

MATEMÁTICA I

AUTORES

Cristiano Bertolini

Guilherme Bernardino da Cunha

Mariza de Camargo

Patricia Rodrigues Fortes



LICENCIATURA EM COMPUTAÇÃO

MATEMÁTICA I

AUTORES

Cristiano Bertolini

Guilherme Bernardino da Cunha

Mariza de Camargo

Patricia Rodrigues Fortes

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

Santa Maria | RS

2017

©Núcleo de Tecnologia Educacional – NTE.
Este caderno foi elaborado pelo Núcleo de Tecnologia Educacional da
Universidade Federal de Santa Maria para os cursos da UAB.

PRESIDENTE DA REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL

Michel Temer

MINISTRO DA EDUCAÇÃO

Mendonça Filho

PRESIDENTE DA CAPES

Abilio A. Baeta Neves

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

REITOR

Paulo Afonso Burmann

VICE-REITOR

Paulo Bayard Dias Gonçalves

PRÓ-REITOR DE PLANEJAMENTO

Frank Leonardo Casado

PRÓ-REITOR DE GRADUAÇÃO

Martha Bohrer Adaime

COORDENADOR DE PLANEJAMENTO ACADÊMICO E DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Jerônimo Siqueira Tybusch

COORDENADOR DO CURSO DE LICENCIATURA EM COMPUTAÇÃO

Sidnei Renato Silveira

NÚCLEO DE TECNOLOGIA EDUCACIONAL

DIRETOR DO NTE

Paulo Roberto Colusso

COORDENADOR UAB

Reisoli Bender Filho

COORDENADOR ADJUNTO UAB

Paulo Roberto Colusso

NÚCLEO DE TECNOLOGIA EDUCACIONAL

DIRETOR DO NTE

Paulo Roberto Colusso

ELABORAÇÃO DO CONTEÚDO

Ricardo Tombesi Macedo, Mateus Pelloso,
Evandro Preuss, Fábio Parreira

REVISÃO LINGUÍSTICA

Camila Marchesan Cargnelutti
Maurício Sena

APOIO PEDAGÓGICO

Magda Schmidt
Siméia Tussi Jacques

EQUIPE DE DESIGN

Carlo Pozzobon de Moraes – Diagramação
Juliana Segalla – Diagramação
Matheus Tanuri Pascotini – Capa e Ilustração

PROJETO GRÁFICO

Ana Letícia Oliveira do Amaral



B739m Bortolini, Cristiano

Matemática I [recurso eletrônico] / Cristiano Bortolini ... [et al].
– Santa Maria, RS : UFSM, NTE, UAB, 2017.
1 e-book : il.

Este caderno foi elaborado pelo Núcleo de Tecnologia Educacional
da Universidade Federal de Santa Maria para os cursos da UAB
Acima do título: Licenciatura em Computação
ISBN 978-85-8341-244-1

1. Ciência da Computação 2. Matemática 3. Matemática discreta
I. Universidade Federal de Santa Maria. Núcleo de Tecnologia
Educatonal II. Universidade Aberta do Brasil. III. Título.

CDU 519.6

Ficha catalográfica elaborada por Shana Vidarte Velasco - CRB-10/1896
Biblioteca Central da UFSM



Ministério da
Educação



APRESENTAÇÃO

A disciplina de matemática Discreta abordará os conteúdos relevantes na computação, principalmente nas áreas de programação e modelagem matemática. Este livro abordará conceitos básicos sobre a Teoria dos Conjuntos e aprofundará conteúdos como Indução Matemática e Teoria dos Grafos. Por fim, veremos um problema clássico de modelagem matemática e dois problemas que possibilitarão ao aluno pesquisar e compreender uma das aplicações práticas da matemática discreta na computação. Este livro está organizado da seguinte forma:

O Capítulo 1 apresenta os conceitos básicos sobre a Teoria dos conjuntos, como as definições dos termos que serão utilizados e as operações sobre conjuntos.

O Capítulo 2 apresenta os conceitos sobre funções e relações. Tanto na matemática quanto na computação os conceitos de funções são fundamentais. Neste capítulo abordaremos os conceitos matemáticos sobre funções e suas relações.

O Capítulo 3 apresenta os conceitos fundamentais sobre a indução matemática e recursividade.

O Capítulo 4 apresenta os conceitos sobre conjuntos contáveis, incontáveis e enumerabilidade. Tais conceitos fazem parte da teoria dos conjuntos e são importantes na resolução de problemas que envolvam a enumerabilidade de conjuntos.

O Capítulo 5 apresenta conceitos sobre grafos e árvores. Tais conceitos fazem parte da Teoria dos Grafos e possuem inúmeras aplicações tanto na matemática quanto na computação.

O Capítulo 6 apresenta alguns problemas clássicos da teoria dos grafos. Esses problemas são pesquisados e utilizados como referência de estudos na grande maioria dos livros didáticos sobre teoria dos grafos.

ENTENDA OS ÍCONES



ATENÇÃO: faz uma chamada ao leitor sobre um assunto, abordado no texto, que merece destaque pela relevância.



INTERATIVIDADE: aponta recursos disponíveis na internet (sites, vídeos, jogos, artigos, objetos de aprendizagem) que auxiliam na compreensão do conteúdo da disciplina.



SAIBA MAIS: traz sugestões de conhecimentos relacionados ao tema abordado, facilitando a aprendizagem do aluno.



TERMO DO GLOSSÁRIO: indica definição mais detalhada de um termo, palavra ou expressão utilizada no texto.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO ·5

▷ UNIDADE 1 – CONJUNTOS E OPERAÇÕES ·10

Introdução ·11

1.1 Conjuntos ·12

1.1.1 Abstração de Conjuntos ·15

1.1.2 Exemplos de Conjuntos ·15

1.1.3 Diagramas de Venn ·16

1.2 Operações sobre conjuntos ·17

1.2.1 União de Conjuntos ·17

1.2.2 Intersecção de Conjuntos ·19

1.2.3 Diferença de Conjuntos ·21

1.2.3 Diferença Simétrica de Conjuntos ·22

1.3 Relações em conjuntos ·23

1.3.1 Relação de Pertinência ·23

1.3.2 Relação de Inclusão ·24

▷ UNIDADE 2 – FUNÇÕES E RELAÇÕES ·26

Introdução ·27

2.1 Produto cartesiano ·28

2.2 Relações ·30

2.2.1 Propriedade das Relações ·31

2.3 Funções ·33

2.3.1 Funções Parciais ·36

2.3.2 Funções Totais ·37

▷ UNIDADE 3 – INTRODUÇÃO MATEMÁTICA E RECURSIVIDADE ·39

Introdução ·40

3.1 Princípio da indução matemática ·41

3.2 Exemplos de indução matemática ·43

3.2.1 Exemplo 1 ·43

3.2.2 Exemplo 2 ·44

3.2.3 Exemplo 3 ·45

3.3 Recursão matemática ·46

▷ **UNIDADE 4 – CONJUNTOS CONTÁVEIS, INCONTÁVEIS
E ENUMERABILIDADE ·48**

Introdução ·49

4.1 Conjuntos contáveis ·50

4.2 Conjuntos incontáveis ·51

▷ **UNIDADE 5 – GRAFOS E ÁRVORES ·53**

Introdução ·54

5.1 Grafos ·55

5.1.1 Grafo Direcionado ·56

5.1.2 Terminologia ·57

5.1.3 Grafo Bipartido Completo ·58

5.1.4 Grafo Isomorfo ·59

5.2 Árvores ·61

5.2.1 Terminologia ·62

5.2.2 Árvores Binárias ·62

▷ **UNIDADE 6 – APLICAÇÕES E GRAFOS ·65**

Introdução ·66

6.1 Pontes de Königsberg ·67

6.2 Problemas clássicos ·69

6.2.1 O Bilionário Count Van Diamond ·69

6.2.2 O Problema do Carteiro Chinês ·70

▷ **CONSIDERAÇÕES FINAIS ·71**

▷ **REFERÊNCIAS ·72**

▷ **ATIVIDADES ·73**

▷ **APRESENTAÇÃO DOS PROFESSORES AUTORES ·76**

1

CONJUNTOS
E OPERAÇÕES

INTRODUÇÃO

Matemática discreta compreende um conjunto de técnicas matemáticas para a modelagem de problemas na área de Ciência da Computação. A área de computação muitas vezes é vista como uma área de programação ou até mesmo engenharia de software. No entanto, computação está muito mais relacionada à solução de problemas, e desta forma, a matemática discreta torna-se fundamental. Muitos problemas computacionais são formalizados e resolvidos por meio da matemática. Esta resolução de problemas, muitas vezes implica em analisar como os problemas podem ser resolvidos em termos de correteude e/ou eficiência, por exemplo, uma análise matemática poderia dizer se a resolução de um problema computacional é mais eficiente em termos de uso de recursos com uma técnica ou outra e com base em uma avaliação matemática rigorosa.

A Tabela 1 apresenta os tópicos que veremos neste livro e uma das possíveis áreas de aplicação na computação.

Tabela 1 - Principais tópicos abordados e suas aplicações

TÓPICOS EM MATEMÁTICA DISCRETA	APLICAÇÃO EM COMPUTAÇÃO
Teoria dos Conjuntos	Inteligência Artificial e Sistemas Distribuídos
Funções e relações	Banco de Dados e Projeto de Algoritmos
Grafos	Linguagens de programação e Engenharia de Software

Fonte: do autor.

1.1

CONJUNTOS

Como vimos em lógica matemática, as sentenças podem ser verdadeiras ou falsas. No entanto, muitas sentenças podem ser mais complexas e apenas uma conclusão, verdade ou falso, não é suficiente. Suponhamos que temos a seguinte proposição:

“x é um número par”

Desta forma, observamos que esta sentença é verdadeira para determinados valores e falsa para outros. Sendo assim, podemos perguntar:

- Quais os valores de x são válidos?
- Quais são os valores de x para que a sentença seja verdadeira?
- Quais são os valores de x para que a sentença seja falsa?

Para responder estas questões nós usamos a noção de Universo e, assim, precisamos considerar os Conjuntos. No contexto desse livro, usaremos uma letra maiúscula do nosso alfabeto como nome de um conjunto, e os elementos por letras minúsculas. Para representação de um conjunto, utilizaremos uma das duas formas seguintes:

- Listagem dos elementos: nesta representação, todos os elementos do conjunto são apresentados numa lista, envolvidos por um par de chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula. Por exemplo: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1; 5, 6\}$.
- Propriedade dos elementos: nesta representação, quando a quantidade de elementos for muito grande e não for conveniente escrever todos os elementos que formam o conjunto, o descreveremos por uma propriedade possuída por todos os seus elementos. Por exemplo: $A = \{x \mid x \text{ é um algarismo par menor que } 9\}$. Lê-se: O conjunto A é formado pelos elementos x, tal que x é um algarismo par menor que 9.

Definição: Conjuntos são definidos como uma coleção de objetos similares. Conjuntos também podem ser chamados de Coleções ou Classes. Conjuntos são formalmente descritos como:

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$$

ou seja, um conjunto de nome S possui os elementos s_1, s_2, s_3 até s_n , onde n pode ser qualquer número inteiro maior que 3. Neste exemplo, o conjunto S é finito com n elementos. Caso queiramos representar um conjunto infinito, então definimos formalmente como:

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$$

ou seja, o conjunto tem infinitos elementos.

Um elemento de um conjunto é definido formalmente como:

$$s \in S$$

onde lê-se que “s está contido no conjunto S” ou podemos representar a negação como

$$s \notin S$$

onde lê-se “s não está contido no conjunto S”.

Na teoria de conjuntos, conjuntos numéricos são fundamentais e temos que ter o total entendimento deles. São eles:

Conjuntos dos Números Naturais;

Conjunto dos Números Inteiros;

Conjunto dos Números Racionais;

Conjunto dos Números Irracionais;

Conjunto dos Números Reais.

O conjunto base para os três conjuntos é o **Conjunto dos Números Naturais**, que corresponde a um conjunto com números inteiros não negativos. Formalmente é definido por:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Desta forma, definimos um **Conjunto dos Números Inteiros** como:

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

O **Conjunto dos Números Racionais** é formalmente definido por:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

ou seja, todo número inteiro pode também ser reescrito em um número racional, pois números racionais são representados por uma fração entre dois números.

O **Conjunto dos Números Reais** é formalmente definido por:

$$R = \{x \mid x \text{ é um número decimal}\}$$

ou seja, os números reais englobam números inteiros e fracionários (racionais), positivos e negativos. Os números reais são números usados para representar uma quantidade contínua (incluindo o zero (0) e os números negativos). Pode-se pensar num número real como uma fração decimal possivelmente infinita, como 3,141592(...).

Observa-se que quando um conjunto é composto por números reais e estes são descritos com alguma fração decimal, costuma-se separar os elementos de um conjunto com ponto e vírgula (;), por exemplo:

$$S = \{1,1;2,4;4,6;1,4\}$$

onde lê-se: o conjunto S é formado pelos 4 elementos.

O **Conjunto dos Números Irracionais** é definido como: um Número Real (R) que não pode ser obtido pela divisão de dois Números Inteiros (Z), ou seja, são números reais, mas não racionais (Q).

Além dos conjuntos numéricos vistos, temos outros conjuntos importantes na Teoria de Conjuntos, que são:

- Conjunto Vazio
- Conjunto Unitário

O **Conjunto Vazio** é um conjunto que não possui elementos e usualmente é representado pelo símbolo:

$$\emptyset$$

desta forma, quando o conjunto vazio aparecer dentro de um conjunto, ele deve ser tratado como um elemento desse conjunto. Por exemplo:

$$S = \{\emptyset, 1, 2\}$$

então, o conjunto S possui 3 elementos, sendo que um deles é o vazio, ou formalmente podemos dizer que:

$$\emptyset \in S$$

O **Conjunto Unitário** é um conjunto com apenas um elemento. Por exemplo:

$$S = \{1\}$$

onde lê-se: o conjunto S possui apenas o elemento 1.

Uma observação importante se faz com relação a Conjuntos e Sequências. Na matemática os elementos de um conjunto não possuem ordem. No entanto, sequências são caracterizadas pelas ordens de seus elementos.

1.1.1 Abstração de Conjuntos

Como podemos observar, na matemática abstraímos objetos da vida real e os descrevemos como símbolos. Desta forma, podemos formalizar e justificar (provar) matematicamente muita coisa. No entanto, podemos também fazer um gancho com a nossa realidade e observar que a matemática está presente no nosso dia-a-dia. Conjuntos são a base da matemática e são facilmente entendidos quando observamos o mundo em que vivemos. Por exemplo, poderíamos imaginar os seguintes conjuntos:

- Conjunto composto pelos estados do Brasil
- Conjunto de alunos matriculados na disciplina de Lógica Matemática
- Conjunto de jogadores da seleção brasileira de Basquete
- Conjunto de peças de uma determinada coleção

O processo de abstração que usaremos na disciplina é bastante simples. Por exemplo, se considerarmos o primeiro exemplo:

Conjunto composto pelos estados da região sul do Brasil - determinamos que este conjunto se chama B , então temos que:

$$B = \{pr, rs, sc\}$$

temos que o conjunto é composto por 3 elementos onde cada um corresponde a um dos estados do Brasil. Desta forma, podemos dizer, por exemplo, que:

$$rs \in B$$

onde lê-se que rs está contido em B , ou seja, o estado do Rio Grande do Sul faz parte do conjunto composto pelos estados da região sul do Brasil.

1.1.2 Exemplos de Conjuntos

Exemplo 1:

$$\{x : x \in \mathcal{N} \text{ e } -2 < x < 2\} = \{1\}$$

onde lê-se: conjunto representado por x tal que x pertence ao conjunto dos números Naturais e x é maior que -2 e menor que 2 . Desta forma o conjunto é equivalente ao conjunto composto pelo número 1 .

Exemplo 2:

$$\{x : x \in \mathcal{Z} \text{ e } -2 < x < 2\} = \{-1, 0, 1\}$$

onde lê-se: conjunto representado por x tal que x pertence ao conjunto dos números Inteiros e x é maior que -2 e menor que 2. Desta forma o conjunto é equivalente ao conjunto dos números -1, 0 e 1.

Exemplo 3:

$$\{x : x \in \mathcal{N} \text{ e } -1 < x < 1\} = \emptyset$$

onde lê-se: conjunto representado por x tal que x pertence ao conjunto dos números Inteiros e x é maior que -1 e menor que 1. Desta forma o conjunto é equivalente ao conjunto vazio \emptyset .

1.1.3 Diagramas de Venn

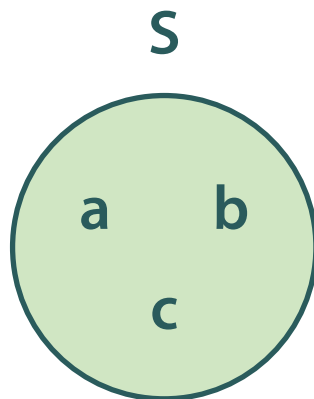
Os Diagramas de Venn são usados para descrever relações lógicas entre um número finito de conjuntos. Em um diagrama de Venn, o retângulo externo representa o conjunto de todos os elementos possíveis do universo, enquanto os círculos fechados representam os conjuntos distintos de elementos. Estes conjuntos também podem ser denotados utilizando letras maiúsculas e seus elementos letras minúsculas e números.

Um diagrama é uma representação visual que ajuda na compreensão dos conceitos. Por exemplo, o conjunto:

$$S = \{a, b, c\}$$

É representado pelo seguinte Diagrama de Venn conforme a Figura 1:

Figura 1 – Diagrama de Venn



Fonte: do Autor

No decorrer da próxima seção, estaremos usando os Diagramas de Venn para um melhor entendimento das operações sobre conjuntos.

1.2

OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS

Operações com conjuntos são combinações de dois ou mais conjuntos onde o resultado é um novo e único conjunto. Na computação essas operações são muito utilizadas na área de Banco de Dados. No decorrer desta seção usaremos como nomes de conjuntos as primeiras letras do alfabeto em maiúsculo (A,B,C,D,...) e como elementos, dos conjuntos, letras do alfabeto em minúsculo (x,a,b,c,...) e números (1,2,3,-1,...).

1.2.1 União de Conjuntos

Consideramos os dois conjuntos distintos a seguir:

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{3, 4\}$$

Podemos imaginar um novo conjunto que corresponderia aos conjuntos A e B, ou seja, um conjunto com todos os elementos de A e B. Então temos:

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

Assim, criamos um conjunto C que corresponde à União dos conjuntos A e B. Representamos a união dos conjuntos A e B como:

$$A \cup B$$

De acordo com o exemplo, teríamos que:

$$A \cup B = C$$

ou seja,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

Definição: Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Definimos como União de A e B a um novo conjunto, representado por $A \cup B$, formalmente definido:

$$A \cup B = \{x \in U; x \in A \vee x \in B\}$$

onde lê-se: conjunto A, união com conjunto B, compreende em x pertence ao Universo tal que x pertence ao conjunto A ou x pertence ao conjunto B. Observa-se que a operação de União de dois conjuntos tem como base a operação lógica da disjunção de duas proposições. Ou seja, se temos que $x \in A \cup B$ significa que $x \in A$ ou $x \in B$. Assim, caso $x \in A \cup B$ tiver valor lógico verdadeiro então sempre que uma das proposições $x \in A$ ou $x \in B$ será verdadeira. Desta forma temos o seguinte teorema:

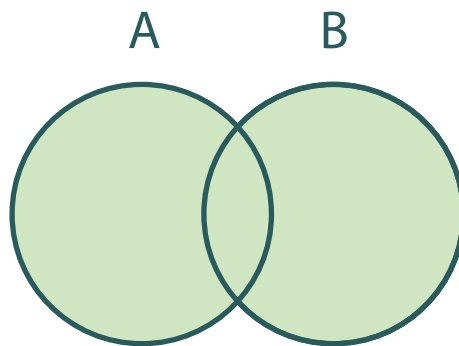
Teorema 1: Para qualquer subconjunto de A e B tem-se:

$$A \subset (A \cup B) \text{ e } B \subset (A \cup B)$$

ou seja, A está contido na união dos conjuntos A e B, e B está contido na união dos conjuntos A e B.

A Figura 2 apresenta o Diagrama de Venn, que representa a união de dois conjuntos A e B, descrito por:

Figura 2 – Diagrama de Venn com a união de dois conjuntos.



Fonte: do autor

Teorema 2: Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, tem-se:

$$A \cup B = B \cup A$$

ou seja, da mesma forma que a disjunção de proposições possui a propriedade comutativa, os conjuntos também possuem essa mesma propriedade. Assim, a união dos conjuntos A e B é igual a união dos conjuntos B e A.

Outro caso particular da união é com o conjunto vazio. Como não há qualquer elemento que pertença ao conjunto vazio, dizer que $x \in A \cup \emptyset$ é equivalente a dizer que $x \in A$. Por outro lado, tendo em conta a comutatividade da união de conjuntos, já sabemos que $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$. Podemos demonstrar com o seguinte teorema:

Teorema 3: Para qualquer que seja o conjunto A, tem-se:

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

Desta forma, qualquer união de um conjunto qualquer com o conjunto vazio resulta no próprio conjunto.

1.2.2 Intersecção de Conjuntos

Consideramos os dois conjuntos a seguir:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

Podemos imaginar um novo conjunto que corresponderia aos elementos em comum dos conjuntos A e B, ou seja, um conjunto com todos os elementos que estão em A e em B. Então temos:

$$C = \{3, 4\}$$

Assim, criamos um conjunto C que corresponde à Intersecção dos conjuntos A e B. Representamos a intersecção dos conjuntos A e B como:

$$A \cap B$$

De acordo com o exemplo, teríamos que:

$$A \cap B = C$$

ou seja,

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

Definição: Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Definimos como Intersecção de A e B a um novo conjunto, representado por $A \cap B$, formalmente definido:

$$A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}$$

onde lê-se: conjunto A intersecção com conjunto B, compreende em x, pertence ao Universo tal que x pertence ao conjunto A e x pertence ao conjunto B. Observa-se que a operação de Intersecção de dois conjuntos tem como base a operação lógica de conjunção de duas proposições. Ou seja, se temos que $x \in A \cap B$ significa que, $x \in A$ e $x \in B$. Assim, caso $x \in A \cap B$ tiver valor lógico verdadeiro então sempre as duas proposições $x \in A$ e $x \in B$ serão verdadeiras. Desta forma temos o seguinte teorema:

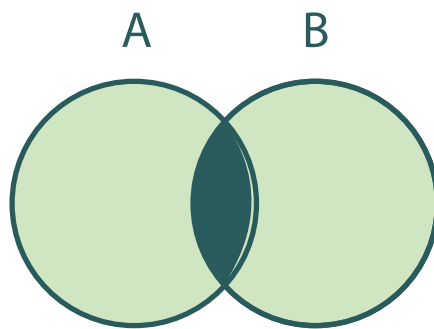
Teorema 4: Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, tem-se:

$$(A \cap B) \subset A \text{ e } (A \cap B) \subset B$$

ou seja, a intersecção dos conjuntos A e B está contida no conjunto A e a intersecção dos conjuntos A e B está contida no conjunto B. Informalmente você pode imaginar a intersecção como os elementos em comum de dois ou mais conjuntos.

A Figura 3 apresenta o Diagrama de Venn que representa a intersecção de dois conjuntos A e B é descrito por:

Figura 3 – Diagrama de Venn com a intersecção de dois conjuntos.



Fonte: do autor.

Desta forma, a intersecção entre os dois conjuntos A e B representa os elementos em comum dos mesmos. Como vimos que a ordem dos elementos em um conjunto não é considerada e que a operação de intersecção entre dois conjuntos dá origem a um novo conjunto com apenas os elementos em comum de A e B, temos um seguinte teorema:

Teorema 2: Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, tem-se:

$$A \cup B = B \cup A$$

ou seja, da mesma forma que a conjunção de proposições possui a propriedade comutativa, os conjuntos também possuem essa mesma propriedade. Assim, a intersecção dos conjuntos A e B é igual a intersecção dos conjuntos B e A.

Outro caso particular da intersecção é com o conjunto vazio. Como não há qualquer elemento que pertença ao conjunto vazio, dizer que $x \in A \cup \emptyset$ é equivalente a dizer que o próprio conjunto é vazio, pois não temos elementos em comum. Por outro lado, tendo em conta a comutatividade da intersecção de conjuntos, já sabemos que $A \cup \emptyset = A \cup \emptyset$. Podemos demonstrar com o seguinte teorema:

Teorema 3: Para qualquer que seja o conjunto A, tem-se:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$$

Desta forma, qualquer união de um conjunto qualquer com o conjunto vazio resulta no próprio conjunto.

1.2.3 Diferença de Conjuntos

Dado os dois conjuntos a seguir:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

Podemos imaginar um novo conjunto, que corresponderia aos elementos, que pertence ao conjunto A mas não pertence ao B. Então temos:

$$C = \{1, 2\}$$

Assim, criamos um conjunto C que corresponde à Diferença dos conjuntos A e B. Representamos a diferença dos conjuntos A e B como:

$$A \setminus B$$

De acordo com o exemplo, teríamos que:

$$A \setminus B = C$$

ou seja,

$$A \setminus B = \{1, 2\}$$

Definição: Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, então a diferença entre os conjuntos A e B é dada por:

$$A \setminus B = \{x \in U; x \in A \wedge x \notin B\}$$

ou seja, a diferença entre os conjuntos A e B é dada por: x pertence ao universo tal que x pertence ao conjunto A e x não pertence ao conjunto B.

1.2.4 Diferença Simétrica de Conjuntos

Dado os dois conjuntos a seguir:

$$\mathbf{A}=\{1,2,3,4\}$$

$$\mathbf{B}=\{3,4,5,6\}$$

O conjunto resultante da diferença simétrica, entre os conjuntos A e B, é dado pelos elementos que pertencem a A, então pertencem a B, e os elementos que pertencem a B e não pertencem a A. Então temos:

$$\mathbf{C}=\{1,2,5,6\}$$

Assim, criamos um conjunto C que corresponde à Diferença Simétrica dos conjuntos A e B. Representamos a diferença simétrica dos conjuntos A e B como:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$$

De acordo com o exemplo, teríamos que:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

ou seja,

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \{1,2,5,6\}$$

Definição: Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, então a diferença simétrica entre os conjuntos A e B é dada por:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \{(\mathbf{A}/\mathbf{B}) \cup (\mathbf{B}/\mathbf{A})\}$$

ou seja, a diferença simétrica entre os conjuntos A e B é dada pela diferença entre os conjuntos A e B união com a diferença entre os conjuntos B e A.

1.3

RELAÇÕES EM CONJUNTOS

Nesta seção vamos fixar os conceitos sobre Conjuntos e suas operações básicas. Duas relações são extremamente importantes, são elas: Relação de Pertinência e Relação de Inclusão.

1.3.1 Relação de Pertinência

A relação de pertinência indica se um determinado elemento pertence ou não a um determinado conjunto. Por exemplo, considerando o conjunto A, formalmente definido por:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

Temos, por exemplo, a seguinte Tabela 2

Tabela 2 – Formalização de elementos com suas traduções

FORMALIZAÇÃO	TRADUÇÃO PARA A LINGUAGEM NATURAL
$1 \in A$	O elemento 1 pertence ao conjunto A
$1, 3, 5 \in A$	Os elementos 1, 3 e 5 pertence ao conjunto A
$1 \notin A$	O elemento 2 não pertence ao conjunto A
$2, 4 \notin A$	Os elementos 2 e 4 não pertencem ao conjunto A

Fonte: do autor.

Observe que a tabela apresenta apenas alguns exemplos, não sendo exaustiva. Outra observação importante sobre a relação de pertinência é que sempre relacionamos elementos visíveis a um conjunto. Para isso usamos os símbolos:

- Pertence: formalmente utilizado em uma fórmula como *elemento* \in *Conjunto*.
- Não pertence: formalmente utilizado em uma fórmula como *elemento* \notin *Conjunto*.

1.3.1 Relação de Inclusão

A relação de inclusão indica se um conjunto está contido ou não em outro. Por exemplo, considerando os conjuntos A e B, formalmente definidos por:

$$\mathbf{A}=\{1,2\}\mathbf{e}$$
$$\mathbf{B}=\{1,2,3,4,5\}$$

temos, por exemplo, que:

$$\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$$

ou seja, os elementos do conjunto A estão contidos no conjunto B. Concluimos que, se todos os elementos de um conjunto pertencem a outro, então o primeiro conjunto está contido no segundo. No entanto, se um único elemento do primeiro conjunto não pertencer ao segundo então o primeiro conjunto não esteja contido no segundo.

Generalizando, temos a tabela 3:

Tabela 3 – Formalização de elementos básicos e sua tradução.

FORMALIZAÇÃO	TRADUÇÃO PARA A LINGUAGEM NATURAL
$A\subset B$	O conjunto A está contido no conjunto B
$A\not\subset B$	O conjunto A não está contido no conjunto B
$A\supset B$	O conjunto A contém o conjunto B
$A\not\supset B$	O conjunto A não contém o conjunto B
$A\subseteq B$	O conjunto A está contido ou é igual ao conjunto B
$A\nsubseteq B$	O conjunto A não está contido e não é igual ao conjunto B

Fonte: do autor.

2

FUNÇÕES E RELAÇÕES

INTRODUÇÃO

O estudo de funções é extremamente importante na computação. A programação de computadores se dá, muitas vezes, com a definição de funções e as suas relações. Neste capítulo veremos primeiramente os conceitos básicos sobre produto cartesiano de conjuntos e relações. Após, veremos as funções matemáticas. Por fim, são apresentados exercícios de fixação. Um dos termos mais difundidos da matemática dentro da computação é o de Funções. Quando estudamos pela primeira vez as funções, aprendemos que uma função nada mais é do que uma relação entre elementos de dois conjuntos. Quando começamos a estudar computação, novamente temos que rever funções. Neste capítulo veremos o que são e suas principais relações.

Este capítulo está dividido em 3 partes. Primeiramente veremos o Produto Cartesiano, que nada mais é do que a multiplicação entre pares ordenados, envolvendo conjuntos distintos; Relações que são associações entre elementos de dois conjuntos não vazios; e Funções onde veremos funções parciais e totais.

No contexto da aplicação de funções, podemos destacar a sua importância na programação de computadores. Muitas linguagens de computador têm como base o uso de funções para a organização e estruturação dos algoritmos implementados. Outro uso de funções, muito comum na computação, se dá na área de banco de dados, que representam conjuntos estruturados de informações, onde a manipulação desses dados se dá por linguagens de programação específicas que usam diretamente os conceitos de funções e relações vistos neste capítulo.

2.1

PRODUTO CARTESIANO

Definição: dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B, denotado $A \times B$, é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$. Formalmente é definido por:

$$A \times B = \{(a,b) \mid \forall a \in A, \forall b \in B\}$$

ou seja, o produto cartesiano dos conjuntos A e B é igual ao par de elementos a e b tal que para todo elemento a pertence ao conjunto A e para todo elemento b pertence ao conjunto B.

Por exemplo, considere os conjuntos:

$$A = \{a, b\} \text{ e } B = \{1, 2\}$$

então temos que o produto cartesiano de A e B definido formalmente por $A \times B$ é:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

No caso, se tivéssemos o produto cartesiano de $B \times A$ o resultado é:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

Em termos gerais, precisamos combinar cada um dos elementos de um conjunto, com todos os elementos do outro conjunto, formando os pares. Desta forma o resultado terá um total de pares de:

$$n(A) \cdot n(B)$$

onde lê-se, o número de elementos do conjunto A multiplicado pelo número de elementos do conjunto B. No exemplo acima, onde $n(A)$ é igual a 2 e $n(B)$ é igual a 2, teríamos:

$$2 \cdot 2 = 4$$

ou seja, o produto cartesiano entre A e B terá 4 pares.

Observa-se uma outra situação possível em se tratando de produto cartesiano. Assim como podemos multiplicar, na forma comum, um número por ele mesmo, podemos fazer o produto cartesiano de um conjunto por ele mesmo. Por exemplo: $A \times A$, lê-se: A cartesiano A.

Neste caso, se tivermos o conjunto: $A=\{1,2,3\}$ e quisermos calcular $A \times A$ teremos o resultado com 9 pares:

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

2.2

RELAÇÕES

Relações no contexto informal, ou seja, do nosso dia-a-dia, podem ser das mais diversificadas, como parentesco, maior, menor, igual. Por exemplo, João é filho do Paulo (relação de parentesco), o prédio da esquina é o maior da rua (relação de maior), Argentina faz fronteira com o Rio Grande do Sul (relação de fronteira).

No contexto da matemática (conceito formal) é muito utilizada em linguagens de programação e banco de dados, por exemplo.

Definição: Dados os conjuntos A e B, uma relação R de A em B, denotada por $R:A \rightarrow B$ é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Essa relação também é chamada de Relação Binária.

Assim temos que:

- Considerando $R \subseteq A \times B$, significa que R é um conjunto de pares ordenados da forma (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$.
- É comum o uso da notação aRb para denotar $(a,b) \in R$. Desta forma, podemos dizer que a está relacionado com b por meio da relação R.

Por exemplo, considerando os seguintes conjuntos:

$$A = \{a, b, c\}$$
$$B = \{1, 2, 3\}$$

Então temos que a relação $R:A \rightarrow B$ poderia ser:

$$R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\} \text{ ou}$$
$$P = \{(a, a), (b, c), (b, a)\}$$

Continuando o exemplo, se tivéssemos a seguinte relação:

Então não teríamos uma relação válida pois subconjunto resultante é gerado pelo produto cartesiano $B \times A$.

Definição: Imagem de uma relação

A Imagem de uma relação R é denotada por $I(R)$ e é o conjunto formado pelos segundos elementos de cada par ordenado da relação. Por exemplo, considerando a relação:

$$R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$$

a imagem correspondente é:

$$I(R)=\{1,2,2\}$$

2.2.1 Propriedades das Relações

Seja A um conjunto não vazio e R uma relação em A , podemos explorar as seguintes situações: reflexividade, simetria, transitividade, e antissimétrica, como veremos a seguir.

Definição: Relação Reflexiva

Seja R uma relação de $A \times A$. R é reflexiva se $\forall x \in A \rightarrow (x,x) \in R$.

Ou seja, para todo elemento x que pertence ao conjunto A o par (x, x) pertence a Relação $A \times A$. Por exemplo, considere o seguinte conjunto:

$$A=\{1,2,3\}$$

e R a sua igualdade então a relação é reflexiva para o resultado:

$$R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

Definição: Relação Simétrica

Seja R uma relação $A \times A$. R é simétrica se dado $(x,y) \in R$ então $(y,x) \in R$. Se para quaisquer que sejam $x,y \in A$, tem-se:

$$xRy \Rightarrow yRx$$

ou seja, se existe uma relação (x,y) então tem que ter o contrário (y,x) para ser simétrica.

Por exemplo, dado o conjunto $A=\{a,b,c\}$ temos que a seguinte relação:

$$R=\{(a,b),(a,a),(b,a),(c,c)\}$$

é simétrica pois o contrário de cada elemento da relação existe. No entanto, se considerarmos a relação:

$$S=\{(a,b)\}$$

não é simétrica pois deveria ter (b, a) , ou seja, o contrário de (a, b) na relação.

Definição: Relação Transitiva

Seja R uma relação $A \times A$ R é Transitiva se dados $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ então $(x,z) \in R$. Se para quaisquer que sejam $(x,y,z) \in A$, tem-se:

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

Por exemplo, dado o conjunto $A=\{1,2,3\}$ temos que a seguinte relação:

$$R=\{(1,1),(1,3),(2,3),(3,1)\}$$

não é transitiva pois $(2,3)\in R$ e $(3,1)\in R$, mas $(2,1)\notin R$.

Definição: Relação Antissimétrica

Seja R uma relação $A\times A$. R é antissimétrica se:

$$\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \rightarrow x = y)$$

ou seja, para que R seja antissimétrica basta existir algum $x=y$.

Por exemplo, dado o conjunto $A=\{1,2,3\}$ temos que a seguinte relação onde $R:\leq$:

$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$$

é antissimétrica pois sempre tem um x igual a y .

2.3

FUNÇÕES

Funções são conceitos básicos da matemática e muito empregados na computação, principalmente em linguagens de programação e banco de dados. Nesta seção veremos os conceitos básicos sobre funções além das funções parciais e totais e suas relações.

Definição:

Sejam A e B dois conjuntos. Uma função de A em B geralmente é uma regra $\forall x \in A$ (para todo x que pertence ao conjunto A) associado a um único elemento $x \in B$. Formalmente, temos que:

$$y = f(x)$$

ou seja, y é igual ao retorno da função f(x).

O termo gráfico, na matemática, é usado quando representamos uma figura por meio de uma condição que é satisfeita pelos pontos da figura. Uma das representações gráficas mais comuns e importantes em matemática é o gráfico de uma função. Portanto, se temos que f é uma função de A em B, então o gráfico de f é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que $y=f(x)$, ou seja:

$$\text{grfco}(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$$

onde lê-se: o gráfico de uma função f é igual ao par de elementos (x, y) que pertencem ao produto cartesiano entre A e B, tal que, para cada elemento de y, tem um associado em f(x).

Definição: Domínio de uma função

Considerando uma função $f: A \rightarrow B$ o domínio corresponde ao conjunto A.

Definição: Contradomínio de uma função

Considerando uma função $f: A \rightarrow B$ o contradomínio corresponde ao conjunto B.

Definição: Imagem de uma função

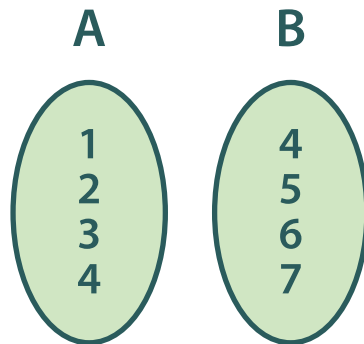
Considerando uma função $f: A \rightarrow B$ a imagem correspondente de f é o subconjunto de B, cujos elementos estão associados a algum elemento do domínio.

Por exemplo, considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e} \\ B = \{4, 5, 6, 7\}$$

Usualmente, como vimos, denotamos os pares ordenados por (x, y) , onde $x \in A$, $y \in B$ e $y=f(x)$, onde podemos representar o resultado (associação dos elementos (x, y)), como o Diagrama de Venn representado pela Figura 4:

Figura 4 – Representação dos conjuntos com Diagrama de Venn.



Fonte: do autor.

Assim, temos o conjunto A com os elementos 1, 2, 3, 4 e 5; e o conjunto B com os elementos 4, 5, 6 e 7. Todos os elementos do conjunto A estão conectados (relacionados) com um único elemento do conjunto B. Queremos saber qual é o domínio, contradomínio, imagem e possíveis valores de $f(x)$, então temos que:

- O domínio da função, formalmente representado por $D(f)$, corresponde a $D(f)=\{1,2,3,4\}$, ou seja, o domínio é composto por todos os elementos do conjunto A.
- O contradomínio da função, formalmente representado por $CD(f)$, corresponde a $CD(f)=\{4,5,6,7\}$, ou seja, o contradomínio é composto por todos os elementos do conjunto B.
- A imagem da função, formalmente representada por $I(f)$, corresponde a $I(f)=\{4,5,7\}$, ou seja, a imagem é composta por todos os elementos do conjunto B que possuem alguma relação com algum elemento do conjunto A.
- Os possíveis valores de $f(x)$ são: $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$, ou seja, o elemento x assume o valor de cada um dos elementos do conjunto A. O resultado dessas funções são, respectivamente: $f(1) = 4$, $f(2)=7$, $f(3)=(5)$ e $f(4)=7$, ou seja, o resultado de $f(x)$ é sempre o correspondente y que corresponde a algum elemento do conjunto B.

Tendo o exemplo acima, podemos concluir que escrevemos $f: A \rightarrow B$ para indicar que f é uma função com domínio A e contradomínio B. Se $(x,y) \in f$ dizemos que y é a imagem de x com base em f . Formalmente definido por $y=f(x)$. Assim, para cada elemento $x \in A$ corresponde a uma única imagem $y \in B$. Dizemos que uma função é bem definida se $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$ e $x_1=x_2$ então $y_1=y_2$, ou seja, $f(x_1) = f(x_2)$.

As funções podem ser classificadas como Injetora, Sobrejetora ou Bijetora, como veremos a seguir.

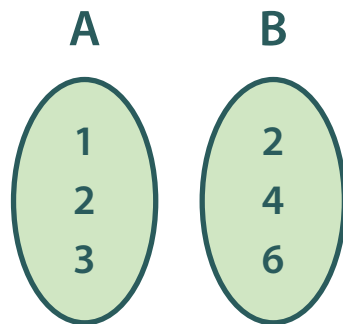
Definição: Função Injetora

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, dizemos que é injetora quando para quaisquer elementos x e y de A, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$, ou seja, quando $x \neq y$, em A, implica $f(x) \neq f(y)$.

Em outras palavras, f será injetora se quaisquer elementos diferentes pertencentes ao conjunto A tiverem imagens diferentes no conjunto B .

Por exemplo, considere o seguinte Diagrama de Venn representado pela Figura 5:

Figura 5 – Diagrama de Venn



Fonte: do autor.

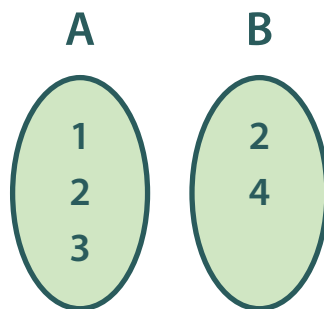
Assim, temos o conjunto A composto pelos elementos 1, 2 e 3 e o conjunto B composto pelos elementos 2, 4 e 6. De acordo com a definição de uma função injetora concluímos que a função, representada no diagrama acima, é Injetora, pois os elementos do conjunto A $1 \neq 2 \neq 3$ e $f(1)=2 \neq f(2)=4 \neq f(3)=6$.

Definição: Função Sobrejetora

Dada uma função $f: A \rightarrow B$ dizemos que é sobrejetora quando para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Por exemplo, considere o seguinte Diagrama de Venn representado pela Figura 6:

Figura 6 – Diagrama de Venn



Fonte: do autor.

Assim, temos o conjunto A composto pelos elementos 1, 2 e 3 e o conjunto B composto pelos elementos 2 e 4. De acordo com a definição de uma função sobrejetora concluímos que a função representada pelo diagrama acima é Sobrejetora pois para cada elemento do conjunto B existe um elemento do conjunto A associado. Ou seja, $f(1)=f(2)=2$ e $f(3)=4$ isto é, para qualquer elemento em B existe um elemento em A tal que $f(a) = b$.

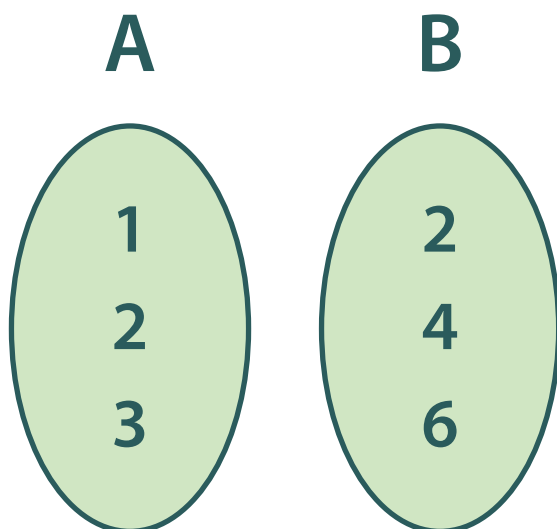
Definição: Função Bijetora

Dada uma função $f: A \rightarrow B$ dizemos que é bijetora, se, e somente se, f for injetora e sobrejetora. Assim, todo elemento pertencente ao conjunto B está associado a

um único elemento de A.

Por exemplo, seguinte Diagrama de Venn, representado pela figura 7:

Figura 7 – Diagrama de Venn



Fonte: do autor.

A função representada por esse diagrama é injetora e sobrejetora, ou seja, desta forma ela é considerada também uma função bijetora.

2.3.1 Funções Parciais

No estudo das funções, geralmente temos as funções parciais e totais. Uma função parcial é uma relação funcional. Se a relação funcional for total, então é denominada de função total ou simplesmente função. Nesta seção veremos a definição de funções parciais e na próxima seção as funções totais.

Definição: Função Parcial

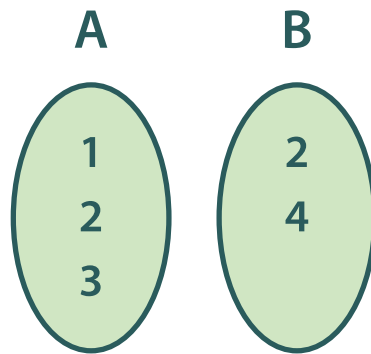
Uma função f de um conjunto A para um conjunto B, formalmente representado por $f: A \rightarrow B$ é uma relação $f \subseteq A \times B$ tal que apenas alguns elementos do conjunto A são relacionados com elementos únicos do conjunto B, sendo:

$$(a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2$$

onde lê-se: o par de elementos (a, b_1) pertence a função e o par de elementos (a, b_2) pertence a função implica que os elementos b_1 e b_2 sejam iguais. Em outras palavras, é uma função que não é definida para todos os elementos do domínio.

Por exemplo, a Figura 8 demonstra uma função parcial:

Figura 8 – Diagrama de Venn



Fonte: do autor.

2.3.2 Funções Totais

Definição: Função Total

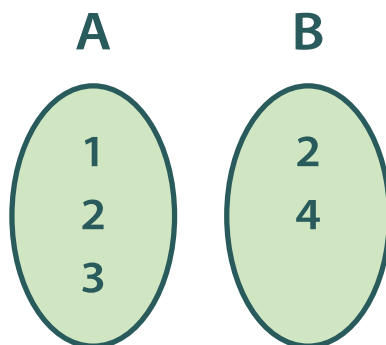
Uma função f de um conjunto A para um conjunto B é uma função total quando especifica associações para todos os elementos do conjunto domínio. Assim definimos formalmente:

$$\forall x \in X, \exists y \in Y \vee y = f(x)$$

onde lê-se: para todo elemento x que pertence ao conjunto X e se existe um elemento y que pertence ao conjunto Y tal que y igual $f(x)$.

Por exemplo, a Figura 9 demonstra uma função total:

Figura 9 – Diagrama de Venn



Fonte: do autor.

Desta forma, todos os elementos do conjunto A estão associados a elementos do conjunto B , e assim, é considerada uma função total.

3

INDUÇÃO
MATEMÁTICA
E RECURSIVIDADE

INTRODUÇÃO

Neste capítulo iremos trabalhar com Indução Matemática. A ideia é ter uma base do que é a indução e como ela é utilizada. Na matemática temos inúmeras regras de indução. No entanto, este capítulo terá uma abordagem mais simples e direta, explorando os principais conceitos sobre indução matemática.

A indução matemática é um método de argumentação dedutivo utilizado para determinar se uma certa proposição é verdadeira para, por exemplo, todos os números naturais. Por exemplo, se tivermos a proposição $P(n)$ onde $n \in \mathbb{N}$ será que sempre será verdade?

Observe que o conjunto de números naturais é um conjunto infinito, ou seja, dado qualquer número natural n sempre poderemos escrever o seu próximo número como $n+1$. A noção de conjuntos infinitos é muito utilizada na matemática e o exemplo dos números naturais um dos mais triviais, sendo que uma sequência infinita de números naturais serve como base de um dos conceitos fundamentais do raciocínio matemático, o princípio de indução matemática.

A indução matemática é uma técnica utilizada para tratar tipos de dados que tem uma relação chamada de boa-ordem. Tipos de dados podem ser, por exemplo, o conjunto dos números naturais, no qual é considerado como um tipo de dado. A relação boa-ordem é uma relação onde todo o subconjunto não vazio de um determinado tipo de dado tem um elemento mínimo segundo essa relação de ordem.

A utilização direta da indução é provar uma propriedade (proposição que pode ser verdade ou falsa) para todo elemento de um conjunto de dados. Ou seja, com a indução matemática podemos generalizar e dizer que uma determinada propriedade é sempre verdadeira mesmo tendo como um tipo de dado infinito, por exemplo, o conjunto dos números naturais.

3.1

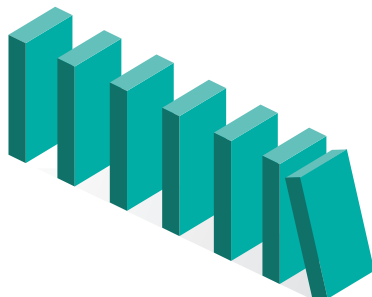
PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Um exemplo clássico da indução matemática é o efeito dominó. Nesse exemplo, imagine que as peças do dominó estão colocadas uma após a outra, conforme Figura 10. Podemos alinhar infinitas peças e neste caso dizemos que temos n peças de dominó alinhadas, onde n é o número de peças e tende a infinito. Se derrubarmos a primeira peça então temos que todas as peças serão derrubadas em sequência. Para isso, podemos definir a seguinte proposição:

- Se as peças estão próximas o suficiente para quando a primeira peça for derrubada alcançar a segunda peça, então as peças subsequentes também serão derrubadas.

Observe que assumimos que a proposição acima é verdade e assim queremos provar ela. A indução matemática possibilita que provemos que a proposição é verdadeira, tendo n peças, ou seja, independente de quantas peças de dominó tivermos, a proposição será sempre verdadeira. Neste caso, a conclusão é simples e o exemplo fica claro porque a proposição definida é sempre verdade.

Figura 10 - Efeito Dominó



Fonte: Adaptado de Menezes (2004).

Outro exemplo clássico é a metáfora da escada. Imagine que tenhamos uma escada infinitamente alta e considerando duas proposições:

- Consigamos alcançar o primeiro degrau;
- Uma vez estando no primeiro degrau podemos alcançar o próximo e assim consecutivamente.

Assim, se ambas as proposições forem verdadeiras então podemos alcançar n degraus, onde n é o número de degraus da escada. Desta forma, usando indução matemática conseguimos provar que qualquer degrau da escada é alcançável independentemente do número de degraus.

Consideremos agora que os degraus (ou as peças de dominó) sejam números inteiros positivos. Podemos definir formalmente que

$$p(n)$$

representa uma proposição P qualquer (ou propriedade) sobre um número inteiro positivo. Assim que iremos demonstrar que independentemente do valor de n , a proposição P é sempre verdadeira. Uma forma de demonstrar isso seria fazer para todos os números inteiros positivos, um a um. No entanto, isso não é viável e a indução matemática entra como uma técnica necessária para provar que a proposição P é verdadeira independentemente do valor de n .

Para que isso ocorra, a indução matemática é definida por um princípio básico que pode ser, informalmente definido como:

“Se o começo é correto e se nada pode dar errado então sempre estará correto”

Formalmente, definimos como:

Definição: Princípio da Indução Matemática

Dada a proposição $P(n)$ sobre M , onde

$$M = \{n \in \mathbb{N} \vee n \geq m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

e lê-se como: M é um conjunto composto por n que pertence ao conjunto dos números naturais tal que n é maior e igual que m e m também pertence ao conjunto de números naturais.

Sendo assim, o princípio da indução matemática considera que:

- $P(m)$ é verdadeira
- para qualquer $k \in M, P(k) \Rightarrow P(k+1)$, ou seja, k pertence ao conjunto M e se a propriedade P de k é verdadeira então P de $k+1$ também será verdadeira.
- Então para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

Podemos então definir 3 passos necessários para uma prova por indução matemática:

• Passo 1: Base

Provar que vale para o menor inteiro considerado no enunciado do problema, ou seja: $P(m)$

• Passo 2: Hipótese

Considerar que a proposição é verdadeira para um número inteiro k , ou seja: $P(k)$

• Passo 3: Passo da Indução

Provar que quando a proposição for verdadeira para k ela também será verdadeira para $k+1$, ou seja: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

3.2

EXEMPLOS DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção, iremos demonstrar como usar a indução matemática em exemplos simples e clássicos da literatura.

3.2.1 Funções Parciais

Considere que queremos provar o seguinte:

$$\sum_{i=1}^n i = 1+2+3+\dots+n \text{ seja igual a } \frac{n(n+1)}{2}$$

onde lê-se: o somatório de n números iniciando por $i=1$ onde o valor de i é igual a à soma de 1,2,3,4 até que o número n seja igual à fórmula n multiplicado por n+1 dividido por 2.

Passo 1: Base

A base deve ser o menor número, que no caso é o menor número de i a ser somado, ou seja, 1.

Assim, precisamos provar que a fórmula vale para $n=1$, ou seja:

$\sum_{i=1}^n i = 1+2+3+\dots+n$ para $n=1$ tem que ser igual ao valor da fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ também para $n=1$.

Para $\sum_{i=1}^n i$ considerando $n=1$ é exatamente 1 pois a fórmula representa o somatório de valores de $i=1$ até n que é 1.

Na fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ considerando $n=1$ temos:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Desta forma, demonstramos que para a base (menor valor de n) a proposição é verdadeira.

Passo 2: Hipótese

Agora consideramos que para qualquer valor de K supondo que:

$$\sum_{i=1}^k i = 1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Considerando essa suposição, vamos querer provar que a fórmula vai ser sempre verdadeira para se somarmos todos os valores de 1 até k+1.

Passo 3: Passo da Indução

Queremos saber então quanto vale:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1+2+3+\dots+k = (k+1)$$

Ou seja, precisamos provar que o resultado do somatório é igual ao da fórmula quando $n = k+1$. Desta forma, a demonstração da prova acontecerá pela manipulação do somatório, e claro, assumindo que a hipótese da indução seja verdade:

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right) + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Desta forma, temos que para $n = k+1$ a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\sum_{i=1}^n i = 1, i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Concluindo, a fórmula está correta para o caso $n=k+1$. Então, como provamos que a fórmula vale para $n=1$, e se for verdade para $n=k$, então é verdade para $n=k+1$, a indução é completa.

3.2.2 Exemplo 2

Considere que queremos provar o seguinte:

$$P(n) = n < 2^n$$

onde lê-se: para a proposição P de um número n , onde $n \in \mathbb{N}$ tem-se que n será sempre menor que 2 elevado na n .

Passo 1: Base

Considerando o menor número possível (zero), temos então que $k=0$ e:

$$0 < 1 = 2^0$$

Passo 2: Hipótese

Suponhamos então que $k \in \mathbb{N}$ então temos que $P(k) = k < 2^k$ é verdadeira.

Passo 3: Passo da Indução

Queremos saber então quanto vale:

$$P(k+1) = k+1 < 2^{k+1}$$

Assim se a hipótese da indução for verdadeira ($k+1$) então temos que para qualquer que seja o valor de n , onde $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $n < 2^n$.

3.2.2 Exemplo 3

Considere que queremos provar uma fórmula para a soma dos n primeiros números ímpares, ou seja:

$$1+3+5+\dots+2n-1 = n^2$$

Passo 1: Base

Considerando o menor número possível 1 (um), temos:

- para $n=1$ a soma é 1
- para $n=2$ a soma é $1+3 = 4$
- para $n=3$ a soma é $1+3+5 = 9$
- para $n=4$ a soma é $1+3+5+7 = 16$, e assim por diante.

Vejam que para um n muito grande é inviável fazermos todos os casos, e então queremos provar para qualquer n . A base considera o menor n , ou seja 1 .

Passo 2: Hipótese

Suponhamos que a seguinte hipótese é verdadeira para um inteiro k :

$$1+3+5+\dots+2k-1 = k^2$$

Passo 3: Passo da Indução

Vamos provar que se a hipótese é verdadeira, então o resultado do somatório quando $n = k+1$:

$1+3+5+\dots+2(k+1)-1$ deve ser igual da fórmula n^2 também quando $n = k+1$. Desta forma, substituímos o n por $k+1$ e temos:

$$1+3+5+\dots+2(k+1)-1 = (k+1)^2$$

Assim, como provamos que a fórmula vale para $n=1$ (base) e considerando a hipótese verdadeira ($n=k+1$) então provamos que a proposição proposta está correta.

3.3

RECURSÃO MATEMÁTICA

A recursão matemática é um princípio relacionado a Indução Matemática, no qual a definição recursiva de uma função, por exemplo, é definida em função de si mesma. Podemos definir recursivamente sequências, funções e conjuntos. Por exemplo:

Considere a sequência S_n de potências de 2 dada por:

$$S_n = 2^n \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, 4...$$

Sendo que a mesma sequência pode ser definida recursivamente por:

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_{n+1} &= 2S_n \end{aligned}$$

Observa-se que recursão e indução são similares e ambos são válidos (ou demonstrados como válidos) para n valores. Desta forma, a recursividade pode ser utilizada como estratégia para o cálculo de uma função para o valor n e pode ser descrita a partir do cálculo dessa mesma função para o termo anterior ($n-1$).

Definição: Função Recursiva

É definida como uma função recursiva quando dentro do corpo de uma função é possível chamar novamente a mesma função.

As funções recursivas podem ser classificadas de duas formas:

- **Função Direta:** quando uma função S chama a própria função S .
- **Função Indireta:** quando uma função S chama uma função T e esta chama a função S .

Vejam agora alguns exemplos clássicos de recursão. Um dos exemplos mais conhecidos é como definir recursivamente a função fatorial. Um fatorial, de um número n , corresponde ao produto (multiplicação) de todos os números inteiros positivos menores ou iguais a n . Assim, temos uma função fatorial definida por:

$$f(n) = n!$$

E definimos a função fatorial recursiva como:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(n) &= n f(n-1) \end{aligned}$$

Como observamos na definição recursiva do fatorial, para qualquer número n a função sempre irá retornar o seu fatorial. Como exercício, podemos demonstrar para um número qualquer, (por exemplo, o número 3) como a função recursiva funciona:

$$f(3) = 3f(2) = 3 \cdot 2 = 6$$

4

CONJUNTOS CONTÁVEIS,
INCONTÁVEIS E
ENUMERABILIDADE

INTRODUÇÃO

Neste capítulo iremos ver os conjuntos contáveis, incontáveis e enumerabilidade. Como visto no Capítulo 1, a teoria dos conjuntos é muito utilizada na Computação. Outra característica muito importante da computação é que sempre trabalhamos com abstrações que consigam ser representadas de forma matemática e, assim, conseguimos resolver em um computador (ou podemos dizer que podemos representar em uma linguagem de computador).

Na matemática, podemos dizer que conjunto contável é representado por conjunto com a mesma quantidade de elementos. A quantidade de elementos de um conjunto também pode ser dita cardinalidade. Já um conjunto incontável pode ser representado por um não contável, ou seja, o oposto de um conjunto contável.

O termo surgiu com o matemático alemão Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, que ficou conhecido por elaborar a teoria dos conjuntos. Quando Cantor desenvolveu a teoria dos conjuntos, ele também pensou em estender o conceito de números de elementos, surgindo assim a enumerabilidade de conjuntos. Dado esse estudo, de Cantor, é possível demonstrar matematicamente uma série de propriedades sobre a enumerabilidade de conjuntos, por exemplo, o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis resulta também em um conjunto enumerável.

A enumerabilidade pode ser usada para demonstrar se um determinado conjunto é contável ou incontável. Este capítulo está dividido em duas seções, uma que aborda os conjuntos contáveis e outra que aborda os conjuntos incontáveis. Por fim, temos algumas atividades a serem feitas.

4.1

CONJUNTOS CONTÁVEIS

Conjuntos correspondem a uma coleção de objetos não ordenados. Por exemplo,

$$A = \{10, 20, 30, 40, 50\}$$

corresponde a um conjunto denominado de A com os elementos 10, 20, 30, 40 e 50.

Observa-se aqui que usaremos, para denominar os conjuntos, sempre letras maiúsculas. Já os elementos dos conjuntos podem ser letras, números ou símbolos. Outras observações importantes a serem lembradas sobre conjuntos em geral são:

- Se $a \in A$ então significa que o elemento a pertence ao conjunto A.
- Se $b \in A$ então significa que o elemento b não pertence ao conjunto A.
- Se $A = \{\text{verde, amarelo, azul}\}$ então podemos ter que verde pertence ao conjunto A e preto não pertence ao conjunto A.
- Os elementos de um conjunto não possuem ordem, ou seja $A = \{\text{verde, amarelo, azul}\}$ é igual a $A = \{\text{azul, verde, amarelo}\}$.
- Sempre usamos chaves para indicar um conjunto.

Conjuntos contáveis são denominados também como conjuntos finitos ou infinitamente contáveis. Desta forma, para um conjunto finito de n elementos para $n > 0$, lista-se todos os seus elementos. Em um conjunto finito S qualquer, podemos descrever um elemento como inicial S_1 , outro como subsequente S_2 e assim por diante. Desta forma, se existirem k elementos no conjunto, eles podem ser listados na ordem selecionada $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ onde:

- A lista representa o conjunto todo
- O número de elementos de um conjunto finito é a **cardinalidade do conjunto**. Assim, esse conjunto teria cardinalidade k.

Uma observação importante, sobre os conjuntos contáveis, é que ser contável não significa que sempre podemos dizer qual o número total de elementos no conjunto. Ou seja, significa que podemos dizer quem é o primeiro elemento, o segundo e assim por diante. Então, conjuntos contáveis são também conjuntos enumeráveis. Por exemplo, o conjunto s dos números inteiros positivos e ímpares é um conjunto contável e enumerável.

Um conjunto infinitamente contável é possível enumerar seus elementos em uma sequência infinita. Por exemplo, $(s_1, s_2, s_3, s_4, \dots)$. Assim, cabe ressaltar que um conjunto contável significa um conjunto finito ou um conjunto infinitamente contável.

4.2

CONJUNTOS INCONTÁVEIS

Temos também conjuntos incontáveis, ou seja, que são infinitos e não contáveis (ou não enumeráveis). Por definição, um conjunto não enumerável é tão grande que não existe uma maneira de se contar os elementos e se obter todo o conjunto. Apesar de ser interessante saber que existem conjuntos que são incontáveis, normalmente estaremos interessados nos conjuntos contáveis. Por exemplo, o seguinte conjunto é incontável:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

onde lê-se: o conjunto S composto por um elemento x que pertence aos números reais tal que x é maior que zero e menor que um. Como x é um número real então o mesmo é infinito, ou seja, existem infinitos números entre 0 e 1.

Apesar de óbvio, também pode-se dizer que um conjunto é incontável se ele não for um conjunto contável. Podemos citar, como exemplo, de tópico da matemática que se utiliza de conjuntos não contáveis o Cálculo Diferencial e Integral.

5

GRAFOS E ÁRVORES

INTRODUÇÃO

Muitos problemas reais podem ser vistos como um conjunto de conexões entre objetos. Por exemplo, em um grande cruzamento de trânsito temos vias, sinalizadas, passagens de pedestre e de carro. Essas conexões precisam ser muito bem planejadas para que, tanto os carros quanto as pessoas, possam transitar pelo cruzamento com segurança e em um tempo aceitável (eficiência). Na computação podemos modelar essas conexões, usando estruturas como Grafos. Essas conexões exploram a relação do tipo: determinar caminhos entre objetos (ir por um caminho de um objeto a outro); determinar distâncias entre objetos (menor ou maior caminho); quais os caminhos possíveis para se chegar a um determinado objeto. Assim, grafos são muito utilizados para modelar esses problemas.

Veremos neste capítulo os principais conceitos sobre grafos. O estudo da Teoria dos Grafos é de fundamental importância dentro da computação. Muitos problemas atuais vêm sendo solucionados com a utilização desses conceitos. Por exemplo, problemas relacionados a redes de energia das cidades são modelados usando árvores (que nada mais são do que um tipo de grafo). Tais problemas são modelados por algoritmos que identificam o menor caminho, o maior caminho, final de um caminho, entre outros, correspondem a rotas de energia elétrica onde sistemas computacionais monitoram no sentido de identificar problemas na transmissão de energia elétrica. Outros inúmeros problemas atuais são modelados usando a Teoria dos Grafos. Assim, os conceitos vistos neste capítulo poderão ser aplicados em várias outras disciplinas do curso de Licenciatura em Computação.

5.1

GRAFOS

Definição informal:

Um grafo é uma representação matemática que consiste em um conjunto não vazio de vértices (também chamados de nós) e um conjunto de arestas (também chamadas de arcos), sendo que os vértices são conectados pelas arestas (ou também, podemos dizer que os nós são conectados pelos arcos).

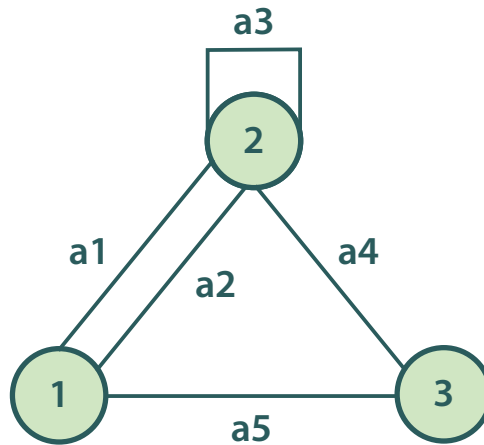
Definição formal:

Um grafo é uma representação matemática formada por uma tripla ordenada (V,A,G) onde:

- V : representa um conjunto não vazio de vértices (ou nós);
- A : representa um conjunto não vazio de arestas (ou arcos);
- G : representa uma função que associa a cada aresta a um par não ordenado x - y de vértices, chamado de extremidade de a .

Vejamos o seguinte exemplo de grafo apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Exemplo de Grafo



Fonte: do autor.

O grafo apresenta 3 vértices (1, 2 e 3) e 5 arestas (a1, a2, a3, a4 e a5). A função g associa as arestas às suas extremidades, sendo assim temos:

- $g(a1) = 1-2$
- $g(a2) = 1-2$
- $g(a3) = 2-2$
- $g(a4) = 2-3$
- $g(a5) = 1-3$

5.1.1 Grafo Direcionado

Grafos direcionados também são chamados de grafos orientados, grafo dirigido ou dígrafo. No nosso estudo sobre grafos chamaremos apenas de grafo direcionado. A ideia desse grafo é a direção, ou seja, as arestas possuem sentido de direção (representado graficamente por uma seta).

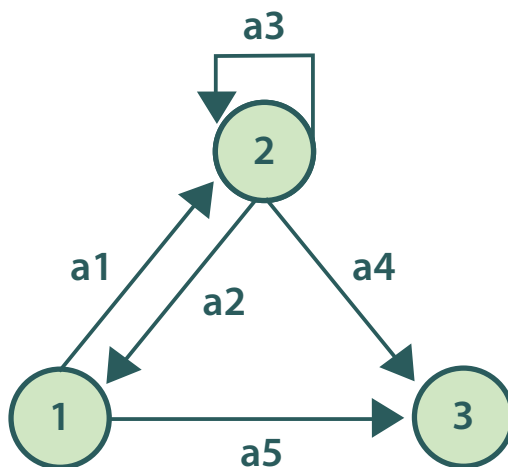
Definição formal:

Um grafo direcionado é uma tripla ordenada (V,A,G) , onde:

- V : representa um conjunto não vazio de vértices (ou nós);
- A : representa um conjunto não vazio de arestas (ou arcos);
- G : representa uma função que associa a cada aresta a um par ordenado (x,y) de vértices, onde x é o vértice inicial e y o vértice final.

O que difere grafos direcionados de outros grafos é que cada aresta tem um sentido (ou orientação). Vejamos o seguinte exemplo de grafo apresentado na Figura 12.

Figura 12 – Exemplo de grafo direcionado



Fonte: do autor.

No exemplo da Figura 5.2 temos as arestas com uma seta que representam a direção e, como já vimos anteriormente, por isso o grafo é direcionado. O grafo direcionado apresenta 3 vértices (1, 2 e 3) e 5 arestas (a1, a2, a3, a4 e a5). A função g associa as arestas as suas extremidades de forma ordenada, sendo assim temos:

- $g(a1) = (1,2)$
- $g(a2) = (2,1)$
- $g(a3) = (2,2)$
- $g(a4) = (2,3)$
- $g(a5) = (1,3)$

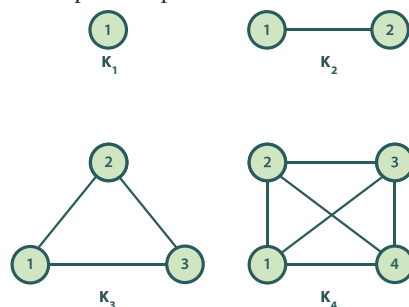
5.1.2 Terminologia

Na teoria dos grafos existe uma terminologia adotada, a qual veremos nesta seção. Já vimos que a direção refere-se ao sentido das arestas e graficamente é representada por uma seta em um dos lados da aresta. Assim, são apresentados alguns termos usados na Teoria dos Grafos:

- **Rótulos:** ou grafos rotulados podem ser chamados quando os vértices possuem alguma identificação. Nos exemplos anteriores os vértices receberam números, e, desta forma, podem ser considerados grafos rotulados.
- **Pesos:** com relação às arestas, também podem ser atribuídos rótulos ou, em muitos casos, pesos. Um uso comum dos pesos são probabilidades, ou seja, de um vértice qualquer é possível ter duas arestas saindo cada uma com uma probabilidade associada.
- **Vértices Adjacentes:** no caso, um vértice adjacente de um vértice qualquer é um vértice que está ligado a este vértice por meio de uma aresta.
- **Laço:** é uma aresta com extremidades v-v para alguma aresta v.
- **Arestas Paralelas:** duas arestas com as mesmas extremidades.
- **Grafo Simples:** é um grafo sem laços ou arestas paralelas.
- **Grafo Completo:** é um grafo no qual dois vértices quaisquer são adjacentes.
- **Vértice Isolado:** é um vértice que não possui adjacentes, ou seja, não possui arestas que chegam ou saem do vértice.
- **Grau:** é o número de extremidades de arestas que se conectam a um vértice.
- **Subgrafo:** consiste em um conjunto de vértices e arestas que representam um subconjunto de um conjunto original e completo de vértices e arestas.
- **Caminho:** a partir de um vértice v_0 até um vértice v_n considera-se o caminho a sequência entre eles, ou seja: $v_0, a_0, v_1, a_1, \dots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n$.
- **Comprimento de um Caminho:** considera-se comprimento de um caminho o número de arestas que ele contém.
- **Grafo Conexo:** se existe um caminho de qualquer vértice para outro.
- **Ciclo:** é o caminho de algum vértice qualquer para ele mesmo. Caso o grafo não possua ciclos ele é considerado acíclico.

A Figura 13 abaixo compreende grafos simples completos de 1 a 4 vértices. Um grafo simples é denotado por K_n , onde n representa o número de vértices.

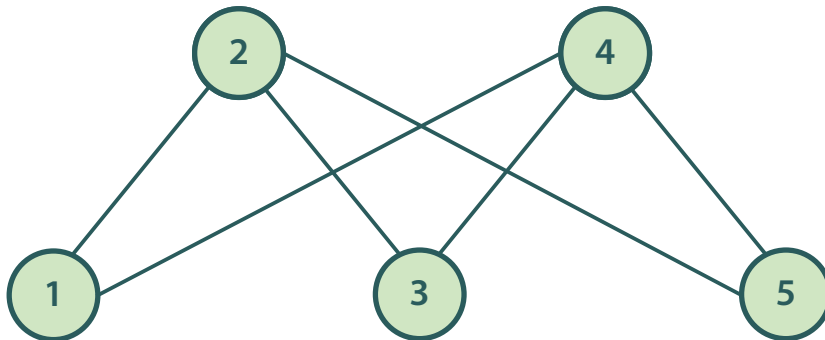
Figura 13 - Exemplos de grafos simples completos.



Fonte: do autor.

Como observa-se na Figura 14, os grafos possuem todos os seus vértices conectados entre si. Como exercício de fixação, tente montar um grafo onde $n=5$. Para isso, tenha como base o grafo abaixo que é considerado não completo pois nem todo vértice é adjacente a todos os outros.

Figura 14 - Exemplo de grafo não completo



Fonte: do autor.

5.1.3 Grafo Bipartido Completo

Considerando o exemplo da Figura 14 onde o grafo não era completo, podemos observar dois conjuntos de vértices: $\{2,4\}$ e $\{1,3,5\}$. Os vértices desses conjuntos não são adjacentes, no entanto, um dos vértices de cada conjunto é adjacente. Por exemplo, o vértice 2 é adjacente com todos os outros $\{1,3,5\}$. Desta forma esse grafo é considerado **Bipartido Completo**.

Definição: Grafo Bipartido Completo

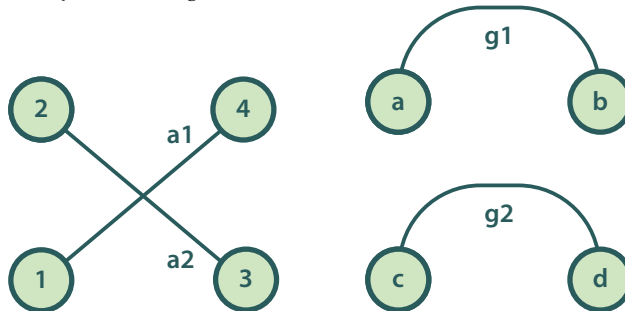
Caso um dos vértices de um dado grafo pode ser dividido em 2 conjuntos disjuntos não vazios N_1 (de m elementos) e M_1 (de n elementos), tal que dois vértices são adjacentes, se e somente se, um deles pertence a N_1 e o outro pertence a N_2 . Assim, um grafo bipartido completo é denotado por $K_{m,n}$.

No exemplo da Figura 15, o grafo é denotado por $K_{2,3}$, ou seja, dois conjuntos sendo um com 2 vértices e outro com 3.

5.1.4 Grafo Isomorfo

Quando usamos uma representação visual podemos representar dois grafos de maneira diferente mas, que podem representar o mesmo grafo de acordo com a sua definição formal. Por exemplo, observe a Figura 15.

Figura 15 - Representação visual de grafos.



Fonte: do autor, 2017.

Observa-se na figura acima que as representações visuais são diferentes, mas os grafos são equivalentes. Se considerarmos que os vértices $\{1,2,3,4\}$ correspondem aos vértices $\{a,b,c,d\}$ e os arcos $\{a1,a2\}$ correspondem aos arcos $\{g1,g2\}$, temos que os grafos são iguais apenas com rótulos diferentes.

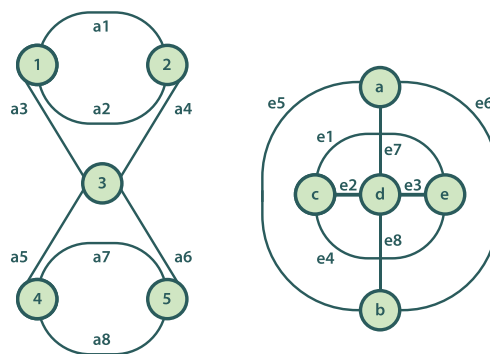
Definição: Grafo Isomorfo

Dado dois grafos $(V1,A1,g1)$ e $(V2,A2,g2)$, estes são isomorfos se existem bijeções $f1:V1 \rightarrow V2$ e $f2:A1 \rightarrow A2$ tais que, para cada arco $a \in A1$, $g1(a)=x-y$ e somente se $g2[f2(a)]=f1(x)-f1(y)$.

Podemos dizer, de forma informal, que em grafos isomorfos deve ser possível re-rotular os vértices de um grafo para serem rótulos de outros, mantendo os arcos correspondentes em cada grafo.

Por exemplo, que consiste em um exercício resolvido, na Figura 16 temos dois grafos que são isomorfos.

Figura 16 - Exemplo de grafos isomorfos.



Fonte: do autor.

Com base nos dois grafos podemos dizer que os vértices correspondentes são:

$f_1: 1 \rightarrow c$

$2 \rightarrow e$

$3 \rightarrow d$

$4 \rightarrow b$

$5 \rightarrow a$

As bijeções que estabelecem o isomorfismo são:

$f_2: a_1 \rightarrow e_1$

$a_2 \rightarrow e_4$

$a_3 \rightarrow e_2$

$a_4 \rightarrow e_3$

$a_5 \rightarrow e_8$

$a_6 \rightarrow e_7$

$a_7 \rightarrow e_5$

$a_8 \rightarrow e_6$

Existem algumas condições onde grafos não podem ser isomorfos. Mas, mesmo não se encaixando nessas condições, podem existir grafos que não são isomorfos.

As principais condições para os grafos não serem isomorfos são:

- Um grafo possui mais vértices que outro.
- Um grafo tem mais arcos que outro.
- Um grafo tem arcos paralelos e outro não.
- Um grafo tem um laço e outro não.
- Um grafo tem um vértice de grau k e outro não.
- Um grafo é conexo e outro não.
- Um grafo tem um ciclo e outro não.

5.2

ÁRVORES

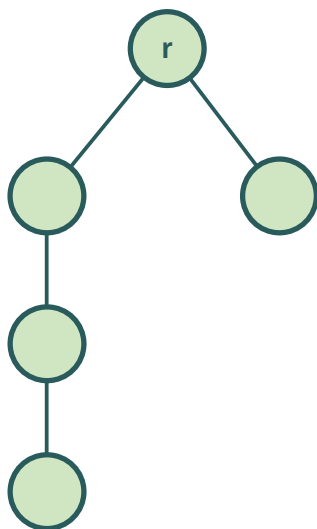
Árvores são tipos especiais de grafos, que são utilizadas na computação, principalmente para representação de dados. Áreas da computação como Estrutura de dados e programação fazem uso de árvores para a resolução de problemas computacionais. Um exemplo informal, de representação de dados por meio de árvores, são as chamadas árvores genealógicas que são utilizadas na representação de uma família. Outros exemplos incluem o fluxo organizacional de uma empresa e a estrutura hierárquica de uma empresa.

Definição: Árvore

Uma árvore é um grafo conexo, acíclico e com um vértice especial denominado Raiz.

A Figura 17 apresenta um exemplo de árvore onde o vértice com o rótulo r representa o vértice raiz.

Figura 17 – Exemplo de Árvore

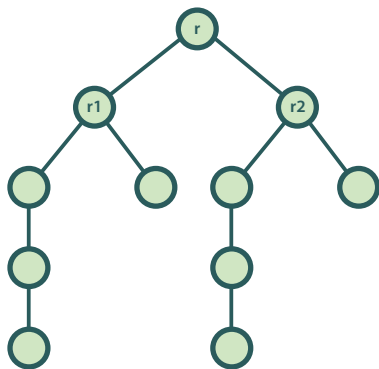


Fonte: do autor.

Caso tenhamos apenas um vértice, consideramos ele a raiz, ou seja, uma árvore com apenas a raiz. No entanto, podemos ter representações mais complexas com, por exemplo, árvores disjuntas. Vejamos o exemplo abaixo.

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n árvores disjuntas com raízes r_1, r_2, \dots, r_n . Uma árvore formada colocando um novo vértice r ligado por um único arco a cada um dos vértices r_1, r_2, \dots, r_n , é uma nova árvore com raiz r . A Figura 18 apresenta esta formalização.

Figura 18 – Árvore com raiz r composta por duas árvores disjuntas



Fonte: do autor.

Nesta representação (Figura 18) temos que os vértices r1 e r2 são vértices filhos e o vértice r é chamado de vértice pai.

5.2.1 Terminologia

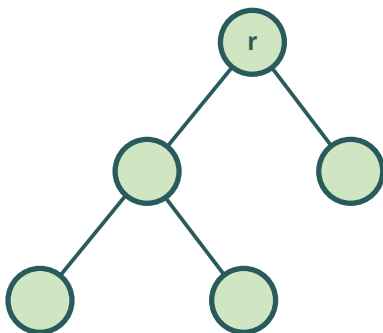
Uma definição importante em árvores é a raiz, como já vimos anteriormente. Isso garante que da raiz de uma árvore devemos poder alcançar qualquer outro vértice seguindo um único caminho. Outros conceitos importantes usados no estudo de árvores são:

- Profundidade: corresponde ao comprimento do caminho do vértice raiz até o vértice que se deseja saber a sua profundidade.
- Altura: corresponde a maior profundidade dos vértices de uma árvore.
- Folha: corresponde aos vértices que não possuem filhos.
- Floresta: corresponde a uma coleção de árvores disjuntas.

5.2.2 Árvores Binárias

Uma árvore binária é aquela onde cada vértice possui apenas dois filhos, um chamado de filho esquerdo e outro chamado de filho direito. Por exemplo, a Figura 19 é uma árvore binária possuindo uma raiz r, cada vértice possui dois filhos, temos 3 vértices folhas com altura de 3.

Figura 19 – Exemplo de árvore binária

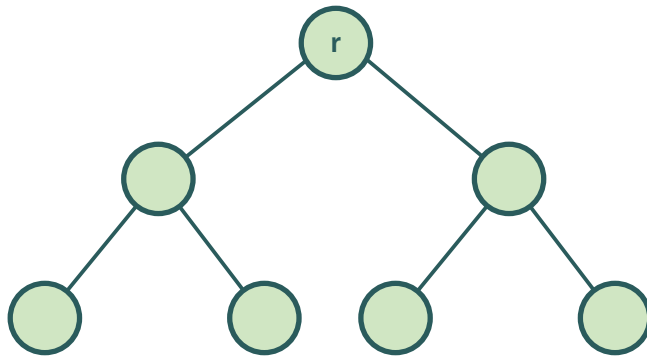


Fonte: do autor.

Outros tipos especiais de árvores binárias, também podem ser definidas, como árvore binária cheia.

Uma árvore binária cheia, é uma árvore binária, onde todos os vértices filhos estão na mesma profundidade. No exemplo da figura 19 observamos que, nem todos, os vértices filhos estão na mesma profundidade. A Figura 20 apresenta um exemplo de árvore binária cheia.

Figura 20 – Exemplo de árvore binária cheia



Fonte: Próprio autor, 2017.

Observa-se que árvores possuem características especiais como a definição dos filhos a esquerda e a direita.

6

APLICAÇÕES DE GRAFOS

INTRODUÇÃO

O primeiro problema a ser resolvido, usando grafos, foi o famoso problema das Pontes de Königsberg, resolvido por Leonard Euler em 1736. Foi então que deu origem a teoria dos grafos. Neste capítulo, veremos o problema das Pontes de Königsberg, o que originou o Grafo de Euler, nome herdado do matemático. Em seguida veremos mais dois problemas clássicos que também podem ser resolvidos usando a teoria desenvolvida por Euler.

Neste capítulo, o objetivo principal é motivar os alunos na resolução de problemas práticos usando a Teoria dos Grafos. Ou seja, o capítulo apresenta a descrição dos problemas e sugere aos alunos a busca da solução. Por se tratarem de problemas clássicos, existem inúmeras fontes de pesquisa que apresentam a solução. No entanto, sugere-se que em um primeiro momento os alunos tentem resolver o problema com base nos conceitos vistos neste livro. Para isso, será preciso entender o problema e modelar ele como um grafo. Após, deve-se demonstrar se o grafo pode ser, ou não, caracterizado por um Grafo de Euler. Caso ele represente um grafo de Euler o problema possui solução. Os problemas apresentados neste capítulo poderiam ser estendidos para outros contextos, que podem ser bem comuns a nosso dia a dia. Por exemplo, como determinar o menor trajeto de um carteiro para a entrega das correspondências? Como determinar se existe um caminho único de coleta de leite em uma cidade? Use a imaginação, e pense em problemas reais que você poderia estar solucionando com a Teoria dos Grafos.

6.1

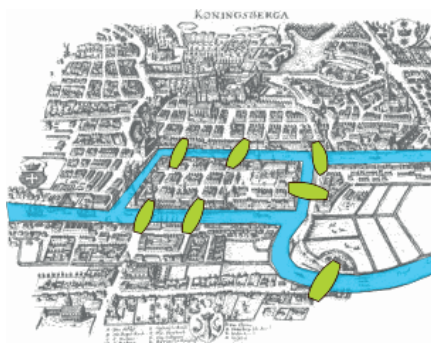
PONTES DE KÖNIGSBERG

O exemplo mais clássico na literatura sobre grafos é o das pontes de Königsberg. A partir desse problema, resolvido por Leonard Euler em 1736, a teoria dos grafos começou a se desenvolver. O problema surgiu na cidade de Königsberg, banhada pelo Rio Pregel, com sete pontes ligando duas ilhas e as margens opostas do rio. Desta forma, o matemático Leonard Euler definiu o seguinte problema:

- Seria possível realizar um passeio pela cidade onde (i) o passeio começa e termina no mesmo lugar; e (ii) durante o passeio deve-se cruzar cada ponte exatamente uma vez.

A Figura 21 mostra o esquema das pontes utilizado pelo matemático Leonard Euler. Segundo a história, Euler teria resolvido o problema para uma situação mais geral, e desta forma, ele utilizou um grafo para representar o problema.

Figura 21 – Pontes de Königsberg



Fonte: Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg

Formalmente o problema pode ser definido da seguinte forma. O conjunto de vértices onde:

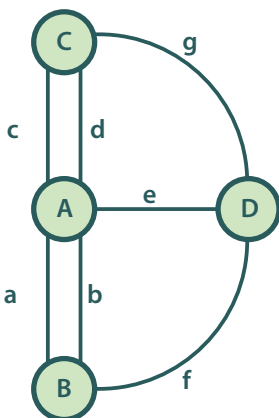
- $V = \{v \mid v \text{ é uma margem ou uma ilha} \}$ e
- $A = \{(v_1, v_2, p) \mid \text{existe uma ponte } p \text{ que une as margens (ou ilhas) } v_1 \text{ e } v_2\}$

Observe que as margens ou ilhas são os vértices do grafo e as pontes as arestas. Assim, para o problema em questão podemos ter todos os seguintes conjuntos:

- $V = \{A, B, C, D\}$ e
- $A = \{(A, C, c), (A, C, d), (A, B, a), (A, B, b), (A, D, e), (B, D, f), (C, D, g)\}$

A Figura 22 apresenta o grafo construído a partir dessa definição. O grafo é o modelo matemático que representa as pontes de Königsberg. Observa-se que o grafo é conexo.

Figura 22 - Grafo que representa as pontes de Königsberg



Fonte: do autor.

Dado o problema, a ideia é a partir de qualquer vértice tentar atravessar todas as arestas uma única vez e retornar ao vértice de origem. Imagine você traçar uma linha entre um vértice inicial e um final sem tirar a caneta do papel desenhando as arestas apenas uma única vez. Uma das preocupações foi determinar qual o tipo de grafo consegue fazer um caminhamento fechado. Com base nessa ideia o grafo ficou conhecido como **Grafo de Euler**.

Como todo Grafo de Euler possui um caminho de um vértice inicial até um final, seguindo um único caminho e sabendo que o problema das pontes de Königsberg, pode ser modelada usando um grafo de Euler, então o problema possui solução. O seguinte teorema é utilizado para provar a solução:

Teorema:

Dado um grafo conexo G qualquer, então G é um grafo de Euler, se e somente se, todos os seus vértices são de grau par.

Informalmente, podemos pegar qualquer problema e modelarmos como um grafo. Se o grafo modelado é um grafo de Euler, então concluímos que o problema tem solução.

6.2

PROBLEMAS CLÁSSICOS

Existem uma infinidade de problemas que podem ser solucionados usando a teoria dos grafos. Muitos problemas clássicos são demonstrados na literatura. A modelagem matemática tem utilizado grafos para resolver vários problemas reais, por exemplo, a modelagem de cruzamentos de rodovias pode ser facilmente modelado usando grafos. Nesta seção veremos algumas aplicações e problemas simples onde se utilizam grafos para a sua resolução. Nos problemas a seguir, faça uma busca na internet e tente resolver e entender cada um dos problemas usando a teoria vista no Capítulo 5.

6.2.1 O Bilionário Count Van Diamond

A Figura 23 apresenta um esquema da casa do bilionário Count Van Diamond que acaba de ser assassinado na área da piscina. Um detetive chamado Sherlock foi contratado para resolver o caso. Sabe-se o seguinte:

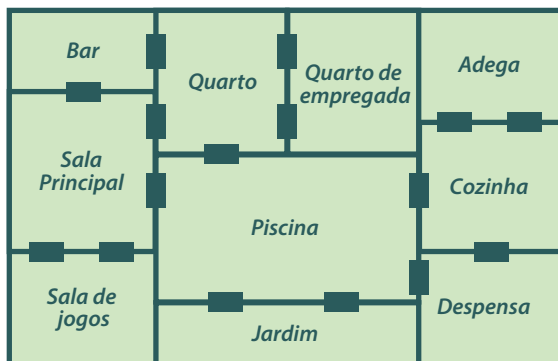
- O mordomo disse que viu o jardineiro entrar na área da piscina e logo após saiu, pela mesma porta que havia entrado.
- O jardineiro, entretanto, afirma que ele não poderia ser a pessoa vista pelo mordomo, pois ele havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa.

Sherlock avaliou a planta da residência (Figura 23) e declarou solucionado o caso. Assim, o Sherlock, que também é um estudioso da teoria dos grafos, conseguiu solucionar o assassinato verificando se o problema pode ser modelado como um grafo de Euler.

Tente modelar o problema com um grafo de Euler e responda as duas perguntas:

- 1) Quem poderia ser o suspeito indicado por Sherlock?
- 2) Qual o raciocínio utilizado pelo detetive para apontar o suspeito?

Figura 23 - O caso do bilionário Count Van Diamond



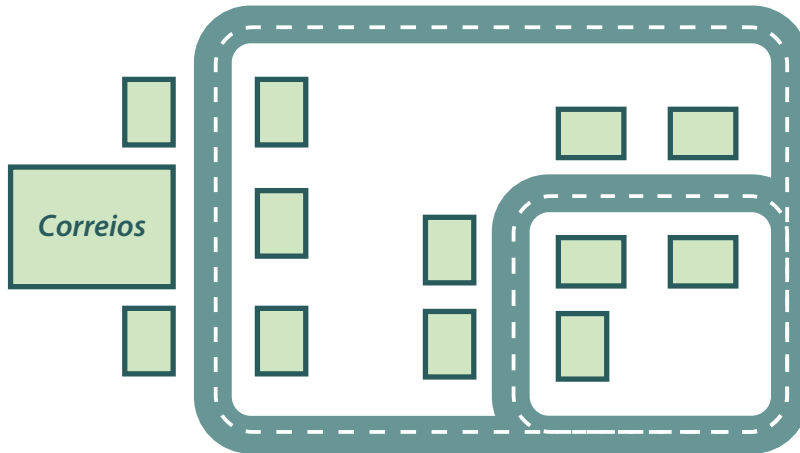
Fonte: do autor.

6.2.2 Problema do Carteiro Chinês

Este problema foi formulado pelo matemático chinês Mei Ku kuan em 1962. O carteiro sai dos correios e tem que visitar todos os prédios próximos entregando as correspondências e retornando ao ponto inicial (escritório dos correios). Em grafos temos que encontrar o caminho mais curto passando por todos os vértices.

A Figura 24 apresenta a representação dos prédios e ruas onde o carteiro precisa entregar correspondência. O carteiro sempre inicia e termina no prédio dos correios.

Figura 24 – Carteiro Chinês



Fonte: do autor, 2017.

Dado o problema acima, a ideia é representá-lo usando um grafo, e então verificar se o grafo dado é um grafo de Euler, ou não. Sua tarefa nesse problema é fazer o grafo e mostrar o passo a passo para que o carteiro faça a entrega de todas as correspondências.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática Discreta é utilizada em várias disciplinas na computação. Podemos citar como exemplos, a Programação de Computadores onde utilizamos frequentemente a teoria dos conjuntos; a Engenharia de Software onde a teoria dos grafos é utilizada para a representação de informações. O próprio desenvolvimento de software e sistemas de informações se dá pelo uso, em diferentes etapas, da matemática discreta.

Neste livro vimos os principais conceitos da matemática discreta. A compreensão da matemática discreta ocorre por meio do entendimento dos conceitos básicos e da resolução de exercícios. Este livro demonstra todos os conceitos básicos importantes da matemática discreta. Assim, a resolução dos exercícios será de fundamental importância para o aprendizado da matemática discreta.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. **Teoria elementar dos conjuntos**. São Paulo: Nobel, 1990.

ESPINOSA, I. C. O. N.; BISCOLLA, L. M. C. C. O.; BARRIERI FILHO, P. **Álgebra Linear para Computação**. Rio de Janeiro: LTC, 2007. Coleção Fundamentos de Informática.

GALLIER, J. **Discrete Mathematics**. USA, Springer: 2011.

GERSTING, J. L. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação**. Rio de Janeiro: LTC, 1993.

GERSTING, J. L. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação**. Rio de Janeiro: LTC, 2004

HALMOS, P. R. **Teoria Ingênua dos Conjuntos**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2001.

IZAR, S. A. E.; TADINI, W. M. **Teoria Axiomática dos Conjuntos**. São José do Rio Preto: Editora da Unesp, 1998.

MENEZES, P. B. **Matemática Discreta para Computação e Informática: Série Livros Didáticos**. Porto Alegre: Editora Sagra Luzzatto, 2004.

SANTOS, J. P. O. **Introdução à teoria dos números**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

ATIVIDADES

Unidade 1 - Conjuntos e Operações

A seguir temos uma lista de exercícios sobre conjuntos e suas operações:

1. Dados os seguintes conjuntos: $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ e $B=\{k,i,b,d,w,e\}$ determine:

- a) $A \cup B$
- b) $B \cup A$
- c) $A \cap B$
- d) $B \cap A$
- e) $A \setminus B$

2. Na turma de Licenciatura em Computação temos 100 alunos, onde 80 gostam de matemática, e 30 de programação, sabendo que 10 gostam de programação e matemática, quantos não gostam nem de programação e nem de matemática? Formalize usando a teoria dos conjuntos e demonstre utilizando um Diagrama de Venn.

3. Para cada um dos itens abaixo faça a união, intersecção, diferença e diferença simétrica dos conjuntos:

- a) $A=\{10,1,15,12\}$ e $B=\{9,0,1,22\}$
- b) $A=\{4,5,1,a,b\}$ e $B=\{1,2,3,b\}$
- c) $A=\{\text{azul, amarelo, verde}\}$ e $B=\{\text{azul, amarelo, verde, preto}\}$
- d) $A=\{x \in \mathbb{R}\}$ e $B=\{10,11,1\}$
- e) $A=a,b,c,d,e,f,g,h$, $B=\{d,h,j,k,a,w\}$ e $C=\{b,a,k,h\}$

Unidade 2 - Funções e Relações

1. Sejam os conjuntos

- $A = \{-6, 0, 3\}$
- $B = \{-2, 1, 5, 6\}$
- $C = \{0, 2, 4, 5\}$
- $D = \{-2, 0, 3\}$

Faça os produtos cartesianos a seguir e represente cada um deles em um plano cartesiano:

- a) $A \times B$
- b) $A \times C$
- c) $C \times D$
- d) $B \times C$
- e) $A \times D$
- f) $B \times D$
- g) $A \times A$
- h) $D \times D$
- i) $C \times A$
- j) $D \times B$

2. Teste a validade das propriedades reflexivas, simétrica e transitiva para as relações R em $A = \{1,2,3\}$ dadas abaixo. Descreva a partição associada a cada relação de equivalência:

a) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

b) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3)\}$

c) $R = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1)\}$

d) $R = A \times A$

3. Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$. Para cada item abaixo, justifique por que são funções parciais e determine o tipo da função (injetora, sobrejetora ou bijetora).

a) $(0, a), (1, b): C \rightarrow B$

b) $A \times B: A \rightarrow B$

Unidade 3 - Indução Matemática e Recursividade

1. Prove por indução as seguintes proposições:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n > 3$ então $2n < n!$

b) $2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2n^2$

2. Pesquise e demonstre a sequência de Fibonacci de forma recursiva.

Unidade 4 - Conjuntos Contáveis, incontáveis e enumerabilidade

1. Descreva cada um dos conjuntos a seguir, listando seus elementos:

a) $S = \{x \mid x \text{ é par, } x \leq 10\}$

b) $S = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ é primo, } x < 50\}$

2. Escreva 5 exemplos de conjuntos finitos.

3. Escreva 5 exemplos de conjuntos incontáveis.

Unidade 5 - Grafos e Árvores

1. Para fixar e compreender bem os conceitos resolva o seguinte exercício: Represente graficamente um grafo com vértices rotulados $\{1,2,3,4,5\}$ e arestas rotuladas $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ considerando as seguintes funções g :

a) $g(a_1) = 1-2$

b) $g(a_2) = 1-3$

c) $g(a_3) = 3-4$

d) $g(a_4) = 3-4$

e) $g(a_5) = 4-5$

f) $g(a_6) = 5-5$

2. Responda também as seguintes perguntas e justifique a sua resposta:

a) Descreva 2 vértices que não são adjacentes

b) Descreva um vértice adjacente dele mesmo

c) Descreva um laço

d) Descreva 2 arestas paralelas

e) Descreva o vértice de grau 3

f) Descreva um caminho de comprimento 5

g) Descreva um ciclo

h) Esse grafo é completo?

i) Esse grafo é conexo?

g) Esse grafo é direcionado?

i) Esse grafo é conexo?

g) Esse grafo é direcionado?

APRESENTAÇÃO DOS PROFESSORES AUTORES

O professor **Cristiano Bertolini** possui graduação em Ciência da Computação, pela Universidade de Passo Fundo (2001), mestrado em Ciência da Computação pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (2005) e doutorado em Ciências da Computação pela Universidade Federal de Pernambuco (2010). Tem experiência na área de Engenharia de Software, com ênfase em Teste de Software, Métodos Formais e Engenharia de Software Experimental. Atualmente é professor adjunto da UFSM no Campus de Frederico Westphalen.

O professor **Guilherme Bernardino da Cunha** possui graduação em Ciência da Computação, mestrado em Ciências (2003) com Ênfase em Inteligência Artificial e Processamento Digital de Imagens e doutorado em Ciências, com ênfase em Engenharia Biomédica, pela Universidade Federal de Uberlândia. Atualmente é professor Adjunto da Universidade Federal de Santa Maria - Campus Frederico Westphalen. Tem experiência na área de Ciência da Computação, atuando principalmente nos seguintes temas: Engenharia de Software, Inteligência Artificial, Análise de Séries Temporais, Epidemiologia, Banco de Dados, Redes Neurais Artificiais, Algoritmos Genéticos e Bioinformática.

A professora **Mariza de Camargo** possui graduação em Matemática Licenciatura Plena, pela Universidade Federal de Santa Maria (1996), mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (1998) e doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2003). Atualmente é professora da Universidade Federal de Santa Maria Campus Frederico Westphalen. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Aplicada, atuando principalmente nos seguintes temas: gases rarefeitos, ordenadas discretas, geometria, modelo bgk e temperature-jump.

Patricia Rodrigues Fortes é licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (1997), possui mestrado em Matemática Aplicada (1998) e doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2003). Trabalhou por 12 anos na URI - Campus de Frederico Westphalen, tendo sido coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática e coordenadora do Comitê de Pesquisa. Em março de 2011, tornou-se professora da Universidade Federal de Santa Maria - UFSM/Campus de Frederico Westphalen, onde trabalha atualmente com disciplinas da área de Matemática nos cursos de graduação em Engenharia Ambiental e Sanitária, Engenharia Florestal, Agronomia e Sistemas de Informação. Suas pesquisas relacionam-se à Matemática Aplicada (Fenômenos de Transporte de Partículas) e ao Ensino de Matemática. Trabalha com extensão universitária, associando conhecimentos matemáticos às ações de projetos da área ambiental, executados na região de abrangência da UFSM/Campus de Frederico Westphalen. Por dez anos trabalhou como Professora Orientadora do Programa de Iniciação

Científica da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). Desde 2007, tem sido membro do Banco de Avaliadores INEP/MEC (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais / Ministério da Educação). É membro da SBMAC (Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional) desde 2000, foi vice-coordenadora da Região 13 - Rio Grande do Sul em 2012, e é a atual Secretária Geral da Diretoria Gestão 2016-2017.