UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Fabiana Bordin

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Santa Maria, RS, Brasil
2016

Fabiana Bordin

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientadora: Prof.ª Dra. Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

Santa Maria, RS, Brasil
2016.

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

BORDIN, FABIANA
SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA / FABIANA BORDIN.- 2016.
112 p.; 30 cm

Orientadora: Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2016

1. FUNÇÃO 2. ENSINO-APRENDIZAGEM 3. GEOGEBRA 4. TECNOLOGIA 5. MATEMÁTICA I. Maciel Cardoso Brum, Valéria de Fátima II. Título.

Fabiana Bordin

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 29 de agosto de 2016:

Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Karine Faverzani Magnago, Dra. (UFSM)

Lineia Schutz, Dra. (UFRGS)

Santa Maria, RS
2016/.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão deste estudo e, de maneira especial, agradeço:

- à minha orientadora Valéria Cardoso Brum, pelo acompanhamento, incentivo, dedicação, revisão de estudo, críticas e direcionamentos, colaborando sempre para um melhor resultado;

- aos professores do curso PROFMAT da UFSM, por compartilharem seus conhecimentos e experiências colaborando sempre com a formação integral e consistente de seus alunos;

- aos colegas da turma 2014, pela amizade e cumplicidade durante o período de convivência, em especial aos amigos Douglas, Luiz Guilherme e Mauro;

- aos colegas da turma 2015, pelo acolhimento e colaboração, em especial à amiga Francine;

- aos meus familiares e amigos que me apoiaram em todos os momentos, torceram por mim e vibram comigo a cada conquista;

- a direção e coordenação da Escola Estadual Técnica José Cañellas pelo apoio, boração, compreensão e incentivo;

- aos alunos participantes da oficina pela disposição e empenho;

- a SBM e a CAPES pela oportunidade e incentivo financeiro.

RESUMO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

AUTORA: Fabiana Bordin
ORIENTADORA: Valéria De Fátima Maciel Cardoso Brum

Esta Dissertação tem como objetivo apresentar a análise dos resultados obtidos através da aplicação do *Software educativo*GeoGebra no ensino de Funções Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica. O estudo classifica-se como descritivo bibliográfico e quantitativo. No capítulo 1 apresenta-se a abordagem histórica da Matemática, Álgebra, e Funções, além do conhecimento e importância do ensino da Matemática no Ensino Médio e a aplicabilidade do Software GeoGebra no ensino de Funções. No capítulo 2 apresenta-se a aplicação da pesquisa e análise dos resultados. As atividades da experiência didática foram aplicadas a uma escola de Ensino Médio da Rede Estadual de Ensino em Frederico Westphalen, Rio Grande do Sul e as mesmas ocorreram em cinco quintas-feiras, com 3 horas de duração, perfazendo um total de 15 horas/atividade. Com este estudo comprovamos que a utilização adequada da tecnologia de informação e comunicação permite resultados positivos no conhecimento, aperfeiçoa o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Palavras - chave: Funções. Ensino- aprendizagem. Tecnologia. GeoGebra. Matemática.

ABSTRACT

DIDACTIC SEQUENCE FOR THE FUNCTIONS TEACHING AFIM, QUADRATIC, EXPONENCITIAL AND

AUTHOR: FABIANA BORDIN
ADVISOR: VALÉRIA DE FÁTIMA MACIEL CARDOSO BRUM

This dissertation has objective to present an analysis of the results gotten through application of GeoGebra Educative Software in the teaching of Functions Relative, Quadratic, Exponential and Logarithmic. The study is classified as bibliographic, descriptive and quantitative. In chapter1 presents the historical approach to Mathematics, Algebra and Functions, besides the knowledge and importance of the teaching of Mathematics in High School and the applicability of GeoGebra Software in Functions teaching. In the chapter 2 presents the application of research and analysis of results. The activities of the teaching experience were applied to a Public Teaching School of High School in Frederico Wesphalen, Rio Grande do Sul, and the same occurred in five Thursdays, 3 hours each day, with a total of 15 hours/activity. With this study it was proved that the proper use of information communication technology allows positive knowledge results, improve the teaching ning of Mathematics.

Keywords: Functions. Teaching-learning. Technology. GeoGebra. Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Atuo como profissional da educação desde 2002 no ensino da Matemática no Ensino Médio e Técnico. Observando as últimas décadas, percebo que a difusão de informações, principalmente através da TV e da Internet, além da velocidade das mudanças no mundo globalizado, ocorrem de maneira significativamente rápida. Percebo também, que os alunos chegam à escola cada vez mais informatizados, no sentido de domínio de tecnologias e seu uso no cotidiano e que não deve ser desperdiçado. Entendo que cabe ao educador utilizar todo este conhecimento previamente adquirido em favor do desenvolvimento de novos saberes em busca da autonomia e diante disto, penso que fazer com que os alunos sintam-se atraídos pelos conteúdos desenvolvidos nas aulas, consiste hoje no maior desafio para os educadores.

Revisando a história da educação Matemática, vivemos em um período de transição no que se refere à metodologia do ensino, pois em um passado não muito distante, ela atuava como filtro, permitindo a promoção apenas dos que tinham aptidões especiais ou auxílio particular. Já na escola atual observo que é necessário que se ensine a Matemática direcionada para a cidadania e a vida na sociedade moderna e com foco no desenvolvimento do raciocínio quantitativo, geométrico e lógico, educando o espírito e enriquecendo a formação de cada indivíduo.

Analisando as questões da área da Matemática e suas Tecnologias propostas pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), observo que é necessário que o estudante demonstre domínio de competências e de habilidades na solução de problemas, fazendo uso dos conhecimentos adquiridos na escola e na sua experiência de vida, estando, assim, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Neste sentido, o computador pode ser utilizado como uma ferramenta de apoio ao ensino da Matemática. Os ambientes informatizados possibilitam enfrentar estes desafios do processo de ensino aprendizagem e possibilita “mudar os limites entre o concreto e o formal” (PAPERT, 1998). O computador nos permite criar um novo tipo de objeto – os objetos ‘concreto abstratos’. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por ser tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais. (HEBENSTREINT, 1987 apud BORTOLOTTI, 2008).

Assim, proporcionar a interação entre a Matemática e a Informática torna mais palpável e compreensível os conceitos matemáticos, pois oportuniza ao educando a visualização e compreensão das definições, e nesta pesquisa ressaltamos a Geometria Analítica. Com este recurso, o professor pode aprofundar o conhecimento no conteúdo, pois a aprendizagem será interativa e lúdica, o que proporciona maior dinamismo às suas aulas.

Nesta perspectiva, os Softwares Educacionais, como exemplo o Software GeoGebra têm se mostrado eficaz, pois possui interface de alto desempenho e fácil apresentação, o que permite aproximar o conteúdo abstrato do real.

Partindo disto, o principal objetivo desta pesquisa é mostrar que existe a possibilidade de inovação na aplicação do conteúdo de funções em sala de aula, com base nos resultados obtidos através da aplicação do *Software* educativo GeoGebra no ensino de Funções Afim, Quadráticas, Exponencial e Logarítmica.

A pesquisa classifica-se como um levantamento descritivo, bibliográfico e quantitativo e apresenta uma proposta de sequência didática para o ensino de funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica e está dividida em 2 capítulos.

No capítulo 1 estão descritas a abordagem histórica da Matemática, Álgebra e Funções. Aborda-se também o conhecimento e importância do ensino da Matemática no Ensino Médio e a aplicabilidade do Software GeoGebra no ensino de Funções

Já no segundo capítulo, apresentamos a metodologia de pesquisa, caracterização dos sujeitos, propostas e análise das oficinas através de observações e questionários e se deterá na análise dos resultados obtidos.

2 A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

A constituição Brasileira, datada de 1988, traz em seu artigo 208, inciso I que a educação é dever do Estado e será efetivado mediante a garantia de ”educação básica obrigatória e gratuita dos 4 (quatro) aos 17 (dezessete) anos de idade, assegurada inclusive sua oferta gratuita para todos os que a ela não tiveram acesso na idade própria;” (Redação dada pela Emenda Constitucional nº 59, de 2009[1]).

Assim, o Ensino Médio é a etapa final da Educação Básica Brasileira e tem como princípio a unidade entre trabalho, ciência, cultura e tecnologia. O principal objetivo desse nível de ensino apresentados pelos documentos oficiais são: a autonomia do estudante frente às determinações do mercado de trabalho e centrado nos sujeitos da aprendizagem, respeitando suas características biopsicossociais, culturais e econômicas. (BRASIL, 2008).

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, ao final desse nível de ensino, espera-se que os alunos,

> (...) saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebem a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p.69).

Assim, os documentos oficiais direcionados ao Ensino Médio apresentam a concepção de que a Matemática possui um valor formativo e instrumental, pois ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo e é uma ferramenta para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em diversas atividades humanas.

Apresentamos neste capítulo brevemente a história da matemática, a importância da matemática no ensino médio, o conhecimento matemático no Ensino médio e o software GeoGebra no Ensino de Funções.

---

[1] Acrescenta § 3º ao art. 76 do Ato das Disposições Constitucionais Transitórias para reduzir, anualmente, a partir do exercício de 2009, o percentual da Desvinculação das Receitas da União incidente sobre os recursos destinados à manutenção e desenvolvimento do ensino de que trata o art. 212 da Constituição Federal, dá nova redação aos incisos I e VII do art. 208, de forma a prever a obrigatoriedade do ensino de quatro a dezessete anos e ampliar a abrangência dos programas suplementares para todas as etapas da educação básica, e dá nova redação ao § 4º do art. 211 e ao § 3º do art. 212 e ao caput do art. 214, com a inserção neste dispositivo de inciso VI. Diário Oficial da União, Brasília, 12 de novembro de 2009.

2.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A matemática é a ciência dos números e dos cálculos, já “apalavra matemática tem origem na palavra grega μαθηματ ικα´(...). Esta, por sua vez, provém da palavra μαθημα, que significa, simplesmente, conhecimento.” (MOL, 2013)

De acordo com Mol (2013),

> Os pensadores da Grécia antiga, ao racionalizar a compreensão de quantidades e formas, estruturaram a matemática como modo de pensar. Ela, ao longo da história, teve papel central na maneira como o homem entende o mundo — o que induziu os gregos a tratá-la como a essência do conhecimento.

Assim, desde a antiguidade, o homem utiliza a matemática para facilitar a vida e organizar a sociedade. A história nos revela que a matemática foi usada desde os primórdios das civilizações. Os egípcios a utilizaram na construção de pirâmides, diques, canais de irrigação e estudos de astronomia. Os gregos antigos desenvolveram vários conceitos matemáticos nas áreas da astronomia, óptica, música, geometria, mecânica, utilizando modelos matemáticos para fazer previsões, e posteriormente os algoritmos. Chegando ao método dedutivo, que por uso da lógica (hoje conhecido como teorema), expõe a veracidade dos resultados e conclusões.

Diante disto, é notório a presença dos conceitos matemáticos na sociedade e em diversas áreas, como por exemplo, a física, química, informática, arquitetura, entre outras.

As principais áreas da Matemática são: Aritmética, Álgebra, Geometria, Geometria Analítica, Porcentagem, Trigonometria, Estatística e Educação Matemática.

A Álgebra, que nesta pesquisa abordamos especificamentefunções, de acordo com Baumgart (1992), a palavra é uma variante latina da palavra árabe *al-jabr* (às vezes transliterada *al-jebr*), utilizada pela primeira vez no título de um livro, Hisabal-jabrw'al-muqabalah, escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizm).

É um dos principais ramos da matemática que trata, na sua essência, de operações matemáticas, envolvendo equações e funções, as quais são analisadas de forma abstrata e genérica.

> Curiosamente, provém da expressão árabe *walmuqabalah* que significa diminuição, operação de cirurgia pela qual se reduzia os ossos luxados ou fraturados (algebrista era médico reparador de ossos) (LIGA DA MATEMÁTICA, 2011).

Nos dias atuais a Álgebra caracteriza-se pelo conjunto de conceitos, propriedades e procedimentos que empregam letras e expressões literais para estabelecer relações e realizar operações.

Nas expressões algébricas, as letras podem cumprir funções muito diferentes: podem representar um número qualquer, um número desconhecido, uma relação entre conjuntos de números ou símbolos arbitrários de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Essas várias funções das expressões algébricas estão relacionadas com as várias interpretações que temos da Álgebra como:

- Generalização da Aritmética;
- Estudo de procedimentos para resolver certos problemas;
- Estudo de relações entre quantidades;
- Estudo das estruturas.

Na concepção da Álgebra como generalização da Aritmética, as letras formam parte de modelos que permitem generalizar propriedades. Elas são generalizadoras de modelos aritméticos.

O uso das letras facilita pensar em ideias matemáticas e permite representar, para qualquer número, ideias ou relações que valem para números específicos. Por exemplo, sabemos que se 10 + 6 = 16, então 16 – 6 = 10 ou 16 – 10 = 6. Se usarmos **a**, **b** e **c** para representar quaisquer números, podemos dizer que, se $a+b=c$, então $c-b=a$ ou $c-a=b$.

Em Aritmética, buscamos respostas numéricas particulares; na Álgebra, procuramos estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma geral.

Na concepção que temos da Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos problemas, o tema central é a resolução de equações. Neste caso, as letras são incógnitas específicas.

Já na concepção da Álgebra como estudo de relações entre quantidades, as letras não são incógnitas. Elas descrevem certos aspectos de um objeto ou um fenômeno, para compreender seu funcionamento e mesmo deduzir novas propriedades.

Nesta interpretação, as letras assumem o sentido completo de variável, isto é, as variáveis variam. Existem as noções de variável independente e variável dependente e a relação é uma função.

Por exemplo:

- a fórmula da área de um retângulo é uma relação entre as variáveis: comprimento e largura;

- na função representada pela expressão $y = 5x - 3$, o valor de y depende de x.

Na concepção da Álgebra como estudo das estruturas, as letras são consideradas símbolos arbitrários de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Ou seja, as letras constituem elementos pertencentes a estruturas algébricas, tais como grupos, anéis ou corpos, que fundamentam a teoria da Álgebra.

Uma característica desta interpretação consiste em ter em mente, referenciais (geralmente números reais), quando utilizamos as letras, e operar com elas sem ter de voltar a esses referenciais.

2.1.1 História das Funções

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática. Este conceito sofreu uma grande evolução ao longo dos séculos, sendo que a introdução do método analítico na definição de função (séc. XVI, séc. XVII), de acordo com veio revolucionar a Matemática.

Analisando os escritos sobre a história do conceito de funções, percebemos que existem divergências entre os autores quanto ao seu surgimento. Enquanto alguns o atribuem à idade da Pedra, devido à quantidade de animais ou caça ser relacionada com pedras, riscos em ossos ou lascas de madeira e que havia a associação entre a quantidade de pedras ou riscos à quantidade de animais, criando uma relação de dependência entre os animais e as representações (SÁ, SOUZA & SILVA, 2003 apud MACIEL, 2011, p.10).

O sentido de função surgiu de forma intuitiva indissociável da ideia de contagem e foi um longo percurso até chegarmos ao conceito que possui estreita ligação com problemas relacionados ao cálculo e à análise.

De acordo com Maciel (2011), O termo “função” não aparecia ainda num vocabulário matemático surgido até 1698, quando foi utilizado por Johann Bernoulli para mostrar a solução de um problema e em 1700 publicou um artigo que viria a ter grande divulgação, contendo a sua definição de função de certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constante (MACIEL, 2011).

Porém o primeiro a utilizar o termo função foi Leibniz para determinar quantidades geométricas que dependiam de um ponto e de uma curva (SÁ, SOUZA & SILVA, 2003 apud MACIEL, 2011, p.14), utilizando os termos constante, variável e parâmetro (PONTE, 1992, apud MACIEL, 2011).

Porém, Baumgart (1992), um retoque final nessa definição viria a ser dado em 1748 por Leonhard Euler (1707-1783), antigo aluno de Bernoulli, substituindo o termo “quantidade” por “expressão analítica”. Foi também Euler quem introduziu a notação f(x).

A noção de função é de importância central na concepção e no estudo de modelos (dinâmicos, probabilísticos, de distribuição espacial,...), qualquer que seja a sua natureza, continuando, por isso, a ser uma noção-chave na Matemática atual.

2.2 A IMPORTÂNCIA DE ENSINAR MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Resolver problemas com números naturais sejam de multiplicação, divisão ou de soma ou subtração, é parte inerente da construção de competências básicas para a vida cotidiana. A ausência dessa competência é uma das principais causas do analfabetismo matemático. Porém, mesmo havendo o desenvolvimento destas habilidades básicas em Matemática, não podemos considerar uma aprendizagem plenamente satisfatória.

A aritmética aplicada nas quatro séries iniciais do Ensino Fundamental abrange o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas envolvendo estas quatro operações matemáticas. Essas habilidades são importantes, não somente para a trajetória escolar, mas para o próprio cotidiano da vida moderna e são necessárias em situações como ir ao supermercado, efetuar ao pagamento de uma conta, calcular os juros de uma prestação qualquer, verificar o extrato bancário, entre outros.

O desenvolvimento de habilidades de média e alta complexidade, como a resolução de uma equação, ou mesmo o entendimento de uma função e suas aplicações, depende desta habilidade aritmética. Esse é um pré-requisito para desenvolver e estimular o domínio da aquisição do conhecimento através da percepção, da associação e do raciocínio. Os alunos que não consolidaram essas competências estarão prosseguindo em sua trajetória escolar acumulando déficits de aprendizagem e o desenvolvimento de habilidades de média e alta complexidade estará comprometido.

Apesar de a Matemática permear praticamente todas as áreas do conhecimento, nem sempre é fácil mostrar ao estudante aplicações interessantes e realistas dos temas a serem tratados, ou de motivá-los a resolução de problemas contextualizados.

Ensinar Matemática, tornando-a interessante e prazerosa, é um processo desafiador. Daí o valor e a necessidade de um espírito constante de curiosidade, por parte do educador, para desenvolver e utilizar em maior número novas metodologias e aplicações para o conhecimento matemático.

Muitas vezes nos detemos a ensinar Matemática sem dar muito sentido a ela, como se fosse pronta e acabada e não como uma ciência em constante desenvolvimento, que se inova e se aperfeiçoa com o passar do tempo. Às vezes nos esquecemos da meta a que nos propomos alcançar. Isso é bem expressado por Oliveira (1985, p.79), que diz,

> A questão é a seguinte: mesmo que nós trabalhemos com afinco no ensino da matemática, procurando contribuir para que as camadas populares assimilem essa ferramenta cultural tão necessária à sua luta, nosso trabalho pode estar sendo guiado subliminarmente por objetivos opostos a essa contribuição. É o que ocorre quando, sem perceber, transmitimos, através do fazer pedagógico, uma visão estática do conteúdo matemático, como se ele fosse pronto e acabado, como se ele tivesse sido sempre assim, como se seus princípios, suas regras, fossem absolutas no tempo e no espaço. E procedemos assim com muito mais freqüência do que pode parecer à primeira vista.

O momento em que o ensino da Matemática realmente preocupa em que a perspectiva curricular é a de favorecer o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. “O aluno deve se sentir constantemente desafiado pelo jogo do conhecimento, adquirindo espírito de pesquisa e desenvolvendo a capacidade de raciocínio e autonomia”. (PCN, 1999, p.267).

Formular e testar conjecturas, estabelecer generalizações e pensar de maneira lógica, são algumas das competências Matemáticas requeridas por todas as áreas do conhecimento. Os Parâmetros Curriculares Nacionais mencionam que,

> Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.” (BRASIL, 1999, p.251).

Além do caráter formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, a Matemática também desempenha papel instrumental, como uma ferramenta para a vida cotidiana e tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Um médico que interpreta um eletrocardiograma está utilizando um modelo matemático ao dar um diagnóstico, efetuando um raciocínio matemático e empregando conhecimentos de estatística; um pedreiro utiliza um método prático para construir ângulos retos que já era empregado pelos egípcios na época dos faraós; uma costureira, ao cortar uma peça, criar um modelo, pratica sua visão espacial e resolve problemas de geometria. É necessário que, se perceba a

Matemática como um sistema de códigos e regras que a torna uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la.

Sendo a Álgebra uma subárea da Matemática, especialmente ligada às aplicações, pode transparecer ser de fácil compreensão. Talvez até pelo fato de ocupar um maior espaço no currículo do Ensino Fundamental e Médio. Todavia, na prática docente, verifica-se que a mesma é de natureza complexa e abstrata.

Segundo Coxford e Shulte (1995, p.5), talvez, a nível Médio, o ensino da Álgebra seja,

> (...) uma fixação exagerada nas manipulações mecânicas com símbolos, e isso, se de um lado pode produzir uma falsa sensação de facilidade, de outro pode produzir uma impressão muito forte de inutilidade, além de dar apenas uma idéia muito pálida e parcial da natureza e do alcance dessa matéria.

Na verdade, vários dilemas sérios se apresentam no ensino de Álgebra em nível elementar. Um dos principais dilemas é o que se refere a dificuldades na aprendizagem de conceitos algébricos. E somente conhecendo esses problemas de maneira clara e objetiva é que se podem evitar concepções erradas no processo de ensino.

A função, parte integrante da Álgebra, cujo conceito hoje pode parecer simples, é o resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na antiguidade, como quando os matemáticos Babilônicos utilizaram tabelas de quadrados e de raízes quadradas e cúbicas e os Pitagóricos tentaram relacionar a altura do som emitido por cordas submetidas à mesma tensão com o seu comprimento. Nesta época, o conceito de função não estava claramente definido. Somente no séc. XVII, quando Descartes e Pierre Fermat introduziram as coordenadas cartesianas, é que se tornou possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudar analiticamente funções. Dessa forma, a Matemática recebe um grande impulso. Os cientistas passam, a partir de observações ou experiências realizadas, a procurar determinar a fórmula ou função que relaciona as variáveis em estudo. A partir daí todo o estudo se desenvolve em torno das propriedades de tais funções.

Racionalizando os fatos da natureza ou da própria ação do homem, a ciência usa a ideia de variáveis que, quando relacionadas umas com as outras, em expressões algébricas, formam funções. “As funções são ferramentas que o homem dispõe para descrever o relacionamento entre variáveis” (RIO GRANDE DO SUL, 1993, p.25).

São infinitas as situações em que se busca a ajuda da Matemática para a solução de inúmeros problemas existenciais, pois grande parte da vida do indivíduo é regida pela Matemática. Ela é a peça chave que instrumentaliza muitas outras ciências. Portanto, o educador necessita ter um espírito inerente e constante de curiosidade, para descobrir e utilizar novas metodologias e aplicações para o conhecimento matemático.

Movido por estas situações e na preocupação de melhorar sua prática docente, o professor busca novas maneiras de ensinar um determinado conteúdo, dando um fundamento e um sentido maior ao mesmo, quando possível.

Quando alguém se torna conhecedor de um assunto, adquire gosto pelo mesmo. Se o professor for um profundo conhecedor e apreciador convicto da função e de sua aplicabilidade no dia-a-dia, terá facilidade em contagiar seus alunos com propostas de trabalho diferenciadas e práticas.

Nada melhor para desmitificar o ensino da matemática do que aproximá-la da realidade por meio de situações problemas que envolvam por inteiro os agentes envolvidos neste processo. Entende-se aqui por agentes, o professor e o aluno, pré-dispostos a quebrar paradigmas visando à inovação da prática pedagógica.

2.3 O CONHECIMENTO MATEMÁTICO NO ENSINO MÉDIO

A capacidade de se comunicar, de resolver problemas, de elaborar conjecturas, de tomar decisões, de respeitar e discutir outras decisões, de saber trabalhar em equipe, de estar em constante formação e principalmente de ser criativo, são algumas das inúmeras capacidades exigidas pela sociedade da informação globalizada, na qual o conhecimento adquiriu papel ímpar. E é função da Educação escolar oportunizar espaços para que estas capacidades sejam desenvolvidas.

Neste contexto, a competência em Matemática é significativa nas mais diversas áreas, é como um leque de possibilidades que se abre para a melhor compreensão de conceitos e procedimentos, possibilitando tirar conclusões e argumentar.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (1999, p.82-83), destaca-se que a Matemática deve assumir um papel formativo, um caráter instrumental e, além disso, não se pode deixar de lado a visão que se tem dela como ciência:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (...) Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Diante disso, tendo o trabalho do professor como algo em permanente formação, pode-se questionar: como desenvolver nos alunos a visão da Matemática como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento?

Uma resposta a esta questão pode ser dada da seguinte forma: é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a interpretar a realidade. Nesse sentido, temos os conteúdos relacionados a números e a Álgebra representando sistemas de códigos; a Geometria auxiliando na leitura e interpretação do espaço; a Estatística e a Análise Combinatória com cálculos de possibilidades intimamente ligados a aplicações de fenômenos.

A Matemática também deve ser vista como um conhecimento acumulado e organizado ao longo da evolução humana. Seus métodos e processos, embora não devam ser gerados com uma visão extremista da Matemática pura, podem levar o aluno, gradualmente, a estabelecer a diferença entre os vários mecanismos e procedimentos de descobertas, de invenção e validação. Nesse aspecto, o Ensino Médio representa um estágio de ampliação e aprofundamento em relação aos conteúdos e abordagens da Matemática do Ensino Fundamental.

Por outro lado, toda vez que se questiona sobre o que se quer ensinar com a Matemática para o Ensino Médio, com as funções, a geometria, entre outros, torna-se inquietante a atitude do professor no processo ensino-aprendizagem, fazendo com que o mesmo reflita sua prática pedagógica. Chegar a uma resposta definitiva acredita-se não ser possível, mas precisa-se de alguma referência, traçar objetivos específicos e fundamentados para não correr o risco de se ter um ensino de Matemática feito apenas por conveniências particulares.

E para que seja possível atingir esses objetivos, não se pode visar apenas o aspecto do ensino da Matemática, mas também se deve considerar de forma indispensável à aprendizagem do aluno. O desenvolvimento de valores e atitudes deverá ter o mesmo peso que os conceitos e procedimentos, uma vez que os mesmos serão fundamentais para que o aluno aprenda com autonomia, isto é, que este tenha a predisposição e a ânsia de fazer escolhas independentes, tanto no que se refere a sua aprendizagem quanto a sua vida. A necessidade de o aluno ter cada vez mais a iniciativa na busca de informações, de demonstrar responsabilidade em seus projetos, confiar nas suas formas de pensar, fundamentar suas argumentações, são alguns dos valores e das atitudes esperadas de uma aprendizagem autônoma. Dessa forma, leva-se o aluno a perceber na Matemática um valor cultural que possibilitará uma leitura e uma interpretação crítica da realidade a que pertence.

Sabe-se que nem todos os conteúdos ministrados ao longo do Ensino Médio têm uma aplicação imediata, mas possibilitam uma contextualização dentro da própria Matemática. O incentivo ao educando, diante de uma situação-problema, fazer uma estimativa de resultado, uma discussão de possibilidades de métodos de resolução, certamente estará potencializando a formação de opinião própria com argumentação crítica. O espírito crítico e a criatividade do aluno podem ser desenvolvidos também por meio de atitudes simples. A leitura de um gráfico de uma função, seguida de uma discussão onde se propõe questões e, por outro lado, solicita-se que formulem questões, gera uma necessidade de reflexão crítica. A criatividade, por sua vez, é evidenciada em todo o Ensino Médio quando se valoriza estratégias diversas na resolução de um problema qualquer.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999), algumas competências e habilidades devem ser desenvolvidas, em Matemática, ao longo de seu ensino e aprendizagem. Elas estão assim relacionadas: Representação e comunicação; Investigação e compreensão; Contextualização sociocultural. Dessa forma, parece claro a busca pela superação da visão enciclopédica que se tem do currículo de Matemática, juntamente com o conhecimento das dificuldades existentes nessa superação. O rompimento da ideia de que se dá aula para os alunos precisa acontecer. O fazer Matemática de forma que possibilite o aluno ser sujeito ativo do processo de aprendizagem deve se tornar uma prática docente.

A falta de familiaridade com a linguagem algébrica interfere diretamente ao fraco desempenho em abstrações matemáticas sugeridas em diversas atividades matemáticas. A não compreensão das técnicas algébricas aliadas ao não entendimento dos conceitos algébricos são situações que levam o aluno a incapacidade de fazer generalizações algébricas, e com isso dificultando o processo de aprendizagem nesta área. Isso, muitas vezes, se deve a metodologia aplicada no processo ensino aprendizagem. A metodologia de ensino é fundamental no processo de aprendizagem, a assimilação do conteúdo depende quase que exclusivamente dela. Discussões e investigações quanto à prática pedagógica indicam a necessidade de superação da visão fragmentada e a história da matemática. Segundo Vailatie e Pacheco, (2011, p.12),

> A partir de certas tecnologias pode-se propiciar uma formação mais ampla do aluno, observando-se os aspectos lógicos, históricos e culturais das produções matemáticas. Pretende-se um ensino de matemática que permita reflexões, análises, investigações e generalizações, de forma a desenvolver um cidadão criativo, crítico e responsável socialmente.

Júlio César de Mello e Souza (1895 – 1974), professor e escritor brasileiro, visto como o precursor da educação matemática e da interdisciplinaridade, e o mundialmente conhecido como Malba Tahan, encantava seus alunos com suas histórias. Defendia a ideia de que a resolução de exercícios deveria ocorrer sem o uso mecânico de fórmulas. A criação de laboratórios de matemática em todas as escolas, bem como o uso de atividades lúdicas no processo de ensino eram algumas de suas ideias as quais defendia com veemência.

Atividades significativas, inovadoras e desafiadoras que despertem o interesse e estimulem a curiosidade do aluno precisam cada vez mais, estarem, presentes, na prática do dia-a-dia do aluno no processo de aprendizagem. Segundo Freire (1998, p.69),

> A Educação é comunicação, é diálogo, na medida em que não é transferência de saber, mas um encontro de sujeitos interlocutores que buscam a significação dos significados.

Dessa forma, atualmente pensar no ensino de matemática sem o uso das novas tecnologias se torna indispensável. Mas, como diz D'Ambrosio (2004), "a falta de tecnologia causa uma má educação, mas o uso de tecnologia não é sinônimo de boa educação".

Contudo, não se pode fazer uma verdadeira ruptura com o modo que foi praticado, pois não se pode abandonar uma história de vida. Mas o que é desejável e possível é que a cada aula, a cada ano letivo, possa se agregar novas estratégias, novas atitudes. O desejável é sondar o conhecimento prévio do aluno, tendo aulas não exclusivamente reprodutivas e sim expositivas. A aula expositiva é só um dos muitos meios e deve ser encarada como um momento de diálogo e não de imposição. O aluno não deve ser apenas solicitado a responder boas e intrigantes questões, mas deve ser conduzido ao hábito de formulá-las.

2.4 O GEOGEBRA NO ENSINO DE FUNÇÕES

Integrar as novas tecnologias no cotidiano escolar é um desafio para os professores. Nem sempre o professor possui formação que o habilita a trabalhar com essas tecnologias. Mas a necessidade de adequação, de abertura para o novo, a fim de tornar suas aulas mais atrativas, participativas e eficientes leva-os buscar essa informação e formação.

Um dos objetivos de trabalhar com recursos computacionais no desenvolvimento de um conteúdo matemático, recursos esses que possuem inúmeras vantagens para auxiliar a ação didática, é melhorar o processo ensino-aprendizagem. Com o intuito de provocar no aluno o interesse pelo seu aprendizado, o uso desses recursos se torna quase que indispensável na sociedade moderna em que estamos inseridos.

O GeoGebra é um *software* matemático que agrega Geometria, Álgebra e Cálculo. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg, localizada na cidade austríaca de Salzburgo, com a finalidade de auxiliar na educação matemática nas escolas. O projeto teve início em 2001 e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University. É um *software* gratuito, escrito em linguagem Java, disponível em português (HOHENWARTER, M.)

No ensino médio, as funções ocupam grande parte da grade curricular: Funções, Função Afim, Função Quadrática, Função Exponencial, Função Logarítmica, Função Modular e Funções Trigonométricas. *O software* GeoGebra permite inserir essas funções e realizar construções geométricas, possibilitando modificá-las dinamicamente, caso necessário.

O uso do s*oftware* pode ser utilizado como um recurso meramente ilustrativo, de forma não sistematizada, contribuindo para a motivação do aluno. Por outro lado, pode ser uma ferramenta que desperta no aluno a curiosidade e o interesse para compreender conteúdos matemáticos, em especial os referentes às funções.

O uso da ferramenta deve ser concomitante com a metodologia já existente na prática do professor. Para utilizar essa ferramenta, o aluno necessita de um conhecimento prévio do conteúdo de funções. A utilização do s*oftware* trará um melhor aproveitamento do conteúdo já trabalhado. A exploração dos recursos do *software* implica diretamente na criatividade e conhecimento que o docente possui.

Uma forma de se aplicar esse recurso é elaborar uma sequência de atividades e tarefas a serem desenvolvidas pelos alunos no *software*. Essas atividades de modo geral, contemplam a análise gráfica, destacando o comportamento das funções. A ferramenta possibilita também fazer o estudo de valores numéricos, coeficientes e inclinações nos eixos coordenados, zeros da função, resolução de problemas, entre outros.

O professor, quando utiliza estas ferramentas tecnológicas educacionais, é tido como de [illegible]tador ou mediador da aprendizagem. A partir da sua prática docente faz com que o aluno [illegible]e parte integrante do processo ensino-aprendizagem, construindo seu próprio conhecimento. Dessa forma o conhecimento se torna eficaz, atraente e autônomo.

3 APLICAÇÃO DA PESQUISA

Nesse capítulo, apresenta-se a metodologia utilizada, o *software* GeoGebra, os sujeitos da pesquisa, a caracterização do ambiente e as atividades utilizadas que compõem o instrumento de coleta de dados, as justificativas para as respectivas escolhas e as características inerentes aos conteúdos preestabelecidos que estão presentes nas atividades; Apresenta-se também a descrição e análise das informações obtidas através da aplicação de questionário e atividades referentes à esta pesquisa.

3.1 METODOLOGIA DA PESQUISA

Este estudo classifica-se como um levantamento descritivo, bibliográfico e quantitativo. Parafraseando Sampieri, Collado e Lúcio (2006), um estudo descritivo é aquele que se detém em medir e expor como um fenômeno se manifesta em determinadas situações ou eventos. Portanto, essa pesquisa se caracteriza como descritiva, pois procura identificar os conhecimentos dos sujeitos sobre Funções em relação à metodologia utilizada pela professora pesquisadora na aplicação das oficinas.

É qualitativo, pois é marcado pela quantificação dos eventos, a partir de análises estatísticas e “(...) utiliza a descrição matemática como linguagem, ou seja, a linguagem matemática é utilizada para descrever as causas de um fenômeno (...)” (TEIXEIRA, 2007 p.136)

Chizzotti (1995), ao escrever sobre abordagens de pesquisa, ressalta que a pesquisa quantitativa é elevada no contexto das ciências naturais em face dos objetos naturais serem passíveis de testagem com critérios rígidos, caracterizando-se por pressupor que a natureza é uniforme.

Sobre pesquisa bibliográfica Gil (2006, p.45), define que “a principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais do que aquela que se poderia pesquisar diretamente”. Ainda segundo o autor, esse tipo de pesquisa é formado com base em materiais já desenvolvidos. Neste caso, este estudo é classificado como bibliográfico por ter como fontes de consulta livros, dissertações, teses e artigos disponíveis nos sites de revistas nacionais e internacionais.

Ainda sobre pesquisa qualitativa, Marconi e Lakatos (2002) a classificam como o estudo com base em que tudo pode ser quantificável, significando traduzir em números opiniões e informações para classificá-las e analisá-las. Este tipo de pesquisa requer o uso de recursos e de técnicas estatísticas e sugere a replicação de resultados.

3.1.1 *Software* GeoGebra e proposta de aplicação

A utilização do *software* GeoGebra, além de inovadora, representa uma economia de tempo para os professores e alunos, pois o mesmo oportuniza a construção de um gráfico digital e que pode ser modificado de acordo com a função definida. Assim, buscando tornar as aulas mais aprazíveis e profícuas, é que se justifica o uso de novas tecnologias no ensino de matemática. Com esse intuito é que se faz necessário cada vez mais aprimorar os conhecimentos e agregar essas tecnologias ao cotidiano escolar. Lembrando que o uso das tecnologias não dispensa a presença dos professores com seus conhecimentos no processo ensino-aprendizagem.

Pensando desta forma, a proposta do trabalho de aplicação será dividida em quatro etapas, buscando detectar possíveis dificuldades na aprendizagem.

A primeira etapa se dará através de um primeiro contato com os alunos, em que eles responderão a um questionário de sondagem. Além de conhecer o perfil dos alunos, o questionário tem por objetivo verificar o nível de conhecimento dos mesmos com relação às funções: Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica.

Já a segunda etapa será aplicada em forma de oficina teórica, na qual serão trabalhados, em forma de revisão, os conceitos das referidas funções, destacando as características de cada uma, ou seja: forma geral, domínio, contradomínio, imagem, representação geométrica. Essa etapa se dará de forma expositiva e os alunos receberão material impresso. Feita a explanação referente a cada função, serão propostos exercícios problemas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de anos anteriores, com o objetivo de avaliar o entendimento e o raciocínio dos alunos participantes da oficina.

A terceira etapa se dará através da aplicação de atividades direcionadas utilizando como ferramenta de apoio o *software* GeoGebra. Estas atividades seguirão um roteiro pré-estabelecido, disponibilizado aos alunos. O objetivo desse roteiro é de proporcionar a eles uma sequência das atividades, fazendo com que os mesmos consigam fazer uma análise de cada situação, compreendendo o comportamento de cada função e aplicando as devidas mudanças.

Por fim, será solicitado aos alunos que respondam a uma avaliação com relação aos métodos utilizados e seu aproveitamento.

3.1.2 Caracterização dos sujeitos e local de pesquisa

A atividade foi desenvolvida com alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Técnica José Cañellas, localizada no Bairro Itapagé, na cidade de Frederico Westphalen, estado do Rio Grande do Sul. A escolha do local a se deve ao fato de que a professora pesquisadora em questão é integrante do quadro docente da mesma. Já a escolha dos sujeitos foi voluntária, ressaltando o interesse dos mesmos em fazer uma revisão dos conteúdos para a realização da prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Os alunos participantes frequentam a escola em turno matutino e necessariamente deveriam ter disponibilidade de horário em turno inverso, uma vez que as atividades da oficina ocorreram em cinco quintas-feiras, iniciada em 02/ 06/2016 e finalizada no dia 30/06/2016, das 14 às 17 horas, perfazendo um total de 15 horas.

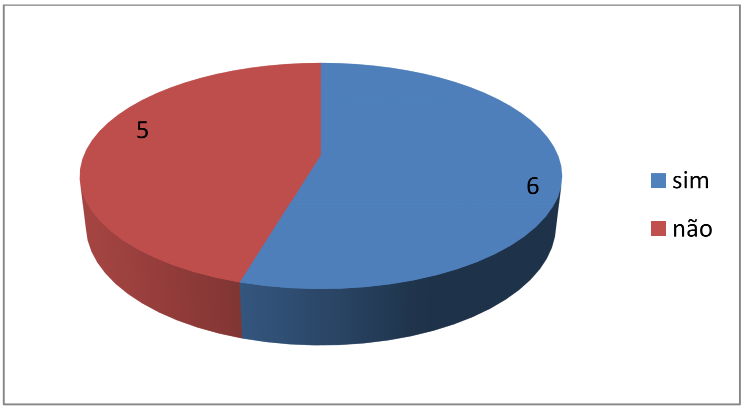
Para atender a primeira etapa desta pesquisa, foi aplicado um questionário contendo 11 questões, sendo 10 objetivas e uma descritiva, conforme Anexo A, aos alunos participantes com o intuito de conhecer o público alvo.

3.1.3 Análise do questionário de Sondagem

De acordo com as questões 1 e 2, os sujeitos desta pesquisa são de 11 participantes, sendo 8 meninos e 3 meninas, com idades entre 16 e 18 anos.

A questão de número 3 refere-se ao gosto pela matemática, onde 6 responderam que sim e 5 que não.

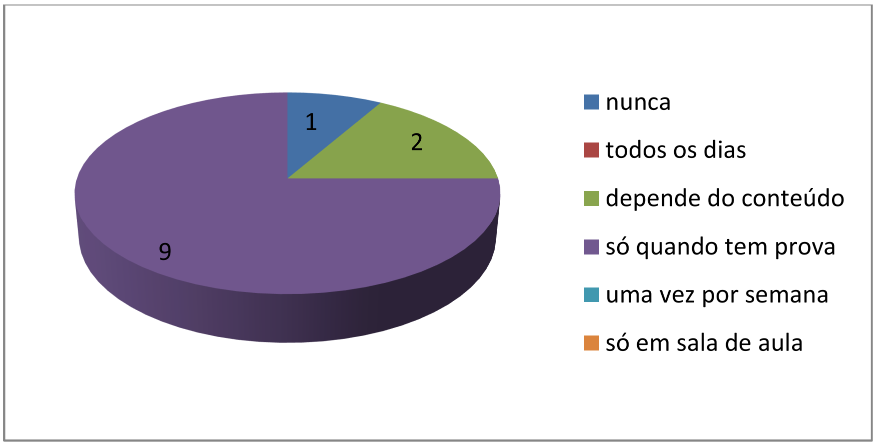
Figura 1- Gosta de estudar matemática?



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A questão de número 4 é sobre o tempo dedicado para o estudo da matemática fora da sala de aula. Nove alunos responderam que estudam só quando tem prova. Três deles dizem estudar somente em sala de aula, 2 que só estudam dependendo do conteúdo ministrado e um deles diz nunca estudar. Já para as alternativas referentes a estudar diariamente e/ ou uma vez por semana, não foi citada pelos educandos.

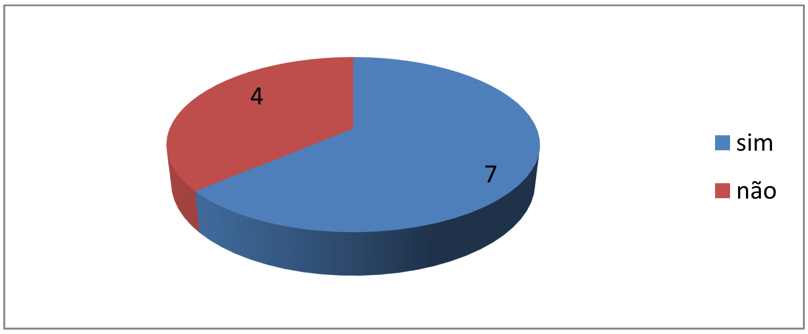
Figura 2 - Normalmente quanto tempo você estuda matemática fora da sala de aula?



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Quando perguntados na questão 5 se sabiam diferenciar Equação de Função, 7 alunos disseram saber diferenciar e 4 alunos disseram não saber diferenciar Equação de Função.

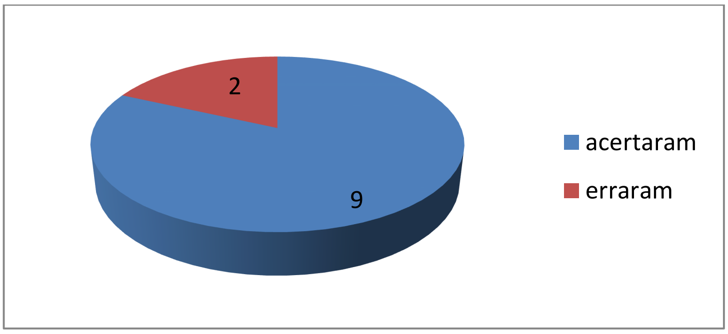
Figura 3 - Você sabe qual é a diferença entre equação e função?



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

De certa forma, isto condiz com a resposta dada na questão seguinte de número 6 que trazia o conceito de Função e o conceito de Equação, onde 9 alunos acertaram e 2 alunos erram essa classificação conceitual.

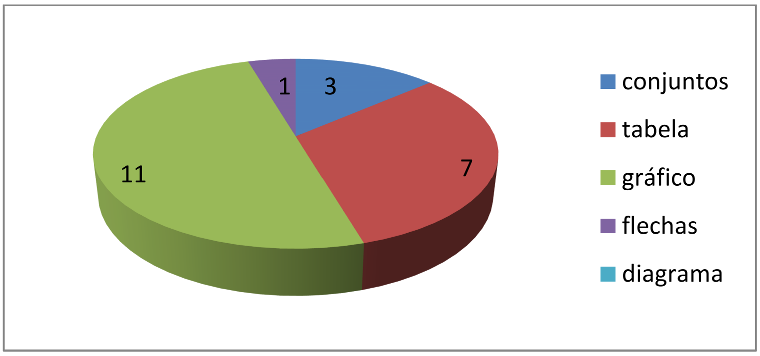
Figura 4 - Identifique função (F) e equação (E)



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A representação de uma Função através de gráficos é a forma mais conhecida, tanto é que, todos os alunos assinalaram essa opção como resposta a questão de número 7. Sete alunos identificaram a tabela como uma representação de Função, já a forma de diagramas não foi identificada por nenhum dos 11 alunos. Optaram pelas alternativas de representação por meio de flechas e por meio de conjuntos, respectivamente 1 e 3 alunos.

Figura 5 - Assinale quais são os tipos de representações de uma função

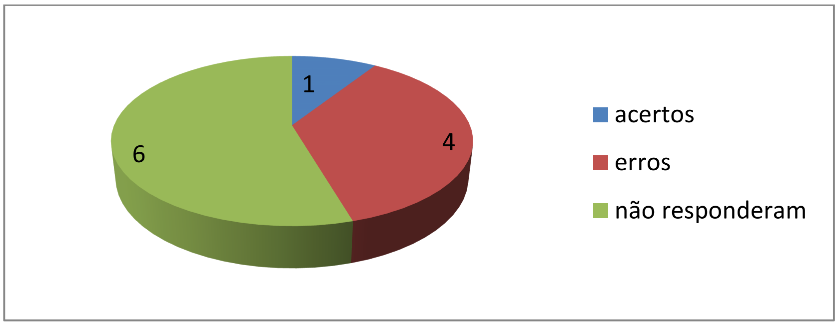


Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A questão de número 8 se referia a uma situação problema envolvendo Função Afim num contexto de receita, despesa e lucro. Através da leitura e interpretação os alunos deveriam conseguir relacionar as grandezas envolvidas e traduzi-las por meio de uma lei de formação para cada situação. Nenhum aluno conseguiu escrever as Funções relacionadas, apenas três deles rascunharam as Funções, sendo da forma da Função Afim, mas de forma incorreta, os demais deixaram em branco e um obteve êxito na Função custo.

A questão 9 também se referia a uma situação problema, com os dados relacionados em uma tabela e trazia cinco alternativas para escolha de qual seria a Função que representava a referida situação. Dos 11 alunos, apenas 1 acertou, 4 erraram e 6 alunos não responderam a questão.

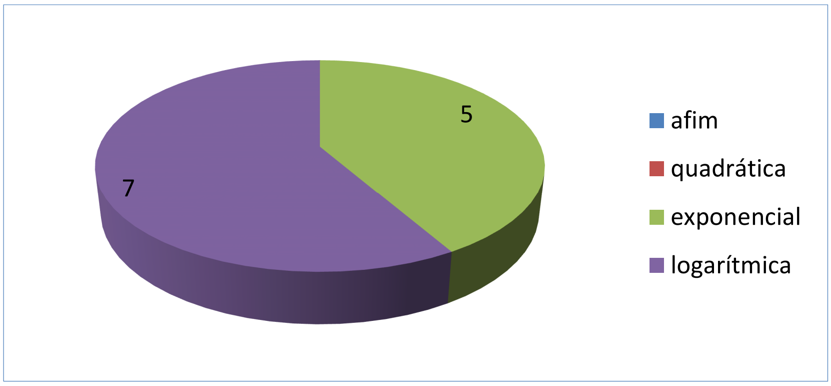
Figura 6 – Resolução de uma situação problema



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A associação entre a lei de formação e a representação gráfica era a solicitação da questão de número 10. As Funções Afim e Quadrática não foram associadas corretamente em nenhum momento, em alguns casos aconteceu a inversão da associação, ou seja, associaram reta com a Função Quadrática e parábola com a Função Afim. Já as Funções Exponencial e Logarítmica tiveram, respectivamente, 5 e 7 associações corretas. No entanto 4 alunos não responderam a questão.

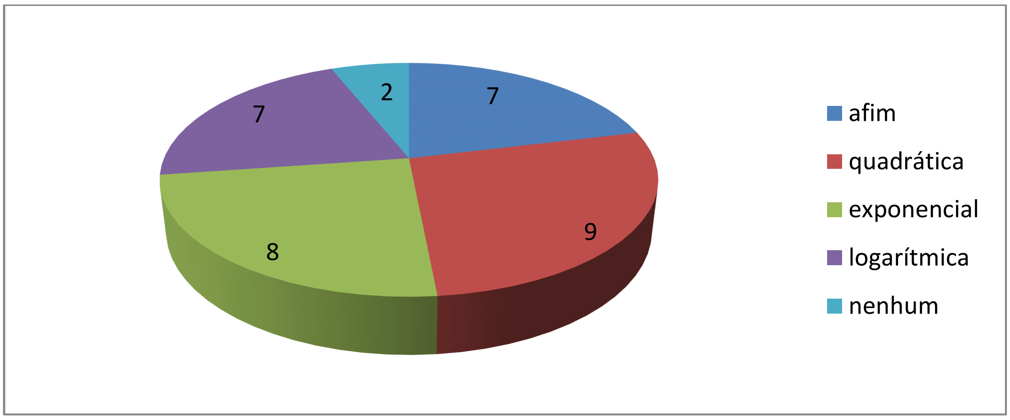
Figura 7 - Relacionar as colunas a partir dos gráficos



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A identificação das Funções pela sua lei de formação era parte da questão de número 11. Neste item, obteve-se 7 acertos para Função Afim, 9 para Função Quadrática, 8 para Função Exponencial e 7 para Função Logarítmica. Somente 2 alunos não acertaram nenhuma das Funções dadas.

Figura 8 – Identificar as funções a partir de leis de formação



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A partir dos dados obtidos nesta breve sondagem, pode-se verificar a real necessidade de se trabalhar a contextualização da cada Função proposta, com todas as suas propriedades. Faz-se necessário um estudo mais aprofundado sobre elas, incluindo a visualização e experimentação, e através de situações-problema as aplicações desses conceitos, proporcionando um favorecimento ao aprendizado.

Observou-se também que, a falta de leitura adequada e interpretação de cada situação-problema proposta, tenha sido um dos fatores que tenham levado os alunos ao erro em determinadas questões. De certa forma, foi surpreendente a quantidade de erros e dúvidas por parte dos alunos, por serem alunos do 3º ano do Ensino Médio, uma vez que os mesmos já haviam estudado sobre todas as funções durante o 1º ano, e deveriam ter mais presente tais conceitos.

3.2 APLICAÇÃO DE OFICINA

Para atender a segunda etapa desta pesquisa foi desenvolvida uma oficina teórica, na qual se revisou expositivamente os conceitos das referidas Funções destacando as características de cada uma: forma geral, domínio, contradomínio, imagem, a finalidade de cada coeficiente algébrico e geometricamente a representação de cada função, conforme anexo D. Os alunos receberam material impresso com exercícios problemas do ENEM de anos anteriores, com o objetivo de avaliar o entendimento e o raciocínio dos alunos participantes da oficina.

A seguir foram propostas questões do ENEM de anos anteriores, relacionadas com o conteúdo ministrado. Os alunos foram divididos em duplas para interagirem e resolverem os problemas que seguem:

Figura 9 – Questão 156 do Enem 2011

O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

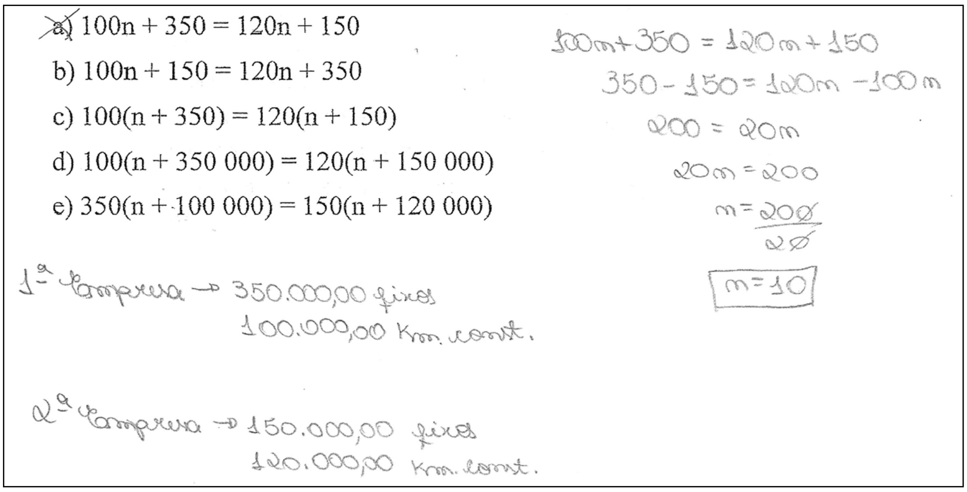
A) 100n + 350 = 120n + 150
B) 100n + 150 = 120n + 350
C) 100(n + 350) = 120(n + 150)
D) 100(n + 350 000) = 120(n + 150 000)
E) 350(n + 100 000) = 150(n + 120 000)

Fonte: INEP, 2011.

Resolução:

$$1^a \to 100\,000n + 350\,000$$
$$2^a \to 120\,000n + 150\,000$$
$$1^a = 2^a \Rightarrow 100\,000n + 350\,000 = 120\,000n + 150\,000$$
$$100n + 350 = 120n + 150 \; (\textit{alternativa a})$$

Figura 10 - Resolução do aluno A



a) 100n + 350 = 120n + 150

b) 100n + 150 = 120n + 350

c) 100(n + 350) = 120(n + 150)

d) 100(n + 350 000) = 120(n + 150 000)

e) 350(n + 100 000) = 150(n + 120 000)

$100n + 350 = 120n + 150$

$350 - 150 = 120n - 100n$

$200 = 20n$

$20n = 200$

$n = \frac{200}{20}$

$\boxed{n = 10}$

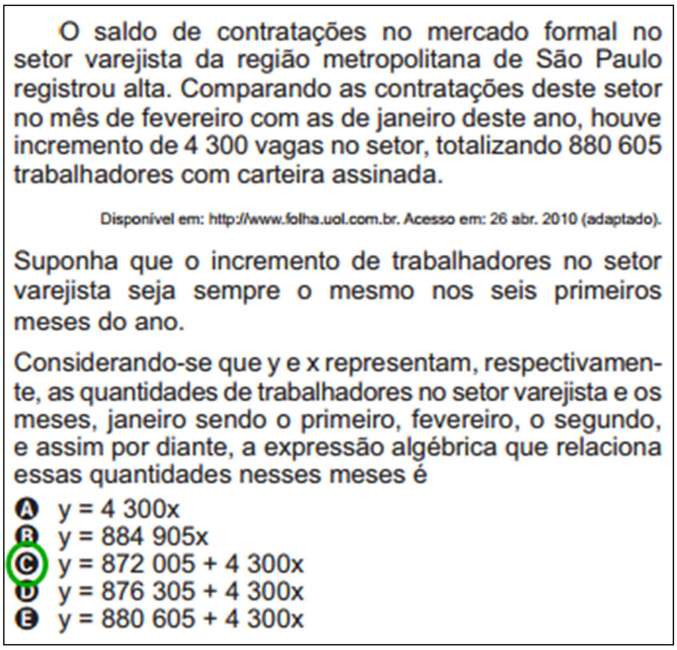
1ª empresa → 350.000,00 fixos
100.000,00 km. const.

2ª empresa → 150.000,00 fixos
120.000,00 km. const.

Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A maior dificuldade identificada na resolução desta questão foi a interpretação da situação problema por parte de alguns alunos. Apresentaram também soluções de cálculos extras, sem que estes tivessem sido questionados. Apesar de apresentarem esta dificuldade, todos conseguiram chegar à solução.

Figura 11- Questão 164 do Enem 2011



O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

A y = 4 300x

B y = 884 905x

C y = 872 005 + 4 300x

D y = 876 305 + 4 300x

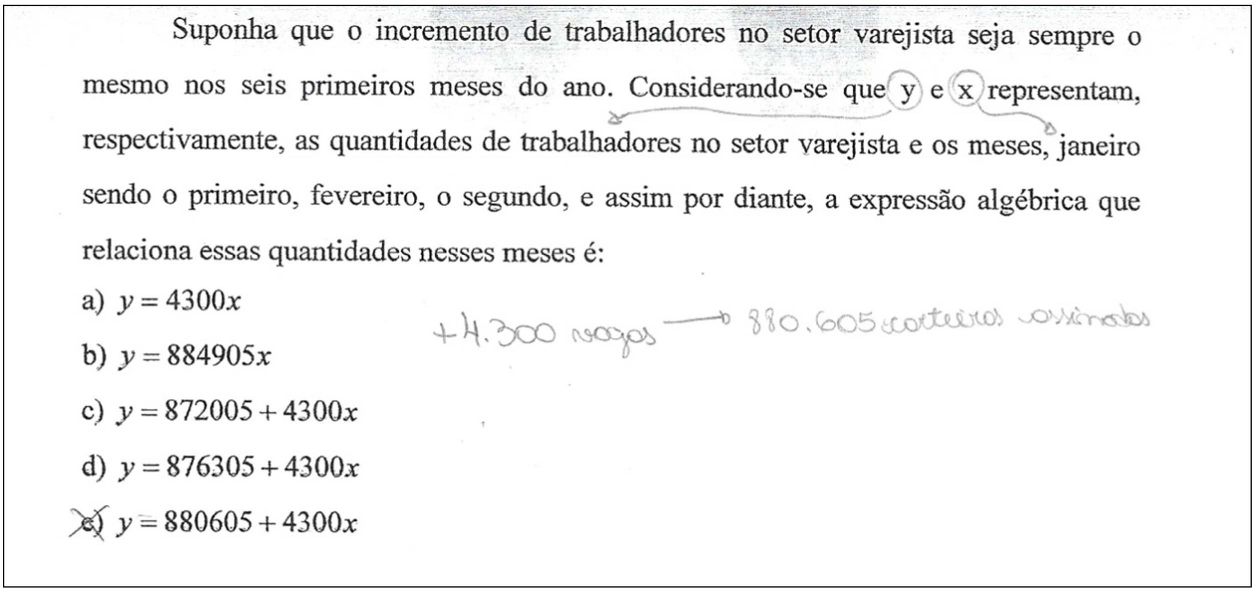
E y = 880 605 + 4 300x

Fonte: INEP, 2011.

Resolução:

$$y = quantidade\ de\ trabalhadores$$
$$x = número\ de\ meses\ a\ partir\ de\ janeiro$$
$$y = (880\ 605 - 4300) + 4300(x - 1)$$
$$y = 872\ 005 + 4300x$$

Figura 12 - Resolução do aluno B



Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é:

a) $y = 4300x$

b) $y = 884905x$

c) $y = 872005 + 4300x$

d) $y = 876305 + 4300x$

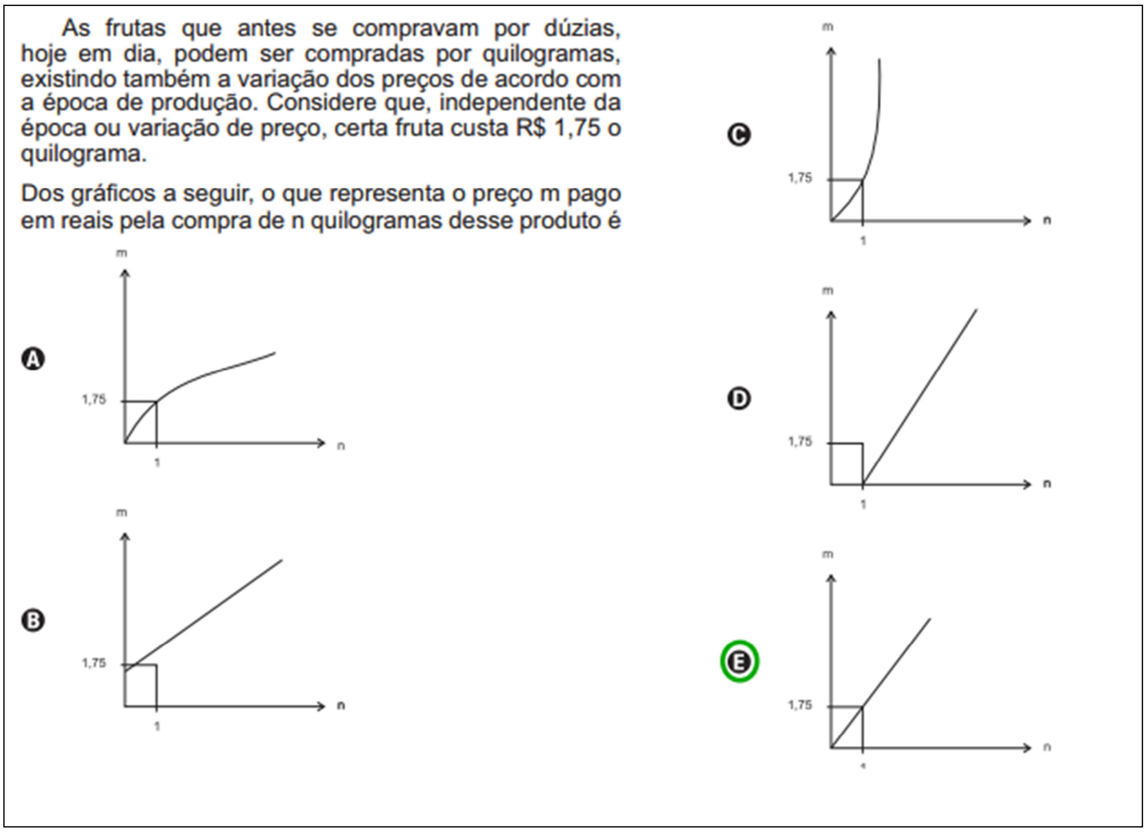
e) $y = 880605 + 4300x$

+4.300 vagas → 880.605 carteiras assinadas

Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Nesta questão, os alunos participantes não responderam corretamente. Verifica-se novamente que a interpretação, ferramenta extremamente importante para sua resolução da mesma, não foi correta. Um dos erros cometido nesta questão foi de aritmética, quando associado que deveriam subtrair o incremento de vagas do total de trabalhadores com carteira assinada, já alguns alunos não associaram essa grandeza.

Figura 13 – Questão 152 do Enem 2011


As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

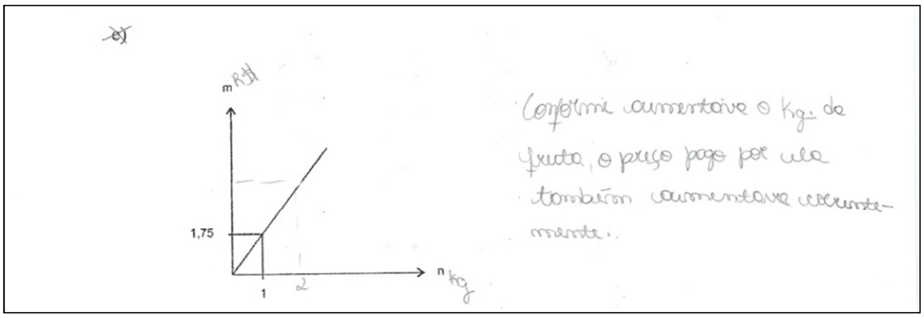
Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é

Fonte: INEP, 2011

Resolução:

$$A\ \ função\ que\ representa\ a\ situação\ é\ m(n)=1{,}75n,$$
$$Cresce\ \ proporcionalmente,\ ou\ seja$$
$$0\,qui\log rama=0reais$$
$$1qui\log rama=1{,}75reais$$
$$2\,qui\log ramas=3{,}50reais$$

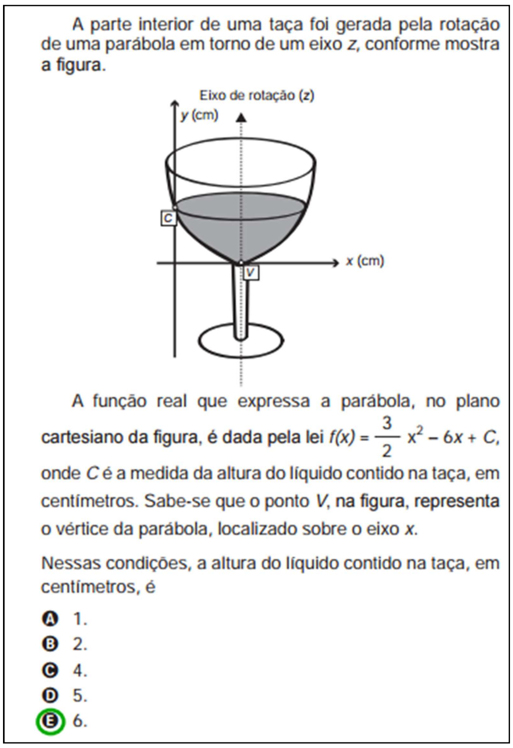
Figura 14 - Resolução do aluno A



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Nesta questão a associação de dados numéricos com a representação gráfica foi uma das dificuldades encontradas pelos alunos. Mas de qualquer forma todos associavam que era uma reta essa representação, a dúvida então ficava entre as alternativas *b*, *d* e *e*. Então, interagindo com os alunos e questionando-os sobre a situação problema, fazendo com que os mesmos se colocassem na situação e fizessem as associações de compra, os mesmos conseguiram entender qual seria a representação correta.

Figura 15 – Questão 152 do Enem 2013



A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo *z*, conforme mostra a figura.

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde *C* é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto *V*, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo *x*.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

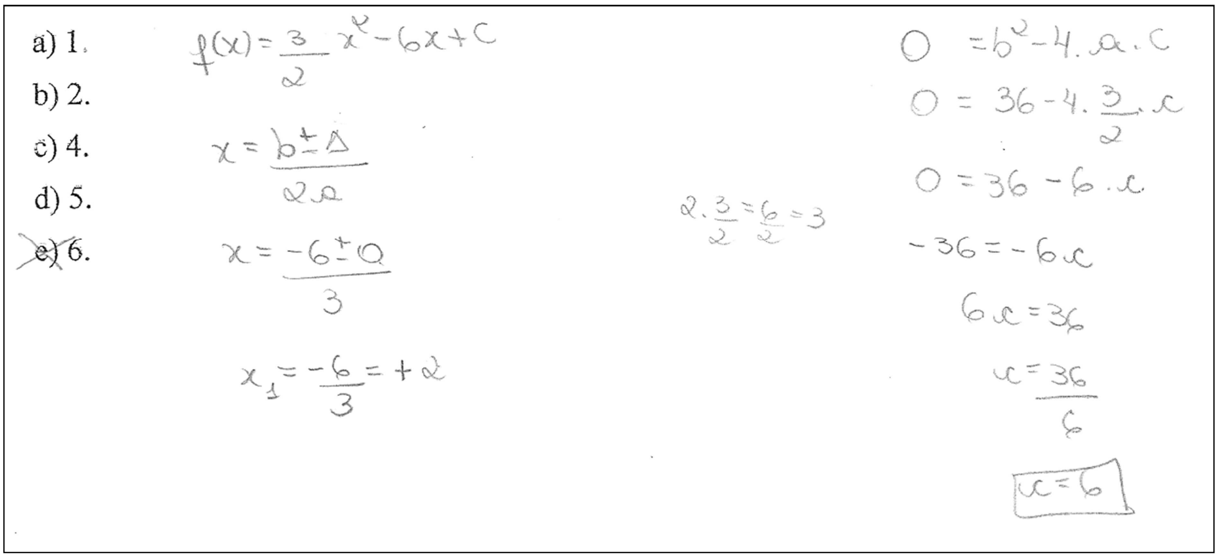
A 1.
B 2.
C 4.
D 5.
E 6.

Fonte: INEP, 2013.

Resolução:

$$\Delta = 0$$
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-6)^2 - 4.\frac{3}{2}.C = 0$$
$$36 - 6C = 0$$
$$c = 6$$

Figura 16 – Resolução do aluno C



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Ao visualizarem a fórmula dada no problema, o primeiro impulso foi o de resolver a Equação, através da fórmula resolutiva da equação do 2º grau, conhecida como fórmula de Bháskara. Ao observarem que o coeficiente *c* não era dado, entenderam que, como a parábola só possuía um ponto de interseção com o eixo x, o discriminante deveria ser igual a zero ($\Delta = 0$). Desta forma encontraram as raízes da equação. Questionados sobre o que realmente estava sendo pedido na questão, entenderam que não eram as raízes e sim o valor do coeficiente *c*, e assim, depois de algumas interações, questionamentos, pontuações, entenderam que bastava calcular o valor do discriminante e igualá-lo a zero.

Figura 17 – Questão 165 do Enem 2010

Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo.

Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t)=\begin{cases} \frac{7}{5}t+20, \text{ para } 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2-\frac{16}{5}t+320, \quad \text{para} \quad t \geq 100 \end{cases}$$

em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado.

Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 °C e retirada quando a temperatura for 200 °C.

O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a

- Ⓐ 100.
- Ⓑ 108.
- Ⓒ 128.
- Ⓓ 130.
- Ⓔ 150.

Fonte: INEP, 2010

Resolução:

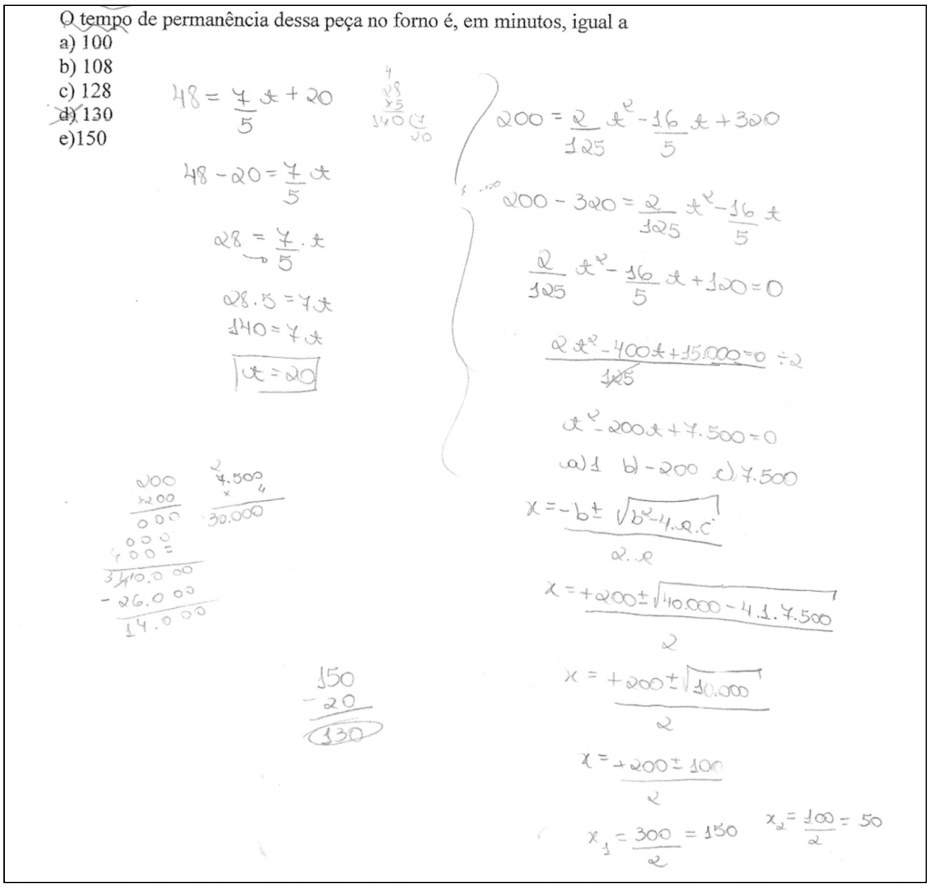
$$T(t)=\frac{7}{5}t+20 \qquad\qquad T(t)=\frac{2}{125}t^2-\frac{16}{5}t+320$$

$$48=\frac{7}{5}t+20 \qquad\qquad 200=\frac{2}{125}t^2-\frac{16}{5}t+320$$

$$t=20 \qquad\qquad t_1=150$$

$$tempo\ de\ permanência=150-20=130\ minutos.$$

Figura 18 – Resolução do aluno A


O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a
a) 100
b) 108
c) 128
d) 130
e)150

$48 = \frac{7}{5}t + 20$

$48 - 20 = \frac{7}{5}t$

$28 = \frac{7}{5} \cdot t$

$28 \cdot 5 = 7t$

$140 = 7t$

$\boxed{t = 20}$

$200 = \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320$

$200 - 320 = \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t$

$\frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 120 = 0$

$\frac{2t^2 - 400t + 15.000 = 0}{125} \div 2$

$t^2 - 200t + 7.500 = 0$

a) 1 b) -200 c) 7.500

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$x = \frac{+200 \pm \sqrt{40.000 - 4 \cdot 1 \cdot 7.500}}{2}$

$x = \frac{+200 \pm \sqrt{10.000}}{2}$

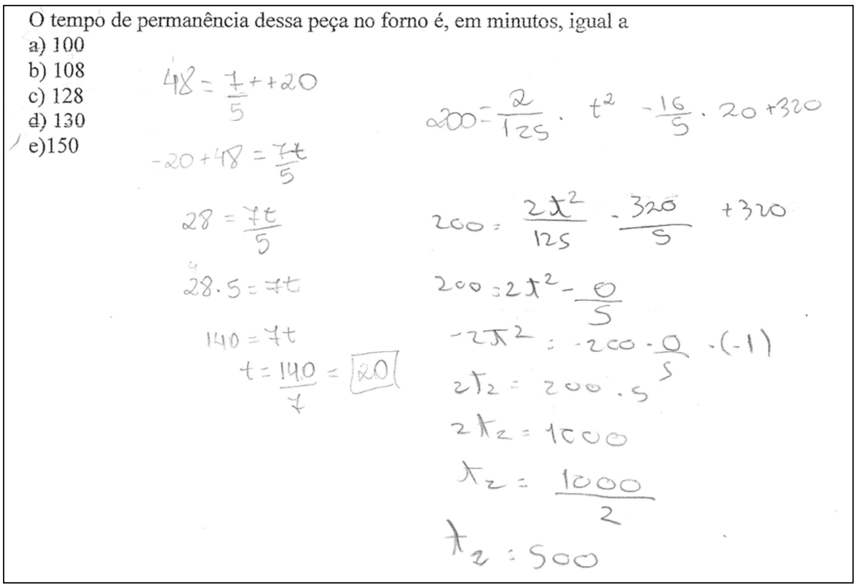
$x = \frac{+200 \pm 100}{2}$

$x_1 = \frac{300}{2} = 150$ $x_2 = \frac{100}{2} = 50$

$150 - 20 = 130$

Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Figura 19 – Resolução do aluno D


O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a
a) 100
b) 108
c) 128
d) 130
e)150

$48 = \frac{7}{5}t + 20$

$-20 + 48 = \frac{7t}{5}$

$28 = \frac{7t}{5}$

$28 \cdot 5 = 7t$

$140 = 7t$

$t = \frac{140}{7} = \boxed{20}$

$200 = \frac{2}{125} \cdot t^2 - \frac{16}{5} \cdot 20 + 320$

$200 = \frac{2t^2}{125} - \frac{320}{5} + 320$

$200 = 2t^2 - \frac{0}{5}$

$-2t^2 = -200 \cdot \frac{0}{5} \cdot (-1)$

$2t_2 = 200 \cdot 5$

$2t_2 = 1000$

$t_2 = \frac{1000}{2}$

$t_2 = 500$

Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Nesta questão os alunos tiveram maiores dificuldades em resolver. Ao se depararem com uma Função com duas sentenças, não sabiam como proceder. Num primeiro momento pensaram em igualar as duas sentenças, mas se deram conta de que não era o caminho correto. Em seguida tentaram resolver as duas separadamente, igualando-as a zero e assim encontrariam as raízes das equações. Neste momento comecei a interrogá-los sobre o que estava sendo proposto pelo problema, fazendo com que os mesmos refletissem e interpretassem de forma correta o problema. Feito isso, os alunos passaram a resolver as equações conforme visto nas figuras 19 e 20. Um obstáculo encontrado para a resolução foi o de conseguir resolver a equação quadrática de forma correta, uma vez que a mesma possui coeficientes racionais. Constatou-se que uma das dificuldades encontradas para a resolução também se trata de cálculos de aritmética, conforme se visualiza na figura 20.

Figura 20 - Questão 136 do Enem 2011

QUESTÃO 136

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina·cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina·cm)?

A) $10^{-5,10}$
B) $10^{-0,73}$
C) $10^{12,00}$
D) $10^{21,65}$
E) $10^{27,00}$

Fonte: INEP, 2011.

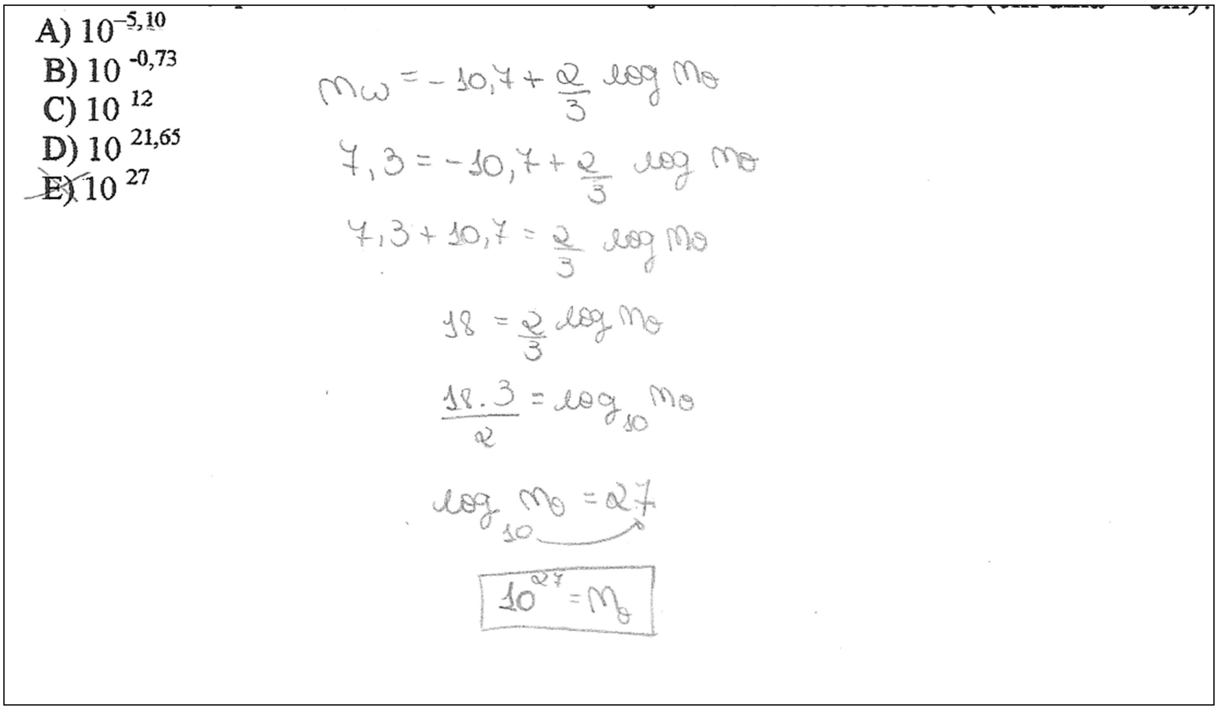
Resolução:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$
$$7{,}3 = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log M_o$$
$$18 = \frac{2}{3}\log M_o$$
$$27 = \log M_o$$

Aplicando a definição de logaritmo

$$M_o = 10^{27} \qquad (alternativa \quad e)$$

Figura 21 - Resolução do aluno B



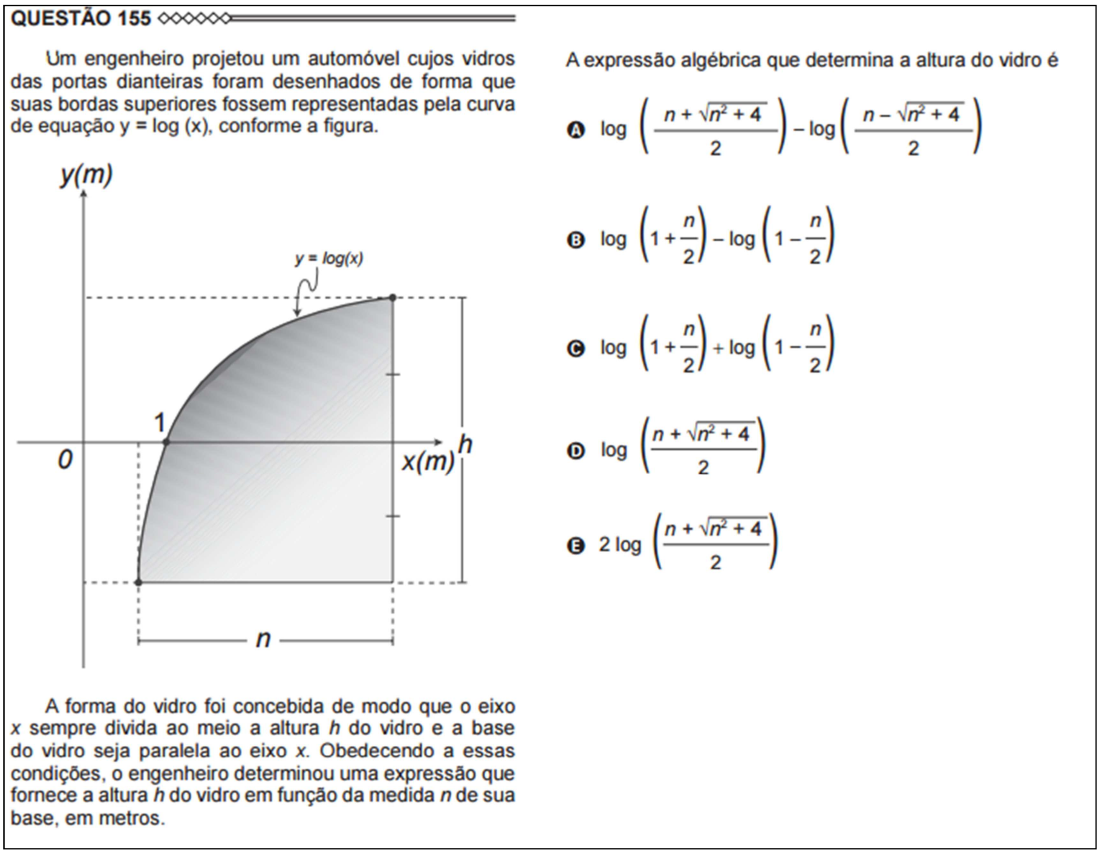
A) $10^{-5,10}$
B) $10^{-0,73}$
C) 10^{12}
D) $10^{21,65}$
E) 10^{27}

$$Mw = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log Mo$$
$$7{,}3 = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log Mo$$
$$7{,}3 + 10{,}7 = \frac{2}{3}\log Mo$$
$$18 = \frac{2}{3}\log Mo$$
$$\frac{18 \cdot 3}{2} = \log_{10} Mo$$
$$\log_{10} Mo = 27$$
$$\boxed{10^{27} = Mo}$$

Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Nesta questão os alunos visualizaram de forma bastante rápida a forma de resolução. A dificuldade apresentada foi na aplicação da definição de logaritmo para finalizar o raciocínio. Reportados a definição de logaritmos, conseguiram finalizar o raciocínio e encontrar a solução do problema.

Figura 22 – Questão 155 do Enem 2015



QUESTÃO 155

Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação y = log (x), conforme a figura.

A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo *x* sempre divida ao meio a altura *h* do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo *x*. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura *h* do vidro em função da medida *n* de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

A) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)-\log\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

B) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right)-\log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

C) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right)+\log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

D) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

E) $2\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

Fonte: INEP, 2015.

Resolução:

$$\log(k+n)=\frac{h}{2}\rightarrow 2\log(k+n)=h \quad (1)$$

$$\log k=-\frac{h}{2}\rightarrow -2\log k=h \quad (2)$$

$$fazendo\ (1)=(2)$$

$$2\log(k+n)=-2\log k \Rightarrow k+n=k^{-1}\Rightarrow k^2+nk-1=0\Rightarrow k=\frac{-n\pm\sqrt{n^2+4n}}{2}$$

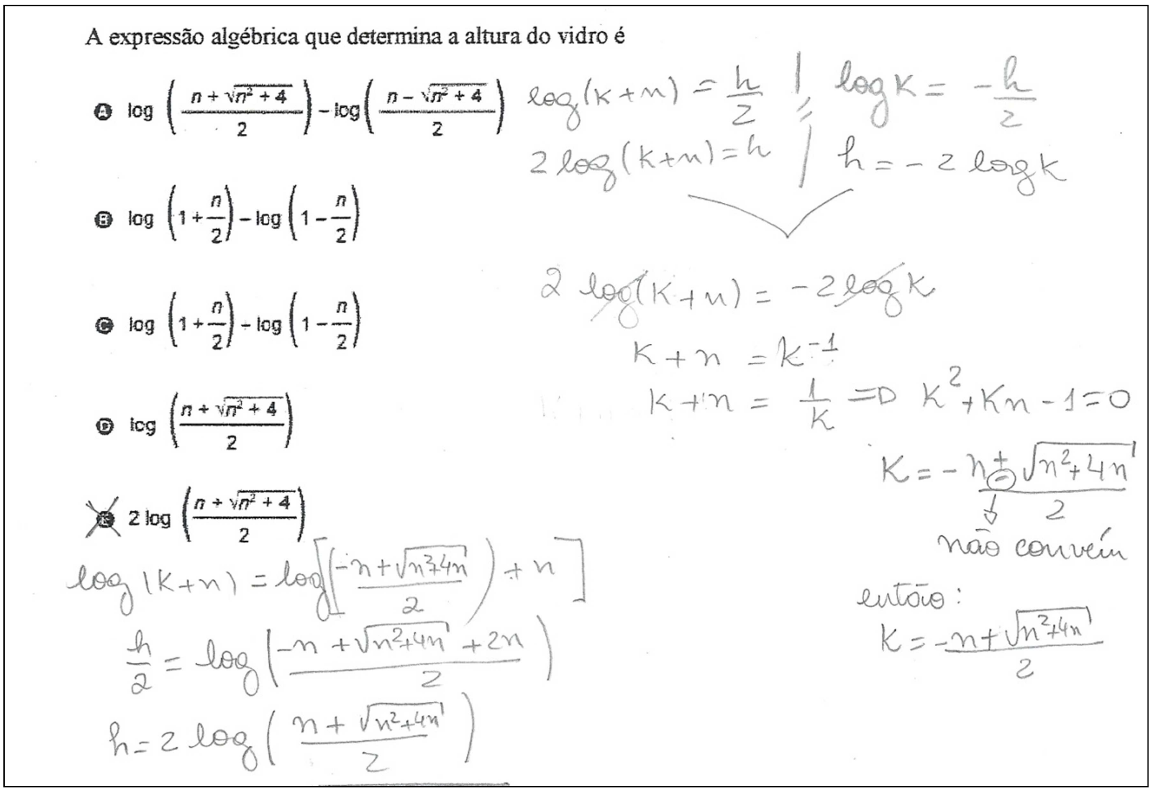
$$Assim,\ para\ k=\frac{-n+\sqrt{n^2+4n}}{2},\ temos:$$

$$\log(k+n)=\log\left[\left(\frac{-n+\sqrt{n^2+4n}}{2}\right)+n\right]$$

$$\frac{h}{2}=\log\left[\left(\frac{-n+\sqrt{n^2+4n}+2n}{2}\right)\right]$$

$$h=2\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}\right) \qquad (alternativa\ e)$$

Figura 23 – Resolução do aluno E



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Esta questão possui um nível de dificuldade maior, uma vez que exige da pessoa que vai resolvê-la, além de habilidades de resolução aritmética, o domínio das propriedades de exponencial e logaritmos. Os alunos não conseguiram resolver sozinhos esta questão, então, interagindo de forma mais direta, a professora começou a resolver junto com os mesmos, interrogando passo a passo da resolução, fazendo com que os alunos acompanhassem o raciocínio do desenvolvimento dos cálculos necessários para resolvê-la. A interpretação da situação através da leitura e comparação com o gráfico foi um obstáculo encontrado para iniciar a resolução. Relacionar os dados do gráfico para escrever as equações foi o mais difícil.

Figura 24 – Questão 172 do Enem 2013

QUESTÃO 172

Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

A) 27
B) 36
C) 50
D) 54
E) 100

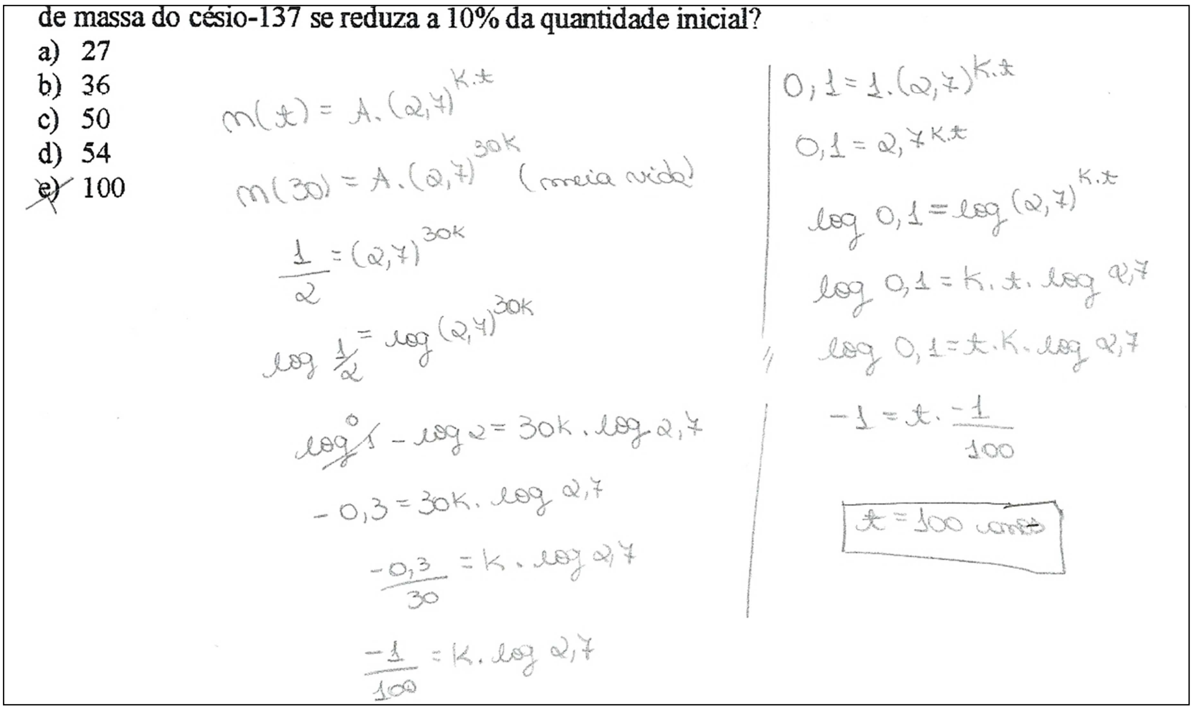
Fonte: INEP, 2013.

Resolução:

$$Meia\ vida \Rightarrow M(30) = A(2,7)^{k.30}$$
$$\frac{A}{2} = A(2,7)^{k.30}$$
$$\frac{1}{2} = (2,7)^{k.30}$$
$$-\log 2 = 30.\log(2,7)^{k}$$
$$\log(2,7)^{k} = -0,01$$

$$\text{Re}\,dução\ de\ 10\% \Rightarrow 0,1A = A(2,7)^{kt}$$
$$\frac{1}{10} = (2,7)^{kt}$$
$$-\log 10 = t\log(2,7)^{k}$$
$$-1 = t.(-0,01)$$
$$t = 100 anos$$

Figura 25 - Resolução do aluno B



de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27
b) 36
c) 50
d) 54
e) 100

$m(t) = A.(2,7)^{K.t}$

$m(30) = A.(2,7)^{30K}$ (meia vida)

$\frac{1}{2} = (2,7)^{30K}$

$\log \frac{1}{2} = \log (2,7)^{30K}$

$\cancel{\log 1}^{0} - \log 2 = 30k . \log 2,7$

$-0,3 = 30K . \log 2,7$

$\frac{-0,3}{30} = K . \log 2,7$

$\frac{-1}{100} = K . \log 2,7$

$0,1 = 1.(2,7)^{K.t}$

$0,1 = 2,7^{K.t}$

$\log 0,1 = \log (2,7)^{K.t}$

$\log 0,1 = K . t . \log 2,7$

$\log 0,1 = t . K . \log 2,7$

$-1 = t . \frac{-1}{100}$

$\boxed{t = 100 \text{ anos}}$

Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Nesta questão os alunos tiveram maior dificuldade em resolvê-la, pois envolvia duas equações, formando um sistema, o qual deveria ser solucionado por substituição. Instigando os alunos a chegarem à solução, foi se conduzindo os cálculos das referidas equações e dessa forma fazendo-os perceber qual deveria o caminho para concluir o raciocínio.

Figura 26 – Questão 173 do Enem 2011

QUESTÃO 173

Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês
Investimento B: 36% ao ano
Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá

A escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
B escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
C escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.
D escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.
E escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

Fonte: INEP, 2011.

Resolução:

$$A = (1+i)^{12} = (1+0{,}03)^{12} = 1{,}426$$
$$B = (1+i)^{1} = (1+0{,}36)^{1} = 1{,}36$$
$$C = (1+i)^{2} = (1+0{,}18)^{2} = 1{,}3924$$
$$A > C > B$$
$$Logo, A\ é\ mais\ vantajoso. \quad (alternativa\ c)$$

Figura 27 - Resolução do aluno D

$$M = C(1+i)^t$$
$$A \rightarrow (1+i)^t = (1+0{,}03)^{12} = (1{,}03)^{12} = 1{,}426$$
$$B \rightarrow (1+0{,}36)^1 = 1{,}36$$
$$C \rightarrow (1+0{,}18)^2 = 1{,}18^2 = 1{,}3954$$

Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Nesta questão a dúvida ficou por conta da fórmula a ser utilizada para a resolução, já que a mesma não é explicitada de forma direta no problema. Conduzidos ao raciocínio de que se tratava de uma questão de matemática financeira, lembraram-se da fórmula de juros compostos e aplicaram-na para solucionar, sem maiores dificuldades.

3.3 O *SOFTWARE* GEOGEBRA E SUA APLICAÇÃO

A terceira etapa se dará através da aplicação de atividades direcionadas utilizando como ferramenta de apoio o *software* GeoGebra. Estas atividades seguirão um roteiro pré-estabelecido, disponibilizado aos alunos. O objetivo desse roteiro é de proporcionar a eles uma sequência das atividades, fazendo com que os mesmos consigam fazer uma análise de cada situação, compreendendo o comportamento de cada função aplicando as devidas mudanças.

Para atender a terceira etapa desta pesquisa, os alunos foram direcionados ao laboratório de informática da Escola em questão, no qual todos os 20 computadores disponíveis já estavam com o *software* GeoGebra instalado.

As atividades desenvolvidas no Laboratório tiveram como finalidade possibilitar ao educando entender de uma forma ampla o comportamento de cada função através de seu gráfico.

Os sujeitos foram divididos em duplas, com o objetivo de interagirem facilitando a compreensão dos conceitos abordados nas atividades. Na sequência foi demonstrado o funcionamento da ferramenta e, assim, dinamicamente as duplas começaram a resolução das atividades propostas.

3.3.1 Utilização da ferramenta GeoGebra

Aos alunos participantes da oficina, foram disponibilizadas quatro atividades para serem solucionadas de acordo com o roteiro proposto utilizando a ferramenta GeoGebra, sendo uma de função Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica, respectivamente.

ATIVIDADE 1

1.1. Trace, no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = x - 2$

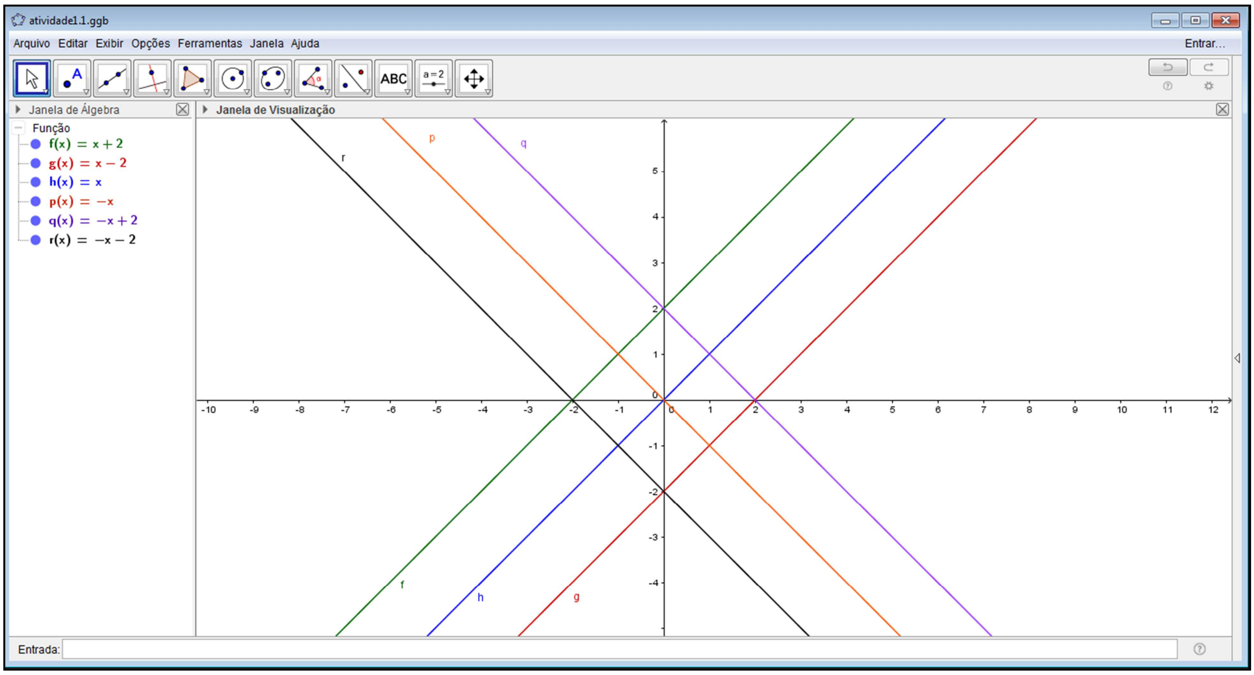
c) $f(x) = x$

d) $f(x) = -x$

e) $f(x) = -x + 2$

f) $f(x) = -x - 2$

Figura 28 – Resolução da atividade 1.1



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A partir dos gráficos, responda:

a) O que significa geometricamente o coeficiente “a” nas funções dadas acima?

b) O que significa geometricamente o coeficiente “b” nas funções dadas acima?

c) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens a, b e c?

d) Observe a lei de formação das funções dadas nos itens a, b e c , o que elas têm em comum?

e) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens d, e e f?

f) Observe a lei de formação das funções dadas nos itens d, e e f, o que elas têm em comum?

Respostas esperadas:

a) Determina a inclinação da reta com relação ao eixo x, definindo se a função é crescente ou decrescente, se a>0 $\rightarrow$ crescente e se a<0 $\rightarrow$ decrescente.
b) O ponto de interseção com o eixo y.
c) Possuem a mesma inclinação em relação ao eixo x.
d) Possuem o mesmo coeficiente angular.
e) Possuem a mesma inclinação em relação ao eixo x.
f) Possuem o mesmo coeficiente angular.

Dessa forma podemos concluir que:

a) A representação gráfica da função afim $f(x) = ax + b$ é sempre uma: _____________

b) A função afim é crescente quando:_________

c) A função afim é decrescente quando:_________

d) O coeficiente "a" determina:______________

e) O coeficiente "b" determina:______________

Respostas esperadas:

a) reta.
b) a>0.
c) a<0.
d) inclinação da reta em relação ao eixo x.
e) a interseção com o eixo y.

Análise das respostas:

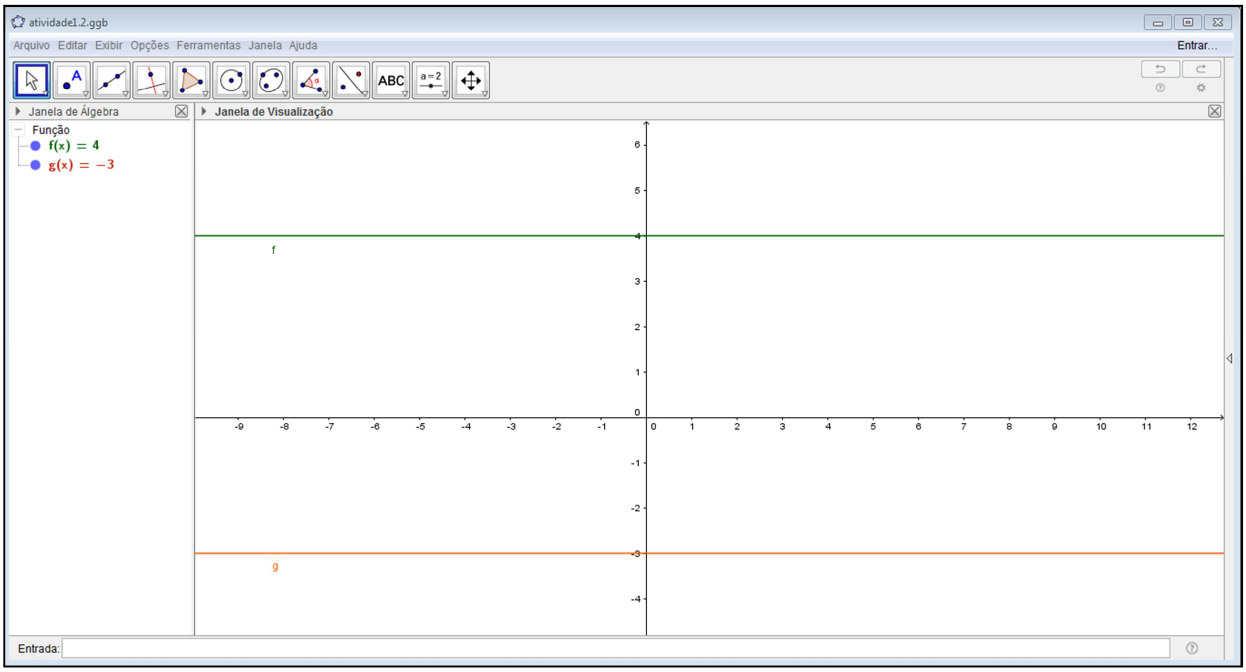
Nesta tarefa os alunos conseguiram relacionar o sinal do coeficiente angular da reta com a inclinação da mesma, definindo desta forma seu crescimento e decrescimento. Identificaram o ponto de interseção com o eixo *y* e conseguiram comparar retas de mesma inclinação. A dificuldade apresentada foi expressar que o que define a inclinação da reta é o coeficiente angular, geralmente escrevem que *x* é positivo ou negativo. As conclusões da atividade foram feitas corretamente.

1.2. Verifique o que acontece se a função é da forma:

a) $f(x) = 4$

b) $g(x) = -3$

Figura 29 – Resolução da atividade 1.2



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

O que você observou?____

Resposta esperada:

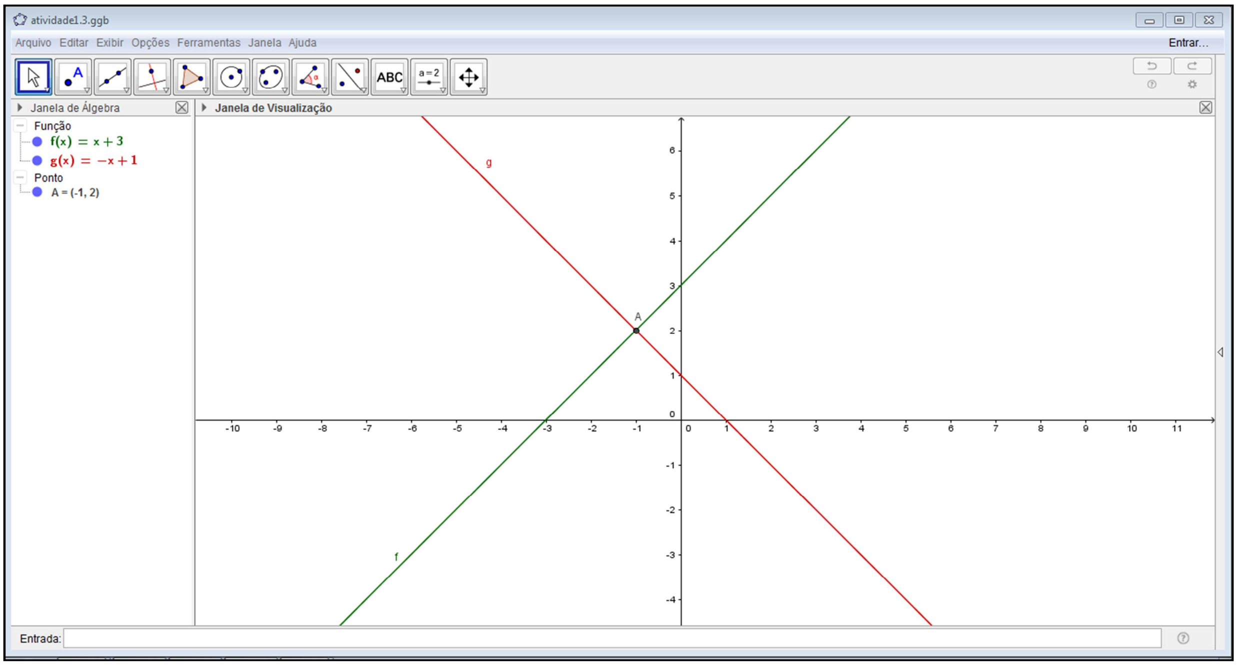
As funções são constantes.

Análise das respostas:

Nesta tarefa, os alunos concluíram que eram duas retas horizontais; que as retas não possuem inclinação.

1.3. Trace os gráficos das funções $f(x) = x + 3$ e $g(x) = -x + 1$ no mesmo sistema cartesiano e a partir dos gráficos determine:

Figura 30 – Resolução da atividade 1.3



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

a) As raízes das funções.

b) O intervalo onde cada função é positiva e o intervalo onde cada função é negativa.

c) O ponto de interseção das funções.

Respostas esperadas:

a) $x = -3$ e $x = 1$

b) $f(x) = x + 3$ é positiva para $x > -3$ e negativa para $x < -3$.

$g(x) = -x + 1$ é positiva para $x < 1$ e negativa para $x > 1$.

c) $A = (-1, 2)$

Análise das respostas:

Nesta atividade os alunos conseguiram identificar geometricamente a raiz de cada função, associando com o valor de $y = 0$. Quanto a identificar os intervalos em que a função é positiva ou negativa, apresentaram certa dificuldade, deixando incompletas as respostas. Responderam de forma parcial, identificando somente a parte positiva da função, porém conseguiram identificar esta relação com a raiz da função. O ponto de interseção das retas foi identificado corretamente.

ATIVIDADE 2

2.1. Trace, no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico das funções abaixo

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 3x^2$

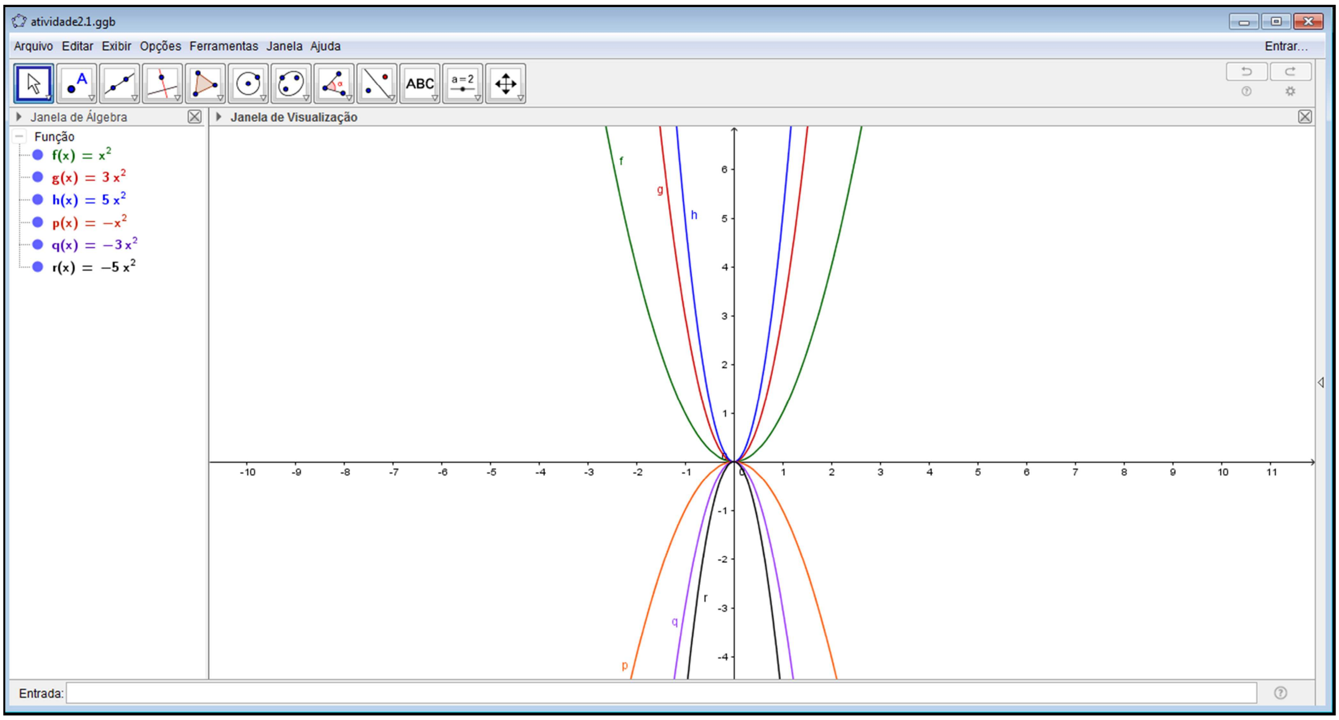
c) $f(x) = 5x^2$

d) $f(x) = -x^2$

e) $f(x) = -3x^2$

c) $f(x) = -5x^2$

Figura 31 – Resolução da atividade 2.1



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A partir dos gráficos, responda:

a) O que os itens a, b, c tem em comum?____

b) O que os itens d, e, f tem em comum? ____

c) O que os itens a e d tem em comum? ____

d) O que os itens b e e tem em comum? ____

e) O que os itens c e f tem em comum? ____

Respostas esperadas:

a) $a > 0$

b) $a < 0$

c) o ângulo de abertura da concavidade

d) o ângulo de abertura da concavidade

e) o ângulo de abertura da concavidade

Análise das respostas:

O objetivo desta tarefa era de associar o coeficiente *a* com a concavidade da parábola e o ângulo de abertura da mesma. Todos os alunos conseguiram fazer a relação do valor do coeficiente com a concavidade, bem como o ângulo de abertura. Alguns alunos descreveram as funções como crescentes ou decrescentes, como na função afim. Também relacionaram a simetria dos coeficientes como algo em comum entre as funções.

2.2. Trace, no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico das funções abaixo:

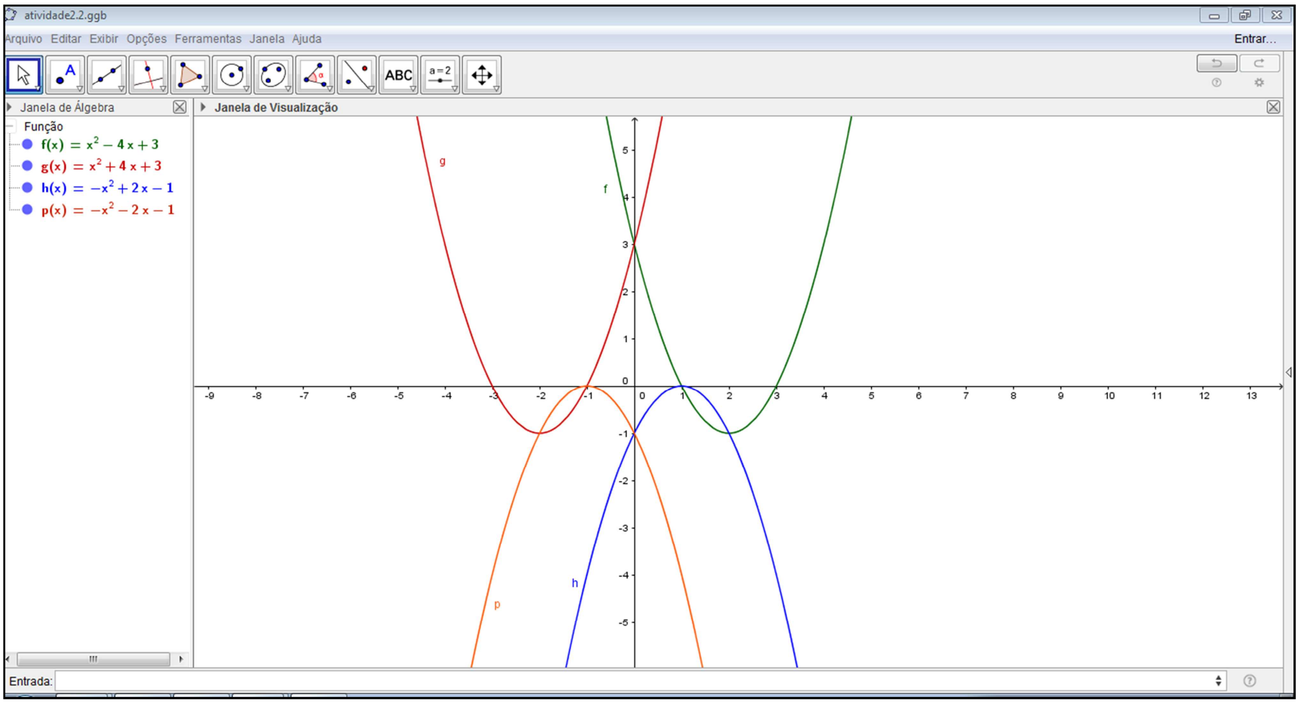
a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

c) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

d) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$

Figura 32 – Resolução da atividade 2.2



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A partir dos gráficos, responda:

a) Qual é o ponto de interseção com o eixo y?___________________________________

b) Em cada caso, defina se é o "braço" crescente ou o "braço" decrescente que passa pelo eixo y:

a)____________________________________b)_____________________________________

c)____________________________________d)_____________________________________

c) Observe a lei de formação da função nos itens a e d e identifique o que elas têm em comum.____

d) Observe a lei de formação da função nos itens b e c e identifique o que elas têm em comum.____

Respostas esperadas:

a) $(0,3)\ e\ (0,-1)$

b) a) decrescente b) crescente c) decrescente d) crescente

c) Os valores de b e c.

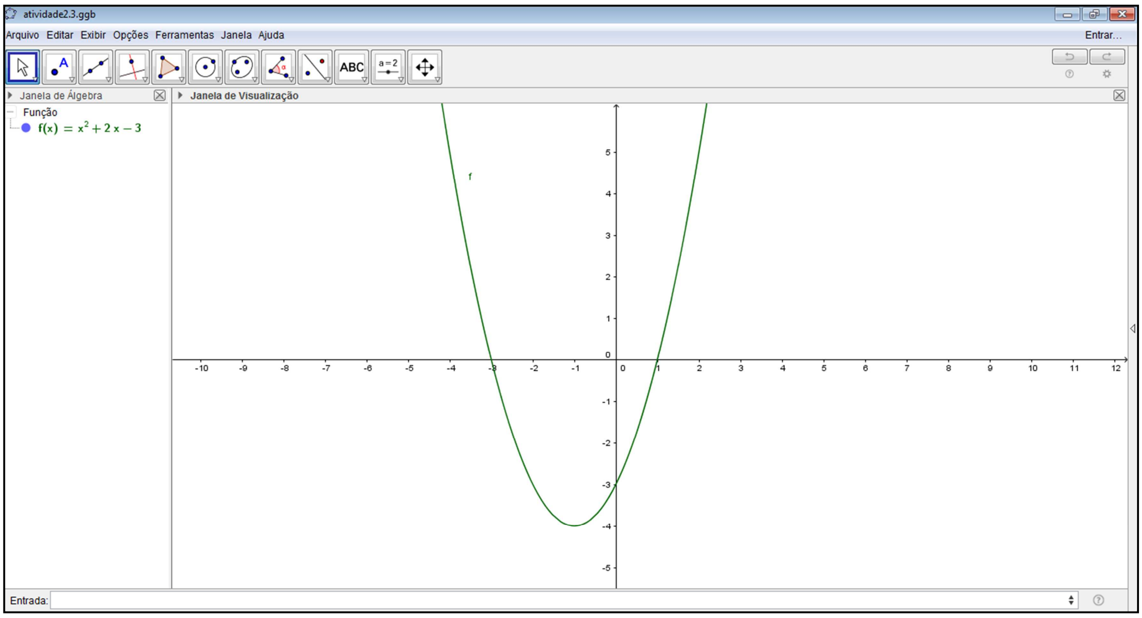
d) Os valores de b e c.

Análise das respostas:

Nesta atividade os alunos conseguiram identificar os pontos de interseção com o eixo *y*. Identificaram corretamente qual “braço” da parábola intersecta o eixo *y* em cada caso, relacionando com o valor do coeficiente b de cada função. Alguns alunos associaram a característica comum das funções em crescente ou decrescente, remetendo mais uma vez a teoria de função afim.

2.3 Trace o gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Figura 33 – Resolução da atividade 2.3



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Analisando visualmente o gráfico da função dada, determine:

a) O domínio da função f________________________________

b) A imagem da função f________________________________

c) Raízes ou zeros da função f____________________________

d) Vértice da parábola____________________________________

e) Intervalos onde a função é positiva e intervalos onde a função é negativa_______________________

Respostas esperadas:

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $Im(f) = \{ y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq -4\}$

c) $x = -3$ e $x = 1$

d) $V = (-1,-4)$

e) $positiva \rightarrow x < -3 \ e \ x > 1$; $negativa \rightarrow -3 < x < 1$

Dessa forma podemos concluir que:

a) A concavidade da parábola depende do valor de:____________

b) O ponto de interseção com o eixo y é definido pelo valor de :_________

c) Quem define qual dos braços da “parábola” passa pelo eixo y é o:______

d) Se a parábola tem concavidade voltada para cima podemos afirmar que __________

e) Se a parábola tem concavidade voltada para baixo podemos afirmar que __________

f) As interseções da parábola com eixo *x* são as ___________ ou __________ da função.

Respostas esperadas:

a) a

b) c

c) b

d) $a > 0$

e) $a < 0$

f) raízes ou zeros.

Análise das respostas:

Nesta atividade identificar onde a função é positiva e negativa foi uma das dificuldades encontradas. A outra foi identificar a imagem da função. Aparentemente pareceu que os alunos possuem dificuldade em relacionar a função com a variável y.

A maioria dos alunos conclui corretamente os itens, porém dois alunos insistiram em associar a concavidade da parábola à função crescente e decrescente.

ATIVIDADE 3

3.1. Trace, no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = (3{,}5)^x$

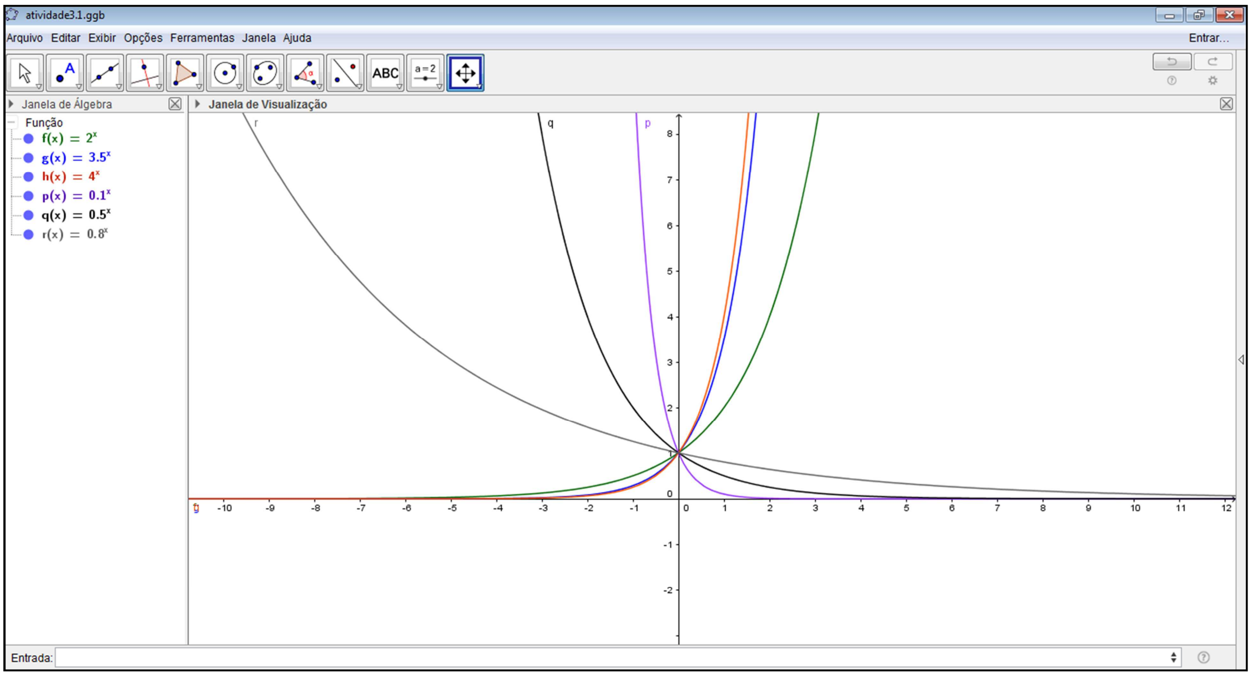
c) $f(x) = 4^x$

d) $f(x) = 0{,}1^x$

e) $f(x) = (0{,}5)^x$

f) $f(x) = (0{,}8)^x$

Figura 34 – Resolução da atividade 3.1



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A partir dos gráficos, responda:

a) Qual é a característica comum a todos os gráficos?

b) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens a, b e c?

c) Observe a lei de formação das funções constantes nos itens a, b e c, o que elas têm em comum, fora o expoente?

d) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens d, e e f?

e) Observe a lei de formação das funções constantes nos itens d, e e f, o que elas têm em comum, fora o expoente?

Respostas esperadas:

a) Todos passam pelo ponto $(0{,}1)$.

b) São crescentes.

c) Base maior que 1.

d) São decrescentes.

e) Base entre 0 e 1.

Dessa forma podemos concluir que:

a) o gráfico da função exponencial da forma $f(x) = a^x$ sempre passa pelo ponto: __________

b) A função exponencial da forma $f(x) = a^x$ é crescente quando:___________________

c) A função exponencial da forma $f(x) = a^x$ é decrescente quando:_________________

Respostas esperadas:

a) (0,1)

b) Base maior que 1

c) Base entre 0 e 1.

Análise das respostas:

Nesta tarefa os alunos conseguiram fazer a relações corretamente; exceto nos itens c e e nos quais não especificaram que quem deveria ser maior que 1 ou entre 0 e 1 era a base do exponencial. Nas funções decrescentes a hipótese de que a base está entre zero e 1 foi simplesmente identificada como sendo menor que um, deixando a possibilidade de que a base seja negativa, o que não é correto.

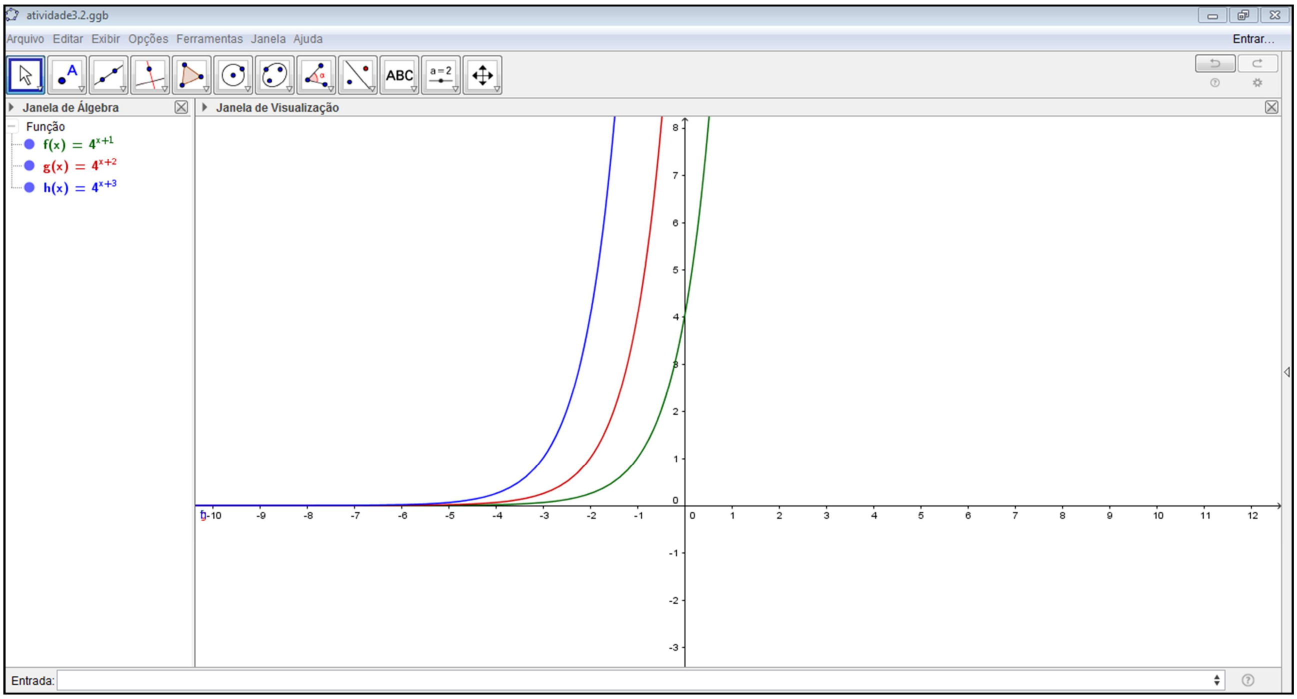
3.2. Verifique o que acontece quando somamos um número ao x:

a) $f(x) = 4^{x+1}$

b) $f(x) = 4^{x+2}$

c) $f(x) = 4^{x+3}$

Figura 35 – Resolução da atividade 3.2



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

O que você observou?

Resposta esperada:

Quanto maior o valor somado ao expoente *x*, o ponto de interseção com o eixo y se afasta positivamente da origem do plano cartesiano.

Análise das respostas:

As observações feitas nesta atividade foram que: as curvas não "cortam" o eixo *x* e que quanto maior o expoente o ponto de interseção com o eixo y estará mais distante da origem e que a curva se afasta mais rapidamente do eixo y pela esquerda.

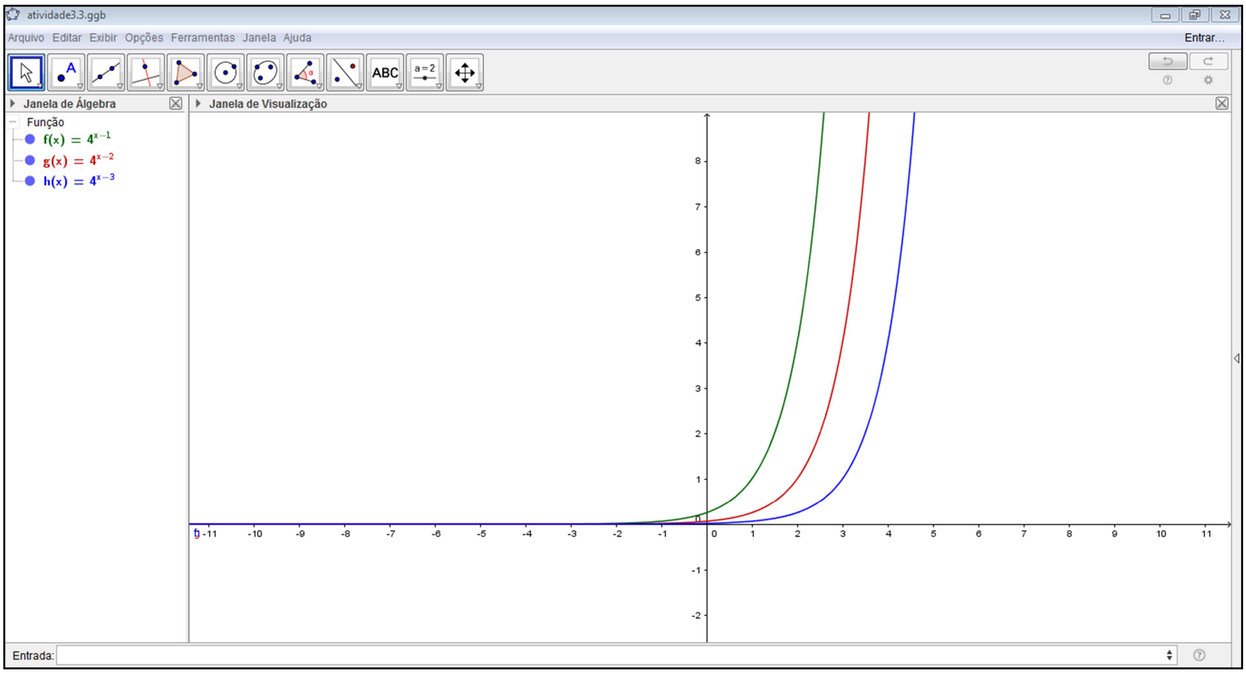
3.3. Verifique o que acontece quando subtraímos um número de x:

a) $f(x) = 4^{x-1}$

b) $f(x) = 4^{x-2}$

c) $f(x) = 4^{x-3}$

Figura 36 – Resolução da atividade 3.3



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

O que você observou?

Resposta esperada:

Quanto maior o valor subtraído ao expoente *x*, o ponto de interseção com o eixo y se aproxima positivamente da origem do plano cartesiano.

Análise das respostas:

Nesta atividade os alunos observaram que quanto maior for o número subtraído no expoente, a curva “corta” o eixo y mais próximo da origem e que a curva se afasta mais rapidamente do eixo y pela direita.

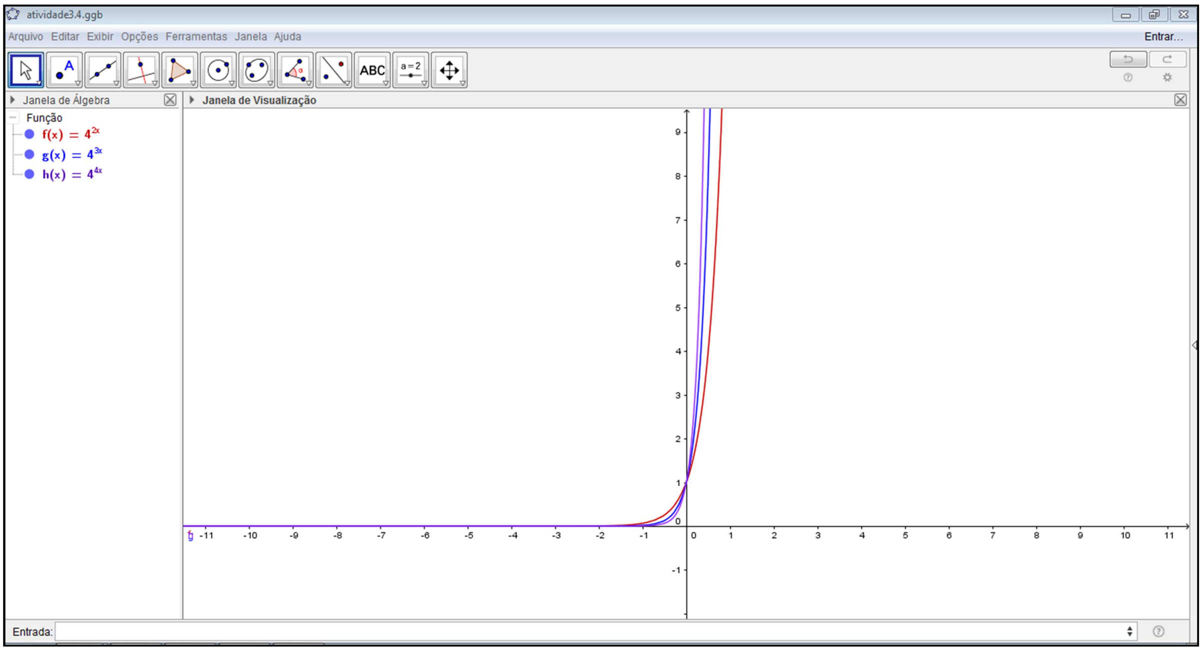
3.4. Verifique o que acontece quando multiplicamos um número por x

a) $f(x) = 4^{2x}$

b) $f(x) = 4^{3x}$

c) $f(x) = 4^{4x}$

Figura 37 – Resolução da atividade 3.4



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

O que você observou?

Resposta esperada:

Quanto maior o expoente, mais a curva se aproximam do eixo y pela direita.

Análise das respostas:

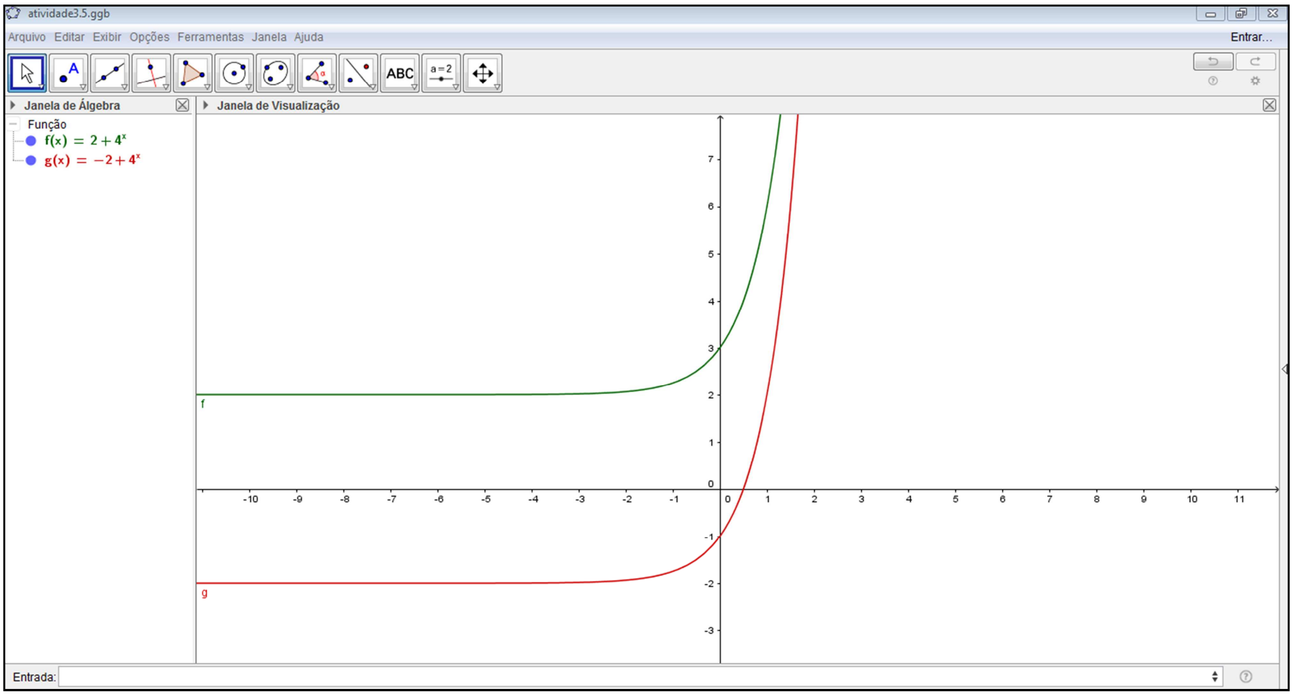
Nesta atividade os alunos concluíram simplesmente que todas as curvas passam pelo ponto $(0,1)$.

3.5. Verifique o que acontece quando somamos ou subtraímos um número a função

a) $f(x) = 2 + 4^x$

b) $f(x) = -2 + 4^x$

Figura 38 – Resolução da atividade 3.5



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

O que você observou?

Resposta esperada:

Ao somarmos ou subtrairmos um valor numérico a função $f(x) = a^x$ a curva se desloca verticalmente, alterando a interseção com o eixo y.

Análise das respostas:

Os alunos concluíram que ao somar 2 unidades a função exponencial, o gráfico "subiu" em relação ao eixo x e ao subtrair 2 unidades da função, o gráfico "desceu" em relação ao eixo x.

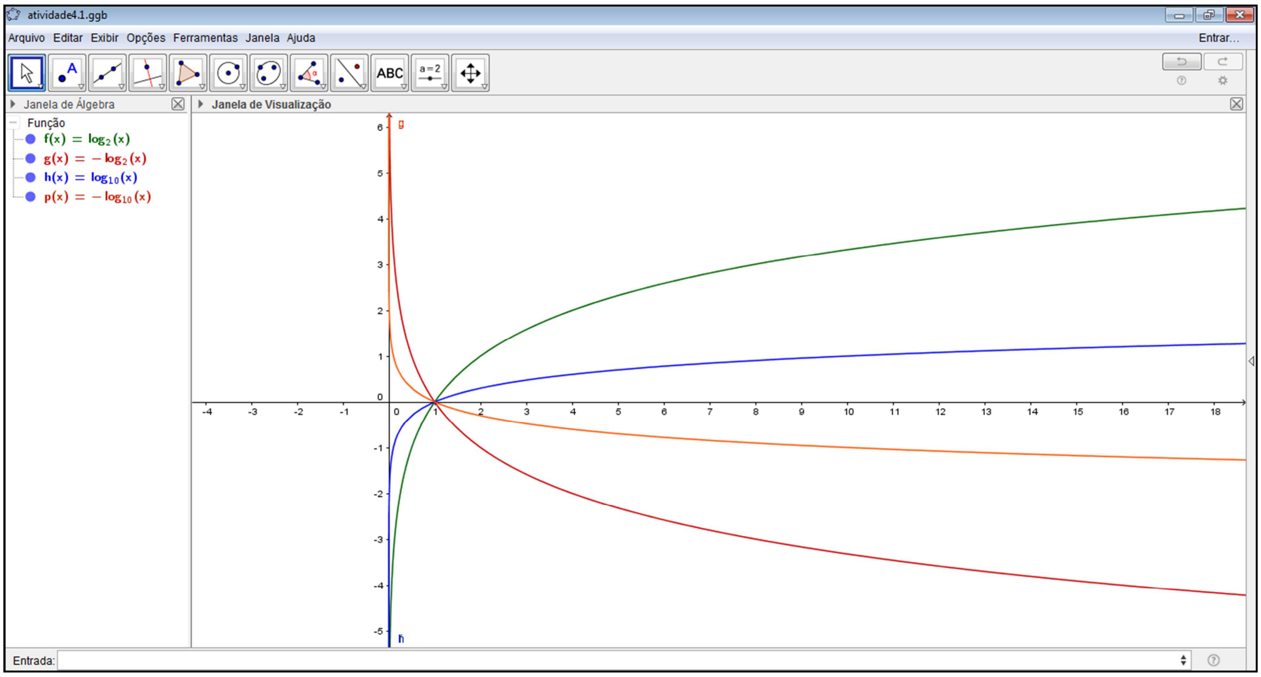
ATIVIDADE 4

4.1. Trace, no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $f(x) = \log x$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

Figura 39 – Resolução da atividade 4.1



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A partir dos gráficos, responda:

a) Qual é a característica comum a todos os gráficos?

b) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens a e c?

c) Observe a lei de formação das funções nos itens a e c , o que elas têm em comum?

d) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens b e d?

e) Observe a lei de formação das funções nos itens b e d, o que elas têm em comum?

Respostas esperadas:

a) Passam pelo ponto $(1,0)$

b) São crescentes.

c) base maior que 1

d) São decrescentes.

e) Base entre 0 e 1.

Dessa forma podemos concluir que:

a) o gráfico da função logarítmica da forma $f(x) = \log_b x$ sempre passa pelo ponto: ________

b) A função logarítmica da forma $f(x) = \log_b x$ é crescente quando:________________

c) A função logarítmica da forma $f(x) = \log_b x$ é decrescente quando:______________

Respostas esperadas:

a) (1,0)

b) Base maior que 1.

c) Base entre 0 e 1.

Análise das respostas:

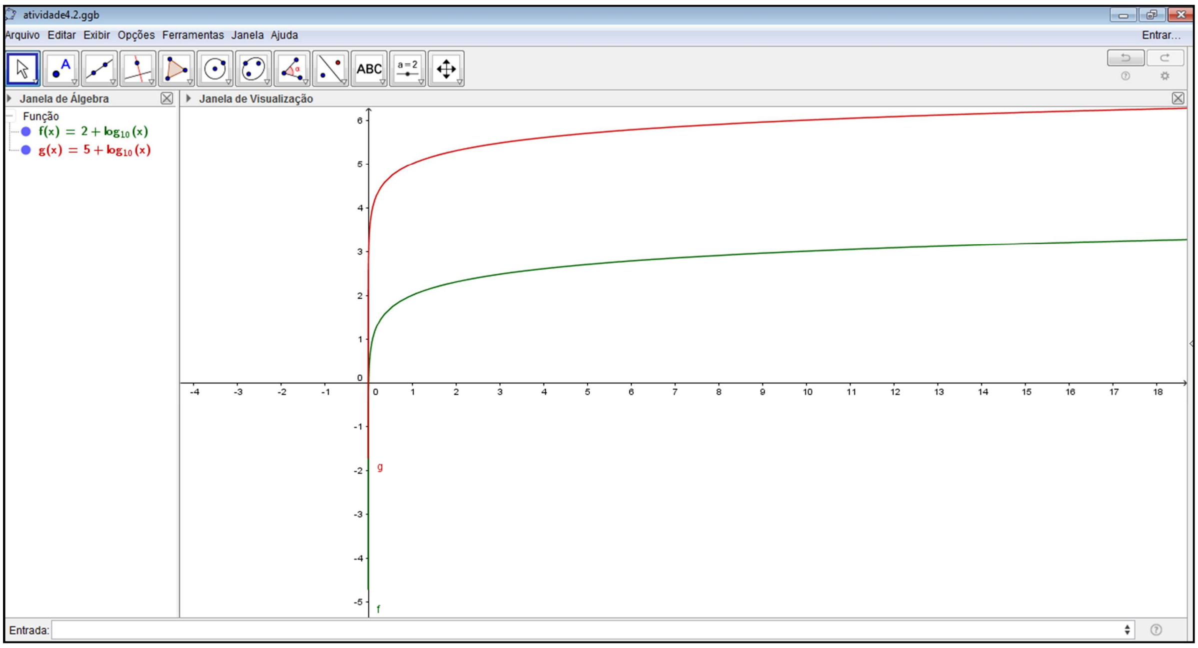
Nesta atividade os alunos identificaram corretamente as funções crescentes e decrescentes relacionando isso com o valor da base do logaritmo e o ponto de interseção com o eixo x.

4.2. Verifique o que acontece quando somamos um número a função:

a) $f(x) = 2 + \log x$

b) $f(x) = 5 + \log x$

Figura 40 – Resolução da atividade 4.2



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

O que você observou?

Resposta esperada:

Quanto maior o valor adicionado a função mais a curva se afasta do eixo x superiormente.

Análise das respostas:

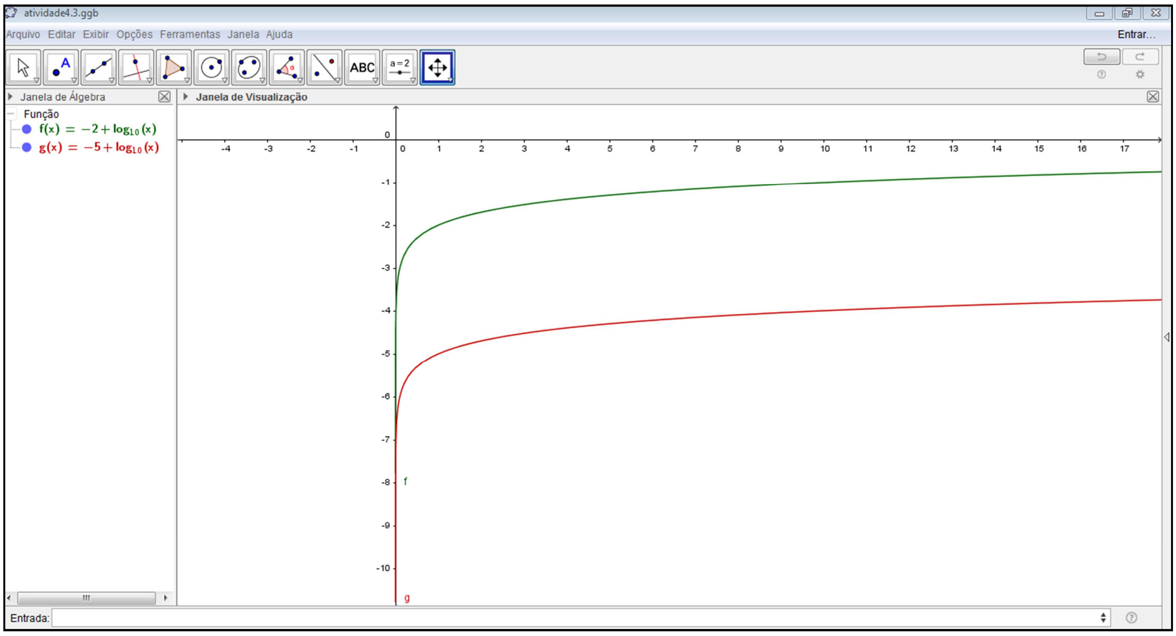
Nesta atividade os alunos associaram o crescimento mais rápido quando o valor adicionado a função for maior.

4.3. Verifique o que acontece quando subtraímos um número a função:

a) $f(x) = -2 + \log x$

b) $f(x) = -5 + \log x$

Figura 41 – Resolução da atividade 4.3



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

O que você observou?

Resposta esperada:

Quanto maior o valor subtraído a função mais a curva se afasta do eixo x inferiormente.

Análise das respostas:

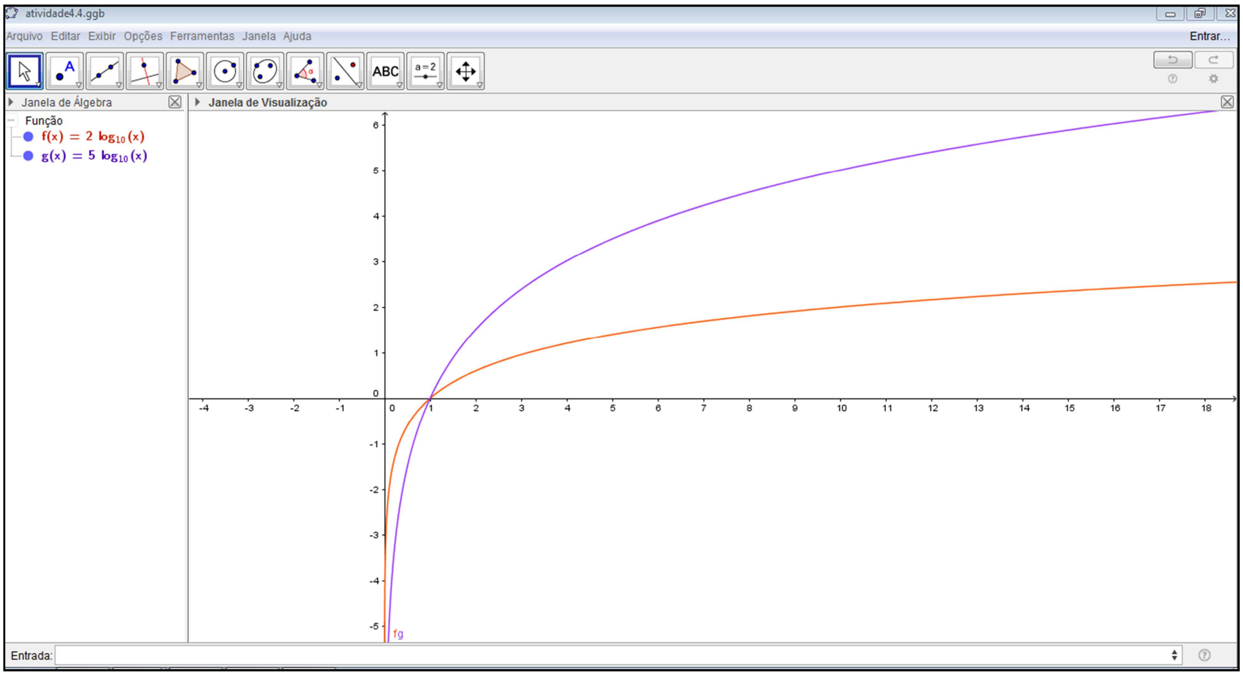
Associaram a subtração com o deslocamento da curva em relação ao eixo x: quanto menor for o valor subtraído mais próximo do eixo x e quanto maior o valor subtraído, mais distante do eixo x a curva estará.

4.4. Verifique o que acontece quando multiplicamos um número a função:

a) $f(x) = 2.\log x$

b) $f(x) = 5.\log x$

Figura 42 – Resolução da atividade 4.4



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

O que você observou?

Resposta esperada:

Quanto maior o valor que multiplica a função logarítmica, maior será a curvatura com relação ao eixo x.

Análise das respostas:

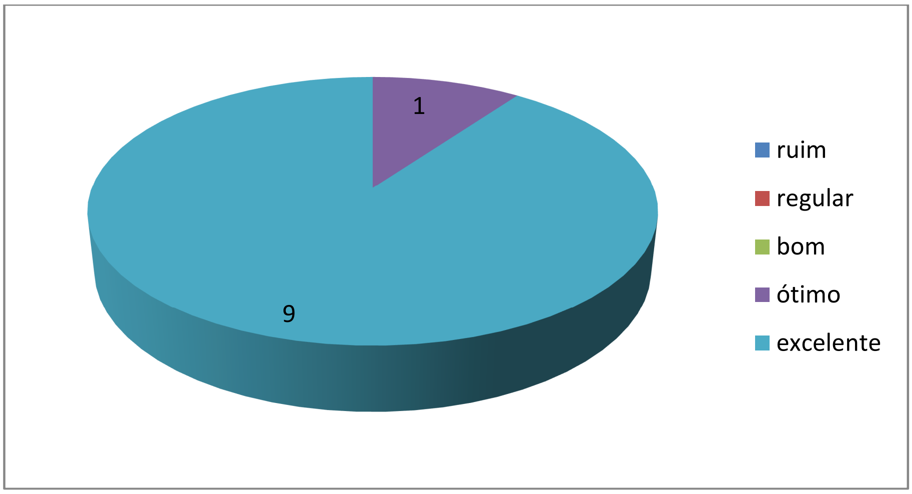
Nesta atividade os alunos observaram que ambas as curvas passam pelo ponto $(1,0)$, são crescentes e quanto maior o número que multiplica o logaritmo, o crescimento é mais rápido.

3.4 AVALIAÇÃO DA OFICINA

Após a explanação sobre os conteúdos específicos a Funções e Equações, e utilização do s*oftwar*e GeoGebra, os alunos foram convidados a responder um questionário, conforme anexo C, referente a avaliação pessoal das atividades desenvolvidas durante a aplicação desta pesquisa. O questionário é composto de nove questões, sendo duas de múltipla escolha, três de múltipla escolha que exigiam justificativa e quatro descritivas. Dez alunos responderam ao questionário.

A questão de número 1, objetiva, referia-se a qualidade do material impresso recebido durante a explanação dos conteúdos. Nove alunos responderam excelente e um respondeu ótimo.

Figura 43 – Avalie o material de revisão recebido durante os primeiros encontros

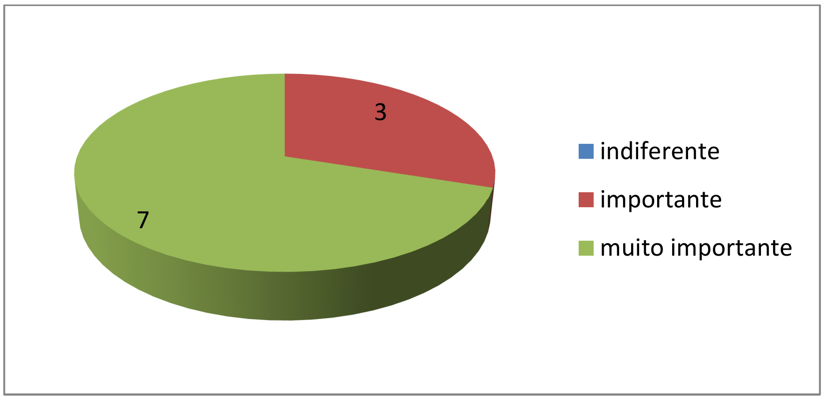


Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A questão de número 2, objetiva com justificativa, se refere à importância da revisão dos conteúdos realizada nos encontros, onde três alunos responderam que foi importante e sete responderam que foi muito importante. “As justificativas apresentadas são de que já “havia esquecido o conteúdo”; “ajudou a revisar para vestibular e ENEM”; “Aprendeu mais;”

“entendeu mais fácil”; “aprendeu e esclareceu dúvidas”; “Aprendeu coisas que não sabia”, e 7 alunos não justificaram.

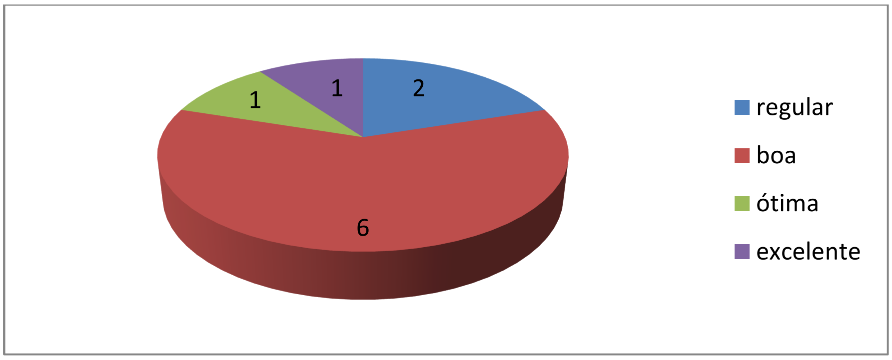
Figura 44 - Qual foi a importância da revisão dos conteúdos realizada nesses encontros?



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Já a de número 3, objetiva com justificativa, indaga sobre como o participante avalia a sua participação. Seis classificam como boa, sem justificativa, dois avaliam como regular, por ter faltado a um encontro; um excelente e um ótimo, respectivamente e sem justificativa.

Figura 45 - Como você classifica sua participação



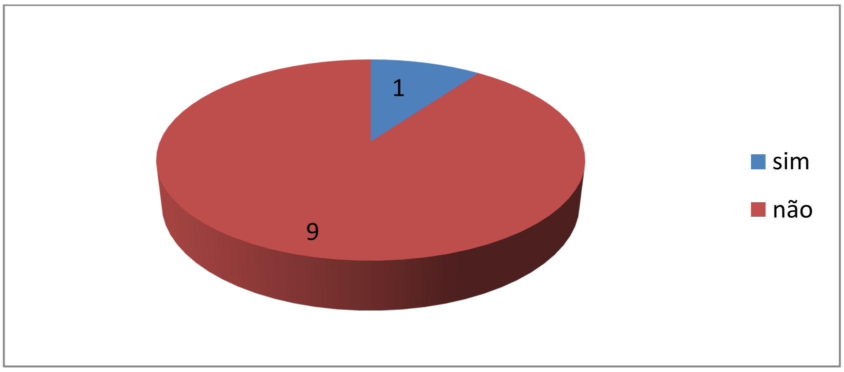
Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A indagação da número 4, descritiva, aborda as expectativas em relação à oficina. Responderam que era “revisar os conteúdos; aprender mais; tirar dúvidas; um dos alunos escreveu: “pensei que fosse besteira, mas gostei muito e superou minhas expectativas”.

Por sua vez, a questão de número 5, descritiva, perguntava se estas expectativas, relatadas na questão anterior, haviam sido atendidas. Todos escrevem que as suas expectativas foram atendidas de maneira positiva. “consegui aprender ainda mais; ajudou de todas as formas; foram mais que atendidas, foram esclarecidas e divertidas”.

A de número 6, objetiva, questiona os participantes sobre se alguma vez já haviam utilizado um *software* matemático. Nove responderam que não e um que sim.

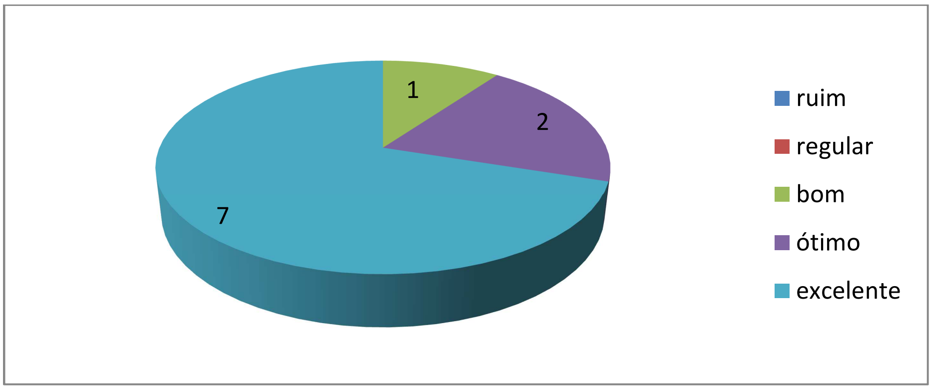
Figura 46 - Você já havia trabalhado com um software matemático?



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A questão de número 7, objetiva com justificativa, solicita a avaliação da utilização da ferramenta GeoGebra no processo de ensino aprendizagem. Sete classificaram como excelente, pois “ajuda na visualização para responder; torna a atividade mais interativa, de forma dinâmica”.

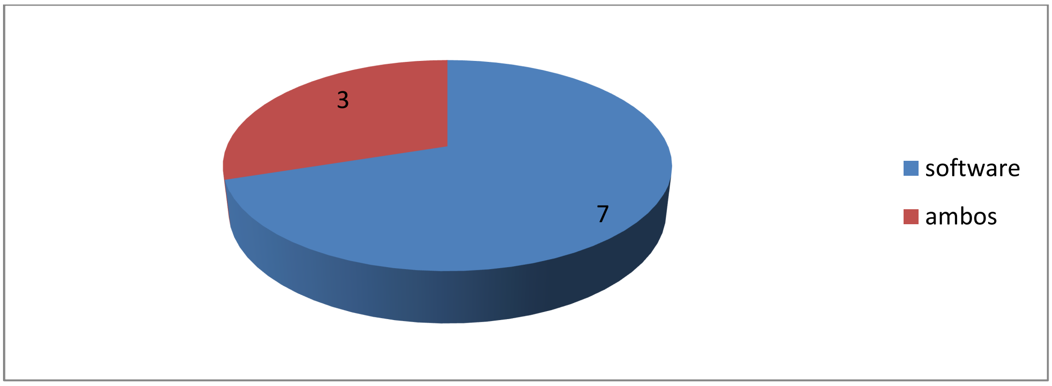
Figura 47 - Como você avalia a utilização dessa ferramenta no processo de ensino aprendizagem?



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

A questão de número 8 solicita que eles respondam, descritivamente, por qual o método o entendimento foi melhor: Pelo tradicional ou pelo *software?* Sete responderam que pelo software entenderam melhor; três responderam que pelos dois métodos, mas que o software vai além do tradicional.

Figura 48 - O seu entendimento foi melhor pelo método tradicional ou a partir do uso do *software*?



Fonte: Autora do trabalho, 2016.

Com relação a questão de número 9, os alunos não se manifestaram com relação a sugestões e críticas , no entanto elogiaram tanto a metodologia utilizada quanto a professora pesquisadora no que diz respeito à postura, domínio do conteúdo e interatividade das aulas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Entendemos que atualmente a aprendizagem não acontece apenas quando se apresenta um determinado conteúdo de maneira sistemática, nem mesmo quando os sujeitos da aprendizagem reproduzem apenas modelos aprendidos, antes sim pela reflexão desses sujeitos frente a várias situações que demandam uma mesma ideia. Elencar o maior número possível de relações entre os diferentes significados da ideia investigada é um método de internalizar o conhecimento. Desta forma, o sujeito se prepara para enfrentar novas situações, estabelecendo ligações entre o novo e o habitual, transformando o que já conhece, assegurando assim que a aprendizagem aconteceu e que, de fato, é proprietário do saber.

O software GeoGebra configura-se como uma excelente ferramenta tecnológica para inserção de conteúdos no ensino de matemática, uma vez que é de fácil manuseio e de acesso livre. O principal objetivo deste trabalho foi mostrar que existe a possibilidade de inovação na aplicação do conteúdo de funções em sala de aula, utilizando a ferramenta GeoGebra. Contudo, isso só será possível se o profissional em educação tiver um espírito inerente e constante de curiosidade, para descobrir sempre mais novas metodologias e aplicações para o conhecimento matemático.

Após a aplicação da oficina e do questionário, compreendemos que o uso de tecnologias no ensino da Matemática, além de possibilitar a interação entre o homem e a máquina, auxilia na compreensão entre o real e o abstrato. Oferece suporte para a resolução de problemas e desencadeia no usuário o sentimento de curiosidade, tão necessário no ensino deste componente curricular.

Além dos pressupostos, propicia a interação entre o aluno e professor de uma forma mais dinâmica, oportunizando um diálogo franco e de linguagem técnica, utilizando a ferramenta que está em voga desde a mudança do milênio e presente em tantas outras atividades de cunho social.

Porém, a presença do professor durante a utilização desta ferramenta não se torna obsoleta, antes sim propicia a aplicação de conteúdos específicos de uma maneira colaborativa, corroborando para o desenvolvimento da autonomia do aluno frente aos objetivos propostos no ensino da Matemática.

Por meio da visualização dos gráficos, todo o ensino de funções foi feito de maneira interativa e relevante em sua essência. Os sujeitos participantes das atividades conseguiam de maneira prática e eficaz corresponder ao objetivo de cada atividade adquirindo dessa forma mais confiança no seu saber matemático.

Percebemos também, que durante a aplicação da oficina, os encontros foram marcados pela espontaneidade dos alunos, o que foi determinante para a aplicação deste estudo. Baseados nisto, podemos inferir que a execução da oficina foi de maneira leve, espontânea e divertida, proporcionando aos participantes um ambiente favorável para a aprendizagem.

Classificamos a experiência como positiva, tanto para os participantes quanto para a professora pesquisadora, que além de fazer parte do quadro docente da escola que recebeu a oficina, conjuntamente com seus colegas de disciplina, passará a adotar o *Software* GeoG de uma maneira mais regular no ensino da Matemática, pois o trabalho educacional escolar so fará sentido se junto ao uso das tecnologias, estiverem propostas educacionais.

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, B. **Matemática aula por aula.** Volume único. Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2000.

BAUMGART**,** J.K. **Tópicos de História da Matemática.**São Paulo: Atual, 1992.

________. **História da Álgebra.** Tradução: Hygino h. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

________ **Tópicode história da matemática para uso em sala de aula**. São Paulo. ed: Atual, 1992.

BOYER, C.B. **História da matemática.** 2. Ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora BlücherLtda, 1996.

BORTOLOTTI. **O Computador e a Disciplina da Matemática**. (Programa de Desenvolvimento Educacional da Secretaria Estadual de Educação) – Universidade Estadual de Londrina. 2008.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

________ Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria da Educação Básica. Brasília: MEC, 2006.

________ Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília: Ministério da Educação, 1999.

________ Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais: matemática.**Brasília : MEC/SEF, 1997.

________ Constituição Federal (1988).**Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, D.F: Senado federal: Centro Gráfico, 1988.

________ **Emenda constitucional nº 59 de 11 de novembro de 2009**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/emendas/emc/emc59.htm>. Acesso em Junho de 2016.

________ **LDB**. Lei **9394/96 –** Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em < www.planalto.gov.br >. Acesso em: 25 Jun. 2016.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. São Paulo: Cortez, 1995.

COXFORD, A.F. & SHULTE, A.P. **As Idéias da Álgebra.** São Paulo: Atual, 1995.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. 5ed. São Paulo: Summus, 1986.

D'AMBROSIO, U. **Matemática e sociedade ou sociedade e matemática? A difícil questão da primazia.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., Recife, 2004. Anais Recife: UFPE, 2004. Conferência de Abertura.

DEMO, P. **Educar pela Pesquisa.** Campinas, São Paulo: Autores Associados, 1998.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria da Educação. **Educação para crescer. Melhoria da Qualidade de Ensino.** Porto Alegre: Secretaria da Educação, 1993.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.**3 ed. Campinas, São Paulo: Editora Unicamp, 2002.

FAINGUELERNT, E.K. & NUNES, K.R.A. **Matemática:** Práticas Pedagógicas para o ensino médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 7 ed. São Paulo: Paz e Terra,1998.

GIARDINETTO, J.R.B **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana.** Coleção Polêmicas do nosso tempo.Campinas, S.P.: Autores Associados, 1999.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 2006.
GIOVANNI, J.R. **Matemática Fundamental: uma nova abordagem.** Volume único.Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2002.

HOHENWARTER, M. **GeoGebra-Ajuda.** Disponível em: <https://app.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf>. Acesso em junho de 2016.

IEZZI, G. et AL. **Conecte:** matemática ciência e aplicações, volume 1.1ed. São Paulo: Saraiva, 2011.

IEZZI, G.; DOLCE, O. & MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar, 2**. 9 ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, G. & MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar, 1**. 8 ed. São Paulo: Atual, 2004.

INEP – **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos> Acessado em junho de 2016.

LIMA, E.L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIGA DA MATEMÁTICA. **Evolução Histórica da Álgebra.** Disponível em: <http://ligadamatematica.blogspot.com.br/2013/11/evolucao-historica-da-algebra.html>. Acessado em abril de 2016.

MARCONI, M.A. & LAKATOS, E,M. **Técnicas de pesquisa.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

MINAYO, M.C.S. Et al. **Pesquisa Social:** teoria, método e criatividade.9 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2001.

MOL, R.S. **Introdução à história da matemática** / Rogério S. Mol. – Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação matemática.** 2.ed.Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico. Campinas, S.P.: Papirus, 1997.

OLIVEIRA, B.A. **A Socialização do Saber Escolar.** Coleção Polêmicas do nosso tempo. São Paulo: Autores Associados, 1985.

PAPERT, S**. Logo: Computadores e Educação**. Brasiliense: Brasília, 1998.

PROJETO MEDICINA. Material de estudo de Matemática. Disponível em: <https://projetomedicina.com.br/materias/matematica/> Acessado em junho de 2016.

RANGEL, A.C.S. **Educação Matemática e a construção do número pela criança:** uma experiência em diferentes contextos sócio-econômicos. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

ROSA, C.A.P. **História da ciência:** da antiguidade ao renascimento científico. 2. ed. Brasília: FUNAG, 2012.

SAMPIERI, R.H.; COLLADO, C.F. & LUCIO, P.B. **Metodologia de pesquisa.** 3. ed. São Paulo: McGrawHill. 2006.

SMOLE, K.S. & DINIZ, M.I. **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender.Porto Alegre: Artmed editora, 2001.

TEIXEIRA, E. **As três metodologias**: acadêmica, da ciência e da pesquisa. Petrópolis/RJ: Vozes, 2007

UFRGS**. Bhaskara descobriu a fórmula de Bhaskara?** Disponível em <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/bhaka.html>Acessado em maio de 2016.

VAILATI, J.S & PACHECO, E.R. **Usando história da matemática no ensino da álgebra**. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/702-4.pdf> Acessado em junho de 2016.

ANEXOS

Anexo A– Questionário Sondagem

PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTCA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

QUESTIONÁRIO SONDAGEM

1- Sexo:
( ) feminino ( ) masculino

2- Faixa etária:
( ) 16 a 18 anos ( ) mais de 18 anos

3- Gosta de estudar matemática?
( ) Sim ( ) Não

4- Normalmente quanto tempo você estuda matemática fora da sala de aula?
( ) Nunca ( ) todos os dias ( ) depende do conteúdo ministrado
( ) só quando tem prova ( ) uma vez por semana ( ) só em sala de aula

5- Você sabe qual é a diferença entre equação e função?
( )sim
( )não

6- Identifique função (F) e equação (E):
( ) igualdade entre duas expressões matemáticas que se verifica para determinados valores das variáveis.
( ) relação entre dois ou mais conjuntos, estabelecida por uma lei de formação.

7- Assinale quais são os tipos de representações de uma função:
( ) conjuntos ( ) tabela ( ) gráfico ( ) flechas ( ) diagrama

8- Dada a situação problema a seguir:
O preço de venda de um livro é de R$25,00 a unidade. Sabendo que o custo de cada livro corresponde ao valor de R$4,00 mais R$6,00 por unidade, escreva as seguintes funções:

a) Custo	b) receita	c) lucro

9- Na situação a seguir, qual é a função relacionada?

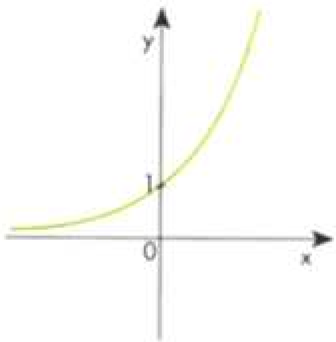
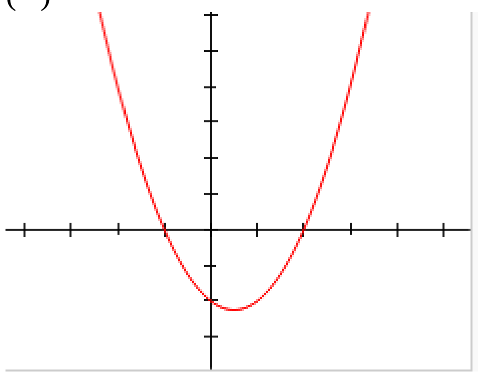
(UFMG) Um experimento da área de Agronomia mostra que a temperatura mínin superfície do solo t(x), em °C é determinada em função do resíduo x de planta e biomassa na superfície, em g/m², conforme registrado na tabela seguinte.

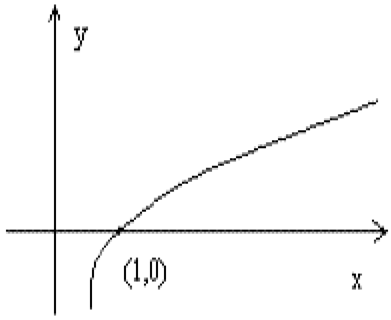
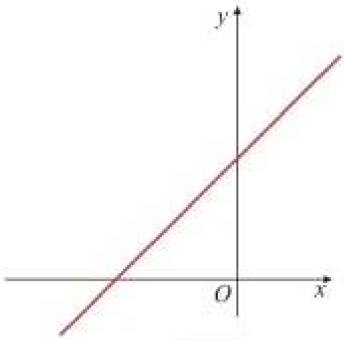
x(g/m²)	10	20	30	40	50	60	70
t(x) (°C)	7,24	7,30	7,36	7,42	7,48	7,54	7,60

Analisando os dados acima, é correto concluir que eles satisfazem a função:

a) y = 0,006x + 7,18.
b) y = 0,06x + 7,18.
c) y = 10x + 0,06.
d) y = 10x + 7,14.
e) y = 10x

10- Relacione as colunas:

<table>
<tr><td>Função</td><td>Representação geométrica</td></tr>
<tr><td>1- Função afim</td><td>( )
</td></tr>
<tr><td>2- Função quadrática</td><td>( )
</td></tr>
</table>

3- Função exponencial	( ) 
4- Função logarítmica	( ) 

11 - Das funções abaixo, identifique função afim (A), função quadrática(Q), função exponencial (E) e função logarítmica(L)

( ) g(x) = -4x + 1 ( ) h(x) = 3^{x+4} ( ) f(x)= $\log_5(x-2)$ ( ) f(x) = $3x^2 + 4x - 2$

Anexo B - Atividades Software GeoGebra

PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTCA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

ATIVIDADES SOFTWARE GEOGEBRA

ATIVIDADE 1

1.1. Trace, no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico das funções abaixo:
a) $f(x) = x + 2$
b) $f(x) = x - 2$
c) $f(x) = x$
d) $f(x) = -x$
e) $f(x) = -x + 2$
f) $f(x) = -x - 2$
A partir dos gráficos, responda:

a)O que significa geometricamente o coeficiente “a” nas funções dadas acima?

____

b) O que significa geometricamente o coeficiente “b” nas funções dadas acima?

____

c) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens a, b e c?

____

d) Observe a lei de formação das funções dadas nos itens a, b e c , o que elas têm em comum?

____

e) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens d, e e f?

____

f) Observe a lei de formação das funções dadas nos itens d, e e f , o que elas têm em comum?

____

Dessa forma podemos concluir que:
a) a representação gráfica da função afim $f(x) = ax + b$ é sempre uma: _____________
b) A função afim é crescente quando:________

c) A função afim é decrescente quando:_________
d) O coeficiente “a” determina:______________
e) O coeficiente “b” determina:______________

1.2. Verifique o que acontece se a função é da forma:
a) $f(x) = 4$
b) $f(x) = -3$
O que você observou?

____

1.3. Trace os gráficos das funções $f(x) = x + 3$ e $g(x) = -x + 1$ no mesmo sistema cartesiano e a partir dos gráficos determine:
a) As raízes das funções.

____

b) O intervalo onde cada função é positiva e o intervalo onde cada função é negativa.

____

c) O ponto de interseção das funções.

____

ATIVIDADE 2

2.1. Trace, no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico das funções abaixo
a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = 3x^2$
c) $f(x) = 5x^2$
d) $f(x) = -x^2$
e) $f(x) = -3x^2$
c) $f(x) = -5x^2$

A partir dos gráficos, responda:
a) O que os itens a, b, c tem em comum?_______________________________________
b) O que os itens d, e, f tem em comum? _______________________________________
c) O que os itens a e d tem em comum? _______________________________________
d) O que os itens b e e tem em comum? _______________________________________
e) O que os itens c e f tem em comum? _______________________________________

2.2. Trace, no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico das funções abaixo
a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
b) $f(x) = x^2 + 4x + 3$
c) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

d) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$

A partir dos gráficos, responda:

a) Qual é o ponto de interseção com o eixo y?________________________________

b) Em cada caso, defina se é o "braço" crescente ou o "braço" decrescente que passa pelo eixo y:

a)______________________________b)____________________________

c)______________________________d)____________________________

c) Observe a lei de formação da função nos itens a e d e identifique o que elas tem em comum.____

d) Observe a lei de formação da função nos itens b e c e identifique o que elas tem em comum.____

2.3 Trace o gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Analisando visualmente o gráfico da função dada, determine:

f) O domínio da função f__________________

g) A imagem da função f___________________

h) Raízes ou zeros da função f______________________

i) Vértice da parábola________________________

j) Intervalos onde a função é positiva e intervalos onde a função é negativa_____________________

Dessa forma podemos concluir que:

g) A concavidade da parábola depende do valor de:___________

h) O ponto de interseção com o eixo y é definido pelo valor de :_________

i) Quem define qual dos braços da "parábola" passa pelo eixo y é o:______

j) Se a parábola tem concavidade voltada para cima podemos afirmar que __________

k) Se a parábola tem concavidade voltada para baixo podemos afirmar que ________

l) As interseções da parábola com eixo *x* são as ___________ ou __________ da função.

ATIVIDADE 3

3.1. Trace, no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = (3{,}5)^x$

c) $f(x) = 4^x$

d) $f(x) = 0{,}1^x$

e) $f(x) = (0{,}5)^x$

f) $f(x) = (0{,}8)^x$

A partir dos gráficos, responda:

a) Qual é a característica comum a todos os gráficos?_________________________

____

b) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens a, b e c?

____

c) Observe a lei de formação das funções constantes nos itens a, b e c , o que elas têm em comum, fora o expoente?

____

d) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens d, e e f?

____

e) Observe a lei de formação das funções constantes nos itens d, e e f , o que elas têm em comum, fora o expoente?

____

Dessa forma podemos concluir que:

a) o gráfico da função exponencial da forma $f(x) = a^x$ sempre passa pelo ponto: ___________________________

b) A função exponencial da forma $f(x) = a^x$ é crescente quando:__________________

c) A função exponencial da forma $f(x) = a^x$ é decrescente quando:________________

3.2. Verifique o que acontece quando somamos um número ao x:

a) $f(x) = 4^{x+1}$

b) $f(x) = 4^{x+2}$

c) $f(x) = 4^{x+3}$

O que você observou?

____

3.3. Verifique o que acontece quando subtraímos um número de x:

a) $f(x) = 4^{x-1}$

b) $f(x) = 4^{x-2}$

c) $f(x) = 4^{x-3}$

O que você observou?

____

3.4. Verifique o que acontece quando multiplicamos um número por x

a) $f(x) = 4^{2x}$

b) $f(x) = 4^{3x}$

c) $f(x) = 4^{4x}$

O que você observou?

____

3.5. Verifique o que acontece quando somamos ou subtraímos um número a função

a) $f(x) = 2 + 4^x$

b) $f(x) = -2 + 4^x$

O que você observou?

____

ATIVIDADE 4

4.1. Trace, no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $f(x) = \log x$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

A partir dos gráficos, responda:

a) Qual é a característica comum a todos os gráficos?

____

b) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens a e c?

____

c) Observe a lei de formação das funções nos itens a e c, o que elas têm em comum?

____

d) Qual é a característica comum aos gráficos das funções dos itens b e d?

____

e)Observe a lei de formação das funções nos itens b e d, o que elas têm em comum?

____

Dessa forma podemos concluir que:

a) o gráfico da função logarítmica da forma $f(x) = \log_b x$ sempre passa pelo ponto: ________________________________

b) A função logarítmica da forma $f(x) = \log_b x$ é crescente quando:________________

c) A função logarítmica da forma $f(x) = \log_b x$ é decrescente quando:______________

4.2. Verifique o que acontece quando somamos um número a função:

a) $f(x) = 2 + \log x$

b) $f(x) = 5 + \log x$

O que você observou?____

4.3. Verifique o que acontece quando subtraímos um número a função:

a) $f(x) = -2 + \log x$

b) $f(x) = -5 + \log x$

O que você observou?____

4.4. Verifique o que acontece quando multiplicamos um número a função:

a) $f(x) = 2.\log x$

b) $f(x) = 5.\log x$
O que você observou?____

Anexo C – Avaliação da Oficina

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTCA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

AVALIAÇÃO DA OFICINA

1- Avalie o material de revisão recebido durante os primeiros encontros:

( ) ruim ( ) regular ( ) bom ( ) ótimo ( ) excelente

2- Qual foi a importância da revisão dos conteúdos realizada nesses encontro?
( ) indiferente
( ) importante
( ) muito importante

Explique:____

3- Como você classifica sua participação:
( ) ruim ( ) regular ( ) bom ( ) ótimo ( ) excelente

Explique:____

4- Quais eram suas expectativas com relação a oficina:

____

____

5) Essas expectativas foram atendidas? Explique

____

____

6) Você já havia trabalhado com um software matemático?
( ) sim ( ) não

7) Como você avalia a utilização dessa ferramenta no processo de ensino aprendizagem?
( ) ruim ( ) regular ( ) bom ( ) ótimo ( ) excelente

Explique:____

8) O seu entendimento foi melhor pelo método tradicional ou a partir do uso do software?
____

9) Escreva o que você achar importante(críticas, sugestões, elogios,...):
____

Anexo D – Revisão de Função, Função Afim, Função Quadrática, Função Exponencial e Função Logarítmica

Definição de função

Uma função f de um conjunto A em um conjunto B é uma correspondência que associa a cada elemento x de A um elemento y de B.

O elemento y de B é o valor de f em x e se denota por $f(x)$.

O conjunto A é denominado domínio de f e denotado por $D(f)$, assim $A = D(f)$.

O conjunto B é denominado contradomínio de f e o conjunto dos números y de B tais que $y = f(x)$ para algum x de A é denominado imagem de f e denotado por $\mathrm{Im}(f)$.

O gráfico de uma função $f : A \to B$ é um subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado por todos os pares ordenados (x, y), em que x é um ponto qualquer de A e $y = f(x)$. Assim:

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in A\}$$

Lembremos ainda que, uma função $f: A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, chama-se:

- *Crescente*, quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- *Decrescente*, quando $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- *Constante*, quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Função Afim

Definição: Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de *função afim* quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$ em que $a \neq 0$ e b são números reais dados, ou seja:

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

Exemplos:

a) $y = 3x + 2$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = x - 3$

d) $y = 4x$

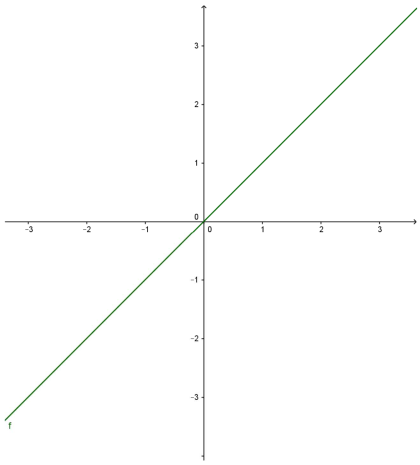
O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$ é uma reta não vertical.

Exemplo:

São funções afins:

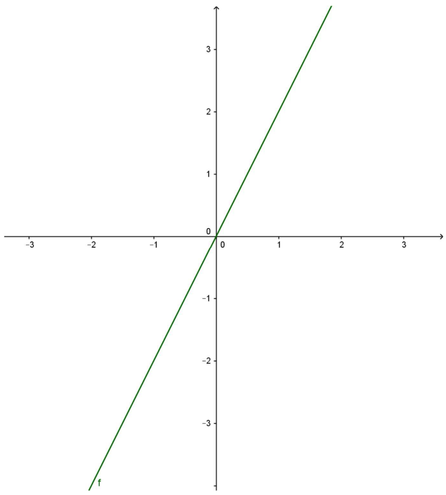
a) a função identidade $f(x) = x$;

$f(x) = x$



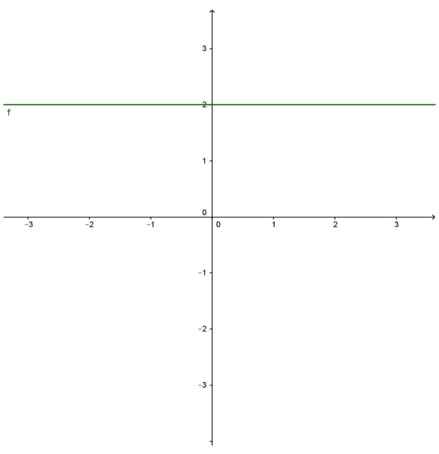
b) as funções lineares $f(x) = ax$;

$f(x) = 2x$



c) as funções constantes $f(x) = b$ (incluindo $b = 0$).

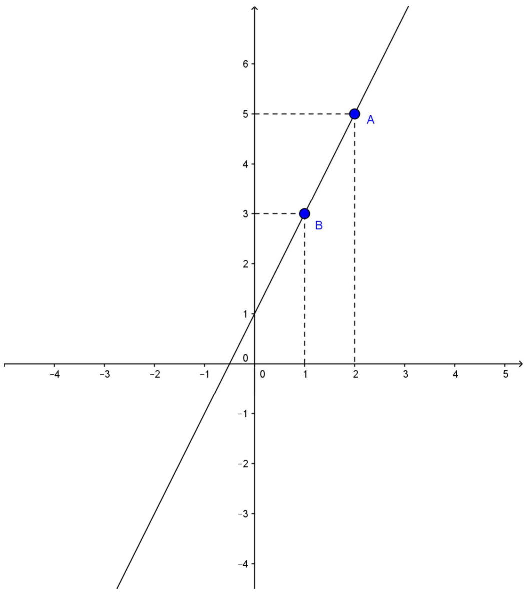
$f(x) = 2$



Com o propósito de esboçarmos alguns gráficos de funções afins, lembremos como se determina a equação da reta que passa por dois pontos.

Sejam $x_1 \neq x_2$. Para encontrar a equação da reta $y = ax + b$ que passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2), basta resolver o sistema $\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$

Exemplo: Determinar a equação da reta que passa pelos pontos $A = (2, 5)$ e $B = (1, 3)$.



Resolução:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = a.2 + b \\ 3 = a.1 + b \end{cases}$$

Subtraindo a linha de cima pela de baixo, obteremos: $a = 2$

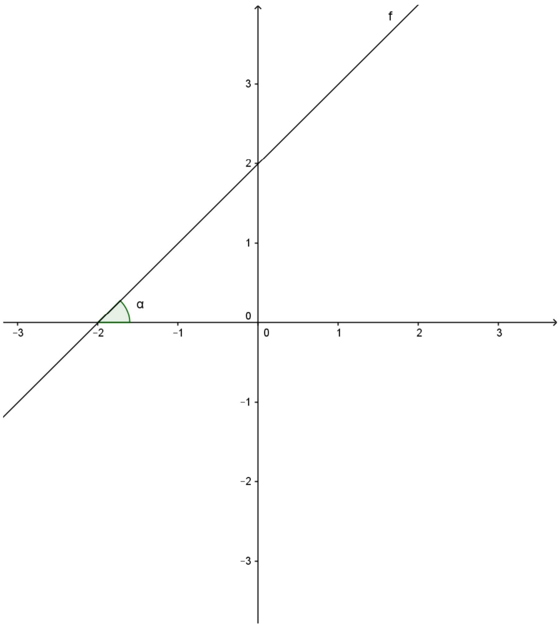
Substituindo $a = 2$ em uma das equações do sistema, obteremos: $3 = 2.1 + b \Rightarrow b = 1$

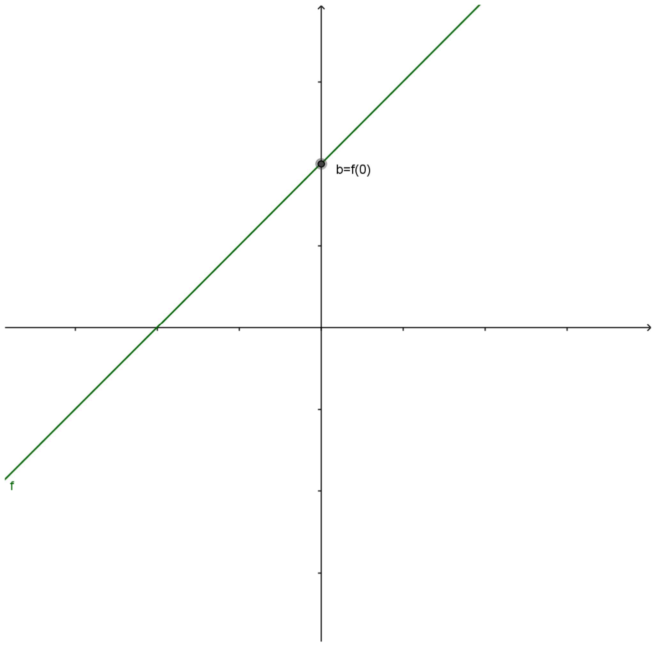
Desta forma a função afim que passa pelos pontos $A = (2, 5)$ e $B = (1, 3)$ é: $y = 2x + 1$

Coeficientes da função Afim

Se $y = ax + b$, o coeficiente a é denominado coeficiente angular ou declividade da reta representada no plano cartesiano. O coeficiente $b = f(0)$ é denominado de *coeficiente linear* e é a ordenada do ponto em que o gráfico da função intersecta o $eixo\ y$.

O nome coeficiente angular vem do fato de que $a = tg\alpha$ em que α é o ângulo que a reta faz com o $eixo\, x$.





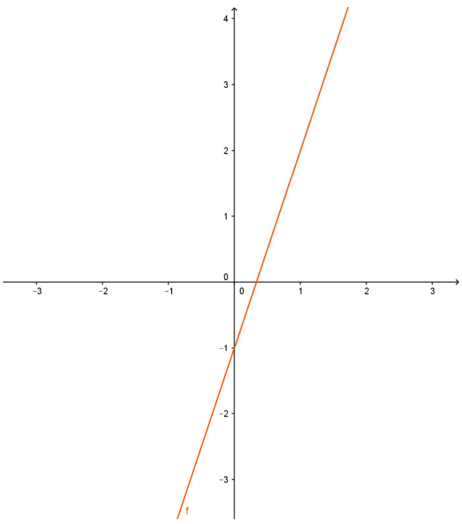
Crescimento e decrescimento da função afim

A função afim $f(x) = ax + b$ é *crescente* se, e somente se, o coeficiente angular a for positivo.

A função afim $f(x) = ax + b$ é *decrescente* se, e somente se, o coeficiente angular a for positivo.

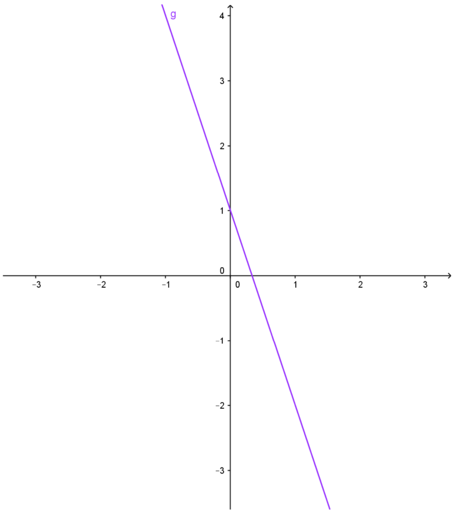
Observação: se o coeficiente angular a for nulo, então a função é constante.

Exemplos:

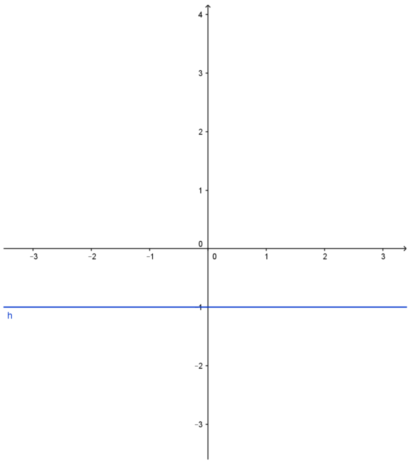


f(x) = 3x-1

$g(x) = -3x+1$



$h(x) = -1$



Observação:

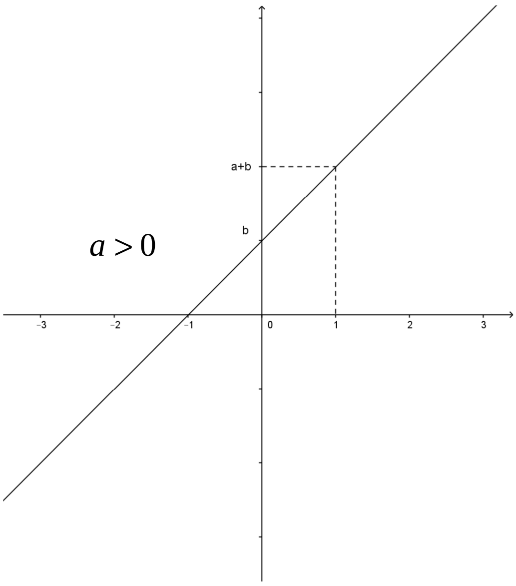
Sabendo que o gráfico de $y = ax + b$ é uma reta, para determinar se ela é crescente ou decrescente, basta analisar seu comportamento em dois pontos.

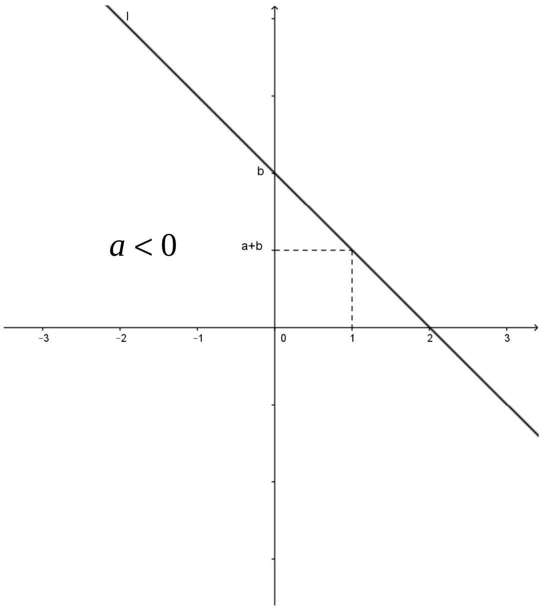
Como:

$$f(0) = b \text{ e } f(1) = a + b$$

Se $a > 0$, $f(0) = b < a + b = f(1)$ e a função cresce.

Se $a < 0$, $f(0) = b > a + b = f(1)$ e a função decresce.





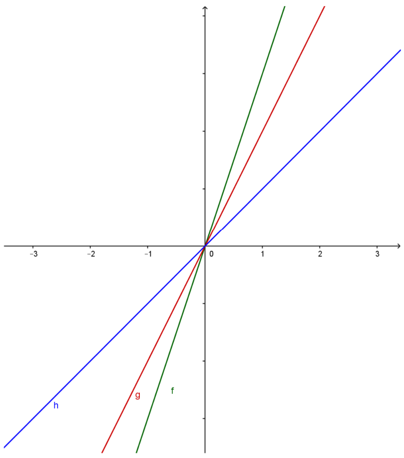
Observação:

Quanto maior $|a|$, mais a reta aproxima-se da vertical.

f(x) = 3x

g(x) = 2x

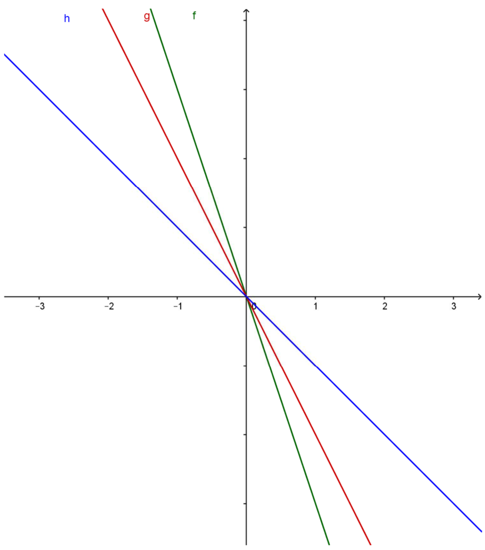
h(x) = x



h(x) =- x

g(x) = -2x

f(x) = -3x

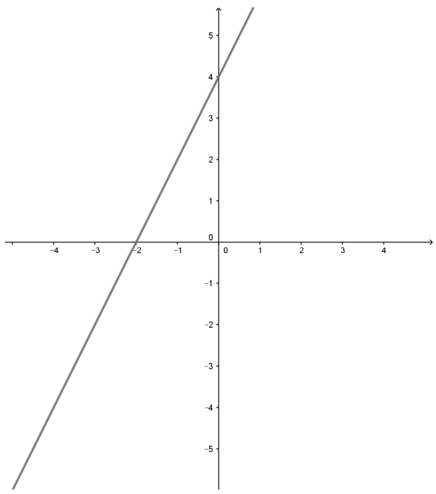


Exemplos:

1- Esboce os gráficos das funções abaixo, indicando a intersecção com o $eixo\ y$ e com o $eixo\ x$.

a) $f(x) = 2x + 4$

Resolução:



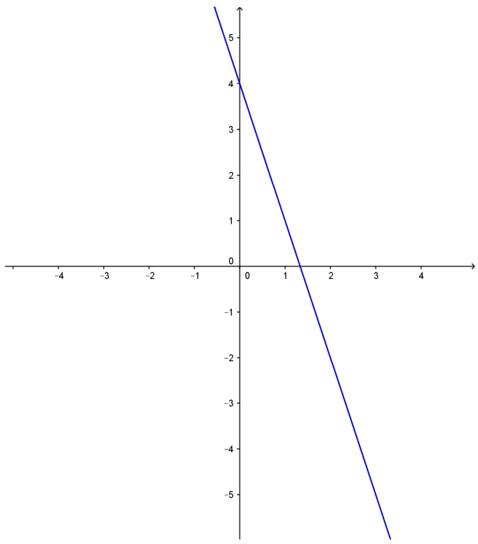
Interseção com o $eixo\ y$:
f(0) = 4

Interseção com o $eixo\ x$:

$$2x + 4 = 0$$
$$2x = -4$$
$$x = -2$$

b) $f(x) = -3x + 6$

Resolução:



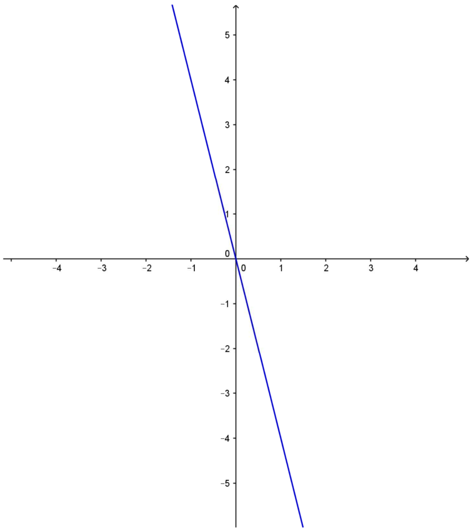
Interseção com o $eixo\ y$:
f(0) = 6

Interseção com o $eixo\ x$:

$$-3x + 6 = 0$$
$$-3x = -6$$
$$x = 2$$

c) $f(x) = -4x$

Resolução:



Interseção com o *eixo* y:

$$f(0) = 0$$

Interseção com o *eixo* x:

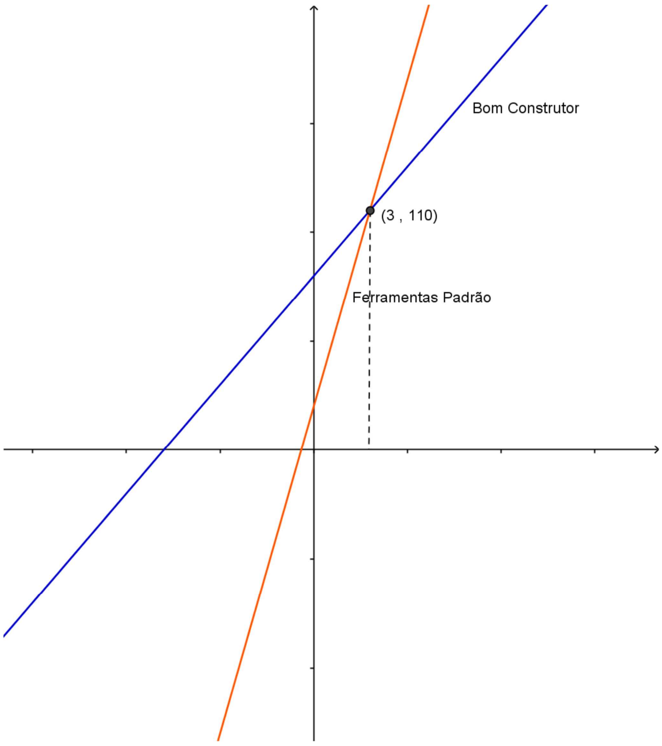
$$-4x = 0$$

$$x = 0$$

Observação:

Os pontos de interseção do gráfico de uma função qualquer com o *eixo* x são denominados raízes ou zeros da função.

2 - A Ferragem Bom Construtor aluga uma máquina de corte por R$80,00 de entrada e R$10,00 de diária. Seu concorrente, Ferramentas Padrão, oferece o mesmo modelo por R$20,00 para taxas de administração e R$30,00 por dia. Faça uma análise de custos para o aluguel dessa máquina. (Fonte: Projeto Medicina)



Resolução:

	Bom Construtor	Ferramentas Padrão
Custo	$80+10x$	$20+30x$

$80+10x=20+30x$

$80-20=30x-10x$

$60=20x$

$3=x$

Interpretação:

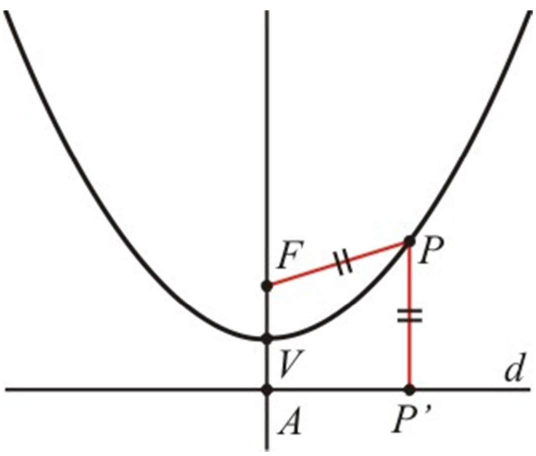
Para aluguel de 1 ou 2 dias, a Ferramentas Padrão é mais econômica. Para 3 dias, é indiferente. A partir de 3 dias, fica mais em conta alugar no Bom Construtor.

Função Quadrática

Definição: Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de *função quadrática* quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2+bx+c) \in \mathbb{R}$, em que a, b e c são números reais dados e $a \neq 0$, ou seja:

$$f(x)=ax^2+bx+c \ \ (a \neq 0).$$

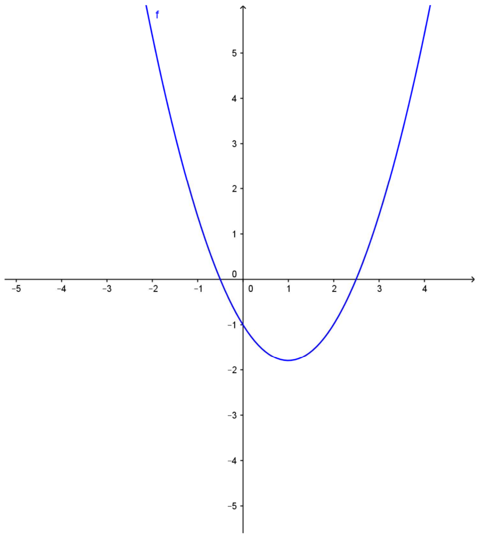
Definição: Uma parábola é o conjunto de todos os pontos P do plano que são equidistantes de uma reta d (diretriz) e de um ponto F (foco) que não está na reta.

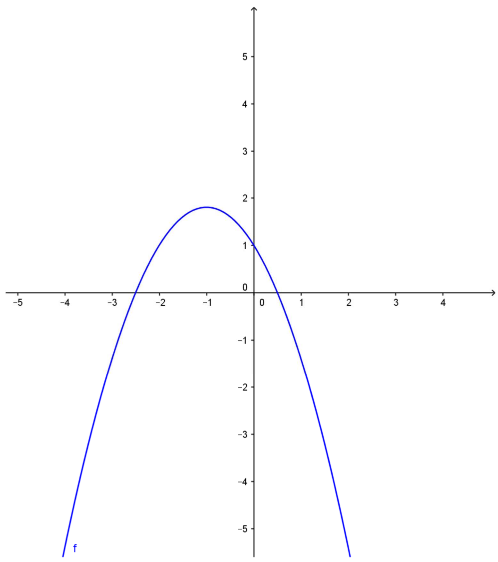


Observação:

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com diretriz paralela ao $eixo\ x$.

Exemplo:





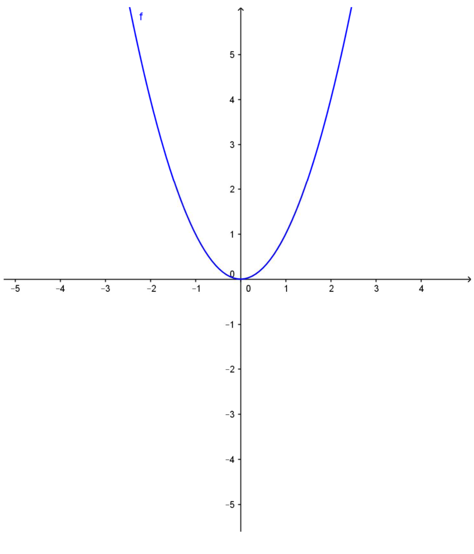
Estudo dos coeficientes a, b e c.

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade para cima.

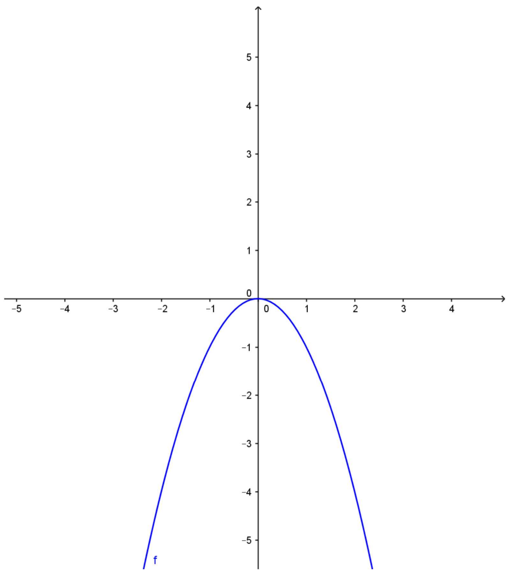
Se $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo.

Exemplos:

a) $f(x) = x^2$



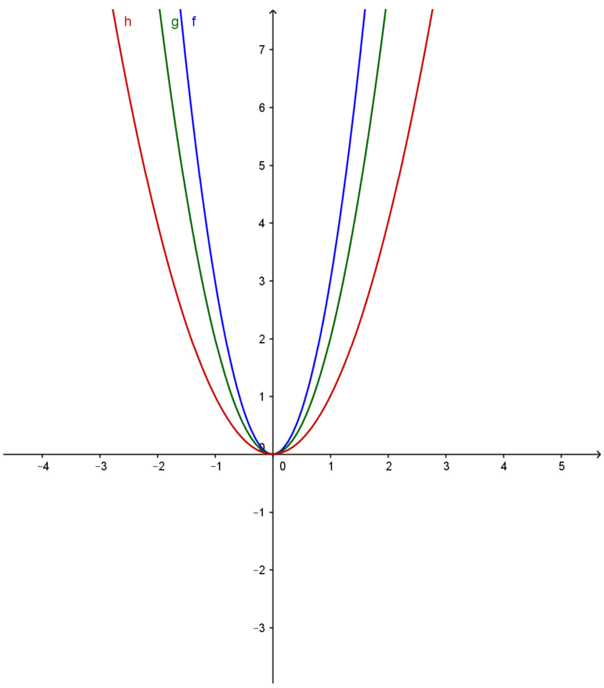
b) $f(x) = -x^2$



Observação:

Nos exemplos a seguir, verificamos que as parábolas são iguais quanto a concavidade, todavia, quanto maior $|a|$, mais fechada ela parece ser.

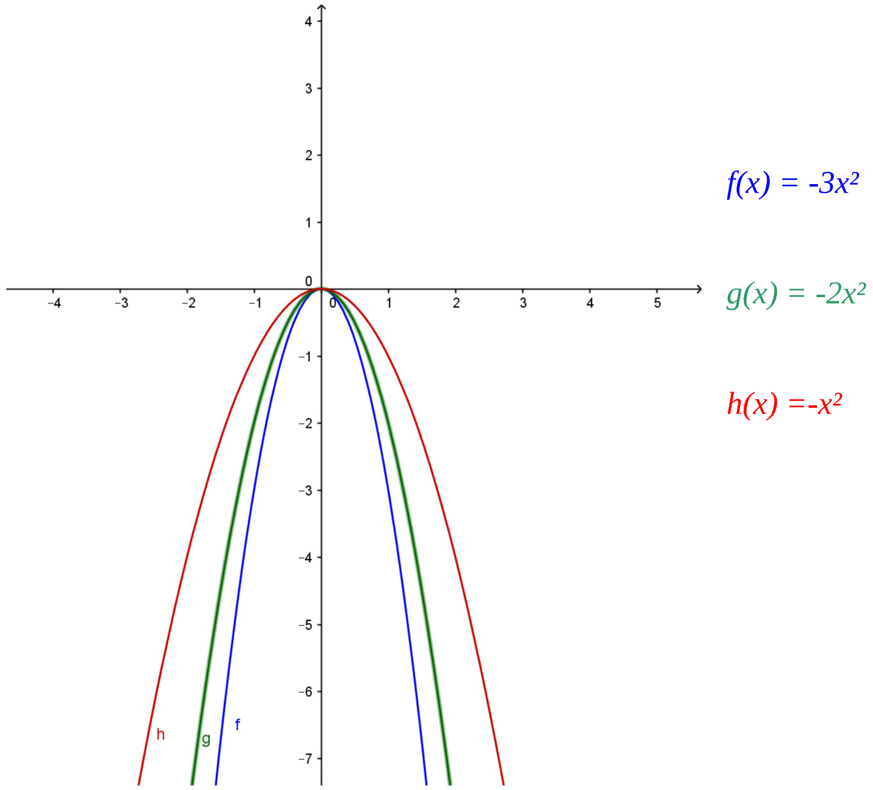
Exemplos:



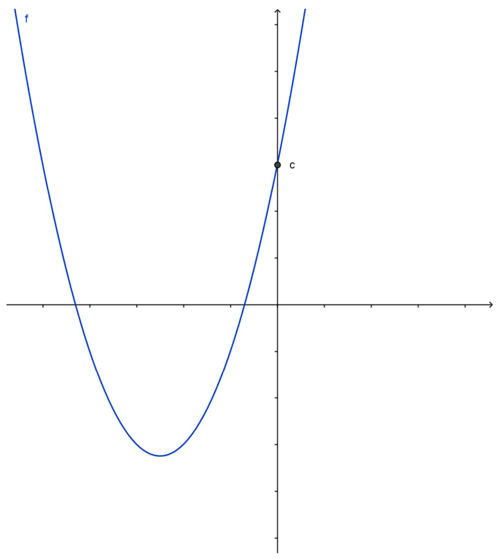
$f(x) = 3x^2$

$g(x) = 2x^2$

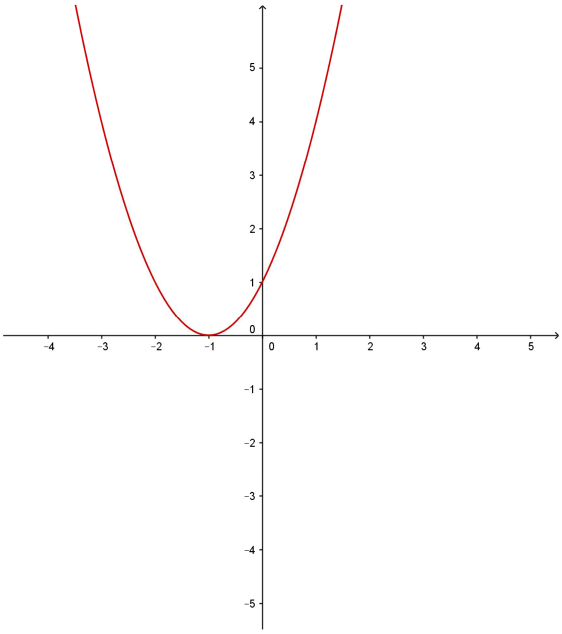
$h(x) = x^2$

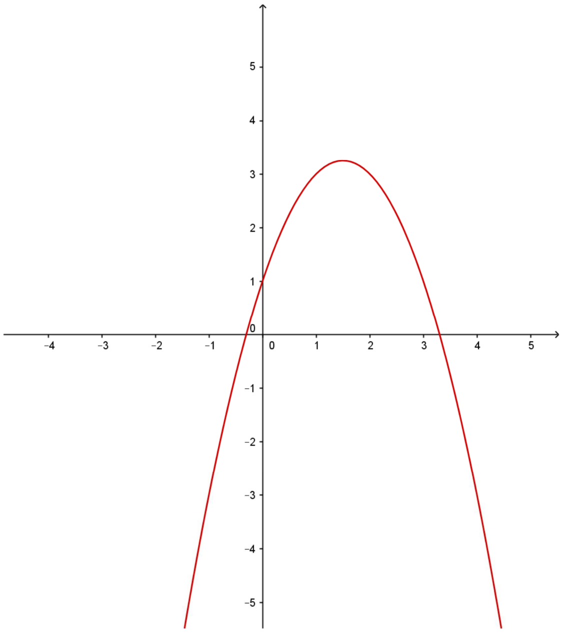


c = f(0) é a ordenada do ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo dos y.

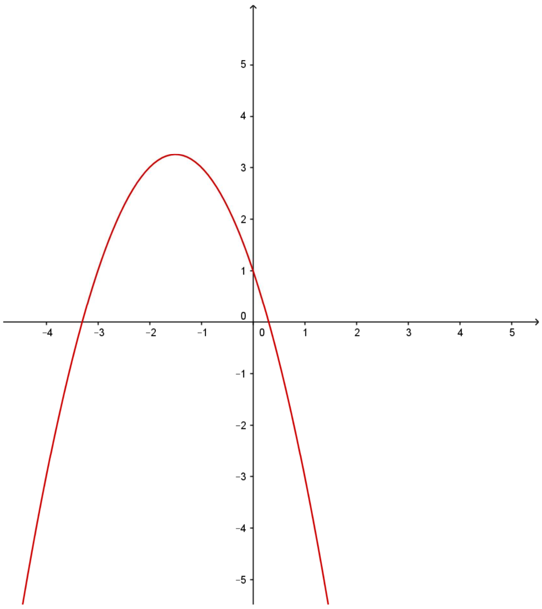


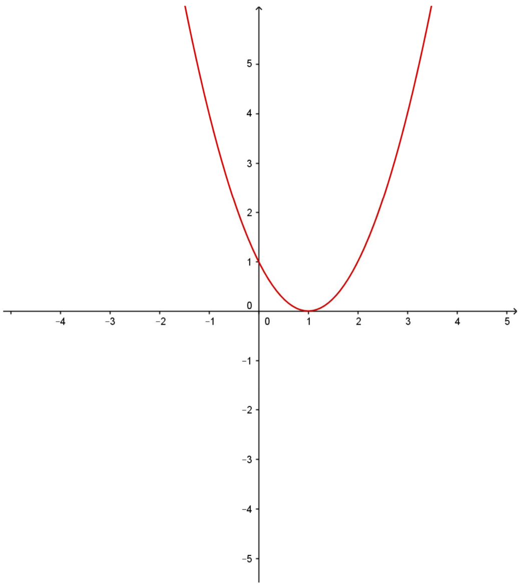
Se b > 0, logo após intersectar o eixo dos y, a curva é crescente.



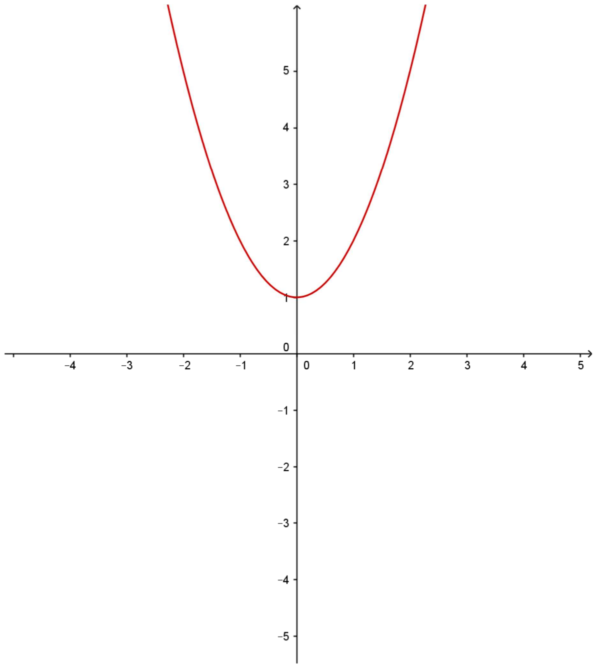


Se b > 0 logo após intersectar o eixo dos y, a curva é decrescente.





Se b = 0, a parábola é simétrica em relação ao eixo y.



Raízes da equação

Se $ax^2 + bx + c = 0$, então:

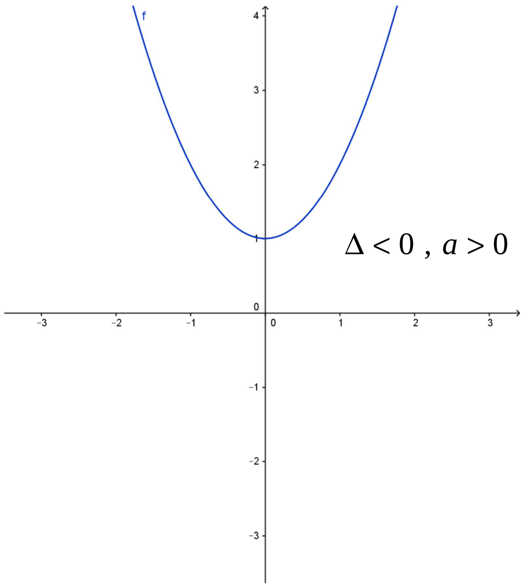
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observação:

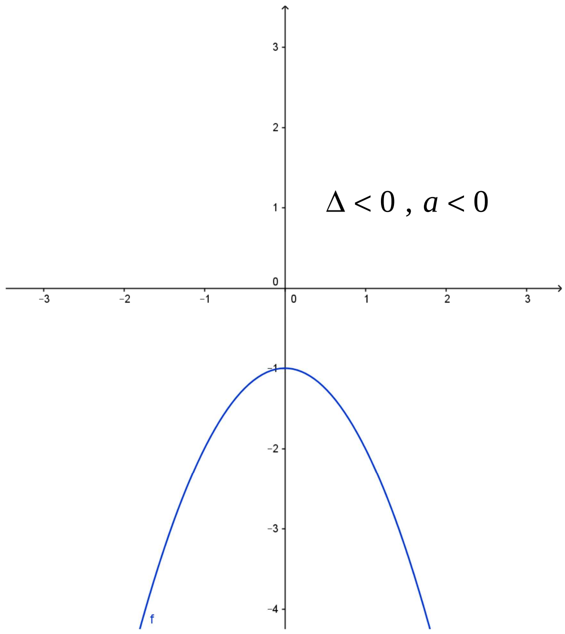
O matemático indiano Bhaskara (1114 – 1185) escreveu o livro “Bijaganita” no qual estudou o cálculo de raízes, mas não parece ter encontrado o que se chama de fórmula de Bhaskara. Aliás, apenas no Brasil a fórmula tem esse nome, é conhecida por fórmula resolutiva nos outros locais (disponível em http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/bhaka.html).

O discriminante da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é o número $\Delta = b^2 - 4ac$.

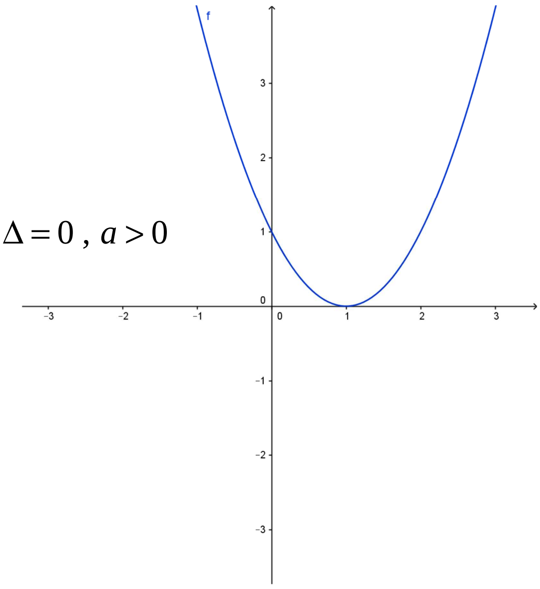
- Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas.
- Se $\Delta < 0$, a equação tem duas raízes imaginárias.
- Se $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais.



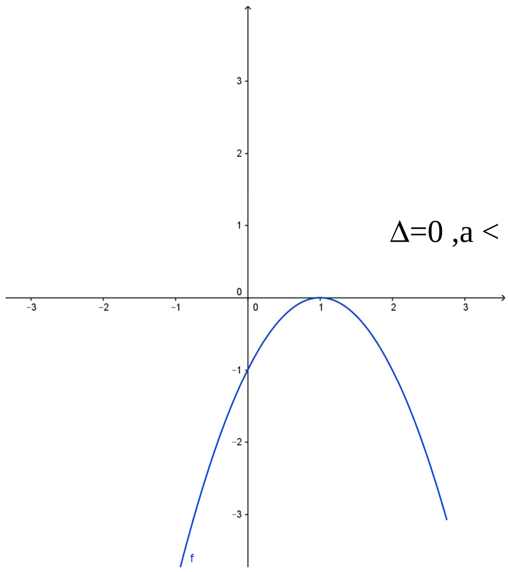
$\Delta < 0$, $a > 0$



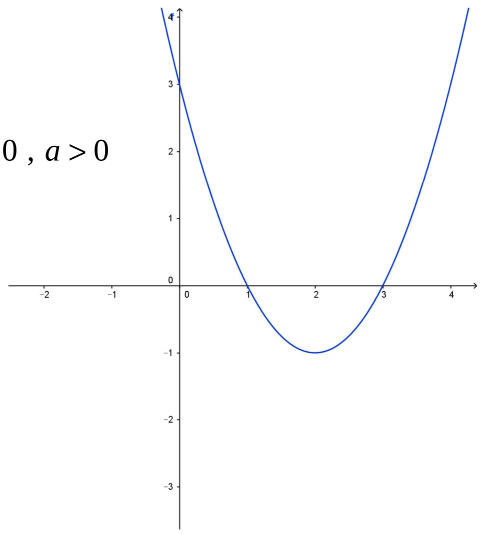
$\Delta < 0$, $a < 0$



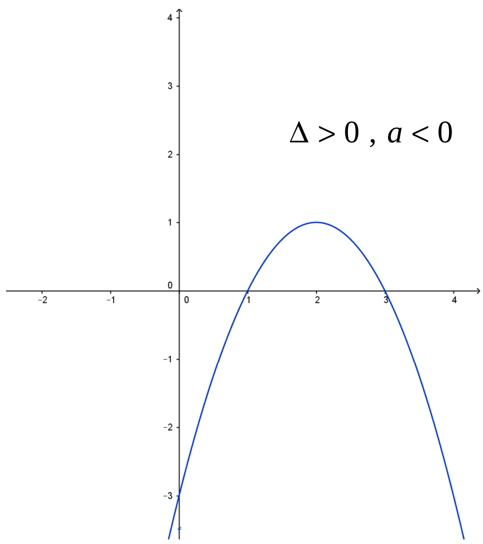
$\Delta = 0$, $a > 0$



Δ=0 ,a < 0



$\Delta > 0$, $a > 0$



$\Delta > 0$, $a < 0$

Máximo e Mínimo

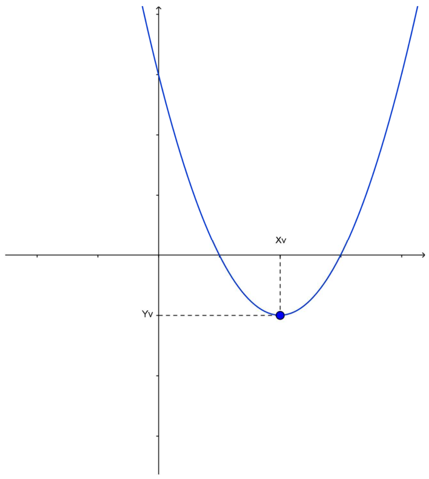
Dizemos que o número $y_{\max} \in \mathrm{Im}(f)$ é o valor máximo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_{\max} \geq y$ para qualquer $y \in \mathrm{Im}(f)$. O número $x \in D(f)$ tal que $y_{\max} = f(x)$ é chamado *ponto de máximo* da função.

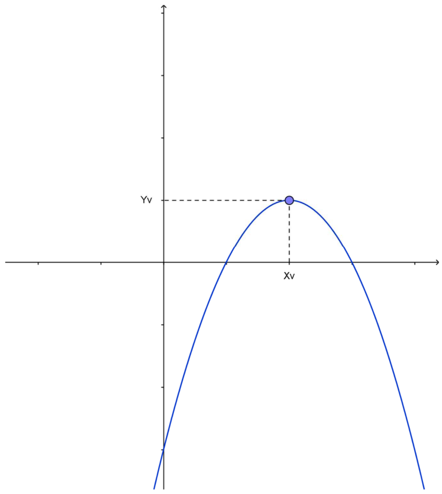
Dizemos que o número $y_{\min} \in \mathrm{Im}(f)$ é o valor mínimo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_{\min} \leq y$ para qualquer $y \in \mathrm{Im}(f)$. O número $x \in D(f)$ tal que $y_{\min} = f(x)$ é chamado *ponto de mínimo* da função.

Vértice da Parábola

O vértice da parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o ponto $V = (x_v, y_v)$ com:

$x_v = -\dfrac{b}{2a}$ $\qquad$ $y_v = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$





Observações:

- Se conhecermos as raízes da função, o x_v é a média desses valores.
- Em exercícios, pode ser mais fácil calcular $y_v = f(x_v)$ do que usar a fórmula para y_v.
- Quando $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima e $V = (x_v, y_v)$ é o *ponto de mínimo* da função.
- Quando $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima e $V = (x_v, y_v)$ é o *ponto de máximo* da função.

Exemplos:

1) Determine o vértice da parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Resolução:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.1} = 2$$

$$y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4.1.3}{4.1} = -1$$

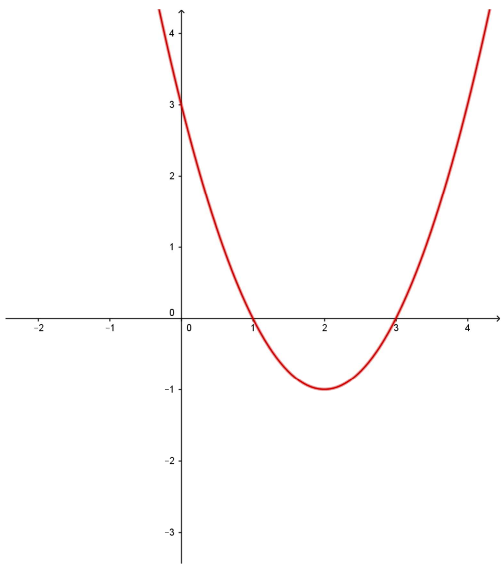
ou ainda, essa função tem raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$, logo:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$y_v = f(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = -1$$

Assim, $V = (2,-1)$

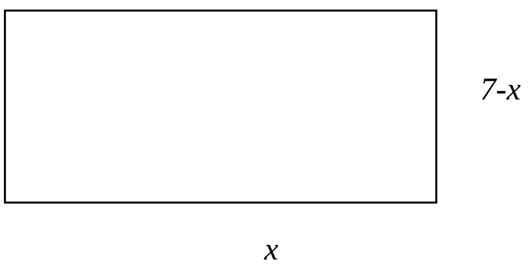
Esboço do gráfico:



2) Há pelo menos 4 mil anos, os babilônios sabiam resolver problemas assim: “Determine os lados de um retângulo de área 12 e cuja metade do perímetro é 7”.

Resolução:

Considerando x e $7 - x$ os lados do retângulo:



$A = x(7 - x) = 12$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

Logo, $x_1 = 3$ *e* $x_2 = 4$ *são os lados do retângulo.*

3) Considere todos os retângulos de perímetro 80m. Qual a área máxima que pode ser associada a um desses retângulos?

Resolução:

Queremos encontrar o máximo de $A = x.y$

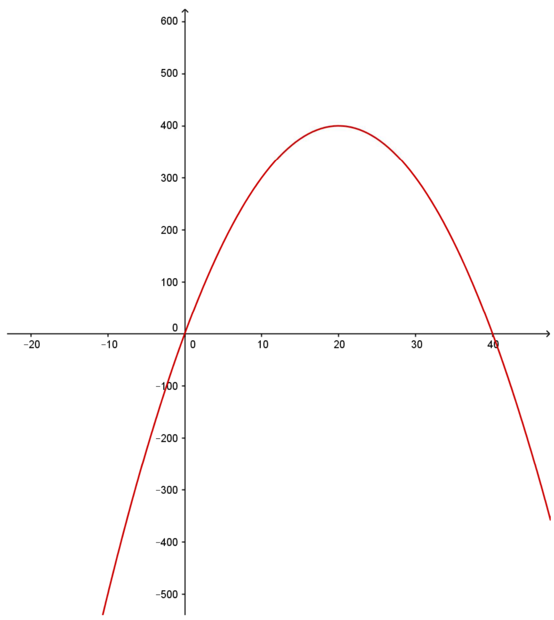
Sujeito a restrição: $2x + 2y = 80$.

Como $x + y = 40$, então $y = 40 - x$. $\rightarrow A(x) = x(40 - x)$, cujo gráfico é uma parábola de raízes $x_1 = 0$ *e* $x_2 = 40$.

A medida do lado *x* que fornece a área máxima é $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{0 + 40}{2} = 20$.

A área máxima é $y_v = A(x_v) = 20(40 - 20) = 400m^2$.

Podemos verificar esses valores no gráfico abaixo:



Função Exponencial

Primeiramente vamos rever a definição e as propriedades da potência.

Potências de expoente natural

Definição: Seja a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1, \ para \ a \neq 0 \\ a^n = a^{n-1}.a, \ \forall n, \ n \geq 1 \end{cases}$$

Dessa definição decorre que:

$$a^1 = a^0.a = 1.a = a$$
$$a^2 = a^1.a = a.a$$
$$a^3 = a^2.a^1 = (a.a).a = a.a.a$$

e, de modo geral, para p natural e $p \geq 2$, temos que a^p é um produto de p fatores iguais a a.

Observação: 0^0 é indeterminação.

Exemplos:

a) $2^1 = 2$ b) $54^0 = 1$ c) $4^4 = 256$ d) $5^3 = 125$

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ ou $n \neq 0$, então valem as seguintes propriedades:

P₁. $a^m.a^n = a^{m+n}$

P₂. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \ a \neq 0 \ e \ m \geq n$

P₃. $(a.b)^n = a^n.b^n, com \ b \neq 0 \ ou \ n \neq 0$

P₄. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \ b \neq 0$

P₅. $(a^m)^n = a^{m.n}$

Exemplos:

a) $4^2.4^3 = 4^{2+3} = 4^5$

b) $\dfrac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2$

c) $(5.6)^2 = 5^2.6^2$

d) $\left(\dfrac{9}{8}\right)^5 = \dfrac{9^5}{8^5}$

e) $(2^3)^4 = 2^{3.4} = 2^{12}$

Potência de expoente inteiro negativo

Definição: Dado um número real a, não nulo, e um número natural n, define-se a potência a^{-n} pela relação:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

isto é, a potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positiva.

Exemplos

$= \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$ b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{3^3}{2^3} = \dfrac{27}{8}$ c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} = 4^1 = 4$

Potência de expoente racional

Definição: Dados $a \in \mathbb{R}_+^* e \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} (p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{N}^*)$, define-se potência de base a e expoente $\dfrac{p}{q}$ pela relação:

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Exemplo: $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$

Potência de expoente real

Seja $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 0$ e $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$. A potência a^b é um número real que satisfaz as seguintes propriedades:

P₁. $a^b.a^c = a^{b+c}$

P₂. $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

P₃. $(a.b)^c = a^c.b^c$

P₄. $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}, \; b \neq 0$

P₅. $(a^b)^c = a^{b.c}$

Potência de base 10

A potência de base 10 é utilizada para abreviar a escrita de números que contenham n fatores 10, facilitando assim sua representação.

Exemplos

- $10^5 = 100000 \; (5\, zeros)$
- $10^7 = 10000000 \; (7\, zeros)$
- $10^3 = 1000 \; (3\, zeros)$

Nesse tipo de potência, quando o expoente for positivo, ele indica a quantidade de zeros que deverão ser acrescentados após o algarismo 1.

- $10^{-2} = 0{,}01 \; (2\, casas\ decimais)$
- $10^{-5} = 0{,}00001 \; (5\, casas\ decimais)$

Aqui, como o expoente é negativo, ele indica o número de casas decimais que deverão ser criadas a partir do zero e com final 1.

Função Exponencial

Definição: Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, chamamos função exponencial de base a a função f de $\Re$ em $\Re$ que associa a cada x real o número a^x.

Exemplos:

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $h(x) = 10^x$

d) $p(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

Propriedades

1ª) Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; f(0) = a^0 = 1$$

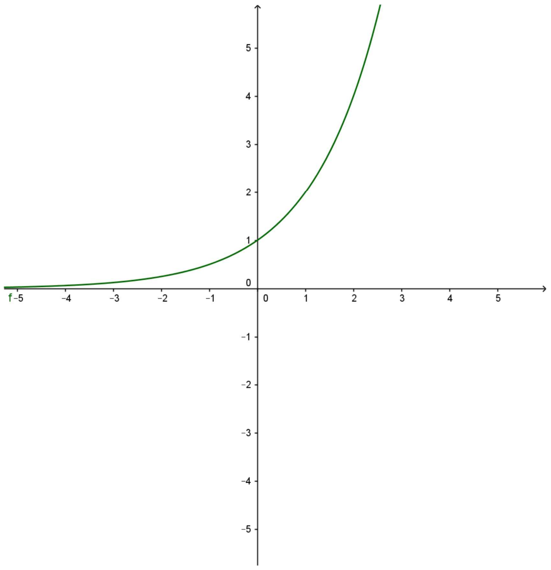
isto é, o par ordenado $(0\,,\,1)$ pertence à função para todo $a \in \mathbb{R}_+^* - \{\,1\,\}$. Isto significa que o gráfico cartesiano de toda função exponencial corta o *eixo* y no ponto de ordenada 1.

Observação: quando $a = 1$ a função é constante.

2ª) A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos:

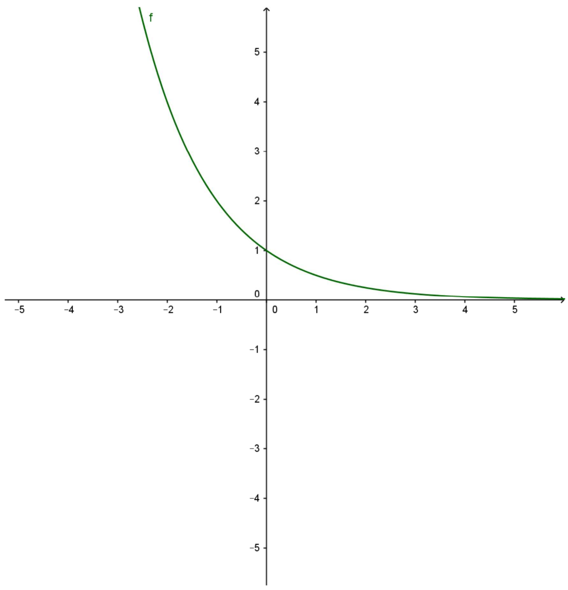
i) quando $a > 1$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ii) quando $0 < a < 1$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



$y = a^x$, $a > 1$

função crescente

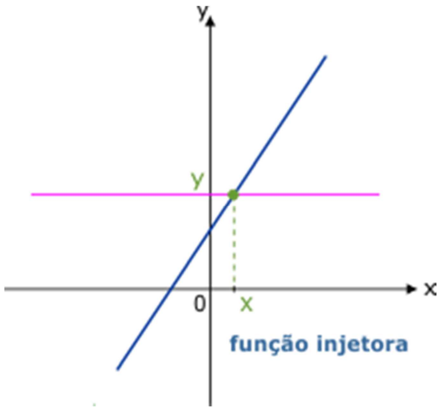


$y = a^x$, $0 < a < 1$

função decrescente

Definição: Uma função *f* é dita injetora se, para diferentes valores $x \in A$, no domínio de *f*, sempre correspondem valores diferentes de y na imagem, ou seja:

$$x_1 \neq x_2 \ em \ A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



Exemplo:

A função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$, é injetora pois, dados x_1 e x_2 tais que $x_1 \neq x_2$, vem:

$$se \ a > 1, \ temos: \ f(x_1) < f(x_2)$$
$$se \ 0 < a < 1, \ temos: \ f(x_1) > f(x_2)$$

e, portanto, nos dois casos, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

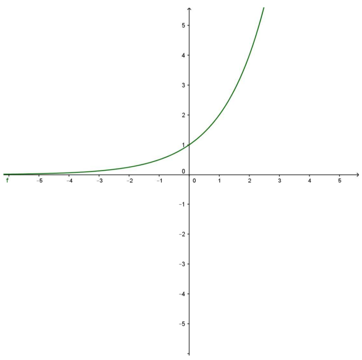
Gráfico

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = a^x$, podemos dizer:

1) a curva representativa está toda acima do $eixo \ x$, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2) corta o $eixo \ y$ no ponto de ordenada 1.
3) se $a > 1$ é o de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é o de uma função decrescente.

Exemplos:

a) $f(x) = 2^x$



b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

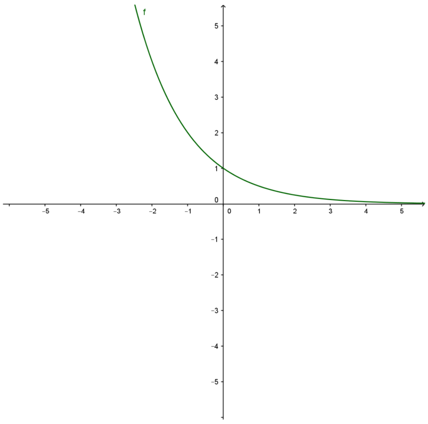
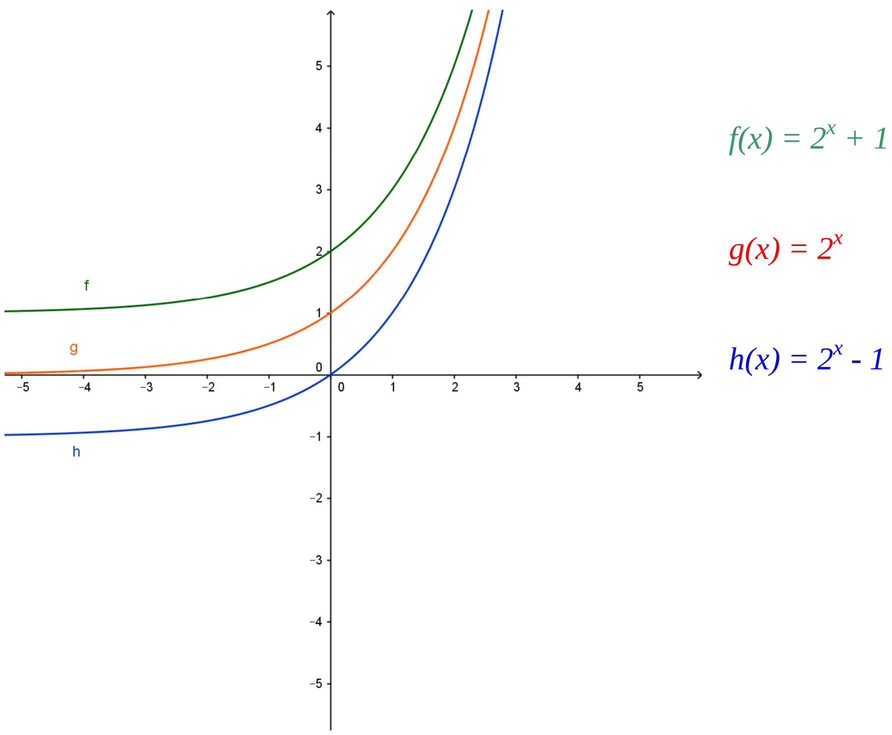


Gráfico com translação

De modo geral, o gráfico de $f(x) = a^x + k$, sendo $0 < a \neq 1$ e k uma constante real, pode ser obtido a partir do gráfico $f(x) = a^x$, deslocando-o k unidades para cima ou k unidades para baixo, conforme k seja positivo ou negativo, respectivamente.

Exemplos:



Equações exponenciais

Equações exponenciais são equações com incógnita no expoente.

Exemplos:

a) $2^x = 64$ b) $\left(\sqrt{3}\right)^x = \sqrt[3]{81}$ c) $4^x - 2^x = 2$

Um dos métodos fundamentais para a resolução das equações exponenciais é o da redução a uma base comum. Este método será aplicado quando ambos os membros da equação, com as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências, f redutíveis a potências de mesma base $a\ (0 < a \neq 1)$. Pelo fato de uma função exponencial $f(x) = a^x$ ser injetora, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm expoentes iguais, isto é:

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \quad (0 < a \neq 1)$$

Exemplos:

$a)\ 2^x = 16$
$2^x = 2^4$
$x = 4$

$b)\ 3^x = \frac{1}{27}$
$3^x = 3^{-3}$
$x = -3$

$c)\ 5^{x+2} = 1$
$5^{x+2} = 5^0$
$x + 2 = 0$
$x = -2$

$d)\ 4^{x+2} = 8$
$2^{2(x+2)} = 2^3$
$2(x+2) = 3$
$2x + 4 = 3$
$x = -\frac{1}{2}$

$e)\ 4^x - 2^x - 2 = 0$
$(2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$
$y^2 - y - 2 = 0$
$y_1 = 2 \rightarrow x_1 = 1$
$y_2 = -1 \rightarrow x_2$ *não existe*

Função Logarítmica

Logaritmo

Definição: Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo* de b na base a o expoente que se deve das á base a de modo que a potência obtida seja igual a b.

Em símbolos: se a, $b \in \Re$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Em $\log_a b = x$, dizemos: a é a base do logaritmo, b é o logaritmando, x é o logaritmo.

Exemplos:

a) $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$.

b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$

Com as restrições impostas $(a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1\ e\ b > 0)$, dados a e b existe um *único* $x = \log_a b$.

São consequências imediatas da definição:

a) “O logaritmo da unidade em qualquer base é sempre igual a 0”. Ou seja:

$$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0 .$$

b) “O logaritmo da base em qualquer base é igual a 1”. Ou seja:

$$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1 .$$

c) “A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b". Ou seja:

$$a^{\log_a b} = b$$

d) “Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais”. Ou seja:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Propriedades dos logaritmos

1ª) Logaritmo do produto:

$$\log_a b.c = \log_a b + \log_a c$$

2ª) Logaritmo do quociente:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

3ª) Logaritmo da potência:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

Observe que: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$.

Mudança de base

A maior parte das calculadoras trabalha apenas com as bases 10 e e. Portanto, é interessante a seguinte propriedade:

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \Rightarrow (\log_b c)(\log_a b) = \log_a c$

Logaritmos decimais

Quando a base $b = 10$ é usual omiti-la e escrever $\log_{10} x = \log x$.

Note que:

$\log 100 = 2$

$\log 10 = 1$

$\log 1 = 0$

$\log 0{,}1 = -1$

$\log 0{,}01 = -2$

Logaritmos naturais

O número de Euler $e = 2{,}71828...$ é muito comum em matemática de ensino superior. Utilizamos a notação $\ln x = \log_e x$.

Função Logarítmica

Definição: Dado um número real $a\,(0 < a \neq 1)$, chamamos função logarítmica de base a a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $\log_a x$, ou seja:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to \log_a x \end{aligned}$$

Exemplos:

a) $f(x) = \log_2 x$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $h(x) = \log x$

d) $p(x) = \ln x$

Propriedades

1ª) Considere a função exponencial $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $g(x) = a^x$. A função logarítmica é a *inversa* de g. Assim: $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$

2ª) A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é *crescente* (*decrescente*) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

Gráfico da função logarítmica

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, podemos dizer:

.á todo à direita do *eixo* y $(x > 0)$;

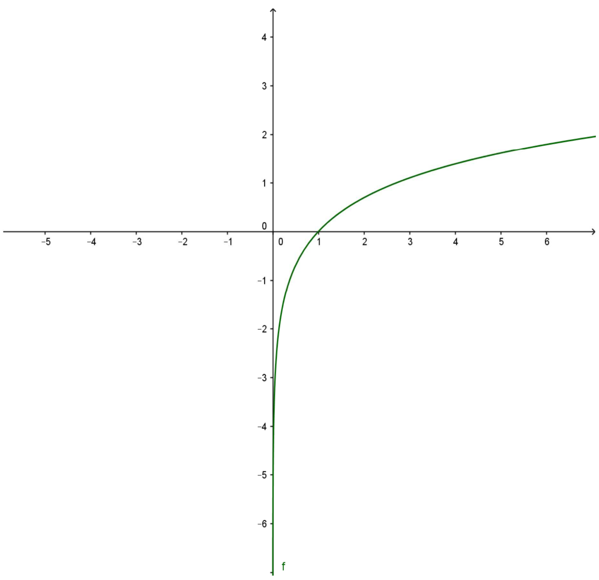
2º) Corta o *eixo* x no ponto de abscissa 1.;

3º) Se $a > 1$ é de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é de uma função decrescente;

4º) É simétrico em relação à reta $y = x$ do gráfico da função $g(x) = a^x$.

Gráfico da função logarítmica

$f(x) = \log_a x$
$a > 1$



$$f(x) = \log_a x$$
$$0 < a < 1$$