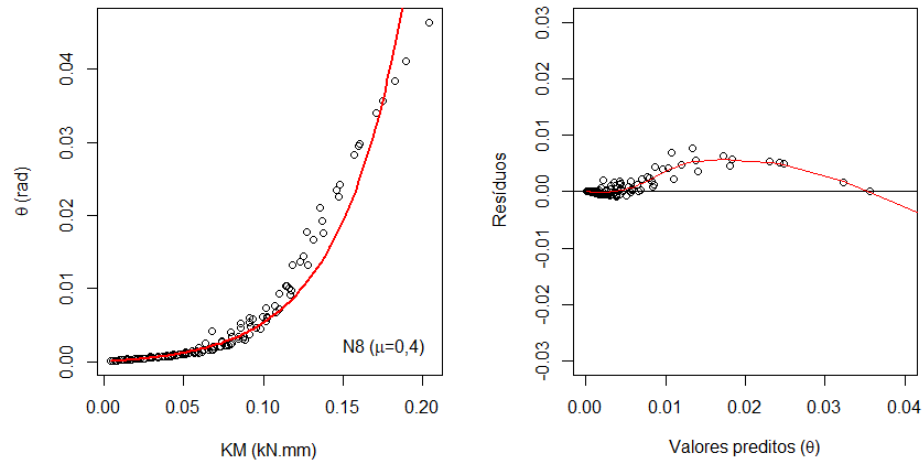
Fonte: Autor

Figura 6.27 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N7 com $\mu = 0,4$



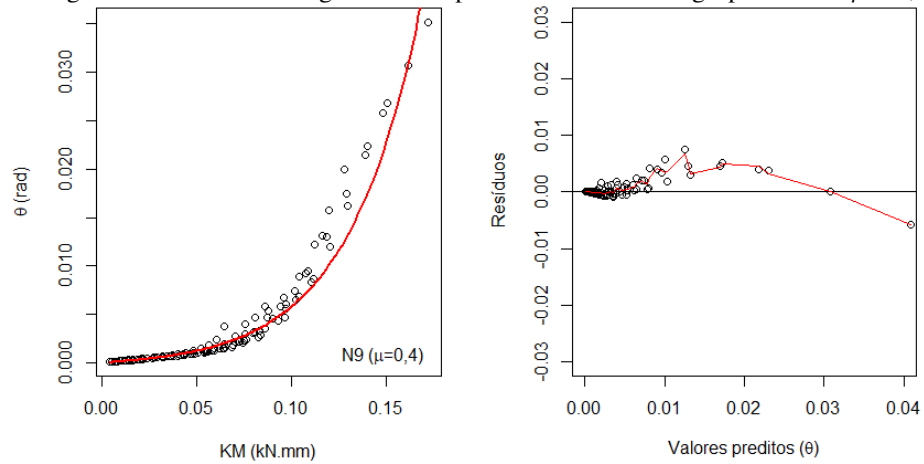
Fonte: Autor

Figura 6.28 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N8 com $\mu = 0,4$



Fonte: Autor

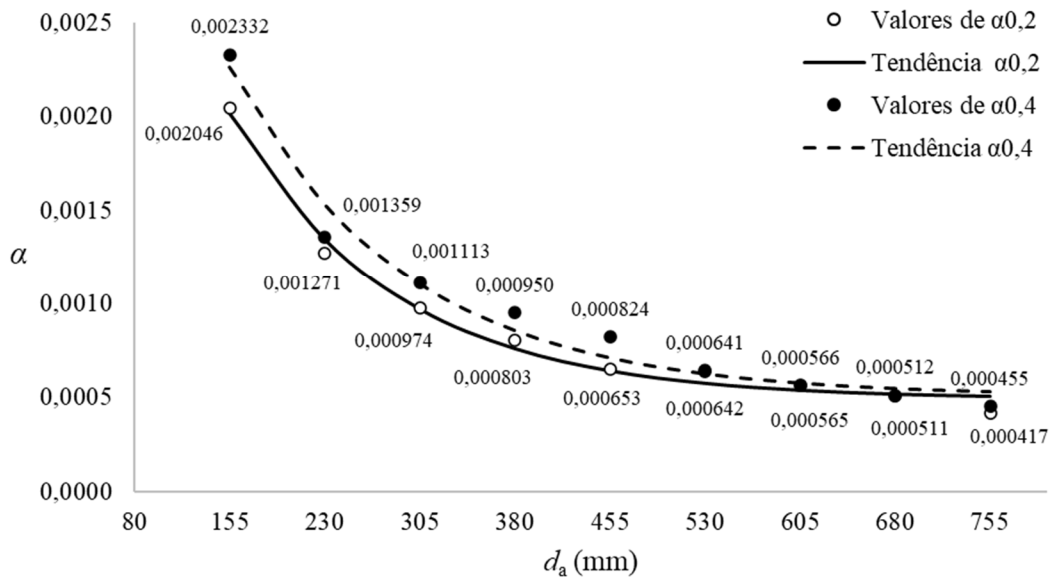
Figura 6.29 – Curva de regressão e dispersão de resíduos do grupo N9 com $\mu = 0,4$



Fonte: Autor

Os valores dos parâmetros de ajuste α_μ apresentados na Tabela 6.7, quando dispostos de forma gráfica como mostra a Figura 6.30, apresentam uma tendência de variação característica de funções exponenciais.

Figura 6.30 – Valores e tendência de variação dos parâmetros α_μ



Fonte: Autor

Esta tendência de variação em termos da altura da cantoneira (d_a), quando submetidos ao processo de regressão, pode ser predita por um modelo exponencial de três parâmetros, tal como expressa a Equação 6.29 e que resulta nos valores dos parâmetros “a”, “b” e “c” apresentados na Tabela 6.8, respectivamente às ligações analisadas com coeficientes médios de atrito 0,2 e 0,4.

$$\alpha_\mu = a \cdot \exp(b \cdot d_a) + c, \quad (6.29)$$

na qual:

α_μ é o parâmetro de ajuste do modelo proposto pela Equação 6.20;

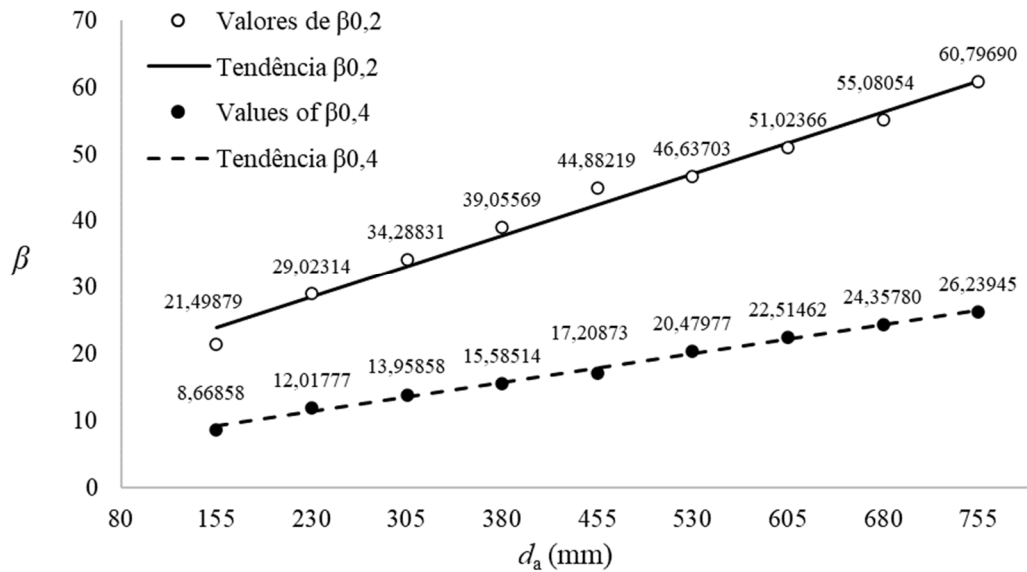
a , b e c são parâmetros de ajuste do modelo preditor de α_μ ;

$\exp()$ é a função exponencial natural cuja base é o número de Euler;

d_a é a altura da cantoneira da ligação, em mm.

Da mesma forma, os valores dos parâmetros de ajuste β_μ da Tabela 6.7 também são submetidos ao processo de regressão, no entanto, quando dispostos graficamente apresentam uma tendência de variação linear, como mostra a Figura 6.31, respectivamente às ligações com coeficientes médios de atrito 0,2 e 0,4.

Figura 6.31 – Valores e tendência de variação dos parâmetros β_μ



Fonte: Autor

Para prever essa variação em termos da altura da cantoneira (d_a), um modelo linear expresso pela Equação 6.30 é apresentado, de modo que os valores resultantes dos parâmetros “ d ” e “ e ” são apresentados na Tabela 6.8, junto aos respectivos coeficientes de determinação R^2 .

$$\beta_\mu = d \cdot d_a + e, \quad (6.30)$$

na qual:

β_μ é o parâmetro de ajuste do modelo exponencial proposto pela Equação 6.20;

d e e são parâmetros de ajuste do modelo preditor de β_μ ;

d_a é a altura da cantoneira da ligação, em mm.

Tabela 6.8 – Valores dos parâmetros dos modelos preditores de α_μ e β_μ e R^2

	$\alpha_{0,2}$	$\beta_{0,2}$	$\alpha_{0,4}$	$\beta_{0,4}$
a	0,00504080		0,00534149	
b	-0,00772001		-0,00717657	
c	0,00049277		0,00050733	
d		0,06142593		0,02873562
e		14,52745244		4,81756522
R²	0,99	0,99	0,98	0,99

Fonte: Autor.

Frente ao exposto, dos parâmetros de ajuste α_μ e β_μ do modelo exponencial proposto são reajustados em termos da altura da cantoneira (d_a) por seus modelos preditores específicos, cujos valores são apresentados na Tabela 6.9.

Tabela 6.9 – Valores dos parâmetros α_μ e β_μ

N	d_a (mm)	$\alpha_{0,2}$	$\beta_{0,2}$	$\alpha_{0,4}$	$\beta_{0,4}$
1	155	0,002016	24,048472	0,002263	9,271586
2	230	0,001347	28,655416	0,001533	11,426758
3	305	0,000971	33,262361	0,001106	13,581929
4	380	0,000761	37,869306	0,000857	15,737101
5	455	0,000643	42,476251	0,000711	17,892272
6	530	0,000577	47,083195	0,000626	20,047444
7	605	0,000540	51,690140	0,000577	22,202615
8	680	0,000519	56,297085	0,000548	24,357787
9	755	0,000508	60,904030	0,000531	26,512958

Fonte: Autor.

Por fim, o Quadro 6.3 apresenta de maneira sintetizada a proposta do modelo preditor da relação momento-rotação de ligações parafusadas entre viga e coluna em aço executadas com dupla cantoneira de alma.

Quadro 6.3 – Síntese do modelo exponencial proposto

Modelo Preditor
$\theta = \alpha_{\mu} [\exp(\beta_{\mu} \cdot K_{\mu} \cdot M) - 1]$
Fatores de padronização - K_{μ}
$K_{0,2} = d_a^{-2,508} g_a^{1,207} t_a^{-1,468}$
$K_{0,4} = d_a^{-2,505} g_a^{1,475} t_a^{-1,706}$
Parâmetros de ajuste - α_{μ}
$\alpha_{0,2} = 0,0050408 \cdot \exp(-0,00772001 \cdot d_a) + 0,00049277$
$\alpha_{0,4} = 0,00534149 \cdot \exp(-0,00717657 \cdot d_a) + 0,00050733$
Parâmetros de ajuste - β_{μ}
$\beta_{0,2} = 0,06142593 \cdot d_a + 14,52745244$
$\beta_{0,4} = 0,02873562 \cdot d_a + 4,81756522$

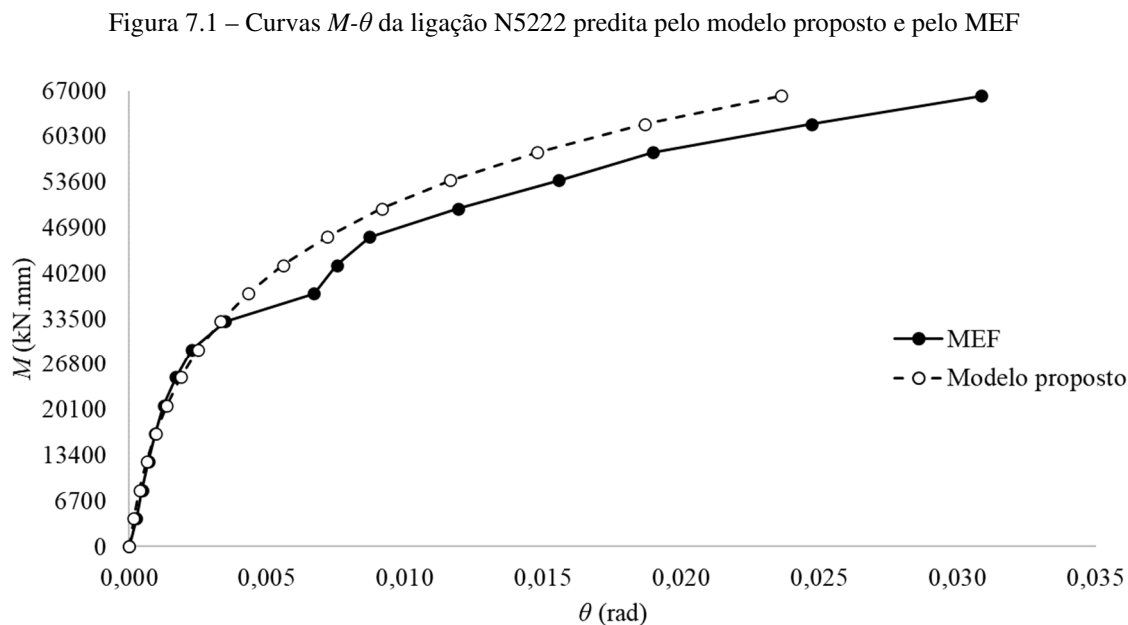
Fonte: Autor.

7 ANÁLISE DOS RESULTADOS

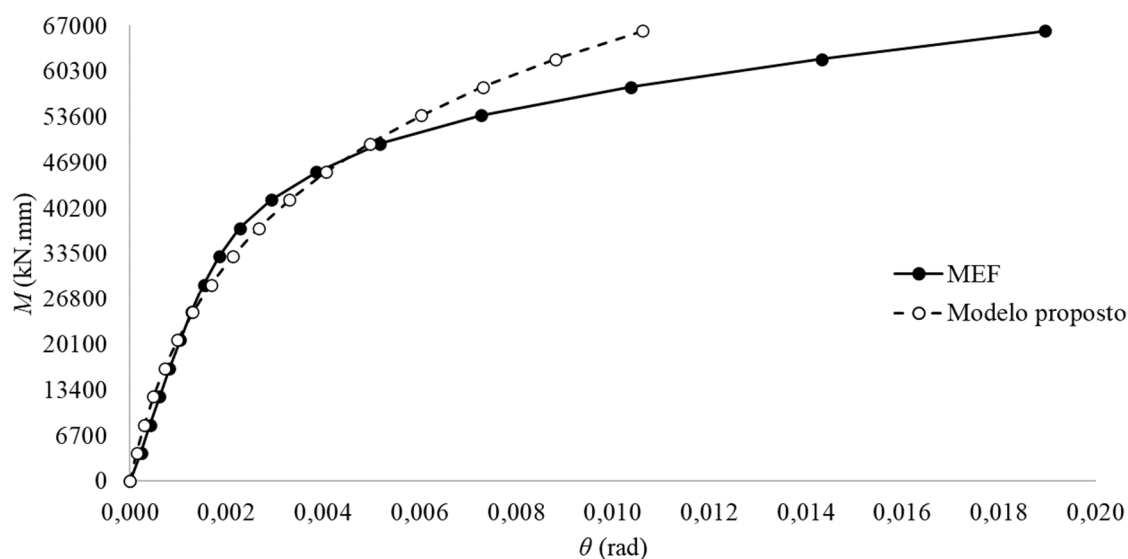
A capacidade preditiva do modelo sintetizado no Quadro 6.3 pode ser verificada por inferência ou de forma gráfica pela sobreposição das respectivas curvas preditas aos dados obtidos na análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos, além de comparar com outros modelos propostos.

7.1 SOBREPOSIÇÃO DE CURVAS E R^2

Para comparar a capacidade preditiva, os gráficos das Figuras 7.1 e 7.2 apresentam a sobreposição das curvas obtidas a partir dos dados preditos pelo modelo proposto e dos dados obtidos na análise numérica de um par de ligações parafusadas entre viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma, tidos como de geometria intermediária e diferenciados entre si por seus coeficientes médios de atrito 0,2 e 0,4, respectivamente. Da mesma forma, as curvas momento-rotação sobrepostas das 162 ligações analisadas são apresentadas no Apêndice D.



Fonte: Autor.

Figura 7.2 – Curva $M-\theta$ da ligação N5224 predita pelo modelo proposto e pelo MEF

Fonte: Autor.

Como inferência do ajuste de dados realizado pelo modelo preditor proposto, os valores do coeficiente de determinação R^2 são apresentados nas Tabelas 7.1 e 7.2, respectivamente às ligações com coeficientes médios de atrito 0,2 e 0,4, servindo como uma referência comparativa entre os ajustes realizados.

Tabela 7.1 – Coeficiente de determinação R^2 das ligações com $\mu = 0,2$

N1112	N1122	N1132	N1212	N1222	N1232	N1312	N1322	N1332
0,970	0,990	0,991	0,845	0,982	0,929	0,746	0,963	0,846
N2112	N2122	N2132	N2212	N2222	N2232	N2312	N2322	N2332
0,985	0,959	0,940	0,932	0,983	0,935	0,851	0,982	0,965
N3112	N3122	N3132	N3212	N3222	N3232	N3312	N3322	N3332
0,977	0,968	0,959	0,935	0,990	0,965	0,990	0,983	0,983
N4112	N4122	N4132	N4212	N4222	N4232	N4312	N4322	N4332
0,987	0,930	0,920	0,939	0,994	0,969	0,920	0,991	0,986
N5112	N5122	N5132	N5212	N5222	N5232	N5312	N5322	N5332
0,990	0,984	0,968	0,939	0,997	0,970	0,990	0,986	0,989
N6112	N6122	N6132	N6212	N6222	N6232	N6312	N6322	N6332
0,992	0,988	0,976	0,941	0,998	0,979	0,909	0,987	0,987
N7112	N7122	N7132	N7212	N7222	N7232	N7312	N7322	N7332
0,989	0,993	0,978	0,945	0,998	0,985	0,906	0,989	0,992
N8112	N8122	N8132	N8212	N8222	N8232	N8312	N8322	N8332
0,985	0,993	0,979	0,965	0,998	0,990	0,902	0,986	0,988
N9112	N9122	N9132	N9212	N9222	N9232	N9312	N9322	N9332
0,989	0,993	0,981	0,957	0,997	0,849	0,992	0,997	0,992

Fonte: Autor.

Tabela 7.2 – Coeficiente de determinação R^2 das ligações com $\mu = 0,4$

N1114	N1124	N1134	N1214	N1224	N1234	N1314	N1324	N1334
0,964	0,855	0,772	0,950	0,902	0,851	0,817	0,976	0,879
N2114	N2124	N2134	N2214	N2224	N2234	N2314	N2324	N2334
0,950	0,845	0,736	0,966	0,880	0,826	0,893	0,972	0,866
N3114	N3124	N3134	N3214	N3224	N3234	N3314	N3324	N3334
0,953	0,859	0,776	0,968	0,894	0,864	0,895	0,975	0,888
N4114	N4124	N4134	N4214	N4224	N4234	N4314	N4324	N4334
0,964	0,892	0,808	0,970	0,919	0,898	0,894	0,978	0,914
N5114	N5124	N5134	N5214	N5224	N5234	N5314	N5324	N5334
0,974	0,915	0,827	0,969	0,947	0,921	0,880	0,982	0,980
N6114	N6124	N6134	N6214	N6224	N6234	N6314	N6324	N6334
0,983	0,938	0,852	0,965	0,967	0,951	0,915	0,986	0,974
N7114	N7124	N7134	N7214	N7224	N7234	N7314	N7324	N7334
0,983	0,947	0,870	0,961	0,971	0,961	0,911	0,990	0,983
N8114	N8124	N8134	N8214	N8224	N8234	N8314	N8324	N8334
0,985	0,956	0,887	0,958	0,977	0,967	0,906	0,994	0,988
N9114	N9124	N9134	N9214	N9224	N9234	N9314	N9324	N9334
0,988	0,956	0,904	0,956	0,978	0,957	0,979	0,994	0,991

Fonte: Autor.

7.2 COMPARAÇÃO COM OUTROS MODELOS PREDITORES

Com a finalidade de comparar a capacidade preditiva do modelo exponencial proposto, os modelos polinomiais de Frye e Morris (1975) e de Prabha *et al.* (2015), junto com o modelo de potência de Ang e Morris (1984) foram usados para descrever o comportamento das ligações deste estudo, uma vez que todos adotam o mesmo conceito de momento padronizado.

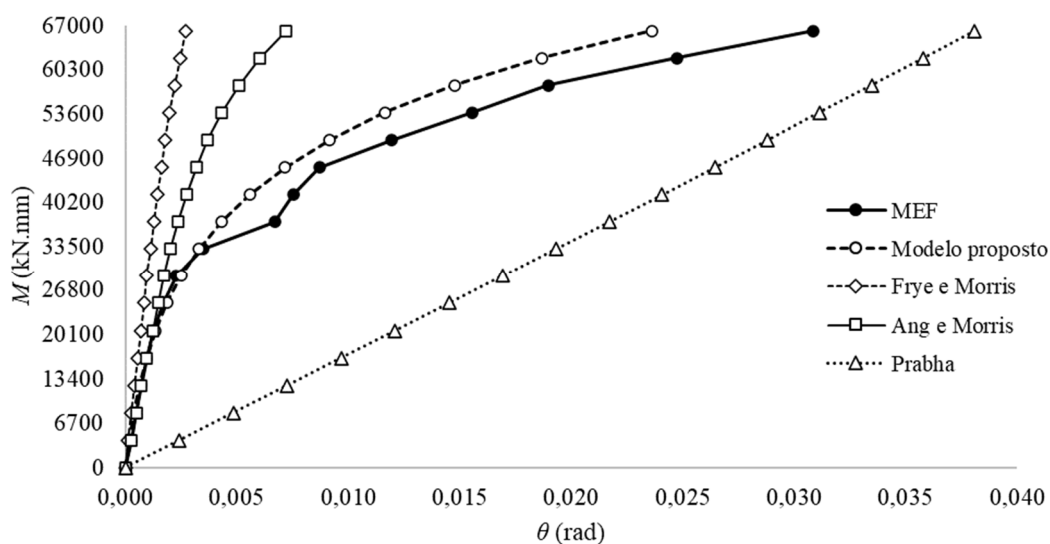
De maneira comparativa, os gráficos das Figuras 7.3 e 7.4 apresentam as curvas momento-rotação preditas pelos diferentes modelos, respectivas às ligações N5222 e N5224.

O modelo polinomial de Frye e Morris (1975), aplicado a ligações parafusadas com dupla cantoneira de alma pelas Equações 3.7 e 3.8, apresenta uma rigidez rotacional superior quando comparado aos demais modelos, o que corrobora com o observado por Visintainer (2017) para o mesmo tipo de ligação.

Esta rigidez rotacional superior apresentada desde o início da curva momento-rotação pode estar associada as características das ligações com dupla cantoneira de alma utilizadas por Frye e Morris (1975) como base de dados para seu modelo. Estes dados têm origem em experimentos realizados por Rathbun (1936), que analisou ligações com dupla cantoneira exclusivamente rebitadas, por Munse, Bell e Chesson (1959), em que as cantoneiras eram

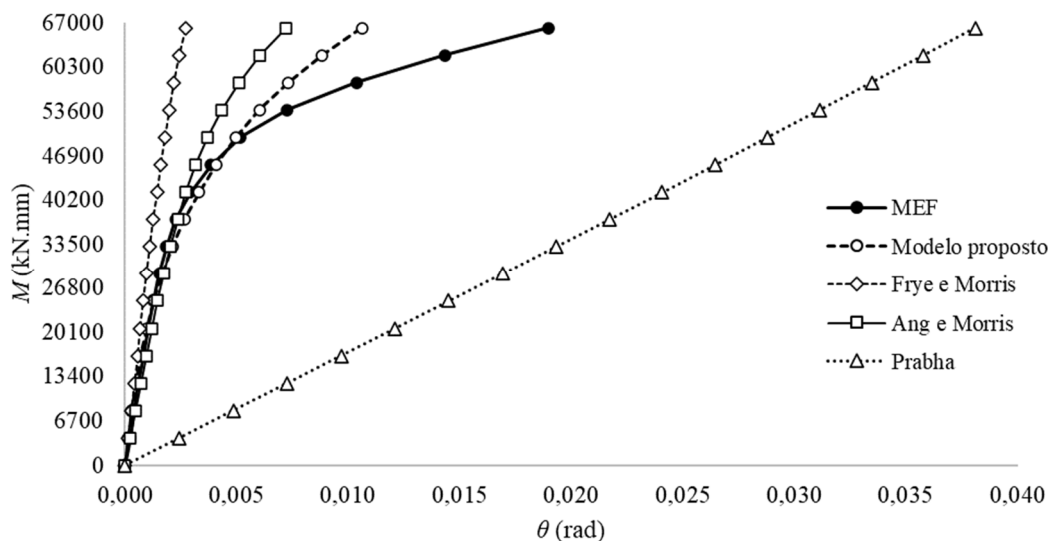
rebitadas na viga e parafusadas na coluna, e por Somner (1969), cujas cantoneiras eram soldadas na viga e parafusadas à coluna.

Figura 7.3 – Curvas $M-\theta$ da ligação N5222 previstas por diferentes modelos



Fonte: Autor.

Figura 7.4 – Curvas $M-\theta$ da ligação N5224 previstas por diferentes modelos

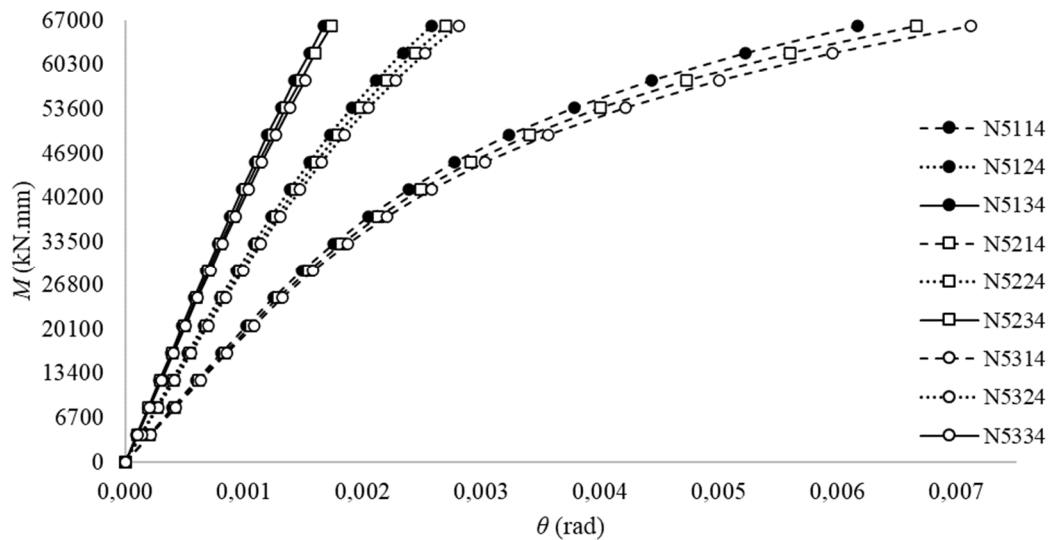


Fonte: Autor.

Neste contexto, é possível notar que as características das ligações com dupla cantoneira de alma que formaram o conjunto de dados para o modelo polinomial de Frye e Morris (1975) diferem do presente estudo, sobretudo no meio de ligação utilizado para fixação das cantoneiras na alma da viga.

Quando as curvas de um mesmo grupo de ligações, isto é, de mesma altura da cantoneira são previstas pelo modelo de Frye e Morris (1975), estas apresentam um comportamento semelhante para ligações de espessuras da aba da cantoneira idênticas, como exemplifica o gráfico da Figura 7.5, para ligações analisadas do grupo N5.

Figura 7.5 – Curvas $M-\theta$ previstas pelo modelo de Frye e Morris (1975)



Fonte: Autor.

Esta característica preditiva indica que o modelo proposto por Frye e Morris (1975), quando aplicado a ligações com dupla cantoneira de alma, é mais sensível a alterações na espessura da aba da cantoneira (t) do que na respectiva largura, a qual afeta de maneira direta no valor do gabarito de furação da cantoneira (g). Este comportamento preditivo está associado aos valores dos expoentes do fator de padronização apresentado pela Equação 3.8.

Este comportamento preditivo apresentado pelo modelo de Frye e Morris (1975) não é identificado nos dados obtidos pela análise numérica deste estudo, como pode ser observado nos Apêndices B e C.

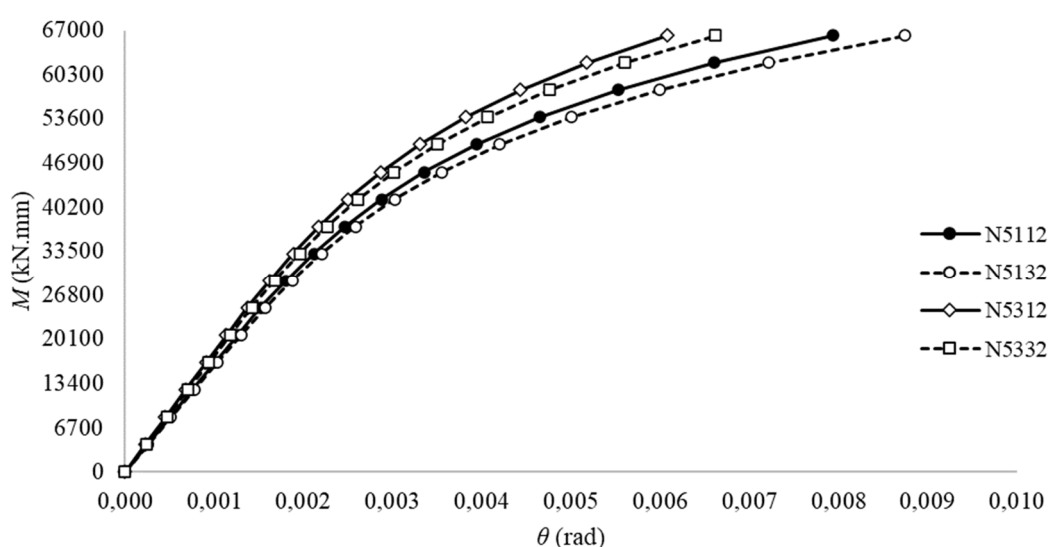
Com o mesmo procedimento de padronização do momento usado por Frye e Morris (1975), o modelo de potência de Ang e Morris (1984), representado pelas Equações 3.27 e 3.28, também é usado como uma referência comparativa.

Quando comparado, o modelo de Ang e Morris (1984) apresenta rigidez uma rotacional inferior à apresentada pelo modelo de Frye e Morris (1975), no entanto ainda superior às previsões do modelo exponencial proposto por este estudo, diminuindo esta diferença nas ligações simuladas com coeficiente médio de atrito 0,4. Este viés preditivo mais rígido do modelo de Ang e Morris (1984) também pode estar associado à origem dos dados, uma vez que

foram usadas como referência curvas momento-rotação de ligações com dupla cantoneira de alma produzidas experimentalmente por Batho e Rowan (1934), Lewitt, Chesson e Munse (1966) e Somner (1969).

Entretanto, o que desperta atenção no modelo de Ang e Morris (1984) está no fato das ligações parafusadas com dupla cantoneira de alma, tidas empiricamente como de maior rigidez rotacional, apresentarem um comportamento inverso quando preditas por tal modelo, como mostra o gráfico da Figura 7.6.

Figura 7.6 – Curvas $M-\theta$ preditas pelo modelo de Ang e Morris (1984)



Fonte: Autor.

Nas curvas momento-rotação é esperado para a ligação N5132, que utiliza como elemento de ligação um par de cantoneiras L76x76x9,5, uma rigidez rotacional superior ao apresentado pela ligação N5312 que utiliza um par de cantoneiras L102x102x6,35, a qual apresenta um gabarito de furação maior e espessura menor. De maneira análoga, a mesma afirmação é válida quando comparadas as ligações N5132 e N5112, com cantoneiras L76x76x9,5 e L76x76x6,35; N5332 e N5312 com cantoneiras L102x102x9,5 e L102x102x6,35, respectivamente.

Uma suposta causa que leva a este comportamento preditivo adverso pode estar na Equação 3.28, uma vez que os valores de seus expoentes não seguem a mesma lógica dos fatores de padronização do momento como em outros modelos preditores que utilizam o mesmo conceito.

No entanto, qualquer afirmação a respeito ainda demanda de uma investigação específica e conclusiva sobre a capacidade preditiva do modelo de Ang e Morris (1984) para ligações parafusadas com dupla cantoneira de alma.

Por fim, quando comparados aos demais modelos que adotam o conceito de momento padronizado, o modelo polinomial de Prabha *et al.* (2015) apresenta um comportamento que se destaca por apresentar uma rigidez rotacional inferior aos demais modelos, com curvas momento-rotação expressando um viés linear. Este comportamento foi observado na totalidade das 162 ligações analisadas, como apresentam os gráficos das Figuras 7.3 e 7.4.

Enfim, avaliar o modelo preditor proposto por este estudo pelo simples confronto com dados originados por outros modelos é algo impreciso, uma vez que cada modelo considera, ou não, algumas particularidades que afetam o comportamento das ligações, que especificamente para as parafusadas com dupla cantoneira de alma, se pode citar:

- a) o tamanho do conjunto de dados;
- b) a amplitude de valores dimensionais das ligações analisadas;
- c) o meio de ligação (por parafuso, solda, rebite ou combinação de dois meios);
- d) com única ou dupla fileira de parafusos na alma da viga;
- e) as condições de aperto dos parafusos;
- f) o diâmetro e o número de parafusos na alma, que junto com as condições de rugosidade superficial afetam o atrito entre superfícies em contato;
- g) existência ou não de folga entre o parafuso e o furo, além de muitas outras.

7.3 RIGIDEZ INICIAL

A depender do tipo de análise do sistema estrutural, o conhecimento do comportamento da relação momento-rotação por completo das ligações pode ser dispensado, e uma estimativa da rigidez inicial pode ser suficiente como parâmetro representativo para a semirrigidez das ligações.

Na análise estrutural, a rigidez inicial se apresenta como uma constante que expressa a rigidez rotacional da ligação no instante que o valor do momento fletor atuante ainda está próximo de zero e a ligação se apresenta em sua geometria plena, sem deformações ou deslizamentos entre as partes. Estas condições tornam difícil qualquer aferição experimental e pode fornecer dados imprecisos.

Esta dificuldade pode ser contornada quando a rigidez inicial das ligações tem seu valor estimado por métodos analíticos, que consideram a geometria da ligação e as características

elásticas dos materiais, ou por uma função matemática derivada de um modelo preditor da respectiva curva momento-rotação.

Neste contexto, o comportamento preditivo de ligações parafusadas com dupla cantoneira de alma, proposto neste estudo pela Equação 6.20, pode ter sua rigidez rotacional definida em qualquer ponto da curva momento-rotação por sua derivada, tal como expressa a Equação 7.1.

$$S_j = \frac{dM}{d\theta} = \frac{1}{\alpha_\mu \cdot \beta_\mu \cdot K_\mu \cdot \exp(\beta_\mu \cdot K_\mu \cdot M)} , \quad (7.1)$$

na qual:

S_j é a rigidez tangente da ligação, em kN·mm/radianos;

α_μ e β_μ são os parâmetros de ajuste do modelo exponencial;

K_μ é o fator adimensional de padronização do momento;

M é o momento atuante na ligação, em kN·mm.

Com base na equação anterior, a rigidez rotacional no imediato instante em que o carregamento tem início, isto é, quando o valor do momento atuante é considerado nulo, pode ser definida como sendo a rigidez inicial da ligação, que corresponde à tangente no ponto de origem da curva momento-rotação, como expressa a Equação 7.2.

$$S_{ini} = \left. \frac{dM}{d\theta} \right|_{M=0} = \frac{1}{\alpha_\mu \cdot \beta_\mu \cdot K_\mu} , \quad (7.2)$$

na qual:

S_{ini} corresponde à rigidez inicial da ligação, em kN·mm/radianos.

Assim, os valores da rigidez inicial de ligações parafusadas entre viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma, obtidos a partir da Equação anterior, são apresentados nas Tabelas 7.3 e 7.4, respectivamente às ligações analisadas com coeficiente médio de atrito 0,2 e 0,4.

Tabela 7.3 – Valores da rigidez inicial de ligações analisadas com $\mu = 0,2$, em $\text{kN} \cdot \text{mm/rad}$

N1112	N1122	N1132	N1212	N1222	N1232	N1312	N1322	N1332
9,751E+05	1,369E+06	1,761E+06	7,653E+05	1,074E+06	1,382E+06	6,255E+05	8,779E+05	1,130E+06
N2112	N2122	N2132	N2212	N2222	N2232	N2312	N2322	N2332
3,296E+06	4,627E+06	5,954E+06	2,587E+06	3,631E+06	4,673E+06	2,115E+06	2,968E+06	3,819E+06
N3112	N3122	N3132	N3212	N3222	N3232	N3312	N3322	N3332
7,990E+06	1,121E+07	1,443E+07	6,271E+06	8,801E+06	1,133E+07	5,125E+06	7,194E+06	9,257E+06
N4112	N4122	N4132	N4212	N4222	N4232	N4312	N4322	N4332
1,555E+07	2,182E+07	2,808E+07	1,220E+07	1,712E+07	2,204E+07	9,972E+06	1,400E+07	1,801E+07
N5112	N5122	N5132	N5212	N5222	N5232	N5312	N5322	N5332
2,576E+07	3,616E+07	4,654E+07	2,022E+07	2,838E+07	3,652E+07	1,653E+07	2,320E+07	2,985E+07
N6112	N6122	N6132	N6212	N6222	N6232	N6312	N6322	N6332
3,798E+07	5,331E+07	6,860E+07	2,981E+07	4,184E+07	5,384E+07	2,436E+07	3,419E+07	4,400E+07
N7112	N7122	N7132	N7212	N7222	N7232	N7312	N7322	N7332
5,152E+07	7,231E+07	9,305E+07	4,043E+07	5,675E+07	7,303E+07	3,305E+07	4,638E+07	5,969E+07
N8112	N8122	N8132	N8212	N8222	N8232	N8312	N8322	N8332
6,594E+07	9,255E+07	1,191E+08	5,175E+07	7,264E+07	9,348E+07	4,230E+07	5,937E+07	7,640E+07
N9112	N9122	N9132	N9212	N9222	N9232	N9312	N9322	N9332
8,105E+07	1,138E+08	1,464E+08	6,361E+07	8,929E+07	1,149E+08	5,200E+07	7,298E+07	9,391E+07

Fonte: Autor.

Tabela 7.4 – Valores da rigidez inicial de ligações analisadas com $\mu = 0,4$, em $\text{kN} \cdot \text{mm/rad}$

N1114	N1124	N1134	N1214	N1224	N1234	N1314	N1324	N1334
1,246E+06	1,849E+06	2,478E+06	9,271E+05	1,375E+06	1,844E+06	7,247E+05	1,075E+06	1,441E+06
N2114	N2124	N2134	N2214	N2224	N2234	N2314	N2324	N2334
4,014E+06	5,953E+06	7,981E+06	2,986E+06	4,428E+06	5,937E+06	2,334E+06	3,461E+06	4,640E+06
N3114	N3124	N3134	N3214	N3224	N3234	N3314	N3324	N3334
9,489E+06	1,407E+07	1,887E+07	7,059E+06	1,047E+07	1,404E+07	5,517E+06	8,183E+06	1,097E+07
N4114	N4124	N4134	N4214	N4224	N4234	N4314	N4324	N4334
1,833E+07	2,719E+07	3,646E+07	1,364E+07	2,023E+07	2,712E+07	1,066E+07	1,581E+07	2,120E+07
N5114	N5124	N5134	N5214	N5224	N5234	N5314	N5324	N5334
3,050E+07	4,523E+07	6,064E+07	2,268E+07	3,364E+07	4,511E+07	1,773E+07	2,630E+07	3,526E+07
N6114	N6124	N6134	N6214	N6224	N6234	N6314	N6324	N6334
4,529E+07	6,717E+07	9,006E+07	3,369E+07	4,997E+07	6,699E+07	2,633E+07	3,905E+07	5,236E+07
N7114	N7124	N7134	N7214	N7224	N7234	N7314	N7324	N7334
6,187E+07	9,175E+07	1,230E+08	4,602E+07	6,825E+07	9,150E+07	3,597E+07	5,334E+07	7,152E+07
N8114	N8124	N8134	N8214	N8224	N8234	N8314	N8324	N8334
7,956E+07	1,180E+08	1,582E+08	5,918E+07	8,776E+07	1,177E+08	4,625E+07	6,860E+07	9,197E+07
N9114	N9124	N9134	N9214	N9224	N9234	N9314	N9324	N9334
9,801E+07	1,454E+08	1,949E+08	7,290E+07	1,081E+08	1,450E+08	5,698E+07	8,451E+07	1,133E+08

Fonte: Autor.

Com o propósito de identificar o efeito das diferentes condições de rugosidade superficial no comportamento de ligações parafusadas com dupla cantoneira de alma, a

Tabela 7.5 apresenta a variação, em número de vezes, dos valores estimados da rigidez inicial das ligações analisadas com coeficiente médio de atrito 0,4 em relação aos analisados com coeficiente médio de atrito 0,2.

Tabela 7.5 – Variação dos valores da rigidez inicial entre $\mu = 0,4$ e $\mu = 0,2$, em número de vezes

N111x	N112x	N113x	N121x	N122x	N123x	N131x	N132x	N133x	Média
1,28	1,35	1,41	1,21	1,28	1,33	1,16	1,22	1,28	1,28
N211x	N212x	N213x	N221x	N222x	N223x	N231x	N232x	N233x	
1,22	1,29	1,34	1,15	1,22	1,27	1,10	1,17	1,21	1,22
N311x	N312x	N313x	N321x	N322x	N323x	N331x	N332x	N333x	
1,19	1,26	1,31	1,13	1,19	1,24	1,08	1,14	1,19	1,19
N411x	N412x	N413x	N421x	N422x	N423x	N431x	N432x	N433x	
1,18	1,25	1,30	1,12	1,18	1,23	1,07	1,13	1,18	1,18
N511x	N512x	N513x	N521x	N522x	N523x	N531x	N532x	N533x	
1,18	1,25	1,30	1,12	1,19	1,24	1,07	1,13	1,18	1,19
N611x	N612x	N613x	N621x	N622x	N623x	N631x	N632x	N633x	
1,19	1,26	1,31	1,13	1,19	1,24	1,08	1,14	1,19	1,19
N711x	N712x	N713x	N721x	N722x	N723x	N731x	N732x	N733x	
1,20	1,27	1,32	1,14	1,20	1,25	1,09	1,15	1,20	1,20
N811x	N812x	N813x	N821x	N822x	N823x	N831x	N832x	N833x	
1,21	1,27	1,33	1,14	1,21	1,26	1,09	1,16	1,20	1,21
N911x	N912x	N913x	N921x	N922x	N923x	N931x	N932x	N933x	
1,21	1,28	1,33	1,15	1,21	1,26	1,10	1,16	1,21	1,21
Média									Geral
1,21	1,27	1,33	1,14	1,21	1,26	1,09	1,16	1,20	1,21

Fonte: Autor.

A partir dos dados das tabelas anteriores, foi possível identificar um acréscimo médio de 1,21 vezes no valor da rigidez inicial em ligações parafusadas com dupla cantoneira de alma consideradas com coeficiente médio de atrito 0,4, quando referenciadas às ligações simuladas com coeficiente médio de atrito 0,2.

O maior acréscimo no valor da rigidez inicial foi em ligações com cantoneiras 76x76x9,5, tidos como de maior rigidez e que apresentaram um aumento médio de 1,33 vezes. Por outro lado, ligações tidas como de menor rigidez, que utilizam cantoneiras 102x102x6,35, apresentaram um aumento médio de 1,09 vezes no valor médio da rigidez inicial.

Os dados que identificam as características na variação da rigidez inicial são apresentados na Tabela 7.6, expressos em número de vezes em relação ao primeiro valor da variável de projeto, enquanto que a Tabela 7.7 apresenta a mesma variação, porém relacionada ao valor da variável que a antecede.

Tabela 7.6 – Variação da rigidez inicial relativa ao valor da primeira variável, em número de vezes

<i>N</i>	<i>d_a</i> (mm)	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,4$	Média
1	155	1,00	1,00	1,00
2	230	3,38	3,22	3,30
3	305	8,19	7,61	7,90
4	380	15,94	14,71	15,33
5	455	26,42	24,47	25,44
6	530	38,95	36,34	37,64
7	605	52,83	49,63	51,23
8	680	67,62	63,83	65,73
9	755	83,12	78,63	80,88
<i>g_a</i> (mm)				
	45	1,00	1,00	1,00
	55	0,78	0,74	0,76
	65	0,64	0,58	0,61
<i>t_a</i> (mm)				
	6,35	1,00	1,00	1,00
	8,00	1,40	1,48	1,44
	9,50	1,81	1,99	1,90

Fonte: Autor.

O efeito das variáveis de projeto, dentro do intervalo de valores do estudo, indica um acréscimo superior a 80 vezes no valor estimado da rigidez inicial, quando associado à variação da altura da cantoneira (d_a). Do mesmo modo que o aumento da espessura da aba (t_a) conduz a um acréscimo de até 1,9 vezes, em média. Por outro lado, a variação na distância que representa o gabarito de furação (g_a) reduz em até 0,61 vezes o valor da rigidez inicial, à medida que os valores considerados aumentam.

Os dados apresentados na Tabela 7.7 indicam um aumento médio de 3,3 vezes no valor estimado para a rigidez inicial de ligações com altura da cantoneira de 230 mm, quando relacionados às ligações que utilizam 155 mm, pertencentes aos grupos N2 e N1, com três e dois parafusos, respectivamente. Este aumento relativo no valor estimado da rigidez inicial é crescente e evidencia a baixa rigidez rotacional de ligações parafusadas com dupla cantoneira de alma que utilizam pequenas alturas da cantoneira, sobretudo nas que utilizam apenas dois parafusos.

O aumento na espessura da aba (t_a) da cantoneira de 6,35 mm para 8,0 mm apresenta um acréscimo médio de 1,44 vezes no valor estimado da rigidez inicial pelo modelo preditor, enquanto que de 8,0 mm para 9,5 mm o acréscimo médio é de 1,31 vezes.

Tabela 7.7 – Variação da rigidez inicial em relação à variável que a antecede, em número de vezes

<i>N</i>	<i>d_a</i> (mm)	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,4$	Média
1	155	1,00	1,00	1,00
2	230	3,38	3,22	3,30
3	305	2,42	2,36	2,39
4	380	1,95	1,93	1,94
5	455	1,66	1,66	1,66
6	530	1,47	1,49	1,48
7	605	1,36	1,37	1,36
8	680	1,28	1,29	1,28
9	755	1,23	1,23	1,23
<i>g_a</i> (mm)				
	45	1,00	1,00	1,00
	55	0,78	0,74	0,76
	65	0,82	0,78	0,80
<i>t_a</i> (mm)				
	6,35	1,00	1,00	1,00
	8,00	1,40	1,48	1,44
	9,50	1,29	1,34	1,31

Fonte: Autor.

Entretanto, quando a distância que representa o gabarito de furação (g_a) aumenta de 45 mm para 55 mm, há um decréscimo médio de 0,76 vezes no valor estimado da rigidez inicial pelo modelo preditor. Quando este mesmo gabarito de furação (g_a) aumenta de 55 mm para 65 mm, este decréscimo médio é de 0,8 vezes.

Em síntese, quando o efeito de cada variável de projeto no valor estimado para a rigidez inicial é avaliado, um acréscimo no valor associado ao aumento da altura da cantoneira (d_a) é evidenciado, do mesmo modo ocorre com o aumento da espessura da aba (t_a). Porém, quando a distância que representa o gabarito de furação (g_a) aumenta, uma redução no valor da rigidez inicial se apresenta, como esperado.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A previsão do comportamento de ligações semirrígidas se apresenta como um dos grandes desafios no processo de análise de sistemas estruturais em aço, uma vez que procedimentos capazes de descrever com exatidão são utópicos, fazendo com que aproximações sejam aceitas.

8.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE MODELOS PREDITORES

Dentre os diversos modelos preditores, os baseados em formulações matemáticas são capazes de descrever o comportamento de ligações e se apresentam viáveis para inclusão nos processos informatizados, entretanto algumas considerações importam:

- a) os modelos, dentro do possível, devem se apresentar em um formato simples o suficiente para sua compreensão. Isso agrega confiabilidade ao modelo, uma vez que a facilidade de interpretação transfere aos resultados um maior controle e aplicabilidade, popularizando-se frente a modelos de formato complexo;
- b) sua capacidade preditora deve ser aceita como estimada, uma vez que nem todos os parâmetros passíveis de variações podem ou são considerados na formação do conjunto de dados;
- c) o conjunto de dados deve ser amplo e suficientemente representativo, visto que pequenas alterações na geometria da ligação afetam o seu comportamento. Modelos originários de um pequeno conjunto de dados podem apresentar facilidade para o ajuste da curva no processo de regressão, no entanto, sua capacidade preditiva pode ser limitada para representar de forma satisfatória a amplitude geométrica de uma ligação;
- d) as predições podem ser melhoradas por modelos específicos para diferentes tipos de ligações, uma vez que o seu comportamento não linear apresenta vieses distintos para a curva momento-rotação.

Muitos dos modelos aplicados para ligações parafusadas com dupla cantoneira de alma são baseados em dados experimentais de estudos anteriores, realizados por diversos pesquisadores, cada qual com suas próprias metodologias para obtenção dos dados. Alguns destes estudos apresentam ligações executadas com rebites, outras executadas com parafusos,

variando de uma ou duas fileiras na região da alma da viga, enquanto algumas combinam solda e parafusos, além de outras características.

A vantagem que estes modelos poderiam apresentar, visto a amplitude da origem dos dados, está na sua aplicabilidade a distintos meios de ligação, porém, particularidades contributivas relevantes são ignoradas, o que faz com que a qualidade preditiva do modelo diminua.

Outros modelos propostos consideram a capacidade de deformação do par de cantoneiras como única forma de descrever o comportamento de ligações parafusadas com dupla cantoneira de alma, enquanto outros parâmetros influentes na relação momento-rotação são negligenciados.

De modo geral, os modelos antecessores possuem distintas origens nos seus conjuntos de dados e foram formatados para melhor se adaptarem a estes. Isso torna difícil eleger um modelo que se destaca por sua qualidade preditiva generalizada.

8.2 AVALIAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

Uma proposta de modelo preditor capaz de representar o comportamento não linear da relação momento-rotação de ligações parafusadas entre viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma é apresentada neste estudo.

Em síntese, o modelo proposto é fundamentado em uma função exponencial natural de dois parâmetros, cujos valores foram definidos por processo não linear de regressão de dados, utilizando como função-objetivo a ser minimizada a soma dos resíduos absolutos relativos, uma vez que o Método dos Mínimos Quadrados se apresentou predisposto em priorizar o ajuste dos dados de maior valor em detrimento aos menores.

O processo de regressão de dados, em que os parâmetros do modelo são as variáveis de ajuste da curva, foi realizado com o emprego de técnicas de otimização matemática a partir do método *Simulated Annealing* com o uso do programa R, v. 4.0.5 (R Core Team, 2021).

Os conjuntos de dados foram formados a partir da análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos, considerando duas distintas condições de rugosidade superficial, representadas pelos valores dos coeficientes médios de atrito 0,2 e 0,4, o que resultou na simulação de 162 ligações parafusadas entre viga e coluna com dupla cantoneira de alma.

Embora vários estudos tenham sido realizados e vários modelos preditores propostos, o presente estudo se diferencia por considerar o efeito de duas condições de rugosidade

superficial no comportamento de ligações parafusadas entre viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma.

Com base nos resultados apresentados pelo modelo preditor proposto, algumas percepções podem ser elencadas:

- a) o modelo preditor proposto se apresenta em um formato simples, o que facilita seu emprego e implementação computacional por projetistas e pesquisadores;
- b) o fator de padronização do momento é determinado em termos de três variáveis geométricas de projeto, consideradas por suas efetivas contribuições no comportamento da ligação;
- c) as variáveis geométricas de projeto representam a altura das cantoneiras (d_a), a qual exerce maior influência no comportamento da ligação, seguidos respectivamente pela espessura da aba (t_a) e pelo gabarito de furação (g_a);
- d) os parâmetros de ajuste do modelo preditor são determinados em termos da variável geométrica de projeto que corresponde à altura da cantoneira (d_a) que forma a ligação, independente para cada condição de rugosidade superficial;
- e) os resultados estimados pelo modelo exponencial proposto, quando comparados aos dados de origem, indicam uma capacidade preditiva satisfatória do comportamento de ligações parafusadas entre viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma;
- f) quando comparado aos modelos de Frye Morris (1975) e de Ang e Morris (1984); as previsões do modelo proposto apresentam um comportamento com menor rigidez rotacional;
- g) por ser um modelo expresso por uma formulação matemática, a estimativa do valor da rigidez rotacional em qualquer ponto da curva momento-rotação pode ser obtida diretamente a partir de sua derivada;
- h) as condições de rugosidade superficial, representadas pelo valor do coeficiente médio de atrito, afetam o comportamento das ligações parafusadas entre viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma. Ligações simuladas com coeficiente médio de atrito 0,4 apresentaram um aumento médio de 21% no valor da rigidez inicial, quando comparados aos simulados com coeficiente médio de atrito 0,2.
- i) seguindo uma lógica esperada, o modelo preditor proposto expressa um acréscimo no valor da rigidez inicial associado com o aumento da altura da cantoneira, do mesmo modo ocorre com o aumento da espessura da aba, reduzindo este valor ao passo que a distância que representa o gabarito de furação aumenta.

Enfim, o modelo proposto se apresenta capaz de estimar, de maneira satisfatória, o comportamento não linear da relação momento-rotação de ligações parafusadas entre viga e coluna em aço com dupla cantoneira de alma.

Entretanto, por ser um modelo empírico, cuja única origem dos dados foi a análise numérica empregando o Método dos Elementos Finitos, aferições experimentais podem qualificar e dirimir dúvidas a respeito desta proposta, além de que melhorias a qualquer tempo possam ser realizadas com o fim de aprimorar sua capacidade preditiva.

8.3 SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

Por sua complexidade e amplitude, o estudo do comportamento de diversas tipologias de ligações em aço requer um grande estudo coordenado, envolvendo vários pesquisadores, instituições de ensino e empresas, de modo que a proposição de novos modelos preditores do comportamento de ligações possam surgir, atendendo aos padrões usuais de projeto.

De maneira a contribuir com avanço do tema e aprimorar o modelo proposto, algumas sugestões para ampliação do estudo são apresentadas:

- a) as poucas informações disponíveis de testes experimentais de ligações parafusadas com dupla cantoneira de alma apresentam suas particularidades que diferem do modelo proposto. Portanto, sua validação a partir de dados experimentais requer ensaios com ligações de dimensões idênticas as usadas na análise numérica;
- b) neste estudo apenas duas condições de rugosidade superficiais foram consideradas. Neste sentido, sugere-se que ligações com outros valores para o coeficiente médio de atrito sejam analisadas, a fim de incluir este parâmetro como uma variável de projeto;
- c) os parafusos exercem influência direta no comportamento das ligações, uma vez que o valor da força de protensão, junto com as condições de rugosidade superficial, interferem no atrito da ligação. Deste modo, sugere-se um estudo em que o tipo, o diâmetro e o número de parafusos da ligação tenham sua relevância avaliada como possível variável de projeto;
- d) como variáveis de projeto, a espessura da aba da cantoneira e o gabarito de furação tiveram, cada uma, três valores avaliados neste estudo. A fim de ampliar o intervalo de dados e agregar maior precisão ao modelo, sugere-se que outros valores de dimensões usuais sejam adicionados ao modelo;

- e) tendo em vista a amplitude de variação nos valores da rigidez rotacional das ligações analisadas, sugere-se a classificação destas em função da sua rigidez;
- f) por fim, estender o procedimento metodológico adotado a outros tipos de ligações de uso corrente em projetos.

REFERÊNCIAS

- ABOLMAALI, A.; MATTHYS, J. H.; FAROOQI, M.; CHOI, Y. Development of moment-rotation model equations for flush end-plate connections. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 61, p. 1595-1612, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2005.05.004>.
- AL-BERMANI, F. G. A.; LI, B.; ZHU, K.; KITIPORNCHAI, S. Cyclic and seismic response of flexibly jointed frames. **Engineering Structures**, v. 16, n. 4, p. 249-255, May 1994. DOI: [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(94\)90064-7](https://doi.org/10.1016/0141-0296(94)90064-7).
- AL-BERMANI, F. G. A.; KITIPORNCHAI, S. Elastoplastic nonlinear analysis of flexibly jointed space frames. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v. 118, n. 1, p. 108-125, Jan. 1992. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1992\)118:1\(108\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1992)118:1(108)).
- ALTMAN JR., W. G.; AZIZINAMINI, A.; BRADBURN, J. H.; RADZIMINSKI, J. B. Moment-rotation characteristics of semi-rigid steel beam-column connections. **Final Report**, Department of Civil Engineering, South Carolina University, Columbia, June 1982.
- ALVARENGA, A. R. **As ligações semirrígidas na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço**. 2010. 481 p. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2010.
- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **ANSI/AISC 360-16**: Specification for Structural Steel Buildings. Chicago, 2016.
- ANG, K. M.; MORRIS, G. A. Analysis of three-dimensional frames with flexible beam-column connections. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 11, n. 2, p. 245-254, June 1984. DOI: <https://doi.org/10.1139/l84-037>.
- ANNAN, C.; CHIZA, A. Characterization of slip resistance of high strength bolted connections with zinc-based metallized faying surfaces. **Engineering Structures**, v. 56, p. 2187-2196, Nov. 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.08.040>.
- ANSYS: Engineering Analysis System. **ANSYS Mechanical APDL Theory Reference**. Release 15, 2013.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.
- ATTIOGBE, E.; MORRIS, G. Moment rotation functions for steel connections. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v.117, n. 6, p. 1703-1718, June 1991. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1991\)117:6\(1703\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1991)117:6(1703)).
- BATHO, C.; LASH, S. D. Further Investigations on Beam and Stanchion Connections. **Final report of the Steel Structures Research Committee**, Department of Scientific and Industrial Research. Her Majesty's Stationary Office, London, 1936.

BATHO, C.; ROWAN H. C. Investigation on beam and stanchion connections. **2nd Report of the Steel Structure Research Committee**, Department of Scientific and Industrial Research, Her Majesty's Stationary Office, London, 1934.

BERGAMASCO, P. D. A. **Estudo do comportamento estrutural de ligações parafusadas viga-pilar com chapa de topo estendida**: análise numérica. 2012. 396 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2012.

BORDIGNON, R. **Otimização de pilares retangulares em concreto armado submetidos à flexocompressão reta**. 2010. 91 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, RS, 2010.

BURSI, O. S.; JASPART, J. P. Basic issues in the finite element simulation of extended end plate connections. **Computer & Structures**, v. 69, n. 3, p. 361-382, Nov. 1998. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00136-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00136-9).

CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION. **CAN/CSA S6-06**. Canadian highway bridge design code. Mississauga, 2006.

CHANDRUPATLA, T.; R. E BELEGUNDU, A. D. **Introduction to Finite Elements in Engineering**. 4. ed. Pearson, 2012.

CHEN, W.-F.; KISHI, N.; KOMURO, M. **Semi-rigid Connections Handbook**. Fort Lauderdale: J. Ross Publishing, 2011.

CHISALA, M. L. Modeling M- Φ curves for standard beam to column connections. **Engineering Structures**, v. 21, n. 12, p. 1066–1075, Dec. 1999. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(98\)00033-9](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(98)00033-9).

CITIPITIOGLU, A. M.; HAJ-ALI, R. M.; WHITE, D. W. Refined 3D finite element modeling of partially-restrained connections including slip. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 58, n. 5, p. 995-1013, Jan. 2002. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0143-974X\(01\)00087-6](https://doi.org/10.1016/S0143-974X(01)00087-6).

COLSON, A.; LOUVEAU, J. M. Connections incidence on the inelastic behavior of steel structures, **Proceedings of the Euromech Colloquium**, n. 174, 1983.

COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 49, p. 1-23, 1943. DOI: <https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1943-07818-4>.

CRUZ, A.; SIMÕES, R.; ALVES, R. Slip factor in slip resistant joints with high strength steel, **Journal of Constructional Steel Research**, v. 70, p. 280-288, Mar. 2012. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2011.11.001>.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1090-2**. Execution of steel structures and aluminium structures - Part 2: Technical requirements for steel structures. Brussels, 2018.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1993-1-5**. Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-5: General rules - Plated structural elements. Brussels, 2006.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1993-1-8**. Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-8: Design of joints. Brussels, 2005.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1993-1-8**. Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-8: Design of joints. Brussels, 2005.

FRYE, M. J.; MORRIS, G. A. Analysis of flexibly connected steel frames. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 2, n. 3, p. 280-291, Sept. 1975. DOI: <https://doi.org/10.1139/l75-026>.

GERSTLE, K. H. Effect of connections on frames. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 10, p. 241-267, 1988. DOI: [https://doi.org/10.1016/0143-974X\(88\)90032-6](https://doi.org/10.1016/0143-974X(88)90032-6).

GOMES, V. M. G.; RODRIGUES, M.; CORREIA, J. A. F. O.; FIGUEIREDO, M. A. V.; DE JESUS, A. M. P.; FERNANDES, A. A. Monotonic and fracture behaviours of bolted connections with distinct bolt preloads and surface treatments, **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 48, p. 304-317, Mar. 2019. DOI: <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.48.30>.

HEISTERMANN, C.; VELJKOVIC, M.; SIMÕES, R.; REBELO, C.; SIMÕES DA SILVA, L. Design of slip resistant lap joints with long open slotted holes. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 82, p. 223-233, Mar. 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2012.11.012>.

HRENNIKOFF, A. Solution of problems of elasticity by the frame-work method. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v. 8, n. 4, p. A169-A175, Dec. 1941. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4009129>.

HUANG, Y. WANG, R.; ZOUC, J.; GAN, Q. Finite element analysis and experimental study on high strength bolted friction grip connections in steel bridges. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 66, n.6, p. 803-815, June 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2010.01.003>.

JONES, S. W.; KIRBY, P. A.; NETHERCOT, D. A. Columns with semi-rigid joints. **Journal of the Structural Division**, ASCE, v. 108, n. 2, p. 361-372, Feb. 1982. DOI: <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0005876>.

JONES, S. W.; KIRBY, P. A.; NETHERCOT, D. A. Effect of semi-rigid connections on steel column strength. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 1, n. 1, p. 38-46, Sept. 1980. DOI: [https://doi.org/10.1016/0143-974X\(80\)90007-3](https://doi.org/10.1016/0143-974X(80)90007-3).

JONES, S. W.; KIRBY, P. A.; NETHERCOT, D. A. The analysis of frames with semi-rigid connections - A state-of-the-art report. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 3, n. 2, p. 2-13, 1983. DOI: [https://doi.org/10.1016/0143-974X\(83\)90017-2](https://doi.org/10.1016/0143-974X(83)90017-2).

KIM T. S.; LEE, H. S.; YOO, J. H.; TAE, S. H.; OH, S. H.; LIM, Y. C.; LEE, S. B. Slip coefficient in high-strength bolt joints coated with corrosion-resistant Zn/Al metal spray method, **Materials and Manufacturing Processes**, p. 14-21, Mar. 2011. DOI: <https://doi.org/10.1080/10426910903388721>.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C.D.; VECCHI, M.P. Optimization by simulated annealing. **Science**, v. 220, n. 4598, p. 671-680, May 1983. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671>.

KISHI, N.; CHEN, W. F.; MATSUOKA, K. G.; NOMACHI, S. G. Moment-rotation of top-and seat angle with double web angle connections, em Bjorhovde, R.; Brozzetti, J.; Colson, A. **Connections in steel structures**, Cachan, França, p. 121-134. 1987a.

KISHI, N.; CHEN, W. F.; MATSUOKA, K. G.; NOMACHI, S. G. Moment-rotation relation of single/double web-angle connections, em Bjorhovde, R.; Brozzetti, J.; Colson, A. **Connections in steel structures**, Cachan, França, p. 135-149. 1987b.

KISHI, N.; CHEN, W.-F. Database of steel beam-to-column connections. **Structural Engineering Report n. CE-STR-86-26**, School of Civil Engineering, Purdue University, West Lafayette, 1986.

KISHI, N.; CHEN, W.-F. Moment-rotation relations of semirigid connections with angles. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v. 116, n. 7, p. 1813-1834, July 1990. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1990\)116:7\(1813\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1990)116:7(1813)).

KONG, Z.; KIM, S.-E. Moment-rotation model of single-web angle connections. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 126, p. 24-34, June 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.03.008>.

KRISHNAMURTHY, N.; HUANG, H.-T.; JEFFREY, P. K.; AVERY, L. K. Analytical M- θ curves for end-plate connections, **Journal of the Structural Division**, ASCE, v. 105, n. 1, p. 133-145, Jan. 1979. DOI: <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0005073>.

KUKRETI, A. R.; MURRAY, J. M.; ABOLMAALI, A. End-plate connection moment-rotation relationship. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 8, p. 137-157, 1987. DOI: [https://doi.org/10.1016/0143-974X\(87\)90057-5](https://doi.org/10.1016/0143-974X(87)90057-5).

KULAK, G. L.; FISHER, J. W.; STRUIK, J. H. A. **Guide to design criteria for bolted and riveted joints**. 2. ed. AISC, Chicago, IL, 2001.

LEE, S. S.; MOON, T. S. Moment-rotation model of semi-rigid connections with angles. **Engineering Structures**, v. 24, p. 227-237, 2002. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(01\)00066-9](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00066-9).

LEWITT, C. W.; CHESSON, E; MUNSE, W. H. Restraint characteristics of flexible riveted and bolted beam-to-column connections. **Structural Research Series n. 296**, Department of Civil Engineering, University of Illinois, Urbana, Illinois, Mar. 1966.

- LIONBERGER, S. R.; WEAVER, J. W. Dynamic response of frames with nonrigid connections. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 95, n. 1, p. 95-114, Feb. 1969. DOI: <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0001087>.
- LUI, E. M.; CHEN, W.-F. Analysis and behaviour of flexibly jointed frames. **Engineering Structures**, v. 8, n. 2, p. 107-118, Apr.1986. DOI: [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(86\)90026-X](https://doi.org/10.1016/0141-0296(86)90026-X).
- LUI, E. M.; CHEN, W.-F. Steel frame analysis with flexible joints. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 8, p. 161-202, 1987. DOI: [https://doi.org/10.1016/0143-974X\(87\)90058-7](https://doi.org/10.1016/0143-974X(87)90058-7).
- MAIORANA, E.; ZAMPIERI, P.; PELLEGRINO, C. Experimental tests on slip factor in friction joints: comparison between European and American Standards. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 43, p. 205-217, Jan. 2018. DOI: <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.43.16>.
- MALITE, M; VALENCIANI, V. C. Determinação experimental do coeficiente de atrito em superfícies de aço pintadas. **Revista da Estrutura de Aço**, Rio de Janeiro, v. 6, n. 2, p. 144-152, agosto 2017.
- MELCHERS, R. E.; KAUL, D. Behavior of frames with flexible joints. **Proceeding's 8th Australian Conference on Mechanics of Structural Materials**, Newcastle, Austrália, 1982.
- METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N.; TELLER, A. H. Equation of state calculations by fast computing machines. **The Journal of Chemical Physics**, v. 21, n. 6, p 1087-1092, June 1953. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1699114>.
- MOHAMADI-SHOORE, M. R.; MOFID, M. New modeling for moment-rotation behavior of bolted endplate connections. **Scientia Iranica**, v. 18, n. 4, p. 827-834, Aug. 2011. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.07.015>.
- MUNSE W. H.; BELL, W. G.; CHESSON JR., E. **Behaviour of beam-to-column connections**. Department of Civil Engineering, University of Illinois, Urbana, Illinois, 1959.
- ONUAH, C. C. **Moment-rotation behaviour of double web angle connections**. Toronto. Master Thesis, Department of Civil Engineering, University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba, Canada, 1988.
- OWENS, G.W.; CHEAL, B.D. **Structural steelwork connections**. London: Butterworths, 1989. 330 p.
- PICARD, A.; GIROUX, Y. M.; BRUN, P. Analysis of flexibly connected steel frames: Discussion. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 3, n. 2, p. 350-352, 1976. DOI: <https://doi.org/10.1139/l76-033>.
- PRABHA, P.; REKHA, S.; MARIMUTHU, V.; SARAVANAN, M.; PALANI, G. S. Modified Frye–Morris polynomial model for double web-angle connections. **International Journal of Advanced Structural Engineering**, v. 7, p. 295-306, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40091-015-0100-y>.

R Core Team. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2021.

RAMBERG, W.; OSGOOD, W. R. Description of stress-strain curves by three parameters. **Technical note**, n. 902. National Advisory Committee for Aeronautics, Washington DC. July 1943.

RATHBUN, J. C. Elastic properties of riveted connections. **Transactions ASCE**, v. 101, n. 1, p. 524–563, Jan. 1936. DOI:10.1061/TACEAT.0004766.

RAZZAQ, Z. End restraint effect on steel column strength. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v. 109, n. 2, p. 314-334, Feb. 1983. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1983\)109:2\(314\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1983)109:2(314)).

RCSC. **Specification for structural joints using high strength bolts**. Research Council on Structural Connections, American Institute of Steel Construction, Chicago, IL, 2020.

RIBEIRO, L. F. L. **Estudo do comportamento estrutural de ligações parafusadas viga-coluna com chapa de topo: análise teórico-experimental**. 1998. 523 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 1998.

RICHARD, R. M.; ABBOTT, B. J. Versatile elastic-plastic stress-strain formula. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 101, n. 4, 511-515, Aug. 1975. DOI: <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0002047>.

RODRIGUES, M.P.G.; de JESUS, A.M.P.; SILVA, A.L.L. Comparison between alternative FE modelling strategies for riveted connections concerning fatigue assessments. **Mecânica Experimental**, v. 19, p. 19-31, 2011.

ROMSTAD, K. M.; SUBRAMANIAN, C.V. Analysis of frame connection rigidity. **Journal of the Structural Division**, ASCE, v. 96, n. 11, p. 2283-2300. p. 50-59, Nov. 1970. DOI: <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0002743>.

SHI, Y.; SHI, G.; WANG, Y. Experimental and theoretical analysis of the moment-rotation behaviour of stiffened extended end-plate connections. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 63, n. 9, p. 1279-1293, Sept. 2007. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2006.11.008>.

SIVAKUMARAM, K. S. Seismic response of multi-storey steel buildings with flexible connections. **Engineering Structures**, v. 10, n. 4, p. 239-248, Oct. 1988. DOI: [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(88\)90045-4](https://doi.org/10.1016/0141-0296(88)90045-4).

SOLEIMANI, E.; BEHNAMFAR, F. New moment-rotation equation for welded steel beam-to-column connections. **International Journal of Steel Structures**, v. 17, n. 2, p. 389-411, June. 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13296-017-6003-y>.

SOMNER, W. H. **Behaviour of welded header plate connections**. Toronto. Master Thesis, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada, 1969.

SORIANO, H. L. **Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo: Edusp, 2003.

TARPY T. S.; CARDINAL J. W. Behavior of semi-rigid beam-to-column end plate connections. **Proceedings of the International Conference on Joints in Structural Steelwork**, Teesside Polytechnic, Middlesbrough, United Kingdom: Pentach Press, p. 2.3-2.25, 1981.

TUCCI, C. E. M. **Modelos Hidrológicos**. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2005.

TURNER, M. L.; CLOUGH, R.W.; MARTIN, H.C.; TOPP, L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805-854, Sept. 1956. DOI: <https://doi.org/10.2514/8.3664>.

VELLASCO, P. C. G. DA S.; DE LIMA, L. R. O.; DE ANDRADE, S. A. L.; VELLASCO, M. M. B. R.; DA SILVA, L, P. S. **Modelagem de estruturas de aço e mistas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. 335 p.

VISINTAINER, M. R. M. **Análise numérica de ligações viga-pilar com dupla cantoneira e chapa de topo estendida em estruturas de aço**. 2017. 151 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2017.

WANG, Y.-B.; WANG, Y.-Z.; CHEN, K.; JIN, H.-J. Slip factor of high strength steel with inorganic zinc-rich coating. **Thin-Walled Structures**, v. 148, Mar. 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106595>.

WANG, Y.-B.; WANG, Y.-Z.; CHEN, K.; LI, G.-Q. Slip factors of high strength steels with shot blasted surface. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 157, p. 10-18, June 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2019.01.023>.

WU, F.-H.; CHEN, W.-F. Design model for semi-rigid connections. **Engineering Structures**, v. 12, n. 2, p. 88-97, Apr. 1990. DOI: [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(90\)90013-I](https://doi.org/10.1016/0141-0296(90)90013-I).

XIANG, Y.; GUBIAN, S.; SUOMELA, B.; HOENG, J. Generalized simulated annealing for efficient global optimization: the GenSA package for R. **The R Journal**, v. 5, p. 13-28, June 2013. DOI: <https://doi.org/10.32614/RJ-2013-002>.

YEE, K. L.; MELCHERS, R. E. Moment-rotation curves for bolted connections. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v. 112, n. 3. p. 615-635, Mar.1986. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1986\)112:3\(615\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1986)112:3(615)).

YOU, B.; LUO Y.; WANG, X. Contact algorithm of finite element analysis for prediction of press-fit curve. **Journal of Information & Computational Science**, v.10, n. 9, p. 2591–2600, June 2013. DOI: <https://doi.org/10.12733/jics20101787>.

ZHANG, G. Study on computing method in a joint fastener with bolts. **Information Technology Journal**, v. 12, n. 13, p. 2547-2553, 2013. DOI: <https://doi.org/10.3923/itj.2013.2547.2553>.

ZHU, K.; AL-BERMANI, F. G. A.; KITIPORNCHAI, S.; LI, B. Dynamic response of flexibly jointed frames. **Engineering Structures**, v. 17, n. 8, p. 575-580. Sept. 1995. DOI: [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(95\)00008-U](https://doi.org/10.1016/0141-0296(95)00008-U).

ZHU, Y. F.; CHEN, C. H.; YAO, Y.; KEER, L. M. HUANG, Y. Dynamic increase factor for progressive collapse analysis of semi-rigid steel frames. **Steel and Composite Structures**, v. 28, n. 2, p. 209-221, July 2018. DOI: <https://doi.org/10.12989/scs.2018.28.2.209>.

APÊNDICE A – GEOMETRIA DAS LIGAÇÕES ANALISADAS

Tabela A.1 – Dimensões das ligações analisadas, em milímetros

(continua)

Espécime	Número de parafusos	d_a	b_a	g_a	t_a	d	b_f	t_w	t_f	μ
N1112	2	155	76	45	6,35	225	200	8	16	0,2
N1122	2	155	76	45	8	225	200	8	16	0,2
N1132	2	155	76	45	9,5	225	200	8	16	0,2
N1212	2	155	89	55	6,35	225	200	8	16	0,2
N1222	2	155	89	55	8	225	200	8	16	0,2
N1232	2	155	89	55	9,5	225	200	8	16	0,2
N1312	2	155	102	65	6,35	225	200	8	16	0,2
N1322	2	155	102	65	8	225	200	8	16	0,2
N1332	2	155	102	65	9,5	225	200	8	16	0,2
N2112	3	230	76	45	6,35	300	200	8	16	0,2
N2122	3	230	76	45	8	300	200	8	16	0,2
N2132	3	230	76	45	9,5	300	200	8	16	0,2
N2212	3	230	89	55	6,35	300	200	8	16	0,2
N2222	3	230	89	55	8	300	200	8	16	0,2
N2232	3	230	89	55	9,5	300	200	8	16	0,2
N2312	3	230	102	65	6,35	300	200	8	16	0,2
N2322	3	230	102	65	8	300	200	8	16	0,2
N2332	3	230	102	65	9,5	300	200	8	16	0,2
N3112	4	305	76	45	6,35	375	200	8	16	0,2
N3122	4	305	76	45	8	375	200	8	16	0,2
N3132	4	305	76	45	9,5	375	200	8	16	0,2
N3212	4	305	89	55	6,35	375	200	8	16	0,2
N3222	4	305	89	55	8	375	200	8	16	0,2
N3232	4	305	89	55	9,5	375	200	8	16	0,2
N3312	4	305	102	65	6,35	375	200	8	16	0,2
N3322	4	305	102	65	8	375	200	8	16	0,2
N3332	4	305	102	65	9,5	375	200	8	16	0,2
N4112	5	380	76	45	6,35	450	200	8	16	0,2
N4122	5	380	76	45	8	450	200	8	16	0,2
N4132	5	380	76	45	9,5	450	200	8	16	0,2
N4212	5	380	89	55	6,35	450	200	8	16	0,2
N4222	5	380	89	55	8	450	200	8	16	0,2
N4232	5	380	89	55	9,5	450	200	8	16	0,2
N4312	5	380	102	65	6,35	450	200	8	16	0,2
N4322	5	380	102	65	8	450	200	8	16	0,2
N4332	5	380	102	65	9,5	450	200	8	16	0,2
N5112	6	455	76	45	6,35	525	200	8	16	0,2
N5122	6	455	76	45	8	525	200	8	16	0,2
N5132	6	455	76	45	9,5	525	200	8	16	0,2
N5212	6	455	89	55	6,35	525	200	8	16	0,2
N5222	6	455	89	55	8	525	200	8	16	0,2
N5232	6	455	89	55	9,5	525	200	8	16	0,2

(continuação)

Espécime	Número de parafusos	d_a	b_a	g_a	t_a	d	b_f	t_w	t_f	μ
N5312	6	455	102	65	6,35	525	200	8	16	0,2
N5322	6	455	102	65	8	525	200	8	16	0,2
N5332	6	455	102	65	9,5	525	200	8	16	0,2
N6112	7	530	76	45	6,35	600	200	8	16	0,2
N6122	7	530	76	45	8	600	200	8	16	0,2
N6132	7	530	76	45	9,5	600	200	8	16	0,2
N6212	7	530	89	55	6,35	600	200	8	16	0,2
N6222	7	530	89	55	8	600	200	8	16	0,2
N6232	7	530	89	55	9,5	600	200	8	16	0,2
N6312	7	530	102	65	6,35	600	200	8	16	0,2
N6322	7	530	102	65	8	600	200	8	16	0,2
N6332	7	530	102	65	9,5	600	200	8	16	0,2
N7112	8	605	76	45	6,35	675	200	8	16	0,2
N7122	8	605	76	45	8	675	200	8	16	0,2
N7132	8	605	76	45	9,5	675	200	8	16	0,2
N7212	8	605	89	55	6,35	675	200	8	16	0,2
N7222	8	605	89	55	8	675	200	8	16	0,2
N7232	8	605	89	55	9,5	675	200	8	16	0,2
N7312	8	605	102	65	6,35	675	200	8	16	0,2
N7322	8	605	102	65	8	675	200	8	16	0,2
N7332	8	605	102	65	9,5	675	200	8	16	0,2
N8112	9	680	76	45	6,35	750	200	8	16	0,2
N8122	9	680	76	45	8	750	200	8	16	0,2
N8132	9	680	76	45	9,5	750	200	8	16	0,2
N8212	9	680	89	55	6,35	750	200	8	16	0,2
N8222	9	680	89	55	8	750	200	8	16	0,2
N8232	9	680	89	55	9,5	750	200	8	16	0,2
N8312	9	680	102	65	6,35	750	200	8	16	0,2
N8322	9	680	102	65	8	750	200	8	16	0,2
N8332	9	680	102	65	9,5	750	200	8	16	0,2
N9112	10	755	76	45	6,35	825	200	8	16	0,2
N9122	10	755	76	45	8	825	200	8	16	0,2
N9132	10	755	76	45	9,5	825	200	8	16	0,2
N9212	10	755	89	55	6,35	825	200	8	16	0,2
N9222	10	755	89	55	8	825	200	8	16	0,2
N9232	10	755	89	55	9,5	825	200	8	16	0,2
N9312	10	755	102	65	6,35	825	200	8	16	0,2
N9322	10	755	102	65	8	825	200	8	16	0,2
N9332	10	755	102	65	9,5	825	200	8	16	0,2
N1114	2	155	76	45	6,35	225	200	8	16	0,4
N1124	2	155	76	45	8	225	200	8	16	0,4
N1134	2	155	76	45	9,5	225	200	8	16	0,4
N1214	2	155	89	55	6,35	225	200	8	16	0,4
N1224	2	155	89	55	8	225	200	8	16	0,4
N1234	2	155	89	55	9,5	225	200	8	16	0,4
N1314	2	155	102	65	6,35	225	200	8	16	0,4
N1324	2	155	102	65	8	225	200	8	16	0,4
N1334	2	155	102	65	9,5	225	200	8	16	0,4

(continuação)

Espécime	Número de parafusos	d_a	b_a	g_a	t_a	d	b_f	t_w	t_f	μ
N2114	3	230	76	45	6,35	300	200	8	16	0,4
N2124	3	230	76	45	8	300	200	8	16	0,4
N2134	3	230	76	45	9,5	300	200	8	16	0,4
N2214	3	230	89	55	6,35	300	200	8	16	0,4
N2224	3	230	89	55	8	300	200	8	16	0,4
N2234	3	230	89	55	9,5	300	200	8	16	0,4
N2314	3	230	102	65	6,35	300	200	8	16	0,4
N2324	3	230	102	65	8	300	200	8	16	0,4
N2334	3	230	102	65	9,5	300	200	8	16	0,4
N3114	4	305	76	45	6,35	375	200	8	16	0,4
N3124	4	305	76	45	8	375	200	8	16	0,4
N3134	4	305	76	45	9,5	375	200	8	16	0,4
N3214	4	305	89	55	6,35	375	200	8	16	0,4
N3224	4	305	89	55	8	375	200	8	16	0,4
N3234	4	305	89	55	9,5	375	200	8	16	0,4
N3314	4	305	102	65	6,35	375	200	8	16	0,4
N3324	4	305	102	65	8	375	200	8	16	0,4
N3334	4	305	102	65	9,5	375	200	8	16	0,4
N4114	5	380	76	45	6,35	450	200	8	16	0,4
N4124	5	380	76	45	8	450	200	8	16	0,4
N4134	5	380	76	45	9,5	450	200	8	16	0,4
N4214	5	380	89	55	6,35	450	200	8	16	0,4
N4224	5	380	89	55	8	450	200	8	16	0,4
N4234	5	380	89	55	9,5	450	200	8	16	0,4
N4314	5	380	102	65	6,35	450	200	8	16	0,4
N4324	5	380	102	65	8	450	200	8	16	0,4
N4334	5	380	102	65	9,5	450	200	8	16	0,4
N5114	6	455	76	45	6,35	525	200	8	16	0,4
N5124	6	455	76	45	8	525	200	8	16	0,4
N5134	6	455	76	45	9,5	525	200	8	16	0,4
N5214	6	455	89	55	6,35	525	200	8	16	0,4
N5224	6	455	89	55	8	525	200	8	16	0,4
N5234	6	455	89	55	9,5	525	200	8	16	0,4
N5314	6	455	102	65	6,35	525	200	8	16	0,4
N5324	6	455	102	65	8	525	200	8	16	0,4
N5334	6	455	102	65	9,5	525	200	8	16	0,4
N6114	7	530	76	45	6,35	600	200	8	16	0,4
N6124	7	530	76	45	8	600	200	8	16	0,4
N6134	7	530	76	45	9,5	600	200	8	16	0,4
N6214	7	530	89	55	6,35	600	200	8	16	0,4
N6224	7	530	89	55	8	600	200	8	16	0,4
N6234	7	530	89	55	9,5	600	200	8	16	0,4
N6314	7	530	102	65	6,35	600	200	8	16	0,4
N6324	7	530	102	65	8	600	200	8	16	0,4
N6334	7	530	102	65	9,5	600	200	8	16	0,4
N7114	8	605	76	45	6,35	675	200	8	16	0,4
N7124	8	605	76	45	8	675	200	8	16	0,4
N7134	8	605	76	45	9,5	675	200	8	16	0,4

(conclusão)

Espécime	Número de parafusos	d_a	b_a	g_a	t_a	d	b_f	t_w	t_f	μ
N7214	8	605	89	55	6,35	675	200	8	16	0,4
N7224	8	605	89	55	8	675	200	8	16	0,4
N7234	8	605	89	55	9,5	675	200	8	16	0,4
N7314	8	605	102	65	6,35	675	200	8	16	0,4
N7324	8	605	102	65	8	675	200	8	16	0,4
N7334	8	605	102	65	9,5	675	200	8	16	0,4
N8114	9	680	76	45	6,35	750	200	8	16	0,4
N8124	9	680	76	45	8	750	200	8	16	0,4
N8134	9	680	76	45	9,5	750	200	8	16	0,4
N8214	9	680	89	55	6,35	750	200	8	16	0,4
N8224	9	680	89	55	8	750	200	8	16	0,4
N8234	9	680	89	55	9,5	750	200	8	16	0,4
N8314	9	680	102	65	6,35	750	200	8	16	0,4
N8324	9	680	102	65	8	750	200	8	16	0,4
N8334	9	680	102	65	9,5	750	200	8	16	0,4
N9114	10	755	76	45	6,35	825	200	8	16	0,4
N9124	10	755	76	45	8	825	200	8	16	0,4
N9134	10	755	76	45	9,5	825	200	8	16	0,4
N9214	10	755	89	55	6,35	825	200	8	16	0,4
N9224	10	755	89	55	8	825	200	8	16	0,4
N9234	10	755	89	55	9,5	825	200	8	16	0,4
N9314	10	755	102	65	6,35	825	200	8	16	0,4
N9324	10	755	102	65	8	825	200	8	16	0,4
N9334	10	755	102	65	9,5	825	200	8	16	0,4

Fonte: Autor.

APÊNDICE B – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA $\mu = 0,2$

Tabela B.1 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N1

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu = 0,2$								
		N1112	N1122	N1132	N1212	N1222	N1232	N1312	N1322	N1332
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	557	0,000823	0,000539	0,000409	0,001235	0,000764	0,000558	0,001771	0,001052	0,000743
3	1114	0,001497	0,000981	0,000754	0,002260	0,001384	0,001010	0,003304	0,001925	0,001349
4	1671	0,002209	0,001458	0,001123	0,003346	0,002033	0,001495	0,004960	0,002852	0,001994
5	2229	0,002962	0,001962	0,001522	0,004542	0,002750	0,002010	0,006972	0,003835	0,002671
6	2786	0,003795	0,002502	0,001946	0,006024	0,003493	0,002558	0,010063	0,004902	0,003390
7	3343	0,004956	0,003175	0,002461	0,008346	0,004395	0,003197	0,015765	0,006225	0,004208
8	3900	0,019773	0,004609	0,003508	0,013013	0,006102	0,004419	0,029473	0,008505	0,005621
9	4457	0,027668	NC	NC	0,039277	0,025865	0,024048	0,076219	0,029355	0,025287
10	5014	0,031024	NC	NC	0,054780	0,027632	0,025095	0,109924	0,032877	0,026808
11	5571	0,036728	NC	NC	0,082690	0,029869	0,026232	0,139392	0,039047	0,028462
12	6128	0,047302	NC	NC	0,104180	0,033131	0,027580	0,168648	0,052032	0,030500
13	6686	0,065484	NC	NC	0,137628	0,038860	0,029539	0,202462	0,072759	0,033288
14	7243	0,093380	NC	NC	0,159407	0,049336	0,032096	0,224436	0,107223	0,037250
15	7800	0,120089	NC	NC	0,187329	0,077644	0,054309	0,249738	0,132412	NC
16	8357	0,138729	NC	NC	0,206009	0,101903	0,057192	0,270764	0,161182	NC
17	8914	0,158698	NC	NC	0,225151	0,120455	0,061340	NC	0,182471	NC

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura B.1 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N1

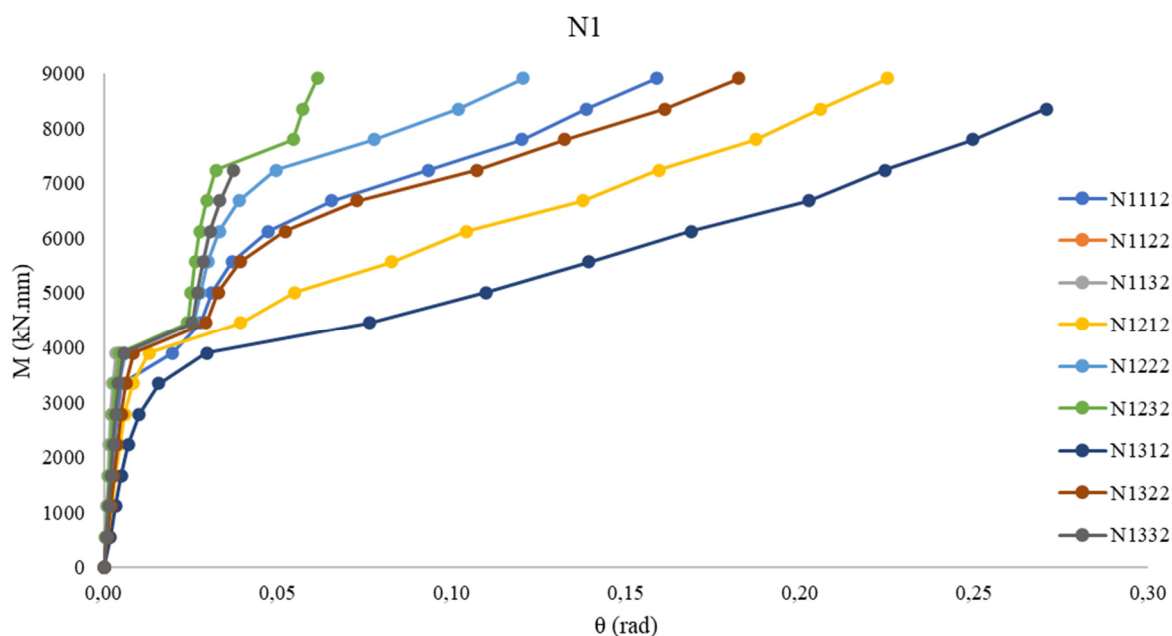


Tabela B.2 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N2

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,2$								
		N2112	N2122	N2132	N2212	N2222	N2232	N2312	N2322	N2332
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	1146	0,000531	0,000351	0,000265	0,000800	0,000500	0,000360	0,001167	0,000695	0,000490
3	2291	0,000968	0,000639	0,000490	0,001474	0,000907	0,000651	0,002174	0,001269	0,000889
4	3437	0,001429	0,000947	0,000730	0,002180	0,001339	0,000961	0,003257	0,001878	0,001310
5	4583	0,001915	0,001273	0,000985	0,002954	0,001794	0,001288	0,004566	0,002519	0,001754
6	5728	0,002463	0,001621	0,001256	0,003910	0,002275	0,001634	0,006543	0,003215	0,002221
7	6874	0,003205	0,002056	0,001585	0,005333	0,002856	0,002037	0,010439	0,004065	0,002748
8	8020	0,004522	0,002811	0,002134	0,008107	0,003789	0,002680	0,019199	0,005376	0,003524
9	9166	0,014767	0,012625	0,011957	0,021921	0,013845	0,012517	0,046139	0,016179	0,013569
10	10311	0,016602	0,013304	0,012495	0,030694	0,014909	0,013179	0,066591	0,018542	0,014469
11	11457	0,019717	0,014024	0,013036	0,044113	0,016197	0,013824	0,086676	0,022422	0,015463
12	12603	0,025040	0,014916	0,013650	0,060248	0,018175	0,014564	0,105980	0,029325	0,016702
13	13748	0,033806	0,016039	0,014390	0,076252	0,021249	0,015435	0,124051	0,040821	0,018371
14	14894	0,054798	0,017934	0,015420	0,099621	0,026504	0,016694	0,147562	0,056842	0,020877
15	16040	0,066629	0,029381	0,026113	0,113030	0,043811	0,027503	0,160957	0,081021	0,026869
16	17185	0,080408	0,032344	0,027407	0,126062	0,053994	0,028973	NC	0,096027	0,039210
17	18331	0,094380	0,037347	0,029113	NC	0,066262	0,031088	NC	0,110979	0,047304

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

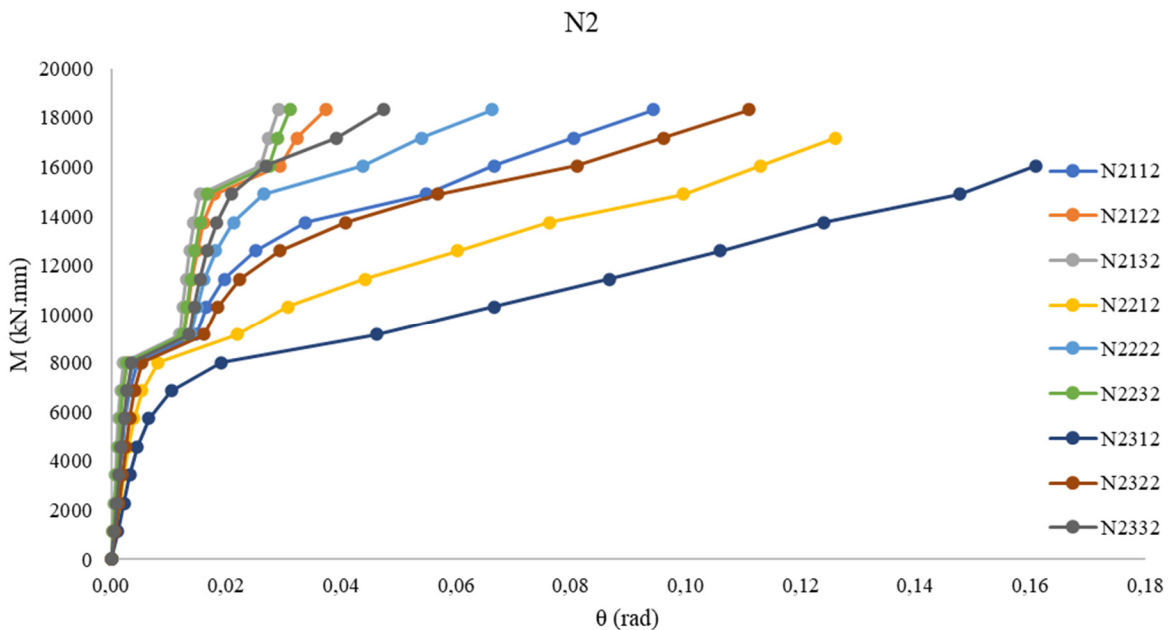
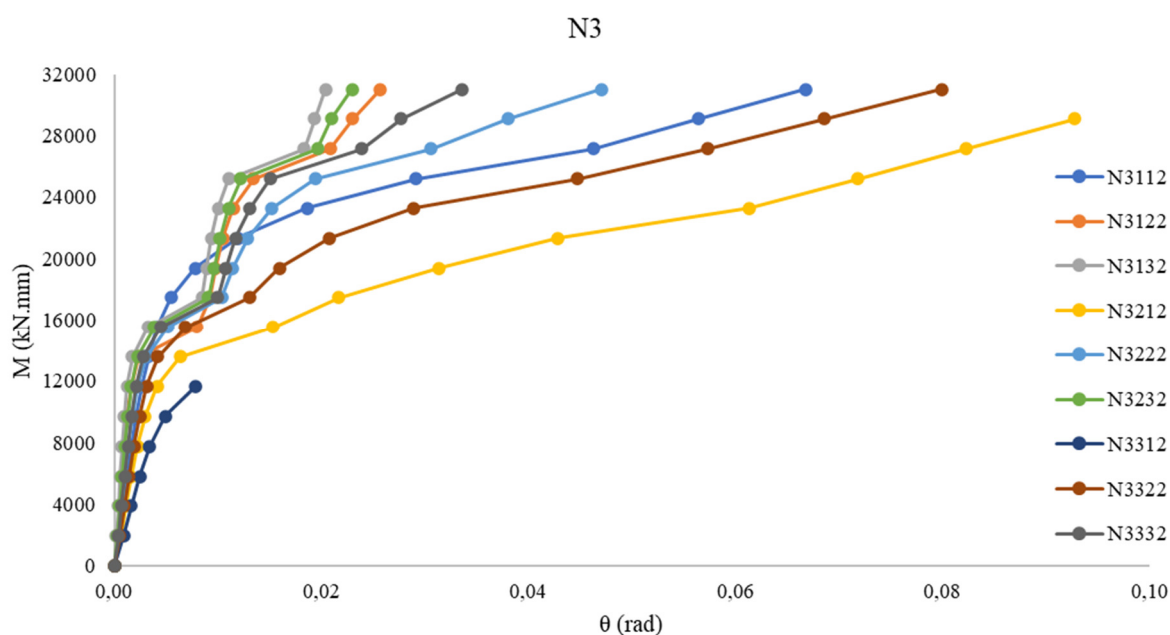
Figura B.2 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N2

Tabela B.3 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N3

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,2$								
		N3112	N3122	N3132	N3212	N3222	N3232	N3312	N3322	N3332
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	1940	0,000465	0,000266	0,000200	0,000606	0,000377	0,000278	0,000878	0,000521	0,000374
3	3879	0,000842	0,000486	0,000373	0,001111	0,000711	0,000507	0,001634	0,000962	0,000678
4	5819	0,001242	0,000720	0,000556	0,001645	0,001018	0,000749	0,002447	0,001423	0,000999
5	7758	0,001666	0,000968	0,000751	0,002228	0,001364	0,001004	0,003421	0,001908	0,001337
6	9698	0,002125	0,001241	0,000961	0,002969	0,001745	0,001279	0,004906	0,002443	0,001696
7	11637	0,002651	0,001599	0,001228	0,004113	0,002229	0,001621	0,007850	0,003112	0,002126
8	13577	0,003299	0,002284	0,001718	0,006369	0,003085	0,002215	NC	0,004212	0,002799
9	15516	0,004147	0,002962	0,002262	0,015354	0,005154	0,003848	NC	0,006867	0,004486
10	17456	0,005477	0,003921	0,003071	0,021702	0,010382	0,009095	NC	0,013060	0,009994
11	19395	0,007816	0,005370	0,004221	0,031363	0,014266	0,012630	NC	0,019244	0,015765
12	21335	0,011937	0,008045	0,006139	0,042818	0,018292	0,016219	NC	0,028011	0,021725
13	23274	0,018620	0,011504	0,009025	0,061317	0,025210	0,021104	NC	0,042907	0,033073
14	25214	0,029165	0,018406	0,014024	0,071793	0,033727	0,028185	NC	0,064711	0,050666
15	27153	0,046268	0,028847	0,021832	0,082218	0,050574	0,041959	NC	0,097282	0,073880
16	29093	0,056398	0,035023	0,026363	0,092772	0,063817	0,050952	NC	0,126879	0,097695
17	31032	0,066739	0,042512	0,032420	NC	0,074706	0,062957	NC	0,169901	0,133583

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura B.3 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N3

Fonte: Autor.

Tabela B.4 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N4

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,2$								
		N4112	N4122	N4132	N4212	N4222	N4232	N4312	N4322	N4332
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	2937	0,000325	0,000213	0,000163	0,000486	0,000308	0,000228	0,000702	0,000421	0,000304
3	5874	0,000592	0,000392	0,000303	0,000899	0,000562	0,000414	0,001316	0,000770	0,000554
4	8811	0,000874	0,000583	0,000454	0,001620	0,000830	0,000613	0,001969	0,001157	0,000818
5	11748	0,001179	0,000785	0,000613	0,002034	0,001114	0,000823	0,002744	0,001554	0,001096
6	14684	0,001575	0,001018	0,000788	0,002458	0,001448	0,001058	0,003950	0,002015	0,001403
7	17621	0,002236	0,001340	0,001016	0,003568	0,001909	0,001367	0,006381	0,002633	0,001794
8	20558	0,003212	0,001892	0,001432	0,005534	0,002599	0,001874	0,011508	0,003552	0,002377
9	23495	0,007664	0,003395	0,002269	0,011207	0,003949	0,002807	0,024637	0,005252	0,003374
10	26432	0,009173	NC	0,006446	0,016360	0,008045	0,006960	0,036925	NC	0,007727
11	29369	0,011040	NC	0,006812	0,023725	0,008944	0,007434	0,049138	NC	0,008376
12	32306	0,014635	NC	0,007224	0,037008	0,010197	0,007999	0,061463	NC	0,009231
13	35243	0,023135	NC	0,007769	0,047087	0,012382	0,008704	0,075697	NC	0,010362
14	38179	0,029818	NC	0,008970	0,056836	0,019299	0,010289	0,085721	NC	0,012695
15	41116	0,037527	NC	NC	0,065818	0,023627	0,014876	NC	NC	0,018371
16	44053	0,044642	NC	NC	0,074125	0,029759	0,015962	NC	NC	0,021299
17	46990	0,052287	NC	NC	NC	0,036879	0,017497	NC	NC	0,025705

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

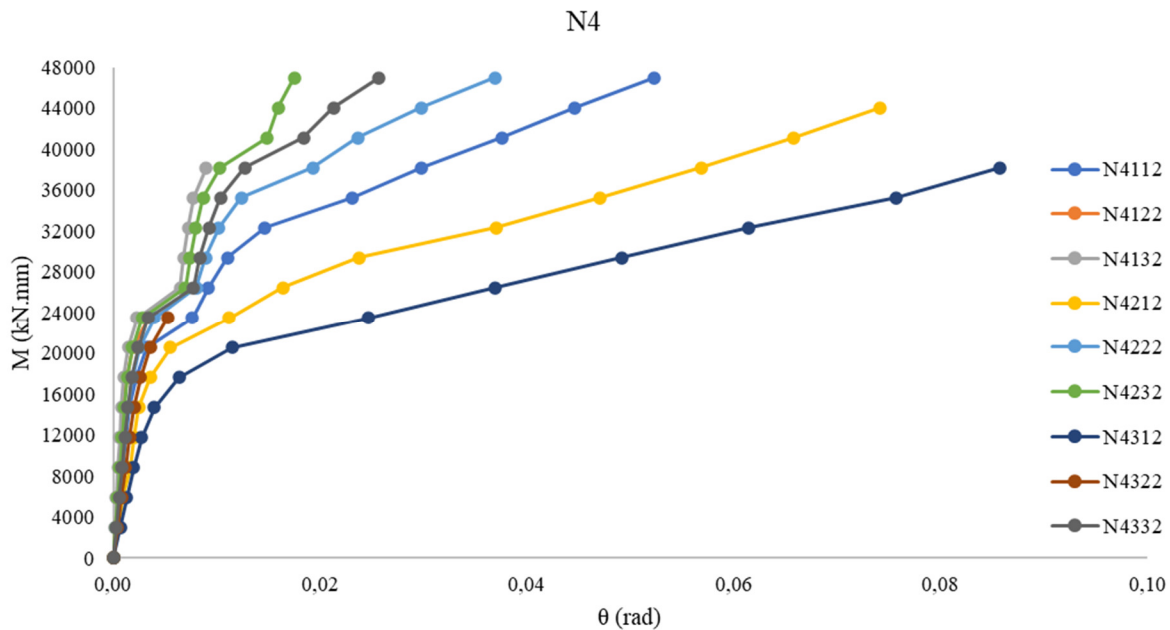
Figura B.4 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N4

Tabela B.5 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N5

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,2$								
		N5112	N5122	N5132	N5212	N5222	N5232	N5312	N5322	N5332
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	4140	0,000273	0,000181	0,000138	0,000410	0,000261	0,000194	0,000586	0,000359	0,000224
3	8280	0,000499	0,000334	0,000260	0,000757	0,000475	0,000353	0,001108	0,000663	0,000401
4	12420	0,000737	0,000496	0,000388	0,001122	0,000702	0,000523	0,001651	0,000983	0,000589
5	16561	0,001000	0,000668	0,000524	0,001547	0,000946	0,000703	0,002338	0,001326	0,000789
6	20701	0,001361	0,000873	0,000677	0,002178	0,001248	0,000915	0,003450	0,001749	0,001025
7	24841	0,001944	0,001173	0,000881	0,003202	0,001692	0,001214	0,005551	0,002357	0,001356
8	28981	0,002839	0,001597	0,001208	0,004975	0,002268	0,001619	0,010109	0,003174	0,001750
9	33121	0,005173	0,002589	0,001863	0,009025	0,003479	0,002419	0,019728	0,004815	0,002588
10	37261	0,007796	0,005713	0,005224	0,013011	0,006696	0,005704	0,030586	0,008494	NC
11	41401	0,010893	0,006218	0,005561	0,022328	0,007526	0,006136	0,041213	0,010506	NC
12	45541	0,014764	0,006863	0,005946	0,030292	0,008705	0,006690	NC	0,013767	NC
13	49682	0,018609	0,008125	0,006517	0,038793	0,011920	0,007427	NC	0,021666	NC
14	53822	0,023991	0,011678	0,009619	0,046783	0,015557	0,010802	NC	0,028688	NC
15	57962	0,030082	0,012860	0,010423	0,055111	0,018956	0,012047	NC	0,036763	NC
16	62102	0,037286	0,015071	0,011533	0,061947	0,024718	0,013156	NC	0,044961	NC
17	66242	0,043742	0,017366	0,012748	NC	0,030855	0,014856	NC	0,053089	NC

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

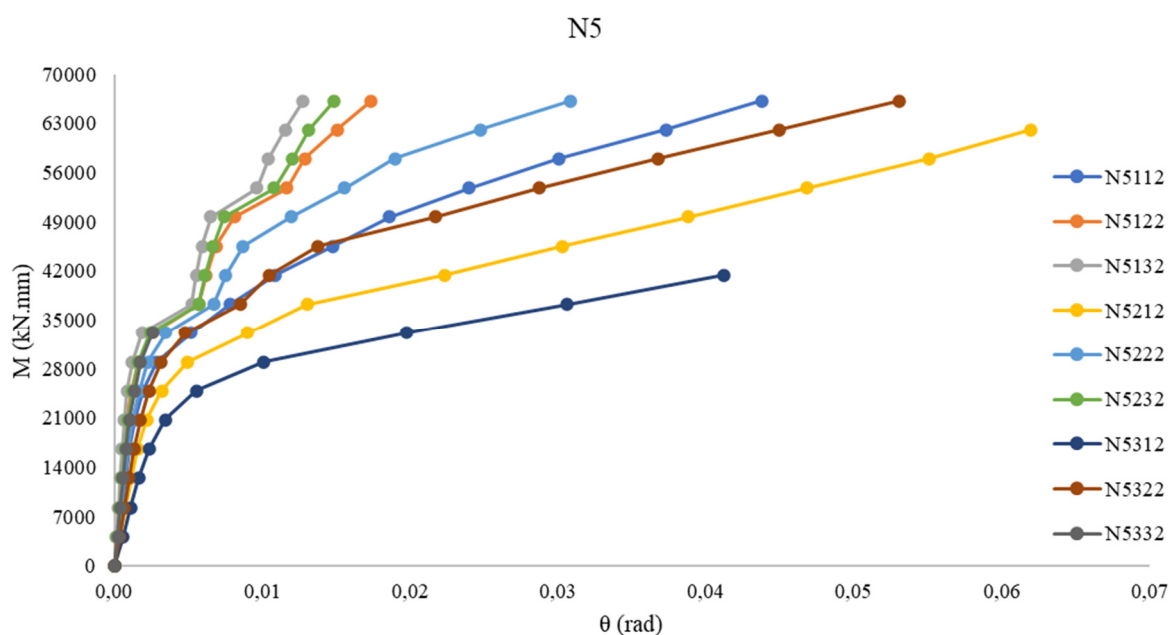
Figura B.5 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N5

Tabela B.6 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N6

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,2$								
		N6112	N6122	N6132	N6212	N6222	N6232	N6312	N6322	N6332
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	5550	0,000238	0,000158	0,000121	0,000357	0,000227	0,000169	0,000508	0,000312	0,000221
3	11101	0,000434	0,000292	0,000228	0,000659	0,000415	0,000309	0,000961	0,000576	0,000403
4	16651	0,000640	0,000434	0,000341	0,000978	0,000616	0,000459	0,001442	0,000852	0,000597
5	22201	0,000875	0,000585	0,000461	0,001362	0,000834	0,000618	0,002054	0,001157	0,000804
6	27751	0,001213	0,000769	0,000598	0,001983	0,001121	0,000811	0,003121	0,001579	0,001061
7	33302	0,001708	0,001034	0,000784	0,002951	0,001513	0,001083	0,005087	0,002132	0,001406
8	38852	0,002612	0,001399	0,001055	0,005024	0,002077	0,001437	0,009463	0,002983	0,001847
9	44402	0,004903	0,002318	0,001642	0,007592	0,003327	0,002193	0,016564	0,004625	0,002703
10	49952	0,006664	0,004785	0,004377	0,011059	0,005712	0,004794	0,025434	0,007140	0,005346
11	55503	0,008538	0,005239	0,004668	0,019221	0,006593	0,005206	0,037230	0,009256	0,005854
12	61053	0,012882	0,005896	0,005037	0,025932	0,008014	0,005741	0,045978	0,012840	0,006586
13	66603	0,016254	0,008326	0,005702	0,032981	0,011423	0,006809	0,053940	0,018553	0,008345
14	72153	0,020853	0,009798	0,007537	0,039804	0,013438	0,009036	0,061442	0,024635	0,010611
15	77704	0,026540	0,010859	0,008500	0,046810	0,016836	0,009994	NC	0,031639	0,011857
16	83254	0,033405	0,013183	0,009793	0,053613	0,022256	0,011404	NC	0,039350	0,014401
17	88804	0,039391	0,015964	0,010878	NC	0,027906	0,013303	NC	0,046237	0,018213

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

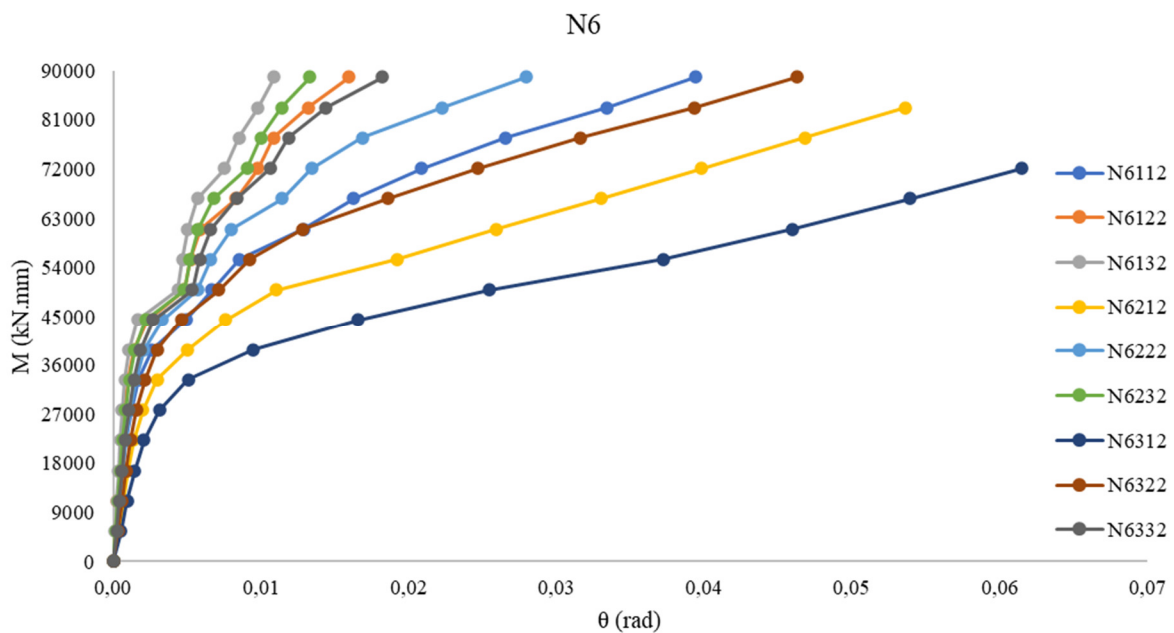
Figura B.6 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N6

Tabela B.7 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N7

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,2$								
		N7112	N7122	N7132	N7212	N7222	N7232	N7312	N7322	N7332
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	7168	0,000210	0,000140	0,000108	0,000316	0,000202	0,000151	0,000452	0,000278	0,000202
3	14335	0,000384	0,000260	0,000204	0,000583	0,000370	0,000277	0,000851	0,000513	0,000369
4	21503	0,000567	0,000386	0,000305	0,000866	0,000549	0,000410	0,001278	0,000758	0,000547
5	28671	0,000778	0,000521	0,000412	0,001222	0,000748	0,000554	0,001847	0,001047	0,000742
6	35838	0,001088	0,000689	0,000537	0,001793	0,001017	0,000734	0,002864	0,001415	0,000996
7	43006	0,001524	0,000921	0,000706	0,002764	0,001363	0,000972	0,004870	0,001961	0,001314
8	50173	0,002447	0,001257	0,000944	0,004954	0,001933	0,001305	0,008980	0,002880	0,001773
9	57341	0,004424	0,002042	0,001464	0,006809	0,003029	0,001985	0,014262	0,004466	0,002596
10	64509	0,005608	0,004148	0,003765	0,009743	0,004819	0,004175	0,022924	0,006084	0,004761
11	71676	0,008702	0,004605	0,004058	0,016791	0,005930	0,004577	0,032444	0,008607	0,005377
12	78844	0,011265	0,005328	0,004431	0,022577	0,008244	0,005137	0,040339	0,012134	0,006303
13	86012	0,014215	0,007114	0,005540	0,028973	0,010134	0,006773	0,047446	0,016520	0,008203
14	93179	0,018519	0,008562	0,006268	0,035155	0,012138	0,007702	0,054131	0,021663	0,009842
15	100347	0,024012	0,009787	0,007816	0,041720	0,015180	0,009059	NC	0,028316	0,011387
16	107514	0,029299	0,012275	0,008704	0,048353	0,020579	0,010596	NC	0,035421	0,014143
17	114682	0,034307	0,014991	0,009706	NC	0,025707	0,012528	NC	0,042118	0,018374

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

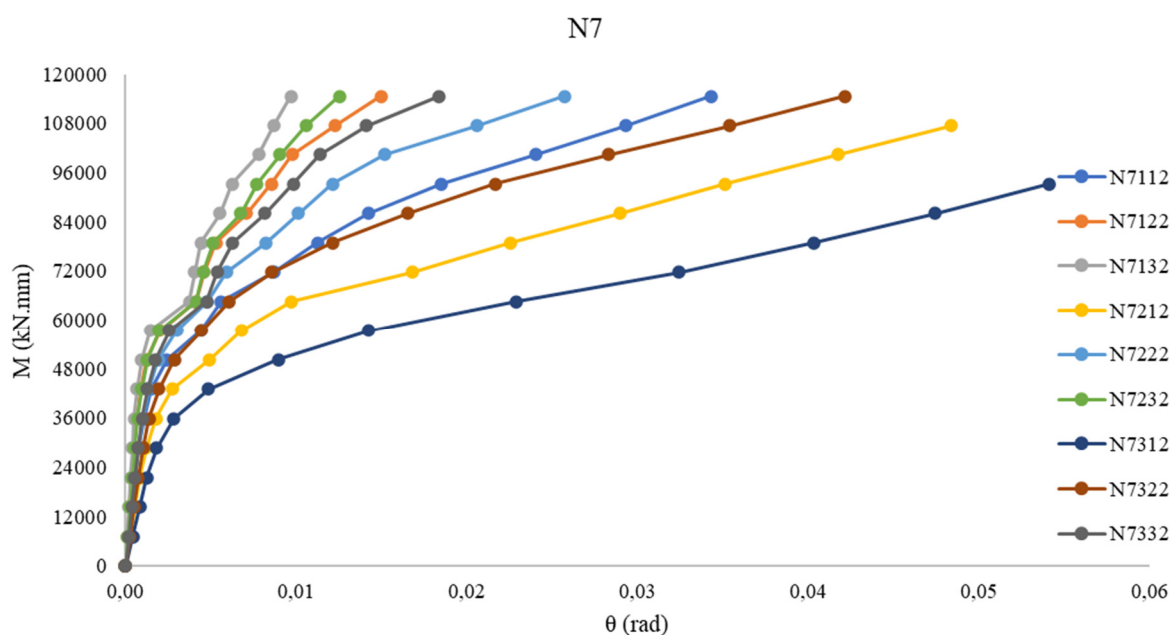
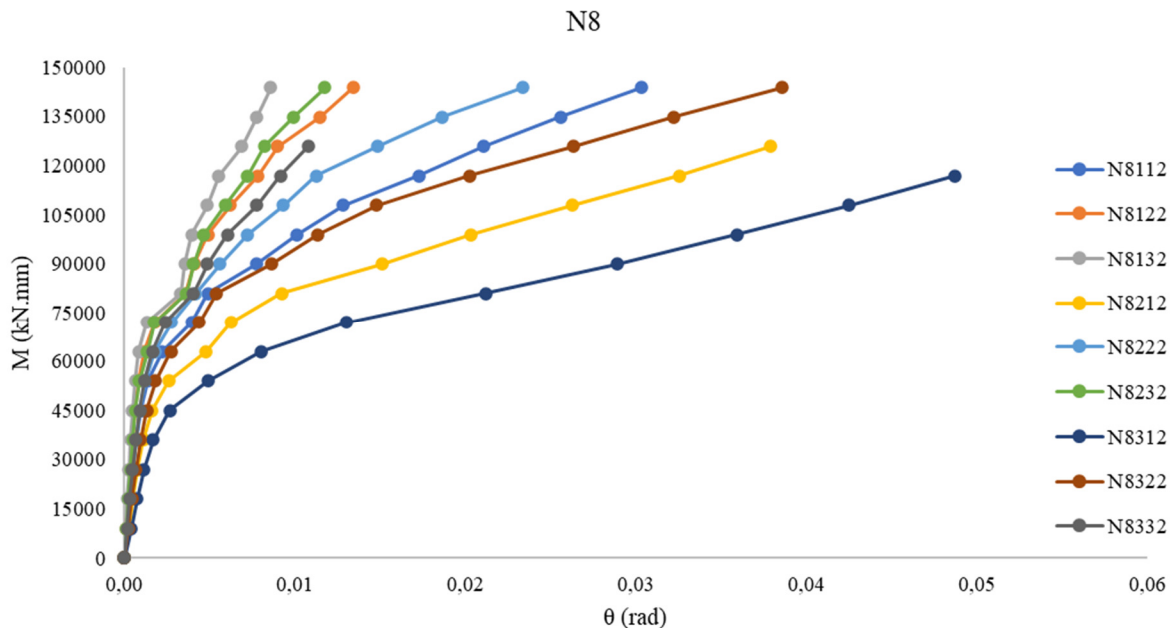
Figura B.7 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N7

Tabela B.8 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N8

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,2$								
		N8112	N8122	N8132	N8212	N8222	N8232	N8312	N8322	N8332
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	8993	0,000189	0,000127	0,000098	0,000284	0,000183	0,000136	0,000406	0,000251	0,000183
3	17985	0,000346	0,000236	0,000186	0,000523	0,000334	0,000251	0,000764	0,000464	0,000335
4	26978	0,000511	0,000351	0,000279	0,000780	0,000496	0,000372	0,001154	0,000690	0,000496
5	35970	0,000703	0,000475	0,000376	0,001117	0,000679	0,000504	0,001716	0,000957	0,000677
6	44963	0,000983	0,000630	0,000491	0,001635	0,000928	0,000671	0,002671	0,001325	0,000916
7	53955	0,001390	0,000835	0,000645	0,002617	0,001245	0,000884	0,004916	0,001837	0,001208
8	62948	0,002242	0,001149	0,000863	0,004799	0,001793	0,001349	0,008065	0,002761	0,001667
9	71940	0,003957	0,001816	0,001327	0,006249	0,002798	0,001783	0,013028	0,004394	0,002412
10	80933	0,004908	0,003631	0,003334	0,009223	0,004199	0,003665	0,021190	0,005428	0,004076
11	89925	0,007735	0,004088	0,003558	0,015125	0,005621	0,004061	0,028887	0,008625	0,004871
12	98918	0,010141	0,004896	0,003963	0,020348	0,007227	0,004666	0,035906	0,011365	0,006074
13	107910	0,012864	0,006218	0,004893	0,026242	0,009339	0,005925	0,042495	0,014807	0,007773
14	116903	0,017276	0,007842	0,005561	0,032541	0,011261	0,007235	0,048704	0,020229	0,009151
15	125895	0,021053	0,008989	0,006920	0,037879	0,014850	0,008219	NC	0,026318	0,010787
16	134888	0,025587	0,011511	0,007769	NC	0,018651	0,009946	NC	0,032225	NC
17	143880	0,030312	0,013417	0,008606	NC	0,023354	0,011780	NC	0,038557	NC

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura B.8 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N8

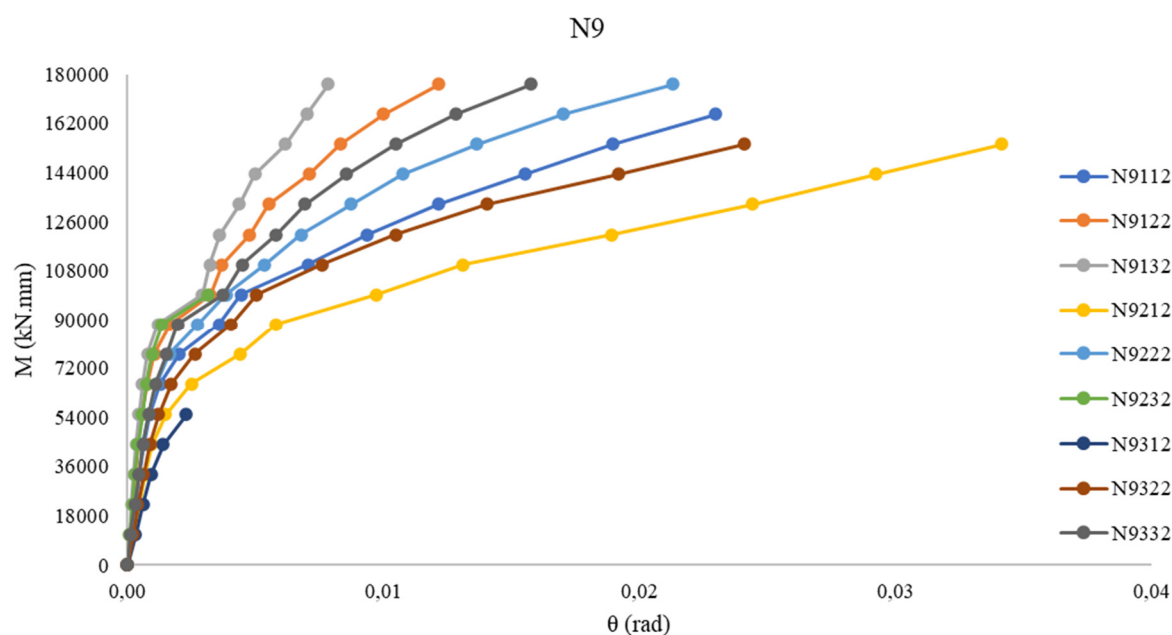
Fonte: Autor.

Tabela B.9 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N9

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,2$								
		N9112	N9122	N9132	N9212	N9222	N9232	N9312	N9322	N9332
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	11025	0,000172	0,000117	0,000090	0,000259	0,000166	0,000106	0,000331	0,000229	0,000123
3	22050	0,000315	0,000216	0,000163	0,000476	0,000305	0,000201	0,000617	0,000423	0,000306
4	33075	0,000467	0,000322	0,000257	0,000711	0,000453	0,000302	0,000936	0,000630	0,000454
5	44100	0,000645	0,000436	0,000348	0,000944	0,000623	0,000420	0,001412	0,000883	0,000622
6	55125	0,000898	0,000581	0,000455	0,001502	0,000851	0,000591	0,002313	0,001219	0,000845
7	66150	0,001283	0,000767	0,000596	0,002500	0,001152	0,000762	NC	0,001730	0,001122
8	77175	0,002034	0,001057	0,000799	0,004422	0,001653	0,000971	NC	0,002642	0,001543
9	88200	0,003582	0,001669	0,001210	0,005814	0,002755	0,001362	NC	0,004066	0,001957
10	99225	0,004436	0,003245	0,002941	0,009746	0,003852	0,003164	NC	0,005043	0,003740
11	110250	0,007046	0,003696	0,003222	0,013122	0,005361	NC	NC	0,007601	0,004484
12	121275	0,009368	0,004786	0,003622	0,018920	0,006787	NC	NC	0,010471	0,005817
13	132300	0,012134	0,005516	0,004374	0,024426	0,008737	NC	NC	0,014034	0,006937
14	143325	0,015516	0,007095	0,004995	0,029234	0,010742	NC	NC	0,019174	0,008565
15	154350	0,018950	0,008314	0,006189	0,034143	0,013660	NC	NC	0,024089	0,010477
16	165375	0,022972	0,010015	0,007016	NC	0,016999	NC	NC	NC	0,012831
17	176400	NC	0,012160	0,007836	NC	0,021316	NC	NC	NC	0,015774

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura B.9 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N9

Fonte: Autor.

Figura B.10 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L76x76x6,35

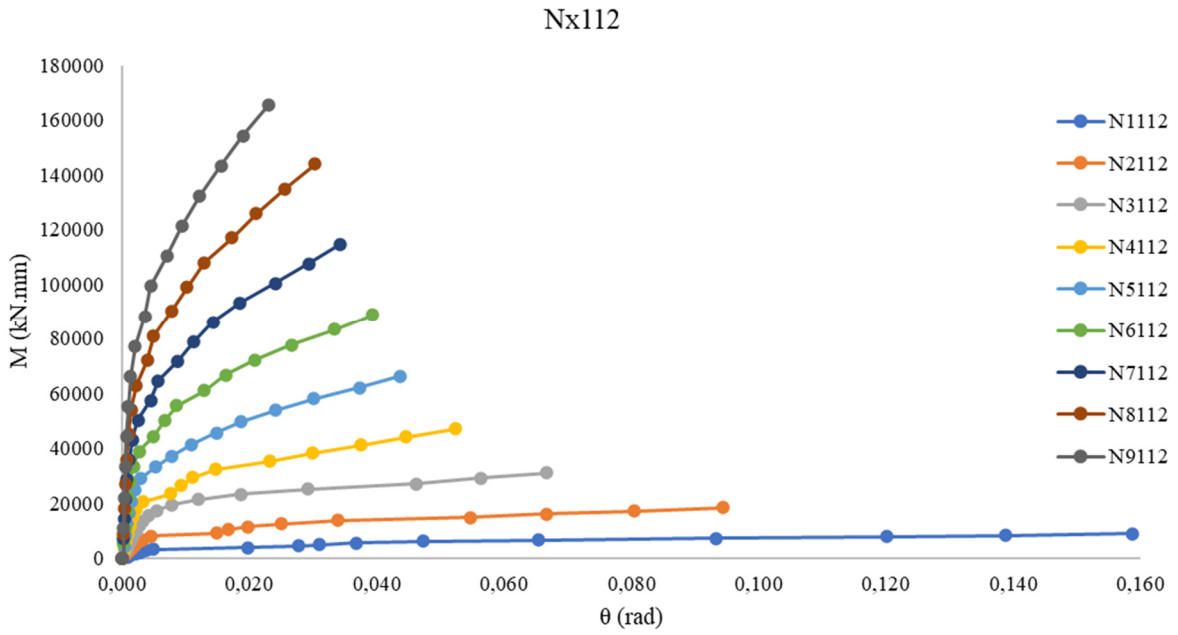


Figura B.11 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L76x76x8,0

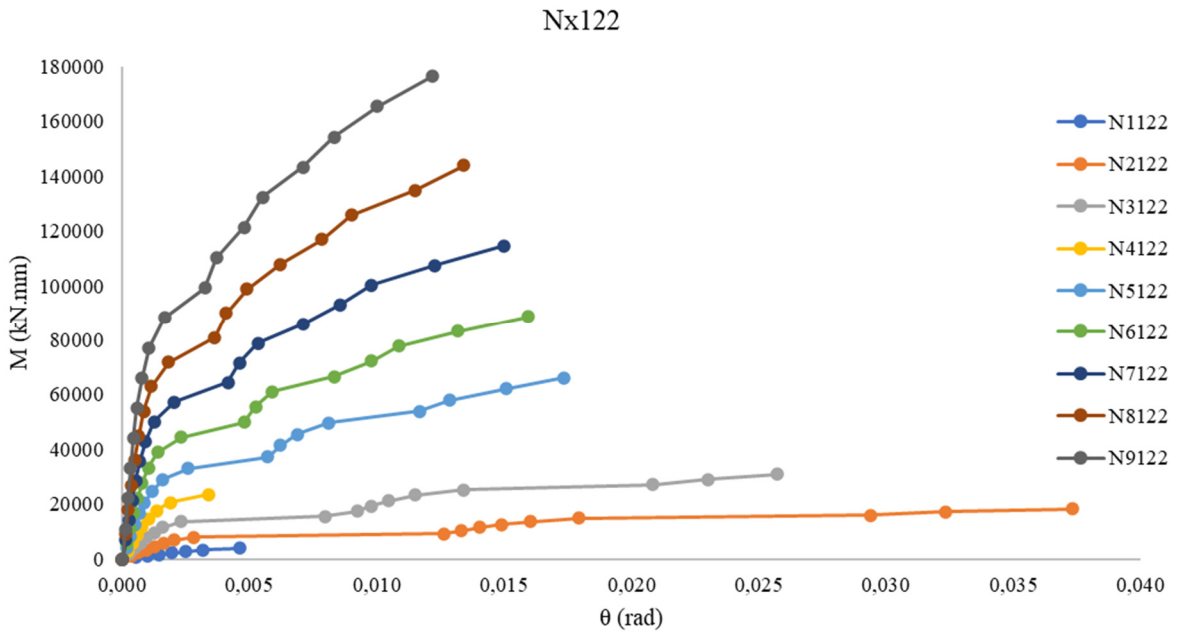


Figura B.12 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L76x76x9,5

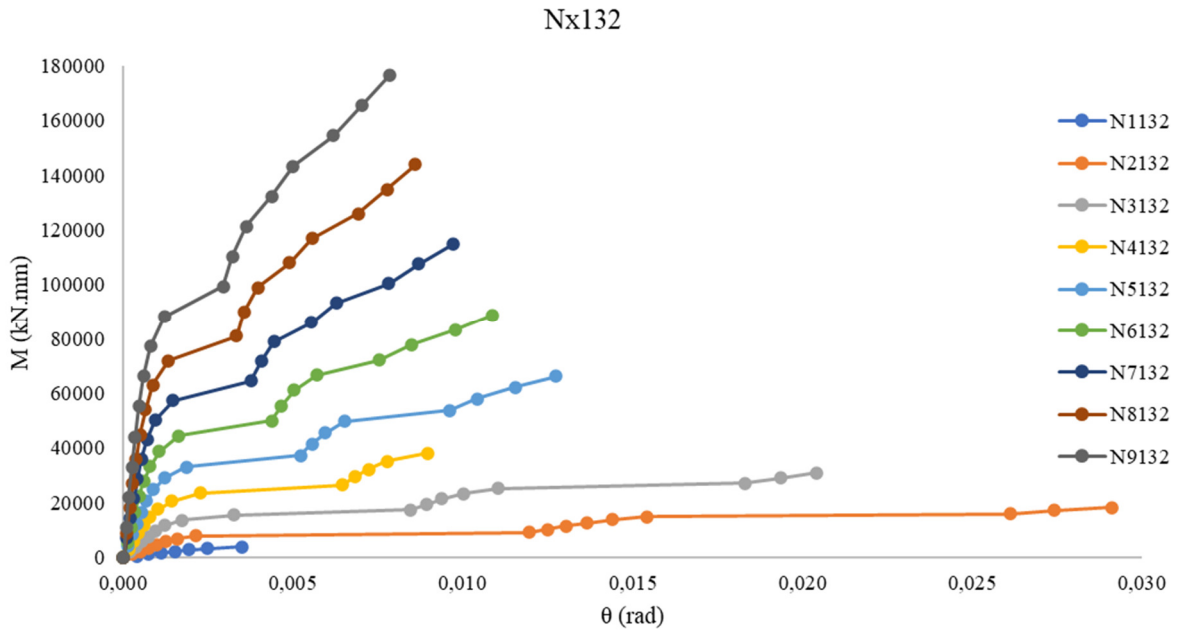


Figura B.13 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L89x89x6,35

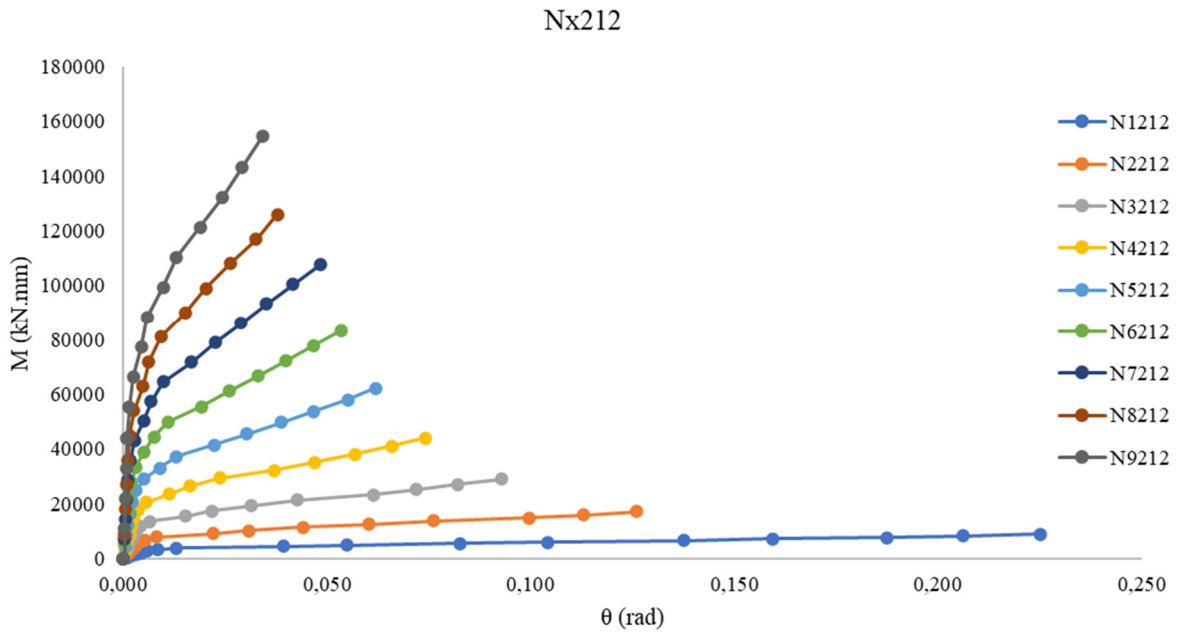
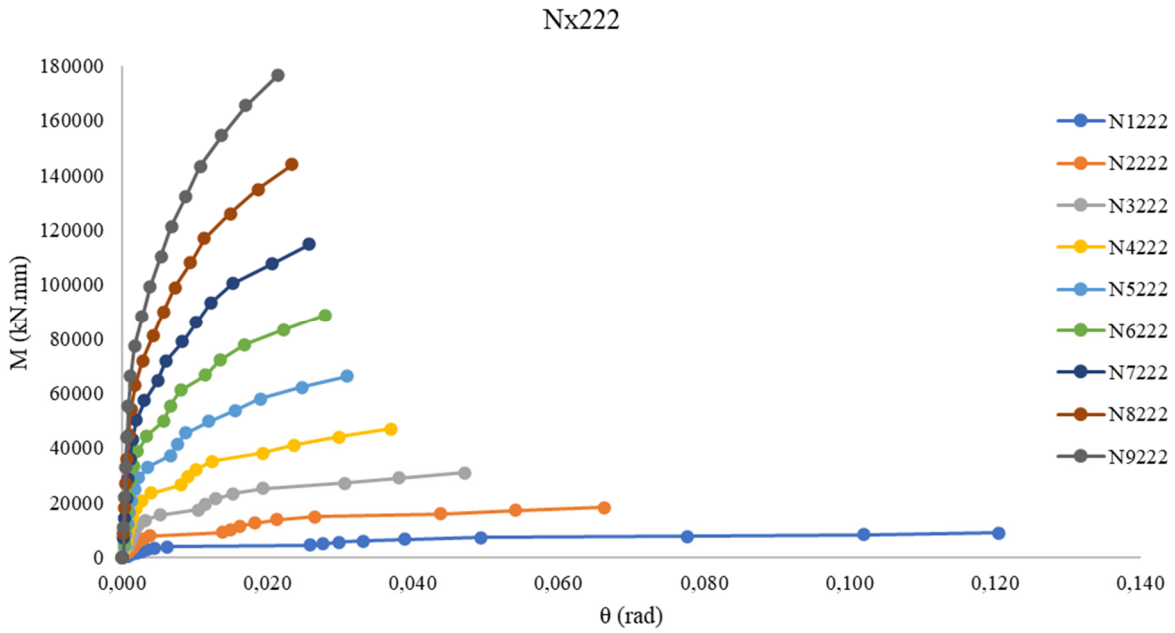
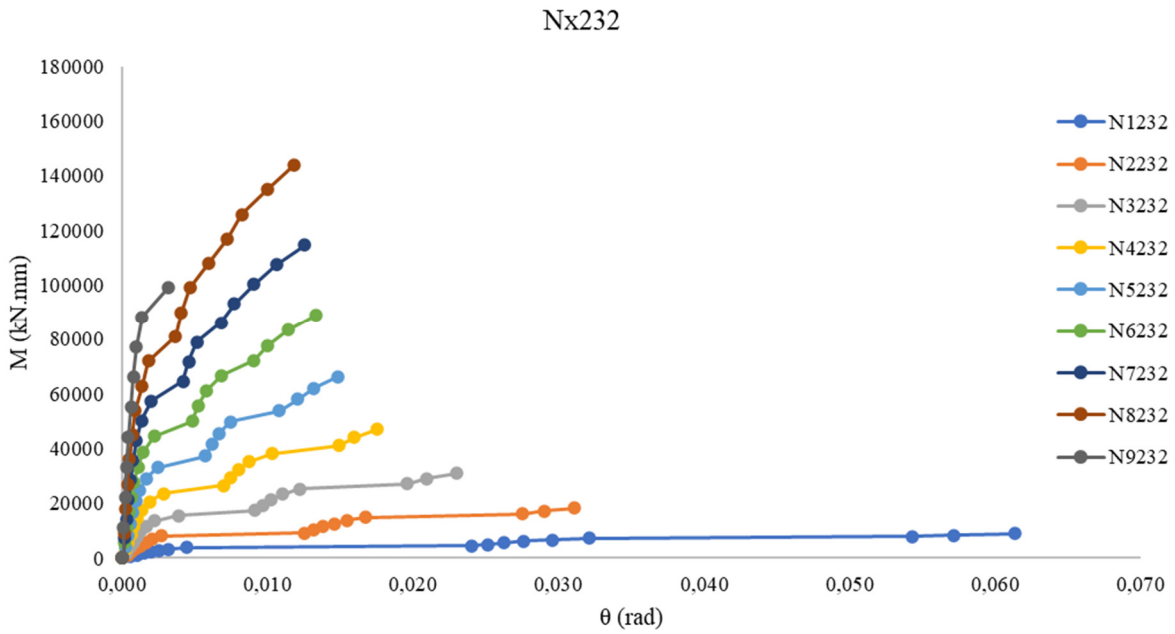


Figura B.14 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L89x89x8,0



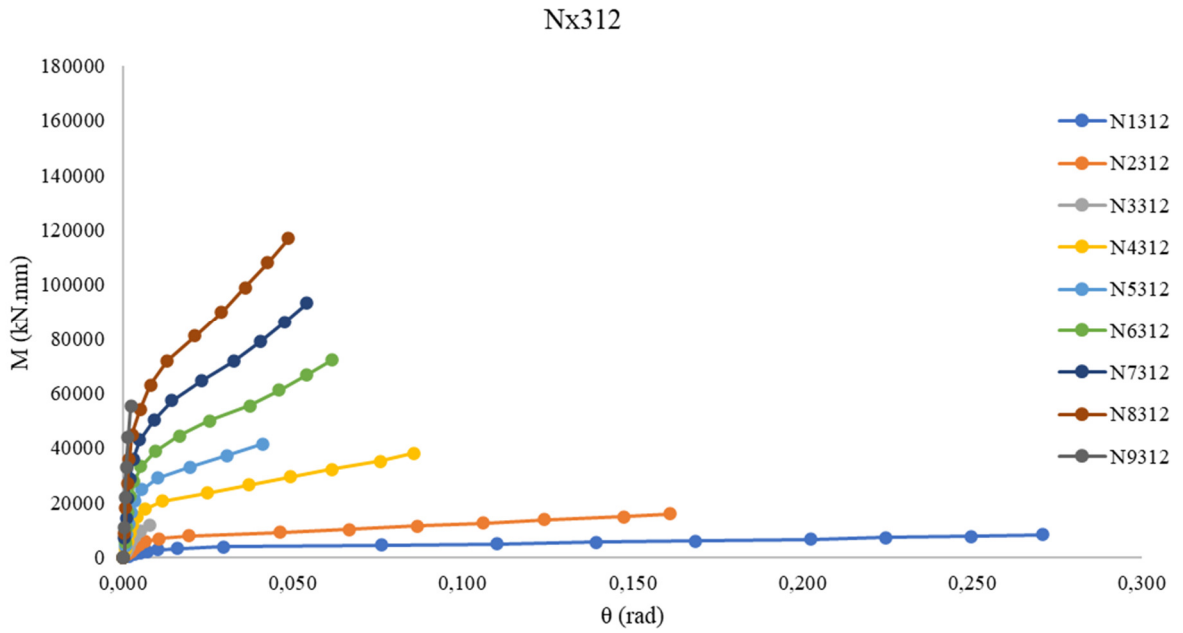
Fonte: Autor.

Figura B.15 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L89x89x9,5



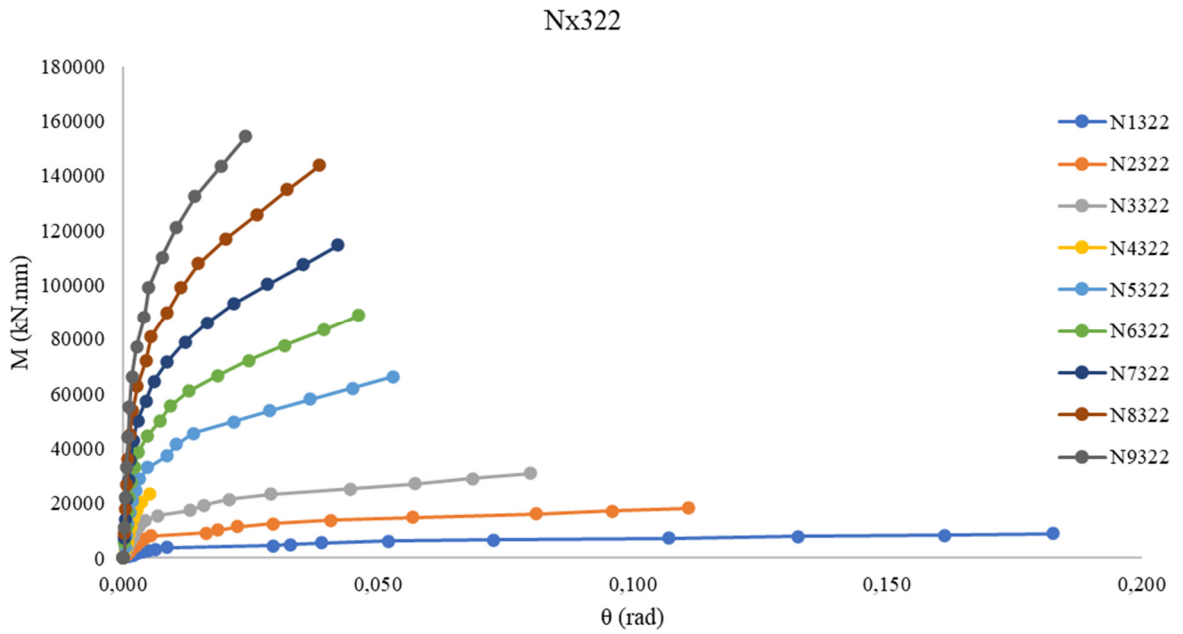
Fonte: Autor.

Figura B.16 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L102x102x6,35

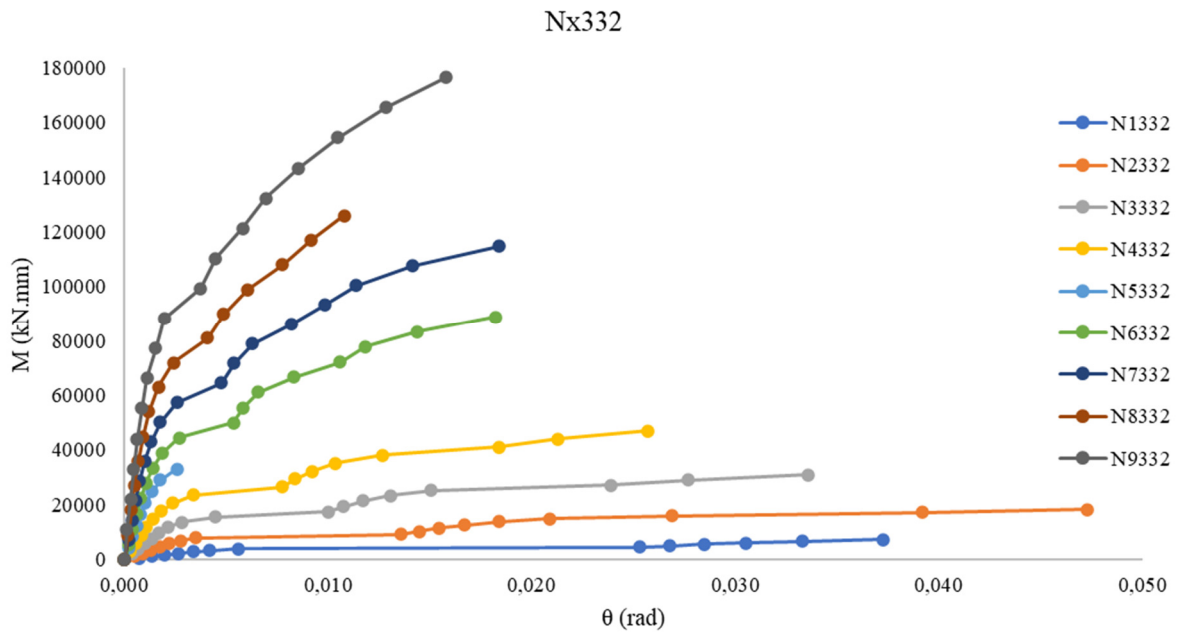


Fonte: Autor.

Figura B.17 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L102x102x8,0



Fonte: Autor.

Figura B.18 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L102x102x9,5

Fonte: Autor.

APÊNDICE C – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA $\mu = 0,4$

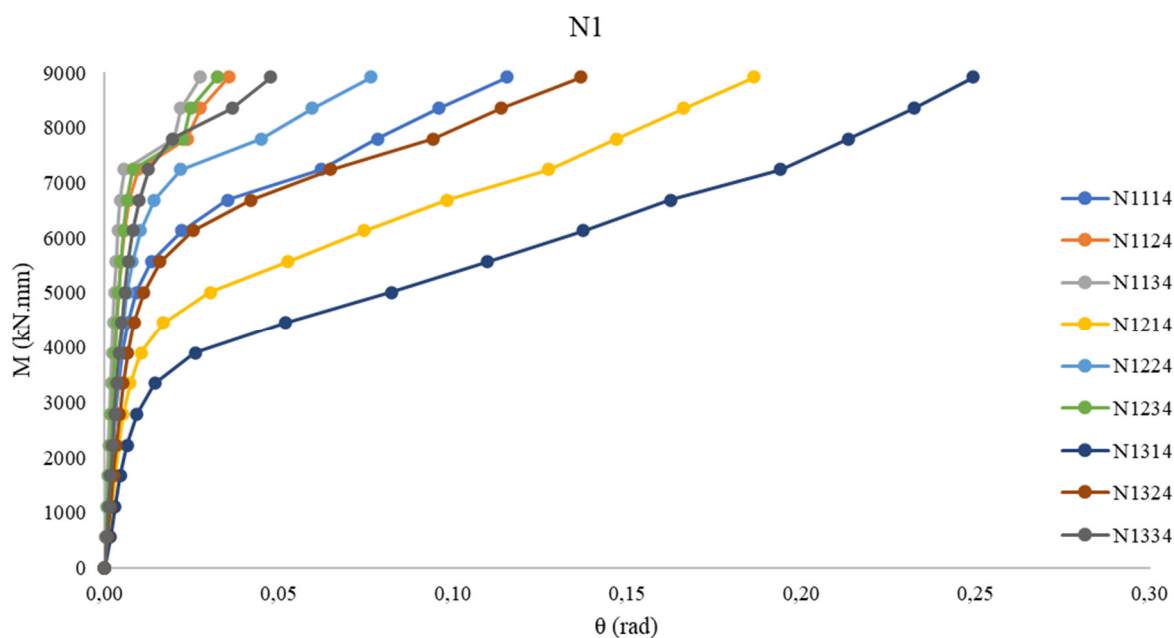
Tabela C.1 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N1

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,4$								
		N1114	N1124	N1134	N1214	N1224	N1234	N1314	N1324	N1334
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	557	0,000711	0,000449	0,000329	0,001106	0,000656	0,000468	0,001627	0,000936	0,000646
3	1114	0,001291	0,000809	0,000597	0,002029	0,001192	0,000838	0,003045	0,001712	0,001160
4	1671	0,001905	0,001188	0,000883	0,003008	0,001742	0,001232	0,004574	0,002534	0,001710
5	2229	0,002551	0,001590	0,001182	0,004082	0,002347	0,001646	0,006444	0,003400	0,002288
6	2786	0,003258	0,002013	0,001496	0,005394	0,002972	0,002079	0,009292	0,004332	0,002887
7	3343	0,004093	0,002456	0,001826	0,007326	0,003640	0,002530	0,014397	0,005396	0,003519
8	3900	0,005182	0,002926	0,002172	0,010498	0,004389	0,003005	0,026072	0,006721	0,004195
9	4457	0,006714	0,003438	0,002533	0,016915	0,005272	0,003510	0,051823	0,008562	0,004937
10	5014	0,009109	0,004007	0,002917	0,030389	0,006431	0,004058	0,082351	0,011251	0,005786
11	5571	0,013455	0,004703	0,003333	0,052553	0,007985	0,004679	0,109775	0,015993	0,006830
12	6128	0,022268	0,005629	0,003832	0,074534	0,010277	0,005432	0,137356	0,025389	0,008153
13	6686	0,035258	0,006964	0,004522	0,098385	0,014199	0,006474	0,162410	0,042067	0,009948
14	7243	0,062053	0,009662	0,005678	0,127554	0,021852	0,008110	0,193982	0,064944	0,012665
15	7800	0,078381	0,023700	0,019898	0,147038	0,045091	0,022632	0,213578	0,094316	0,019480
16	8357	0,095825	0,027479	0,021946	0,166268	0,059704	0,024714	0,232298	0,113806	0,036701
17	8914	0,115625	0,035703	0,027587	0,186364	0,076422	0,032269	0,249218	0,136671	0,047746

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura C.1 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N1



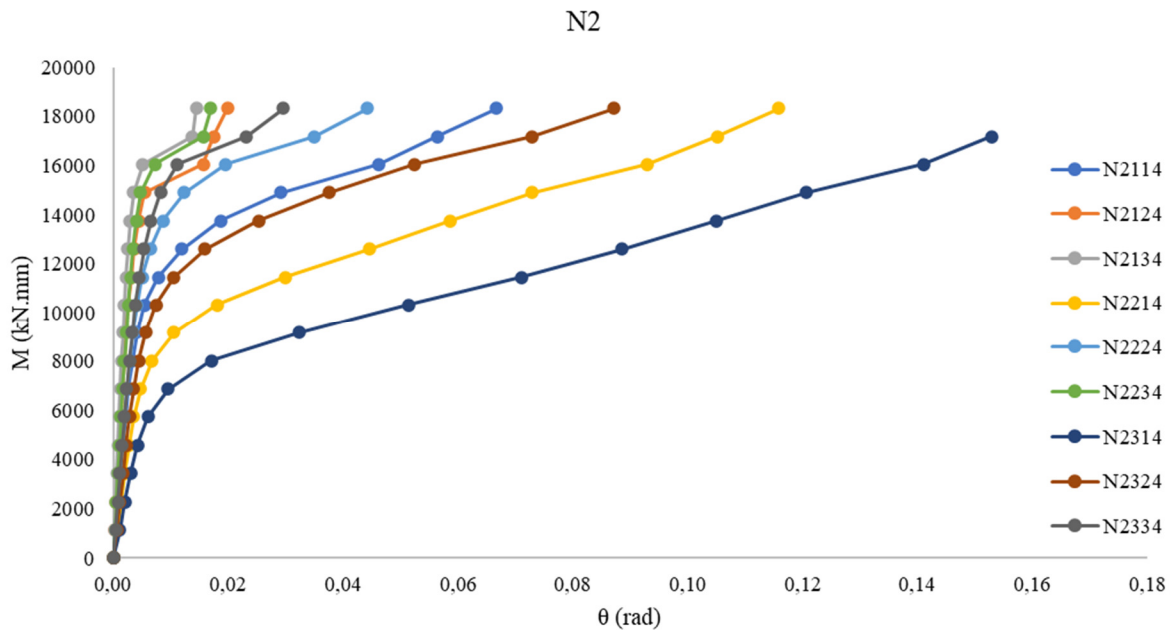
Fonte: Autor.

Tabela C.2 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N2

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,4$								
		N2114	N2124	N2134	N2214	N2224	N2234	N2314	N2324	N2334
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	1146	0,000465	0,000296	0,000218	0,000726	0,000437	0,000406	0,001074	0,000619	0,000431
3	2291	0,000842	0,000534	0,000396	0,001330	0,000790	0,000547	0,002014	0,001139	0,000777
4	3437	0,001242	0,000786	0,000587	0,001971	0,001161	0,000805	0,003020	0,001684	0,001143
5	4583	0,001666	0,001050	0,000787	0,002676	0,001552	0,001074	0,004241	0,002258	0,001526
6	5728	0,002125	0,001327	0,000994	0,003529	0,001964	0,001353	0,006058	0,002873	0,001925
7	6874	0,002651	0,001620	0,001210	0,004715	0,002401	0,001645	0,009543	0,003572	0,002344
8	8020	0,003299	0,001930	0,001437	0,006698	0,002884	0,001949	0,017062	0,004440	0,002791
9	9166	0,004147	0,002264	0,001675	0,010590	0,003449	0,002272	0,032291	0,005622	0,003279
10	10311	0,005477	0,002636	0,001928	0,018099	0,004152	0,002615	0,051359	0,007432	0,003843
11	11457	0,007816	0,003082	0,002205	0,029892	0,005074	0,002995	0,071007	0,010503	0,004519
12	12603	0,011937	0,003646	0,002535	0,044505	0,006460	0,003446	0,088560	0,015985	0,005369
13	13748	0,018620	0,004388	0,002945	0,058695	0,008683	0,004014	0,104996	0,025300	0,006536
14	14894	0,029165	0,005460	0,003494	0,072898	0,012366	0,004768	0,120510	0,037513	0,008231
15	16040	0,046268	0,015645	0,005145	0,092929	0,019589	0,007266	0,141005	0,052444	0,011158
16	17185	0,056398	0,017460	0,013771	0,105135	0,035039	0,015693	0,152837	0,072910	0,023225
17	18331	0,066739	0,019913	0,014503	0,115824	0,044255	0,016981	NC	0,087153	0,029579

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura C.2 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N2

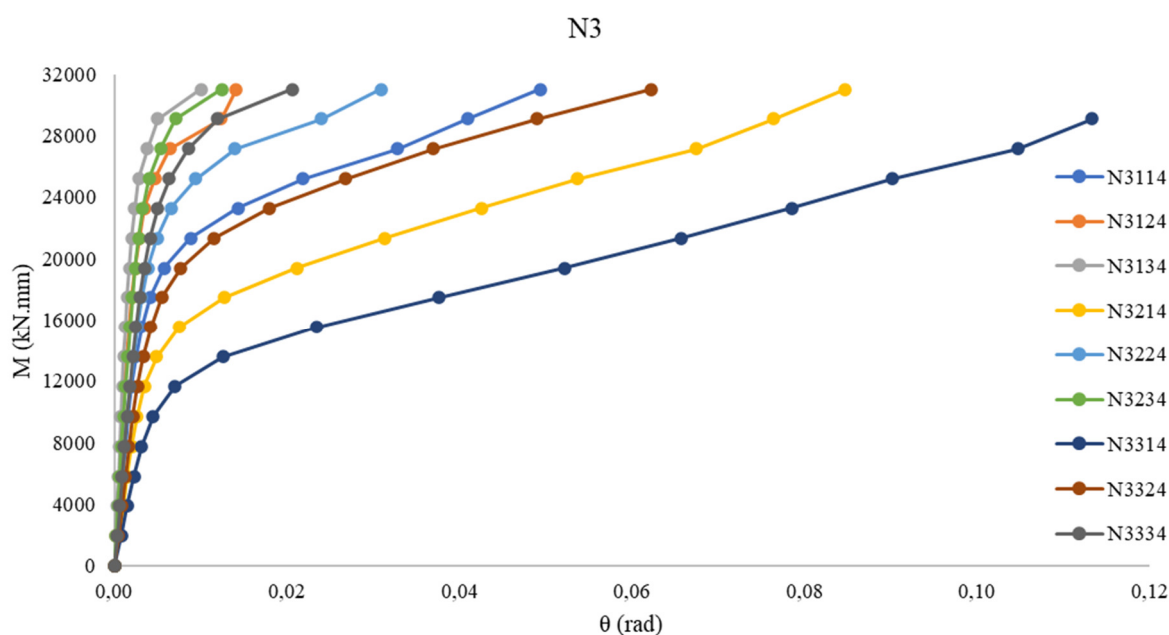
Fonte: Autor.

Tabela C.3 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N3

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,4$								
		N3114	N3124	N3134	N3214	N3224	N3234	N3314	N3324	N3334
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	1940	0,000353	0,000226	0,000166	0,000543	0,000331	0,000238	0,000805	0,000471	0,000325
3	3879	0,000641	0,000408	0,000305	0,001001	0,000601	0,000430	0,001499	0,000864	0,000594
4	5819	0,000944	0,000601	0,000453	0,001485	0,000885	0,000632	0,002269	0,001277	0,000874
5	7758	0,001265	0,000804	0,000606	0,002006	0,001206	0,000844	0,003172	0,001713	0,001164
6	9698	0,001613	0,001017	0,000766	0,002638	0,001495	0,001064	0,004511	0,002177	0,001468
7	11637	0,002013	0,001239	0,000933	0,003493	0,001829	0,001294	0,007022	0,002702	0,001791
8	13577	0,002493	0,001477	0,001108	0,004871	0,002198	0,001535	0,012591	0,003341	0,002128
9	15516	0,003147	0,001735	0,001292	0,007490	0,002624	0,001792	0,023372	0,004209	0,002499
10	17456	0,004138	0,002034	0,001489	0,012741	0,003168	0,002072	0,037569	0,005510	0,002931
11	19395	0,005728	0,002402	0,001717	0,021141	0,003899	0,002401	0,052132	0,007709	0,003464
12	21335	0,008807	0,002858	0,001986	0,031365	0,004942	0,002796	0,065689	0,011602	0,004151
13	23274	0,014308	0,003482	0,002317	0,042506	0,006577	0,003287	0,078458	0,017964	0,005057
14	25214	0,021878	0,004678	0,002793	0,053696	0,009437	0,004048	0,090109	0,026790	0,006391
15	27153	0,032803	0,006436	0,003825	0,067436	0,013953	0,005368	0,104696	0,036996	0,008579
16	29093	0,040918	0,012364	0,005041	0,076429	0,024009	0,007078	0,113275	0,048981	0,011972
17	31032	0,049365	0,014101	0,010049	0,084712	0,030924	0,012448	NC	0,062244	0,020615

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura C.3 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N3

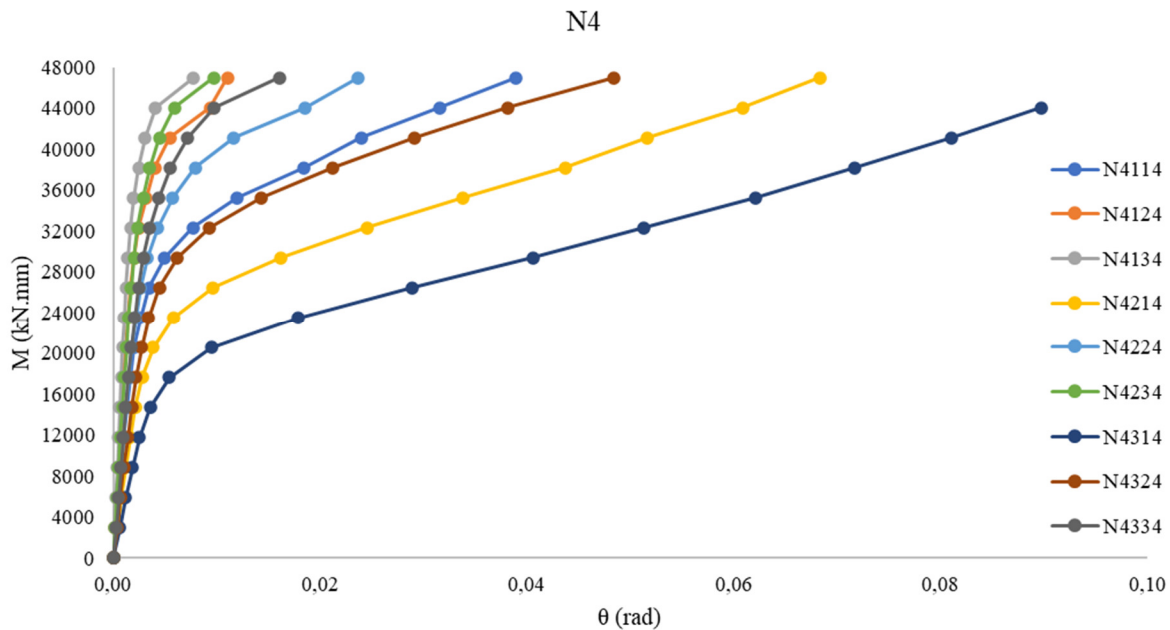
Fonte: Autor.

Tabela C.4 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N4

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,4$								
		N4114	N4124	N4134	N4214	N4224	N4234	N4314	N4324	N4334
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	2937	0,000285	0,000181	0,000136	0,000436	0,000269	0,000196	0,000644	0,000380	0,000260
3	5874	0,000517	0,000331	0,000250	0,000807	0,000489	0,000352	0,001202	0,000696	0,000486
4	8811	0,000762	0,000489	0,000372	0,001201	0,000720	0,000519	0,001822	0,001034	0,000715
5	11748	0,001023	0,000654	0,000498	0,001625	0,000958	0,000693	0,002528	0,001390	0,000955
6	14684	0,001306	0,000828	0,000630	0,002127	0,001221	0,000874	0,003550	0,001769	0,001206
7	17621	0,001636	0,001011	0,000768	0,002800	0,001495	0,001064	0,005401	0,002193	0,001469
8	20558	0,002039	0,001207	0,000912	0,003853	0,001799	0,001263	0,009480	0,002714	0,001750
9	23495	0,002605	0,001422	0,001064	0,005807	0,002162	0,001477	0,017838	0,003413	0,002061
10	26432	0,003445	0,001683	0,001232	0,009636	0,002633	0,001722	0,028911	0,004468	0,002432
11	29369	0,004968	0,002004	0,001428	0,016214	0,003275	0,002013	0,040547	0,006215	0,002894
12	32306	0,007717	0,002438	0,001660	0,024512	0,004300	0,002368	0,051318	0,009304	0,003501
13	35243	0,011967	0,003168	0,001970	0,033818	0,005767	0,002909	0,062131	0,014342	0,004391
14	38179	0,018437	0,004014	0,002462	0,043704	0,007914	0,003545	0,071702	0,021235	0,005512
15	41116	0,023957	0,005457	0,003079	0,051620	0,011664	0,004464	0,081069	0,029135	0,007198
16	44053	0,031518	0,009372	0,004085	0,060844	0,018566	0,005888	0,089672	0,038084	0,009729
17	46990	0,038948	0,011020	0,007771	0,068288	0,023688	0,009673	NC	0,048396	0,016070

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura C.4 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N4

Fonte: Autor.

Tabela C.5 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N5

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,4$								
		N5114	N5124	N5134	N5214	N5224	N5234	N5314	N5324	N5334
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	4140	0,000240	0,000155	0,000116	0,000369	0,000228	0,000167	0,000539	0,000319	0,000190
3	8280	0,000437	0,000283	0,000215	0,000681	0,000414	0,000301	0,001024	0,000593	0,000343
4	12420	0,000643	0,000418	0,000320	0,001013	0,000611	0,000444	0,001534	0,000879	0,000503
5	16561	0,000863	0,000559	0,000429	0,001373	0,000817	0,000594	0,002127	0,001180	0,000670
6	20701	0,001102	0,000707	0,000543	0,001799	0,001034	0,000750	0,002998	0,001502	0,000846
7	24841	0,001377	0,000863	0,000662	0,002371	0,001267	0,000912	0,004546	0,001863	0,001032
8	28981	0,001725	0,001030	0,000785	0,003277	0,001527	0,001084	0,007983	0,002310	0,001231
9	33121	0,002214	0,001220	0,000917	0,004917	0,001850	0,001273	0,014525	0,002929	0,001460
10	37261	0,003012	0,001451	0,001067	0,008261	0,002272	0,001497	0,024059	0,003845	0,001746
11	41401	0,004457	0,001743	0,001241	0,013776	0,002922	0,001766	0,033807	0,005441	0,002159
12	45541	0,006605	0,002211	0,001452	0,021133	0,003856	0,002156	0,043393	0,008010	0,002669
13	49682	0,010984	0,002780	0,001763	0,029169	0,005178	0,002619	0,052341	0,012167	0,003356
14	53822	0,014599	0,003610	0,002126	0,036034	0,007266	0,003201	0,060639	0,018053	0,004349
15	57962	0,019254	0,004931	0,002652	0,043037	0,010372	0,004087	0,067224	0,024813	0,005892
16	62102	0,024564	0,007636	0,003479	0,049856	0,014320	0,005360	0,073553	0,032368	NC
17	66242	0,031482	0,009228	0,006448	0,057651	0,018954	0,008238	NC	0,039943	NC

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

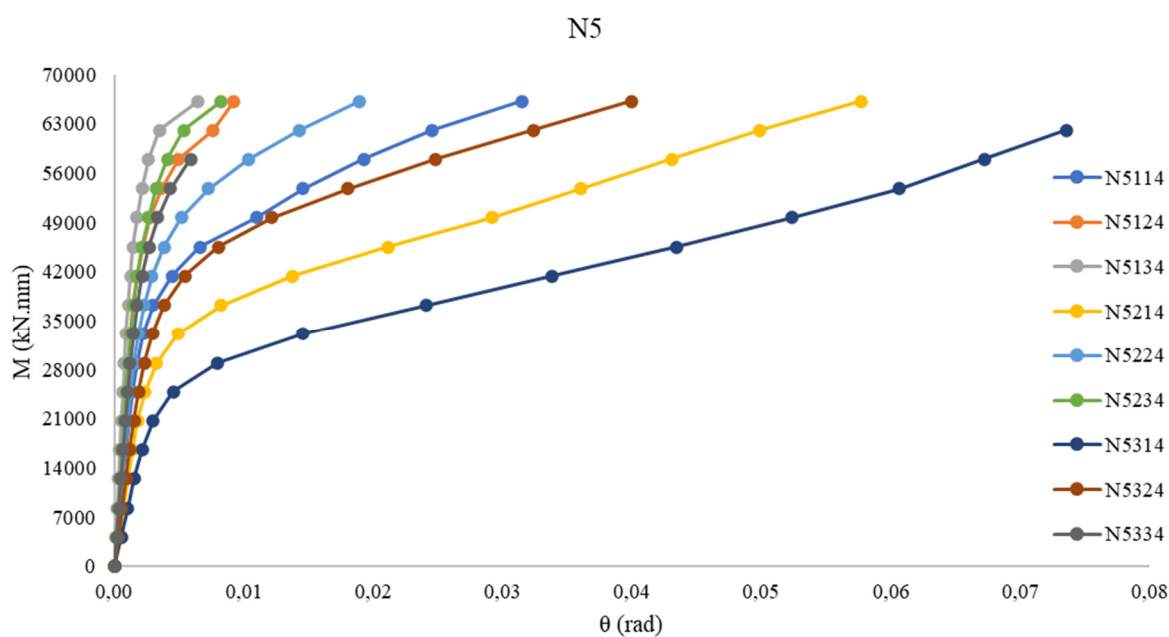
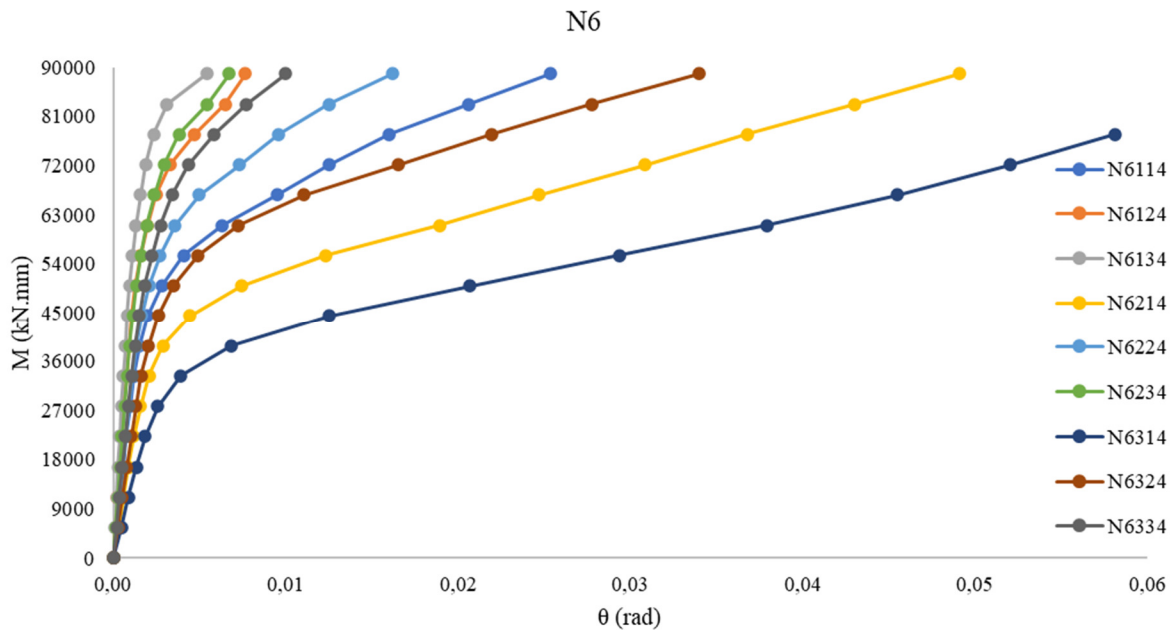
Figura C.5 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N5

Tabela C.6 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N6

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,4$								
		N6114	N6124	N6134	N6214	N6224	N6234	N6314	N6324	N6334
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	5550	0,000209	0,000135	0,000102	0,000321	0,000198	0,000146	0,000465	0,000272	0,000191
3	11101	0,000380	0,000248	0,000191	0,000592	0,000362	0,000265	0,000875	0,000515	0,000352
4	16651	0,000561	0,000367	0,000284	0,000878	0,000536	0,000391	0,001329	0,000765	0,000520
5	22201	0,000752	0,000491	0,000380	0,001191	0,000717	0,000522	0,001849	0,001026	0,000695
6	27751	0,000961	0,000621	0,000481	0,001561	0,000908	0,000660	0,002587	0,001306	0,000878
7	33302	0,001203	0,000759	0,000585	0,002067	0,001114	0,000815	0,003907	0,001626	0,001070
8	38852	0,001516	0,000906	0,000695	0,002872	0,001350	0,000955	0,006862	0,002036	0,001278
9	44402	0,001967	0,001077	0,000813	0,004441	0,001652	0,001129	0,012522	0,002603	0,001521
10	49952	0,002808	0,001285	0,000948	0,007409	0,002075	0,001333	0,020684	0,003491	0,001815
11	55503	0,004086	0,001568	0,001104	0,012349	0,002727	0,001600	0,029362	0,004909	0,002234
12	61053	0,006323	0,001967	0,001306	0,018917	0,003595	0,001949	0,037899	0,007266	0,002734
13	66603	0,009483	0,002480	0,001563	0,024704	0,004980	0,002363	0,045474	0,011052	0,003399
14	72153	0,012515	0,003287	0,001875	0,030840	0,007338	0,002949	0,052004	0,016502	0,004352
15	77704	0,016006	0,004717	0,002336	0,036783	0,009590	0,003818	0,058123	0,021965	0,005870
16	83254	0,020638	0,006494	0,003101	0,043020	0,012499	0,005462	NC	0,027733	0,007711
17	88804	0,025350	0,007646	0,005403	0,049070	0,016182	0,006731	NC	0,033954	0,009997

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura C.6 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N6

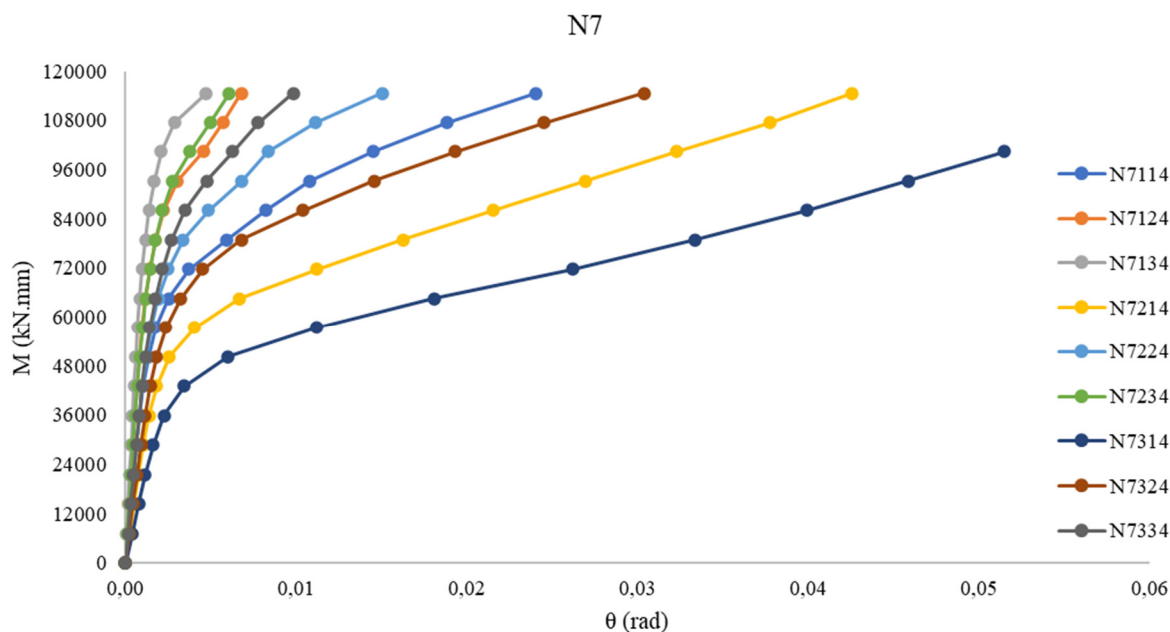
Fonte: Autor.

Tabela C.7 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N7

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,4$								
		N7114	N7124	N7134	N7214	N7224	N7234	N7314	N7324	N7334
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	7168	0,000185	0,000121	0,000092	0,000284	0,000177	0,000130	0,000414	0,000243	0,000176
3	14335	0,000337	0,000222	0,000171	0,000524	0,000324	0,000238	0,000780	0,000459	0,000324
4	21503	0,000498	0,000328	0,000255	0,000778	0,000478	0,000351	0,001174	0,000681	0,000478
5	28671	0,000668	0,000440	0,000342	0,001055	0,000640	0,000469	0,001636	0,000914	0,000640
6	35838	0,000853	0,000556	0,000433	0,001385	0,000811	0,000592	0,002289	0,001165	0,000808
7	43006	0,001069	0,000679	0,000527	0,001844	0,000996	0,000721	0,003462	0,001452	0,000987
8	50173	0,001353	0,000812	0,000626	0,002595	0,001214	0,000860	0,006009	0,001829	0,001185
9	57341	0,001778	0,000969	0,000733	0,004070	0,001495	0,001020	0,011204	0,002380	0,001427
10	64509	0,002535	0,001158	0,000857	0,006686	0,001925	0,001211	0,018077	0,003264	0,001756
11	71676	0,003730	0,001429	0,001000	0,011217	0,002503	0,001472	0,026184	0,004547	0,002174
12	78844	0,005947	0,001769	0,001190	0,016274	0,003391	0,001778	0,033397	0,006816	0,002721
13	86012	0,008236	0,002256	0,001407	0,021513	0,004862	0,002182	0,039901	0,010400	0,003488
14	93179	0,010829	0,003056	0,001693	0,026974	0,006852	0,002769	0,045848	0,014575	0,004779
15	100347	0,014495	0,004581	0,002108	0,032278	0,008349	0,003788	0,051495	0,019318	0,006287
16	107514	0,018817	0,005711	0,002900	0,037723	0,011126	0,004974	NC	0,024539	0,007776
17	114682	0,024065	0,006793	0,004729	0,042570	0,015027	0,006077	NC	0,030384	0,009858

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura C.7 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N7

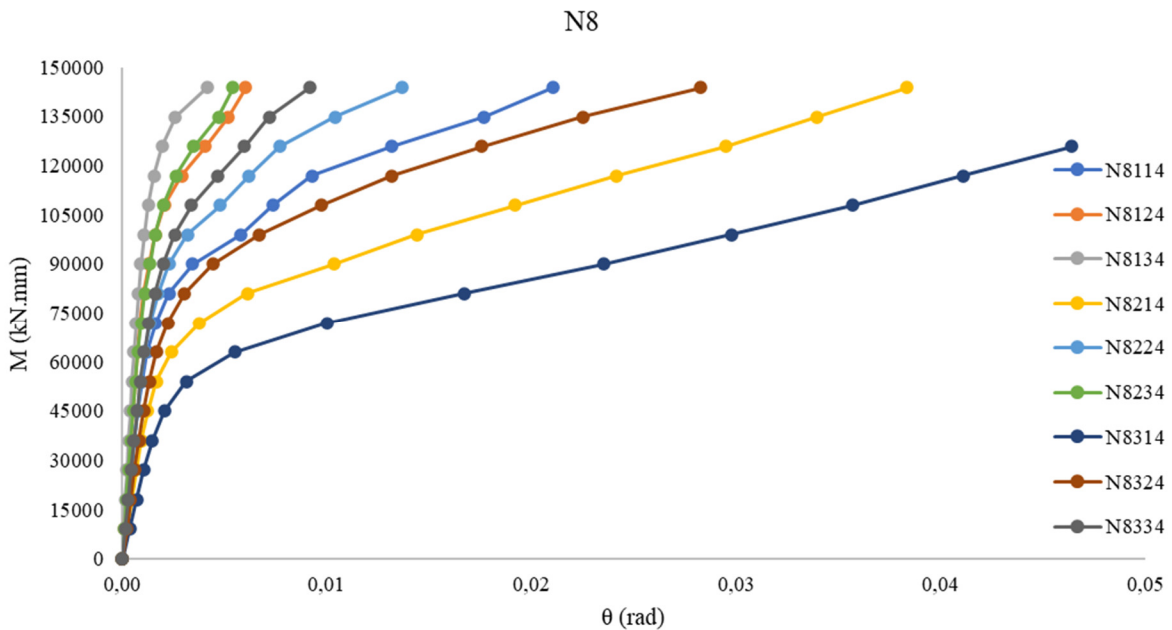
Fonte: Autor.

Tabela C.8 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N8

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,4$								
		N8114	N8124	N8134	N8214	N8224	N8234	N8314	N8324	N8334
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	8993	0,000167	0,000110	0,000084	0,000256	0,000161	0,000118	0,000376	0,000223	0,000160
3	17985	0,000304	0,000202	0,000157	0,000471	0,000293	0,000216	0,000703	0,000414	0,000294
4	26978	0,000449	0,000299	0,000234	0,000700	0,000433	0,000319	0,001055	0,000615	0,000434
5	35970	0,000603	0,000401	0,000314	0,000950	0,000580	0,000427	0,001470	0,000826	0,000581
6	44963	0,000771	0,000507	0,000397	0,001250	0,000735	0,000539	0,002064	0,001054	0,000734
7	53955	0,000969	0,000619	0,000483	0,001669	0,000903	0,000657	0,003130	0,001320	0,000897
8	62948	0,001230	0,000741	0,000574	0,002415	0,001103	0,000785	0,005511	0,001677	0,001084
9	71940	0,001636	0,000886	0,000674	0,003771	0,001369	0,000934	0,010040	0,002238	0,001312
10	80933	0,002301	0,001063	0,000788	0,006117	0,001764	0,001115	0,016718	0,003058	0,001629
11	89925	0,003447	0,001310	0,000923	0,010346	0,002303	0,001350	0,023518	0,004419	0,002014
12	98918	0,005820	0,001616	0,001094	0,014403	0,003188	0,001629	0,029749	0,006722	0,002560
13	107910	0,007358	0,002076	0,001290	0,019216	0,004804	0,002016	0,035662	0,009721	0,003402
14	116903	0,009278	0,002906	0,001553	0,024158	0,006216	0,002637	0,041088	0,013181	0,004697
15	125895	0,013149	0,004067	0,001948	0,029492	0,007690	0,003500	0,046402	0,017571	0,005965
16	134888	0,017673	0,005192	0,002591	0,033954	0,010403	0,004701	NC	0,022505	0,007195
17	143880	0,021038	0,006031	0,004155	0,038341	0,013698	0,005419	NC	0,028276	0,009153

NC: Não convergiu.
Fonte: Autor.

Figura C.8 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N8



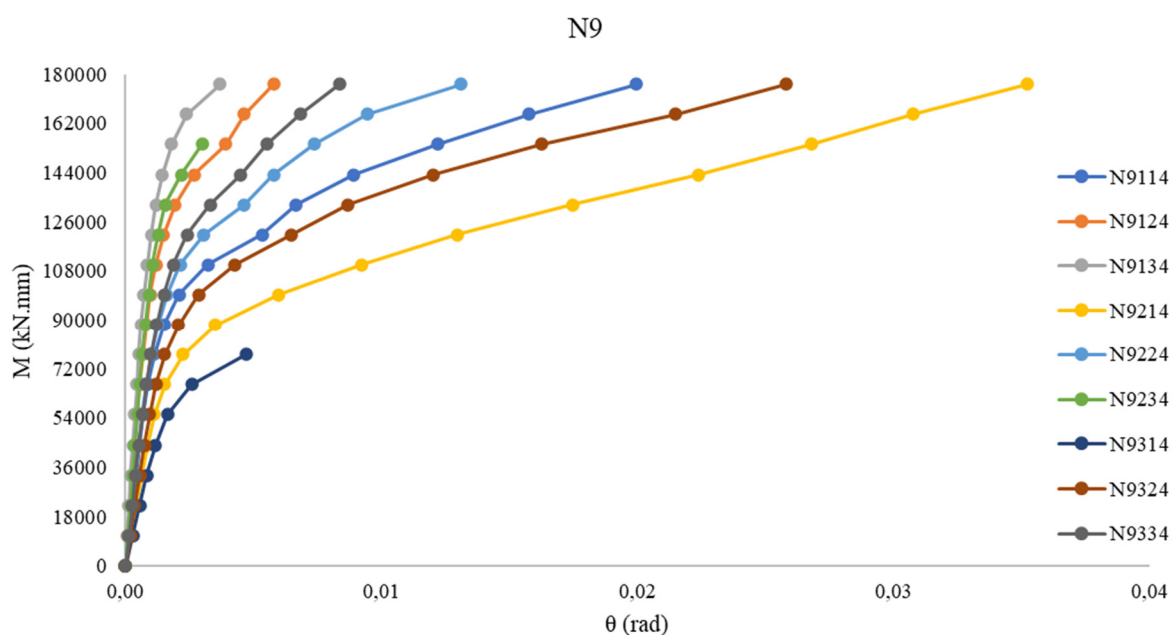
Fonte: Autor.

Tabela C.9 – Valores da rotação relativa das ligações do grupo N9

LS	M (kN.mm)	θ (rad) - $\mu=0,4$								
		N9114	N9124	N9134	N9214	N9224	N9234	N9314	N9324	N9334
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	11025	0,000153	0,000101	0,000077	0,000232	0,000147	0,000130	0,000299	0,000204	0,000146
3	22050	0,000279	0,000186	0,000146	0,000429	0,000268	0,000213	0,000562	0,000378	0,000269
4	33075	0,000412	0,000276	0,000217	0,000637	0,000397	0,000303	0,000841	0,000561	0,000398
5	44100	0,000552	0,000369	0,000291	0,000865	0,000531	0,000372	0,001170	0,000754	0,000533
6	55125	0,000706	0,000467	0,000368	0,001139	0,000673	0,000475	0,001644	0,000963	0,000673
7	66150	0,000888	0,000571	0,000449	0,001534	0,000829	0,000568	0,002595	0,001210	0,000824
8	77175	0,001130	0,000685	0,000533	0,002251	0,001018	0,000660	0,004705	0,001549	0,001000
9	88200	0,001516	0,000819	0,000627	0,003531	0,001272	0,000793	NC	0,002080	0,001220
10	99225	0,002109	0,000987	0,000734	0,006005	0,001632	0,000922	NC	0,002873	0,001509
11	110250	0,003232	0,001209	0,000863	0,009248	0,002150	0,001068	NC	0,004278	0,001877
12	121275	0,005345	0,001495	0,001017	0,012955	0,003065	0,001282	NC	0,006505	0,002421
13	132300	0,006684	0,001937	0,001200	0,017460	0,004651	0,001563	NC	0,008708	0,003326
14	143325	0,008914	0,002686	0,001445	0,022394	0,005794	0,002188	NC	0,012025	0,004514
15	154350	0,012195	0,003937	0,001821	0,026791	0,007377	0,003007	NC	0,016236	0,005534
16	165375	0,015759	0,004651	0,002391	0,030736	0,009445	NC	NC	0,021492	0,006823
17	176400	0,019959	0,005795	0,003712	0,035197	0,013112	NC	NC	0,025797	0,008352

NC: Não convergiu.

Fonte: Autor.

Figura C.9 – Curvas $M-\theta$ das ligações do grupo N9

Fonte: Autor.

Figura C.10 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L76x76x6,35

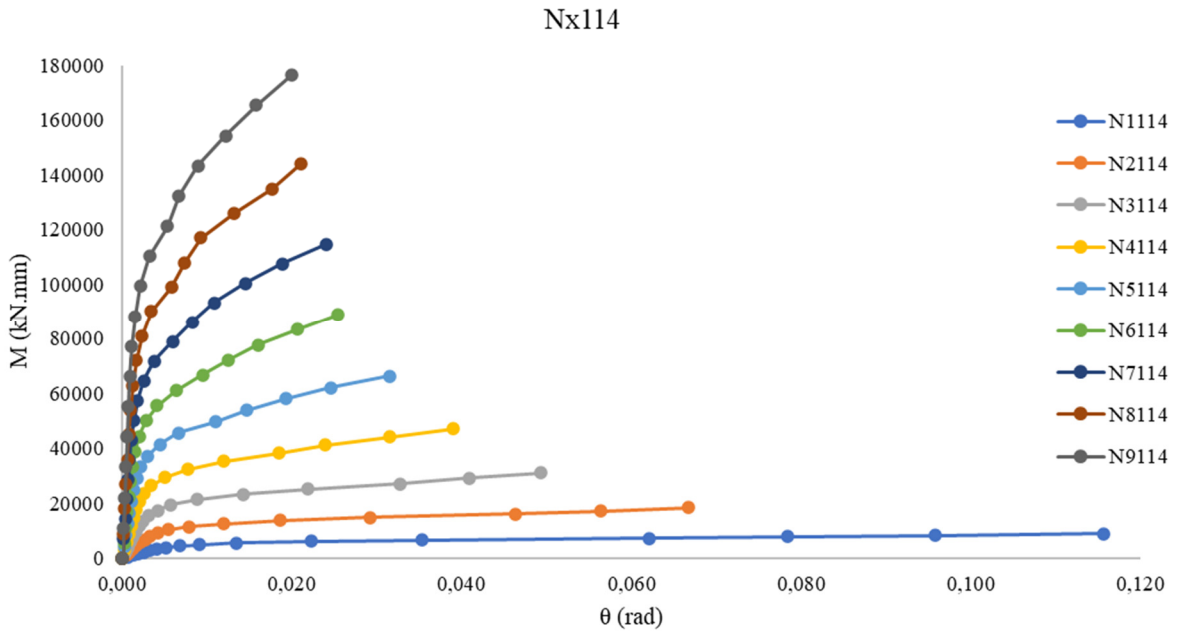


Figura C.11 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L76x76x8,0

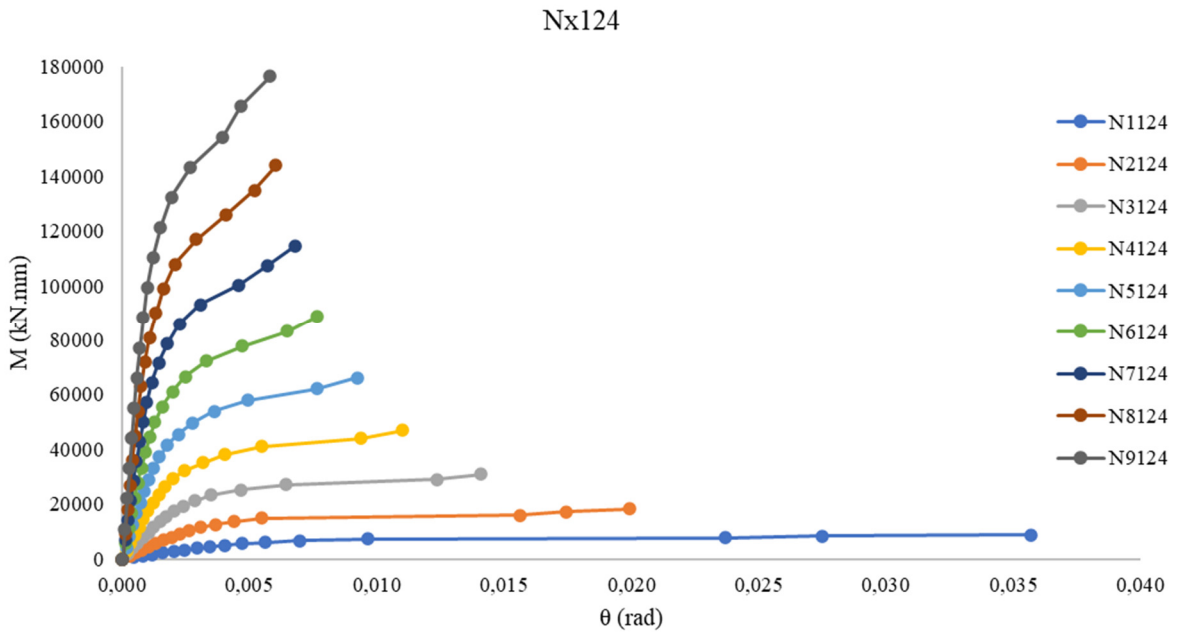
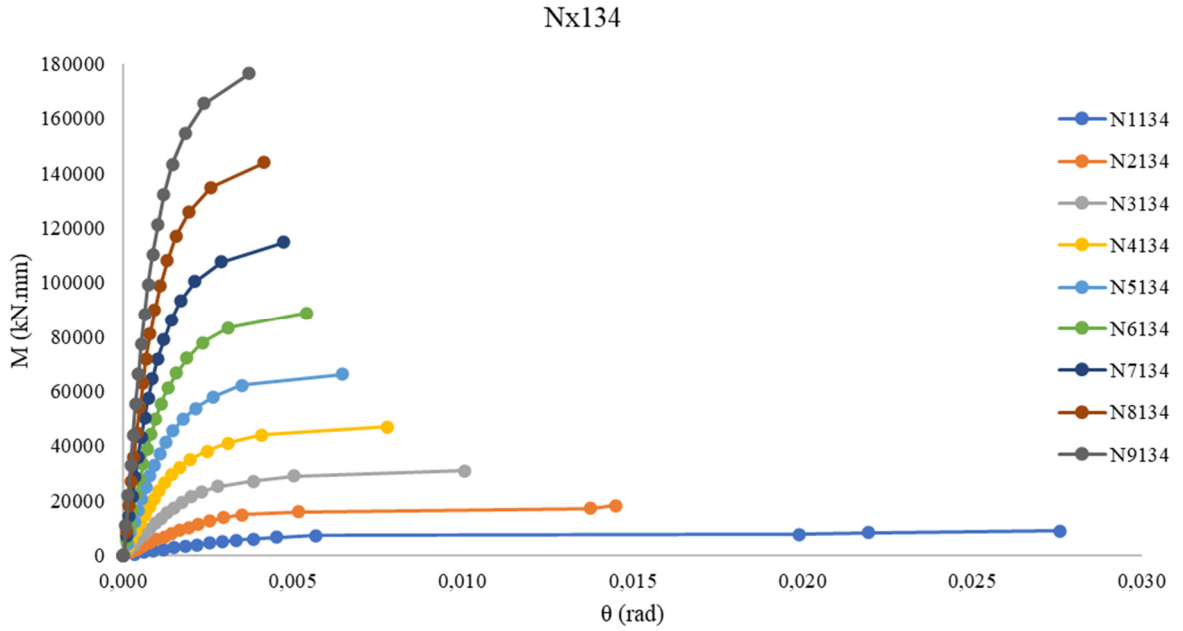
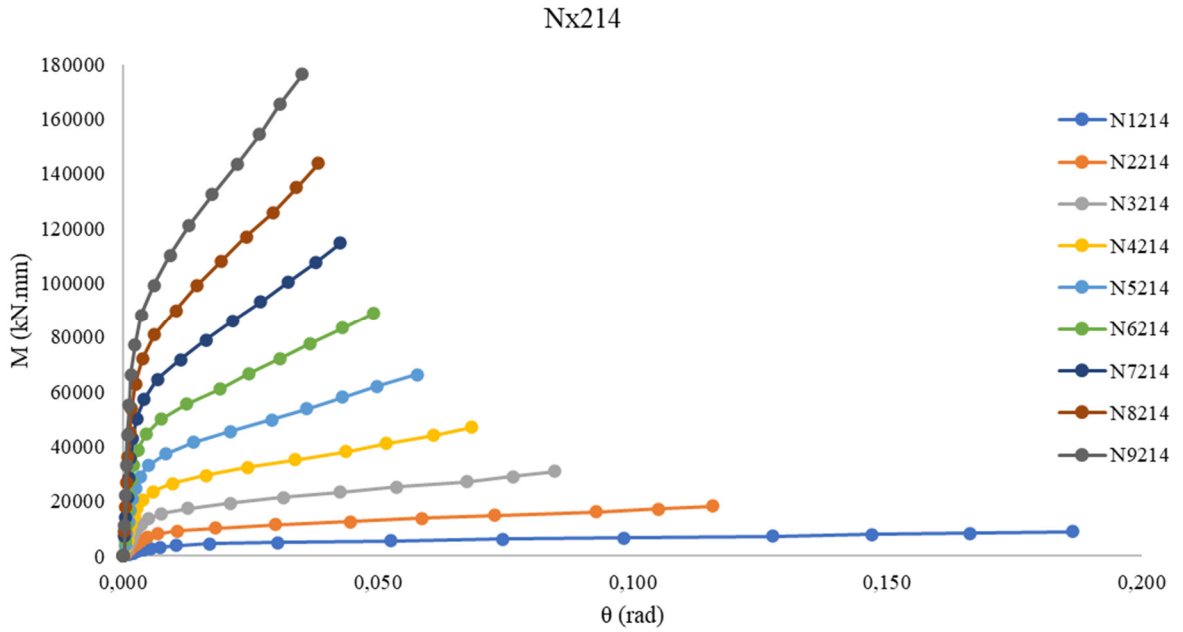


Figura C.12 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L76x76x9,5



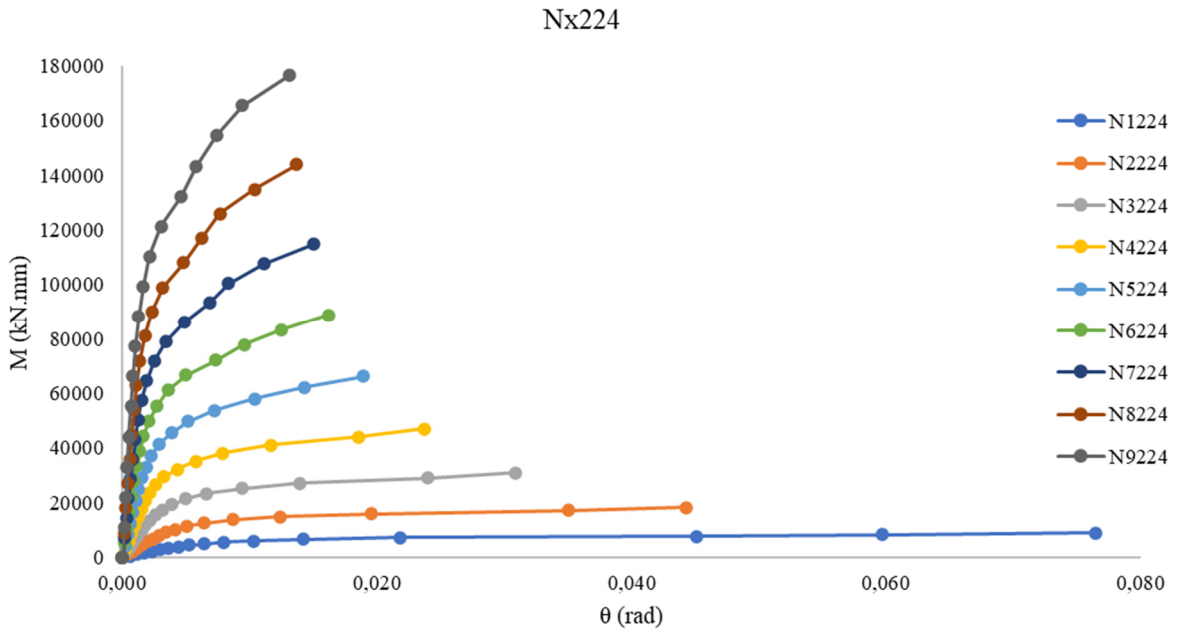
Fonte: Autor.

Figura C.13 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L89x89x6,35



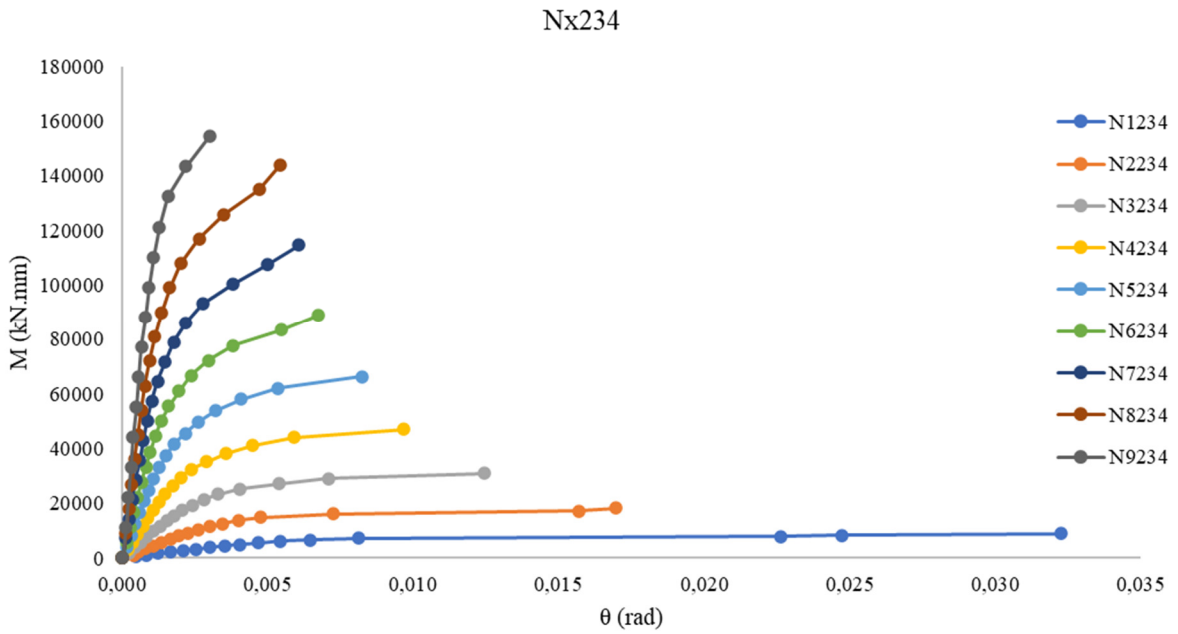
Fonte: Autor.

Figura C.14 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L89x89x8,0



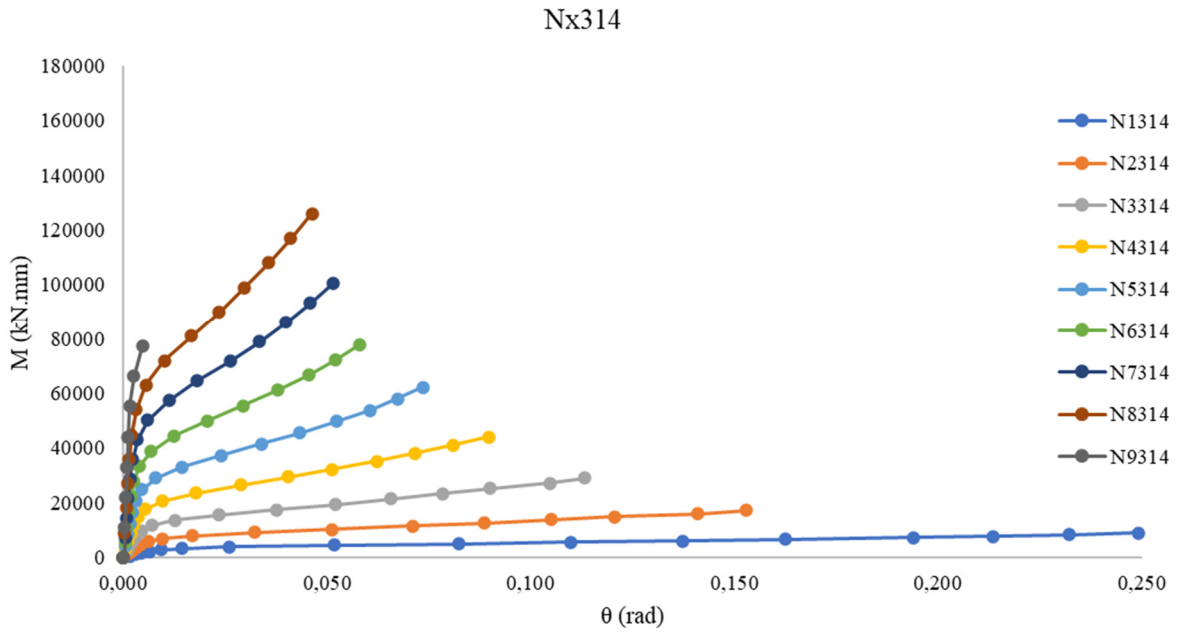
Fonte: Autor.

Figura C.15 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L89x89x9,5



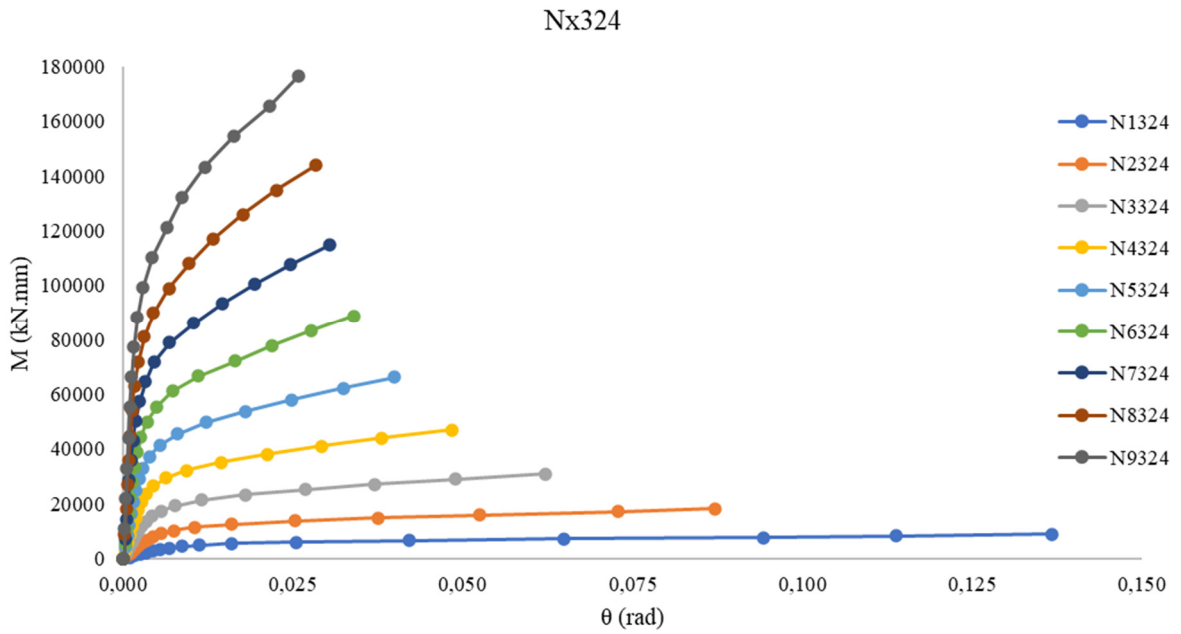
Fonte: Autor.

Figura C.16 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L102x102x6,35

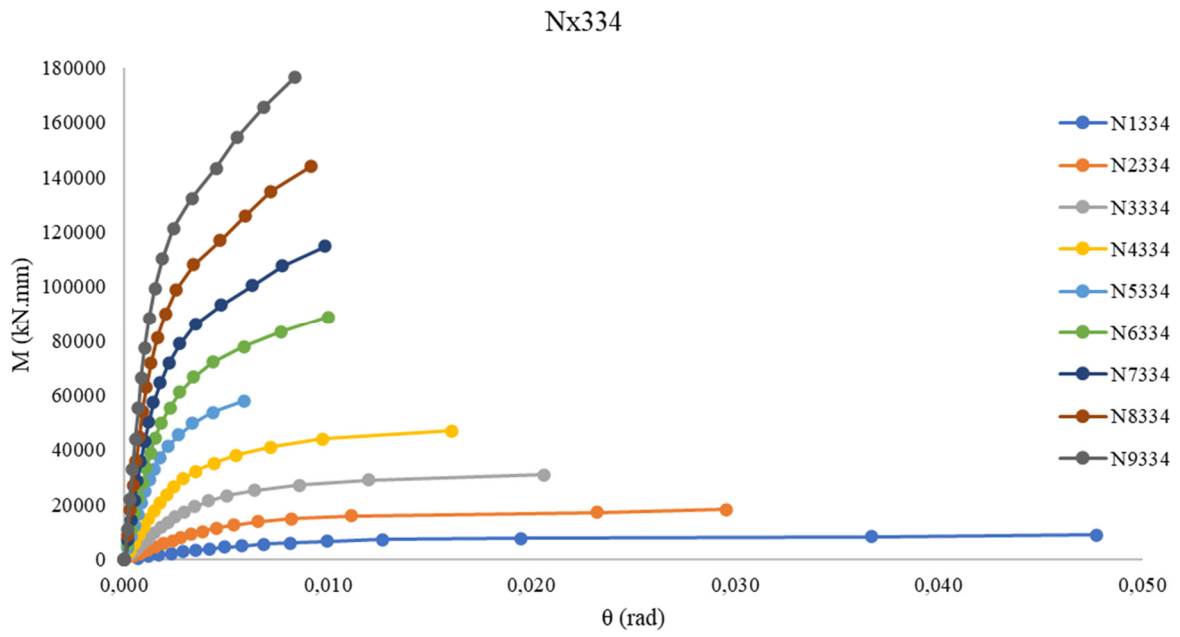


Fonte: Autor.

Figura C.17 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L102x102x8,0



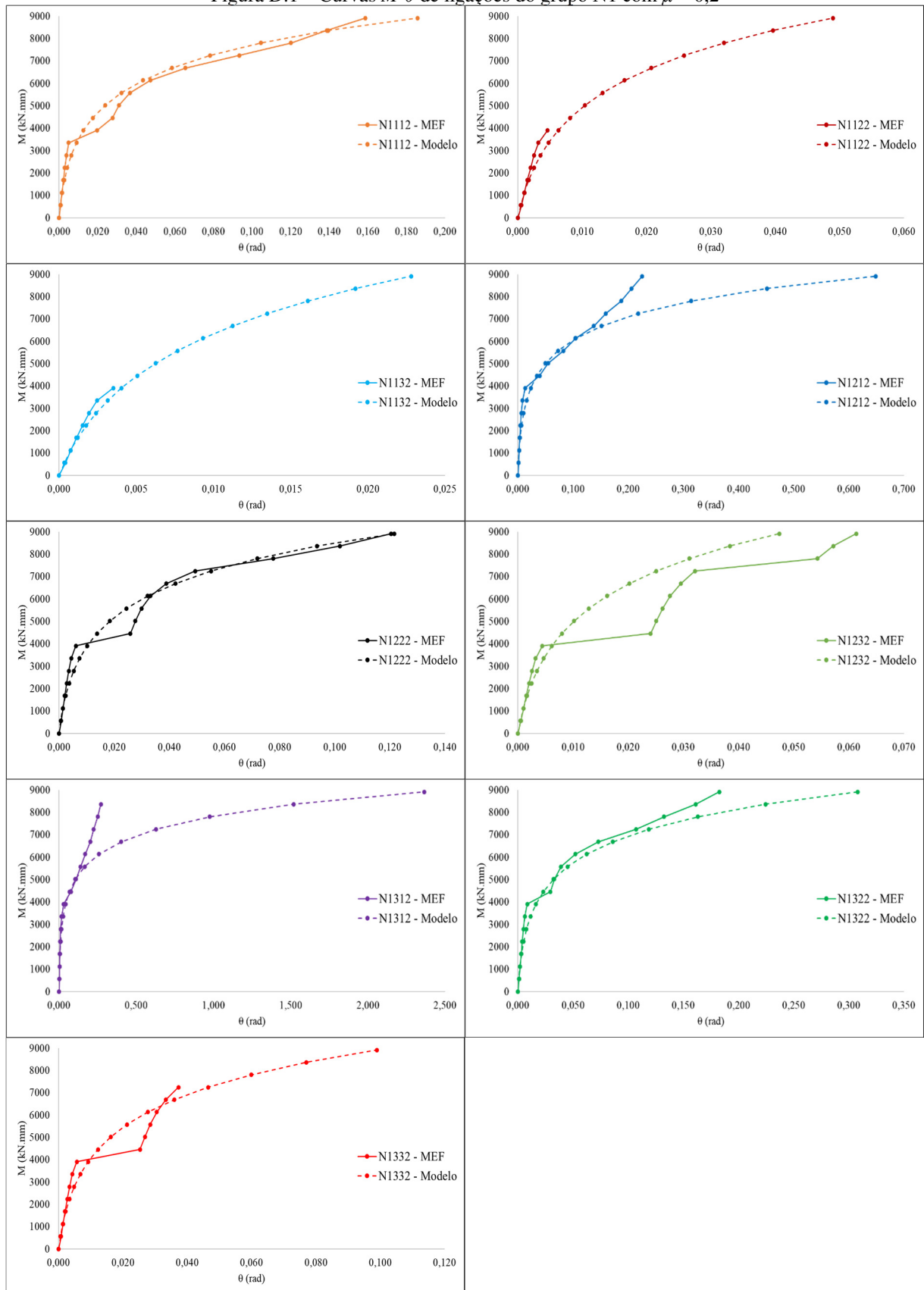
Fonte: Autor.

Figura C.18 – Curvas $M-\theta$ das ligações com L102x102x9,5

Fonte: Autor.

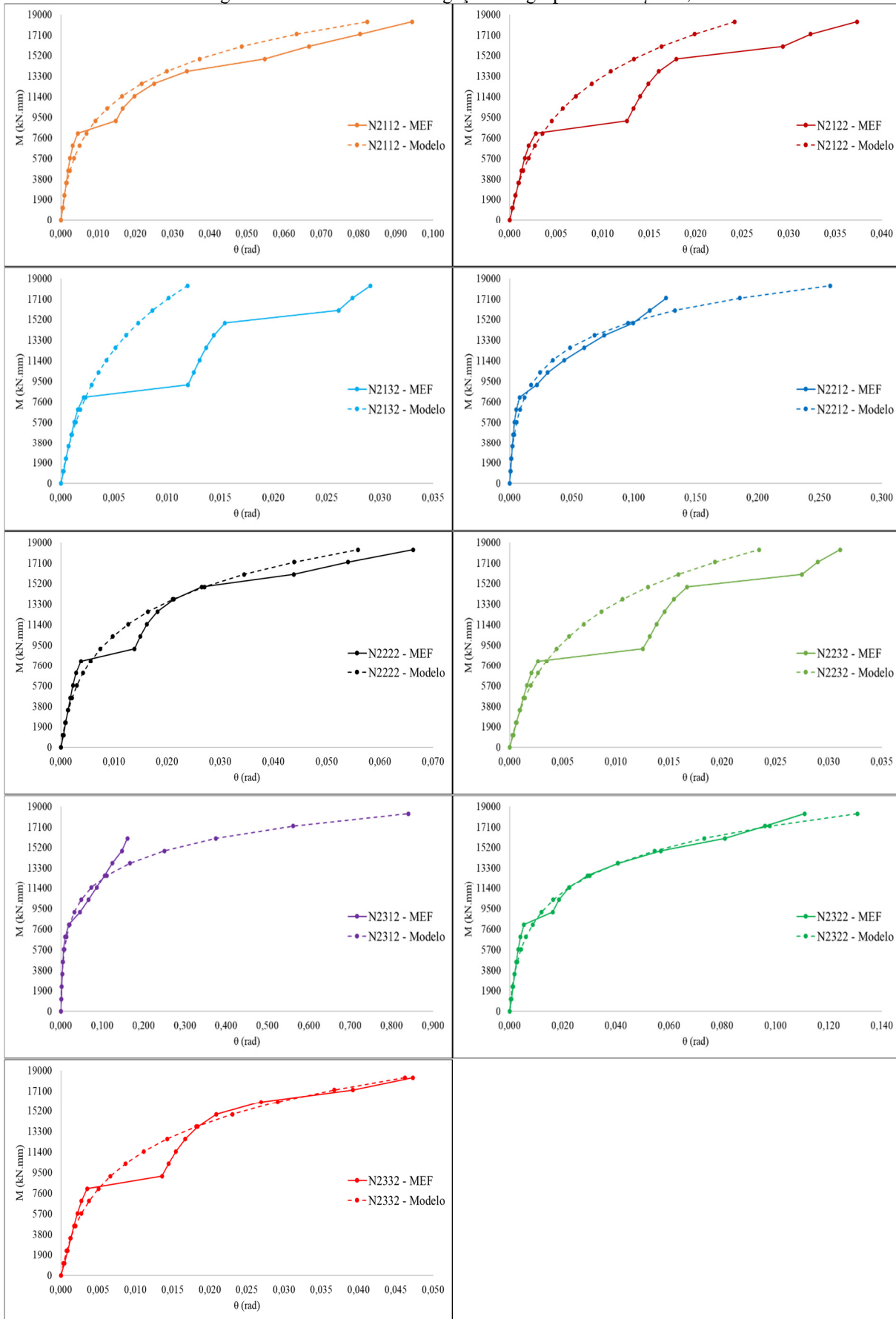
APÊNDICE D – CURVAS $M-\theta$: MEF x MODELO PROPOSTO

Figura D.1 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N1 com $\mu = 0,2$



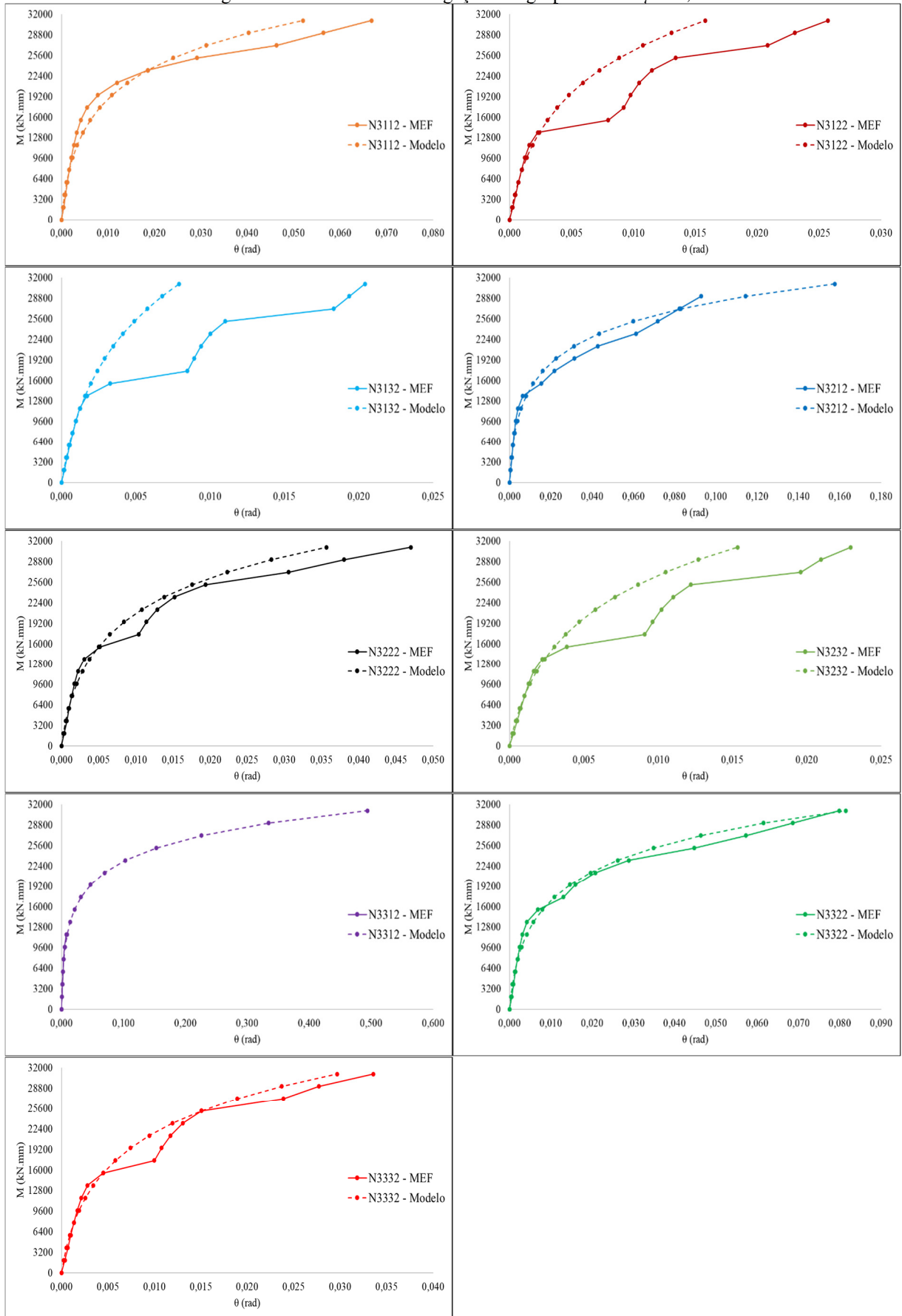
Fonte: Autor.

Figura D.2 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N2 com $\mu = 0,2$



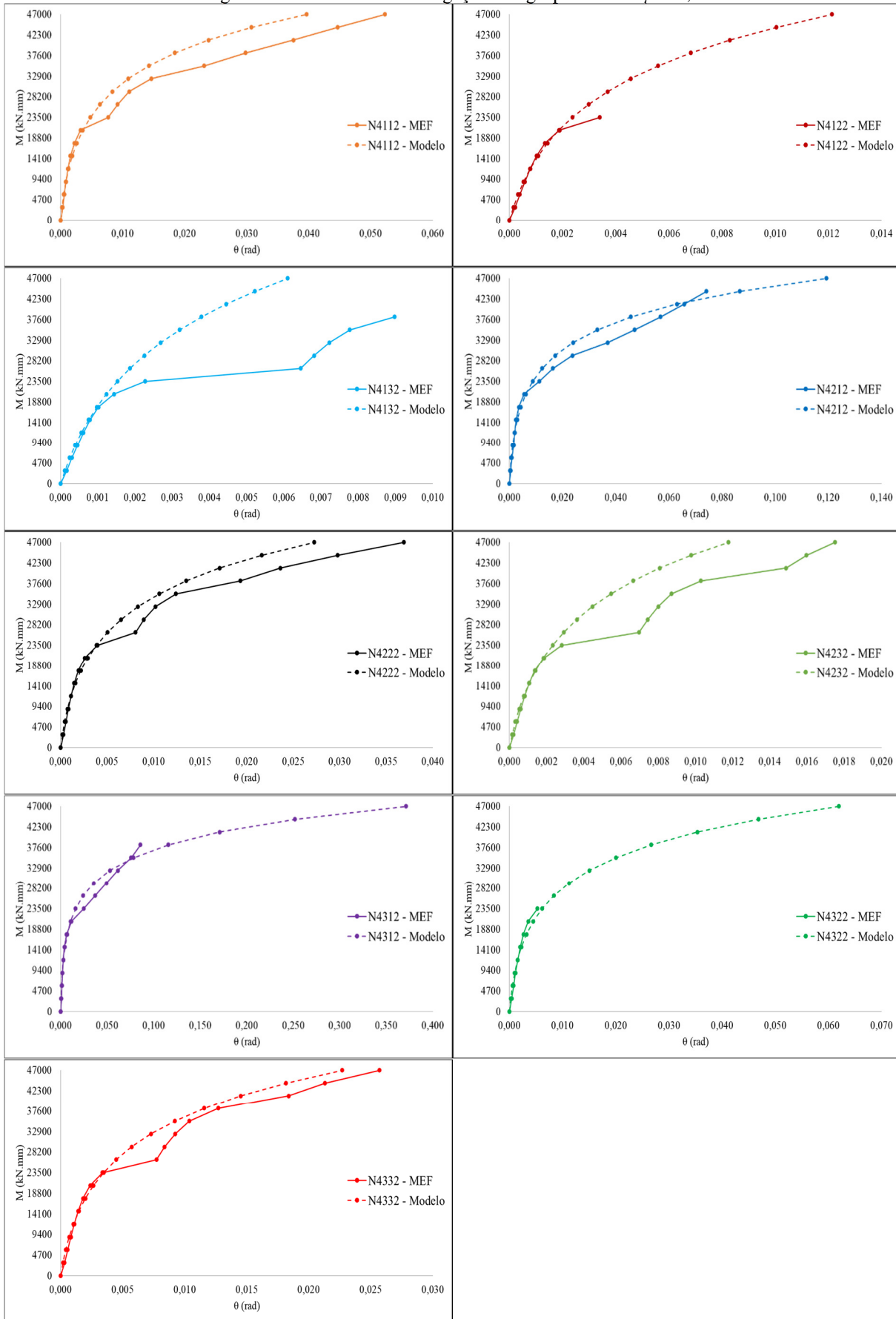
Fonte: Autor.

Figura D.3 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N3 com $\mu = 0,2$



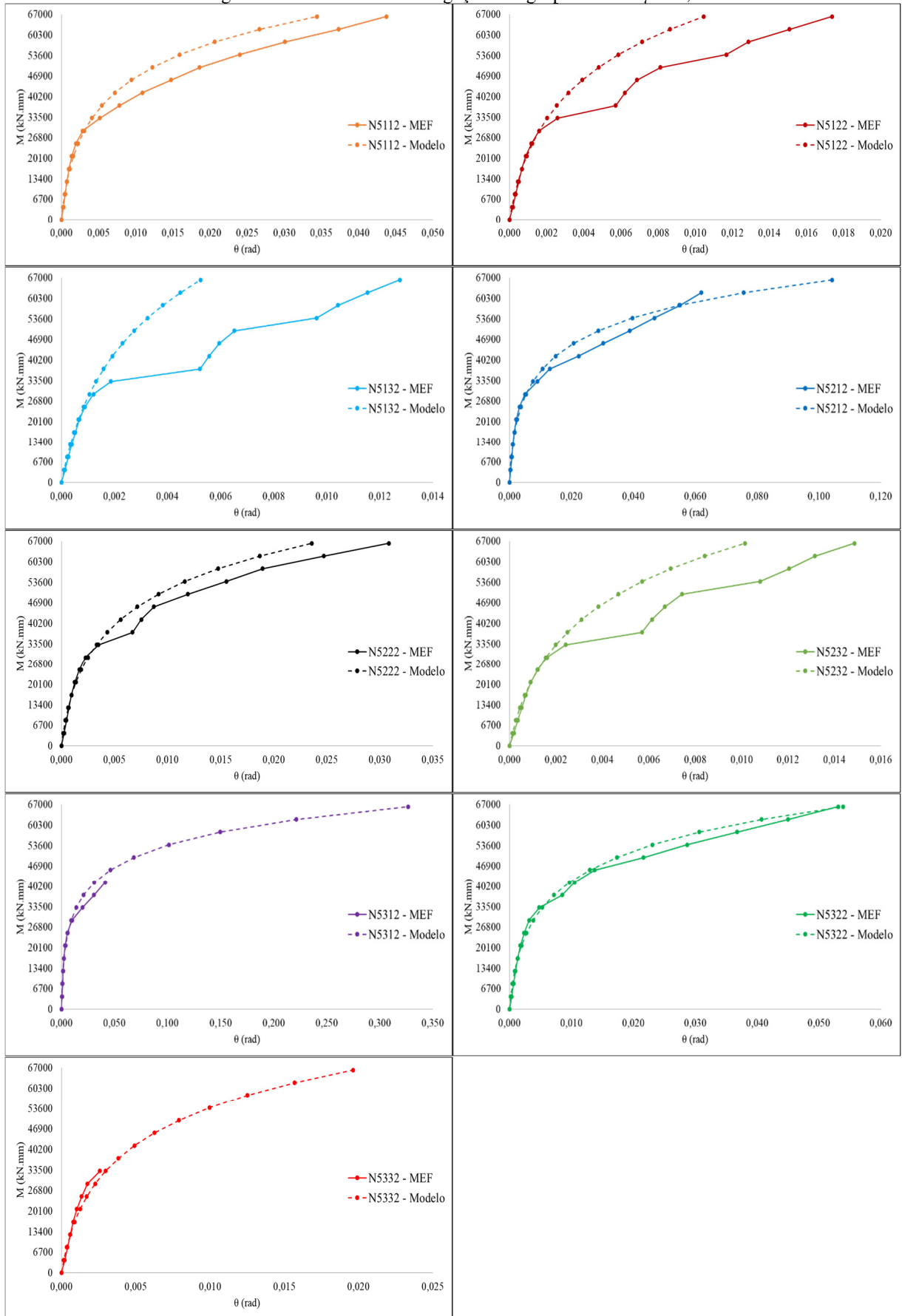
Fonte: Autor

Figura D.4 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N4 com $\mu = 0,2$



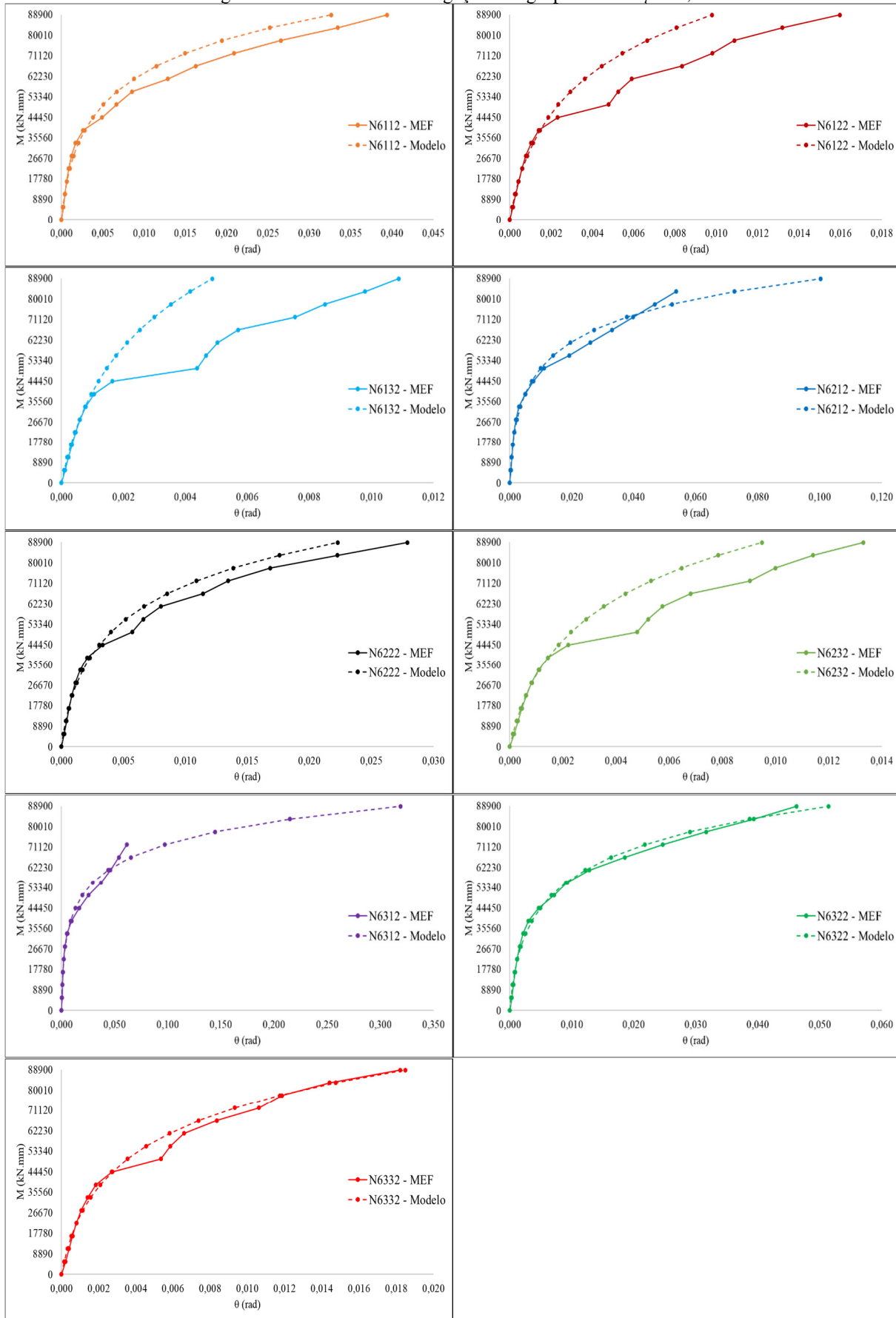
Fonte: Autor.

Figura D.5 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N5 com $\mu = 0,2$

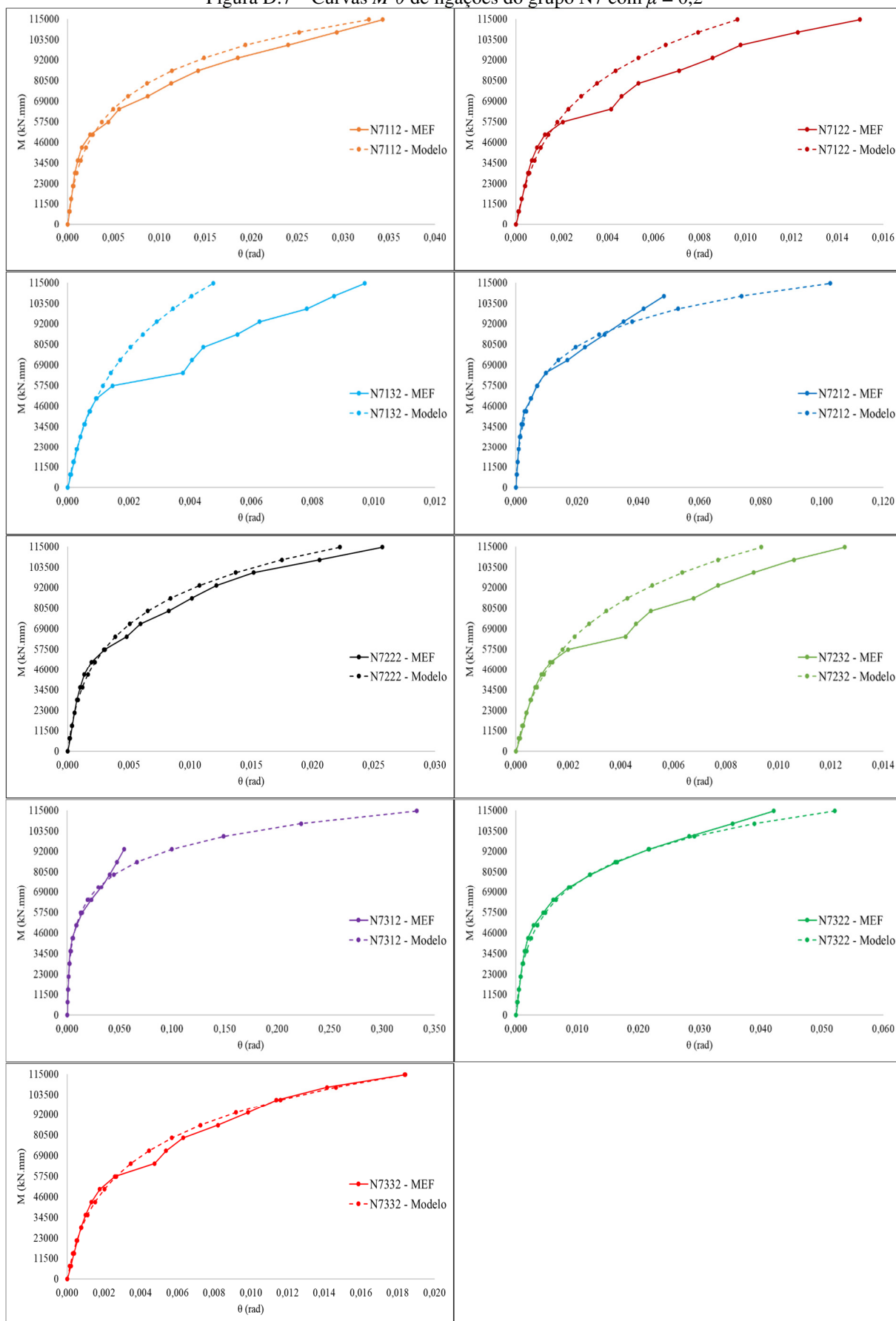


Fonte: Autor.

Figura D.6 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N6 com $\mu = 0,2$

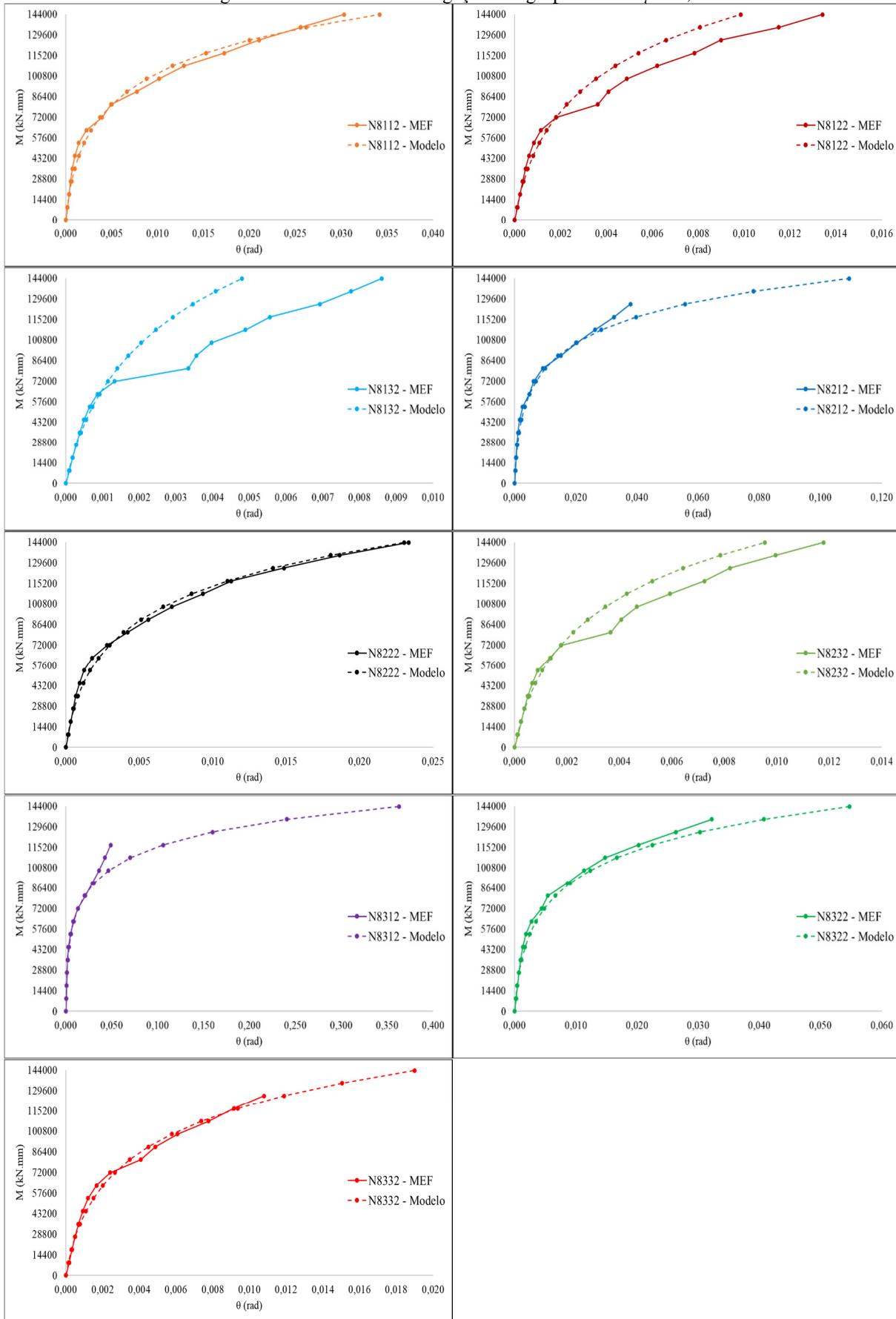


Fonte: Autor.

Figura D.7 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N7 com $\mu = 0,2$ 

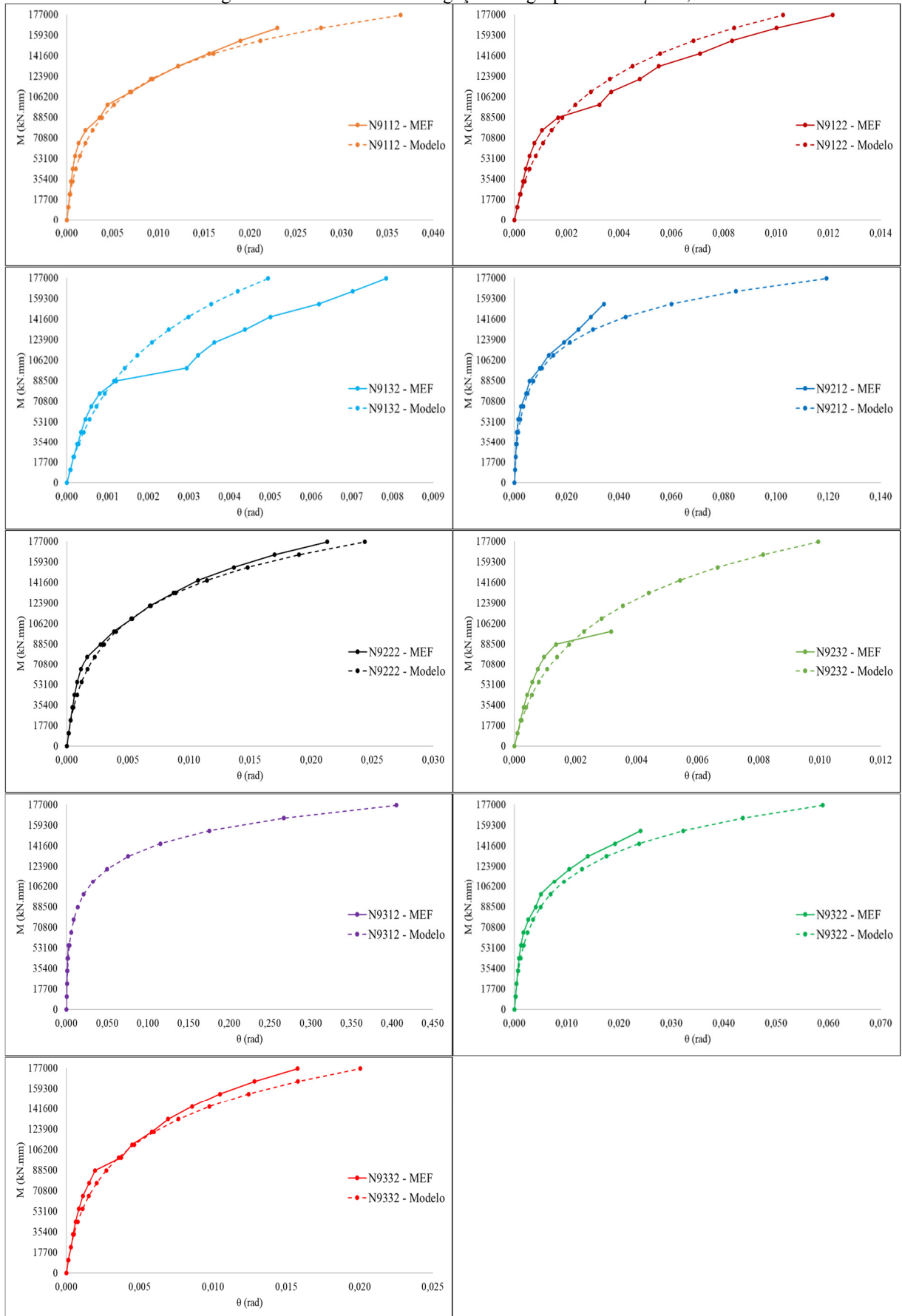
Fonte: Autor.

Figura D.8 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N8 com $\mu = 0,2$



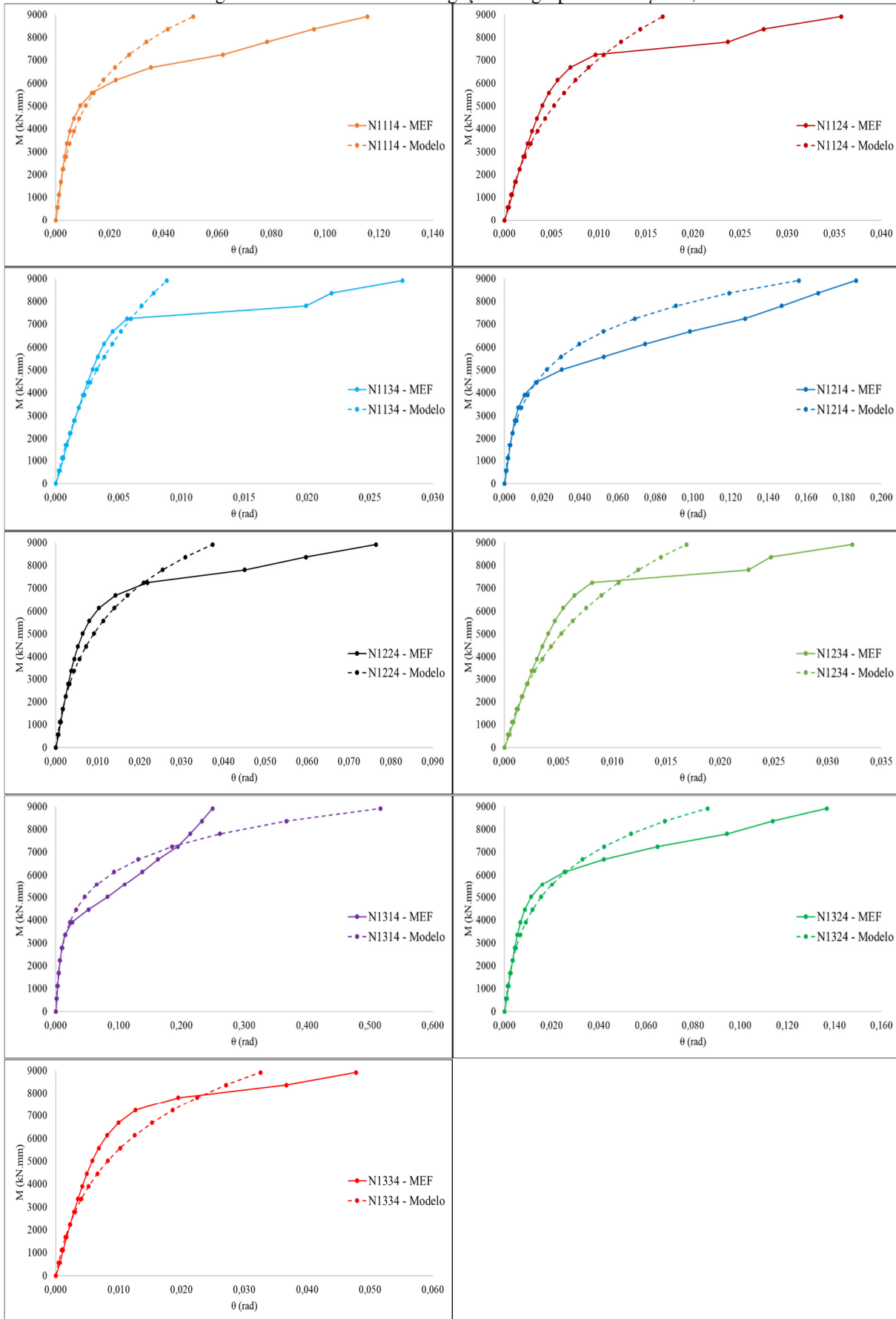
Fonte: Autor.

Figura D.9 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N9 com $\mu = 0,2$



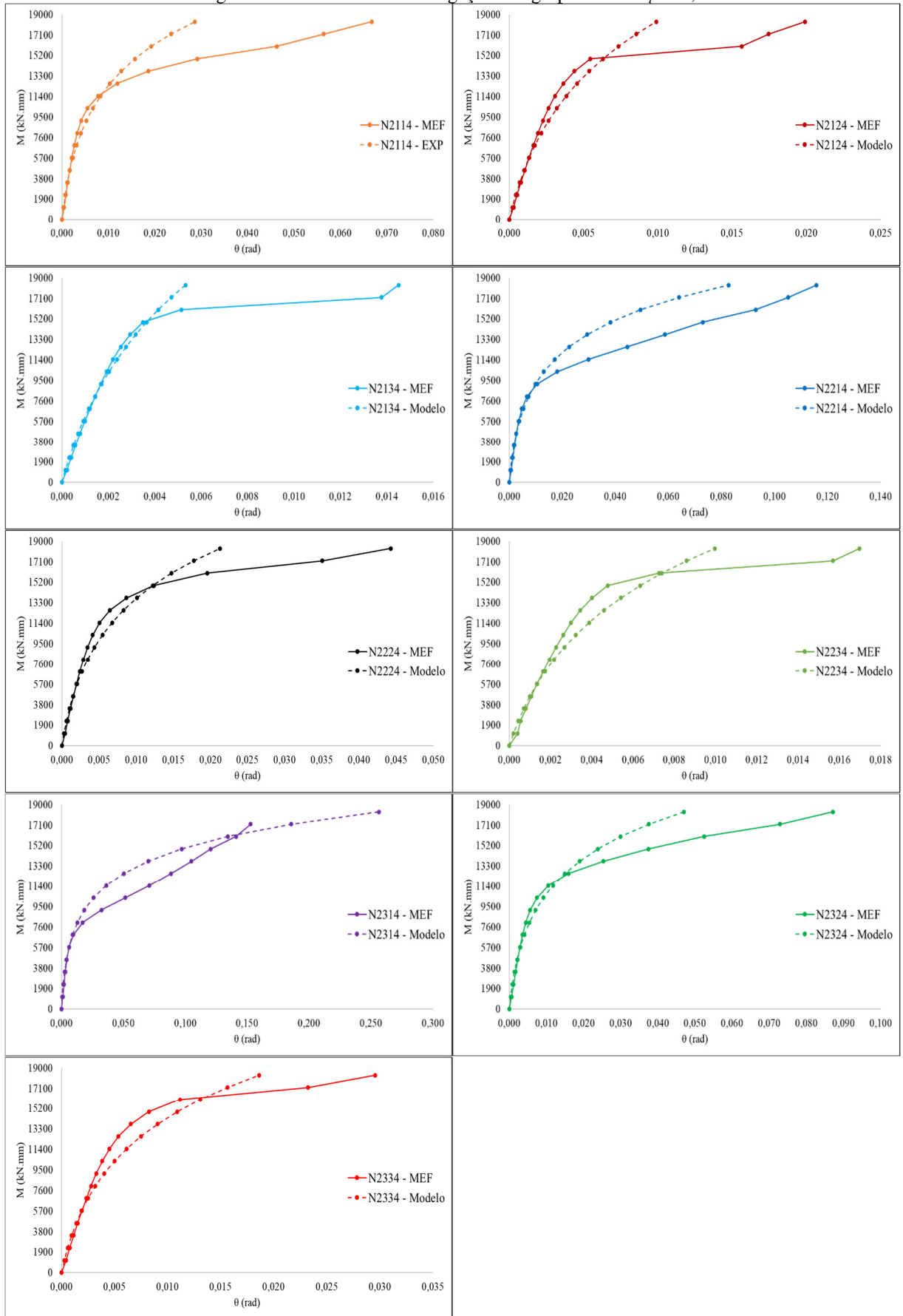
Fonte: Autor.

Figura D.10 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N1 com $\mu = 0,4$



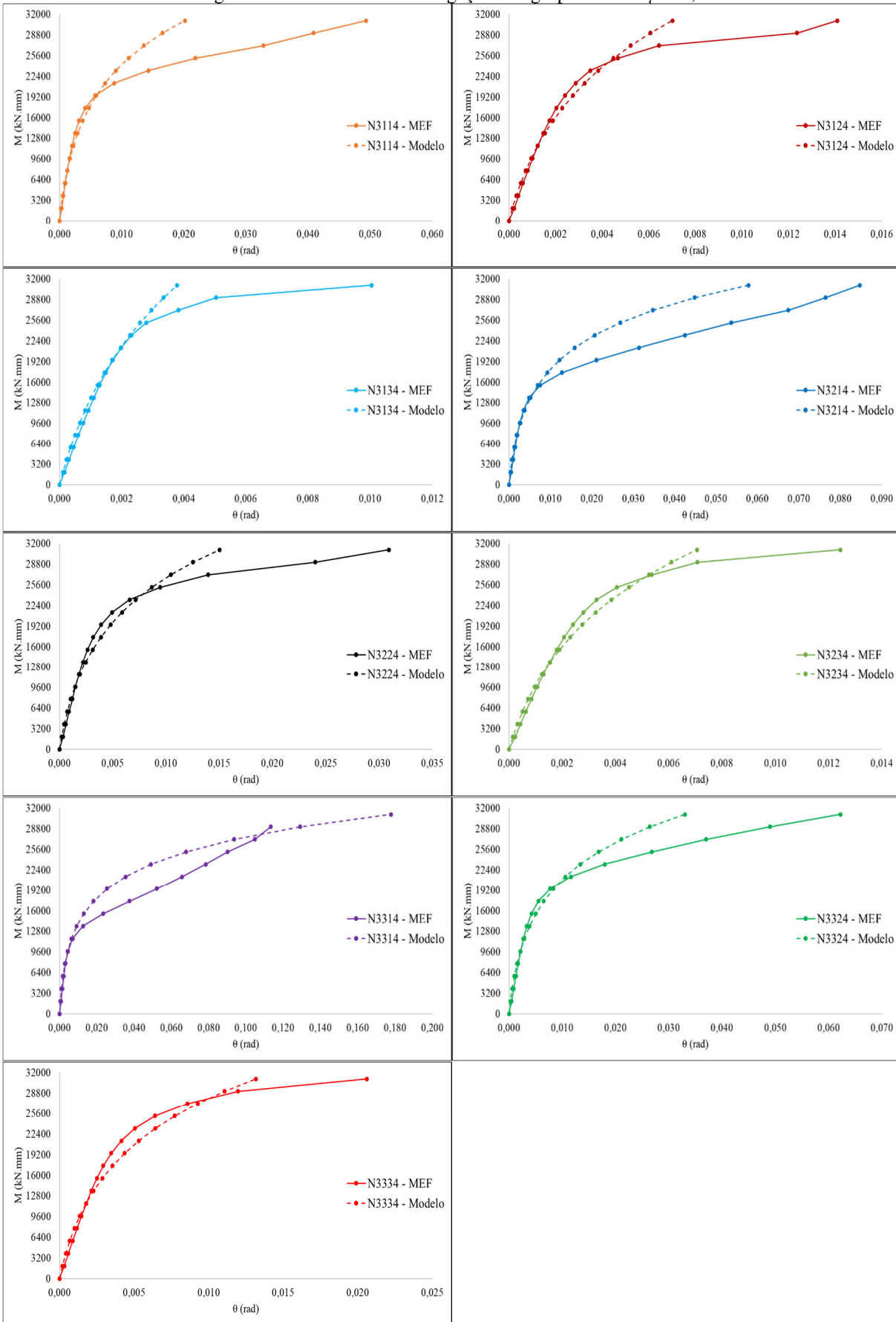
Fonte: Autor.

Figura D.11 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N2 com $\mu = 0,4$

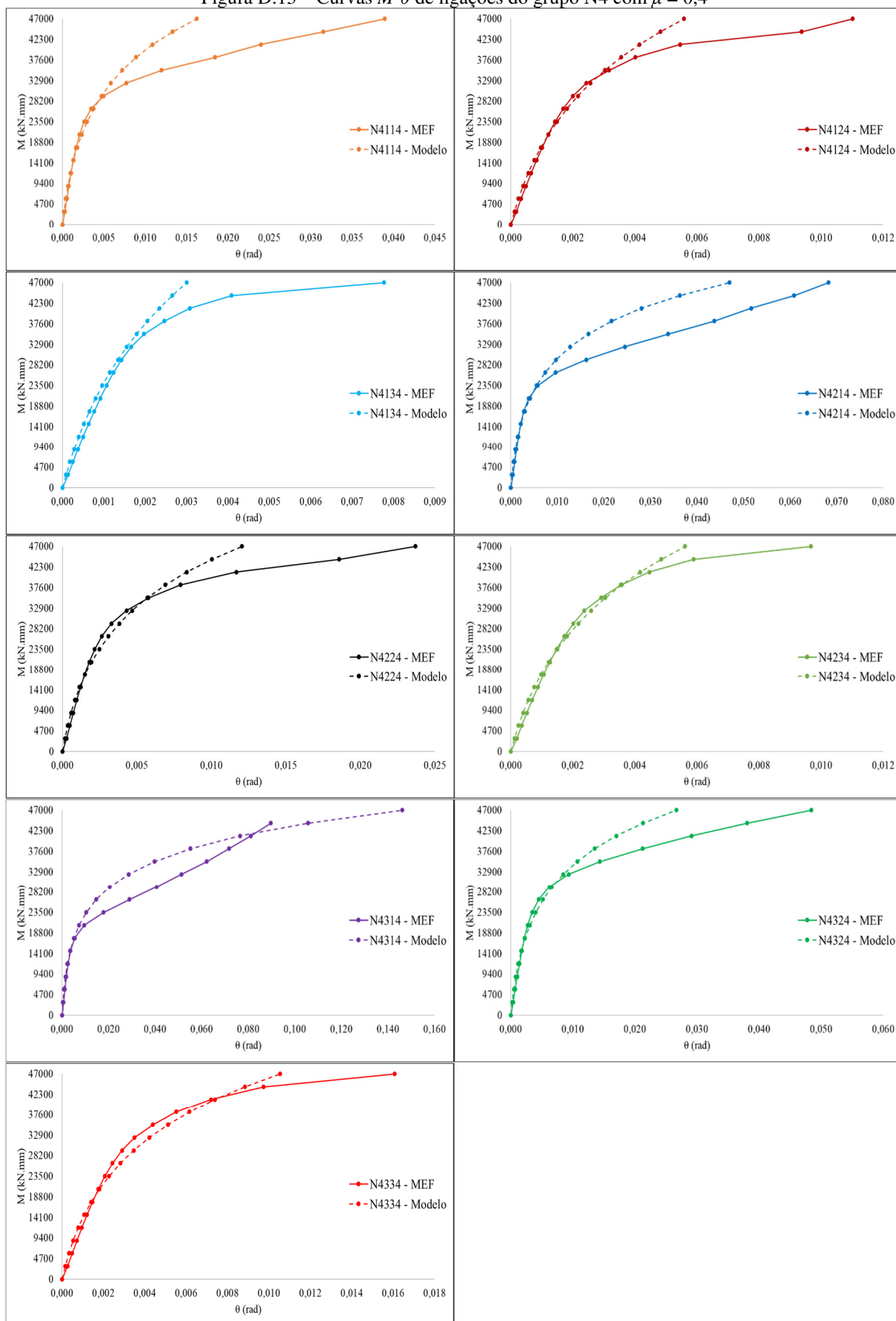


Fonte: Autor.

Figura D.12 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N3 com $\mu = 0,4$

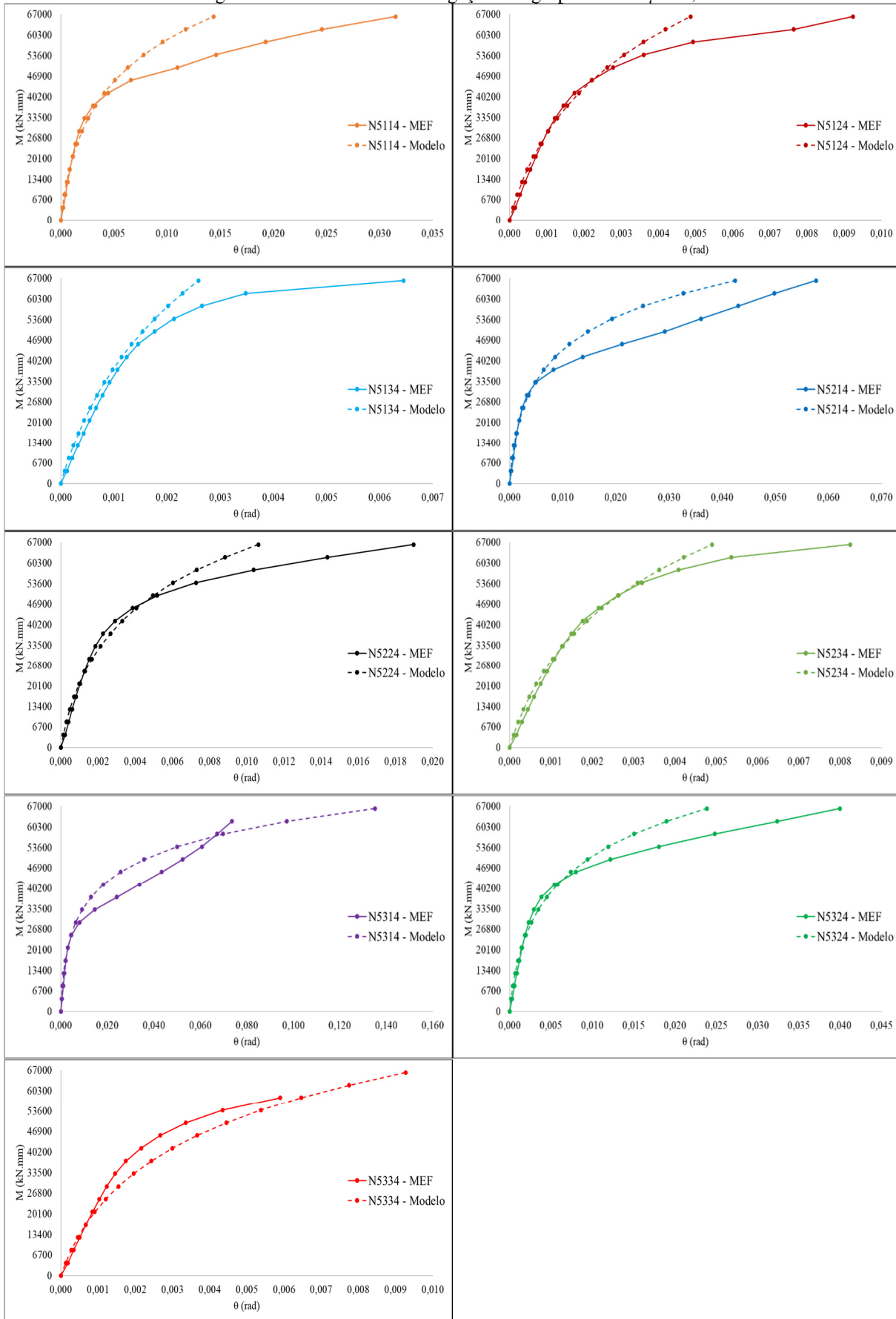


Fonte: Autor.

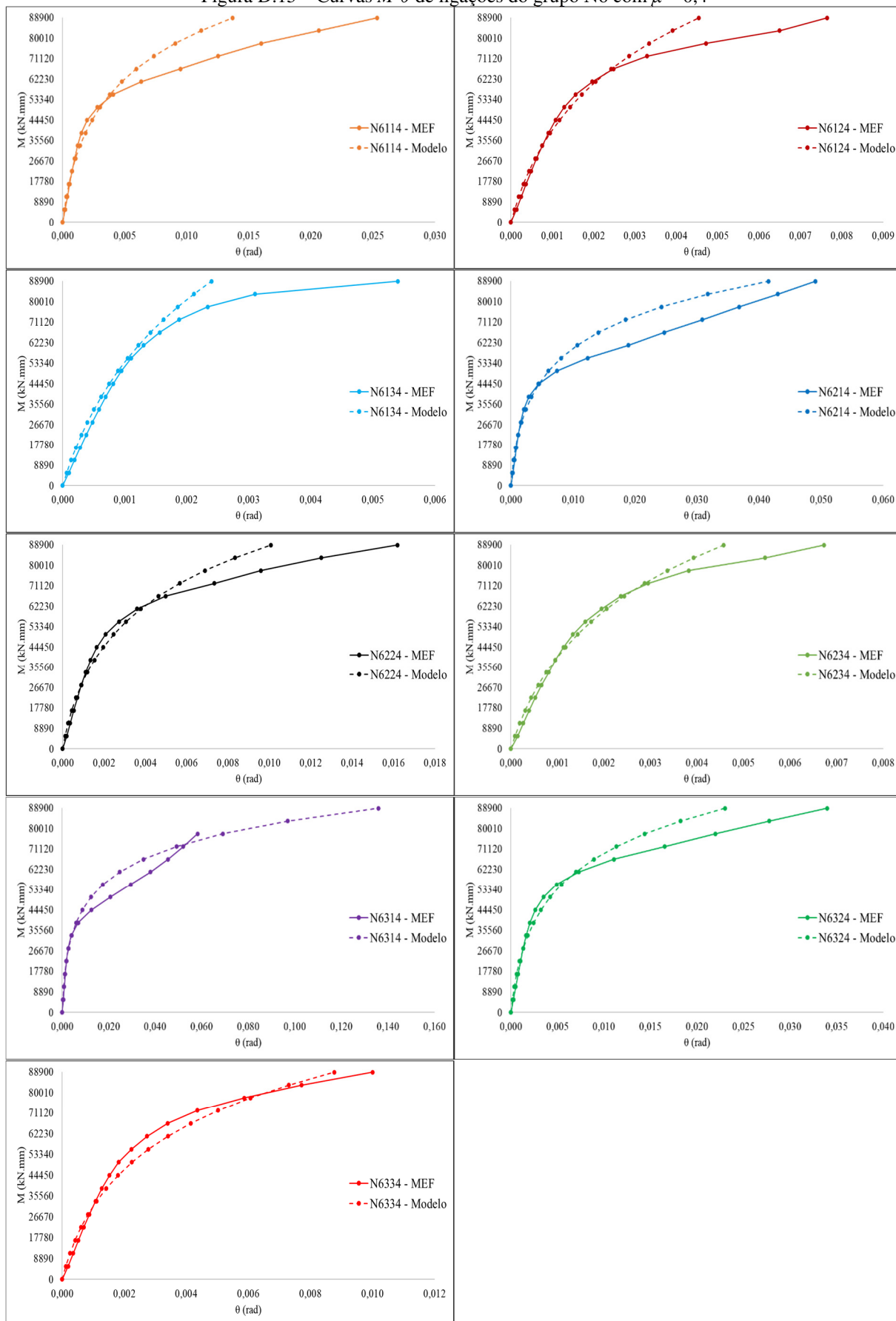
Figura D.13 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N4 com $\mu = 0,4$ 

Fonte: Autor.

Figura D.14 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N5 com $\mu = 0,4$

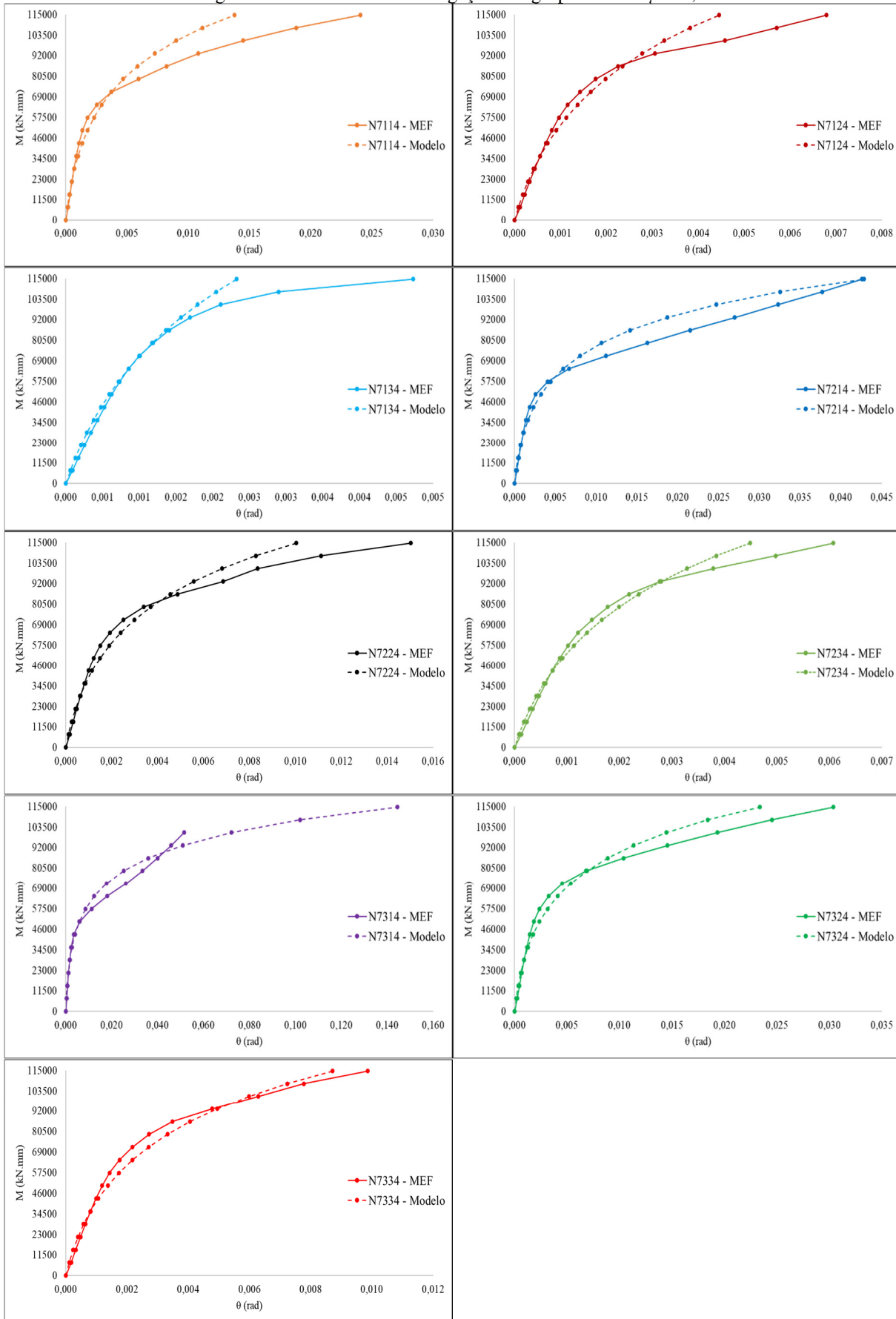


Fonte: Autor.

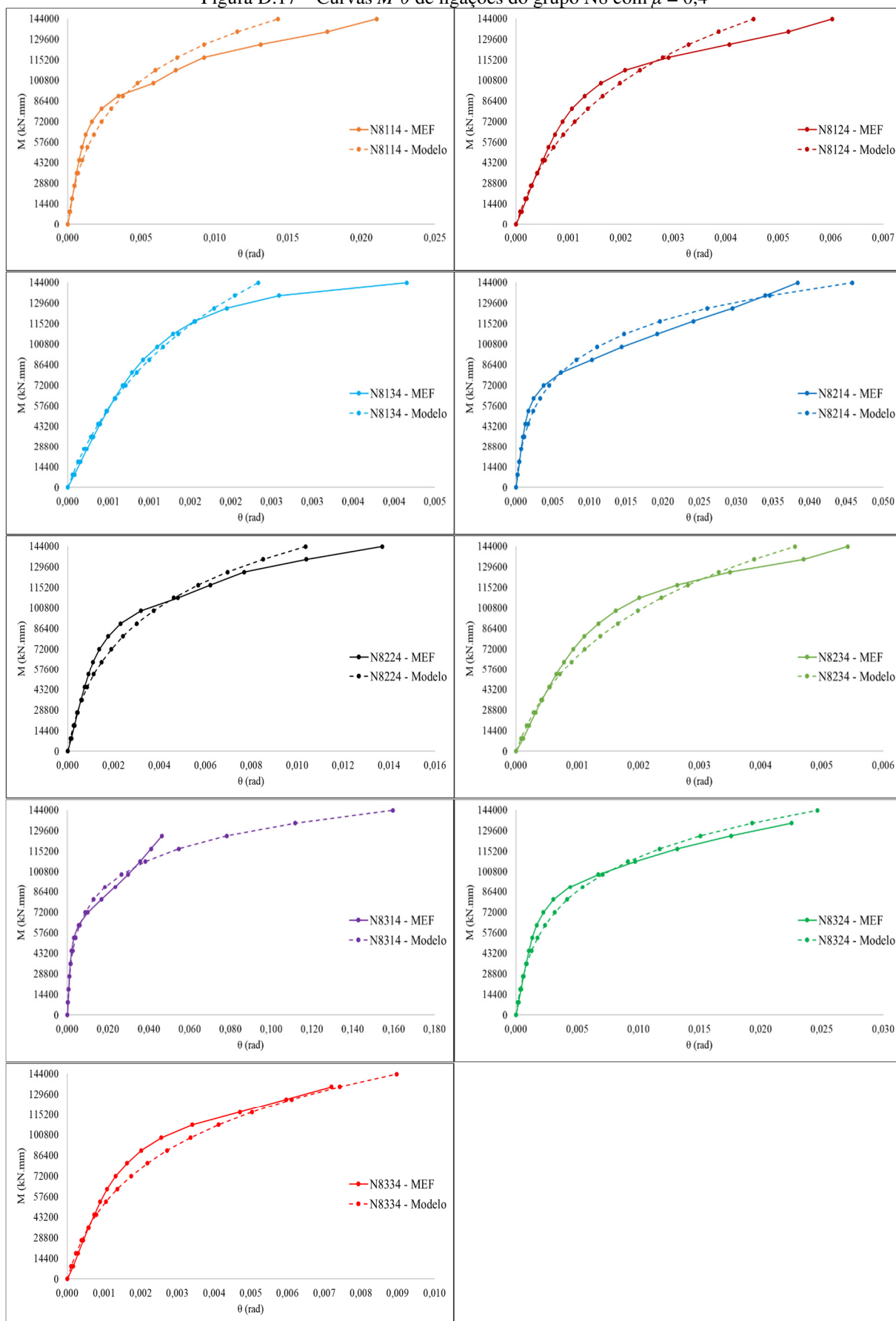
Figura D.15 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N6 com $\mu = 0,4$ 

Fonte: Autor.

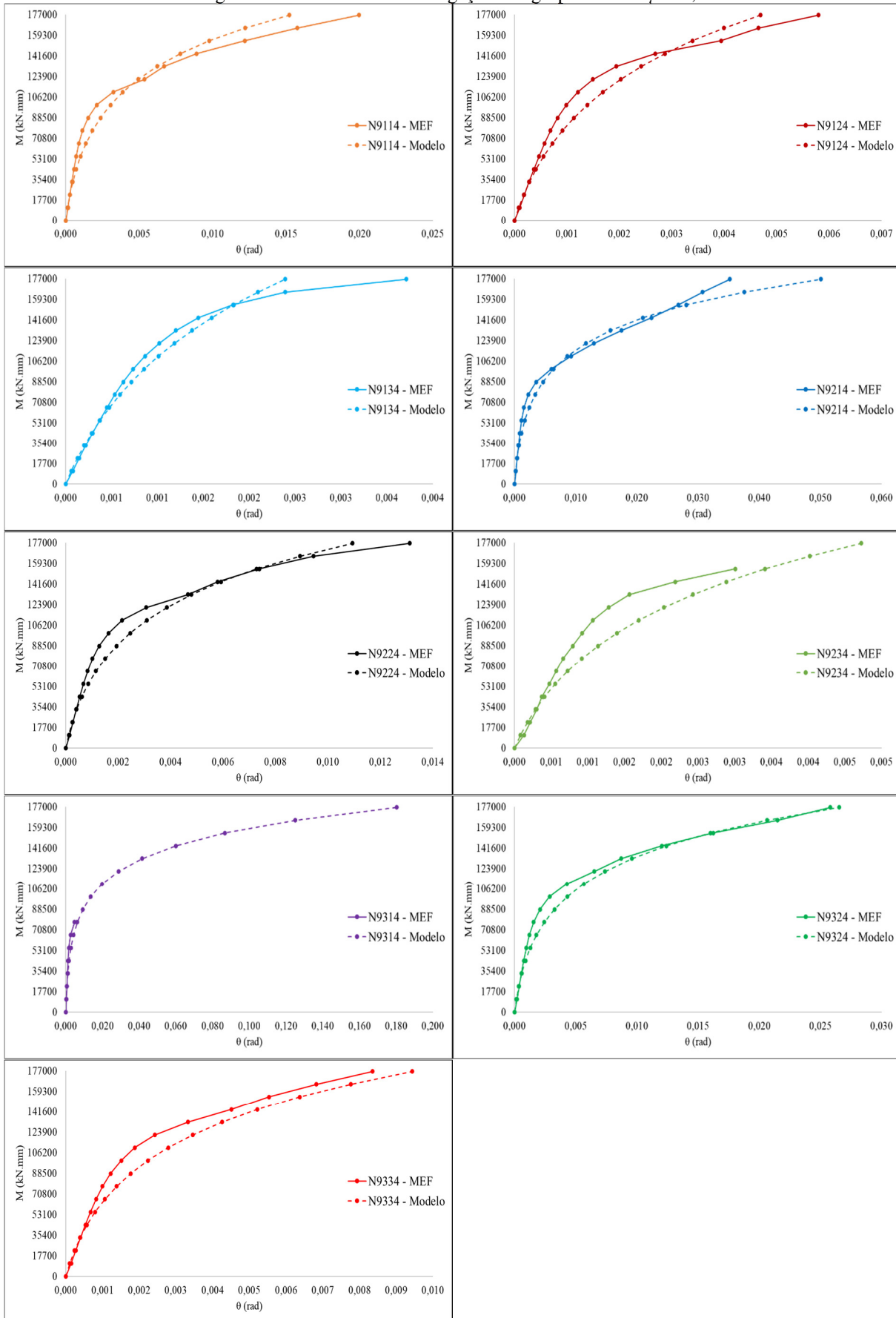
Figura D.16 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N7 com $\mu = 0,4$



Fonte: Autor.

Figura D.17 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N8 com $\mu = 0,4$ 

Fonte: Autor.

Figura D.18 – Curvas $M-\theta$ de ligações do grupo N9 com $\mu = 0,4$ 

Fonte: Autor.