

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Caroline Maria Assmann

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DOS  
GRÁFICOS MÍNIMOS COM DADO NO BORDO LIPSCHITZ  
CONTÍNUO

Santa Maria, RS  
2016

Caroline Maria Assmann

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DOS GRÁFICOS  
MÍNIMOS COM DADO NO BORDO LIPSCHITZ CONTÍNUO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Ari João Aiolfi

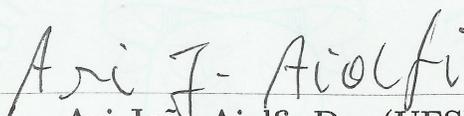
Santa Maria, RS  
2016

Caroline Maria Assmann

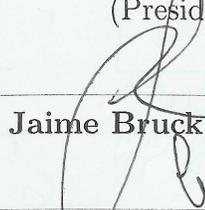
**O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DOS GRÁFICOS  
MÍNIMOS COM DADO NO BORDO LIPSCHITZ CONTÍNUO**

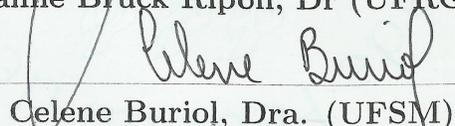
Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM - RS), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 02 de Dezembro de 2016:



Ari João Aiolfi, Dr. (UFSM)  
(Presidente/Orientador)

  
Jaime Bruck Ripoll, Dr (UFRGS)

  
Celene Buriol, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS  
2016

## RESUMO

### O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DOS GRÁFICOS MÍNIMOS COM DADO NO BORDO LIPSCHITZ CONTÍNUO

AUTORA: Caroline Maria Assmann

ORIENTADOR: Ari João Aiolfi

Neste trabalho estudamos existência e não existência do problema de Dirichlet para a equação dos gráficos mínimos em domínios não convexos do plano. Procuramos por condições sobre o dado no bordo que sejam as menos restritivas possíveis para que o problema de Dirichlet em questão tenha solução.

**Palavras-chave:** Método de Perron. Problema de Dirichlet. Gráficos Mínimos. Domínio não Convexo.

## ABSTRACT

### THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE MINIMAL GRAPH EQUATION WITH LIPSCHITZ CONTINUOUS BOUNDARY DATA

AUTHOR: Caroline Maria Assmann

ORIENTATOR: Ari João Aiolfi

In this work, we study existence and non existence for the Dirichlet problem for the minimal graph equation in non convex domains of the plane. We search for conditions on the boundary data which be the less restricted possible for the solubility of the Dirichlet problem.

**Keywords:** Perron Method. Dirichlet Problem. Minimal Graphic. Nonconvex Domains.

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>4</b>
<b>1 PRELIMINARES</b>	<b>8</b>
1.1 ESPAÇOS DE HÖLDER . . . . .	8
1.2 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE OPERADORES ELÍPTICOS DE 2ª ORDEM . . . . .	9
1.2.1 Princípio do Máximo . . . . .	11
1.3 O MÉTODO DE PERRON . . . . .	17
1.3.1 Condições necessárias para aplicabilidade do Método de Perron . . . .	17
1.3.2 O Método de Perron . . . . .	18
1.4 OUTROS RESULTADOS PRELIMINARES E NOTAÇÕES . . . . .	23
<b>2 TEOREMAS DE EXISTÊNCIA</b>	<b>26</b>
2.1 SOLUÇÕES NÃO LIMITADAS . . . . .	26
2.2 SOLUÇÕES LIMITADAS . . . . .	34
<b>3 RESULTADOS DE NÃO EXISTÊNCIA</b>	<b>42</b>
3.1 NÃO EXISTÊNCIA PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA DOMÍNIOS NÃO CONVEXOS LIMITADOS . . . . .	42
3.2 NÃO EXISTÊNCIA PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET EM DOMÍNIOS NÃO CONVEXOS E ILIMITADOS . . . . .	64
<b>4 CONCLUSÃO</b>	<b>69</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>71</b>

# INTRODUÇÃO

O problema de Dirichlet para a equação dos gráficos mínimos em um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^2$ ,  $n \geq 2$ , consiste em encontrar uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  que satisfaça

$$\begin{cases} \mathfrak{M}(u) := \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0, & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad (1)$$

onde  $f \in C^0(\partial\Omega)$  é dada *a priori*.

Este é um problema clássico que vem sendo investigado há mais de um século.

Relativamente a domínios limitados  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , sabemos desde os trabalhos pioneiros de Radó (1930) e Finn (1954, 1965), que o problema (1) tem solução única para qualquer  $f \in C^0(\partial\Omega)$  se e somente se  $\Omega$  é convexo.

Quando  $\Omega$  é limitado e não convexo em média, isto é,  $\partial\Omega$  tem ao menos um ponto onde a curvatura média é negativa, um clássico resultado foi dado por Jenkins & Serrin (1968). Eles mostraram que se o dado no bordo  $f$  é restringido de alguma forma, o problema (1) pode ser resolvido, conforme Teorema 2 de Jenkins & Serrin (1968). Mais precisamente, eles provaram que se  $f \in C^2(\partial\Omega)$  e

$$\operatorname{osc}(f) := \sup_{\partial\Omega} f - \inf_{\partial\Omega} f \leq \mathfrak{B}(|Df|, |D^2f|, \Omega),$$

onde  $\mathfrak{B}$  tem uma forma explícita dada na seção 3 de Jenkins & Serrin (1968, p. 179), então o problema (1) tem solução. Em particular, mostraram que  $\mathfrak{B} = \infty$  se  $\Omega$  é convexo em média. Observamos que, convexo em média, para  $n = 2$ , equivale a ser convexo.

No entanto, tal restrição sobre o dado no bordo não é a melhor possível, como será visto ao longo de nossa explanação nos próximos capítulos e é justamente este o objetivo desta dissertação.

Nos concentraremos em domínios não convexos em média, buscando condições que sejam as menos restritivas possíveis sobre o dado no bordo. Nosso interesse estará nas condições dadas por Williams (1984) no Teorema 1. Williams (1984) mostrou que, para  $\Omega$

limitado e não convexo em média e  $f \in C^{0,1}(\partial\Omega)$  com constante de Lipschitz

$$Lip(f) = K \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right),$$

o problema (1) tem solução se  $osc(f)$  é pequena o suficiente, menor que uma certa constante que depende de  $n$ ,  $K$  e  $\Omega$ , i.e,  $osc(f) < \varepsilon(n, K, \Omega)$ . Mostrou que, sem uma hipótese sobre  $osc(f)$ , pode-se encontrar dado no bordo  $f$ , com  $Lip(f)$  tão pequena quanto se queira, tal que o problema (1) não tem solução. Também provou que, se  $K > \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ , existe um dado no bordo  $f$  não negativo tal que o problema (1) não tem solução (Teorema 4 de Williams (1984)).

Estudaremos aqui o Teorema 1 (existência) e Teorema 4 (não existência) de Williams (1984) no contexto do  $\mathbb{R}^2$ , sendo que, para o teorema de existência, optamos por um resultado de Ripoll & Tomi (2014), válido tanto para domínios limitados como não limitados (sendo que para este último caso, buscamos soluções limitadas), o qual exhibe a condição sobre a constante de Lipschitz dada por Williams (1984) de uma forma mais explícita.

Quanto a domínios não limitados e soluções ilimitadas do problema (1), exploraremos o resultado de existência devido a Kutev & Tomi (1998) o qual leva em consideração a mesma hipótese sobre a constante de Lipschitz de Williams (1984). Também exploraremos um resultado de não existência para domínios não limitados dos mesmos autores.

Os teoremas de existência para o problema de Dirichlet (1) estão concentrados no Capítulo 2.

Provamos inicialmente o Teorema E de Kutev & Tomi (1998). A escolha por começar por este resultado ficará clara no decorrer da dissertação.

Seja  $\partial^-\Omega$  o conjunto dos pontos não convexos de  $\partial\Omega$ ,  $R(x)$  o raio do disco de maior raio contido em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  que tangencia  $\partial\Omega$  em  $x \in \partial^-\Omega$  e

$$R := \inf \{R(x); x \in \partial^-\Omega\}. \quad (2)$$

Com esta notação, no que tange a soluções não limitadas vimos o seguinte resultado de Kutev & Tomi (1998):

**Teorema A (Teorema E, Kutev & Tomi (1968))** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio de classe  $C^2$  tal que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  é limitado e seja  $f \in C^0(\partial\Omega)$ . Dados  $\mu \in (-R, R)$ ,  $\delta > 0$  e  $K \in [0, \sqrt{1 - |\mu|/R})$ , existe  $\varepsilon = \varepsilon(\mu, \delta, K, \Omega) > 0$  tal que, se  $f$  satisfaz*

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|, x \in \partial^-\Omega, y \in \partial\Omega, |y - x| \leq \delta \quad (3)$$

e

$$\operatorname{osc}_{\partial\Omega}(f) < \varepsilon \quad (4)$$

o problema de Dirichlet (1) possui solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  satisfazendo

$$u(x) = \mu \ln |x| + O(1), \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Em seguida, mostraremos o Teorema 2 de Ripoll & Tomi (2014), qual seja:

**Teorema B (Teorema 2, Ripoll & Tomi (2014))** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio de classe  $C^2$  e tal que  $R$  como em (2) seja positivo. Seja  $K \in [0, 1)$  tal que o dado no bordo  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz*

$$|f(y) - f(x)| \leq K |y - x|, \quad x \in \partial^-\Omega, \quad y \in \partial\Omega, \quad (6)$$

Se

$$K \geq K_0 := \frac{\cosh^{-1}(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{4\sqrt{2} + 6}} \simeq 0,44771$$

então defina o parâmetro  $\mu \in (0, \sqrt{2}]$  pela equação

$$\frac{\cosh^{-1}(1 + \mu)}{\sqrt{\mu} \sqrt{2 + 3\mu + \mu^2}} = K. \quad (7)$$

Se  $K \leq K_0$  então defina  $\mu = \sqrt{2}$ . Então o Problema de Dirichlet (1) tem solução limitada  $u$  para qualquer  $f \in C^0(\partial\Omega)$  desde que, adicionalmente a (6), satisfaça

$$\operatorname{osc}(f) := \sup_{\partial\Omega} f(y) - \inf_{\partial\Omega} f(y) \leq \frac{\mu}{1 + \mu} R \cosh^{-1}(1 + \mu). \quad (8)$$

O método utilizado para a prova de ambos os resultados acima será o Método de Perron, o qual está descrito no Capítulo 1. Observamos que, relativamente ao Teorema A, Kutev & Tomi (1998) mostram ainda que a solução  $u$  obtida é única satisfazendo a condição assintótica (5). Também Ripoll & Tomi (2014), relativamente ao Teorema B, mostram a unicidade da solução, que decorre, se  $\Omega$  é limitado, do Princípio do Máximo para a diferença de duas soluções (ver p. 17). Porém para domínios não limitados não é tão evidente. Estas questões relativas a unicidade não serão tratadas aqui pois seriam necessários uma série de outros resultados, o que fugiria um pouco de nosso objetivo.

No Capítulo 3. estão concentrados os resultados de não existência para o problema de Dirichlet (1). Começamos pelo Teorema 4 de Williams (1984), o qual é relativo a domínios limitados de classe  $C^{2,\alpha}$ . Faremos sua demonstração no contexto do  $\mathbb{R}^2$ .

Considere um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  que tenha curvatura negativa (em relação a normal interior) em um ponto  $x_0 \in \partial\Omega$ . Dado isto, note que existe  $\delta_0 > 0$  tal que  $k_{\partial\Omega}(x) \leq \bar{k}_0 < 0$  para todo  $x \in B_{\delta_0}(x_0) \cap \partial\Omega$ . Tendo por base essa notação, o resultado de não existência de Williams (1984) para domínios limitados é dado por:

**Teorema C (Teorema 4, Williams (2014))** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado de classe  $C^{2,\alpha}$  e seja  $x_0 \in \partial^-\Omega$ . Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $K > 1$  dados. Suponha  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que existe  $\delta \in (0, \delta_0)$  tal que*

- (i)  $f(x) = K|x_1|$ , se  $x = (x_1, x_2) \in B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega$ ,
- (ii)  $f(x) \geq \varepsilon$ , se  $x \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)$ .

*Então não existe  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  tal que  $\mathfrak{M}(u) = 0$  em  $\Omega$  e  $u|_{\partial\Omega} = f$ .*

Observamos que este resultado é necessário para a prova do resultado de não existência devido a Kutev & Tomi (1998), que exploraremos na sequência e o qual é relativo a domínios de classe  $C^{2,\alpha}$  quaisquer.

**Teorema D (Corolário 3.3, Kutev & Tomi (1968))** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio tal que  $\partial\Omega$  contém um segmento  $\Gamma$  de classe  $C^{2,\alpha}$  que tenha curvatura negativa em relação à normal interior. Então, para qualquer  $\varepsilon > 0$  e  $K > 1$  existe dado no bordo  $f \in Lip(\Gamma)$  com  $Lip(f) = K$ ,  $osc(f) < \varepsilon$  tal que o Problema de Dirichlet (1) não possui solução em  $\bar{\Omega}$  para qualquer dado no bordo  $g$  sobre  $\partial\Omega$  tal que  $g|_\Gamma = f$ .*

Quanto ao Capítulo 1, elaboramos um resumo da teoria de EDP elípticas que necessitamos para visualizar o método de Perron, bem como um resumo do método de Perron em si. Ao longo do texto a notação utilizada é baseada no livro de Gilbart & Trudinger (2001).

# Capítulo 1

## PRELIMINARES

Apresentaremos, neste capítulo, algumas ferramentas necessárias para obtenção dos próximos resultados. Nossa referência para este capítulo é o clássico livro de Gilbart & Trudinger (2001).

### 1.1 ESPAÇOS DE HÖLDER

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Sejam  $x_0 \in \Omega$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dado  $0 < \alpha < 1$ , dizemos que  $f$  é Hölder contínua com expoente  $\alpha$  em  $x_0$  se

$$[f]_{\alpha, x_0} := \sup_{\Omega} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < \infty. \quad (1.1)$$

Chamamos  $[f]_{\alpha, x_0}$  o coeficiente de Hölder com expoente  $\alpha$  de  $f$  em  $x_0$  referente a  $\Omega$ . Além disso, quando a expressão (1.1) é válida para  $\alpha = 1$ , a função  $f$  é dita Lipschitz contínua em  $x_0$ .

Podemos estender a noção de Hölder continuidade a todo conjunto  $\Omega$  (não necessariamente limitado). Chamamos  $f$  uniformemente Hölder contínua, com expoente  $\alpha \in (0, 1]$  em  $\Omega$ , se a quantidade

$$[f]_{\alpha, \Omega} = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \quad (1.2)$$

é finita e, dizemos que  $f$  é localmente Hölder contínua com expoente  $\alpha$  em  $\Omega$ , se  $f$  é uniformemente Hölder contínua com expoente  $\alpha$  em todo compacto de  $\Omega$ . Note que se  $\Omega$  for compacto esses conceitos coincidem.

Sejam  $k$  um inteiro e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio. Denotamos por  $C^{k, \alpha}(\Omega)$  o conjunto de todas as funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  cujas derivadas parciais de ordem  $k$  são uniformemente Hölder contínuas com expoente  $0 < \alpha \leq 1$  em  $\Omega$ . Note, ainda, que o conjunto  $C^{k, \alpha}(\Omega)$  é um

subespaço de  $C^k(\Omega)$ .

Em nosso problema de Dirichlet (1), estamos supondo  $\partial\Omega$  com certa regularidade. Na próxima definição, levando-se em conta as definições vistas anteriormente colocamos o que entendemos por isso.

**Definição 1.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Dizemos que  $\partial\Omega$  é de classe  $C^{k,\alpha}$ , com  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e  $\alpha \in (0, 1]$ , se para todo  $x \in \partial\Omega$  existe uma bola  $B \subset \mathbb{R}^n$  de centro  $x$ , um aberto  $W$  em  $\mathbb{R}^n$  e uma aplicação bijetora  $\psi : B \rightarrow W$  tal que*

$$i) \psi(\Omega \cap B) \subset \mathbb{R}_+^n = \{y \in \mathbb{R}^n; y_n > 0\};$$

$$ii) \psi(\partial\Omega \cap B) \subset \partial\mathbb{R}_+^n = \{y \in \mathbb{R}^n; y_n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

$$iii) \psi \in C^{k,\alpha}(B), \psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(W).$$

Quando  $\partial\Omega$  for de classe  $C^{k,\alpha}$ , dizemos que o domínio  $\Omega$  é de classe  $C^{k,\alpha}$ .

Ainda, podemos definir em espaços  $C^{k,\alpha}(\Omega)$ , com  $0 < \alpha \leq 1$ , a norma

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} = |f|_{k,\alpha,\Omega} = \sum_{j=0}^k |D^j f|_{0;\Omega} + [D^k f]_\alpha$$

onde

$$[D^k f]_\alpha = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^k f(x) - D^k f(y)|}{|x - y|^\alpha} \quad \text{e} \quad |D^j f|_{0;\Omega} = \sup_{x \in \Omega} |D^j f(x)|$$

com

$$D^j f(x) = \frac{\partial^{|j|} f(x)}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_n^{j_n}},$$

para todo  $j = (j_1, \dots, j_n)$ , onde  $j_i$  é um inteiro positivo,  $j$  é um multi-índice com  $|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$ . Observamos que o espaço  $C^{k,\alpha}(\Omega)$ , quando  $\Omega$  é limitado, munido com a respectiva norma, é espaço de Banach.

## 1.2 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE OPERADORES ELÍPTICOS DE 2ª ORDEM

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e  $n \geq 2$ . Um operador diferencial linear de 2ª ordem é definido por

$$\begin{aligned} L : C^2(\Omega) &\longrightarrow C^0(\Omega) \\ u &\longmapsto L(u) \end{aligned}$$

onde

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u. \quad (1.3)$$

Dizemos que  $L$  é um operador elíptico se a matriz dos coeficientes  $(a_{ij})$  é positiva definida em  $\Omega$ , isto é,  $a_{ij} = a_{ji}$  e todos os autovalores da matriz  $(a_{ij})$  são positivos. Ainda, dado  $x \in \Omega$  e sejam  $\lambda = \lambda(x)$  e  $\Lambda = \Lambda(x)$ , respectivamente, o mínimo e máximo dos autovalores de  $(a_{ij}(x))$ , podemos classificar  $L$  a partir de seus autovalores como: estritamente elíptico se existe  $\delta_0 > 0$  tal que  $\delta_0 \leq \inf_{\Omega} \lambda$ ; fortemente elíptico se existem  $\delta_0 > 0$  e  $\delta_1$  tal que  $\delta_0 \leq \inf_{\Omega} \lambda \leq \sup_{\Omega} \Lambda \leq \delta_1$  e uniformemente elíptico se  $\frac{\Lambda}{\lambda}$  é limitado em  $\Omega$ , ou seja, existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $1 \leq \frac{\Lambda}{\lambda} \leq \delta_1$ , para todo  $x \in \Omega$ .

Um operador diferencial quase-linear e elíptico de 2ª ordem é da forma

$$\begin{aligned} Q : C^2(\Omega) &\longrightarrow C^0(\Omega) \\ u &\longmapsto Q(u) \end{aligned}$$

com

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(x, u, \nabla u) \quad (1.4)$$

onde  $x \in \Omega$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$  e  $(a_{ij})$  possui autovalores positivos.

Observemos que o operador  $\mathfrak{M}$  dado em (1), é um operador quase-linear elíptico, o qual é chamado de operador de curvatura média nula. Note que neste caso, para  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  que é onde trabalharemos,  $\mathfrak{M}$  pode ser definido, equivalentemente, por

$$\mathfrak{M}(u) = \frac{1 + u_y^2}{\sqrt{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}} u_{xx} - \frac{2u_x u_y}{\sqrt{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}} u_{xy} + \frac{1 + u_x^2}{\sqrt{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}} u_{yy}$$

e vemos então que a matriz dos coeficientes  $(a_{ij})$  é dada por

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1 + u_y^2}{\sqrt{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}} & \frac{-u_x u_y}{\sqrt{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}} \\ \frac{-u_x u_y}{\sqrt{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}} & \frac{1 + u_x^2}{\sqrt{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}} \end{pmatrix}.$$

Efetuando os cálculos, obtemos os autovalores da matriz acima

$$\lambda = \frac{1}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \text{ e } \Lambda = \frac{1}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}},$$

os quais são positivos, o que caracteriza a elipticidade do operador  $\mathfrak{M}$  em  $\Omega$ .

Observemos que o gráfico de uma função  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , que satisfaz  $\mathfrak{M}(u) = 0$  é uma superfície mínima do  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.2.1 Princípio do Máximo

Estabelecemos aqui alguns resultados, como o princípio do máximo e o princípio da comparação, relacionado a operadores lineares elípticos e, em seguida, os utilizaremos para estabelecer um importante resultado relativo ao operador  $\mathfrak{M}$  que será muito utilizado nos próximos capítulos.

**Teorema 1.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e seja  $L$  um operador linear elíptico de 2ª ordem com  $c = 0$  e  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  satisfazendo  $Lu \geq 0$  ( $\leq 0$ ) em  $\Omega$ . Então*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

Consequentemente, se  $L(u) = 0$ , então

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

*Demonstração:* Gilbart & Trudinger (2001, p. 32).

**Teorema 1.2** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e  $L$  operador elíptico com  $c \leq 0$ . Sejam  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  satisfazendo  $Lu = Lv$  em  $\Omega$ ,  $u = v$  em  $\partial\Omega$ , então  $u = v$  em  $\Omega$ . Além disso, se  $L(v) \geq L(u)$  em  $\Omega$  e  $v \leq u$  em  $\partial\Omega$ , então  $v \leq u$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração:* Gilbart & Trudinger (2001, p. 33).

Pelo Teorema 1.2 dados  $u, v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ , se  $Lu = 0$ ,  $Lv \geq 0$  e  $Lw \leq 0$  com  $v|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega}$ , temos que  $v \leq u \leq w$  em  $\Omega$ .

Dizemos que  $v, w \in C^2(\Omega)$  são, respectivamente, sub e supersoluções relativamente a  $Lu = 0$  em  $\Omega$  se  $Lw \leq 0 \leq Lv$ .

Nos próximos resultados estabeleceremos uma importante relação entre o operador  $\mathfrak{M}$  e um operador linear elíptico  $L$  que satisfaça as hipóteses do Teorema 1.1. Este resultado nos permitirá trabalhar com o Princípio do Máximo e Princípio da Comparação em algumas situações relacionadas ao nosso operador  $\mathfrak{M}$ . Para isso, precisamos de um resultado preliminar.

**Lema 1.1** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado,  $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$  e o operador  $\mathfrak{M} : C^2(\overline{\Omega}) \rightarrow C^0(\overline{\Omega})$  dado em (1). Então, vale a igualdade*

$$D(\mathfrak{M})_u(v) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i v_i, \quad (1.5)$$

onde  $a_{ij}(\nabla u) = (1 + |\nabla u|^2)\delta_{ij} - u_i u_j$  e  $b_i(\nabla u, D^2 u) = (2\Delta u)u_i - 2 \sum_{j=1}^n u_j u_{ij}$ , e  $\mathfrak{M}$  é de classe  $C^1$ .

*Demonstração:* Dados  $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$  podemos considerar  $D(\mathfrak{M})_u(v) = \frac{d}{dt}\mathfrak{M}(u + tv)|_{t=0}$ , assim obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\mathfrak{M}(u + tv)|_{t=0} = \\ & = \frac{d}{dt} \left[ (1 + |\nabla(u + tv)|^2)\Delta(u + tv) - \sum_{i,j=1}^n (u_i + tv_i)(u_j + tv_j)(u_{ij} + tv_{ij}) \right] |_{t=0} \\ & = \frac{d}{dt} \left[ (1 + |\nabla u|^2 + t^2|\nabla v|^2 + 2t\langle \nabla u, \nabla v \rangle)(\Delta u + t\Delta v) - \sum_{i,j=1}^n (u_i + tv_i)(u_j + tv_j)(u_{ij} + tv_{ij}) \right] |_{t=0} \\ & = \left[ (2t|\nabla v|^2 + 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle)(\Delta u + t\Delta v) + (1 + |\nabla u|^2 + t^2|\nabla v|^2 + 2t\langle \nabla u, \nabla v \rangle)(\Delta v) \right] |_{t=0} \\ & \quad - \sum_{i,j=1}^n \left[ 2u_i v_j u_{ij} + 2tv_i v_j u_{ij} + 2tu_i v_j v_{ij} + 2t^2 v_i v_j v_{ij} + u_i u_j v_{ij} + 2tu_i v_j v_{ij} + t^2 v_i v_j v_{ij} \right] |_{t=0} \\ & = 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle \Delta u + (1 + |\nabla u|^2)\Delta v - 2 \sum_{i,j=1}^n u_i v_j u_{ij} - \sum_{i,j=1}^n u_i u_j v_{ij} \end{aligned}$$

Ainda, note que

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle \Delta u - 2 \sum_{i,j=1}^n u_i v_j u_{ij} &= 2\Delta u \sum_{i,j=1}^n u_i v_i - 2 \sum_{i,j=1}^n u_i v_j u_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n (2\Delta u u_i - 2 \sum_{j=1}^n u_j u_{ij}) v_i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (1 + |\nabla u|^2)\Delta v - \sum_{i,j=1}^n u_i u_j v_{ij} &= \sum_{i=1}^n (1 + |\nabla u|^2)v_{ii} - \sum_{i,j=1}^n u_i u_j v_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( (1 + |\nabla u|^2)\delta_{ij} - \sum_{j=1}^n u_i u_j \right) v_{ij} \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$D(\mathfrak{M})_u(v) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i v_i,$$

onde  $a_{ij}(\nabla u) = (1 + |\nabla u|^2)\delta_{ij} - u_i u_j$  e  $b_i(\nabla u, D^2 u) = 2(\Delta u u_i - \sum_{j=1}^n u_j u_{ij})$ . Basta, agora, mostrarmos que  $D(\mathfrak{M})_u(v)$  é contínuo. Sabemos que operadores lineares em espaços normados são contínuos se, e somente se, eles são limitados. Nesse sentido, precisamos mostrar que existe  $c$  tal que

$$|D(\mathfrak{M})_u(v)|_{0,\bar{\Omega}} \leq c|v|_{2,\bar{\Omega}}.$$

De fato, como  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , temos que  $a_{ij}(\nabla u)$  e  $b_i(\nabla u, D^2 u)$  são contínuos no compacto  $\bar{\Omega}$ , logo ambos são limitados por uma constante  $c(|u|_{2,\bar{\Omega}})$ . E, assim

$$\begin{aligned} |D(\mathfrak{M})_u(v)|_{0,\bar{\Omega}} &= \left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i v_i \right|_{0,\bar{\Omega}} \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} v_{ij}|_{0,\bar{\Omega}} + \sum_{i=1}^n |b_i v_i|_{0,\bar{\Omega}} \\ &\leq c \left( \sum_{i,j=1}^n |v_{ij}|_{0,\bar{\Omega}} + \sum_{i=1}^n |v_i|_{0,\bar{\Omega}} \right) \\ &= c(|D^2 v|_{0,\bar{\Omega}} + |\nabla v|_{0,\bar{\Omega}}) \leq c|v|_{2,\bar{\Omega}} \end{aligned}$$

□

Com isso, podemos mostrar a proposição seguinte.

**Proposição 1.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Dadas  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$  tal que  $\mathfrak{M}(u) \geq \mathfrak{M}(v)$  em  $\Omega$ . Então existe um operador elíptico  $L$  como em (1.3), com coeficiente  $c = 0$ , tal que*

$$0 \leq L(u - v) \text{ em } \Omega.$$

*Demonstração:* Denotemos  $w = u - v$  e considere o caminho  $\vartheta : [0, 1] \rightarrow C^2(\bar{\Omega})$ , definido por  $\vartheta(t) = tu + (1 - t)v$ . Note que

$$\mathfrak{M}(\vartheta(0)) = \mathfrak{M}(v) \text{ e } \mathfrak{M}(\vartheta(1)) = \mathfrak{M}(u)$$

Além disso,

$$\vartheta'(t) = w$$

Com essas notações, segue do Teorema Fundamental do Cálculo e de (1.5) que

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathfrak{M}(u) - \mathfrak{M}(v) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \mathfrak{M}(\vartheta(t)) dt = \int_0^1 D(\mathfrak{M})_{\vartheta(t)}(\vartheta'(t)) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\nabla \vartheta(t)) w_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i(\nabla \vartheta(t), D^2(\vartheta(t)) w_i) \right) dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left( \int_0^1 a_{ij}(\nabla \vartheta(t)) dt \right) w_{ij} + \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 b_i(\nabla \vartheta(t), D^2(\vartheta(t)) w_i) dt \right) w_i \end{aligned}$$

Dessa forma, para quaisquer  $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$  fixados, denotando  $A_{ij} = \int_0^1 a_{ij}(\nabla\vartheta(t))dt$  e  $B_i = \int_0^1 b_i(\nabla\vartheta(t), D^2(\vartheta(t)))dt$ , temos que os coeficientes  $A_{ij}$  e  $B_i$  dependem apenas de  $x \in \overline{\Omega}$  e, portanto, o operador

$$L(w) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}w_{ij} + \sum_{i=1}^n B_iw_i,$$

é linear e  $L(w) \geq 0$ . Precisamos, agora, mostrar que  $L$  é elíptico. Observe que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_1\xi_2 &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 a_{ij}(\nabla\vartheta(t)(x))\xi_i\xi_j dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 [(1 + |\nabla\vartheta(t)(x)|^2)\delta_{ij} - u_i(x)u_j(x)]\xi_i\xi_j dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n [(1 + |\nabla u(x)|^2)\delta_{ij} - u_i(x)u_j(x)]\xi_i\xi_j \\ &= \sum_{i=1}^n [(1 + |\nabla u(x)|^2) - u_i^2(x)]\xi_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n u_i(x)u_j(x)\xi_i\xi_j \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2(|\nabla u(x)|^2 - u_i^2(x)) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n u_i(x)u_j(x)\xi_i\xi_j \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (\xi_i^2 u_j^2 - 2u_i u_j \xi_i \xi_j + \xi_j^2 u_i^2) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_1\xi_2 &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (\xi_i u_j - \xi_j u_i)^2 \\ &\geq |\xi|^2 \end{aligned}$$

para todo  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  e todo  $x \in \overline{\Omega}$ . Além disso, como  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  segue do Teorema de Schwarz que a matriz  $(A_{ij})$  é simétrica. Portanto,  $L$  é elíptico.  $\square$

A partir deste resultado podemos fazer uso do Teorema 1.1 e Teorema 1.2 para obtermos o seguinte resultado relativo ao operador  $\mathfrak{M}$ .

**Corolário 1.1** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  tal que  $\mathfrak{M}(u) \geq \mathfrak{M}(v)$  em  $\Omega$ . Então*

$$\sup_{\Omega} (u - v) = \sup_{\partial\Omega} (u - v).$$

Em particular, se  $u \leq v$  em  $\partial\Omega$ , então  $u \leq v$  em  $\bar{\Omega}$ .

*Demonstração:* Da Proposição 1.1 temos que existe operador linear elíptico  $L$ , como dado em (1.3), com  $c = 0$  tal que

$$0 \leq L(u - v) \text{ em } \Omega.$$

Logo, pelo Teorema 1.1, temos

$$\sup_{\Omega}(u - v) = \sup_{\partial\Omega}(u - v), \quad (1.6)$$

Se  $u \leq v$  em  $\partial\Omega$ , de (1.6) temos  $u - v \leq 0$  em  $\bar{\Omega}$ . Portanto, o resultado segue.  $\square$

**Proposição 1.2** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitado. Suponha que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  satisfaz  $\mathfrak{M}(u) = 0$ . Então*

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| = \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|.$$

A prova deste resultado encontra-se em Gilbart & Trudinger (2001, p. 362) e, também, pode ser vista de forma mais detalhada em Bonow (2007, p. 40).

Como ressaltamos na introdução, estaremos envolvidos com domínios não convexos em média. No decorrer de algumas demonstrações do próximo capítulo, no entanto, faremos uso de resultados já clássicos relativos a domínios convexos do plano. Em particular, nos envolveremos com o problema de Dirichlet (1) quando o domínio  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^2$  é limitado e convexo, não necessariamente  $C^2$ , pois poderá, em nosso caso, conter um número finito de arcos regulares. Neste sentido, veremos a definição de curvatura exterior, a qual será utilizada no próximo resultado.

**Definição 1.2** *Seja  $\Omega$  um domínio de classe  $C^1$  por partes. Dado  $p \in \partial\Omega$ , definimos a curvatura exterior do bordo em  $p$  como o supremo das curvaturas de todas as curvas  $C^2$  passando por  $p$  e que não interceptam  $\Omega$ , sendo o sinal das curvaturas baseado na normal apontando para  $\Omega$ .*

Com isto, podemos agora enunciar o resultado devido a Serrin (1970).

**Teorema 1.3** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado. Então o problema de Dirichlet (1) em  $\Omega$  para equação de curvatura média constante  $H \geq 0$  tem solução para qualquer dado no bordo  $f$  contínuo se, e somente se, a curvatura exterior  $\hat{k}$  satisfizer*

$$\hat{k} \geq 2H$$

*em cada ponto do bordo. A solução é única se ela existe.*

Em alguns casos, neste trabalho, ao invés de usarmos diretamente o operador  $\mathfrak{M}$  faremos uso do operador alternativo  $\mathfrak{M}_0$  dado no lema a seguir.

**Lema 1.2** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio,  $u \in C^2(\Omega)$  e seja  $\mathfrak{M}$  operador dado em (1). Então  $\mathfrak{M}(u) = 0$  se, e somente se,*

$$\mathfrak{M}_0(u) := \Delta u - (1 + |\nabla u|^2)^{-2} |\nabla u| \langle \nabla(|\nabla u|), \nabla u \rangle = 0.$$

*Demonstração:* Primeiramente, observamos que se  $f \in C^1(\Omega)$  e se  $X$  um campo de vetores em  $\Omega$ , temos que

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + \langle \nabla f, X \rangle.$$

Além disso, observamos que

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(u) &= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \nabla u\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \operatorname{div}(\nabla u) + \langle \nabla(1 + |\nabla u|^2)^{-1/2}, \nabla u \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \Delta u - \frac{1}{2} \langle \nabla(|\nabla u|^2)(1 + |\nabla u|^2)^{-3/2}, \nabla u \rangle \\ &= \frac{\Delta u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} - \frac{1}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \langle |\nabla u| \nabla(|\nabla u|), \nabla u \rangle \\ &= \frac{\Delta u}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}} - \frac{|\nabla u|}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \langle \nabla(|\nabla u|), \nabla u \rangle \\ &= \frac{\Delta u(1 + |\nabla u|^2) - |\nabla u| \langle \nabla(|\nabla u|), \nabla u \rangle}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Então, note que se  $\mathfrak{M}(u) = 0$  temos que  $(1 + |\nabla u|^2)^{1/2} \mathfrak{M}(u) = 0$ . Por outro lado,

temos

$$\begin{aligned}
0 &= (1 + |\nabla u|^2)^{1/2} \mathfrak{M}(u) \\
&= \frac{\Delta u (1 + |\nabla u|^2)^{3/2} - |\nabla u| (1 + |\nabla u|^2)^{1/2} \langle \nabla(|\nabla u|), \nabla u \rangle}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \\
&= \Delta u - |\nabla u| (1 + |\nabla u|^2)^{-2} \langle \nabla(|\nabla u|), \nabla u \rangle = \mathfrak{M}_0(u)
\end{aligned}$$

□

### 1.3 O MÉTODO DE PERRON

Para resolver o problema de Dirichlet utilizaremos o método das subsoluções, conhecido como Método de Perron. Esta técnica trabalha com sub e supersoluções associadas ao operador  $\mathfrak{M}$ .

Inicialmente, veremos que operador  $\mathfrak{M}$  satisfaz algumas condições, as quais são imprescindíveis à aplicação do método que pretendemos utilizar. Posteriormente, detalharemos a técnica usada para garantir a existência de solução para o problema de Dirichlet (1).

#### 1.3.1 Condições necessárias para aplicabilidade do Método de Perron

Observamos, inicialmente, que o operador  $\mathfrak{M}$  satisfaz as seguintes condições:

##### I) Princípio do Máximo para diferença de duas soluções:

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitado e  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  tais  $\mathfrak{M}(u) = \mathfrak{M}(v) = 0$ , então

$$\sup_{\Omega} (u - v) = \sup_{\partial\Omega} (u - v).$$

De fato, isto é imediato do Corolário 1.1.

##### II) Existência de Soluções em domínio pequenos:

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \Omega$  e  $B_x$  uma bola aberta tal que  $\overline{B_x} \subset \Omega$ . Dado  $f \in C^0(\partial B_x)$ , existe  $u \in C^2(B_x) \cap C^0(\overline{B_x})$  que satisfaz

$$\begin{cases} \mathfrak{M}(u) = 0 \\ u|_{\partial B_x} = f \end{cases} \quad (1.8)$$

Este resultado é bem conhecido, pois desde o trabalho de T. Radó (1930) para  $\mathbb{R}^2$  sabemos que, para domínios limitados de classe  $C^2$  e convexos em média com dado no bordo contínuo, o problema de Dirichlet (1) tem única solução.

### III) **Compacidade:**

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitado e  $B$  um subdomínio de  $\Omega$  com  $\overline{B} \subset \Omega$ . Dada uma sequência de soluções uniformemente limitada  $\{u_n\} \subset C^2(B)$  satisfazendo  $\mathfrak{M}(u_n) = 0$  em  $B$ , existe subsequência  $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$  que converge uniformemente para uma solução  $u \in C^2(B)$  que satisfaz  $\mathfrak{M}(u) = 0$  em  $B$ .

A demonstração deste resultado foge um pouco do escopo desta dissertação e vamos assumi-lo. A demonstração pode ser vista em Gilbart & Trudinger (2001), capítulo 4. Para  $\mathbb{R}^2$ , pode ser visto também em Buriol (1995).

Um problema de Dirichlet, como dado em (1), onde o operador é tal que satisfaz estas três condições, pode-se aplicar o Método de Perron, o qual é descrito abaixo.

### 1.3.2 O Método de Perron

Considere o operador  $\mathfrak{M}$  e o problema de Dirichlet (1). O Método de Perron faz uso, principalmente, do conceito de sub e supersoluções associadas ao operador  $\mathfrak{M}$  e relativas ao dado no bordo  $f$  e basea-se exclusivamente nos itens *I*, *II* e *III* da subseção anterior.

**Definição 1.3** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio. Uma função  $v$  ( $w$ )  $\in C^0(\Omega)$  é dita subsolução (supersolução) relativa ao operador  $\mathfrak{M}$  em  $\Omega$  se para todo subdomínio  $D$  limitado, com  $\overline{D} \subset \Omega$  e cada  $u \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$  satisfazendo  $\mathfrak{M}(u) = 0$  em  $D$  com  $u|_{\partial D} \geq v|_{\partial D}$  ( $u|_{\partial D} \leq w|_{\partial D}$ ), tem-se que  $u \geq v$  ( $u \leq w$ ) em  $D$ .*

Com base nesta definição, podemos considerar os seguintes resultados:

**Lema 1.3** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e sejam  $v$  uma subsolução relativa a  $\mathfrak{M}$  em  $\Omega$ ,  $x \in \Omega$  e  $B_x$  uma bola centrada em  $x$ , com  $\overline{B_x} \subset \Omega$ . Denote por  $u_{x,v} \in C^2(B_x) \cap C^0(\overline{B_x})$  a função que satisfaz  $\mathfrak{M}(u_{x,v}) = 0$  em  $B_x$  e é tal que  $u_{x,v} = v$  em  $\partial B_x$ . Então a função definida em  $\Omega$  por*

$$\bar{v}(y) = \begin{cases} u_{x,v}(y) & , \text{ se } y \in B_x \\ v(y) & , \text{ se } y \in \Omega \setminus B_x \end{cases} \quad (1.9)$$

*é uma subsolução em  $\Omega$ .*

*Demonstração:* Inicialmente, como  $u_{x,v}$  e  $v$  são contínuas e  $u_{x,v}|_{\partial B_x} = v|_{\partial B_x}$  temos que  $\bar{v}$  é contínua. Agora, considere uma bola arbitrária  $V \subset \Omega$  tal que  $\bar{V} \subset \Omega$ . Como o operador  $\mathfrak{M}$  satisfaz a condição (II) da seção anterior, existe  $h \in C^2(V) \cap C^0(\bar{V})$  tal que  $\mathfrak{M}h = 0$  em  $V$  satisfazendo  $\bar{v} \leq h$  em  $\partial V$ , por exemplo  $h = \sup_{\partial V} \bar{v}$ . Note que, como  $\bar{v} \geq v$  em  $\bar{V}$ , temos  $v \leq h$  em  $\partial V$ . Ainda, como  $v$  é subsolução em  $\Omega$  segue que  $v \leq h$  em  $V$ . Conseqüentemente, tem-se  $\bar{v} \leq h$  em  $V \setminus B_x$ .

Além disso, como  $\bar{v}$  satisfaz  $\mathfrak{M}(\bar{v}) = 0$  em  $B_x$  e  $\bar{v} \leq h$  em  $\partial(V \cap B_x)$ . Segue do Princípio da Comparação, Corolário 1.1, que  $\bar{v} \leq h$  em  $V \cap B_x$ . Conseqüentemente,  $\bar{v} \leq h$  em  $V$ . Assim, como  $V$  é arbitrário, segue que  $\bar{v}$  é subsolução em  $\Omega$ .  $\square$

**Lema 1.4** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e sejam  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_p$  subsoluções relativas ao operador  $\mathfrak{M}$  em  $\Omega$ . Então a função*

$$v(x) = \max\{v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots, v_p(x)\}$$

*é também subsolução relativa a  $\mathfrak{M}$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração:* Visto que a função  $v_i$  é contínua, para cada  $i = 1, \dots, p$ , obtemos que  $v$ , pela definição acima, também será contínua (ver Lema 1.5 adiante). Agora, considere uma bola arbitrária  $V \subset \Omega$  tal que  $\bar{V} \subset \Omega$ . Como o operador  $\mathfrak{M}$  cumpre a condição (II) e  $v$  é contínua, existe função  $h \in C^2(V) \cap C^0(\bar{V})$  satisfazendo  $\mathfrak{M}h = 0$  em  $V$  com  $v \leq h$  em  $\partial V$ .

Assim, como  $v \leq h$  em  $\partial V$ , temos que

$$v_i \leq h \text{ em } \partial V,$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ . Como cada  $v_i$  é subsolução relativa a  $\mathfrak{M}$  em  $\Omega$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , da definição de subsolução, segue que  $v_i \leq h$  em  $V$ . Logo

$$\max_{1 \leq i \leq p} \{v_i(x)\} = v(x) \leq h(x), \quad x \in V.$$

Portanto, como  $V$  é arbitrário,  $v$  é subsolução em  $\Omega$ .  $\square$

**Observação 1.1** *Analogamente mostra-se que se  $w_1, \dots, w_p$  são supersoluções relativas ao operador  $\mathfrak{M}$ , então*

$$w(x) = \min\{w_1(x), \dots, w_p(x)\}$$

*é supersolução relativa ao operador  $\mathfrak{M}$  em  $\Omega$ .*

**Definição 1.4** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e seja  $f \in C^0(\partial\Omega)$ . Uma subsolução  $v$  associada ao operador  $\mathfrak{M}$  é dita subsolução relativa ao dado no bordo  $f$  se*

$$\limsup_{y \rightarrow x} v(y) \leq f(x)$$

*para todo  $x \in \partial\Omega$ . Similarmente, uma supersolução  $w$  associada ao operador  $\mathfrak{M}$  é dita supersolução relativa ao dado no bordo  $f$  se  $\liminf_{y \rightarrow x} w(y) \geq f(x)$  para todo  $x \in \partial\Omega$ .*

Observe que, se  $\Omega$  for limitado, obtemos que cada subsolução relativa à  $f$  é menor ou igual a cada supersolução relativa à  $f$ . Note que as funções constantes menores ou iguais (maiores ou igual) ao ínfimo (supremo) da  $f$  em  $\partial\Omega$  são consideradas subsoluções (supersoluções) relativas à  $f$ .

Como trabalharemos com domínios tanto limitados quanto não limitados, usaremos a notação dada na definição a seguir para ambos casos.

**Definição 1.5** *Dada uma supersolução  $w$  relativa ao dado no bordo  $f$ , denotamos por  $F_{f,w}$  o conjunto de todas as subsoluções  $v$  relativas à  $f$  tal que  $v \leq w$  em  $\bar{\Omega}$ .*

Com essas definições e notações podemos agora demonstrar o seguinte resultado:

**Teorema 1.4** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e seja  $f \in C^0(\partial\Omega)$ . Suponha  $w$  uma supersolução relativa a  $f$  e suponha que  $F_{f,w}$  seja não vazio. Então*

$$u(x) := \sup\{v(x); v \in F_{f,w}, x \in \bar{\Omega}\} \quad (1.10)$$

*está bem definido,  $u \in C^2(\Omega)$  e  $\mathfrak{M}(u) = 0$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração:* Como o conjunto  $F_{f,w}$  é não vazio e limitado superiormente por  $w$ , então

$$u(x) = \sup_{v \in F_{f,w}} v(x), \quad x \in \Omega$$

está bem definida.

Mostremos agora que  $u$  satisfaz o operador  $\mathfrak{M}(u) = 0$  em  $\Omega$ . Seja  $x$  um ponto arbitrário fixado de  $\Omega$  e seja  $v_0 \in F_{f,w}$ . Da definição de  $u$ , temos que existe uma sequência  $(v_n) \subset F_{f,w}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = u(x).$$

Sem perda de generalidade, pode-se considerar  $v_n = \max\{v_n, v_0\}$ , o que implica que a sequência  $v_n$  é limitada pontualmente, pois

$$v_0 \leq v_n \leq w$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $B_x$  uma bola centrada em  $x$  tal que  $\overline{B_x} \subset \Omega$ . Defina a sequência

$$V_n(y) = \begin{cases} u_{x,v_n}(y) & , \text{ se } y \in B_x \\ v_n(y) & , \text{ se } y \in \Omega \setminus B_x, \end{cases}$$

onde  $u_{x,v_n} \in C^2(B_x) \cap C^0(\overline{B_x})$  é solução de (1) em  $B_x$  que satisfaz  $u_{x,v_n} = v_n$  em  $\partial B_x$ . Note que  $\mathfrak{M}(V_n) = 0$  em  $B_x$  e, pelo Lema 1.3, temos que  $V_n \in F_{f,w}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, por (III),  $(V_n)$  possui uma subsequência  $(V_{n_k})$  que converge uniformemente em compactos de  $B_x$  a uma função  $\bar{u} \in C^2(B_x)$  satisfazendo  $\mathfrak{M}(u) = 0$  em  $B_x$  e  $\bar{u}(x) = u(x)$ . Como  $V_n \in F_{f,w}$ ,  $\bar{u} \leq w$  em  $B_x$  e, então, segue da definição de  $u$ , que  $\bar{u} \leq u$  em  $B_x$ .

Queremos mostrar que  $\bar{u} = u$  em  $B_x$  e, para isto, usaremos um argumento de redução ao absurdo. Suponha que exista algum  $z \in B_x$  tal que  $\bar{u}(z) < u(z)$ . Então, pela definição de supremo, existe alguma função  $\bar{v} \in F_{f,w}$  tal que  $\bar{u}(z) < \bar{v}(z)$ . Defina  $v_k = \max\{\bar{v}, V_{n_k}\}$  e considere

$$S_k(y) = \begin{cases} u_{x,v_k}(y) & , \text{ se } y \in B_x \\ v_k(y) & , \text{ se } y \in \Omega \setminus B_x. \end{cases}$$

onde  $u_{x,v_k} \in C^2(B_x) \cap C^0(\overline{B_x})$  satisfaz  $\mathfrak{M}(u_{x,v_k}) = 0$  com  $u_{x,v_k} = v_k$  em  $\partial B_x$ . De forma análoga ao exposto acima, temos que existe uma subsequência da sequência  $(S_k)$  que converge uniformemente em compactos de  $B_x$  a uma função  $s \in C^2(B_x)$  tal que  $\mathfrak{M}s = 0$  em  $B_x$ , com  $\bar{u} \leq s \leq u$  em  $B_x$  e  $\bar{u}(x) = s(x) = u(x)$ . Logo, como  $\mathfrak{M}(\bar{u}) = 0 = \mathfrak{M}(s)$  em  $B_x$  e  $\bar{u}|_{\partial B_x} = s|_{\partial B_x}$ , segue do Corolário 1.1 que  $\bar{u} = s$  em  $B_x$ , o que contradiz o fato de  $\bar{u}(z) < \bar{v}(z)$ . Consequentemente, temos  $\bar{u} = u$  em  $B_x$ . Como  $B_x$  é qualquer segue o resultado.  $\square$

A solução  $u$  dada em (1.10) é conhecida como a solução de Perron. O próximo resultado garante a unicidade de solução em domínios limitados.

**Teorema 1.5** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Se o Problema de Dirichlet (1) possui solução, então esta solução é idêntica a solução de Perron  $u$ .*

*Demonstração:* Segue direto da definição da solução de Perron.

Caso o domínio seja ilimitado não podemos garantir a existência de solução única para o problema de Dirichlet (1). Por exemplo, considere o domínio  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ , onde  $D \subset \mathbb{R}^2$  é um disco de raio  $r > 0$  centrado em  $x_0$ . Então, existe  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  satisfazendo o problema

$$\begin{cases} \mathfrak{M}(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}. \quad (1.11)$$

De fato, além do plano, o catenóide

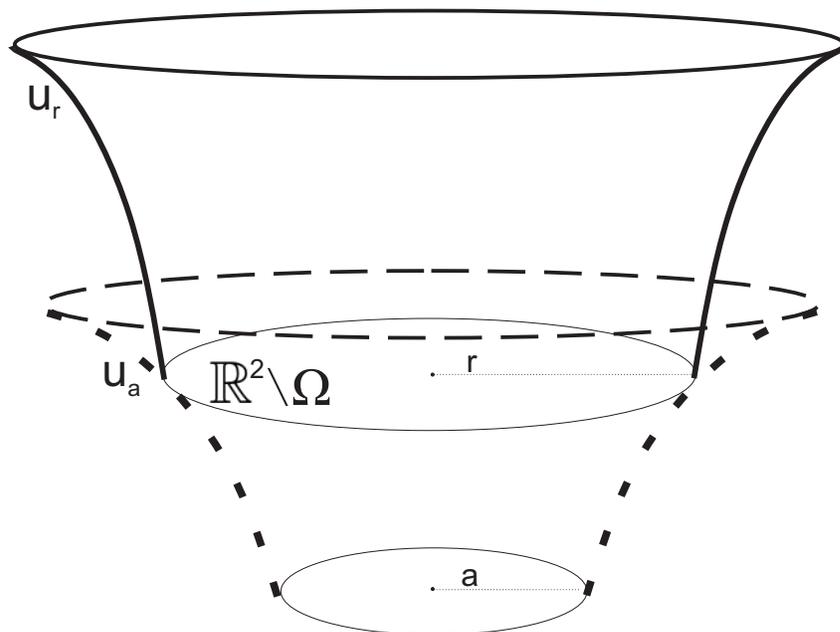
$$u_r(x) = r \cosh^{-1}\left(\frac{|x - x_0|}{r}\right), \text{ com } |x - x_0| \geq r,$$

satisfaz o problema de Dirichlet (1.11). Agora, note que

$$u_a(x) = a \cosh^{-1}\left(\frac{|x - x_0|}{a}\right) - b_a, \text{ com } |x - x_0| \geq r,$$

onde  $b_a = a \cosh^{-1}\left(\frac{r}{a}\right)$ , será solução de (1.11) diferente de  $u_r(x)$  para todo  $a \in (0, r)$ .

Figura 1.1: Possíveis soluções para o problema (1.11)



Fonte: Da autora.

Agora, sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio não limitado e uma função limitada  $f \in C^0(\partial\Omega)$ . Se procurarmos por solução limitada de (1), como  $v_0 = \inf_{\partial\Omega} f$  e  $w_0 = \sup_{\partial\Omega} f$  são sub e supersoluções relativas a  $f$ , respectivamente, com  $v_0 \leq w_0$  em  $\Omega$ , temos que  $F_{f,w_0}$  é não vazio e a solução de Perron  $u$  será limitada, já que neste caso temos

$$v_0 \leq u \leq w_0.$$

Observe que não temos garantia sobre o comportamento da solução no bordo, isto é,

não podemos concluir, em princípio, que a solução de Perron  $u$  seja tal que  $u \in C^0(\overline{\Omega})$  e  $u|_{\partial\Omega} = f$ . Com as hipóteses do resultado a seguir, no entanto, podemos garantir que a solução de Perron satisfaça o problema de Dirichlet (1).

**Proposição 1.3** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio de classe  $C^2$ ,  $f \in C^0(\partial\Omega)$  e  $w$  uma supersolução relativa a  $f$ . Suponhamos que para todo  $y \in \partial\Omega$  existam  $v_y, w_y \in C^0(\overline{\Omega})$  sub e supersoluções relativas a  $f$ , respectivamente, tais que  $v_y \in F_{f,w}$ ,  $v_y \leq w_y$  em  $\overline{\Omega}$  com*

$$v_y(y) = w_y(y) = f(y).$$

Então, a função  $u$  dada pelo Método de Perron é contínua em  $\overline{\Omega}$  e  $u|_{\partial\Omega} = f$ .

*Demonstração:* Dado  $y \in \partial\Omega$ , seja  $(x_n) \subset \Omega$  uma sequência convergindo para  $y$  e seja  $u \in C^2(\Omega)$  solução de Perron satisfazendo  $\mathfrak{M}(u) = 0$ , qual seja, dado pelo Teorema 1.4, que existe pois  $F_{f,w} \neq \emptyset$ . Como  $v_y$  e  $\min\{w_y, w\}$  são sub e supersoluções relativas a  $f$ , respectivamente,  $v_y \in F_{f,w}$  e  $v_y \leq w_y$  em  $\overline{\Omega}$  temos que

$$v_y \leq u \leq \min\{w_y, w\} \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Logo, restringindo estas desigualdades aos valores da sequência  $(x_n)$ , teremos

$$v_y(x_n) \leq u(x_n) \leq \min\{w_y(x_n), w(x_n)\}.$$

Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_y(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{w_y(x_n), w(x_n)\} = f(y)$$

temos que o limite de  $u(x_n)$  quando  $n \rightarrow \infty$  existe e, além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = f(y).$$

Consequentemente, segue que  $u$  é contínua em  $y$  e  $u(y) = f(y)$ . Como  $y \in \partial\Omega$  arbitrário, temos, portanto, que  $u$  é solução de (1).  $\square$

As funções  $v_y$  e  $w_y$  como dadas na Proposição 1.3 é o que entendemos por barreiras relativas ao dado no bordo  $f$ .

## 1.4 OUTROS RESULTADOS PRELIMINARES E NOTAÇÕES

**Lema 1.5 (Lema da Colagem)** *Se  $X = A \cup B$ , onde  $A$  e  $B$  são simultaneamente fechados em  $X$  e  $f : A \rightarrow Y$  e  $g : B \rightarrow Y$  são contínuas e tal que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A \cap B$ .*

Então  $h : X \rightarrow Y$  dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad \text{se } x \in A \\ g(x) & ; \quad \text{se } x \in B \end{cases} \quad (1.12)$$

é contínua.

*Demonstração:* Pode ser vista em Munkres (1975, p. 108).

Tendo como base o trabalho de Bruijn (1961), discutiremos, agora, algumas ideias sobre a notação  $O$ . Essa notação foi introduzida por Paul Bachmann, em 1894, e nos anos subsequentes foi popularizada por Edmund Landau.

**Definição 1.6** *Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e sejam  $f, \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Então a fórmula*

$$f(x) = O(\varphi(x)), \quad x \in D, \quad (1.13)$$

*significa que existe  $A > 0$ , com  $A$  não dependendo de  $x$ , tal que*

$$|f(x)| \leq A|\varphi(x)|, \quad \text{para todo } x \in D.$$

Em particular, se  $\varphi(x) \neq 0$  para todo  $x \in D$ , então (1.13) significa simplesmente que  $\left| \frac{f}{\varphi} \right|$  é limitado em  $D$ . Também, seja  $I = (a, +\infty)$  e sejam  $f, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ . A fórmula

$$f(x) = O(\varphi(x)), \quad x \rightarrow +\infty$$

significa que existe  $b \geq a$  e  $A > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq A|\varphi(x)| \quad \text{sempre que } b < x < +\infty.$$

A definição de  $O$  nos permite suprimir detalhes sem importância e nos concentrarmos em características relevantes de uma função. Dizemos que a notação  $O$  não suprime uma função, mas apenas um número, isto é, ele substitui o conhecimento de um número com certas propriedades pela informação de que tal número existe. Com isto podemos escrever explicitamente os termos mais significativos e, então, os termos menos relevantes são resumidos utilizando-se a notação  $O$ .

Durante este trabalho, também faremos uso do seguinte resultado abaixo:

**Teorema 1.6** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio. Sejam  $u, v \in C^2(\Omega)$  e  $D \subset \Omega$  um domínio compacto com fronteira regular. Então valem as seguintes identidades:*

*Primeira identidade de Green:*

$$\int_D [u\Delta v + \langle \nabla u, \nabla v \rangle] dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

e

*Segunda identidade de Green:*

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

onde  $\eta$  é o campo normal unitário à  $\partial D$  que aponta para o exterior de  $D$ .

*Demonstração:* Pode ser encontrada em Figueiredo (1963, p. 47).

# Capítulo 2

## TEOREMAS DE EXISTÊNCIA

### 2.1 SOLUÇÕES NÃO LIMITADAS

Nesta seção trataremos da prova do Teorema A. Para prová-lo faremos uso do Método de Perron descrito no capítulo anterior. Então, devemos construir barreiras adequadas baseadas no conceito de sub e supersoluções. Nosso objetivo inicial é encontrar uma solução de Perron não limitada da forma (5). Então devemos, inicialmente, encontrar sub e supersolução  $s$  e  $w$  da forma (5), obtendo  $F_{f,w} \neq \emptyset$ . Seguirá disto que  $u(x) = \sup\{s(x); s \in F_{f,w}, x \in \Omega\}$  satisfaz  $\mathfrak{M}(u) = 0$  da forma desejada.

Inicialmente, vamos demonstrar alguns resultados que irão nos auxiliar na resolução do Teorema A. No primeiro lema poderemos garantir, sob certas condições, a existência de uma solução  $u$  da forma desejada para os pontos não convexos.

Utilizaremos a seguinte notação. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  é limitado e denote por  $\partial^- \Omega$  a parte não convexa de  $\partial \Omega$ , isto é

$$\partial^- \Omega = \overline{\{x \in \partial \Omega; k(x) < 0\}}.$$

Dado  $x \in \partial^- \Omega$ , seja  $R(x)$  o raio do disco de maior raio contido em  $\mathbb{R}^2 - \Omega$  e tal que seu bordo tangencia  $\partial \Omega$  em  $x$ . Considere  $R = \inf\{R(x); x \in \partial^- \Omega\}$  e denote por  $\nu(x)$  o vetor normal unitário à  $\partial \Omega$  em  $x$  que aponta para o exterior de  $\Omega$ .

**Lema 2.1** *Dado  $x \in \partial^- \Omega$  e  $0 < \mu < R$ , considere a função*

$$\psi_{\mu,x}(y) = \mu \cosh^{-1} \left( \frac{|y - z|}{\mu} \right), y \in \bar{\Omega}, \quad (2.1)$$

onde  $z = x + \mu\nu(x)$ . Se, para algum  $\bar{\mu} \in (\mu, R)$ ,  $f$  satisfaz

$$|f(x) - f(y)| \leq \psi_{\bar{\mu},x}(y), \quad x \in \partial^-\Omega, \quad y \in \partial\Omega, \quad (2.2)$$

então existe  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup \partial^-\Omega)$  satisfazendo  $\mathfrak{M}(u) = 0$  em  $\Omega$ ,  $u(x) = f(x)$  para  $x \in \partial^-\Omega$  e com a condição assintótica (5).

Além disto,  $u$  satisfaz a mesma condição Hölder local sobre  $\Omega \cup \partial^-\Omega$  que  $\psi_{\mu,x}$ .

*Demonstração:* Seja  $p \in \partial^-\Omega$  um ponto arbitrário fixado. Defina

$$m = \inf_{\partial\Omega} f - \sup_{\partial\Omega} \psi_{\mu,p} \quad \text{e} \quad M = \sup_{\partial\Omega} f.$$

Segue que

$$m + \psi_{\mu,p}(y) \leq f(y) \leq M + \psi_{\mu,p}(y), \quad y \in \partial\Omega. \quad (2.3)$$

Com isto, obtém-se que  $v = m + \psi_{\mu,p}$  e  $w = M + \psi_{\mu,p}$  são sub e supersolução relativas ao dado no bordo  $f$ , respectivamente e, além disso, segue que  $v \in F_{f,w}$ . Portanto,  $F_{f,w}$  é não-vazio. Assim, do Teorema 1.4, obtemos

$$u(\bar{y}) = \sup \{v(\bar{y}); \bar{y} \in \bar{\Omega} \text{ e } v \in F_{f,w}\}$$

solução de Perron em  $\Omega$  e satisfazendo

$$m + \psi_{\mu,p} \leq u \leq M + \psi_{\mu,p}.$$

Além disto, note que, como  $\cosh^{-1}(|y|) = \ln(|y| + \sqrt{|y|^2 - 1})$  para  $|y| \geq 1$ , segue que, quando  $|y| \rightarrow \infty$ ,  $y \in \Omega$ , temos que  $u(y) = \mu \ln |y| + O(1)$ .

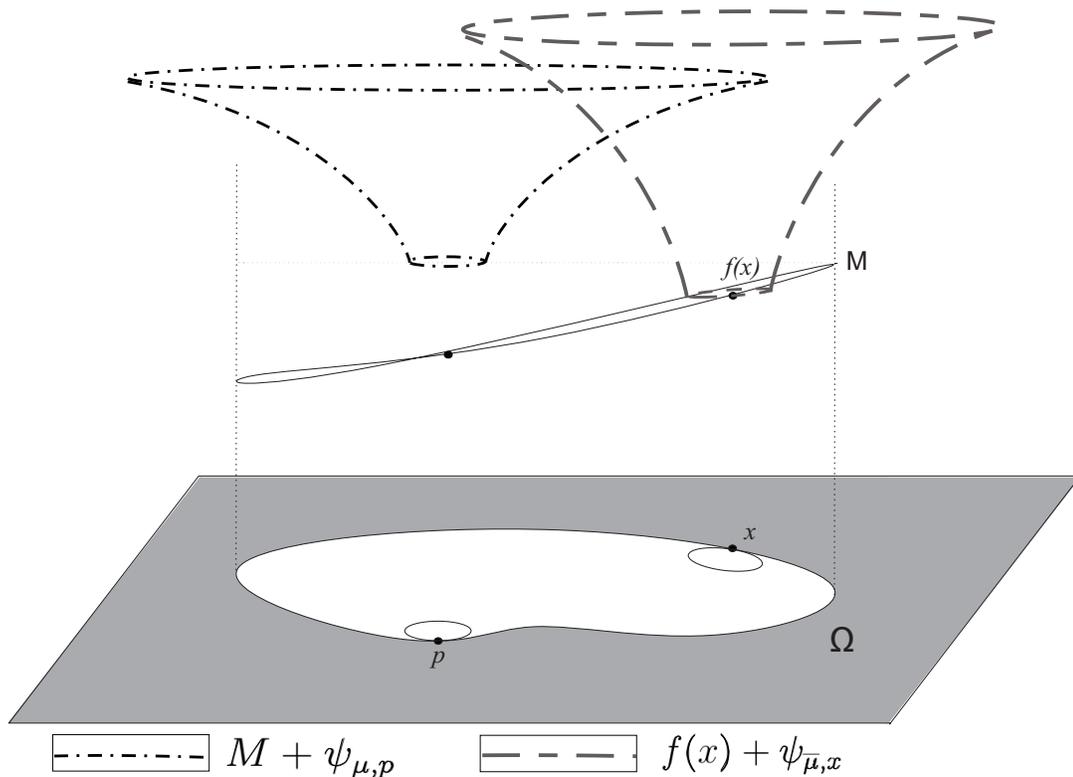
Observe que, além de garantirmos a existência de uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  tal que  $\mathfrak{M}(u) = 0$  em  $\Omega$ , precisamos ainda garantir que  $u \in C^0(\Omega \cup \partial^-\Omega)$  e que  $u|_{\partial^-\Omega} = f$ .

Como  $\bar{\mu} > \mu$ , segue a validade da desigualdade

$$w_x := f(x) + \psi_{\bar{\mu},x}(y) > M + \psi_{\mu,p}(y) = w(y) \quad (2.4)$$

para todo  $x \in \partial^-\Omega$  e todo  $y$  contido no exterior de um disco de raio suficientemente grande.

Figura 2.1: Desigualdade 2.4



Fonte: Da autora.

Seja  $A_x = \{y \in \Omega; w_x(y) = f(x) + \psi_{\bar{\mu},x}(y) \leq M + \psi_{\mu,p}(y)\}$ . Como  $A_x$  é limitado,  $v(y) \leq f(y) \leq w_x(y)$  para todo  $y \in \partial\Omega$  e  $w_x(y) = M + \psi_{\mu,p}(y)$  para  $y \in \partial A_x \setminus \partial\Omega$ , segue do Princípio do Máximo do Corolário 1.1, da definição de subsolução e da condição (2.2), que se  $v \in F_{f,w}$  então  $v(y) \leq w_x(y)$  em  $A_x$  e, conseqüentemente, em  $\Omega$ .

Fazendo uso do Corolário 1.1, obtemos da condição (2.2) que toda subsolução  $v \in F_{f,w}$  satisfaz

$$v(y) \leq f(x) + \psi_{\bar{\mu},x}(y), \quad x \in \partial^-\Omega, \quad y \in \Omega.$$

Conseqüentemente, como  $u(y) = \sup\{v(y); y \in \Omega, v \in F_{f,w}\}$ , então

$$u(y) \leq f(x) + \psi_{\bar{\mu},x}(y), \quad x \in \partial^-\Omega, \quad y \in \Omega. \quad (2.5)$$

Além disto, de (2.2) segue que  $v_x(y) := f(x) - \psi_{\bar{\mu},x}(y) \leq f(y)$  para todo  $x \in \partial^-\Omega$  e  $y \in \partial\Omega$ , o que implica que  $v_x \in F_{f,w}$ . Assim, do Corolário 1.1, temos que

$$v_x(y) \leq u(y) \quad x \in \partial^-\Omega, \quad y \in \Omega. \quad (2.6)$$

Portanto,  $w_x$  e  $v_x$  são as barreiras desejadas para o ponto  $x \in \partial^- \Omega$ . Então, segue da continuidade de  $f$  e de  $\psi_{\bar{\mu},x}$  e das desigualdades (2.5) e (2.6), que conseguimos garantir, pela Proposição 1.3, que  $u \in C^0(\Omega \cup \partial^- \Omega)$  e  $u(x) = f(x)$ , para todo  $x \in \partial^- \Omega$ . Ainda, como a função  $\psi_{\bar{\mu},x}$  é localmente Hölder contínua com expoente  $1/2$ , temos de (2.5) que

$$\begin{aligned} |u(y) - u(\bar{y})| &\leq |f(x) + \psi_{\bar{\mu},x}(y) - (f(x) + \psi_{\bar{\mu},x}(\bar{y}))| = |\psi_{\bar{\mu},x}(y) - \psi_{\bar{\mu},x}(\bar{y})| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{|u(y) - u(\bar{y})|}{|y - \bar{y}|^{1/2}} \leq \frac{|\psi_{\bar{\mu},x}(y) - \psi_{\bar{\mu},x}(\bar{y})|}{|y - \bar{y}|^{1/2}} < \infty \end{aligned}$$

para todo  $y, \bar{y} \in \Omega \cup \partial^- \Omega, y \neq \bar{y}$  e  $x \in \partial^- \Omega$ . Logo a função  $u$  satisfaz a mesma condição Hölder local sobre  $\Omega \cup \partial^- \Omega$ .  $\square$

**Lema 2.2** *Dado  $x \in \partial^- \Omega$  e  $0 < \mu < R$ , a função  $\psi_{\mu,x}$ , como definida em (2.1), satisfaz*

$$\psi_{\mu,x}(y) \geq \sqrt{1 - \frac{\mu}{R}} |y - x| + O(|y - x|), \quad y \in \partial \Omega. \quad (2.7)$$

*Demonstração:* Seja  $\alpha : [0, l] \rightarrow \partial \Omega$  uma parametrização por comprimento de arco de  $\partial \Omega$ , com  $\alpha(0) = x$  e  $l = l(\alpha)$  o comprimento total da curva fechada dado por  $\partial \Omega$ . Considere a aplicação  $d : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$d(s) = |\alpha(s) - z|^2 - \mu^2,$$

onde  $z = x + \mu \nu(x)$ . Note que

$$d'(s) = 2\langle \alpha'(s), \alpha(s) - z \rangle$$

e

$$d'' = 2[\langle \alpha''(s), \alpha(s) - z \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle].$$

Ainda, temos que  $d(0) = d'(0) = 0$  e  $d''(0) = 2\mu k + 2$ , onde  $k = k(x)$  é a curvatura de  $\partial \Omega$  em  $x$ , já que  $k(0) = \langle \alpha''(0), \eta(0) \rangle$ , onde  $\eta(0)$  é um vetor normal unitário na direção de  $\alpha''(0)$ . Por outro lado, expandindo  $d$  em Série de Taylor em  $s = 0$ , obtemos

$$d(s) = d(0) + d'(0)s + \frac{d''(0)}{2}s^2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
|\alpha(s) - z|^2 - \mu^2 &= \left(\frac{2\mu k + 2}{2}\right)s^2 \\
&= (1 + \mu k)s^2.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Pondo  $y = \alpha(s)$ , como a curva é parametrizada por comprimento de arco, note que  $s \geq d(y, x) = |y - x|$ . Além disto, de (2.8) segue que

$$|y - z| = \sqrt{(1 + \mu k)s^2 + \mu^2}$$

e, então, para  $y \in \partial\Omega$ ,

$$\begin{aligned}
\psi_{\mu,x}(y) &= \mu \cosh^{-1}\left(\frac{|y - z|}{\mu}\right) \\
&= \mu \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{(1 + \mu k)s^2 + \mu^2}}{\mu}\right) \\
&\geq \mu \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{(1 + \mu k)|y - x|^2 + \mu^2}}{\mu}\right).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Tome  $|y - x| = \sigma$  e considere a função real

$$\varphi(\sigma) = \mu \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{(1 + \mu k)\sigma^2 + \mu^2}}{\mu}\right).$$

Para  $\sigma > 0$ , temos

$$\varphi'(\sigma) = \frac{\mu(1 + \mu k)}{\sqrt{(1 + \mu k)[(1 + \mu k)\sigma^2 + \mu^2]}}$$

e, então,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \varphi'(\sigma) = \frac{(1 + \mu k)}{\sqrt{1 + \mu k}} = \sqrt{1 + \mu k}.$$

Usando a expansão em Série de Taylor para a função  $\varphi$  em  $0 < \bar{\sigma}$ , obtemos

$$\varphi(\sigma) = \varphi(\bar{\sigma}) + \varphi'(\bar{\sigma})(\sigma - \bar{\sigma}) + r(\sigma - \bar{\sigma}).$$

Logo, como  $\varphi(0) = 0$ ,

$$\lim_{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \varphi(\sigma) = \sqrt{1 + \mu k}\sigma + r(\sigma),$$

com  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{r(\sigma)}{\sigma} = 0$ . Segue que

$$\psi_{\mu,x}(y) \geq \sqrt{1 + \mu k} |y - x| + O(|y - x|), \text{ para } y \in \partial\Omega.$$

Como  $|k(x)| \leq \frac{1}{R(x)} \leq \frac{1}{R}$ , segue que

$$\psi_{\mu,x}(y) \geq \sqrt{1 - \frac{\mu}{R}} |y - x| + O(|y - x|), \text{ para } y \in \partial\Omega. \quad (2.10)$$

Como queríamos demonstrar. □

Estamos agora em condições de demonstrar o principal resultado desta seção.

### ***Demonstração do Teorema A***

Dado  $x \in \partial^- \Omega$  e  $\mu \in (0, R)$ , defina  $\psi_{\mu,x}$  como em (2.1). Assuma, inicialmente, que existe  $\bar{\mu} \in (\mu, R)$  tal que  $f$  satisfaz

$$|f(x) - f(y)| \leq \psi_{\bar{\mu},x}(y), \quad x \in \partial^- \Omega, \quad y \in \partial\Omega.$$

Então, do Lema 2.1, existe  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup \partial^- \Omega)$  satisfazendo  $\mathfrak{M}(u) = 0$  em  $\Omega$ ,  $u(x) = f(x)$ ,  $x \in \partial^- \Omega$ , com a condição assintótica (5).

Olhamos, agora, para os pontos convexos do bordo. Observamos que para os pontos convexos do bordo não precisamos nenhuma condição a mais, além da continuidade do dado no bordo  $f$ . De fato, seja  $p$  um ponto fixo mas arbitrário de  $\partial^- \Omega$ . Dado  $x \in \partial\Omega \setminus \partial^- \Omega$ , escolhemos  $\rho > 0$  suficientemente pequeno tal que o disco  $B_\rho(x)$  de raio  $\rho$  e centro  $x$  seja tal que  $\Omega \cap B_\rho(x)$  é convexo. Note que  $\partial(\Omega \cap B_\rho(x))$  não necessariamente  $C^2$ , mas composto de dois arcos regulares. Usando barreiras logarítmicas pode-se mostrar que o problema de Dirichlet tem solução em  $\Omega \cap B_\rho(x)$  para qualquer dado contínuo no  $\partial(\Omega \cap B_\rho(x))$ , já que  $\Omega \cap B_\rho(x)$  é convexo e se enquadra nas hipóteses do Teorema 1.3. No que segue levaremos isto em consideração.

Considere funções  $g_x^\pm \in C^0(\partial(\Omega \cap B_\rho(x)))$  satisfazendo

(a)  $g_x^\pm(x) = f(x)$ ,

(b)  $g_x^+(y) \geq f(y)$  e  $g_x^-(y) \leq f(y)$ , para  $y \in \partial\Omega \cap B_\rho(x)$ ,

(c)  $g_x^+(y) > M + \psi_{\mu,p}(y)$  e  $g_x^-(y) < m + \psi_{\mu,p}(y)$ , para  $y \in \Omega \cap \partial B_\rho(x)$ ,

onde  $\psi_{\mu,p}$ ,  $m$  e  $M$  são como definidas no Lema 2.1. Assim, podemos garantir a existência de

solução  $w_x^\pm$  para o problema de Dirichlet em  $\Omega \cap B_\rho(x)$ , com

$$w_x^\pm \in C^2(\Omega \cap B_\rho(x)) \cap C^0(\overline{\Omega \cap B_\rho(x)})$$

e de modo que  $w_x^\pm|_{\partial(\Omega \cap B_\rho(x))} = g_x^\pm$ . Consequentemente,

- (i)  $w_x^\pm(x) = f(x)$
- (ii)  $w_x^+(y) \geq f(y)$  e  $w_x^-(y) \leq f(y)$ , para  $y \in \partial\Omega \cap B_\rho(x)$
- (iii)  $w_x^+(y) > M + \psi_{\mu,p}(y)$  e  $w_x^-(y) < m + \psi_{\mu,p}(y)$ , para  $y \in \Omega \cap \partial B_\rho(x)$ .

Seja  $v \in F_{f,w}$  qualquer. Temos de (ii) e (iii) que  $v(y) \leq w_x^+(y)$  para  $y \in \partial(\Omega \cap B_\rho(x))$ . Logo, do Corolário 1.1, segue que

$$v(y) \leq w_x^+(y), \quad y \in \Omega \cap B_\rho(x).$$

Consequentemente, como  $u(y) = \sup\{v(y); v \in F_{f,w}, y \in \overline{\Omega}\}$ , segue que

$$u(y) \leq w_x^+(y), \quad y \in \Omega \cap B_\rho(x). \quad (2.11)$$

Seja  $\Omega_1 = \overline{\Omega \cap B_\rho(x)}$  e  $\Omega_2 = \overline{\Omega} \setminus B_\rho(x)$ , defina

$$W_x^+(y) = \begin{cases} \min\{w_x^+(y), M + \psi_{\mu,p}(y)\}, & \text{se } y \in \Omega_1 \\ M + \psi_{\mu,p}(y), & \text{se } y \in \Omega_2 \end{cases}.$$

Segue que  $v(y) \leq W_x^+(y) \leq w$  em  $\overline{\Omega}$ .

Agora defina

$$W_x^-(y) = \begin{cases} \max\{w_x^-(y), m + \psi_{\mu,p}(y)\}, & \text{se } y \in \Omega_1 \\ m + \psi_{\mu,p}(y), & \text{se } y \in \Omega_2 \end{cases}$$

Note que a continuidade de  $W_x^-$  e  $W_x^+$  em  $\Omega$  segue da condição (iii) e do Lema 1.5.

Da definição de  $W_x^-$  e  $W_x^+$  temos que

$$W_x^-(y) \leq f(y) \leq W_x^+(y), \quad y \in \partial\Omega.$$

Logo a função  $W_x^-$  é uma subsolução relativa ao dado no bordo  $f$  em  $\Omega$  e, além disso,

$$W_x^- \in F_{f,w}.$$

Conseqüentemente obtemos  $W_x^-(y) \leq u(y) \leq W_x^+(y)$  para  $y \in \Omega$  e, em particular,

$$W_x^-(y) \leq u(y) \leq W_x^+(y), \text{ para } y \in \Omega \cap B_\rho(x). \quad (2.12)$$

Da definição de  $W_x^-$ , das desigualdades (2.11) e (2.12) segue que  $u(x) = f(x)$  nos pontos convexos do bordo e, portanto, da Proposição 1.3 a função  $u$  é contínua em  $\Omega \cup \{x\}$ .

Para concluir, observamos então que a validade de (2.2) garante a existência de solução para o problema de Dirichlet com a condição assintótica (5). Portanto, é suficiente agora, exibirmos uma quantidade  $\varepsilon = \varepsilon(\mu, \delta, K, \Omega)$  tal que (3) e (4) implicam em (2.2).

Do Lema 2.2 obtemos que é válida a desigualdade (2.7), ou seja dado  $x \in \partial^- \Omega$

$$\psi_{\mu,x}(y) \geq \sqrt{1 - \frac{\mu}{R}} |y - x| + O(|y - x|), \quad y \in \partial\Omega.$$

Então, dado  $\mu \in [0, R)$  e  $K \in [0, \sqrt{1 - \frac{\mu}{R}})$ , podemos escolher  $\bar{\mu} \in (\mu, R)$  tal que

$$K < \sqrt{1 - \frac{\bar{\mu}}{R}}.$$

Deste modo, de (2.7) segue que

$$\psi_{\bar{\mu},x} \geq K|y - x|, \quad x \in \partial^- \Omega, \quad y \in \partial\Omega, \quad |y - x| \leq \bar{\delta}, \quad (2.13)$$

para algum  $0 < \bar{\delta} \leq \delta$  tal que  $\bar{\delta}$  serve para todo  $x \in \partial^- \Omega$ . Defina então

$$\varepsilon = \inf\{\psi_{\bar{\mu},x}(y); x \in \partial^- \Omega, y \in \partial\Omega, |y - x| \geq \bar{\delta}\}.$$

Note que podemos garantir  $\varepsilon > 0$ , pois  $\bar{\mu} < R$  e, por isto, o disco de raio  $\bar{\mu}$ , que tangencia algum ponto  $x \in \partial^- \Omega$  não possui nenhum ponto em comum com  $\partial\Omega$  além de  $x$ .

Portanto, conclui-se de (2.13) e da definição de  $\varepsilon$  que, se  $\text{osc}(f) < \varepsilon$ , então

$$|f(y) - f(x)| \leq \psi_{\bar{\mu},x}(y), \text{ para todo } x \in \partial^- \Omega, \quad y \in \partial\Omega.$$

Assim, segue a validade da afirmação (2.2), garantindo a existência de solução para o problema de Dirichlet (1).  $\square$

Note que  $W_x^- \in C^{0,1}(\Omega)$ . Isso decorre do fato de  $w_x^- \in C^2(\Omega \cap B_\rho(x))$  e

$$m + \psi_{\mu,p} \in C^2(\Omega),$$

o que implica que a norma do gradiente das funções  $w_x^-$  e  $m + \psi_{\mu,p}$  é limitado nos pontos  $y \in \Omega \cap B_\rho(x)$  tal que  $w_x^-(y) = m + \psi_{\mu,p}(y)$ .

## 2.2 SOLUÇÕES LIMITADAS

Como mencionado na Introdução, para  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  pode-se exibir de forma mais explícita a condição sobre a constante de Lipschitz. Em princípio, nada impediria de termos feito isto já no Teorema A da seção anterior. Porém a técnica usada na prova do Teorema A pode ser estendida para variedades, por exemplo, enquanto a técnica que permite obter de forma mais explícita a condição sobre a constante de Lipschitz dificilmente é aplicável a ambientes diferentes do  $\mathbb{R}^2$ .

De forma análoga à seção anterior utilizamos o Método de Perron e, além disso, consideramos barreiras semelhantes àsquelas utilizadas na prova do Teorema A, com algumas adaptações.

### *Demonstração do Teorema B:*

Ponha  $w_0 = \sup_{\partial\Omega} f$  e  $v_0 = \inf_{\partial\Omega} f$ . Então  $v_0$ ,  $w_0$  são sub e supersolução relativas ao dado no bordo  $f$ , respectivamente. Com isto, temos que o conjunto  $F_{f,w_0}$  é não vazio. Logo, a solução de Perron dada por  $u(x) := \sup\{v(x); v \in F_{f,w_0}, x \in \bar{\Omega}\}$  fica bem definida e é limitada.

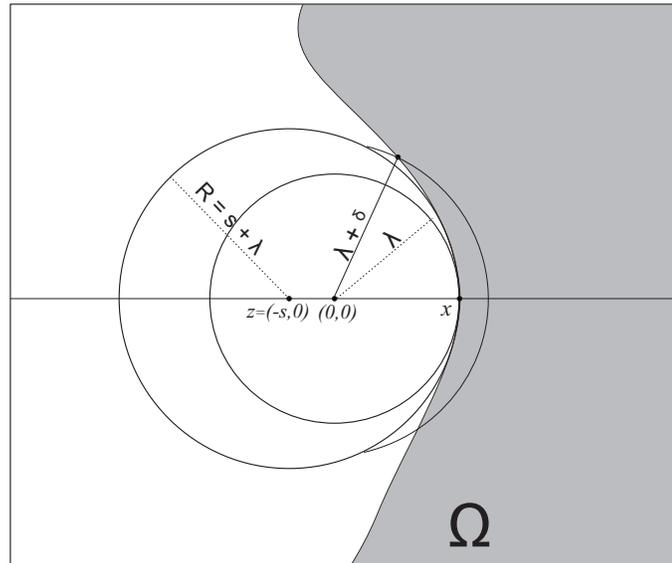
Precisamos, agora, garantir que  $u$  seja contínua em  $\bar{\Omega}$  e que  $u|_{\partial\Omega} = f$ . Para isto, é suficiente construirmos barreiras de forma adequada para os pontos não convexos (pois para os pontos convexos, basta proceder como na prova do Teorema A).

Seja  $x \in \partial^-\Omega$ . Por hipótese, existe um disco aberto  $D_R(z) = \{y \in \mathbb{R}^2; |y - z| < R\}$  contido em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  tal que  $x \in \partial D_R(z)$ . Podemos assumir que  $x$  e  $z$  são pontos do eixo real, com coordenadas  $x = (\lambda, 0)$  e  $z = (-s, 0)$  onde  $\lambda, s > 0$  com  $s + \lambda = R$  (Ver Figura 2.2). Posteriormente, escolheremos  $\lambda, s$  de forma adequada. Nosso objetivo é mostrar que

$$b(y) = f(x) + \psi_{\lambda,x}(y),$$

onde  $\psi_{\lambda,x}$  está definido como (2.1), é uma barreira superior relativa ao dado no bordo  $f$  em  $x$ .

Considere um ponto  $y \in \partial\Omega$ , com  $y \neq x$ . Como  $y$  não está contido em  $D_R(z)$ , temos que  $y$  não está contido em  $\overline{D_\lambda(0)}$ , donde  $|y| = \lambda + \delta$  para algum  $\delta > 0$ . Podemos assumir que  $\lambda + \delta \leq \lambda + 2s$ , isto é,  $\delta \leq 2s$  e, com isto, conseguimos garantir que o círculo de raio  $|w| = \lambda + \delta$  e centro  $(0, 0)$  intercepta o círculo de raio  $R$  em dois pontos, digamos  $\zeta = (\xi, \pm\eta)$ .

Figura 2.2: Disco  $D_R(z)$  tangenciando  $\partial\Omega$ 

Fonte: Ripoll & Tomi (2014).

Vamos fazer alguns cálculos de modo que possamos encontrar os valores de  $\xi$  e  $\eta$ . Considere a equação

$$\xi^2 + \eta^2 = (\lambda + \delta)^2 \quad (2.14)$$

que representa a circunferência de centro  $(0, 0)$  passando por  $y$ , com raio  $\lambda + \delta$  e a circunferência centrada em  $z$ , com raio  $\lambda + s = R$  e tangenciando  $\partial\Omega$  em  $x$ , cuja a equação é

$$(\xi + s)^2 + \eta^2 = R^2. \quad (2.15)$$

Isolando  $\xi^2$ , em ambas equações, pode-se escrever

$$\xi^2 = (\lambda + \delta)^2 - \eta^2$$

e

$$\xi^2 = R^2 - \eta^2 - 2\xi s - s^2.$$

Assim, obtemos

$$\xi^2 = (\lambda + \delta)^2 - \eta^2 = R^2 - \eta^2 - 2\xi s - s^2,$$

donde,

$$2\xi s = R^2 - \eta^2 - 2\xi s - s^2 + \eta^2 - (\lambda + \delta)^2,$$

ou seja,

$$2\xi s = \lambda^2 + 2\lambda s + s^2 - \eta^2 - s^2 - \lambda^2 - 2\lambda\delta - \delta^2 + \eta^2.$$

Segue que

$$\xi = \frac{2\lambda s - 2\lambda\delta - \delta^2}{2s} = \lambda - \frac{\lambda\delta}{s} - \frac{\delta^2}{2s}.$$

Logo, substituindo  $\xi$  na primeira equação, temos

$$\begin{aligned} \xi^2 &= (\lambda + \delta)^2 - \eta^2 \\ \Rightarrow \left(\lambda - \frac{\lambda\delta}{s} - \frac{\delta^2}{2s}\right)^2 &= (\lambda + \delta)^2 - \eta^2 \\ \Rightarrow \eta^2 &= (\lambda + \delta)^2 - \left(\lambda - \frac{\lambda\delta}{s} - \frac{\delta^2}{2s}\right)^2 \\ \Rightarrow \eta^2 &= \lambda^2 + 2\lambda\delta + \delta^2 - \left(\lambda^2 - \frac{\lambda^2\delta}{s} - \frac{\lambda\delta^2}{2s} - \frac{\lambda^2\delta}{s} + \frac{\lambda^2\delta^2}{s^2} + \frac{\lambda\delta^3}{2s^2} - \frac{\lambda\delta^2}{2s} + \frac{\lambda\delta^3}{2s^2} + \frac{\delta^4}{4s^2}\right) \\ \Rightarrow \eta^2 &= 2\lambda\delta + \delta^2 + \frac{2\lambda^2\delta}{s} + \frac{\lambda\delta^2}{s} - \frac{\lambda^2\delta^2}{s^2} - \frac{\lambda\delta^3}{s^2} - \frac{\delta^4}{4s^2} \\ \Rightarrow \eta &= \pm \sqrt{2\lambda\delta + \delta^2 + \frac{2\lambda^2\delta}{s} + \frac{\lambda\delta^2}{s} - \frac{\lambda^2\delta^2}{s^2} - \frac{\lambda\delta^3}{s^2} - \frac{\delta^4}{4s^2}}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
|\zeta - x|^2 &= |(\xi, \pm\eta) - (\lambda, 0)|^2 \\
&= \langle (\xi - \lambda, \pm\eta), (\xi - \lambda, \pm\eta) \rangle \\
&= (\xi - \lambda)^2 + (\pm\eta)^2 \\
&= \left( \lambda - \frac{\lambda\delta}{s} - \frac{\delta^2}{2s} - \lambda \right)^2 + (\pm\eta)^2 \\
&= \left( -\frac{\lambda\delta}{s} - \frac{\delta^2}{2s} \right)^2 + (\pm\eta)^2 \\
&= \frac{\lambda^2\delta^2}{s^2} + \frac{\lambda\delta^3}{s^2} + \frac{\delta^4}{4s^2} + 2\lambda\delta + \delta^2 + \frac{2\lambda^2\delta}{s} + \frac{\lambda\delta^2}{s} - \frac{\lambda^2\delta^2}{s^2} - \frac{\lambda\delta^3}{s^2} - \frac{\delta^4}{4s^2} \\
&= 2\lambda\delta + \delta^2 + \frac{2\lambda^2\delta}{s} + \frac{\lambda\delta^2}{s} \\
&= \lambda\delta \left( 2 + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{2\lambda}{s} + \frac{\delta}{s} \right).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Observe que  $|y - x| \leq |\zeta - x|$ . Logo, notando que  $|y| = \lambda + \delta$ , podemos obter a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\frac{b(y) - f(x)}{|y - x|} &\geq \frac{b(y) - f(x)}{|\zeta - x|} \\
&= \frac{\lambda \cosh^{-1}\left(\frac{|y|}{\lambda}\right)}{\sqrt{\lambda\delta \left( 2 + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{2\lambda}{s} + \frac{\delta}{s} \right)}} \\
&= \frac{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\delta}{\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{\delta}{\lambda}} \sqrt{2 + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{2\lambda}{s} + \frac{\delta}{s}}}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Dado  $\rho > 0$  satisfazendo a inequação  $\lambda + \delta < \lambda + \rho$ . Pelo fato de  $a(t) = \frac{\cosh^{-1}(1+t)}{\sqrt{t}}$ ,  $t > 0$  ser uma função decrescente então, para  $\rho > \delta$ , como  $\frac{\rho}{\lambda} > \frac{\delta}{\lambda}$ , temos

$$\frac{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\delta}{\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{\delta}{\lambda}}} \geq \frac{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}}$$

e, como

$$\sqrt{2 + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{2\lambda}{s} + \frac{\delta}{\lambda}} < \sqrt{2 + \frac{\rho}{\lambda} + \frac{2\lambda}{s} + \frac{\rho}{\lambda}},$$

segue que

$$\frac{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\delta}{\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{\delta}{\lambda}} \sqrt{2 + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{2\lambda}{s} + \frac{\delta}{\lambda}}} \geq \frac{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} \sqrt{2 + \frac{\rho}{\lambda} + \frac{2\lambda}{s} + \frac{\rho}{\lambda}}}.$$

Seja  $U = \{y \in \mathbb{R}^2; \lambda < |y| < \lambda + \rho\}$ . Agora, note que se tomarmos  $y' \in U$  tal que  $|y'| = \lambda + \delta' < \lambda + \delta$ , temos que  $\delta' < \delta$  e, conseqüentemente, vale a desigualdade  $\frac{\delta'}{\lambda} < \frac{\delta}{\lambda}$ . Aplicando um raciocínio análogo ao feito acima, com  $\delta'$  ao invés de  $\delta$ , vemos que

$$\begin{aligned} \frac{b(y') - f(x)}{|y' - x|} &\geq \frac{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\delta'}{\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{\delta'}{\lambda}} \sqrt{2 + \frac{\delta'}{\lambda} + \frac{2\lambda}{s} + \frac{\delta'}{\lambda}}} \geq \frac{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\delta}{\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{\delta'}{\lambda}} \sqrt{2 + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{2\lambda}{s} + \frac{\delta}{\lambda}}} \\ &\geq \frac{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} \sqrt{2 + \frac{\rho}{\lambda} + \frac{2\lambda}{s} + \frac{\rho}{\lambda}}}. \end{aligned}$$

Assim, para  $U \cap \bar{\Omega}$  vale

$$\frac{b(y) - f(x)}{|y - x|} \geq \frac{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} \sqrt{2 + \frac{\rho}{\lambda} + \frac{2\lambda}{s} + \frac{\rho}{\lambda}}}. \quad (2.19)$$

De posse desta estimativa, podemos escolher  $\lambda$ ,  $s$  e  $\rho$  de modo que possamos obter o resultado desejado. Neste sentido, dado  $\mu > 0$ , determinamos  $\lambda$  e  $\rho$  pelas relações

$$\frac{\lambda}{s} = \mu \text{ e } \frac{\rho}{\lambda} = \mu,$$

donde obtemos

$$\frac{\lambda}{s} = \frac{1}{\left(\frac{1+\mu}{\mu}\right) - 1} \Rightarrow \lambda \left(\frac{1+\mu}{\mu}\right) = \lambda + s \Rightarrow \lambda = \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)R,$$

$$\mu = \frac{\rho}{\lambda} \Rightarrow \rho = \mu \left( \frac{\mu}{1 + \mu} \right) R \Rightarrow \rho = \frac{\mu^2}{1 + \mu} R$$

e

$$\mu^2 = \frac{\rho}{s}.$$

Ainda, da definição de  $\mu$ , temos

$$\begin{aligned} \mu^2 \leq 2 &\Rightarrow \mu^2 s \leq 2s \\ &\Rightarrow \mu \lambda \leq 2s \Rightarrow \frac{\mu \lambda}{s} \leq 2 \\ &\Rightarrow \frac{\rho}{s} \leq 2 \Rightarrow \rho \leq 2s. \end{aligned}$$

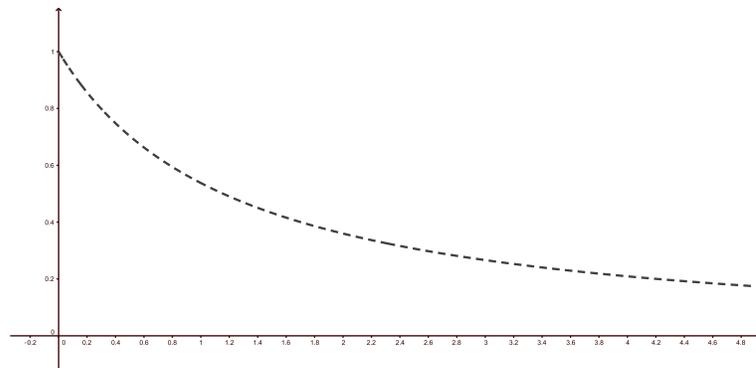
Logo  $\delta \leq \rho \leq 2s$ . Segue de (2.19) e das relações acima que

$$\frac{b(y) - f(x)}{|y - x|} \geq \frac{\cosh^{-1}(1 + \mu)}{\sqrt{\mu} \sqrt{2 + 3\mu + \mu^2}} =: \ell(\mu), \quad y \in \bar{\Omega} \cap U \quad (2.20)$$

e, observando que a função  $\cosh^{-1}$  é monótona não-decrescente, que  $|y| \geq \lambda + \rho$ , para  $y \notin U$  e que  $\lambda = \frac{\mu}{1 + \mu} R$  e  $\frac{|y|}{\lambda} \geq \frac{\lambda + \rho}{\lambda} \geq 1 + \mu$ , segue da definição de  $b(y)$  que

$$b(y) - f(x) \geq \frac{\mu}{1 + \mu} R \cosh^{-1}(1 + \mu), \quad y \in \Omega \setminus (U \cap \bar{\Omega}) \quad (2.21)$$

Figura 2.3: Gráfico da função  $\ell$



Fonte: Da autora, gerado no GeoGebra 5.0.286.0-3D.

Observe que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \ell(\mu) = 1.$$

Defina

$$K_0 := \ell(\sqrt{2}).$$

Portanto, dado  $K \in [K_0, 1)$  existe um único  $\mu \in (0, \sqrt{2})$  com  $\ell(\mu) = K$ . Consequentemente, segue de (6) e (2.20) que

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x| \leq b(y) - f(x), \quad \text{para } y \in \partial\Omega \cap U$$

e, (8) e (2.21) implicam que

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{\mu}{1 + \mu} R \cosh^{-1}(1 + \mu) \leq b(y) - f(x), \quad \text{para } y \in \partial\Omega \setminus U.$$

Com isso obtemos que  $b(y) \geq f(y)$  para todo  $y \in \partial\Omega$ . Logo  $b$  é uma barreira superior no caso  $K \in [K_0, 1)$ .

Para o caso  $0 \leq K \leq K_0$  podemos substituir  $K$  em (6) por  $K_0$  e assim conseguimos a desigualdade

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x| \leq K_0|y - x| \leq b(y) - f(x), \quad \text{para } y \in \partial\Omega \cap U.$$

Usando a hipótese sobre  $\text{osc}(f)$  e a desigualdade (2.21), para os pontos  $y \in \partial\Omega \setminus U$ , segue que

$$|f(y) - f(x)| \leq b(y) - f(x)$$

e, assim, obtém-se a mesma conclusão, isto é,  $f(y) \leq b(y)$ , para  $y \in \partial\Omega$ . De forma semelhante, pode ser mostrado que

$$v(y) = f(x) - \lambda \cosh^{-1}\left(\frac{|y|}{\lambda}\right)$$

é uma barreira inferior relativa ao dado no bordo  $f$  em  $x$ .

Deste modo, obtemos barreiras adequadas para cada ponto não convexo do bordo. Para os pontos convexos de  $\partial\Omega$  procedemos como segue. Dado  $x \in \partial\Omega \setminus \partial^-\Omega$ , escolhemos  $r > 0$  suficientemente pequeno tal que o disco  $B_r(x)$  de raio  $r$  e centro  $x$  seja tal que  $\Omega \cap B_r(x)$  é convexo. Com isso, como sabemos que o problema de Dirichlet (1) tem solução para qualquer dado contínuo sobre  $\partial(\Omega \cap B_r(x))$  (ver Teorema 1.3), podemos garantir a existência de solução  $w_x^\pm$  para o problema de Dirichlet (1) em  $\Omega \cap B_r(x)$ , com  $w_x^\pm \in C^2(\Omega \cap B_r(x)) \cap C^0(\overline{\Omega \cap B_r(x)})$ , satisfazendo

$$(i) \quad w_x^\pm(x) = f(x);$$

(ii)  $w_x^+(y) \geq f(y)$  e  $w_x^-(y) \leq f(y)$ , para  $y \in \partial\Omega \cap B_r(x)$ ;

(iii)  $w_x^+(y) > w_0(y)$  e  $w_x^-(y) < v_0(y)$ , para  $y \in \Omega \cap \partial B_r(x)$ .

Assim, defina

$$W_x^-(y) = \begin{cases} \max\{w_x^-(y), v_0(y)\} & , \quad \text{se } y \in \Omega \cap B_r(x) \\ v_0(y) & , \quad \text{se } y \in \Omega \setminus B_r(x) \end{cases}$$

Observe que  $W_x^- \in C^0(\bar{\Omega})$ . Além disso, temos que

$$W_x^-(y) \leq f(y), \quad \text{para todo } y \in \partial\Omega \text{ e } W_x^-(x) = f(x)$$

e

$$W_x^-(y) \leq w_0, \quad \text{para todo } y \in \Omega.$$

Logo, do Lema 1.4,  $W_x^-$  é uma subsolução relativa ao operador  $\mathfrak{M}$  em  $\bar{\Omega}$  com  $W_x^- \in F_{f, w_0}$ .

Analogamente vê-se que

$$W_x^+(y) = \begin{cases} \min\{w_x^+(y), w_0(y)\} & , \quad \text{se } y \in \Omega \cap B_r(x) \\ w_0(y) & , \quad \text{se } y \in \Omega \setminus (\Omega \cap B_r(x)) \end{cases}$$

é supersolução relativa ao dado no bordo  $f$ , com  $w_x^+(x) = f(x)$ . Assim, obtemos para cada ponto  $x \in \partial\Omega$ , barreiras adequadas para o problema de Dirichlet (1) e, então, da Proposição 1.3 a solução de Perron  $u(y) := \sup\{v(y); v \in F_{f, w_0}, y \in \bar{\Omega}\}$  está bem definida em  $\bar{\Omega}$ ,  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  com  $u|_{\partial\Omega} = f$ .  $\square$

## Capítulo 3

# RESULTADOS DE NÃO EXISTÊNCIA

Neste capítulo, mostraremos resultados de não existência para o problema (1). Inicialmente, destacaremos o resultado de não existência relativo a domínios limitados não convexos, obtido no Teorema 4 de Williams (1984) e, posteriormente, utilizaremos este resultado para provar um resultado de não existência relativo a domínios ilimitados não convexos, o qual foi mostrado por Kutev & Tomi em (1998).

### 3.1 NÃO EXISTÊNCIA PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA DOMÍNIOS NÃO CONVEXOS LIMITADOS

Mostraremos que a limitação sobre a constante de Lipschitz  $K$  encontrada nos resultados do capítulo anterior é a melhor possível. Primeiro, mostraremos que uma restrição somente sobre a constante de Lipschitz não é suficiente para garantir a existência de uma solução para o problema de Dirichlet. Em seguida, demonstraremos que se  $K > 1$ , existe dado no bordo  $f$  com  $\text{osc}(f)$  tão pequena quanto queiramos, para o qual o problema de Dirichlet (1) não tem solução.

Observamos que o resultado desta seção tem validade para dimensão  $n \geq 2$ , mas como anteriormente obtivemos os resultados para dimensão  $n = 2$ , faremos a prova para  $\mathbb{R}^2$ . A prova para  $n > 2$  é essencialmente a mesma.

Dados  $\rho, R \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \rho < R$ , considere o anel

$$\Omega_{\rho,R} = \{x \in \mathbb{R}^2; \rho < |x| < R\}$$

e, dado  $C > 0$ , seja  $f \in C^0(\partial\Omega_{\rho,R})$  dada por

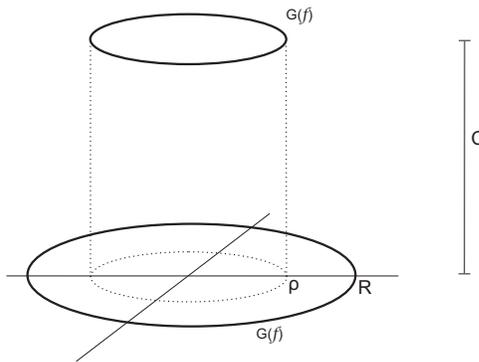
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } |x| = R \\ C & , \text{ se } |x| = \rho \end{cases} .$$

Sabemos que o problema de Dirichlet (1) tem solução em  $\Omega_{\rho,R}$  somente se

$$C \leq C_0(\rho, R) := \rho \ln\left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho}\right).$$

Tal resultado é clássico e pode ser encontrado, por exemplo, em Giusti (1984, p. 149) ou Espírito-Santo & Ripoll (2001).

Figura 3.1: Função  $f$  definida sobre  $\partial\Omega_{\rho,R}$



Fonte: Da autora.

Tome  $C = 2C_0(\rho, R)$  e, então, para tal  $C$  o problema de Dirichlet (1) não possui solução. Note ainda que  $C_0(\rho, R) \rightarrow 0$  quando  $\rho \rightarrow 0$ . Por outro lado, como  $R - \rho \leq |x - y|$  para  $x, y \in \partial\Omega_{\rho,R}$  com  $|x| = R$  e  $|y| = \rho$ , segue que

$$|f(x) - f(y)| \leq C \leq \frac{C}{R - \rho} |x - y|$$

e, com isso, obtemos que a constante de Lipschitz de  $f$  é  $K \leq \frac{C}{R - \rho}$ . Segue que

$$\frac{C}{R - \rho} = \frac{2C_0(\rho, R)}{R - \rho} = \frac{2\rho}{R - \rho} \ln\left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho}\right) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

Desta forma, podemos obter uma constante de Lipschitz  $K$  arbitrariamente pequena, de forma que o problema de Dirichlet não possui solução.

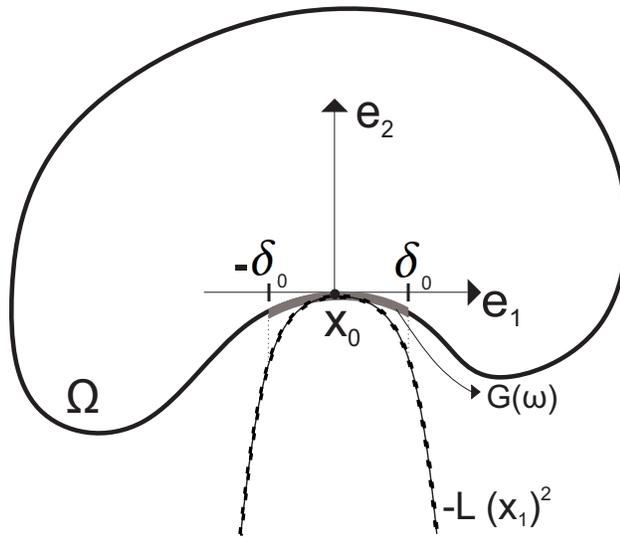
Tendo em vista o Teorema A e o Teorema B, que provamos no capítulo anterior,

verificaremos agora que, para domínios limitados não convexos do  $\mathbb{R}^2$ , a limitação  $0 \leq K < 1$ , sobre a condição de Lipschitz, é a melhor possível.

Para o que segue nesta seção, levaremos em consideração o exposto a seguir.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de classe  $C^{2,\alpha}$ , limitado e não convexo e seja  $x_0 \in \partial^- \Omega$ . Consideramos um sistema de coordenadas tendo  $x_0$  como origem e a normal unitária a  $\partial\Omega$ , em  $x_0$ , que aponta para o interior de  $\Omega$ , denotada por  $e_2$  e  $x := (x_1, x_2)$  denotará então um ponto de  $\mathbb{R}^2$  neste sistema de coordenadas, com  $x_0 = (0, 0)$ .

Figura 3.2: Sistema de Coordenadas para o  $\partial\Omega$



Fonte: Da autora.

Ainda, como  $\partial\Omega$  é de classe  $C^{2,\alpha}$ , podemos obter uma vizinhança  $I = (-\delta_0, \delta_0)$ ,  $0 < \delta_0 < 1$ , e uma função  $\omega : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega = \omega(x_1)$ ,  $\omega \in C^2(I)$ , tal que  $\omega(0) = 0$ ,  $\frac{d\omega}{dx_1}(0) = \omega'(0) = 0$  e cujo o gráfico  $G(\omega)$  seja tal que  $G(\omega) \subset \partial\Omega$ , ou seja,  $\partial\Omega$  na vizinhança de  $x_0$  é dado pelo gráfico de  $\omega$ . Além disto, já que  $\frac{d\omega}{dx_1}$  é contínua e temos  $\frac{d\omega}{dx_1}(0) = 0$  podemos assumir que

$$\left| \frac{d\omega}{dx_1} \right| < 1, \quad \text{para todo } x_1 \in I.$$

Ainda, note que podemos assumir

$$|\omega(x_1)| \leq L(x_1)^2, \quad \left| \frac{d\omega}{dx_1}(x_1) \right| \leq L|x_1| \text{ e } \|D^2\omega\|_{0,\alpha} \leq L, \quad (3.1)$$

para algum  $L > 0$ .

Dada uma função  $f \in C^0(\partial\Omega)$ , consideremos o cilindro  $\partial\Omega \times \mathbb{R}$  numa vizinhança de  $(x_0, f(x_0))$ . Do fato de  $\partial\Omega$  ser de classe  $C^2$ , podemos obter  $\delta_1 \leq \delta_0$  e uma função  $W \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , com  $W = W(x_1, x_3)$ , satisfazendo

$$W(0, 0) = 0, \quad \nabla W(0, 0) = (0, 0) \text{ e } \frac{\partial W}{\partial x_3}(x_1, x_3) = 0,$$

para todo  $(x_1, x_3)$  tal que

$$(\partial\Omega \times \mathbb{R}) \cap \{(x_1, x_2, x_3); |x_1| < \delta_1\} = \{(x_1, x_2, x_3); x_2 = W(x_1, x_3) \text{ e } |x_1| < \delta_1\}.$$

Note ainda que, como  $k_{\partial\Omega}(x_0) < 0$ , onde  $k_{\partial\Omega}$  indica a curvatura do  $\partial\Omega$ , da continuidade  $k_{\partial\Omega}$  podemos assumir que  $I$  é tal que

$$k_{G(\omega)} \leq -k_0 < 0, \text{ em } I,$$

para algum  $k_0 > 0$ .

No restante desta seção, teremos por base as notações e considerações acima.

Passaremos à prova do Teorema C, o qual refere-se a domínios não convexos limitados.

Para a demonstração deste teorema, precisaremos de alguns resultados preliminares que descrevem o comportamento de possíveis soluções quando o dado no bordo é do tipo especificado no Teorema C.

Observe que os Lemas 3.1 e 3.2 e o Teorema 3.1 a seguir poderiam, em princípio, serem feitos sem nenhuma suposição sobre a curvatura do bordo, já que as suposições e definições acima, relativamente a  $\omega$  e  $W$ , com exceção de  $k_{G(\omega)}$ , podem ser feitas para qualquer ponto de  $\partial\Omega$ , pois  $\partial\Omega$  é classe  $C^2$ , e somente esta hipótese é utilizada na definição destas funções.

**Lema 3.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado tal que  $\partial\Omega$  é de classe  $C^2$  em uma vizinhança de  $x_0 \in \partial^-\Omega$ . Suponha que existam  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ,  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $K > 1$  satisfazendo*

$$(i) \quad u(x) \geq u(x_0) + K|x - x_0|, \quad x \in B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega,$$

$$(ii) \quad u(x) \geq u(x_0) + \varepsilon, \quad x \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)$$

$$(iii) \quad \mathfrak{M}(u) = 0, \text{ em } \Omega.$$

Então, existe  $A > 0$  tal que

$$u(x) \geq u(x_0) + A\sqrt{|\langle \nu, x - x_0 \rangle|} \text{ em } \Omega,$$

onde  $\nu$  é a normal unitária à  $\partial\Omega$  em  $x_0$  que aponta para  $\Omega$ .

*Demonstração:* Como  $\partial\Omega$  é de classe  $C^2$  próximo a  $x_0$ , então satisfaz a condição da esfera exterior nessa vizinhança para algum  $R_0 > 0$ . Assim, tomando  $0 < R < R_0$ , podemos obter uma bola  $B$  de raio  $R$  tal que  $B \subset (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)$  e  $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$ . Assuma  $x_0 = (0, 0)$  e  $\nu = e_2$ . Seja  $d(x)$  a distância de  $x$  à  $\partial B$ . Para  $x \in \overline{\Omega}$ , note que

$$d(x) = |x + Re_2| - R.$$

Defina agora

$$v(x) = \sqrt{2Rd(x)} = \sqrt{2R}d(x)^{1/2}.$$

Com isto, temos

$$\nabla v(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2R}d(x)^{-1/2}\nabla d(x) = \frac{\sqrt{2R}}{2\sqrt{d(x)}}\nabla d(x). \quad (3.2)$$

Observe que

$$|x + Re_2| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2 + R)^2}.$$

Assim, obtemos

$$\frac{\partial d(x)}{\partial x_1} = \frac{x_1}{|x + Re_2|}$$

e

$$\frac{\partial d(x)}{\partial x_2} = \frac{x_2 + R}{|x + Re_2|}.$$

Segue que

$$\nabla d(x) = \frac{x + Re_2}{|x + Re_2|}$$

e

$$|\nabla d(x)| = 1$$

para todo  $x \in \Omega$ . Ainda, note que de (3.2)

$$1 + |\nabla v|^2 = 1 + \frac{2R}{4d(x)}|\nabla d(x)|^2 = \frac{4d(x) + 2R}{4d(x)}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} &= \frac{\nabla v}{\sqrt{4d(x) + 2R}} = \nabla v \frac{\sqrt{4d(x)}}{\sqrt{4d(x) + 2R}} \\
&= \frac{\sqrt{2R} \nabla d(x) 2\sqrt{d(x)}}{2\sqrt{d(x)} \sqrt{2} \sqrt{2d(x) + R}} \\
&= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2d(x) + R} |x + Re_2|} (x_1, x_2 + R) \\
&= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{(2|x + Re_2| - R)|x + Re_2|^2}} (x_1, x_2 + R) \\
&= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2((x_1)^2 + (x_2 + R)^2)^{3/2} - R((x_1)^2 + (x_2 + R)^2)}} (x_1, x_2 + R) \\
&= \sqrt{R} \left( \frac{x_1}{(g(x_1, x_2))^{1/2}}, \frac{x_2 + R}{(g(x_1, x_2))^{1/2}} \right),
\end{aligned}$$

onde  $g(x_1, x_2) := 2((x_1)^2 + (x_2 + R)^2)^{3/2} - R((x_1)^2 + (x_2 + R)^2)$ . Segue que

$$\frac{\partial g(x_1, x_2)^{1/2}}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{g}} (3|x + Re_2| - R)$$

e

$$\frac{\partial g(x_1, x_2)^{1/2}}{\partial x_2} = \frac{x_2 + R}{\sqrt{g}} (3|x + Re_2| - R),$$

donde,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{x_1}{g^{1/2}} \right) &= \frac{\sqrt{g} - \frac{(x_1)^2}{\sqrt{g}} (3|x + Re_2| - R)}{g} \\
&= \frac{g - (x_1)^2 (3|x - Re_2| - R)}{g\sqrt{g}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{x_2 + R}{g^{1/2}} \right) &= \frac{\sqrt{g} - \frac{(x_2 + R)^2}{\sqrt{g}} (3|x + Re_2| - R)}{g} \\
&= \frac{g - (x_2 + R)^2 (3|x - Re_2| - R)}{g\sqrt{g}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}(v) &= \operatorname{div} \left( \frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) \\
&= \sqrt{R} \operatorname{div} \left( \frac{x_1}{\sqrt{g}}, \frac{x_2 + R}{\sqrt{g}} \right) \\
&= \sqrt{R} \left( \frac{g - (x_1)^2(3|x + Re_2| - R) + g - (x_2 + R)^2(3|x + Re_2| - R)}{g\sqrt{g}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{R}}{g\sqrt{g}} \left( 2g - [(x_1)^2 + (x_2 + R)^2](3|x + Re_2| - R) \right) \\
&= \frac{\sqrt{R}}{g\sqrt{g}} \left( 2g - |x + Re_2|^2(3|x + Re_2| - R) \right).
\end{aligned}$$

Mas, perceba que  $g = 2|x + Re_2|^3 - R|x + Re_2|^2$ . Logo  $2g = 4|x + Re_2|^3 - 2R|x + Re_2|^2$ .

Com isto,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}(v) &= \frac{\sqrt{R}}{g\sqrt{g}} (2g - |x + Re_2|^2(3|x + Re_2| - R)) \\
&= \frac{\sqrt{R}}{g\sqrt{g}} (4|x + Re_2|^3 - 2R|x + Re_2|^2 - |x + Re_2|^2(3|x + Re_2| - R)) \\
&= \frac{\sqrt{R}}{g\sqrt{g}} (|x + Re_2|^3 - R|x + Re_2|^2) \\
&= \frac{\sqrt{R}}{g\sqrt{g}} |x + Re_2|^2 (|x + Re_2| - R).
\end{aligned}$$

Logo, como  $d(x) > 0$  em  $\Omega$ , segue que  $|x + Re_2| > R$ . Além disto, pelo mesmo argumento segue que  $g > 0$ , o que implica

$$\mathfrak{M}(v) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) \geq 0.$$

Portanto,  $v$  é subsolução relativa a  $\mathfrak{M}$  em  $\Omega$ .

Considerando, agora, a função  $\omega$  descrita anteriormente (p. 44), cujo o gráfico  $G(\omega)$  está contido em  $\partial\Omega$ , com  $x_0 \in G(\omega)$  e satisfazendo as desigualdades dadas em (3.1). Assim, se  $x \in \partial\Omega$ ,  $x = (x_1, x_2)$  próximo a  $x_0$  e  $x_1 \in (-\delta_1, \delta_1) \subset I$ , como  $|x + Re_2| \geq R$  e  $|\omega(x_1)| \leq L|x_1|^2$ ,

segue que

$$\begin{aligned}
v^2(x) &= 2R(|x + Re_2| - R) \\
&= 2R(|x + Re_2| - R) \left( \frac{(|x + Re_2| + R)}{(|x + Re_2| + R)} \right) \\
&= 2R(|x + Re_2| + R)^{-1} (|x + Re_2|^2 - R^2) \\
&= 2R(|x + Re_2| + R)^{-1} ((x_1)^2 + (x_2 + R)^2 - R^2) \\
&= 2R(|x + Re_2| + R)^{-1} ((x_1)^2 + (x_2)^2 + 2Rx_2 + R^2 - R^2) \\
&= 2R(|x + Re_2| + R)^{-1} (|x|^2 + 2Rx_2) \\
&= 2R(|x + Re_2| + R)^{-1} (|x|^2 + 2R\omega(x_1)) \\
&\leq 2R(|x + Re_2| + R)^{-1} (|x|^2 + 2RL|x_1|^2) \\
&\leq 2R(|x + Re_2| + R)^{-1} (|x|^2 + 2RL|x|^2) \\
&= \frac{2R|x|^2}{(|x + Re_2| + R)} (1 + 2RL) \\
&\leq |x|^2(1 + 2RL).
\end{aligned}$$

Desta forma, temos que  $v(x) \leq |x|\sqrt{1 + 2LR}$  para  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x_1 \in (-\delta_1, \delta_1)$ . Observe que  $1 < \sqrt{1 + 2LR}$  para todo  $R > 0$ . Então, como podemos escolher  $R$  suficientemente pequeno, obtemos  $0 < R < R_0$  tal que

$$1 < \sqrt{1 + 2RL} < K.$$

Como assumimos  $x_0 = (0, 0)$ , podemos concluir da continuidade de  $v$  que existe  $0 < \delta < \delta_1$  tal que

$$v(x) \leq K|x - x_0|$$

para  $x \in B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega$ . Ainda, como  $x_0 = (0, 0)$ ,  $|x| < \delta$ , para  $x \in B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega$ , obtemos  $v(x) \leq K\delta$ . Escolhendo  $R$  menor ainda se necessário for, podemos assumir  $v(x) \leq \min\{K\delta, \varepsilon\}$  em  $\overline{\Omega}$ .

Assim, se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  é tal que satisfaz (i), (ii) e (iii), temos que

$$u(x) \geq u(x_0) + K|x - x_0| \geq u(x_0) + v(x), \text{ para } x \in B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega$$

e

$$u(x) \geq u(x_0) + \varepsilon \geq u(x_0) + v(x), \text{ para } x \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0).$$

Defina  $\bar{v}(x) = v(x) + u(x_0)$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ . Logo  $\bar{v}$  satisfaz  $\bar{v}(x) \leq u(x)$  em  $\partial\Omega$  com  $\bar{v}(x_0) = u(x_0)$  e, então, do Corolário 1.1, já que  $\bar{v}$  é subsolução, obtemos

$$\bar{v}(x) \leq u(x), \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Considere, agora, o conjunto  $F = \{\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \bar{\Omega}; d(\bar{x}) < |\bar{x}_2|\}$ . Note que, se  $F$  é não vazio, dado  $\bar{x} \in F$  obtém-se  $A_{\bar{x}} > 0$  tal que  $(A_{\bar{x}})^2|\bar{x}_2| = d(\bar{x})$ . Além disto, note que existe  $r > 0$  suficientemente pequeno tal que se  $x = (x_1, x_2) \in B_r(x_0) \cap \bar{\Omega}$ , então  $|x_2| \leq d(x)$  e observe que  $B_r(x_0) \cap \Omega$  é aberto e  $\Omega$  limitado, então  $V := \bar{\Omega} - (B_r(x_0) \cap \Omega)$  é compacto. Restringindo a função  $d$  ao conjunto  $V$ , como  $d|_V$  é contínua, existe  $x' \in V$  tal que  $d(x') \leq d(x)$ , para todo  $x \in V$ . Como  $F \subset V$ , segue  $0 < d(x') \leq \inf_{x \in F} d(x)$ . Assim, para  $\bar{x} \in F$ , existe  $\bar{A} > 0$ ,  $\bar{A} = \bar{A}(\text{diam}(\Omega), R, R_0 - R)$ , sendo  $\bar{A} = \inf\{A_{\bar{x}}; \bar{x} \in F\}$ , de forma que  $\bar{A}^2|\bar{x}_2| \leq d(\bar{x})$ , para todo  $\bar{x} \in F$ . Seja  $A = \min\{\sqrt{2R}\bar{A}, \sqrt{2R}\}$ . Então, para todo  $x \in \bar{\Omega}$ , tem-se

$$A^2|x_2| \leq 2Rd(x),$$

isto é,

$$A\sqrt{|x_2|} \leq \sqrt{2Rd(x)} = v(x).$$

Assim, temos que

$$A\sqrt{|x_2|} = A\sqrt{|\langle e_2, x \rangle|} = A\sqrt{|\langle \nu, x - x_0 \rangle|},$$

pois tomamos  $\nu = e_2$  e  $x_0 = (0, 0)$ . Segue que

$$A\sqrt{|\langle \nu, x - x_0 \rangle|} + u(x_0) \leq v(x) + u(x_0) \leq u(x),$$

para todo  $x \in \bar{\Omega}$ . □

Para demonstrarmos o Teorema C, precisaremos também de um resultado de Simon, mencionado em Williams (1984, p. 136) e dado no Teorema 3.2 abaixo, o qual permite escrever, numa vizinhança de  $x_0$  em  $\Omega$ , o gráfico de  $u$  como gráfico de uma função

$$\bar{u} = \bar{u}(x_1, x_2).$$

**Teorema 3.1** *Suponha  $\Omega$  e  $u$  como no Lema 3.1. Suponha, ainda, que*

$$u(x) = u(x_0) + K|(x - x_0) - \langle \nu, x - x_0 \rangle \nu|, \quad (3.3)$$

para  $x \in B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega$ . Então existe uma vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $x_0$  e  $R > 0$  tal que, em  $\mathcal{N} \cap \bar{\Omega}$ ,

$$G(u) = \{(x_1, \bar{u}(x_1, x_3), x_3); K|x_1| \leq x_3 < KR\}$$

onde  $\bar{u}(x_1, x_3)$  satisfaz

$$\begin{aligned} M\bar{u} &= 0 \quad , \quad \text{se } K|x_1| < x_3 < KR \\ \bar{u}(x_1, x_3) &= W(x_1, x_3) \quad , \quad \text{se } K|x_1| = x_3 < KR \end{aligned}$$

onde  $W$  é a função descrita anteriormente nesta seção.

Observe que, como estamos tomando  $x_0 = (0, 0)$  e  $\nu = e_2$  a condição (3.3) torna-se  $u(x) = u(x_0) + K|x_1|$  e, então, vê-se que está em acordo com o Lema 3.1 e o esperado para o Teorema C.

Com estes dois últimos resultados, podemos, agora, usar um argumento de escalonamento, o qual nos dará informação sobre o crescimento da  $u$  próximo a  $x_0$ .

**Lema 3.2** *Suponha  $\Omega$  de classe  $C^{2,\alpha}$  numa vizinhança de  $x_0 \in \partial^-\Omega$  e seja  $u, \bar{u}, R$  como nos Lema 3.1 e Teorema 3.1. Então existe uma constante  $c \geq 0$  tal que*

$$|\nabla\bar{u}(x_1, x_3)| \leq cx_3 \text{ e } |D^2\bar{u}(x_1, x_3)| \leq c$$

sempre que  $K|x_1| < x_3 < KR$ .

*Demonstração:* Considere as funções

$$u_r(x_1, x_3) = r^{-1}\bar{u}(rx_1, rx_3),$$

$$W_r(x_1, x_3) = r^{-1}W(rx_1, rx_3).$$

Então,

$$\begin{aligned} M(u_r(x_1, x_3)) &= \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u_r(x_1, x_3)}{\sqrt{1 + |\nabla u_r(x_1, x_3)|^2}} \right) \\ &= \operatorname{div} \left( \frac{\nabla(r^{-1}\bar{u}(rx_1, rx_3))}{\sqrt{1 + |\nabla(r^{-1}\bar{u}(rx_1, rx_3))|^2}} \right) \\ &= \operatorname{div} \left( \frac{r^{-1}\nabla\bar{u}(rx_1, rx_3)}{\sqrt{1 + r^{-2}|\nabla\bar{u}(rx_1, rx_3)|^2}} \right), \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
M(u_r(x_1, x_3)) &= \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\sqrt{r^2 + |\nabla \bar{u}(rx_1, rx_3)|^2}} \right) \\
&= \operatorname{div} \left( \frac{r \left( \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_3} \right)}{\sqrt{r^2 + \left| r \left( \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_3} \right) \right|^2}} \right) \\
&= \operatorname{div} \left( \frac{r \left( \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_3} \right)}{\sqrt{r^2 + r^2 \left| \left( \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_3} \right) \right|^2}} \right) \\
&= \operatorname{div} \left( \frac{\left( \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_3} \right)}{\sqrt{1 + \left| \left( \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{u}(rx_1, rx_3)}{\partial x_3} \right) \right|^2}} \right)
\end{aligned}$$

Como  $M(\bar{u}) = 0$  para  $K|x_1| < x_3 < KR$ , segue que

$$M(u_r) = 0$$

se  $Kr|x_1| < rx_3 < KR$ , ou seja, se  $K|x_1| < x_3 < KRr^{-1}$ . Ainda, como

$$\bar{u}(x_1, x_3) = W(x_1, x_3),$$

se  $K|x_1| = x_3 < KR$ , obtemos que  $u_r(x_1, x_3) = W_r(x_1, x_3)$ , se  $K|x_1| = x_3 < KRr^{-1}$ . Lembramos que, para  $\delta_1 > 0$  (dado na definição de  $W$ ),  $\bar{u}$  e  $\omega$ , temos para os pontos  $(x_1, x_2, x_3) \in G(u|_{\partial\Omega})$  com  $|x_1| < \delta_1$ , que

$$\bar{u}(x_1, x_3) = x_2 = \omega(x_1) \text{ e } |\omega(x_1)| \leq L|x_1|^2.$$

Logo, se  $K|x_1| \leq x_3 < r^{-1}KR$  segue que

$$\begin{aligned}
|u_r(x_1, x_3)| &= |r^{-1}\bar{u}(rx_1, rx_2)| = r^{-1}|\bar{u}(rx_1, rx_2)| \\
&= r^{-1}|\omega(rx_1)| \leq r^{-1}L|rx_1|^2 \\
&= r^{-1}Lr^2|x_1|^2 = rL|x_1|^2 \\
&\leq rL\left(\frac{x_3}{K}\right)^2 \leq r\frac{L}{K}(x_3)^2 = cx_3^2
\end{aligned}$$

onde  $c = \frac{L}{K}$ , ou seja,

$$|u_r(x_1, x_3)| \leq cx_3^2, \text{ para } K|x_1| \leq x_3 < r^{-1}KR. \quad (3.4)$$

De forma análoga, podemos obter  $|W_r(x_1, x_2)| \leq crx_3^2$ , para  $K|x_1| \leq x_3 < r^{-1}KR$ . Lembremos que nesta vizinhança  $\delta_1 < x_1 < \delta_1$ , vale  $(x_1, W(x_1, x_3), x_3) = (x_1, \omega(x_1), x_3)$  e notamos, ainda que, como  $\left| \frac{d\omega(x_1)}{dx_1} \right| \leq L|x_1|$  e  $\frac{\partial W}{\partial x_3} = 0$ , se  $r|x_1| < \delta_1$  segue que

$$\begin{aligned} |\nabla W_r(x_1, x_3)| &= r^{-1} |\nabla W(r(x_1, x_3))| = r^{-1} \left| r \left( \frac{\partial W(r(x_1, x_3))}{\partial x_1}, \frac{\partial W(r(x_1, x_3))}{\partial x_3} \right) \right| \\ &= r^{-1} \left| r \left( \frac{\partial W(r(x_1, x_3))}{\partial x_1}, 0 \right) \right| = \left| \frac{\partial W(r(x_1, x_3))}{\partial x_1} \right| = \left| \frac{d\omega(rx_1)}{dx_1} \right| \\ &\leq L|rx_1| \leq Lr \left( \frac{x_3}{K} \right) = crx_3, \end{aligned}$$

onde  $c = \frac{L}{K}$ . Portanto,  $|\nabla W_r(x_1, x_3)| \leq crx_3$ . Analogamente, como  $|D^2\omega|_{0,\alpha} \leq L$  se  $|x_1| < \delta_1$  e  $K|x_1| \leq x_3 < KRr^{-1}$ , obtemos

$$|D^2W_r|_{0,\alpha} \leq cr. \quad (3.5)$$

Suponha agora  $r < \frac{R}{4}$ . Note que, se  $x_3 < 4$ , como  $K > 1$ , temos

$$x_3 < 4 < Rr^{-1} < KRr^{-1}.$$

Assim, para  $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{N} \cap \bar{\Omega}$ , definimos

$$D_1 = \{(x_1, x_3); K|x_1| \leq x_3, 1 < x_3 < 4\}$$

e

$$D_2 = \{(x_1, x_3) \in D_1; 2 < x_3 < 3\}.$$

Então, em  $D_1$ , temos

$$|u_r(x_1, x_3)| \leq crx_3^2 \leq c \left( \frac{R}{4} \right) 4^2 = 4cR$$

e, como  $u_r(x_1, x_3) = W_r(x_1, x_3)$  para  $x_3 = K|x_1|$ ,

$$|\nabla W_r| \leq crx_3 \leq 4c(R/4) = cR$$

e

$$|D^2W_r| \leq cr \leq c \frac{R}{4} \text{ em } D_1,$$

tem-se que  $|u_r| \leq C_1$  em  $D_1$ , para algum  $C_1 > 0$ , isto é,  $|u_r|_0$  é limitado em  $D_1$ .

Note que, como  $\partial\Omega$  é  $C^{2,\alpha}$  e

$$(\partial\Omega \times \mathbb{R}) \cap \{(x_1, x_2, x_3); x_2 = W(x_1, x_3), |x_1| < \delta_0\} = G(W),$$

temos  $W$  de classe  $C^{2,\alpha}$ . Ainda, note que, dado  $p \in \partial D_1$ ,  $p = (x_1, x_3)$  com  $x_3 = K|x_1|$ , numa vizinhança de  $p$  em  $D_1$ . O gráfico de  $\bar{u}$  está de um mesmo lado do plano tangente à  $G(W)$  em  $(x_1, \bar{u}(x_1, x_3), x_3)$ . Assim, os valores de  $u_r$  quando  $x_3 = K|x_1|$  também são limitados na norma  $C^2$ . Portanto, pela Proposição 1.2, podemos concluir que  $|\nabla u_r|$  e  $|u_r|_\alpha$  são limitados sobre compactos de  $D_1$ , independentemente de  $r$ . Então, podemos aplicar a Teoria de Schauder (GILBART & TRUDINGER, 2001, cap. 6) para concluir que

$$|u_r|_{2,\alpha,D_2} \leq C(|u_r|_{0,D_1} + |W_r|_{2,\alpha,D_1}) \leq Cr,$$

Consequentemente, como  $u_r(x_1, x_3) = r^{-1}\bar{u}(r(x_1, x_3))$ , segue da definição de  $D_2$  e de  $u_r$  que

$$|D^2\bar{u}(x_1, x_3)| \leq C \text{ e } |\nabla\bar{u}(x_1, x_3)| \leq Cx_3,$$

sempre que  $2r^{-1} < x_3 < 3r^{-1}$ . □

### ***Demonstração do Teorema C:***

Observe que os resultados dados pelos Lema 3.1, Lema 3.2 e Teorema 3.1 se aplicam nas hipóteses do Teorema C. Assuma, em contradição ao Teorema C, que existe uma solução  $u$ . Então podemos concluir em decorrência dos resultados citados acima que existe uma função  $\bar{u}$  e  $R > 0$  tal que se

$$D = \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2; K|x_1| < x_3 < KR\},$$

então

- i)  $M(\bar{u}) = 0$ , em  $D$
- ii)  $|\nabla\bar{u}| \leq cx_3$ , em  $D$
- iii)  $\bar{u}(x_1, x_3) = W(x_1, x_3)$ , se  $K|x_1| = x_3 < KR$ ,
- iv)  $\bar{u}(x_1, x_3) > W(x_1, x_3)$  em  $D$ .

ETAPA I:

Seja  $v = \bar{u} - W$ . Vamos mostrar, inicialmente, que existe  $\rho > 0$  tal que, pondo  $A = \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$ , tem-se  $\Delta v > \mathcal{K}_0 > 0$  em  $D \cap A$ , para algum  $\mathcal{K}_0$ .

Temos, dos lemas anteriores,

$$|\nabla W| \leq \left| \frac{dW}{dx_1} \right| < cx_3 \quad (3.6)$$

em  $D$ ,  $x_1 \in (\delta_1, \delta_1)$ . Tendo em vista (ii) e (3.6), podemos assumir  $|\nabla \bar{u}| + |\nabla W| \leq 1$ . Seja  $\mathfrak{M}_0$  como no Lema 1.2. Note que, como  $\bar{u}$  satisfaz  $\mathfrak{M}(\bar{u}) = 0$ , pelo Lema 1.2 temos que  $\mathfrak{M}_0(\bar{u}) = 0$  em  $D$ . Note que

$$\mathfrak{M}_0(W) := \Delta W - (1 + |\nabla W|^2)^{-2} |\nabla W| \langle \nabla(|\nabla W|), \nabla W \rangle.$$

Então, pondo  $v = \bar{u} - W$ , como  $\mathfrak{M}_0 \bar{u} = 0$ ,  $\Delta v = \Delta \bar{u} - \Delta W$  e  $|\nabla W| \leq 1$  em  $D$ , temos

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}_0 \bar{u} - \mathfrak{M}_0(W) - \Delta v| &= |\mathfrak{M}_0 \bar{u} - \Delta \bar{u} - (\mathfrak{M}_0 W - \Delta W)| \\ &= |-(1 + |\nabla \bar{u}|^2)^{-2} |\nabla \bar{u}| \langle \nabla(|\nabla \bar{u}|), \nabla \bar{u} \rangle + \\ &\quad + (1 + |\nabla W|^2)^{-2} |\nabla W| \langle \nabla(|\nabla W|), \nabla W \rangle| \\ &\leq (1 + |\nabla \bar{u}|^2)^{-2} |\nabla \bar{u}| |\langle \nabla(|\nabla \bar{u}|), \nabla \bar{u} \rangle| + \\ &\quad + (1 + |\nabla \bar{u}|^2)^{-2} |\nabla W| |\langle \nabla(|\nabla W|), \nabla W \rangle| \\ &\leq |\nabla \bar{u}| |\langle \nabla(|\nabla \bar{u}|), \nabla \bar{u} \rangle| + |\nabla W| |\langle \nabla(|\nabla W|), \nabla W \rangle| \\ &\leq |\nabla \bar{u}|^2 |\nabla(|\nabla \bar{u}|)| + |\nabla W|^2 |\nabla(|\nabla W|)| \\ &\leq |\nabla \bar{u}|^2 |\nabla(|\nabla \bar{u}|)| + |\nabla W| |\nabla(|\nabla W|)|. \end{aligned}$$

Agora, como  $|\nabla \bar{u}| \leq cx_3$ ,  $|\nabla W| \leq cx_3$ ,  $|D^2 \bar{u}| < c$  e  $|D^2 W| < c$ , segue que

$$|\mathfrak{M}_0 \bar{u} - \mathfrak{M}_0 W - \Delta v| \leq c^3 x_3^2 + c^2 x_3 \leq C(x_3 + 1)x_3,$$

onde  $C \geq \max\{c^3, c^2\}$ . Como  $\mathfrak{M}_0 \bar{u} = 0$ , temos que  $|\Delta v + \mathfrak{M}_0 W| \leq C(x_3 + 1)x_3$ , ou seja

$$\Delta v \geq -\mathfrak{M}_0 W - C(x_3 + 1)x_3, \text{ em } D$$

Lembramos que  $k_{G(\omega)} \leq -k_0 < 0$ ,  $k_0 > 0$ ,  $\omega = \omega(x_1)$ ,  $|x_1| < \delta$ ,  $G(\omega) \subset \partial\Omega$  e uma direção principal para  $G(W)$  é dado por  $e_3$  donde, nesta direção, a curvatura é zero, sendo que a outra direção principal é dada pelo vetor tangente à  $\partial\Omega$ , ou seja, à  $G(\omega)$ . Segue que a

curvatura média  $H$  de  $G(W)$  em  $D$ , com relação à normal  $N$  tal que  $\langle N, e_2 \rangle \geq 0$  satisfaz

$$H \leq -\frac{k_0}{2} < 0$$

Logo,

$$\mathfrak{M}(W) \leq -\bar{\mathcal{K}}_0 < 0, \text{ para algum } \bar{\mathcal{K}}_0 > 0.$$

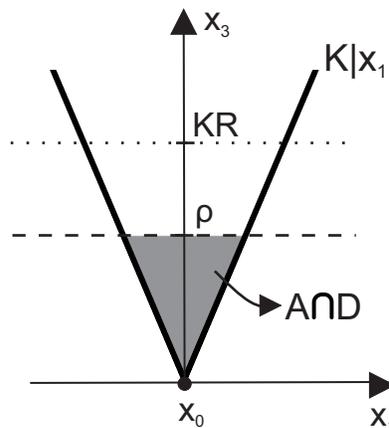
Ainda, como  $\mathfrak{M}_0(W) = \mathfrak{M}(W)(1 + |\nabla W|^2)^{1/2}$ , temos

$$\mathfrak{M}_0(W) = \mathfrak{M}(W)(1 + |\nabla W|^2)^{1/2} \leq -\bar{\mathcal{K}}_0(1 + |\nabla W|^2)^{1/2} \leq -\bar{\mathcal{K}}_0 < 0$$

já que  $-\bar{\mathcal{K}}_0 < 0$ . Com isso obtemos  $0 < \bar{\mathcal{K}}_0 \leq -\mathfrak{M}_0(W)$ . Logo,

$$\Delta v = -\mathfrak{M}_0(W) - C(1 + x_3)x_3 \geq \bar{\mathcal{K}}_0 - C(1 + x_3)x_3$$

Figura 3.3: Domínio  $A \cap D$ .



Fonte: Da autora.

Logo, existe  $\rho > 0$  suficientemente pequeno tal que, pondo  $A = \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$ , em  $D \cap A$  tem-se

$$\Delta v \geq \bar{\mathcal{K}}_0 - c(1 + x_3)x_3 \geq \bar{\mathcal{K}}_0 - c(1 + \rho)\rho \geq \frac{\bar{\mathcal{K}}_0}{2} := \mathcal{K}_0 > 0.$$

(Fim etapa I)

ETAPA II:

Se mostrarmos que em algum ponto  $p \in D \cap A$  tivermos  $v(p) < 0$ , teremos que  $\bar{u}(p) < W(p)$  em  $D$ , o que contraria o fato de  $\bar{u} > W$  em  $D$ , conforme item (iv).

Utilizando a Etapa I, observamos primeiro que, como  $\Delta v \geq \mathcal{K}_0 > 0$  e  $v = \bar{u} - W$ , se mostrarmos que  $\bar{v} = \frac{1}{\mathcal{K}_0} v$  é negativa em algum ponto de  $D$  teremos que  $v$  será negativa neste mesmo ponto e, neste caso

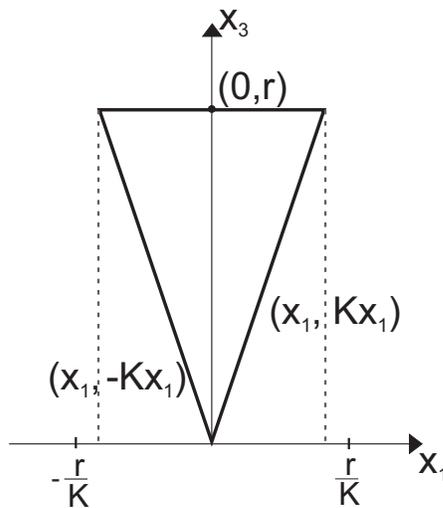
$$\Delta \bar{v} = \frac{1}{\mathcal{K}_0} \Delta v \geq 1.$$

Ainda, considere o triângulo isósceles  $\mathcal{T}_r$  cujos os lados são

$$\{(x_1, Kx_1); 0 \leq x_1 \leq \frac{r}{K}\} \cup \{(x_1, -Kx_1); -\frac{r}{K} \leq x_1 \leq 0\} \cup \{(x_1, r); -\frac{r}{K} \leq x_1 \leq \frac{r}{K}\}.$$

A base deste triângulo é  $\{(x_1, r); -\frac{r}{K} \leq x_1 \leq \frac{r}{K}\}$ , cuja medida denotamos por  $l(r)$  e sua altura é  $r$ ,  $0 < r < \rho$ .

Figura 3.4: Triângulo Isósceles



Fonte: Da autora.

Note que, como  $K > 1$ , temos

$$\frac{l(r)}{2} < r.$$

Ainda, temos que

$$0 < \frac{l(r)}{r} = \tilde{c},$$

independentemente de  $r$ , já que os triângulos  $\mathcal{T}_r$  são semelhantes. Assim, obtemos

$$0 < \tilde{c}_1 = \frac{l(r)}{2r} < \frac{l(r)}{r} = \tilde{c}; \quad \text{para todo } r,$$

com  $0 < r < \rho$ . Logo, existe  $\gamma > 0$  e existem  $c_1, c_2 > 0$  tais que

$$c_1 \leq \frac{l(r)}{r^\gamma} \leq c_2,$$

isto é,  $c_1 r^\gamma \leq l(r) \leq c_2 r^\gamma$ .

Estes fatos já estão levados em conta no próximo Teorema e, com a prova deste, concluímos a prova do Teorema C.

**Teorema 3.2** *Seja  $D$  um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$  com  $(0, 0) \in \partial D$ . Suponha que exista  $K > 1$ ,  $\rho > 0$  e  $\gamma > 0$  tal que*

$$\partial D \cap \{(x_1, x_3); 0 < x_3 < \rho\} \subseteq \{(x_1, x_3); K|x_1| < x_3 < \rho\},$$

$\partial D$  é de classe  $C^1$  por partes e que exista  $C_1 > 0$  e  $C_2$  tal que

$$C_1 r^\gamma \leq l(r) = |D \cap \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2; x_3 = r\}| \leq C_2 r^\gamma, \quad 0 < r < \rho. \quad (3.7)$$

Suponha  $v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$  satisfazendo  $v = 0$  em  $\partial D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$  e

$$\Delta v \geq 1 \text{ em } D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}.$$

Então existe  $y_0 \in D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$  tal que  $v(y_0) < 0$ .

*Demonstração:* Suponha que  $v(x_1, x_3) \geq 0$  para todo  $(x_1, x_3) \in D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$ , com  $\rho < 1$ . Defina

$$\varphi(x_1, x_3) = x_3^2 - x_1^2.$$

Note que

$$\Delta \varphi(x_1, x_3) = \operatorname{div}(\nabla \varphi) = 0.$$

Além disso, dado  $(x_1, x_3) \in \overline{D} \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$ , do fato de  $K|x_1| < x_3$  e  $K > 1$  temos

$$0 \leq 1 - \frac{1}{K^2} \leq 1 - \frac{x_1^2}{x_3^2},$$

donde

$$0 \leq x_3^2(1 - K^{-2}) \leq \varphi(x_1, x_3).$$

Por outro lado temos

$$\varphi(x_1, x_3) = x_3^2 - x_1^2 \leq x_3^2.$$

Ainda, note que

$$0 \leq x_3^2(1 - K^{-2}) \leq \varphi(x_1, x_3) \leq x_3^2. \quad (3.8)$$

Definimos, agora, para  $a > 0$  e  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$\varphi_\varepsilon(x_1, x_3) := ax_3^\varepsilon \varphi(x_1, x_3)$$

onde  $a$  e  $\varepsilon$  serão escolhidos posteriormente. Note que, para  $(x_1, x_3) \in D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$ , temos

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_1} = ax_3^\varepsilon \varphi_{x_1},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_1^2} = ax_3^\varepsilon \varphi_{x_1 x_1} = -2ax_3,$$

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_3} = a\varepsilon x_3^{\varepsilon-1} \varphi + ax_3^\varepsilon \varphi_{x_3}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_3^2} &= a\varepsilon(\varepsilon - 1)x_3^{\varepsilon-2} \varphi + a\varepsilon x_3^{\varepsilon-1} \varphi_{x_3} + a\varepsilon x_3^{\varepsilon-1} \varphi_{x_3} + ax_3^\varepsilon \varphi_{x_3 x_3} \\ &= a\varepsilon(\varepsilon - 1)x_3^{\varepsilon-2} \varphi + 2a\varepsilon x_3^\varepsilon + 2a\varepsilon x_3^\varepsilon + 2ax^{\varepsilon 3} \\ &= a\varepsilon(\varepsilon - 1)x_3^{\varepsilon-2} \varphi + 4a\varepsilon x_3^\varepsilon + 2ax_3^\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_\varepsilon(x_1, x_3) &= -2ax_3^\varepsilon + a\varepsilon(\varepsilon - 1)x_3^{\varepsilon-2} \varphi + 4a\varepsilon x_3^\varepsilon + 2ax_3^\varepsilon \\ &= a\varepsilon(\varepsilon - 1)x_3^{\varepsilon-2} \varphi + 4a\varepsilon x_3^\varepsilon \\ &= a\varepsilon((\varepsilon - 1)\varphi(x_1, x_3)(x_3^{\varepsilon-2}) + 4x_3^\varepsilon). \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon - 1 < 0$  e  $x_3 < \rho$ , vemos que

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_\varepsilon(x_1, x_3) &= a\varepsilon((\varepsilon - 1)\varphi(x_1, x_3)(x_3^{\varepsilon-2}) + 4x_3^\varepsilon) \\ &\leq 4a\varepsilon x_3^\varepsilon \\ &\leq 4a\varepsilon \rho^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por outro lado, de (3.8) segue que

$$\begin{aligned}
\varphi_\varepsilon(x_1, x_3) &= ax_3^\varepsilon \varphi(x_1, x_3) \\
&= ax_3^\varepsilon (x_3^2 - x_1^2) \\
&\geq ax_3^\varepsilon \left( x_3^2 - \frac{x_3^2}{K^2} \right) \\
&= ax_3^{2+\varepsilon} (1 - K^{-2}).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Suponha que  $0 < x_3 = \rho < 1$ . Logo  $x_3^{2+\varepsilon} \geq x_3^3$ , donde

$$\varphi_\varepsilon(x_1, x_3) \geq ax_3^3 (1 - K^{-2}) = a\rho^3 (1 - K^{-2}). \tag{3.11}$$

Agora, como assumimos  $v(x_1, x_3) \geq 0$  em  $\bar{D} \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$ , escolhemos  $a$  independente de  $\varepsilon$  tal que

$$\varphi_\varepsilon(x_1, x_3) \geq v(x_1, x_3)$$

para todo  $(x_1, x_3)$  contido na fronteira de  $D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$ .

Agora, escolha  $\varepsilon \in (0, 1)$  de forma que

$$\Delta\varphi_\varepsilon \leq 4a\varepsilon\rho^\varepsilon \leq 4a\varepsilon \leq 1.$$

Como por hipótese  $\Delta v \geq 1$ , temos

$$\Delta\varphi_\varepsilon \leq \Delta v \tag{3.12}$$

e, ainda,

$$\varphi_\varepsilon(x_1, x_3) \geq v(x_1, x_3),$$

em  $\partial(D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\})$ . Considerando isto, o Teorema 1.2, a definição de  $\varphi_\varepsilon$  e (3.8) segue a seguinte desigualdade:

$$0 \leq v(x_1, x_3) \leq \varphi_\varepsilon(x_1, x_3) \leq ax_3^{2+\varepsilon} \tag{3.13}$$

em  $D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$ .

Note que, como  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\varphi \geq 0$  e  $\Delta v \geq 1$  em  $D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$  temos que

$$\varphi(x_1, x_3) \leq \varphi(x_1, x_3)\Delta v = (\varphi\Delta v - v\Delta\varphi)(x_1, x_3).$$

Suponha, agora,  $0 < r < \rho$  e  $y = (x_1, x_3)$ . Aplicando a segunda identidade de Green (Teorema 1.6) para  $v$  e  $\varphi$  sobre  $D_r = \{(x_1, x_3); x_3 < r\}$  obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{D_r} \varphi(y) dy &\leq \int_{D_r} (\varphi \Delta v - v \Delta \varphi) dy \\
&= \int_{D_r} (\varphi \langle \nabla v, \vec{\eta} \rangle - v \langle \nabla \varphi, \vec{\eta} \rangle) dy \\
&= \int_{\partial D_r} \left( \varphi \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} - v \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\eta}} \right) ds,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde  $\vec{\eta}$  é a direção do vetor normal unitário que aponta para o exterior de  $D_r$ .

Do fato de  $v = 0$  em  $\partial D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$  e  $v \geq 0$  em  $D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$  temos

$$\langle \nabla v, \vec{\eta} \rangle = \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} \leq 0, \text{ em } \partial D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}.$$

Ainda, como  $K > 1$  e  $K|x_1| < x_3$  em  $D_\rho := D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$ , temos que

$$\varphi(x_1, x_3) = x_3^2 - x_1^2 \geq 0.$$

Assim, temos

$$\varphi \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} \leq 0 \text{ e } v \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\eta}} = 0, \text{ em } \partial D \cap D_\rho.$$

Portanto, como  $\partial D_r = (\partial D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < r\}) \cup \{(x_1, x_3); x_3 = r\}$  e, sobre  $\{(x_1, x_3); x_3 = r\}$ ,  $\vec{\eta} = e_3$  temos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_r} \left( \varphi \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} - v \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\eta}} \right) ds &\leq \int_{D \cap \{x_3=r\}} \left( \varphi \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} - v \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\eta}} \right) dx_1 \\
&\leq \int_{D \cap \{x_3=r\}} \left( \varphi \frac{\partial v}{\partial e_3} - v \frac{\partial \varphi}{\partial e_3} \right) dx_1 \\
&= \int_{D \cap \{x_3=r\}} \left( \varphi \frac{\partial v}{\partial x_3} - v \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) dx_1.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Mas, note que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 2x_3 \geq 0$  e  $v \geq 0$  e, então, das desigualdades (3.14) e (3.15) segue

$$\int_{D_r} \varphi(y) dy \leq \int_{D \cap \{x_3=r\}} \varphi \frac{\partial v}{\partial x_3} dx_1.$$

Integrando com relação a  $r$ , de 0 à  $R < \rho$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^R \left( \int_{D_t} \varphi(y) dy \right) dt &\leq \int_0^R \left( \int_{D \cap \{x_3=r\}} \varphi \frac{\partial v}{\partial x_3} dx_1 \right) dt \\
&= \int_{D_R} \varphi \frac{\partial v}{\partial x_3} dx_1 dx_3 \\
&= \int_{D_R} \varphi \frac{\partial v}{\partial x_3} dy.
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que

$$\frac{\partial(\varphi v)}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} v + \varphi \frac{\partial v}{\partial x_3},$$

o que implica que

$$\varphi \frac{\partial v}{\partial x_3} = \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x_3} - v \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.$$

Como  $v \geq 0$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 2x_3 \geq 0$ , segue

$$\begin{aligned} \int_0^R \left( \int_{D_t} \varphi(y) dy \right) dt &\leq \int_{D_R} \varphi \frac{\partial v}{\partial x_3} dy \\ &= \int_{D_R} \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x_3} dy - \int_{D_R} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dy \\ &\leq \int_{D_R} \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x_3} dy. \end{aligned}$$

Note que, invertendo os limites de integração, obtemos

$$\int_{D_R} \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x_3} dy = \int_{D \cap \{x_3=R\}} \varphi v dx_1,$$

donde

$$\int_0^R \left( \int_{D_t} \varphi(y) dy \right) dt \leq \int_{D \cap \{x_3=R\}} \varphi v dx_1.$$

Consequentemente, das equações (3.8) e (3.13) e do fato de  $\varphi(x_1, x_3) \leq x_3^2$ , segue

$$\int_0^R \int_{D_t} ((1 - K^{-2})x_3^2) dy dt \leq \int_0^R \int_{D_t} \varphi(y) dy dt \leq \int_{D \cap \{x_3=R\}} \varphi v dx_1 \leq \int_{D \cap \{x_3=R\}} x_3^2 (a x_3^{2+\varepsilon}) dx_1,$$

donde

$$(1 - K^{-2}) \int_0^R \int_{D_t} x_3^2 dy dt \leq a \int_{D \cap \{x_3=R\}} x_3^{4+\varepsilon} dx_1.$$

Considerando  $g(t) = t^2 |D \cap \{x_3 = t\}|$ , onde  $t \in [0, R]$ , note que  $0 \leq g(t) \leq g(R)$  e,

então, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^R \int_{D_t} x_3^2 dy dt &\leq \int_0^R \int_0^t g(r) dr dt \\
&\leq \frac{a}{1 - K^{-2}} \int_{D \cap \{x_3=R\}} x_3^{4+\varepsilon} dx_1 \\
&= c x_3^{4+\varepsilon} |D \cap \{x_3 = R\}| \\
&\leq c R^{4+\varepsilon} \frac{g(R)}{R^2} = c R^{2+\varepsilon} g(R),
\end{aligned}$$

para  $0 < R < \rho$ . Mas, pela hipótese (3.7), para  $0 < r < \rho$  temos

$$c_1 r^\gamma \leq |D \cap \{(x_1, x_3); x_3 = r\}| \leq c_2 r^\gamma.$$

Com isso obtemos

$$c_1 t^{2+\gamma} \leq g(t) \leq c_2 t^{2+\gamma}.$$

Então, de (3.13), segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^R \int_0^t c_1 r^{2+\gamma} dr dt &\leq \int_0^R \int_0^t g(r) dr dt \\
&\leq c R^{2+\varepsilon} g(R) \\
&\leq c R^{2+\varepsilon} c_2 R^{2+\gamma} \\
&= c c_2 R^{4+\varepsilon+\gamma}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
\int_0^R \int_0^t c_1 r^{2+\gamma} dr dt &= c_1 \int_0^R \frac{t^{2+\gamma+1}}{2 + \gamma + 1} dt \\
&= \frac{c_1}{3 + \gamma} \left( \frac{R^{3+\gamma+1}}{3 + \gamma + 1} \right) \\
&= \frac{c_1}{(3 + \gamma)(4 + \gamma)} R^{4+\gamma}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R^{4+\gamma} \leq \frac{(3 + \gamma)(4 + \gamma)c c_2}{c_1} R^{4+\gamma+\varepsilon},$$

ou seja,

$$R^{4+\gamma} \leq c R^{4+\gamma+\varepsilon}, \text{ onde } c > 0. \quad (3.16)$$

Como nosso  $R$  é qualquer, com  $0 < R < \rho$ , chegamos a uma contradição, pois para um  $R$  suficientemente pequeno, (3.16) não se verifica. Logo  $v(p) < 0$  para algum  $p \in D \cap \{(x_1, x_3); x_3 < \rho\}$ .  $\square$

### 3.2 NÃO EXISTÊNCIA PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET EM DOMÍNIOS NÃO CONVEXOS E ILIMITADOS

Na seção anterior obtemos um resultado de não existência do problema de Dirichlet para domínios limitados em  $\mathbb{R}^2$  assumindo que  $K > 1$ . Note que no Teorema C, decorre do Corolário 1.1 que, para domínios limitados, a positividade do dado no bordo implica a positividade da solução. Este não é o caso para domínios não limitados, como os domínios exteriores, por exemplo.

Notemos então que, para estender o resultado de não existência de Williams(1984) para domínios não limitados, faz-se necessário prescindir de qualquer hipótese adicional sobre a positividade do dado no bordo. Este fato será explorado na Proposição 3.1. É, no entanto, feita uma construção um pouco mais complicada para o dado no bordo, a qual requer uma sequência infinita de corners.

Como usamos um argumento topológico, a saber, o teorema da Curva de Jordan, a extensão do resultado de não existência de Williams (1984) será também limitada à dimensão 2. Começaremos com a seguinte proposição.

**Proposição 3.1 (Teorema 3.2, Kutev & Tomi (1968))** *Seja  $\Gamma$  um arco de classe  $C^{2,\alpha}$  em  $\mathbb{R}^2$  com curvatura não nula,  $x_0 \in \Gamma$  e  $T_0$  o vetor unitário tangente a  $\Gamma$  em  $x_0$ . Para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, denotamos  $\Omega_\delta$  a componente de  $B_\delta(x_0) \setminus \Gamma$  que não é convexa e seja  $\Gamma_\delta = \Gamma \cap B_\delta(x_0)$ . Então para qualquer  $\varepsilon > 0$  e  $K > 1$ , existe dado no bordo  $f \in C^{0,1}(\Gamma_\delta)$ , com  $\text{osc}(f) < \varepsilon$  e  $\text{Lip}(f) = K$ , tal que não existe  $u \in C^2(\Omega_\delta) \cap C^0(\Omega_\delta \cup \Gamma_\delta)$  satisfazendo  $\mathfrak{M}(u) = 0$  e  $u|_{\Gamma_\delta} = f$ .*

*Demonstração:* Para demonstrar este resultado usaremos um argumento de contradição.

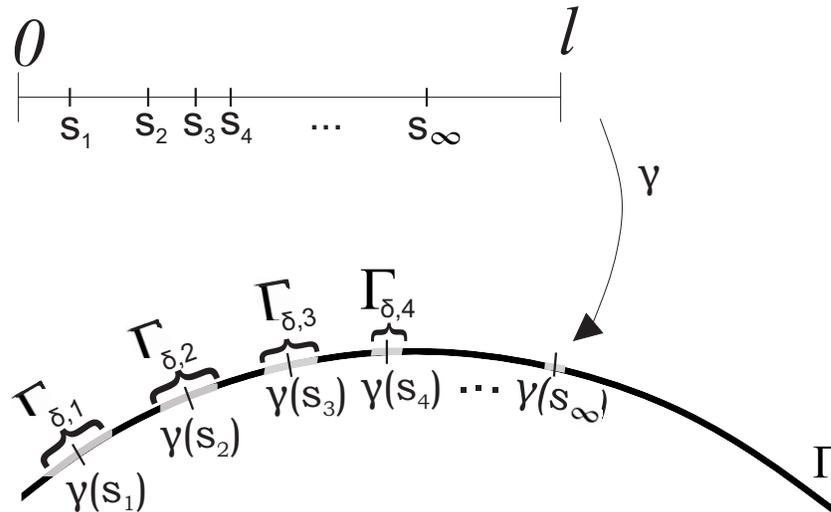
Considere  $\gamma : [0, l] \rightarrow \bar{\Gamma}_\delta$  uma parametrização de  $\Gamma_\delta$  por comprimento de arco e escolha uma sequência  $(s_n) \subset [0, l]$ , estritamente crescente, tal que

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots \leq s_\infty < l$$

onde

$$s_\infty := \lim s_i < l.$$

Dado  $K > 1$  e  $\varepsilon > 0$ , escolha  $\varepsilon_i$  suficientemente pequeno com  $i \in \mathbb{N}$ , de forma que  $0 < \varepsilon_i < \varepsilon$  e que a componente conexa  $\Gamma_{\delta,i}$  do conjunto  $\{x \in \Gamma_\delta / |\langle \gamma'(s_i), x - \gamma(s_i) \rangle| < \varepsilon_i / K\}$  que contém  $\gamma(s_i)$  esteja contida em  $\gamma((\frac{1}{2}(s_{i-1} + s_i), \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})))$ . Observe que os segmentos de fronteira  $\Gamma_{\delta,1}, \Gamma_{\delta,2}, \dots$  são disjuntos, pois cada intervalo  $(\frac{1}{2}(s_{i-1} + s_i), \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1}))$  é disjunto dos demais.

Figura 3.5: Parametrização  $\gamma$ 

Fonte: Da autora.

Ainda, note que  $\varepsilon_i$  pode sempre ser escolhido de forma que as funções lineares

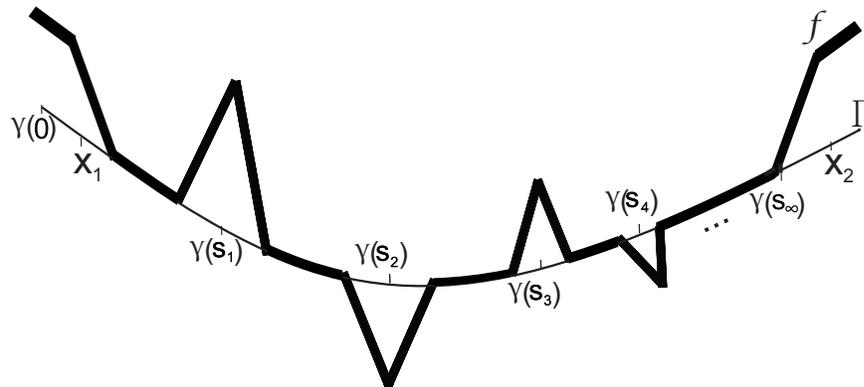
$$\varphi_i : \Gamma_{\delta,i} \longrightarrow \mathbb{R},$$

dadas por

$$\varphi_i(x) = K \langle \gamma'(s_i), x - \gamma(s_i) \rangle,$$

assumam valores  $\varepsilon_i$  e  $-\varepsilon_i$  nos dois pontos da extremidade de  $\Gamma_{\delta,i}$ , o que é possível pois  $\Gamma_\delta$  é de classe  $C^2$  e tem curvatura não nula. Com isto, defina a função  $f$  sobre  $\Gamma_\delta$  por

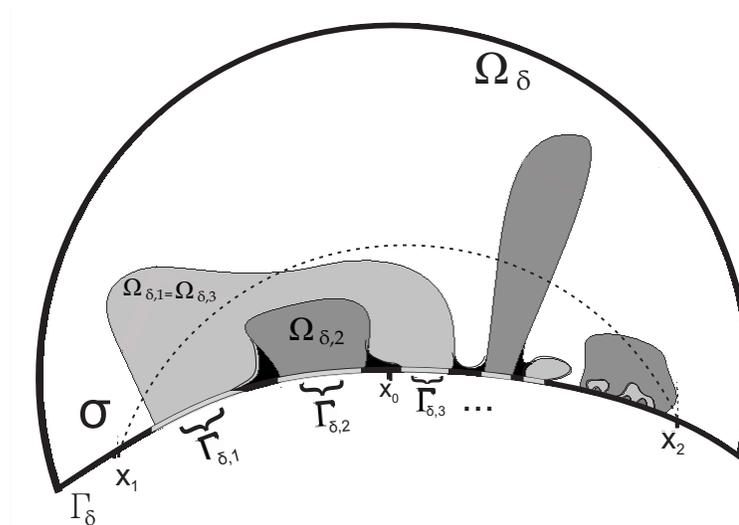
$$f(x) = \begin{cases} -|\varphi_i(x)| + \varepsilon_i, & \text{se } x \in \Gamma_{\delta,i}, i \text{ ímpar} \\ |\varphi_i(x)| - \varepsilon_i, & \text{se } x \in \Gamma_{\delta,i}, i \text{ par} \\ \min\{|x - \gamma(\frac{1}{2}s_1)|, \varepsilon\}, & \text{se } x \in \gamma([0, \frac{1}{2}s_1]) \\ \min\{|x - \gamma(s_\infty)|, \varepsilon\}, & \text{se } x \in \gamma([s_\infty, l]) \\ 0, & \text{para demais valores de } x \end{cases}$$

Figura 3.6: Gráfico da  $f$ 

Fonte: Da autora.

Suponha a existência de uma solução  $u \in C^2(\Omega_\delta) \cap C^0(\Omega_\delta \cup \Gamma_\delta)$  de  $\mathfrak{M}(u) = 0$  em  $\Omega$  que satisfaça  $u|_{\Gamma_\delta} = f$ . Note que o conjunto  $\{y \in \Omega_\delta \cup \Gamma_\delta; u(y) = 0\}$  é diferente de vazio. Denote por  $\Omega_{\delta,j}$  as componentes conexas de  $(\Omega_\delta \cup \Gamma_\delta) \setminus u^{-1}(0)$  que contém o segmento de bordo  $\Gamma_{\delta,j}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Pode-se observar que os conjuntos  $\Omega_{\delta,j}$  podem ser idênticos para diferentes  $j$ 's. Agora juntamos um ponto  $x_1 \in \gamma((0, \frac{1}{2}s_1))$  com um ponto  $x_2 \in \gamma((s_\infty, l))$  por um arco analítico mergulhado  $\sigma$  contido em  $\Omega_\delta \cup \{x_1, x_2\}$ .

Figura 3.7: Domínios Nodais



Fonte: Da autora.

Como  $u \in C^2(\Omega_\delta)$  e, ainda,  $u(x_i) = f(x_i) > 0$  ( $i = 1, 2$ ), então somente uma quantidade finita de domínios nodais (subconjunto conexo de  $\Omega$  onde  $u$  não muda de sinal)

$\Omega_{\delta,j}$  podem ser interceptados por  $\sigma$  pois, do contrário como  $\sigma$  é analítica e  $\gamma(s_\infty) < x_2 < \gamma(l)$ , teríamos que  $u$  não seria de classe  $C^1$ . De fato, neste caso existiria uma sequência  $(p_n)$ ,  $\{p_n\} = G(u) \cap$  traço  $\sigma$ , com subsequência  $(p_{n_k})$  convergindo para um ponto  $p \in \sigma$  diferente de  $x_1$  e  $x_2$ , donde  $u$  não seria diferenciável em  $p$ . Assim, se existe uma quantidade infinita de domínios nodais, infinitos deles devem estar contidos no subdomínio de  $\Omega_\delta$ , dado por  $\sigma$  e pelo segmento de  $\Gamma$  entre  $x_1$  e  $x_2$ .

Caso existam apenas finitos domínios nodais diferentes  $\Omega_{\delta,j}$ , existe pelo menos um  $\Omega_{\delta,j_0}$  que contém vários segmentos de bordo  $\Gamma_{\delta,j}$ , digamos  $j = j_0 < j_1 < \dots$ . Neste caso, segue do fato de  $f$  ser positiva (negativa) em  $\Gamma_{\delta,j}$ , para  $j$  ímpar (par), que os números  $j_0$  e  $j_1$  devem ser ambos ímpares ou pares e, conseqüentemente, pelo Teorema da Curva de Jordan, o domínio  $\Omega_{\delta,j_0}$  envolve um domínio  $\Omega_{\delta,k}$ , onde  $k$  tem paridade diferente de  $j_0$ . Em ambos os casos, finitos ou infinitos domínios nodais  $\Omega_{\delta,j}$ , obtemos a existência de algum  $\Omega_{\delta,k}$  tal que  $\Omega_{\delta,k} \subset (\Omega_\delta \cup \Gamma_\delta)$ . Assim, já que  $\Omega_{\delta,k}$  é um domínio nodal, temos que

$$u|_{(\partial\Omega_{\delta,k} \setminus \Gamma_\delta)} = 0.$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $k$  é o menor número  $j$  com

$$\Gamma_{\delta,j} \subset \Omega_{\delta,k}$$

e, desde que possamos assumir que a sequência  $\varepsilon_j$  é decrescente, segue que

$$0 \leq u|_{\Gamma_{\delta,j}} \leq \varepsilon_k \text{ ou } -\varepsilon_k \leq u|_{\Gamma_{\delta,j}} \leq 0,$$

para todo  $j \geq k$  com  $\Gamma_{\delta,j} \subset \Omega_{\delta,k}$ . Logo, do Corolário 1.1, temos

$$0 \leq u \leq \varepsilon_k \text{ ou } -\varepsilon_k \leq u \leq 0$$

em  $\Omega_{\delta,k}$ , dependendo se  $k$  é par ou ímpar. Com isto, podemos definir  $v = \varepsilon_k - u$  ou  $v = u + \varepsilon_k$  em uma vizinhança do ponto  $\gamma(s_k) \in \Gamma$ , dependendo da paridade de  $k$ . Como  $u$  satisfaz  $\mathfrak{M}(u) = 0$  e  $u|_{\Gamma_\delta} = f$ , temos que  $v$  também irá satisfazer  $\mathfrak{M}(v) = 0$  em  $\Omega_{\delta,k}$   $v|_{\Gamma_{\delta,k}} = \varepsilon_k - f$  ou  $v|_{\Gamma_{\delta,k}} = f + \varepsilon_k$ , dependendo se  $k$  é par ou ímpar. Note que  $v \geq 0$  e

$$v(x) = |\varphi_k(x)| = |K \langle \gamma'(s_k), x - \gamma(s_k) \rangle|, \quad (3.17)$$

para  $x \in \Gamma_{\delta,k}$ . Mas, isto contradiz o Teorema C de Williams ((1984) que garante que não existe solução contínua em  $\Omega_\delta \cup \Gamma_{\delta,k}$  que no bordo possua comportamento semelhante ao dado pela função  $v$  em (3.17).  $\square$

***Demonstração do Teorema D:***

Note que, nas hipóteses do Teorema D, está sendo considerado um domínio cujo bordo contenha um segmento de arco  $\Gamma$  que se encaixa nas condições da proposição anterior. Portanto este resultado é uma consequência imediata da Proposição 3.1.  $\square$

# Capítulo 4

## CONCLUSÃO

Mostramos nesta dissertação resultados de existência e não existência de solução para o problema de Dirichlet com dado no bordo Lipschitz contínuo em domínios não convexos do  $\mathbb{R}^2$ .

É natural nos perguntarmos se os resultados como dos Teorema A, Teorema B, Teorema C e Teorema D são válidos para domínios  $\Omega$  de classe  $C^2$  em uma variedade Riemanniana completa  $M$  qualquer. Neste contexto Riemanniano o problema de Dirichlet (1) é dado como segue.

Sejam  $M^n$ ,  $n \geq 2$ , uma variedade Riemanniana completa,  $\Omega \subset M$  um domínio  $C^2$  com bordo compacto e  $f \in C^0(\partial\Omega)$ . Considere o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} Q_0(u) := \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0 \text{ em } \Omega, u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\nabla$  e  $\operatorname{div}$  são o gradiente e divergente em  $M$ . Note que  $u$  é uma solução de (4.1) se e somente se o gráfico de  $u$  é uma hipersuperfície mínima na variedade Riemanniana  $M \times \mathbb{R}$  com a métrica produto. O seguinte resultado de existência para dados  $C^2$  no bordo foi obtido recentemente em Aiolfi, Ripoll e Soret (2016):

**Teorema 4.1** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa  $n$ -dimensional,  $n \geq 2$ . Seja  $\Omega$  um domínio limitado e  $C^2$  em  $M$  e seja  $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$  tal que  $\operatorname{osc}(\varphi) \leq \mathcal{C}(|D\varphi|, |D^2\varphi|, |A|, \operatorname{Ric}_M)$ , onde  $|A|$  denota a norma da segunda forma fundamental de  $\partial\Omega$  e  $\mathcal{C}$  é uma função que é dada explicitamente<sup>1</sup>. Então, o problema de Dirichlet (4.1) para a equação das hipersuperfícies mínimas tem solução. Além disso, a função  $\mathcal{C} = +\infty$  nos pontos convexos em média de  $\partial\Omega$ . Segue que se  $\partial\Omega$  é convexo em média então (4.1) tem solução para qualquer dado contínuo*

---

<sup>1</sup>A função  $\mathcal{C}$  é descrita explicitamente em Aiolfi, Ripoll e Soret (2016).

*no bordo.*

Este resultado estende o clássico resultado de Jenkins & Serrin (1968) para variedades.

No entanto é de se esperar que as condições dadas no teorema acima não sejam as melhores possíveis, como vimos para o caso Euclidiano. Como uma continuação deste trabalho, sugere-se estender para o contexto Riemanniano (o problema 4.1) o resultado de existência descrito no Teorema A e o Teorema 1 de Williams (1984) (do qual fizemos a versão dada no Teorema B) e, também, os resultados de não existência como os obtidos para  $\mathbb{R}^n$  no Teorema 3 de Jenkins & Serrin (1968) e os descritos no capítulo 4 (Teorema C e Teorema D).

Estas questões poderiam ser abordadas em trabalho futuro, pois pelo que temos conhecimento, nenhum resultado nesta direção existe na literatura atual.

# REFERÊNCIAS

AIOLFI, A.; RIPOLL, J.; SORET, M.: **The Dirichlet problem for the minimal hypersurface equation on arbitrary domains of a Riemannian manifold.** Manuscripta Math., v. 149, p. 71-81, 2016.

BONOW, I. C.: **O problema de Dirichlet para a Equação das Hipersuperfícies de Curvatura Média Constante.** 2007. 50 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre . 2007.

BRUIJN, N. G.: **Asymptotic Methods in Analysis.** 2. ed. North-Holland Publishing CO. , 1961.

BURIOL, C.: **Alguns Teoremas de Existência de Gráficos Mínimos em Domínios não Convexos do Plano.** 1995. 47 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre . 1995.

ESPÍRITO-SANTO, N.; RIPOLL, J.: **Some Existence and Nonexistence Theorems for Compact Graphs of Constant Mean Curvature with Boundary in Parallel Planes.** J. J. Geom. Anal., v.11, Number 4, p. 603-618, 2001.

FIGUEIREDO, D. G.:**Teoria clássica do Potencial.** Universidade de Brasília, 1963.

FINN, R.:**On Equations of Minimal Surface Type.** Annals of Mathematics, v. 60, n. 3 p. 397-416, 1954.

FINN, R.:**Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature.** J. Anal. Math., v. 14, p. 139-160, 1965.

GILBART, D.; TRUDINGER, N.S.: **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. New York: Springer, 2001.

GIUSTI, E.: **Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation**. Boston: Birkhäuser Boston, 1984, 239 p.

JENKINS, H.; SERRIN, J.: **The Dirichlet Problem for the minimal surface equation in higher dimensions**. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 229, p. 170-187, 1968.

KUTEV, N.; TOMI, F.: **Existence and Nonexistence for the Exterior Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in the Plane**. *Differential and Integral Equations*, v.11, n.6, p. 917 - 928, 1998.

MUNKRES, J.: **Topology**. 2. ed., NJ Prentice Hall, 1975, 537 p.

RADÓ, T.: **The problem of the least area and the problem of Plateau**. *Mathematische Zeitschrift*. v. 32. p. 763-796, 1930.

RIPOLL, J.; TOMI, F.: **On solutions to the exterior Dirichlet problem for the minimal surface equation with catenoidal ends**. *Advances in Calculus of Variations*, v. 7, n. 2, p. 205–226, 2014.

SERRIN, J.: **The Dirichlet problem for surfaces of constant mean curvature**. *Proceedings of the London Mathematical Society*, v. 3, n. 2, p. 36197011-384, 1970.

WILLIAMS, G. H.: **The Dirichlet Problem for the minimal surface equation with Lipschitz continuous boundary data**. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 354, p. 123-140, 1984.