

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Arthur Efraim Bressan Pasqualotto

VELOCIDADE DO SOM EM MATÉRIA QUENTE E Densa DE QUARKS

Santa Maria, RS
2022

Arthur Efraim Bressan Pasqualotto

VELOCIDADE DO SOM EM MATÉRIA QUENTE E Densa DE QUARKS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Áreas Clássicas da Fenomenologia, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**. Defesa realizada por videoconferência.

ORIENTADOR: Prof. Ricardo Luciano Sonogo Farias

Santa Maria, RS
2022

Pasqualotto, Arthur
VELOCIDADE DO SOM EM MATÉRIA DE QUARKS QUENTE E DENSA
/ Arthur Pasqualotto.- 2022.
55 p.; 30 cm

Orientador: Ricardo Farias
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Física, RS, 2022

1. Velocidade do som 2. Quarks 3. Cromodinâmica
Quântica I. Farias, Ricardo II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, ARTHUR PASQUALOTTO, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Arthur Efraim Bressan Pasqualotto

VELOCIDADE DO SOM EM MATÉRIA QUENTE E Densa DE QUARKS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Áreas Clássicas da Fenomenologia, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Física**.

Aprovado em 25 de abril de 2022:

Ricardo Luciano Sonogo Farias, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Rodrigo P. Negreiros, Dr. (UFF)

Veronica Dexheimer, Dr^a. (KSU)

Santa Maria, RS
2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me acompanharam e me apoiaram nessa jornada. Agradeço a todos que ajudaram a me manter são durante o período de isolamento da pandemia de COVID-19. Agradeço aos trabalhadores da saúde, que deram suas vidas para tratar todos que foram acometidos dessa doença. Agradeço aos cientistas e técnicos que desenvolveram as vacinas que hoje garantem que possamos retomar aos poucos as nossas vidas com muito mais tranquilidade. Agradeço aos amigos que vieram comigo e aos que eu conheci no caminho e que muito acrescentaram em quem eu sou.

Agradeço ao Prof. Ricardo Luciano Sonego Farias pela orientação, colaboração e paciência. Agradeço ao Prof. Sidney S. Avancini e a William Rafael Tavares pelas colaborações presentes e futuras. Agradeço a Aritra Bandyopadhyay e Dyana C. Duarte por sempre responderem minhas dúvidas.

Agradeço à minha namorada, Cristiane, por estar sempre me alegrando até nos dias mais tristes, as vezes de propósito, as vezes por simplesmente existir.

The cosmos is within us. We are made of star-stuff. We are a way for the universe to know itself.

(Carl Sagan)

RESUMO

VELOCIDADE DO SOM EM MATÉRIA QUENTE E DENSA DE QUARKS

AUTOR: Arthur Efraim Bressan Pasqualotto
ORIENTADOR: Ricardo Luciano Sonogo Farias

Nesse trabalho as diferentes formas de se regularizar as integrais térmicas no modelo NJL (Nambu–Jona-Lasinio) $SU(2)$ são investigadas de um ponto de vista fenomenológico. Demonstramos a utilidade da velocidade do som para o entendimento da fenomenologia da QCD (Quantum chromodynamics) tanto a altas temperaturas, onde pode ser indicativo de validade de um modelo, como para altas densidades, onde ela pode demonstrar as características de interesse para estrelas densas. Efeitos da presença do potencial químico quiral sobre as propriedades da velocidade do som e suas possíveis consequências sobre as estrelas de quarks são expostos. Também são comparadas duas diferentes formas de regular as integrais de vácuo do modelo, TRS (Traditional Regularization Scheme) e MSS (Medium Separation Scheme).

Palavras-chave: Velocidade do som. Matéria de quarks. Cromodinâmica Quântica.

ABSTRACT

SPEED OF SOUND IN HOT AND DENSE QUARK MATTER

AUTHOR: Arthur Efraim Bressan Pasqualotto

ADVISOR: Ricardo Luciano Sonego Farias

In this work two different approaches to the regularization of thermal integrals in the NJL (Nambu–Jona-Lasinio) $SU(2)$ model are investigated from the phenomenological point of view. Showing the usefulness of the speed of sound in the understanding of the QCD (Quantum chromodynamics) phenomenology at high temperatures, where it can be used as an indicator of the validity of the model, and also at high densities, where it can demonstrate important characteristics for the EOS (Equation of State) of compact stars. Effects of the chiral chemical potential on the speed of sound and its consequences on the quark stars are exposed. We also compare two different methods of regularization of the vacuum integrals, TRS (Traditional Regularization Scheme) and MSS (Medium Separation Scheme).

Keywords: Speed of Sound. Quark Matter. Quantumchromodynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Equações de estado duras e moles para modelos com velocidade do som constante. Linha vermelha representa uma EoS com $c_s^2 = 1/3$, a preta $c_s^2 = 0,7$.	18
Figura 4.1 – Derivada parcial do potencial termodinâmico no vácuo, $T = \mu = 0$, com relação à massa efetiva em função da mesma. Set 1.	23
Figura 4.2 – Potencial termodinâmico normalizado, $\Omega_N = \Omega(M) - \Omega(M_0)$ no vácuo, $T = \mu = 0$, como função da massa efetiva. Set 1.	24
Figura 4.3 – Massa efetiva como função de T para $\mu = 0$ (Esquerda) e massa efetiva como função de μ para $T = 0$ (Direita), para os dois sets de parâmetros, Set 1 (vermelho) e Set 2 (preto).	24
Figura 4.4 – Potencial termodinâmico normalizado como função da massa efetiva para $T = 0$ e diferentes valores de μ . O valor do potencial químico, $\mu_c \approx 382$ MeV. Parâmetros do set 2.	25
Figura 4.5 – Densidade de número de quarks normalizada pela densidade de saturação da matéria nuclear, $n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$, em função do potencial químico para o set 2 de parâmetros.	25
Figura 4.6 – Massa efetiva em função da densidade de número de partículas normalizada pela densidade de saturação da matéria nuclear, $n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$. Parâmetros do set 2.	26
Figura 4.7 – Valor do potencial químico, μ , como função da densidade de número de quarks normalizada pelo valor da saturação da matéria nuclear, $n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$. Parâmetros do set 2.	27
Figura 4.8 – Pressão normalizada como função da densidade de número de partículas normalizada pelo valor da densidade de saturação da matéria nuclear, $n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$. Parâmetros do set 2.	27
Figura 4.9 – Soluções possíveis para a massa efetiva em função do potencial químico, soluções estáveis em preto e instáveis em vermelho. Parâmetros do set 2.	28
Figura 4.10 – Pressão normalizada em função do potencial químico apresentando todas as soluções possíveis. Parâmetros do set 2.	28
Figura 4.11 – Temperatura crítica T_c normalizada por T_0 ($\mu = \mu_5 = 0$) em função do potencial químico quiral μ_5 . MSS se refere ao <i>medium separation scheme</i> e TRS se refere ao corte tridimensional tradicional. Imagem retirada de Thermodynamics of quark matter with a chiral imbalance (FARIAS et al., 2016).	33
Figura 4.12 – Massa efetiva normalizada pela massa do vácuo ($T = \mu = \mu_5 = 0$) em função do potencial químico quiral μ_5 . MSS em verde (limite quiral) e preto (limite físico), TRS em vermelho (limite quiral) e azul (limite físico). Imagem retirada de Thermodynamics of quark matter with a chiral imbalance (FARIAS et al., 2016).	34
Figura 5.1 – Delimitação do valor positivo do condensado de quarks, em vermelho, como função de T e μ para o set 2, $\Lambda_T \rightarrow \infty$.	35
Figura 5.2 – Valor da velocidade do som em função da temperatura T , aplicando (não aplicando) o cutoff na parte térmica $\Lambda_T = \Lambda$ ($\Lambda_T \rightarrow \infty$). NJL SU(2) com matéria simétrica e parâmetros do set 2.	36

Figura 5.3 – Regiões de violação de causalidade ($c_s^2 \geq 1$) em vermelho e linhas (pretas) isentrópicas em função de T e μ , cutoff 3D aplicado no meio e parâmetros do set 2.	37
Figura 5.4 – Calor específico dividida por T^3 para valores constantes de μ em função de T . Linhas pretas (vermelhas) para $\mu = 0$ MeV ($\mu = 200$ MeV). Linhas tracejadas aplicam o <i>cut-off</i> térmico, linhas contínuas não. Parâmetros do set 2.	38
Figura 5.5 – Pressão sobre T^4 (linha contínua), densidade de energia sobre T^4 (tracejada) e densidade de entropia sobre T^3 (traço-ponto) como funções da temperatura. Linhas vermelhas representam os resultados obtidos regulando o meio e linhas pretas os resultados com as contribuições completas de meio.	38
Figura 5.6 – Delimitação do valor do condensado quark-antiquark em função de T e μ_5 para o set 2.	39
Figura 5.7 – Calor específico por T^3 como função de T para valores constantes de μ_5 . Linhas pretas (vermelhas) para $\mu_5 = 0$ MeV, ($\mu_5 = 200$ MeV). Linhas tracejadas aplicam o <i>cut-off</i> térmico, linhas contínuas não. Parâmetros do set 2.	40
Figura 5.8 – Massa efetiva dos quarks como função do potencial químico para valores fixos do potencial químico quiral, $T = 0$. Parâmetros do set 3, regularização TRS.	40
Figura 5.9 – Massa efetiva dos quarks como função do potencial químico, $\mu_5 = T = 0$. Parâmetros do set 3. Linha vermelha (preta) representa a regularização MSS (TRS).	41
Figura 5.10 – Massa efetiva dos quarks como função do potencial químico com potencial químico quiral fixo $\mu_5 = 100$ MeV, $T = 0$. Parâmetros do set 3. Linha vermelha (preta) representa a regularização MSS (TRS).	42
Figura 5.11 – Velocidade do som ao quadrado como função da densidade bariônica dividida por $n_0 = 0,17 fm^{-3}$ para valores constantes de potencial químico quiral μ_5 . Regularização TRS em cor preta e MSS em cor vermelha. Parâmetros do Set 2.	42
Figura 5.12 – Massas efetivas em função do potencial químico quiral μ_5 para diferentes parametrizações no limite físico. Linha contínua referente ao set 1, tracejada ao set 2 e a traço-ponto ao set 3. Regularização MSS.	43
Figura 6.1 – Velocidade do som ao quadrado como função da densidade bariônica dividida por $n_0 = 0,17 fm^{-3}$ para valores constantes de potencial químico quiral μ_5 . Regularização TRS. Parâmetros do Set 3.	45
Figura 6.2 – Equação de estado $P(\varepsilon)$, para valores constantes de potencial químico quiral. Regularização TRS. Parâmetros do Set 3.	45
Figura 6.3 – Diagrama Massa \times Raio para estrelas de quarks para valores constantes de potencial químico quiral μ_5 . Regularização TRS. Parâmetros do Set 3.	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Parametrizações do modelo NJL SU(2).	23
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

QCD Quantum Chromodynamics

NJL Nambu–Jona-Lasinio

EoS Equation of State

LQCD Lattice QCD

TOV Tolman-Oppenheimer-Volkoff

MSS Medium Separation Scheme

TRS Traditional Regularization Scheme

QGP Quark-Gluon Plasma

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	AS ESTRELAS DENSAS	15
2.1	AS EQUAÇÕES DE TOV	15
3	VELOCIDADE DO SOM	17
3.1	PERFIL DA VELOCIDADE DO SOM EM ESTRELAS DENSAS	17
4	O MODELO NJL	20
4.1	NJL SU(2)	20
4.1.1	NJL SU(2) em função do potencial químico	24
4.1.2	NJL SU(2) em função da densidade	26
4.1.3	NJL SU(2) com matéria assimétrica	29
4.1.4	NJL SU(2) em função do potencial químico quiral.....	31
4.2	MSS - <i>MEDIUM SEPARATION SCHEME</i>	32
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	35
5.1	TEMPERATURA E POTENCIAL QUÍMICO FINITOS	35
5.2	TEMPERATURA E POTENCIAL QUÍMICO QUIRAL FINITOS	39
5.3	POTENCIAL QUÍMICO E POTENCIAL QUÍMICO QUIRAL FINITOS	40
6	DISCUSSÃO FINAL	44
6.1	RESULTADOS PRELIMINARES ESTRELAS DE QUARKS COM DESEQUILÍ- BRIO QUIRAL	44
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	47
	APÊNDICE A – IDENTIDADES TERMODINÂMICAS	52
	APÊNDICE B – NOTAÇÃO DE VETORES E MATRIZES	54

1 INTRODUÇÃO

Evidências da transição de fase da matéria hadrônica para o plasma de quarks e glúons (QGP, *Quark Gluon Plasma* em inglês) a altas temperaturas e baixas densidades foi encontrada em diversos observáveis em experimentos dos colisores RHIC e LHC (BUSZA; RAJAGOPAL; SCHEE, 2018; SNELLINGS, 2011). Uma dessas quantidades é de extremo interesse para a descrição das fases da QCD, a sua equação de estado (EOS, *Equation of State* em inglês) (BRAUN-MUNZINGER et al., 2016), que está intimamente ligada à velocidade do som isentrópica, $c_s^2 = (\partial P / \partial \varepsilon)_{s/n_b}$, onde P é a pressão, ε é a densidade de energia, s é a densidade de entropia e n_b é a densidade de número bariônico. Para um sistema denso e frio a velocidade do som pode ser uma quantidade valiosa para a estimativa da dureza de uma EOS (LI; SEDRAKIAN; ALFORD, 2020), também pode ser utilizada como uma restrição física para a determinação da relação massa raio de diferentes tipos de estrelas de nêutrons (ALFORD; HAN; PRAKASH, 2013) e para entender as propriedades associadas ao possível ponto crítico do diagrama de fases da QCD (SORENSEN et al., 2021).

A região de baixas temperaturas e altas densidades não pode ser explorada através de simulações de QCD na rede devido ao problema de sinal (DANZER et al., 2009), portanto outras abordagens teóricas são empregadas nesse domínio. A baixas densidades é possível obter uma EOS através de modelos hadrônicos (DEXHEIMER, 2017) ou através de dados experimentais (JIMÉNEZ; FRAGA, 2021; TEWS et al., 2013; HEBELER et al., 2013; KOJO, 2021). No regime de altas densidades, $n_b \gtrsim 40n_0^1$, a liberdade assintótica permite uma abordagem perturbativa devido ao fraco acoplamento (FRAGA; KURKELA; VUORINEN, 2014). Na região intermediária algumas interpolações e extrapolações também são adotadas (BAYM et al., 2018). A velocidade do som pode ser prevista nessas duas regiões, a baixas densidades ela é bem descrita por modelos hadrônicos (BEDAQUE; STEINER, 2015) e a altas densidades é encontrado que $c_s^2 \leq 1/3$ (KURKELA; ROMATSCHKE; VUORINEN, 2010). A velocidade do som a densidades intermediárias, em $2n_0 \lesssim n \lesssim 10n_0$, é alvo de investigações recentes. A presença de um máximo local para densidades próximas a $n_b \sim 3n_0$ é esperado para estrelas densas com massas próximas a $2M_\odot^2$, para o modelo de Zhang, C. M. et al. (2011), e pode estar associada à uma transição de fases hádron-quark. Diferentes perfis da velocidade do som podem levar a resultados diferentes nos observáveis físicos em estrelas densas (TAN et al., 2022), entre eles a existência de uma descontinuidade em c_s^2 e a localização da mesma em função da densidade.

A possibilidade da existência de uma fase de quarks desconfiados vem sendo con-

¹ $n_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ é a densidade de saturação da matéria nuclear.

² $M_\odot \approx 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ é a massa do sol.

siderada desde meados dos anos 60 (IVANENKO; KURDGELAIDZE, 1965), desde então modelos de quarks vêm sendo incorporados de diversas formas nas EOS para descrever as estrelas híbridas, estrelas com uma casca hadrônica e um núcleo de quarks desconfina-dos. A fase hadrônica pode ser ligada à fase de quarks através da construção de Maxwell, como em Ferreira, Pereira e Providência (2022), para uma transição de fase abrupta sem mistura de fases. Para uma transição com mistura entre as fases, coexistência de quarks e núcleons, a construção de Gibbs pode ser empregada (NANDI; CHAR, 2018). Outra abordagem possível para uma nova fase é a consideração da matéria quark-iônica (DUARTE; HERNANDEZ-ORTIZ; JEONG, 2020a), na qual temos hádrons e quarks em coexistência.

Diversos fenômenos físicos podem influenciar as propriedades da matéria nuclear a altas densidades e temperaturas. A estrutura não trivial do vácuo da QCD pode induzir um desequilíbrio entre o número de quarks de mão direita e de mão esquerda na presença de campos magnéticos intensos, o chamado *Chiral Magnetic Effect* (FUKUSHIMA; KHARZEEV; WARRINGA, 2008). Esse efeito vem sendo estudado tanto teoricamente como experimentalmente (KHARZEEV et al., 2016; HUANG, 2016; ZHAO; WANG, 2019; ABDALLAH et al.,). O desequilíbrio quiral pode estar presente em estrelas de nêutrons, por estas estarem sujeitas a campos magnéticos intensos e altas densidades, o que encorajou investigações sobre as consequências do desequilíbrio quiral na EOS para estrelas de quarks (YANG et al., 2020a). O desequilíbrio quiral pode ser expresso em termos de um potencial químico quiral μ_5 e vem sendo aplicado a modelos efetivos da QCD (YANG; LUO; ZONG, 2019a; FARIAS et al., 2016). Ademais, o desequilíbrio quiral a $\mu_b = 0$ não apresenta problema de sinal para simulações da LQCD (BRAGUTA et al., 2016), possibilitando comparações com os resultados obtidos através de modelos efetivos (FARIAS et al., 2016).

Modelos efetivos como o NJL, modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961), são empregados no estudo das propriedades da QCD até os dias atuais, para uma revisão completa ver Buballa (2005). Nesse modelo os termos referentes ao vácuo precisam ser regulados, o que pode ser feito de diversas formas. A aplicação de reguladores nas integrais térmicas, ou de meio, é uma prática comum (ZHUANG; HUFNER; KLEVANSKY, 1994), porém tal abordagem tem como consequência o desacordo das quantidades termodinâmicas com seus respectivos limites de Stefan-Boltzmann. A regularização em modelos não renormalizáveis se torna uma questão sensível quando quantidades físicas dependentes de meio manifestam-se em termos divergentes. Tais situações podem levar a resultados que estão em desacordo com outros métodos de abordar a QCD. Um exemplo disso pode ser visto no trabalho de Farias et al. (2016), onde o potencial químico quiral μ_5 é separado dos termos divergentes, de vácuo, através do *Medium Separation Scheme*, MSS, e comparado com o método tradicional de regularização, TRS (*Traditional Regularization Scheme*), onde fica claro que os resultados obtidos com MSS estão de acordo com os dados de rede (BRAGUTA; KOTOV, 2016).

Nessa dissertação as consequências de regularizar termos de meio no modelo NJL SU(2) são abordadas, suas consequências para T, μ e μ_5 finitos são consideradas. As regiões de validade do modelo para cada método são obtidas e discutidas, bem como as características das suas quantidades físicas. Também serão discutidos os efeitos da aplicação do MSS a μ e μ_5 finitos e suas consequências sobre o perfil da velocidade do som para a matéria de quarks, que tem consequências sobre as possíveis EOS para matéria de quarks que pode existir no núcleo de estrelas híbridas, ou talvez até mesmo em estrelas de quarks (WITTEN, 1984).

2 AS ESTRELAS DENSAS

As estrelas de nêutrons talvez sejam os objetos mais misteriosos e ricos em fenômenos nucleares a serem estudados na contemporaneidade, sendo considerados laboratórios naturais para o estudo da matéria nuclear a altas densidades. Estrelas de massa intermediária, entre $10M_{\odot}$ e $25M_{\odot}$, terminam suas vidas em violentas explosões, as supernovas (FILHO, 2000). Dentre os remanescentes desse processo está um objeto aproximadamente esférico, muito compacto, com densidade média maior que a densidade de saturação da matéria nuclear.

Originalmente descobertas como pulsares (BURNELL, 1977), essas estrelas são compostas por matéria fortemente interagente. Descrita pela QCD, as propriedades exatas da matéria que compõe essas estrelas densas ainda motivam extensivas investigações teóricas e observacionais. Regiões de baixas densidades, $0 \lesssim n_b \lesssim 2n_0$, são acessíveis experimentalmente e muito bem descritas por modelos hadrônicos. Regiões de altíssimas densidades são bem descritas por métodos perturbativos, $40n_0 \lesssim n_b$, no domínio de acoplamento fraco (KURKELA; ROMATSCHKE; VUORINEN, 2010), onde as quantidades termodinâmicas convergem para o chamado limite conforme. As propriedades da QCD na região de densidades intermediárias se demonstra um dos maiores mistérios da fenomenologia da física de altas energias atual, incluindo as características da transição de fases hadron-quark, a possível existência do ponto crítico do diagrama de fases da QCD e a possibilidade de fases exóticas como a fase quark-iônica. As recentes observações de estrelas de nêutrons através de ondas gravitacionais (ABBOTT et al., 2016) abriu mais uma janela na era da astrofísica multi-mensageira. Tais observações restringiram as possíveis características da equação de estado, guiando os modelos e, por consequência, toda a fenomenologia da QCD a altas densidades.

É possível, partindo de uma EOS e de uma pressão central, simular uma estrela de nêutrons a partir do formalismo da Relatividade Geral. Obtendo as possíveis massas e raios descritas por uma EOS para poder confrontar essas estimativas teóricas com dados observacionais.

2.1 AS EQUAÇÕES DE TOV

As estrelas densas são objetos tão compactos que os efeitos de distorção do espaço-tempo passam a ser relevantes para sua estrutura interna. Suas massas estão compreendidas aproximadamente entre $1M_{\odot}$ e $2M_{\odot}$ (ANTONIADIS et al., 2016) e seus raios são da ordem de uma dezenas de quilômetros. Os efeitos da distorção do espaço em torno de um objeto com simetria esférica podem ser considerados relevantes quando o raio do objeto

está próximo do seu raio de Schwarzschild (SCHUTZ, 2009),

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.1)$$

O Raio de Schwarzschild de um objeto é uma função de sua massa, ele é o raio do horizonte de eventos que um buraco negro com massa igual ao objeto em questão teria. Portanto se um objeto de massa M for compactado em uma esfera com raio menor que o seu Raio de Schwarzschild, esse objeto torna-se um buraco negro. Por exemplo, um objeto com $2M_\odot$ possui um raio de Schwarzschild de aproximadamente 6 km. Dados obtidos do telescópio NICER, lançado em 2017 e hoje a bordo da Estação Espacial Internacional, foram utilizado para resolver o raio do pulsar PSR J0030+0451 (MILLER et al., 2019) com massa estimada de $1.44_{-0.14}^{+0.15}M_\odot$, a estimativa resultou em um raio de $13.02_{-1.06}^{+1.13}$ km.

Uma estrela densa pode ser aproximada por uma distribuição esférica e estática de um fluido ideal sobre o qual atuam apenas a sua pressão interna e a sua própria gravidade. No contexto da Relatividade Geral, as equações que garantem o equilíbrio hidrostático do sistema são as equações de Tolmann–Oppenheimer–Volkoff (TOLMAN, 1939) (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939), ou TOV. Esse sistema de equações diferenciais descreve como deve variar a pressão e a densidade de energia em função do raio¹

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{[P(r) + \varepsilon(r)][M(r) + 4\pi r^3 P(r)]}{r[r - 2M(r)]}, \quad (2.2)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r). \quad (2.3)$$

A pressão P e a densidade de energia ε se relacionam com a massa gravitacional, $M(r)$, englobada por uma esfera de raio r concêntrica à estrela. O sistema é resolvido partindo de uma pressão central e massa nula no centro da estrela,

$$M(r = 0) = 0 \quad (2.4)$$

$$P(r = 0) = P_0. \quad (2.5)$$

Essas equações exigem uma EOS que relacione a pressão com a densidade de energia $P(\varepsilon)$ de forma unívoca.

Uma quantidade intimamente ligada com a equação de estado é a velocidade do som. A partir dela podemos não apenas entender as características de uma equação de estado, como a sua dureza (*stiffness*) e moleza (*softness*), mas também avaliar se um modelo viola ou não a causalidade.

¹Em unidades gravitacionais $c = G = 1$.

3 VELOCIDADE DO SOM

A velocidade do som em fluido relativístico pode ser descrita através da propagação de uma pequena perturbação da pressão em função da densidade de energia em torno de seu valor de equilíbrio. Como a propagação de uma onda em um fluido ocorre através da colisão entre suas partículas constituintes, desprezando termos de dissipação de energia, temos um processo isentrópico, onde a entropia total é constante, $S = s/n_b = \text{constante}$ (LANDAU; LIFSHITZ, 2013). Dessa forma temos que a velocidade do som ao quadrado pode ser expressa como

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{s/n_b}. \quad (3.1)$$

Para um fluido de apenas uma espécie química podemos obter a seguinte expressão para a velocidade do som isentrópica, obtida no apêndice A:

$$c_s^2 = \frac{s\chi_{T\mu} - n\chi_{TT}}{\mu\chi_{T\mu}\chi_{T\mu} - \mu\chi_{\mu\mu}\chi_{TT}}. \quad (3.2)$$

Onde $\chi_{xy} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}$, Ω é o potencial de Landau, e x e y são variáveis naturais do sistema. Outras propriedades termodinâmicas de interesse nesse trabalho são o calor específico a volume constante, a anomalia de traço e a medida conforme, respectivamente:

$$c_V = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{\mu}, \quad \Delta = \varepsilon - 3P \quad \text{e} \quad C = \frac{\Delta}{\varepsilon}. \quad (3.3)$$

As propriedades termodinâmicas dos fluidos são muito úteis para entendermos as suas propriedades físicas, mas a velocidade do som em especial pode ser utilizada para avaliar a validade de modelos com relação à violação de causalidade.

3.1 PERFIL DA VELOCIDADE DO SOM EM ESTRELAS DENSAS

As equações de TOV necessitam de uma EoS e uma condição inicial para serem resolvidas. O conjunto de todas as soluções para um dado intervalo de condições iniciais para uma EoS nos diz quais são as possíveis massas e raios de estrelas que aquela EoS pode descrever. Bem como a partir de uma solução podemos obter as informações sobre a estrutura interna e composição de uma estrela específica. Dessa forma as propriedades termodinâmicas que estão relacionadas com a EoS podem nos informar muito sobre a

estrutura interna das estrelas densas. Propriedades como velocidade do som podem trazer importantes pistas sobre as características da QCD a altas densidades.

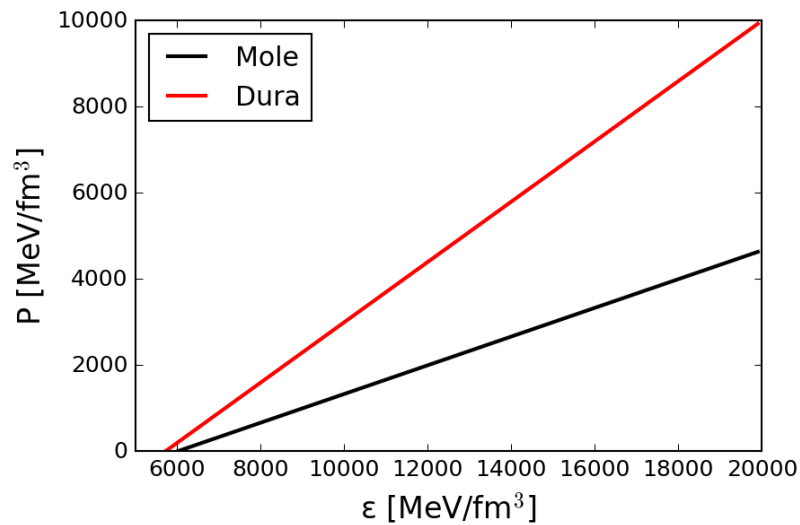


Figura 3.1 – Equações de estado duras e moles para modelos com velocidade do som constante. Linha vermelha representa uma EoS com $c_s^2 = 1/3$, a preta $c_s^2 = 0,7$.

A velocidade do som ao quadrado representa a inclinação da reta tangente da EoS, portanto uma EoS dura (hard ou stiff, em inglês) seria aquela com velocidade do som mais alta, enquanto uma velocidade do som mais baixa representa uma EoS mais mole (soft, em inglês). Essas características podem ser vistas na EoS da figura 3.1.

Equações de estado mais complexas podem levar em consideração diversas condições diferentes, como composição e interações mais relevantes. De uma maneira geral a EoS possui toda informação relevante para descrever uma estrela densa. Características importantes para nos ajudar a entender fenômenos como a transição de fase hádron-quark, buscar o ponto crítico da QCD ou explorar fases como a fase quark-iônica (DUARTE; HERNANDEZ-ORTIZ; JEONG, 2020b).

Uma transição de primeira ordem é caracterizada por uma descontinuidade seguida de uma região de velocidade do som nula e outra descontinuidade para um valor finito, essa transição poderia representar a transição abrupta entre uma fase de hádrons e uma fase de quarks livres, por exemplo. Uma transição de fase de segunda ordem pode ser caracterizada por um salto, ou valor constante ou bicos, que podem indicar tanto uma nova fase como o aparecimento de novos graus de liberdade. As diferentes formas como essas transições ocorrer podem ser entendidas qualitativamente através do perfil da velocidade do som e cada forma diferente como a velocidade do som se apresenta pode afetar significativamente as quantidades observáveis (TAN et al., 2022).

A possibilidade de algumas estrelas de nêutrons possuírem núcleos de quarks foi levantada inicialmente por Ivanenko e Kurdgelaidze (1965). Estrelas com crostas hadrônicas e com núcleos de quarks são chamadas estrelas híbridas. Outra hipótese, sobre a

matéria estranha ser o verdadeiro estado fundamental da matéria nuclear, abre possibilidade para estrelas compostas apenas por quarks (WITTEN, 1984). Trabalhando sobre essas hipóteses muitos modelos de quarks vêm sendo investigados até os dias atuais, como por exemplo o modelo σ -linear (TAKÁTSY et al., 2019), em busca de equações de estado que descrevam estrelas densas em acordo com as observações recentes. Dentre esses modelos está o modelo de Nambu–Jona–Lasinio, um modelo não renormalizável cujos quarks são os únicos graus de liberdade. Por ser um modelo não renormalizável a sua regularização dá origem a parâmetros que são fitados para que o modelo reproduza valores observáveis. A forma como a regularização dos termos divergentes pode afetar observáveis termodinâmicos como a velocidade do som é o assunto das próximas seções deste trabalho.

4 O MODELO NJL

A fenomenologia da matéria de quarks pode ser explicada de muitas formas diferentes, a utilização de modelos efetivos é uma das formas mais elegantes e perspicazes. Uma teoria de campo efetiva é uma versão simplificada da teoria original, no nosso caso ela mantém alguns dos graus de liberdade do sistema e as simetrias mais relevantes para a fenomenologia em específico que queremos estudar. O modelo NJL (NAMBU; JONALASINIO, 1961) é uma teoria de campo efetiva que foi imaginada para descrever núcleons, com inspirações na teoria BCS para supercondutividade. Logo em seguida foi reformulada para o estudo das propriedades dos quarks. Um dos aspectos mais importantes do modelo é a forma como ele apresenta a quebra dinâmica de simetria quiral, fenômeno responsável pela geração da massa efetiva dos quarks.

Por ser um modelo não renormalizável devemos regularizar as integrais divergentes. Inevitavelmente vão introduzir constantes, que serão ajustadas para fitarem valores físicos experimentais. Nesse trabalho será utilizado o método do *cut-off* 3D, que consiste em aplicar um corte na integral no espaço dos momentuns em um valor Λ a partir do qual as contribuições não são consideradas.

Seguimos nesse trabalho o princípio de que as integrais de meio são naturalmente finitas, reguladas pelas distribuições de Fermi-Dirac, Bose-Einstein ou Boltzmann. A aplicação de regularização nesses resulta em violações de causalidade entre outras inconsistências termodinâmicas que serão analisadas.

4.1 NJL SU(2)

O modelo NJL SU(2) considera apenas os dois quarks mais leves como graus de liberdade. Por possuir apenas dois sabores ele apresenta a simetria $SU(2)_f$. A densidade lagrangiana do modelo é composta por um termo fermiônico livre, $\mathcal{L}_{\text{fermi}}$ e um termo de interação, \mathcal{L}_{int} , como podemos ver na eq. 4.2.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{fermi}} + \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - \hat{m} + \hat{\mu}\gamma^0)\psi + G [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \quad (4.2)$$

Os espinores são escritos em um espaço composto por 3 espaços diferentes, o espaço de Dirac (4×4), o espaço das cores ($N_c \times N_c$) e o espaço dos sabores ($N_f \times N_f$). O operador $\rlap{\not{D}} = \gamma^\mu \partial_\mu$ é a contração do gradiente da relatividade restrita com as matrizes gama de Dirac. Os campos fermiônicos no espaço dos sabores podem ser representados

como um vetor coluna da seguinte maneira:

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Onde u e d representam os campos dos quarks *up* e *down*, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ é o adjunto de Dirac do campo ψ . As massas de corrente e os potenciais químicos dos quarks no espaço dos sabores são respectivamente representado pelos elementos das matrizes

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_u & 0 \\ 0 & \mu_d \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

As matrizes de Dirac γ^0 e γ_5 estão expostas no apêndice B, G é a constante de acoplamento escalar da teoria, $\vec{\tau}$ é o vetor com as matrizes de Pauli no espaço dos sabores.

Pelo fato das massas dos quarks leves serem muito próximas em comparação com a massa efetiva dos quarks quando a simetria quiral é quebrada, podemos considerar a aproximação de isospin, $m_u = m_d$, na qual as massas dos quarks leves são iguais. Também consideraremos inicialmente os potenciais químicos dos quarks iguais, $\mu_u = \mu_d$.

Na aproximação do campo médio o valor dos campos ($\bar{\psi}\psi$) é substituído pelo seu valor médio somado a uma perturbação pequena, resultando em uma expansão do tipo

$$\bar{\psi}\psi = \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \delta \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \mathcal{O}(\delta \langle \bar{\psi}\psi \rangle)^2. \quad (4.5)$$

Onde $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ é o valor do campo médio e $\delta \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ é uma pequena perturbação desse valor, com isso podemos obter

$$(\bar{\psi}\psi)^2 = \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 + 2\langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \mathcal{O}((\delta \langle \bar{\psi}\psi \rangle)^2). \quad (4.6)$$

$$(\bar{\psi}\psi)^2 = -\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 + 2\langle \bar{\psi}\psi \rangle (\bar{\psi}\psi) + \mathcal{O}((\delta \langle \bar{\psi}\psi \rangle)^2). \quad (4.7)$$

Desconsiderando as ordens mais altas da expansão sobre o campo médio e assumindo o ansatz $\langle \bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi \rangle = 0$ é possível obter a lagrangeana efetiva do modelo NJL:

$$\mathcal{L}_{eff} = \bar{\psi}(i\cancel{D} + \hat{\mu}\gamma^0 - M)\psi - G\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2. \quad (4.8)$$

A Massa efetiva M é obtida resolvendo a equação de gap em função da massa,

$$M = m - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle. \quad (4.9)$$

O potencial termodinâmico do modelo é obtido a partir da função de partição Gran-Canônica (KAPUSTA; GALE, 2006)

$$\Omega = -\frac{1}{\beta V} \ln \mathcal{Z}, \quad (4.10)$$

onde

$$\mathcal{Z} = \int [d\bar{\psi}][d\psi] \exp \left[\int d^4x [\bar{\psi}\mathcal{L}_{eff}\psi] \right]. \quad (4.11)$$

Após aplicar o formalismo de Matsubara (MATSUBARA, 1955), ou formalismo de tempo imaginário, e efetuar a soma sobre as frequências de Matsubara podemos obter o potencial termodinâmico

$$\Omega = \frac{(M - m)^2}{4G} - N_c N_f [\Omega_{vac} + \Omega_{med}], \quad (4.12)$$

onde os termos Ω_{vac} e Ω_{med} são, respectivamente,

$$\Omega_{vac} = \frac{(M - m)^2}{4G} - \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda dk^2 k^2 E_k \quad (4.13)$$

$$\Omega_{med} = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} T \int_0^\infty dk^2 k^2 \{ \log [1 + e^{\beta(\mu - E_k)}] + \log [1 + e^{\beta(\mu + E_k)}] \}, \quad (4.14)$$

a energia e o inverso da temperatura são dados por

$$E_k = \sqrt{M^2 + k^2}, \quad (4.15)$$

$$\beta = \frac{1}{T}. \quad (4.16)$$

N_c e N_f surgem da dimensionalidade dos espinores no espaço dos sabores e das cores. Λ é o valor do *cut-off* e G é o valor da constante de acoplamento. Esses valores são obtidos fitando parâmetros experimentais, como a constante de decaimento do pión, f_π , a massa do pión, m_π , e o valor do condensado de quarks, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, no vácuo. A integral divergente foi regularizada pelo método do *cut-off* 3D, no qual é feito um corte abrupto no limite superior da integral no espaço dos momentos em 3 dimensões no valor de *cut-off* Λ . As parametrizações que foram utilizadas nesse trabalho estão expostas na tabela 4.1.

set	Λ [MeV]	$G\Lambda^2$	m [MeV]	M	$\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ [MeV]
1 (Buballa)	664,3	2,060	5,00	300,00	-250,8
2 (Buballa)	587,9	2,440	5,60	400,00	-240,8
3 (Buballa)	660,0	2,067	5,37	302,25	-250,0

Tabela 4.1 – Parametrizações do modelo NJL SU(2).

Por exemplo, no vácuo do modelo existem três soluções para a equação de gap, figura 4.1. Duas soluções representam mínimos do potencial termodinâmico, uma terceira

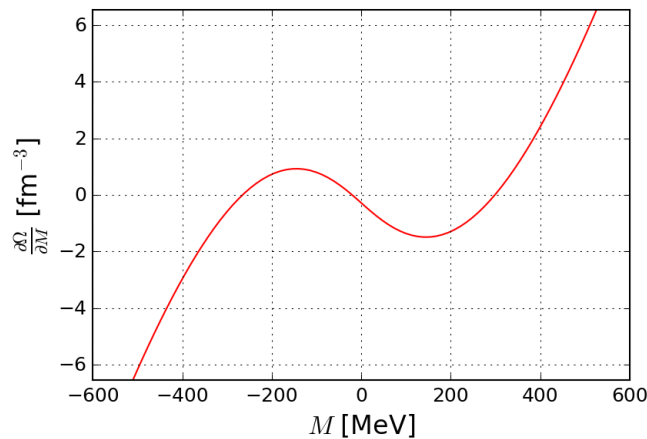


Figura 4.1 – Derivada parcial do potencial termodinâmico no vácuo, $T = \mu = 0$, com relação à massa efetiva em função da mesma. Set 1.

representa um máximo local, figura 4.2. Utilizando o potencial termodinâmico normalizado, onde impomos que o valor da pressão deva ser nulo no vácuo do modelo, dessa forma

$$P = -\Omega_N = \Omega - \Omega_0, \quad (4.17)$$

onde Ω_0 é o valor do potencial termodinâmico no vácuo. A partir do potencial termodinâmico podemos obter diversas quantidades termodinâmicas, como a densidade de número de partículas, a densidade de entropia e a densidade de energia respectivamente,

$$n = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}, \quad s = -\frac{\partial \Omega}{\partial T} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \Omega_N + \mu n + sT. \quad (4.18)$$

O valor da massa efetiva precisa ser resolvido para cada valor de T e μ para que possamos calcular as quantidades termodinâmicas de interesse. Obtemos portanto uma função $M(T, \mu)$ que depende da parametrização. Um dos aspectos mais importantes do modelo NJL que é afetado pela sua parametrização é a existência ou não de uma transição de fase de primeira ordem para temperaturas baixas e, conseqüentemente, a existência do ponto crítico. Podemos ver na figura 4.3, subfigura da direita, que uma transição de fase de primeira ordem pode ocorrer ou não dependendo da parametrização.

As soluções para a massa efetiva no modelo NJL SU(2) em função do potencial

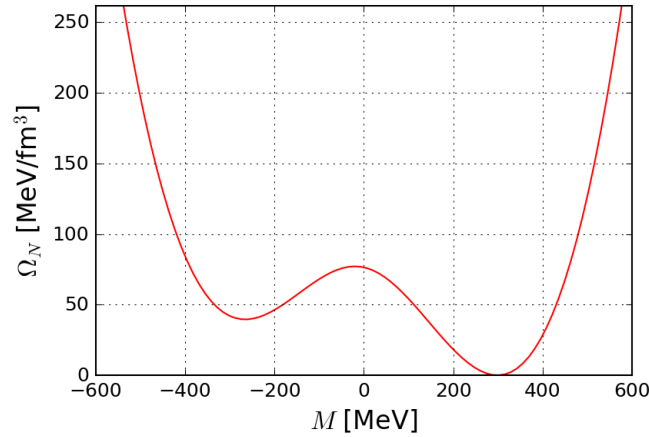


Figura 4.2 – Potencial termodinâmico normalizado, $\Omega_N = \Omega(M) - \Omega(M_0)$ no vácuo, $T = \mu = 0$, como função da massa efetiva. Set 1.

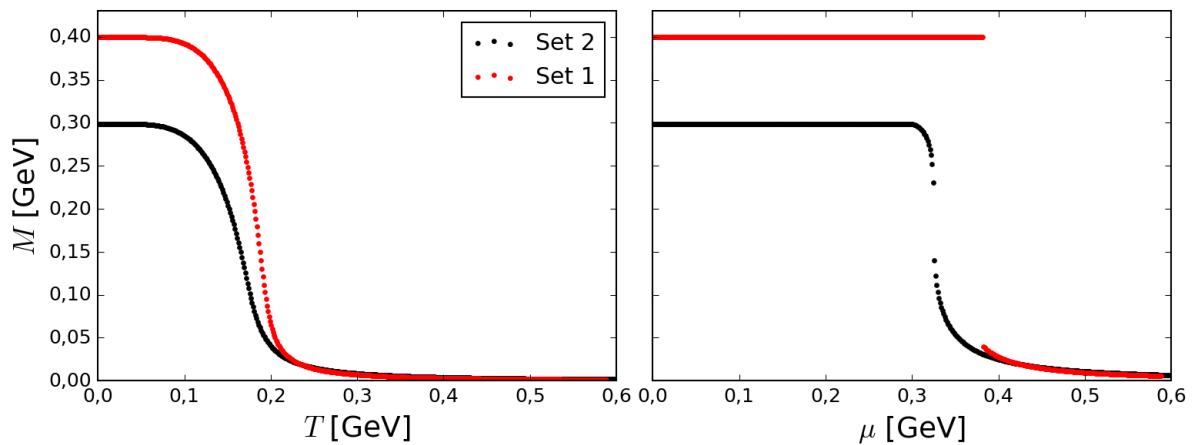


Figura 4.3 – Massa efetiva como função de T para $\mu = 0$ (Esquerda) e massa efetiva como função de μ para $T = 0$ (Direita), para os dois sets de parâmetros, Set 1 (vermelho) e Set 2 (preto).

químico para $T = 0$ apresentam peculiaridades interessantes, devido à possibilidade de existência de uma transição de primeira ordem.

Devido à multiplicidade soluções vamos detalhar um pouco as soluções para massa efetiva do modelo como função de μ e ρ nas seções seguintes.

4.1.1 NJL SU(2) em função do potencial químico

O modelo NJL apresenta, para algumas parametrizações, uma transição de fase de primeira ordem para valores baixos de temperatura. No vácuo a simetria quiral é quebrada dinamicamente, através desse mecanismo surge a massa efetiva dos quarks, responsável pela maior parte da massa bariônica do universo observável. Resolvendo a equação de gap para valores de potencial químico em torno do potencial químico crítico, $\mu \approx \mu_c$,

encontramos três soluções, dois mínimos e um máximo local. Quando o potencial químico atinge o valor crítico o mínimo global salta de um mínimo para o outro, figura 4.4. A descontinuidade no valor da massa efetiva em função do potencial químico torna mais

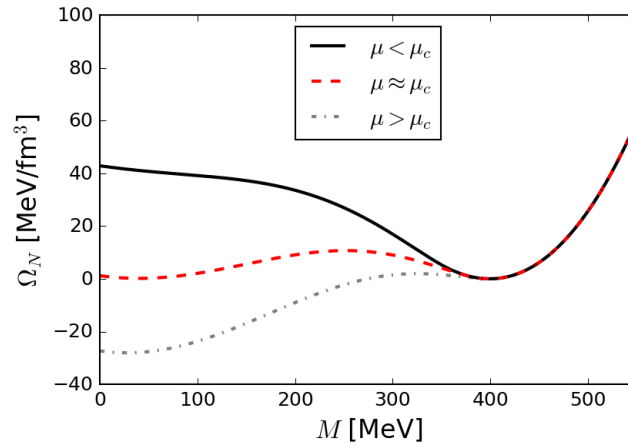


Figura 4.4 – Potencial termodinâmico normalizado como função da massa efetiva para $T = 0$ e diferentes valores de μ . O valor do potencial químico, $\mu_c \approx 382$ MeV. Parâmetros do set 2.

interessante a utilização de algoritmos de minimização de funções aplicados ao potencial termodinâmico do que algoritmos de resolução de equações aplicados à equação de gap, mesmo ambos os métodos sendo equivalentes, a implementação numérica do primeiro é mais direta.

Essa transição de fase de primeira ordem fica evidenciada em outras quantidades, como a densidade de número de partículas figura 4.5. Resolvendo o sistema em função do

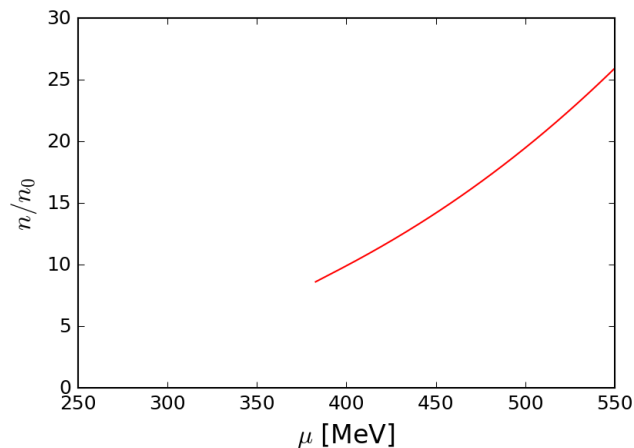


Figura 4.5 – Densidade de número de quarks normalizada pela densidade de saturação da matéria nuclear, $n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$, em função do potencial químico para o set 2 de parâmetros.

potencial químico fica evidente que não temos acesso à região de densidade de número de partículas menor que a densidade crítica, para podermos acessar tal região, $0 < n < n_c$, precisamos resolver o sistema de outra forma.

4.1.2 NJL SU(2) em função da densidade

Ao minimizar o potencial termodinâmico em função da massa efetiva para valores fixos de T e μ estamos procurando valores de massa efetiva para quais o sistema está termodinamicamente estável. Também é conveniente resolver o modelo para valores fixos de densidade de partículas, porém, nem todo valor de M corresponde a um valor que mantém o sistema estável termodinamicamente. Para podermos encontrar o valor da massa efetiva em função da densidade vamos considerar o caso à temperatura nula, onde a densidade pode ser escrita como

$$n = N_c N_f \frac{p_f^3}{3\pi^2}, \quad (4.19)$$

onde $p_f = \sqrt{\mu^2 - M^2} \Theta(\mu^2 - M^2)$ é o momento de fermi dos quarks. Se elevarmos ao quadrado dos dois lados dessa expressão podemos obter

$$p_f^2 = \mu^2 - M^2 \quad (4.20)$$

$$\mu^2 = p_f^2 + M^2 \quad (4.21)$$

$$\mu = \sqrt{p_f^2 + M^2}. \quad (4.22)$$

Invertendo a equação 4.19 e substituindo ela na equação 4.22 encontramos uma de-

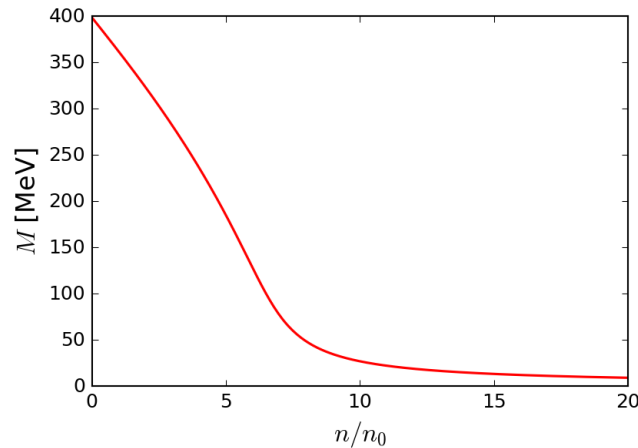


Figura 4.6 – Massa efetiva em função da densidade de número de partículas normalizada pela densidade de saturação da matéria nuclear, $n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$. Parâmetros do set 2.

pendência do potencial químico com a densidade. E dessa forma podemos substituir o potencial químico nas expressões como o potencial termodinâmico ou a equação de gap e resolver autoconsistentemente as equações em função de M para valores constantes de n , figura 4.6. Obtemos também valores para o potencial químico em função de n/n_0 , figura 4.7.

Porém os valores da densidade compreendidos no intervalo $0 < n < n_c$ as soluções

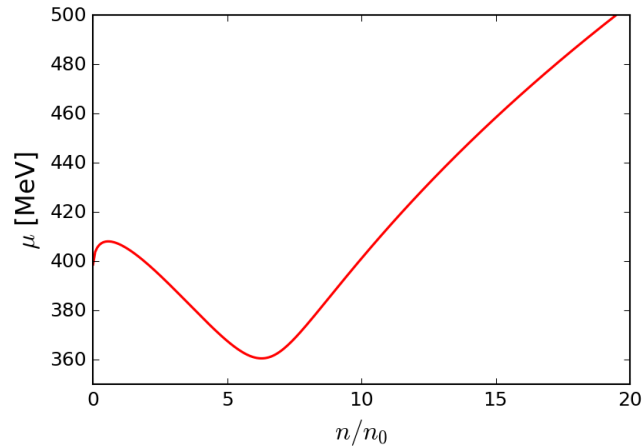


Figura 4.7 – Valor do potencial químico, μ , como função da densidade de número de quarks normalizada pelo valor da saturação da matéria nuclear, $n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$. Parâmetros do set 2.

para a massa efetiva representam soluções instáveis da equação de gap, mínimos não globais, que apresentam valor negativo de pressão normalizada, figura 4.8. Mínimos esses

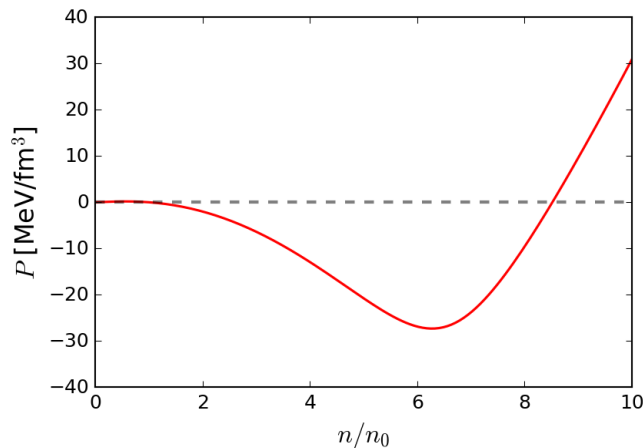


Figura 4.8 – Pressão normalizada como função da densidade de número de partículas normalizada pelo valor da densidade de saturação da matéria nuclear, $n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$. Parâmetros do set 2.

que não são acessíveis ao se resolver por M com μ constante pelo fato de existirem múltiplas soluções e sempre escolhermos a que minimiza o potencial termodinâmico, ou maximiza a pressão, em função da massa. Esse critério fica mais claro ao observarmos todas as soluções da massa efetiva em função de μ , figura 4.9.

Resolver o modelo em função da densidade pode ser particularmente útil na obtenção das equações de estado para matéria de quarks para avaliarmos de forma mais completa quantidades como a estabilidade da matéria, como visto em Buballa (1996).

Outra forma de entender a transição de fase de primeira ordem é observando as soluções da pressão normalizada como função do potencial químico, como escolhemos sempre a solução que minimiza o potencial termodinâmico isso implica que em função

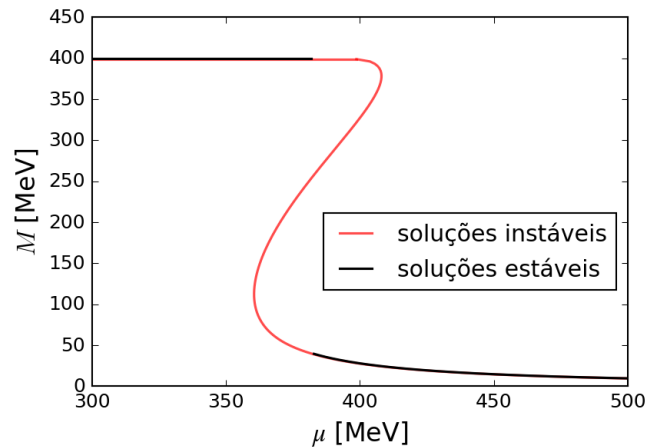


Figura 4.9 – Soluções possíveis para a massa efetiva em função do potencial químico, soluções estáveis em preto e instáveis em vermelho. Parâmetros do set 2.

do potencial químico sempre escolhemos a solução que maximiza a pressão, figura 4.10. Podemos inclusive notar o aparecimento e desaparecimento das diversas soluções em

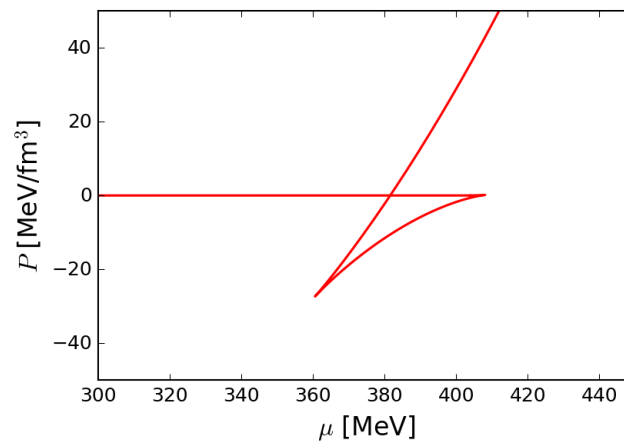


Figura 4.10 – Pressão normalizada em função do potencial químico apresentando todas as soluções possíveis. Parâmetros do set 2.

função de μ . Para a parametrização do set 2, o surgimento do mínimo local que se tornará o mínimo global ocorre em $\mu \approx 360$ MeV, e o momento que o mínimo local da solução do vácuo deixa de existir é $\mu \approx 410$ MeV.

Para que possamos construir uma EOS que leve em conta as características da matéria estelar, precisamos que o modelo NJL possibilite quantidades diferentes de sabores diferentes de quarks. Para isso o modelo precisa ser reescrito considerando valores diferentes para os potenciais químicos dos sabores dos quarks.

4.1.3 NJL SU(2) com matéria assimétrica

Para considerarmos o interior de estrelas densas temos que satisfazer as condições de equilíbrio beta e neutralidade de carga. O decaimento beta é a reação responsável pelo decaimento de nêutrons em prótons, elétrons e anti-neutrinos (GLENDEENING, 2000),



Também temos que considerar a reação oposta, que é a captura eletrônica por um próton, que resulta em um nêutron e um neutrino,



Dessa forma a restrição que precisamos satisfazer é descrita pelos potenciais químicos das partículas,

$$\mu_{p^+} + \mu_{e^-} = \mu_{n^0}, \quad (4.25)$$

o potencial químico dos neutrinos não é considerado pois estamos descrevendo uma estrela no equilíbrio e os efeitos dos neutrinos não são mais relevantes para essa descrição.

Neutrinos são importantes na descrição da supernova e dos estágios iniciais da vida de uma estrela de nêutrons, como o *cooling* (WEBER; NEGREIROS; ROSENFELD, 2009).

Reescrevendo a equação 4.25 em termos de quarks obtemos a equação que precisamos impor,

$$\mu_u + \mu_{e^-} = \mu_d. \quad (4.26)$$

A neutralidade local de carga é alcançada garantindo que a densidade de carga do sistema seja nula em todos os pontos da distribuição, impondo

$$0 = \sum_i q_i n_i, \quad (4.27)$$

onde q_i é o valor da carga elétrica da i -ésima espécie química e n_i representa a densidade de número de partículas da mesma. O potencial termodinâmico do modelo NJL SU(2) com

potenciais químicos diferentes pode ser escrito

$$\Omega = \sum_f \left\{ \frac{(M_f - m)}{8G} - \frac{N_c}{\pi^2} \int_0^\Lambda dk^2 k^2 E_{k,f} + \right. \quad (4.28)$$

$$\left. - \frac{N_c}{\pi^2} T \int_0^\infty dk^2 k^2 [\log(1 + e^{\beta(\mu_f - E_{k,f})}) + \log(1 + e^{\beta(\mu_f + E_{k,f})})] \right\}. \quad (4.29)$$

Agora possuímos duas equações de gap para resolver, uma para cada sabor,

$$M_f = m - 2G \langle \bar{\psi} \psi \rangle_f. \quad (4.30)$$

As quantidades termodinâmicas agora vão ser

$$s = \frac{\partial \Omega}{\partial T}, \quad (4.31)$$

$$n_f = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_f}, \quad (4.32)$$

$$\varepsilon = -\Omega_N + \sum_f \mu_f n_f + Ts. \quad (4.33)$$

A pressão e densidade de energia totais do sistema vão ser a soma das contribuições dos quarks e dos elétrons, ou outros léptons que podem ser considerados como múons. Finalmente,

$$P_{tot} = P_q + P_e \quad (4.34)$$

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_q + \varepsilon_e. \quad (4.35)$$

A pressão, densidade de energia e densidade de número de partículas dos elétron podem ser consideradas simplesmente como as de um gás livre ultrarrelativístico de férmions de spin- $\frac{1}{2}$ (GLENDEENING, 1997):

$$P_e = \frac{\mu_e^4}{12\pi^2} \quad (4.36)$$

$$\varepsilon_e = \frac{\mu_e^4}{4\pi^2} \quad (4.37)$$

$$n_e = \frac{\mu_e^3}{3\pi^2}. \quad (4.38)$$

Outra quantidade interessante que pode afetar a EOS de estrelas de quarks e que pode ser introduzida no contexto do modelo NJL é o *Chiral Imbalance*. Quantificado através do potencial químico quiral, μ_5 , essa propriedade vai ser introduzida na subseção a seguir.

4.1.4 NJL SU(2) em função do potencial químico quiral

O efeito da assimetria quiral, a diferença entre férmions de mão direita e de mão esquerda, pode ter consequências importantes nas propriedades de plasmas relativísticos. Efeitos como o *Chiral Magnet Effect* são relevantes em campos magnéticos intensos, condições encontradas em magnetares ou em colisões de íons pesados (SHOVKOVY, 2021).

O potencial químico quiral pode ser introduzido na Lagrangeana do modelo de forma similar ao potencial químico usual, (FUKUSHIMA, 2004)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{fermi}} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (4.39)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m + \mu\gamma^0 + \mu_5\gamma^0\gamma^5)\psi + G [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \quad (4.40)$$

O potencial termodinâmico do modelo NJL na aproximação de campo médio para matéria simétrica com potencial químico quiral é dado por (YANG; LUO; ZONG, 2019b)

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{(M - m)^2}{4G} - \frac{N_c N_f}{2\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \int_0^\Lambda dk^2 k^2 \omega_s + \\ & - \frac{N_c N_f}{2\pi^2} \sum_{s=\pm 1} T \int_0^\infty dk^2 k^2 \{ \log [1 + e^{\beta(\mu - \omega_s)}] + \log [1 + e^{\beta(\mu + \omega_s)}] \}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde $\omega_s = \sqrt{M^2 + (k + s\mu_5)^2}$ e $s = \pm 1$.

É fácil verificar que a contribuição de meio a $T = 0$ vai ser

$$\Omega_{\text{med}}^{\mu_5} = -\frac{N_c N_f}{2\pi^2} \int_{\mu_5 - p_f}^{\mu_5 + p_f} dk k^2 \left(\mu - \sqrt{M^2 + (k - \mu_5)^2} \right). \quad (4.42)$$

Definimos o potencial normalizado como

$$\Omega_N = \Omega(M, T, \mu, \mu_5) - \Omega(M_0, 0, 0, \mu_5), \quad (4.43)$$

devido à não conservação da carga quiral (RUGGIERI; CHERNODUB; LU, 2020). Onde é o valor da massa efetiva no vácuo em função do potencial químico quiral $M_0 = M(T = 0, \mu = 0, \mu_5)$. As quantidades termodinâmicas relevantes são deduzidas a partir do potencial normalizado. A densidade quiral é então obtida a partir do potencial normalizado,

$$n_5 = \langle \bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi \rangle = -\frac{\partial \Omega_N}{\partial \mu_5}. \quad (4.44)$$

Então a densidade de energia vai ser

$$\varepsilon = \Omega_N + sT + \mu n + \mu_5 n_{5N}. \quad (4.45)$$

O potencial químico quiral possui efeitos na massa efetiva a $T = \mu = 0$, efeitos

esses que são sensíveis a formas diferentes de regularização. Cabe mencionar a regularização denominada *medium separation scheme*, ou MSS, que apresenta resultados mais consistentes do que o método tradicional de regularização das integrais de vácuo, quando confrontados os resultados do modelo NJL com os resultados de LQCD.

4.2 MSS - MEDIUM SEPARATION SCHEME

O potencial químico quiral é uma quantidade de meio, afinal representa a diferença de número de quarks de mão direita e de mão esquerda. Essa quantidade aparece na definição do ω_s , que é uma quantidade presente na integral de vácuo. Os efeitos da regularização de uma quantidade de meio, como veremos na próxima seção, têm efeitos desastrosos sobre quantidades físicas descritas pelo modelo. Uma alternativa a isso é a aplicação de métodos que separam as quantidades previamente reguladas em uma parte referente ao vácuo do modelo, divergente e que é regulada, e outra parte finita, que contém as quantidades físicas de meio. Partindo dessa ideia pode ser construído o esquema de separação de meio, *medium separation scheme*, ou MSS (FARIAS et al., 2016).

A partir da equação de gap,

$$0 = \frac{M - m}{2G} - N_c N_f [I_{vac} - I_{med}], \quad (4.46)$$

onde I_{vac} e I_{med} são as integrais

$$I_{vac} = \sum_{s=\pm 1} \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{M}{\omega_s(k)}, \quad (4.47)$$

$$I_{med} = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{1 + e^{(\omega_s(k)+\mu)/T}} + \frac{1}{1 + e^{(\omega_s(k)-\mu)/T}} \right) \frac{M}{\omega_s(k)}. \quad (4.48)$$

Realizamos substituições algébricas na integral de vácuo de forma que obtemos a integral regulada com os termos de meio separados dos termos de vácuo, $I_{vac} \rightarrow I_{MSS}$, resultado obtido por Farias et al. (2016). Cujas expressões podem ser da forma

$$I_{MSS} = 2M \left[I_{quad}(M_0) + (2\mu_5^2 - M^2 + M_0^2) I_{log}(M_0) - \frac{2\mu_5^2 + M^2 - M_0^2}{8\pi^2} + \frac{M^2 - 2\mu_5^2}{8\pi^2} \log \left(\frac{M^2}{M_0^2} \right) \right]. \quad (4.49)$$

Onde as integrais I_{quad} e I_{log} são

$$I_{quad}(M_0) = \int^{\Lambda} \frac{dk^4}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_4^2 + k^2 + M_0^2} \quad (4.50)$$

$$I_{log}(M_0) = -\frac{\partial}{\partial M_0^2} I_{quad}(M_0). \quad (4.51)$$

Note que as integrais não dependem de valores de meio, dependendo apenas do valor da massa efetiva no vácuo, M_0 .

A diferença entre o MSS e o método tradicional de regularização (TRS, em inglês *traditional regularization scheme*) pode ser vista na figura 4.11. Onde os valores das temperaturas crítica e pseudo-crítica para a restauração da simetria quiral como funções do potencial químico quiral se comportam de forma oposta. Enquanto que para o MSS as temperaturas críticas aumentam como função de μ_5 , para o TRS elas diminuem e apresentam criticalidade. Para o MSS o valor da massa efetiva apenas cresce como função de

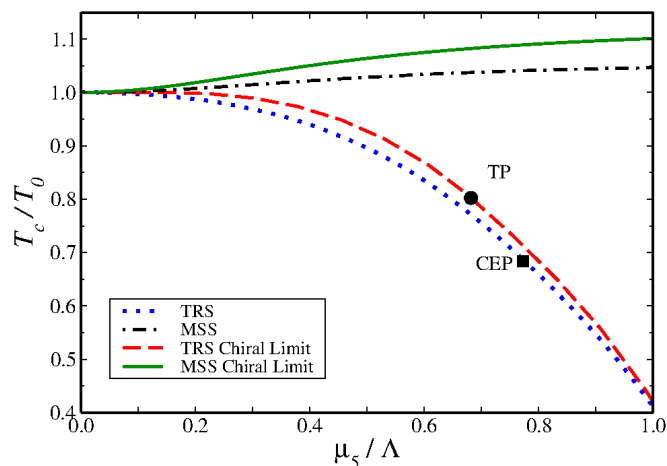


Figura 4.11 – Temperatura crítica T_c normalizada por T_0 ($\mu = \mu_5 = 0$) em função do potencial químico quiral μ_5 . MSS se refere ao *medium separation scheme* e TRS se refere ao corte tridimensional tradicional. Imagem retirada de Thermodynamics of quark matter with a chiral imbalance (FARIAS et al., 2016).

μ_5 , enquanto que no TRS o valor aumenta e em seguida diminui, figura 4.12. O incremento do valor da massa efetiva está relacionado com o fortalecimento da quebra dinâmica da simetria quiral. Os resultados do MSS estão qualitativamente de acordo com os resultados de LQCD (BRAGUTA et al., 2016).

As propriedades termodinâmicas do sistema são obtidas a partir do potencial termodinâmico, que pode ser encontrado integrando a equação de gap

$$\begin{aligned} \Omega_{MSS} = \int dM I_{MSS} = & M^2 I_{log}(M_0) \left(\frac{M_0^2}{2} + \mu_5^2 - \frac{M^2}{4} \right) \\ & + I_{quad}(M_0) \frac{M^2}{2} - \frac{3M^4}{64\pi^2} + \frac{M_0^2 M^2}{16\pi^2} + \frac{M^2(M^2 - 4\mu_5^2)}{32\pi^2} \log \left(\frac{M^2}{M_0^2} \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

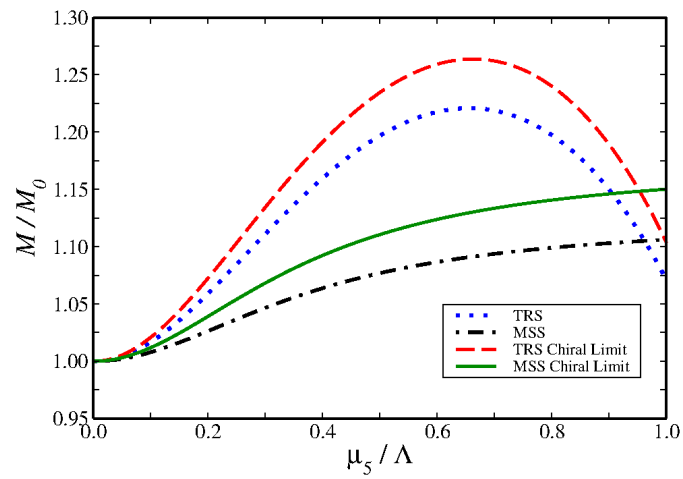


Figura 4.12 – Massa efetiva normalizada pela massa do vácuo ($T = \mu = \mu_5 = 0$) em função do potencial químico quiral μ_5 . MSS em verde (limite quiral) e preto (limite físico), TRS em vermelho (limite quiral) e azul (limite físico). Imagem retirada de Thermodynamics of quark matter with a chiral imbalance (FARIAS et al., 2016).

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Todos os dados, salvo os das figuras 4.11 e 4.12 e da tabela 4.1, foram obtidos por programas desenvolvidos por mim. Programas desenvolvidos em Python utilizaram as bibliotecas NumPy (HARRIS et al., 2020) para manipulação de vetores e tabelas, SciPy (VIRTANEN et al., 2020) para métodos numéricos e Matplotlib (HUNTER, 2007) para a geração dos gráficos. Os programas desenvolvidos em Julia Language utilizaram as bibliotecas Optim (MOGENSEN; RISETH, 2018) para otimização numérica, NLSolve (MOGENSEN et al., 2020) para resolução de sistemas acoplados e QuadGK (JOHNSON, 2013) para integração numérica. Todas as bibliotecas e linguagens de programação utilizadas são livres.

5.1 TEMPERATURA E POTENCIAL QUÍMICO FINITOS

Diferentes procedimentos de regularização podem afetar as quantidades termodinâmicas, como a regularização das integrais de meio, que são convergentes, através de um cutoff constante com mesmo valor do corte da integral de vácuo, $\Lambda_T \rightarrow \Lambda$. Essa regularização tem como vantagem manter o valor do condensado de quarks negativo em todo plano $T \times \mu$, situação que não ocorre se a integral térmica é realizada em todo o espaço dos momentos. Ao integrarmos a contribuição térmica sem regulador obtemos um resultado não físico em uma das quantidades descritas pelo modelo, o valor do condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. O condensado assume valores positivos não físicos, que implica em uma

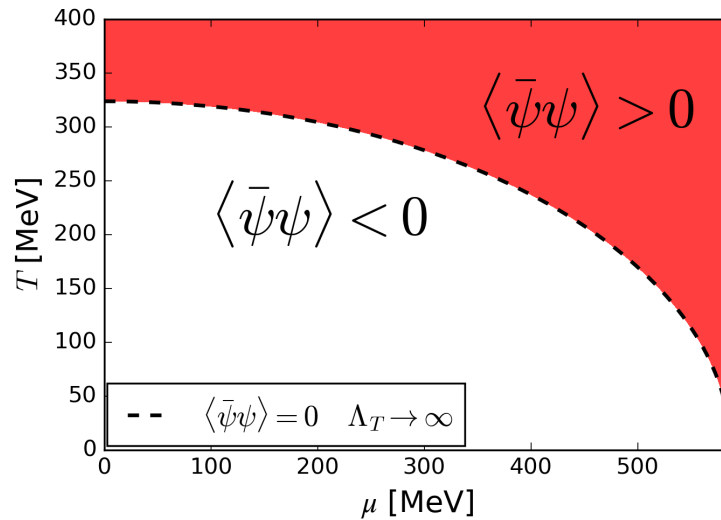


Figura 5.1 – Delimitação do valor positivo do condensado de quarks, em vermelho, como função de T e μ para o set 2, $\Lambda_T \rightarrow \infty$.

massa efetiva menor que massa de corrente em algumas regiões do plano $T \times \mu$, região vermelha da figura 5.1. Para a parametrização do set 2 obtemos condensado positivo para temperaturas maiores que $T = 300$ MeV, valor que diminui em função do potencial químico de forma que a $T = 0$ MeV o valor do condensado apenas é positivo para $\mu > \Lambda$.

Porém a regularização da parte térmica também apresenta valores não físicos em outras quantidades descritas pelo modelo, fazendo com que o modelo apresente, entre outras coisas, violação de causalidade. A violação de causalidade ocorre quando a velocidade do som passa a ser maior que a velocidade da luz, podemos ver que a velocidade do som em função de T para $\mu = 0$ ultrapassa o valor da velocidade da luz para valores de temperatura próximos do valor da temperatura pseudocrítica, o que pode ser visto na figura 5.2. Ou seja, os valores das quantidades termodinâmicas são drasticamente afeta-

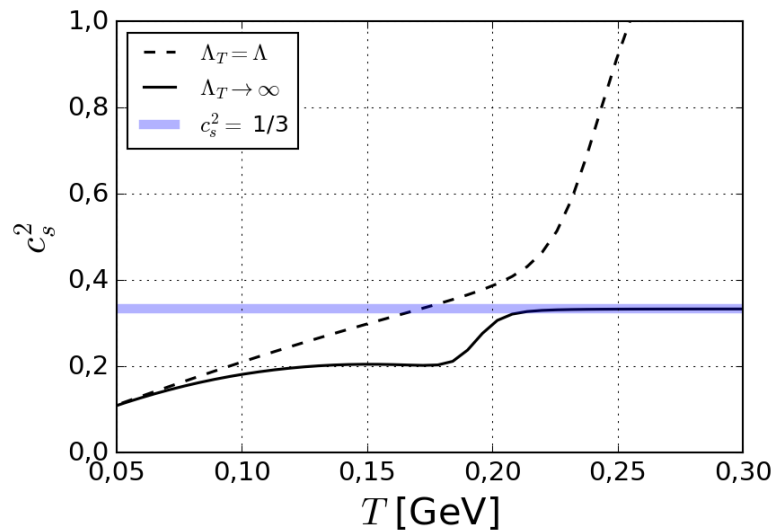


Figura 5.2 – Valor da velocidade do som em função da temperatura T , aplicando (não aplicando) o cutoff na parte térmica $\Lambda_T = \Lambda$ ($\Lambda_T \rightarrow \infty$). NJL SU(2) com matéria simétrica e parâmetros do set 2.

dos justamente na região da fenomenologia da restauração da simetria quiral, que é uma das principais características do modelo NJL. Outro problema encontrado é a falta de consistência com previsões da QCD perturbativa, onde uma fase desconfiada, com quarks livres, é encontrada para valores altos de temperatura e densidade. Portanto espera-se que a altos valores de temperatura as quantidades físicas aproximem-se dos valores para um gás livre, o chamado limite conforme, o que para $\mu = 0$ apenas ocorre para o caso onde a integral térmica não é cortada. Onde o modelo não apenas converge rapidamente para um valor próximo do valor esperado para um gás livre como também o faz dentro do limite de validade do modelo, onde $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \leq 0$. Nesse trabalho nos referimos ao limite de validade do modelo como a região do plano $T \times \mu$ onde não existem valores não físicos entre os que podemos obter a partir do mesmo.

Utilizando a velocidade do som isentrópica podemos delimitar a região de violação de causalidade do modelo no qual os cortes sobre as integrais térmicas foram aplicados.

Definindo a região de violação de causalidade como toda a região na qual a velocidade do som ao quadrado é maior que a da luz, $c_s^2 \geq 1$, podemos observar a região de validade do modelo com regulação térmica na figura 5.3. No caso sem regulação da parte térmica não existem regiões de violação de causalidade. A temperatura de violação de causalidade diminui como função do potencial químico.

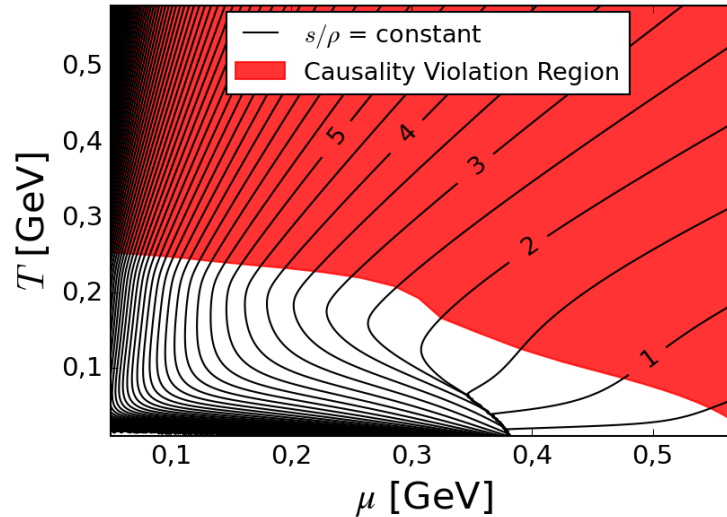


Figura 5.3 – Regiões de violação de causalidade ($c_s^2 \geq 1$) em vermelho e linhas (pretas) isentrópicas em função de T e μ , cutoff 3D aplicado no meio e parâmetros do set 2.

Considerando as duas formas diferentes de regularizar as integrais de meio para o modelo podemos perceber a existência de duas regiões limitantes da validade do modelo NJL SU(2). A primeira por apresentar valor positivo para o condensado de quarks em regiões de temperatura e potencial químico altos, mas preservando as propriedades esperadas das quantidades termodinâmicas e a causalidade. E a segunda, que mantém o valor do condensado negativo mas viola a causalidade e apresentando valores não físicos para diversas quantidades termodinâmicas. O calor específico a volume constante c_V , por exemplo, deixa de ser proporcional a T^3 ao ser aplicado o *cut-off* na parte térmica, figura 5.4. O que não ocorre para o caso com a contribuição completa dos termos de meio.

O calor específico é uma quantidade interessante por apresentar um pico em $T = T_{pc}$ que se torna uma descontinuidade se estiver sob a transição de primeira ordem. Comportamento esse que é completamente varrido ao utilizar a abordagem que preserva apenas o valor do condensado, negligenciando toda a física e a fenomenologia não apenas da transição de fase, como de todo o modelo para temperaturas maiores ou próximos de $T \sim T_{pc}$.

Outras quantidades também são afetadas pelo corte térmico, como a pressão, a densidade de energia e a densidade de entropia, de forma que seus valores não convergem para os seus respectivos limites de Stefan-Boltzmann para altas temperaturas. Podemos ver na figura 5.5 que as linhas pretas, que representam as quantidades obtidas com a contribuição completa de meio, convergem rapidamente, diferente dos valores regulados

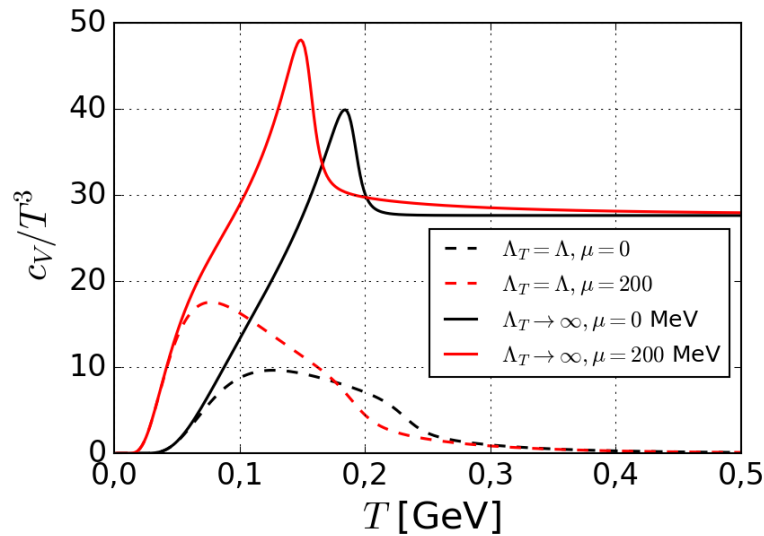


Figura 5.4 – Calor específico dividida por T^3 para valores constantes de μ em função de T . Linhas pretas (vermelhas) para $\mu = 0$ MeV ($\mu = 200$ MeV). Linhas tracejadas aplicam o *cut-off* térmico, linhas contínuas não. Parâmetros do set 2.

que estão em vermelho. Os limites a altas temperaturas para a pressão, densidade de

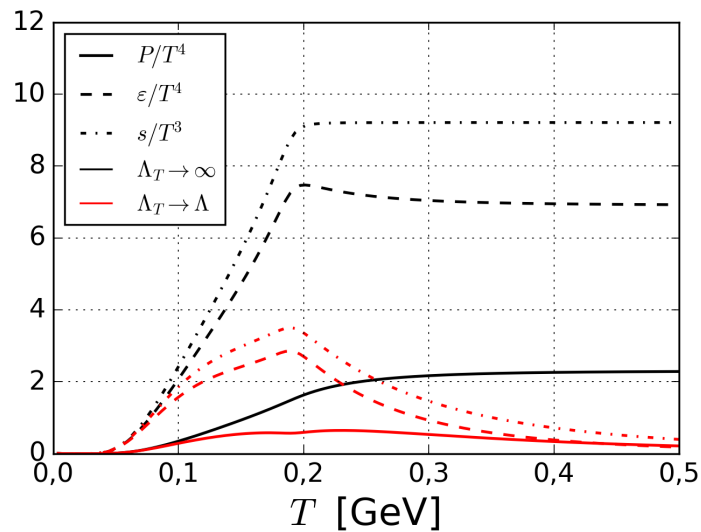


Figura 5.5 – Pressão sobre T^4 (linha contínua), densidade de energia sobre T^4 (tracejada) e densidade de entropia sobre T^3 (traço-ponto) como funções da temperatura. Linhas vermelhas representam os resultados obtidos regulando o meio e linhas pretas os resultados com as contribuições completas de meio.

energia e densidade de entropia para o modelo NJL SU(2) são, respectivamente,

$$P_{SB} = 4N_c N_f \frac{7\pi^2}{720} T^4, \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_{SB} = 3P_{SB}, \quad (5.2)$$

$$s_{SB} = 4N_c N_f \frac{7\pi^2}{180} T^3. \quad (5.3)$$

A regularização dos termos de meio trazem mais desvantagens do que soluções. Tais efeitos também são vistos ao considerarmos temperatura e potencial químico quiral finitos para $\mu = 0$.

5.2 TEMPERATURA E POTENCIAL QUÍMICO QUIRAL FINITOS

O potencial químico quiral afeta o condensado de quarks de forma similar ao potencial químico usual. Na ausência de corte na integral térmica ambos reduzem a temperatura na qual o condensado passa a ser positivo, região demarcada pela linha tracejada e pela região em vermelho da figura 5.6.

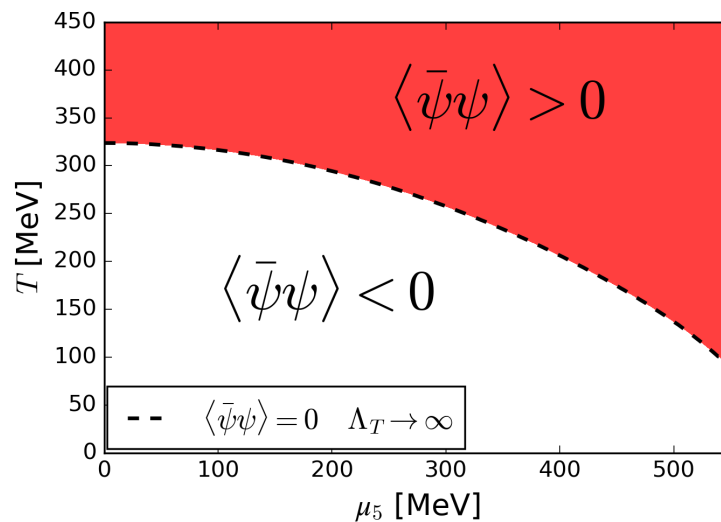


Figura 5.6 – Delimitação do valor do condensado quark-antiquark em função de T e μ_5 para o set 2.

Caso sejam reguladas as integrais de meio o valor do condensado de quarks não é negativo para nenhum valor de T ou μ , porém o preço a se pagar é que outras inconsistências surgem na termodinâmica do sistema. O calor específico em função da temperatura para diferentes valor de μ_5 constante possui um comportamento similar ao caso anterior ao se cortar a contribuição térmica. O seu valor não segue proporcional a T^3 como deveria, mas alguma potência menor. Da mesma forma a posição do máximo de c_V/T^3 em função da temperatura, que ocorre para valores menores de T , como pode ser visto na figura 5.7, onde as linhas pretas representam o caso com potencial químico quiral nulo, as linhas vermelhas $\mu_5 = 200$ MeV, as tracejadas representam os casos com corte e as contínuas os resultados obtidos com a contribuição completa dos termos de meio.

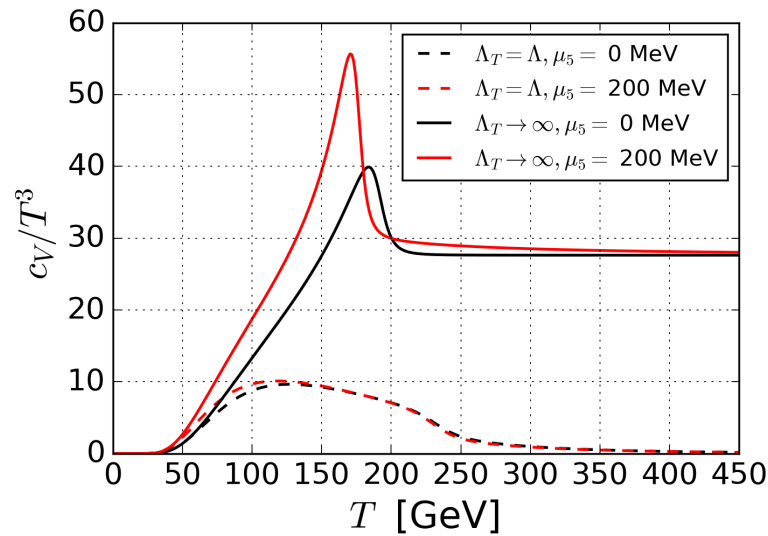


Figura 5.7 – Calor específico por T^3 como função de T para valores constantes de μ_5 . Linhas pretas (vermelhas) para $\mu_5 = 0$ MeV, ($\mu_5 = 200$ MeV). Linhas tracejadas aplicam o *cut-off* térmico, linhas contínuas não. Parâmetros do set 2.

5.3 POTENCIAL QUÍMICO E POTENCIAL QUÍMICO QUIRAL FINITOS

Os efeitos do potencial químico quiral sob a transição de fase de primeira ordem podem ser estudados a nível de massa efetiva. Ao aumentar o valor do potencial químico quiral temos um aumento do valor da massa efetiva dos quarks, como já mencionado na seção 4.2. Ao aumentarmos o valor do potencial químico quiral na presença do potencial químico dos quarks podemos ver que o valor do potencial químico para o qual ocorre a transição de fase de primeira ordem, μ_c , ocorre para valores menores de μ ao utilizarmos a regularização TRS, como pode ser visto na figura 5.8.

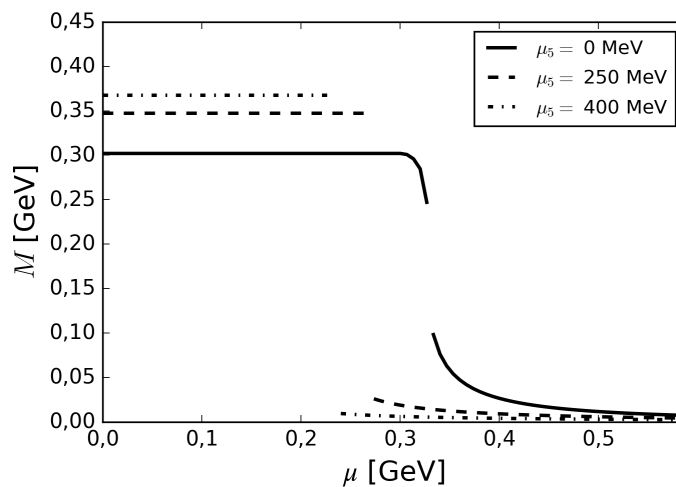


Figura 5.8 – Massa efetiva dos quarks como função do potencial químico para valores fixos do potencial químico quiral, $T = 0$. Parâmetros do set 3, regularização TRS.

Porém o método tradicional de regularização traz consigo algumas limitações, com

a não concordância qualitativa com resultados da LQCD. Portanto outras abordagens se mostram necessárias. Quando o modelo NJL SU(2) com potencial químico quiral é abordado através da regularização MSS as soluções para a massa efetiva apresentam diferenças consideráveis. Diferenças que surgem da forma como consideramos a separação dos termos divergentes de vácuo, partindo da proposição de que nenhum termo de meio deva ser regulado, como o potencial químico quiral ou a massa efetiva, são realizadas substituições de forma que apenas os valores obtidos no vácuo do modelo estão presentes nas integrais reguladas. Portanto apenas as integrais contendo a massa efetiva no vácuo são reguladas, ocasionando resultados diferentes para o valor da massa efetiva inclusive no vácuo, como por exemplo a ausência de transição de fase de primeira ordem em $T = \mu_5 = 0$ para a parametrização do set 3, figura 5.9.

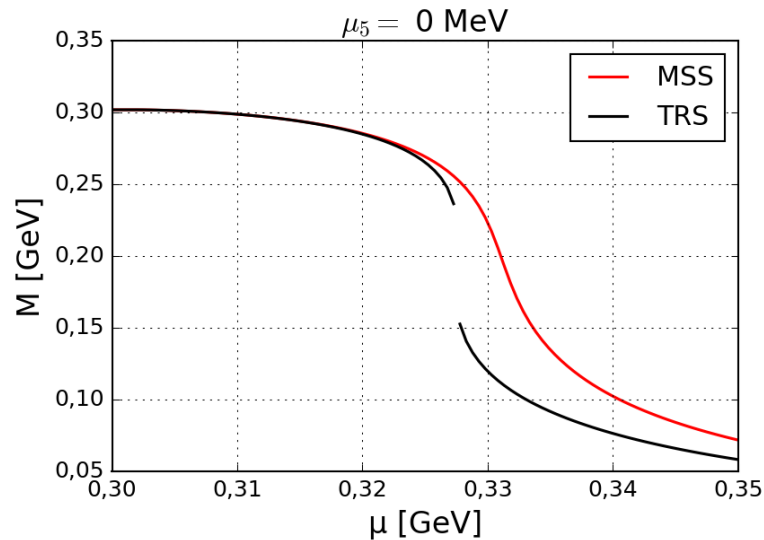


Figura 5.9 – Massa efetiva dos quarks como função do potencial químico, $\mu_5 = T = 0$. Parâmetros do set 3. Linha vermelha (preta) representa a regularização MSS (TRS).

Para valores finitos de μ_5 podemos observar que o valor do potencial químico crítico, ou pseudocrítico, μ_c , diminui como função de μ_5 . Para a regularização TRS a transição de fase de primeira ordem ocorre para $T = \mu_5 = 0$, enquanto que ao aplicarmos a regularização MSS perdemos a transição de fase de primeira ordem, porém ao aumentarmos o valor do potencial químico quiral até $\mu_5 \approx 100$ MeV temos uma transição de fase para as duas regularizações, com a diferença de que a regularização MSS faz com que a variação da massa efetiva seja muito menor comparada com a obtida através da regularização TRS, figura 5.10.

As diferentes regularizações afetam a forma como ocorre a transição de fase da restauração da simetria quiral, o que para o modelo NJL a baixas temperaturas determina se quantidades como a densidade de número de partículas vai apresentar uma descontinuidade ou não, o que de uma forma ou outra nos diz se a matéria de quarks pode ser estável ou não.

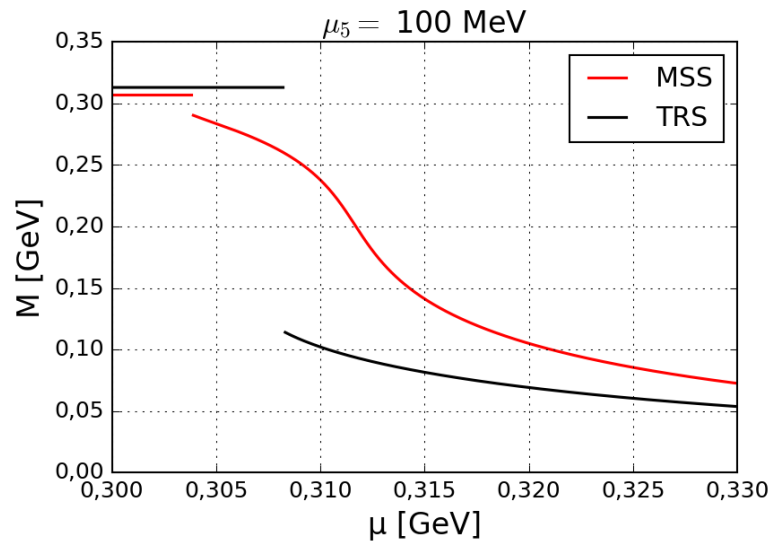


Figura 5.10 – Massa efetiva dos quarks como função do potencial químico com potencial químico quiral fixo $\mu_5 = 100$ MeV, $T = 0$. Parâmetros do set 3. Linha vermelha (preta) representa a regularização MSS (TRS).

A velocidade do som para a matéria simétrica de quarks descrita pelo modelo NJL SU(2) também é afetada pela regularização, a forma como a regularização MSS prejudica a transição de fase de primeira ordem possibilita que a velocidade do som ao quadrado seja positiva para valores de densidade bariônica menores que ρ_0 , figura 5.11.

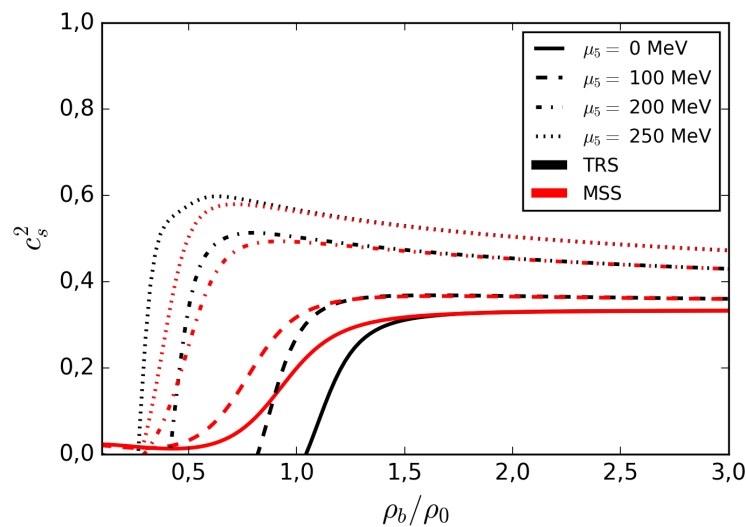


Figura 5.11 – Velocidade do som ao quadrado como função da densidade bariônica dividida por $n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$ para valores constantes de potencial químico quiral μ_5 . Regularização TRS em cor preta e MSS em cor vermelha. Parâmetros do Set 2.

Porém o modelo NJL SU(2) com MSS e potencial químico quiral se mostra ainda mais sensível à escolha da parametrização. Parametrizações que resultam em uma massa de vácuo mais alta, como a do set 1, apresentam um comportamento oposto ao esperado e previsto pela LQCD, o que pode explicar o resultado obtido por Das, Kumar e Mishra

(2019), onde a massa efetiva se apresenta diminuindo como função de μ_5 . Parametriza-

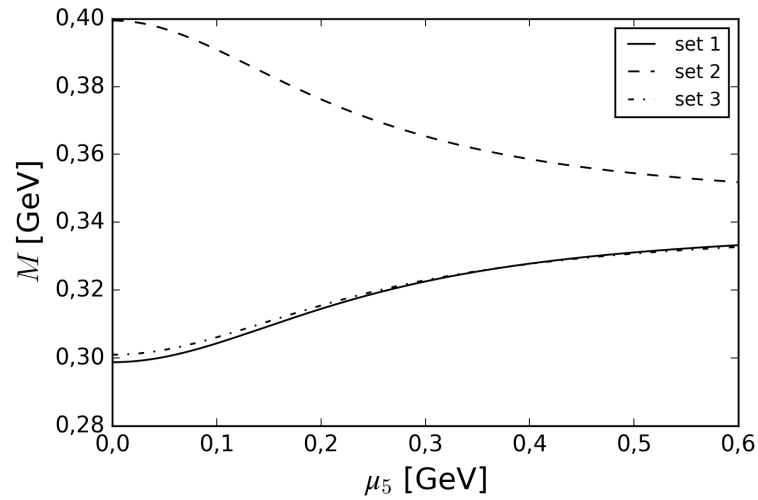


Figura 5.12 – Massas efetivas em função do potencial químico quiral μ_5 para diferentes parametrizações no limite físico. Linha contínua referente ao set 1, tracejada ao set 2 e a traço-ponto ao set 3. Regularização MSS.

ções com valores mais baixos de massa efetiva, como as dos sets 2 e 3, preveem um comportamento qualitativamente similar ao de resultados de rede, onde tanto a massa efetiva como a temperatura crítica aumentam como função do potencial químico quiral, figura 5.12. Portanto o caráter catalisador da quebra dinâmica da simetria quiral no modelo NJL SU(2), desempenhado pelo potencial químico quiral, é dependente da parametrização.

6 DISCUSSÃO FINAL

A física teórica deve se preocupar com os aspectos filosóficos e práticos dos seus objetos de estudo, como conhecer o regime de aplicabilidade de cada modelo e as consequências de diferentes abordagens. Teorias diferentes são válidas, ou mais práticas, em situações diferentes. As diferentes formas de abordar o problema precisam ser entendidas de forma completa e as suas consequências precisam ser consideradas.

A velocidade do som na matéria nuclear depende de diversos fatores e condições diferentes que são fonte de uma rica fenomenologia e se demonstra uma quantidade de crescente interesse, tanto para o entendimento das propriedades da equação de estado da QCD como para o estudo de estrelas densas. As maneiras como ela é afetada por diferentes formas de regularização pode nos ajudar a revelar as limitações que são apresentadas por diferentes abordagens, afinal a relatividade restrita é um dos pilares mais importantes para a física de altas energias. Não apenas como forma de compreender a fenomenologia da QCD mas como uma forma de delimitar a validade de diferentes modelos, abordagens e considerações pressupostas.

Os resultados obtidos nesse trabalho demonstraram o regime de aplicabilidade do modelo NJL SU(2) considerando a aplicação ou não do corte das integrais de meio e considerando duas formas diferentes de regularizar as integrais de vácuo. Evidenciamos que a região de aplicabilidade do modelo no caso sem corte é consideravelmente maior que a região no caso com corte. Demonstramos que o caso com corte apresenta inconsistências termodinâmicas que contradizem a fenomenologia da QCD a altas temperaturas, simulações da LQCD, resultados já conhecidos. Também comparamos as duas formas de regularização das integrais de vácuo do modelo, a abordagem tradicional TRS foi comparada com a regularização MSS, que parte do princípio que as integrais de vácuo não devem possuir nenhum termo de meio e que quaisquer quantidades de meio devam ser separadas algebricamente das quantidades de vácuo. Mostramos que, para o set 3 de parâmetros, a aplicação do MSS converte a transição de fase de primeira ordem em um *cross over*. Bem como a aplicação do potencial químico quiral favorece o surgimento de uma transição de fase de primeira ordem para valores mais baixos de μ para ambas as formas de regularização do vácuo.

6.1 RESULTADOS PRELIMINARES ESTRELAS DE QUARKS COM DESEQUILÍBRIO QUIRAL

O efeito do potencial químico quiral na equação de estado da matéria de quarks com equilíbrio beta e neutralidade de carga ainda está sob revisão. De acordo com meus

resultados preliminares a presença das restrições estelares fazem com que a massa efetiva caia de forma mais abrupta, comportamento que diminui o valor do potencial químico crítico como função de μ_5 , o que pode aumentar o valor da velocidade do som para o regime de densidades baixas, $n_b \sim n_0$, figura 6.2.

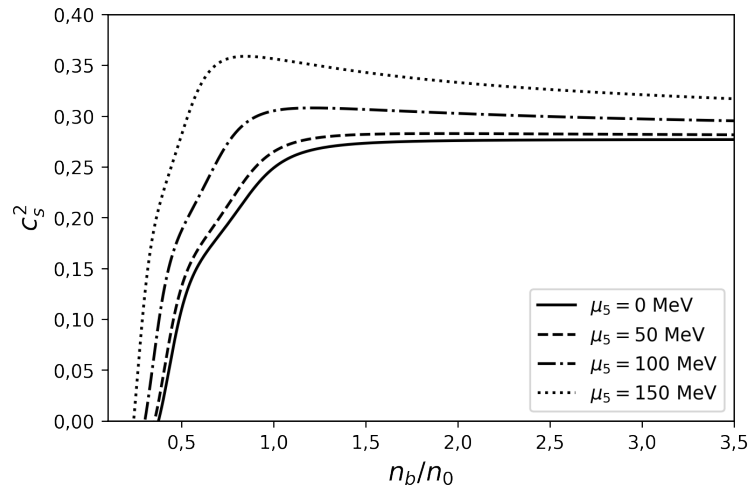


Figura 6.1 – Velocidade do som ao quadrado como função da densidade bariônica dividida por $n_0 = 0,17 \text{ fm}^{-3}$ para valores constantes de potencial químico quiral μ_5 . Regularização TRS. Parâmetros do Set 3.

Esse comportamento da velocidade do som está relacionado com a dureza da equação de estado, portanto o potencial químico quiral tem como efeito tornar a equação de estado mais dura, o que resulta em soluções mais massivas para estrelas de quarks,

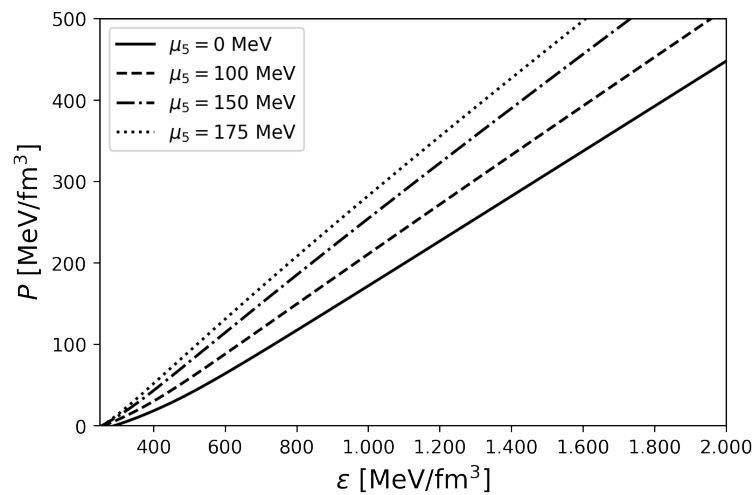


Figura 6.2 – Equação de estado $P(\epsilon)$, para valores constantes de potencial químico quiral. Regularização TRS. Parâmetros do Set 3.

figura 6.3. Resultado oposto ao resultado obtido por Yang (YANG et al., 2020b). Esses resultados são preliminares e ainda precisam ser verificados.

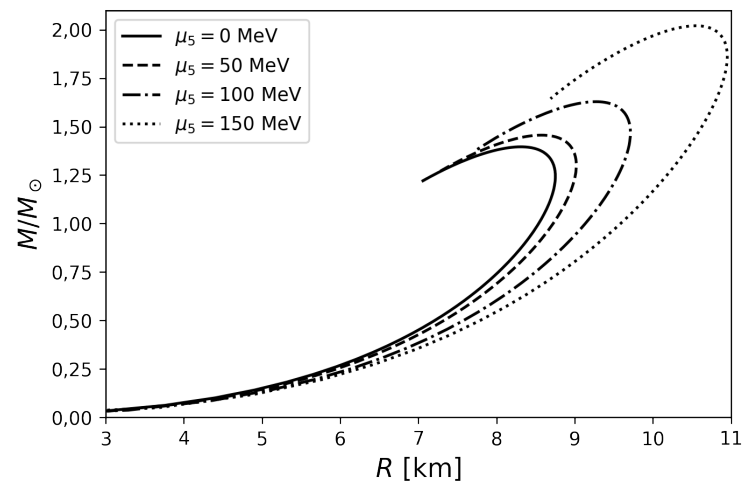


Figura 6.3 – Diagrama Massa \times Raio para estrelas de quarks para valores constantes de potencial químico quiral μ_5 . Regularização TRS. Parâmetros do Set 3.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>.

ABDALLAH, M. et al. Search for the Chiral Magnetic Effect with Isobar Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV by the STAR Collaboration at RHIC. 8. ArXiv: 2109.00131.

ALFORD, M. G.; HAN, S.; PRAKASH, M. Generic conditions for stable hybrid stars. **Phys. Rev. D**, v. 88, n. 8, p. 083013, 2013.

ANTONIADIS, J. et al. **The millisecond pulsar mass distribution: Evidence for bimodality and constraints on the maximum neutron star mass.** 2016.

BAYM, G. et al. From hadrons to quarks in neutron stars: a review. **Rept. Prog. Phys.**, v. 81, n. 5, p. 056902, 2018.

BEDAQUE, P.; STEINER, A. W. Sound velocity bound and neutron stars. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 114, p. 031103, Jan 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.031103>>.

BRAGUTA, V. V. et al. Study of the qcd phase diagram with a nonzero chiral chemical potential. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 93, p. 034509, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.034509>>.

BRAGUTA, V. V.; KOTOV, A. Y. Catalysis of Dynamical Chiral Symmetry Breaking by Chiral Chemical Potential. **Phys. Rev. D**, v. 93, n. 10, p. 105025, 2016.

BRAUN-MUNZINGER, P. et al. Properties of hot and dense matter from relativistic heavy ion collisions. **Phys. Rept.**, v. 621, p. 76–126, 2016.

BUBALLA, M. The problem of matter stability in the nambu-jona-lasinio model. **Nuclear Physics A**, v. 611, n. 4, p. 393 – 408, 1996. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947496003144>>.

_____. Njl-model analysis of dense quark matter. **Physics Reports**, v. 407, n. 4, p. 205–376, 2005. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015730400506X>>.

BURNELL, S. J. B. Petit four*. **Annals of the New York Academy of Sciences**, v. 302, n. 1, p. 685–689, 1977. Disponível em: <<https://nyaspubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1749-6632.1977.tb37085.x>>.

BUSZA, W.; RAJAGOPAL, K.; SCHEE, W. van der. Heavy Ion Collisions: The Big Picture, and the Big Questions. **Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.**, v. 68, p. 339–376, 2018.

DANZER, J. et al. A study of the sign problem for lattice qcd with chemical potential. **Physics Letters B**, v. 682, n. 2, p. 240 – 245, 2009. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269309013239>>.

DAS, A.; KUMAR, D.; MISHRA, H. Chiral susceptibility in the nambu–jona-lasinio model: A wigner function approach. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 100, p. 094030, Nov 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.094030>>.

DEXHEIMER, V. Tabulated neutron star equations of state modelled within the chiral mean field model. **Publications of the Astronomical Society of Australia**, Cambridge University Press, v. 34, 2017.

DUARTE, D. C.; HERNANDEZ-ORTIZ, S.; JEONG, K. S. Excluded-volume model for quarkyonic matter. II. Three-flavor shell-like distribution of baryons in phase space. **Phys. Rev. C**, v. 102, n. 6, p. 065202, 2020.

_____. Excluded-volume model for quarkyonic matter. ii. three-flavor shell-like distribution of baryons in phase space. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 102, p. 065202, Dec 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.102.065202>>.

FARIAS, R. L. S. et al. Thermodynamics of quark matter with a chiral imbalance. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 94, p. 074011, Oct 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.074011>>.

FERREIRA, M.; PEREIRA, R. C.; PROVIDÊNCIA, C. Hybrid stars from a constrained equation of state. **EPJ Web Conf.**, v. 258, p. 07001, 2022.

FILHO, K. de S. O. **Astronomia e astrofísica**. Ed. Universidade/UFRGS, 2000. ISBN 9788570255396. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=lfVwPwAACAAJ>>.

FRAGA, E. S.; KURKELA, A.; VUORINEN, A. Interacting quark matter equation of state for compact stars. **Astrophys. J. Lett.**, v. 781, n. 2, p. L25, 2014.

FUKUSHIMA, K. Chiral effective model with the Polyakov loop. **Phys. Lett. B**, v. 591, p. 277–284, 2004.

FUKUSHIMA, K.; KHARZEEV, D. E.; WARRINGA, H. J. Chiral magnetic effect. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 78, p. 074033, Oct 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.074033>>.

GLENDENNING, N. **Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity**. Springer New York, 2000. (Astronomy and Astrophysics Library). ISBN 9780387989778. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=BBSOgxe2S1AC>>.

GLENDENNING, N. K. **Compact Stars - Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity**. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1997.

HARRIS, C. R. et al. Array programming with NumPy. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 585, n. 7825, p. 357–362, set. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>>.

HEBELER, K. et al. Equation of state and neutron star properties constrained by nuclear physics and observation. **Astrophys. J.**, v. 773, p. 11, 2013.

HUANG, X.-G. Electromagnetic fields and anomalous transports in heavy-ion collisions — A pedagogical review. **Rept. Prog. Phys.**, v. 79, n. 7, p. 076302, 2016.

HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2d graphics environment. **Computing in Science & Engineering**, IEEE COMPUTER SOC, v. 9, n. 3, p. 90–95, 2007.

IVANENKO, D. D.; KURDGELAIDZE, D. F. Hypothesis concerning quark stars. **Astrophysics**, v. 1, p. 251–252, 1965.

JIMÉNEZ, J. C.; FRAGA, E. S. Radial oscillations in neutron stars from QCD. **Phys. Rev. D**, v. 104, n. 1, p. 014002, 2021.

JOHNSON, S. G. **QuadGK.jl: Gauss–Kronrod integration in Julia**. 2013. <<https://github.com/JuliaMath/QuadGK.jl>>.

KAPUSTA, J. I.; GALE, C. **Finite-temperature field theory: Principles and applications**. [S.l.]: Cambridge university press, 2006.

KHARZEEV, D. E. et al. Chiral magnetic and vortical effects in high-energy nuclear collisions—A status report. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 88, p. 1–28, 2016.

KOJO, T. QCD equations of state and speed of sound in neutron stars. **AAPPS Bull.**, v. 31, n. 1, p. 11, 2021.

KURKELA, A.; ROMATSCHKE, P.; VUORINEN, A. Cold Quark Matter. **Phys. Rev. D**, v. 81, p. 105021, 2010.

LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. **Fluid Mechanics: Volume 6**. Elsevier Science, 2013. ISBN 9781483140506. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=CeBbAwAAQBAJ>>.

LI, J. J.; SEDRAKIAN, A.; ALFORD, M. Relativistic hybrid stars with sequential first-order phase transitions and heavy-baryon envelopes. **Phys. Rev. D**, v. 101, n. 6, p. 063022, 2020.

MATSUBARA, T. A new approach to quantum-statistical mechanics. **Progress of theoretical physics**, Oxford University Press, v. 14, n. 4, p. 351–378, 1955.

MILLER, M. C. et al. PSR j00300451 mass and radius from NICER data and implications for the properties of neutron star matter. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 887, n. 1, p. L24, dec 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab50c5>>.

MOGENSEN, P. K. et al. **JuliaNLSolvers/NLsolve.jl: v4.5.1**. Zenodo, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.5281/zenodo.4404703>>.

MOGENSEN, P. K.; RISETH, A. N. Optim: A mathematical optimization package for julia. **Journal of Open Source Software**, The Open Journal, v. 3, n. 24, p. 615, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.21105/joss.00615>>.

NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 122, p. 345–358, Apr 1961. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.122.345>>.

NANDI, R.; CHAR, P. Hybrid stars in the light of GW170817. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 857, n. 1, p. 12, apr 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab78c>>.

OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 55, p. 374–381, Feb 1939. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374>>.

RUGGIERI, M.; CHERNODUB, M. N.; LU, Z.-Y. Topological susceptibility, divergent chiral density and phase diagram of chirally imbalanced QCD medium at finite temperature. **Phys. Rev. D**, v. 102, n. 1, p. 014031, 2020.

SCHUTZ, B. **A First Course in General Relativity**. Cambridge University Press, 2009. ISBN 9781139479004. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=GgRRt7AbdwQC>>.

SHOVKOVY, I. A. **Anomalous plasma: chiral magnetic effect and all that**. 2021.

SNELLINGS, R. Elliptic Flow: A Brief Review. **New J. Phys.**, v. 13, p. 055008, 2011.

SORENSEN, A. et al. Speed of Sound and Baryon Cumulants in Heavy-Ion Collisions. **Phys. Rev. Lett.**, v. 127, n. 4, p. 042303, 2021.

TAKÁTSY, J. et al. Compact star properties from an extended linear sigma model. **Universe**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 5, n. 7, p. 174, 2019.

TAN, H. et al. Extreme matter meets extreme gravity: Ultraheavy neutron stars with phase transitions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 105, p. 023018, Jan 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.023018>>.

TEWS, I. et al. Neutron matter at next-to-next-to-next-to-leading order in chiral effective field theory. **Phys. Rev. Lett.**, v. 110, n. 3, p. 032504, 2013.

TOLMAN, R. C. Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 55, p. 364–373, Feb 1939. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.364>>.

VIRTANEN, P. et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. **Nature Methods**, v. 17, p. 261–272, 2020.

WEBER, F.; NEGREIROS, R.; ROSENFELD, P. Neutron star interiors and the equation of state of superdense matter. In: _____. **Neutron Stars and Pulsars**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 213–245. ISBN 978-3-540-76965-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-76965-1_0>.

WITTEN, E. Cosmic separation of phases. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 30, p. 272–285, Jul 1984. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.30.272>>.

YANG, L.-K.; LUO, X.; ZONG, H.-S. Qcd phase diagram in chiral imbalance with self-consistent mean field approximation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 100, p. 094012, Nov 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.094012>>.

_____. QCD phase diagram in chiral imbalance with self-consistent mean field approximation. **Phys. Rev. D**, v. 100, n. 9, p. 094012, 2019.

YANG, L.-K. et al. A brief review of chiral chemical potential and its physical effects. **Symmetry**, v. 12, n. 12, 2020. ISSN 2073-8994. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2073-8994/12/12/2095>>.

_____. A brief review of chiral chemical potential and its physical effects. **Symmetry**, MDPI AG, v. 12, n. 12, p. 2095, Dec 2020. ISSN 2073-8994. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3390/sym12122095>>.

Zhang, C. M. et al. Study of measured pulsar masses and their possible conclusions. **A&A**, v. 527, p. A83, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015532>>.

ZHAO, J.; WANG, F. Experimental searches for the chiral magnetic effect in heavy-ion collisions. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 107, p. 200–236, 2019.

ZHUANG, P.; HUFNER, J.; KLEVANSKY, S. Thermodynamics of a quark - meson plasma in the Nambu-Jona-Lasinio model. **Nucl. Phys. A**, v. 576, p. 525–552, 1994.

APÊNDICE A – IDENTIDADES TERMODINÂMICAS

As variáveis termodinâmicas podem ser manipuladas de forma simples tratando elas como mudanças de variáveis, a notação para o jacobiano utilizada será

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x \end{vmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Onde o subscrito dos parênteses indica a variável que é mantida constante. Nessa notação, a regra da cadeia pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x', y')} \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}. \quad (\text{A.2})$$

A.1 – VELOCIDADE DO SOM A ENTROPIA CONSTANTE

Assim, podemos ver facilmente que

$$\frac{\partial(P, S)}{\partial(\varepsilon, S)} = \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)_S = c_s^2. \quad (\text{A.3})$$

Usando a regra da cadeia de forma conveniente, podemos escrever

$$\frac{\partial(P, S)}{\partial(\varepsilon, S)} = \frac{\partial(P, S)}{\partial(T, \mu)} \frac{\partial(T, \mu)}{\partial(\varepsilon, S)} = \frac{\frac{\partial(P, S)}{\partial(T, \mu)}}{\frac{\partial(\varepsilon, S)}{\partial(T, \mu)}}. \quad (\text{A.4})$$

Desenvolvendo cada termos independentemente podemos ver que

$$\frac{\partial(P, S)}{\partial(T, \mu)} = s\chi_{\mu T} - n\chi_{TT} \quad (\text{A.5})$$

e que

$$\frac{\partial(\varepsilon, S)}{\partial(T, \mu)} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\mu \chi_{T\mu} - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu}\right)_T \chi_{TT}. \quad (\text{A.6})$$

Onde $\chi_{xy} = \frac{\partial \Omega}{\partial x \partial y}$.

As derivadas parciais da densidade de energia com relação à temperatura e ao potencial químico serão, respectivamente

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_{\mu} = T\chi_{TT} + \mu\chi_{T\mu}, \quad (\text{A.7})$$

e

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu}\right)_T = T\chi_{T\mu} + \mu\chi_{\mu\mu}. \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, obtendo a velocidade do som a entropia constante:

$$c_s^2 = \frac{s\chi_{T\mu} - n\chi_{TT}}{(T\chi_{TT} + \mu\chi_{T\mu})\chi_{T\mu} - (T\chi_{T\mu} + \mu\chi_{\mu\mu})\chi_{TT}} = \frac{s\chi_{T\mu} - n\chi_{TT}}{\mu\chi_{T\mu}\chi_{T\mu} - \mu\chi_{\mu\mu}\chi_{TT}}. \quad (\text{A.9})$$

APÊNDICE B – NOTAÇÃO DE VETORES E MATRIZES

B.1 – AS MATRIZES GAMMA

As matrizes gamma de Pauli são definidas como:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

(B.2)

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

(B.4)

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Onde $\mathbb{I}_{2 \times 2}$ é a matriz identidade 2×2 e as matrizes σ_i são as matrizes sigma de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

O que nos permite escrever as matrizes gamma explicitamente:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

(B.8)

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

(B.10)

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Sendo assim podemos definir o vetor

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} .$$