

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

Bruno Leonardo Schuster

**ANÁLISE NUMÉRICA DA INDENTAÇÃO DE MATERIAIS  
ELASTOPLÁSTICOS**

Santa Maria, RS  
2022

**Bruno Leonardo Schuster**

**ANÁLISE NUMÉRICA DA INDENTAÇÃO DE MATERIAIS ELASTOPLÁSTICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Aeroespacial**.

ORIENTADOR: Prof. Tiago dos Santos

Santa Maria, RS  
2022

---

©2022

Todos os direitos autorais reservados a Bruno Leonardo Schuster. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

End. Eletr.: [schuster.bruno@acad.ufsm.br](mailto:schuster.bruno@acad.ufsm.br)

**Bruno Leonardo Schuster**

**ANÁLISE NUMÉRICA DA INDENTAÇÃO DE MATERIAIS ELASTOPLÁSTICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Aeroespacial**.

**Aprovado em 3 de agosto de 2022:**

---

**Tiago dos Santos, Dr. (UFSM)**  
(Presidente/Orientador)

---

**Cristiano José Scheuer, Dr. (UFSM)**

---

**Rene Quispe Rodriguez, Dr. (UFSM)**

Santa Maria, RS  
2022

## RESUMO

# ANÁLISE NUMÉRICA DA INDENTAÇÃO DE MATERIAIS ELASTOPLÁSTICOS

AUTOR: Bruno Leonardo Schuster

ORIENTADOR: Tiago dos Santos

Esse trabalho tem como objetivo a realização de análises numéricas do processo de indentação de materiais elastoplásticos. As simulações são conduzidas usando o método dos elementos finitos, empregando o programa comercial *Abaqus* e considerando um modelo axissimétrico. O ensaio de indentação é uma importante ferramenta para a caracterização mecânica de materiais de engenharia. Especificamente em aplicações espaciais, a dureza de um material pode ser relacionada à sua resistência ao impacto, o que é uma preocupação pertinente associada ao desenvolvimento de estruturas de proteção. Tendo em vista tais aplicações, esse trabalho realiza um estudo paramétrico do ensaio de indentação de materiais elastoplásticos. Avalia-se a influência de parâmetros chave, como o coeficiente de atrito, o módulo de elasticidade, o endurecimento e anisotropia plástica na resposta mecânica do material indentado. Especificamente, avalia-se a curva de indentação (força vs. profundidade) em carregamento e descarregamento. Além disso, são avaliados os campos de tensões e deformação plástica acumulada próximo à região de indentação. Os resultados numéricos são comparados com dados experimentais disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** Caracterização Mecânica. Materiais Elastoplásticos. Indentação Mecânica. Método dos Elementos Finitos.

## **ABSTRACT**

# **NUMERICAL ANALYSIS OF THE INDENTATION OF ELASTOPLASTIC MATERIALS**

**AUTHOR:** Bruno Leonardo Schuster

**ADVISOR:** Tiago dos Santos

This work aims at performing a numerical analysis on the indentation of elastoplastic materials. The simulations are carried out using the commercial finite element code Abaqus, employing an axisymmetric model. An important tool toward the mechanical characterization of engineering materials, particularly in aerospace applications, is the indentation test, since the material hardness is intimately related to its impact resistance. Which is a relevant concern to the development of protective structures. Reasoning on such applications, this work carries out a parametric study, investigating the influence of key parameters, such as the friction coefficient, the elastic modulus, the material hardening and the plastic anisotropy, on the overall mechanical response. Specifically, the structural behavior in terms of the indentation force vs. indentation depth, in both loading and unloading conditions. Moreover, the stress and the plastic strain fields are also evaluated near the indented region. For validation purposes, the numerical results are compared with experimental data available in the literature.

**Keywords:** Mechanical Characterization. Elastoplastic Materials. Mechanical Indentation. Finite Element Method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Concentração de detritos em órbita baixa representados computacionalmente pelo programa ODPO da NASA .....	11
Figura 1.2 – Discretização da estrutura de uma ponte .....	13
Figura 2.1 – Região de deformação plástica desenvolvida no ensaio de indentação mecânica com um indentador esférico .....	15
Figura 2.2 – Representação esquemática da indentação de Vickers .....	17
Figura 3.1 – Representação do corpo de prova e indentador .....	18
Figura 3.2 – Visualização tridimensional do modelo para os estados (a) deformado e (b) descarregado .....	19
Figura 3.3 – Representação esquemática do modelo computacional .....	20
Figura 4.1 – Malha do modelo computacional para a primeira validação .....	25
Figura 4.2 – Comparação do modelo computacional com Lu, Suresh e Ravichandran (2003) utilizando os parâmetros das Tabelas 3.1 e 4.1: Força vs. profundidade de indentação .....	26
Figura 4.3 – Campo tridimensional da tensão equivalente de von Mises $\sigma_e$ [Pa] obtido para o caso de indentação em análise .....	27
Figura 4.4 – Comparação do modelo computacional com Bhattacharya e Nix (1988) para o alumínio sem endurecimento, utilizando os parâmetros das Tabelas 4.2 e 4.4: Força vs. profundidade de indentação .....	28
Figura 4.5 – Comparação do modelo computacional com Bhattacharya e Nix (1988) para o alumínio com endurecimento, utilizando os parâmetros das Tabelas 4.2 e 4.3: Força vs. profundidade de indentação .....	29
Figura 4.6 – Ajuste das curvas para o cobre OFHC (primeira validação) e alumínio com endurecimento (segunda validação) .....	30
Figura 4.7 – Convergência da dureza dos casos analisados .....	31
Figura 4.8 – Força vs. profundidade para os diferentes valores do coeficiente de atrito $\mu$ .....	32
Figura 4.9 – Conjuntos de nós usados para avaliar o campo de tensão e deformação do modelo .....	33
Figura 4.10 – Empilhamento no corpo de prova no contato com o indentador e deformação gerada nos nós superiores .....	34
Figura 4.11 – Força vs. profundidade para os diferentes níveis de deslocamento aplicados .....	35
Figura 4.12 – Campos de tensão [Pa] e deformação obtidos ( $h = 0,5$ mm) .....	36
Figura 4.13 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada vertical adimensional $\xi$ em função da profundidade. Comparação com o modelo teórico da cavidade em expansão (SANTOS; SRIVASTAVA; RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, 2021) .....	38
Figura 4.14 – Campos na coordenada horizontal adimensional $\delta$ em função da profundidade. Comparação com o modelo teórico da cavidade em expansão (SANTOS; SRIVASTAVA; RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, 2021) .....	40
Figura 4.15 – Endurecimento do material para diferentes valores do coeficiente de endurecimento $n$ (Equação (3.13)) .....	42
Figura 4.16 – Força vs. profundidade para os diferentes valores do coeficiente de endurecimento $n$ .....	42

Figura 4.17 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada vertical adimensional $\xi$ em função do coeficiente de endurecimento $n$ .....	44
Figura 4.18 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada horizontal adimensional $\delta$ em função do coeficiente de endurecimento $n$ .....	46
Figura 4.19 – Força vs. profundidade para os diferentes valores do coeficiente $\eta$ .....	47
Figura 4.20 – Tensão equivalente de von Mises $\sigma_e$ [Pa] para os diferentes níveis de $\eta$ avaliados .....	48
Figura 4.21 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada vertical adimensional $\xi$ em função de $\eta$ .....	50
Figura 4.22 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada horizontal adimensional $\delta$ em função de $\eta$ .....	52
Figura 4.23 – Força vs. profundidade para os diferentes valores de $R_{yy}$ .....	53
Figura 4.24 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada vertical adimensional $\xi$ em função de $R_{yy}$ .....	55
Figura 4.25 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada horizontal adimensional $\delta$ em função de $R_{yy}$ .....	57
Figura A.1 – Ajuste do modelo de endurecimento do cobre OFHC baseado nos dados experimentais de Tanner e McDowell (1999) .....	62
Figura B.1 – Curva de tensão por deformação para a aplicação de uma carga uniaxial	63



## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Parâmetros utilizados para o cobre OFHC .....	23
Tabela 4.1 – Parâmetros utilizados para a primeira validação (Figura 4.2) .....	24
Tabela 4.2 – Parâmetros utilizados para a segunda validação (Figuras 4.4 e 4.5) .....	27
Tabela 4.3 – Dados elasto-plásticos utilizados para o alumínio com endurecimento (Figura 4.5) .....	27
Tabela 4.4 – Dados elasto-plásticos utilizados para o alumínio sem endurecimento (Figura 4.4) .....	28
Tabela 4.5 – Parâmetros utilizados para avaliar o efeito do atrito .....	32
Tabela 4.6 – Dureza de Vickers $HV$ obtida para diferentes valores do coeficiente de atrito $\mu$ .....	32
Tabela 4.7 – Parâmetros utilizados para avaliar os campos .....	35
Tabela 4.8 – Parâmetros utilizados para o material .....	41
Tabela 4.9 – Parâmetros utilizados para avaliar os campos .....	41
Tabela 4.10 – Dureza de Vickers $HV$ obtida para diferentes valores do coeficiente de endurecimento .....	43
Tabela 4.11 – Parâmetros utilizados para o material .....	47
Tabela 4.12 – Dureza de Vickers $HV$ obtida para diferentes valores de $\eta$ .....	48
Tabela 4.13 – Parâmetros utilizados relativos à anisotropia .....	53
Tabela 4.14 – Dureza de Vickers $HV$ obtida para diferentes valores de $R_{yy}$ .....	54
Tabela A.1 – Parâmetros calibrados para o cobre eletrolítico baseados no ajuste dos dados experimentais de Tanner e McDowell (1999) .....	61

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área projetada de indentação
$P$	Carga aplicada
$\mu$	Coeficiente de atrito
$n$	Coeficiente de endurecimento
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\psi$	Constante de ajuste da curva de força
$\delta$	Coordenada adimensional horizontal
$\xi$	Coordenada adimensional vertical
$\Phi$	Critério de escoamento
$\varepsilon$	Deformação
$\varepsilon_0$	Deformação de referência
$\varepsilon^e$	Deformação elástica
$\varepsilon^p$	Deformação plástica
$\bar{\varepsilon}^p$	Deformação plástica acumulada do material
$h$	Deslocamento vertical do indentador
$L$	Dimensão do corpo de prova
$HV$	Dureza de Vickers
$\mathbf{1}$	Matriz identidade
$d_i$	Média das diagonais da impressão de Vickers
$E$	Módulo de elasticidade
$\dot{\lambda}$	Multiplicador plástico
$a$	Raio hidrostático
$\eta$	Razão entre o módulo de elasticidade do material em análise pelo módulo de elasticidade original
$R_{ij}$	Razões anisotrópicas
$\beta$	Semi-ângulo interno do indentador
$\mathbf{d}$	Taxa de deformação do tensor
$\mathbf{d}^e$	Taxa de deformação elástica do tensor

$d^p$	Taxa de deformação plástica do tensor
$\dot{\bar{\sigma}}$	Taxa de tensão objetiva
$\sigma$	Tensão axial
$\tau^0$	Tensão cisalhante de referência
$\sigma_{ij}$	Tensão cisalhante no plano ij
$\bar{\sigma}$	Tensão de escoamento
$\sigma_0$	Tensão de escoamento inicial
$X$	Tensão de escoamento normal na direção x do corpo
$Y$	Tensão de escoamento normal na direção y do corpo
$Z$	Tensão de escoamento normal na direção z do corpo
$T$	Tensão de escoamento em cisalhamento no plano xy do corpo
$S$	Tensão de escoamento em cisalhamento no plano xz do corpo
$R$	Tensão de escoamento em cisalhamento no plano yz do corpo
$\sigma_H$	Tensão equivalente de Hill
$\sigma_e$	Tensão equivalente de von Mises
$\sigma_h$	Tensão hidrostática
$\sigma^0$	Tensão normal de referência
$\sigma_{ii}$	Tensão normal na direção i
$I'$	Tensor deviatório unitário de quarta ordem
$C$	Tensor isotrópico elástico de quarta ordem
$\sigma$	Tensor tensão de Cauchy
$s$	Tensor tensão deviatório

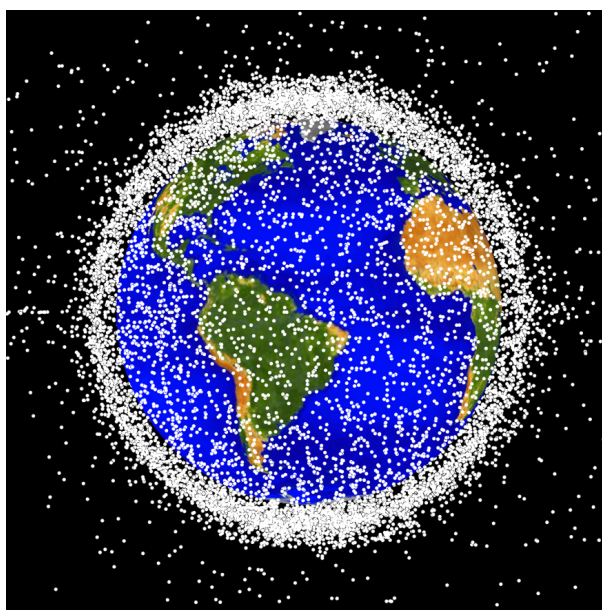
## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>11</b>
1.1	OBJETIVOS .....	14
<b>2</b>	<b>ENSAIOS DE INDENTAÇÃO</b> .....	<b>15</b>
2.1	ENSAIO DE MICRODUREZA POR PENETRAÇÃO EM ESCALA VICKERS ...	16
<b>3</b>	<b>MODELO COMPUTACIONAL</b> .....	<b>18</b>
3.1	MODELO CONSTITUTIVO .....	20
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	<b>24</b>
4.1	VALIDAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL .....	24
4.2	OBTENÇÃO DA DUREZA DO MATERIAL .....	29
4.3	EFEITOS DO ATRITO .....	31
4.4	ANÁLISE DOS CAMPOS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO .....	33
<b>4.4.1</b>	<b>Influência da profundidade de indentação <math>h</math></b> .....	<b>35</b>
4.4.1.1	<i>Campos ao longo da coordenada adimensional vertical <math>\xi</math></i> .....	36
4.4.1.2	<i>Campos de tensão e deformação ao longo da ao longo da coordenada adimensional horizontal <math>\delta</math></i> .....	39
<b>4.4.2</b>	<b>Influência do coeficiente de endurecimento <math>n</math></b> .....	<b>41</b>
4.4.2.1	<i>Campos ao longo da coordenada adimensional vertical <math>\xi</math></i> .....	43
4.4.2.2	<i>Campos ao longo da coordenada adimensional horizontal <math>\delta</math></i> .....	44
<b>4.4.3</b>	<b>Influência do módulo de elasticidade <math>E</math></b> .....	<b>46</b>
4.4.3.1	<i>Campos ao longo da coordenada adimensional vertical <math>\xi</math></i> .....	48
4.4.3.2	<i>Campos ao longo da coordenada adimensional horizontal <math>\delta</math></i> .....	50
<b>4.4.4</b>	<b>Influência da anisotropia plástica</b> .....	<b>52</b>
4.4.4.1	<i>Campos ao longo da coordenada adimensional vertical <math>\xi</math></i> .....	54
4.4.4.2	<i>Campos ao longo da coordenada adimensional horizontal <math>\delta</math></i> .....	55
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>58</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>59</b>
	<b>APÊNDICE A – CALIBRAÇÃO DO MODELO DO COBRE OFHC</b> .....	<b>61</b>
	<b>APÊNDICE B – FUNDAMENTOS DA TEORIA DA PLASTICIDADE</b> .....	<b>63</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A colisão com partículas em ambiente espacial é um problema de grande relevância para o setor aeroespacial, tendo em vista as elevadas velocidades envolvidas. Veículos espaciais que orbitam a terra estão sujeitos à colisões com essas partículas, o que pode danificar os escudos de proteção do sistema e, eventualmente, outros sistemas vitais para o funcionamento do veículo (BASHUROV et al., 1997). A questão vêm se agravando com o passar dos anos, em decorrência da maior atividade humana no espaço, especialmente em LEO (do inglês, *Low Earth Orbit*), ou seja, órbitas baixas, com até 2000 km de altitude (KLINKRAD, 2006). Na Figura 1.1, é mostrada uma representação computacional dos detritos espaciais em órbita baixa (com os tamanhos de detritos fora de escala), realizada pelo programa ODPO (do inglês *Orbital Debris Program Office*) da NASA.

Figura 1.1 – Concentração de detritos em órbita baixa representados computacionalmente pelo programa ODPO da NASA



Fonte: (NASA, 2019)

Nas altitudes baixas, devido ao grande número de sistemas espaciais artificiais, nuvens de detritos ocasionadas por colisões entre estes sistemas são formadas, que podem ocasionar um efeito em cascata de impactos com detritos. Um exemplo de colisão que gerou uma grande nuvem de detritos ocorreu em 10 de fevereiro de 2009, quando o satélite de telecomunicações Norte-americano *Iridium 33*, em operação, foi atingido por um satélite desativado Russo, o *Cosmos 2251*, também de telecomunicações. A nuvem formada é composta por centenas de detritos com mais de 1 cm de tamanho, gerando assim grandes riscos para outros satélites operacionais pelas próximas décadas (KELSO et al., 2009).

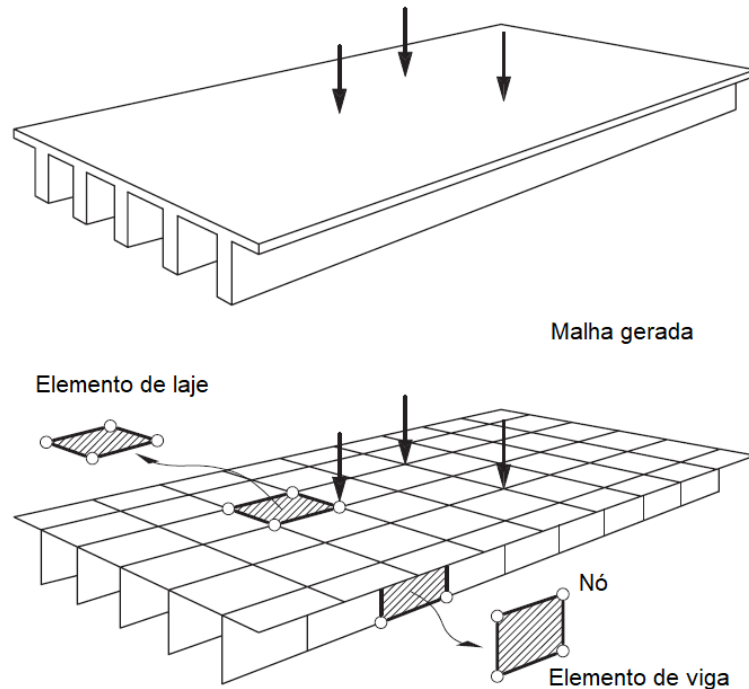
Uma forma de estudar os efeitos de impactos com detritos espaciais é por meio de ensaios de indentação mecânica (MOK; DUFFY, 1964), de forma que o desenvolvimento de materiais e estruturas que suportem impactos possa ser feito. Os ensaios são subdivididos em quase-estáticos, quando a taxa de deformação é baixa, e em dinâmicos, quando maiores velocidades e taxas de deformação são envolvidos.

Os ensaios de indentação mecânica vêm sendo aplicados há várias décadas, e desempenhando assim um importante papel na determinação de propriedades elasto-plásticas dos materiais de engenharia. Ensaios quase-estáticos são amplamente utilizados para a obtenção de propriedades mecânicas dos materiais de engenharia, devido à sua simplicidade e baixo custo (CALLISTER; RETHWISCH, 2006). Como propriedades mecânicas obtidas, os ensaios de indentação normalmente mensuram a dureza dos materiais, que é uma medida da resistência à indentação do material. Além disso, estes podem ser usados de forma indireta para determinar o módulo de elasticidade ou tensão de escoamento, com a análise do formato da curva de força vs. profundidade resultante (LU; SURESH; RAVICHANDRAN, 2003). Uma maior discussão sobre os ensaios de indentação é realizada na seção 2.

Devido à complexidade do ponto de vista físico e matemático do ensaio de indentação, o estudo da mecânica da deformação plástica resultante é, muitas vezes, complexo de ter soluções analíticas. Tal comportamento mecânico desempenha, em muitos casos, uma característica fundamental do material a ser conhecida do ponto de vista da engenharia, para um correto projeto e seleção de materiais para as mais diversas aplicações. Dessa forma, uma alternativa de análise é o uso de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos (MEF), visando uma resposta mais detalhada do comportamento do processo.

O MEF possui como objetivo a solução numérica de um conjunto de equações diferenciais que descrevem algum fenômeno da natureza (OÑATE, 2009), e, portanto, de complexa ou sem solução analítica. O método consiste na discretização de um problema, inicialmente contínuo, em um número finito de elementos, através de formas geométricas simples (SZABÓ; BABUŠKA, 2011). Um exemplo de discretização é mostrada na Figura 1.2, onde uma estrutura de uma ponte é subdividida em um conjunto de elementos, formando uma malha de pontos. Os elementos são de vários tipos, e sua escolha deve ser condizente com o elemento estrutural em análise.

Figura 1.2 – Discretização da estrutura de uma ponte



Fonte: Adaptado de Oñate (2009)

Na literatura, é possível encontrar autores que desenvolveram modelos computacionais para realizar ensaios de indentação mecânica. Bhattacharya e Nix (1988) realizaram simulações utilizando o MEF para ensaios de microindentação mecânica, com o objetivo de determinar o comportamento mecânico de filmes finos, com poucos micrômetros de espessura. Com o trabalho, os autores observaram que foi possível realizar tal estudo, com um bom comportamento resultante da aplicação do MEF.

Lu, Suresh e Ravichandran (2003) desenvolveram uma nova metodologia experimental simples para determinar a sensibilidade à taxa de deformação em ensaios de indentação dinâmica. Os autores utilizaram, em seus ensaios experimentais, o cobre eletrolítico livre de oxigênio (OFHC, do inglês *oxygen-free high thermal conductivity*) comercial, material este que possui uma boa quantidade de dados experimentais disponíveis em outros trabalhos da área. Por fim, o ensaio foi comparado à simulações numéricas pelo MEF, demonstrando resultados adequados.

Durban e Masri (2004) desenvolveram um modelo teórico da expansão dinâmica de cavidades esféricas em meios elastoplásticos. Santos, Srivastava e Rodríguez-Martínez (2021) utilizaram a abordagem de Durban e Masri (2004) para analisar os efeitos combinados de tamanho, inércia e porosidade na indentação de materiais dúcteis. Os resultados teóricos de Santos, Srivastava e Rodríguez-Martínez (2021) são comparados com as simulações desse trabalho para materiais densos em condições quase-estáticas.

## 1.1 OBJETIVOS

Tendo em vista a importância do ensaio de indentação para a caracterização mecânica e projeto de materiais e estruturas mecânicas, esse trabalho tem como objetivo a análise numérica da indentação de materiais elastoplásticos. Para cumprir o objetivo principal, os seguintes objetivos específicos são propostos:

- Desenvolver um modelo de elementos finitos para o ensaio de indentação utilizando o programa comercial *Abaqus*;
- Validar o modelo de elementos finitos desenvolvido com base em dados da literatura;
- Realizar um estudo paramétrico investigando a influência do coeficiente de atrito e de parâmetros elastoplásticos do material
- Comparar os resultados obtidos com análises experimentais e teóricas disponíveis na literatura.

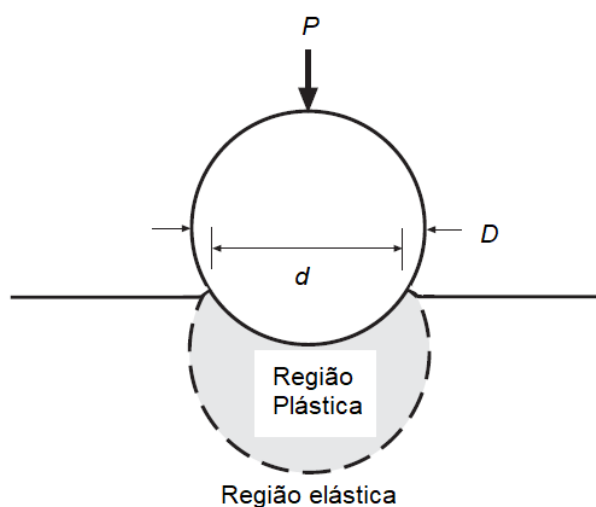


## 2 ENSAIOS DE INDENTAÇÃO

Os ensaios de indentação tem como objetivo a caracterização mecânica do material testado, em especial a dureza, sendo uma medida da resistência à deformação plástica localizada do material (LU; SURESH; RAVICHANDRAN, 2003).

Para realizar um ensaio de indentação, é aplicada uma carga controlada por meio de um indentador, que é forçado contra a superfície do material que deve ser caracterizado. O ensaio produz assim uma impressão de indentação sobre o material, que é resultado da deformação plástica localizada na região de aplicação de carga, como mostrado esquematicamente na Figura 2.1. Nessa figura, em um indentador esférico de diâmetro  $D$  é aplicada uma carga  $P$ , desenvolvendo uma indentação de diâmetro  $d$ . A partir de medidas da área projetada ou profundidade, então, é extraída a dureza do material na escala adequada.

Figura 2.1 – Região de deformação plástica desenvolvida no ensaio de indentação mecânica com um indentador esférico



Fonte: Adaptado de Dowling (2013)

Várias técnicas padronizadas podem ser empregadas em ensaios de indentação, com variações de carga e do tipo de indentador. Os ensaios podem ser classificados quanto à escala do modelo, e exemplos são os ensaios de macroindentação e microindentação. Dentre os ensaios de macroindentação, o mais comum é o de Rockwell, no qual a carga é aplicada em um indentador esférico de aço endurecido ou um indentador cônico de diamante, e a carga é diferente dentre várias escalas definidas (CALLISTER; RETHWISCH, 2006). Para ensaios de microindentação, técnicas como a de Vickers ou Knoop podem ser empregadas. O trabalho aqui desenvolvido é voltado ao ensaio de Vic-

kers, que será detalhado na próxima seção.

A carga aplicada deve ser controlada em termos, além da força e do tempo, da taxa de aplicação, pois esta pode afetar o comportamento do material (DOWLING, 2013). Dessa forma, outra divisão nos ensaios de indentação pode ser feita em relação à essa taxa de deformação. Em ensaios que envolvem elevadas velocidades de aplicação de carga, o teste é considerado dinâmico, e efeitos de inércia do material devem ser levados em consideração. Já quando a taxa de aplicação de carga é baixa, os ensaios são considerados quase-estáticos, sendo mais simples de serem realizados e analisados.

## 2.1 ENSAIO DE MICRODUREZA POR PENETRAÇÃO EM ESCALA VICKERS

Neste tipo de ensaio, indentadores piramidais de diamante são empregados com pequenas cargas e profundidades de penetração. O ensaio possui como uma grande vantagem a possibilidade de cobrir todos os materiais (macios e duros), sem o uso de diferentes escalas (MEYERS; CHAWLA, 2008). A dureza é então medida com a observação do tamanho da indentação. Após o ensaio, as diagonais da impressão são medidas, e, então, a dureza pode ser calculada usando a equação:

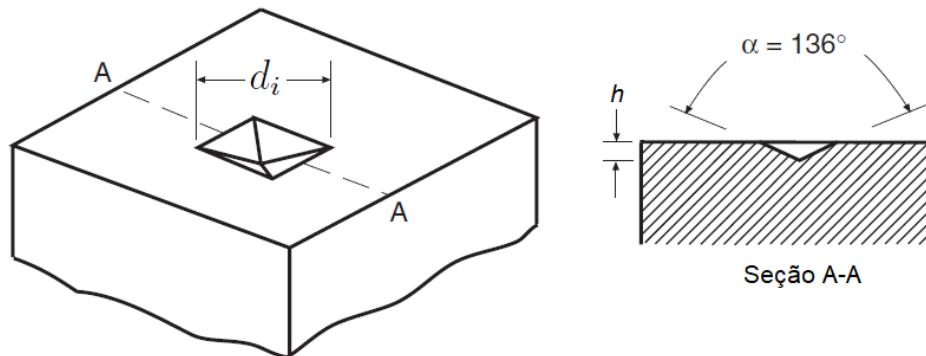
$$HV = 1,854 \left( \frac{P}{d_i^2} \right) \quad [\text{kg/mm}^2] \quad (2.1)$$

onde  $HV$  é a dureza Vickers,  $P$  é a carga aplicada, em kilogramas, e  $d_i$  a média das diagonais da impressão em mm. O indentador de Vickers possui um ângulo interno da pirâmide de  $136^\circ$ , como mostrado na Figura 2.2. Observa-se, entretanto, que um indentador cônico pode ser utilizado de forma equivalente quando a razão área/profundidade é a mesma (JOHNSON, 1970). Dessa forma, como mostrado em Dao et al. (2001), o ângulo interno de um cone equivalente de Vickers é de  $140,6^\circ$ . No ensaio de Vickers, a equação alternativa abaixo pode ser utilizada para medir a dureza do material:

$$HV = 0,927 \left( \frac{P}{A} \right) \quad [\text{kg/mm}^2] \quad (2.2)$$

onde  $A$  é a área projetada de indentação em  $\text{mm}^2$ .

Figura 2.2 – Representação esquemática da indentação de Vickers



Fonte: Adaptado de (DOWLING, 2013)

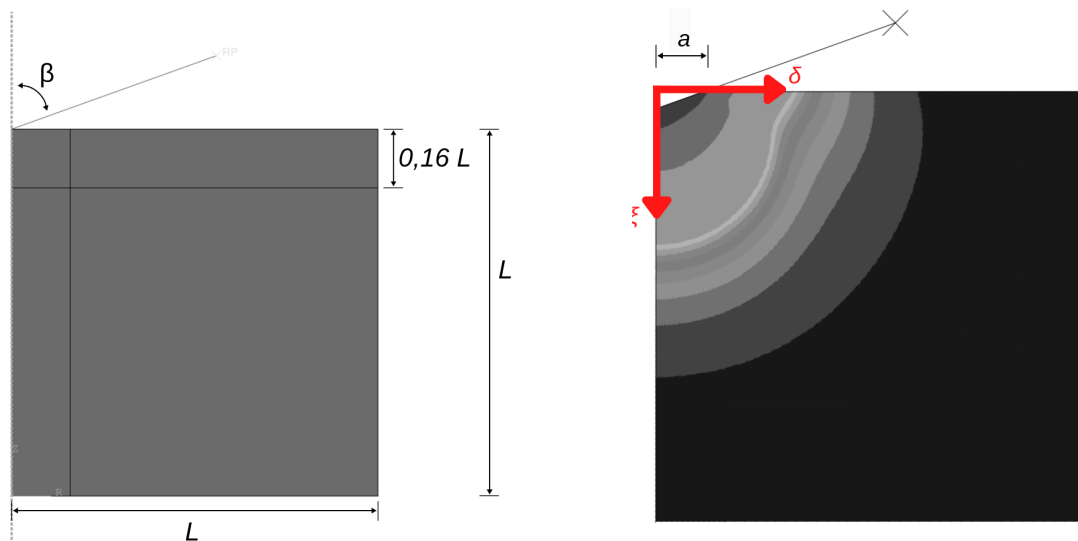
No ensaio de Vickers, é necessário um maior preparo da superfície do corpo de prova em relação a outros ensaios de indentação, exigindo assim um maior tempo para a sua realização. A superfície final deve ser polida e plana, e nesse processo deve ter-se cuidado para que a superfície não sofra trabalho a frio (MEYERS; CHAWLA, 2008). Ainda, a forma final da indentação pode variar um pouco, dependendo do desenvolvimento da região plástica do material, e isso pode ocasionar erros de leitura.

### 3 MODELO COMPUTACIONAL

Neste capítulo, o modelo computacional desenvolvido será apresentado. O modelo computacional de elementos finitos desenvolvido foi implementado utilizando o programa comercial *Abaqus*, com a posterior análise de dados por meio do *MATLAB*.

O modelo foi feito para pequenas taxas de deformação, ou seja, é quase-estático. O indentador, do tipo cônico, foi modelado com elementos rígidos. O corpo de prova é quadrado, com dimensão  $L$ , e o indentador possui um semi-ângulo interno  $\beta$  em relação ao eixo vertical. Um sistema de eixos foi definido para que as análises pudessem ser feitas, definindo as coordenadas verticais  $\xi$  e as horizontais  $\delta$ , ambas adimensionais, parametrizadas em função do valor de  $a$ , que é o raio de contato do indentador com o corpo de prova, como mostrado na Figura 3.1(b).

Figura 3.1 – Representação do corpo de prova e indentador



(a) Estado indeformado

(b) Estado deformado

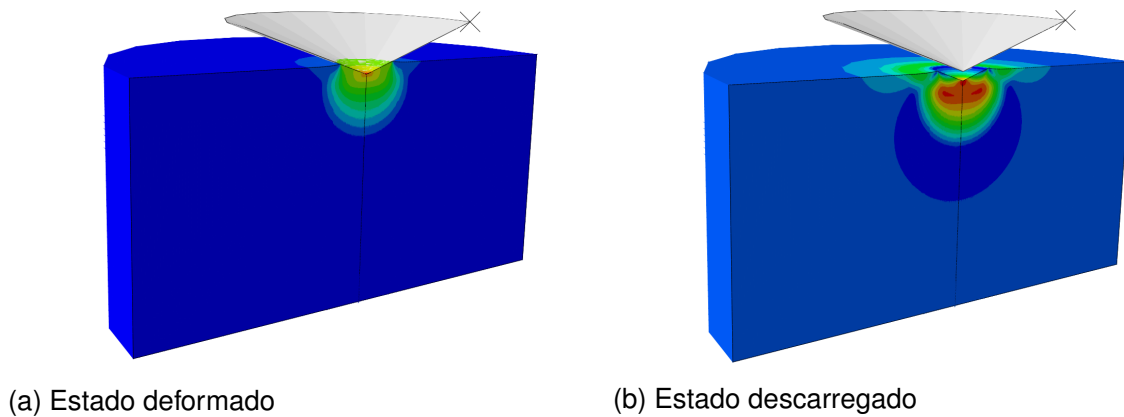
Fonte: Autor.

A discretização do corpo de prova foi feita de forma que a malha pudesse ser refinada em porções logo abaixo do indentador, nas quais os gradientes de tensões são maiores. A malha, por sua vez, foi feita utilizando elementos axissimétricos de 4 nós, do tipo CAX4, de forma que a modelagem pudesse ter redução de tempo de processamento por tratar o problema com corpos de revolução. Uma visualização do modelo é fornecida na Figura 3.3. Esse tipo de elemento pôde ser utilizado devido ao indentador ser cônico, com uma maior discussão realizada na seção 4.1. Aqui, ressalta-se que os elementos do indentador e do corpo de prova devem ter tamanho médio aproximado, para que o contato entre as superfícies seja bem formulado.

Inicialmente, o corpo de prova está em repouso no estado indeformado, com sua

extremidade inferior apoiada, como mostrado na Figura 3.3. Então, o indentedor rígido sofre um deslocamento vertical  $h$  (etapa de carga, levando ao estado deformado) produzindo uma indentação no corpo de prova, Figura 3.2(a), e, então, retorna à sua posição inicial (etapa de descarga, levando ao estado descarregado), Figura 3.2(b).

Figura 3.2 – Visualização tridimensional do modelo para os estados (a) deformado e (b) descarregado

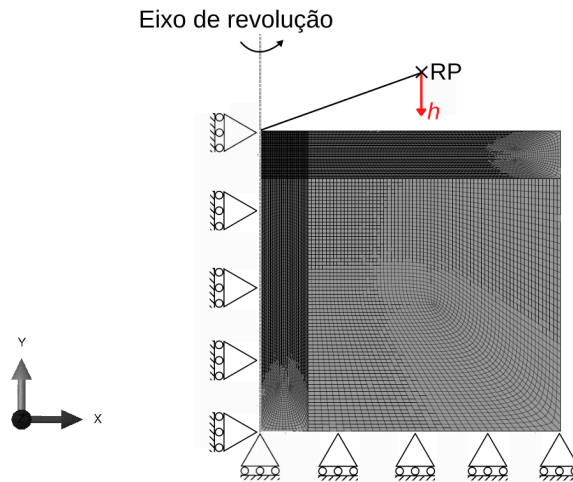


Fonte: Autor.

O contato entre o indentedor e o corpo de prova é do tipo "*sliding interface*" (interface deslizante) entre as superfícies. O programa avalia a distância entre os nós das superfícies durante a simulação, e, quando zerada, há contato e surge uma força de reação no material para que este se mova. O contato entre as superfícies possui um coeficiente de atrito  $\mu$ , valor este que possui pouca influência no modelo de indentação para a obtenção da curva de força vs. profundidade e de dureza, como discutido em Bhattacharya e Nix (1988) e posteriormente confirmado nesse trabalho (ver seção 4.3).

Na Figura 3.3 é mostrado esquematicamente o modelo computacional desenvolvido, com as condições de contorno e cargas, em termos de deslocamento, aplicadas. Na superfície inferior, há um apoio simples, enquanto que no eixo vertical o apoio simples é automaticamente satisfeito pela simetria do problema. É utilizado um *reference point* (RP) para aplicar o deslocamento vertical, que impõe, então, deslocamento em todo o indentedor rígido.

Figura 3.3 – Representação esquemática do modelo computacional



Fonte: Autor.

### 3.1 MODELO CONSTITUTIVO

O modelo constitutivo do material aqui usado descreve como é o comportamento mecânico deste sob deformação elastoplástica. O modelo aqui utilizado será apresentado na presente seção, entretanto uma maior discussão à respeito da teoria de plasticidade utilizada é descrita no apêndice B. Será considerado que o material utilizado obedece o critério de escoamento de Hill (1948), dado por:

$$\Phi = \sigma_H - \bar{\sigma}$$

onde  $\sigma_H$  é a tensão equivalente de Hill,  $\bar{\sigma}$  é a tensão de escoamento do material e  $\Phi$  é a função de escoamento. O critério de Hill é utilizado para representar o comportamento de materiais dúcteis plasticamente anisotrópicos. Assume-se que o material ortotrópico possui 3 planos de simetria. Tal hipótese ocorre em diversas aplicações práticas, e cita-se como exemplo a fabricação de chapas finas através de laminação (BANABIC, 2010), nas quais os eixos anisotrópicos são formados pelas direções de rolagem, normal e transversal ao plano. Considerando eixos de simetria cartesianos  $xyz$ , a tensão equivalente de Hill  $\sigma_H$  é definida como:

$$\sigma_H = \sqrt{F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2} \quad (3.1)$$

onde  $F, G, H, L, M$  e  $N$  são os parâmetros anisotrópicos que devem ser calibrados para o material em questão. Ainda,  $\sigma_{ii}$  são as tensões normais e  $\sigma_{ij}$ ,  $i \neq j$ , as tensões cisalhan-

tes. Os parâmetros anisotrópicos podem ser obtidos pelas Equações (3.2) - (3.5):

$$F = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{yy}^2} + \frac{1}{R_{zz}^2} - \frac{1}{R_{xx}^2} \right) \quad (3.2)$$

$$G = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{zz}^2} + \frac{1}{R_{xx}^2} - \frac{1}{R_{yy}^2} \right) \quad (3.3)$$

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{xx}^2} + \frac{1}{R_{yy}^2} - \frac{1}{R_{zz}^2} \right) \quad (3.4)$$

$$L = \frac{3}{2R_{yz}^2}; \quad M = \frac{3}{2R_{xz}^2}; \quad N = \frac{3}{2R_{xy}^2} \quad (3.5)$$

onde os parâmetros  $R_{ij}$  definem as seguintes razões:

$$R_{xx} = \frac{X}{\sigma^0}; \quad R_{yy} = \frac{Y}{\sigma^0}; \quad R_{zz} = \frac{Z}{\sigma^0}; \quad R_{xy} = \frac{T}{\tau^0}; \quad R_{xz} = \frac{S}{\tau^0}; \quad R_{yz} = \frac{R}{\tau^0} \quad (3.6)$$

sendo,  $X$ ,  $Y$ , e  $Z$  as tensões de escoamento nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $T$ ,  $S$  e  $R$  as tensões de escoamento em cisalhamento nos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ . Além disso,  $\sigma^0$  e  $\tau^0$  são tensões de escoamento de referência, relacionadas por:

$$\tau^0 = \frac{\sigma^0}{\sqrt{3}} \quad (3.7)$$

O comportamento isotrópico, descrito pelo critério de von Mises, é recuperado quando:

$$R_{xx} = R_{yy} = R_{zz} = R_{xy} = R_{xz} = R_{yz} \equiv 1 \quad (3.8)$$

O comportamento transversalmente isotrópico, em torno do eixo  $y$ , é obtido quando:

$$R_{xx} = R_{zz} \equiv 1; \quad R_{xy} = R_{yz} \equiv 1 \quad (3.9)$$

Dessa forma, as seguintes relações são observadas:

$$F = H = \frac{1}{2R_{yy}^2}; \quad G = \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{R_{yy}^2} \right) \quad (3.10)$$

Além disso, o parâmetro  $M$  deve obedecer a relação (HILL, 1948):

$$M = F + 2G = 2 - \frac{1}{2R_{yy}^2} \quad (3.11)$$

Considerando as Equações (3.5) e (3.11), é obtida a relação abaixo, que relaciona

$R_{xz}$  com o valor de  $R_{yy}$  escolhido:

$$R_{xz} = \sqrt{\frac{3}{2} \left( 2 - \frac{1}{2R_{yy}^2} \right)^{-1}} \quad (3.12)$$

No presente trabalho, o estudo é voltado para ensaios quase-estáticos, e, portanto, a taxa de deformação não possui influência no material. Dessa forma, adota-se uma lei de endurecimento independente da taxa de deformação:

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \left( 1 + \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\varepsilon_0} \right)^n \quad (3.13)$$

onde  $n$  é o coeficiente de endurecimento,  $\bar{\varepsilon}^p$  é a deformação plástica acumulada e  $\varepsilon_0$  é uma deformação de referência. O material utilizado é considerado elasto-plástico, de forma que o tensor de taxa de deformação  $\mathbf{d}$  pode ser decomposto nas suas parcelas elástica ( $\mathbf{d}^e$ ) e plástica ( $\mathbf{d}^p$ ):

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$$

A regra elástica é:

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{d}^e = \mathbf{C} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p)$$

onde  $\check{\boldsymbol{\sigma}}$  é uma taxa objetiva do tensor de tensões de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\mathbf{C}$  é o tensor isotrópico elástico de quarta ordem, dado por:

$$\mathbf{C} = \left( \frac{E}{1 + \nu} \right) \mathbf{I}' + \left[ \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \right] \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\mathbf{I}'$  é o tensor deviatório unitário de quarta ordem e  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade de segunda ordem. Ainda, a taxa de deformação plástica é dada pela lei associativa:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

onde  $\dot{\lambda}$  é um multiplicador plástico, respeitando as condições de carregamento e descarregamento:

$$\dot{\lambda} \geq 0; \quad \Phi \leq 0; \quad \dot{\lambda} \Phi = 0$$

e a condição de consistência:

$$\dot{\lambda} \dot{\Phi} = 0 \quad (3.14)$$

Para maiores detalhes da teoria da plasticidade aqui mostrada, ver o Apêndice B. O



material base utilizado para o desenvolvimento do trabalho foi o cobre OFHC, e a calibração do modelo é mostrada no Apêndice A. Os parâmetros obtidos no ajuste, juntamente com o módulo de elasticidade  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ , são mostrados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Parâmetros utilizados para o cobre OFHC

$\sigma_0$ [MPa]	$\varepsilon_0$	$n$	$E$ [GPa]	$\nu$
302	0,44	0,21	116	0,31

Fonte: Autor.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesse capítulo, os resultados provenientes de diversas simulações do modelo computacional serão mostrados e, então, discutidos. Inicialmente, na seção 4.1, o modelo será validado com base em trabalhos disponíveis na literatura, onde são reportados ensaios experimentais e simulações. Na seção 4.2, uma forma de obtenção da dureza a partir dos resultados é mostrada. Na seção 4.3, os efeitos do atrito no modelo serão discutidos. Por fim, na seção 4.4, os campos de tensão e deformação serão avaliados, considerando variações: na profundidade de aplicação de carga  $h$  (seção 4.4.1); no coeficiente de endurecimento  $n$  (seção 4.4.2); no módulo de elasticidade  $E$  (seção 4.4.3) e no parâmetro anisotrópico  $R_{yy}$  do material (seção 4.4.4). Na seção 4.4.1, será também feita uma comparação com o modelo teórico de Santos, Srivastava e Rodríguez-Martínez (2021).

As simulações serão realizadas, com exceção da análise de anisotropia realizada na seção 4.4.4, considerando materiais isotrópicos, ou seja, com as razões anisotrópicas  $R_{ij}$  definidas pela Equação (3.8). Para a análise da anisotropia, será considerado um material transversalmente isotrópico. Nesse caso, a influência do parâmetro  $R_{yy}$  será avaliada.

### 4.1 VALIDAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL

Os estudos experimentais e numéricos desenvolvidos por Lu, Suresh e Ravichandran (2003) são usados para a validação do modelo computacional. Diferentemente do que foi realizado neste trabalho, Lu, Suresh e Ravichandran (2003) utilizaram o programa de elementos finitos *LS-DYNA*. O material utilizado no artigo foi o cobre OFHC, para o qual os autores utilizaram um modelo constitutivo com dependência linear à taxa de deformação. Entretanto, como o modelo desenvolvido neste trabalho é quase-estático, o modelo constitutivo adotado é o mostrado na seção 3.1, com os parâmetros do material mostrados na Tabela 3.1. Os parâmetros do modelo utilizados aqui são mostrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parâmetros utilizados para a primeira validação (Figura 4.2)

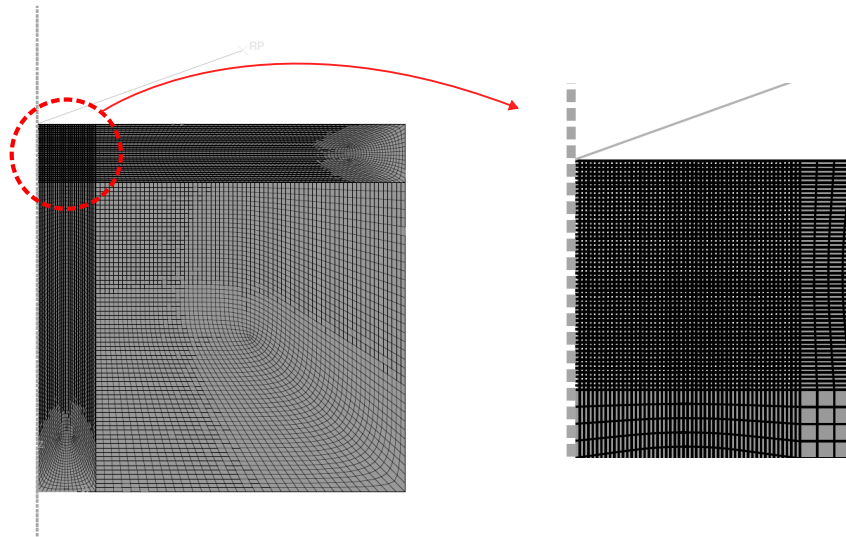
$h$ [mm]	$L$ [mm]	$\beta$ [deg]	$\mu$
$\approx 1$	25	70,3	0,05

Fonte: Autor.

O ângulo foi definido para que o ensaio seja equivalente à indentação de Vickers e Berkovich (ver seção 2), de forma que um ensaio que seria tridimensional, decorrente da geometria piramidal do indentador, é reduzido para um problema axissimétrico, com um

indentador cônico. A malha final do modelo, que pode ser observada na Figura 4.1, foi feita através de uma análise de convergência. Na porção mais refinada o tamanho médio dos elementos é de  $75 \mu\text{m}$ , aumentando de tamanho em porções mais afastadas do centro, e, no total, foram utilizados aproximadamente 14500 elementos CAX4.

Figura 4.1 – Malha do modelo computacional para a primeira validação

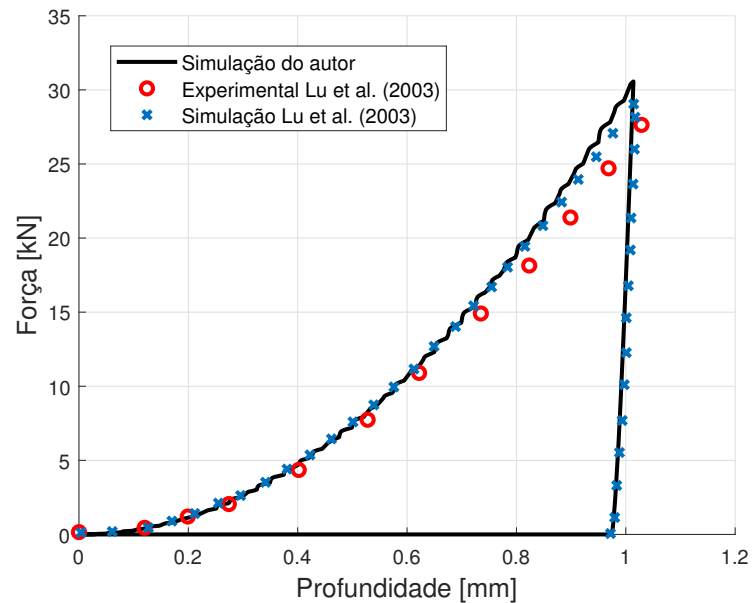


Fonte: Autor.

A simulação foi realizada e os dados de força vs. profundidade de indentação do modelo foram extraídos<sup>1</sup>. Os resultados do ensaio podem ser observados na Figura 4.2, com uma comparação com o que é mostrado por Lu, Suresh e Ravichandran (2003). Observou-se uma boa correlação entre os resultados obtidos e os dados da referência. Além disso, a boa correspondência com a curva experimental no carregamento mostra que não há apenas sentido numérico, mas também sentido físico no modelo, embasando os demais resultados que podem ser retirados da simulação. Observa-se, entretanto, que os dados experimentais mostrados no artigo foram apenas para o carregamento, de forma que o descarregamento deve ser melhor investigado. Na Figura 4.2, é possível observar as fases de carregamento e descarregamento simuladas. Durante o carregamento, a força aumenta não linearmente com a profundidade de indentação, chegando a um valor de aproximadamente 30 kN para  $h = 1 \text{ mm}$ . Durante a descarga, observa-se o retorno elástico do material, onde uma indentação permanente de aproximadamente  $h = 0,97 \text{ mm}$  é gerada.

<sup>1</sup>Em ensaios reais, a força é a variável de entrada do ensaio, e não de saída. No presente trabalho, entretanto, a carga foi aplicada em termos da profundidade, o que é possível em simulações computacionais.

Figura 4.2 – Comparação do modelo computacional com Lu, Suresh e Ravichandran (2003) utilizando os parâmetros das Tabelas 3.1 e 4.1: Força vs. profundidade de indentação

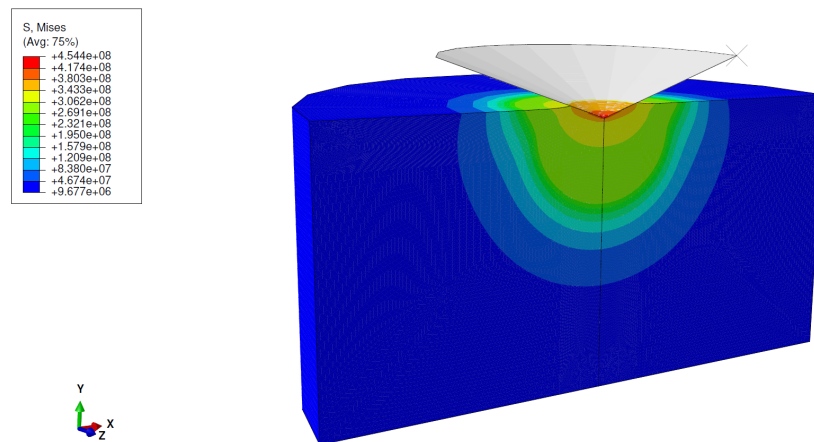


Fonte: Autor.

Ainda, é possível calcular a dureza de Vickers  $HV$  resultante da simulação computacional. O método utilizado para a obtenção da dureza será discutido na seção 4.2. Para o cobre OFHC calibrado, foi obtida uma dureza Vickers  $HV$  de, aproximadamente, 114,74 kg/mm<sup>2</sup>.

Como mostrado na seção 3, foram utilizados elementos axissimétricos, e dessa forma, estados tridimensionais são obtidos utilizando um modelo bidimensional nas simulações. Como exemplo, para melhor visualização, na Figura 4.3 é mostrado o campo tridimensional da tensão equivalente de von Mises  $\sigma_e$  do caso em análise, após realizar uma revolução de 180° em torno do eixo vertical  $y$ .

Figura 4.3 – Campo tridimensional da tensão equivalente de von Mises  $\sigma_e$  [Pa] obtido para o caso de indentação em análise



Fonte: Autor.

Uma segunda validação foi realizada, utilizando os resultados das simulações de Bhattacharya e Nix (1988), no qual um modelo computacional de nanoindentação foi desenvolvido. Os parâmetros que foram utilizados para a segunda validação são mostrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Parâmetros utilizados para a segunda validação (Figuras 4.4 e 4.5)

$h$ [nm]	$L$ [nm]	$\beta$ [deg]	$\mu$
$\approx 250$	6250	68	0,1

Fonte: Autor.

Em Bhattacharya e Nix (1988), foram realizadas simulações para o alumínio sem e com endurecimento. Para o alumínio com endurecimento, foi utilizada a lei de endurecimento descrita na seção 3.1. Os dados elasto-plásticos utilizados para realizar o ensaio do alumínio são mostrados na Tabela 4.3. Para o alumínio sem endurecimento, o coeficiente de endurecimento  $n$  é nulo, e a Tabela 4.4 é utilizada. Nesse caso, a malha utilizada contém aproximadamente 37000 elementos CAX4.

Tabela 4.3 – Dados elasto-plásticos utilizados para o alumínio com endurecimento (Figura 4.5)

$\sigma_0$ [MPa]	$\varepsilon_0$	$n$	$E$ [GPa]	$\nu$
485	3,322	1	75,9	0,33

Fonte: Autor.

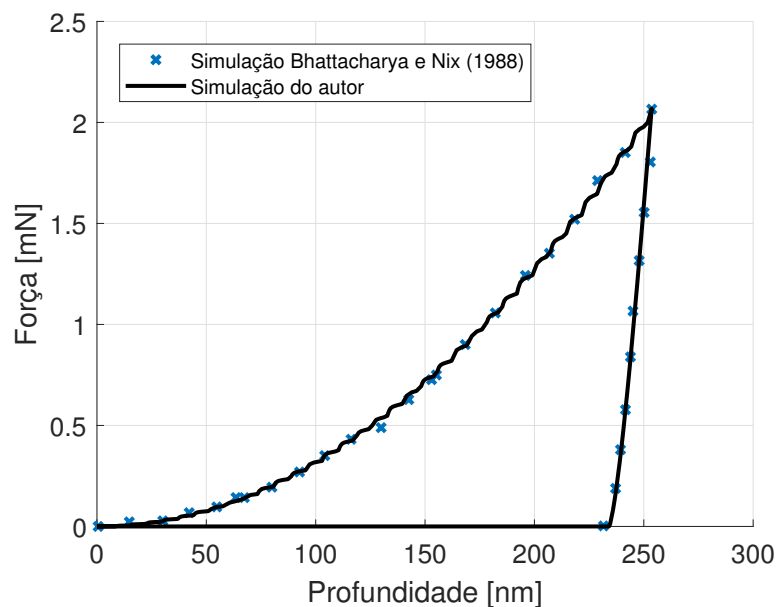
Tabela 4.4 – Dados elasto-plásticos utilizados para o alumínio sem endurecimento (Figura 4.4)

$\sigma_0$ [MPa]	$\varepsilon_0$	$n$	$E$ [GPa]	$\nu$
485	3,322	0	75,9	0,33

Fonte: Autor.

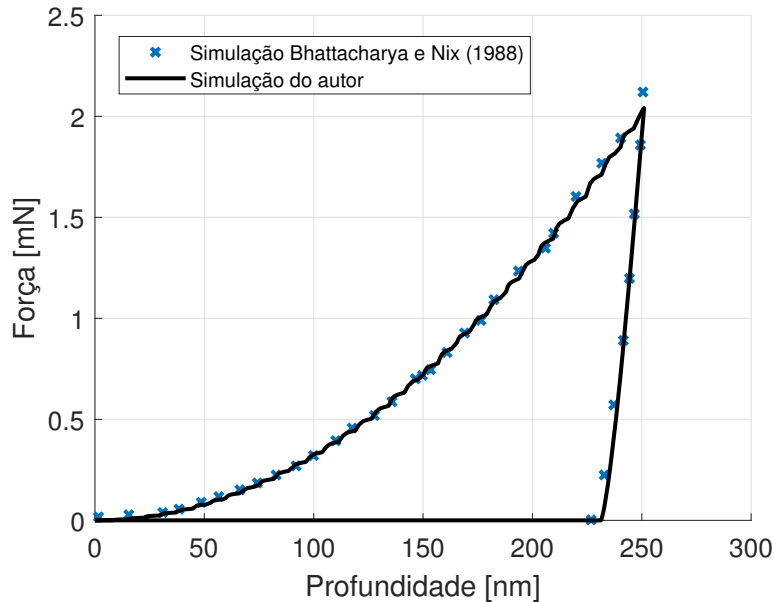
Novamente, o ensaio foi realizado computacionalmente e os dados de força vs. profundidade de indentação foram extraídos. A comparação dos dados obtidos pelo autor com os dados computacionais de Bhattacharya e Nix (1988) podem ser observados nas Figuras 4.4 e 4.5, para o alumínio sem e com endurecimento, respectivamente. Novamente, foi observada boa similaridade de resultados, embasando assim novamente o modelo computacional aqui desenvolvido. Ainda, observa-se, que, nesse caso, o endurecimento não produziu mudanças significativas nos resultados. Em ambas as simulações, uma força de pouco mais de 2 mN foi atingida para  $h \approx 250$  nm, mostrando as baixas cargas envolvidas em ensaios de nanoindentação. Além disso, em ambos os casos, durante o retorno elástico é observada uma indentação permanente de aproximadamente  $h = 230$  nm.

Figura 4.4 – Comparação do modelo computacional com Bhattacharya e Nix (1988) para o alumínio sem endurecimento, utilizando os parâmetros das Tabelas 4.2 e 4.4: Força vs. profundidade de indentação



Fonte: Autor.

Figura 4.5 – Comparação do modelo computacional com Bhattacharya e Nix (1988) para o alumínio com endurecimento, utilizando os parâmetros das Tabelas 4.2 e 4.3: Força vs. profundidade de indentação



Fonte: Autor.

## 4.2 OBTENÇÃO DA DUREZA DO MATERIAL

Uma das principais características que o modelo computacional pode fornecer é a dureza do material. O trabalho aqui desenvolvido é voltado ao ensaio de Vickers, cuja dureza é obtida pela Equação (2.2). Dessa forma, nota-se que a dureza de Vickers é diretamente proporcional à razão entre a força aplicada e a área projetada de indentação. Foram observadas oscilações nas curvas de força vs. profundidade obtidas (observar Figura 4.2), e, dessa forma, também ocorrem oscilações na medida da dureza do material. Essas oscilações já foram observadas por outros autores, sendo de origem computacional, ocorrendo pelas descontinuidades de contato entre os nós do indentador e do corpo de prova (BHATTACHARYA; NIX, 1988).

Para obter, então, um valor mais refinado da dureza do material é apresentado um método, no qual é feito o ajuste de uma curva aos pontos de força vs. profundidade obtidos. Pela Equação (2.2), e considerando a geometria cônica do indentador, é possível equacionar a força em função da profundidade aplicada. Através de uma análise trigonométrica simples da área projetada do indentador em função da profundidade  $h$  aplicada, é

obtida a equação:

$$P = \frac{HV\pi(\tan\beta)^2}{0,927}h^2 \quad (4.1)$$

Dessa forma, é observado que a relação entre força e profundidade tem formato quadrático:

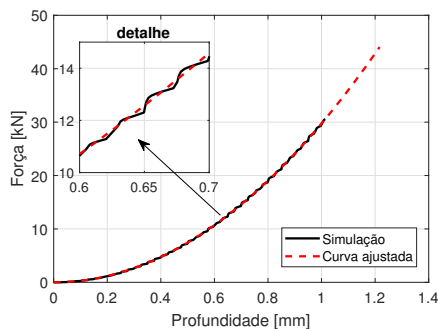
$$P(h) = \psi h^2 \quad (4.2)$$

onde  $\psi$  é uma constante que calibra a equação de força, de forma que:

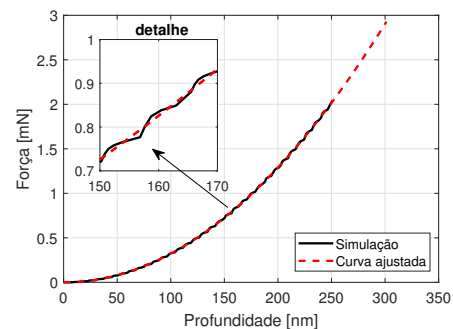
$$HV = \frac{0,927\psi}{\pi(\tan\beta)^2} \quad (4.3)$$

Dessa forma, através da constante  $\psi$ , é possível representar a relação  $HV$  vs.  $h$  de uma forma mais suave, contornando oscilações numéricas. É ressaltado, entretanto, que a equação desenvolvida desconsidera os efeitos do empilhamento no contato com o indentador, que serão discutidos na seção 4.4. Apesar disso, pouca influência na área projetada é esperada, decorrente do efeito ser relativamente pequeno. A constante  $\psi$  foi calibrada através de um ajuste de curva pelo método dos mínimos quadrados em uma rotina no *MATLAB*, e são mostradas as curvas ajustadas para dois casos das simulações de validação apresentadas na seção 4.1. O ajuste pode ser observado na Figura 4.6.

Figura 4.6 – Ajuste das curvas para o cobre OFHC (primeira validação) e alumínio com endurecimento (segunda validação)



(a) Ajuste para o ensaio do cobre OFHC (primeira validação)



(b) Ajuste para o ensaio do alumínio com endurecimento (segunda validação)

Fonte: Autor.

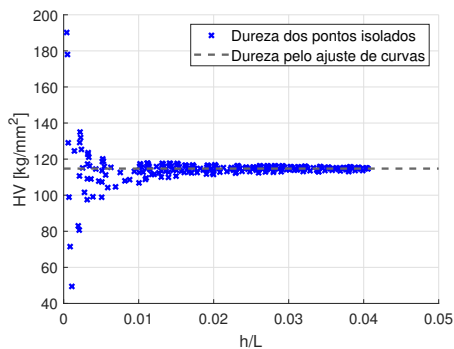
Os valores obtidos da constante foram  $\psi = 29,76 \cdot 10^9$  para o caso do cobre OFHC e  $\psi = 32,45 \cdot 10^9$  para o alumínio com endurecimento, resultando em uma dureza de Vickers de  $HV = 114,74 \text{ kg/mm}^2$  ( $HV/\sigma_0 \approx 3,73$ ) e  $HV = 159,34 \text{ kg/mm}^2$  ( $HV/\sigma_0 \approx 3,22$ ), respectivamente.

Outro importante efeito foi ainda observado para a obtenção da dureza do material, onde é necessária uma aplicação de uma profundidade mínima para que a dureza atinja

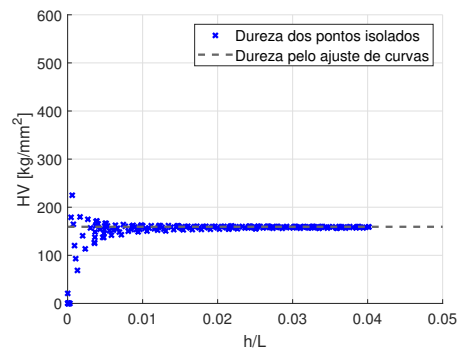


um valor estável. Para isso, os pontos isolados de força vs. profundidade nas curvas de carga foram avaliados, de forma que para cada um dos pontos a dureza resultante fosse calculada. Os resultados foram comparados com a dureza obtida pelo método de ajuste de curvas, e foram dispostos em função da profundidade normalizada em relação ao tamanho do corpo de prova (dimensão  $L$ ). Os resultados são mostrados na Figura 4.7. Observe-se que, para baixas profundidades de aplicação, há grandes variações na medição da dureza do material. Para resultados mais precisos, em ambos os casos foi necessária a aplicação de um deslocamento de, pelo menos, aproximadamente 1% do tamanho do corpo de prova. Ainda, é observado que a convergência do segundo ensaio ocorreu para valores de profundidade menores, o que pode ser explicado pela malha mais refinada que foi utilizada na segunda validação (ver seção 4.1).

Figura 4.7 – Convergência da dureza dos casos analisados



(a) Convergência para o ensaio do cobre OFHC (primeira validação)



(b) Convergência para o ensaio do alumínio com endurecimento (segunda validação)

Fonte: Autor.

### 4.3 EFEITOS DO ATRITO

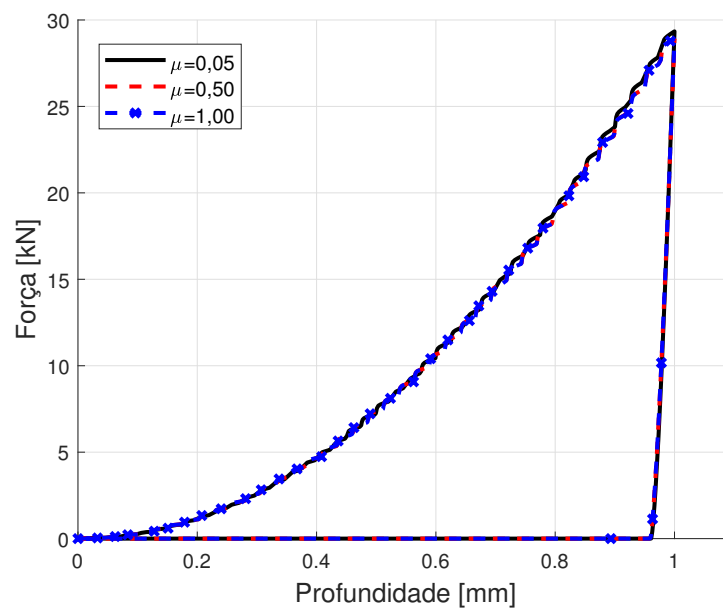
Como já mencionado na seção 3, o contato entre os corpos é do tipo interface deslizante, com coeficiente de atrito  $\mu$ . Os efeitos deste coeficiente no modelo computacional foram avaliados na obtenção da dureza do material. Para isso, foram utilizados 3 valores diferentes para o coeficiente de atrito:  $\mu = 0,05$ ,  $\mu = 0,50$  e  $\mu = 1,00$ . O material utilizado foi o cobre OFHC, com parâmetros elasto-plásticos definidos na Tabela 3.1. Os demais parâmetros utilizados para o modelo são mostrados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Parâmetros utilizados para avaliar o efeito do atrito

$h$ [mm]	$L$ [mm]	$\beta$ [deg]	$\mu$
1	25	70,3	0,05; 0,50; 1,00

Fonte: Autor.

O gráfico de força vs. profundidade obtido para os diferentes níveis do coeficiente de atrito é mostrado na Figura 4.8. Observa-se que, como reportado por Bhattacharya e Nix (1988), o coeficiente de atrito possui pouca influência na resposta de força vs. profundidade do processo de indentação computacional. Do ponto de vista físico e experimental, o efeito deve ser melhor avaliado. Portanto, pouca diferença nos valores de dureza também é observada. Os valores obtidos para a dureza de Vickers  $HV$  do cobre são mostrados na Tabela 4.6.

Figura 4.8 – Força vs. profundidade para os diferentes valores do coeficiente de atrito  $\mu$ 

Fonte: Autor.

Tabela 4.6 – Dureza de Vickers  $HV$  obtida para diferentes valores do coeficiente de atrito  $\mu$ 

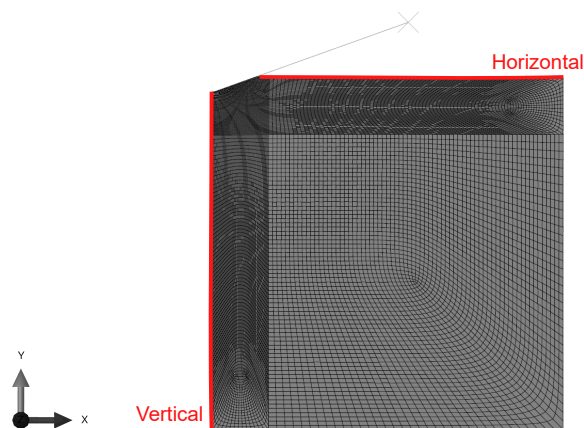
$\mu$	$HV$ resultante [ $\text{kg}/\text{mm}^2$ ]
0,05	114,69
0,50	113,03
1,00	113,05

Fonte: Autor.

#### 4.4 ANÁLISE DOS CAMPOS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Importantes resultados do modelo, para avaliar o desenvolvimento elasto-plástico do material, podem ser obtidos pela análise dos campos de tensão e de deformação próximos à região indentada. Para analisar tais campos, foram extraídos os resultados para dois diferentes conjuntos de nós (caminhos) do modelo: caminho horizontal, representando aproximadamente a coordenada  $\delta$  do modelo, e o caminho vertical, representando aproximadamente a coordenada  $\xi$  do modelo (ver Figuras 3.1(b) e 4.9)

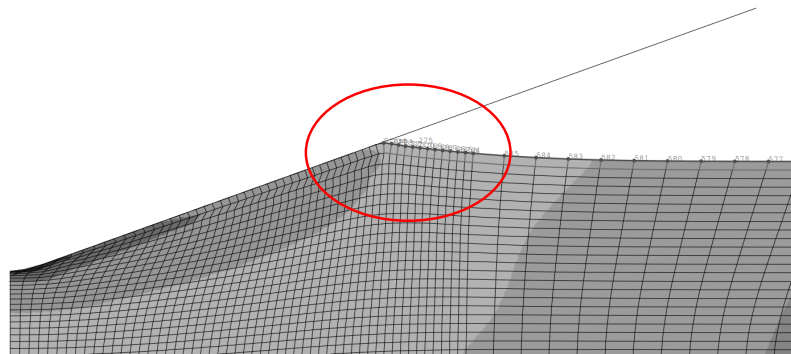
Figura 4.9 – Conjuntos de nós usados para avaliar o campo de tensão e deformação do modelo



Fonte: Autor.

Os dados no sentido horizontal são extraídos a partir do primeiro nó sem contato com o indentador, assim como mostrado na Figura 4.10. Observa-se, ainda, que um empilhamento é formado no corpo de prova, na região de contato com o indentador. Ainda, alguns nós na extremidade de contato vertical sofrem pequenas distorções devido ao maior nível de deformação da região. Porém, nota-se que o empilhamento não é acentuado nos casos estudados. Dessa forma, esse efeito não será considerado nas análises de dureza.

Figura 4.10 – Empilhamento no corpo de prova no contato com o indentedor e deformação gerada nos nós superiores



Fonte: Autor.

Os campos de interesse avaliados para cada um dos sentidos foram as tensões normais,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$ , com o sistema de eixos cartesianos mostrado na Figura 4.9, a tensão equivalente de von Mises  $\sigma_e$ , a tensão hidrostática  $\sigma_h$  (mostrada na Equação (4.4)) e a deformação plástica acumulada  $\bar{\epsilon}^p$ .

$$\sigma_h = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (4.4)$$

Por fim, para avaliar os campos de tensão e deformação nas coordenadas adimensionais, as tensões geradas foram normalizadas pelo módulo de elasticidade  $E$  do material. O limite superior para as coordenadas adimensionais foi fixado em 5, pois os efeitos de tensão e deformação a partir deste valor tornam-se pouco relevantes, aproximando-se de zero nas extremidades do modelo. Dessa forma, é facilitada a visualização dos resultados.

Os campos de tensão e deformação, por sua vez, foram avaliados para diferentes casos. Os parâmetros de referência são aqueles do cobre OFHC, mostrados na Tabela 3.1, e as demais informações mostradas na Tabela 4.7. Inicialmente, uma análise em função da profundidade de indentação  $h$  foi feita, e seus resultados são mostrados e comparados com o modelo da cavidade em expansão (SANTOS; SRIVASTAVA; RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, 2021) na seção 4.4.1. Uma segunda análise foi realizada, em termos do coeficiente de endurecimento  $n$ , com os resultados apresentados e discutidos na seção 4.4.2. Uma terceira análise foi feita em termos do módulo de elasticidade  $E$  do material, e pode ser observada na seção 4.4.3. Por fim, uma análise em termos da anisotropia plástica foi feita, e pode ser observada na seção 4.4.4. Dessa forma, será verificada a sensibilidade do modelo à variações nestes parâmetros.

Tabela 4.7 – Parâmetros utilizados para avaliar os campos

$h$ [mm]	$L$ [mm]	$\beta$ [deg]	$\mu$
0,25 - 1,25	25	70,3	0,05

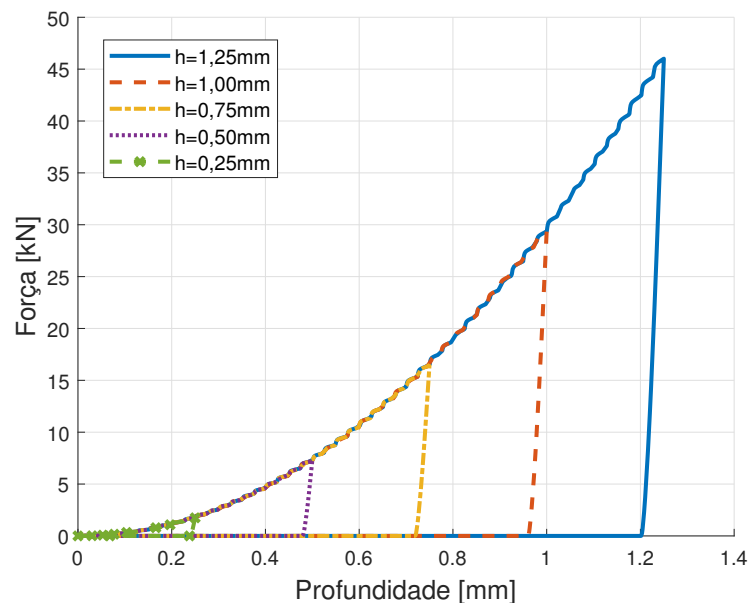
Fonte: Autor.

#### 4.4.1 Influência da profundidade de indentação $h$

Os campos de tensão foram avaliados para 5 níveis de profundidade  $h$  de aplicação do indentedor, iniciando em 0,25 mm, com um passo de 0,25 mm, atingindo um valor máximo de 1,25 mm.

Os gráficos de força vs. profundidade de indentação para os diferentes níveis de profundidade são mostrados na Figura 4.11. Nos gráficos, observaram-se resultados condizentes com o que era esperado, onde as curvas seguiram os mesmos valores até o seu deslocamento máximo. Em todos os casos, uma recuperação elástica pequena é observada, de aproximadamente 4%, e isso é decorrente de um baixo valor de razão entre tensão de escoamento e módulo de elasticidade do material, como discutido por Bhattacharya e Nix (1988).

Figura 4.11 – Força vs. profundidade para os diferentes níveis de deslocamento aplicados

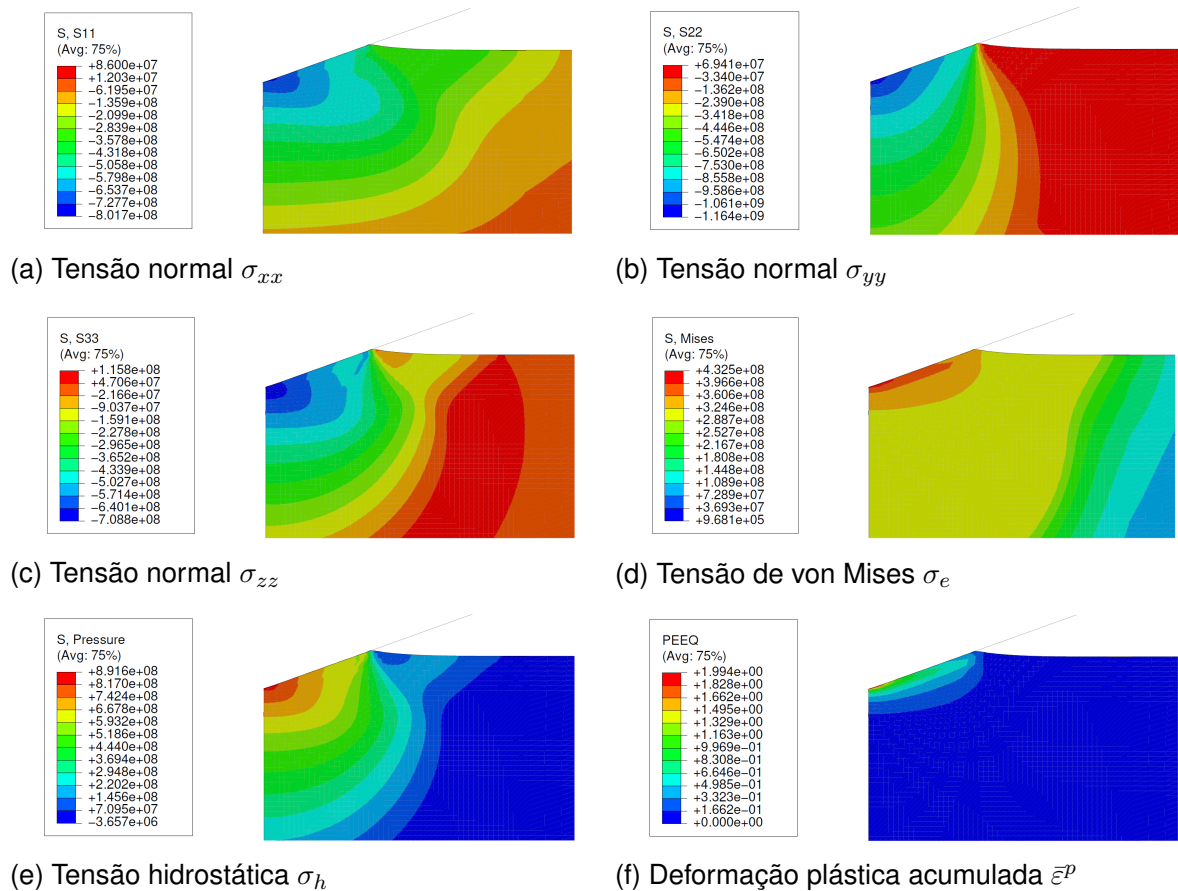


Fonte: Autor.

Os campos de tensão e deformação obtidos para o caso específico de  $h = 0,5$  mm são mostrados na Figura 4.12. Na legenda da figura, as direções 123 correspondem

às direções do sistema cartesiano  $xyz$  da Figura 4.9. Tais campos serão avaliados e discutidos de forma detalhada nas seções 4.4.1.1 e 4.4.1.2. Os resultados numéricos são comparados com o modelo da cavidade em expansão (ver Durban e Masri (2004) e Santos, Srivastava e Rodríguez-Martínez (2021)). O modelo teórico é desenvolvido para a expansão dinâmica de cavidades esféricas em meios elastoplásticos, e a comparação será feita considerando o caso específico quase-estático. O modelo não prevê variações com a profundidade de aplicação de carga  $h$  no desenvolvimento dos campos, e, dessa forma, apenas uma curva de comparação será mostrada.

Figura 4.12 – Campos de tensão [Pa] e deformação obtidos ( $h = 0,5$  mm)



Fonte: Autor.

#### 4.4.1.1 Campos ao longo da coordenada adimensional vertical $\xi$

Os campos descritos foram avaliados ao longo da coordenada adimensional vertical  $\xi$ , e os resultados podem ser observados na Figura 4.13 (ver Figura 4.12 para uma visão mais global). Nota-se, inicialmente, que o comportamento para os campos é bastante semelhante dentre os diferentes níveis de profundidade de indentação aplicada no modelo.

Tal fenômeno indica que o desenvolvimento dos campos possui uma certa independência do nível de indentação quando adimensionalizado pelo raio de contato  $a$  (ver Figura 3.1(b)), assim como esperado pelo modelo teórico.

Avaliando as tensões normais,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$ , mostradas nas Figuras 4.13(a), 4.13(b) e 4.13(c), respectivamente, observa-se um estado de compressão inicialmente nos 3 campos, com os maiores níveis de magnitude obtidos na direção vertical  $y$ . Os campos nas direções  $x$  e  $z$  tornam-se trativos por volta de  $\xi = 2$ , atingindo valores relativamente baixos e, então, tornam-se aproximadamente nulos à medida que se afastam do ponto de indentação.

Observa-se uma boa similaridade de comportamento entre a simulação realizada no trabalho e o modelo teórico. O modelo teórico adota como hipótese um desenvolvimento esférico, ou seja, com  $\sigma_{xx} = \sigma_{zz}$  (tensões tangenciais à coordenada radial). Na simulação deste trabalho, também observa-se uma equivalência entre  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{zz}$ .

Em relação ao modelo teórico, observam-se tensões um pouco menores nos resultados numéricos, em termos absolutos, para uma dada coordenada  $\xi$ . Em ambas, o pico de tração ocorre em um valor parecido, por volta de 93 MPa. Uma mesma análise pode ser feita em termos da tensão  $\sigma_{yy}$ , em que mais uma vez há similaridade entre o modelo teórico e a simulação, porém com a primeira apresentando níveis de tensão um pouco maiores, com ambas tornando-se nulas em coordenadas próximas de  $\xi = 5$ .

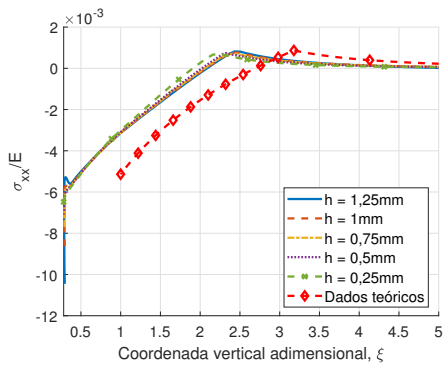
É observado, pela tensão equivalente de von Mises  $\sigma_e$  (Figura 4.13(d)), que o desenvolvimento da tensão sofre alterações no ponto em que é atingida a tensão de escoamento  $\sigma_0 = 302$  MPa (ou, na medida adimensional analisada,  $\sigma_0/E \approx 2,6 \cdot 10^{-3}$ ) do material. Isso decorre do desenvolvimento de endurecimento a partir de tal ponto, com o desenvolvimento da plasticidade na região. Pelo modelo computacional, foram atingidas tensões equivalentes na casa dos 460 MPa para os maiores níveis de aplicação de carga. Nota-se um desvio para a direita no desenvolvimento da tensão de von Mises do modelo teórico, o que é ocasionado pelos maiores níveis de tensão do modelo teórico, decorrentes de suas hipóteses. O desenvolvimento do campo, entretanto, segue um comportamento semelhante ao da simulação.

Pela tensão hidrostática  $\sigma_h$ , representada na Figura 4.13(e), é observado um estado de quase total compressão em todo campo, atingindo valores máximos absolutos de aproximadamente 1,1 GPa para o deslocamento de  $h = 1,25$  mm. Mais uma vez, decorrente dos maiores campos de tensão de  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$  do modelo teórico, os valores de tensão compressiva são maiores neste em termos absolutos em relação ao modelo computacional.

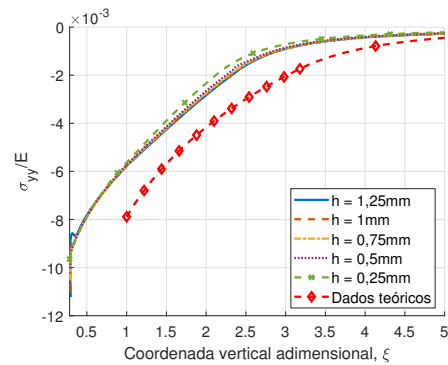
Por último, é mostrada a deformação plástica acumulada na Figura 4.13(f). Nela, observa-se que valores mais expressivos de plasticidade são atingidos em uma região pequena (até aproximadamente  $\xi = 1$ ) e, após essa coordenada, a deformação plástica vai progressivamente caindo até ficar nula. Essa pequena região de deformação plástica

fica evidenciada na Figura 4.12(f), em que a maior parte do corpo de prova se encontra em regime elástico (i.e.,  $\bar{\varepsilon}^p = 0$ ). É observado que o desenvolvimento da plasticidade no modelo teórico ocorre para regiões mais afastadas do contato com o indentedor, o que se reflete pela tensão de von Mises mostrada na Figura 4.13(d).

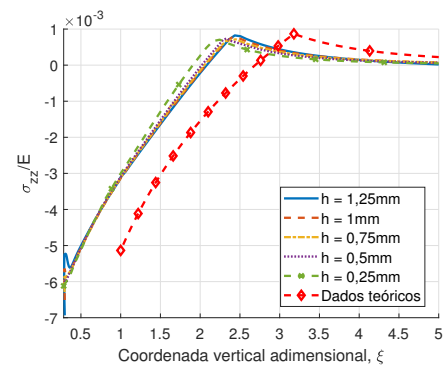
Figura 4.13 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada vertical adimensional  $\xi$  em função da profundidade. Comparação com o modelo teórico da cavidade em expansão (SANTOS; SRIVASTAVA; RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, 2021)



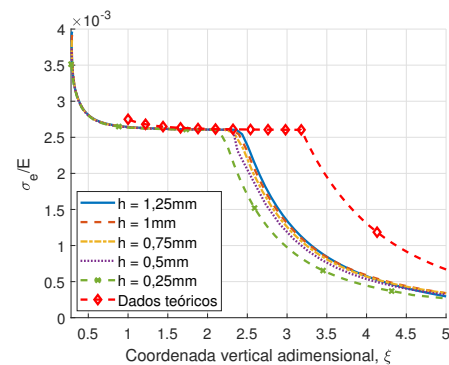
(a)  $\sigma_{xx}/E$  em função de  $\xi$



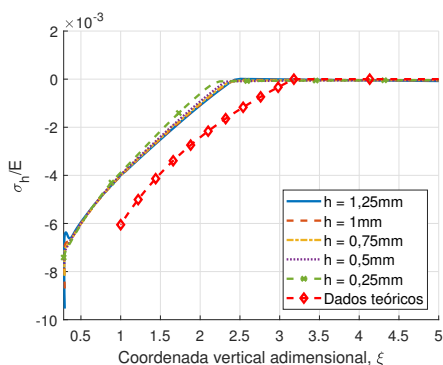
(b)  $\sigma_{yy}/E$  em função de  $\xi$



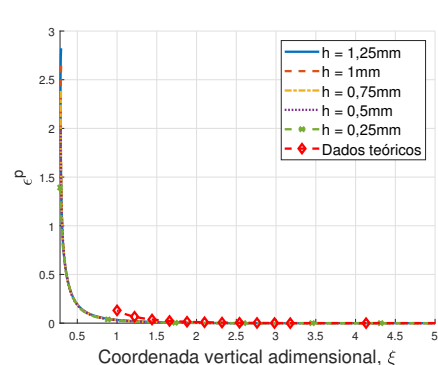
(c)  $\sigma_{zz}/E$  em função de  $\xi$



(d)  $\sigma_e/E$  em função de  $\xi$



(e)  $\sigma_h/E$  em função de  $\xi$



(f)  $\bar{\varepsilon}^p$  em função de  $\xi$

Fonte: Autor.



#### 4.4.1.2 Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada adimensional horizontal $\delta$

Os campos descritos foram avaliados também ao longo da coordenada adimensional horizontal  $\delta$ , e os resultados podem ser observados na Figura 4.14. Novamente, os campos apresentaram comportamentos parecidos para os níveis de profundidades de aplicação impostos, entretanto seus valores em módulo apresentaram diferenças mais significativas em relação aos campos na coordenada vertical. Para o caso, foram observadas maiores diferenças em relação ao modelo teórico, o que é discutido em seguida.

Os campos de tensão normal do corpo, mostrados nas Figuras 4.14(a), 4.14(b) e 4.14(c), novamente apresentam, em sua maioria, tensões de compressão. As maiores tensões desenvolvidas para a coordenada horizontal foram na direção  $x$ , o que é previsto pelo modelo teórico, no qual as maiores tensões se encontram na direção radial.

É observado que, como a superfície horizontal é livre de tensões, os valores da tensão na direção  $y$  do modelo deveriam ser nulos. O modelo teórico não é formulado considerando a superfície livre na borda superior do corpo de prova. Dessa forma, esse efeito não é capturado pelo modelo teórico, e, neste caso, a condição de  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$  (tensões tangenciais) ainda ocorre. Esse efeito, ainda, faz com que os campos de tensão (ver Figura 4.12) não tenham simetria esférica.

Outro fenômeno aqui observado é de que nos primeiros valores da coordenada horizontal  $\delta$  existem tensões baixas em  $y$  diferentes de zero para o modelo computacional, e isso é decorrente do empilhamento no contato com o indentador, que impõe um estado tridimensional de tensões em uma pequena região de contato com o indentador, como mostrado e discutido na seção 4.4. Essas tensões, atingem valores máximos absolutos na ordem de  $\sigma_{yy} \approx 22,5$  MPa.

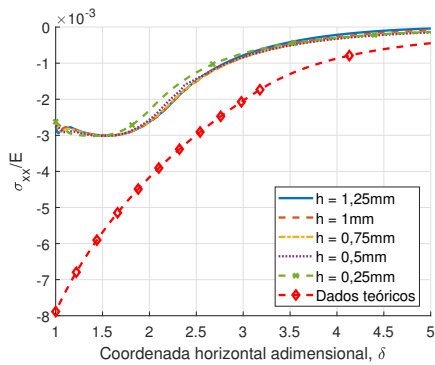
Para o caso em análise, podem ser observadas mudanças no sentido de desenvolvimento das tensões, principalmente na direção  $z$  do corpo de prova. Uma possível explicação para tal fenômeno é o empilhamento na horizontal no ponto de contato com o indentador, como já citado. O campo de tensão na direção  $z$  do corpo de prova pode ser observado na Figura 4.12(c), em que o empilhamento é mostrado e o campo de tensões apresenta mudanças no seu desenvolvimento.

Novamente, analisando a tensão de von Mises  $\sigma_e$ , mostrada na Figura 4.14(d), é observado o endurecimento do material. Para o caso, valores menores foram alcançados para a tensão equivalente, alcançando máximos próximos de 320 MPa. Os valores máximos previstos pelo modelo teórico foram próximos dos observados para o modelo computacional, entretanto, novamente, a tensão de von Mises é deslocada para a direita, decorrente das maiores tensões previstas pelo modelo teórico.

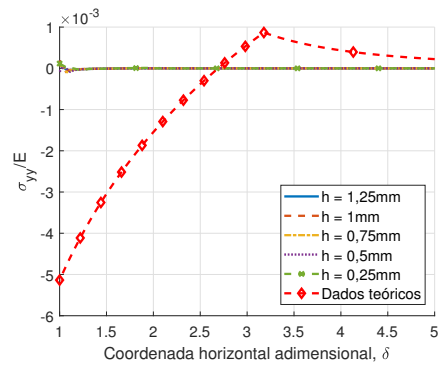
Assim como no caso anterior, a tensão hidrostática  $\sigma_h$  é, em sua maior parte, de compressão, logo após tendendo a ficar nula à medida em que se afasta do contato com o indentador, como mostrado na Figura 4.14(e). A deformação plástica acumulada pode

ser observada na Figura 4.14(f), em que valores bem menores do que os observados no campo vertical foram obtidos (ver Figura 4.13(f)). Novamente, o modelo teórico prevê uma maior região de desenvolvimento plástico. Entretanto, mais uma vez, o comportamento entre os dois modelos apresenta boa semelhança.

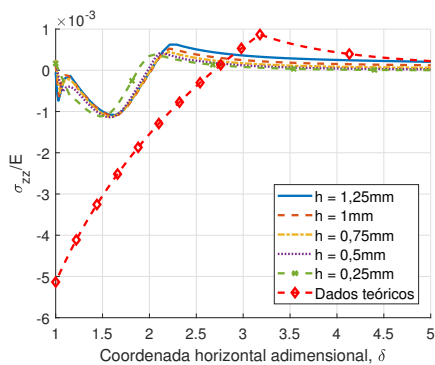
Figura 4.14 – Campos na coordenada horizontal adimensional  $\delta$  em função da profundidade. Comparação com o modelo teórico da cavidade em expansão (SANTOS; SRIVASTAVA; RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, 2021)



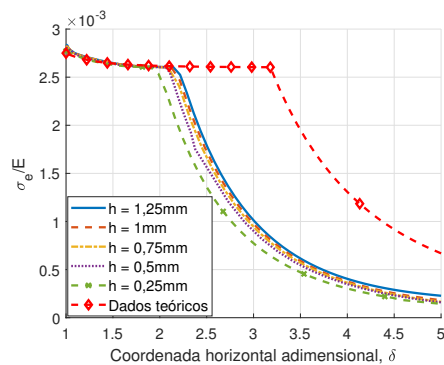
(a)  $\sigma_{xx}/E$  em função de  $\delta$



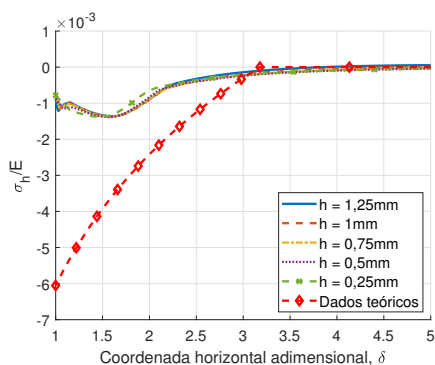
(b)  $\sigma_{yy}/E$  em função de  $\delta$



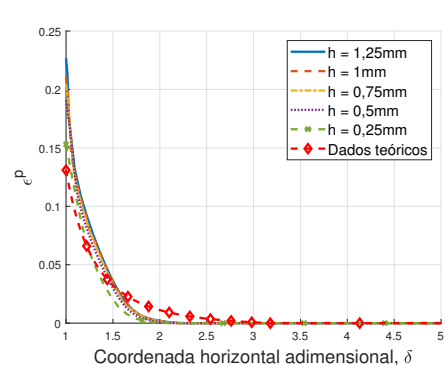
(c)  $\sigma_{zz}/E$  em função de  $\delta$



(d)  $\sigma_e/E$  em função de  $\delta$



(e)  $\sigma_h/E$  em função de  $\delta$



(f)  $\bar{\epsilon}^p$  em função de  $\delta$

Fonte: Autor.

#### 4.4.2 Influência do coeficiente de endurecimento $n$

Para analisar o efeito do endurecimento nos resultados, 4 valores do coeficiente de endurecimento  $n$  do modelo constitutivo do material (Equação (3.13)) foram avaliados, começando em  $n = 0$ , representando um material elastoplástico perfeito, e atingindo um valor de  $n = 1$ , configurando endurecimento linear. Os parâmetros do material utilizados são mostrados na Tabela 4.8. Os demais parâmetros utilizados para o modelo são mostrados na Tabela 4.9.

Tabela 4.8 – Parâmetros utilizados para o material

$\sigma_0$ [MPa]	$\varepsilon_0$	$n$	$E$ [GPa]	$\nu$
302	0,44	0; 0,21; 0,50; 1,00	116	0,31

Fonte: Autor.

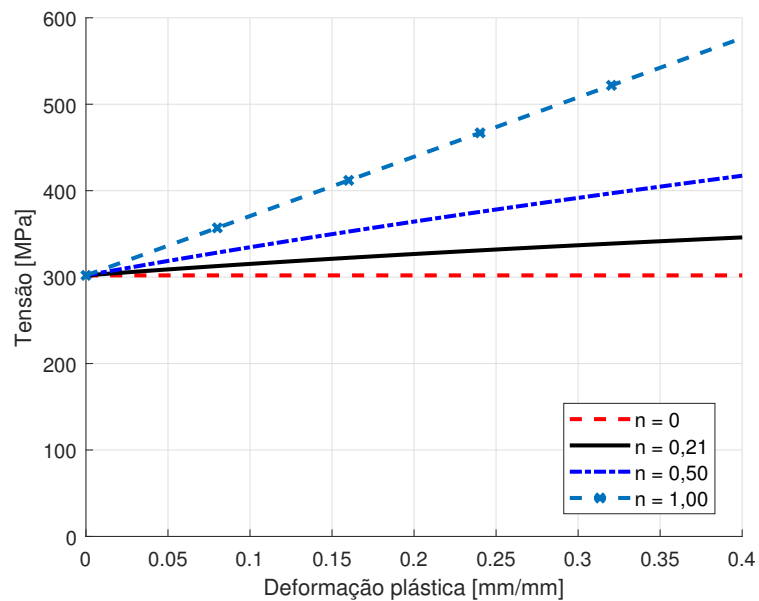
Tabela 4.9 – Parâmetros utilizados para avaliar os campos

$h$ [mm]	$L$ [mm]	$\beta$ [deg]	$\mu$
1	25	70,3	0,05

Fonte: Autor.

Na Figura 4.15, são mostradas as curvas de endurecimento para os diferentes valores do coeficiente de endurecimento  $n$  avaliados. Na figura, ficam evidentes a curva de endurecimento linear, para  $n = 1$ , a curva do material elastoplástico perfeito, para  $n = 0$ , a curva original obtida pela calibração do modelo, para  $n = 0,21$ , e uma curva intermediária, com  $n = 0,5$ .

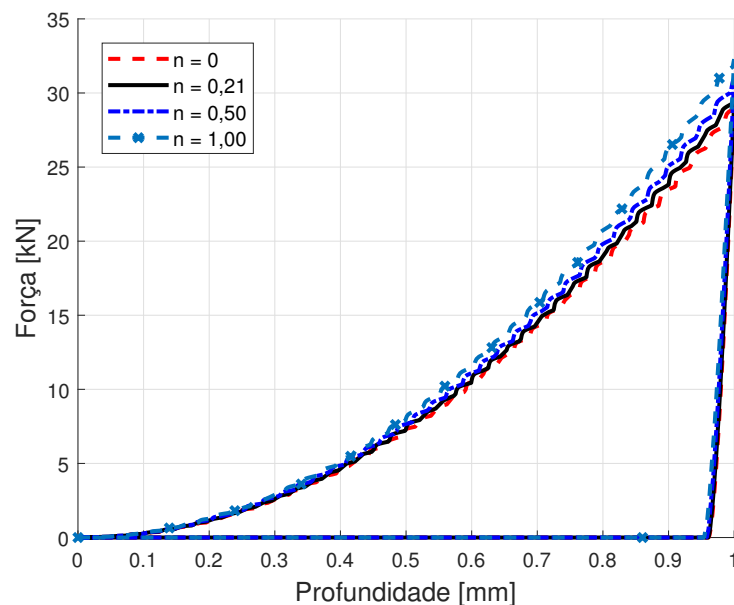
Figura 4.15 – Endurecimento do material para diferentes valores do coeficiente de endurecimento  $n$  (Equação (3.13))



Fonte: Autor.

Na Figura 4.16 são mostradas as curvas de força vs. profundidade para os valores de  $n$  analisados. É observado que o endurecimento passa a desempenhar um papel relevante para a obtenção da dureza do material, de forma que a dureza aumenta com o coeficiente de endurecimento.

Figura 4.16 – Força vs. profundidade para os diferentes valores do coeficiente de endurecimento  $n$



Fonte: Autor.

Na Tabela 4.10 são mostrados os valores de dureza Vickers obtidos para os diferentes valores de  $n$  analisados.

Tabela 4.10 – Dureza de Vickers  $HV$  obtida para diferentes valores do coeficiente de endurecimento

$n$	$HV$ resultante [kg/mm <sup>2</sup> ]
0	111,91
0,21	114,69
0,50	118,47
1,00	124,31

Fonte: Autor.

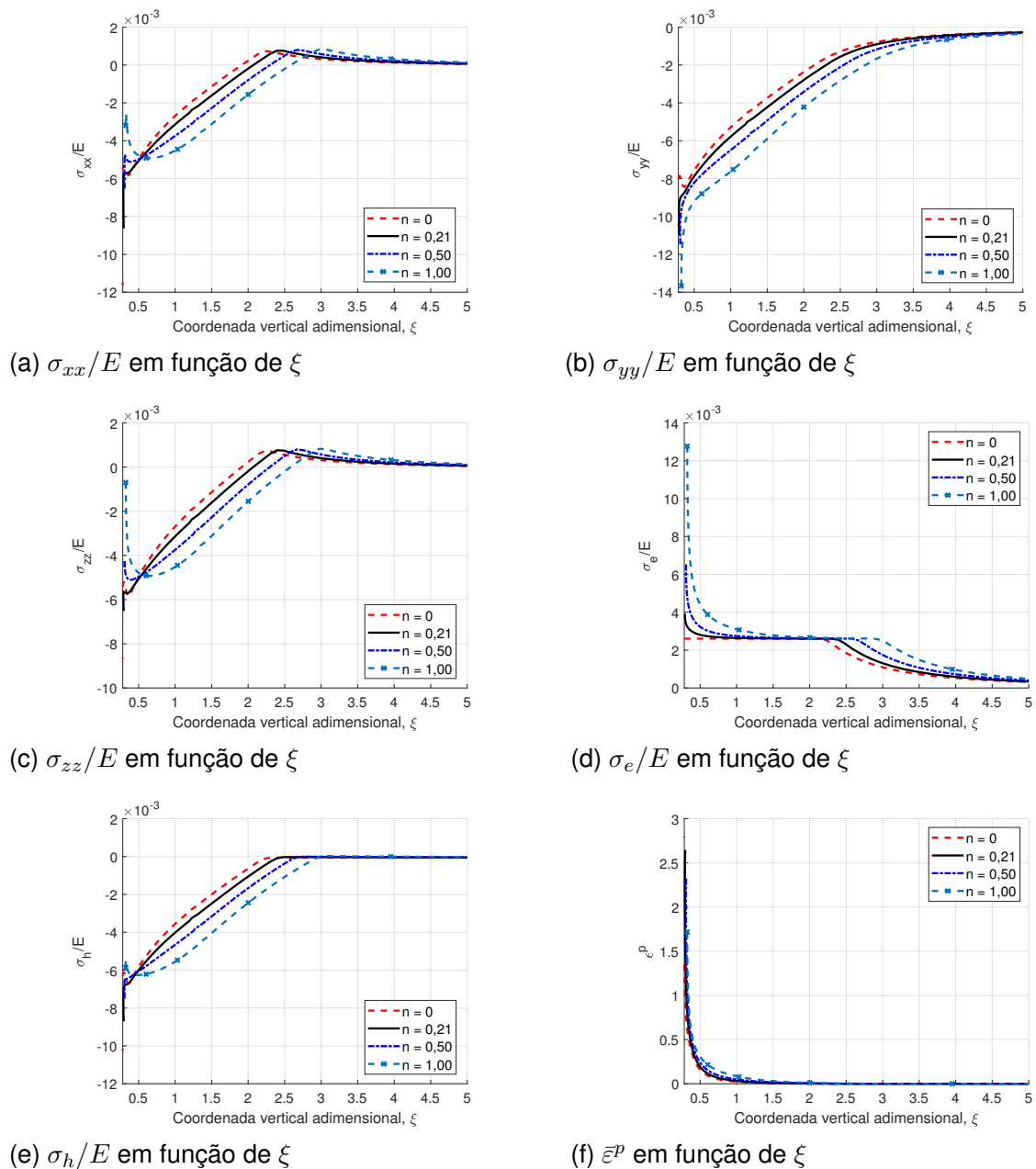
#### 4.4.2.1 Campos ao longo da coordenada adimensional vertical $\xi$

Os campos descritos foram avaliados ao longo da coordenada adimensional vertical  $\xi$ , e os resultados podem ser observados na Figura 4.17. É observado que há influência de  $n$  nos resultados obtidos. Pelas Figuras 4.17(a), 4.17(b) e 4.17(c), é observado que os campos de tensão novamente são de compressão na maior parte do modelo, com os maiores valores em módulo ocorrendo na direção  $y$  do corpo de prova. Novamente, os 3 campos de tensão se aproximam de zero à medida que se afastam do contato com o indentador, como esperado.

Na Figura 4.17(d), em que é mostrado o campo da tensão equivalente de von Mises  $\sigma_e$ , nota-se que, novamente, o desenvolvimento da plasticidade inicia na tensão de escoamento, apresentando diferenças para os 4 valores de  $n$  avaliados. Para o material elastoplástico perfeito ( $n = 0$ ), nota-se que, uma vez atingida a tensão de escoamento  $\sigma_0$ , a tensão  $\sigma_e$  torna-se constante, como esperado. Os maiores valores de tensão equivalente ocorrem para o maior coeficiente de endurecimento  $n$  avaliado ( $n = 1$ ), atingindo aproximadamente 1,5 GPa. Na Figura 4.17(e), é avaliada a tensão hidrostática  $\sigma_h$ , que apresenta compressão no modelo, com os maiores valores em módulo ocorrendo, na maior parte do modelo, para o maior coeficiente de endurecimento  $n$ .

A deformação plástica acumulada na coordenada vertical, mostrada na Figura 4.17(f), demonstra um comportamento semelhante dentre os diferentes valores do coeficiente de endurecimento avaliados, diminuindo o seu valor absoluto com o coeficiente  $n$  para a região de contato com o indentador.

Figura 4.17 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada vertical adimensional  $\xi$  em função do coeficiente de endurecimento  $n$



Fonte: Autor.

#### 4.4.2.2 Campos ao longo da coordenada adimensional horizontal $\delta$

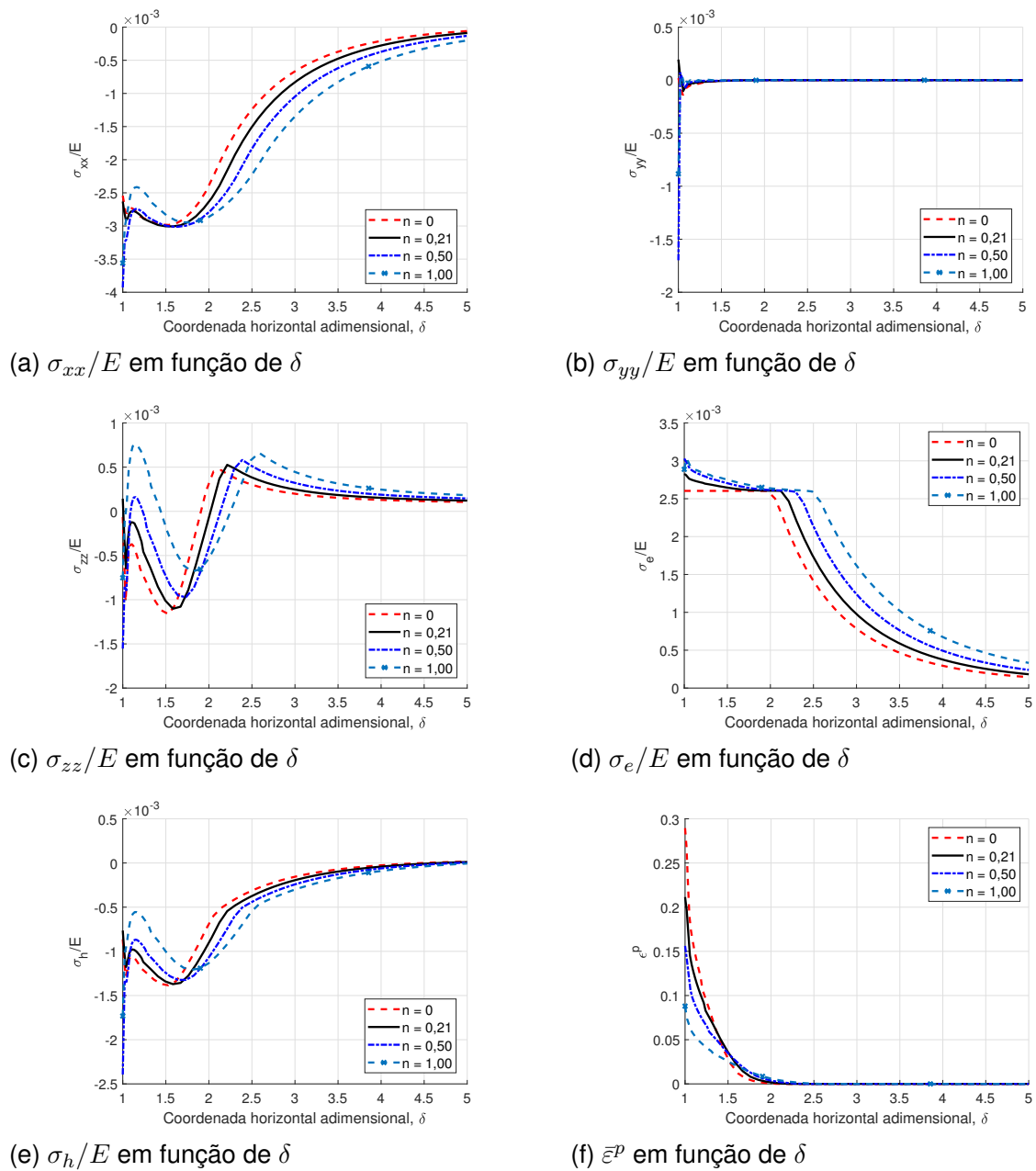
A mesma análise foi feita para a coordenada adimensional horizontal  $\delta$ , com os resultados sendo mostrados na Figura 4.18. Novamente, as tensões nas direções principais do corpo de prova, representadas nas Figuras 4.18(a), 4.18(b) e 4.18(c), apresentam um comportamento compressivo na maior parte do modelo, o que é evidenciado pela tensão

hidrostática da Figura 4.18(e). Para a tensão  $\sigma_{yy}$ , é novamente observado o fenômeno já discutido na seção 4.4.1.2, em que a tensão somente é zerada após os efeitos do empilhamento se tornarem irrelevantes.

Na Figura 4.18(d), é mostrada a tensão equivalente de von Mises  $\sigma_e$  para a coordenada horizontal  $\delta$ , que apresenta comportamento parecido com o que ocorre na coordenada vertical  $\xi$ , porém com menores valores da tensão em módulo. Mais uma vez, a tensão  $\sigma_e$  torna-se constante no início do desenvolvimento da plasticidade para  $n = 0$ , pois não há endurecimento no material.

Por último, é avaliada a deformação plástica acumulada na Figura 4.18(f). São observadas maiores diferenças entre os casos avaliados em relação ao que foi visto para a coordenada vertical  $\xi$ . Além disso, assim como ocorreu na análise em função da profundidade de deslocamento, a deformação plástica na direção horizontal  $\delta$  foi menor que na direção vertical  $\xi$ .

Figura 4.18 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada horizontal adimensional  $\delta$  em função do coeficiente de endurecimento  $n$



Fonte: Autor.

#### 4.4.3 Influência do módulo de elasticidade $E$

Foi verificada, para o modelo computacional desenvolvido, a influência do módulo de elasticidade do material indentedo. Para isso, é definida a variável adimensional  $\eta$ , definida como: a razão do módulo de elasticidade em análise  $E$  pelo módulo de elasticidade



original  $E_0$  do problema (Equação (4.5)).

$$\eta = \frac{E}{E_0} \quad (4.5)$$

Os parâmetros do modelo utilizados foram os mesmos utilizados na análise do coeficiente de endurecimento  $n$ , sendo mostrados na Tabela 4.9. Os parâmetros do material, por sua vez, são mostrados na Tabela 4.11.

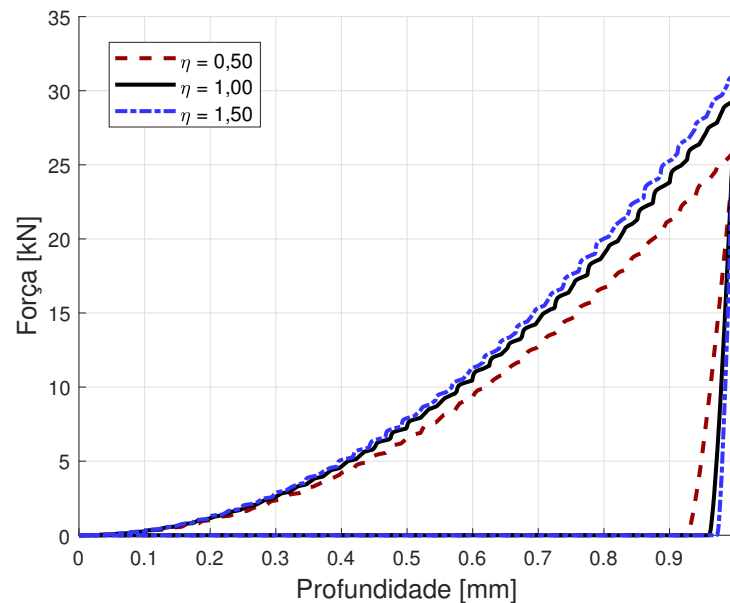
Tabela 4.11 – Parâmetros utilizados para o material

$\sigma_0$ [MPa]	$\varepsilon_0$	$n$	$E_0$ [GPa]	$\nu$	$\eta$
302	0,44	0,21	116	0,31	0,50; 1,00; 1,50

Fonte: Autor.

Na Figura 4.19, são mostradas as curvas de força vs. profundidade para os valores de  $\eta$  analisados. Pela figura, é observado que a dureza do material aumenta de acordo com o módulo de elasticidade, como mostrado na Tabela 4.12. Além disso, é observado que a recuperação elástica do material diminui com o aumento do módulo de elasticidade, apresentando os valores, em relação à profundidade de aplicação original  $h$  de: 7,27% para  $\eta = 0,50$ ; 3,94% para  $\eta = 1,00$ ; 2,94% para  $\eta = 1,50$ .

Figura 4.19 – Força vs. profundidade para os diferentes valores do coeficiente  $\eta$



Fonte: Autor.

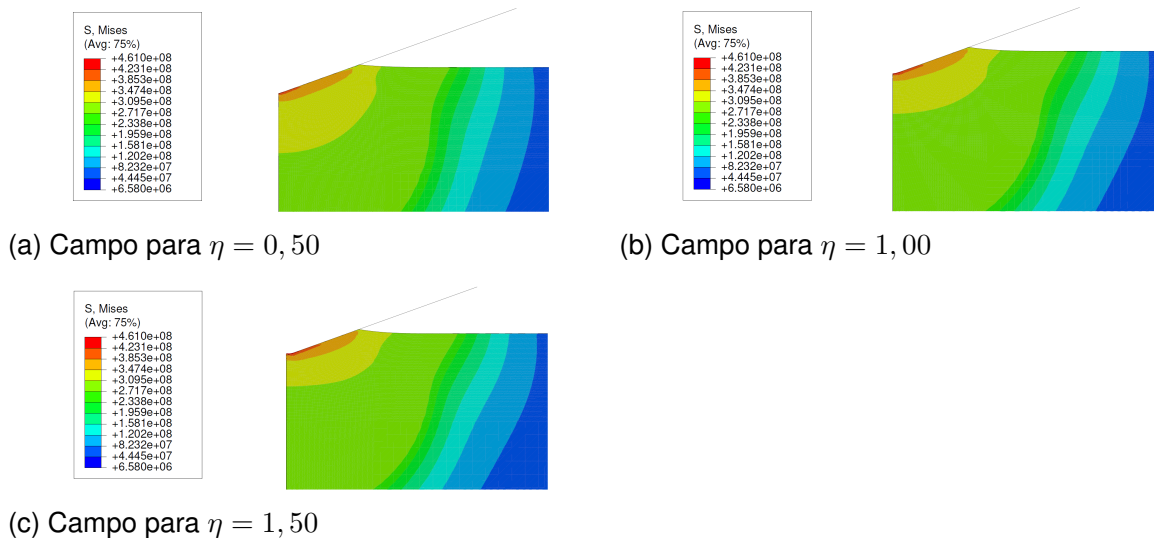
Tabela 4.12 – Dureza de Vickers  $HV$  obtida para diferentes valores de  $\eta$ 

$\eta$	$HV$ resultante [kg/mm <sup>2</sup> ]
0,50	100,77
1,00	114,69
1,50	120,47

Fonte: Autor.

Na Figura 4.20, são mostrados os campos de tensão equivalente de von Mises  $\sigma_e$  para os diferentes níveis de  $\eta$  avaliados. Estes campos, juntamente com outros campos de tensão e deformação serão discutidos com maior detalhe nas seções 4.4.3.1 e 4.4.3.2.

Figura 4.20 – Tensão equivalente de von Mises  $\sigma_e$  [Pa] para os diferentes níveis de  $\eta$  avaliados



Fonte: Autor.

#### 4.4.3.1 Campos ao longo da coordenada adimensional vertical $\xi$

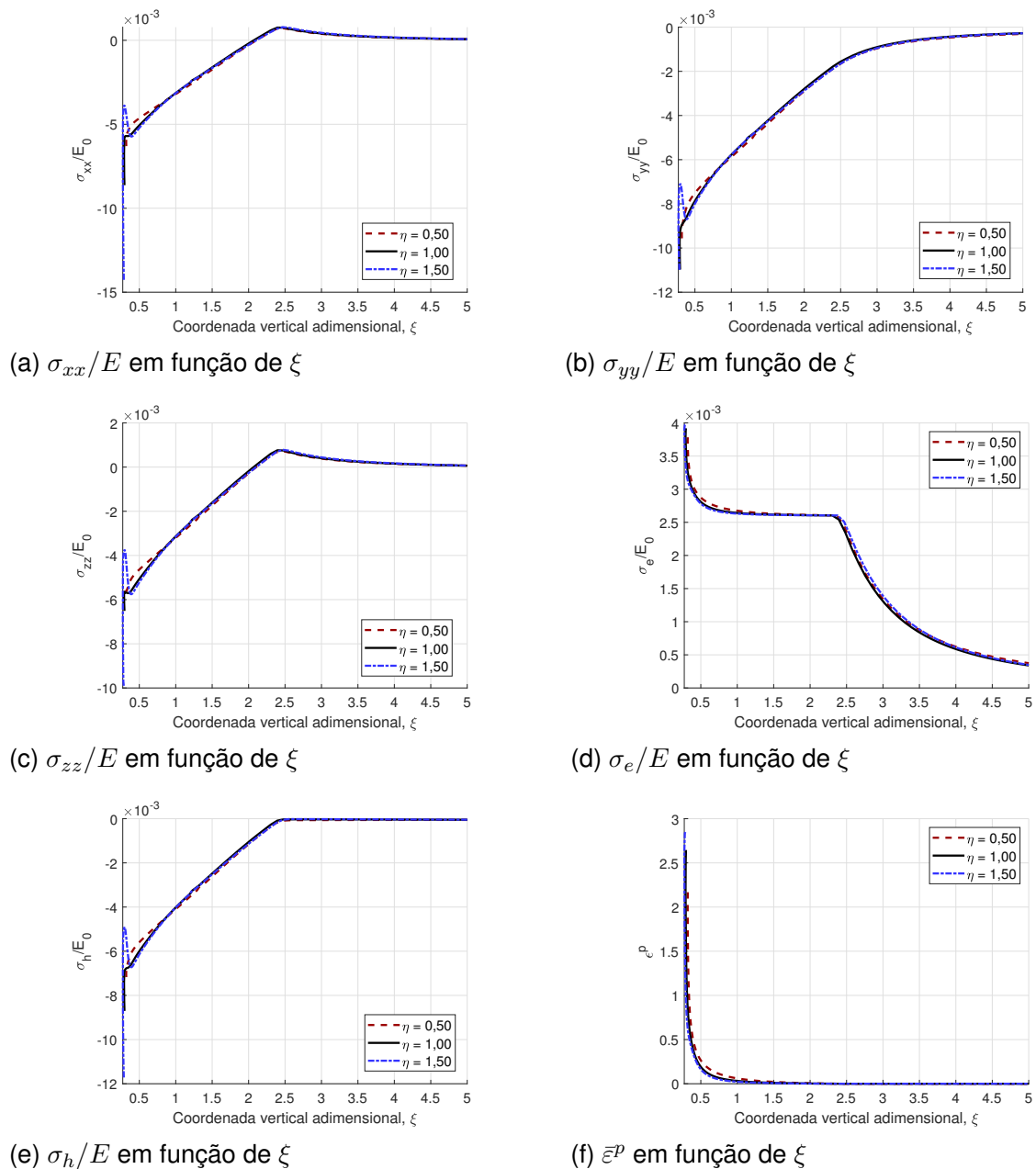
Os campos de tensão e deformação foram avaliados ao longo da coordenada vertical adimensional  $\xi$  em função do valor de  $\eta$  (Equação (4.5)), representando mudanças no valor do módulo de elasticidade. As tensões foram normalizadas em relação ao módulo de elasticidade original  $E_0$ , mostrado na Tabela 4.11. Os resultados podem ser observados na Figura 4.21. É observado que o módulo de elasticidade representou pouca influência no desenvolvimento dos campos na coordenada adimensional vertical  $\xi$ . Pelas Figuras 4.21(a), 4.21(b) e 4.21(c), é observado que as tensões são de compressão na maior parte do modelo, como esperado. Além disso, os maiores valores, em módulo, das tensões são,

em geral, no sentido  $y$  do corpo de prova. Exceções são observadas em nós localizados, como observado no sentido  $x$  do corpo, em que um nó apresenta um pico de tensão. Entretanto, é esperado que esse fenômeno seja explicado por questões numéricas da simulação. Ainda, o estado de compressão novamente se manifesta no campo de tensão hidrostática, mostrado na Figura 4.21(e), tornando-se nulo com o aumento da distância do contato com o indentador.

Na Figura 4.21(d), é mostrada a tensão equivalente de von Mises  $\sigma_e$ , que apresenta comportamento semelhante entre as simulações. Observa-se, mais uma vez, comportamento físico condizente com o que é esperado, de forma que a curva representa uma mudança em seu desenvolvimento para regiões mais próximas do contato com o indentador, onde são esperadas deformações plásticas mais acentuadas. Ainda, essa variação tem início na tensão de escoamento inicial  $\sigma_0$  do material, mostrada na Tabela 4.11.

Na Figura 4.21(f), é mostrada a deformação plástica acumulada do material. Como esperado, os maiores níveis de deformação plástica ocorrem em regiões próximas do contato com o indentador. Novamente, houve pouca influência do módulo de elasticidade, com picos de deformação para pontos isolados, se manifestando principalmente para maiores valores de módulo de elasticidade.

Figura 4.21 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada vertical adimensional  $\xi$  em função de  $\eta$



Fonte: Autor.

#### 4.4.3.2 Campos ao longo da coordenada adimensional horizontal $\delta$

Os campos de tensão e deformação ao longo da coordenada adimensional horizontal  $\delta$  em função de  $\eta$  são mostrados na Figura 4.22. Nos campos da coordenada horizontal, é observada uma maior influência do módulo de elasticidade. Essa maior diferença, pode ser ocasionada pelo aumento do empilhamento no contato com o indetador com o

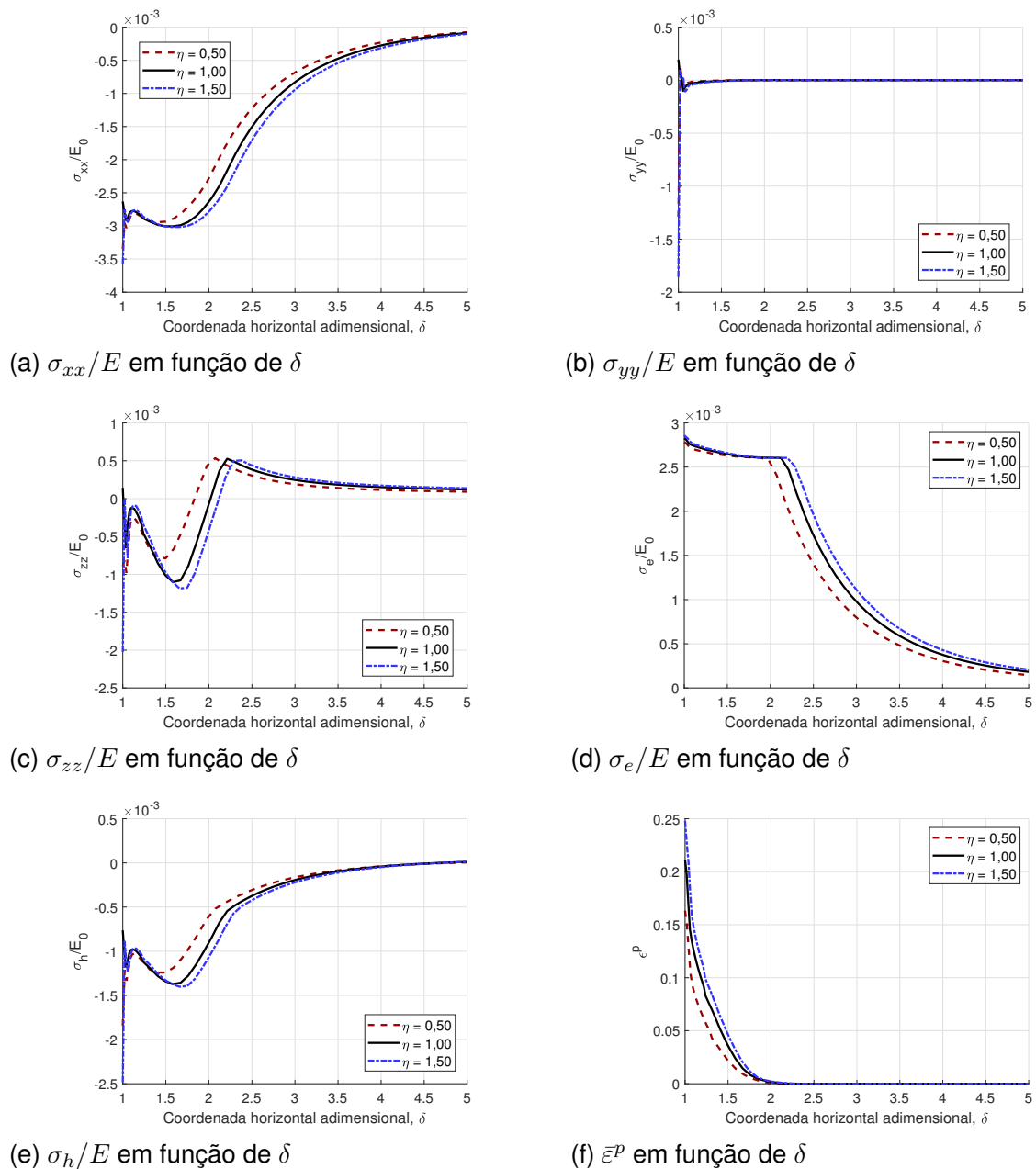
aumento do módulo de elasticidade, como pode ser visto na Figura 4.20, em que o empilhamento é menos acentuado para um valor baixo do módulo de elasticidade ( $\eta = 0,50$ , Figura 4.20(a)), e torna-se mais aparente com o aumento de " $E$ " ( $\eta = 1,50$ , Figura 4.20(c)).

Pelas Figuras 4.22(a) e 4.22(c), observa-se um estado de compressão na maior parte do corpo de prova, com os maiores valores em módulo ocorrendo para o maior valor do módulo de elasticidade ( $\eta = 1,50$ ), mantendo um comportamento similar entre os diferentes níveis de  $\eta$ . Novamente, o estado de compressão é evidenciado pela tensão hidrostática, mostrada na Figura 4.22(e).

O mesmo comportamento da tensão na direção  $y$  do corpo de prova que já vinha sido observado para as outras análises é novamente observado na Figura 4.22(b), onde certos níveis de tensão são observados nos nós mais próximos de contato com o indetandor, caindo rapidamente para valores nulos com o aumento da distância. É observado, ainda, que a tensão nessa direção torna-se nula para regiões mais distantes do contato para maiores níveis de  $\eta$ , fenômeno que novamente pode ser explicado pelo aumento do empilhamento com o aumento do módulo de elasticidade.

O campo de tensão equivalente de von Mises  $\sigma_e$ , mostrado na Figura 4.22(d), é condizente com o campo de deformação plástica acumulada, visto na Figura 4.22(f). No desenvolvimento da tensão  $\sigma_e$ , a mudança no desenvolvimento ocorre na tensão de escoamento do material, e se manifesta para coordenadas em que a deformação plástica acumulada não é mais nula. Maiores níveis de tensão e deformação foram obtidos para materiais com maiores módulos de elasticidade.

Figura 4.22 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada horizontal adimensional  $\delta$  em função de  $\eta$



Fonte: Autor.

#### 4.4.4 Influência da anisotropia plástica

Para verificar a influência da anisotropia, foi considerado um material transversalmente isotrópico, em torno do eixo  $y$ , de forma que o modelo axissimétrico utilizado seja válido (ver corpo de prova mostrado na Figura 4.9). Para avaliar a influência da anisotropia, o coeficiente  $R_{yy}$  foi variado de  $R_{yy} = 0,75$  até  $R_{yy} = 1,25$ , com passos de  $0,25$ ,

recuperando o estado isotrópico quando  $R_{yy} = 1,00$  (material de von Mises). Os dados do material são mostrados na Tabela 3.1, e os parâmetros relativos à anisotropia utilizados na análise são mostrados na Tabela 4.13 (ver Equações (3.10) - (3.12)).

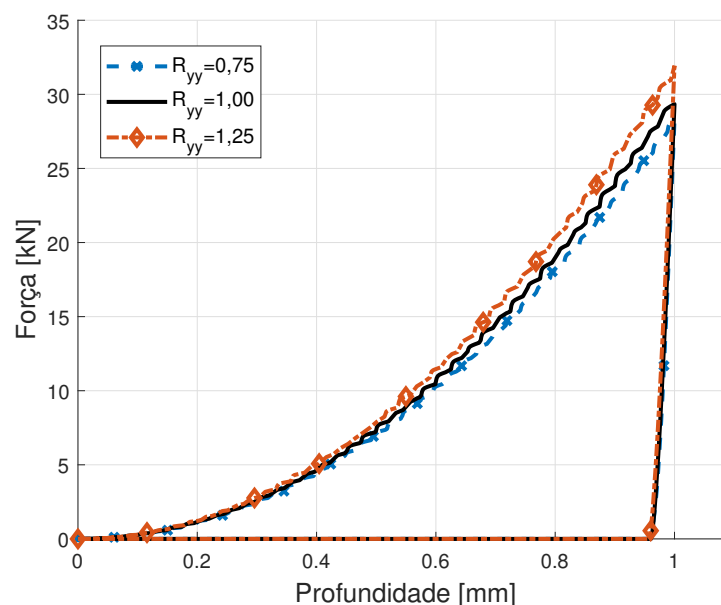
Tabela 4.13 – Parâmetros utilizados relativos à anisotropia

$\sigma^0$ [MPa]	$R_{xx}$	$R_{yy}$	$R_{zz}$	$R_{xy}$	$R_{xz}$	$R_{yz}$
302	1	0,75; 1,00; 1,25	1	1	1,16; 1,00; 0,94	1

Fonte: Autor.

Para o caso específico de  $R_{yy} = 1,25$ , inicialmente a solução do programa divergiu, e foi observado que isso ocorreu devido à problemas numéricos relacionados com a deformação do material. O modelo apresentou perda de contato entre os nós extremos verticais entre o indentador e o corpo de prova, de forma que a solução foi abortada. Para resolver o erro, a função de integração reduzida do programa foi desabilitada. A função reduz o número de pontos de integração do elemento, e, desabilitando-a, o programa pôde formular a deformação com mais precisão, e dessa forma a solução novamente convergiu. Os parâmetros do material utilizados para realizar a análise são mostrados na Tabela 3.1. Os demais parâmetros são mostrados na Tabela 4.7. Na Figura 4.23, são mostrados os gráficos de força vs. profundidade obtidos pelo modelo para os casos avaliados. É observado que, com o aumento de  $R_{yy}$ , a dureza do material é aumentada. Os valores de dureza obtidos para os casos mostrados são apresentados na Tabela 4.14.

Figura 4.23 – Força vs. profundidade para os diferentes valores de  $R_{yy}$



Fonte: Autor.

Tabela 4.14 – Dureza de Vickers  $HV$  obtida para diferentes valores de  $R_{yy}$ 

$R_{yy}$	$HV$ resultante [kg/mm <sup>2</sup> ]
0,75	109,19
1,00	114,69
1,25	122,56

Fonte: Autor.

#### 4.4.4.1 Campos ao longo da coordenada adimensional vertical $\xi$

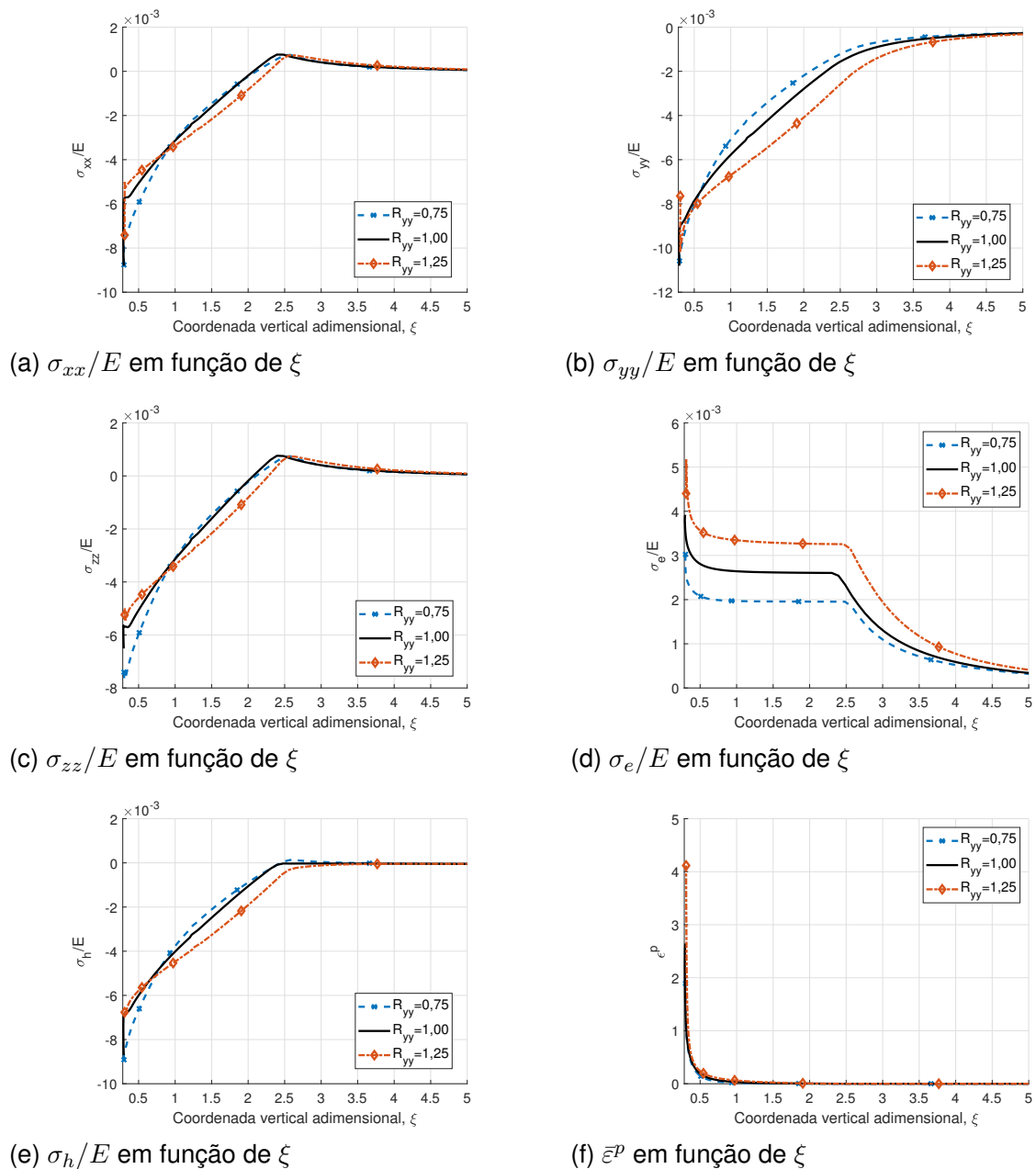
Os campos descritos foram avaliados ao longo da coordenada adimensional vertical  $\xi$ , e os resultados podem ser observados na Figura 4.24. É observado, inicialmente, que os campos obtidos tem dependência da anisotropia. Nas Figuras 4.24(a), 4.24(b) e 4.24(c), são mostradas as tensões normais nas 3 direções do corpo de prova. Como esperado, as tensões no eixo vertical do corpo (eixo  $y$ , mostrado na Figura 4.24(b)) são as maiores em módulo. Novamente, na maior parte do modelo, é observado um estado de compressão pura, o que é evidenciado pela tensão hidrostática  $\sigma_h$  (Figura 4.24(e)), que é compressiva até  $\xi \approx 3$ , e, então, torna-se nula.

Pela Figura 4.24(d), é observada uma forte dominância do termo  $R_{yy}$  sobre os demais termos  $R_{ii}$ , de forma que o escoamento do material ocorre em tensões aproximadamente iguais às tensões de escoamento na direção  $y$  do corpo de prova. Isso pode ser explicado pela maior intensidade das tensões observada no eixo  $y$  do corpo de prova, como já citado.

A deformação plástica acumulada  $\bar{\epsilon}^p$ , mostrada na Figura 4.24(f), apresentou pequena dependência do coeficiente  $R_{yy}$ , sendo observadas mudanças apenas nos picos de deformação na região de contato, aumentando à medida que  $R_{yy}$  aumenta.



Figura 4.24 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada vertical adimensional  $\xi$  em função de  $R_{yy}$



Fonte: Autor.

#### 4.4.4.2 Campos ao longo da coordenada adimensional horizontal $\delta$

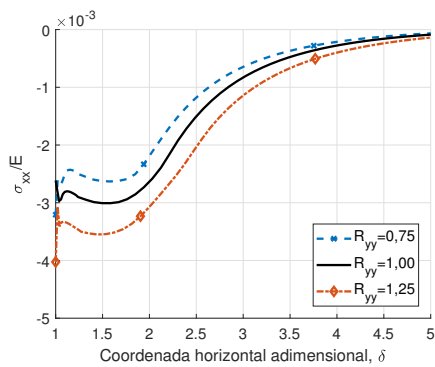
Os campos descritos foram avaliados ao longo da coordenada adimensional horizontal  $\delta$ , e os resultados podem ser observados na Figura 4.25. Novamente, foi observada dependência dos campos em relação ao coeficiente  $R_{yy}$ . As tensões nas direções do corpo de prova são mostradas nas Figuras 4.25(a), 4.25(b) e 4.25(c). Os maiores níveis de

tensão ocorrem na direção  $x$  do corpo e, nessa direção, são totalmente compressivas. A maior relevância dos níveis de tensão nesse sentido é evidenciada pela tensão hidrostática  $\sigma_h$  (Figura 4.25(e)), que é de compressão pura em todo o domínio avaliado.

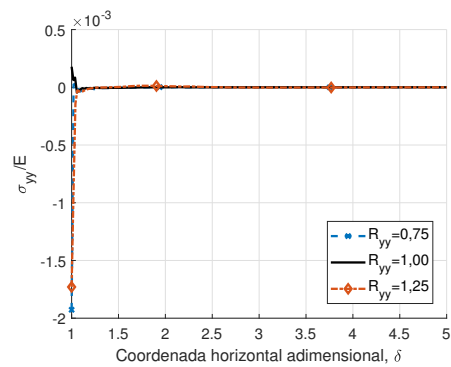
Na direção  $z$ , é mostrado um estado puramente trativo para o caso  $R_{yy} = 0,75$ , diferentemente do que ocorre para os outros casos, em que os maiores níveis de tensão são compressivos, ocorrendo nas proximidades do indentador e tornando-se trativos à medida em que se afastam do contato. Novamente, na direção  $y$  do modelo, por conta da superfície estar livre de tensões, as tensões são nulas, com exceção das proximidades do contato, onde há empilhamento.

Na Figura 4.25(d), é mostrada a tensão de von Mises  $\sigma_e$ . É observado que, na coordenada horizontal, o coeficiente  $R_{yy}$  não possui mais um papel tão relevante como na direção vertical. Além disso, mais uma vez nota-se que a deformação plástica acumulada  $\bar{\epsilon}^p$ , mostrada na Figura 4.25(f), é pouco afetada pela anisotropia do material, com alterações apenas na região de contato, apresentando diferentes picos de deformação.

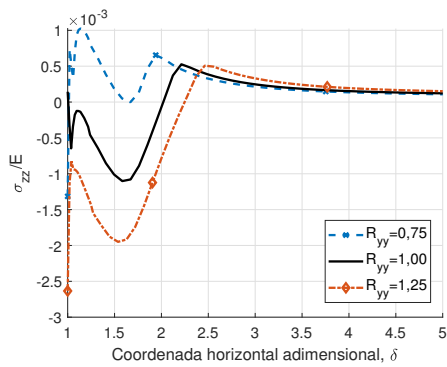
Figura 4.25 – Campos de tensão e deformação ao longo da coordenada horizontal adimensional  $\delta$  em função de  $R_{yy}$



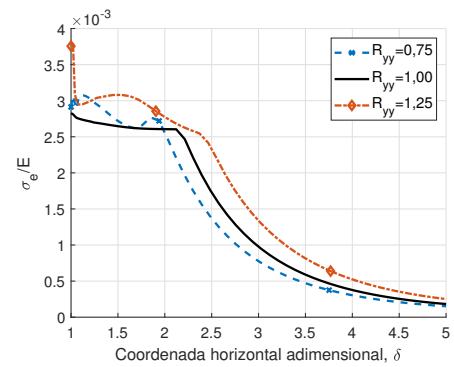
(a)  $\sigma_{xx}/E$  em função de  $\delta$



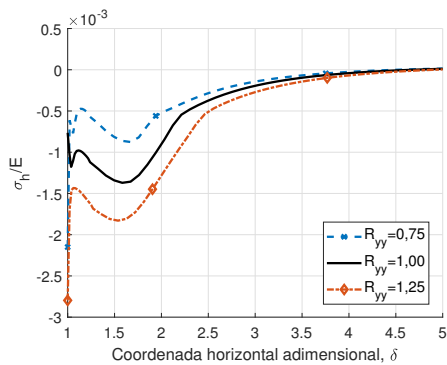
(b)  $\sigma_{yy}/E$  em função de  $\delta$



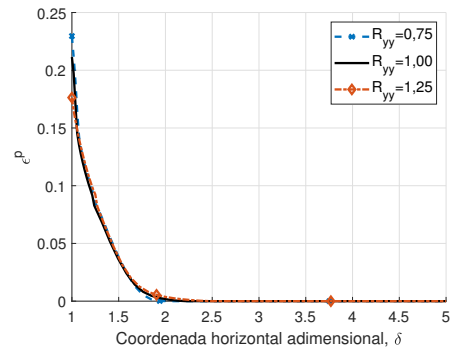
(c)  $\sigma_{zz}/E$  em função de  $\delta$



(d)  $\sigma_e/E$  em função de  $\delta$



(e)  $\sigma_h/E$  em função de  $\delta$



(f)  $\bar{\epsilon}^p$  em função de  $\delta$

Fonte: Autor.

## 5 CONCLUSÃO

No presente trabalho foi desenvolvido um modelo computacional de elementos finitos usando o programa comercial *Abaqus* para simular ensaios de indentação mecânica de materiais elastoplásticos. Para isso, o material foi avaliado utilizando o critério de escoamento de Hill, de forma que a anisotropia plástica em casos específicos também pudesse ser avaliada. O modelo foi desenvolvido ao ensaio de indentação de Vickers, entretanto pode ser adaptado para outros métodos.

Inicialmente, o modelo foi validado com base em simulações e experimentos disponíveis na literatura. O modelo apresentou bom comportamento, tanto em relação aos experimentos como às simulações de outros autores e, dessa forma, considera-se que apresenta resultados adequados. Além disso, foi desenvolvido um método para obter a dureza do material, reduzindo oscilações computacionais. Na análise, observou-se que, para obter a dureza, é necessária a aplicação de uma profundidade mínima, de forma que a análise possa convergir para um valor estável.

Além disso, os efeitos do atrito foram avaliados, e observou-se pouca influência deste na obtenção da dureza do material, assim como era esperado por outros autores (BHATTACHARYA; NIX, 1988). Por fim, os campos de tensão e deformação foram avaliados considerando variações na profundidade de aplicação de carga  $h$ , no coeficiente de endurecimento  $n$  do material, no módulo de elasticidade  $E$  e na anisotropia plástica do material.

Para a profundidade de aplicação de carga  $h$ , ainda foi feita uma comparação com um modelo teórico desenvolvido por outros autores (SANTOS; SRIVASTAVA; RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, 2021). A comparação apresentou bons resultados, e as maiores diferenças se devem à hipótese do modelo teórico, que assume um problema com simetria esférica e desconsidera os efeitos da superfície livre de tensões e do empilhamento de material na região indentada. Observou-se pouca dependência dos campos normalizados tanto para a profundidade de indentação  $h$  e para o módulo de elasticidade  $E$  adotado. Maiores diferenças foram ocasionadas pela variação do endurecimento do material e da anisotropia plástica.

Em trabalhos futuros, sugere-se que o modelo seja ampliado para ensaios de indentação dinâmica, ou seja, dependentes da taxa de aplicação de carga. Dessa forma, o modelo poderá ser usado para caracterizar materiais em condições de impacto, que são comuns no ambiente aeroespacial.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BANABIC, D. **Sheet metal forming processes: constitutive modelling and numerical simulation**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- BASHUROV, V. V. et al. Experimental modelling and numerical simulation of high-and hypervelocity space debris impact to spacecraft shield protection. **International Journal of Impact Engineering**, Elsevier, v. 20, n. 1-5, p. 69–78, 1997.
- BHATTACHARYA, A.; NIX, W. Finite element simulation of indentation experiments. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 24, n. 9, p. 881–891, 1988.
- CALLISTER, W. D.; RETHWISCH, D. G. **Materials science and engineering: an introduction**. [S.l.]: Wiley New York, 2006. v. 7.
- DAO, M. et al. Computational modeling of the forward and reverse problems in instrumented sharp indentation. **Acta materialia**, Elsevier, v. 49, n. 19, p. 3899–3918, 2001.
- de Souza Neto, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. **Computational methods for plasticity: theory and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- DOWLING, N. E. **Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue**. [S.l.]: Pearson, 2013. v. 4.
- DURBAN, D.; MASRI, R. Dynamic spherical cavity expansion in a pressure sensitive elastoplastic medium. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, n. 20, p. 5697–5716, 2004. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768304001428>>.
- HILL, R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 193, n. 1033, p. 281–297, 1948.
- JOHNSON, K. The correlation of indentation experiments. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier, v. 18, n. 2, p. 115–126, 1970.
- KELSO, T. et al. Analysis of the iridium 33-cosmos 2251 collision. **Advances in the Astronautical Sciences**, Univelt, Inc., v. 135, n. 2, p. 1099–1112, 2009.
- KLINKRAD, H. **Space debris: models and risk analysis**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- LU, J.; SURESH, S.; RAVICHANDRAN, G. Dynamic indentation for determining the strain rate sensitivity of metals. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier, v. 51, n. 11-12, p. 1923–1938, 2003.
- MEYERS, M. A.; CHAWLA, K. K. **Mechanical behavior of materials**. [S.l.]: Cambridge university press, 2008.
- MOK, C.; DUFFY, J. The behavior of metals at elevated temperatures under impact with a bouncing ball. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 6, n. 2, p. 161–175, 1964.
- NASA. **Photo Gallery**. 2019. Acesso em 06 de julho de 2022. Disponível em: <<https://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/photo-gallery/>>.

OÑATE, E. **Structural analysis with the finite element method. Linear statics: volume 1: basis and solids.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009.

SANTOS, T. dos; SRIVASTAVA, A.; RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J. A. The combined effect of size, inertia and porosity on the indentation response of ductile materials. **Mechanics of Materials**, Elsevier, v. 153, p. 103674, 2021.

SZABÓ, B.; BABUŠKA, I. **Introduction to finite element analysis: formulation, verification and validation.** [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 35.

TANNER, A. B.; MCDOWELL, D. L. Deformation, temperature and strain rate sequence experiments on ofhc cu. **International Journal of Plasticity**, Elsevier, v. 15, n. 4, p. 375–399, 1999.

## APÊNDICE A – CALIBRAÇÃO DO MODELO DO COBRE OFHC

Neste apêndice, é mostrada a calibração do modelo de endurecimento para o cobre OFHC.

Como já mostrado, o modelo a ser calibrado do endurecimento é dado pela equação:

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \left( 1 + \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\varepsilon_0} \right)^n \quad (\text{A.1})$$

Em Lu, Suresh e Ravichandran (2003), foi utilizado o cobre OFHC com uma tensão de escoamento inicial de  $\sigma_0 = 302$  MPa. Como o autor não disponibiliza dados experimentais do endurecimento do cobre, a calibração do modelo foi feita com base nos experimentos de Tanner e McDowell (1999). O ajuste da curva aos dados experimentais de Tanner e McDowell (1999) foi feita através de uma rotina em *MATLAB*, utilizando o método de mínimos quadrados não linear. Os parâmetros ajustados são mostrados na Tabela A.1.

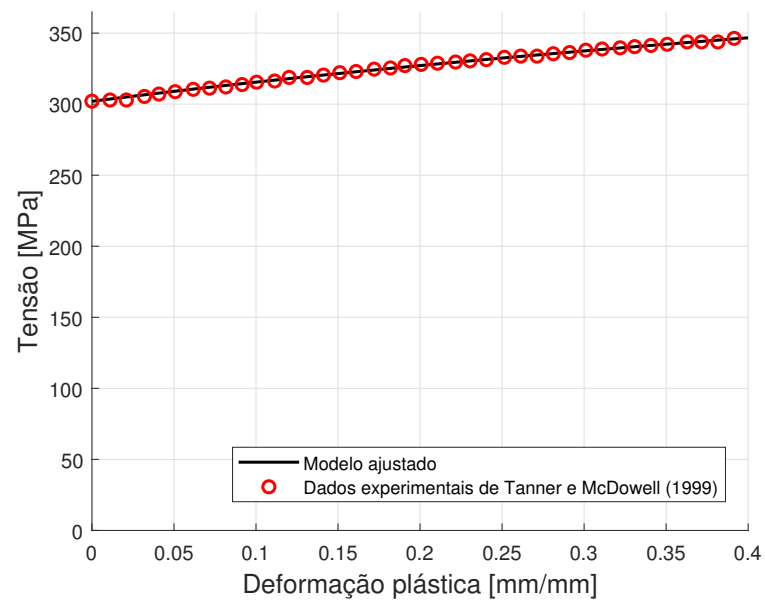
Tabela A.1 – Parâmetros calibrados para o cobre eletrolítico baseados no ajuste dos dados experimentais de Tanner e McDowell (1999)

$\sigma_0$ [MPa]	$\varepsilon_0$	$n$
302	0,44	0,21

Fonte: Autor

Na Figura A.1, é mostrada a comparação do modelo ajustado com os dados experimentais.

Figura A.1 – Ajuste do modelo de endurecimento do cobre OFHC baseado nos dados experimentais de Tanner e McDowell (1999)



Fonte: Autor.

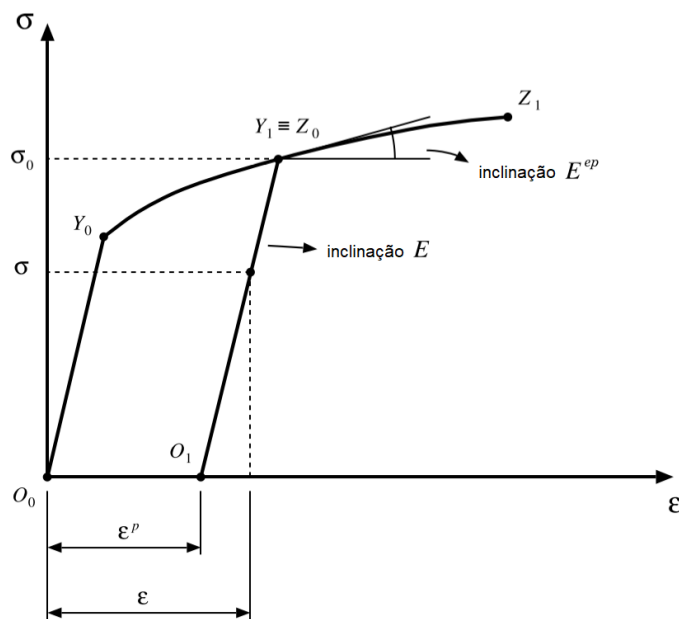


## APÊNDICE B – FUNDAMENTOS DA TEORIA DA PLASTICIDADE

Na presente seção, serão discutidos os fundamentos do modelo de plasticidade utilizado no trabalho. É ressaltado, inicialmente, que a discussão tratada será sobre materiais em que a deformação plástica não depende da taxa de deformação, sendo a hipótese válida para modelos quase-estáticos. A teoria da plasticidade desenvolvida traz resultados muito satisfatórios para várias classes de materiais de engenharia, como exemplo, os metais (de Souza Neto; PERIC; OWEN, 2011). Ainda, a teoria será desenvolvida para o caso uniaxial, e pode ser expandida para um caso tridimensional.

A curva de tensão por deformação, considerando uma aplicação uniaxial de carga, é mostrada na Figura B.1. A curva será, então, discutida do ponto de vista fenomenológico.

Figura B.1 – Curva de tensão por deformação para a aplicação de uma carga uniaxial



Fonte: (de Souza Neto; PERIC; OWEN, 2011)

Na Figura B.1, é mostrada a tensão axial  $\sigma$  em função da deformação  $\epsilon$  do material. Para o caso, inicialmente uma carga foi aplicada (ponto  $O_0$ ), atingindo um determinado nível de tensão  $\sigma_0$  (ponto  $Y_1$ ). Então, a carga foi retirada, até o ponto em que a tensão torna-se novamente nula, no ponto  $O_1$ . Para essa primeira etapa, são destacados alguns aspectos de interesse. É observada uma mudança de comportamento na curva, que ocorre no ponto  $Y_0$ , indicando a plastificação do material. A tensão no ponto  $Y_0$  é denominada tensão de escoamento inicial, e, a partir desse ponto, o endurecimento do material é observado (ou seja, mudança do nível da tensão de escoamento com a deformação plástica).

É observado que, na descarga, descrita pelo segmento  $Y_1O_1$ , a inclinação da curva é dada pelo módulo de elasticidade, sendo igual a inclinação da carga. Observa-se, ainda, que a tensão é anulada com um certo nível de deformação, sendo essa deformação denominada plástica, por ser permanente. É aplicado, então, um segundo carregamento no material, cuja tensão máxima é maior que a tensão de aplicação passada. A curva de recarga é descrita pelos segmentos  $O_1Z_0$  e  $Z_0Z_1$ . É observado, no caso, que os pontos  $Y_1$  e  $Z_0$  são coincidentes, ou seja, a tensão de escoamento foi alterada. Essa coincidência é apenas uma aproximação, visto que pequenas diferenças são observadas em curvas experimentais, sendo entretanto desconsideradas na maioria dos casos (de Souza Neto; PERIC; OWEN, 2011). Pela figura, ainda, é possível notar que a deformação total do material  $\varepsilon$  é decomposta em uma parcela elástica  $\varepsilon^e$  e uma parcela plástica  $\varepsilon^p$ , como mostrado:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (\text{B.1})$$

Ainda, é mostrada a equação que relaciona a tensão axial  $\sigma$  com a deformação elástica  $\varepsilon^e$  no regime elástico:

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (\text{B.2})$$

## B.1 – CRITÉRIO DE ESCOAMENTO

É necessário definir um critério de escoamento, de forma a delimitar o regime elástico descrito anteriormente. Para isso, é definida uma função de escoamento  $\Phi$ :

$$\Phi(\sigma_e, \bar{\sigma}) = \sigma_e - \bar{\sigma} \quad (\text{B.3})$$

onde  $\sigma_e$  é uma tensão equivalente e  $\bar{\sigma}$  é a tensão de escoamento do material, de forma que o regime elástico é formalmente descrito por:

$$\sigma \mid \Phi(\sigma_e, \bar{\sigma}) < 0 \quad (\text{B.4})$$

Ou seja:

$$\sigma_e < \bar{\sigma} \quad (\text{B.5})$$

Observa-se, ainda, a restrição de que, em qualquer caso, a tensão é delimitada pela tensão de escoamento atual, de forma que a condição abaixo deve ser respeitada:

$$\Phi(\sigma_e, \bar{\sigma}) \leq 0 \quad (\text{B.6})$$

## B.2 – EVOLUÇÃO PLÁSTICA

A evolução da deformação plástica é dada pela equação:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma) \quad (\text{B.7})$$

onde a função  $\text{sign}(\cdot)$  é a função sinal, definida na forma:

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \geq 0 \\ -1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Dessa forma, a Equação (B.7) estabelece que a taxa de deformação plástica será positiva em tração e negativa em compressão. Na equação,  $\dot{\lambda}$  é denominado de multiplicador plástico não negativo, que satisfaz a condição de carregamento e descarregamento:

$$\dot{\lambda} \Phi = 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0. \quad (\text{B.9})$$

Dessa forma, observa-se que, caso  $\Phi < 0$  (ou seja, considerando o regime elástico), o multiplicador deve ser nulo de forma que não tenha desenvolvimento plástico. Por outro lado, apenas haverá desenvolvimento plástico quando  $\Phi = 0$ , ou seja, com  $\sigma_e = \bar{\sigma}$  (de Souza Neto; PERIC; OWEN, 2011).

## B.3 – LEI DE ENDURECIMENTO

Resta, ainda, definir como será o desenvolvimento da tensão de escoamento de acordo com a deformação plástica. Esse comportamento é definido como endurecimento do material, e tem o seguinte formato:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p) \quad (\text{B.10})$$

onde  $\bar{\varepsilon}^p$  é a deformação plástica acumulada, definida na forma:

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p| dt \quad (\text{B.11})$$

Assim, a curva de endurecimento do material será a curva dada pela função  $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p)$ . Nesse trabalho, adota-se a forma dada na Equação (3.13).