SÉRIE

CADERNOS DE EXTENSÃO

EDUCAÇÃO

PRE
Pró-Reitoria de Extensão

MATEMÁGICA NA SALA DE AULA:

UMA PERSPECTIVA PEDAGÓGICA

RICARDO FAJARDO

NATÁLIA ALESSANDRA KEGLER

ALEX JENARO BECKER

MATEMÁGICA NA SALA DE AULA: UMA PERSPECTIVA PEDAGÓGICA

1° edição

Santa Maria

Editora Pró-Reitoria de Extensão UFSM

2017

ISBN: 978- 85-67104-26-3

F175m Fajardo, Ricardo
Matemágica na sala de aula [recurso eletrônico] : uma perspectiva pedagógica / Ricardo Fajardo, Natália Alessandra Kegler, Alex Jenaro Becker. – 1. ed. – Santa Maria : Ed. PRE, 2017.
1 e-book. – (Série Cadernos de extensão. Educação)

1. Matemática – Ferramenta didática 2. Matemática – Truque I. Kegler, Natália Alessandra II. Becker, Alex Jenaro III. Título. IV. Série.

CDU 51:37

Ficha catalográfica elaborada por Alenir Goularte CRB-10/990
Biblioteca Central - UFSM

RESUMO

Este livro apresenta algumas ideias de como a matemágica (truque matemático) pode ser usada como uma ferramenta didática, tanto na sala de aula como fora dela. O aspecto lúdico de trabalhar com o conteúdo matemático foi um fator importante que o grupo levou em consideração. Para cada matemágica é apresentada o material, o efeito, o conteúdo abordado e a apresentação do truque. A explicação matemática de por que o truque sempre funciona é apresentada no último capítulo. Assim, o leitor terá a oportunidade de investigar por si mesmo.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Fundo de Incentivo à Extensão (FIEX) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) que proporcionou uma bolsa de auxílio a um acadêmico do Curso de Matemática. Também agradecemos à amiga e professora de Português Maria Magália Giacomini Benini que leu todo o manuscrito com grande carinho e nos ofereceu comentários enriquecedores.

SUMÁRIO

1| APRESENTAÇÃO

Este livro é fruto de um projeto intitulado "*Matemágica* na Sala de Aula", que teve início em meados do ano de 2008, com o objetivo de auxiliar alguns acadêmicos do curso de graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) a apresentar uma palestra que fosse interativa. No entanto, no ano de 2009, o projeto começou a crescer à medida que o grupo formado começou a apresentar minicursos em eventos, tanto locais como nacionais. A partir do ano de 2010, este projeto se tornou uma atividade de extensão auxiliada pelo Fundo de Incentivo à Extensão (FIEX) da UFSM. O grupo formou uma parceria com a Secretaria Municipal de Educação Fiscal e de Educação do Município de Santa Maria e, desde então, temos ofertado minicursos aos professores de Matemática do Ensino Fundamental (anos finais), bem como aos pedagogos do município. A ideia de usar truques matemáticos, como um viés para incentivar o ensino e a aprendizagem de matemática em sala de aula, foi muito bem aceita e nos incentivou a continuar, mesmo porque começamos a receber vários convites para apresentar minicursos em escolas e institutos federais da região.

Todavia, a nossa proposta não se baseia somente na apresentação do show. No mercado existem vários livros que podem ser usados com este objetivo. No entanto, são poucos os livros que apresentam o como e o porquê do truque, limitando-se a fornecer o "macete" para obter êxito no espetáculo. É por essa razão que dividimos o livro em quatro capítulos, a saber: a origem do livro, um pouco de referencial teórico e metodológico, *matemágicas* e soluções matemáticas, juntamente com comentários pertinentes. Nesta apresentação explicamos como o livro surgiu e foi preparado. No capítulo 1, defendemos a atividade lúdica em sala de aula e oferecemos algumas ideias de como utilizar a *matemágica* com os alunos. No capítulo 2, apresentamos as *matemágicas* e indicamos o material necessário, o efeito do truque e o conteúdo matemático abordado. No capítulo 3, apresentamos as soluções — a matemática que vela a *matemágica* — assim como comentários de cunho didático.

Por que as soluções não foram incluídas logo após a matemágica? Porque aconselhamos aos leitores, em particular aos professores e aos alunos, a embarcarem na jornada da descoberta e procurar descobrir como e por que o truque sempre funciona como se estivessem resolvendo um problema matemático! Dessa forma, aconselhamos que, inicialmente, o leitor aprenda a apresentar o truque e, após, procure descobrir por que o truque funciona do ponto de vista matemático.

Esperamos, sinceramente, que este livro seja útil aos professores de matemática que buscam metodologias alternativas para desenvolver em sala de aula. Boa leitura e ótima descoberta!

2| INTRODUÇÃO

Este livro aponta para uma das várias possibilidades de ensinar *matemática* com o intuito de estimular o aluno a aprendê-la. Certamente, o aluno já assistiu apresentações efetuadas por mágicos onde, misteriosamente, uma cadeira se move, uma pessoa flutua ou aquela em que aparece uma pomba, aparentemente, do nada. Sabemos que é uma ilusão. No entanto, não descobrimos facilmente como funciona. Com a matemágica ocorre algo parecido. O professor ou, por que não o aluno, é o "mágico" da apresentação. No entanto, em vez de se valer de uma iluminação particular, de um bolso escondido ou agilidade manual, o "mágico" se usufrui da descoberta matemática no campo da aritmética, da álgebra, do cálculo mental e do raciocínio lógico (FAJARDO, 2010). Por essa razão cremos que a *matemágica* pode ter uma grande repercussão na sala de aula da escola básica, bem como no trabalho de formação inicial e continuada de professores.

Visto que os truques funcionam devido a um princípio matemático escondido nas instruções dadas, o apresentador pode valer-se da abordagem de possuir a capacidade mental de ler a mente, capacidade esta que aprendeu de um professor do futuro por assim dizer. Durante a apresentação da *matemágica*, procure usar palavras como teste, demonstração e experimento, em vez da palavra truque, pois essas palavras estão em sintonia com a abordagem de leitura mental. Lembramos que o espetáculo também é importante na receita da motivação e "a prática faz a perfeição".

- ## UM POUCO DE REFERENCIAL TEÓRICO

O uso do lúdico no ensino de Matemática tem sido defendido por muitos. Na síntese dos princípios norteadores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), terceiro e quarto ciclos, o jogo é citado, juntamente com outros recursos didáticos. "Contudo, eles precisam estar integrados à situações que levem ao exercício da análise e da reflexão." (BRASIL, 1998, p. 56)

Uma apresentação simples que o professor poderia realizar ao iniciar uma aula seria, segundo Pallas (1976, p. 14), solicitar que um aluno efetuasse os seguintes cálculos numa calculadora (referente à data de nascimento do seu tio, por exemplo). Supõe-se que o professor desconheça esta data, e o tio nasceu no dia 15 de junho de 1964 (15/06/1964) para fins de cálculo.

Instruções	Cálculo
Digite o dia do nascimento do seu tio	15
Multiplique por 100	1500
Adicione o mês do nascimento do seu tio	1506
Multiplique por 10.000	15060000
Adicione o ano do aniversário	15061964

Quadro 1: passos para um truque matemático. Fonte: (PALLAS, 1976, p. 14).

Após, o professor pede para ver a calculadora e anuncia a data de nascimento do tio. Embora esta apresentação possa parecer óbvia, ela oferece uma reflexão sobre o sistema decimal posicional que utilizamos. Quanto ao exercício da análise de uma situação como esta, o professor poderia solicitar que os estudantes estudassem e discutissem formas de "esconder" a obviedade da apresentação. Sempre que houver necessidade, o professor pode fazer uma intervenção com o intuito de esclarecer como executar a atividade de análise. Por exemplo, o professor pode questionar o grupo sobre as diferentes maneiras de se efetuar a multiplicação por 100, que é o segundo passo das instruções do quadro 1. A título de ilustração, ao invés de multiplicar por 100, poderíamos, primeiro, multiplicar por 20 e, depois, por 5, o que resulta na mesma resposta. (PALLAS, 1976).

Outra forma seria incluir o cálculo "11 x 99 + (o dia do nascimento do seu tio, de novo)". Aqui temos a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição[1]: $11 \times 99 \times 15 + 1 \times 15 = (11 \times 99 + 1)15 = 100 \times 15$. Outro método, ainda, seria efetuar o cálculo "17 x 6 - (o dia do nascimento do seu tio)" e, então, dizer "Ó, eu não vi você fazer isso, subtraia o dia do nascimento do seu tio novamente", visto

1 Ver o Apêndice A.

que, em realidade, devemos subtrair duas vezes. Ora, como 17 x 6 = 102, as instruções acima se tornam: 17 x 6 x 15 - 15 = 17 x 6 x 15 - 2 x 15 = (17 x 6 - 2) x 15 = 100 x 15 , que é o segundo passo no quadro 1 (PALLAS, 1976). É claro que tais intervenções, por parte do professor, deveriam ter um formato de perguntas para reflexão e sugestão de análise, sem oferecer uma resposta final fechada. Desta forma, podemos tornar um truque matemático (matemágica) num jogo (o jogo da descoberta), onde cada grupo poderia apresentar a sua variação da matemágica à classe.

Borin (1995, p. 8) ressalta "que a atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias para o aprendizado, em especial da Matemática, e para resolução de problemas em geral." Oliva (2006), por sua vez, defende que é necessário brincar e, assim, oferecer uma motivação para o estudo da Matemática. Ora, a apresentação da *matemágica* é uma forma de brincar e aprender, ou aprender brincando.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais também explicitam mais sobre os jogos:

> [...] os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. [Os jogos] propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atividade positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes – enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório – necessárias para a aprendizagem da Matemática. (BRASIL, 1998, p. 46)

Nesse sentido, a *matemágica* pode ser apresentada na forma de um jogo, onde os alunos são desafiados a apresentar à classe e descobrir (investigar) como e por que funciona, vislumbrando a matemática velada pelo truque.

É interessante salientar que, ao ser apresentada a matemágica, os participantes efetuam cálculos aritméticos que, por sua vez, escondem as operações. À medida que nos utilizamos da álgebra para fazer a apresentação ou apresentar uma explicação, as operações não mais se escondem e, assim, podemos compreender por que a *matemágica* sempre funciona, em vez efetuar simples verificações com números. Além do mais, podemos usar este fato como um artifício para memorizar os passos e oferecer variações dos mesmos, como aquele apresentado no exemplo do quadro 1 acima.

Como uma alternativa, os alunos podem ser estimulados a pesquisar novos truques, apresentá-los e discutir como e por que funcionam. Citamos um exemplo, o professor pode avaliar a compreensão das quatro operações básicas do aluno à medida que este apresenta e explica a *matemágica*. Se o aluno se limitar a apresentar um truque onde ele trabalha somente com a adição, subtração e multiplicação, por exemplo, existe a possibilidade de ele ter dificuldades com a divisão. Podemos, também, introduzir a noção de variável, trabalhando a *matemágica* em diferentes estágios e, paulatinamente, incorporando caracteres literais.

Vejamos mais um exemplo. Este foi encontrado em Murdock (2000, p. 186[2]) : "você já viu um truque com cartas, onde o mágico descobre a carta escolhida? Também é possível fazer truques como este com números. O mágico pode pedir que você escolha um número, pede para você efetuar algumas operações aritméticas e, então, revela o número que você escolheu inicialmente; ou, ainda, o mágico pode pedir para várias pessoas escolherem diferentes números, solicitar que façam uma série de operações aritméticas e, no final, todas elas chegam no mesmo resultado. Como o mágico faz isso? Se você entende as regras para a ordem das operações e um pouco de álgebra, então, você, também, pode criar truques."

"Tente este truque: pense num número de 1 a 25. Some 9 ao número pensado.

2 Este foi o único livro didático que o grupo encontrou que menciona o uso da *matemágica.*

Multiplique o resultado por 3. Subtrai 6 desse resultado. Divida a resposta por 3. Agora, subtraia o seu número original, aquele que você pensou no início. Independentemente do número que você escolheu, o seu resultado final será sempre 7! Surpreso? Tente o truque novamente, começando por um número diferente. Você obteve 7 novamente? Todos os seus colegas obtiveram sete como o resultado final? Como funciona este truque numérico? Será que ele funciona sempre?"

O quadro 2 mostra a sequência de números que este truque gera se você começar com o número 11. Neste truque numérico você poderia começar com uma *variável*, visto que cada vez que executa o truque você poderia iniciar com um número diferente. Este fato pode ficar bem evidenciado quando todos os alunos participam do truque e cada um escolhe números distintos. Portanto, truques com números podem ajudar o aluno a entender a função que as variáveis e as *expressões* têm em Álgebra. Uma expressão é uma representação simbólica de uma sequência de operações matemáticas que podem envolver tanto números como variáveis.

	11
Resposta: +9	
	20
Resposta: x 3	
	60
Resposta: - 6	
	54
Resposta: + 3	
	18
Resposta: - 11	
	7

Quadro 2: um exemplo numérico. Fonte: (MURDOCK 2000, p. 186).

É claro que se ainda não é o momento para os alunos aprenderem sobre variáveis e expressões algébricas, então, o truque não precisa ser algebrizado. No entanto, a oportunidade poderia ser usada para introduzir a necessidade de uma representação mais simbólica para representar qualquer número. Como um passo intermediário, poderíamos usar o desenho de um quadrado, um caro ou uma boneca.

Para finalizar salientamos que o professor não precisa, necessariamente, entrar no formalismo matemática que apresentamos no Capítulo III. Este formalismo deverá ser trabalhado levando em consideração o nível de compreensão que o aluno se encontra. Poderá ocorrer que o aluno seja capaz de explicar como e por que a matemágica funciona sem entrar na questão algébrica do mesmo.

3| AS *MATEMÁGICAS*

Caro leitor! Lembre que "a prática faz a perfeição!" Portanto, é importante que você pratique a apresentação e execução do truque várias vezes antes de apresentar em público. Além do mais, mantenha em mente "o desafio de descobrir como a *matemágica* funciona". Como já mencionado anteriormente as explicações encontram-se no Capítulo III. No entanto, você terá uma experiência inusitada ao descobrir a matemática que se encontra velada no truque. *Boa matemágica,* divirta-se!

• SERÁ QUE VOCÊ SABE CALCULAR?

- **Material:** Papel, caneta ou lápis.
- **Efeito**: Todos chegam ao mesmo resultado.
- **Conteúdo:** As quatro operações aritméticas, variável.

Apresentação: O apresentador inicia o truque pedindo que o(s) voluntário(s) pegue(m) uma folha de papel e uma caneta ou um lápis. Após escolha(m) um número natural. Este será o seu número original. Multiplique este número por três; assim você terá um novo número. A esta resposta, adicione o seu número original. Agora, ao resultado desta soma, subtraia quatro unidades e, após, divida este número por quatro. Ao resultado da divisão some uma unidade. Para finalizar, subtraia deste resultado, o seu número original.

Quando todos os participantes tiverem finalizado os cálculos, solicite que os mesmos digam em voz alta o resultado final. Para a surpresa de todos, a resposta será sempre zero. Por quê?

- IDADE COM O NÚMERO MÁGICO

    - **Material necessário:** Papel, caneta ou lápis.
    - **Efeito:** Descobrir a idade de um parente.
    - **Conteúdo:** Adição, subtração, sistema decimal posicional.

Apresentação: Vamos descobrir a idade de um parente de alguém (pai, tio, avô, mãe, tia, avó, etc.). Solicite a participação de um voluntário. Em seguida, mencione as instruções. Escolha um parente e escreva em uma folha de papel a idade do seu familiar, a qual eu não sei e vou descobrir. Agora, abaixo deste escreva o meu número mágico que é 80 (oitenta) e some estes dois números. Isso formará um novo número o qual eu não sei qual é. Tendo efetuado a soma, retire o algarismo que se encontra mais à esquerda do número e o mova para baixo do número que restou. Então, adicione os dois números. Finalmente, temos um novo número o qual eu não sei e que não possui nenhuma relação com a idade a qual eu vou adivinhar. Portanto, se você me disser qual é esse número, eu lhe direi (lerei a sua mente) a idade do seu familiar. Para adivinhar a idade, mentalmente, some 19 ao número que lhe disserem.

- IDADE EM SEQUÊNCIA DE NOVES

  - **Material:** Papel, caneta ou lápis.
  - **Efeito**: Descobrir a idade do voluntário dependendo da faixa etária da mesma.
  - **Conteúdo**: Soma, multiplicação, "os nove fora", múltiplos de nove.

Apresentação: Peça ao voluntário para escolher um número natural qualquer e multiplicá-lo por nove. Então, diga: "você tem um novo número, sendo que eu não sei qual número você escolheu e qual é o resultado da multiplicação". Agora, some ao resultado da multiplicação a sua idade. Note que o resultado não tem relação com a sua idade. Então, se você me disser o resultado final, eu lhe direi a sua idade.

Ao saber o resultado final, mentalmente, faça os seguintes cálculos: adicione os algarismos do número ("os nove foras"); olhe para o voluntário e determine a faixa etária da sua idade; some nove, várias vezes, a este número até alcançar a faixa etária de idade.

• MÁGICA COM CALENDÁRIO I

- **Material**: Papel, caneta ou lápis, calendário.
- **Efeito**: Descobrir a sequência de cinco dias de um calendário.
- **Conteúdo**: Adição, subtração, multiplicação, divisão, média aritmética, variável, termos semelhantes.

Apresentação:

O apresentador, de posse de um calendário, solicita ao voluntário que escolha cinco números consecutivos e efetue a sua adição. Então, ao informar o resultado desta soma o apresentador revela os números escolhidos: ao dividir mentalmente o resultado final por cinco, o apresentador obtém o terceiro número da sequência. Como os números são consecutivos, subtraia os números um e dois, e some os números um e dois do resultado da divisão para obter os outros números.

Por exemplo, o voluntário escolheu os números 15, 16, 17, 18 e 19, cuja soma é igual a 85. O apresentador mentalmente efetua a seguinte operação $85 \div 5 = 17$, que é o número do meio. A partir deste número tem-se: $17 - 2 = 15$, $17 - 1 = 16$, 15, $17 + 1 = 18$ e $17 + 2 = 19$.

- MÁGICA COM CALENDÁRIO II

  - **Material**: Papel, caneta ou lápis, calendário.
  - **Efeito**: Descobrir o dia da semana do calendário e os números escolhidos.
  - **Conteúdo**: Adição, subtração, multiplicação, divisão, média aritmética, variável, termos semelhantes.

Apresentação: O apresentador, de posse de um calendário, solicita ao voluntário que escolha um dia da semana (domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado). Tendo escolhido o dia da semana, instrua para que escolha três números consecutivos (neste dia) e efetue a sua adição. Então, ao informar o resultado desta soma, o apresentador revela os números escolhidos: *ao dividir, mentalmente, o resultado final por três, o apresentador obtém o segundo número da sequência. De posse deste número, olhe para o calendário e anuncie o dia da semana escolhido. Como os números são consecutivos e pertencem ao mesmo dia da semana, subtraia e some sete do resultado da divisão para obter o primeiro e terceiro números.*

Por exemplo, considerando-se o calendário abaixo, escolha um dia da semana: quarta-feira.

MAIO

S	T	Q	Q	S	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Figura 1: mágica com calendário

Agora, escolhem-se três números na quarta-feira: 9, 16 e 23. Ao somar esses três números, obtém-se como resultado 48.

O apresentador, de posse deste número, mentalmente, efetua a divisão de 48 por 3: $48 \div 3 = 16$. Visto que existe somente um 16 no calendário é possível determinar o dia da semana: quarta-feira! Como a semana tem sete dias, os outros números são: 16 - 7 e 16 = 7.

- O NOME DA CARTA É . . .

    - **Material**: Papel, caneta ou lápis, quadro, um baralho.
    - **Efeito**: Antes de começar a apresentação, ocorre a previsão da carta.
    - **Conteúdo**: Adição, subtração, termos semelhantes, sistema posicional decimal.

Apresentação: Inicialmente, pede-se que um voluntário da plateia pegue uma caneta (lápis) e uma folha de papel e escreva um número com três algarismos distintos e não nulos. Solicita-se, então, que o participante inverta a ordem dos dígitos, isto é, os algarismos da unidade e da centena trocam de lugares, formando um novo número. Em seguida, o mesmo deve subtrair o número menor do maior.
A partir do resultado obtido, o participante deve somar os três algarismos que o compõe: unidade, dezena e centena. O resultado dessa soma será o número especial do participante.

- **O BARALHO**

Antes do truque: Como parte preparatória para o truque o apresentador deve, em particular, colocar o "ás de copas" na décima oitava posição do baralho, contando-se de cima para baixo e com as faces para baixo.

Durante o truque: Inicia-se com o apresentador soltando involuntariamente as cartas, viradas para baixo, sobre uma mesa enumerando-as em ordem crescente a partir do número 1. Solicita-se ao voluntário que avise o momento em que a contagem do apresentador coincidir com o seu número especial, para, então, receber a carta correspondente a esse número, sem revelá-la ao apresentador.

O quadro : antes de iniciar o truque, escreve-se no quadro a seguinte frase:

ANTES DE COMEÇAR, PREVEMOS QUE A SUA CARTA SERÁ . . .

Quadro 3 - previsão da descoberta da carta do baralho

Pede-se que o voluntário procure ver se o nome da sua carta está escrito no quadro. Na maioria das vezes, ele não conseguirá fazê-lo. Então, apagam-se as letras da frase que não interessam.

Por exemplo, no quadro abaixo, as letras que não interessam são riscadas, sobrando apenas as letras em vermelho.

A~~NTE~~S DE CO~~MEÇAR~~ P~~REVEMOS QUE A SUA CART~~A S~~ERÁ~~ . . .

Quadro 4 - revelação do nome da carta

Ou seja, restou apenas o nome da carta do voluntário: "ÁS DE COPAS".

- OBJETO INSÓLITO!

  - **Material**: Alguns objetos de fácil manuseio.
  - **Efeito**: Revela um objeto escolhido, mentalmente, e um número escolhido por alguém da plateia.
  - **Conteúdo**: Operações de adição, subtração e multiplicação, variável, sistema posicional decimal.

Apresentação: O apresentador anda pelo meio da plateia e solicita alguns objetos emprestados para a realização do truque. A partir dos objetos obtidos do público, ele seleciona três e os deixa dispostos sobre uma mesa ao alcance visual de todos. A seleção dos objetos deve seguir o seguinte critério: *os seus nomes devem conter quantidades de letras distintas.*
Com a participação de um voluntário, solicita a este que escolha, silenciosamente, um dos três objetos e, ao soletrar o nome do objeto, mentalmente, conte o seu número de letras. Em silêncio, solicita-se que o voluntário multiplique este número por cinco, adicione três ao resultado obtido e, após, multiplique por dois. O apresentador o instrui a memorizar este resultado. Na sequência solicita a colaboração de outro membro da plateia: "nesta folha de papel, escreva um número entre um e nove e dobre-a", instrui o apresentador ao segundo participante. A folha de papel dobrada é, então, entregue ao primeiro participante, e o apresentador solicita que adicione este número ao que já havia obtido mentalmente. Logo, o apresentador diz que se o resultado final desta soma lhe for revelado, ele indicará o objeto escolhido e revelará o número secreto escrito no papel: *do número final subtraia seis, e o algarismo da casa da dezena revela o número de letras do nome do objeto escolhido, enquanto que o algarismo da casa da unidade revela o número misterioso entre um e nove.*

Por exemplo, o apresentador escolheu os seguintes objetos: um 'anel' (4 letras), uma 'caneta' (6 letras) e uma 'borracha' (8 letras). Supõe-se que o voluntário, mentalmente, escolheu a ‘borracha’ e contou o número de letras que são oito. Então, multiplicou por cinco, obtendo 40. Após, adicionou três, resultando em 43. Na sequência, multiplicou por dois, obtendo 86. Supõe-se, agora, que o segundo voluntário pensou no número ‘sete’. Ao somar este número a 86, o primeiro voluntário encontra o número 93. O apresentador, sabendo este número, subtrai seis deste número e obtém o número 87. Assim, vê-se que o algarismo da dezena é o oito e, como existe somente um objeto com oito letras, o apresentador prontamente sabe que o objeto escolhido, mentalmente, foi a ‘borracha’. Como o número sete é o algarismo da unidade, ele revela que este número foi o escolhido pelo segundo voluntário.

- DESCOBRINDO O NÚMERO DE PARENTES

  - **Material**: Papel, caneta ou lápis.
  - **Efeito**: Descobrir o número de irmãos do sexo masculino, de irmãs e avós vivos.
  - **Conteúdo**: Operações de adição, subtração e multiplicação, variável, representação de um número no sistema posicional decimal.

Apresentação: Solicite um participante que você não conheça. Peça que escreva o número de irmãos do sexo masculino que o participante tem e, então, multiplique por dois. A este resultado adicione três. Após, multiplique este último número por cinco. Ao resultado, adicione o número de irmãs. Multiplique esta resposta por dez. Finalmente, adicione o número de avós vivos. Agora diga: "Note que eu não o conheço. Se você me disser somente o resultado final das suas contas, eu vou *ler a sua mente* e descobrir o número de irmãos do sexo masculino, irmãs e avós vivos". Quando o participante lhe disser a resposta, mentalmente subtraia 150 deste número. No resultado o algarismo da unidade será o número de avós vivos, o algarismo da dezena será o número de irmãs e o algarismo da centena será o número de irmãos.

• PENSAMENTO EM SINTONIA

- **Material**: Papel, caneta ou lápis.
- **Efeito**: Descobrir o número das pessoas A e B, mostrando que estão em sintonia.
- **Conteúdo**: Soma, multiplicação, sistema decimal posicional.

Apresentação: Inicialmente escolha duas pessoas, descrevendo-as como A e B. Em seguida, passe uma folha de papel para a pessoa A e outra para a pessoa B. Diga para a pessoa B colocar na folha um número de 1 a 9. Pegue esta folha, olhe o número, dobre-o e ponha-o sobre uma mesa, ou local, onde todos possam ver o papel fechado.

A partir de então, solicite para a pessoa A que escreva um número entre 10 e 99. Multiplique esse valor por 5; após, some 5 unidades; em seguida, multiplique por 2; e, ao resultado, diminua a diferença de "10 e o número da pessoa B". Por exemplo, caso o número da pessoa B seja 3, peça que a pessoa diminua 7 unidades, pois 3 + 7 = 10. Mas, lembre-se que esse cálculo da diferença de 10 deve ser feito mentalmente, pois só você sabe qual é o número da pessoa B. A partir disso, pedir que a pessoa B diminua o resultado da diferença de 10, feito por você mentalmente. Feito isso, você pedirá que o voluntário informe o resultado final do procedimento e, assim, você irá descobrir o números das pessoas A e B: *o algarismo da unidade do resultado final é o número da pessoa B e o número de dois algarismos formado pelos dígitos da dezena e da centena do resultado final será o número da pessoa A.*

- O ALGARISMO CORTADO

  - **Material**: Papel, caneta ou lápis.
  - **Efeito**: O algarismo de um número é, secretamente, cortado deste número. O apresentador “adivinha” este número.
  - **Conteúdo**: Adição, subtração e multiplicação, expressão literal, operação com termos semelhantes, sistema posicional decimal, cálculo mental.

Apresentação: O apresentador solicita que algum voluntário da plateia escreva, secretamente, numa folha de papel, um número qualquer com quatro algarismos distintos e não nulos. Pede-se, então, que este adicione os algarismos do número escolhido e escreva esta soma à direita deste número. Agora, retorna-se ao número inicial e solicita-se que o participante corte um dos algarismos deste, isto é, elimine um dos algarismos. Assim, o novo número terá três algarismos. Então, com esse novo número de três algarismos e com a soma dos algarismos do número inicial, solicita-se que o voluntário subtraia o menor do maior. Na sequência, o apresentador afirma que este resultado não possui relação alguma com o número inicialmente escolhido; e pede que o voluntário lhe informe o valor que ele obteve. Após se concentrar por um momento, o apresentador irá ‘ler a mente do participante’ e revelará o algarismo inicialmente cortado: mentalmente, o apresentador adiciona os algarismos do número final, repetindo este procedimento até obter um resultado com um único dígito. Então, subtrai este número final (de um dígito) de nove para encontrar o algarismo cortado!

Por exemplo, se o número escolhido for 3185. Inicialmente, adicionam-se os algarismos deste número 3+1+8+5=17. Após, elimina-se um dos algarismos, por exemplo, o um. Assim, obtém-se um novo número 385. No próximo passo, efetua-se a subtração . O apresentador somente terá conhecimento deste número, 368. Então, mentalmente, ele efetua os seguintes cálculos: 3+6+8=17. Como este número tem dois dígitos, ele repete o processo: 1+7=8. Finalmente, efetua-se o cálculo:9-8=1 e, aparece o número eliminado do número original, 3185.

- IGUALANDO-SE AS CARTAS

  - **Material**: Um baralho completo de 52 cartas (sem os coringas).
  - **Efeito**: O número de cartas voltadas para cima é igual nos dois montes.
  - **Conteúdo**: Adição, subtração, variável e resolução de sistema linear de equações.

Apresentação: Solicite a ajuda de um voluntário para embaralhar as cartas. Após, peça que vire 20 cartas das 52 cartas do baralho. Agora, no baralho, tem-se 20 cartas voltadas para baixo e 32 cartas voltadas para cima. Solicite que as embaralhe novamente e peça que forme um novo monte com 20 cartas. Neste monte com 20 cartas, algumas estão voltadas para baixo, outras para cima. Logo, você tem a sua frente dois montes com 20 e 32 cartas, respectivamente. Você toma o monte de 20 cartas e, em segredo, vira este monte de cabeça para baixo, afirmando que "está ajustando algumas cartas para igualar o número de cartas para cima no outro monte". Coloque o seu monte sobre a mesa. Peça ao voluntário para contar o número de cartas para cima no monte de 32 cartas (que ficou com ele) e, após, também contar o número de cartas para cima que você tinha. As quantidades de cartas voltadas para cima nos dois montes serão iguais!

- O TRUQUE DA SOMA

    - **Material**: Papel e caneta ou lápis.
    - **Efeito**: Você prevê a soma total.
    - **Conteúdo**: Sistema decimal posicional, propriedades comutativa e associativa da adição, subtração.

Apresentação: Numa folha de papel escreva o número 1089, dobre-o e solicite a um expectador que o guarde. Em outra folha de papel escreva o número 198, dobre-o e guarde-o no seu bolso. Solicite a um participante que escreva numa folha de papel um número com três algarismos distintos (de 0 até 9) . Instrua-o que inverta a ordem dos algarismos, assim obtendo um novo número. Solicite que subtraia o menor número do maior. O resultado da subtração deve ser invertido e estes dois últimos números devem ser somados. Agora, peça ao expectador guardando a folha de papel dobrada que a abra e confira o número escrito com o resultado do participante. Se a resposta não for 1089, então diga: "Ah, eu também tenho um papel dobrado no meu bolso. Então, entregue-o a um participante e solicite que o abra: 198. Voilà!"

- SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

    - **Material**: Papel, caneta ou lápis e calculadora.
    - **Efeito**: Encontrar a soma de uma sequência de dez números, mentalmente, antes que o voluntário a faça na calculadora; descobrir a divisão correta até duas casas decimais.
    - **Conteúdo**: Multiplicação, adição, divisão, termos semelhantes, expressão algébrica, sequência de Fibonacci, número de ouro.

Apresentação – Parte I: Inicialmente, entrega-se a uma pessoa da plateia uma folha enumerada com linhas de um até dez. Então, pede-se à mesma que, na primeira linha, escreva um número natural qualquer, e passe a folha adiante. Solicita-se a outra pessoa que, na segunda linha, escreva outro número natural qualquer e passe a folha para o próximo espectador. A terceira pessoa soma os números das duas primeiras linhas, escreve o resultado na terceira linha e passa a folha ao colega ao lado. A quarta pessoa soma os números que se encontram na segunda e terceira linhas e escreve o resultado na quarta linha, passando a folha ao seguinte. Segue-se, assim, sucessivamente, até chegar na décima linha cujo resultado será a soma dos números constantes na oitava e nona linhas.

O apresentador do truque, então, fará o seguinte desafio: "*A minha capacidade de cálculo mental é extraordinária. Antes que alguém da plateia termine de somar os dez números usando uma calculadora, eu anunciarei o resultado. Para tanto, visualizarei por apenas um momento a folha de papel com a sequência de dez números*".

O apresentador, ao olhar a folha de papel, deve focar-se no número que se encontra na sétima linha. O resultado final da soma será este número multiplicado por onze.

Apresentação – Parte II: Quando o apresentador tiver entregado a folha de papel enumerada, com dez linhas, ele solicita que aguarde um momento; e num pedaço de papel escreve o número 1,61. Em seguida, dobra o pedaço de papel e entrega a alguém da plateia, pedindo para guardá-lo e não revelar o seu conteúdo. Após o apresentador ter executado a parte I deste truque, peça a alguém que divida o resultado da décima linha pela nona. Depois da resposta desta divisão ter sido declarada verbalmente, solicite que a pessoa que guardou o pedaço de papel diga em voz alta o número impresso. Muito bem, você acertou novamente!

- O VALOR DA CARTA É . . .

  - **Material**: Um baralho completo com 52 cartas (sem os coringas).
  - **Efeito**: Revela o valor da primeira carta do monte.
  - **Conteúdo**: Variável, termos semelhantes, operações com expressões algébricas, resolução de sistemas de equações.

Apresentação: Para este truque são necessários dois apresentadores: A e B. O apresentador A distancia-se do local da apresentação, permanecendo de costas para o mesmo. Enquanto isso, o apresentador B separa alguns montes de cartas de forma 'aleatória' do baralho, dispondo-os sobre a mesa. Após, solicita-se a um voluntário da plateia, para que, destes montes, ele escolha três montes que ficarão dispostos sobre a mesa de forma que toda a plateia os veja; enquanto o apresentador B recolhe os montes restantes. Então, o apresentador A retorna à mesa e solicita um novo voluntário. Pede-se que esse novo participante escolha um dos três montes, virando a primeira carta sobre este monte e mostrando-a à plateia. Na continuação, solicita-se que escolha um monte dos dois restantes, repetindo o mesmo processo, virando a primeira carta do monte e mostrando-a para todos. Até este momento o apresentador A viu as duas cartas. Por fim, o apresentador A concentra-se (usa a sua visão de 'raio X') para revelar o valor numérico da primeira carta do terceiro monte. Este procedimento é apresentado abaixo.

Distribuição das cartas de forma 'aleatória' sobre a mesa

O apresentador B toma o monte com as cartas voltadas para baixo, virando-as sobre a mesa de modo que seus valores fiquem para cima. Para a primeira carta do monte, considera-se o valor numérico desta e, a partir deste número, conta-se até 13; as cartas sempre voltadas para cima. Ao finalizar esta contagem, vire o monte para baixo. Por exemplo, se para o primeiro monte a primeira carta for um 7 de espadas, o apresentador B terá que baixar seis cartas, para alcançar 13 (sete, oito, nove, dez, onze, doze e treze). Não se preocupe com o valor das cartas após o 7 de espadas. Então, este monte é virado para baixo de maneira que o 7 de espadas encontra-se no topo do monte. Continue o processo até formar vários montes. Um segundo monte poderia ser a dama de ouro. Então, o apresentador B contaria doze, treze, e o monte teria duas cartas. Lembre de virar o monte para baixo. No final, se não houver cartas suficientes para chegar até 13, o apresentador B as desconsidera e as guarda com ele.

A descoberta do valor numérico da primeira carta do terceiro monte

Quando o voluntário tiver escolhido os três montes, o apresentador B deve retirar as outras cartas da mesa e incluí-las no seu monte de cartas que restaram anteriormente. Seja N o número de cartas que o apresentador B tem consigo e sejam x e y os valores numéricos da primeira carta dos primeiro e segundo montes respectivamente. Então, o apresentador A revela o valor numérico da primeira carta do terceiro monte efetuando o cálculo mental $N - 10 - x - y$.

Mas como o apresentador A saberá o número de cartas que sobraram, visto que ele não participou da separação deles, sendo este feito pelo apresentador B? Por isso, sugere-se que este truque seja realizado por dois apresentadores, pois deve ser realizada a contagem dessas cartas restantes (a quantia N), mas sem o público notar. O nosso grupo de *matemágica* desenvolveu a necessidade do apresentador B colocar o chapéu mágico no apresentador A para que ele possa descobrir o valor numérico da carta. O apresentador B ao colocar o chapéu no apresentador A sussurra o valor de *N*.

4| AS EXPLICAÇÕES DOS TRUQUES E COMENTÁRIOS

• VOU DESCOBRIR SEU NÚMERO!

Inicialmente, solicite aos participantes que escolham um número natural, por exemplo, m . Agora, siga os passos conforme o quadro 5 abaixo.

	Passo do truque	Álgebra do passo
1	Escolha um número original	m
2	Adicione nove	$wm + 9$
3	Multiplique por três	$3 \times (m + 9) = 3\,m + 27$
4	Subtraia seis	$(3m + 27) - 6 = 3m + 21$
5	Divida por três	$\frac{3m + 21}{3} = \frac{3m}{3} + \frac{21}{3} = m + 7$
6	Mentalmente você dIminui 7 para anunciar o número original escolhido	$(m + 7) - 7 = m$

Quadro 5: desenvolvimento algébrico do truque

Este truque é uma variação do truque “Será que vocês sabem calcular?”. Se você adicionar mais uma etapa, a saber: “subtrair o número original”; a resposta sempre será 7.

É interessante observar que os alunos podem ser desafiados a apresentar variações deste truque. Uma possível variação é esconder a multiplicação por três que se encontra na linha três do quadro. Veja os passos 3 e 4 no quadro 6 abaixo.

	Passo do truque		Álgebra do passo
1	Escolha um número original	1	m
2	Adicione onze	2	$m + 11$
3	Multiplique por dois	3	$2x(m + 11)= 2m + 22$
4	Some o número original	4	$(2m + 22)+ m = (2m + m)+ 22 = 3m + 22$
5	Subtraia um	5	$(3m + 22) - 1 - 3m + (22 - 1) - 3m + 21$
6	Divida por três	6	$\frac{3m + 21}{3} = \frac{3m}{3} + \frac{21}{3} = m + 7$
7	Subtraia o número original	7	$(m + 7)\ m = 7$

Quadro 6: variação do truque

A variação do truque que ocorre no quadro 6 acima terá mais impacto ser for executada com vários participantes ao mesmo tempo; pois, ao solicitar que todos conversem sobre a suas respostas, verificarão que são iguais.

• SERÁ QUE VOCÊS SABEM CALCULAR?

Inicialmente o apresentador solicitou ao(s) voluntário(s) que escolhesse(m) um número, por exemplo, n. Agora, confira os cálculos conforme o quadro 7 abaixo.

	Passo do truque		**Álgebra do passo**
1	Escolha um número original	1	n
2	Multiplique por três	2	$3n$
3	Adicione o número original	3	$3n + n = (3 + 1)n = 4n$
4	Subtraia quatro unidades	4	$4n - 4$
5	Divida por quatro	5	$\frac{4n - 4}{4} = \frac{4(n - 1)}{4} = n - 1$
6	Adicione uma unidade	6	$(n - 1) + 1 = n +(- 1 + 1) = n + 0 = n$

7	Subtraia o número original	7	$n - n = 0$

Quadro 7: desenvolvimento algébrico do truque.

Esse truque produzirá um maior efeito para os alunos quando dois ou mais participarem. Isso ocorre, pois surgirá o questionamento do por quê. Eles se perguntarão "como isso é possível se cada um de nós partiu de um número original diferente?"

Uma possível variação do truque é você anunciar o resultado final, em vez de solicitar aos alunos que comparem as suas respostas. O truque sempre funcionará se todos os cálculos estiverem corretos. No entanto, o professor poderia questionar os alunos quanto a veracidade desta afirmação: "se aplicarmos o truque para os números originais 1, 2, 3, 4 e 5, o que garante que ele funcionará para o número 6 e demais?", você poderia perguntar. Continuar verificando o truque para o número original 6 e demais, não será lucrativo, pois o trabalho será interminável. A ideia é gerar a necessidade de introduzir a noção de variável com o intuito de mostrar que o truque sempre funcionará independente do número original escolhido.

- IDADE COM O NÚMERO MÁGICO

Quando se solicitou que o voluntário escolhesse um dos familiares citados é porque, em geral, essas idades se enquadram no intervalo desejado: $20 < x < 120$. Se a idade estiver abaixo de 20, o número mágico deverá ser maior.

Chegou-se neste intervalo da seguinte maneira:

20 = 100 – (número mágico) e 120 = 200 – (número mágico)

Ou seja, ao somar a idade com o número mágico, o resultado deve estar entre 100 e 200. Abaixo, encontra-se a explicação de por que se deseja desta forma.

Após o participante ter somado a idade do familiar, x, com o número mágico, obteremos um número, $x + 80$, que se encontra entre 100 e 200. Este fato é crucial, pois ao se retirar o algarismo da esquerda, deve-se ter certeza que o número cancelado é o um, na casa da centena!

Tendo em vista que o algarismo na casa da centena será sempre o 1, devido ao intervalo de x que foi escolhido, quando este número é cancelado ocorre que se está subtraindo 100 do número; e ao adicionar 1, termina-se por subtrair 99. Uma vez que já foi adicionado 80 (número mágico). Resta somar 19 (99 – 80) ao número final para retornar à idade original.

No quadro 8 abaixo, encontramos um exemplo.

	Passo do truque	**Álgebra do passo**
1	Idade familiar	51

2	Adicionar o número mágico (80)	51 + 80 = 131
3	Cancelar o número à esquerda e adicioná-lo ao novo número	31 + 1 = 32
4	Na realidade, subtraiu-se 99 de 131	131 - 99 = 32
5	A diferença entre 99 e 80 (número mágico) é	99 - 80 = 19
6	Você terá o número que se encontra na linha 3 e, ao somá-lo com 19 (linha 5), obterá a idade original	32 + 19 = 51

Quadro 8: exemplo numérico

O número mágico pode variar contanto que a soma dele com a idade esteja acima de 100 e abaixo de 200, *para que se tenha o controle de saber que o algarismo na casa da centena será sempre o 1.* Assim, os alunos podem ser desafiados a apresentar e explicar variações do truque. Uma dessas variações poderia ser a escolha de um número mágico que não tornasse a *matemágica* tão transparente à audiência.

- IDADE EM SEQUÊNCIA DE NOVES

Iniciamos a explicação com um exemplo, conforme o quadro 9 abaixo.

	Passo do truque	Álgebra do passo
1	Escolha um número natural (por exemplo)	136
2	Multiplique por nove	136 x 9 = 1224
3	Adicione a sua idade (digamos 37)	1224 + 37 = 1261
4	*Mentalmente:* Adicione os algarismos do número 1261	1 + 2 + 6 + 1 = 10 (este número é 3 + 7, a idade, linha 3)
5	Identifique a faixa etária da idade do voluntário. Se não for 10, some 9	10 + 9 = 19

6	Continue adicionando 9 a resposta anterior até chegar na idade desejada.	$19 + 9 = 28$ $28 + 9 = 37$
7	Note que	$37 = 10 + 3 \times 9$

As linhas 1 e 2, no quadro acima, passam a ser desconsideradas no momento em que a linha 4 é executada, pois, ao somar os algarismos do número 1261, foi executado os "nove fora". Isso é uma divisão por nove, onde o resto é a soma dos algarismos do número em questão: $1 + 2 + 6 + 1 = 10$.

Mas, o que é os "nove fora"? Por exemplo, ao aplicarmos o Algoritmo da Divisão (de Euclides) e dividirmos 10, 11, ... , 20, 21, etc, por 9, obtemos os seguintes restos da divisão, respectivamente: 1, 2, ... , 2, 3, etc. De fato, $10 = 9 \times 1 + 1$, $11 = 9 \times 1 + 2$, ... , $20 = 9 \times 2 + 2$, $21 = 9 \times 2 + 3$, etc. Observamos que ao adicionar os algarismos destes números a sua soma é igual ao resto da divisão. Portanto, os "nove fora" de 10, 11, 20 e 21 são, respectivamente, 1, 2, 2 e 3.

Entretanto, observamos que, ao tirar os "nove fora" de um número que é múltiplo de nove, a resposta não será zero, *embora a divisão por nove tenha como resto o número zero.* O menor número que se obtém é o nove. *Isto se deve ao fato dos algarismos do número não serem todos zeros.* Vejamos o quadro 10 abaixo.

Um número múltiplo de 9	“nove fora”	Comentários
9 x 1 = 9	9	Não há o que fazer
9 x 7 = 63	6 + 3 = 9	63 = 9 x 6 + 9
9 x 11 = 99	9 + 9 = 18 e 1 + 8 = 9	A redução final é 9, pois 99 = 9 x 10 + 9
9 x 123 = 1107	1 + 1 +0 + 7 = 9	1107 = 9 x 122 + 9

Quadro 10: exemplo de “nove fora” com um número múltiplo de 9.

No entanto, permanece a pergunta: por que esse procedimento sempre funcionará? Para responder a esta pergunta, torna-se necessário ampliar o conteúdo mencionado acima e incluir: sistema posicional decimal, propriedades comutativa e associativa da adição, assim como a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Vejamos a álgebra do truque do quadro 9 no quadro 11 abaixo. Para simplificar os cálculos, trabalhamos com números de dois algarismos.

	Etapas	Número	Representação decimal posicional	Divisão por 9
1	Escolha um número natural de dois algoritmos	*ab*	$a \times 10 + b$	$a \times 10 + b = a \times (9 + 1) + b = 9 \times a + (a + b)$
2	Multiplique-o por 9	9 x *ab*		$81 \times a + 9 \times (a + b)$
3	Tome a idade	*cd*	$c \times 10 + d$	$9 \times c + (c + d)$
4	Some as linhas 2 e 3			$[81 \times a + 9 \times (a + b) + 9 \times c] + (c + d) = 9 \times [9 \times a + (a + b) + c] + (c + d)$
5	Adicione os algarismos ("nove fora")			$c + d$ (Que é a soma dos algarismos da idade, linha 13)

Quadro 11 - etapas algébricas do truque

Observamos que o número c + d , obtido na linha 5 do quadro acima, é o resto da divisão de cd (a idade) por 9, conforme linha 3: 9 x c + (c + d). Portanto, para recuperarmos a idade do participante, torna-se necessário adicionar a c + d múltiplos de nove até chegarmos ao número desejado.

- MÁGICA COM CALENDÁRIO I

Como o apresentador solicitou cinco números, sabe-se que o número do meio é um inteiro n. Logo, os cinco números podem ser: $n - 2$, $n - 1$, n , $n + 1$, $n + 2$. O voluntário ao efetuar a soma dos cinco números obtém . Portanto, o apresentador, ao efetuar a divisão , obtém n que é o número central.

O fato do número central ser um número inteiro não é essencial para se usar e entender o truque. Como o apresentador solicita cinco números consecutivos, os mesmos podem ser representados por: n , $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ e $n + 4$. Portanto, a soma dos cinco números é igual a $5n + 10$. O apresentador, ao efetuar a operação $(5n + 10) \div 5$, obtém $n + 2$, que é o número central; e, ao subtrair e somar um e dois, obtém os números restantes.

Possíveis variações do truque

Este truque é mais simples de ser apresentado se a quantidade de números for ímpar, pois, assim, o número central será sempre um inteiro. No entanto, o mesmo também funciona para uma quantidade par de números. O quadro abaixo exemplifica este fato.

Números escolhidos	**Adição**	Média aritmética
1, 2	3	$3 \div 2 = 1{,}5$
1, 2, 3, 4	10	$10 \div 4 = 2{,}50$
1, 2, 3, 4, 5, 6	21	$21 \div 6 = 3{,}50$

Quadro 12: exemplo de quantidade par de números, caso particular

A partir do quadro acima, observa-se que a parte inteira do resultado da divisão (na coluna da média aritmética) é o primeiro termo da sequência para dois números, o segundo termo para quatro números e o terceiro termo para seis números. De posse deste conhecimento, o apresentador 'anda' no calendário e revela os outros números.

Entretanto, existe outra maneira de se abordar este caso. Para tanto, consideramos o quadro 13 abaixo.

Quantidade par	Adição	Média aritmética
$n, n + 1$	$2n + 1$	$(2n + 1) \div 2 = n + 1$
$n,\ n + 1,\ n + 2,\ n + 3$	$4n + 6$	$(4n + 6) \div 4 = n + \frac{3}{2} = (n + 1) + \frac{1}{2}$
$n,\ n + 1,\ n + 2,\ n + 3,\ n + 4,\ n + 5$	$6n + 15$	$(6n + 15) \div 6 = n + \frac{5}{2} = (n + 2) + \frac{1}{2}$

Quadro 13: exemplo de quantidade par de números, caso genérico.

Do quadro acima, a coluna da média aritmética está compatível com o quadro anterior. No entanto, desejamos dar um enfoque especial à coluna da adição. Partindo-se desta coluna, por exemplo, $6n + 15$, o apresentador subtrai quinze e divide por seis para obter n, o primeiro número. Dessa forma, a divisão será exata. A vantagem dessa situação é a obtenção do primeiro termo da sequência; em contraste com a situação anterior, onde se torna necessário saber que, no caso de dois, de quatro e de seis termos, a parte inteira da divisão fornece o primeiro, o segundo e o terceiro termo, respectivamente.

Outro fato a ser ressaltado é que o calendário é só um dos tantos modelos que podem ser escolhidos para a montagem desse truque. Pode-se montar uma tabela parecida com o calendário, mas com 50 ou 80 dias, ou, então, se preferir, pode-se utilizar tabelas de jogos de azar como a quina ou a mega sena, entre outros, que já possuem uma sequência e a forma. A diferença é que essas tabelas têm dez números em uma linha, enquanto que o calendário possui apenas sete.

• MÁGICA COM CALENDÁRIO II

Inicialmente, foi solicitado que o voluntário escolhesse três números, sendo assim, temos algebricamente os números que estão no quadro 14.

$n - 7$
n
$n + 7$

Quadro 14: números escolhidos representados por uma letra

Notamos que esses números são escritos algebricamente a partir do número central n, trabalhando com o antecessor e sucessor do número genérico n; e o sucessor tem a diferença de 7 devido a semana ter sete dias.

Somando-se esses números teremos: $(n - 7) + (n) + (n + 7) = 3n$.

Logo, se o voluntário informar o resultado final, o apresentador saberá que esse é um múltiplo de 3. Assim, basta dividir o número final, mentalmente, por 3 e obter o número central dos três números. Os outros números serão, verticalmente, o anterior e o posterior a esse número; ou seja, devemos retroceder e progredir uma semana, respectivamente, para encontrar os outros dois números.

Outro fato a ser ressaltado é que o calendário é só um dos tantos modelos que podem ser escolhidos para a montagem desse truque. Você pode montar uma tabela parecida com o calendário, mas com 50 ou 80 dias, ou então, se preferir, utilizar tabelas de jogos como a quina, a mega sena, entre outros, que já possuem uma sequência e a forma. A diferença entre o calendário e as tabelas é a quantidade de números em cada linha.

Uma segunda abordagem seria não se preocupar com um número central e escolher os números n, $n+7$ e $n+14$. Logo, ao adicionarmos estes três números, obtemos: $(n)+(n+7)+(n+14)=3n+21$. Ao efetuarmos a divisão deste resultado por 3, também obtemos como resposta a expressão central: $\frac{3n+21}{3}=\frac{3n}{3}+\frac{21}{3}=n+7$. Deste ponto em diante basta subtrair e adicionar sete a $n+7$ para obter n e $n+14$, respectivamente.

- O NOME DA CARTA É . . .

Tomam-se os algarismos distintos do número como sendo as letras *x*, *y* e *z*. Assim, obtém-se o número *xyz*. Então, inverte-se a ordem desse número, gerando *zyx*. Como os algarismos são distintos, sem perda de generalidade, pode-se assumir que *xyz* é maior que *zyx*. Para que seja possível subtrair *zyx* de *xyz*, estes números são expressos na sua representação decimal. Depois de algumas simplificações, obtêm-se o resultado presente no quadro abaixo.

$$
\begin{aligned}
xyz - zyx = & \\
&= 10^2x + 10y + z - (10^2z + 10y + x) \\
&= 10^2x + 10y + z - 10^2z - 10y - x \\
&= (100x - x) + (10y - 10y) + (z - 100z) \\
&= 99x - 99z \\
&= 99(x - z)
\end{aligned}
$$

Quadro 15: subtração de dois números com representação literal

Como resultado da subtração, obteve-se 99(x – z). Visto que $1 \leq x, z \leq 9$ e como x e z são algarismos naturais distintos, tem-se que $1 \leq (x - z) \leq 8$. Assim, só é possível encontrar como resultado dessa multiplicação os seguintes números, cuja adição dos seus algarismos será sempre 18.

$(x-z)$	$99(x-z)$	Adição dos algarismos
1	99	$9+9=18$

2	198	$1+9+8=18$
3	297	$2+9+7=18$
4	396	$3+9+6=18$
5	495	$4+9+5=18$
6	594	$5+9+4=18$
7	693	$6+9+3=18$
8	792	$7+9+2=18$

Quadro 16: multiplicação de 99k, onde $1 \leq k \leq 8$

O quadro 16 acima ilustra porque a carta "ás de copas" é colocada na décima oitava posição do baralho.

Comentário: Na apresentação da *matemágica* solicitou-se um número com três algarismos não nulos. O truque pode ser modificado para incluir algarismos nulos. No entanto, o algarismo da centena não poderá ser nulo, pois, do contrário, não configuraria um número com três algarismos. Por exemplo, os números 057 e 57 são o mesmo número, dado que, na sua expansão decimal posicional há a seguinte representação:

$$057 = 0 \times 100 + 5 \times 10 + 7 = 5 \times 10 + 7 = 57.$$

- OBJETO INSÓLITO!

Este truque depende basicamente dos objetos que você selecionará, pois existe uma condição que deve ser satisfeita na escolha deles, a saber: cada objeto deve possuir uma quantidade distinta de letras. Por exemplo, uma boa escolha seriam os objetos lápis, caneta e tesoura, pois estes possuem 5, 6 e 7 letras, respectivamente. Dessa forma, supõe-se que o primeiro voluntário escolheu um objeto com x letras, e o segundo voluntário escolheu um número y (entre um e nove, inclusive). O quadro abaixo apresenta os passos.

Etapa	Álgebra
Multiplique este valor por 5	$5x$
Adicione três	$5x+3$
Multiplique por dois	$10x+6$
Adicione o número pensado	$10x+y+6$

Quadro 17: passos algébricos do truque

Note que ao subtrair seis da expressão $10x+y+6$, obtém-se $10x+y$, que é a representação do número xy no sistema posicional decimal. Isto é, obtém-se um número, onde x é o algarismo da dezena, e y o algarismo da unidade; sendo o primeiro, o número de letras do objeto escolhido e o segundo o número entre um e nove respectivamente. Dessa forma, torna-se claro porque os objetos devem ter os seus nomes com quantidades de letras distintas.

Em aula, seria interessante questionar os alunos da necessidade do número de letras do nome do objeto e o número escolhido estarem entre 1 e 9. Uma maneira de encontrar a resposta seria tentar efetuar o truque onde essas condições não são satisfeitas.

- UMA VARIAÇÃO DO TRUQUE (DADO INSÓLITO!)

Uma possível variação do "dado insólito" é a que vamos anunciar a seguir. Nesse caso, o apresentador precisará de um dado com seis faces. O apresentador solicita ao voluntário que, em segredo, lance o dado e memorize (ou escreva) o número que se encontra na face do dado voltada para cima; por exemplo 'quatro'. Continuando, multiplique esse número por dois [obtendo oito]. A seguir, adicione três [resultando em onze]. Multiplique por cinco [tendo como resultado 55]. Agora, solicite que lance o dado novamente e memorize (ou escreva) o resultado [por exemplo, 'nove']. Então, adicione este valor a 55 [resultando em 64].

O apresentador, de posse deste resultado final [64], subtrai 15 deste número para obter 49. Observa-se, então, que o algarismo da dezena [4] é o resultado do primeiro lançamento do dado, e o algarismo da unidade [9] é o resultado do segundo lançamento. O quadro 18 apresenta a álgebra dessa variação do truque, onde x e y são o primeiro e segundo lançamentos do dado respectivamente.

Etapa	Álgebra
Multiplique este valor por 2	$2x$
Adicione três	$2x+3$
Multiplique por cinco	$10x+15$
Adicione o segundo resultado	$10x+y+15$

Quadro 18: passos algébricos da variação do truque

Além do mais, outras variações algébricas são possíveis. Por exemplo, pode-se alterar o número adicionado após efetuar a primeira multiplicação.

É importante salientar que os valores de x e de y devem permanecer entre um e nove, inclusive. Se x estiver acima de nove, surgirá a casa da centena e se y estiver acima de nove, a casa da dezena sofrerá alteração. A base dessa argumentação é a expressão $10x+y$ [1], que é a representação posicional decimal do número xy. Se x estiver acima de nove, então o número x será da forma ab, cuja representação posicional decimal será $10a+b$ [2]. Logo, substituindo-se a expressão [2] em [1] ter-se-á que $10x+y=10(10a+b)+y=10^2a+10b+y$, o que implicará na perda da característica do número x. De maneira análoga, se y estiver acima de nove, então, y será da forma cd, cuja representação posicional decimal será $10c+d$ [3]. Ao substituir-se a expressão [3] em [1] ter-se-á que $10x+y=10x+10c+d=10(x+c)+d$, o que, também, implicará na perda da característica de y.

• DESCOBRINDO O NÚMERO DE PARENTES

Para esta explicação, sejam *m* "o número de irmãos do sexo masculino", *n* "o número de irmãs" e *v* "o número de avós vivos". O quadro 19 abaixo apresenta os passos.

	Instrução	Álgebra
1.	Número de irmãos do sexo masculino	m
2.	Multiplique por dois o número de irmãos	$2m$
3.	Adicione três ao resultado	$2m+3$
4.	Multiplique por cinco	$10m+15$
5.	Adicione o número de irmãs	$10m+n+15$
6.	Multiplique por dez	$100m+10n+150$
7.	Adicione o número de avós vivos	$100m+10n+v+150$

Quadro 19: passos e álgebra do truque

Do quadro 19, vemos que, ao subtrair 150 da expressão $100m+10n+v+150$, restará o número mnv, no sistema posicional decimal. Assim, o número de avós vivos se encontra na casa das unidades, o número de irmãs está na casa das dezenas e o número de irmãos do sexo masculino corresponde a casa das centenas.

É interessante observar as possibilidades de variações desse truque. Por exemplo: multiplicar inicialmente por cinco e não por dois, somar outro número diferente de três e assim por diante.

Outra observação importante concerne o fato da possibilidade de existirem mais de nove irmãos do sexo masculino ou irmãs. Se isso ocorrer, causará um problema no procedimento anterior. O quadro 20 considera o caso extremo, ou seja, o número de irmãos e irmãs maior do que nove.

	Instrução	Álgebra
1.	Número de irmãos do sexo masculino: ab	$10a+b$
2.	Multiplique por dois o número de irmãos	$2(10a+b)=20a+2b$
3.	Adicione três ao resultado	$20a+2b+3$
4.	Multiplique por cinco	$5(20a+2b+3)=100a+10b+15$
5.	Adicione o número de irmãs: cd	$100a+10b+15+10c+d$

6.	Multiplique por dez	$1000a+100b+150+100c+10d$
7.	Adicione o número de avós vivos	$1000a+100(b+c)+10d+v+150$

Quadro 20: caso do número de irmãos e irmãs ser maior que nove

No quadro 20 acima, vemos que se $b+c>9$ ocorrerá um acréscimo na casa do milhar, causando uma perda de identidade dos números originais. Esta é uma discussão interessante a ser realizada com os alunos, pois mostra que o truque tem suas limitações e, também, trabalha o conceito do algoritmo da adição.

- PENSAMENTO EM SINTONIA

Iniciamos a explicação com um exemplo.

1.	Escolha um número entre 1 e 9	4

Quadro 21: pessoa B

1.	Escolha um número entre 10 e 99	75
2.	Multiplique por 5	75 x 5 = 375
3.	Adicione 5 unidades	375 + 5 = 380
4.	Multiplique por 2	380 x 2 = 760
5.	*O mágico mentalmente:* 10 – (número da pessoa B)	10 – 4 10 - 4 = 6
6.	Subtraia 6 unidades (resultado do cálculo mental)	760 – 6 = 754
7.	Note que	754 = 75 x 100 + 4

Quadro 22: pessoa A

No quadro 22, após os procedimentos, da linha 7 temos que 754 é 75 x 100 + 4, e sabemos que 75 foi o número escolhido pela pessoa A e 4 o escolhido pela pessoa B. Assim, esse número final foi formado pela união dos números das duas pessoas, sendo assim, elas estavam sintonizadas mentalmente.

Algebricamente compreendemos que a pessoa B fez o seguinte procedimento.

1.	z	Número escolhido pela pessoa B ($1 \leq z \leq 9$)

Quadro 23: procedimento algébrico da pessoa B

Já a pessoa A fez o processo abaixo.

1.	xy	Número de duas unidades ($10 \leq xy \leq 99$)
2.	$(10x + y) \times 5 = 50x + 5y$	Multiplique por 5
3.	$(50x + 5y) + 5 = 50x + 5y + 5$	Adicione 5 unidades
4.	$(50x + 5y + 5) \times 2 = 100x + 10y + 10$	Multiplique por 2
5.	$10 - z$	*O mágico mentalmente:* 10 – (número da pessoa B)

6.	$(100x + 10y + 10) – (10 - z)$ $= 100x + 10y + z$	Subtraia 10 - z unidades (resultado do cálculo mental)
7.	$100x + 10y + z$	Note que assim você obterá na centena e na dezena o número da pessoa A e na unidade o da pessoa B

Quadro 24 - procedimento algébrico da pessoa A

No quadro 24, da linha 5 temos a conexão entre os números, já que é uma forma de eliminar o 10. Além do mais, a linha 7 do quadro acima proporciona uma mudança do truque: em vez do apresentador instruir a pessoa A na operação '10 menos o número da pessoa B', o mágico poderá solicitar a pessoa B que execute esse cálculo e que passe o resultado (em segredo) à pessoa A. Assim, a descoberta dos números escolhidos por A e B será ainda mais dramática.

• O ALGARISMO CORTADO

Explicação: Solicita-se que seja escolhido um número qualquer com quatro algarismos distintos e não nulos. Seja este número $abcd$, onde a, b, c e d são todos números naturais distintos e não nulos ($0 < a,\ b,\ c,\ d \leq 9$). Adicionando-se os algarismos deste número, obtém-se: $a+b+c+d$.

Continuando, elimina-se um dos algarismos do número $abcd$. Sem perda de generalidade, supõe-se que o c foi eliminado. Assim, tem-se o novo número de três algarismos: abd. O próximo passo consiste em efetuar a seguinte subtração: $abd-(a+b+c+d)$, que é um número positivo visto que a soma de quatro algarismos distintos nunca será um número com três algarismos. Para tanto, basta considerar o maior número de quatro algarismos distintos e não nulos que é 9876.

Para que esta operação de subtração seja possível, torna-se necessário expressar o número abd na sua base 10 (veja o Apêndice B): $abd = 10^2 a + 10^1 b + d10^0 = 100a + 10b + d$. Então,

$$abd-(a+b+c+d) = 100a+10b+d-a-b-c-d = 99a+9b-c$$

Como o valor de c pode ser, no máximo, 9; e o valor de a pode ser, no mínimo, 1, vê-se aqui outra justificativa para a subtração ser um número positivo.

Portanto, tem-se que $abd-(a+b+c+d) = 9(11a+b)-c$. Este é o único resultado revelado ao apresentador. Quando o apresentador, mentalmente, soma os dígitos deste número, ele estará efetuando uma divisão por 9, o dito "os noves fora". Abaixo será explicado que a expressão $9(11a+b)$ se reduz a 9, quando se usa o processo dos "noves fora". Logo, o apresentador chega à expressão 9 - c. Finalmente, ele subtrai $9-c$ de 9, obtendo: $9-(9-c)=c$. Este é o algarismo que foi eliminado no número original.

Divisão por nove e a relação com a soma dos algarismos de um número

Número	Divisão por 9 (Algoritmo de Euclides)	“Os noves fora”	Soma dos algarismos
10	$10 = 9 \times 1 + 1$	1	$1 + 0 = 1$
11	$11 = 9 \times 1 + 2$	2	$1 + 1 = 2$
12	$12 = 9 \times 1 + 3$	3	$1 + 2 = 3$
19	$19 = 9 \times 2 + 1$	1	$1 + 9 = 10 \;/\; 1 + 0 = 1$
20	$20 = 9 \times 2 + 2$	2	$2 + 0 = 2$
25	$25 = 9 \times 2 + 7$	7	$2 + 5 = 7$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Quadro 25 - divisão por 9 e “os noves fora”

No quadro 25 acima, não foram incluídos os números que são múltiplos de nove, visto que a divisão por nove teria um resto zero. No entanto, a soma dos algarismos não será zero, mas sim nove, conforme já mencionado anteriormente.

Número	Soma dos algarismos
9	9
18	$1+8=9$
27	$2+7=9$
36	$3+6=9$
99	$9+9=18 \rightarrow 1+8=9$
189	$1+8+9=18 \rightarrow 1+8=9$
$\ldots$	$\ldots$

Quadro 26: "os nove fora" para múltiplos de nove

Outra maneira de abordar esse fato é expandir o número múltiplo de nove em sua representação de base decimal. Por exemplo, o número 18 na sua representação de base decimal é $1\times10+8$. Como a intenção é efetuar uma divisão por nove, substitui-se 10 por 9+1. Então, $1\times10+8=1\times(9+1)+8$. No próximo passo, aplica-se a propriedade distributiva e, após, a propriedade associativa da adição:

$$18=1\times10+8=1\times(9+1)+8=(1\times9+1\times1)+8=1\times9+\underbrace{(1+8)}_{\text{soma dos algarismos}}=1\times9+9$$

Se o número em $(1+8)$ for maior do que 9, então o processo se repete até obter-se um resultado entre 1 e 9.

Mas, como se pode notar que, em geral, a soma dos dígitos de um número dado revela o resto da divisão deste por nove? Para fixar as ideias, considera-se um número com três algarismos abc, sendo $0 < a \leq 9$ (do contrário, o número não teria três algarismos), $0 \leq b,\ c \leq 9$. Ao representar esse número na sua representação de base 10, tem-se que: $abc = 100 \times a + 10 \times b + c$. Como este número está sendo di-vido por 9, deseja-se obter uma expressão da forma $9 \times q + r$. Para tanto, sabe-se que $100 = 99 + 1$ e $10 = 9 + 1$. Portanto, $abc = 100 \times a + 10 \times b + c = (99+1)a + (9+1)b + c$. No próximo passo, usa-se a propriedade distributiva e se retira os parênteses, pois não existe a prioridade de adicionar antes de multiplicar e obtém-se como resul-tado o seguinte:

$$abc = (99+1)a + (9+1)b + c = (99a + a) + (9b + b) + c = 99a + a + 9b + b + c.$$

Para finalizar, aplica-se a propriedade comutativa e associativa da adição, assim como a propriedade distributiva e a propriedade associativa da adição respectivamente:

$$abc = 99a + a + 9b + b + c = 99a + 9b + a + b + c = 9(11a + b) + (a + b + c)$$
$$\therefore abc = 9(11a + b) + (a + b + c)$$

Vê-se, então, que a igualdade acima se encontra na forma $abc = 9 \times q + r$, onde $r = a + b + c$, ou seja, a soma dos algarismos do número em questão é o resto da divisão deste número por nove. Se esta soma for maior do que nove, repete-se o processo até encontrarmos um número entre zero e nove.

- IGUALANDO AS CARTAS

Após as instruções, no baralho de 52 cartas, você tem 20 cartas voltadas para cima e 32 cartas voltadas para baixo. Estas estão misturadas. Você forma dois montes de cartas com 20 e 32 cartas respectivamente. No monte de 20 cartas, você tem x cartas para cima e $20-x$ voltadas para baixo. No monte de 32 cartas, você tem $20-x$ cartas para cima (pois no monte de 20 cartas você tinha x para cima e, originalmente, foram voltadas para cima 20 cartas e, depois, misturadas no baralho). Logo, tem-se o quadro 27 abaixo.

	Monte de 20 cartas	**Monte de 32 cartas**
Cartas para cima	x	$20-x$
Cartas para baixo	$20-x$	$12+x$

Quadro 27: relação devido a divisão das cartas

Portanto, o número de cartas para baixo no monte de 20 cartas é igual ao número de cartas para cima no monte de 32 cartas. Desta forma, ao simplesmente virar todo o monte de 20 cartas, o número de cartas voltadas para cima se iguala nos dois montes.Outra maneira de explicar esse truque é formar um sistema de equações.

Seja X_b^{20} o número de cartas voltadas para baixo no baralho de 20 cartas, Y_c^{20} o número de cartas voltadas para cima no baralho de 20 cartas e Z_c^{32} o número de cartas voltadas para cima no baralho de 32 cartas. Então,

- O número de cartas no monte de 20 cartas é igual a 20;

- O número total de cartas voltadas para cima nos dois montes é igual a 20.

Assim, tem-se o sistema de equações de primeira ordem:

(1) $X_b^{20} + Y_c^{20} = 20$

(2) $Y_c^{20} + Z_c^{32} = 20$

De (2), tem-se que (3) $Y_c^{20} = 20 - Z_c^{32}$. Substitui-se (3) em (1) para obter $X_b^{20} + \left(20 - Z_c^{32}\right) = 20$. Logo, $X_b^{20} = Z_c^{32}$; ou seja, o número de cartas voltadas para baixo, no monte de 20 cartas, é igual ao número de cartas voltadas para cima no monte de 32 cartas. Portanto, quando você virar o monte de 20 cartas, ele torna igual o número de cartas voltadas para cima em ambos os montes.

Note que o número 20 no truque é irrelevante. No sistema de equações, o número vinte poderia ser substituído por um escalar qualquer c. Logo, você, como professor, poderia propor aos alunos que apresentassem variações deste truque, culminando com a explicação matemática completa do truque. Poderia, ainda, solicitar variações na maneira de resolver o sistema de equações: por substituição, por adição, matricial.

Além do mais, é importante salientar que durante a apresentação desse truque, você deve ter o cuidado para manter os montes sempre na posição original estipulada, que é para cima. Por exemplo, se o voluntário, ao tomar em suas mãos o monte de 32 cartas, virar o monte para baixo antes de contar as cartas que estão voltada para cima, então o resultado será diferente. No entanto, se este fato ocorrer durante uma apresentação, certamente configura um momento de análise, discussão e aprendizagem para todos.

• O TRUQUE DA SOMA

Um número de três algarismos distintos pode ser representado por abc e este número invertido por cba. Para efetuar a subtração destes dois números, torna-se necessário representá-los na forma do sistema posicional decimal. Sem perda de generalidade, pode-se supor que abc é maior que cba, pois, do contrário, invertem-se os papéis. Então, para efetuar a subtração torna-se necessário expressar os números na sua representação decimal (Apêndice B):

$$a10^2 + b10^1 + c10^0 - \left(c10^2 + b10^1 + a10^0\right)$$

Aplicando-se a propriedade distributiva, comutando-se e associando-se, tem-se:

$$= a10^2 + b10 + c - c10^2 - b10 - a =$$
$$= (100a - a) + (10b - 10b) + (c - 100c) = 99a - 99c = 99(a - c)$$

Como $a > c$ (pois, $99(a-c) \geq 0$) tem-se, ainda, que $1 \leq a - c \leq 9$. Logo, obtém-se o quadro 28 que segue.

$a-c$	$99(a-c)$
1	99
2	198
3	297
4	396

5	495
6	594
7	693
8	792
9	891

Quadro 28: quadro de possibilidades

O passo final consiste em inverter os números da segunda coluna e somá-los. No entanto, é suficiente efetuar esta etapa até $a-c=5$, pois existe uma simetria em relação à linha 5.

	99	198	297	495
	99	891	792	594
Soma	198	1089	1089	1089

Quadro 29: quadro formado pela inversão dos números

Portanto, isso leva aos resultados previstos.

A explicação que segue é mais extensa. No entanto, ajuda a entender a origem do número 198.

Da sua representação decimal (Apêndice B), tem-se que:

$$a10^2 + b10^1 + c10^0 - \left(c10^2 + b10^1 + a10^0\right)$$

Aplicando a propriedade distributiva, obtém-se:

$$= a10^2 + b10 + c - c10^2 - b10 - a$$

Comutando e evidenciando (propriedade distributiva) os termos 10^2 e 10^1 respectivamente:

$$= (a-c)10^2 + (b-b)10^1 + (c-a)$$

$$= (a-c)10^2 + (0)10^1 + (c-a)$$

Como $a > c$, o algarismo na casa da unidade é negativo: $c - a < 0$. Logo, toma-se emprestado da casa da dezena:

$$= (a-c)10^2 + (1-1)10^1 + (c-a)$$

Aplicando a propriedade distributiva na expressão central e, depois, comutando e associando novamente:

$$= (a-c)10^2 + 10^1 - 10^1 + (c-a)$$

$$= (a-c)10^2 + 10^1 - 10^1 + (c-a)$$

$$= (a-c+1-1)10^2 + (-1)10^1 + (10+c-a)$$

Agora, tem-se que $0 < 10 + c - a \leq 9$.

Uma vez que, na expressão central, o algarismo deve estar entre 0 e 9 (no caso é -1), toma-se emprestado da casa da centena:

$$= (a-c+0)10^2 + (-1)10^1 + (10+c-a)$$

$$= \left[a-c+(1-1)\right]10^2 + (-1)10^1 + (10+c-a)$$

Aplicando a propriedade distributiva na expressão $\left[a-c+(1-1)\right]10^2$ e, depois, comutando e associando:

$$\boxed{= (a-1-c)10^2 + \left(10^2 - 10\right) + (10+c-a)}$$

$$= (a-1-c)10^2 + 9\times 10^1 + (10+c-a)$$

O próximo passo é inverter esse número e efetuar a soma:

$$\left[(a-1-c)10^2 + 9\times 10^1 + (10+c-a)\right] + \left[(10+c-a)10^2 + 9\times 10^1 + (a-1-c)\right] =$$

$$= 9\times 10^2 + 18\times 10^1 + 9 = 1089$$

O que aconteceu com o número 198? Esse número aparece no caso em que $c = a - 1$. Nesse caso, continuando da expressão enquadrada acima, a casa da centena desaparece e obtém-se:

$$\boxed{(a-1-c)10^2 + \left(10^2 - 10\right) + (10 + c - a)}$$

$$= (0)10^2 + \left(10^2 - 10\right) + (10 - 1)$$

$$= 99$$

Ao inverter esse número e efetuar a soma, tem-se 198!

- SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Parte I: Este truque é baseado na Sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8,... . O primeiro e o segundo termos são 1. A partir do terceiro termo, cada termo é a soma dos dois anteriores. Observa-se o quadro 30 a seguir.

1.	1
2.	1
3.	2
4.	3
5.	5
6.	8
7.	13
8.	21
9.	34

10.	55
Soma	143

Quadro 30: os dez primeiros termos da sequência de Fibonacci

Ao observar a linha 7, vê-se que o número que consta na linha (13) multiplicado por 11 é igual a soma dos dez termos: $13 \times 11 = 143$. Eis a relação!No entanto, ao algebrizar esse truque, essa relação torna-se ainda mais evidente, visto que os coeficientes numéricos são, exatamente, os termos da sequência de Fibonacci, conforme o quadro 30 acima. Portanto, seja x um número qualquer na primeira linha e y outro número qualquer na segunda linha. Assim, tomando o próximo como a soma dos dois anteriores, como descrito acima, obtém-se o seguinte desenvolvimento algébrico.

1.	x
2.	y
3.	$x+y$
4.	$x+2y$
5.	$2x+3y$

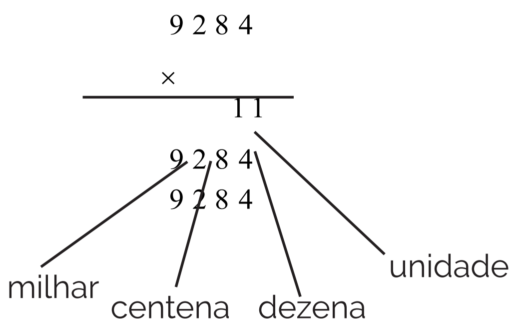
6.	$3x+5y$
7.	$5x+8y$
8.	$8x+13y$
9.	$13x+21y$
10.	$21x+34y$
Soma	$55x+88y=11(5x+8y)$

Quadro 31 - desenvolvimento algébrico do truque de Fibonacci

Nota-se que a sétima expressão algébrica da sequência multiplicada por 11 (onze), é o resultado da soma das dez expressões algébricas. Assim sendo, o apresentador, no momento que pede para visualizar a folha por alguns segundos, memoriza somente o sétimo número e, portanto, multiplica-o, mentalmente, por onze.

- O CÁLCULO MENTAL (MULTIPLICAÇÃO POR 11)

O cálculo mental é efetuado da seguinte forma. Deseja-se calcular, por exemplo, 9284×11. Para obter o resultado final, mentalmente, mantém-se o algarismo da casa da unidade de 9284, que é 4. O algarismo da casa da dezena, na resposta, é a soma dos algarismos das casas da unidade e dezena (4+8=12). Logo, o algarismo da dezena será 2 e carrega-se o 1. O algarismo da casa da centena é a soma dos algarismos das casas da dezena e centena (2+2=10); mais o 1 anterior, tem-se 11. Portanto, o algarismo da casa da centena, na resposta, será o 1 e leva-se o 1. Até o momento, tem-se a resposta final como sendo _ _ _ 124. O algarismo da casa do milhar é a soma dos algarismos das casas da centena e milhar (2+9=11). Ao somar o 1 anterior, tem-se 12. Logo, o algarismo da casa do milhar é o 2 e leva-se 1. Finalmente, baixa-se o 9 (de 92824) mais o 1 (que sobrou da soma anterior) para obter-se 10. O resultado da multiplicação é 102124. O procedimento está resumido no quadro 32.



Quadro 32: explicação visual da multiplicação mental por 11

Em geral, na primeira vez que este truque é apresentado, os expectadores escolhem números não muito grandes para escrever nas linhas um e dois. No entanto, se a matemágica for repetida, a experiência dita que esses números serão consideravelmente maiores e isso implica em ter que memorizar um número com vários dígitos. Entretanto, a prática faz a perfeição!

Parte II: A divisão do valor na décima linha pelo valor da nona linha sempre estará correto até a segunda casa decimal: 1,61. Isso se deve ao fato do número de ouro, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398\ldots$, ter uma relação muito íntima com a sequência de Fibonacci. A partir da sequência de Fibonacci, ao ser efetuada a divisão do termo seguinte pelo anterior, observa-se a formação de um padrão, conforme o quadro abaixo.

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Quadro 33: os doze primeiros termos da sequência de Fibonacci

À medida que as divisões são efetuadas, observa-se a formação de um padrão na direção do número de ouro: $\frac{f_2}{f_1}=1$, $\frac{f_3}{f_2}=2$, $\frac{f_4}{f_3}=1,5$, $\frac{f_5}{f_4}\approx 1,666667$, $\frac{f_6}{f_5}=1,6$, $\frac{f_7}{f_6}=1,625$. Observe que o número 1,6 se estabilizou. Ao continuar o processo, vê se a segunda casa decimal também se estabilizar: $\frac{f_8}{f_7}\approx 1,61538462$, $\frac{f_9}{f_8}\approx 1,61904762$, $\frac{f_{10}}{f_9}\approx 1,61764706$, $\frac{f_{11}}{f_{10}}\approx 1,618181818$, $\frac{f_{12}}{f_{11}}\approx 1,617977528$. Nesse ponto, tem-se que a segunda casa decimal também se estabilizou, obtendo o número 1,61.

Por outro lado, considerando as expressões algébricas no quadro 31, tem-se que a divisão da expressão na décima linha pela nona linha é $\frac{21x+34y}{13x+21y}$ e, portanto chega-se a seguinte propriedade: $\frac{21}{13}\leq\frac{21x+34y}{13x+21y}\leq\frac{34}{21}$, $\forall x,y>0$ [*]. Aqui, observa-se que $\frac{21}{13}\approx 1,61538\ldots$ e $\frac{34}{21}\approx 1,6190\ldots$, o que garante que a expressão $\frac{21x+34y}{13x+21y}$ deverá ser aproximadamente $1,61$, até a segunda casa decimal. A prova de [*] é dividida em duas partes:

$$\frac{21}{13}\leq\frac{21x+34y}{13x+21y} \text{ e } \frac{21x+34y}{13x+21y}\leq\frac{34}{21}.$$

Neste momento, demonstra-se a primeira desigualdade: $\frac{21}{13}\leq\frac{21x+34y}{13x+21y}$. Para visualizar como prová-la, efetua-se uma desconstrução:

$\frac{21}{13}\leq\frac{21x+34y}{13x+21y} \Rightarrow 21(13x+21y)\leq 13(21x+34y)$ (pois, $13x+21y>0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 21\times 13\times x+(21)^2 y\leq 13\times 21\times x+13\times 34\times y$ (pela propriedade distributiva) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 441y\leq 442y$ (visto que se subtraiu $21\times 13\times x$ em ambos os lados) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 441\leq 442$ (pois $y>0$), o que é uma verdade.

Cada passo efetuado acima admite uma operação inversa. Portanto, a demonstração consiste no seguinte procedimento: parte-se de uma verdade $441 \leq 442$ e se executa as operações inversas:

$441 \leq 442 \Rightarrow 441y \leq 442y$ (pois $y > 0$) $\Rightarrow (21)^2 y \leq 13 \times 34 \times y$

$\Rightarrow 21 \times 13 \times x + (21)^2 y \leq 13 \times 21 \times x + 13 \times 34 \times y$ (adiciona-se $21 \times 13 \times x$ em ambos os lados)

$\Rightarrow 21(13x + 21y) \leq 13(21x + 34y)$ (pela propriedade distributiva) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{21}{13} \leq \frac{21x + 34y}{13x + 21y}$ (porque $13x + 21y > 0$). A outra desigualdade é análoga e deixa-se a cargo do leitor.

• O VALOR DA CARTA É . . .[3]

Sempre que executado corretamente, o truque funcionará. Mas, por quê? Para tanto, seja x o valor numérico da primeira carta para um dos três montes escolhidos. Então, ao ser realizada a contagem até 13, obtém-se $13-x$ cartas neste monte, pois este é o valor de cartas que faltam para chegar até 13. Observe, no entanto, que a primeira carta não foi considerada na contagem. Portanto, este monte terá $(13-x)+1$ cartas; ou seja, $14-x$ cartas. Por exemplo, se o valor numérico da primeira carta for o valete de copas, então, para chegar até treze, são necessárias duas cartas $(13-x=13-11=2)$ e, somando um a este resultado, resulta três cartas para o monte em questão.

Sejam X, Y e Z o número de cartas dos montes cujo valor numérico da primeira carta é x, y e z respectivamente. Logo, tendo em vista a argumentação do parágrafo anterior, tem-se que: $X=14-x$, $Y=14-y$ e $Z=14-z$.

Lembrando que o baralho em questão tem 52 cartas e N é o número de cartas que sobraram ao serem escolhidos os três montes, chega-se a quarta equação: $X+Y+Z+N=52$. É importante lembrar que se sabe o valor de x e y (os valores numéricos das cartas dos dois primeiros montes) e deseja-se descobrir o valor de z. A solução deste sistema de quatro equações encontra-se no quadro abaixo.

Sistema de equações	Solução
$X=14-x$ $Y=14-y$ $Z=14-z$ $X+Y+Z+N=52$	$X+Y+Z+N=52$ $(14-x)+(14-y)+(14-z)+N=52$ $42-x-y-z+N=52$ $N-x-y-z=10$ $z=N-10-x-y$

3 A solução apresentada também pode ser encontrada em Matthews (2008). No entanto, a ideia de usar duas pessoas A e B foi do grupo.

Quadro 34: solução de um sistema de equações

A solução apresentada no quadro 34 parte da quarta equação e substitui as outras nesta. No entanto, salienta-se a importância de questionar os alunos para apresentarem outra forma de resolução. A seguir, apresenta-se uma segunda ideia de solução.

Parte-se das três primeiras equações $X = 14 - x$, $Y = 14 - y$ e $Z = 14 - z$ para obter $X + x = Y + y = Z + z = 14$. Portanto, $(X + x) + (Y + y) + (Z + z) = 42$.
Logo, $x + y + z + (X + Y + Z) = 42$; e como $X + Y + Z + N = 52$, tem-se que $x + y + z + (52 - N) = 42$. Assim, conclui-se que $z = N - 10 - x - y$.

Espera-se que você tenha aproveitado este livro. Ele foi preparado com muito carinho e dedicação!

5| REFERÊNCIAS

BERGLAS, M. **110 amazing magic tricks with everyday objects**. London: Marvin's Magic, 2002.

BORIN, J. **Jogos e Resolução de Problemas:** uma estratégia para as aulas de Matemática. São Paulo: IME – USP, 1995.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

FAJARDO, R. et al. **Matemágica na Sala de Aula**. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. Anais ... Salvador: SBEM (Publicado em CD-ROM).

GARDNER, M. **Divertimentos matemáticos.** Tradução de Bruno Mazza. 3. Ed. São Paulo: IBRASA, 1998.

HUNTLE, H. E. **The Divine Proportion**: a study in mathematical beauty. New York: Dover Publications, Inc., 1970.

LINDHORST, W. L. **Modern Magic**: Tricks for Boys and Girls. Chicago: The Reilly & Lee Co., 1937.

MATTHEWS, M. E. **Selecting and Using Mathemagic Tricks in the Classroom.** Mathematics Teacher, Vol. 102, no. 2, September 2008.

MURDOCK, J. et al. **Discovering Algebra**: An Investigative Approach. Vol. 1. California: Key Curriculum Press, 2000.

OLIVA, L. **Matemática sem traumas, para todos.** Direcional Escolas, São Paulo, n.13, p.16-19, fev. 2006.

PALLAS, N. **Calculator,** Puzzles, Tricks and Games. New York: Dover Publications, Inc., 1976.

SIMON, W. **Mathematical Magic**. New York: Dover Publications, Inc., 1993.

6| APÊNDICES

• APÊNDICE A

Propriedades (axiomas) básicas (básicos) do conjunto dos números reais R.

Usamos a abreviação “A” para representar a operação de adição e “M” para a operação de multiplicação.

Propriedade de Fechamento	
A1. Se a e b estão em R, então $a+b$ também.	M1. Se a e b estão em R, então $a\times b$ também.
Propriedade Comutativa	
A2. Para todo a e b em R, temos que $a+b=b+a$.	M2. Para todo a e b em R, temos que $a\times b=b\times a$.
Propriedade Associativa	
A3. Para todo a, b e c em R, temos que $a+(b+c)=(a+b)+c$.	M3. Para todo a, b e c em R, temos que $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$.
Propriedade do Elemento Neutro/Identidade	

A4. Existe um elemento em R, denominado 0, tal que $0+a=a$, para todo a em R.	M4. Existe um elemento em R, denominado 1, tal que $1\times a=a$, para todo a em R.
Propriedade do Elemento Oposto/Inverso	
A5. Para todo a em R, existe um x em ℝ tal que $a+x=0$, denotado por $-a$.	M5. Para todo a em ℝ $-\{0\}$, existe um x em R tal que $a\times x=1$, denotado por $\frac{1}{a}$.
Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à Adição	
D. Para todo a, b e c em R, temos que $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$.	

• APÊNDICE B

O Teorema de Representação de um número inteiro positivo na base 10. Sejam a um número inteiro positivo e n um inteiro não negativo que pode ser encontrado, juntamente com um conjunto de $n+1$ inteiros: $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_n$ tal que a pode ser unicamente representado da seguinte forma: $a = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n$

com $0 \le a_i < 10$ para $i \ne n$ e $0 < a_n < 10$.

EXPEDIENTE

EDITORA

Aline Roes Dalmolin

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Danielle Neugebauer Wille

COORDENAÇÃO ADMINISTRATIVA

Taiani Bacchi Kienetz

CAPA

Francielle Fanaya Réchia

PROJETO GRÁFICO, EDITORAÇÃO E DIAGRAMAÇÃO

Amanda da Silva Cruz

Danielle Neugebauer Wille

REVISÃO

Aline Roes Dalmolin

Amanda da Silva Cruz

Danielle Neugebauer Wille

Rejane Beatriz Fiepke

- **SOBRE OS AUTORES**

Ricardo Fajardo: Docente desde 2005 do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE). Bacharel em Matemática (1985, UFRGS). Mestre em Matemática (1989, University of Rochester, NY), Ph. D. (1993, University of Rochester, NY) – e-mail: rfaj@ufsm.br.

Natália Alessandra Kegler: Departamento de Matemática, Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE). Aluna do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física e Graduada em Licenciatura em Matemática. Atuação como professora de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e em turmas de Cursos Preparatórios – e-mail: nathy_kegler@hotmail.com.

Alex Jenaro Becker: Departamento de Matemática, Centro de Ciências Naturais e Exatas da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Licenciado e Bacharel em Matemática pela UFSM. Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSM. Docente do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha, Campus São Vicente do Sul – e-mail: alexjenaro@gmail.com.

ufsm.br/pre

PRE
Pró-Reitoria de Extensão

Universidade Federal de Santa Maria

SEDES SAPIENTIÆ

1960