**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
E ENSINO DE FÍSICA**

Renata Cezar Pinto

ANÁLISE DE QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENEM: UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NA PERSPECTIVA AUSUBELIANA

**Santa Maria, RS
2016**

Renata Cezar Pinto

ANÁLISE DE QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENEM: UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NA PERSPECTIVA AUSUBELIANA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática**.

Orientadora: Prof[a] Dr[a] Sandra Eliza Vielmo

Santa Maria, RS
2016

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Pinto, Renata Cezar
Análise de questões de matemática do ENEM: uma proposta de utilização do GeoGebra na perspectiva Ausubeliana / Renata Cezar Pinto.- 2016.
94 f.; 30 cm

Orientadora: Sandra Eliza Vielmo
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2016

1. Teoria da Aprendizagem Significativa 2. GeoGebra 3. Exame Nacional do Ensino Médio I. Vielmo, Sandra Eliza II. Título.

Renata Cezar Pinto

ANÁLISE DE QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENEM: UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NA PERSPECTIVA AUSUBELIANA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática**.

Aprovado em 21 de dezembro de 2016:

____

Sandra Eliza Vielmo, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Ana Marli Bulegon

Ana Marli Bulegon, Dra. (UNIFRA)

Maria Cecília Pereira Santarosa

Maria Cecilia Santarosa, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter colocado esse sonho em meu coração e proporcionado todos os meios para realizá-lo, colocando em minha vida pessoas admiráveis que me apoiaram e caminharam comigo nessa trajetória profissional.

A professora Sandra Eliza Vielmo, minha orientadora, um agradecimento muito especial, pela disponibilidade, pela confiança, pelo profissionalismo, pela atenção e paciência. Uma profissional dedicada e inspiradora que resplandece luz e sabedoria em suas ações.

Aos meus filhos, Gustavo e Marcella, meu companheiro Giovani, meus pais e irmãos. Obrigada pela paciência, apoio e cumplicidade nesta etapa da minha vida profissional.

A minha família, agradeço pelo carinho e pelo apoio na minha vida acadêmica, profissional e pessoal, onde sei que sempre encontrarei apoio e carinho.

As minhas colegas e amigas, Eliciane e Shayene, pela troca de experiências, pelos conselhos e incentivo.

Aos professores do PPGEM&EF que contribuíram com seus ensinamentos.

Aos professores e futuros professores de matemática que fizeram parte deste trabalho. Obrigada por tornarem esta pesquisa possível.

A todas as pessoas que fazem parte de minha vida e, direta ou indiretamente, contribuíram para realização desse trabalho.

RESUMO

ANÁLISE DE QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENEM: UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NA PERSPECTIVA AUSUBELIANA

AUTORA: Renata Cezar Pinto
ORIENTADORA: Sandra Eliza Vielmo

Esta dissertação descreve os resultados de uma pesquisa que buscou investigar as contribuições da utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), em particular o *software* GeoGebra, no processo de aquisição de significados na perspectiva Ausubeliana, na resolução de questões de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) adaptadas. A pesquisa foi aplicada no segundo semestre do ano de 2016, junto aos participantes de dois minicursos na área de Educação Matemática na Universidade Federal de Santa Maria. A utilização da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) se justifica por proporcionar aos sujeitos da pesquisa, a possibilidade de re/construção de conhecimentos matemáticos significativos. O referencial teórico baseou-se em pesquisadores da área de Educação e Educação Matemática que defendem a utilização da TAS e das TIC em sala de aula como instrumento potencializador para a promoção da Aprendizagem Significativa. A pesquisa foi desenvolvida numa abordagem qualitativa e os instrumentos utilizados foram questionários, registros dos participantes referentes às resoluções das situações-problema e observações da pesquisadora. A análise dos dados sugere que a utilização da TAS aliada ao uso do GeoGebra pode contribuir de maneira potencialmente significativa na aprendizagem dos conteúdos matemáticos associados às questões do ENEM adaptadas.

Palavras-chave: Teoria da Aprendizagem Significativa. GeoGebra. Exame Nacional do Ensino Médio.

ABSTRACT

ANALYSIS OF MATHEMATICAL QUESTIONS OF THE ENEM: A PROPOSAL FOR THE USE OF GEOGEBRA IN AUSUBELIAN PERSPECTIVE

AUTHOR: Renata Cezar Pinto
ADVISOR: Sandra Eliza Vielmo

This dissertation describes the results of a research that sought to investigate the contributions of the use of Information and Communication Technologies (ICT), in particular GeoGebra software, in the process of acquisition of meanings in the Ausubelian perspective, in the resolution of Mathematics questions of the National High School Examination (ENEM) adapted. The survey was applied in the second half of 2016, together with the participants of two minicourses in the area of Mathematics Education at the Federal University of Santa Maria. The use of Meaningful Learning Theory (MLT) is justified by providing the subjects of the research, the possibility of re/construction of meanings mathematical knowledge. The theoretical reference was based on researchers in the area of Education and Mathematics Education who advocate the use of MLT and ICT In the classroom as an empowering tool for the promotion of Meaningful Learning. The research was developed in a qualitative approach and the instruments used were questionnaires, participants records referring to the resolutions of the problem situations and the observations of the researcher. The analysis of the data suggests that the use of MLT allied to the use of GeoGebra can contribute in a potentially meaningful way in the learning of the mathematical contents associated with the adapted ENEM questions.

Keywords: Meaningful Learning Theory. GeoGebra. National High School Exam.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIAÇÕES

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEJAS	Centros Educacionais de Jovens e Adultos
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
DBR	Design Based Research
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FIES	Fundo de Financiamento Estudantil
FURB	Universidade Regional de Blumenau
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
PPGEM&EF	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física
PROUNI	Programa Universidade para Todos
PUC/RS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC/SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SISU	Sistema de Seleção Unificada
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
TIC	Tecnologia de Informação e Comunicação
TRI	Teoria da Resposta ao Item
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNESCO	Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura
UNIBAN	Universidade Anhanguera de São Paulo
V EIEMAT	V Escola de Inverno de Educação Matemática
XV SAI	XV Semana Acadêmica Integrada

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Após quatro anos como acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática, enfim chega o momento da atuação como professora de Matemática. Essa mudança de papéis gera inquietudes e questionamentos sobre a nova postura que se deseja assumir. Como ser uma professora da Educação Básica? O que e como deve ser ensinado? O que os alunos esperam de uma aula de Matemática? São questões que surgem e que merecem reflexão. A partir dessas questões, passei a procurar por oportunidades de formação continuada, quando surgiu a seleção para o curso de Especialização em Educação Matemática, Mídias Digitais e Didática: Tripé para Formação do Professor de Matemática, ofertado pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Foi nesse curso que me identifiquei com o uso das tecnologias, principalmente com o *software* GeoGebra, o qual havia tido um primeiro contato na graduação. Em seguida, tomei conhecimento da abertura de inscrições do processo seletivo para o mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física (PPGEM&EF) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Decidida a participar dessa seleção, elaborei o pré-projeto de pesquisa na linha de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), propondo uma investigação com foco na utilização das TIC para auxiliar o professor de Matemática a mobilizar o conhecimento dos alunos na resolução de problemas matemáticos. Assim, ao longo das disciplinas do mestrado, mais especificamente, na disciplina de Tecnologia da Informação e da Comunicação na Educação Matemática, fui aprimorando meus conhecimentos em relação às possibilidades do GeoGebra. Concomitante, na disciplina de Tendências em Educação Matemática, fui apresentada à Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de David P. Ausubel.

Em relação ao futuro dos adolescentes do Ensino Médio, um dos assuntos mais atuais e presente nas mídias e redes sociais, é o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), principalmente para aqueles alunos que estão no terceiro ano deste nível de ensino e pretendem ingressar em cursos superiores, através de modelos de ingresso nessa modalidade de ensino como é o caso na atualidade do Sistema de Seleção Unificada (SISU) ou Programa Universidade para Todos (PROUNI), com benefícios do Fundo de Financiamento Estudantil (FIES) ou não. Nesse sentido, pode-se indagar quando ou como considerar as tecnologias na área de Matemática do ENEM. Esta inquietude se dá em perceber como as tecnologias podem contribuir na aquisição de significados dos conteúdos matemáticos, a fim de que sejam mobilizados com eficiência em situações do cotidiano. Dessa maneira pretende-se investigar *“Quais as contribuições do software GeoGebra no processo de aquisição de significados na resolução de questões de Matemática do ENEM adaptadas?”*

Para responder ao problema de pesquisa, foram estabelecidos alguns objetivos que conduziram a investigação realizada. Como objetivo geral pretendeu-se investigar as contribuições do GeoGebra para a re/construção de significados dos conteúdos matemáticos envolvidos em questões do ENEM adaptadas, e como objetivos específicos: identificar os conteúdos matemáticos presentes em algumas questões do ENEM adaptadas; retomar e generalizar os conteúdos que emergem a partir da elaboração dos objetos construídos no GeoGebra; verificar a opinião dos sujeitos da pesquisa, frente à metodologia adotada e sua relevância para a aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos abordados; estimular a utilização do GeoGebra para mobilizar conhecimentos prévios na resolução de situações-problema.

Esta pesquisa está organizada em cinco capítulos: introdução, fundamentação teórica, contexto, descrição e análise dos dados e considerações finais, além de referências e apêndices. Inicialmente, no capítulo de introdução constam o tema a ser pesquisado, a justificativa e problematização da escolha do tema e os objetivos associados. No capítulo 2 é descrito o embasamento teórico da pesquisa, considerando os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Teoria da Aprendizagem Significativa segundo a concepção de Ausubel, Exame Nacional do Ensino Médio e Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação Matemática, destacando o GeoGebra como recurso metodológico. No capítulo 3 estão descritos o contexto e os sujeitos da pesquisa, a abordagem e os procedimentos metodológicos adotados na coleta dos dados. No capítulo 4 estão descritos e analisados os dados obtidos nos minicursos, considerando os questionários iniciais, referente ao perfil dos participantes, a resolução das situações-problema e o questionário final, referente às percepções dos professores e/ou futuros professores de Matemática, sujeitos da pesquisa. No capítulo 5, são destacadas as considerações finais desta pesquisa, seguido das Referências e Apêndices.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentados aspectos importantes que subsidiaram a pesquisa, tais como: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) na perspectiva Ausubeliana, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na Educação Matemática.

2.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (BRASIL, 1996), foi responsável pelo desenvolvimento de novas diretrizes curriculares e pela concepção de um sistema de avaliação, com o objetivo de ser um instrumento para auxiliar a implementação de um ensino de melhor qualidade. Particularmente, em relação ao Ensino Médio, resultou na definição dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2000a) e na criação do Exame Nacional do Ensino Médio.

Os PCNEM (BRASIL, 2000a) apontam como competências e habilidades do Ensino Médio:

> Aprender a aprender e a pensar, a relacionar o conhecimento com dados da experiência cotidiana, a dar significado ao aprendido e a captar o significado do mundo, a fazer a ponte entre a teoria e a pratica, a fundamentar a crítica, a argumentar com base em fatos, a lidar com o sentimento que a aprendizagem desperta. (BRASIL, 2000a, p. 74).

Especificamente em relação a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a formação do estudante do Ensino Médio deve ter como objetivo principal a compreensão de conceitos, procedimentos, estratégias matemáticas e capacidade de aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas, conforme indica os PCNEM (2000a):

> A aprendizagem na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias indica a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção da realidade. (BRASIL, 2000a, p.20).

.

Além disso, os PCNEM (2000a) preconizam o uso da informática como referencial metodológico para o ensino, a ser utilizado no conjunto das atividades profissionais, lúdicas de aprendizagem e de gestão pessoal.

> O uso de recursos tecnológicos possibilita ancorar conhecimentos e competências intelectuais de forma a atribuir significados verdadeiros ao mundo físico e social. Esses conhecimentos e competências é que dão sustentação à análise, à prospecção e a solução de problemas, a capacidade de tomar decisões, à adaptabilidade a situações novas, à arte de dar sentido a um mundo em mutação. (BRASIL, 2000a, p. 67).

Uma proposta de ensino e aprendizagem ancorada no domínio das tecnologias com o intuito de melhorar a qualidade do ensino de matemática poderá contribuir, segundo os PCNEM, para ampliar a capacidade dos jovens cidadãos para aprender significados verdadeiros do mundo físico e social, registrá-los, comunicá-los e aplicá-los no trabalho, no exercício da cidadania e no projeto de vida pessoal.

A fim de promover o desenvolvimento das competências básicas requeridas pelo novo currículo do Ensino Médio faz-se necessário um ensino que abranja significativamente os conteúdos programáticos, relacionando-os as situações cotidianas.

> O novo currículo do Ensino Médio, apoia-se em competências básicas visando a inserção dos estudantes a vida adulta, buscando, para isso, dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização, evitando a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade e incentivando o raciocínio e a capacidade de aprender. (BRASIL, 2000a, p.04).

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio (PCNEM+) citam as competências gerais que os estudantes devem apresentar ao final do Ensino Médio: dominar diferentes linguagens, desde idiomas até representações matemáticas e artísticas; compreender processos: naturais, culturais ou tecnológicos; diagnosticar e enfrentar problemas reais; construir argumentações e elaborar proposições solidárias. Definem ainda que:

> Aprender matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos, traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias a formação. (BRASIL, 2000b, p.111).

Para isso, os PCNEM apontam o estudo da Geometria como um dos conhecimentos capazes de oportunizar diferentes representações de uma mesma situação-problema, além de garantir a relacionabilidade com situações cotidianas e resgatar transformações históricas da ciência que atingem a

atualidade, sugerindo que:

> A Geometria, na perspectiva das medidas, pode se estruturar de modo a garantir que os alunos aprendam a efetuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro. Os conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes devem ser aplicados na resolução de situações-problema. A composição e a decomposição de figuras devem ser utilizadas para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes relacionados a figuras planas ou espaciais. Assim, os problemas que envolvem figuras inscritas ou circunscritas podem ser propostos aos alunos no sentido de aplicação do que aprenderam sobre as diversas medidas. (BRASIL, 2000b, p. 124).

Para promover essa aprendizagem matemática de forma significativa, o professor deve lançar mão de recursos que despertem o interesse dos alunos, através de situações-problema desafiadoras que requerem a mobilização de conhecimentos adquiridos ao longo do Ensino Fundamental. Esse resgate de conhecimento servirá de âncora para a interação com os novos conhecimentos que serão desenvolvidos no Ensino Médio. Desta forma, será possível a construção de uma aprendizagem significativa e permanente.

Neste sentido, os PCN (BRASIL, 1998, p. 51) indicam a importância dos conceitos geométricos já no Ensino Fundamental, apontando que, por meio deles, “o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.”

Assim, para os PCN (BRASIL, 1998) é necessário estimular os alunos a produzir conjecturas para ampliar seu grau de compreensão dos conceitos geométricos envolvidos nas situações propostas, promovendo situações onde as resoluções:

> envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis. [...] Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos. Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso. Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro). (BRASIL, 1998, p.89).

Nesse sentido, deu-se a escolha das questões de matemática associadas a geometria, na medida que tais conteúdos são introduzidos no Ensino Fundamental e, de acordo com os PCNEM, deveriam ser estimulados durante o Ensino Médio, tanto que são resgatados no ENEM.

2.2 TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Partindo dos objetivos das Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM) que enfocam o ensino de Matemática, como preponderante à formação dos estudantes para o ingresso no mercado de trabalho e continuidade de seus estudos, considera-se que a aprendizagem desenvolvida ao longo da Educação Básica deve ser significativa, na medida em que os alunos egressos do Ensino Médio devem apresentar capacidade de mobilizar seus conhecimentos e habilidades desenvolvidas para resolver as situações-problema com que se depararão no cotidiano.

Dessa forma, os PCNEM+ indicam que, no Ensino Médio,

> Os temas devem permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos para garantir a aprendizagem, possibilitar ao aluno o estabelecimento de relações de forma consciente no sentido de caminhar em direção as competências da área e, até mesmo, tornar mais eficaz a utilização do tempo disponível. (BRASIL, 2000b, p. 119).

Essa articulação entre os conceitos, sugeridas pelos PCNEM+, é o que proporcionará que a aprendizagem seja significativa e dará sentido aos conceitos matemáticos estudados durante a Educação Básica. Assim, ao longo do Ensino Médio, o aluno deve ser estimulado a resgatar seus conhecimentos prévios, relacionando-os com os novos conhecimentos, através de estratégias que possibilitam o uso de variados recursos. Tais situações poderão contribuir para que o aluno possa resgatar seus conhecimentos prévios, interligando-os aos novos conhecimentos de maneira significativa.

Para os PCNEM,

> Aprendizagem significativa pressupõe a existência de um referencial que permita aos alunos identificar e se identificar com as questões propostas [...] toda aprendizagem significativa implica uma relação sujeito-objeto e que, para que esta se concretize, é necessário oferecer as condições para que os dois polos do processo interajam. (BRASIL, 2000a, p. 22).

Entende-se que para o processo da aprendizagem significativa dos estudantes é necessário partir dos conhecimentos que já possuem, ou seja, resgatar os conhecimentos prévios adquiridos até o momento na Educação Básica, aprimorando-os de maneira significativa.

Assim, para alcançar os objetivos deste projeto de pesquisa, a mesma estará baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de David P. Ausubel, psicólogo norte-americano que viveu entre 1918 e 2008 e publicou diversos trabalhos tratando da aprendizagem, o qual inspira atualmente vários autores. Ausubel define “Aprendizagem Significativa como sendo aquela que ocorre a medida que o novo conteúdo é incorporado as estruturas de conhecimento existentes; os conceitos ou fórmulas da Matemática adquirem significados a partir da relação com conhecimentos prévios.” (VUELMA; GARCIA; TREVISAN, 2011, p. 201).

Para Ausubel (1978) a promoção da aprendizagem significativa requer a averiguação dos conhecimentos prévios dos alunos e ensiná-los de acordo com esses conhecimentos. Em relação a este aspecto, o pesquisador Moreira (2012) traz que

> É importante reiterar que a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos e que essa interação é não-literal e não-arbitraria. Nesse processo, os conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva. (MOREIRA, 2012, p. 02).

A construção de novos conhecimentos a partir dos conhecimentos prévios é possível por meio de conexões cognitivas. Isto é, a aprendizagem significativa ocorre quando uma nova informação se inter-relaciona com conceitos já existentes na sua estrutura cognitiva produzindo links conceituais. Dessa forma, os conhecimentos são ultrapassados, mas também conservados, adquirindo novos significados e podendo facilitar novas aprendizagens.

O professor deve lançar mão de recursos que possibilitem situações de aprendizagem nas quais os estudantes desenvolvam a capacidade de “aprender a aprender” indicados nos PCNEM, ou seja, situações onde os estudantes são estimulados a pensar sobre o conteúdo estudado e assim relacioná-lo com o que já sabem, amparados no pressuposto de Ausubel que parte do princípio que aprendemos, a partir do que já sabemos.

> Como recurso para mostrar que os novos conhecimentos estão relacionados com os conhecimentos prévios, organizadores devem ser sempre utilizados no ensino, pois o aluno muitas vezes não percebe essa relacionabilidade e pensa que os novos materiais de aprendizagem não têm muito a ver com seus conhecimentos prévios. Organizadores prévios devem ajudar o aprendiz a perceber que novos conhecimentos estão relacionados a ideias apresentadas anteriormente, a subsunçores que existem em sua estrutura cognitiva prévia. (MOREIRA, 2012, p. 11).

A utilização de recursos tecnológicos como organizadores prévios pode contribuir para a promoção desta relacionabilidade. Para isso, o recurso tecnológico utilizado deve ser potencialmente significativo para que o aluno possa atribuir o significado esperado, e assim, produzir seu próprio conhecimento a partir de tais significados.

Além disso, Moreira (2012) destaca que

> Os organizadores prévios seriam materiais introdutórios apresentados em um nível mais alto de generalidade e inclusividade, formulados de acordo com conhecimentos que o aluno tem, que fariam a ponte cognitiva entre estes conhecimentos e aqueles que o aluno deveria ter para que o material fosse potencialmente significativo. (MOREIRA, 2012, p. 20).

Em virtude de todos esses aspectos, percebe-se que a promoção da aprendizagem significativa requer, antes de tudo, uma nova postura docente, a qual pode apoiar-se no uso das tecnologias para produzir materiais potencialmente significativos com o intuito de estimular o interesse dos alunos. Para Ausubel existem três condições para que a aprendizagem significativa ocorra: o conteúdo a ser ensinado deve ser potencialmente significativo, o aprendiz deve possuir os conceitos subsunçores necessários para as novas aprendizagens e o aprendiz precisa estar disposto a relacionar o material de maneira consistente e não arbitraria. De acordo com Moreira (2012), subsunçores são os conhecimentos prévios estabelecidos na estrutura cognitiva do aprendiz e que são especificamente relevantes para dar significado a uma nova aprendizagem.

Para Pelizzari (2002) a Aprendizagem Significativa resulta em

> 1º - o conhecimento que se adquire de maneira significativa é retido e lembrado por mais tempo; 2º - aumenta a capacidade de aprender outros conteúdos de uma maneira mais fácil, mesmo se a informação original for esquecida; 3º - uma vez esquecida, facilita a aprendizagem seguinte – a “reaprendizagem”. (PELIZZARI, 2002, p. 38).

Visto isso, percebe-se que na aprendizagem significativa ocorre o fortalecimento dos conhecimentos já existentes, os quais poderão ser resgatados a qualquer tempo ao longo da vida a fim de solucionar problemas cotidianos. “Do ponto de vista cognitivo, a aprendizagem significativa será facilitada se o aprendiz tiver uma visão inicial do todo, do que é importante para, então, diferenciar e reconciliar significados, critérios, propriedades, categorias.” (MOREIRA, 2012, p. 20).

Moreira (1997) define que, a medida que a aprendizagem significativa ocorre, conceitos são desenvolvidos, elaborados e diferenciados em decorrência de sucessivas interações, apontando a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integrativa como princípios, os quais Ausubel considera essenciais para a ordenação hierárquica do conteúdo a ser aprendido. Em síntese, Valadares e Moreira (2009) definem Diferenciação Progressiva como sendo o princípio pelo qual os conceitos mais gerais e inclusivos do conteúdo de ensino devem ser apresentados no início e, progressivamente, diferenciados em termos de detalhes e especificidades; e Reconciliação Integrativa como o princípio programático, segundo o qual a instrução deve também explorar relações entre ideias, apontar as similaridades e diferenças importantes e reconciliar discrepâncias reais ou aparentes. Nesse sentido, a programação do material instrucional deve contemplar também a exploração de relações entre ideias, considerando uma ordenação que possibilite a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa.

Valadares e Moreira (2009) apontam que Ausubel estabelece a aprendizagem mecânica em contraste com a aprendizagem significativa, considerando-a como a aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma interação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Ainda, Moreira (2012) indica que a aprendizagem que mais ocorre na escola é a aprendizagem mecânica, definindo-a como aquela praticamente sem significado, puramente memorística, que serve para as provas e é esquecida, logo após.

A aprendizagem significativa não pressupõe o não esquecimento, mas garante que o indivíduo não perca os significados, podendo resgatá-los quando requeridos ou reaprendê-los sem dificuldades. Apesar disso, é importante destacar que a aprendizagem significativa não é sinônimo de aprendizagem correta. Ou seja, caso as concepções prévias dos estudantes sejam cientificamente errôneas, o desafio do professor estará no desenvolvimento de um processo para a desconstrução e reconstrução destes conceitos prévios.

Neste trabalho buscamos utilizar a TAS no sentido de favorecer a externalização dos conhecimentos prévios dos sujeitos da pesquisa.

2.3 EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

O Exame Nacional do Ensino Médio foi criado em 1998 e é elaborado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), vinculado ao Ministério de Educação (MEC), com o objetivo de avaliar o desempenho dos estudantes ao fim da Educação Básica. A partir de 2009 passou a ser utilizado também como mecanismo de seleção para o ingresso no Ensino Superior e é definido a partir das competências e habilidades da matriz de referência associada a cada uma das quatro áreas de conhecimento: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias (ANEXO A); Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Os testes utilizados nessa avaliação são compostos por itens que pretendem avaliar o domínio dos alunos sobre um conjunto de habilidades relacionadas às competências que se deseja aferir. A partir da matriz de referência são desenvolvidos os itens que compõem o exame, cuja avaliação de conteúdos utiliza a metodologia estatística chamada Teoria de Resposta ao Item (TRI).

> A TRI é um conjunto de modelos que relacionam a probabilidade de um aluno apresentar uma determinada resposta a um item, com sua proficiência e características (parâmetros) do item. O modelo utilizado no ENEM é o modelo logístico de três parâmetros que, além dos parâmetros de discriminação e de dificuldade, também faz uso de um parâmetro para controlar o acerto casual. Este último parâmetro tem um papel bastante importante nas avaliações com itens de múltipla escolha, caso do ENEM. (INEP, 2012, p.03).

A prova do ENEM aborda 45 questões de múltipla escolha em cada uma das quatro áreas do conhecimento, além da prova de redação. A prova da área de Matemática e suas Tecnologias apresenta gráficos, tabelas, diagramas, esquemas e infogramas que devem ser interpretados, levando em conta conhecimentos específicos aprendidos ao longo da Educação Básica. Desde 2010, os conteúdos mais recorrentes no exame são: funções; cálculos de áreas, perímetro e volume; funções trigonométricas seno, cosseno e tangente; probabilidade; análise combinatória e progressões aritmética e geométrica. Embora recorrentes, não costumam estar explícitos no enunciado das questões contextualizadas e correlacionadas com outras ciências, sendo necessário que o candidato saiba interpretar e mobilizar seus conhecimentos prévios para efetivamente resolver o problema proposto a partir dos dados apresentados. Isso ocorrerá, somente se a aprendizagem prévia foi significativa, caso contrário ele não disporá de conceitos subsunçores capazes de servir de ancoradouros para aquisição de novas aprendizagens.

Ainda, segundo o INEP, os resultados do ENEM podem ser utilizados para:

> compor a avaliação da qualidade do Ensino Médio no País; subsidiar a implementação de políticas públicas; criar referência nacional para o aperfeiçoamento dos currículos do Ensino Médio; desenvolver estudos e indicadores sobre a educação brasileira; estabelecer critérios de acesso do participante a programas governamentais; selecionar candidatos para o Ensino Superior; e constituir parâmetros para a autoavaliação do participante, com vistas à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho. (INEP, 2015, p.04).

Embora exista a indicação de que o ENEM sirva para desenvolver estudos e indicadores sobre a educação brasileira, faz-se necessária uma avaliação do processo de aprendizagem. Neste sentido, Lima (2011) destaca:

> O ENEM trouxe mudanças definitivas e irrevogáveis na educação brasileira, ao apresentar conteúdo distante do currículo usual do Ensino Médio, muito embora tenha causado desconforto por parte de vários pedagogos e profissionais ligados à educação, cuja opinião acerca de uma prova servindo de bússola para o ensino médio não é uma boa ideia. No âmbito pedagógico, os desafios estão apenas começando. É urgente a adequação do material didático frente as novas realidades, porém a maior dificuldade, sem sombra de dúvida, será a formação docente. Em matemática, transmitir conhecimento não será mais suficiente. A nova ordem educacional exigirá a construção e desenvolvimento do raciocínio lógico e da compreensão e leitura interpretativa das situações-problema. O professor terá que aprender a pensar melhor para ensinar a aprender e a pensar com eficácia. (LIMA, 2011, p.67).

Sob o ponto de vista das finalidades do Ensino Médio, o Art. 35 da LDB (BRASIL, 1996) estabelece que:

> Art. 35: O Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidade:
> I - a consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> III - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Especificamente em relação a área de Matemática, estas finalidades podem ser compreendidas, considerando que transmitir conhecimentos não será mais suficiente e caberá ao professor auxiliar o aluno na mobilização de conhecimentos prévios, na medida que lhes proporcione situações desafiadoras que permitam pensar por si próprio e construir estratégias para a resolução das situações-problema propostas.

A partir de suas competências e habilidades, o ENEM pretende identificar o candidato que tenha o perfil de aprender a aprender no mundo atual e como este interage com as tecnologias disponíveis e necessárias a sobrevivência no mercado de trabalho, numa perspectiva interdisciplinar. Portanto, identifica-se uma inter-relação entre os objetivos do Ensino Médio indicados nos PCNEM e os objetivos da matriz de referência do ENEM, referentes às habilidades e competências associadas a este nível de ensino.

Ainda, Perrenoud (2000) destaca que uma das dez competências fundamentais do professor é a de conhecer as possibilidades e dominar os recursos computacionais existentes, cabendo a ele atualizar-se constantemente, buscando novas práticas educativas que possam contribuir para um processo educacional qualificado. Nesse contexto, o professor é indispensável, tornando-se orientador do processo de aprendizagem, podendo dispor de recursos tecnológicos para atender aos alunos de forma diversificada, de acordo com suas necessidades.

2.4 TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Desde a década de 90, as Tecnologias de Informação e Comunicação fazem-se presentes nos documentos oficiais que tratam da promoção da educação, com vistas à aprendizagem de Matemática focada no desenvolvimento profissional do aluno.

Os PCNEM+ (BRASIL, 2000b) apontam a importância do desenvolvimento histórico da tecnologia associada a diversos campos da Matemática, o reconhecimento de sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades às condições de vida atuais. Então, para o estudante é importante:

> Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história. A exigência de rapidez e complexidade dos cálculos fez com que a Matemática se desenvolvesse e, por outro lado, as pesquisas e avanços teóricos da Matemática e demais ciências permitiram o aperfeiçoamento de máquinas, como o computador, que vem tornando os cálculos cada vez mais rápidos. (BRASIL, 2000b, p.118).

De acordo com a LDB, Art. 32, o Ensino Médio visa dar continuidade ao processo de desenvolvimento da capacidade de aprender, com destaque ao aperfeiçoamento do uso das linguagens, inclusive a tecnológica, como meio de constituição dos conhecimentos, da compreensão e formação de atitudes e valores. Desta forma, justifica-se a existência do termo "... e suas tecnologias" associado às áreas de conhecimento do PCNEM e a matriz de referência do ENEM.

Os PCNEM (BRASIL, 2000a) preveem que nas próximas décadas, a educação vá se transformar mais rapidamente do que em muitas outras, em função de uma nova compreensão teórica sobre o papel da escola, estimulada pela incorporação das novas tecnologias.

Dessa forma, perceber os elementos tecnológicos que são essenciais para proporcionar o desenvolvimento de conteúdos matemáticos, como objetivos e meios da constituição de uma aprendizagem significativa, é essencial para que possa se conectar os inúmeros conhecimentos com suas aplicações tecnológicas, como previsto nos PCNEM.

Segundo Giraldo, Caetano, Mattos (2012):

> A introdução de uma ferramenta tecnológica em sala de aula deve se orientar por objetivos e competências a serem adquiridos pelos estudantes .[...] esse processo deve envolver a compreensão da adequação da ferramenta aos conceitos matemáticos abordados, bem como as perspectivas didáticas em que ocorra integração da tecnologia. É fundamental que sejam consideradas ainda as potencialidades e prováveis limitações dos recursos tecnológicos quando aplicados ao contexto de ensino e aprendizagem em questão. (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p.392).

Em virtude disso, o uso da tecnologia em sala de aula implica no efetivo conhecimento do conteúdo matemático e apropriação adequada por parte do professor, do recurso que se deseja utilizar, o que pode ser melhor aproveitado quando o recurso tecnológico é associado a alguma estratégia para resolução de situações-problema. Segundo Garcia (2012):

> A apropriação das tecnologias de informação e comunicação no ensino da matemática contribui para facilitar o processo de ensino-aprendizagem, para a inserção do jovem na sociedade tecnológica e, também, oferece ferramentas interdisciplinares entre as diferentes áreas do conhecimento. (GARCIA, 2012, p.19).

O professor deve ter clareza que o uso de um *software* ou tecnologia deve trazer vantagens em relação aos materiais tradicionais, devendo refletir numa compreensão diferenciada dos alunos em relação aos conteúdos abordados. (CASTRO FILHO, 2008, p.03).

Neste sentido, Giraldo, Caetano, Mattos (2012) apontam que o objetivo central do uso de recursos tecnológicos é destacar a riqueza das explorações matemáticas que podem ser feitas com estes recursos relativamente simples e acessíveis. Para isso, basta que o professor dedique-se ao estudo das inúmeras possibilidades de aplicações dos recursos. Acrescentam ainda que a opção em usar recursos computacionais, cria novas possibilidades instrucionais, o que já demonstra uma vontade de inovar intrínseca a capacidade de ensinar. Pois, esse professor está ciente que a utilização de um recurso tecnológico pode contribuir para reorganizar e estabelecer novas conexões entre conceitos matemáticos já constituídos e os novos conhecimentos.

Segundo os PCNEM, a partir dos problemas propostos pelo professor e do recurso tecnológico utilizado, ao aluno

> Cabe compreender os princípios científicos presentes nas tecnologias, associá-las aos problemas que se propõe solucionar e resolver os problemas de forma contextualizada, aplicando aqueles princípios científicos às situações reais ou simuladas. (BRASIL, 2000a, p.20).

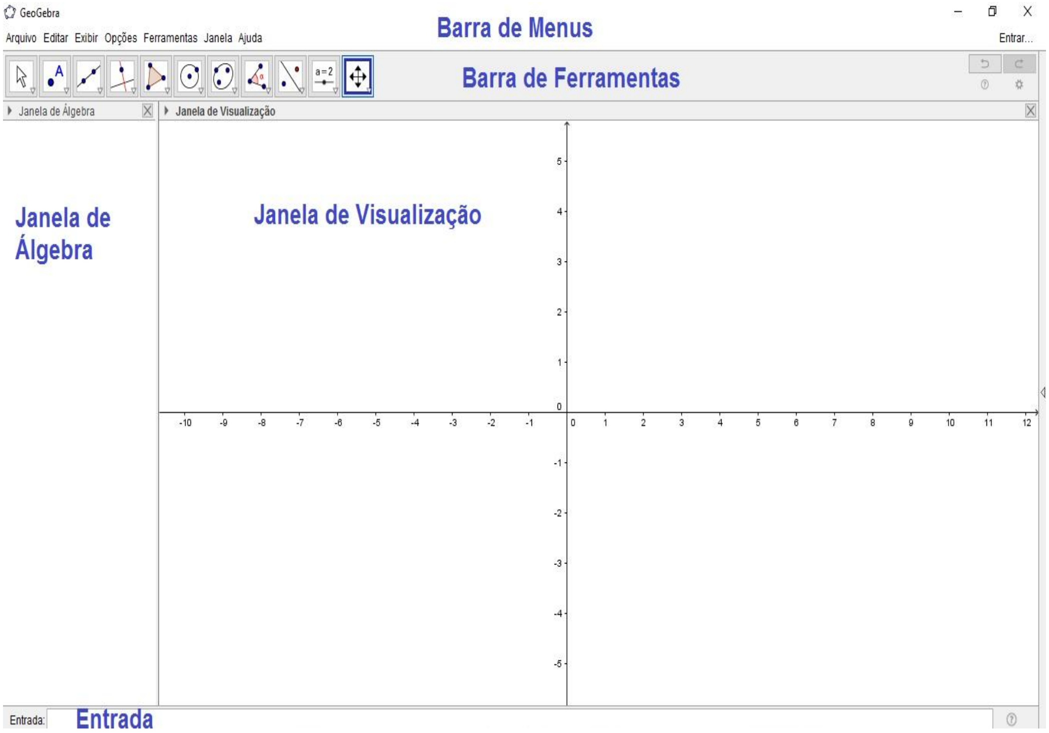
Essas conclusões devem ser sistematizadas por meio de negociações de significados estimuladas ao longo da resolução dos problemas com o uso de recursos potencialmente capazes de promover a aprendizagem significativa, compatíveis com cada nível escolar. Além do fato de utilizar TIC no ensino ser altamente motivador da aprendizagem significativa, o querer aprender desta forma é uma das condições para que esta aprendizagem ocorra.

2.4.1 O GeoGebra como recurso metodológico

O GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica, idealizado por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo, que pode ser baixado livremente do site oficial[1] e instalado em múltiplas plataformas. A interface algébrica e geométrica (Figura 1) permite potencializar a aprendizagem, pois por meio de construções geométricas, os conceitos algébricos se materializam visualmente.

[1] Site oficial do GeoGebra. Disponível em https://www.geogebra.org/

Figura 1 – Interface do GeoGebra



Fonte: Autora.

Segundo Castro Filho (2008)

> *Softwares* de geometria dinâmica, tais como o cabri ou o geogebra possibilitam aos alunos realizar construções geométricas e levantar hipóteses sobre as leis da geometria. Tais *softwares* permitem focalizar mais nos aspectos conceituais do que na produção de figuras, como acontecem quando se usa somente lápis e papel. (CASTRO FILHO, 2008, p.03).

O GeoGebra possibilita que o aluno concentre seus esforços nas ações cognitivas que envolvem o problema proposto e ainda assim, consiga mobilizar seus conhecimentos de forma visual, a fim de facilitar a compreensão do que está sendo proposto. Segundo Giraldo, Caetano, Mattos (2012), as ferramentas de geometria dinâmica

> permitem a construção de objetos geométricos de acordo com as propriedades ou relações estabelecidas. Estes podem então ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que as propriedades e relações sejam preservadas. Esse modo particular de construção geométrica apresenta características especiais, que podem ter consequências importantes para a aprendizagem. (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p.168).

Para isso, deve-se estar ciente das possibilidades e limitações do *software* escolhido em relação ao conteúdo que se deseja trabalhar, visando a real produção de significados. Também, os alunos devem ser estimulados a procurar entender o comportamento das construções, a partir de argumentos matemáticos que devem ser discutidos pelo professor de forma articulada. Além disso, Gravina *et al* (2012) acrescentam:

> O GeoGebra, assim como outros *softwares* similares, tem o interessante recurso de "estabilidade sob ação de movimento". Explicamos o que isto significa: feita uma construção, mediante movimento aplicado aos pontos que dão início à construção, a figura que está na tela do computador se transforma quanto ao tamanho e posição, mas preserva as propriedades geométricas que foram impostas no processo de construção, bem como as propriedades delas decorrentes. Ou seja, a "figura em movimento" guarda as regularidades que são importantes sob o ponto de vista da geometria. São figuras que não se deformam, e estas é que são as figuras da geometria dinâmica! (GRAVINA *et al*, 2012, p.12).

Dessa forma, estes autores sinalizam a necessidade de uma postura crítica por parte dos alunos, frente aos resultados obtidos na construção de objetos matemáticos, a fim de validarem suas propriedades. O uso de representações algébricas e gráficas ao mesmo tempo e da generalização das questões propostas permitem situações que inter-relacionam conhecimento teórico e prático, abstração e visualização, ampliando as possibilidades de mobilizações de conhecimentos prévios para resolver problemas cotidianos.

> Essas representações podem ainda fornecer pistas sobre outras propriedades e relações dos objetos construídos, além daquelas que fazem parte de suas definições ou são dadas nos enunciados dos problemas, sugerindo porque estas são válidas (ou não válidas) e indicando caminhos para sua dedução. Assim o processo de construção pode nos levar a perceber ou a conjecturar propriedades que, evidentemente, deverão ser confirmadas ou refutadas por argumentos matemáticos. (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p. 115).

Logo, partindo das negociações dos significados que vão surgindo durante a resolução das atividades, os alunos vão fazendo conexões entre seus conhecimentos constituídos e os novos conceitos que lhes estão sendo apresentados. Dessa forma a aprendizagem se torna significativa e passível de mobilização com maior facilidade quando requerida, em particular, durante a realização de provas como o ENEM ou em situações cotidianas.

Para Giraldo, Caetano e Mattos (2012), a visualização no *software* deve ser explorada para motivar reflexões e conjecturas, que devem ser verificadas posteriormente por meio de comprovações matemáticas. Destaca-se que o objetivo geral do uso das tecnologias, está em usar o computador para promover aprendizagem matemática sólida o suficiente para permanecer e se transferir para outras situações, mesmo sem o apoio da máquina. Ou seja, a utilização de recursos tecnológicos, como os ambientes de geometria dinâmica, pode estimular a compreensão do problema a ser resolvido, proporcionando a aprendizagem significativa dos conhecimentos matemáticos aos alunos. Segundo Moreira (2012), o significado depende do domínio progressivo de situações-problema ou situações de aprendizagem potencialmente significativas.

Dado o exposto, a resolução de situações-problema associada a utilização de recursos tecnológicos visa estimular a capacidade do estudante em transformar informação em conhecimento, valorizando o raciocínio lógico. Este é o resultado que os PCNEM buscam desenvolver a partir das DCNEM, e a capacidade que o ENEM procura identificar, a partir de sua matriz de referência. É o perfil buscado pelo mercado de trabalho como ideal para integração entre o trabalho e o desenvolvimento humano, isto é, o indivíduo que tenha autonomia para desenvolver a capacidade de aprender, orientando-se em suas escolhas futuras em relação à continuidade dos estudos ou à inserção profissional.

Com base nos aspectos apontados pelos PCNEM observa-se a forte tendência em estruturar o Ensino Médio com base em conhecimentos que possam ser mobilizados a partir de problemas contextualizados e do domínio de recursos tecnológicos que visem a promoção da aprendizagem significativa, com o intuito de formar cidadãos capacitados para solucionar os problemas que enfrentarão na sociedade atual.

2.5 DISSERTAÇÕES E TESES RELACIONADAS AO TEMA DA PESQUISA

A fim de verificar a existência de pesquisas relacionadas ao tema desta dissertação, optou-se por considerar somente o Banco de Teses e Dissertações da Plataforma Sucupira da CAPES[2], utilizando-se a busca +*Geometria* +*Ausubel*, a partir do ano de 2011, para mestrados acadêmicos e doutorados. Nesta busca foram identificadas seis dissertações e uma tese, as quais utilizam uma abordagem qualitativa e serão descritas sucintamente a seguir.

2 Plataforma Sucupira. Disponível em http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses.

1) Molon (PUC/RS, 2011): Em sua dissertação intitulada “As aplicações e contribuições da Geometria Plana na Educação de Jovens e Adultos no Ensino Fundamental por meio de Unidade de Aprendizagem” buscou investigar como a aplicação de uma Unidade de Aprendizagem sobre Geometria Plana pode levar alunos da EJA a uma aprendizagem duradoura. A autora concluiu que o emprego das Unidades de Aprendizagem, conjugadas aos saberes dos alunos, permitiu uma Aprendizagem Significativa e, portanto, duradoura dos conceitos geométricos. Além disso, constatou que o ensino da Matemática pode ser reconstruído a qualquer momento, desde que se parta das ideias e dos interesses dos alunos com os quais se está trabalhando. A sugestão, para professores que desejam trabalhar com Unidade de Aprendizagem, é tornar uma simples aula em um momento marcante para os alunos, transformando o conhecimento empírico em conhecimento científico.

2) Santos (FURB, 2011): Em sua dissertação intitulada “A articulação de recursos tecnológicos na prática pedagógica para a aprendizagem de conceitos de geometria” objetivou compreender o processo de aprendizagem dos conceitos de geometria pelos estudantes de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental a partir da utilização de recursos tecnológicos articulados através de uma intervenção pedagógica. O autor conclui que a articulação de recursos, ao possibilitar maneiras diversas de apresentação de conceitos científicos, de forma a instigar nos estudantes uma disposição à Aprendizagem Significativa, poderá ser um diferencial na prática, contribuindo com o processo de ensino e de aprendizagem.

3) Miashiro (UNIBAN, 2013): Em sua dissertação intitulada “A Transição das Razões para as Funções Trigonométricas” buscou investigar a combinação do contexto experimental com o contexto computacional, no ensino dos principais conceitos presentes na transição das razões para as funções trigonométricas. No contexto experimental utilizou materiais concretos e no contexto computacional utilizou o programa educacional Cabri-Géomètre II, para permitir uma interação dos alunos com as razões trigonométricas e com as propriedades dos arcos de uma circunferência. A pesquisa se baseou na Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel, e na história da trigonometria. As atividades foram aplicadas a nove alunos de um curso superior de Licenciatura em Matemática, nos moldes da metodologia do Design Based Research (DBR). O autor concluiu que a estratégia de ensino nas intervenções provocou e revelou algumas habilidades e conhecimentos adquiridos pelos participantes, tais

como as medidas em radianos, a construção de uma tabela trigonométrica e do gráfico da função seno.

4) Castro (UFMT, 2014): Em sua dissertação intitulada "Concepções de professores sobre ensino e aprendizagem da Geometria Plana na Educação de Jovens e Adultos dos CEJAS de Cuiabá/MT" buscou compreender as concepções de professores sobre ensino e aprendizagem da Geometria Plana na Educação de Jovens e Adultos. A análise dos dados consistiu na interpretação e triangulação pela recorrência dos dados coletados pelos diferentes instrumentos (questionários, entrevistas e análise documental). A pesquisa apropriou-se da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel para sustentar a ideia de que a aprendizagem ocorre de maneira significativa quando são levados em consideração seus conhecimentos prévios. Com isso, a autora conclui que de acordo com as concepções dos professores, sujeitos da pesquisa, e as indicações dos documentos oficiais para esta modalidade de ensino, uma educação que cultiva o respeito e valorização do aprendizado adquirido através da experiência de vida dos alunos proporciona uma aprendizagem significativa.

5) Gonçalves (PUC/SP, 2014): Sua dissertação intitulada "Uma abordagem para a construção de triângulos e do Teorema de Pitágoras mediada pelo *software* SuperLogo", teve por objetivo analisar uma sequência de atividades desenvolvidas para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, mediada pelo uso do *software* SuperLogo, visando que os sujeitos construíssem uma aprendizagem do Teorema de Pitágoras, a partir de construções geométricas, na busca por um saber menos reprodutor e mais autônomo. A autora aponta que a análise dos protocolos e das discussões dos sujeitos durante a pesquisa revelou que as atividades propostas provocaram reflexões a respeito de alguns tópicos da Geometria Plana e permitiram aos participantes a descoberta e consolidação do Teorema de Pitágoras. A autora conclui que a experimentação permitiu constatar que o enfoque adotado permitiu a construção de uma Aprendizagem Significativa.

6) Sena (UFRGS, 2014): Em sua tese intitulada "Mosaico tecnológico na formação de conceitos sobre polígonos: um estudo sobre a lógica dos adolescentes" buscou identificar os processos de elaboração e de reelaboração de conceitos relativos a polígonos, a partir de uma intervenção, de curta duração, com adolescentes, mediada por tecnologias digitais. Para o estabelecimento de relações geométricas, a proposta utilizou o *Slogo-3.0*, o *Cabri-Géomètre II* e o *MatGeo*. A autora conclui que os resultados dos testes revelaram que houve avanços significativos advindos do processo interventivo, relacionados ao reconhecimento de figuras, indicando que um mosaico

tecnológico pode favorecer o desenvolvimento da aprendizagem. Ainda afirma que o caminho para alavancar a aprendizagem, a elaboração e reelaboração de conceitos, para além da superfície, deve apresentar o máximo possível de possibilidades para uma experimentação que desafie e encante o aprendiz, apontando a tecnologia como uma aliada nesse processo, desde que o método priorize a construção de conhecimento e não somente a busca de informações.

7) Ballejo (PUC/RS, 2015): A dissertação cujo título é “Aprendizagem de conceitos de área e perímetro com o GeoGebra no 6º ano do Ensino Fundamental”, buscou investigar de que forma o *software* GeoGebra pode contribuir na construção de conceitos de perímetro e área por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, tendo como referencial as teorias Construcionista, de Papert e da Aprendizagem Significativa, de Ausubel. A pesquisa foi dividida em quatro etapas: verificação em livros didáticos a respeito do assunto de geometria; aplicação de questionários iniciais, para a caracterização do grupo pesquisado e delimitação de seus conhecimentos prévios; aplicação de atividades referentes ao estudo de geometria no software GeoGebra e questionário final. A autora conclui que a utilização do GeoGebra contribuiu significativamente na compreensão de perímetro e área na perspectiva do modelo Construcionista de ensino, proposto por Papert. Ela afirma que a análise do último instrumento revelou que a utilização desse *software* promove a aprendizagem de maneira significativa, na medida em que os estudantes mostram-se motivados a estudar quando as aulas utilizam metodologias diferentes dos modelos considerados tradicionais.

A fim de identificar mais pesquisas relacionadas ao tema, utilizando a busca *+Geogebra +Ausubel*, a plataforma retornou duas dissertações, uma sendo Ballejo (2015) já descrita e Cassol (2012), descrita a seguir.

8) Cassol (PUC/RS, 2012): Em sua dissertação intitulada “Tecnologias no Ensino e Aprendizagem de Trigonometria: Uma Meta-análise de Dissertações e Teses Brasileiras nos últimos cinco anos”, analisou as vantagens e as desvantagens da utilização dos recursos tecnológicos no ensino e na aprendizagem de Trigonometria apresentadas em sete dissertações. Trata-se de um estudo documental denominado meta-análise qualitativa, na qual a autora procura fazer uma revisão sistemática das produções, visando obter uma síntese, quanto aos objetivos, os referenciais teóricos, os recursos tecnológicos utilizados e as metodologias adotadas. Neste comparativo destaca-se que apenas um dos trabalhos baseia-se na Teoria da aprendizagem Significativa de Ausubel

e os demais em outros autores. Também, observa-se que seis dissertações utilizam o *software* GeoGebra. Quanto às vantagens da utilização do uso do GeoGebra, as pesquisas enumeraram diversas razões para utilizá-lo nas aulas de Matemática, pois desperta o interesse e a motivação do aluno, no momento de realizar e explorar as atividades e aumenta o poder de argumentação através do processo de arrastar as figuras pela tela do computador, fazendo sucessivos testes. Em relação às desvantagens apresentadas, a mais mencionada foi o suporte técnico inadequado na escola, com máquinas desatualizadas ou limitadas no laboratório.

Refinando a busca para *+geometria +Geogebra +Ausubel*, a plataforma retorna somente a dissertação de Ballejo (2015), já descrita anteriormente.

A identificação e análise destas pesquisas contribuíram no delineamento da investigação e mostram a importância de desenvolver atividades mediadas pelas tecnologias, como facilitadoras na compreensão e apropriação dos significados contidos nos conceitos ou conteúdos matemáticos. Essa significação permite formar *links* conceituais capazes de ancorar-se nos conhecimentos prévios de modo a promover a construção de conhecimentos potencialmente significativos.

3 CONTEXTO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo serão descritos a abordagem, o contexto e os procedimentos metodológicos adotados na coleta dos dados. Também, descritas algumas questões de geometria dos itens de matemática do ENEM, cujas resoluções são exploradas algebricamente e também, geometricamente através do GeoGebra, visando o resgate ou auxílio na construção dos conhecimentos prévios, otimizados pelas diferentes representações que o *software* proporciona.

3.1 ABORDAGEM QUALITATIVA

Adotou-se o Estudo de Caso como metodologia desta pesquisa por buscar investigar, segundo Yin (2005), o como e os porquês do caso em estudo, considerando os significados que os alunos atribuem aos conceitos trabalhados.

Quanto à análise dos dados, esta pesquisa fundamentou-se em uma abordagem qualitativa, a qual, segundo Fiorentini (2009, p. 110) “busca investigar e interpretar o caso como um todo orgânico, uma unidade em ação com dinâmica própria, mas que guarda forte relação com o entorno ou contexto sócio cultural”.

Moreira (2003) destaca como principal característica da pesquisa qualitativa a interpretação do pesquisador sobre os dados e informações coletadas, sendo denominada, também, interpretativa.

> O investigador interpretativo observa participativamente, de dentro do ambiente estudado, imerso no fenômeno de interesse, anotando cuidadosamente tudo o que acontece nesse ambiente, registrando eventos [...] coletando documentos tais como trabalhos de alunos, materiais distribuídos pelo professor, ocupa-se não de uma amostra no sentido quantitativo, mas de grupos ou indivíduos em particular, de casos específicos, procurando escrutinar exaustivamente determinada instância tentando descobrir o que há de único nela e o que pode ser generalizado a situações similares. (MOREIRA, 2003, p. 24).

Assim, a análise foi realizada a partir dos documentos disponibilizados pelos sujeitos da pesquisa, através da resolução manuscrita das situações propostas, dos arquivos do GeoGebra e de apontamentos realizados pela pesquisadora ao longo do desenvolvimento dos minicursos.

3.2 CONTEXTO

3.2.1 Minicursos

A coleta dos dados da pesquisa ocorreu ao longo do desenvolvimento de minicursos ofertados em dois eventos. O primeiro foi realizado na V Escola de Inverno de Educação Matemática (V EIEMAT) da UFSM no dia 03 de agosto de 2016, cujo evento tem o objetivo de congregar professores de Matemática dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior, alunos de Cursos de Licenciatura em Matemática e de Pedagogia e estudantes e professores de Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e áreas afins para discutir questões teórico-metodológicas relacionadas ao processo de ensino e de aprendizagem das matemáticas na Educação Básica e questões relativas ao processo de formação inicial e continuada do docente de Matemática. O segundo minicurso ocorreu na XV Semana Acadêmica Integrada (XV SAI) do Centro de Ciências Naturais e Exatas da UFSM no dia 18 de outubro de 2016, cujo evento caracteriza-se como um espaço para a abordagem e discussão de temas que não são tratados em sala de aula e que podem complementar a formação acadêmica.

3.2.2 Sujeitos da Pesquisa

Os sujeitos desta pesquisa foram nove participantes da V EIEMAT e vinte e um participantes da XV SAI, inscritos nos minicursos, os quais concordaram com o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice 1). Por serem professores ou futuros professores de Matemática na Educação Básica se faz necessário uma formação atualizada quanto às demandas educacionais neste contexto, especialmente, numa perspectiva tecnológica.

3.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.3.1 Constituição dos Minicursos

Os dados da pesquisa constituíram-se a partir da aplicação de três momentos em cada um dos minicursos. No primeiro momento foi aplicado um questionário semiestruturado, buscando identificar o perfil dos participantes e seus conhecimentos referentes ao uso de TIC e do *software* GeoGebra. No segundo momento, as situações-problema foram apresentadas sequencialmente aos participantes através de material impresso e, no terceiro momento, os participantes responderam um questionário onde relataram suas percepções referentes ao uso do GeoGebra no resgate de conhecimentos prévios e/ou na aquisição de novos conhecimentos matemáticos necessários para resolver as situações-problema propostas.

3.3.2 Instrumentos utilizados para a coleta de dados

Ao longo do desenvolvimento dos minicursos foram aplicados três questionários: *inicial* (Apêndice B) para identificar o perfil dos participantes, *resolução das situações-problema* (Apêndice C) para identificar os conhecimentos prévios e a aquisição de novos conhecimentos e *final* (Apêndice D) para identificar as percepções em relação ao uso do *software* GeoGebra como potencializador da Aprendizagem Significativa. Além destes questionários, foram observados pela pesquisadora os diálogos e as significações ocorridas durante a realização dos minicursos.

3.3.3 Questões do ENEM adaptadas

A escolha desta pesquisa em trabalhar com questões do ENEM, decorre do fato deste ser um dos assuntos mais recorrente no Ensino Médio e da necessidade de uma maior qualificação, tanto pedagógica quanto tecnológica, dos professores que atuam ou futuros professores que atuarão junto a estes alunos.

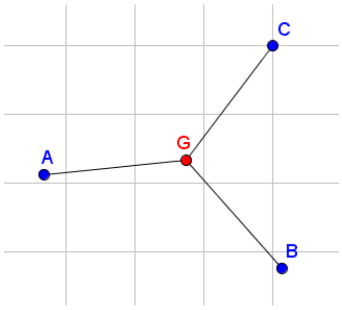
Para a realização dos minicursos foram consideradas três questões do ENEM adaptadas do período de 2010 a 2015 que abordam conteúdos de geometria. Justifica-se tal escolha por oportunizar uma abordagem tecnológica, capacitando os professores de Matemática a diversificarem suas metodologias de ensino numa visão mais abrangente das possíveis formas de resolução de uma mesma situação-problema, visando verificar os princípios da diferenciação progressiva e reconciliação integrativa.

3.2.3.1 Questão 168 Enem 2013 (caderno amarelo)

Questão Adaptada: Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C posicionadas nos pontos de coordenadas (x_A,y_A), (x_B,y_B) e (x_C,y_C) respectivas, já existentes nessas cidades. A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas, denotado pelo ponto $G(x,y)$. Qual o local adequado para a construção dessa torre?

Resolução Algébrica: Para a resolução serão considerados três pontos não colineares quaisquer $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ *e* $C(x_C, y_C)$ equidistantes ao ponto $G(x,y)$. Ou seja, as distâncias d_{AG}, d_{BG} e d_{CG} devem satisfazer $d_{AG} = d_{BG} = d_{CG}$ (Figura 2).

Figura 2 - Representação das distâncias d_{AG}, d_{BG} e d_{CG}



Fonte: Construção no GeoGebra.

Da distância entre dois pontos, decorrente do teorema de Pitágoras e do fato de $d_{AG} = d_{BG}$, tem-se:

$$\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2} = \sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}$$

$$x^2 - 2xx_A + x_A^2 + y^2 - 2yy_A + y_A^2 = x^2 - 2xx_B + x_B^2 + y^2 - 2yy_B + y_B^2$$

$$-2(x_A - x_B)x - 2(y_A - y_B)y + (x_A^2 - x_B^2) + (y_A^2 - y_B^2) = 0$$

Ou,

$$(x_A - x_B)x + (y_A - y_B)y = \frac{(x_A^2-x_B^2)+(y_A^2-y_B^2)}{2} \qquad (1)$$

Por outro lado, de $d_{BG} = d_{CG}$ tem-se:

$$\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}$$

$$x^2 - 2xx_B + x_B^2 + y^2 - 2yy_B + y_B^2 = x^2 - 2xx_C + x_C^2 + y^2 - 2yy_C + y_C^2$$

$$-2(x_B - x_C)x - 2(y_B - y_C)y + (x_B^2 - x_C^2) + (y_B^2 - y_C^2) = 0$$

Assim,

$$(x_B - x_C)x + (y_B - y_C)y = \frac{(x_B^2 - x_C^2) + (y_B^2 - y_C^2)}{2} \qquad (2)$$

Para obter as coordenadas x e y, deve-se resolver o sistema linear formado pelas equações (1) e (2):

$$\begin{cases} (x_A - x_B)x + (y_A - y_B)y = \dfrac{(x_A^2 - x_B^2) + (y_A^2 - y_B^2)}{2} \\ (x_B - x_C)x + (y_B - y_C)y = \dfrac{(x_B^2 - x_C^2) + (y_B^2 - y_C^2)}{2} \end{cases}$$

Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{pmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(x_A^2 + x_A^2) - (y_B^2 + y_B^2)}{2} \\ \frac{(x_B^2 + x_B^2) - (y_C^2 + y_C^2)}{2} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Se o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (3) for diferente de zero, o sistema pode ser resolvido pela regra de Cramer, considerando as seguintes notações:

d = determinante da matriz dos coeficientes do sistema (3);

d_x = determinante da matriz obtida quando é substituída a 1ª coluna da matriz dos coeficientes pelos termos independentes;

d_y = determinante da matriz obtida quando é substituída a 2ª coluna da matriz dos coeficientes pelos termos independentes.

Dessa forma, obtém-se as coordenadas do ponto G:

$$x = \frac{d_x}{d} = \frac{\frac{y_B - y_C}{2}\left((x_A^2 + y_A^2) - (x_B^2 + y_B^2)\right) - \frac{y_A - y_B}{2}\left((x_B^2 + y_B^2) - (y_C^2 + y_C^2)\right)}{(x_A - x_B)(y_B - y_C) - (y_A - y_B)(x_B - x_C)}$$

$$y = \frac{d_y}{d} = \frac{\frac{x_A - x_B}{2}\left((x_B^2 + y_B^2) - (x_C^2 + y_C^2)\right) - \frac{x_B - x_C}{2}\left((x_A^2 + y_A^2) - (x_B^2 + y_B^2)\right)}{(x_A - x_B)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_A - y_B)}$$

Os conhecimentos mobilizados durante a resolução algébrica desta situação-problema são:

Distância entre dois pontos A e B: obtida através do Teorema de Pitágoras e denotada por $d(A,B)$.

Equidistância entre pontos: um ponto *C* é equidistante dos pontos *A* e *B*, se $d(C,A)$ é igual a $d(C,B)$.

Resolução de sistemas lineares: determina o conjunto de soluções de um sistema linear, ou seja, os valores das variáveis que satisfazem simultaneamente todas as equações do sistema.

Resolução no GeoGebra: Para esta resolução geométrica, inicialmente constroem-se os pontos *A*, *B* e *C* que representam as posições das três antenas e utilizando o comando *<Polígono>* é formado o triângulo *ABC*. A seguir, identifica-se os pontos médios dos três lados do triângulo através do comando *<Ponto Médio>* e, a partir destes pontos médios, traçam-se as retas mediatrizes aos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *e* $\overline{AC}$, utilizando o comando <*Reta Perpendicular*>. Então, através do comando <*Interseção de Dois Objetos*>, obtém-se o ponto *G*.

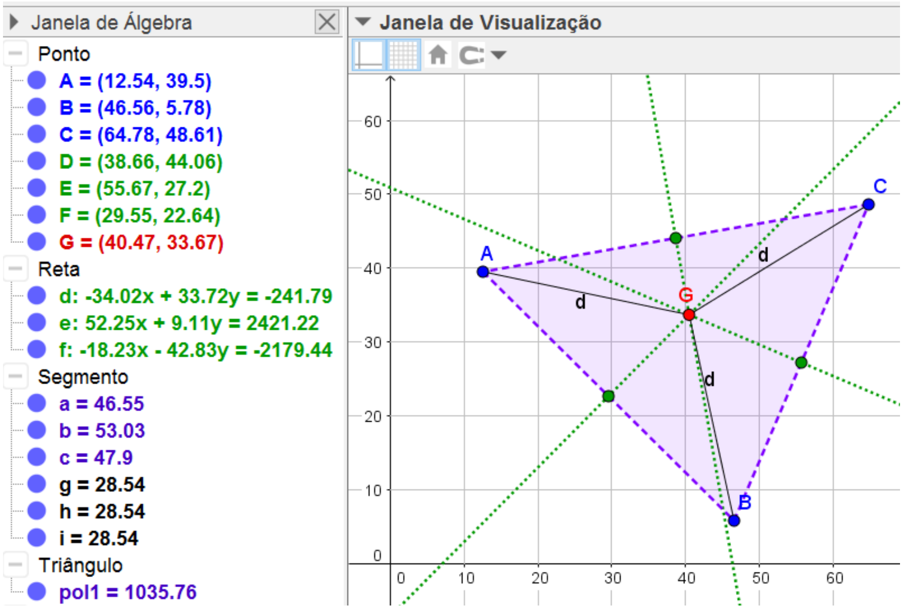
Nas Figuras 3 e 4 são visualizados o Protocolo de Construção e Janelas de Álgebra e de Visualização, respectivamente, referentes a construção geométrica da situação-problema no GeoGebra.

Figura 3 - Protocolo de Construção

N.	Nome	Descrição
1	Ponto A	
2	Ponto B	
3	Ponto C	
4	Triângulo pol1	Polígono A, B, C
4	Segmento c	Segmento [A, B] de Triângulo pol1
4	Segmento a	Segmento [B, C] de Triângulo pol1
4	Segmento b	Segmento [C, A] de Triângulo pol1
5	Ponto D	Ponto médio de b
6	Ponto E	Ponto médio de a
7	Ponto F	Ponto médio de c
8	Reta d	Reta passando por F e perpendicular a c
9	Reta e	Reta passando por D e perpendicular a b
10	Reta f	Reta passando por E e perpendicular a a
11	Ponto G	Ponto de interseção de d, e
12	Segmento g	Segmento [A, G]
13	Segmento h	Segmento [G, C]
14	Segmento i	Segmento [G, B]

Fonte: Construção no GeoGebra.

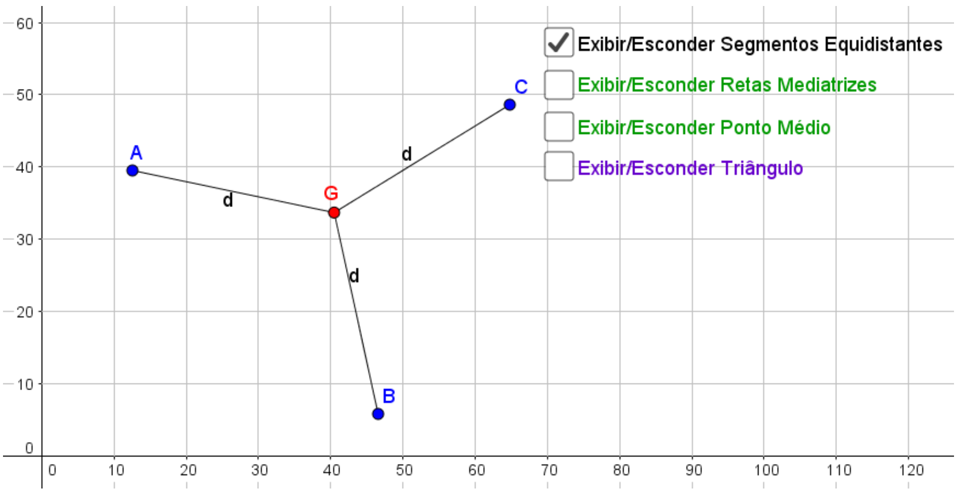
Figura 4 - Janela de Álgebra e de Visualização



Fonte: Construção no GeoGebra.

Com a finalidade de deixar o objeto mais significativo, pode-se criar caixas para Exibir/ Esconder objetos auxiliares, proporcionando uma melhor visualização da construção final, conforme Figura 5.

Figura 5 - Caixas para Exibir/Esconder objetos



Fonte: Construção no GeoGebra.

Os conhecimentos mobilizados durante a resolução no GeoGebra desta situação-problema são:

Ponto de intersecção: ponto de concorrência de dois objetos.

Retas perpendiculares: Duas retas r e s são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam um ângulo reto.

Ponto médio de um segmento de reta: é o ponto que divide o segmento de reta em duas partes iguais.

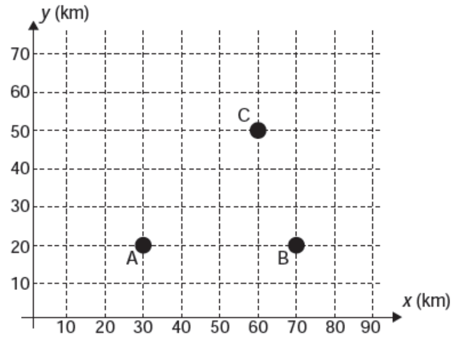
Mediatriz de um segmento de reta: é a reta perpendicular que passa pelo ponto médio deste segmento de reta.

Circuncentro de um triângulo: é o ponto de intersecção das mediatrizes associadas aos lados deste triângulo.

Circunferência circunscrita em um triângulo: é a circunferência com centro no circuncentro do triângulo e raio definido pela distância dos vértices do triângulo ao circuncentro.

A partir da resolução generalizada pode-se obter a solução da questão do ENEM, descrita a seguir:

Questão do ENEM: Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano abaixo.



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65, 35) b) (53, 30) c) (45, 35) d) (50, 20) e) (50, 30)

Resolução: Tem-se que *A(30,20)*, *B(70,20)*, *C(60,50)* e *G(x,y)* são tais que as distâncias de A, B e C ao ponto G satisfazem $d_{AG} = d_{BG} = d_{CG}$.

Da igualdade $d_{AG} = d_{BG}$ resulta:

$$\sqrt{(x-30)^2 + (y-20)^2} = \sqrt{(x-70)^2 + (y-20)^2}$$

Ou seja,

$$(x-30)^2 + (y-20)^2 = (x-70)^2 + (y-20)^2$$

$$x^2 - 60x + 900 = x^2 - 140x + 4900$$

$$8x = 4000$$

$$x = 50$$

Assim, *G(50, y)*.

Por outro lado, da igualdade $d_{BG} = d_{CG}$ resulta:

$$\sqrt{(70-50)^2 + (20-y)^2} = \sqrt{(60-50)^2 + (50-y)^2}$$

Ou seja,

$$(70-50)^2 + (20-y)^2 = (60-50)^2 + (50-y)^2$$

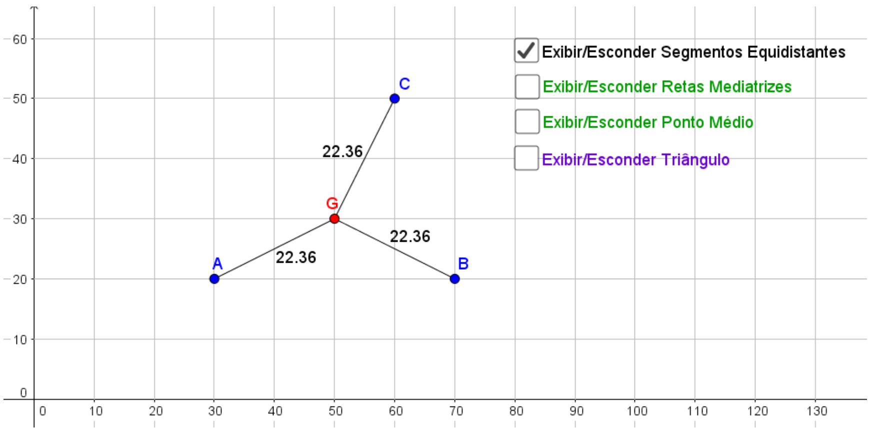
$$400 + 400 - 40y + y^2 = 100 + 2500 - 100y + y^2$$

$$60y = 1800$$

$$y = 30$$

Assim, tem-se que o ponto *G* equidistante aos pontos *A*, *B* e *C* é o ponto de coordenadas (50, 30). Portanto, a alternativa correta é a letra e). Para visualizar esta situação particular no GeoGebra, basta arrastar os pontos para as coordenadas dos pontos *A*, *B* e *C* dados, conforme Figura 6.

Figura 6 – Representação da situação-problema



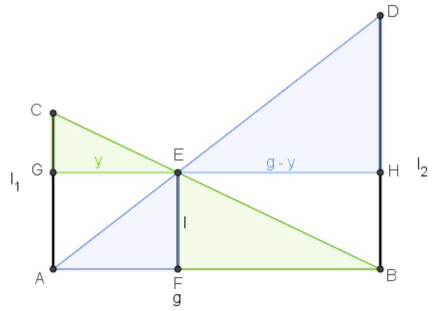
Fonte: Construção no GeoGebra.

3.2.3.2 Questão 172 Enem 2013 (caderno amarelo)

Questão Adaptada: O dono de um sítio pretende colocar uma haste de comprimento l metros entre dois postes de comprimentos l_1 e l_2 metros, todos perpendiculares ao plano do solo, de modo a apoiar dois cabos de aço que sustentarão estes postes. Os cabos ligam a base de um poste ao topo do outro poste. Qual deve ser o valor do comprimento da haste?

Resolução Algébrica: A fim de resolver a situação-problema, os comprimentos da haste *EF* e dos postes *AC* e *BD* são denotados por *l*, l_1 e l_2, respectivamente, conforme Figura 7, onde pode-se observar a semelhança entre os triângulos AGE e DHE, bem como entre os triângulos CGE e BHE.

Figura 7- Representação da situação-problema



Fonte: Construção no GeoGebra.

Como valem as congruências $C\hat{G}E \equiv B\hat{H}E, A\hat{G}E \equiv D\hat{H}E$ e os lados correspondentes são proporcionais, tem-se a semelhança entre os triângulos *CGE* e *EFB*, *AFE* e *EHD*.

Assim,

$$\frac{l_1 - l}{l} = \frac{y}{g - y} \tag{4}$$

$$\frac{l}{l_2 - l} = \frac{y}{g - y} \tag{5}$$

Igualando (4) e (5), tem-se $\frac{l_1 - l}{l} = \frac{l}{l_2 - l}$, que resulta $l = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$. Ou seja, a variação de l depende dos valores de l_1 e l_2.

Os conhecimentos mobilizados durante a resolução algébrica desta situação-problema são:

Semelhança de triângulos: dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Resolução no GeoGebra: A situação-problema solicita o valor do comprimento da haste *EF*, de forma variável. Para isso, sugere-se a construção de duas variáveis definidas em um determinado intervalo associadas a altura dos postes *AC* e *BD*. Assim no GeoGebra, usando o comando <*Controle Deslizante*>, clicar na tela e, na caixa de diálogo que abrirá, definir os valores mínimo e máximo para l_1, que representa a altura de um dos postes. Analogamente, para o controle deslizante de l_2. A seguir, usando o comando <*Ponto*> marcar os pontos *A* e *B*, que representam as bases dos postes no solo e usando o comando <*Segmento*>, construir o segmento de extremos *A* e *B*. Usando o comando <*Círculo dados Centro e Raio*> , clicando em *A* (centro da circunferência), abrirá uma caixa de diálogo para que o valor do raio seja inserido, que nesse caso é o controle deslizante l_1. Analogamente, para construir a circunferência centrada em *B* com raio l_2. Observa-se que os raios destas duas circunferências definirão as alturas dos postes. Para representar os postes, com o comando <*Reta Perpendicular*> inserir a reta *b*, perpendicular ao segmento *AB*, que passa pelo ponto *A*. Da mesma forma, para construir a reta *e* perpendicular a *AB*, passando pelo ponto *B*.

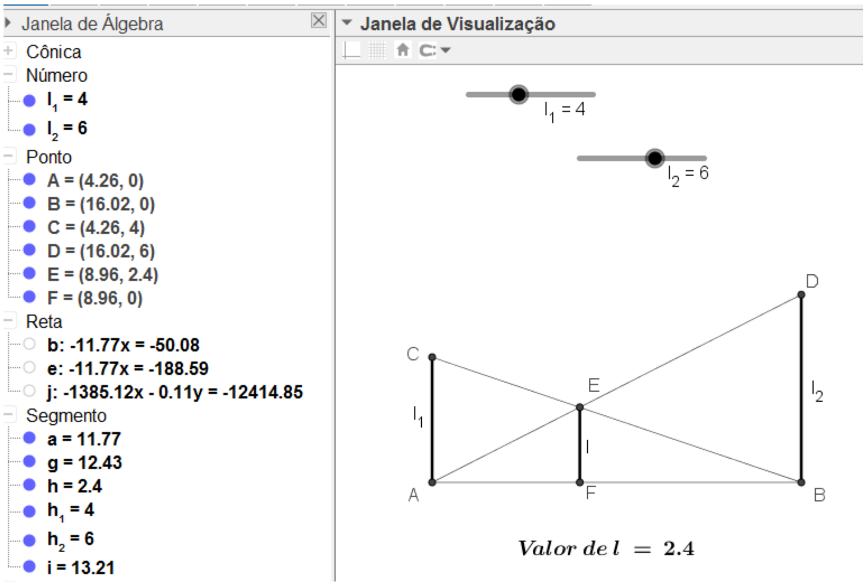
Com a comando <*Ponto de Interseção de Dois Objetos*> marque os pontos *C* e *D* de interseção entre a reta *b* e circunferência *c* e a reta *e* e a circunferência *d*. Com o comando <*Segmento*>, ligar os pontos *A* e *D* e *B* e *C*, que representam os cabos de aço, e com o comando <*Ponto de Interseção de Dois Objetos*> marcar o ponto *E* de interseção entre os segmentos *AD* e *BC.* Usando o comando <*Reta Perpendicular*> construir a reta perpendicular ao segmento *AB,* que passa por E e com o comando <*Ponto de Interseção de Dois Objeto*> definir o ponto *F* de intersecção entre a reta *j* e o segmento *AB*. Assim, com o comando <*Segmento*> marca-se o segmento *EF* que será a haste de sustentação solicitada. Ao movimentar os controles deslizantes pode-se observar o comportamento desta haste em função dos valores das alturas dos postes, como já destacado algebricamente. As Figuras 8 e 9 mostram o Protocolo de Construção e as Janelas de Álgebra e de Visualização associadas a situação-problema, respectivamente.

Figura 8- Protocolo de Construção

N.	Nome	Descrição
1	Número l_2	
2	Número l_1	
3	Ponto B	Ponto sobre EixoX
4	Ponto A	
5	Segmento a	Segmento [A, B]
6	Círculo c	Círculo com centro A e raio l_1
7	Reta b	Reta passando por A e perpendicular a a
8	Círculo d	Círculo com centro B e raio l_2
9	Reta e	Reta passando por B e perpendicular a a
10	Ponto C	Ponto de interseção de c, b
11	Segmento h_1	Segmento [C, A]
12	Segmento g	Segmento [C, B]
13	Ponto D	Ponto de interseção de d, e
14	Segmento h_2	Segmento [D, B]
15	Segmento i	Segmento [D, A]
16	Ponto E	Ponto de interseção de g, i
17	Reta j	Reta passando por E e perpendicular a a
18	Ponto F	Ponto de interseção de j, a
19	Segmento h	Segmento [E, F]
20	Texto texto1	"Valor \; de \; l \; = \; " + (LaTeX[h]) + ""

Fonte: Construção no GeoGebra.

Figura 9 - Janela de Álgebra e de Visualização



Fonte: Construção no GeoGebra.

Os conhecimentos mobilizados durante a resolução no GeoGebra desta situação-problema são:

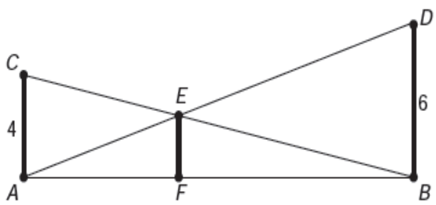
Circunferência: é um lugar geométrico definido por um centro e um raio.

Retas perpendiculares: Duas retas r e s são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam um ângulo reto.

Ponto de intersecção: ponto de concorrência de dois objetos.

A partir da resolução generalizada pode-se obter a solução da questão do ENEM, descrita a seguir:

Questão do ENEM: O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos *AC* e *BD* e a haste é representada pelo segmento *EF*, todos perpendiculares ao plano do solo, que é indicado pelo segmento de reta *AB*. Os segmentos *AD* e *BC* representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) 1 m b) 2 m c) 2,4 m d) 3 m e) $2\sqrt{6}$m

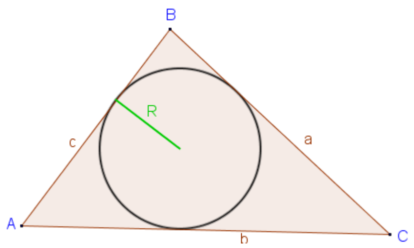
Resolução: Partindo da relação estabelecida em $l = \overline{EF} = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$, tem-se que $l = \frac{4.6}{4+6} = \frac{24}{10} = 2{,}4$. Ou seja, o valor do comprimento da haste EF é igual a 2,4 m. Portanto, a alternativa correta é a letra c). A partir da construção realizada no GeoGebra, este caso pode ser visualizado considerando os valores particulares de l_1 e l_2.

3.2.3.3 Questão 164 Enem 2010 (caderno azul – 1ª aplicação)

Questão Adaptada: Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são *a, b* e *c* centímetros e cuja altura é *h* centímetros. Tal peça deve ser vazada de maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente as suas faces laterais. Qual deve ser o raio da perfuração da peça?

Resolução Algébrica: Para a resolução da situação-problema será considerada a circunferência inscrita num triângulo *ABC* qualquer e determinado o seu raio R, conforme a Figura 10.

Figura 10 - Triângulo ABC



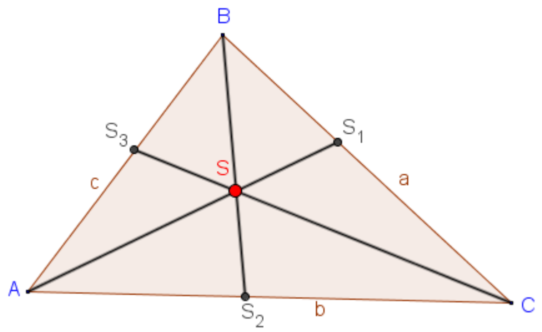
Fonte: Construção no GeoGebra.

Para tal resolução é necessário o seguinte resultado:

Dado um triângulo *ABC* qualquer de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então as três bissetrizes internas desse triângulo interceptam-se num mesmo ponto *S* que está a igual distância dos lados do triângulo.

Demonstração: Sejam $\overline{AS_1}$, $\overline{BS_2}$ e $\overline{CS_3}$ bissetrizes internas do triângulo *ABC* relativas aos vértices *A*, *B* e *C*, respectivamente (Figura 11). Mostrar que $\overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = S$ e, neste caso, $d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$.

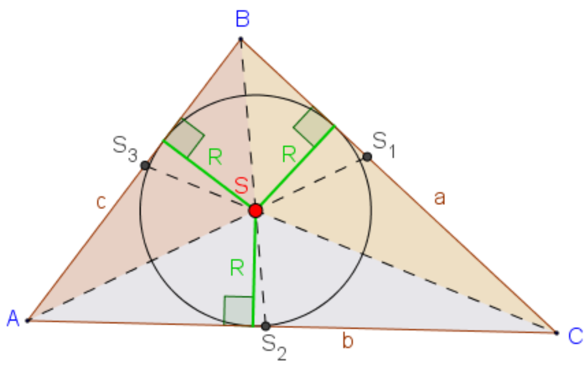
Figura 11 - Construção das bissetrizes do triângulo *ABC*



Fonte: Construção no GeoGebra.

Seja S o ponto tal que $\overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = S$. Como $S \in \overline{BS_2}$ tem-se que $d_{S,a} = d_{S,c}$. Analogamente, como $S \in \overline{CS_3}$ tem-se que $d_{S,a} = d_{S,b}$ e pela transitividade $d_{S,b} = d_{S,c}$. Ou seja, $S \in \overline{AS_1}$. Logo, $\overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = S$ e $d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$, representado por *R* na Figura 12.

Figura 12 - Representação da circunferência inscrita no triângulo *ABC*



Fonte: Construção no GeoGebra.

Observando a Figura 12, a área do triângulo *ABC* pode ser vista como a soma das áreas A_1, A_2 e A_3 dos triângulos *SAC*, *SCB* e *SBA*, respectivamente, que possuem altura *R*, correspondendo ao raio da circunferência inscrita. Ou seja,

$$A_{\Delta ABC} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= \frac{aR}{2} + \frac{bR}{2} + \frac{cR}{2}$$

$$= \frac{(a+b+c)}{2} R$$

$$= pR,$$

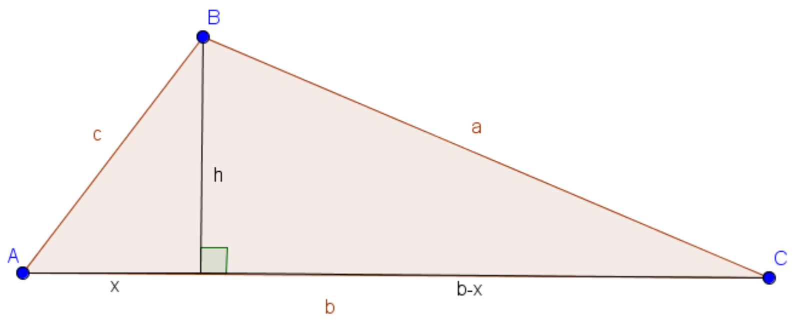
em que $p = \frac{perímetro}{2} = \frac{a+b+c}{2}$ é o semi-perímetro do triângulo *ABC*.

Logo,

$$A_{\Delta ABC} = pR \tag{6}$$

Por outro lado, considerando um triângulo *ABC* qualquer representado na Figura 13, sua área é dada por $A_{\Delta ABC} = \frac{bh}{2}$.

Figura 13 - Triângulo *ABC* qualquer



Fonte: Construção no GeoGebra.

Para determinar a altura *h* do triângulo *ABC* são consideradas as relações:

$$a^2 = h^2 + (b-x)^2 \implies h^2 = a^2 - (b-x)^2 \tag{7}$$

$$c^2 = h^2 + x^2 \implies h^2 = c^2 - x^2 \tag{8}$$

Igualando (7) e (8) tem-se:

$$a^2 - (b-x)^2 = c^2 - x^2$$

$$a^2 - b^2 + 2bx - x^2 = c^2 - x^2$$

$$2bx = c^2 + b^2 - a^2$$

$$x = \frac{c^2+b^2-a^2}{2b} \tag{9}$$

Substituindo (9) em (8):

$$h^2 = c^2 - \frac{(c^2+b^2-a^2)^2}{4b^2}$$

$$4b^2h^2 = 4b^2c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2$$

$$= (2bc)^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2$$
$$= [2bc + (c^2 + b^2 - a^2)][2bc - (c^2 + b^2 - a^2)]$$
$$= [2bc + c^2 + b^2 - a^2][2bc - c^2 - b^2 + a^2]$$
$$= [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b + c)^2]$$
$$= [(b + c + a)(b + c - a)][(a - b + c)(a + b - c)]$$

Ou,

$$4b^2h^2 = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \tag{10}$$

Como $a + b + c = 2p$, resultam as relações:

$$-a + b + c = -a + b + c - a + a = 2p - 2a = 2(p - a),$$
$$a - b + c = a + c - b + b - b = 2p - 2b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = a + b - c + c - c = 2p - 2c = 2(p - c),$$

Substituindo em (10), resulta

$$4b^2h^2 = 16p(p - a)(p - b)(p - c), \tag{11}$$

implicando em

$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \tag{12}$$

Assim, a área do triângulo *ABC* da Figura 4 é dada por

$$A_{\Delta ABC} = \frac{base\,.\,h}{2} = \frac{b}{2}.\frac{2}{b}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

ou

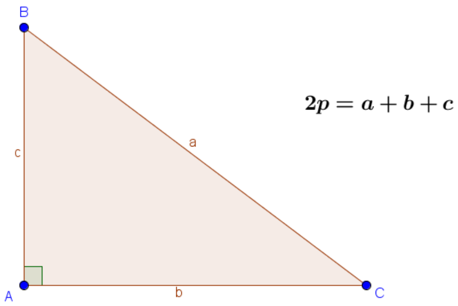
$$A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \tag{13}$$

Portanto, comparando (1) e (8), tem-se que o raio da circunferência inscrita no triângulo *ABC* é:

$$R = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-C)}{p}}\,. \tag{14}$$

Como um caso particular da situação anterior, podemos analisar um triângulo retângulo representado pela Figura 14.

Figura 14 - Representação de um triângulo retângulo *ABC*



Fonte: Construção no GeoGebra.

Das relações (11) e (13) resulta

$$A_{\Delta ABC}{}^2 = \frac{1}{4}b^2h^2$$

ou

$$A_{\Delta ABC} = \frac{bh}{2}.$$

Observando a Figura 15, tem-se $h = c$ e, neste caso, $A = \frac{bc}{2}$, conforme esperado.

Os conhecimentos mobilizados durante a resolução algébrica desta situação-problema são:

Bissetriz interna de um triângulo: é o segmento com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ângulo deste vértice em dois ângulos congruentes.

Área: é um número real positivo associado a uma região limitada.

Perímetro: é a medida do comprimento do contorno de uma região limitada.

Semiperímetro: é a metade do perímetro de uma região limitada.

Altura de um triângulo: é um segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado.

Resolução no GeoGebra: A situação-problema solicita o valor do raio de perfuração da peça. Para isso, resumidamente, sugere-se a construção de um triângulo *ABC* qualquer no GeoGebra e com o comando <*Bissetriz*> constroem-se as retas bissetrizes internas do triângulo *ABC* e o ponto de intersecção *S* entre elas. Com o comando <*Reta Perpendicular*> marcam-se as alturas dos triângulos *SAC*, *SCB* e *SBA* e com <*Circunferência*> é construída a circunferência inscrita no triângulo *ABC*, cujo raio R é o valor solicitado no problema.

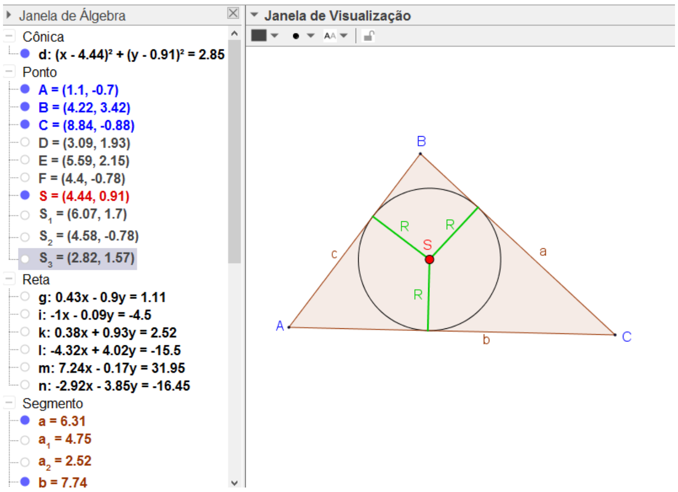
As Figuras 15 e 16 mostram o Protocolo de Construção e as Janelas de Álgebra e de Visualização associadas a situação-problema, respectivamente.

Figura 15 – Protocolo de Construção

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		A = (2.38, -1.04)
2	Ponto B		B = (5.5, 3.08)
3	Ponto C		C = (10.12, -1.22)
4	Triângulo pol1	Polígono A, B, C	pol1 = 16.23
5	Reta f	Bissetriz de b, c	f: -0.9x - 0.43y = -1.69
5	Reta g	Bissetriz de b, c	g: 0.43x - 0.9y = 1.97
6	Reta h	Bissetriz de c, a	h: -0.09x + 1y = 2.59
6	Reta i	Bissetriz de c, a	i: -1x - 0.09y = -5.75
7	Reta j	Bissetriz de b, a	j: 0.93x - 0.38y = 9.83
7	Reta k	Bissetriz de b, a	k: 0.38x + 0.93y = 2.68
8	Ponto S_3	Ponto de interseção de k, c	S_3 = (4.1, 1.23)
9	Ponto S_1	Ponto de interseção de g, a	S_1 = (7.35, 1.36)
10	Ponto S_2	Ponto de interseção de i, b	S_2 = (5.86, -1.12)
11	Segmento t	Segmento [S_3, C]	t = 6.5
12	Segmento e	Segmento [S_1, A]	e = 5.52
13	Segmento f_1	Segmento [S_2, B]	f_1 = 4.22
14	Ponto S	Ponto de interseção de g, i	S = (5.72, 0.57)
15	Triângulo pol2	Polígono A, S, C	pol2 = 6.54
16	Triângulo pol3	Polígono B, S, C	pol3 = 5.33
17	Triângulo pol4	Polígono B, S, A	pol4 = 4.36
18	Reta l	Reta passando por S e perpendicular a a	l: -4.32x + 4.02y = -22.4
19	Reta m	Reta passando por S e perpendicular a b	m: 7.24x - 0.17y = 41.27
20	Reta n	Reta passando por S e perpendicular a c	n: -2.92x - 3.85y = -18.88
21	Ponto D	Ponto de interseção de n, c	D = (4.37, 1.59)
22	Ponto E	Ponto de interseção de l, a	E = (6.87, 1.81)
23	Ponto F	Ponto de interseção de m, b	F = (5.68, -1.12)
24	Segmento p	Segmento [D, S]	p = 1.69
25	Segmento q	Segmento [S, E]	q = 1.69
26	Segmento r	Segmento [S, F]	r = 1.69
27	Ângulo α	Ângulo entre B, E, S	α = 90°
28	Ângulo β	Ângulo entre S, D, B	β = 90°
29	Ângulo γ	Ângulo entre S, F, A	γ = 90°
30	Círculo d	Círculo por D com centro S	d: $(x - 5.72)^2 + (y - 0.57)^2 = 2.85$

Fonte: Construção no GeoGebra.

Figura 16 – Janela de Álgebra e de Visualização



Fonte: Construção no GeoGebra.

Os conhecimentos mobilizados durante a resolução no GeoGebra desta situação-problema são:

Bissetriz interna de um triângulo: é o segmento com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ângulo deste vértice em dois ângulos congruentes.

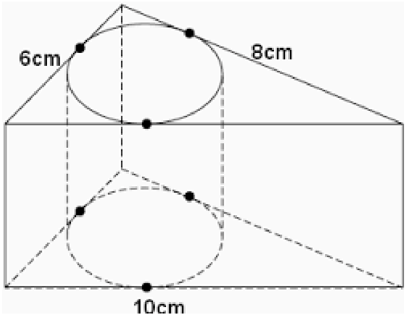
Ponto de intersecção: ponto de concorrência de dois objetos.

Incentro: ponto de interseção das três bissetrizes internas de um triângulo.

Circunferência inscrita em um triângulo: é a circunferência com centro no incentro do triângulo e raio definido pelo segmento de reta perpendicular, com extremidades no incentro e no ponto de interseção deste segmento com o lado do triângulo.

A partir da resolução generalizada pode-se obter a solução da questão do ENEM, descrita a seguir:

Questão do ENEM: Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente as suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a

a) 1 cm. b) 2 cm. c) 3 cm. d) 4 cm. e) 5 cm.

Resolução: Pelas dimensões da base do prisma, pode-se concluir que o triângulo é retângulo, pois $6^2 + 8^2 = 10^2$. Logo, sua área é A= $\frac{6.8}{2} = 24$ e o semi-perímetro é $p = 12$. Assim, por (6) tem-se $R = \frac{A}{p} = \frac{24}{12} = 2$. Portanto, o raio da perfuração da peça é 2 cm, ou seja, a alternativa correta é a letra b). A partir do arquivo do GeoGebra construído, é possível visualizar a situação particular deste problema.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo serão descritos e analisados os dados obtidos nos minicursos, considerando os questionários iniciais, a resolução das situações-problema e o questionário final referente às percepções dos professores e/ou futuros professores de Matemática, sujeitos da pesquisa. Em relação à resolução das situações-problema, a análise foi realizada a partir da resolução manuscrita das situações propostas e dos arquivos do GeoGebra elaborados pelos sujeitos da pesquisa, bem como dos apontamentos realizados pela pesquisadora ao longo do desenvolvimento dos minicursos.

As situações-problema que foram inicialmente apresentadas aos participantes do minicurso da V EIEMAT, foram apresentadas posteriormente aos participantes do minicurso da XV SAI, respeitando o mesmo formato e ideias gerais, salvo algumas adequações necessárias, em virtude do tempo disponível para o segundo minicurso e alguns novos questionamentos da pesquisadora, os quais serão detalhados durante a explanação do segundo minicurso. É importante destacar que o minicurso da V EIEMAT se mostrou fundamental por levantar subsídios metodológicos para a elaboração e aplicação da proposta junto aos acadêmicos no minicurso da XV SAI. A proposta das situações-problema pautou-se na reflexão, análise, discussão, compartilhamento de ideias e concepções sobre os conhecimentos prévios dos participantes e o uso do GeoGebra como potencializador do resgate ou aquisição de conhecimentos matemáticos.

4.1 MINICURSO NA V EIEMAT

Neste minicurso, com quatro horas de duração, foram discutidas três questões adaptadas de provas do ENEM relacionadas a conteúdos matemáticos de Geometria, mais especificamente, os pontos notáveis incentro e circuncentro de um triângulo e as relações de semelhança de triângulos, em geral vistos no 8º ano do Ensino Fundamental. Assim, buscou-se resgatar esses conceitos e propriedades dos triângulos em uma perspectiva dinâmica e significativa, tendo o GeoGebra como instrumento de mediação e interação com os conteúdos trabalhados.

4.1.1 Questionário inicial

Nove participantes, identificados como Part. 1, Part. 2 e assim, sucessivamente até Part. 9 responderam o questionário inicial (Apêndice B.1), sendo dois estudantes de Licenciatura em Matemática, três estudantes de mestrado em Educação Matemática e quatro professores de matemática da Educação Básica (dois mestres e dois cursando mestrado em Educação Matemática). Referente à pergunta sobre conhecimento e uso de TIC, seis declararam já ter utilizado e três não. Em relação a ter experiência com o GeoGebra, sete declararam que sim e dois que não. Observando as respostas às duas perguntas, nota-se que um dos participantes afirma ter experiência com o GeoGebra, embora não com TIC, mostrando uma contradição ou desconhecimento do conceito de TIC.

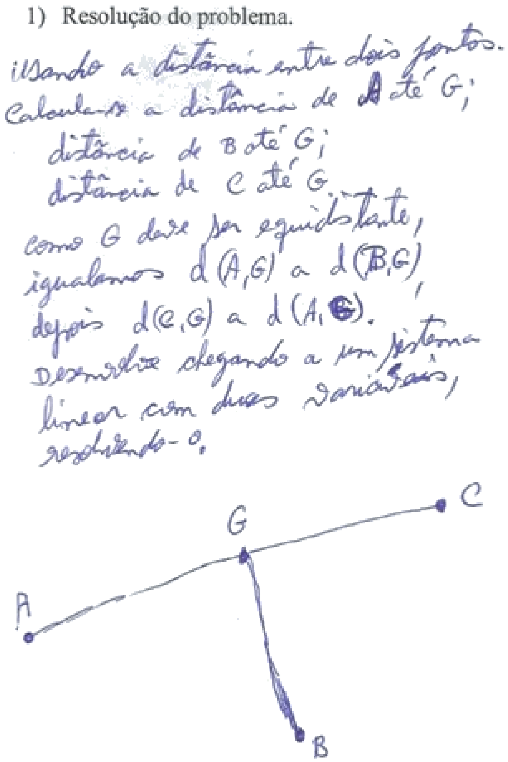
4.1.2 Questões do ENEM

As três situações-problema adaptadas foram apresentadas sequencialmente aos participantes através de material impresso (APÊNDICE C.1), onde inicialmente era solicitado que os mesmos resolvessem com lápis e papel e enunciassem os conhecimentos matemáticos necessários nessa resolução. Em seguida, foi solicitado que resolvessem a situação proposta no GeoGebra e, de forma análoga, enunciassem os conhecimentos matemáticos utilizados.

4.1.2.1 Questão 168 ENEM 2013 (caderno amarelo) – Adaptada

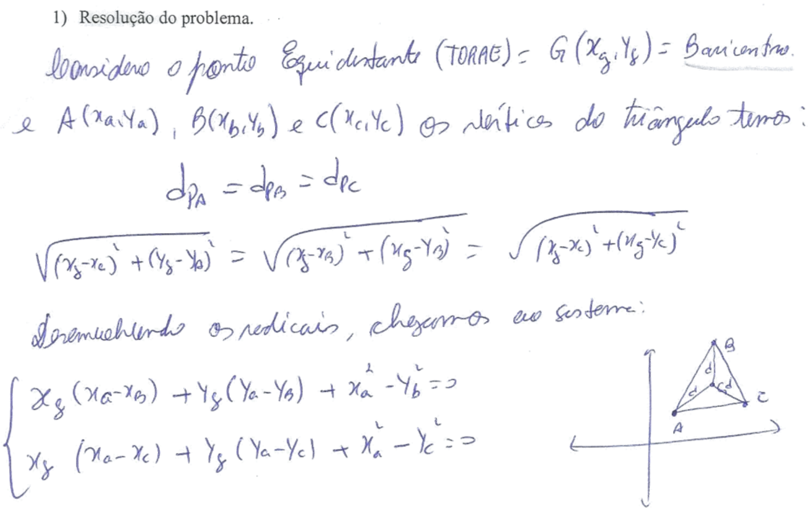
Analisando as respostas relativas aos conteúdos demandados para a resolução algébrica da situação-problema, seis participantes citaram a distância entre dois pontos, ponto equidistante e a resolução de sistemas lineares, como pode ser observado no recorte da resolução do participante 6, Figura 17. Um participante citou a distância entre dois pontos e também a equação e elementos da circunferência, como raio, centro e pontos pertencentes a ela, os quais não são necessários para a resolução algébrica. Ainda, dois participantes citaram o ponto notável baricentro, erroneamente considerado como sendo o ponto equidistante aos vértices do triângulo *ABC*. Na Figura 18, é apresentado o recorte de um destes participantes, cuja citação foi induzida pelo esboço de um triângulo equilátero, no qual baricentro e circuncentro coincidem, de fato. Tal atribuição mostra a fragilidade dos conceitos subsunçores necessários à resolução desta questão.

Figura 17 – Recorte da resolução algébrica do Part. 6 na questão 168 - Adaptada



Fonte: Registros do Part. 6.

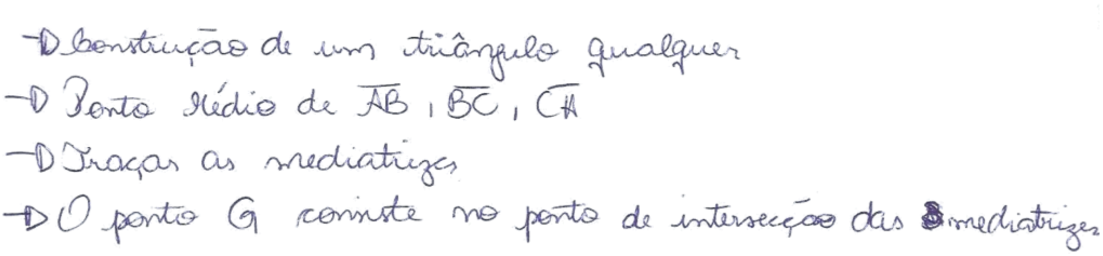
Figura 18 - Recorte da resolução algébrica do Part. 2 na questão 168 – Adaptada



Fonte: Registros do Part. 2.

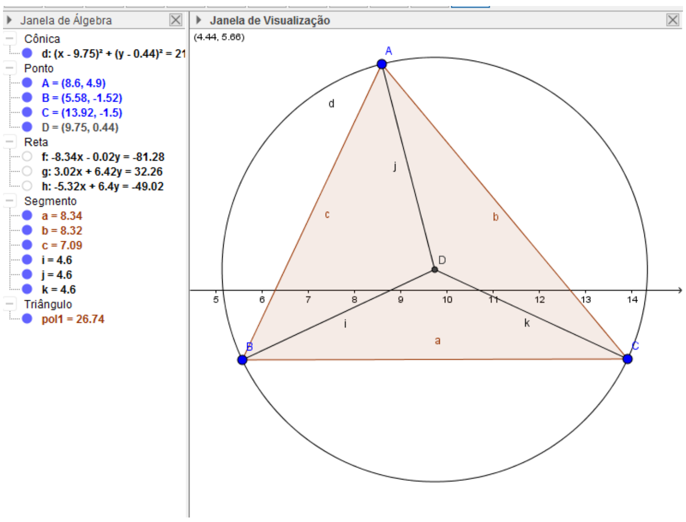
Quanto a atividade que solicita a identificação geométrica da posição exata para a construção da torre de transmissão, usando o GeoGebra, a Figura 19 mostra a descrição da resolução do participante 9 e a Figura 20 a construção no GeoGebra do participante 4.

Figura 19 - Recorte da descrição da resolução no GeoGebra do Part. 9 na questão 168 – Adaptada


→ Construção de um triângulo qualquer
→ Ponto Médio de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$
→ Traçar as mediatrizes
→ O ponto G consiste no ponto de intersecção das mediatrizes

Fonte: Registros do Part. 9.

Figura 20 - Construção no GeoGebra do Part. 4 na questão 168 - Adaptada



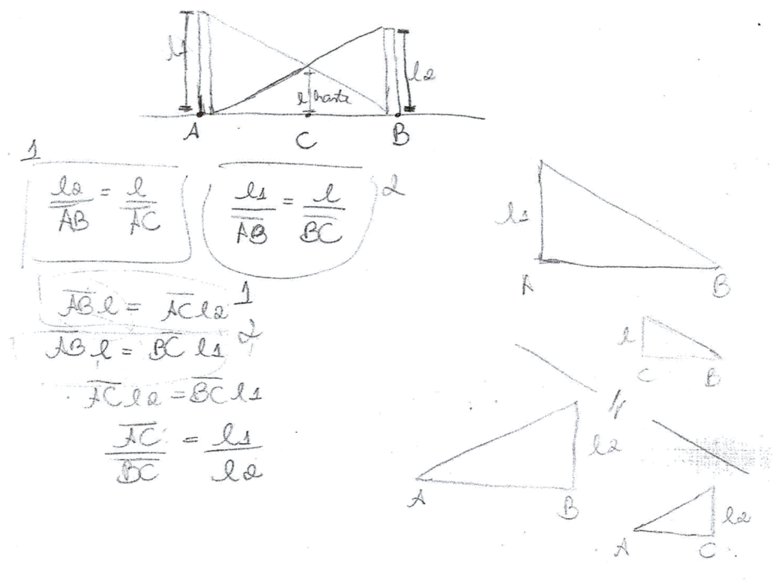
Fonte: Captura da tela do GeoGebra da construção realizada pelo Part. 4.

Porém, observa-se que os conteúdos retas mediatrizes e seu ponto de intersecção, demandados na resolução não estão explicitados na maioria dos manuscritos dos participantes, onde quatro trazem a distância entre pontos, conteúdo não necessário na resolução no GeoGebra, mas apenas para verificação posterior da propriedade de equidistância. Durante esta atividade, vários conceitos foram externados pelos participantes acerca do conteúdo matemático pontos notáveis de um triângulo. O primeiro citado foi o baricentro, cuja confusão deu-se, principalmente, pela apropriação não significativa dos conceitos de mediatriz e mediana que possuíam. Indagados sobre os demais pontos notáveis de um triângulo, aos poucos foram recordando das denominações incentro, circuncentro e baricentro e discutindo as condições de existência de cada um destes, diferenciando-os e determinando o ponto notável adequado a solução da questão proposta. Tal diferenciação foi sendo estruturada através da possibilidade visual de comparação entre os diferentes pontos no GeoGebra, potencializando a aquisição dos significados e a conexão entre os conhecimentos.

4.1.2.2 Questão 172 ENEM 2013 (caderno amarelo) – Adaptada

Para a resolução algébrica desta questão percebe-se que os sujeitos da pesquisa buscaram requisitar seus conhecimentos prévios sobre semelhança de triângulos e respectivas proporcionalidades, os quais para cinco participantes não foram suficientemente significativos para concluir a resolução da situação-problema, conforme o recorte da resolução do participante 9, mostrado na Figura 21. Apenas três participantes concluíram a resolução deste problema, sendo que um deles citou a congruência de triângulos como conhecimento prévio requisitado, embora tenha utilizado a semelhança e um participante não escreveu nada.

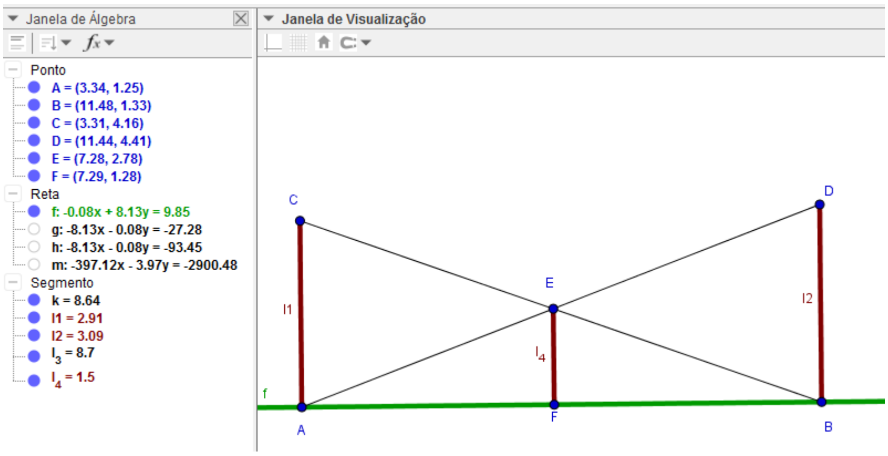
Figura 21 - Recorte da resolução algébrica do Part. 9 na questão 172 - Adaptada



Fonte: Registros do Part. 9.

Quanto a resolução desta situação-problema no GeoGebra, inicialmente a maioria dos participantes demonstraram grandes dificuldades em reproduzi-la, de maneira que a construção mantivesse suas propriedades ao movimentar os pontos livres. Tal situação foi sendo discutida até a compreensão das relações matemáticas que precisavam ser preestabelecidas a fim de garantir a dinamicidade da construção. Em relação aos conteúdos matemáticos enunciados pelos participantes, a maioria citou retas paralelas e perpendiculares, ponto de intersecção entre retas e circunferência. A Figura 22 mostra a construção geométrica realizada pelo participante 5.

Figura 22 - Construção no GeoGebra do Part. 5 na questão 172 - Adaptada

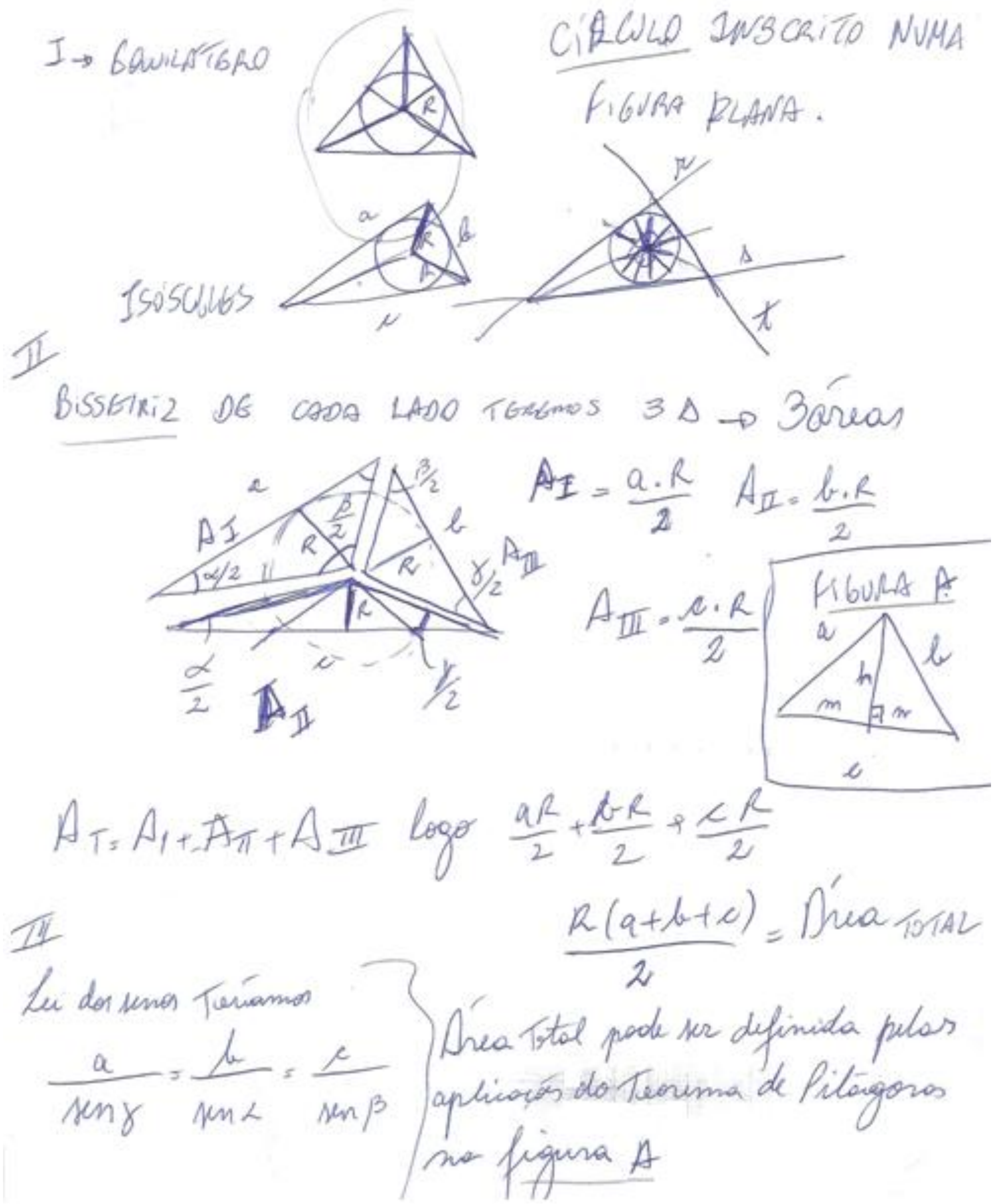


Fonte: Captura da tela do GeoGebra da construção realizada pelo Part. 5.

4.1.2.3 Questão 164 ENEM 2010 (caderno azul – 1ª aplicação) – Adaptada

Durante a resolução algébrica desta questão percebeu-se que os cinco participantes buscaram requisitar seus conhecimentos prévios sobre decomposição do triângulo em três triângulos menores, cuja soma de suas áreas é equivalente à área do triângulo inicial. Para a decomposição, utilizaram as retas bissetrizes de um triângulo, cujo ponto de intersecção é o centro da circunferência inscrita. Embora a maioria destes participantes não tenha concluído a resolução mostrando o valor do raio, indicaram a sua obtenção, como mostra o recorte da resolução do participante 4 na Figura 23. Um participante citou o conteúdo de bissetrizes, mas não resolveu a questão e três não escreveram nada.

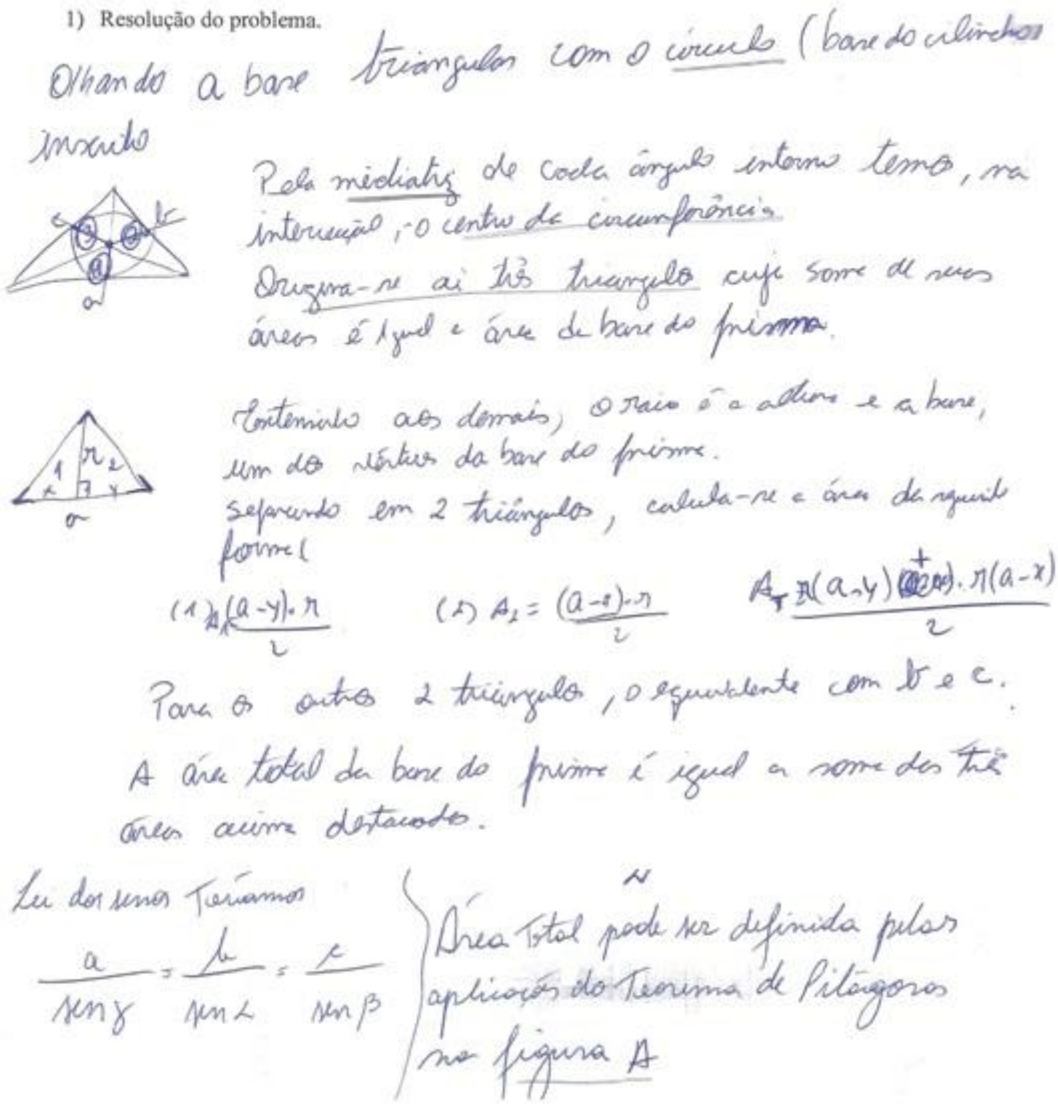
Figura 23 - Recorte da resolução algébrica do Part. 4 na questão 164 – Adaptada



Fonte: Registros do Part. 4.

Analisando os registros dos participantes, observa-se que alguns ainda confundem os conceitos de retas bissetrizes e mediatrizes, embora tenham indicado corretamente a resolução através de retas bissetrizes. Também, chama a atenção a apropriação não significativa dos conceitos de circunferência e círculo, sendo este último citado em vários registros, como mostra o recorte do participante 2 na Figura 24.

Figura 24 - Recorte da resolução algébrica do Part. 2 na questão 164 – Adaptada


1) Resolução do problema.

Olhando a base triangular com o círculo (base do cilindro inscrito

Pela mediatriz de cada ângulo interno temos, na intersecção, o centro da circunferência.
Origina-se aí três triângulos cuja soma de suas áreas é igual a área da base do prisma.

Contemplando aos demais, o raio é a altura e a base, um dos vértices da base do prisma.
Separando em 2 triângulos, calcula-se a área da seguinte forma (

(1) $A_1 = \frac{(a-y) \cdot r}{2}$ (2) $A_2 = \frac{(a-x) \cdot r}{2}$ $A_T = \frac{r(a-y) + r(a-x)}{2}$

Para os outros 2 triângulos, o equivalente com b e c.

A área total da base do prisma é igual a soma das três áreas acima destacadas.

Lei dos senos Teríamos

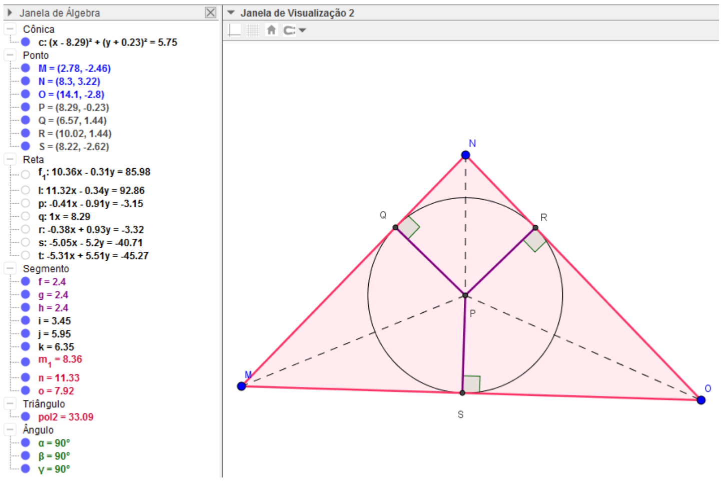
$\frac{a}{sen\,\gamma} = \frac{b}{sen\,\alpha} = \frac{c}{sen\,\beta}$

Área Total pode ser definida pelas aplicações do Teorema de Pitágoras na figura A

Fonte: Registros do Part. 2.

Durante a resolução no GeoGebra, os diálogos referentes aos pontos notáveis de um triângulo retornaram e as discussões se fizeram mais significativas quando reproduzidos e verificados no GeoGebra. A Figura 25 mostra a construção desta situação-problema pelo participante 5. Novamente, observa-se na resolução no GeoGebra a não apropriação significativa dos conceitos de circunferência e círculo. Acredita-se que isso tenha ocorrido, pois o GeoGebra utiliza o comando <*Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*>.

Figura 25 - Construção no GeoGebra do Part. 5 na questão 164 - Adaptada



Fonte: Captura da tela do GeoGebra da construção realizada pelo Part. 5.

4.1.3 Questionário final

Ao final da realização das atividades, foi aplicado um questionário (Apêndice D), com o objetivo de levantar as percepções dos participantes quanto ao GeoGebra proporcionar o resgate de conhecimentos prévios e/ou a aquisição de novos conhecimentos na resolução das situações-problema propostas.

Em relação a pergunta sobre o GeoGebra auxiliar no resgate de *conhecimentos matemáticos prévios*, os sujeitos da pesquisa relataram:

Part. 01 Sim. A utilização do software GeoGebra possibilita resgatar e utilizar diversos conhecimentos matemáticos, principalmente para que as propriedades das construções se mantenham.

Part. 02 Além de proporcionar o resgate, o GeoGebra exercita a visualização, a relação entre leitura e situação real. Com sua execução, o GeoGebra proporciona a lembrança de conceitos matemáticos necessários para a resolução.

Part. 03 Não totalmente. Pois há conteúdos que não são necessários para resolver no GeoGebra, mas são necessários ao resolver algebricamente. Entretanto, para as resoluções apenas no software a construção ajuda sim, a resolver.

Part. 04 Sim, na medida em que são verificadas as condições e conceitos de cada exemplo.

Part. 05 Sim. Foi necessário relembrar alguns conceitos tanto para a resolução no GeoGebra quanto na resolução algébrica.

Part. 06 Sim, ainda mais aliando a isso a ideia de desenvolver a resolução algébrica primeiro.

Part.07 Penso que sim, pois estou fora da sala de aula há 3 anos e foi muito bom relembrar conceitos que, a principio, parecem fáceis, mas no fundo fazem você pensar em outros aspectos ou conteúdos, que estão interligados com aqueles conteúdos propostos.

Part.08 Sim. Para ser possível construir e modificar sem perder as propriedades.

Part. 09 Sim. Pois sem o GeoGebra houve uma tendência a utilizar apenas conhecimentos algébricos, mas ao construir as atividades no software foi possível resgatar conceitos para além do algébrico valorizando o pensamento geométrico.

Em relação a pergunta sobre o GeoGebra auxiliar na aquisição e/ou compreensão de *novos conhecimentos matemáticos,* os sujeitos da pesquisa relataram:

Part. 01 Com certeza, o uso do GeoGebra auxilia na construção e compreensão dos conhecimentos matemáticos.

Part. 02 Sim, no momento que relaciona-se novos conhecimentos com a utilização de comandos os quais desconhecia anteriormente. Sua utilização, em relação aos conceitos matemáticos, é fundamental para facilitar a compreensão e ligação entre conceitos.

Part. 03 Sim. Especialmente na compreensão dos novos conhecimentos, também pelo aspecto visual (representação).

Part. 04 Sim, pois na primeira abordagem a álgebra prevalece. A utilização do software favorece a visualização, representação do objeto e generaliza.

Part. 05 Sim. O uso do GeoGebra auxiliou na melhor visualização do problema e também na compreensão.

Part. 06 Sim, pois as ferramentas possibilitam um repensar na forma de se resolver o problema. Além de poder ver a generalização da construção geométrica.

Part. 07 Sim. Principalmente ao utilizar o GeoGebra.

Part. 08 Sim. Exemplificando fórmulas e teoremas.

Part. 09 Com certeza. Pois o fato do GeoGebra ser dinâmico faz-se necessário utilizar conceitos que não seriam mobilizados sem ele. Por exemplo, para o desenho no papel a atividade é estática, mas no software é imprescindível o uso de retas paralelas, perpendiculares, mediatrizes, etc, de forma a manter as propriedades da figura.

A partir das respostas aos dois questionamentos e das observações dos diálogos surgidos durante a realização das atividades, percebe-se que efetivamente o GeoGebra proporcionou o regate de conhecimentos prévios como circuncentro, incentro e discussões relacionadas a outras definições como baricentro. Quanto a utilização do GeoGebra, a maioria dos participantes tiveram dificuldades em utilizá-lo, alguns por não conhecê-lo e outros por não saber quais as ferramentas eram necessárias para as construções geométricas. Tanto que alguns participantes esperavam que o minicurso oferecesse uma abordagem introdutória do *software*.

Ao final da realização deste minicurso, constatou-se que o tempo de duração do minicurso para aplicação das três questões foi insuficiente, tendo como consequência a obtenção de dados incompletos de alguns participantes, o que prejudicaria a análise devido ao pequeno número de participantes. Desta forma, optou-se por ofertar um segundo minicurso, junto aos estudantes de licenciatura e bacharelado em Matemática da UFSM na XV SAI.

4.2 MINICURSO NA XV SAI

Para o desenvolvimento deste minicurso foram escolhidas as questões 168 - ENEM 2013 e 164 - ENEM 2010, dentre as três trabalhadas no minicurso da V EIEMAT, devido ao tempo de três horas para a realização do mesmo e estas duas questões envolverem os conteúdos matemáticos sobre pontos notáveis de um triângulo, mais especificamente, incentro e circuncentro, e a possibilidade de proceder a comparação destes elementos em uma mesma construção geométrica. A fim de tornar sua aprendizagem significativa, buscou-se resgatar esses conceitos e propriedades em uma perspectiva dinâmica e potencialmente significativa, tendo apoio do GeoGebra como instrumento de mediação e interação.

4.2.1 Questionário inicial

Vinte e um participantes, identificados como Part. 10, Part.11 e assim, sucessivamente até Part. 30 responderam o questionário inicial (Apêndice B.2), sendo dezesseis estudantes de licenciatura em Matemática da UFSM, destes cinco do curso noturno e onze do diurno, e cinco estudantes de bacharelado em Matemática da UFSM. Referente ao questionamento sobre conhecimento e uso de TIC, treze declararam ter experiências com TIC e citaram GeoGebra, Tex/Latex, Excel, Word, GrafEq, Winplot e Sketchometry. Ainda, em relação as TIC, os alunos da licenciatura citaram as disciplinas de Recursos Tecnológicos no Ensino da Matemática I e II, sendo que nove já cursaram as duas disciplinas e sete estão cursando a primeira.

Quando questionados sobre já ter experiência com o uso do GeoGebra, dezenove declararam ter e dois não. Destes, quinze licenciandos atribuíram essa experiência às disciplinas de Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática I e II e um declarou não ter experiência apesar de já ter cursado a disciplina de Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática I. Dos bacharelandos, um declarou ter usado o GeoGebra nas disciplinas de Geometria Plana e Espacial, dois em minicursos realizados durante a graduação, um em experiência autônoma e um não tem experiência.

A partir destes números, percebe-se a não apropriação significativa do conceito de TIC, quando comparados o número de alunos que afirmam utilizar o GeoGebra (dezenove) e de alunos que usam TIC (treze), acrescentando o fato de todos usarem celulares, computadores, televisão, internet dentre outras tecnologias presentes no dia a dia, que são caracterizadas como TIC. Desta forma, há necessidade dos três conceitos inter-relacionados TIC, recurso tecnológico e GeoGebra, serem melhor trabalhados em programas de formação inicial e continuada de professores, com vistas a uma melhor compreensão e utilização como ferramenta didática.

4.2.2 Questões do ENEM

As duas situações-problema do ENEM foram apresentadas aos participantes através de material impresso (Apêndice C.2), sequencialmente em três partes, onde na primeira parte era solicitado que resolvessem a questão real do ENEM com lápis e papel. Na segunda parte, foi solicitado que resolvessem a situação-problema adaptada e enunciassem os conhecimentos matemáticos necessários nesta resolução. E na terceira parte, foi solicitado que utilizassem o GeoGebra para resolvê-la e, de forma análoga, enunciassem os conhecimentos matemáticos utilizados nesta resolução.

4.2.2.1 Questão 168 ENEM 2013 (caderno amarelo)

Inicialmente foi entregue aos participantes a questão apresentada na prova do ENEM, para que resolvessem da maneira que achassem mais apropriada. O Quadro 1 mostra o número de acertos/erros nessa questão, considerando apenas a alternativa marcada.

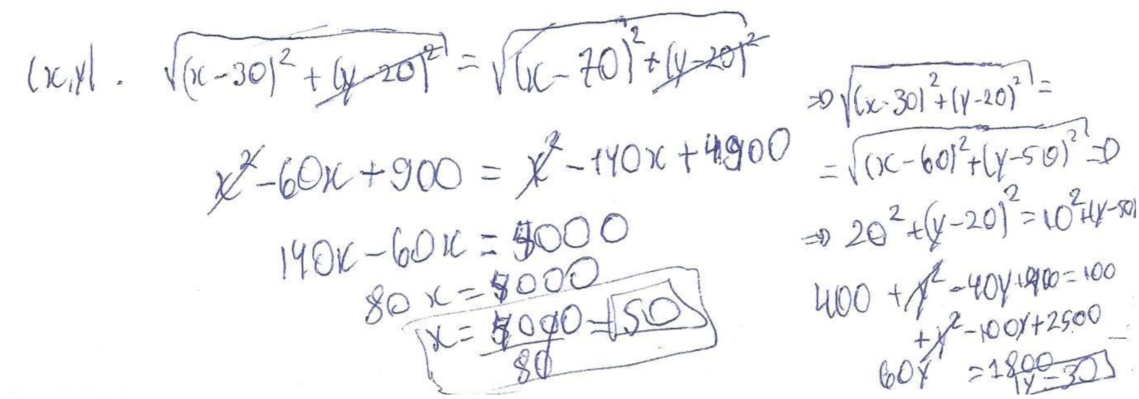
Quadro 1 - Acertos/erros referentes a questão 168 ENEM 2013 (caderno amarelo)

Participantes	**Questão 168 ENEM 2013 (caderno amarelo)**	
	Acertos	**Erros**
Licenciatura	11	5
Bacharelado	4	1

Fonte: Registros dos participantes do minicurso da XV SAI.

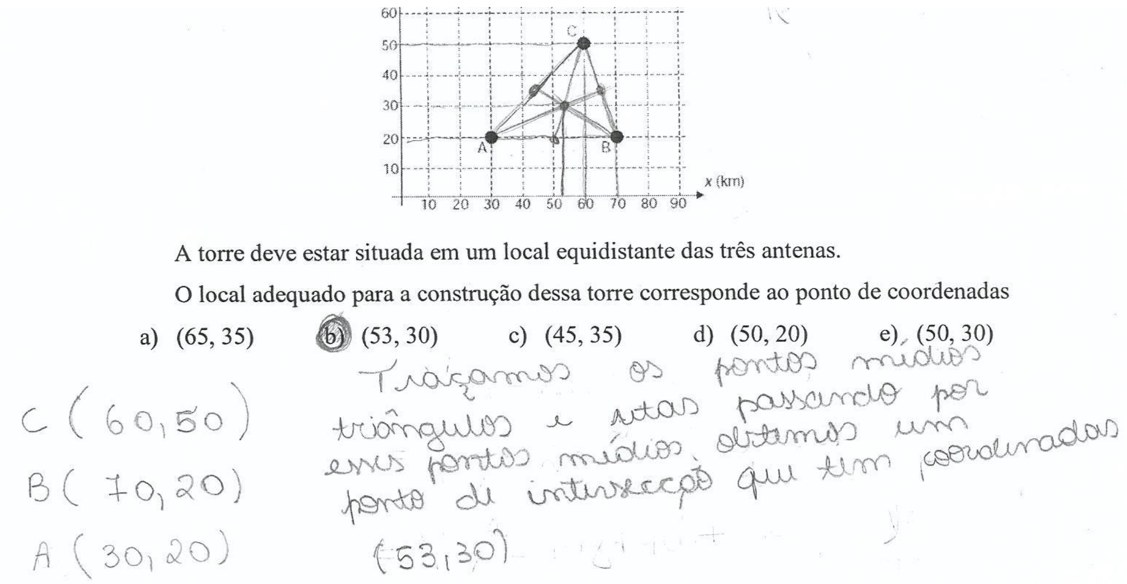
Do Quadro 1, conclui-se que 80% dos bacharelandos e 68,75% dos licenciandos acertaram essa questão. Quanto a forma de resolução da situação-problema, oito utilizaram os conteúdos matemáticos de equidistância e resolução de sistemas lineares, cinco tentaram resolve-la de forma equivocada usando o ponto notável baricentro, seis resolveram por eliminação de alternativas e dois não resolveram. As Figuras 26 e 27 mostram os distintos caminhos utilizados, sendo que a última se refere a uma resolução incorreta, pois o participante pensou em baricentro para resolvê-la.

Figura 26 - Recorte da resolução do Part. 27 na questão 168



Fonte: Registros do Part. 27.

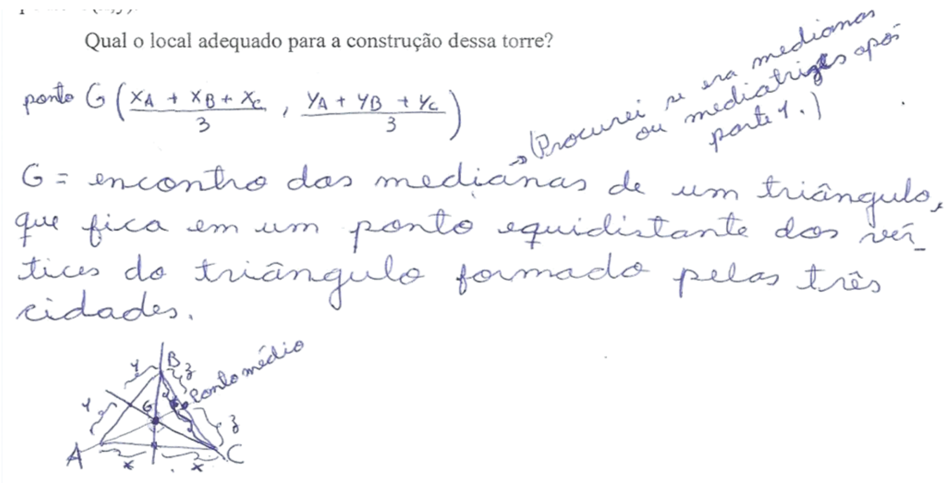
Figura 27 - Recorte da resolução do Part. 16 na questão 168



Fonte: Registros do Part. 16.

Na segunda parte foi entregue aos participantes a questão adaptada do ENEM, para que resolvessem algebricamente e enunciassem os conteúdos matemáticos utilizados nesta resolução. Em um primeiro momento, os participantes tiveram dificuldades em iniciar a resolução, pois não constavam dados numéricos e alternativas, como ocorria na primeira parte. Porém, ao discutirem o problema, doze participantes conseguiram sintetizar a forma de resolução, empregando a definição de equidistância e resolução de sistemas lineares, dois novamente utilizaram o ponto notável baricentro, quatro não utilizaram a definição de equidistância, mas relataram o uso de distância e equações lineares e um não resolveu. A Figura 28 mostra uma tentativa de resolução, onde o participante confundiu-se com as definições de mediana e mediatriz, consequentemente procedeu ao cálculo do baricentro em vez do circuncentro. Há uma evidência de aprendizagem mecânica ao utilizar a fórmula para obtenção do baricentro. Desta forma, infere-se que estes conceitos não estão bem estabilizados na estrutura cognitiva deste participante. Em contrapartida, a Figura 29 mostra o recorte de um caminho de resolução correto.

Figura 28 - Recorte da resolução algébrica do Part. 30 na questão 168 – Adaptada


Qual o local adequado para a construção dessa torre?

ponto $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

(Procurei se era medianas ou mediatrizes após parte 1.)

G = encontro das medianas de um triângulo, que fica em um ponto equidistante dos vértices do triângulo formado pelas três cidades.

Fonte: Registros do Part. 30.

Figura 29 - Recorte da resolução algébrica do Part. 22 na questão 168 – Adaptada

Sejam A,B,C não colineares e o ponto P (x,y), onde estará a antena.

(i) fazer a $d(A,P) = d(B,P)$ (1)

(ii) fazer a $d(C,P) = d(B,P)$ (2)

Por transitividade $^{1 e 2}$ temos $d(A,P) = d(B,P) = d(C,P)$

E construindo um sistema linear teremos ferramentas para achar (x,y), conhecendo as coordenadas de A,B,C.

Fonte: Registros do Part. 22.

Na terceira parte da resolução da questão foi solicitado que resolvessem a situação-problema no GeoGebra e enunciassem os conteúdos matemáticos utilizados. A grande maioria dos participantes não apresentaram dificuldades em utilizar o GeoGebra para a resolução deste problema, mostrando-se preocupados em construir um objeto que mantivesse suas propriedades quando manipulados. Durante esta resolução emergiram as diferenças entre os pontos notáveis de um triângulo e perceberam que o uso das medianas não satisfazia a solução do problema, que exigia que a posição exata da torre fosse equidistante às três antenas. Para isso, com o auxílio do GeoGebra foram comparando medianas e mediatrizes e constituindo os conceitos dos pontos notáveis baricentro e circuncentro, como relatado e construído pelo participante 30, conforme as Figuras 30 e 31, respectivamente.

Figura 30 - Recorte da descrição da resolução no GeoGebra do Part. 30 na questão 168 – Adaptada

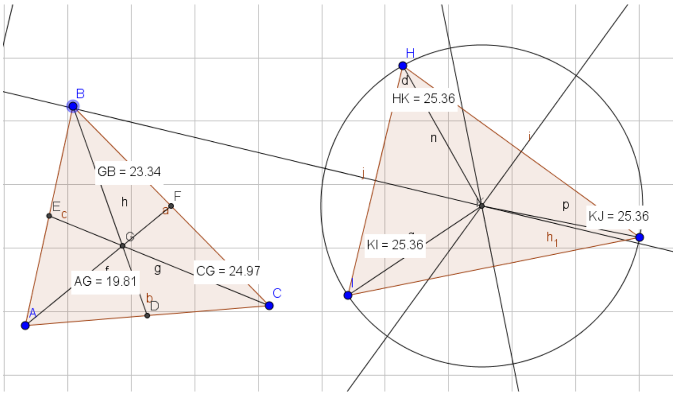
3ª PARTE:

Considerando a situação descrita na 2ª Parte, identifique geometricamente a posição exata para construção da torre de transmissão, usando o GeoGebra. Enuncie os conhecimentos ou conteúdos matemáticos utilizados nesta resolução.

Ainda em dúvida quanto a ser ponto de encontro de medianas ou mediatriz fiz as duas e percebi que é o encontro das mediatrizes portanto não é o baricentro e sim o circuncentro do triângulo.

Fonte: Registros do Part. 30.

Figura 31 - Resolução no GeoGebra do Part. 30 na questão 168 – Adaptada



Fonte: Captura da tela do GeoGebra da construção realizada pelo Part. 30.

Observa-se que cada um dos dois tipos de resolução requer a mobilização de conteúdos matemáticos distintos e essa percepção é favorável a medida que, através do GeoGebra, as conexões entre os conteúdos e as diferentes representações tornam-se mais significativas e, consequentemente possíveis de serem requisitadas de maneira mais eficiente. Ou seja, os participantes relacionam conceitos que estavam "soltos" em sua estrutura cognitiva, caracterizando a reconciliação integrativa.

4.2.2.2 Questão 164 ENEM 2010 (caderno azul – 1ª aplicação)

De forma análoga a resolução da questão anterior, na primeira parte desta questão foi solicitado que os participantes resolvessem a questão conforme apresentada na prova do ENEM. O Quadro 2 mostra o número de participantes e seus acertos/erros nessa questão.

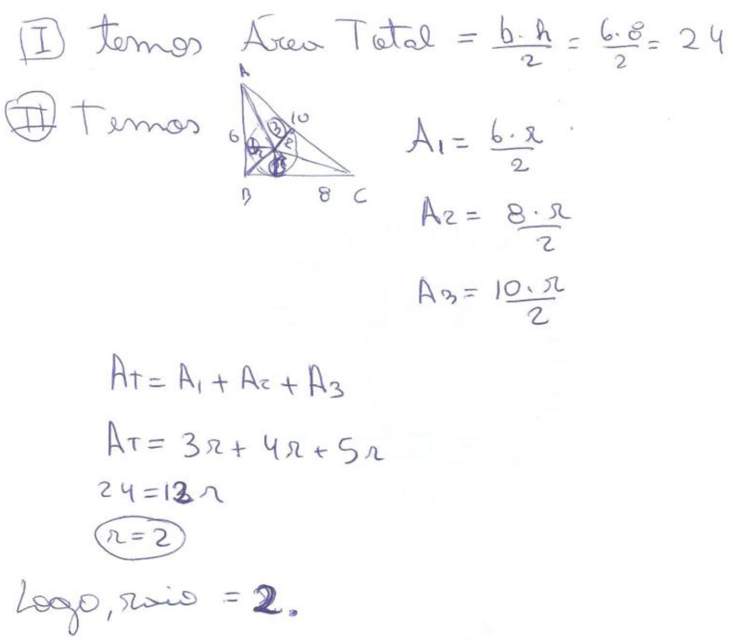
Quadro 2 - Acertos/erros referentes a questão 164 ENEM 2010 (caderno azul – 1ª aplicação)

Participantes	**Questão 164 ENEM 2013 (caderno azul)**	
	Acertos	**Erros**
Licenciatura	12	4
Bacharelado	4	1

Fonte: Registros dos participantes do minicurso da XV SAI.

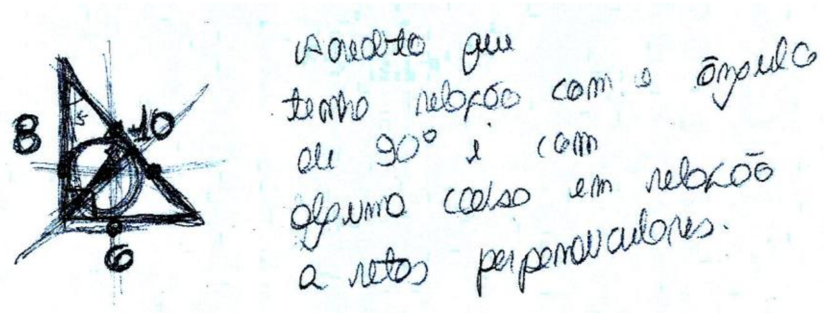
Observa-se que 80% dos estudantes de bacharelado e 75% dos estudantes de licenciatura acertaram essa questão. Observando os registros dos participantes, a maioria resolveu a situação-problema de forma rápida, pois o triângulo da situação-problema é retângulo. A sua decomposição em três triângulos retângulos, implica que sua área seja a soma das áreas de três triângulos menores, resultando uma equação linear para o raio solicitado (Figura 32). A Figura 33 mostra uma tentativa de resolvê-la sem sucesso.

Figura 32 – Recorte da resolução do Part. 22 na questão 164



Fonte: Registros do Part. 22.

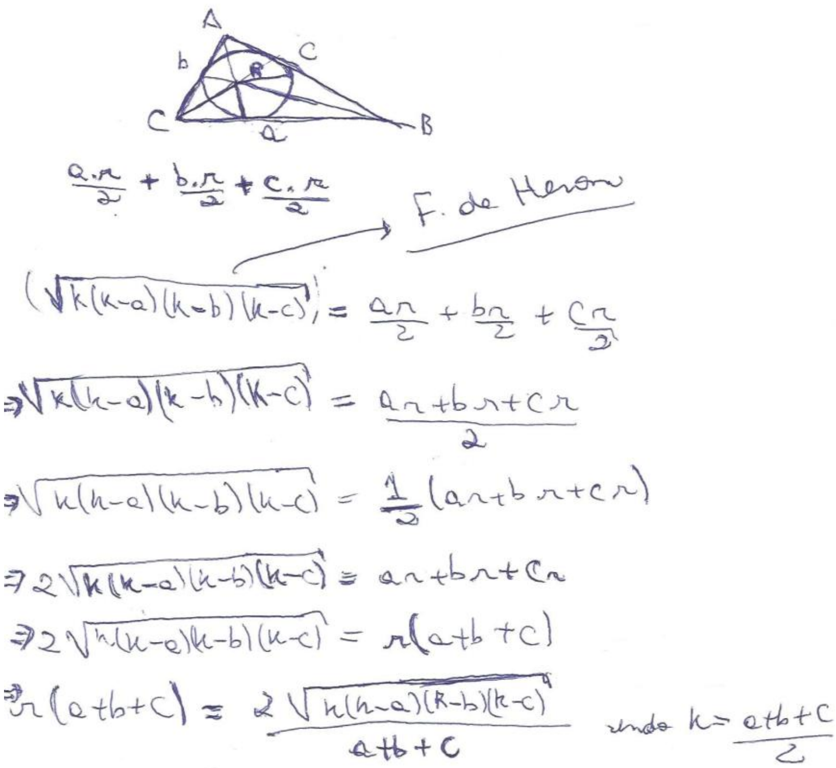
Figura 33 - Recorte da resolução do Part. 28 na questão 164 do ENEM 2010



Fonte: Registros do Part. 28.

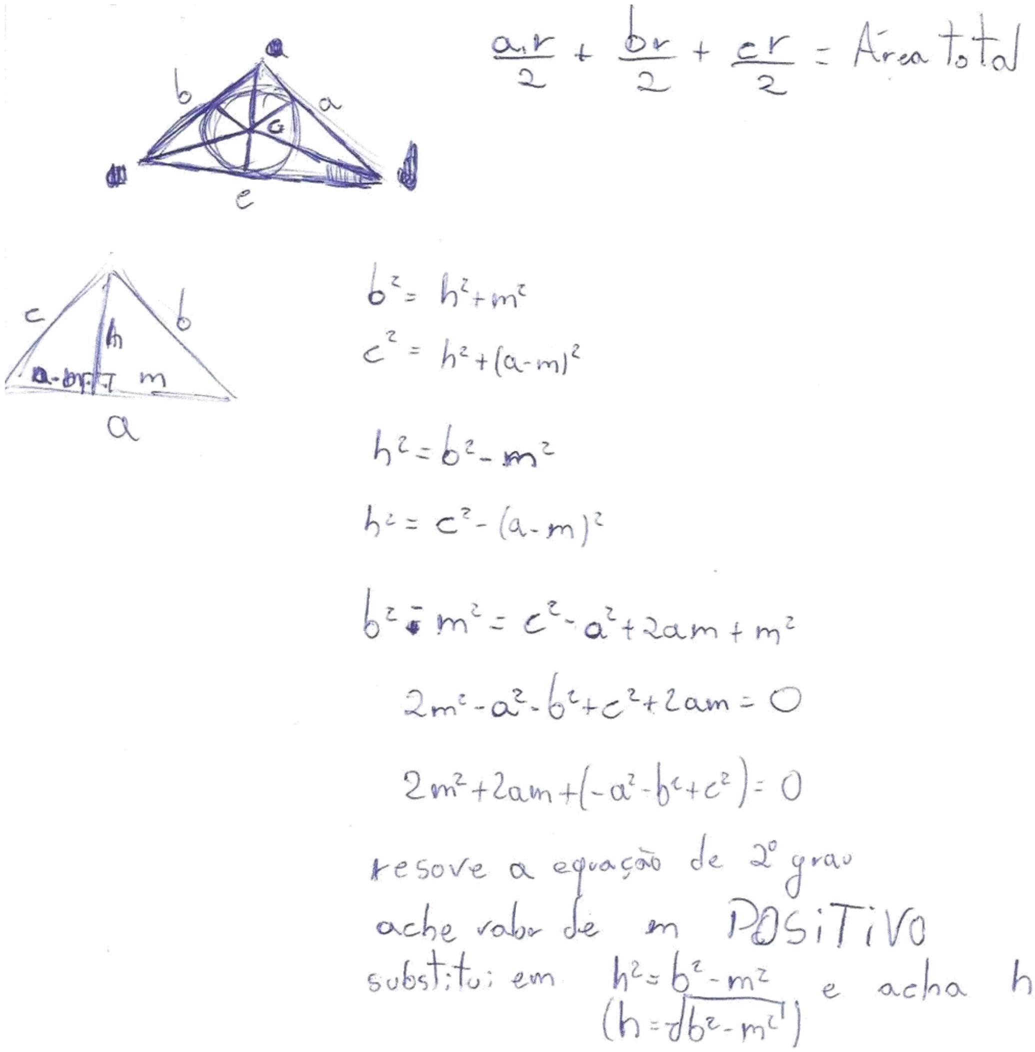
Na segunda parte foi solicitado que os participantes resolvessem algebricamente a questão adaptada do ENEM e enunciassem os conteúdos matemáticos utilizados nesta resolução. Os participantes apresentaram grande dificuldade na tentativa de resolvê-la, sendo que sete não resolveram, dois indicaram uma resolução incorreta, que não levaria a obtenção do raio e um considerou o caso particular de um triangulo retângulo, o que simplificou os cálculos. Em relação às resoluções com encaminhamento correto, três usaram a fórmula de Heron $Área = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo que um dos participantes inclusive lembrava deste nome, e a decomposição da área deste triângulo em três triângulos retângulos. Na Figura 34 pode ser visualizado o recorte da resolução do participante 23. Ainda, oito alunos também usaram a decomposição e a partir do triângulo inicial obtiveram a sua altura, como pode ser visualizado no recorte da resolução do participante 21 na Figura 35.

Figura 34 - Recorte da resolução algébrica do Part. 23 na questão 164 – Adaptada



Fonte: Registros do Part. 23.

Figura 35 - Recorte da resolução algébrica do Part. 21 na questão 164 – Adaptada

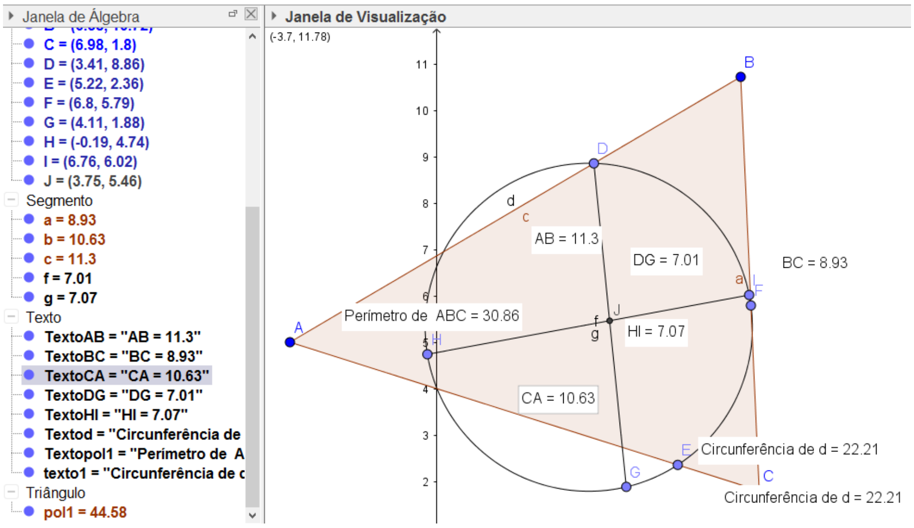


Fonte: Registros do Part. 21.

Na terceira parte foi solicitado que os participantes resolvessem a situação-problema adaptada no GeoGebra, enunciassem os conteúdos matemáticos utilizados e enviassem o arquivo com o protocolo de construção para a pesquisadora, sendo que apenas oito participantes o enviaram. Durante a realização da atividade, observou-se que a maioria dos participantes não apresentavam dificuldades em utilizar o GeoGebra, porém não tinham certeza ou desconheciam a sequência de procedimentos necessários de modo a preservar as propriedades geométricas impostas no processo da construção. Novamente, procedeu-se a discussão acerca das diferenças entre os pontos notáveis de um triângulo e eles perceberam que para solucionar esta questão deveriam utilizar seus conhecimentos sobre retas bissetrizes, pois a circunferência deveria ser inscrita no triângulo. Desta forma, com o auxílio do GeoGebra, foram atribuindo significados aos conceitos de retas bissetrizes e dos pontos notáveis do triângulo, em particular, do incentro. Quanto aos conteúdos demandados na resolução, dez participantes citaram bissetrizes, incentro, área e altura de triângulos, dez não citaram os conteúdos necessários e um citou novamente a mediatriz.

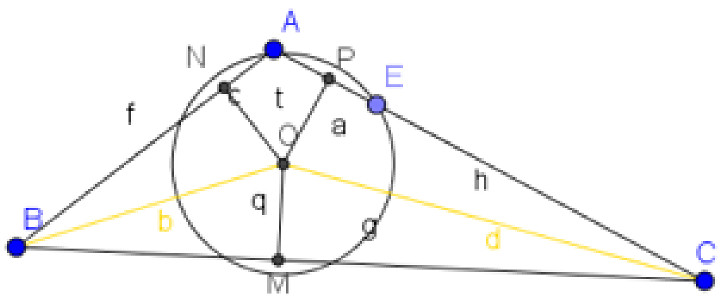
Quanto a identificação da sequência de procedimentos necessários, as Figuras 36 e 37 evidenciam essas dificuldades, visto que as construções não preservam as propriedades geométricas da figura construída.

Figura 36 - Resolução no GeoGebra do Part. 14 na questão 164 – Adaptada



Fonte: Captura da tela do GeoGebra da construção realizada pelo Part. 14.

Figura 37 - Resolução no GeoGebra do Part. 18 na questão 164 – Adaptada



Fonte: Captura da tela do GeoGebra da construção realizada pelo Part. 18.

4.2.3 Questionário final

Novamente, ao final da realização das atividades, foi aplicado um questionário (Apêndice D), com o objetivos de levantar as percepções dos participantes quanto ao GeoGebra proporcionar o resgate de conhecimentos prévios e/ou a aquisição de novos conhecimentos na resolução das situações-problema propostas.

Em relação a pergunta sobre o GeoGebra auxiliar no resgate de *conhecimentos matemáticos prévios*, os sujeitos da pesquisa relataram:

Part. 10 Algumas vezes.

Part. 11 Sim, conhecimento sobre a geometria plana.

Part. 12 Com certeza. Foi uma ferramenta excelente para entendermos melhor a construção dos exercícios.

Part. 13 Sim, pois melhorou a visualização geométrica e ajudou a identificar os conteúdos para a resolução do exercício.

Part. 14 Sim, pois de certa forma nem sempre lembramos de todos os conhecimentos prévios. Por exemplo me confundi com mediana e mediatriz o que me fez errar a alternativa na primeira questão.

Part. 15 Sim, pois vários conteúdos que eu não lembrava.

Part. 16 Com certeza, pois com o uso do geogebra como ferramenta de estudo é possível visualizar os cálculos e assim facilita na aprendizagem do aluno.

Part. 17 Sim, pois com ele devemos construir o que estava sendo proposto sem que as características da figura se desconfigurassem.

Part. 18 Sim, pois não lembrava dos conteúdos trabalhados, e com o geogebra pude relembra-los.

Part. 19 Sim! Tinha confundido o conceito de mediatriz e mediana, com a construção vi a diferença.

Part. 20 Sim, porém não tive um contato muito grande com o conteúdo do Ensino Médio.

Part. 21 Sim, conhecimentos que nem lembrava de ter aprendido. E quando tem sensação de incerteza em alguma propriedade de geometria, o Geogebra permite testá-los e certificar (concretizar) o conhecimento.

Part. 22 Sim, e além de ajudar a lembrar foi possível visualizar esses conceitos prévios de maneira mais didática, e ajudando no entendimento dos mesmos.

Part. 23 Sim, pois alguns conceitos em que já havia estudado, já havia me esquecido, mas com o uso do Geogebra, isso me ajudou a relembrar esses conceitos.

Part. 24 Sim, proporcionou encontrar usando o geogebra uma forma de resolver as questões de maneira a entender melhor o processo para encontrar a resposta.

Part. 25 Não.

Part. 26 Sim, pois muitos conteúdos vistos hoje serviram para retomar coisas que eu já havia esquecido, sem falar que o Geogebra auxilia muito ao relacionar a resolução com a construção das figuras.

Part. 27 Sim.

Part. 28 Sim, mais especificamente em relação a primeira questão. Ele traz consigo uma capacidade de visualização muito grande.

Part. 29 Sim. O geogebra permitiu enxergar as figuras, o que antes, pouco era possível.

Part. 30 Sim, pois não lembrava todos os conceitos e o uso do geogebra fez com que tivesse certeza de quais conceitos havia utilizado.

Em relação a pergunta sobre o GeoGebra auxiliar na aquisição e/ou compreensão de *novos conhecimentos matemáticos*, dois sujeitos da pesquisa relataram que não e os demais se mostraram favoráveis, conforme as transcrições:

Part. 10 Sim.

Part. 11 Sim, algumas definições.

Part. 12 Sim, além de resgatar alguns conhecimentos, ele nos faz recordar de alguns conceitos que ao longo do tempo vão se perdendo.

Part. 13 Acredito que sim, no contexto do ensino médio. Já que as demonstrações não são cobradas, ajudaria muito a entender melhor.

Part. 14 Sim, pois os conhecimentos geométricos são muito pouco usados e em pouco intervalo de tempo e dessa forma nem todos os conhecimentos são repassados.

Part. 15 Sim, pois ele é um vasto campo de conhecimento e possui inúmeras ferramentas que ajudam na resolução de qualquer problema matemático.

Part. 16 Sim, ajudou muito na resolução dos exercícios.

Part. 17 Sim, na compreensão de conhecimentos matemáticos.

Part.18 Sim, pois não tenho muita facilidade com geometria, com o geogebra pude ver construções de uma maneira rápida e de fácil compreensão.

Part. 19 Na compreensão e diferenciação dos conceitos citados acima. (Lê-se: mediatriz e mediana)

Part. 20 Sim.

Part. 21 Acredito que sim, mas principalmente para fixar, se for ensinado diretamente pelo Geogebra o aluno não mentaliza as propriedades, simplesmente digita as formulas e não aprende as propriedades existentes.

Part. 22 Sim, na própria maneira de construção dos objetos trabalhados, e compreendendo o passo a passo desenvolvido.

Part. 23 Sim, como descrito na questão anterior, o geogebra me possibilitou em adquirir novamente esses conceitos em relação à geometria plana.

Part. 24 Sim, essa ferramenta me proporcionou o encontro do resultado da questão de uma forma mais explicativa, vendo visualmente o passo-a-passo da construção.

Part. 25 Não, apenas verifiquei se estava correto ou não.

Part. 26 Sim, pois o geogebra permite relacionar a resolução de uma determinada questão com a sua construção, o que facilita muito na compreensão dos conhecimentos matemáticos.

Part. 27 Não.
Part. 28 Acredito que em relação a essas questões não muito, porém ele nos ajuda bastante.

Part. 29 Sim. Auxiliou muito.
Part. 30 Sim. Pois não lembrava qual era o conceito de circuncentro e baricentro.

A partir das respostas aos dois questionamentos e das observações dos diálogos surgidos durante a realização das atividades, constatou-se que a maioria dos participantes não lembravam dos conceitos de pontos notáveis, porém quando recordavam da palavra que os designava, desconheciam as condições de existência de cada um, confundido-os. Assim, a experiência lhes proporcionou a aquisição desses novos conhecimentos. Quanto a utilização do GeoGebra, os participantes mostraram bastante interesse, sendo um dos principais motivos relatados para participarem do minicurso. Foi observado que a maioria dos participantes não tiveram dificuldades em utilizar o GeoGebra, visto que já haviam tido contato com o *software* em algumas disciplinas do curso de licenciatura.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de atividades desenvolvidas nos minicursos visou responder ao problema de investigação *Quais as contribuições do GeoGebra no processo de aquisição de significados na resolução de questões de matemática do ENEM adaptadas?*

Inicialmente, é importante resgatar que para a elaboração do material aplicado nos minicursos foram utilizadas questões de matemática do ENEM adaptadas, pois a intenção era a re/construção dos conteúdos matemáticos envolvidos, não propriamente as questões do ENEM, que na maioria das vezes são resolvidas pelos candidatos por exclusão de alternativas, não demandando conhecimento dos conteúdos envolvidos. Em particular, no minicurso da XV SAI, as questões reais do ENEM foram aplicadas na primeira parte para obter um diagnóstico se auxiliariam na resolução posterior das questões adaptadas. A partir dos relatórios e diálogos dos sujeitos da pesquisa constatou-se que isso não ocorreu, pois embora tenham resolvido as questões reais, tiveram bastante dificuldade para resolver algebricamente as questões adaptadas, visto que não constavam dados numéricos, gráficos, diagramas, etc.

Para Ausubel existem três condições para que a aprendizagem significativa ocorra: o conteúdo a ser ensinado deve ser potencialmente significativo, o aprendiz deve possuir os conceitos subsunçores necessários para as novas aprendizagens e o aprendiz precisa estar disposto a relacionar o material de maneira consistente e não arbitraria.

Em relação a primeira condição, o GeoGebra mostrou-se um instrumento potencialmente significativo para a re/construção dos conhecimentos matemáticos demandados nas situações propostas, na medida que proporcionou a mobilização de relações matemáticas distintas das utilizadas na resolução algébrica. Ainda, os sujeitos da pesquisa apontaram o aspecto visual como fundamental na inter-relação das representações algébrica e geométrica, bem como a dinamicidade das construções que mantém suas propriedades geométricas quando manipuladas.

Quanto aos aprendizes possuírem os conceitos subsunçores necessários a resolução das situações propostas, observou-se que a maioria dos participantes não possuíam ou não lembravam, visto que alguns solucionaram por simples aplicações de fórmula. Nesse sentido, o GeoGebra possibilitou a re/construção de conhecimentos necessários para ancorar novos conhecimentos ou atribuir significados consistentes aos conhecimentos já existentes e os participantes foram capazes de diferenciar conceitos e relacioná-los, condições que caracterizam os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa.

Quanto a disposição para relacionar o material de maneira consistente e não arbitraria, os sujeitos da pesquisa apresentaram engajamento e interação durante a realização das atividades, procurando compreender o material de ensino e tentando integrá-lo aos conhecimentos que já possuíam. Considera-se que as atividades propostas foram capazes de sensibilizar os participantes para uma visão mais ampla de conhecimentos matemáticos que uma mesma situação-problema pode proporcionar.

Por fim, esta pesquisa permitiu a reflexão da pesquisadora em relação a importância da formação continuada dos professores de Matemática, que propicie a Aprendizagem Significativa de conhecimentos matemáticos mediados pelas Tecnologias de Informação e Comunicação.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Psicologia Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.**México: Editorial Trilhas, 1978.

BALLEJO, C. C. **Aprendizagem de conceitos de área e perímetro com o GeoGebra no 6º ano do ensino fundamental**. 2015. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL, Porto Alegre, 2015. Disponível em https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2860342. Acesso em: 24 nov. 2016.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 2000a.

_____. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/Semtec, 2000b.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 2006.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996.

CASSOL, V. **Tecnologias no Ensino e Aprendizagem de Trigonometria: Uma Meta-Análise de Dissertações eTeses Brasileiras nos Últimos Cinco Anos.** 2012. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL, Porto Alegre, 2012. Disponível em <http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/3110>. Acesso em: 01 dez. 2016.

CASTRO, D. B. de. **Concepções de Professores sobre Ensino e Aprendizagem da Geometria Plana na Educação de Jovens e Adultos dos CEJAS de Cuiabá/MT.** 2014. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO, Cuiabá, 2014. Disponível em <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1320781>. Acesso em: 24 nov. 2016.

CASTRO FILHO, J. A. de C. **Desafios para pesquisa em educação matemática na sala de aula. Pesquisa sobre tecnologias e objetos de aprendizagem em sala de aula.** In: CASTRO FILHO, J. A. de C.; SANTOS, M. C. dos; BITTAR, M. **Desafios para pesquisa em educação matemática na sala de aula.** p. 02-04. 2008. Disponível em: <http://www.proativa.vdl.ufc.br/publicacoes/artigos/7fff7eaaf9cb4c1075f318a6093fed2a.pdf>. Acesso em: 09 de fev. 2016.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa Qualitativa em Ciências Humanas e Sociais.** Petrópolis: Vozes, 2006.

GARCIA, V. C. V. **Formação de professores de matemática e mudanças curriculares.** In: BURIGO, E. Z. *et al.* **A matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens.** Porto Alegre: Editora UFRGS, 2012. p. 11-23.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos computacionais no ensino de matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GONÇALVES, M. D. **Uma abordagem para a construção de triângulos e do Teorema de Pitágoras mediada pelo software SuperLogo**. 2014. 144 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, São Paulo, 2014. Disponível em <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1704766>. Acesso em: 24 nov. 2016.

GRAVINA, M. A. *et al.* **Geometria dinâmica na escola.** In: GRAVINA, M. A. *et al.* **Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação do professor de Matemática.** Porto Alegre: Evangraf: UFRGS, 2012. p. 37-60.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANISIO TEIXEIRA. **Nota técnica.** Brasilia: Inep, 2012.Disponível em http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/nota_tecnica/2011/nota_tecnica_tri_enem_18012012.pdf. Acesso em: 09 jan. 2016.

______. **Perguntas frequentes.** Brasília: Inep, 2015.Disponível em http://portal.inep.gov.br/web/enem/perguntas-frequentes . Acesso em: 09 jan. 2016.

LIMA, J. L. S. **Contextualização e conteúdo das questões de matemática do ENEM e dos vestibulares da USP, UNICAMP e UFSCAR.** – São Carlos, UFSCAR, 2011. 146 p. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de São Carlos, 2011.

MIASHIRO, P. M. **A transição das razões para as funções trigonométricas.** 2013. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO, São Paulo, 2013. Disponível em < https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=96373>. Acesso em: 01 dez. 2016.

MOLON, L. **As aplicações e contribuições da geometria plana na Educação de Jovens e Adultos no Ensino Fundamental por meio de Unidade de Aprendizagem.** 2011. 72 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL, Porto Alegre, 2011. Disponível em < http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/3120>. Acesso em: 24 de Nov. 2016.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa: um conceito subjacente.** Em Moreira, M.A., Caballero, M.C. e Rodríguez, M.L. (orgs.) (1997). Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo. Burgos, España.
_____. **Pesquisa em ensino: aspectos metodológicos.** In: Instituto de

Física - UFRGS. Burgos: Universidade de Burgos, 2003. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/pesquisaemensino.pdf>. Acesso em: 26 dez. 2016.

______.**O que é afinal Aprendizagem significativa?** Aula Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, MT, 23 de abril de 2012. Aceito para publicação, Qurriculum, La Laguna, Espanha, 2012.

PELIZZARI, A. *et al.* **Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel.** Rev. PEC, Curitiba, v.2. n.1, p. 37-42, jul. 2001–jul. 2002.

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SANTOS, I. A. **A articulação de recursos tecnológicos na prática pedagógica para a aprendizagem de conceitos de geometria.** 2011. 241 f. Dissertação (Mestrado em Educação) **-** UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU, Blumenau, 2011. Disponível em < http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/FURB_65693044bce1bbb85af922368001a958>. Acesso em: 24 de Nov. 2016.

SENA, R. M. **Mosaico tecnológico na formação de conceitos sobre polígonos: um estudo sobre a lógica dos adolescentes.** 2014. 199 f. Tese (Doutorado em Educação) **-** UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, Porto Alegre, 2014. Disponível em <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1366424>. Acesso em: 30 nov. 2016.

VALADARES, J. A. e MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa: sua fundamentação e implementação.** Coimbra: Edições Almedina, 2009. p. 33.

VUELMA, C.A.; GARCIA, V.C.; TREVISAN, V. **Ensino de áreas e volumes: articulação do mundo físico com os objetos geométricos e suas representações.** In: GARCIA, V. C. *et al.* **Reflexão e pesquisa na formação de professores de matemática.** Porto Alegre: Evangraf: UFRGS, 2011. p. 197-228.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do projeto: Análise de questões de matemática do ENEM: uma proposta através da utilização do GeoGebra na perspectiva Ausubeliana

Pesquisadoras Responsáveis:

- Profª Dra. Sandra Eliza Vielmo (Orientadora) - Telefone: (55) 3220-8136
- Renata Cezar Pinto (Pós-graduanda) – Telefone: (51) 9851-2511

Instituição/Departamento: UFSM / Departamento de Matemática

Você está sendo convidado(a) para participar, como voluntário(a), nesta pesquisa. Leia cuidadosamente o que segue e em caso de dúvidas, solicite esclarecimentos aos pesquisadores.

Esta pesquisa tem por objetivo investigar o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), em particular o GeoGebra, como potencializador da aprendizagem significativa de conteúdos matemáticos na resolução de questões adaptadas propostas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), como parte da dissertação de mestrado no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física (PPGEM&EF).

Para que a pesquisa possa ser realizada é necessário um trabalho de campo que consistirá em:

- Ministrar o minicurso *ENEM e Materiais Potencialmente Significativos no GeoGebra*, proposto no V EIEMAT e XV SAI;
- Fazer anotações referentes ao desenvolvimento das atividades propostas;
- Guardar cópias e analisar as atividades desenvolvidas, tanto as resoluções de forma manual, quanto as construídas no GeoGebra através dos arquivos .ggb;
- Fotografar e/ou filmar alguns momentos para registro da realização das atividades;
- Aplicar questionários semiestruturadas (individualmente ou em grupos).

Esclarecemos que a sua participação é voluntária. Caso não queira assinar o termo de consentimento para participar dessa pesquisa, você não será fotografado/filmado e nenhuma atividade sua será utilizada na pesquisa. Você poderá deixar de participar da pesquisa a qualquer momento, sem penalização alguma e sem prejuízo na continuidade do minicurso.

Não identificamos qualquer risco potencial na sua participação na pesquisa, mas, caso você sinta algum constrangimento em responder qualquer pergunta dos questionários, você está livre para não respondê-las, assim como para se desvincular da pesquisa a qualquer momento.

Não haverá pagamento de qualquer espécie pela sua participação na pesquisa.

Espera-se que os benefícios desta pesquisa se reflitam na promoção da aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos propostos no minicurso.

Os resultados desta pesquisa serão divulgados em uma dissertação de mestrado no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física e em revistas especializadas, congressos e simpósios.

Para realizar esse trabalho de campo queremos solicitar o seu consentimento, garantindo, através desse termo, que:

- Em hipótese alguma, o seu nome, sua imagem ou as informações coletadas nos questionários e na realização das atividades propostas serão divulgados sem sua prévia autorização. Somente as pesquisadoras terão acesso as informações coletadas, a menos que requeridas por lei ou por sua solicitação;
- Em qualquer etapa do estudo, você terá acesso aos profissionais responsáveis pela pesquisa para esclarecimento de eventuais dúvidas.

Consentimento da Participação como Sujeito da Pesquisa

Eu, ____, abaixo assinado, concordo em participar do estudo: *Análise de questões de matemática do ENEM: uma proposta através da utilização do GeoGebra na perspectiva Ausubeliana,* como sujeito da pesquisa. Fui suficientemente esclarecido a respeito das informações que li ou que foram lidas para mim, descrevendo o estudo.

Ficaram claros para mim quais são os propósitos do estudo, os procedimentos a serem realizados e seus possíveis desconfortos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes. Concordo voluntariamente em participar deste estudo e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem penalidades.

1) Os registros escritos e digitais feitos por mim durante o desenvolvimento do minicurso: *ENEM e Materiais Potencialmente Significativos no GeoGebra* podem ser coletados e utilizados para a pesquisa acima descrita?

   ( ) Sim. ( ) Não.

2) As imagens, falas e conversas minhas com os colegas e as pesquisadoras podem ser utilizadas para a pesquisa acima descrita?

   ( ) Sim. ( ) Não.

3) Meu nome pode ser mencionado na análise e descrição desta pesquisa?

   ( ) Sim. ( ) Não.

Eu, voluntariamente, aceito participar desta pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Santa Maria, _____de_________________ de 2016.

____

Assinatura do participante

Declaramos que obtivemos de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste sujeito de pesquisa para a participação neste estudo.

____

Profª Drª. Sandra E. Vielmo - Orientador
e-mail: sandravielmo@gmail.com
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria – RS

____

Renata Cezar Pinto - Orientanda
e-mail: rehpinto@hotmail.com
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria - RS

APÊNDICE B.1 – QUESTIONÁRIO INICIAL – PERFIL DO PARTICIPANTE V EIEMAT

Nome:____

E-mail: ____

1) Qual sua escolaridade?
( ) Acadêmico. Qual curso?____
( ) Graduação. Qual curso?____
( ) Especialização. Em que área?____
( ) Mestrado. Em que área?____
( ) Doutorado. Em que área? ____
( ) Outra. Descreva: ____

2) Qual(is) sua(s) atividade(s) profissional(is)?
( ) Estudante
( ) Professor do Ensino Fundamental – Anos Iniciais
( ) Professor do Ensino Fundamental – Anos Finais. Qual(is) disciplina(s)?____________________
( ) Professor do Ensino Médio. Qual(is) disciplina(s)?__________________________________
( ) Professor do Ensino Superior. Qual(is) disciplina(s)?_________________________________
( ) Outra. Descreva: ____

3) A(s) instituição(s) em que você trabalha e/ou estuda são do tipo:
( ) Municipal
( ) Estadual
( ) Federal
( ) Privada
( ) Outra. Descreva: ____

4) Atualmente, a sua carga horária semanal de trabalho e/ou estudo corresponde a:
( ) 20 horas
( ) 30 horas
( ) 40 horas
( ) 60 horas
( ) Outra. Descreva: ____

5) Você tem experiência com uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) em sala de aula como docente e/ou estudante?
( ) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, descreva a(s) experiência(s):____________________________________
____
____
____

6) Você utiliza o GeoGebra em sala de aula, como docente e/ou estudante?
( ) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, descreva a(s) experiência(s):____________________________________
____
____
____

APÊNDICE B.2 – QUESTIONÁRIO INICIAL – PERFIL DO PARTICIPANTE XV SAI

Nome:____
E-mail: ____

1) Qual sua escolaridade?
( ) Acadêmico. Qual curso?____
( ) Outra. Descreva: ____

2) Exerce alguma atividade profissional?
( ) Sim ( ) Não
Em caso afirmativo, qual(is) atividades?
____
____

3) Você tem experiência com uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC)?
( ) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, descreva a(s) experiência(s):____
____
____
____
____

4) Você tem experiência com o uso do GeoGebra?
( ) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, descreva a(s) experiência(s):____

APÊNDICE C.1 – QUESTÕES PROPOSTAS NA V EIEMAT

INSTRUMENTO PARA RELACIONAR OS CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS PARA RESOLVER ITENS MATEMÁTICOS DO ENEM

PARTICIPANTE:___________________________

Instruções: Solicitamos que os problemas apresentados a seguir sejam resolvidos da forma mais completa possível, pois serão utilizados como dados para a pesquisa de mestrado. Se necessário, use o verso da página.

Questão 168 Enem 2014 (caderno amarelo) – Adaptada: Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C posicionadas nos pontos não colineares de coordenadas (x_A,y_A), (x_B,y_B) e (x_C,y_C) respectivas, já existentes nessas cidades. A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas, denotado pelo ponto G(x,y).

Qual o local adequado para a construção dessa torre?

1) Resolução do problema.

2) Enuncie os conhecimentos matemáticos que utilizou para resolver o problema.

3) Dadas as três antenas posicionadas em pontos quaisquer A, B e C não-colineares, como você identificaria geometricamente a posição exata para construção da torre de transmissão, usando o GeoGebra?

4) Enuncie os conhecimentos matemáticos que utilizou para resolver o problema no GeoGebra.

Questão 172 Enem 2013 (caderno amarelo) – Adaptada: O dono de um sítio pretende colocar uma haste de comprimento l metros entre dois postes de comprimentos l_1 e l_2 metros, todos perpendiculares ao plano do solo, de modo a apoiar dois cabos de aço que sustentarão estes postes. Os cabos ligam a base de um poste ao topo do outro poste. Qual deve ser o valor do comprimento da haste?

1) Resolução do problema.

2) Enuncie os conhecimentos matemáticos que utilizou para resolver o problema.

3) Considerando o problema proposto, como você o resolveria usando o GeoGebra?

4) Enuncie os conhecimentos matemáticos que utilizou para resolver o problema no GeoGebra.

Questão 164 Enem 2010 (caderno azul – 1ª aplicação) – Adaptada: Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são a, b e c centímetros e cuja altura é h centímetros. Tal peça deve ser vazada de maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente as suas faces laterais. Qual deve ser o raio da perfuração da peça?

1) Resolução do problema.

2) Enuncie os conhecimentos matemáticos que utilizou para resolver o problema.

3) Considerando o problema proposto, como você o construiria usando o GeoGebra?

4) Enuncie os conhecimentos matemáticos que utilizou para resolver o problema no GeoGebra.

APÊNDICE C.2 – QUESTÕES PROPOSTAS NA XV SAI

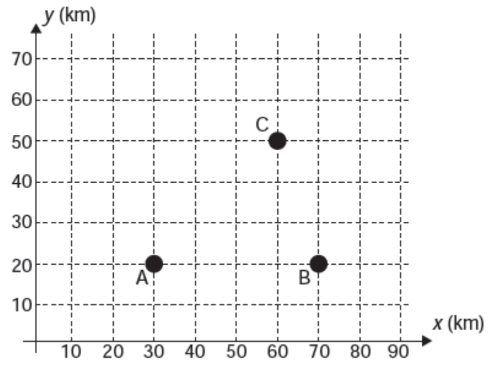
INSTRUMENTO PARA RELACIONAR OS CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS PARA RESOLVER ITENS MATEMÁTICOS DO ENEM

Instruções: Solicitamos que os problemas apresentados a seguir sejam resolvidos da forma mais completa possível, pois serão utilizados como dados para a pesquisa de mestrado. Se necessário, use o verso da página.

PARTICIPANTE:_____________________________

1ª PARTE:

Questão 168 - Enem 2014 (caderno amarelo). Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transforma ação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano abaixo.



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

f) (65, 35) g) (53, 30) h) (45, 35) i) (50, 20) j) (50, 30)

2ª PARTE:

Resolva o problema a seguir e enuncie os conhecimentos ou conteúdos matemáticos utilizados para resolvê-lo.

Questão 168 Enem 2014 (caderno amarelo) – Adaptada: Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C posicionadas nos pontos não colineares de coordenadas (x_A,y_A), (x_B,y_B) e (x_C,y_C) respectivas, já existentes nessas cidades. A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas, denotado pelo ponto G(x,y).

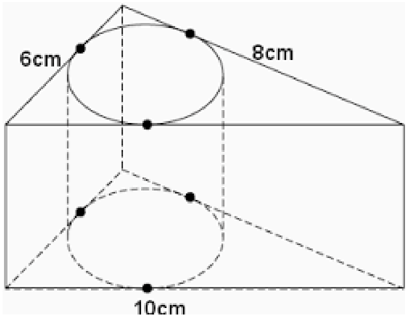
Qual o local adequado para a construção dessa torre?

3ª PARTE:

Considerando a situação descrita na 2ª Parte, identifique geometricamente a <u>posição exata</u> para construção da torre de transmissão, usando o GeoGebra. Enuncie os conhecimentos ou conteúdos matemáticos utilizados nesta resolução.

1ª PARTE:

Questão 164 – Enem 2010 (caderno azul – 1ª aplicação) Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente as suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm e) 5 cm

2ª PARTE:

Resolva o problema a seguir e enuncie os conhecimentos ou conteúdos matemáticos utilizados para resolvê-lo.

Questão 164 Enem 2010 (caderno azul – 1ª aplicação) – Adaptada: Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são a, b e c centímetros e cuja altura é h centímetros. Tal peça deve ser vazada de maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente as suas faces laterais. Qual deve ser o raio da perfuração da peça?

3ª PARTE:

Considerando a situação descrita na 2ª Parte, identifique geometricamente o <u>raio de perfuração da peça</u>, usando o GeoGebra. Enuncie os conhecimentos ou conteúdos matemáticos utilizados nesta resolução.

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO FINAL

QUESTIONÁRIO: PERCEPÇÕES RELATIVAS ÀS ATIVIDADES

PARTICIPANTE:____

1) Na sua opinião, o uso do GeoGebra proporcionou o resgate de conhecimentos matemáticos prévios necessários para resolver as questões propostas?

2) Para você, o uso do GeoGebra auxiliou na aquisição e/ou compreensão de novos conhecimentos matemáticos necessários para resolver as questões propostas?

ANEXO A – MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS DO ENEM

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.