UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT

Douglas Borges Manenti

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Santa Maria, RS
2016

Douglas Borges Manenti

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Fusieger

Santa Maria, RS
2016

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MANENTI, DOUGLAS BORGES
ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS / DOUGLAS BORGES MANENTI.- 2016.
60 p.; 30 cm

Orientador: PEDRO FUSIEGER
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2016

1. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 2. ANÁLISE COMBINATÓRIA I. FUSIEGER, PEDRO II. Título.

Douglas Borges Manenti

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 26 de julho de 2016:

____

Pedro Fusieger, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

____

José Henrique Rodrigues dos Santos, Dr. (UFRGS)

____

Fidelis Bittencourt, Dr. (UFSM)

____

João Roberto Lazzarin, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família, pai, irmão, tios que me acolheram. Mas em especial à minha mãe, por nunca me deixar desistir de meus objetivos, sempre me dando confiança para alcançá-los.

A minha noiva Daiane Macarini Silveira por me confortar em momentos de dificuldades.

Aos meus amigos, companheiros de mestrado, em especial ao nosso grupo de estudos Fabiana Bordin, Jocemar Welter, Mauro Rigodanzo e Luís Guilherme. Por compartilhar conhecimentos e momentos de descontração pré-avaliações.

A minha colega de profissão, Héverli Laíse Gambin por ser sempre prestativa e incentivadora na produção deste trabalho.

A todo o corpo docente do PROFMAT-UFSM, pela orientação nesse processo de aprendizagem, em especial ao Professor Doutor Pedro Fusieger, pela paciência e disposição na construção deste trabalho.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou construção.” PAULO FREIRE

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT
Universidade Federal de Santa Maria – UFSM

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
AUTOR: DOUGLAS BORGES MANENTI
ORIENTADOR: PEDRO FUSIEGER
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 26 de julho de 2016.

O presente trabalho refere-se a uma proposta didática aplicada aos alunos do Ensino Médio. Esta proposta tem o intuito de abordar de modo mais significativo para os discentes conceitos de análise combinatória. Um conteúdo que afasta professores e estudantes do gosto pela matemática é proposto nesta dissertação através da tendência pedagógica de Resolução de Problemas, tendência que tem como característica o desenvolvimento dos conceitos pelo aluno através de problemas elaborados para esse desafio. Propõe-se um método livre de fórmulas, muitas vezes, usadas em demasia nos métodos mais tradicionais de ensinar análise combinatória. Para essa experimentação, foi escolhida a Escola Estadual de Ensino Médio João Triches, localizada na cidade de Caxias do Sul-RS. Antes da experiência propriamente dita foi ofertada toda a fundamentação para a utilização da proposta, o porquê da sua importância, onde encontrar o material adequado e alguns exemplos de como abordar uma aula com a tendência que defendemos.

Palavras-chaves: Análise Combinatória. Resolução de Problemas. Proposta Didática. Ensino Médio

ABSTRACT

Master's Dissertation
Professional Master's degree in National network Mathematics – PROFMAT
Santa Maria Federal University – UFSM

COMBINING ANALYSIS: AN APPROACH WITH PROBLEM SOLVING
AUTHOR: DOUGLAS BORGES MANENTI
ADVISOR: PEDRO FUSIEGER
Place and Date of presentation: Santa Maria, July 26, 2016.

The present work is about didactic proposal, applied in high school students. This proposal objective approaches a mode with more means to the students, concepts of combinatorial analysis. A content that put away teachers and students to like the mathematics, in this dissertation the proposal is through the pedagogical trend of resolution problems. Trend this that have how characteristics the development of concepts by the students through problems prepared for this challenge. Propose a method more free of the formulas, that a lot of times are used too much at the traditional teach way. To this experimentation went choose the high school João Thiches, localized in Caxias do Sul-RS. Before the experience was made all the substantiation to use the propose, the why of its importance, where found the suitable material and some examples about how approach a class with this trend that we defend.

Indexing terms: Combinatorial Analysis. Resolution Problems. Didactic Proposal. High School.

SUMÁRIO

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS 9

2 UMA ABORDAGEM COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 11

2.1 O QUE É UM PROBLEMA? 11

2.2 A IMPORTÂNCIA DA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA 13

2.3 ELABORANDO UMA AULA COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 15

3 COMO ABORDAR E RESOLVER UM PROBLEMA COM ÊNFASE EM ANÁLISE COMBINATÓRIA? 19

3.1 ETAPAS PARA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA 19

3.1.1 Compreender o problema 19

3.1.2 Estabelecendo um plano 20

3.1.3 Executar o plano 20

3.1.4 Verificar a resolução 21

3.1.5 Primeiro exemplo 21

3.2 NORMAS DA BOA TÉCNICA DE MORGADO 25

3.2.1 Segundo Exemplo 26

3.2.2 Terceiro exemplo 28

4 PROPOSTA DIDÁTICA 31

4.1 AULA ZERO 32

4.1.1 Objetivos 32

4.1.2 Assuntos abordados 32

4.1.3 Desenvolvimento 32

4.2 PRIMEIRA AULA 33

4.2.1 Objetivos 33

4.2.2 Conceitos abordados 33

4.2.3 Problemas escolhidos 33

4.2.4 Desenvolvimento 35

4.3 SEGUNDA AULA 41

4.3.1 Objetivos 41

4.3.2 Conceitos abordados 41

4.3.3 Problemas escolhidos 41

4.3.4 Desenvolvimento 43

4.4 TERCEIRA AULA 50

4.4.1 Objetivos: 50

4.4.2 Conceitos abordados 50

4.4.3 Problemas escolhidos 50

4.4.4 Desenvolvimento 52

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 58

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para a grande maioria dos alunos, matemática não é uma disciplina agradável no processo de aprendizagem e para nós professores desta disciplina, mostrar o significado nos conteúdos matemáticos tornou-se mais difícil devido ao excesso de conteúdo exigido em cada ano escolar. Quando estamos falando de análise combinatória, essa dificuldade é ainda maior. Talvez, a causa seja a própria dificuldade dos professores nessa matéria. O excesso de fórmulas, muitas vezes descontextualizadas, não vendo qual o conjunto que estamos contando, provoca insegurança nas resoluções.

O objetivo principal deste trabalho é introduzir os conceitos de análise combinatória de modo mais significativo para os discentes e os docentes, sem formulismos, tratando os problemas como ferramenta de aprendizagem e objeto de desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos.

Buscamos um caminho didático-pedagógico para derrubar essa barreira, que impede a apropriação dos conceitos de análise combinatória pelos professores e alunos de matemática. Para isso, esta dissertação traz quatro capítulos principais.

Em um momento inicial, será apresentado todo o aporte teórico para produção de uma aula na metodologia de Resolução de Problemas, trazendo autores relacionados ao tema da dissertação que defendem essa prática, justificando a nossa escolha. Além disso, no primeiro capítulo, pontuamos algumas observações relevantes para essa prática. Por exemplo: o que é um problema, qual grupo de problemas nos interessa, os cuidados que temos que tomar e onde encontrar material necessário para a formulação de uma aula nessa perspectiva.

O segundo capítulo discorre sobre como abordar um problema, com foco na análise combinatória, na perspectiva de um dos maiores autores, se não o maior, o matemático húngaro George Polya. O autor trata da resolução de problemas, dividindo sua solução em quatro etapas: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e verificar sua resolução. Também citaremos o mestre brasileiro, Professor Augusto César de Oliveira Morgado, expondo suas três normas da boa técnica: postura, divisão e não adiamento das dificuldades. Esse segundo autor é específico para problemas que envolvem análise combinatória. Para melhor entendimento, o capítulo trata desses tópicos com exemplos resolvidos e comentados.

A terceira parte refere-se a nossa proposta didática, realizada na Escola Estadual de Ensino Médio João Triches, localizada no bairro Pio X, na zona central da cidade de Caxias do Sul – RS, executada em forma de uma oficina. Esse capítulo apresenta as aulas ministradas durante a oficina, de modo minucioso, com os objetivos, conceitos abordados, problemas apresentados, resoluções dos alunos, comentários alusivos aos momentos das aulas e posteriores a elas. Nesse momento, colocamos em prática todo conteúdo abordado anteriormente, em duas partes: a produção da aula, com todos os cuidados e pesquisa citados no primeiro e segundo capítulos, e as observações e comentários que são relativos ao que aconteceu nas aulas e na produção dos alunos, descrevendo os erros e acertos das atividades e o retorno obtido em cada uma.

Por último, trazemos as considerações finais, comentando a própria dissertação, analisando os pontos positivos e negativos da pesquisa, tecendo algumas reflexões, que só podem ser feitas em um momento posterior a todo o trabalho realizado. Argumentamos a favor da aplicação desta abordagem por outros formadores, incentivando, inclusive, a apropriação deste método para outros conteúdos matemáticos.

2 UMA ABORDAGEM COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1 O QUE É UM PROBLEMA?

Antes de tentar responder a essa pergunta, vejamos algumas definições do que é um problema, e o que é um problema matemático.

> Problema: questão matemática proposta para que se lhe dê solução; questão não resolvida e que é objeto de discussão, em qualquer domínio do conhecimento. (HOUAISS, 2004)
>
> Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, a solução não está disponível de início. No entanto, é possível construí-la. (PCN, 1997, p. 44)
>
> O que é um problema? É qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la. O que é um problema matemático? É qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la. (DANTE, 1995, p. 9)

Cada pessoa pode definir o que é um problema com suas próprias palavras. A questão principal deste trabalho, na verdade, é trabalhar com problemas que facilitem a assimilação do conteúdo matemático abordado, através da perspectiva de resolução de problemas.

DANTE (1995) enumera alguns tipos de problemas. A classe que nos interessa é o que ele denomina “problemas-processo ou heurístico” e define como:

> Problemas-processo ou heurístico: São problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidos diretamente para linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá leva-lo à solução. Por isso, tornam-se mais interessantes do que os problemas-padrão.
> Os problemas-processo aguçam a curiosidade do aluno e permitem que ele desenvolva sua criatividade, sua iniciativa e seu espírito explorador. E, principalmente, iniciam o aluno no desenvolvimento da estratégia e procedimentos para resolver situações-problema, o que, em muitos casos, é mais importante que encontrar a resposta correta. (DANTE, 1995, p.17)

Para melhor exemplificar qual material se procura, foi montada uma tabela que diferencia exercícios de problemas matemáticos. Frisamos, entretanto, que exercícios também têm seu espaço na matemática; apenas não fazem parte desta abordagem.

<table>
<tr><th>EXERCÍCIO MATEMÁTICO</th><th>PROBLEMA MATEMÁTICO</th></tr>
<tr><td>Determine o vértice da parábola que representa a função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 5$</td><td>A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.

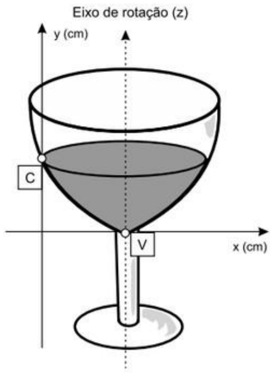


Imagem relativa a questão do ENEM

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é: a) 1. b) 2. c) 4. d) 5. e) 6.

(Questão 148, prova cinza do ENEM de 2013)</td></tr>
<tr><td>Calcule a área de um triângulo equilátero cujo lado mede 2 cm.</td><td>Prove que a soma das distâncias de um ponto no interior de um triângulo equilátero aos seus lados não depende da posição do ponto.

(Questão retirada do livro “Círculos Matemáticos a Experiência Russa” pg176)</td></tr>
<tr><td>1. Calcule:
a) $A_{4,2}$
b) $A_{7,7}$
c) $C_{5,3}$

2. Determine quantos são os anagramas da palavra:
a) BRASIL
b) ARARA
c) URUGUAI</td><td>Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver mais pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.
<table>
<tr><th>Quesitos</th><th colspan="2">1.Fantasia e alegoria</th><th colspan="2">2.Evolução e Conjunto</th><th colspan="2">3.Enredo e Harmonia</th><th colspan="2">4.Bateria</th><th rowspan="2">Total:</th></tr>
<tr><td>Jurado</td><td>A</td><td>B</td><td>A</td><td>B</td><td>A</td><td>B</td><td>A</td><td>B</td></tr>
<tr><td>Escola I</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>8</td><td>9</td><td>9</td><td>8</td><td></td><td>55</td></tr>
<tr><td>Escola II</td><td>9</td><td>8</td><td>10</td><td>9</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td></td><td>66</td></tr>
<tr><td>Escola III</td><td>8</td><td>8</td><td>7</td><td>8</td><td>6</td><td>7</td><td>6</td><td></td><td>50</td></tr>
<tr><td>Escola IV</td><td>9</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>9</td><td>10</td><td>10</td><td></td><td>68</td></tr>
<tr><td>Escola V</td><td>8</td><td>7</td><td>9</td><td>8</td><td>6</td><td>8</td><td>8</td><td></td><td>54</td></tr>
</table>
Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?
A) 21 B) 90 C) 750 D) 1250 E) 3125

(Questão 173, prova cinza do ENEM de 2015)</td></tr>
</table>

A exemplificação acima esclarece significado de exercício, que tem utilidade de fixação de alguma técnica e, portanto deve ser usada como uma ferramenta didática, porém não nos proporciona o incentivo e o empenho para a evolução que desejamos.

Um problema, colocado de forma adequada, proporciona o desenvolvimento do aluno, como ser crítico e pensante, desenvolvendo não somente seu raciocínio lógico, mas também senso crítico, sua atitude e seu caráter.

A principal motivação para esta pesquisa foi a possibilidade de transmitir os conceitos da análise combinatória através da resolução de problemas, em que os alunos construirão os conceitos, gradativamente, por meio de suas descobertas e com a orientação do professor.

É importante destacar que o aluno foi protagonista nesse processo, uma vez que o objetivo não foi a memorização de algoritmos. Logo, os problemas foram as ferramentas e os meios para a construção das habilidades do educando. Os problemas pelos quais nos interessamos são meio e não fim. Para sintetizar o processo, citamos CARRAHER:

> “enfatiza que problemas em que o aluno faz uso imediato das fórmulas que estudou recentemente não se caracterizam como verdadeiros problemas. Problemas exigem reflexão, caso contrário, defrontamo-nos com exercícios que exigem apenas o uso da memória para sua resolução. Quando tratadas mecanicamente, as situações problema resumem-se em meros exercícios, enquanto os verdadeiros problemas exigem, além da compreensão dos conceitos matemáticos, que o aluno faça relações entre seus conhecimentos já construídos e a possível solução do problema.”.
> (CARRAHER, 1986, apud LUPPINACCI e BOTIN, 2004 p.3)

2.2 A IMPORTÂNCIA DA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA

Serão abordados neste capítulo a resolução de problemas, a didática envolvida nesta perspectiva, os cuidados na formulação das questões, a abordagem na apresentação e as técnicas usadas para a resolução.

Polya (1978) enxerga na resolução de problemas um caminho para a aproximação do educando de conteúdos matemáticos. Quando resolvemos uma charada, uma palavra cruzada ou desvendamos o final de um seriado investigativo, sentimo-nos satisfeitos. Essa satisfação pode servir de motivação para o aluno, e a proposição de um problema ou um desafio matemático a ele é muito benéfica, pois:

> O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprio meios, experimentará a tesão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda sua vida, a sua marca na mente e no caráter. POLYA, (1995, p. V)

Dante enumera vários objetivos que alcançamos quando trabalhamos com resolução de problemas com nossos alunos:

> Um dos principais objetivos do ensino de matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações-problema que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las. DANTE (1995, p.11)

As palavras desafio e motivação aparecem no texto. Hoje em dia, a ligação dessas palavras com aula de matemática ou conteúdos matemáticos parece distante. Se conseguirmos motivar o aluno, incentivá-lo a buscar conhecimento matemático através de problemas, já será mais que suficiente para trabalhar um pouco com esta perspectiva matemática.

> Ensinar apenas conceitos e algoritmos que atualmente são relevantes parece não ser o caminho, pois eles poderão tornar-se obsoletos daqui a quinze ou vinte anos, quando a criança de hoje estará no auge de sua vida produtiva. Assim, um caminho bastante razoável é preparar o aluno para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas. E, para isso, é fundamental desenvolver nele iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência através da resolução de problemas. DANTE (1995, p.12)

Sobre o assunto, reforçando o pensamento de DANTE (1995), o PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio), logo na introdução, cita a importância da resolução de problemas:

> À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. (BRASIL, 2000, p. 40)

Nas duas citações anteriores, percebe-se a preocupação com o desenvolvimento das capacidades e habilidades do aluno. Ao falarmos dessas aptidões para a solução de problemas, não estamos somente preparando-o para o agora, mas sim para o futuro. Situações-problemas são constantes na vida de qualquer cidadão e mudam cada vez mais rapidamente. Por isso, se a pessoa está preparada para resolver somente um algoritmo ou um simples exercício de repetição, ela estará desarmada diante de qualquer alteração da rotina.

Porém, se ela tiver a capacidade de interpretar, entender e, logo em seguida, montar uma estratégia para a resolução de problemas, o problema pode mudar, mas a solução será possível, visto que:

> No mundo de intensas transformações científicas e tecnológicas, o cidadão necessita de uma formação geral, sólida, capaz de ajudá-lo a pensar cientificamente, de colocar à luz da ciência os problemas humanos. Dessa forma, nossa sociedade determina que ele desenvolva habilidades que possibilitem uma maneira de processar e resolver problemas com mais rapidez e eficácia. Para isso, vários setores da sociedade são responsáveis pela formação desse cidadão, e a escola é um deles. (PINHEIRO, 2008, p. 11)

Complementamos, citando os objetivos que DANTE (1995, p. 11):

- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática;
- Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base matemática às pessoas;

Para reforçar a importância que o PCN dá à resolução de problemas, a partir dos objetivos, das finalidades que o aluno deve desenvolver no Ensino Médio, ainda aparecem:

- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos; (BRASIL, 2000, p. 42)

2.3 ELABORANDO UMA AULA COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Primeiramente, será apresentado onde encontrar o material necessário para a produção de uma aula nessa perspectiva e onde pode ser acessado o principal objeto, os problemas.

Ao refletir sobre o material, um livro veio à mente, “Círculos Matemáticos, A Experiência Russa”. Esse livro foi escrito na antiga União Soviética, traduzido para o inglês na década de noventa e, mais recentemente, pelo IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) para o nosso idioma. Em cada capítulo do livro consta um assunto matemático com sequências de problemas.

No prefácio da edição inglesa, pode ser notada a expectativa do tradutor sobre o quão enriquecedor seria a utilização do material.

> Então, que espécie de livro é este? É um livro produzido por circunstancias culturais notáveis, que fomentaram a criação de grupos formados por alunos, professores e matemáticos na antiga União Soviética, chamados de círculos matemáticos. É baseado na ideia de que o estudo da matemática pode gerar o mesmo entusiasmo que praticar um esporte com um time, sem ser, necessariamente, competitivo.
> Então ele parece mais com um livro de recreações matemáticas – exceto que é mais sério. Escrito por professores matemáticos pesquisadores trabalhando em universidades, é o resultado de anos de experiência destes matemáticos com o grupo de alunos do ensino médio. As sequências de problemas estão estruturadas de modo que praticamente qualquer estudante pode atacar os primeiros exemplos. Mas os mesmos princípios desenvolvidos na resolução de problemas nos estágios preliminares tornam possível a solução mais tarde de problemas extremamente desafiadores. Entre esses dois, existem problemas de todos os níveis de interesse ou habilidade. (SAUL, 1996, p. v)

Neste livro foram encontradas três características importantes, para ser o ponto de partida na escolha dos problemas. O autor separa problemas por conteúdos e, dentro dos conteúdos, separa os problemas por conceitos. Os problemas não são de memorização, mas sim de raciocínio lógico. E, por último, existe uma sequência, em que há um crescimento da dificuldade e, nesse crescimento, existe a ligação do problema mais elementar ao mais desafiador. Por fim, conceitos iniciais são revistos com um acréscimo de novos conceitos.

Outra fonte muito importante foi o próprio ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio). Atualmente, a prova que é realizada anualmente conta com 45 questões de matemática, entre as quais, sempre estão presentes problemas de análise combinatória e de probabilidade que envolvem combinatória. A contextualização das questões é o que as torna, mais interessantes, pois o aluno consegue enxergar a aplicabilidade dos cálculos no cotidiano:

> O modelo proposto pelo ENEM considera fundamentalmente para sua avaliação o desenvolvimento e constituição das estruturas mentais do sujeito que, em contínua interação com a realidade, constrói seus conhecimentos. Vale dizer que esse modelo de avaliação busca medir e qualificar as estruturas mentais que permeiam as interações do sujeito com uma realidade física e social hoje repleta de contínuas transformações. (TORRES, 2002, p. 35)

As questões de matemática do ENEM são baseadas em cinco competências, entre elas destaca-se: “Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema”. Nota-se que aparece a palavra “enfrentar” e não “resolver”. Enfrentar situações-problema encaixa-se perfeitamente com esta proposta.

Para falar sobre como agir diante das situações-problema que o aluno enfrenta nas questões do ENEM, TORRES (2002) descreve de maneira pontual o seguinte:

> Para enfrentá-las é preciso ainda saber como agir diante delas, selecionando ações ou procedimentos que consideramos os melhores naquele momento. Isto implica ativar nossos esquemas mentais, mobilizando conhecimentos prévios e transformando-os ou atualizando-os em função daquilo que é novo a cada situação. (TORRES, 2002, p. 36)

Outra característica importante é que as questões não têm um caminho único para a sua resolução, ou seja, são possíveis inúmeros modos de chegar à resposta desejada. Isso é ótimo em resolução de problemas, porque além de o aluno possuir várias formas de encarar o problema, o debate após as questões resolvidas fica mais interessante e dinâmico.

A terceira e última fonte de dados deste estudo sobre problemas foi na nossa OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), em razão de existir um vasto material onde as questões de análise combinatória sempre estão presentes nessas competições. Como no ENEM, as questões estão contextualizadas, exigem por meio da inferência do aluno para resolução e possuem um nível de dificuldade significativo. Por isso, são úteis para o processo de observação, porque são ideais para um estágio não inicial, pois exigem um domínio maior sobre os conceitos.

Analisando esses materiais, percebemos que existe uma infinidade de problemas para trabalhar com os educandos, mas, para uma aula significativa de resolução de problemas, é necessário ter certos cuidados. SÁ (2005) enumera onze itens citados abaixo:

> 1. Não tente fazer uma aula dentro dessa concepção de maneira improvisada;
> 2. Determine qual é o problema mais simples e interessante para a turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução;
> 3. Descubra um processo de resolver o problema sem uso da operação, normalmente o processo procurado envolve o uso de algum material manipulativo ou uso de algum outro conceito já conhecido;
> 4. Proponha o problema em sala e dê um pouco de tempo para turma pensar numa solução;
> 5. Solicite à turma que apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem;
> 6. Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma;
> 7. Analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema;
> 8. Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado;
> 9. Sistematize o conceito do conteúdo que você tinha como objetivo a trabalhar;
> 10. Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado;
> 11. Proponha novos problemas envolvendo o assunto sistematizado; (SÁ, 2005, p.75 apud PINHEIRO, 2008 p.54).

No entanto, três cuidados, que serão comentados a seguir, são indispensáveis para o sucesso do trabalho.

Inicialmente, de acordo com o livro “Círculos Matemáticos, A Experiência Russa”, devemos separar os problemas por conteúdos e por conceitos. Se quisermos que nossos alunos construam determinados conhecimentos faz-se necessário que exista uma série de problemas que os possibilite essa assimilação.

Em seguida, certificar-se quanto à dificuldade do problema. Temos que nos preocupar muito com o nível do desafio, em relação ao estágio do aluno, para que ele se sinta desafiado, sendo que o problema não pode ser tão elementar, que ele nem reflita direito para encontrar a solução, nem tão complexo ao ponto de desmotivar-se, pois não saberá nem por onde começar.

Por fim, ter um cuidado enorme com os desafios propostos, ou seja, saber qual é o tamanho do passo que o aluno pode dar de cada vez é de suma importância para que não desanime durante o percurso. Ele não deve encontrar obstáculos inatingíveis de um problema para o outro, pois, o conhecimento deve ser construído passo a passo e com cautela. O tamanho deste degrau é decidido selecionando o que muda de um problema para o outro, desde dificuldades ou conceitos.

Para os dois últimos itens, exige-se uma sensibilidade enorme do professor. Por isso é indispensável que o processo de construção seja feito com muita paciência, em vista que:

> O sucesso em Resolução de Problemas depende fortemente das atitudes do professor, pois ele é responsável pela escolha do problema bem como do seu enunciado e do nível de dificuldade que o problema apresenta. (LUPPINACCI E BOTIN, 2004, p.3)

Sabendo da importância da resolução de problemas e quais problemas interessam, a pergunta é como montar uma sequência de problemas para nossas aulas? Restam-nos as partes mais práticas, como ensinar o aluno a resolver problemas não elementares, bem como guiá-los e orientá-los para que o objetivo seja alcançado.

Trataremos a seguir, o homem ao qual é considerado, muitas vezes, como o pai da resolução de problemas. George Polya, húngaro que desenvolveu etapas para a melhor abordagem de problemas. Veremos também Augusto César Morgado, brasileiro, grandioso mestre, que pontuou e exemplificou técnicas para a resolução de problemas de análise combinatória. Com base nos conhecimentos desses autores, será formulada uma abordagem que servirá de base deste projeto.

3 COMO ABORDAR E RESOLVER UM PROBLEMA COM ÊNFASE EM ANÁLISE COMBINATÓRIA?

Muitos professores e alunos têm dificuldade com análise combinatória, pois não sabem como abordar os problemas que o conteúdo traz. Essa dificuldade pode ser amenizada ou extinta por meio de uma estratégia adequada para a resolução dos mesmos.

3.1 ETAPAS PARA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA

Segundo POLYA (1978), quando nos deparamos com um problema, podemos sempre dividir a sua resolução em quatro etapas. Essas etapas servem de guia na resolução do problema.

Como o trabalho é voltado ao conteúdo de Análise Combinatória, o estudo será embasado em exemplos e observações pertinentes a esse conteúdo, mas que podem ser expandidos para os outros conteúdos matemáticos.

3.1.1 Compreender o problema

Nesta primeira parte, devemos analisar o problema, interpretar e compreender o que o enunciado está pedindo, verificar quais são as restrições, o que entra em nosso conjunto e o que não entra. O aluno assim como o professor deve tomar vários pontos de vista, pois antes de responder a uma pergunta é necessário compreendê-la.

Em POLYA (1978), a pergunta mais feita é “Qual é a incógnita?”, que neste caso, quase sempre pode ser substituída por “Quais os elementos do conjunto que estamos contando?”.

Além dessa, podemos estimular o aluno a interpretar o problema fazendo indagações, mesmo que gerais, mas que podem ajudar muito nessa etapa inicial:

- O enunciado foi bem compreendido?
- Podemos reescrever o enunciado com nossas próprias palavras?
- Reconhecemos os dados?
- Temos informação suficiente?
- Alguma informação é diferente ou se destaca das demais?
- O que queremos encontrar?

- O que não queremos contar?
- Quais as restrições?
- Podemos satisfazer estas restrições?
- Conhecemos um problema semelhante?
- Conhecemos algum problema com uma variável semelhante?

Depois de familiarizado com o problema, pode-se passar para a próxima etapa.

3.1.2 Estabelecendo um plano

Nesta etapa, tem-se que elaborar uma maneira para enfrentar o problema. Algumas práticas são importantes, como fazer:

- Listas;
- Desenhos;
- Gráficos;
- Planificações;
- Diagramas.

Com os objetos citados acima, a ideia principal é encontrar padrões e, com isso, buscar um caminho a ser percorrido posteriormente.

Também é interessante resolver problemas similares, um problema menor relacionado ou, até mesmo, dividir o problema em vários problemas, sempre visualizando a nossa meta e utilizando todos os dados disponíveis.

3.1.3 Executar o plano

Executar o plano é a etapa mais mecânica na resolução de problemas. Porém, alguns cuidados também devem ser tomados. A execução de um problema interessante deve ter vários passos e cada passo deve ser tomado e executado com paciência.

Durante a execução de cada passo, será pertinente a verificação do mesmo, para adquirir a confiança necessária para o próximo passo. O professor e o aluno podem se perguntar: “Há como verificar a assertividade do problema até a exata tomada de decisão?”

"Têm-se convicção até este ponto?" Se sim, passamos para o próximo passo. Caso contrário, voltamos e repensamos a estratégia.

Após a terceira etapa já se tem um possível resultado em mãos e aí, se passa a última etapa, não menos importante.

3.1.4 Verificar a resolução

Na última etapa, passamos a analisar o que foi feito e o resultado obtido. O primeiro passo é verificar o resultado. Na maioria dos casos, após a resposta final damo-nos por convencidos e seguimos para outra atividade, e isso impede que tenhamos um aproveitamento maior do conhecimento e experiência que o problema nos proporcionou.

Por isso, assim que verificado, passamos a indagações pertinentes a esta etapa.

- O que realmente usamos para resolver o problema?
- Poderíamos resolver de um modo mais prático, mais rápido?
- Existe outro modo de resolver este problema?
- Existem outros problemas que podemos resolver deste modo?

Então, cabe uma discussão, um debate amplo e coletivo, para a melhor apropriação das habilidades necessárias para a resolução do problema.

3.1.5 Primeiro exemplo

Traremos exemplos para a melhor compreensão da técnica que acabamos de descrever.

Abaixo, um problema matemático apresentado na prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, questão 13, relacionada à Análise Combinatória.

> Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às 9h, 10h e 11h e de segunda a sexta às 17h e 18h. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos? (OBMEP, 2013)

3.1.5.1 Compreender o problema

Após a leitura do problema, para melhor compreensão, podemos estimular os alunos com alguns questionamentos e esperar que cheguem a algumas conclusões ou conclusões similares.

- Quais os elementos do conjunto que estamos contando?
    - As possíveis combinações de dias para Ana fazer suas duas aulas de natação.
- Quais são as restrições? Compreenderam bem o que elas significam?
    - As aulas têm que acontecer em dias diferentes;
    - Não posso escolher dias sucessivos. Se escolher segunda, não posso escolher terça. Se escolher terça, não posso escolher segunda nem quarta;
    - Não posso escolher os dois dias em um mesmo turno. Se escolher terça de manhã, devo escolher quinta ou sexta de tarde;
- Existe algum dado diferente dos demais?
    - Sim, o sábado, pois só há aula nos sábados de manhã.

3.1.5.2 Estabelecendo um plano

Na hora de organizar uma estratégia, podemos usar uma lista para ver os dias possíveis. Veremos então, que o sábado complica o problema. Atacar as dificuldades da maior para a menor sempre é bom. Podemos dividir o problema em duas partes: escolho o sábado ou não escolho o sábado.

O aluno, para chegar a essa conclusão, já deve ter certa maturidade. Por isso, é muito importante o quanto e como, o professor intervém, ou seja, não dar a resposta de imediato, pois, assim, o aluno não construirá nada. Por outro lado, o professor não deve deixar o aluno sem direção, para que ele não desanime de buscar sua própria construção.

O ideal, talvez, seja explicar a técnica para que o aluno enxergue onde a utilizar, de forma que, ao encarar novos problemas, já tenha uma ferramenta.

As listas podem vir antes, ou depois da divisão do problema em dois. De qualquer modo serão importantes.

Se escolher o sábado, tem que ser no turno da manhã. Por outro lado, posso escolher de segunda a quinta no turno da tarde. Agora, o que o aluno já deve ter construído anteriormente, com problemas mais simples, teremos que tomar uma série de decisões, entre elas, dia e horários possíveis.

Se não escolher o sábado, posso fazer uma lista com os dias possíveis:

- Segunda e Quarta;
- Segunda e Quinta;
- Segunda e Sexta;
- Terça e Quinta;
- Terça e Sexta;
- Quarta e Sexta.

Percebe-se que, na hora de montar uma lista, temos que ser metódicos, para não pecarmos pelas sobras ou pelas faltas. Após isso, também temos que fazer uma série de escolhas para resolver o problema.

3.1.5.3 Executar o plano

Na hora da execução temos que refletir bem em cada fase do processo. Podemos dividir em dois casos, sem que isso prejudique a contagem de todo o conjunto que estamos analisando? Isso acontecerá sem repetir ou deixar de fora algum elemento? Se essas dúvidas surgirem, será ótimo. O aluno tem dúvidas no processo é ideal para a construção do conhecimento.

Podemos, então, responder a essas perguntas, com outras indagações. Existe algum caso em que o sábado seja escolhido e não escolhido ao mesmo tempo? A pergunta parece improvável, mas ajudará a esclarecer a dúvida do discente com seus pensamentos.

Voltando à execução, uma vez dividindo o problema em dois casos, o único cuidado deve ser com as decisões sucessivas a serem tomadas. Resolvendo, então, com a multiplicação:

COM O SÁBADO PRESENTE:		
1º - Qual o horário do sábado?	9h, 10h ou 11h.	3
2º - Qual o outro dia da semana?	Segunda, terça, quarta ou quinta.	4
3º - Qual o horário deste segundo dia?	17h ou 18h.	2
	TOTAL:	24

COM O SÁBADO AUSENTE:		
1º - Quais os dias?	Segunda e quarta, segunda e quinta, segunda e sexta, terça e quinta, terça e sexta ou quarta e sexta.	6
2º - Qual o dia da semana vai ser no período matutino?	Primeiro ou segundo.	2
3º - Qual o horário matutino?	9h, 10h ou 11h.	3
4º - Qual o horário vespertino?	17h ou 18h.	2
	TOTAL:	72

Somando os dois conjuntos de combinações, temos 24+72=96.

3.1.5.4 Verificar a resolução

Após a verificação em coletivo dos passos tomados, podemos nos perguntar:

- Usamos algo de especial neste problema?
    - A divisão do problema em dois é um bom tema.
- Poderemos usar isso em novas questões? Quando?
    - Bom, quando temos uma restrição incômoda, poderemos tentar usar essa estratégia.
- Problemas similares são possíveis?
    - Problemas com horários de aula ou planilha de estudos podem ser montados com certa semelhança.

Claro que as indagações não necessariamente sejam estas, cada turma é única, mas, o que estamos buscando aqui, é um modo descrito por POLYA (1978), para a maior compreensão e assertividade na resolução de problemas.

3.2 NORMAS DA BOA TÉCNICA DE MORGADO

Continuando com nossas estratégias, existe no Brasil um programa organizado pelo IMPA, PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio). Em uma das edições de 2005, o professor Morgado apresentou duas aulas sobre análise combinatória. Ele abordou vários assuntos muito interessantes e importantes para qualquer professor que futuramente ministrará o conteúdo de análise combinatória.

Essas aulas, junto com as demais realizadas no programa, geraram um livro: “Temas e Problemas”. Nesse material, Morgado enumera três preceitos que ele define como Normas da Boa Técnica. Esses preceitos são o que veremos e exemplificaremos a seguir.

> 1) Postura: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. (...)
> 2) Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. (...)
> 3) Não adia dificuldades: pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada por primeiro lugar. (MORGADO, 2005)

As aulas de MORGADO são fantásticas, baseadas quase exclusivamente na resolução de problemas, e suas normas são bem eficientes. Sendo assim, veremos alguns exemplos em que usaremos as técnicas dele.

No próprio exemplo anterior, usamos esses preceitos, ou seja, não adiamos a dificuldade, quando nos deparamos com um dia diferente dos demais. Dividimos o problema maior em dois casos menores, colocamo-nos no lugar da pessoa que iria escolher os horários, dividimos novamente o problema em escolhas mais simples, por exemplo, dias e horários a serem escolhidos.

Enfim, com o uso das normas acima podemos facilitar a resolução de alguns problemas, até os mais complexos podem ser reduzidos a problemas maleáveis. Vejamos mais alguns exemplos.

3.2.1 Segundo Exemplo

Questão número 17 da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas relacionada à Análise Combinatória.

> Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana? (OBMEP, 2010)

Postura: temos que pensar no problema do ponto de vista de quem vai distribuir os presentes. Possíveis perguntas: “Quem vai ganhar dois presentes?” “Há alguma diferença entre as quatro crianças?”.

Divisão: dividir em escolhas; não tentar resolver com um único cálculo. Talvez, dividir o problema em dois ou mais problemas menores.

Não adiar dificuldades: a maior dificuldade é que existe uma criança que já está com um presente definido, e isso a torna diferente das demais. Portanto, devemos resolver primeiro essa restrição.

Todos os questionamentos de Morgado foram úteis neste caso. Uma questão que vem à tona é: “Devemos escolher entre POLYA e MORGADO?” Não. Todas as técnicas de Morgado podem se encaixar nas etapas do Polya. Quando usamos a postura de quem está fazendo as ações do problema, estamos interpretando o problema. Quando não adiamos as dificuldades e dividimos o problema em vários, estamos estabelecendo um plano para resolução do problema.

A ideia é ter o maior número de ferramentas para atacar e resolver problemas, no nosso caso, de análise combinatória. Com algumas aulas, podemos desenvolver habilidades importantes nos alunos, de tal forma que se torne natural a resolução de problemas, sem que o aluno pense em que etapa está ou que técnica usou.

Continuando com nosso problema, já podemos resolvê-lo. Dividindo o problema em dois, se Ana ganhará um ou dois presentes.

Ana ganhará somente um presente, nesse caso Ana já está fora das escolhas, pois já tem a sua boneca:

Ana ganhará somente a boneca:		
1º - Qual sobrinha ganhará dois presentes?	Bruna, Cecília ou Daniela.	3
2º - Quantas possibilidades a primeira sobrinha, que ganhará somente um presente, tem?	Quatro presentes.	4
3º - Quantas possibilidades a segunda sobrinha, que ganhará somente um presente, também tem?	Três presentes.	3
4º - Quantas possibilidades a terceira sobrinha, que ganhará dois presentes, tem?	Somente uma, os dois presentes que sobraram.	1
	TOTAL:	36

Ana ganhará dois presentes. Neste caso, Ana já tem a sua boneca, mas ganhará mais um presente:

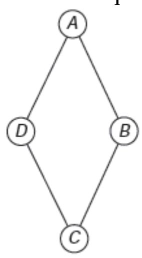
Ana ganhará a boneca e mais um presente:		
1º - Quantas possibilidades Ana têm para seu segundo presente?	Quatro presentes.	4
2º - Quantas possibilidades Bruna têm para seu presente?	Três presentes.	3
3º - Quantas possibilidades Cecilia têm para seu presente?	Dois presentes.	2
4º - Quantas possibilidades Daniela têm para seu presente?	Somente uma, o presente que sobrou.	1
	TOTAL:	24

Somando os dois casos separados, temos 36+24=60 maneiras de distribuir os presentes do Tio Paulo entre suas quatro sobrinhas.

3.2.2 Terceiro exemplo

Evidenciando a utilização dos dois autores em um mesmo problema, resolveremos uma questão como exemplo empregando as Etapas de Polya e a Técnica de Morgado simultaneamente.

Problema retirado do Exame Nacional do Ensino Médio, questão 157, relacionado à Análise Combinatória.

> Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.
> Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.
> A figura ilustra uma joia, por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.
>
> Figura 01 – Relativa a questão abordada
>
> 
>
>
> Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter? (ENEM, 2013)

3.2.2.1 Compreender o problema

Aqui é onde melhor se combinam as ideias de Polya e Morgado, porque, para interpretar o problema de modo satisfatório, necessitamos de postura crítica e atitude.

Então, colocando-se no lugar de quem vai produzir as joias, o que precisamos fazer? Para obter essa resposta, algumas indagações são pertinentes.

- Quais os dados que temos?
  - Temos três cores de pedras;
  - Temos um losango não quadrado;
  - Temos que posicionar as pedras nas extremidades do losango;
- Muda alguma coisa, ser um losango?
- Muda alguma coisa o losango não ser quadrado?

  - Sim, a simetria da figura: a repetição de casos, quando rotamos um quadrado, é diferente de quando rotamos um losango.
- Quais as restrições?
  - Não ter pedras adjacentes de mesma cor;
- Podemos satisfazer essa restrição?
  - Sim, temos um número suficiente de pedras, para isso;

3.2.2.2 Estabelecendo um plano

Neste problema, atacar as dificuldades por primeiro não tem grande importância, por que vamos fazer isso automaticamente à medida que posicionarmos as pedras. No caso, essa norma de Morgado é aplicada meio que implicitamente.

A norma que é bem útil, neste caso, é DIVIDIR. Como o problema usa de uma contagem relativamente pequena, alguns alunos podem optar por fazer todos os casos e, em seguida, cortar as repetições. É uma abordagem que feita de modo sistemático, não deve ser desencorajada.

Agora, se conseguirmos dividir em casos, o problema torna-se mais fácil, e a convicção de que estamos corretos aumenta, pois a visualização fica mais clara, consequentemente, dando-nos mais segurança.

Portanto, a base do plano é dividir em casos e, em cada evento tomar uma decisão de cada vez para posicionarmos as pedras. Assim, contado todos os elementos possíveis do nosso conjunto, obtém-se três informações:

- Posição A igual à posição C, mas a posição B diferente da posição D;
- Posição B igual à posição D, mas a posição A diferente da posição C;
- Posição A igual à posição C, e a posição B também é igual à posição D;

Verificamos que todos os casos são excludentes, ou seja, não podemos ter nenhum elemento que esteja em dois ou três grupos ao mesmo tempo. Todos eles respeitam a restrição e, ainda, não existe mais nenhum caso que respeite a restrição e que não esteja englobado nesses três grupos. Logo, parece uma abordagem bem convincente. Basta agora selecionar caso a caso e executar os cálculos.

3.2.2.3 Executar o plano

CASOS	OBSERVAÇÕES	EXEMPLO	CALCULO
1º CASO $A = C\ e\ B \neq D$	Note-se que basta escolher qual cor de pedra será utilizada na posição A, pois será a mesma que a C, e independente da sequência em que posicionarmos as outras duas core, nada muda, pois, com a rotação, teremos o outro caso.	Se posicionarmos vermelho no A, será vermelho no C. Agora, se posicionarmos azul no B, será verde no D. Azul está à direita da peça, e o verde, à esquerda. Girando a peça em 180º, verde estará à direita e azul à esquerda. Logo, vemos que, posicionando a primeira cor, o resto está definido.	3 alternativas para a primeira cor em A.
2º CASO $B = D\ eA \neq C$	O segundo caso é similar ao primeiro. Após escolhermos a cor de B, fica definida a cor de D, e a partir daí, já estará definido o resto.	Se posicionarmos verde em B, será verde em D. Azul e vermelho estarão divididos nas posições restantes. Como vimos no primeiro caso, não importa a ordem.	3 alternativas para a primeira cor em B.
3º CASO $A = C\ e\ B = D$	Agora, teremos duas escolhas a fazer: qual cor será colocada em A e qual cor será colocada em B.	Temos três alternativas para a primeira cor: vermelho, verde e azul. Para qualquer uma das três que escolhermos, restará duas cores para a segunda cor.	3 alternativas para A, duas alternativas para B: 3X2=6.
		TOTAL:	12

3.2.2.4 Verificar a resolução

Já observamos anteriormente que dividindo em casos, englobamos todas as possíveis formações da joia. O que realmente é interessante nesse problema é a eliminação de casos pela rotação. É interessante esse debate, ainda mais que, mesmo quem escolheu a divisão em casos, também se deparou com a rotação. No primeiro e segundo eventos, quando escolhemos a segunda cor, não temos mais o que escolher. O motivo é a simetria da peça sob a rotação de 180º.

4 PROPOSTA DIDÁTICA

A aplicação da proposta didática foi realizada com o auxílio de 12 alunos do segundo e terceiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Médio João Triches, localizada no bairro Pio X, zona central da cidade de Caxias do Sul – RS.

Todos estavam em período de recuperação do ano letivo, por motivos de greve, e as aulas de matemática já haviam encerrado. Os alunos foram convidados a participar da proposta didática como forma de oficina, realizada nos períodos livres dos alunos e no turno em que estudavam.

Todos foram meus alunos durante o ano letivo, e os do terceiro ano já haviam estudado o conteúdo de análise combinatória por um método mais tradicional. Já os do segundo ano ainda não tinham nenhum conhecimento sobre o conteúdo.

Foram realizadas quatro aulas em três dias, com duração de 45 minutos a 1 hora, sempre no período matutino. Os alunos vieram por vontade própria, com a autorização da direção, da escola e dos pais. Demonstraram grande interesse e muito empenho.

O objetivo geral da nossa proposta foi instigar a curiosidade matemática do aluno por meio da proposição de problemas matemáticos de análise combinatória, incentivando-o a usar a resolução de problemas como método de estudo.

No final, serão descritos, em forma de parecer, os pontos positivos e negativos do método, a partir da interação com os alunos e do desempenho em cada oficina, iterações e desempenhos estes que foram minuciosamente observados durante as aulas.

4.1 AULA ZERO

4.1.1 Objetivos:

- Elucidar quais os objetivos do projeto;
- Inserir a ideia da resolução de problemas como método de estudo;
- Transmitir a dinâmica trabalhada nessa didática;
- Introduzir a noção de alguns métodos para a resolução de problemas.

4.1.2 Assuntos abordados:

- Etapas para resolução de problemas POLYA (1978);
- Métodos da boa técnica de MORGADO (2005).

4.1.3 Desenvolvimento

Ao iniciar as oficinas, o professor explicou aos alunos o motivo e os objetivos das aulas e qual seria a dinâmica utilizada nas atividades, ressaltando que, nesta metodologia, não haveria exposição teórica sobre o conteúdo, conforme uma aula tradicional. Sendo assim, o papel do professor foi o de orientador, mas quem deverá descobrir o caminho para as resoluções, debatendo as questões sem aplicar diretamente as fórmulas serão os alunos.

A partir de uma linguagem simples, foram passadas as etapas para resolução de problemas de POLYA (1978), as mesmas abordadas neste trabalho. Do mesmo modo ocorreram explicações sobre os métodos da boa técnica de MORGADO (2005), e essas normas foram passadas como cuidados e observações. Após, pedi que a turma se dividisse em quatro grupos de três.

4.2 PRIMEIRA AULA

4.2.1 Objetivos:

- Trabalhar na prática, com as etapas para resolução de problemas de POLYA (1978);
- Verificar a utilização dos métodos da boa técnica de MORGADO (2005);
- Construir a ferramenta do princípio multiplicativo através de problemas contextualizados;
- Elaborar a ideia da divisão do problema em problemas menores, para a contagem dos grupos disjuntos.

4.2.2 Conceitos abordados:

- Princípio multiplicativo;
- Contagem de conjuntos disjuntos.

4.2.3 Problemas escolhidos:

Problema 01.A

Problema retirado do Livro “Círculos matemáticos – A Experiência Russa”:

> Existem cinco tipos diferentes de xícaras de chá e três tipos diferentes de pires na loja “A Festa do Chá”. De quantas maneiras você pode formar um conjunto de xícaras com pires? (IMPA, 2010).

Problema 01.B

> Problema retirado do Livro “Círculos matemáticos – A Experiência Russa”:
> A loja “A Festa do Chá” também tem quatro tipos diferentes de colheres de chá. Quantos conjuntos diferentes podem ser comprados consistindo em uma xícara, um pires e uma colher de chá? (IMPA, 2010).

Problema 02.A

Problema adaptado do Livro “Círculos matemáticos – A Experiência Russa”:

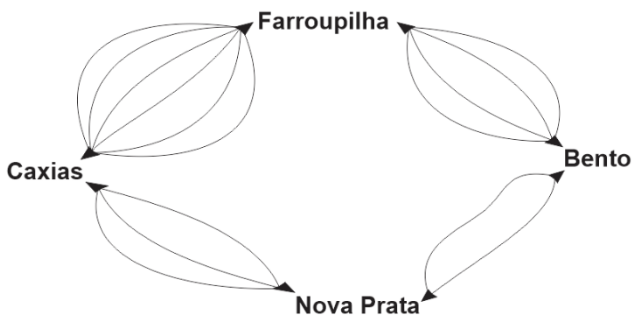
Na serra gaúcha existem três cidades próximas, Caxias, Bento e Farroupilha. Existem seis estradas ligando Caxias a Farroupilha e quatro estradas ligando Farroupilha a Bento. De quantas maneiras é possível dirigir de Caxias a Bento?

Problema 02.B

Problema adaptado do Livro “Círculos matemáticos – A Experiência Russa”:

Na serra gaúcha foram construídas a cidade de Nova Prata e, diversas estradas. E agora, de quantas maneiras é possível dirigir de Caxias a Bento?

Figura 02 – Relativa a questão abordada



Problema 03

(ENEM 2012), questão 145:

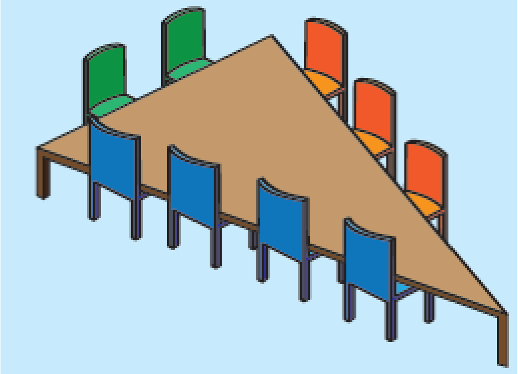
> O diretor de uma escola convidou 280 alunos de um terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existam 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.
> Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.
> O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:
>
> A - 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
> B - 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
> C - 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
> D - 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
> E - 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Problema 04

(OBMEP 2012), questão 18:

Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

Figura 03 – Relativa a questão abordada



A) 288
B) 6720
C) 10080
D) 15120
E) 60480

4.2.4 Desenvolvimento

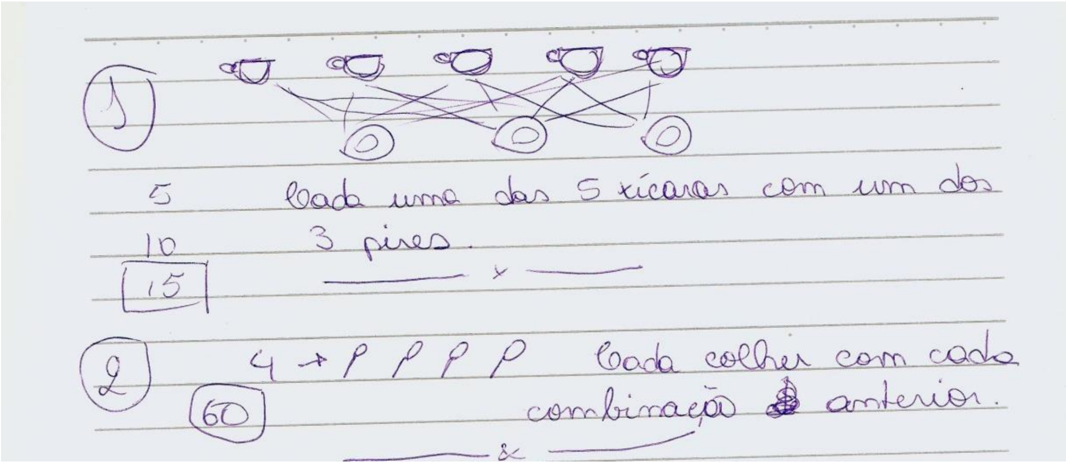
Em relação ao problema 01.A, não houve nenhuma dificuldade, já que os alunos não tiveram problema com relação à interpretação.

O grupo dos alunos do terceiro ano analisou o problema e logo aplicou o princípio multiplicativo. Os demais, sem exceção, partiram para uma abordagem caso a caso. Nesses momentos, preferi não interromper, nem indagar nada.

Nesses dois primeiros problemas, não podemos exigir a multiplicação. Note na figura 04, no caso do problema 01.A, resolveram caso a caso e com a utilização de desenhos. Isso é muito natural. O professor deve esperar que o aluno, ao abordar o problema 01.B, os alunos utilizem o resultado do primeiro 01.A.

O grupo percebeu que as decisões para a terceira escolha não alteravam as escolhas anteriores e até descreveram essa constatação, ou seja, para cada colher temos o número de combinações anteriores. Eles inferiram o princípio multiplicativo.

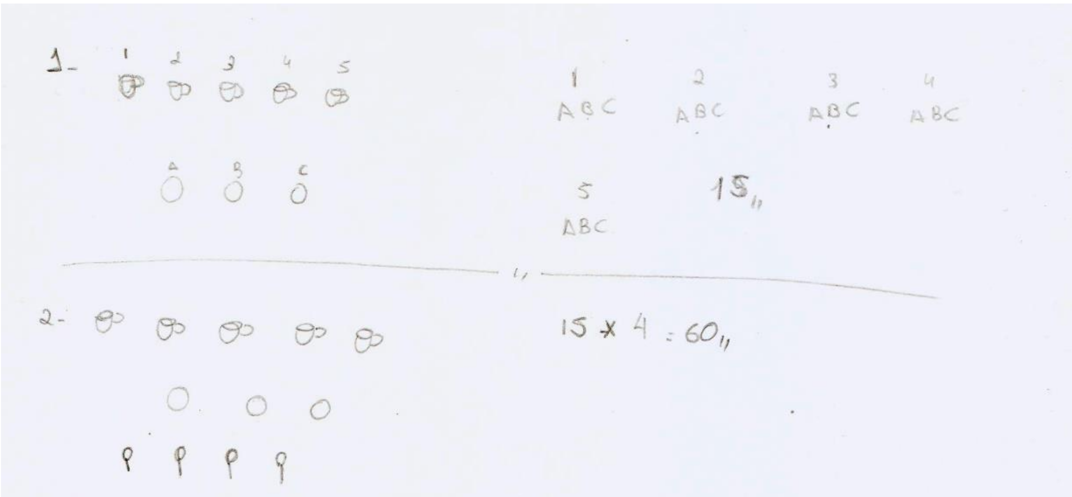
Figura 04 –Resolução de um grupo para os problemas 01.A e 01.B.



Analisando as resoluções dos grupos a seguir, mostradas nas figuras 05 e 06, para o problema 01.A, percebemos que não há muita diferença. Utilizaram a abordagem caso a caso.

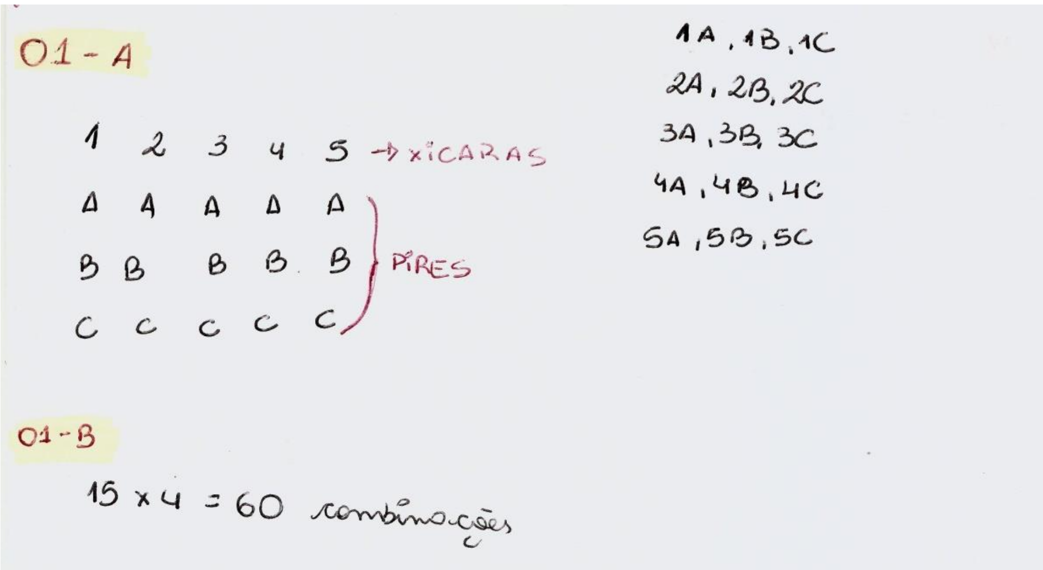
Em relação ao problema 01.B, a forma de abordagem dos grupos mudou. O grupo da figura 05, não vinculou a resposta do primeiro problema de modo direto. Em vez disso, refez os diagramas para se convencer que está no caminho certo.

Figura 05 –Resolução de um segundo grupo para os problemas 01.A e 01.B.



O grupo da figura 06 é o que parece mais convicto, de simplesmente pegar o resultado anterior e refazer a multiplicação por quatro.

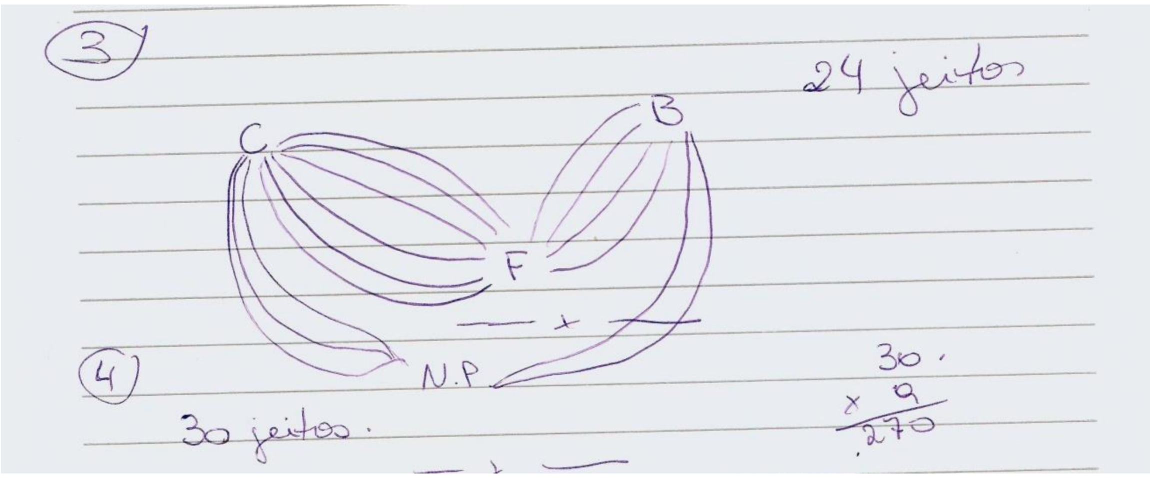
Figura 06 –Resolução de um terceiro grupo para os problemas 01.A e 01.B.



De modo geral, esses dois problemas iniciais atingiram o objetivo, porque são problemas simples e de fácil interpretação, o que ajuda o aluno a focar na abordagem inicial. Cálculos bem elementares e casos facilmente enumeráveis facilitam a iniciação ao processo, fornecendo a confiança necessária para o aluno motivar-se.

O problema 02.A é bem interessante e elementar, e pode ser solucionado de modo simples. Os alunos utilizaram um diagrama para verificação e logo chegaram a resposta.

Figura 07 –Resolução de um grupo para os problemas 02.A e 02.B.

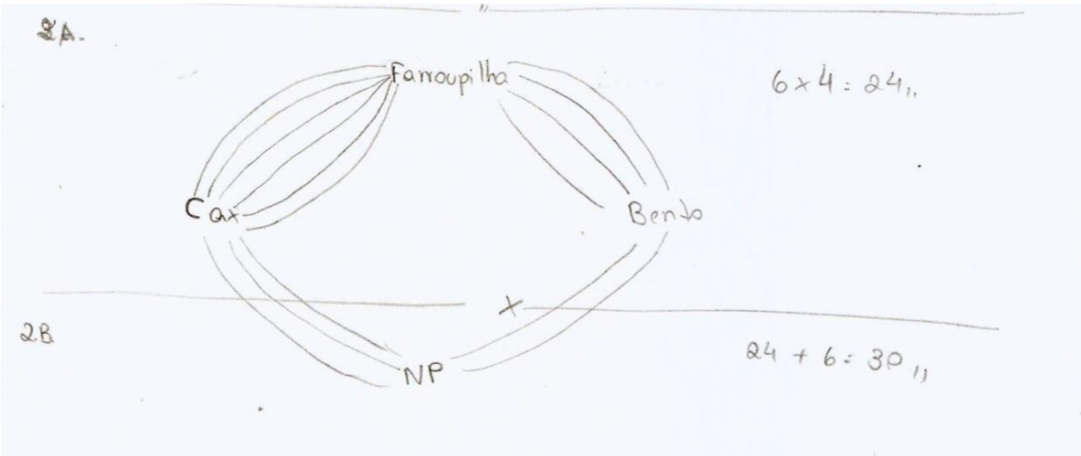


No entanto, o problema 02.B exige a divisão em dois casos. A dificuldade, que se esperava que os alunos encontrassem era a de saber quando somar e quando multiplicar neste tipo de problema. Aqui, essa dificuldade não se apresentou. Talvez, pelo problema ser contextualizado, os alunos interpretaram-no de um modo que fazia sentido no cotidiano deles.

Sendo assim, seria uma contradição à própria lógica multiplicar tudo. Mas, sem dúvida, a ferramenta que mais ajudou foi a realização do diagrama.

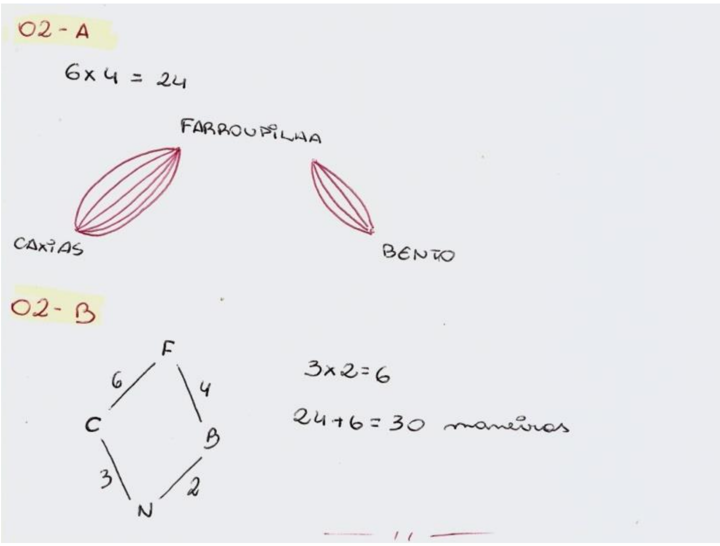
Na matemática discreta e, principalmente, na análise combinatória sempre estamos contando algo e quando o aluno consegue visualizar essa contagem através de um desenho, diagrama ou qualquer outro objeto, o estudo fica mais significativo, pois "enxergar" o que se está calculando aproxima o aluno da matemática. Nesse momento, o cálculo passa de um simples ato de memorização para um processo de aprendizagem.

Figura 08 –Resolução de um segundo grupopara os problemas 02.A e 02.B.



Note-se a evolução do grupo na figura 09. Resolvendo o problema 02.A com um diagrama, caso a caso, e resolvendo o problema 02.B com um diagrama, com a quantidade de opções, executando os cálculos de modo simples e correto. Sem dúvida, uma evolução significativa.

Figura 09 –Resolução de um terceiro grupo para os problemas 02.A e 02.B.



No problema 04, todos se utilizaram da multiplicação. A grande dificuldade foi na primeira etapa, a interpretação. Pelo fato de o texto ser meio longo, os alunos demoraram um pouco para entender o que realmente era pedido no enunciado, mas depois disso, todos se saíram bem.

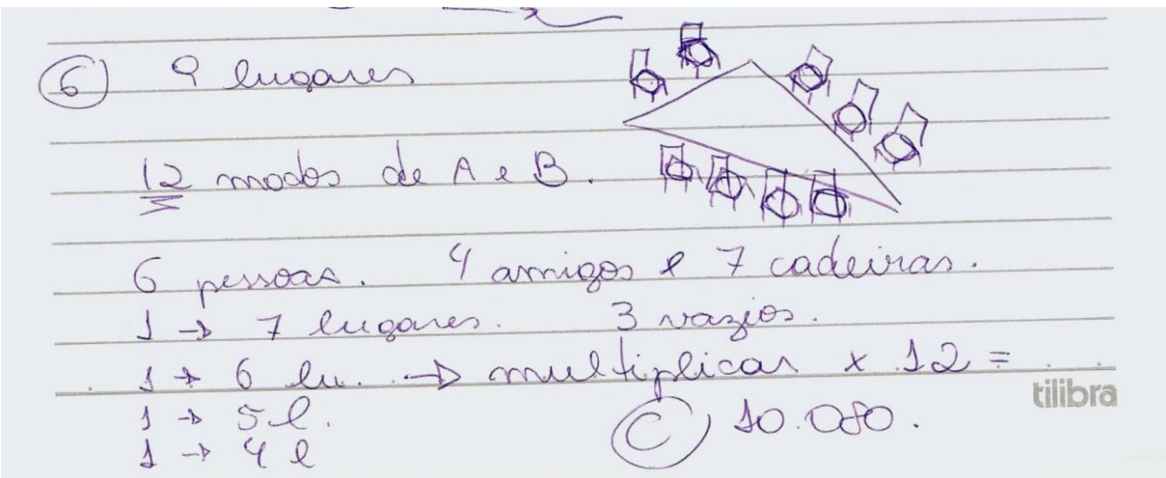
Por último, e o problema que mais me agradou, o 04, porque foi o que mais gerou questionamentos e intrigou os alunos. Nesse momento, mesmo os alunos que já haviam estudado análise combinatória sentiram dificuldades. Portanto, considero esse problema o mais produtivo da primeira aula.

A escolha de um problema com esse nível visa a busca de desafios que motivem a descoberta e o aprendizado significativo do aluno. Agora, quando se aumenta a dificuldade do desafio, temos que oferecer algum auxílio, para que o aluno consiga superá-lo, sendo o papel do professor o de mediador.

Ao ajudar os alunos com alguns questionamentos, o retorno que tive foi o esperado. Quando indaguei “Quem devemos posicionar primeiro?”, a turma toda afirmou que Alice e Bernardo. “Faz diferença, Alice na cadeira verde à esquerda ou Alice na cadeira verde à direita?” e “Se posicionarmos os outros amigos primeiro?”. Logo a turma entendeu que atacar a dificuldade por primeiro, facilita na resolução dos problemas.

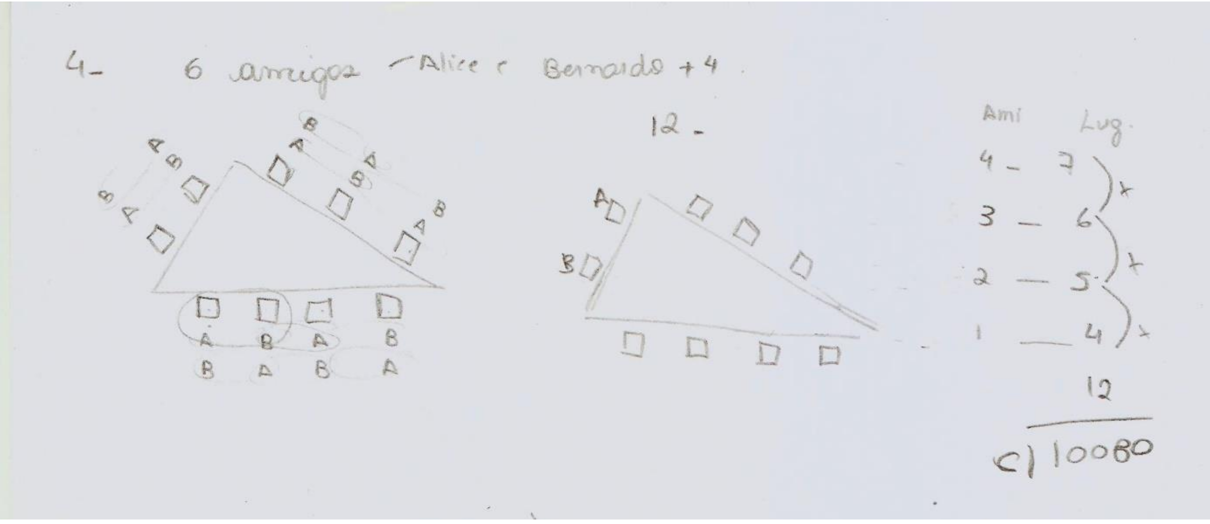
Passada a fase inicial de interpretação coletiva, a maioria dos grupos conseguiu resolver o problema proposto. O grupo da figura 10 fez a contagem das possíveis posições de Alice e Bernardo, com o auxílio do desenho da mesa. Em seguida, somente com a multiplicação, posicionaram todos os amigos restantes de modo correto. Note-se que eles usaram o conceito de arranjo, sem nem mesmo saber o significado da palavra, sem dificuldades maiores, sem o uso de fórmulas e de modo muito satisfatório.

Figura 10 –Resolução de um grupo para o problema 04.



O grupo da figura 11 teve uma abordagem mais cuidadosa na parte inicial, mas executou o mesmo processo do grupo anterior com relação ao posicionamento dos amigos restantes.

Figura 11 –Resolução de um segundo para o problema 04.



Neste último problema, utilizamos o conceito de arranjo, sem a necessidade de fórmula. Então, por que utilizamos tantas fórmulas na análise combinatória? Devemos ficar nessa abordagem formulista para o ensino da análise combinatória? Devemos abandonar todas as fórmulas? São questionamentos válidos para todo o professor a ensinar esse conteúdo. Fórmulas não são nem de todo bom, nem de todo mau. Então o que torna favorável a utilização de uma? Segundo MORGADO, a frequência com que a utilizamos. Não sei o CEP de todas as ruas da minha cidade, agora, saber o CEP da minha rua de cor faz todo o sentido. Então devemos utilizar uma fórmula no momento em que já estamos familiarizados com os conceitos, para alcançarmos nossos objetivos com maior praticidade.

Para encerrar as observações essa primeira aula, gostaria de dizer que não interferi em nenhum momento da resolução. Quando surgiu alguma dúvida, respondi ao aluno com mais indagações, para que ele mesmo encontrasse a resposta. Nessa aula, essa técnica funcionou muito bem. Os alunos mostraram iniciativa e motivação para a resolução dos problemas e, na hora do debate, defenderam seus pontos de vista e explicaram como chegaram a determinado resultado.

4.3 SEGUNDA AULA

4.3.1 Objetivos:

- Fortalecer a ferramenta do princípio multiplicativo através de problemas contextualizados;
- Elaborar a ideia de separação do problema, em dois problemas menores, quando há uma restrição;
- Instigar a ideia de contagem de um grupo geral, para depois eliminar as restrições com grupos menores.

4.3.2 Conceitos abordados:

- Princípio multiplicativo como sucessão de escolhas;
- Contagem de conjuntos disjuntos;
- Contagem e eliminação de subconjuntos restritivos.

4.3.3 Problemas escolhidos:

Problema 01.C

Problema retirado do livro “Círculos matemáticos – A Experiência Russa”:

> Na loja “A Festa do Chá”. São vendidos cinco tipos de xícaras de chá e três tipos de pires e quatro tipos de colheres de chá. Quantas compras com dois itens com nomes diferentes você pode fazer? (IMPA, 2010).

Problema 02

(OBMEP 2013), questão 13:

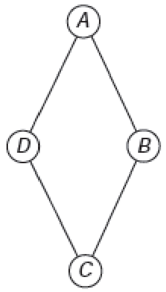
> Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação têm aulas de segunda a sábado às 9h, 10h e 11h e de segunda a sexta às 17h e 18h. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?
>
> A) 96
> B) 102
> C) 126
> D) 144
> E) 180

Problema 03

(ENEM 2013), questão 157:

Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.
Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.
A figura ilustra uma joia, por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.

Figura 01 – Relativa a questão abordada



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

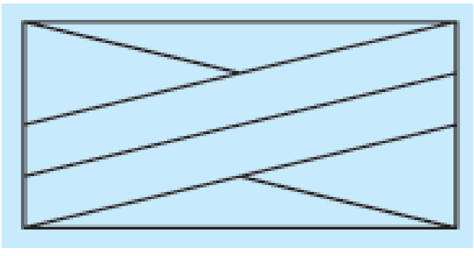
A - 6
B - 12
C - 18
D - 24
E - 36

Problema 04

(OBMEP 2013), questão 17:

Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. De quantas maneiras ele pode pintar as regiões da bandeira da figura, cada uma com uma única cor, de modo que cada cor apareça pelo menos uma vez e que regiões adjacentes sejam pintadas com cores diferentes?

Figura 12 – Relativa a questão abordada



A) 336

B) 420
C) 576
D) 864
E) 972

Problema 05

(OBMEP 2014), questão 17:

Mônica tem três dados nos quais a soma dos números em faces opostas é sempre 7. Ela enfileira os dados de modo que as faces em contato tenham o mesmo número, obtendo um número de três algarismos nas faces superiores. Por exemplo, o número 436 pode ser obtido como mostrado na figura; já o número 635 não pode ser obtido. Quantos números diferentes ela pode obter?

Figura 13 – Relativa a questão abordada

A) 72
B) 96
C) 168
D) 192
E) 216

4.3.4 Desenvolvimento:

Na segunda aula, nossa ideia principal foi reforçar o princípio multiplicativo e, para isso, foram escolhidos problemas bem distintos, mas com a mesma essência. Suas resoluções são feitas a partir do princípio da divisão em casos mais simples, logo após uma sequência de escolhas, que define o princípio multiplicativo.

No problema 01.C, nenhuma dificuldade por parte dos alunos. Conseguiram realizar a divisão em grupos disjuntos. Em seguida, somaram os resultados e obtiveram a contagem total com exatidão.

Figura 14 – Resolução de um grupo para o problema 01.C.

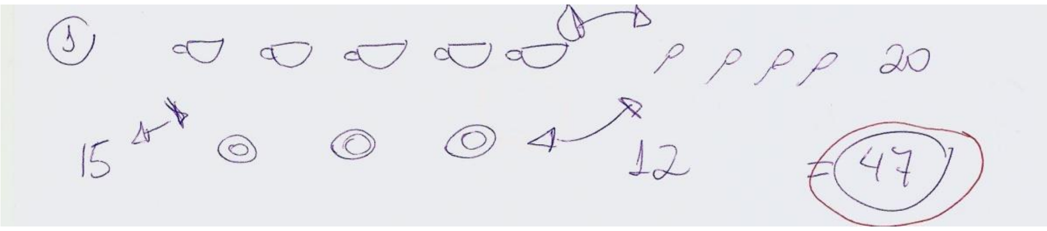


Figura 15 – Resolução de um segundo grupo para o problema 01.C.

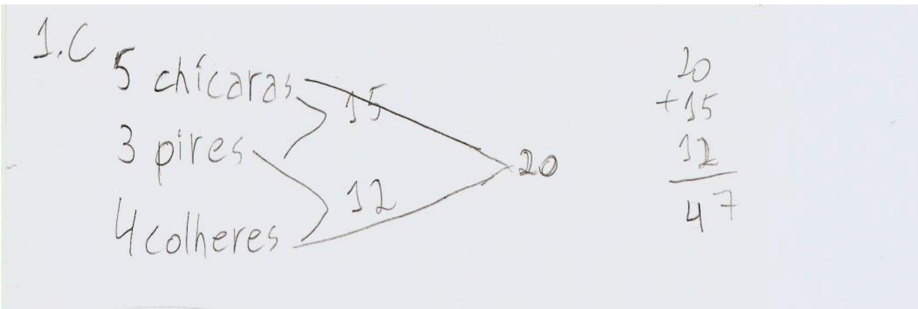
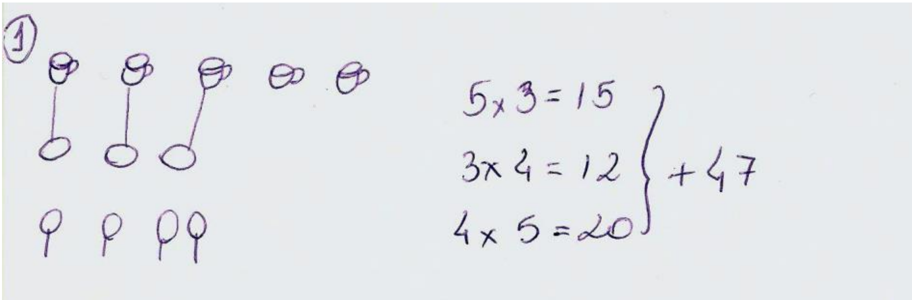


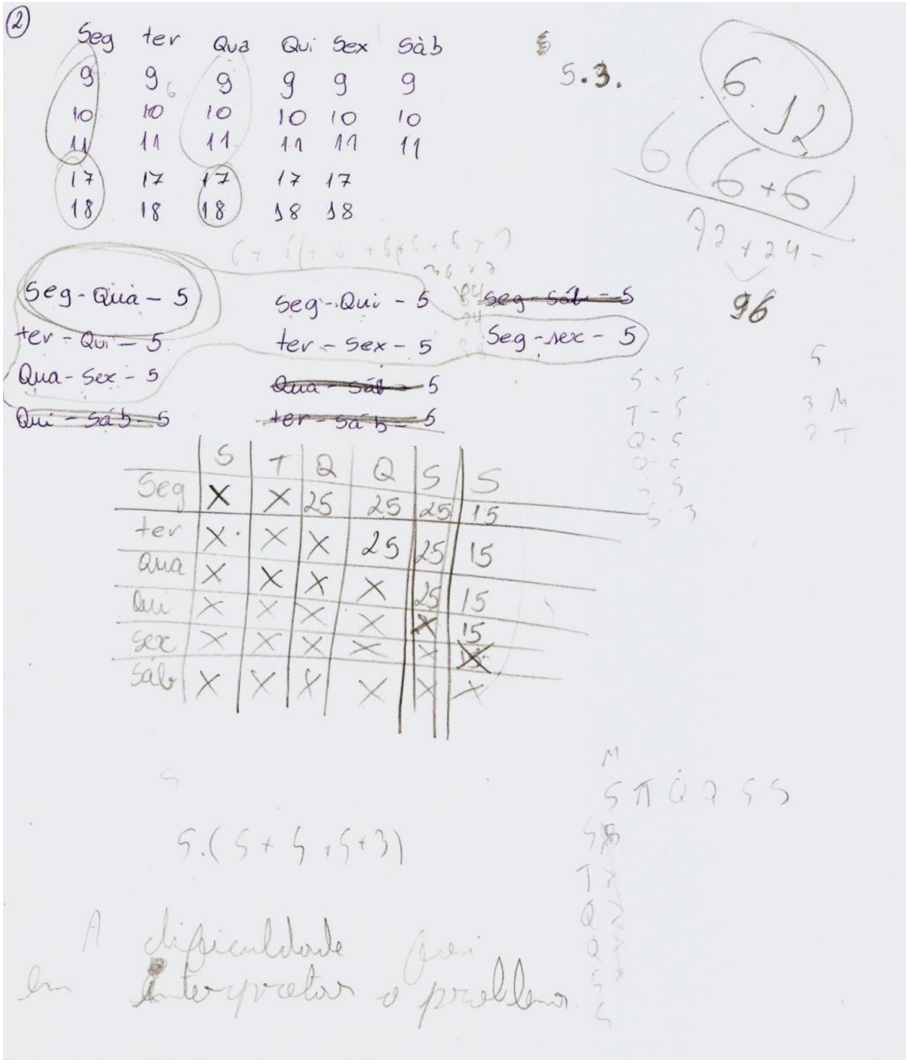
Figura 16 – Resolução de um terceiro grupo para o problema 01.C.



Note-se nas figuras 14, 15 e 16, que os três grupos abordaram o problema com diagramas ligeiramente diferentes, mas realizaram basicamente o mesmo processo, obtendo o mesmo resultado.

O problema 02, retirado da OBMEP, é excelente, completo, dinâmico, mas talvez exposto em um momento em que os alunos ainda não estavam preparados. Todos os grupos se empenharam, debateram, mas tiveram um nível de dificuldade muito grande na interpretação e abordagem.

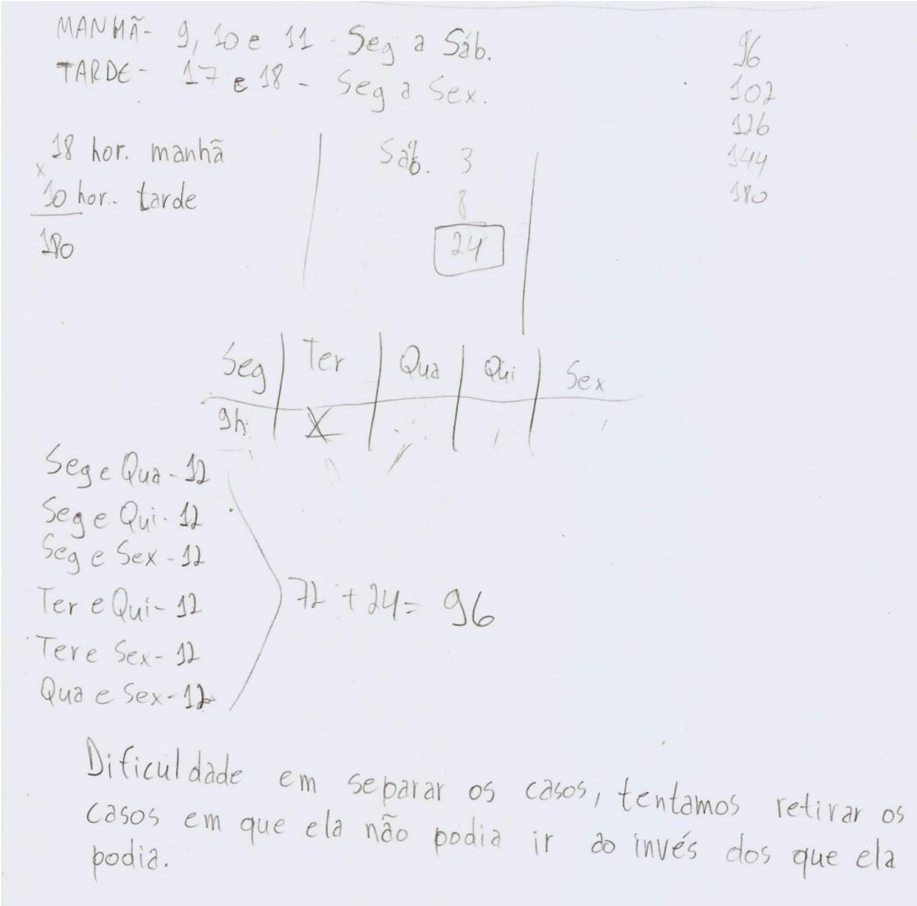
Figura 17 – Resolução de um grupo para o problema 02.



Verifique a equipe da figura 17. Sua principal ideia foi fazer uma tabela, uma iniciativa muito boa. Porém, não conseguiu contar um conjunto de elementos maior e depois eliminar as repetições. Essa abordagem, muitas vezes, é o caminho, mas de modo geral, dividir em grupos disjuntos facilita a visualização e diminui a chance de erro. Separar em casos distintos é mais viável e confiável, porque conseguimos visualizar o que realmente estamos contando.

Após perceber a dificuldade de todos, decidi intervir. Com alguns questionamentos, alguns alunos perceberam que contar o todo e depois eliminar as repetições não era o caminho mais adequado. Tive que relembrar o que havíamos discutido sobre as restrições. Existia algum elemento diferente? Qual era esse elemento? Aí começaram a enxergar uma nova maneira de abordar o problema.

Figura 18 – Resolução de um segundo grupo para o problema 02.



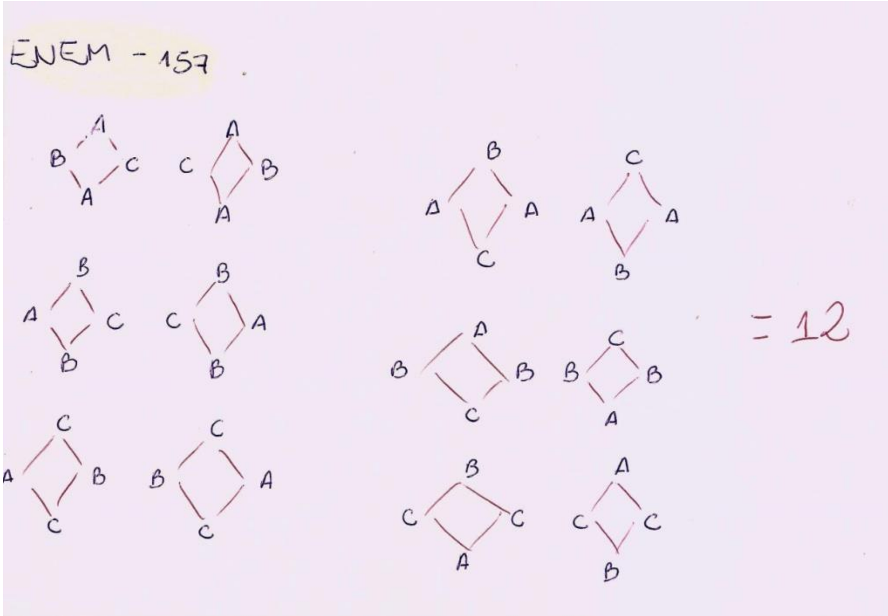
O grupo da figura 18 conseguiu perceber que separar o conjunto dos dias que incluía o sábado do outro que não o incluía facilitava muito os cálculos. Depois dessa constatação, o princípio multiplicativo foi usado de modo bem satisfatório. Apesar de separar as outras combinações de dias caso a caso, perceberam que o cálculo era o mesmo.

O problema foi produtivo, mas deveria ter sido usado em um momento posterior, para seu melhor aproveitamento. No que se refere a princípio multiplicativo, já noto uma boa segurança por parte dos alunos.

No problema 03, minha ideia inicial era que eles separassem em modelos e após isso, contassem os casos de cada modelo. De certa forma, isso aconteceu, mas todos os grupos, talvez pelo tamanho reduzido do conjunto, resolveram fazer todos os casos.

No grupo da figura 19, uma falha na interpretação, ao não levar em conta que o objeto podia rotar, causou-lhes o erro maior da contagem. O resultado foi, de certa forma, atingido, mas alguns elementos foram repetidos e outros esquecidos.

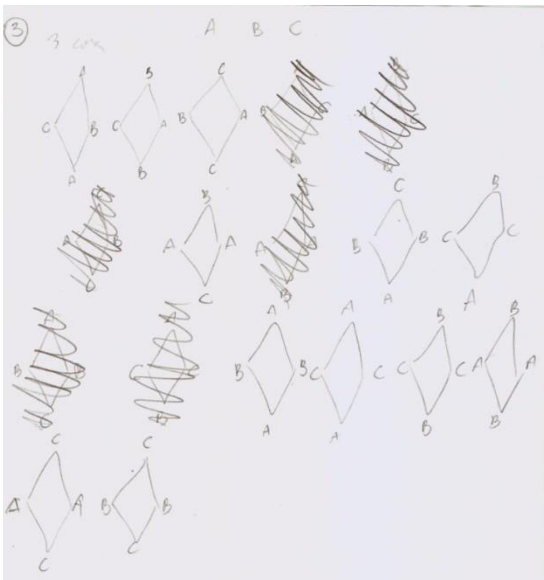
Figura 19 – Resolução de um grupo para o problema 03.



Já o grupo da figura 20 usou uma abordagem parecida, sistemática também, porém conseguiu visualizar a rotação dos elementos, eliminando os repetidos. No problema passado, essa técnica não funcionou, mas nesse foi útil.

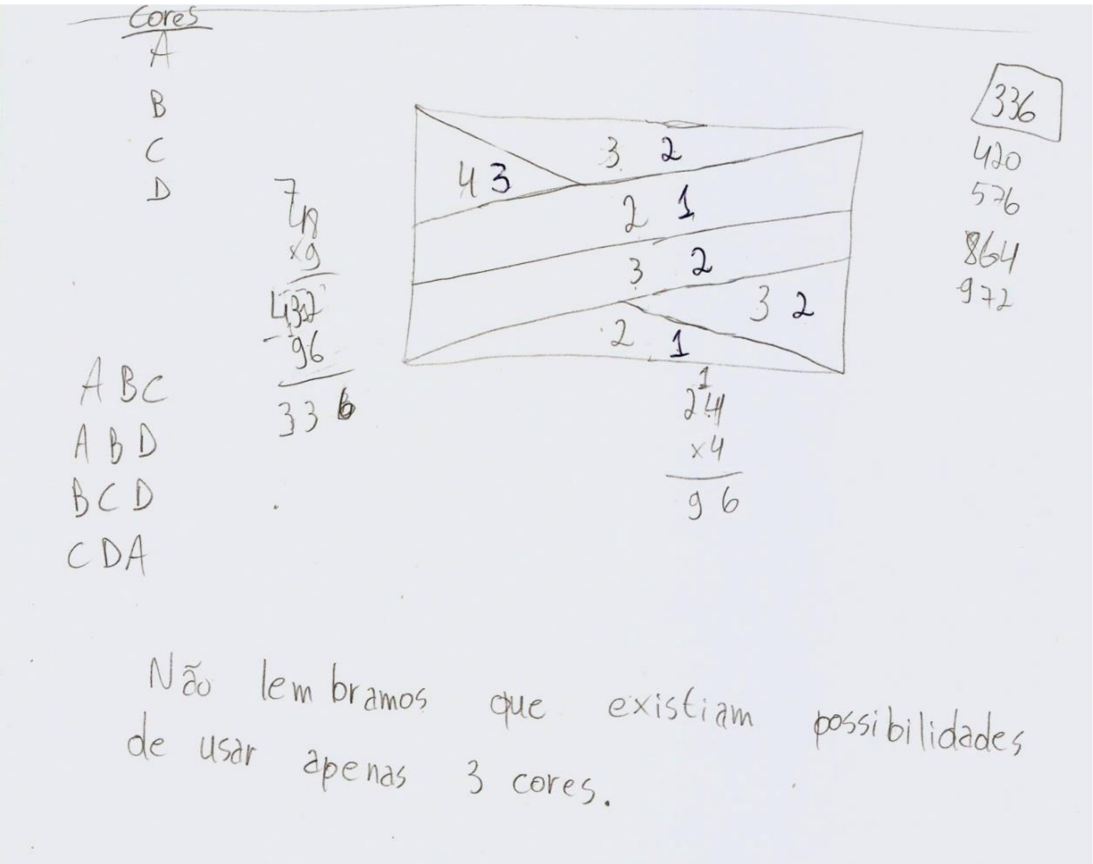
A diversidade dos modos que temos para abordar um problema de Análise Combinatória é o que a torna bela, porém é o que mais assusta os alunos. A solução para essa dificuldade é municiá-los com o maior número possível de ferramentas úteis, para que, quando depararem-se com problemas desafiantes, tenham ferramentas para sua resolução.

Figura 20 – Resolução de um segundo grupo para o problema 03.



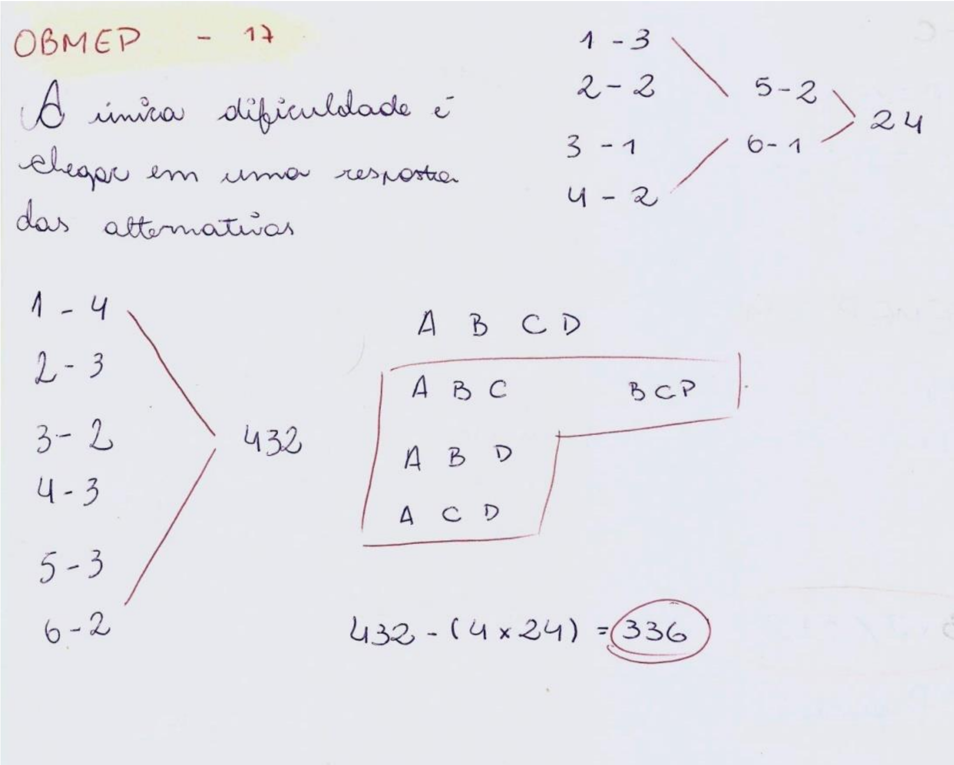
No problema 04, outra questão bem interessante surge para reforçar a ideia de eliminação de casos repetidos. Nesse momento, o princípio multiplicativo já foi usado com naturalidade. Inicialmente, os alunos resolveram com muita rapidez e de modo parcialmente correto. Com quatro cores, não tiveram nenhuma dificuldade ou dúvida, porém não observaram que era possível fazer a bandeira com três cores, o que não nos interessava, mas estávamos contando também.

Figura 21 – Resolução de um grupo para o problema 04.



Todos os grupos terminaram o problema rapidamente e, no momento da discussão das resoluções, perguntei sobre a possibilidade de terem contado casos contendo somente três cores. Imediatamente, perceberam o erro e reiniciaram a resolução. A partir disso, os grupos conseguiram desenvolver corretamente a resolução do problema.

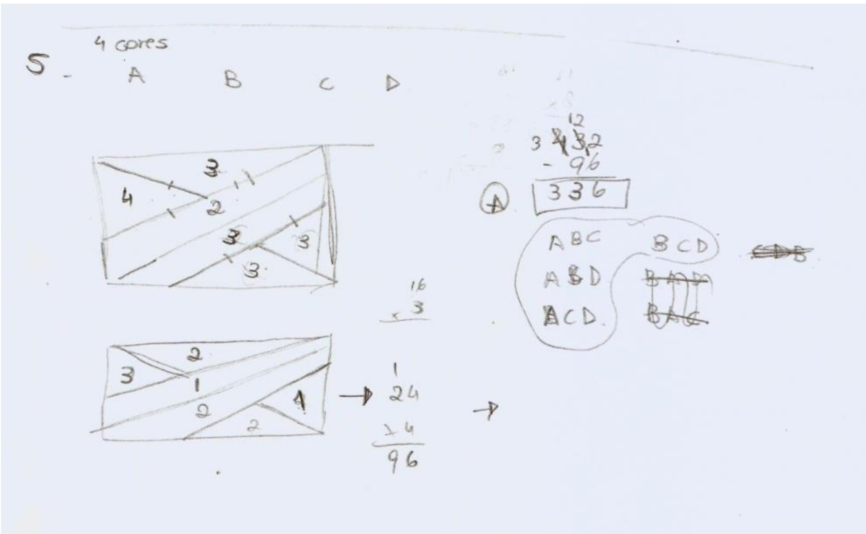
Figura 22 – Resolução de um segundo grupo para o problema 04.



Nos grupos das figuras 21, 22 e 23, a dificuldade foi relativamente a mesma: inclusão de casos em que somente três cores foram usadas.

Um destaque para o último item, porque relata bem a ideia de combinação. Por mais que seja uma parte pequena do problema, já serve de introdução a esse conteúdo. Os alunos fizeram caso a caso, devido ao desconhecimento do conceito.

Figura 23 – Resolução de um terceiro grupo para o problema 04.



4.4 TERCEIRA AULA

4.4.1 OBJETIVOS:

- Concretizar a ferramenta do princípio multiplicativo através de problemas contextualizados;
- Fortalecer a ideia da divisão do problema em problemas menores, para a contagem de grupos disjuntos;
- Fortalecer a ideia da divisão do problema em dois problemas menores, quando existe restrição.

4.4.2 CONCEITOS ABORDADOS:

- Princípio multiplicativo como sucessão de escolhas;
- Princípio multiplicativo com n escolhas semelhantes;
- Contagem de conjuntos disjuntos.

4.4.3 PROBLEMAS ESCOLHIDOS:

Problema 01:

(ENEM 2012), questão 158:

> O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.
> De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?
>
> A - 14
> B - 18
> C - 20
> D - 21
> E - 23

Problema 02:

(OBMEP 2010), questão 17:

> Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?
>
> A) 20
> B) 32
> C) 60
> D) 72
> E) 120

Problema 03:

Livro "Círculos matemáticos – A Experiência Russa":

"Jogamos uma moeda três vezes. Quantas sequências diferentes de cara e coroa podemos obter?" (IMPA, 2010)

Problema 04:

Livro "Círculos matemáticos – A Experiência Russa":

> O alfabeto hermitiano consiste em apenas três letras: A, B e C. Uma palavra nesta linguagem é uma sequência arbitrária tendo, no máximo, quatro letras. Quantas palavras existem na linguagem hermitiana? (IMPA, 2010)

Problema 05.A:

Livro "Círculos matemáticos – A Experiência Russa":

"De quantas maneiras podemos colocar uma torre branca e outra preta em um tabuleiro de xadrez de modo que elas não possam se atacar mutuamente?" (IMPA, 2010)

Problema 05.B:

Livro "Círculos matemáticos – A Experiência Russa":

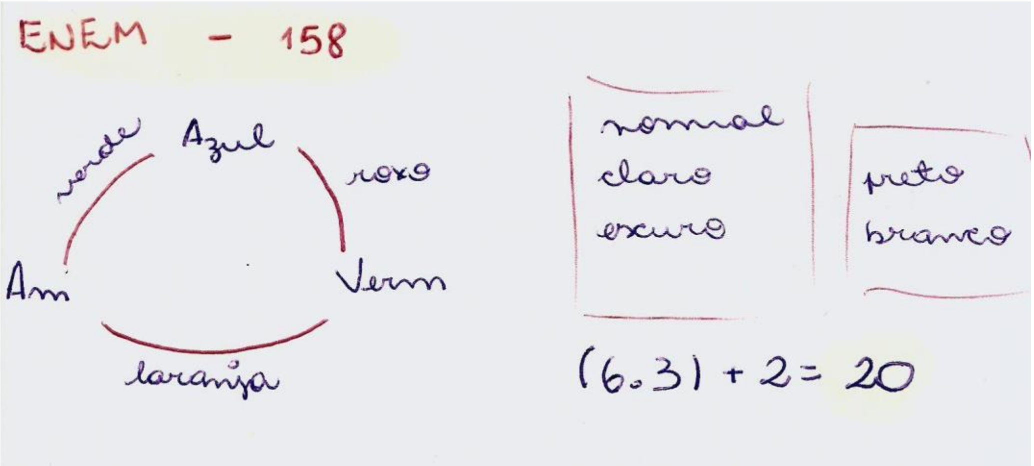
“De quantas maneiras podemos colocar um rei branco e outro preto em um tabuleiro de xadrez de modo que eles não possam se atacar mutuamente?” (IMPA, 2010)

4.4.4 DESENVOLVIMENTO:

Na terceira e última aula desta oficina, temos como intenção a afirmação definitiva do princípio multiplicativo. Começamos com alguns problemas de reforço e acrescentamos a ideia de repetições sucessivas do princípio multiplicativo levando ao conceito de potência.

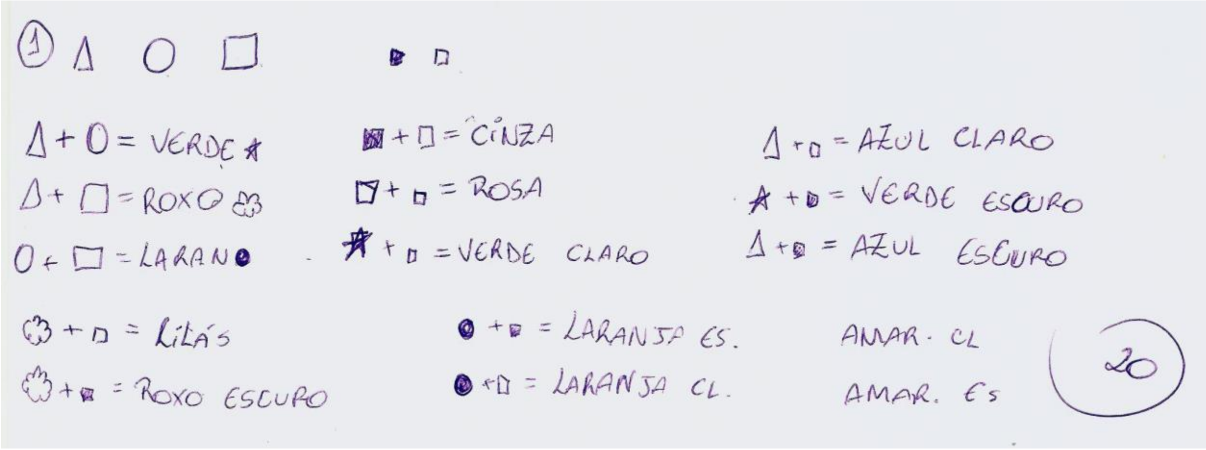
O problema 01, um problema simples retirado do ENEM, bem contextualizado e com casos bem reduzidos é ótimo para uma introdução. A maioria dos grupos, como o da figura 24, resolveu o problema proposto com certa rapidez. Analisaram bem o problema, sem dificuldades, atacaram objetivamente, de modo compacto, contaram e executaram o cálculo perfeitamente.

Figura 24 – Resolução de um grupo para o problema 01.



O grupo da figura 25 não mostrou o mesmo domínio do grupo anterior, mas analisaram bem o problema, conseguiram resolver pelo modo caso a caso de forma sistemática e eficiente. Por isso, chegaram à resposta corretamente e com convicção.

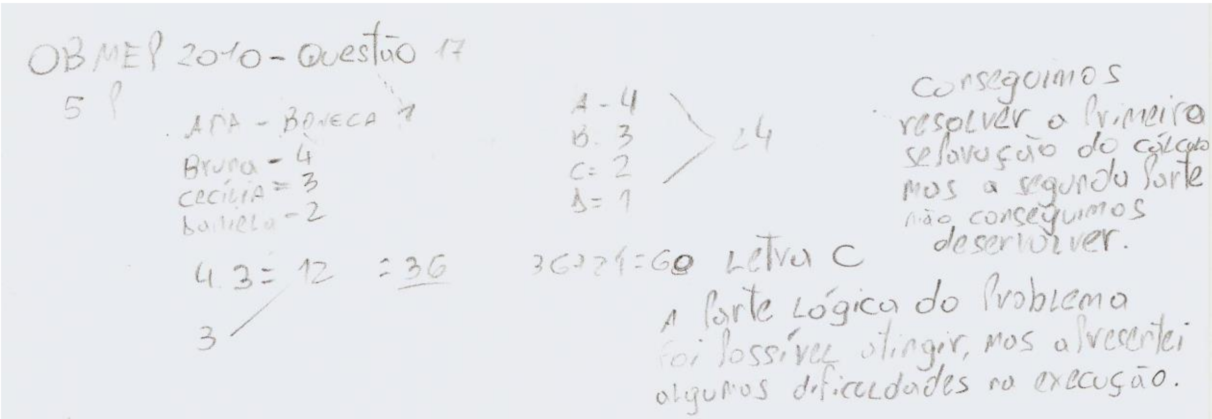
Figura 25 – Resolução de um segundo grupo para o problema 01.



No problema 02, um pouco mais complexo, onde os alunos teriam que separar em dois conjuntos disjuntos, algumas dificuldades pontuais ocorreram, mas nenhuma que mereça destaque. Foi possível auxiliar a maioria dos grupos apenas com indagações também pontuais.

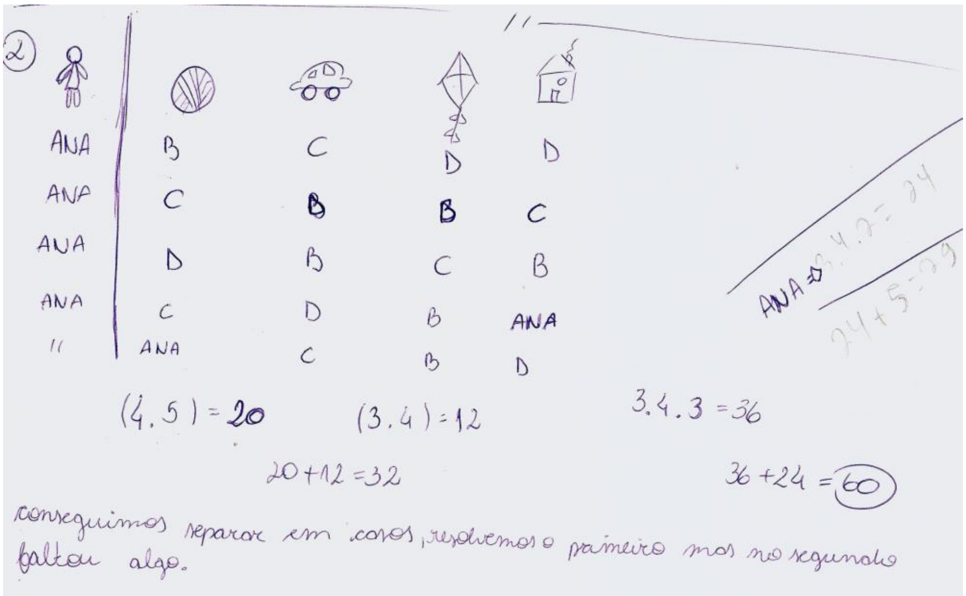
Destaque para dois grupos que mesmo com algumas dificuldades e não chegando à resposta desejada antes do debate, resolveram o problema de maneira parcialmente correta. Note-se o grupo da figura 26. Conseguiu dividir em dois casos e aplicou o princípio multiplicativo corretamente.

Figura 26 – Resolução de um grupo para o problema 02.



Já no grupo da figura 27 tentou construir uma tabela para contar os casos de modo mais visual. No entanto, o grupo não alcançou o resultado desejado, pois resolver problemas de contagem caso a caso, obviamente, tem limitações. Mesmo a tabela sendo montada de modo sistemático, não foi o suficiente para que o grupo concluísse a resolução do problema.

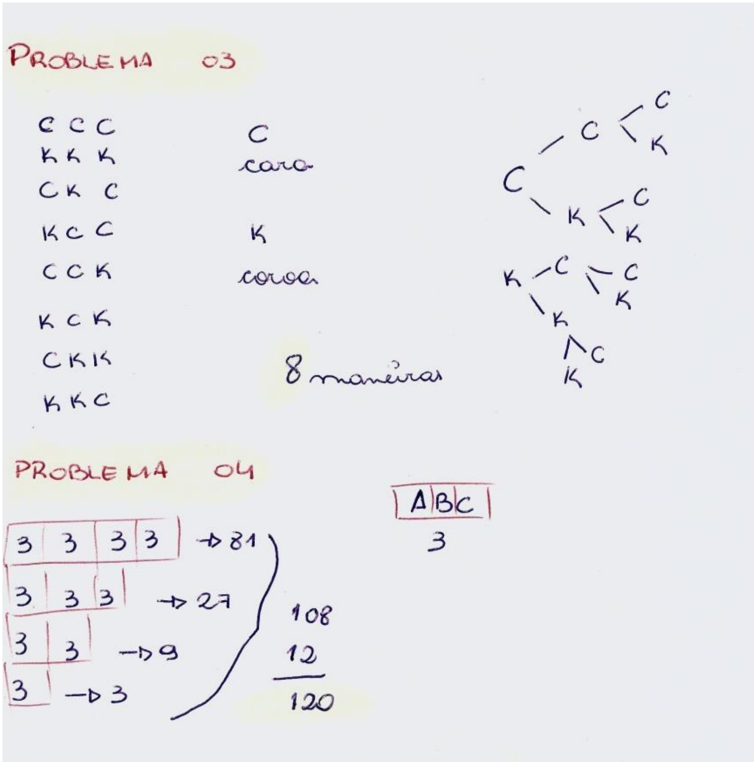
Figura 27 – Resolução de um segundo grupo para o problema 02.



Os problemas 03 e 04 têm como objetivo pedagógico introduzir a aplicação sucessiva do princípio multiplicativo, chegando-se à potenciação.

Consideremos o grupo na figura 28. Ele desenhou um diagrama para a resolução do problema 03. Já no problema 04 apresentou uma perspectiva mais objetiva, indo diretamente para os cálculos e resolvendo-os de modo correto.

Figura 28 – Resolução de um grupo para os problemas 03 e 04.



Nos grupos das figuras 28, 29 e 30, observamos modos diferentes de organizar um problema caso a caso. O grupo da figura 28 destaca-se por utilizar o diagrama em árvore.

Figura 29 – Resolução de um segundo grupo para o problema 03.

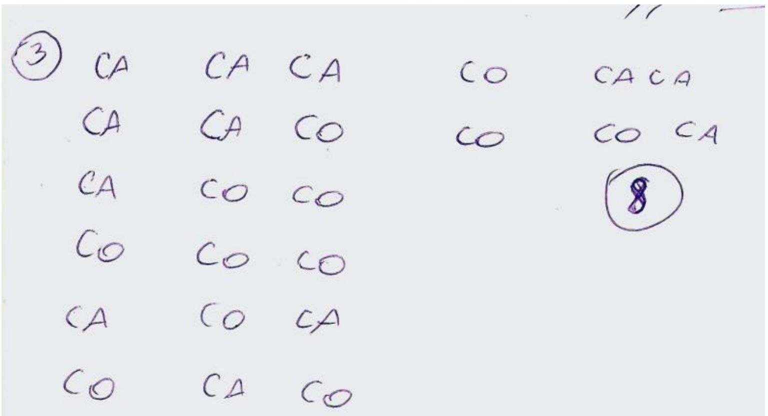
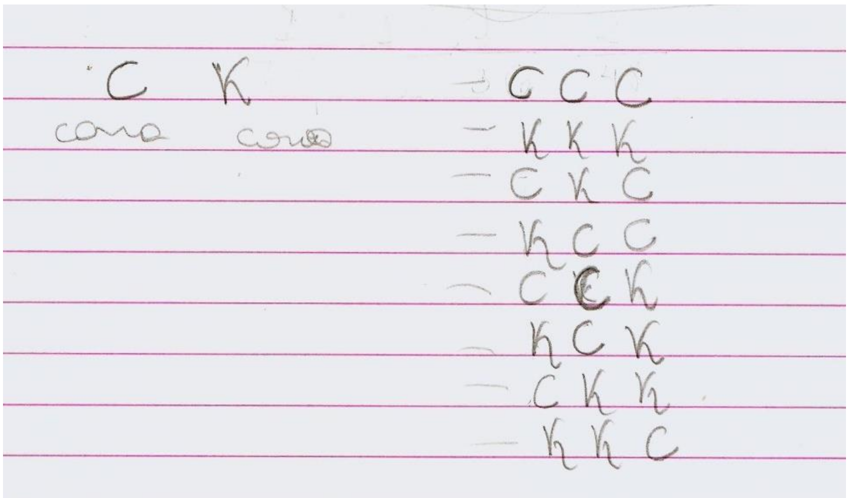
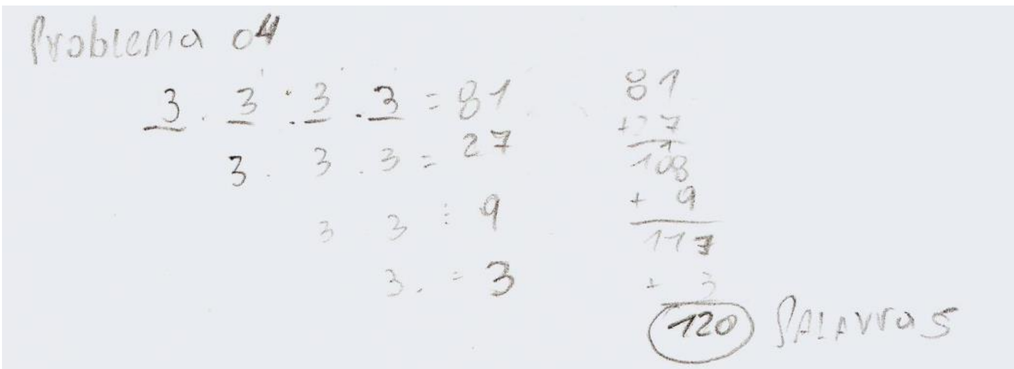


Figura 30 – Resolução de um terceiro grupo para o problema 03.



O grupo da figura 31 executou os cálculos de modo correto e objetivo.

Figura 31 – Resolução de um segundo grupo para o problema 04.

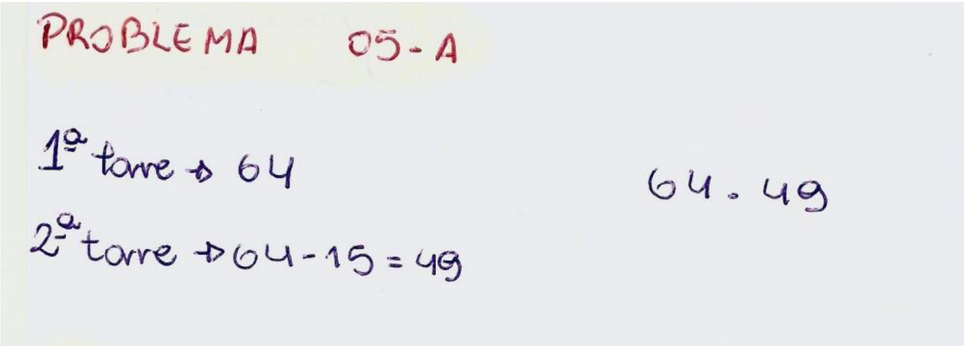


Os últimos dois problemas trazem um tema interessante e, muitas vezes, esquecido nas escolas, o xadrez. Ele é muito bom para desenvolver o raciocínio lógico, dentro da Análise Combinatória, mostra-se útil, construindo um espaço amplo para a criação de problemas.

Antes de resolvermos os problemas, busquei informações sobre o entendimento de todos os alunos sobre o espaço utilizado pelo xadrez, o tabuleiro, e se entendiam a “mecânica” do jogo, movimentos das peças, etc. Após essa introdução, aconselhei-os que esboçassem o tabuleiro, para melhor análise.

Todos conseguiram assimilar a ideia, organizaram bem as informações, planejaram e executaram a solução de modo bem satisfatório. Destaque para o grupo da figura 32 que, com um pequeno rascunho, já conseguiu assimilar o problema e executar a resolução rapidamente.

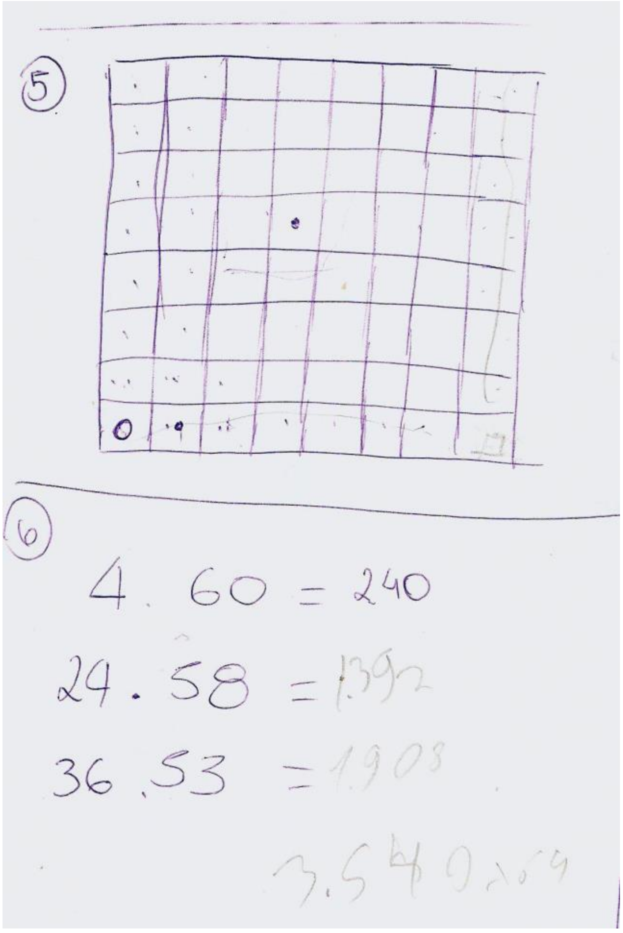
Figura 32 – Resolução de um para o problema 05.



O grupo da figura 33 não conseguiu resolver o problema 05 de modo tão objetivo, necessitou de uma análise mais demorada.

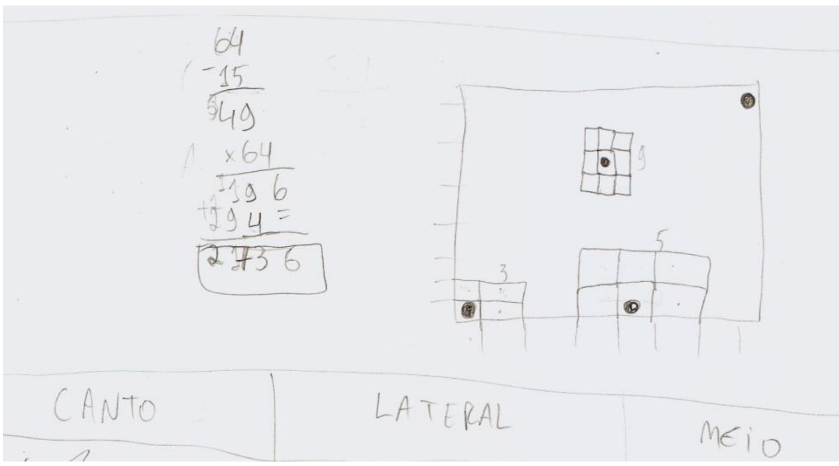
Logo, outro cuidado que temos que tomar é saber quando trocar de conteúdo. Isso é muito relativo, n variações podem modificar esse tempo. O erro que não podemos cometer é transformar a resolução de problemas em listas de exercícios. Independentemente do tempo que levarmos, não devemos diminuir a curiosidade do aluno e acabar com o desafio que os motiva. A qualidade dos problemas é mais importante que a quantidade.

Figura 33 – Resolução de um grupo para o problema 05.A e 05.B.



Finalizando, o grupo da figura 34 sistematizou perfeitamente a resolução do problema 05.B, conseguindo enxergar os três casos possíveis e consequentemente, resolvendo-o corretamente.

Figura 34 – Resolução de um segundo grupo para o problema 05.B.



5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar a pesquisa, o planejamento e a elaboração das questões de análise combinatória, deste projeto na perspectiva de resolução de problemas, não imaginava-se o quão prazeroso seria essa prática, principalmente, por meio das provas do ENEM e da OBMEP. Pesquisar, resolver e analisar em que momento aquele desafio deveria ser usado, tentar prever as dificuldades que os alunos encontrariam e os debates que a questão poderia gerar. Um momento que todo docente de matemática deveria experimentar!

Posteriormente às aulas, temos que refletir o que deu certo e o que deu errado com cada questão e com cada aula de modo em geral. Quando um professor prepara uma aula, por mais tradicional que seja, e ele aplica essa aula em várias turmas, com certeza, pela terceira vez, a aula não é mais a mesma, é melhor. Com a resolução de problemas não é diferente. Devemos sempre que necessário aprimorar os problemas. Talvez, introduzir novos para que o aumento do nível de dificuldade de um item para o outro fique mais suave. Talvez, eliminar algum cuja aplicação não foi tão útil, enxugando o número de questões. Esse procedimento deixa a aula cada vez mais produtiva.

Quando preparamos uma aula nessa perspectiva, temos que pensar principalmente em nossos alunos. A construção do conhecimento deles depende disso. O trabalho em forma de oficina, com um número reduzido de discentes, facilita a percepção pelos professores das dificuldades encontradas pelos alunos, momento a momento. O que foi constatado nesse processo, além do desenvolvimento de conceitos e habilidades, é a maturidade do aluno ao enfrentar problemas. Como já foi citado anteriormente neste trabalho, enfrentar problemas é de suma importância para o presente e o futuro do aluno.

No decorrer das aulas, com a evolução dos alunos, nota-se que as quatro etapas de POLYA (1978) para resolução de problemas, estão sendo superadas cada vez, com mais naturalidade. O aluno começa a compreender os problemas mais afundo, logo estabelece um plano com mais facilidade. Gradativamente executa a resolução com mais exatidão. A verificação torna-se uma prática espontânea, ou seja, com o aprofundamento dos conceitos, a evolução não é apenas em Análise Combinatória, a evolução do aluno acontece como um todo.

Com essa constatação, espera-se que esse trabalho não sirva apenas como possibilidade de aprendizado em Análise Combinatória. Essa perspectiva pode ser aproveitada em outros campos da matemática. Tome-se como exemplos a Geometria Plana, Geometria Espacial, Trigonometria e Matemática Financeira.

A maior dificuldade encontrada nesta proposta foi a quebra de rotina no modo em que os alunos geralmente recebem os conteúdos para o aprendizado. Isso só seria sanado com a repetição mais frequente desta abordagem. Por outro lado, a expectativa com relação ao interesse dos alunos e esforço deles foi alcançada, compensando qualquer falta de hábito com a tendência.

Acreditamos que os objetivos desta dissertação foram atingidos. Não se tinha o intuito de expressar a verdade absoluta de como ministrar uma aula de Análise Combinatória. O ideal maior era buscar uma alternativa diferenciada para que ocorresse melhor a apropriação dos conceitos e habilidades pelos discentes. O modo como foi sucedendo-se as aulas, o desenvolvimento do aluno como um todo, faz acreditar que o projeto foi um sucesso, comprovando que o método utilizado pode ser aplicado para resolução de problemas em Análise Combinatória.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, A. I. P. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. 54 p. Trabalho de conclusão do curso (Licenciado em Matemática) – Fundação Universidade Federal de Rondônia. Ji-Paraná-RO, 2010.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica. 1998.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

_______. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 7 ed. São Paulo: Ática, 1995.

FORMIN, D; GEKIN, S; ITENBERG, I; **Círculos Matemáticos. A Experiência Russa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

HOUAISS, Antônio. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2004.

LIMA, E; CARVALHO, P; WAGNER, E; MORGADO, A. **Temas e Problemas**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LUPINACCI, V. L. M.. BOTIN, M. L. M. **Resolução de Problemas no Ensino de Matemática.** In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, 2004

MORGADO, A; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J; PINTO DE CARVALHO, P; FERNANDEZ, P; **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

PINHEIRO, C. A. M. **O ensino de análise combinatória a partir de situações-problema**. 2008. 164 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará. Belém-PA, 2008.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.