UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

Bismarck Bório de Medeiros

ASPECTOS DO PRIMEIRO TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE KURT GÖDEL E UMA ANÁLISE DA PROVA TEORÉTICO INFORMACIONAL DE GREGORY CHAITIN

Santa Maria, RS
2022

Bismarck Bório de Medeiros

ASPECTOS DO PRIMEIRO TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE KURT GÖDEL E UMA ANÁLISE DA PROVA TEORÉTICO INFORMACIONAL DE GREGORY CHAITIN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Filosofia**.

Prof. Dr. Frank Thomas Sautter

Santa Maria, RS
2022

de Medeiros, Bismarck Bório
ASPECTOS DO PRIMEIRO TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE KURT GÖDEL E UMA ANÁLISE DA PROVA TEORÉTICO INFORMACIONAL DE GREGORY CHAITIN / Bismarck Bório de Medeiros.- 2022.
115 p.; 30 cm

Orientador: Frank Thomas Sautter
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Sociais e Humanas, Programa de Pós-Graduação em Filosofia, RS, 2022

1. Computabilidade Efetiva 2. História da Lógica 3. Incompletude 4. Lógica Matemática 5. Paradoxos I. Sautter, Frank Thomas II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, BISMARCK BóRIO DE MEDEIROS, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Bismarck Bório de Medeiros

ASPECTOS DO PRIMEIRO TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE KURT GÖDEL E UMA ANÁLISE DA PROVA TEORÉTICO INFORMACIONAL DE GREGORY CHAITIN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Filosofia**.

Aprovada em 20 de Maio de 2022.

Frank Thomas Sautter, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Marcelo Esteban Coniglio, Dr. (Unicamp)

Edward Hermann Haeusler, Dr. (PUC-Rio)

Santa Maria, RS
2022

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por me ensinarem a como ser e como não ser uma pessoa: meu amor e carinho incondicionais.

A mulher da minha vida e minha esposa, Kátia, pela paciência, incentivo, carinho e amor recíproco tão completos; e seus familiares, agora meus familiares.

A todos os professores de todas as etapas do meu ensino que me ajudaram a trilhar este caminho, seja por questões respondidas a dúvidas criadas, ensinamentos ou exemplos dados. Na graduação, em especial aos professores Ronai Pires da Rocha – pelas primeiras aulas instigantes sobre a natureza da linguagem e por me incentivar a buscar orientação – a Rogério Passos Severo – por me apresentar a Filosofia como ofício e pesquisa – e meu orientador Frank Thomas Sautter, por expandir meus horizontes com conversas esclarecedoras, apoio e confiança. Em épocas de obscurantismo e desinformação crescentes, cada docente é essencial para incidirmos luz sobre tais percalços.

A todas as amigas e amigos que me apoiaram e me suportaram – em ambos os sentidos – nesta estrada. Em especial, pela Filosofia, grato a Alan (por me apresentá-la), Karine, Jonathas pelas amizades regadas a conversas produtivas e descontraídas.

A Alexandra Asanovna Elbakyan e os desenvolvedores do sítio *Library Genesis*. Sem eles, minha pesquisa e vida acadêmica seriam mais limitadas e menos relevantes. Ter acesso à informação e compartilhar conhecimento é um direito e um compromisso social: àqueles que entendem a relação entre saber acadêmico e poder político, sem represar a primeira através da última, minha profunda gratidão.

Aos colegas e amigos da Base Aérea de Santa Maria, em especial a Seção Histórica de Motores, pelo apoio e camaradagem.

Aos leitores desta dissertação, se as próximas páginas lhe fornecerem um panorama mais completo acerca do fenômeno da incompletude.

“Quando se proclamou que a Biblioteca abrangia todos os livros, a primeira impressão foi de extravagante felicidade. Todos os homens se sentiram senhores de um tesouro intacto e secreto. Não havia problema pessoal ou mundial cuja eloquente solução não existisse: em algum hexágono. o Universo estava justificado, o Universo bruscamente usurpou as dimensões ilimitadas da esperança. [...] *À desmedida esperança, sucedeu, como é natural, uma depressão excessiva. A certeza de que alguma prateleira em algum hexágono encerrava livros preciosos e de que esses livros preciosos eram inacessíveis afigurou-se quase intolerável. Uma seita blasfema sugeriu que cessassem as buscas e que todos os homens misturassem letras e símbolos, até construir, mediante um improvável dom do acaso, esses livros canônicos.”*

Trecho do conto A Biblioteca de Babel, de Jorge Luis Borges

RESUMO

ASPECTOS DO PRIMEIRO TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE KURT GÖDEL E UMA ANÁLISE DA PROVA TEORÉTICO INFORMACIONAL DE GREGORY CHAITIN

AUTOR: Bismarck Bório de Medeiros
ORIENTADOR: Frank Thomas Sautter

O trabalho busca elucidar e compreender aspectos relevantes na estrutura das sentenças indecidíveis paradoxais em sistemas formais consistentes que contenham a Aritmética de Dedekind-Peano. O primeiro capítulo expõe as investigações e avanços na Matemática e na Lógica associadas às concepções filosóficas que culminaram no Primeiro Teorema da Incompletude de Kurt Gödel, publicado em seu artigo *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, em 1931. Para isso, faremos uma abordagem histórica e conceitual da Matemática da segunda metade do século XIX até a primeira metade do século XX com suas linhas de pensamento principais, indicando os elementos e instrumentos matemáticos desenvolvidos para solução de certos problemas, assim como pressupostos e compromissos filosóficos que acompanharam as atividades voltadas à formalização e fundamentação da Lógica Matemática contemporânea que auxiliaram Gödel a elaborar sua demonstração e explicitar as limitações de tais sistemas formais. O segundo capítulo tem como objetivo analisar os componentes e expor ou elaborar sentenças indecidíveis formalizadas baseadas em paradoxos considerados epistêmicos ou semânticos. Serão discutidos paradoxos expressos de forma implícita e explícita na estrutura das sentenças indecidíveis, abordando semelhanças e distinções tanto de sentenças indecidíveis finitárias quanto infinitárias, procurando entender as provas e fenômenos que levam a incompletude de sistemas que contêm a Aritmética de Dedekind-Peano. Logo após, o terceiro capítulo terá foco na aplicação da Teoria Algorítmica da Informação desenvolvida por Gregory Chaitin para demonstrar uma discutida versão da incompletude de sistemas formais baseada no Paradoxo de Berry. Será retomada a literatura crítica a tal versão teorético-informacional, bem como feita uma análise com base nas sentenças vistas anteriormente, realizando-se um escrutínio acerca das justificativas e definições utilizadas na prova de Chaitin. Ao final, abrimos uma discussão acerca da natureza da incompletude associada a incomputabilidade e os limites de processos computáveis finitos.

Palavras-chave: Computabilidade Efetiva. Complexidade. Finitismo. Funções Recursivas. Incompletude. Indecidibilidade. Informação Algorítmica. Lema Diagonal. Paradoxos.

ABSTRACT

ASPECTS OF KURT GÖDEL'S FIRST INCOMPLETENESS THEOREM AND AN ANALYSIS OF GREGORY CHAITIN'S INFORMATION-THEORETIC PROOF

AUTOR: Bismarck Bório de Medeiros
ADVISOR: Frank Thomas Sautter

The work seeks to elucidate and understand relevant aspects in the structure of paradoxical undecidable sentences in consistent formal systems that contain Dedekind-Peano Arithmetic. The first chapter exposes the investigations and advances in Mathematics and Logic associated and the philosophical conceptions that culminated in Kurt Gödel's First Incompleteness Theorem, published in his article *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, in 1931. We will make a historical and conceptual approach to Mathematics from the second half of the 19th century to the first half of the 20th century with its main lines of thought, indicating the mathematical elements and instruments developed to solve certain problems, as well as philosophical assumptions and commitments that accompanied the activities aimed at the formalization and foundation of contemporary Mathematical Logic that helped Gödel to elaborate his demonstration and to explain limitations of such formal systems. The second chapter aims to analyze the components and expose or elaborate formalized undecidable sentences based on paradoxes considered epistemic or semantic. Will be discussed paradoxes expressed implicitly and explicitly in the structure of undecidable sentences. We approaching similarities and distinctions of both finite and infinite undecidable sentences, seeking to understand the proofs and phenomena that lead to the incompleteness of formal systems that contains Dedekind-Peano Arithmetic. Soon after, the third chapter will focus on the application of Algorithmic Information Theory developed by Gregory Chaitin to demonstrate a discussed version of incompleteness of formal systems based on Berry's Paradox. The critical literature on this information-theoretic version will be resumed, as well as an analysis based on the sentences seen above, carrying out a scrutiny of the justifications and definitions used in Chaitin's proof. At the end, we open a discussion about the nature of incompleteness associated with the notion of computability and the limits of finite mechanical processes.

Keywords: Algorithmic Information. Complexity. Diagonal Lemma. Effective Computability. Finitism. Incompleteness. Paradoxes. Recursive Functions. Undecidability.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Os Teoremas da Incompletude de Kurt Gödel foram divisivos para a comunidade filosófica no século XX por quebrar uma crença que há muito era difundida e enraizada na Matemática: que todos os problemas matemáticos poderiam ser resolvidos dado a abordagem e formulação adequadas. Demonstrar que há certas afirmações que não podem ser provadas ou refutadas dentro de uma porção da Aritmética é o resultado dos consideráveis avanços na Matemática e na Lógica ao final do século XIX e primeira metade do século XX. Estes avanços perpassando um caminho envolvendo crises e revoluções – em um sentido kuhniano[1] – que incentivaram uma ampla investigação filosófica, lógica e matemática no desenvolvimento de novas teorias, instrumentos e fundamentações nestas áreas. Um dos consideráveis avanços nestes campos culminaram nos trabalhos de Gödel e em seus teoremas de seu artigo de 1931, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*.

Contudo, mesmo Gödel sendo considerado o maior lógico desde Aristóteles, seus resultados são fruto de problemas e investigações prévias que possibilitaram sua realização e encontram-se, direta ou indiretamente, no cerne de seu teorema, possibilitando e viabilizando sua demonstração, que inclusive que perpassam historicamente o estabelecimento de conceitos e princípios formais bem definidos, mudanças de paradigma, surgimento de novas áreas de investigação matemática e até questionamentos acerca da legitimidade de técnicas de prova desenvolvidas. Começaremos introduzindo os problemas que insurgiram suspeitas e levaram as linhas de pesquisa que visassem uma base segura e confiável para a Matemática.

1.1. O QUINTO POSTULADO E O PROBLEMA DA CONSISTÊNCIA

O livro *Os Elementos* de Euclides foi o paradigma para a Geometria e o método axiomático, até o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas. Tal mudança ocorreu devido a um aspecto que era considerado anômalo na comunidade matemática: o quinto

1 Ver (DAUBEN, 1982) para uma aproximação entre os conceitos historicistas kuhnianos em Filosofia da Ciência na História da Matemática.

postulado de Euclides – chamado comumente de Postulado das Paralelas – e que parecia muito mais arbitrário que os outros postulados, tido como menos intuitivo e autoevidente[2].

1.1.1 O Postulado das Paralelas

O matemático David Hilbert, historicamente o precursor da investigação dos fundamentos da Matemática e da Lógica por meio do método axiomático, expõe em seu artigo de 1917, *Axiomatic Thinking*:

> "O axioma das paralelas em geometria oferece o clássico exemplo para o exame da independência de um axioma. Euclides respondeu negativamente a tal questão, assim como se a proposição das paralelas já estava condicionada por outros axiomas, pois ele o colocou [o quinto postulado] sob os outros axiomas. O método de investigação de Euclides tornou-se típico da investigação axiomática e, desde Euclides, a geometria vem sendo um modelo para a ciência axiomática em geral. (HILBERT, 1970, p.2, tradução nossa)

Na História, matemáticos buscaram deduzir o postulado das paralelas dos outros postulados, porém tais tentativas culminaram em fracasso[3], demonstrando-se posteriormente nos trabalhos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), János Bólyai (1802-1860) e Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) a impossibilidade de derivar o quinto postulado ou a sua negação dos outros quatro. Ou seja, havia uma possível *independência* do quinto postulado com relação aos outros. Desta forma, realizando modificações no quinto postulado e com o desenvolvimento da Teoria de Conjuntos, algebrização e funcionalização destas áreas, temos como consequência a construção de geometrias não-euclideanas (elípticas, hiperbólicas) bem como dos instrumentos técnicos para o desenvolvimento de campos como a Topologia Algébrica (área antes com antecedentes na *Analysis Situs* leibiniziana, sendo reconstituída por Henri Poincarè)[4].

---

2 Em (DE RISI, 2016, cap. 2) há uma discussão histórica sobre esta desconfiança dos matemáticos acerca do quinto postulado de Euclides até Leibniz, que tentou por várias abordagens uma demonstração de sua independência.

3 Muitas destas demonstrações mostraram-se com o tempo matematicamente equivocadas ou apenas equivalentes ao quinto postulado original. O postulado resistiu aos ataques de Aristóteles, na Antiguidade, a matemáticos árabes e bizantinos e ao mais famoso, o italiano Girolamo Saccheri (1667-1733). Ver (ROSENFELD, 1988, cap. 2).

4 Ver (DE RISI, 2018), (FERREIRÓS, 2007, cap. II) e (POINCARÈ, 2010), este último com comentários de John Stillwell.

Dentro destas investigações, interesses matemáticos e filosóficos foram surgindo pelas dúvidas acerca da própria constituição do método axiomático, pois:

> "A crença tradicional de que os axiomas da geometria [...] podem ser estabelecidos por sua aparente auto-evidência foi assim radicalmente solapada. Além disso, pouco a pouco, tornou-se claro que o negócio mesmo do matemático puro é *derivar teoremas de hipóteses postuladas* e que não lhe compete, como matemático, decidir se os axiomas que pressupõe são verdadeiros.." (NAGEL e NEWMAN, 2001, p. 19)

Assim, perguntas como:

(1) Qual será o caráter epistêmico dos axiomas, bem como do método de prova a ser implementado?

(2) Será que a partir da verdade de tais axiomas, aplicando as regras de inferência estabelecidas, derivamos *apenas* teoremas igualmente verdadeiros, ou bem como *todos* os teoremas verdadeiros?

(3) Podemos ter o problema de em um determinado sistema axiomático derivarmos proposições mutuamente contraditórias ou de não conseguirmos derivar nenhuma delas?

Estes questionamentos abriram toda uma área voltada a entender distinções sintático simbólicas e semântico linguísticas que não diziam respeito apenas ao campo da geometria euclidiana, mas qualquer sistema formal[5] ou domínio que se fazia apresentar por axiomas e regras de inferência para deduzir novos teoremas – inclusive as recentes geometrias não-euclidianas. Indagações semelhantes a (1) eram seguidas de compromissos mais filosóficos dos matemáticos acerca do que se trata o conhecimento matemático e de seus objetos, tal como as melhores maneiras de desenvolver demonstrações dentro do sistema formal proposto.

5 Em situações de maior exigência e rigor acerca das propriedades lógicas e do objeto que está sendo investigado, recorre-se a instrumentos mais precisos, realizando-se:
(a) a seleção e discriminação dos componentes da linguagem (quantificadores, predicados, relações, símbolos – "alfabeto" da linguagem formal – variáveis, etc.);
(b) regras de boa formação de uma proposição nesta linguagem, ou seja, o que é uma fórmula bem formada (doravante wff – well formed formula) levando em consideração uma ordenação destes componentes – a gramática;
(c) Fórmulas bem formadas iniciais (podendo ser chamadas de axiomas, postulados ou proposições básicas);
(d) regras de inferência (processos para derivar, tirar como consequência, outras proposições das mais básicas ou das já demonstradas anteriormente) e;
(e) Uma interpretação, ou seja, atribuição de verdade ou falsidade às wff básicas.
Nestas etapas, (a) a (d) resumem a elaboração do que podemos chamar de um sistema formal, e com a inclusão de (e), acrescenta-se semântica à sintaxe, e temos assim um sistema lógico.

Já (2) tem um ponto mais lógico e se tratava de uma característica das regras de inferência com relação ao conjunto de axiomas do sistema, chamada de correção (*soundness*) – *se, dada a verdade dos axiomas deste sistema e a validade de seus processos inferenciais, suas consequências também serão verdadeiras* – assim como (3) destaca uma preocupação tanto com a consistência quanto com a completude deste sistema[6], respectivamente. Aqui:

> "Um dos óbvios resultados deste estudo crítico é que axiomas geométricos não são verdades necessárias, mas somente pressuposições: são hipóteses nas quais encontram-se todo o corpo de teoremas. É essencial que um sistema axiomático deva ser consistente uns com os outros e desejável que seja não-redundante e completo". (LEWIS, 1920, p. 20, tradução nossa)

1.1.2 A busca dos fundamentos da Matemática e seus problemas

Cabe destacarmos dois aspectos que contribuíram para o avanço da Lógica Matemática, sendo um deles a causa e o outro, consequência das perguntas feitas acima. Na comunidade matemática, houve uma demanda por provas de que o conhecimento matemático desenvolvido até então (como o as geometrias anteriormente citadas) assentavam-se em bases e fundamentos seguros, livres dos possíveis problemas de (2) ou (3). Estes aspectos são a existência de provas de impossibilidade[7] ou independência e as provas de consistência. O primeiro caso foi fundamental para indicar a possibilidade de demonstrações metamatemáticas em outros campos, e no segundo tomou proporções de um objetivo a ser alcançado a todo sistema axiomático proposto. Inicialmente, foram desenvolvidas provas de consistência relativa, ou seja, se outro sistema for consistente, o que almejamos também o é.

---

6 Interpretando sintaticamente, a consistência trata-se da propriedade metamatemática de não derivar-se contradições no sistema estabelecido. E a completude, que dado uma wff expressa no sistema, ou ela ou sua negação possam ser demonstráveis. Ou seja, será inconsistente o sistema que dentro dele conseguirmos derivar contradições, e será incompleto o sistema em que não consigamos demonstrar no sistema ao menos uma wff e nem sua negação.

7 Desde a Antiguidade, há também dois problemas geométricos de natureza construtiva que se mantiveram até o séc. XIX: (a) trissecção de um ângulo e (b) a quadratura do círculo por régua e compasso. Hilbert destaca na conclusão de seu Foundations of Geometry (*Grundlagen der Geometry*) que "[...] na matemática moderna, a questão da impossibilidade da solução de certos problemas tem um importante papel, e as tentativas feitas para responder tais questões frequentemente tem ocasionado em novas descobertas e frutíferos campos de pesquisa." (HILBERT, 1999, p. 83, tradução nossa) Além do problema do postulado das paralelas, o matemático destaca outras demonstrações de impossibilidade, como o Teorema de Abel-Ruffini que prova a impossibilidade de acharmos as raízes de uma equação acima do quarto grau por meio de radicais, e a comprovação de que os números π e e não podem ser construídos algebricamente – sendo denominados de números transcendentais – onde esta última tem por consequência a impossibilidade de (b).

Mantendo como paradigma a Geometria, a prova da consistência relativa das geometrias não euclidianas (denominemos os sistemas axiomáticos das geometrias hiperbólicas e elípticas de L' e R', respectivamente) foi desenvolvida por Henri Poincarè com base no que pode-se chamar de um mapeamento – ou interpretação – dentro do sistema euclidiano (doravante E') dos axiomas de L e R:

> "Se, por exemplo, nós substituirmos os elementos e relações básicas de um axioma P do sistema L por aqueles elementos e relações euclidianas que suas contrapartes estão conforme a explicação dos signos – deixando o significado do restante inalterado – então o axioma torna-se uma proposição euclidiana P'". (BÓLYAI; KÁRTESZI e SZÉNÁSSY, 1987, p. 192, tradução nossa)

Este processo é chamado de *método de modelos*. Tal conceito de modelo foi pioneiramente mencionado e utilizado por Bólyai e temos, com sua aplicação, uma "[...] prova que se a geometria euclidiana é consistente, então os sistemas formais L' e R' são formalmente consistentes, onde L' e R' são os resultados de substituir as expressões não-lógicas nas geometrias de Lobachevsky e Riemann por letras [signos] esquemáticas" (HUNTER, 1980, p. 81, tradução nossa). Observemos que este mapeamento não se trata de interpretar os axiomas do sistema euclidiano como axiomas de L' ou R', mas sim o inverso. Logicamente, por *modus tollens*, o mapeamento estabelecido denota que, se os sistemas L' ou R' forem inconsistentes, o sistema euclidiano também o é. Portanto, a consistência dos mesmos é *relativa* a consistência de E'.[8]

Porém, a prova de consistência relativa apenas transfere o problema para outro sistema, pois agora cabe – além de demonstrar a prova de consistência relativa de L' e R' a E' - demonstrar também a própria consistência de E'. Na última década do século XIX, o matemático David Hilbert empreendeu esforços para axiomatizar a Geometria e demonstrar sua consistência, publicando seus resultados em 1899 em seu *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria). Porém, como o próprio Hilbert explica:

> "Eu provei a consistência dos axiomas propostos, na qual mostrei que cada contradição na dedução dos axiomas geométricos deve, também, necessariamente ser discernível na aritmética do sistema dos números reais. (...) é sempre suficiente reduzir a questão da consistência interna à consistência dos axiomas aritméticos." (HILBERT. 1970, p. 8, tradução nossa)

8 Esta técnica de prova, em diferentes aspectos, tem muitas outras aplicações além da prova de consistência. Desde provas de decidibilidade lógica ao estudo de complexidade de problemas computacionais, pode-se interpretar proposições de certos sistemas como proposições de outro ou reduzir problemas a outros tipos de problemas. Veremos mais adiante que esta estratégia de mapeamento será utilizada por Gödel em seu Teorema da Incompletude para evitar de incidir no denominado Paradoxo de Richard.

Consequentemente, Hilbert reforça seu objetivo de proporcionar fundamentos seguros para a Matemática pelo estabelecimento da consistência da Análise. Onde, devido aos trabalhos de Karl Weierstrass e Richard Dedekind, utilizam conceitos e noções conjuntistas de números inteiros, i.e., em uma abordagem infinitista da Matemática, é constatado que tal consistência deve estar relacionada à consistência de sistemas formais que tenham robustez suficiente para expressar sentenças aritméticas. Aqui, esta contínua regressão cessa, sendo necessária a axiomatização e maior formalização da Lógica, com a teoria dos números e de conjuntos sendo parte da mesma (HILBERT, 1980, pp. 8-9). Anteriormente, matemáticos e filósofos como George Boole, Ernst Schröder e Charles S. Pierce contribuíram para esta maior formalização. Contudo, foi com o desenvolvimento da noção de quantificadores por Gottlob Frege (1848-1925) em seu *Begriffsschrift* (Conceitografia) que uma revolução nos métodos de prova e formalização lógica puderam ser feitos, culminando em seu *Grundgesetze der Arithmetik* e na obra de Alfred Whitehead e Bertrand Russell *Principia Mathematica*, estes com o intuito de formalizar e reduzir toda a Matemática à Lógica. Historicamente, este compromisso é assumido dentro do chamado projeto logicista da Matemática. Hilbert, mesmo tendo pontos de vista em comum com os logicistas, também tinha muitas discordâncias filosóficas e metodológicas, sendo considerado um instrumentalista.

Porém, havia outros problemas a serem contornados que motivaram o próprio Hilbert a estabelecer um programa[9] – que será destacado mais adiante – que visasse a consistência da Análise por meio do método axiomático: a falta de conceituação adequada do que seria o infinito e o surgimento de antinomias (paradoxos) dentro do sistema. Ambos os temas estão ligados aos problemas que surgiram no desenvolvimento da Teoria de Conjuntos. A partir daqui, procuraremos entender melhor quais definições conceituais e instrumentos matemáticos foram decisivos na descoberta (ou criação, dependendo de como se enxerga este empreendimento de investigação e seus objetos) da incompletude.

9 Para uma introdução e obra mais completa acerca do tema, ver (ZACH, 2003) e (DETLEFSEN, 1986).

2. OS INSTRUMENTOS E CONCEITOS LÓGICO-MATEMÁTICOS DO PRIMEIRO TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE KURT GÖDEL

Neste capítulo, veremos o desenvolvimento de teorias e diversos recursos técnicos que foram utilizados ou influenciaram na resolução e entendimento de problemas matemáticos e conceituais que culminaram no Primeiro Teorema da Incompletude. Falaremos sobre o desenvolvimento da Teoria de Conjuntos e seu método de diagonalização, o advento e penetrabilidade dos paradoxos nos fundamentos da Matemática, a busca da comunidade em evitar tais paradoxos e suas aplicações na construção se sentenças denominadas metamatemáticas, o ponto de vista finitista e sua importância no conceito de recursividade e o fenômeno da autorreferência, mostrando como tais tópicos convergem a prova de Gödel.

2.2 TEORIA DE CONJUNTOS, FUNDAMENTAÇÕES E PARADOXOS

A noção intuitiva de classe ou conjunto é tão ou mais antiga que a própria noção de número. Contudo, as bases matemáticas de uma teoria de conjuntos começaram a ser esboçadas apenas no séc. XIX com Bernard Bolzano. Ele já expressava as relações um-para-um entre os elementos de um conjunto, bem como identifica a possibilidade de conjuntos com infinitos elementos, defendendo a correspondência um-a-um, i.e, bijeção, como condição suficiente para o estabelecimento de identidade entre tipos de conjuntos infinitos[10], tal como o matemático que elaborou a demonstração da hipótese de tamanhos distintos de infinito: Georg Cantor[11], deixando a abordagem mereológica (do todo maior que as partes) para conjuntos finitos. Assim, o matemático Johann Dirichlet começa a estabelecer o conceito formal de função como "[...] alguma (arbitrária) correspondência um-a-um entre os números de um domínio e os números do codomínio" (MANCOSU, 2016, p. 148, tradução nossa), influenciando os trabalhos posteriores de Riemann e auxiliando no desenvolvimento da abordagem teorética-conjuntiva da Análise feita por Dedekind e Weierstrass, quando a Teoria de Conjuntos ganhou corpo, e outros problemas de ordem conceitual.

10 Ver (MANCOSU, 2016, pp. 130-132). O tópico sobre medidas e diferentes tamanhos de infinito – em termos de coleções de números – levava sempre a paradoxos – como nos escritos de Galileu em que havia uma aparente antinomia entre haver mais números naturais que quadrados desses números, porém a coleção dos números naturais e dos quadrados tinha o mesmo tamanho (MANCOSU, 2016, p. 117). Porém, não era uma discussão recente, sendo identificada desde o século IX.

11 Ver (MANCOSU, 2016, cap. 3.5) para mais detalhes.

2.1.1 Teoria de Conjuntos e a ascensão dos paradoxos

O impacto e o sucesso da crescente utilização de abordagens conjuntistas foram revolucionárias à Matemática contemporânea. Todavia, como todo campo em desenvolvimento, foram criando novas ferramentas para resolução dos crescentes problemas – ampliando assim as técnicas de demonstrações matemáticas – assim como foram surgindo novos problemas. Cantor, em uma carta a Dedekind de 1873 pergunta se ele sabia se o conjunto *N* dos números naturais tem correspondência um-a-um ao conjunto *R* dos números reais. Dedekind não chegou a tal resultado, porém já havia provado que o conjunto dos naturais e o conjunto dos números algébricos têm o mesmo tamanho, enviando sua prova a Cantor. Poucos dias depois ele constrói uma demonstração (FERREIRÓS, 1993, p. 349) da não-enumerabillidade de *R* utilizando um argumento topológico, culminando em seu artigo[12] (CANTOR, 1874). Com estes e outros resultados, formou-se a linha de pesquisa que veio a se chamar de teoria cantoriana ou ingênua dos conjuntos e o estudo dos números transfinitos.

Porém, em pouco tempo foram constatadas antinomias. A primeira delas foi exposta em um artigo por Cesare Burali-Forti em (BURALI-FORTI, 1897) onde constata-se que, de acordo com a tese da boa ordenação dos números ordinais transfinitos:

1. Cada conjunto bem-ordenado A tem um número ordinal único;
2. Cada conjunto A de ordinais que contém os predecessores dos ordinais de todos os seus elementos têm um ordinal maior que o de A;
3. O conjunto de todos os ordinais naturalmente é bem-ordenado.

Em resumo, levando em conta (3), se o conjunto de todos os números ordinais têm um número ordinal, Ω, digamos, a sequência de todos os ordinais até e incluindo Ω têm o número ordinal $\Omega+1$. A questão é que se o conjunto de todos os ordinais detêm $\Omega+1$, então $\Omega+1< \Omega$. Porém $\Omega+1> \Omega$ devido a (2), e se considerarmos (1), $\Omega+1= \Omega$. Portanto, se o conjunto dos ordinais é bem-ordenado, então ele não é bem-ordenado, formando-se a antinomia. Mesmo que o paradoxo na época não tenha gerado tanta repercussão[13] Cantor aparentemente já tinha

12 Contudo, é apenas em (CANTOR, 1891) que o matemático apresenta outra prova com uma nova ferramenta chamada *diagonalização* ou *argumento diagonal* – sendo este um dos artifícios mais importantes utilizados por Gödel em sua prova da incompletude – que daremos destaque mais adiante.

13 De acordo com (COPI, 1958, p. 281-282), a falta de repercussão foi devido a três fatores: a um erro no artigo da definição de conjunto bem-ordenado utilizada por Cantor, tornando a derivação do paradoxo inicialmente

ciência de paradoxos anteriores ao Paradoxo de Burali-Forti. No escrito de (CANTOR, 1899), em uma carta a Dedekind, ele tenta solucionar tal problema denominando uma coleção de coisas inicialmente não como um conjunto, mas como uma multiplicidade, se diferenciando em multiplicidades absolutamente infinitas ou inconsistentes e multiplicidades consistentes - estas últimas sim, chamadas por ele de conjunto[14]. A distinção, mesmo buscando evitar possíveis inconsistências na teoria, não teve tanto impacto. De acordo com a introdução feita a carta de Dedekind por Van Heijenoort:

> "A distinção permanece imprecisa. Uma multiplicidade é um conjunto se podemos considerá-la, sem contradição, como um objeto. A ideia ficará nitidamente definida quando for especificado que a multiplicidade é um conjunto, seja o que for que seja um elemento de outra multiplicidade". (VAN HEIJENOORT, 1967, p. 113, tradução nossa)

Em (HILBERT, 1905) comenta-se que Cantor, em sua opinião, "[...] não estabelece nenhum critério preciso para esta distinção", indicando que "[...] sua concepção [Cantor] neste ponto deixa espaço para o julgamento subjetivo, e portanto não oferece nenhuma certeza objetiva." (HILBERT, 1905, p. 340, tradução nossa). A discussão acerca de um princípio de boa ordenação livre de antinomias foi crucial também para a abordagem axiomática da teoria de conjuntos[15]. Neste mesmo artigo Hilbert continua, dando ênfase ao seu método e os objetivos lógico-matemáticos em sua posição a serem alcançados na época, além de expor argumentos divergentes da posição reducionista do logicismo[16]:

suspeita; ao paradoxo não ser exposto tão convincentemente quanto possível, com a resolução dada por Cantor na carta a Hilbert ao problema ter sido convincente à época (porém não suficiente), e; o ofuscamento da questão por uma considerada mais relevante, que seria o debate entre quem aceitava a teoria dos números transfinitos de Cantor e quem as rejeitavam junto com os métodos não-construtivistas do que chamavam de Cantorismo – movimento esse encabeçado por Leopold Kroneker, um influente matemático da época e entusiasta da matemática feita por métodos finitistas.

14 Mais detalhes da reação de Cantor aos paradoxos em (FERREIRÓS, 2007, pp. 290-296).

15 A discussão acerca do estabelecimento da boa ordenação de conjuntos de maneira clara e sem inconsistências culminou no artigo de Zermelo *Proof that every set can be well-ordered* em 1904, introduzindo o Axioma da Escolha como ferramenta fundamental nas teorias de conjuntos contemporâneos.

16 Haviam divergências determinantes entre o Logicismo de Frege e o instrumentalismo de Hilbert que circundam temas envolvendo verdade e existências matemáticas, culminando no que hoje é chamada de a Controvérsia Frege-Hilbert. Um deles é a consideração da necessidade de uma prova de consistência dos axiomas. Frege achava desnecessário, posto que para ele a verdade dos axiomas seria *a priori*, até sugerindo em escritos que elas portariam uma propriedade que ele chamaria de autoevidência ou obviedade. Já Hilbert via a prova como fundamental, posto que os axiomas não garantiam a verdade de um sistema axiomático, vide a crise envolvendo as geometrias não-euclidianas e seus status epistêmico com relação à euclidiana. Para mais informações, ver (RESNIK, 1974).

> “Eu sou da opinião que todas as dificuldades tocadas podem ser superadas e podemos atingir uma rigorosa e inteiramente satisfatória fundação do conceito de número, por um método, que chamarei de axiomático [...] A aritmética é frequentemente considerada parte da lógica, e as noções lógicas fundamentais tradicionais são usualmente pressupostas quando está em questão estabelecer uma fundação para a aritmética. No entanto, se nós observarmos atentamente, nós percebemos que na exposição tradicional das leis da lógica, certas noções aritméticas fundamentais já são usadas, por exemplo, a noção de conjunto e, até certo ponto, a noção de número. Assim, nos encontramos rodando em círculos, e este é o porquê um desenvolvimento parcialmente simultâneo das leis da lógica e da aritmética são requeridos – se paradoxos devem ser evitados”. (HILBERT, 1905, p. 340, tradução nossa)

Desta forma, o esforço do desenvolvimento e fundamentação da Matemática no início do século XX convergiam aos programas que visavam à fundamentação da Aritmética e da Teoria de Conjuntos – bem como a da própria Lógica – que não envolvessem inconsistências. Estas posições se acentuaram quando Bertrand Russell, em sua famosa carta a Frege (RUSSELL, 1902) percebe que há problemas ao definir certos conceitos (abordado por Russell como predicados e seus correlatos) devido à possibilidade da indeterminação daquilo que recai sob o conceito, ou seja, sobre o quê é predicado na função estabelecida. Um exemplo dado por Russell envolve o predicado *w* que denota *o que não pode ser predicado de si mesmo*. A questão é: o predicado *w* pode ser predicado de si mesmo? Se for predicado de si mesmo, ele não é predicado de si mesmo, e vice-versa, seguindo-se disso uma contradição conhecida como Paradoxo de Russell. Outro exemplo envolve a mesma consequência, só que o que está diretamente em questão é a noção fregeana da extensão de um conceito[17]: se temos uma coleção da totalidade de conjuntos que não contêm a si mesmos, ele está contido em si mesmo? Observamos aqui outra antinomia, que afetou o projeto logicista[18] fregeano e acrescentou paradoxos às tentativas de fundamentação da Matemática.

17 O que abalou as estruturas lógicas da obra fregeana foram estas inconsistências encontradas por Russell dentro da Lei básica V, que estabelecia a equivalência do chamado *curso-de-valores* (um tipo de objeto que representa os valores de cada elemento que está contido na extensão do conceito que a função denota) entre uma função f(x) e outra g(x). Russell percebeu que as extensões dos conceitos (que, lembrando, são conjuntos) podem ser extensões de si mesmas. Os problemas derivam de um corolário da própria lei, que todo conceito tem uma extensão. Os casos paradoxais abordados por Russell mostram conceitos que não tem extensão. Para mais detalhes ver (ZALTA, 1998, seção 2).

18 O projeto com tendências reducionistas de subsumir a Matemática na Lógica não foi exclusividade de Frege. Russell e Hilbert também tinham simpatias pela ideia, sendo explicitada inicialmente na obra *Was sind and was sollen die Zallen?*, (traduzido para o inglês como *The nature and meaning of numbers*) de Dedekind: “Ao falar de Aritmética (Álgebra, Análise) como uma parte da Lógica, quero dizer que considero o conceito de número totalmente independente das noções ou intuições de espaço e tempo, que considero um imediato resultado das leis do pensamento [...] É apenas através do processo puramente lógico de construção da ciência dos números e, assim, adquirindo o domínio numérico do contínuo (*continuous number-domain*) que nós estaremos adequadamente preparados para investigar com precisão as noções de espaço e tempo, colocando-os em relação com este domínio criado em nossa mente” (DEDEKIND, 1888, pp. 31-32, itálico e tradução nossa).

2.1.2 O desenvolvimento lógico-matemático de Russell

Na primeira década do século XX, Russell buscou desenvolver construções lógicas e teorias que impedissem o aparecimento de paradoxos em seus princípios e propiciasse um fundamento legítimo para a Matemática. Em suas investigações no período de (RUSSELL,1903) até (RUSSELL, 1908), há quatro teorias: no Apêndice B de Principles of Mathematics de 1903 ele descreve o que seria a Teoria de Tipos Simples, já até 1908 ele esboça uma teoria sem classes (*no-class theory*), teoria da limitação de tamanhos (*sizes*) e a teoria zigzag[19], culminando ao final na *teoria ramificada de tipos*, um aperfeiçoamento da teoria comum com a teoria sem classes, onde todas as sentenças são organizadas em uma hierarquia onde uma classe específica só pode ter elementos de mesmo tipo, sendo o tipo mais básico constituído por individuais (ou objetos), seguido por predicados (ou conceitos), predicados de predicados e assim sucessivamente. Esta separação simples de tipos – chamada de hierarquia extensional por Russell – deve-se aos paradoxos envolvendo sistemas formais, tais como o da obra de Frege. Porém, também há os mais informais baseados em certas circularidades próprias da linguagem, como o próprio paradoxo do mentiroso. Russell fará então a distinção entre propriedades e/ou definições predicativas e impredicativas, sendo esta última uma totalidade de propriedades que também é uma propriedade, podendo envolver a si mesma ou sua negação na predicação e com isso, o risco de circularidades que levem a antinomias[20]. Deste modo, o lógico inglês também separará propriedades de primeira ordem de propriedades de segunda ordem (referentes à totalidade das propriedades de primeira ordem), as de segunda com as de terceira etc, delineando estas hierarquias de tipos.

Tal concepção foi implementada por Russell em sua *magnum opus* – com intenção de dar bases sólidas a toda Matemática – em conjunto com o matemático e filósofo Alfred N. Whitehead, *Principia Mathematica* (doravante PM). O sistema formal do *Principia* tem por base lógica esta teoria ramificada de grupos, fornecendo a princípio o rigor e restrições necessárias para evitar-se problemas na exigência da consistência das partes mais simples da Matemática, como a Aritmética elementar, utilizando-se dos axiomas estabelecidos pelo

19 Para mais detalhes do primeiro, ver (RUSSELL, 1903), Apêndice B). Sobre os três últimos, ver (URQUHART, 1988) e principalmente, (RUSSELL, 1906).

20 O próprio Russell dá um exemplo utilizando o termo típico; ordinário. Um homem inglês típico é o que detém todas as propriedades da maioria dos ingleses. Observamos que quando a propriedade de ser um típico homem inglês é considerada ela mesma uma propriedade, ela pode não ser uma propriedade que a maioria dos ingleses tem, sendo portanto, atípica.

matemático italiano Giuseppe Peano em (PEANO, 1899), definindo-os em PM (conhecida por Aritmética de Dedekind-Peano, doravante PA). Gödel inclusive destaca no início de seu artigo sobre proposições indecidíveis no Principia e sistemas relacionados (GÖDEL, 1931a) sua relevância e abrangência:

> “O desenvolvimento da matemática em direção a uma maior precisão levou, como é bem conhecido, a formalização de grandes porções suas, tal que pode-se provar algum teorema usando nada além de umas poucas regras mecânicas. Os sistemas formais mais abrangentes que foram criados até agora são o sistema de Principia Mathematica (PM) por um lado e o sistema de axioma Zermelo-Fraenkel de teoria de conjuntos (desenvolvido posteriormente por John Von Neumann) no outro. Esses dois sistemas são tão abrangentes que neles todos os métodos de prova hoje usados em matemática são formalizados, i.e., reduzidos a uns axiomas e regras de inferência. Pode-se portanto, conjecturar que esses axiomas e regras de inferência são suficientes para decidir qualquer questão matemática que possa ser formalmente expressa nesses sistemas”. (GÖDEL, 1931a, pp. 596-597, tradução nossa)

2.1.3 O paradoxo de Richard e suas críticas

Porém, mesmo com estas tentativas – com a última sendo aparentemente bem-sucedida – de evitar contradições em teorias lógicas, a descoberta de novos paradoxos tornou-se comum e importante para críticas construtivas a tais esforços (frustrados ou não) de fundamentação. Um destes paradoxos de relativa importância foi conjecturado por Jules Richard em (RICHARD, 1905). O argumento é relativamente simples: Richard toma o alfabeto francês de 26 letras (no nosso caso, será o português) e a formação de palavras e frases com permutações n a n de tais letras. Tais permutações podem gerar aleatoriamente definições de números. Tomemos todos estes números reais definíveis em um número finito de palavras (que seria matematicamente enumerável, pois a soma de todas as permutações o é) e os colocamos em ordem em um conjunto E.

Agora, em um processo semelhante ao método diagonal de Cantor, temos a seguinte definição G: “Seja *p* o dígito na enésima casa decimal do enésimo número do conjunto E. Formemos um número tendo 0 para sua parte integral, e em sua enésima casa decimal, *p+1* se *p* não for 8 ou 9, ou 1 em qualquer outro caso.” (RICHARD, 1905, p. 143, tradução nossa). Agora, se formos considerar que a combinação de letras em aspas é a definição de um número N, esta definição sendo constituída por um número finito de palavras faz com que N deva pertencer ao conjunto E. Porém, a própria definição de E faz com que N não pertença ao conjunto E, formando assim a contradição[21].

Contudo, o próprio Richard no artigo deu a solução ao paradoxo, alegando ser uma antinomia aparente, pois a definição G só teria significado se o conjunto E fosse totalmente definido, ou seja, definível em uma quantidade finita de termos, o que não é o caso. Sob outra perspectiva, esta solução foi endossada tanto por Russell (RUSSELL, 1908) quanto por Poincaré (POINCARÉ, 1906) em artigos posteriores ao de Richard, destacando a origem destas definições impredicativas (ou não-predicativas) devido a um círculo vicioso contido em paradoxos como os de Burali-Forti, Russell e Richard. No *Principia*[22], há a explicação de que esta circularidade surge, com a inclusão de duas noções do princípio já existentes em (RUSSELL, 1908, p. 155):

> "[...] da suposição de que uma coleção de objetos pode conter membros que só podem ser definidos por meio da coleção como um todo. (...) O princípio que nos permite evitar totalidades ilegítimas pode ser enunciado da seguinte forma: "tudo que envolve a totalidade de uma coleção não deve fazer parte da coleção"; ou, inversamente, "se, fornecida uma certa coleção que tenha um total, ela tenha membros apenas definíveis em termos deste total, então ela não é total". Nós chamaremos isso de "princípio do círculo vicioso", porque ele nos permite evitar círculos viciosos na suposição de totalidades ilegítimas." (RUSSELL e WHITEHEAD, 1927, p. 37, tradução nossa)

Em (1908) Russell fala, além dos paradoxos contemporâneos, da mais antiga antinomia conhecida, o Paradoxo de Epimênides, ou Paradoxo do Mentiroso[23], enquadrando-o no princípio. Mesmo alguns deles tendo naturezas distintas, para ambos o problema encontra-se

21 Em (CHURCH, 1934, p.357, tradução nossa), expõe-se o problema que o paradoxo de Richard contém de uma maneira mais próxima do entendimento e uso do paradoxo por Gödel: "Pode-se dizer que o paradoxo de Richard consiste no seguinte problema: como é possível que um sistema de lógica simbólica, em que o conjunto de todas as fórmulas é enumerável, deve ser adequado para qualquer ramo da matemática que lida com os membros de um conjunto não enumerável (em particular para a Teoria Elementar dos Números)?".

22 Há várias definições do princípio do círculo vicioso em (RUSSELL, 1908), inclusive uma contendo um termo técnico retirado de (PEANO, 1906) adequado a teoria dos tipos de Russell – na qual o *Principia Mathematica* tem base: o de variável aparente. Estas noções do princípio são relevantes na distinção dos quantificadores 'todo' e 'algum' feita por Russell. Para mais detalhes ver (FEFERMAN, 2005).

23 Na história, Epimênides diz que todos os cretenses são mentirosos. Porém, Epimênides é cretense. Portanto, se ele estiver falando a verdade, ele apenas fala falsidades, ou seja, mentiria. Contudo, a afirmação de Epimênides é fraca. O Paradoxo do Mentiroso se resume a sentença "Esta sentença é falsa". Se a sentença for verdadeira, ela é falsa, se for falsa, é verdadeira. Observem que ela é mais forte que o paradoxo de Epimênides, pois enquanto no caso de Epimênides o paradoxo valia em caráter geral apenas no caso do antecedente para o consequente ser verdadeiro ($A \rightarrow \sim A$) - pois a negativa da afirmação é a de que nem todos os cretenses são mentirosos – este vale bicondicionalmente, ou seja, a contradição se mantém considerando ambos casos de verdade e falsidade da sentença ($A \Leftrightarrow \sim A$). Este ponto é abordado em (ANDERSON, 1970). Há tentativas de solucionar o paradoxo do mentiroso eliminando algumas das características que constituem paradoxos, uma delas é a autorreferencialidade. Porém,é justamente esta característica do paradoxo que torna-se relevante na elaboração da primeira demonstração de Gödel dos teoremas da incompletude de sistemas formais com o mínimo de Aritmética.

na circularidade. Poincaré, em crítica a noção de definibilidade recursiva de um número indutivo[24], comenta em seu artigo:

> "Uma definição que contém um círculo vicioso não define nada. De nada adianta dizer que, qualquer seja o significado que dermos a nossa definição, é certo que teremos ao menos zero elementos [...] não é questão de sabermos se a classe está vazia, mas se podemos delimitá-la rigorosamente. Uma classe 'não-predicativa' não é uma classe vazia, mas uma classe onde a fronteira encontra-se indecisa". (POINCARÉ, 1906, p. 306).

Poincaré também tinha uma segunda crítica a tais paradoxos que versavam acerca da natureza do infinito, não crendo que infinitos atuais (ou completos) pudessem existir, apenas infinitos em potencial – como seria o caso do conjunto dos números naturais, por exemplo. Porém, devido aos avanços dentro da teoria dos números transfinitos, esta foi uma crítica que a época já não gerou tanta repercussão. Até na palestra (HILBERT, 1927), em defesa de Cantor e contra as restrições de natureza dogmática de Kronecker, Hilbert tem uma máxima sobre estas críticas anti-cantorianas: "que ninguém seja capaz de nos tirar do paraíso que Cantor criou para nós". Assim, Giuseppe Peano em (PEANO, 1906) faz comentários acerca da crítica à definição fadada a círculos viciosos de Poincaré, a classificando como inexata. O italiano explica pelo exemplo do paradoxo de Richard abordado por Poincarè que é possível uma definição de N desprovida de círculo vicioso em (PEANO, 1906, p. 214-215) como descrito abaixo:

N = (expressão composta dos signos que precedem N)

Peano alega que esta solução é fácil e mecânica, além de realizar uma crítica direta a regra de predicatividade sugerida por Poincarè. Ele dá exemplos de relações na definição de operações e funções da literatura matemática que não passariam no critério de predicatividade, porém cumprem seu emprego definicional sem maiores problemas lógicos. Desta maneira, Peano propõe uma nova solução ao Paradoxo de Richard, destacando que a

24 Poincaré tinha duras críticas ao projeto logicista e ao projeto de axiomatização de Hilbert, sendo boa parte do seu artigo sobre estes temas, tendo como núcleo da discussão a fundamentação da noção de número. Para ele, não existia tal necessidade, pois os juízos sobre números seriam sintéticos a priori. Assim, como Dedekind buscou fundamentar logicamente e conjuntivamente os números naturais em sua obra *Was sind and was sollen die Zallen?*, sendo axiomatizado por Peano em 1899, Poincaré criticamente acreditava que nos Axiomas de Dedekind-Peano, o princípio da Indução era equivocado em estabelecer um fundamento pois incidia em *petitio principii*, envolvendo o círculo vicioso em questão, e portanto em um impredicativo.

definição de N envolve componentes simbólicos e formais, quanto não simbólicos provenientes da linguagem ordinária. Para ele:

> "O exemplo de Richard não pertence a Matemática, mas a Linguística: um elemento fundamental para a definição de N não pode ser definido exatamente (de acordo com as regras da Matemática). A partir de elementos que não estão bem definidos, podemos deduzir várias conclusões contraditórias." (PEANO, 1906, p. 208, tradução nossa)

Desta forma, vemos que paradoxos eram consequências indesejáveis para a comunidade matemática que ansiavam por fundamentos sólidos. Mas além desta dificuldade, paradoxos também podem inspirar técnicas de demonstração lógico-matemáticas mais arrojadas, como veremos adiante. O tema dos paradoxos era caro a toda comunidade, principalmente a Hilbert, pois como exposto anteriormente, o projeto hilbertiano de axiomatização da Matemática pretendia dar as bases seguras e confiáveis à área. Porém, devido à dependência de provas de consistência e de tais tentativas serem apenas relativas, bem como o conceito de infinito não estar muito bem delimitado e qualquer sistema proposto que leve-o em conta acabou sujeito a paradoxos, Hilbert estabelece as bases de um programa de pesquisa que busca sanar estes problemas, tendo consigo mais um elemento relevante às suas teses: o método finitário.

2.2 FINITISMO E RECURSIVIDADE

Veremos nesta seção as ideias do matemático David Hilbert sobre os pontos e soluções de problemas necessários para assegurar bases seguras a Matemática, bem como os métodos a serem utilizados para tal, como a defesa de métodos de prova mais construtivos e de caráter finitário, ou seja, que não envolvam a noção de totalidades infinitas. Para isso, dedicaremos uma análise histórica e conceitual ao modo de raciocínio recursivo por meio de funções, apresentado e desenvolvido parte como alternativa a compor os fundamentos da Aritmética, bem como em oposição projetos que levavam em conta tais totalidades – como os *Principia* de Russell.

2.2.1 O Programa de Hilbert

As concepções de Hilbert acerca da fundamentação da Matemática influenciaram todo um programa de investigação e pesquisa que se manteve relativamente constante no início do século XX. Desde suas palestras sobre os fundamentos da Geometria, alguns pontos sempre foram centrais em sua abordagem fundacionista: o método axiomático e a prova de consistência dos postulados, bem como seu caráter puramente sintático de relações entre símbolos:

> “Toda ciência parte de um corpo suficientemente coerente dos fatos como dados. Ela toma forma, no entanto, apenas organizando este corpo de fatos. Essa organização se dá por meio do método axiomático, ou seja, construímos uma estrutura lógica de conceitos para que os relacionamentos entre os conceitos correspondam às relações entre os fatos a serem organizados. Existe arbitrariedade na construção de tal estrutura de conceitos; nós, no entanto, exigimos dele: 1) integridade, 2) independência, 3) consistência”. (HILBERT, 2004, p. 540, tradução nossa)

Junto a tais características, o matemático alemão era otimista acerca da capacidade humana de resolução de problemas matemáticos. Para ele, não havia problema que não pudesse ser solucionado:

> “A convicção da capacidade de resolução de todo problema matemático é um poderoso incentivo ao nosso trabalho. Nós ouvimos dentro de nós o que é perpétuo chamar: aí está o problema. Procure sua solução. Você pode encontrá-lo por meio do pensamento puro. Pois na matemática não há *ignorabimus*!” (HILBERT, 1902, p. 445, tradução nossa)

Devido a esta convicção iluminista, um dos problemas lógico-matemáticos importantes para Hilbert era justamente saber se, dado uma proposição na lógica de primeira ordem, haveria um procedimento de prova para dizer se aquela sentença é verdadeira ou falsa: o denominado *Entscheidungsproblem* (problema da decisão). Guiados por este interesse de determinar a decidibilidade da lógica de primeira ordem, houve maior busca pelo esclarecimento de definição do que seria um procedimento mecânico ou um algoritmo (conjunto finito de passos), justamente para se obter maior rigor nos métodos de prova necessários para responder ao problema da decisão.

Além disso, mesmo Hilbert acreditando que a Matemática deve ser livre de restrições - como mostrou defendendo a teoria dos números transfinitos cantoriana – com a descoberta de diversos paradoxos que realmente poderiam solapar um projeto fundacionista (o paradoxo de Russell, por exemplo), foi por ele percebida também a necessidade de maior rigor e restrição conceitual nos fundamentos. Como destacado anteriormente, o *Principia Mathematica* foi recebido como a realização lógica por proporcionar o sistema e as ferramentas necessárias para que pudessem desenvolver as bases fundacionais da Matemática de início tanto por Hilbert quanto por toda comunidade matemática.

À vista disso, o problema logicista de redução da Matemática à Lógica foi dado como resolvido por Hilbert, e isso fez com que ele se voltasse a problemas como a consistência da Aritmética e da Teoria de Conjuntos, bem como outros de cunho lógico e axiomático, como a completude do cálculo proposicional. Porém, conforme o estudo do *Principia* foi se aprofundando na comunidade, são postos em dúvida alguns princípios de PM como o Axioma da Redutibilidade e do Infinito como axiomas puramente lógicos. Assim, Hilbert abandonou o sistema utilizado no *Principia*, e com o avanço da escola intuicionista por parte de L. E. J. Brouwer e Hermann Weyl (ex-aluno de Hilbert) com suas críticas a métodos não-construtivos, Hilbert acrescentou um outro componente aos já expostos, definindo seu programa de pesquisa: o ponto de vista finitário.

O finitismo no sentido proposto por Hilbert é inicialmente de evitar o apelo a infinitos completados[25], ou seja, nas palavras do pesquisador William Tait:

> "O ponto crucial para compreendermos a concepção da matemática finitista de Hilbert está nesta questão:
> Em que sentido podemos provar proposições gerais, como:
> $$\forall xy\ (x + y = y + x)$$
> sobre os números naturais, sem assumir a infinitude dos números ou alguma outra totalidade infinita?" (TAIT, 1981, p. 524, tradução nossa).

Em uma conferência em homenagem aos trabalhos de Weierstrass em 1922, Hilbert dá uma conferência intitulada 'Sobre o Infinito', apresentando praticamente um manifesto de seu programa de pesquisa com o argumento que não há, fisicamente, nada que justifique a implementação do infinito atual em alguma axiomática utilizada, portanto não há justificativa para o levarmos em consideração. E mesmo que ele seja um conceito e uma ferramenta do pensamento, devido aos problemas descobertos em sistemas que admitiam totalidades infinitas, como de Frege e Dedekind, a noção de infinito atual não seria confiável. Assim, a segurança que Hilbert deseja está em passos finitos seguidos ao realizarmos inferências dedutivas de determinados argumentos às consequências destes, bem como em uma base intuitiva pura de sinais concretos exigida pelo método axiomático, que encontra-se na teoria

25 Esta é ideia principal para a abordagem finitista defendida por Tait, porém há outros motivadores destacados dos escritos de Hilbert, tal como a manutenção do conhecimento proposicional intuitivo dos objetos matemáticos defendido em (PARSONS, 1998).

elementar dos números e seus métodos finitários. Pois como afirma Hilbert, em sua famosa passagem:

> "Como outra pré-condição para o uso da dedução lógica e para as operações lógicas, devem ser considerados objetos concretos extra-lógicos, que existem com base na experiência imediata previamente a todo pensamento. Para que as deduções lógicas sejam seguras, devemos ser capazes de vislumbrar todos os aspectos destes objetos, e seu reconhecimento, distinção e ordenação são dados, juntamente com os próprios objetos, como coisas que não podem ser reduzidas a outras ou requerer qualquer redução". (HILBERT, 2006, p. 84)

Estes objetos são sinais, tais como mostrados no artigo

$$|\,,\,||\,,\,|||$$

Sequências de símbolos que representam objetos formais (neste caso, numerais) e podem ser manipulados. Hilbert explica a necessidade de formalizar axiomas, operações e demonstrações matemáticas dentro de fórmulas e de um cálculo lógico definido por regras de inferência com o intuito de desenvolver ferramentas para se analisar as próprias demonstrações como objetos concretos passíveis de análise metamatemática. A questão vista por Hilbert é o uso de quantificadores, pois o "para todo" e o "algum" associados a uma variável representa a totalidade de elementos que podem ser instanciados, substituindo-se na fórmula a variável pelos individuais contidos no escopo desta totalidade, ou seja, os quantificadores evocam a noção de conjunto, podendo ser estes finitos ou infinitos. No entanto, eles seriam imprescindíveis no caráter universalizante da lógica. Desta forma, Hilbert tratará a parte infinitista como asserção de elementos ideais na teoria. Em analogia com áreas da Matemática, estes elementos ideais, tal como raízes complexas e retas infinitas, são "estruturas que formalizam o conteúdo material" (HILBERT, 2006, p. 87), componentes instrumentais sem significado próprio que estruturam idealmente a teoria:

> "Desta forma, finalmente, obtemos, ao invés do conhecimento matemático material que é comunicado através da linguagem comum, somente uma coleção de fórmulas envolvendo símbolos lógicos e matemáticos que são gerados sucessivamente, de acordo com regras determinadas. Algumas dessas fórmulas correspondem à dedução material. A dedução é então substituída por um procedimento formal governado por regras."(HILBERT, 2006, p.89)

Com a formalização estabelecida, o próprio procedimento finitário de demonstração das fórmulas torna-se objeto concreto de estudo – semelhante ao ramo de estudo da Teoria de Grupos na Álgebra ou o da Geometria Projetiva, por exemplo – dando um passo para a abordagem finitista da metamatemática, e assim à prova de consistência almejada por Hilbert, feita com uma base considerada intuitiva e confiável. Porém, aqui temos algumas pertinências, como as que envolvem a implementação técnica[26] deste dito ponto de vista finitário com vistas ao desenvolvimento de uma teoria da prova que elimine qualquer totalidade infinita da base de suas sentenças e procedimentos demonstrativos, e ainda o esclarecimento sobre o que exatamente é o finitismo[27].

2.2.2 O conceito de finitismo

A última indagação acima liga-se à primeira quando buscamos entender tanto o sentido conceitual do termo quanto historicamente o que ele significava para quem encontrava-se nesta discussão: ao próprio Hilbert, seus discípulos e contribuintes que participavam ativamente de seu programa – Paul Bernays e Wilhelm Ackermann – e até Kurt Gödel, ao buscar elaborar sua demonstração do Teorema da incompletude ou dentro dos comentários acerca do construtivismo matemático intuicionista. Porém, atualmente há certo consenso dentro da comunidade que, em seu grau mais simples e básico, falar conceitualmente acerca de finitismo matemático é falar acerca da teoria finitista dos números, ou por outra denominação, Aritmética Primitiva Recursiva (*Primitive Recursive Arithmetic* -

26 Há formas distintas de abordar o problema da consistência que foram utilizadas antes e depois da publicação de (GÖDEL, 1931a). Uma que se mostrou equivocada foi o cálculo-épsilon (ε-calculus), pois por meio desta técnica foi apresentada uma prova da consistência de uma parte da Aritmética de segunda ordem na dissertação de Ackermann, sendo confirmada posteriormente por John von Neumann como errônea. Para detalhes, ver (ZACH, 2001, cap. 3). Outra foi desenvolvida por Hilbert após o artigo de Gödel, estendendo “[...] um sistema formal Z para aritmética clássica de primeira ordem, atualmente denominada de Aritmética de Peano (PA)” (FEFERMAN, 2008, p. 183) com uma versão finitária do que era chamado de regra ômega (*ω-rule)*. Mais informações ver (IGNJANOVÍC, 1994).

27 Em (TAIT, 1981 e 2002) procura-se deixar claro que a questão acerca do finitismo são duas: uma de natureza conceitual e outra histórica, sendo que a primeira tem muitas concepções a serem observadas. Como (INCURVATI, 2015) relata, há ao menos três aspectos na literatura que guiam a concepção do finitismo como: conhecimento intuitivo dos objetos matemáticos, evitabilidade da utilização de totalidades infinitas em seus fundamentos, ou sendo parte da matemática que rege o mínimo necessário para desenvolver o raciocínio matemático. Tais perspectivas aparentemente não são excludentes nem coextensivos, e fazem parte do escopo histórico do finitismo por parte de seus desenvolvedores e intérpretes, havendo a devida crítica destes aspectos por parte de Incurvati no artigo. E intimamente relacionadas a estas questões, há dúvidas e críticas sobre o status epistêmico no raciocínio finitista que são bem expostas em (ZACH, 2001, cap. 4).

doravante PRA), mesmo que historicamente sua aceitação entre os envolvidos no Programa de Hilbert isto seja questionável.[28]

Gödel, em uma exposição nitidamente conceitual, alega em seu artigo canônico que seus teoremas “[...] não representam contradição do ponto de vista formalista de Hilbert. Pois este ponto de vista pressupõe apenas a existência de uma prova de consistência efetuada por meios finitos, podendo concebivelmente haver provas finitas que não podem ser expressas em T [sendo T o sistema formal desenvolvido por Gödel a partir do *Principia*].” (GÖDEL, 1931a, pp. 197-198, tradução nossa). Porém, Solomon Feferman em (FEFERMAN, 2008, pp. 186-187), expõe sobre como Gödel vê o finitismo, Feferman destaca que Bernays equiparava o finitismo com o intuicionismo até o início dos anos 30 e que em uma de suas palestras com falas sobre o construtivismo matemático intuicionista intitulada *The present situation in the foundations of mathematics* (1933), Feferman afirma que Gödel descreve sua camada mais básica (que ele denomina de Sistema A) como um tipo de PRA[29]. (TAIT, 2002 e 2010) cita esta palestra e a em Zilsel (1938), onde Gödel para ele:

28 (ZACH, 2001, 4.3.4), assim como em (TAIT, 2010) argumentam e deixam claro na literatura que Hilbert e Bernays na prática consideravam que a abordagem finitista ia além da PRA, pois podem haver funções finitistas que não são primitivas recursivas, como a função de Ackermann (que (TAIT, 1981) interpreta como não-finitista) e outras funções obtidas por recursão múltipla encadeada, como é destacado em (FEFERMAN, 2008, p. 188). Outro argumento em (INCURVATI, 2015) é a existência de sistemas mais fracos que PRA, como EA (*Elementary Arithmetic*). Desta forma, não haveria motivo de PRA ser considerada a base mínima da abordagem finitista, posto que EA estaria nesta posição.

29 Na íntegra do texto, Gödel destaca que as principais características do sistema A, bem como a ressalva da equiparação das mesmas ao projeto hilbertiano:

“1. A aplicação da noção de "todos" ou "qualquer" [quantificadores] deve ser restrita àquelas totalidades infinitas para as quais podemos dar um procedimento finito para gerar todos os seus elementos (como podemos, por exemplo, para a totalidade de inteiros pelo processo de formação do próximo maior inteiro e como não podemos, por exemplo, para a totalidade de todas as propriedades de inteiros).

2. A negação não deve ser aplicada a proposições afirmando que algo vale para todos os elementos, porque isso poderia gerar proposições de existência. Ou, para ser mais exato: negativos de proposições gerais (ou seja, proposições de existência) devem ter um significado em nosso sistema apenas no sentido de que encontramos um exemplo, porém por uma questão de brevidade, não deseja-se declará-lo explicitamente. Ou seja, eles servem apenas como uma abreviatura e podem ser totalmente dispensados se quiséssemos. Pelo fato de termos descartado a noção de existência e as regras lógicas a respeito disso, segue-se que nos resta essencialmente apenas um método para provar proposições gerais, ou seja, indução completa aplicada ao processo de geração de nossos elementos. [...] Finalmente, exigimos que devemos apresentar apenas as noções que são decidíveis e as funções que podem ser calculadas para qualquer elemento particular. Tais noções e funções podem sempre ser definidas por indução completa, e assim podemos dizer que nosso sistema é baseado exclusivamente no método de indução completa em suas definições, bem como em suas provas. [...] E, na verdade, todas as tentativas de uma prova de consistência empreendidas por Hilbert e seus discípulos tentam realizar exatamente isso. (GÖDEL, 1933, CW III, pp. 51-52, tradução nossa)

Também, na palestra de Zilsel em (GÖDEL, 1938, p.91), ele resumidamente traz as três condições acima e ainda destaca uma quarta característica, que seria a inspecionabilidade dos objetos do sistema, ou seja, a denumerabilidade dos mesmos.

> [...] atribui explicitamente a Hilbert o objetivo de estabelecer consistência em PRA. Além disso, no primeiro deles, ele se refere a PRA como o primeiro em uma série ascendente de camadas de matemática intuicionista ou construtiva e, no segundo, ele se refere a ela como teoria dos números finitários, o nível mais baixo de uma hierarquia de sistemas finitistas. No entanto, ele se refere à definição de finitismo de Hilbert como “a matemática na qual a evidência repousa sobre o que é intuitivo” e, portanto, rejeita como finitista neste sentido os níveis mais superiores de “sistemas finitistas”, como o intuicionismo e seu próprio sistema T[30] de funções recursivas primitivas de tipo finito. (TAIT, 2002, p. 412, tradução nossa)

Nesta palestra, Gödel destaca que as extensões do sistema A podem ir além dela por meio de funções de tipos superiores (*higher types*), por meio do uso de operadores lógicos (chamado de caminho lógico-modal) ou indução transfinita. Gödel destaca estas extensões como de caráter construtivo ou finitista, pontuando que ele não sabe se termo ‘finitista’ pode aplicar-se adequadamente a tais extensões, mas que sim, aproximam-se do compromisso metodológico de Hilbert que o mesmo chama de configuração ou atitude finitista (*finite Einstellung*).

Todavia, como ao final da citação acima, Gödel em suas exposições após a repercussão de seu principal artigo deixava claro que interpretava o sistema A – a versão mais básica desta hierarquia de matemática construtiva – como o objetivo da metodologia finitista do programa hilbertiano de fundamentação da Aritmética. Não à toa, o aspecto finitista baseado no modo de raciocínio recursivo (*recursive mode of thought*) é o cerne de sua demonstração – e que ele mesmo destaca como intucionista[31] – da incompletude do sistema T, onde este contém a Aritmética de Dedekind-Peano (PA) que, por sua vez, contém a PRA (reivindicada aqui como o sistema A das palestras de Gödel). Assim, a concepção finitista nesta época se concretizava para Gödel por meio do desenvolvimento de um modo de raciocínio recursivo que é denominado posteriormente de funções recursivas primitivas, sendo considerado finitário por Gödel inicialmente tanto PA quanto dito o nível hierárquico mais baixo, PRA.[32]

30 O mesmo sistema formal denominado de P em (GÖDEL, 1931a).

31 Gödel deixa explícito em seu artigo que podíamos nos convencer facilmente que a demonstração dada da indecidibilidade de G no sistema T é construtiva, isto é, de um ponto de vista intuicionista ela é válida e inobjetável (GODEL, 1931a, p. 177).

32 A ressalva diacrônica se dá devido à mudança de posição por parte de Gödel – acreditando inicialmente em uma extensão finitária – para os textos que são chamados de sua interpretação *Dialectica* da Aritmética de Heyting, ou seja, uma interpretação da Teoria dos Números intuicionista que se apoiava em uma das três extensões para seu Sistema A. Ela se constitui por uma teoria de quantificadores livres de funções recursivas primitivas de tipos finitos. Porém, inspirado por conversas e trabalhos do matemático Georg Kreisel em (KREISEL, 1960) ele passou a aceitar que havia uma limitação superior do finitismo em ε_0, portanto a indução/recursão transfinita até ε_0 não poderia ser provada finitariamente, definindo o finitismo hilbertiano “[...]

2.2.3 Uma pequena história do raciocínio recursivo

A aplicação de recursividade ou de definições e funções recursivas foram aperfeiçoadas, mas não foram criadas por Gödel. Há precedentes de definições e técnicas que envolvem recursão – ou seja, a obtenção de um resultado pela aplicação finita de algumas regras ou equações concatenadas conjuntamente um determinado período de vezes aos resultados anteriores – em muitos casos que variam desde o método de contratura da parábola de Arquimedes, dos números de Fibonacci ao Método de Newton-Raphson, por exemplo. No embrião do esboço do que viria ser a área da Computação, a técnica dos cartões perfurados permitiu com que Ada Lovelace, matemática e escritora considerada a primeira cientista da computação, imaginasse procedimentos para criar rotinas (algoritmos) a serem processadas pela Máquina Diferencial (uma variação mais fraca da ideia de Máquina Analítica do matemático e inventor Charles Babbage) e realizasse por meio de recursões a computação de números de Bernoulli. Porém, o conceito de "definição por recursão" foi utilizado pela primeira vez por Dedekind em seu já destacado (DEDEKIND, 1888), com as definições recursivas de adição e multiplicação da obra sendo incluídas como postulados por Peano em seu principal trabalho sobre os princípios da Aritmética (PEANO, 1889)[33].

No entanto, foi o lógico Thoralf Skolem que, após estudar o *Principia Mathematica* em 1919, elaborou o artigo *The foundations of elementary arithmetic established by the recursive mode of thought, without the use of apparent variables ranging over infinite domains* (SKOLEM, 1923). O título longo é autoexplicativo: através do raciocínio recursivo, ele estabelece os princípios da matemática elementar sem quantificadores ilimitados[34] – ou seja, por fórmulas com variáveis livres – por meio do que ele chama de modo de raciocínio recursivo, não recorrer ao conceito de variável aparente dos PM, já abordado anteriormente

como "a matemática da intuição concreta", em vez de" a matemática na qual as evidências se baseiam no que é intuitivo" (FEFERMAN, 2008, p. 196). Mais informações ver (FEFERMAN, 2008) e (TAIT, 2010).

33 Os postulados de Peano, como dito anteriormente, também exerceram influência sobre Russell e Whitehead no sistema P do seu *Principia Mathematica*, utilizados posteriormente por Gödel para demonstrar sua incompletude.

34 A intenção de Skolem era tornar a prova das sentenças matemáticas mais construtivas se livrando de domínios infinitos. Porém, como ele mesmo deixa claro em (SKOLEM, 1923, p 326), não há problemas em manter quantificadores com domínios finitos. E obviamente, como ele mesmo destaca em (SKOLEM, 1923, p. 332) tais domínios podem também ser substituídos por funções recursivas.

acima. Assim, abre-se caminho ao que viria a ser as bases da PRA atual, precedendo até funções utilizadas por Gödel em seu sistema T para codificação de suas sentenças se utilizando dos axiomas de Dedekind-Peano contidos no mesmo. No trabalho ele destaca a problemática contida no projeto logicista do *Principia* de apoiar suas definições em quantificadores ilimitados devido a dúvida acerca da existência de totalidades infinitas e do transfinito. Tais dúvidas são cultivadas por anti-Cantorianos como Kronecker, referenciado ao final do artigo de Skolem por privilegiar como princípio definições que sejam constituídas finitamente, como é destacado em (TAIT, 2012):

> [...] ele [Skolem] se refere ao princípio de Kronecker, onde uma definição matemática (Bestimmung), digamos, de uma função ou propriedade numérica é genuína se e somente se fornecer um algoritmo para determinar seus valores. Em sua consequente rejeição de quantificadores ilimitados, esta posição também está de acordo com o "intuicionismo" tardio de Weyl [...] e o mais tardio finitismo "metodológico" de Hilbert. (TAIT, 2012, p. 164, tradução nossa)

Tait, também neste artigo, expõe que mesmo havendo paralelos entre os princípios matemáticos prezados por Kronecker e especulações sobre possíveis influências[35], a motivação de acordo com o próprio Skolem seria fazer contraposição a fundamentação da Aritmética com o uso de quantificadores ilimitados, como matemáticos de abordagem logicista – Dedekind, Peano, Frege e claro, Russell e Whitehead – delinearam seus princípios. A construtividade do método de Skolem, sua efetividade[36] para computar e resolver (decidibilidade) proposições da teoria finitista dos números (posteriormente PRA) e uma certa motivação de caráter finitário fizeram com que esta abordagem fosse estudada pela comunidade interessada no projeto hilbertiano como Bernays e Ackermann, sendo elaboradas técnicas que envolviam a definição por recursão. Como por exemplo a aplicação metamatemática por parte de Hilbert das chamadas recursões ordinárias e transfinitas (uma generalização das ordinárias) aplicadas a variáveis-tipo contidas em proposições-tipo iterativamente, em um processo que envolve substituição de variáveis e definições destas proposições-tipo por recursão, na tentativa de oferecer uma solução ao problema do *continuum* de Cantor em 1935 (HILBERT, 2008).

35 O matemático Hao Wang especula que a ideia de fundamentação da matemática pelo modo de raciocínio recursivo de Skolem pode ter sido influenciada pela obra do linguista e matemático Hermann Grassmann.

36 Mesmo ainda não publicado seus artigos, Gödel e Herbrand já haviam chegado na conclusão de haver proposições indecidíveis em sistemas formais construídos a partir do *Principia*, como é visto no relato das conversas informais e cartas com Von Neumann – um dos confidentes de Gödel deste resultado, inclusive chegando independentemente ao corolário do segundo teorema – entre Setembro e Novembro de 1930.

Já Gödel buscou definir matematicamente a noção de recursividade, inclusive fazendo uso de muitas das fórmulas de (SKOLEM, 1923) em seu artigo de 1931. Como dito anteriormente, Gödel não foi o pioneiro em utilizar definições por recursão ou funções recursivas, mas foi o primeiro a formalizá-las sob o conceito de função recursiva geral e dando escopo formal à noção do que seria efetivamente computável[37], com o auxílio do matemático francês Jacques Herbrand (e sua caracterização das classes de funções finitamente calculáveis), tomando a forma que conhecemos hoje como função recursiva primitiva. Uma operação de recursão primitiva é dada por: quando *f* é uma função de n argumentos e *g* é uma função de n + 2 argumentos, a função *h* de n + 1 argumentos se define da seguinte forma:

(i) $h(x1,\ldots,xn\ ,0) = f(x1,\ldots,xn)$
(ii) $h(x1,\ldots,xn\ , s(x)) = g(x1,\ldots,xn\ ,x,h(x1,\ldots,xn\ ,x))$

No artigo de Wilfried Sieg (SIEG, 2005) são analisadas as correspondências trocadas por ambos, bem como o contexto da elaboração do conceito e recursividade. Em todas as suas discussões os compromissos finitistas de Hilbert e seu programa voltado a consistência da Aritmética estavam presentes, bem como as consequências do segundo teorema da incompletude de Gödel para com eles[38].

Com isso, houve um ponto sobre a formalização da noção de função finitista por parte de Herbrand, pois como se almejava uma base lógico-matemática segura para afirmar-se que a incompletude afetava qualquer formalização que tinha como base o *Principia Mathematica* - que já estava sendo utilizado como cânone da área – abrindo o problema de existir uma prova de que todos os métodos finitários seriam formalizáveis nele. Tanto Von Neumann quanto Herbrand consideravam impossível existir uma prova para este problema (SIEG, 2005, p.

37 Em (DEAN, 2020), destaca-se ao menos três razões para este ser um trabalho precursor da teoria da computabilidade: (1) Skolem antecipou uma apresentação informal do que iríamos denominar de funções recursivas primitivas; (2) pode ser considerado o artigo que relaciona definabilidade recursiva com computabilidade efetiva, e; (3) mostrou variadas funções primitivas que anteciparam o uso por parte de Gödel da aritmetização da sintaxe de T em (GÖDEL, 1931a).

38 Há controvérsias sobre qual pesquisa inicialmente formalizou à noção de computabilidade efetiva, se foi a recursividade primitiva de Gödel-Herbrand ou a λ-definabilidade do matemático Alonzo Church. O próprio Gödel comenta que seus trabalhos em recursividade geral não tinham este intuito, e inicialmente achando a noção de Church completamente insatisfatória (*throughoutly unsatisfactory*) para tal. Todavia, com a análise de Turing em 1936 sobre a equivalência das três noções de computabilidade desenvolvidas (as duas anteriormente citadas mais a própria de Turing), Gödel convenceu-se de que o cálculo lambda é uma noção adequada de computabilidade efetiva, mesmo acreditando ser a definição de Turing mais completa e absoluta. Para detalhes ver (DAVIS, 1982).

167-168). Gödel considerou a possibilidade em princípio de haver tal prova, porém anos depois ele descartou-a. No entanto, foi observado por Gödel que era essencial estabelecer junto às demonstrações da incompletude no *Principia* e sistemas relacionados uma definição rigorosa de teoria formal. Ele deixa claro que, para isso, as regras de inferência, axiomas e fórmulas têm que ser dados construtivamente, ou seja, considerando uma teoria formal T, para cada inferência deve haver um procedimento finito para conseguirmos determinar se uma fórmula B expressa na sintaxe de T é consequência de um conjunto de outras fórmulas (A1, A2, A3…An) estabelecidas em T e se B é uma fórmula significativa (uma proposição derivada dos axiomas de T) ou propriamente um axioma de T. (SIEG, 2005, pp. 180-181).

Com este princípio heurístico em vista, Gödel se direciona a procedimentos computáveis de funções numéricas e logo após – considerando uma propriedade relevante desenvolver estas funções por procedimentos finitos – padronizar e formalizar a definição de funções recursivas gerais, implementando regras mecânicas simples de substituição e reposição de termos para derivar equações e com isso realizar outros cálculos numéricos. (SIEG, 2005, p. 182). Aqui há uma diferença de natureza na aplicação destas funções recursivas, já feitas por Skolem e entendidas por Hilbert. A intenção de Gödel extrapola a resolução de funções numéricas dentro da Aritmética básica e procura enquadrar os próprios instrumentos matemáticos, regras de inferência, consequências e demonstrações como procedimentos que possam ser recursivamente definidos por funções numéricas, ou seja, tornar objetos metamatemáticos em objetos matemáticos passíveis de análises e transformações dentro da própria teoria formal que contém a Aritmética necessária para realizar as operações recursivas. Vejamos como Gödel elaborou este sistema.

2.3 METAMATEMÁTICA, CODIFICAÇÃO E REPRESENTABILIDADE

Achar formas de analisar os próprios instrumentos e objetos matemáticos é uma prática contemporânea bem desenvolvida em áreas inicialmente descompromissadas filosoficamente, como Teoria de Grupos e Geometria Projetiva, por exemplo. Porém, foi no século XIX, no desenvolvimento da lógica matemática de um ponto de vista algébrico (pensadas até antes de Boole e Schröder como áreas distintas uma da outra), do avanço da teoria de conjuntos e da crise da geometria euclidiana que começou-se a pensar em novas ferramentas capazes de formalizar e demonstrar certas propriedades de um corpo de axiomas e princípios por meio de métodos da própria Matemática: é com este entendimento que surge a metamatemática.

2.3.1 As definições de Metamatemática

Dentro da tradição na Lógica, a disciplina ganhou os contornos intercambiáveis com a Teoria da Prova (*Beweistheorie*) de Hilbert e seu projeto finitista, como é bem introduzido por Stephen Kleene em seu livro canônico sobre o tema:

> "A Hilbert é atribuído, primeiramente, a ênfase em que a formalização estrita de uma teoria envolve sua total abstração de significado, com o resultado sendo chamado de sistema formal[...]; em segundo, seu método de tornar sistema formal como um todo objeto de um estudo matemático denominado metamatemática ou teoria da prova. Metamatemética inclui a descrição ou definição de sistemas formais, bem como a investigação de propriedades de sistemas formais. Ao lidar com um sistema formal particular, podemos chamar o sistema da teoria-objeto, e a metamatemática relacionada a ela como sua metateoria. Do ponto de vista da metateoria, a teoria-objeto não é propriamente uma teoria, como antes entendíamos o termo, mas um sistema de objetos desprovidos de significado [...] A teoria do objeto é descrito e estudado como um sistema de símbolos e de objetos construídos fora de símbolos. Os símbolos são considerados simplesmente como vários tipos de objetos reconhecíveis. Para corrigir nossas ideias, podemos pensar nelas concretamente como marcas no papel; ou mais precisamente, conforme abstraído de nossa experiência com símbolos como marcas no papel (a teoria da prova deve ser abstrata em certo sentido, uma vez que supõe sequências arbitrariamente longas de símbolos como sendo construtível, embora a quantidade de papel e tinta no mundo seja finita). Os outros objetos do sistema são analisados apenas em relação à maneira de sua composição fora dos símbolos. Por definição, isso é tudo que um sistema formal deve ser como um objeto de estudo para a metamatemática." (KLEENE, 1952, pp. 61-62, tradução nossa)

Porém, historicamente, "metamatemática" como terminologia mais próxima da utilizada por Hilbert foi inicialmente empregada para designar áreas junto às análises da natureza da geometria, sejam elas voltadas à criação de modelos não-euclidianos e busca da consistência relativa a pressuposição de consistência da geometria euclidiana, ou até ironicamente para pontuar o que era interpretado como discussões e especulações "metafísicas" dos resultados de estudos não-euclidianos na Geometria. Como é mostrado em

(WILLE, 2011), havia nos materiais do polímata Hermann von Helmholtz[39] uma visão positiva do termo, onde sua noção de metamatemática:

> "[...] indica que a Matemática mais geral tal como investigações epistemológicas sobre as diferentes geometrias e é às vezes designada apropriadamente como *matemática filosófica* ou *metafísica de matemática*. Em particular, as investigações metamatemáticas estão preocupadas com questões de verificabilidade em sistemas geométricos, construção de modelos, e, portanto, com questões de consistência e admissibilidade matemática. A respeito disto, a escolha de Hilbert do termo metamatemática é modelada ao longo das linhas da noção helmholtziana". (WILLE, 2011, p. 345, tradução nossa)

Vemos que certos aspectos são bem semelhantes ao empreendimento de Hilbert em seu programa, justificando a apropriação geral do termo pelo matemático alemão e voltá-la à disciplina de segunda ordem que faz uso de instrumentos lógico-matemáticos para formalizar e analisar definições e propriedades da própria Matemática, como as noções de prova e verdade aritméticas.

2.3.2 Aritmetização da sintaxe e os *Principia*

Gödel em seu artigo de 1931 tem várias referências – mais nas notas de rodapé que no texto integral do artigo – sobre o que ele refere-se a definições de conceitos ou símbolos metamatemáticos, sendo que estas funções expressam fórmulas, regras de substituição de termos, derivações e provas de proposições do sistema formal estabelecido por meio do que ele denomina de aritmetização da sintaxe, codificação ou, após suas descobertas, de Gödelização ou numeração de Gödel. Com a formalização e estabelecimento dos princípios da Aritmética no *Principia* e manipulações simbólicas por meio de funções recursivas gerais[40], Gödel consegue expressar propriedades metamatemáticas por meio da própria Aritmética, como explica o próprio Gödel:

> "Como é natural, para considerações matemáticas, não importa muito saber quais são os objetos que se tomam como símbolos primitivos e, para essa finalidade,

39 Há outros anteriores a Von Helmholtz que já utilizavam o termo, inclusive ao abordarem tópicos de Filosofia da Matemática em um contexto kantiano (denominada por Wilhelm Kern de matemática transcendental) e até anteriormente a uma metacrítica (esta última no sentido de crítica a crítica kantiana) - tratada como inadequada e infundada – à geometria euclidiana. Porém, entrar nestes tópicos fugiria ao tema. Para mais sobre o assunto, ver (WILLE, 2011).

40 O que Gödel chamada de funções recursivas gerais será chamado por Kleene de funções recursivas primitivas, que são funções constituídas com base em três funções básicas: função zero, função sucessor e função projeção (ou identidade), associadas por recursão e composição (ou substituição).

> usaremos os números naturais (uma correspondência denumerável entre os conjuntos de símbolos e números naturais, no caso). Assim, uma fórmula é uma sucessão finita de números naturais e a figura de uma demonstração é uma sucessão finita de sucessões finitas de números naturais. Desde modo, os conceitos metamatemáticos tornam-se conceitos sobre números naturais ou sucessões destes e por isso é parcialmente exprimível no próprio simbolismo do sistema PM (*Principia Mathematica*)". (GÖDEL, 1931b, p. 248-249, parênteses nossos)

Interessantemente, há um paralelo a ser feito entre estas visões de metamatemática e a forma que Gödel dá a tal aritmetização: a teoria utilizada para isso é a Aritmética desenvolvida no próprio *Principia*[41] tendo como base PA (ou seja, os axiomas de Peano-Dedekind). Portanto, podemos interpretar a codificação das funções metamatemáticas como um mapeamento, ou modelo dos conceitos metamatemáticos dos *Principia* em PA – expresso através de funções primitivas recursivas – que está contida no próprio *Principia*. Assim, com este recurso Gödel remonta aos modelos de teorias não-euclidianas com base nos axiomas da geometria euclidianas voltadas à prova da consistência relativa do primeiro, assumindo a consistência do segundo. Porém, aqui ele se utiliza da linguagem da Aritmética para representar os elementos metamatemáticos de sua própria teoria (no caso, PM e sistemas relacionados), ou seja, há o intuito da obtenção de uma consistência absoluta – que não é relativa a nenhuma outra teoria.

Além disso, outro fato a se chamar atenção foi que Gödel em seu artigo diz que é evidente a analogia com dois paradoxos semânticos combinados que já abordamos acima: o paradoxo do mentiroso e o de Richard (GÖDEL, 1931b, pp. 251). Este último vale destacá-lo, pois ele confronta diretamente e pode até ser observado como uma resposta às críticas de Peano ao paradoxo em (PEANO, 1906), alegando não ser um paradoxo matemático de fato pois seria um exemplo linguístico e sujeito a contradições pela falta de rigor definicional, bem como o argumento exposto em (NAGEL e NEWMAN, 2001, pp. 59-60) da existência de confusão conceitual entre representar uma propriedade metamatemática que gera a antinomia com a representação de propriedade puramente matemática. Já Gödel, ao trazer a formalização da aritmética dos *Principia,* forneceu rigor suficiente para interpretar intrincadas

41 Além de Gödel aparentemente dar uma justificativa do emprego de PM no início de seu artigo (GODEL, 1931a, pp. 596-597), Nagel e Newman explicam didaticamente parte desta utilização do sistema dos *Principia*, mesmo com críticas incisivas da comunidade filosófica a sua pretensão logicista devido aos seus axiomas considerados não-lógicos (da Redutibilidade e do Infinito): "Os *Principia* fornecem um sistema de notação especialmente compreensível, por meio do qual todos os enunciados da matemática pura (e da Aritmética, em particular são codificáveis de uma maneira padrão; e torna explícita a maioria das regras de inferência formais utilizadas nas demonstrações matemáticas." [...] "Os *Principia*, em suma, criaram um instrumento essencial para investigar o sistema inteiro da aritmética como um cálculo não interpretado – isto é, como um sistema de símbolos sem significado cujas fórmulas (ou 'cadeias') são combinadas e transformadas segundo regras estabelecidas de operação." (NAGEL e NEWMAN, 2001, p. 44).

sentenças metamatemáticas, fazendo com que estas se tornassem sentenças aritméticas de fato[42], não havendo críticas como as anteriores passíveis de consideração.

A aritmetização da sintaxe faz parte de uma estratégia geral de desenvolver uma notação dentro de T, e que esta notação expresse aritmeticamente funções metamatemáticas, sendo assim capaz de expressar indiretamente a si mesma. Para isso, Gödel utiliza como base as propriedades do Teorema Fundamental da Aritmética[43], designando para cada componente sintático de T um número específico, que será expoente de um número primo de uma sequência, sendo que toda proposição de PA seja representável por concatenações de funções recursivas que tem por resultado um número construído com base em uma multiplicação de fatores primos subsequentes – denominado *número de Gödel* – aplicando-se esta transformação em todo componente (podem ser símbolos de uma fórmula, proposição ou no tamanho das cadeias destes, até a aplicação de regras de inferência como *modus ponens* e até no predicado de provabilidade de uma proposição) de T e sendo assim, todos estes componentes definíveis aritmeticamente em PA por meio de funções recursivas.

2.3.3 Expressividade e capturabilidade no sistema T

A representabilidade (capturabilidade ou outro termo associado[44], dependendo do apreço a terminologia utilizada por quem trata da literatura no tema) de propriedades, funções e relações se dá com a relação biunívoca entre propriedades metamatemáticas dos componentes de T e as propriedades aritméticas entre os códigos destes componentes em PA, sendo assim definida em (SMITH, 2013, p.119):

Uma função numérica de uma variável f é capturada por $\phi(x, y)$[45] em T se, e somente se, para qualquer m, n:

---

42 Para mais detalhes, (BERTO, 2009, cap. 3) tem explicações extremamente elucidativas e ricas. Para uma abordagem mais técnica, ver (KLEENE, 1952, cap. 10).

43 O Teorema diz que todo número inteiro maior ou igual a 2 pode ser decomposto como um produto de fatores primos, sendo esta composição única para cada número. Ou seja, cada número tem apenas um arranjo por fatores primos. Esta propriedade é de suma importância para a representação biunívoca entre um componente metamatemático e sua numeração de Gödel. O relevante não é a técnica de numeração, mas duas características destacadas em (BERTO, 2009): “(1) ter que atribuir números diferentes para diferentes expressões (por isso nunca deve acontecer que o mesmo número seja atribuído, digamos, a uma fórmula e a uma prova, ou a duas fórmulas distintas); e (2) o procedimento deve ser totalmente algorítmico e mecânico.” (BERTO, 2009, p. 65, tradução nossa). Existem outras maneiras de codificar sentenças, como por exemplo as concatenações utilizadas em (BOOLOS; BURGESS e JEFFREY, 2012, cap. 15) e (SMULLYAN, 1994).

44 Em uma nota de rodapé informativa, (SMITH, 2013, p. 45) demonstra a variedade e a confusão conceitual dos termos empregados na literatura. Dependendo dos compromissos ontológicos ou do tipo de investigação envolvida, usa-se definições mais sintáticas ou semânticas. A dica é sempre ter cautela e compreender os significados dos jargões que cada obra traz.

45 Esta é uma definição geral, mais aproximada da noção de capturabilidade forte. $\phi(x, y)$ em PA pode ser uma função recursiva ou semirrecursiva (ou recursivamente enumerável) no caso da capturabilidade fraca. Ver (SMITH, 2013, caps. 5 e 16) e (BOOLOS; BURGESS e JEFFREY, 2012, cap. 16).

i. se $f(m) = n$, então $T \vdash \phi(m', n')$, e;

ii. $T \vdash \exists! y\ \phi(m', y)$, sendo m' e n' notação dos numerais m e n em PA e '$\exists! y\ \phi(y)$' abreviação de $\exists y\ (\phi(y) \land \forall v\ (\phi(v) \rightarrow v = y))$, onde v é uma nova variável para ϕ e definindo que só há um valor possível para y tal que $y = n'$.

Há uma distinção importante entre o que pode ser expresso ou definível aritmeticamente em PA da noção de capturabilidade ou representabilidade em PA. Enquanto uma propriedade ou predicado P para ser expressível em uma teoria (no caso, PA) depende da robustez e riqueza de sua *linguagem*, para P ser capturada depende-se dos *axiomas* e um elaborado *sistema de prova* implementados na teoria. Ou seja, para expressarmos adequadamente uma propriedade P em PA precisamos de um conjunto de símbolos adequados para formarmos tal proposição P, mas para capturarmos esta proposição é necessário operar as cadeias de símbolos de forma que a partir de uma cadeia inicial (axiomas), cheguemos por meio de processos de manipulação destas à proposição expressa P. Dito isso, considerando a solidez do sistema T, é visto que todas as proposições capturáveis são expressíveis, porém o inverso não se aplica no sistema T, tendo como conclusão a própria incompletude do sistema. Para tal conclusão, devemos ter funções aritméticas acerca dos números de Gödel de proposições que representam outros números de Gödel, i.e., o sistema falando sobre si mesmo, em resumo:

> "A sintaxe de PA é aritmetizada por meios da numeração de Gödel: números são associados com as expressões de PA, e conceitos aritméticos correspondem a conceitos sintáticos. Noções sintáticas-chave, tal como axioma, prova, etc. são associadas com noções aritméticas decidíveis, isto é, recursivas. E como PA pode representar tais funções recursivas, pode também representar a sintaxe de PA". (BERTO, 2009, p. 85, tradução nossa)

Desta maneira, Gödel constrói proposições aritméticas capazes de referenciar indiretamente[46] proposições metamatemáticas de T – inclusive proposições autorreferentes – utilizando um instrumento aplicado primeiramente em Teoria de Conjuntos: o argumento diagonal.

2.4 DIAGONALIZAÇÃO E AUTORREFERÊNCIA

46 Há o destaque ao termo 'indiretamente' pois as proposições aritméticas referem-se aos números de Godel de outras sentenças, não diretamente as sentenças de fato. Se assim o fosse, o sistema incidiria na crítica destacada já acima feita ao Paradoxo de Richard de confundir-se propriedades metamatemáticas e matemáticas.

Sendo a mais relevante técnica de prova utilizada por Gödel para demonstração da incompletude, o método de diagonalização voltado a sentenças metamatemáticas foi uma inovação, servindo futuramente de base para sua utilização em outras provas de indecidibilidade como o Problema da Parada do filósofo e cientista da computação Alan Turing. Veremos quais são seus componentes e como este recurso leva à sentença significativamente poder expressar a si mesma com o fenômeno da autorreferenciação, levando à estruturação da sentença indecidível G de Gödel.

2.4.1 Estrutura e aspectos do Lema Diagonal

Inicialmente, o enquadramento do Argumento Diagonal (ou Lema Diagonal) em sua forma lógica não foi esclarecida por Gödel em seu próprio artigo, mas por Rudolf Carnap em seu *The Logical Syntax of Language* (CARNAP, 1937, pp. 129-131) onde a proposição foi referenciada posteriormente como um ponto fixo do sistema T[47]. Porém, a técnica de prova que é a diagonalização foi apresentado pela primeira vez em (CANTOR, 1891) como uma nova maneira de demonstrar a não-denumerabilidade do conjunto dos números reais IR por Cantor feito por redução ao absurdo da seguinte forma: assume-se uma matriz feita com supostamente todos os números reais entre 0 inclusive a 1 {x/ 0 ≤ x <1} em uma lista bidimensional, tendo os números reais estendendo-se infinitamente e cada número tendo correspondência um-a-um enumerados por números naturais seguidos. O exemplo abaixo é um dos mais divulgados na literatura[48], feito por composição em base binária, tirado de (JACQUETTE, 2002, p. 58):

1 .00100101 ...
2 ·11010110 ...
3 .11010101 ...
4 .01001100 ...
5 .00111010 ...
6 .10111101 ...
7 .01101110 ...

47 Como (GAIFMAN, 2006, pp. 709-710) destaca, a generalização feita por Carnap não era tão óbvia até sua explicitação no livro, e o próprio Gödel reconhece isso na época. Em seu artigo *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems*, discutindo acerca das características da sentença indecidível *G* e paradoxos, ele comenta a descoberta de Carnap em uma nota de rodapé em (GÖDEL, 1934, p. 340).

48 Existem vários métodos, construtivos ou não, de formalização do argumento diagonal, com os considerados mais instrutivos destacados em (JACQUETTE, 2002, pp. 60-64).

8 .1000111$\underline{0}$ ...

.

.

.

Da matriz acima, Cantor elabora a função diagonal, que tem por objetivo definir um número real *K* por meio da substituição[49] e composição do número na enésima posição (se for 0, por 1 e vice-versa) contido no enésimo número real da matriz, ou seja, os números diagonais sublinhados acima da matriz substituídos pelo seu complemento. Assim, no exemplo acima *K* = .10110001… e deveria pertencer ao conjunto acima exposto. Contudo, isso não ocorre pois ao menos um valor que constitui o número *K* será distinto em cada um dos outros números reais contidos na matriz, ficando demonstrado que *K* não pertenceria a matriz. Por esta abordagem ter um apelo topológico[50] de gerar por meio da diagonal um valor ou função desejada, a técnica leva o nome de diagonalização.

Há paradoxos que seus resultados derivam de aplicações do método diagonal. Não por acaso, os paradoxos de Richard (sendo inclusive o primeiro do tipo) e do mentiroso, presentes no artigo de Gödel, fazem parte dos chamados paradoxos diagonais[51]. O lógico Haim Gaifman destaca que há influência clara do método de Cantor na construção de Gödel da proposição indecidível, e em seu artigo após o esboço de prova:

> “[...] adiciona uma nota de rodapé que “qualquer antinomia epistemológica poderia ser usada para uma prova semelhante da existência de proposições indecidíveis ”. O termo “antinomia epistemológica” é herdado de Ramsey [1925], se referindo a um paradoxo que emprega elementos linguísticos.” (GAIFMAN, 2006, p. 715, tradução nossa)

49 Construtivamente é fácil implementar tal função. Com $f_i(y)$ nomeando o valor existente contido no i-ésimo número real na posição y, podemos definir a função $f_k(x)$ tal que $f_k(x) = f_x(x) + 1 \equiv (\text{mod } 2)$, sendo o número *K* a concatenação de todos os $f_k(x)$ e estando na k-ésima posição na matriz; *K* por vezes é denominado de sequência anti-diagonal.Portanto, quando x = k, $f_k(k) = f_k(k) + 1 \equiv (\text{mod } 2)$, i.e., se $f_k(k)=1$, $0 = 1 \equiv (\text{mod } 2)$, e se $f_k(k)= 0$, $1 = 0 \equiv (\text{mod } 2)$. Contradição. c.q.d.

50 Esta terminologia encontra-se em (JACQUETTE, 2002) e aparentemente seu emprego é devido a diagonalização ser retirada dos valores – em posições na matriz bidimensional retangular formada – topologicamente referentes a uma diagonal desta matriz.

51 Há outros paradoxos como o de Grelling-Nelson, de Curry e até o de Russell que podem ser expostos pelo argumento diagonal, porém são enquadrados em um tipo de diagonalização não-topologicamente matricial, ou seja, que não há o componente da forma diagonal em sua exposição. Ver (JACQUETTE, 2002, seção 6).

Gaifman dará ênfase ao aspecto linguístico dos paradoxos associados ao método diagonal e que, para obter sentenças que “falam sobre si mesmas” em um sistema formal pela diagonalização, é necessário que haja funções dentro de um certo domínio *D* tal que elas devam ser nomeadas; e que estas funções podem ser aplicadas aos seus próprios nomes, abrindo possibilidades para que haja o fenômeno da autorreferência no sistema. Estas estruturas são chamadas de *Naming Systems* (GAIFMAN, 2006, p. 711).

Em uma análise semelhante, Dale Jacquette em (JACQUETTE, 2002) destaca que, entre os elementos mínimos para a utilização do método diagonal, “[...] deve existir uma autoaplicação, por meio da qual a designação de um item em uma matriz envolve um termo que é aplicado especificamente a si mesmo” (ibidem, p. 66, tradução nossa). Diferencia-se a autoaplicação de autorreferência por questões de precisão – mesmo sendo termos intercambiáveis em geral – pois nem todo termo ou função que se aplica a si mesmo está se referenciando no processo, como no exemplo dado na generalização “Todas as generalizações são quantificadas”. Mas apenas esta condição não é suficiente para Jacquette, pois “[...] alguma alteração, recusa, negação interna ou imposição de um complemento de um termo, predicado, [função] ou proposição, na expressão autoaplicativa (ibidem, p. 70, tradução e modificação nossa), ou seja, a essência da diagonalização envolve uma autoinaplicação (*self non-aplication*) de algum desses componentes, gerando uma sequência anti-diagonal não pertencente aos elementos que constituem a matriz.

2.4.2 Teorema do Ponto Fixo e Autorreferenciação

O ponto fixo identificado por Carnap no qual a sentença de Gödel se enquadra, mesmo sendo construído não-topologicamente[52], tem todos os elementos destacados acima, podendo ser expresso pelo *Teorema do Ponto Fixo* ou *Teorema de Carnap-Gödel*. Raymond Smullyan em sua obra canônica sobre o tema (SMULYAN, 1994) expõe quase informalmente este pequeno teorema (sendo posteriormente na obra mais aprofundado) que generaliza essas possibilidades de autorreferencialidade em linguagens formais. De maneira abstrata, é

52 Mesmo a sentença indecidível em T desenvolvida em (GODEL, 1931a) sendo não-topológica matricial, é possível desenvolver um argumento de matriz topológica para as demonstrações que aplicam o método diagonal tal como Gödel. Há exemplos em (PELEGRIN, 2017), estando entre eles o da incompletude da Aritmética.

definido em um sistema introduzido por Smullyan um predicado denominado *predicado diagonalizador*. Um diagonalizador D'' de um predicado D é tal que D''(K) = D(K(K)), ou seja, um diagonalizador de D é um predicado tal que sua predicação em K é equivalente a predicação do predicado D em uma predicação de K em K. Chama-se uma sentença X é um ponto fixo de D quando X= D(X), i.e., quando a própria sentença é equivalente a predicação D que tem como valor da variável a sentença da qual é equivalente. Assim, substituindo K pelo predicado de diagonalização D'':

$$D''(D'') = D(D''(D''))$$

Isto é, D''(D'') é ponto fixo do predicado D. Aqui vemos autorreferenciação de uma sentença que é a predicação da diagonalização da diagonalização. Smullyan faz um apontamento importante para o entendimento da função deste pequeno teorema na prova de Gödel, análogo à declaração anterior, de Gaifman:

> "Se pensarmos em D como o nome de uma propriedade de expressões, um valor fixo o ponto X de D pode ser considerado como afirmando que o próprio X tem a propriedade nomeada por D e, nesse sentido, é autorreferencial". (SMULLYAN, 1994, p. 17, tradução nossa).

Podemos expressar diferentemente o teorema, levando em consideração as próprias expressões utilizadas para o ponto fixo e para o número de Gödel de uma fórmula em um sistema formal. Assim, seja T este sistema em questão, sendo ϕ uma fórmula e <ϕ> seu número de Gödel – i.e., sua representação numérica em T. De acordo com o teorema, para alguma fórmula φ(x) (com ao menos uma variável livre) existe uma sentença β tal que:

$$T \vdash \beta \leftrightarrow \varphi(<\beta>)$$

Sendo β chamada de *ponto fixo* de φ(x). Aqui necessitamos apenas que haja uma função diagonal, tal que mapeie cada ϕ(x) em ϕ(<ϕ(x)>) e ela seja representável em T. Retratando β de forma mais explícita como a função diagonal Diag(x), temos que (GAIFMAN, 2006, p. 709):

$$T \vdash Diag(<\phi(x)>) = <\phi(<\phi(x)>)>$$

Porém, mesmo com três exemplos expostos de forma elucidativa, falta entre eles o componente na autoinaplicação do artigo de Jacquette (onde o próprio inclusive teceu críticas pelo mesmo motivo ao próprio Smullyan[53]). Aqui, podemos entrar na ideia central de Gödel no esboço em seu artigo (GÖDEL, 1931b, p. 251): conseguir expressar formalmente uma sentença que afirma sua própria indemonstrabilidade no sistema T.

2.4.3 Construindo uma sentença indecidível

Para o feito acima, duas funções metamatemáticas aritmetizadas são fundamentais para entender a dinâmica de construção do argumento diagonal em um sistema formal com o mínimo de Aritmética: a função de substituição de uma variável livre em uma fórmula φ e a de provabilidade em T. Estas são funções relevantes, pois a substituição de uma variável por um termo é uma operação necessária em partes de demonstrações que são derivadas por substituição de variáveis livres por termos ou numerais, bem como a própria definição de prova, que agrega outras definições como de axioma, regras de inferência, fórmula e a própria substituição para que, se a partir dos axiomas de PA em T, tenhamos por consequência alguma proposição em φ provável em T ($T \vdash \varphi$).

Ambas as funções – que tratam acerca de conceitos metamatemáticos – realizam operações aritméticas entre os números de Gödel expressíveis em T, sendo assim funções aritméticas pertencentes a PA. Como explica o lógico Craig Smorynski, existem dois tipos de função de substituição, que podem ser expressas de duas formas, sub(m, <x>, <t>) ou Sub(m, <x>, n) respectivamente, tal que:

> “[...] uma para substituir uma (o código de uma) variável livre por um (código de um) termo e um para substituir uma (o código de uma) variável livre pelo (código de um) numeral que supostamente designa o mesmo número designado pelo termo dado. A anterior é necessária, por exemplo, para reconhecer axiomas tais como $\forall x \varphi x \rightarrow \varphi t$. Ambos podem ser utilizados para o lema diagonal. Só que a última é necessária se queremos uma forma do lema diagonal com variáveis livres”. (SMORYNSKI, 1977, p. 836, tradução nossa)

53 Porém, aqui podemos destacar que a parte do exemplo que Jacquette critica Smullyan em (JACQUETTE, 2002, p. 69), não havia a intenção de mostrar em si o método da diagonalização, mas o fenômeno da autorreferência por meio deste. Há exemplos e outras demonstrações onde Smullyan mostra não negligenciar este aspecto da autoinaplicabilidade do termo diagonalizável.

Ambas as aplicações acima referidas têm como valor o número de Gödel das expressões com as substituições já instanciadas/realizadas. Assim, se analisarmos com atenção, a função de substituição da variável pelo numeral é mais interessante à diagonalização porque podemos por meio ela acrescentar numerais que representam números de Gödel de determinadas fórmulas de PA, inclusive as que propriamente tratam conceitos metamatemáticos aritmeticamente. Aqui entra a definição de provabilidade de uma fórmula φ em T. Como dito acima, a demonstrabilidade depende de outras definições, como diz Smorynski:

> "A derivação de φ é uma sequência de fórmulas tais que cada elemento da sequência é um axioma de T, um axioma lógico, ou uma consequência por alguma regra lógica [inferência] de membros anteriores da sequência. Os axiomas lógicos podem ser tomados como primitivo recursivos no sentido de que o conjunto de códigos de tais axiomas é primitivo recursivo". (SMORYNSKI, 1977, p. 837, tradução nossa)

Posto que todos estes elementos que compõem a função de demonstração de alguma proposição com número de Gödel *y* sejam representáveis em T, i.e., capturáveis por funções recursivas aritmeticamente, *y* é provável se, e somente se, existe um número de Gödel que representa aritmeticamente tal demonstração. Ou seja:

$$\mathrm{Prov}_T(y) \leftrightarrow \exists x \mathrm{Pr}_T(x, y)$$

Já definida a noção de provabilidade em T, voltemos à operação de substituição para entendermos a sinergia de ambas no argumento diagonal. Podemos usar o exemplo em (NAGEL e NEWMAN, 2001, p. 66) da fórmula "existe um x tal que x é o sucessor imediato de y", $\exists x(x = Sy)$. Supondo que tenhamos seu número de Gödel $<\exists x\, (x = Sy)> = m$, podemos substituir a variável livre *y* pelo próprio número de Gödel de sua fórmula, ou seja:

$$sub(m, <y>, m) = <\exists x(x = Sm)>$$

Generalizando este caso de substituição, podemos ter uma função que substitui em uma fórmula *y* a variável livre de número de Gödel <y> pelo seu próprio número *y*, i.e., $sub(y, <y>, y)$. Levando em conta que esta função também venha a ser aritmeticamente definível e supondo que há substituições que podem ou não ser prováveis em T, temos a construção da proposição S:

$$S \equiv \neg\exists x \, Pr_T(x, sub(y, <y>, y))$$

Tal que S significa que não existe uma prova em T para a fórmula de número de Gödel expressa por sub(y, <y>, y), sendo *y* uma variável livre. Considerando que S é definível aritmeticamente em T, ele tem necessariamente um número de Gödel <S>. Portanto, se y = <S>, então temos que:

$sub(<S>, <y>, <S>) \leftrightarrow \neg\exists x \, Pr_T(x, sub(<S>, <y>, <S>))$. Com G = $sub(<S>, <y>, <S>)$[54]:

$$G \leftrightarrow \neg\exists x \, Pr_T(x,<G>)$$

Pois na substituição de *y* em S por <S>, constrói-se G que nada mais é que a instanciação da própria função de substituição da variável livre *y* por <S>. Contudo, podemos perceber que a sentença G afirma sua própria indemonstrabilidade, portanto, se G for provável em T, sendo T consistente[55], temos aqui uma contradição. É importante destacar o fato de que a capturabilidade da provabilidade das sentenças em $Prov_T$ é estritamente dependente do aspecto recursivo das funções que o compõem, sendo que dentre as 46 definições apresentadas na prova de Gödel, $Prov_T$ é a única que não se pode afirmar como recursiva (GÖDEL, 1931b, p. 270). Assim, observa-se que se $\neg\exists x Pr_T(x,<G>)$ for recursiva, G é capturável e o sistema T, por consequência, torna-se inconsistente. Portanto, sendo a função substituição que compõe G recursiva, termos que $Prov_T$ não o é.

Prosseguindo a análise, tanto o primeiro requerimento destacado por Jacquette para a diagonalização – que é o potencial da aplicação de uma designação em si mesmo – como sua autoinaplicabilidade, sendo nos termos de Smullyan a substituição o predicado diagonalizador da provabilidade em T, com G sendo o ponto fixo deste último em T. Sobre a legitimidade deste recurso e a semelhança de G com paradoxos autorreferentes, Gödel comentou uma certa discordância com a maneira se lidarem com paradoxos no próprio *Principia*, alegando que a impredicatividade não se aplica em seu caso:

54 Colocamos neste exemplo a função sub(<S>, <y>, <S>) em itálico pois ele está expressando não um número de Gödel, mas a possível proposição de T representada por este número.

55 No artigo original de Gödel, ele não fala em consistência, mas em ω-consistência ou consistência-ômega, um conceito um pouco mais forte do que o da consistência simples. Por uma definição negativa, o sistema T é dito ω-inconsistente quando, considerando uma função φ(x) em T, $T \vdash \exists x \varphi(x)$, porém para cada número natural n, $\vdash \neg \varphi(n)$, ou seja, prova-se que existe um x tal que φ(x) é válido em T, porém para cada caso individual, em qualquer instanciação um número natural n em x faz com que φ(n) não seja válida em T. Logo, o sistema T é ω-consistente se e somente se não é ω-inconsistente. Porém, em 1937 Barkley Rosser desenvolveu uma proposição que exige apenas a consistência simples de T, obtendo igualmente sua incompletude.

> “Vimos que no nosso sistema formal podemos construir proposições acerca do sistema formal, algumas das quais podem ser demonstradas outras não, conforme o que dizem acerca do sistema. Compararemos este fato com o célebre Paradoxo de Epimênides (*Der Lugner*). A solução sugerida por Whitehead e Russell, a de uma proposição não poder dizer nada acerca de si própria, é demasiado drástica. Já vimos que podemos construir proposições que falam acerca de si próprias e de fato estas proposições são proposições aritméticas que envolvem apenas funções definidas recursivamente e por isso são, sem dúvida, proposições com sentido. É mesmo possível, para qualquer propriedade metamatemática *f* que pode ser expressa no sistema, construir uma proposição que diz acerca de si própria que tem essa propriedade. [...] Esta construção só pode ser efetuada se a propriedade *f* pode ser expressa no sistema e se o Paradoxo de Epimênides reside no fato de não ser possível para qualquer propriedade metamatemática”. (GÖDEL, 1934, p. 339-340)

Para Gödel, visto que todas as funções metamatemáticas, transformações e operações utilizadas em sua demonstração seriam construíveis, a conclusão que podemos chegar é que elas não são impredicativas nem desprovidas de sentido, e sua técnica de proposições autorreferentes (ou autoinaplicáveis) legítima, claramente se enquadrando como aplicação da diagonalização não topológica-matricial em fórmulas bem formadas de PA no sistema T. Porém, há outras sentenças indecidíveis que, mesmo com certas semelhanças e tendo o mesmo propósito de prova, não tem a mesma estrutura da sentença original de Gödel. São estas sentenças que avaliaremos no próximo capítulo.

3. DEPOIS DE GÖDEL: ASPECTOS DE SENTENÇAS INDECIDÍVEIS PARADOXAIS EM SISTEMAS FORMAIS

Neste capítulo, investigaremos as diferentes sentenças descobertas baseadas em diversos paradoxos da literatura. Observaremos como elas são construídas, suas demonstrações e características gerais, realizando análises comparativas tanto com a sentença e consequências da prova de Gödel quanto umas com as outras, buscando compreender sua estrutura e porque elas não podem ser decididas dentro do sistema formal a qual pertencem.

Há dois momentos conhecidos na literatura nos quais Kurt Gödel comenta sobre sentenças indecidíveis de tipo paradoxal: a primeira em seu artigo canônico de 1931, quando ao se referir a semelhança de sua sentença indecidível ao Paradoxo do Mentiroso afirma em uma nota de rodapé que “qualquer antinomia epistemológica pode ser usada para uma demonstração análoga de não-demonstrabilidade” (GÖDEL, 1931a, p. 231) e em relato em (CHAITIN, 1995, p. 26) de uma conversa com Gregory Chaitin, onde o cientista da computação afirma que conseguiu demonstrar o Teorema da Incompletude baseada no Paradoxo de Berry, Gödel responde apenas que “[...] não importa qual paradoxo você usa”, com Chaitin complementando ter uma interpretação informacional-teorética da incompletude. O artigo visa reunir as principais formalizações de sentenças indecidíveis baseadas em diversos paradoxos desenvolvidas após seu artigo de 1931, demonstrando suas convergências, distinções e realizando um aprofundamento da alegada prova algorítmica da incompletude por Chaitin em (CHAITIN, 1970), buscando ao final o que é e como podemos entender a natureza da incompletude em sistemas formais, demonstrada por meio destas sentenças.

3.1 ESCLARECIMENTOS PRELIMINARES

Há uma variedade de formas na literatura acerca do tema de expressar sentenças e predicados em sistemas formais que contenham a Aritmética de Dedekind-Peano (doravante PA). Aqui, optamos principalmente pelas notações utilizadas por Peter Smith em (SMITH, 2013), com pequenas modificações nas exposições de diversas sentenças de seus artigos originais devido a isso. Há uma série de detalhes técnicos que devem ser destacados ou relembrados, mesmo sendo levemente expostos no capítulo anterior. Consideremos um sistema formal T que seja uma extensão primitiva recursiva da aritmética de Dedekind-Peano (doravante PA) e contenha a linguagem de primeira ordem de PA a partir do conjunto de símbolos $\underline{L}_A$ = {+, ., S, 0, <}, onde + e . são operações de soma e multiplicação, S é a função unária de sucessor, 0 é uma constante e < uma relação binária. Representaremos n ocorrências de S(S(S…S(0)…)) pelo numeral n, o número de Gödel de uma fórmula φ por N(φ) e o seu numeral por <φ>. |φ| representa o numeral do comprimento da fórmula φ. A linguagem da lógica proposicional será padrão, utilizando das variáveis proposicionais p, q, r… e dos conectivos ¬, ∨, ∧, → e ↔. O predicado de provabilidade em T de y, $Prov_T(y)$, onde:

$$Prov_T(y) \leftrightarrow \exists x Pr_T(x, y)$$

Lê-se acima como "a sentença y tem uma demonstração se e somente se existe um x, tal que x é o número de Gödel de prova da sentença de número de Godel y no sistema formal T". Assim, temos que uma fórmula φ é *provável* em T, i.e., T ⊢ φ, se e somente se sua provabilidade for derivada em PA, T ⊢ $Prov_T$(<φ>), demonstrando-se o caso contrário, diz-se que a sentença é refutável em PA, e T ⊢ ¬φ. Desta forma, temos que uma sentença é *decidível* em T se ela é provável ou refutável no sistema. Caso contrário, ela é indecidível. Ou seja, uma sentença φ é *indecidível* se, e somente se, φ nem ¬φ são prováveis em T. Definimos que uma função numérica de uma variável f é *capturável* ou *representável* por φ(x, y) em T se, e somente se, para qualquer m, n:

i. se f(m) = n, então T ⊢ φ(m, n), e;

ii. T ⊢ ∃!y φ(m, y), sendo m e n respectivamente os numerais de m e n em PA e '∃!y φ(y)' abreviação de ∃y (φ(y) ∧ ∀v (φ(v) → v = y)), onde v é uma nova variável para φ e definindo que só há um valor possível para y tal que y = n.

Das funções capturáveis em PA, uma relevante nas demonstrações de indecidibilidade é a *função de substituição*, expressa por sub(<φ>, <y_0>, n), onde há a substituição em uma fórmula φ que tenha a variável livre y_0 pelo numeral n (no caso de não haver y_0, o resultado é o próprio <φ>). Por último, o chamado Teorema do Ponto Fixo ou Lema Diagonal é de grande importância em praticamente todas as sentenças que aqui serão apresentadas:

Lema Diagonal: Para alguma fórmula φ(x, y) de T na qual todas as variáveis livres estão entre x e y, existe uma fórmula de apenas uma variável livre $\psi(y_0)$ tal que

$$T \vdash \forall x(\ \psi(x) \leftrightarrow \varphi(x, <\psi(y_0)>)$$

ou simplificada: para alguma fórmula φ(x) (com ao menos uma variável livre) existe uma sentença β tal que:

$$T \vdash \beta \leftrightarrow \varphi(<\beta>)$$

A partir destas informações que expõem os componentes técnicos mais básicos para definição e entendimento do tema, podemos apresentar as ideias de prova das sentenças indecidíveis construídas com base em paradoxos, iniciando pelo aprimoramento da sentença de Gödel realizada por Barkley Rosser.

3.2 ÔMEGA-CONSISTÊNCIA E SENTENÇAS DE ROSSER

A crença entre a comunidade matemática de que poderíamos dar respostas a todos os seus problemas em aberto foi posto em xeque pelo primeiro Teorema da Incompletude de Gödel em seu artigo canônico de 1931. Porém, também houve fortes repercussões na área que buscava por meio do Projeto de Hilbert fundamentos sólidos para a Matemática com base no uso de um corpo axiomático e métodos finitários com vistas a desenvolver uma prova de consistência da Aritmética: o corolário extraído do primeiro teorema – o Teorema XI de (GÖDEL, 1931a) intitulado de Segundo Teorema da Incompletude – onde Gödel afirma:

> “Seja κ uma classe arbitrária de *fórmulas* recursiva e consistente. Então a *proposição* que afirma que κ é consistente não é κ-*demonstrável*. Em particular, a consistência de T não é demonstrável em T, supondo que T é consistente (caso contrário, claro, toda proposição é demonstrável). (GÖDEL 1931b, 287-288)

Contudo, no Primeiro teorema considera-se o sistema formal T como ω-consistente, i.e., uma consistência mais forte na qual, como exposto em (BULDT, 2014):

> “O conceito de ω-consistência captura a ideia que se uma sentença é verdadeira e derivável para todos os números naturais, então o sistema formal não prova formalmente a existência de um contraexemplo (devendo ser ele um número não-standard); resumindo, se $\vdash \varphi(n)$, para todo $n \in N$, then $\nvdash \exists x \neg\varphi(x)$. Note que a ω-consistência implica consistência por causa de $\nvdash \exists x \neg(x = x)$.” (BULDT, 2014, p. 509, tradução nossa).

Definindo-o negativamente, um sistema T é dito ω-inconsistente quando, considerando uma função $\varphi(x)$ em T, $T \vdash \exists x \varphi(x)$, porém para cada numeral n, $\vdash \neg \varphi(n)$, ou seja, prova-se que existe um x tal que $\varphi(x)$ é válido em T, porém para cada caso individual, em qualquer instanciação um numeral n em x faz com que $\varphi(n)$ não seja válida em T. Logo, o sistema T é ω-consistente se e somente se não é ω-inconsistente. Tal definição não gera nenhuma complicação, já que a ω-consistência de um sistema implica sua consistência simples. Contudo trata-se de uma artificialidade lógica indesejável, pela busca da consistência da Aritmética ser absoluta e independente e incondicionada de outras teorias ou definições. Em (ROSSER, 1936), o lógico John Barkley Rosser construiu uma sentença distinta e mais complexa baseado no predicado de provabilidade de Gödel $Pr_T(x, y)$, em que podemos apenas levar em conta a consistência simples, ou seja, um sistema T é *simplesmente consistente* se não existe nenhuma fórmula $\varphi(x)$ tal que $\varphi(x)$ e $\neg \varphi(x)$ são demonstráveis em T. Em termos de $Pr_T(x, y)$, define-se $RProv_T(x, y)$ como:

1. $Prov_R(x, y) =$*def* $Pr_T(x, y) \wedge (\forall z \leq x) \neg Pr_T(z, \neg y)$, sendo que
2. $RProv_T(y) =$ *def* $\exists x Prov_R((x, y)$, i.e.,
   $RProv_T(y) =$*def* $\exists x\, (Pr_T(x, y) \wedge (\forall z \leq x) \neg Pr_T(z, \neg y))$

Explicando informalmente os predicados acima, o predicado de provabilidade de Rosser define o que é uma R-prova em T quando existe uma demonstração de y com número de Gödel x e não há nenhum z que seja prova de sua negação e tenha número de Gödel menor ou igual a x. Assim, vamos expor a prova contida em (SMITH, 2013, pp. 188-189) em mais detalhes:

O Teorema de Gödel-Rosser: Em uma *boa* e *consistente* teoria T (na qual o mínimo de Aritmética é dado e não haja contradições em seu sistema, respectivamente) existe uma sentença γ expressa em T tal que $T \vdash \gamma \leftrightarrow \neg RProv_T(<\gamma>)$ - sendo γ ponto fixo de $\neg RProv_T(x)$ - onde $T \nvdash \gamma$ e $T \nvdash \neg\gamma$.

Prova: Primeiramente, supomos que γ é provável. Temos assim que $\neg RProv_T(<\gamma>)$ também o é, portanto há um numeral n tal que (i) $T \vdash Pr_T(n, <\gamma>)$. Agora, sendo R_T provável e T consistente, $\neg\gamma$ seria improvável. Portanto, não há nenhum numeral que corresponda o número de Gödel de $\neg\gamma$, i.e, $T \vdash \forall z\, \neg Pr_T(z,<\neg\gamma>))$. Contudo, desta última sentença podemos derivar uma sentença mais fraca, onde $\forall z \leq x$, não há prova de $\neg\gamma$, i.e., (ii) $T \vdash (\forall z \leq n) \neg Pr_T(z,<\neg\gamma>))$. Portanto, unindo conjuntivamente (i) e (ii), temos que $T \vdash Pr_T(n, <\gamma>) \wedge (\forall z \leq n) \neg Pr_T(z,<\neg\gamma>)$, logo $RProv_T(<\gamma>)$. Contradição.

Agora, consideremos $\neg\gamma$ provável. Devido a $T \vdash \gamma \leftrightarrow \neg RProv_T(<\gamma>)$, temos que (1) $T \vdash RProv_T(<\gamma>)$. Sendo $\neg\gamma$ um teorema de T, temos um numeral m tal que $T \vdash Pr_T(m,<\neg\gamma>)$. Com T consistente, temos neste caso que $T \nvdash \gamma$, portanto $T \vdash \forall z \neg Pr_T(z,<\gamma>)$, uma dedução fraca deste último é tomar qualquer numeral (neste caso, convencionalmente, temos m devido a $\neg\gamma$) tal que $(\forall z \leq m) \neg Pr_T(z,<\gamma>)$, e por manipulações lógicas, chega-se em $T \vdash \forall z(Pr_T(z,<\gamma>) \rightarrow (m \leq z))$. Dedutivamente, de (2) e acrescentando ao consequente (1) mantendo a verofuncionalidade, se segue que $T \vdash \forall z(Pr_T(z,<\gamma>) \rightarrow ((m \leq z) \wedge Pr_T(m, <\neg\gamma>)))$. Substituindo o quantificador universal pelo existencial em z e o numeral m pela variável x e seu quantificador existencial, temos:

$T \vdash \neg \exists z \neg(Pr_T(z,<\gamma>) \rightarrow \exists x((x \leq z) \wedge Pr_T(x, <\neg\gamma>)))$;
$T \vdash \neg \exists z(Pr_T(z,<\gamma>) \wedge \neg\exists x((x \leq z)\, Pr_T(x, <\neg\gamma>)))$;
$T \vdash \neg \exists z(Pr_T(z,<\gamma>) \wedge \forall x((x \leq z) \neg Pr_T(x, <\neg\gamma>)))$, i,e.,
$T \vdash \neg RProv_T(<\gamma>) \dashv$.

Contudo, este resultado entra em contradição com (1). Logo, $T \nvdash \neg\gamma$.

O que temos aqui é que se tivermos uma Rosser-prova de γ, implica termos também uma prova de $\neg\gamma$ com número de Gödel menor a de γ e vice-versa. Porém, se T é consistente, com cada sentença ou sequência de fórmulas tendo sua própria codificação e não havendo número natural que, conjuntamente, seja maior e menor que outro, γ e sua negação são indemonstráveis e T, incompleto. Este arranjo lógico-matemático que Rosser desenvolveu será utilizado em outras sentenças propositivas indecidíveis onde o sistema só precisa da consistência simples.

A noção mais simples de consistência pode ser pressuposta com ganhos, porém também há certas perdas com isso. Uma delas é na prova do segundo teorema da incompletude, corolário do primeiro, sobre a indemonstrabilidade da consistência de T em T, pois duas das denominadas *condições de derivabilidade de Hilbert-Bernays-Löb* (doravante

HBL) não são satisfeitas no predicado de Rosser, valendo apenas ao predicado $Prov_T$. Estas condições foram apresentadas no livro *Grundlagen der Mathematik* (1939) por Paul Bernays e David Hilbert, e aprimoradas posteriormente por Martin Hugo Löb em 1955 (SMITH, 2013, p. 246). As três condições mínimas satisfeitas aplicadas em $Prov_T$ são:

(i) se $T \vdash \varphi$, então $T \vdash Prov_T(<\varphi>)$;
(ii) $T \vdash Prov_T(<\varphi \rightarrow \psi>) \rightarrow (Prov_T(<\varphi>) \rightarrow Prov_T(<\psi>))$ e;
(iii) $T \vdash Prov_T(<\varphi>) \rightarrow Prov_T\,(<Prov_T(<\varphi>)>)$.

No caso de $RProv_T$ só (i) é satisfeita. Através destas condições pode-se formalizar uma lógica modal da provabilidade e com isso, uma manipulação simbólica mais efetiva levando a demonstração do segundo teorema – só feito posteriormente ao artigo canônico de Gödel. Este recurso será utilizado adiante em sentenças com predicado $Prov_T$.

3.3 SENTENÇAS DE TIPO-MENTIROSO

A sentença indemonstrável de Gödel do artigo de 1931 tem inspiração no paradoxo do Mentiroso em sua estrutura sintática – um dos paradoxos mais antigos registrados – substituindo a noção de verdade pela provabilidade em T. Porém, a partir deste paradoxo foram sendo propostos outros semelhantes, seja para apontar ou evitar autorreferenciação – como os *Liar cycles* – e evitar circularidades – paradoxo de Yablo – seja para expor possíveis inconsistências em determinados sistemas formais – como o caso do Paradoxo de Curry. Em (KIKUCHI e KURAHASHI, 2016, p. 385) define-se o paradoxo de tipo-mentiroso (*liar-type paradox*) como a lacuna entre a consistência da fórmula $p \leftrightarrow \neg\Box p$ e a inconsistência de $p \leftrightarrow \neg p$, onde $\Box$ é um predicado modal (em nosso caso, de provabilidade em T) de um sistema. Aqui, veremos estes paradoxos expressos formalmente.

3.3.1 Paradoxo de Yablo

Começaremos por este paradoxo devido ao seu desenvolvimento recente em (YABLO, 1993), logicamente definido em (PRIEST, 1997) e (KETLAND, 2005) e mostrado como indecidível quando formalizado em T por (CIESLINSKI e URBANIAK, 2013), servindo de base a outros que serão abordados aqui. Como um paradoxo de tipo-mentiroso com proposta de escape do fenômeno da autorreferência, ele constitui-se de uma lista de infinitas sentenças na forma:

S(1) : Para todo k > 1, S(k) é falso

S(2) : Para todo k > 2, S(k) é falso

S(3) : Para todo k > 3, S(k) é falso

.

.

.

S(n) : Para todo k > n, S(k) é falso

Ou podemos ter uma expressão geral levando em conta o predicado veritativo, como apresentado no próprio artigo de Ciersliski e Urbaniak: tendo n como qualquer ordinal de uma lista infinita de sentenças na forma:

$$S_n = \forall x\ (P_{n+1}(x) \rightarrow \neg Tr(x)),$$

onde a extensão de P_n é a infinidade de sentenças a partir da ordem n $\{S_n, S_{n+1}, S_{n+2}\ldots\}$.

Destarte, se formos adotar uma sentença de ordem k da listagem e pressupormos verdadeira, todas a partir da ordem k+1 serão falsas, contudo estas outras sentenças também afirmam que a sentença abaixo delas na ordem também são falsas, sendo assim verdadeiras. Contradição. Já pressupondo a falsidade de uma sentença de ordem k, deriva-se que existe alguma sentença m sendo m > k é verdadeira, gerando a contradição que destacamos anteriormente. Graham Priest analisou este paradoxo e argumentou que, levando em consideração a existência de circularidade e autorreferência em certos predicados lógicos pela aplicação do Lema Diagonal, pode-se afirmar através de uma generalização que há um predicado com ponto fixo, afirmando que o paradoxo tinha circularidade por envolver uma autoinaplicação do valor k de um S_k nas sentenças subsequentes a S_k. Priest também sugeriu em uma nota de rodapé em (PRIEST, 1997, p. 238) a possibilidade de transformar o paradoxo em uma prova do teorema da incompletude. Jeffrey Ketland apresenta uma formalização lógica em PA por ponto fixo em que as sentenças de Yablo são derivadas dela, denominada O Princípio Yablo de Ponto Fixo Uniforme:

$$PA \vdash \forall x(Y(x) \leftrightarrow \forall y > x \neg Sat(<Y(x)>, y)$$

Com a sentença de Yablo $\forall y > x \neg Sat(<Y(x)>, y)$ significando que nenhum número maior que x satisfaz a fórmula com número de Gödel $<Y(x)>$ (KETLAND, 2005, p. 298).

Em (CIESLINSKI e URBANIAK, 2013), realiza-se a troca do predicado de verdade/satisfatibilidade pelo de provabilidade em T e estende-se PA com o símbolo funcional f, tal que tenhamos informalmente a função $f(n) \leq (\forall x > n)\ \forall y\ \neg Pr_T(y, f(x))>$. Contudo, utilizando a generalização pelo lema diagonal em cima da função substituição e representando a fórmula de Yablo por Y(x), temos sua aritmetização formal como $Y(x) \equiv \forall y\ [y > x \rightarrow \forall z\ \neg Pr_T(z, sub(<Y(x)>,<x>,<y>))]$. Supondo que esta fórmula seja representável em T e tenhamos para algum numeral n $T \vdash Y(n)$, então:

(1) $T \vdash \forall y\ [y > n \rightarrow \forall z\ \neg Pr_T(z, <Y(y)>]$, do qual podemos derivar
(2) $T \vdash \forall y\ [y > n+1 \rightarrow \forall z\ \neg Pr_T(z, <Y(y)>]$. De (1) derivamos também que
(3) $T \vdash \forall z\ \neg Pr_T(z, <Y(n+1)>)$. Porém, de (2) concluímos que
(4) $T \vdash Y(n+1)$.

Assim, considerando que T é robusta o suficiente, temos que se (4), então podemos ter a representação do predicado aritmético de prova em T de (4), ou seja, $T \vdash \exists z Pr_T(z, <Y(n+1)>)$, o que contradiz (3). Na segunda parte da prova, considerando $T \vdash \neg Y(n)$:

$$T \vdash \neg \forall y\ [y > n \rightarrow \forall z\ \neg Pr_T(z, <Y(y)>], \text{ i.e., } T \vdash \exists y\ [y > n \wedge \exists z\ \neg Pr_T(z, <Y(y)>].$$

Portanto, há algum numeral k tal que $T \vdash k > n \wedge \exists z\ Pr_T(z, <Y(k)>)$; então $T \vdash \exists z\ Pr_T(z, <Y(k)>)$. Em um sistema bom e consistente como T, se temos a prova de um predicado Y(k) significa que podemos derivá-lo neste sistema. Ou seja, $T \vdash Y(k)$, repetindo-se o mesmo raciocínio da primeira parte da prova. Portanto $T \nvdash Y(n)$ e $T \nvdash \neg Y(n)$ para todo n.

Da conclusão acima, considerando T boa e as condições de derivabilidade de Hilbert-Bernays-Löb, segue-se o teorema:

$$T \vdash \forall x\ (Y(x) \leftrightarrow Con(T))$$

onde Con(T) expressa a consistência em T do próprio sistema, que pode ser descrita da mais simples forma como $\neg\exists x Pr_T(x, <\perp>)$ em PA ou $\neg Prov_T(<\perp>)$, tal que o símbolo $\perp$ seja definido como qualquer sentença refutável, como 0 = 1 ou 2+2 = 5, este último destacado em (BOOLOS, 1994, p. 413). Mostremos a primeira parte da demonstração:

1. $T \vdash \perp \rightarrow Y(x+1)$ - uma tautologia da lógica clássica;
2. $T \vdash Prov_T (<\perp \rightarrow Y(x+1)>)$ - aplicação de (i) em (1);
3. $T \vdash Prov_T (<\perp \rightarrow Y(x+1)>) \rightarrow (Prov_T (<\perp>) \rightarrow Prov_T(<Y(x+1)>)$ - diretamente de (ii) em (2);
4. $T \vdash Prov_T (<\perp>) \rightarrow Prov_T (<Y(x+1)>)$ - de (2) e (3), por modus ponens;
5. $T \vdash \neg Prov_T (<Y(x+1)>) \rightarrow \neg Prov_T (<\perp>)$ - contrapositiva de (4);
6. $T \vdash \neg Prov_T (<Y(x+1)>) \rightarrow Con(T)$ - substituindo em (4) por definição;
7. $T \vdash Y(x) \rightarrow \neg Prov_T (<Y(x+1)>)$ - segue-se da definição de Y(x);
8. $T \vdash Y(x) \rightarrow Con (T)$ - de (7) e (8).

A outra parte – que demonstra $Con(T) \rightarrow Y(x)$ - é mais longa, porém só demonstraremos o primeiro por questão didática, pois este modelo de prova em conjunto a aplicação das condições de derivabilidade HBL serão vistas logo a seguir. O teorema acima leva a um corolário interessante: se x é uma variável qualquer, podendo derivar qualquer numeral dela, então $T \vdash \forall x \forall y (Y(x) \equiv Y(y))$. Ou seja, independentemente da substituição de x e y, com uma extensão de T com uma sentença de Yablo Y(n), conseguimos derivar qualquer outra sentença Y(m), seja o numeral m maior ou menor que n. Há também em (CIESLINSKI e URBANIAK, 2013) versões da representabilidade do Paradoxo de Yablo em PA por meio de sentenças existenciais – expressas como E(n) - onde, de fato, trata-se de uma lista de infinitas sentenças que são negações das primeiras apresentadas. Ou seja, se foi provado que as sentenças de Yablo formalizadas são indecidíveis em PA, segue como corolário que uma lista de sentenças negativas também seria, pois $E(n) \equiv \neg Y(n)$. Há também o enquadramento do paradoxo ao predicado de Rosser, onde não há nenhuma distinção significativa além de não se aplicarem as sentenças às condições de derivabilidade HBL, e portanto tais teoremas e corolários não se aplicam[56].

Um comentário a se fazer é que a formalização do Paradoxo de Yablo é a primeira a produzir uma infinidade de sentenças indecidíveis em PA, fazendo isso por meio da distinção na aplicação da própria função substituição, não de uma variável por um numeral que é seu próprio número de Gödel – como na sentença G – mas de uma variável ligada por outra, derivando na fórmula resultante desta substituição sentenças com variáveis ligadas à numerais pelas quais somos levados a contradição se assumirmos como demonstrável em T de qualquer instância da fórmula ou sua negação. Ainda há discussões sobre a legitimidade da não-circularidade reivindicada por Yablo, e até o questionamento sobre o que seria ou não circularidade[57], porém a realização de sua diagonalização não deixa dúvidas acerca de sua formalização ser indecidível pelos mesmos meios da sentença de Gödel.

3.3.2 Paradoxo de Curry

O paradoxo de Curry tem vertentes tanto teórica conjuntiva ou sintática – *set theoretic* – quanto veritativa ou semântica – *truth theoretic*[58]. Porém, como exposto em (KIKUCHI e KURAHASHI, 2016, p. 387) resume-se a autorreferencialidade de uma sentença S equivalente a afirmação de que se ela mesma S é verdadeira, então uma sentença arbitrária X se segue, ou seja, proposicionalmente: $(S \equiv S \rightarrow X)$. Se X for uma falsidade, leva a inconsistência sem qualquer problema dedutivo aparente. Contudo, na ideia de expressar uma formalização do paradoxo em PA, a vertente teórico-veritativa se apresenta, pois há considerado aqui inicialmente o predicado de verdade (relacionado a demonstrabilidade do sistema formal estabelecido), porém obtemos resultados por meio de funções recursivas e cálculo lógico, ou seja, por pura manipulação simbólica e de aspecto sintático. Expresso por meio do lema diagonal, temos $T \vdash \varphi \leftrightarrow (Prov_T(<\varphi>) \rightarrow f_T(B))$, com f_T sendo uma função em T e a realização de B inconsistente na lógica proposicional. Tomemos T como um sistema

56 No artigo (KURAHASHI, 2014) temos o desenvolvimento das sentenças de Yablo com o predicado de Rosser por duas formalizações distintas, bem como suas propriedades com os predicados de prova simples e com a expressão de demonstração da consistência de T.

57 Ver (SORENSEN, 1998) e (BEALL, 2001) e (COOK, 2014, cap. 2)

58 Uma explicação da versão teórica conjuntiva orientada pelo Paradoxo de Russell pode ser vista em (MEYER, ROUTLEY e DUNN, 1979). A versão mais divulgada e demonstrada baseada no Princípio da Contração (onde A e B são fórmulas, então $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)))$ encontra-se no artigo cânone (CURRY, 1942). Uma abordagem geral do paradoxo encontra-se em (SHAPIRO e BEALL, 2017).

formal recursivamente axiomatizável, bom – que contenha o mínimo de Aritmética (PA) - e consistente. Vamos substituir a noção de verdade utilizada no paradoxo pela noção de provabilidade em T, tal que se uma sentença A temos que $T \vdash A$, então $T \vdash \exists x Pr_T(x, <A>)$, sendo <A> o número de Gödel da sentença A.

Assim, formalizando o paradoxo, consideremos a fórmula:

$$\exists x(Pr_T(x, y) \rightarrow \exists z Pr_T(z, < (0 = 1) >))$$

que significa: se existir uma prova de y, então existe um número que represente uma prova de (0 = 1) em T. Se substituirmos a variável y na fórmula S pelo número de Gödel referente a diagonalização da função de substituição, teremos como expressão a sentença $S \equiv \exists x(Pr_T(x, sub(y, <y>, y)) \rightarrow \exists z Pr_T(z, < (0 = 1) >))$. Considerando S aritmetizável, ela tem por consequência um número de Gödel <S>. Substituindo a variável y por <S>, obtemos a sentença C, tal que $C \equiv \exists x(Prov_T(x, sub(<S>, <y>, <S>)) \rightarrow \exists z Prov_T(z, < (0 = 1) >))$, i.e., sub(<S>, <y>, <S>) é justamente o número de Gödel de C[59], logo o lema diagonal tipo-Curry fica:

$$C \leftrightarrow (\exists x(Pr_T(x, <C>) \rightarrow \exists z Pr_T(z, < (0 = 1) >)) \quad (DC)$$

Na primeira parte da prova,, seja $T \vdash C$. Portanto, haveria um numeral n tal que:

1. $T \vdash C \leftrightarrow (\exists x(Pr_T(x, <C>) \rightarrow \exists z Pr_T(z, < (0 = 1) >))$;
2. $T \vdash C$;
3. $T \vdash \exists x(Pr_T(x, <C>) \rightarrow \exists z Pr_T(z, < (0 = 1) >)$, por modus ponens de (1) e (2);
4. $T \vdash Pr_T(n, <C>)$, por (i) em (2);
5. $T \vdash \exists x(Pr_T(x, <C>)$, por generalização existencial de (4)
6. $T \vdash \exists z Pr_T(z, < (0 = 1) >)$, por modus ponens de (3) e (5).

59 Aqui, devemos ter cautela, pois há a substituição de toda variável y da fórmula de S, e se houver em $\exists z Pr_T(z, < (0 = 1) >)$ qualquer variável y, ela será substituída, o que descaracterizaria parte da própria fórmula e o resultado autorreferente.

Ou seja, há um numeral k tal que $Pr_T(k, < (0 = 1) >)$, representando a prova de (0 = 1) em PA. Porém, sendo T consistente, isso levaria a uma contradição. Logo $T \nvdash C$. Agora, se $\neg C$ for provável em T:

1. $T \vdash \neg C$
2. $T \vdash Pr_T(n, <\neg C>)$, (i) em (1);
3. $T \vdash \neg C \leftrightarrow \neg(\exists x(Pr_T(x, <C>) \rightarrow \exists z Pr_T(z, < (0 = 1) >))$, transformação em (DC);
4. $T \vdash \exists x(Pr_T(x, <C>) \wedge \neg\exists z Pr_T(z, < (0 = 1) >))$, modus ponens de (1) e (3) ;
5. $T \vdash \exists x Pr_T(x, <C>)$.

Portanto, sendo T correto, existe uma prova tanto para $\neg C$ quanto para C em T. Contradição. Desta maneira, sendo T ω-consistente, $T \nvdash \neg C$, sendo C verdadeira[60] porém não demonstrável em T.

Há um fato interessante de conseguirmos extrair como corolário o segundo teorema da incompletude por meio de C, tal como na sentença de Gödel, mostrando status epistêmico semelhante a G. Para facilitar a visualização da demonstração, utilizaremos a notação resumida $\Box p$ indicando o predicado de provabilidade $Prov_T(<p>)$, equivalente ao utilizado em (BOOLOS, 1994) e (SMITH, 2013, cap. 33), em conjunto com as regras derivabilidade de Hilbert-Bernays-Löb abaixo representadas:

i) se $T \vdash p$ então $T \vdash \Box p$;
ii) $T \vdash (\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q))$;
iii) $T \vdash (\Box p \rightarrow \Box\Box p)$.

Considere novamente Con(T) a sentença expressando a consistência de T, que neste caso será simbolizada por $\neg\Box(\bot)$, sendo $\bot$ uma sentença refutável como 1=0 ou 2+2=5. Assim, inicialmente, em vez de termos a sentença diagonal anterior (DC), temos a sentença equivalente $C \leftrightarrow (\Box(C) \rightarrow \Box(\bot))$. Eis a prova:

60 A sentença C é interpretada como “se sou demonstrável, então há prova de uma contradição em T”. Ela pode ser interpretada também como uma disjunção que literalmente diz “não há demonstração de que deriva-se de mim uma contradição (eu sou indemonstrável) ou há demonstração de uma contradição em T”. Como ela é indemonstrável, acaba por ser verdadeira.

1) T $\vdash$ ($\Box$C $\rightarrow$ $\Box$($\bot$)) $\rightarrow$ C, derivando de (DC);

2) T $\vdash$ ($\neg\Box$C $\rightarrow$ C), derivando de (1);

3) T $\vdash$ $\Box$($\neg\Box$C $\rightarrow$ C) $\rightarrow$ ($\Box\neg\Box$C $\rightarrow$ $\Box$C), aplicando (i) e (ii) em (2);

4) T $\vdash$ $\Box\neg\Box$C $\rightarrow$ $\Box$C, modus ponens em (3);

5) T $\vdash$ $\neg\Box$C $\rightarrow$ ($\Box$C $\rightarrow$ $\bot$), uma tautologia;

6) T $\vdash$ $\Box$($\neg\Box$C $\rightarrow$ ($\Box$C $\rightarrow$ $\bot$)) $\rightarrow$ ($\Box\neg\Box$C $\rightarrow$ $\Box$($\Box$C $\rightarrow$ $\bot$)), aplicando (i) e (ii) em (5);

7) T $\vdash$ $\Box\neg\Box$C $\rightarrow$ $\Box$($\Box$C $\rightarrow$ $\bot$), modus ponens em (6);

8) T $\vdash$ $\Box$($\Box$C $\rightarrow$ $\bot$) $\rightarrow$ ($\Box\Box$C $\rightarrow$ $\Box$($\bot$)), (ii) em (7);

9) T $\vdash$ $\Box\neg\Box$C $\rightarrow$ ($\Box\Box$C $\rightarrow$ $\Box$($\bot$)), (7) e (8);

10) T $\vdash$ $\Box$C $\rightarrow$ $\Box\Box$C, (iii) em C;

11) T $\vdash$ $\Box\neg\Box$C $\rightarrow$ $\Box\Box$C, (4) e (10);

12) T $\vdash$ $\Box\neg\Box$C $\rightarrow$ $\Box$($\bot$), (9) e (11);

13) T $\vdash$ $\bot$ $\rightarrow$ $\neg\Box$C, uma tautologia;

14) T $\vdash$ $\Box$($\bot$ $\rightarrow$ $\neg\Box$C) $\rightarrow$($\Box$($\bot$) $\rightarrow$ $\Box\neg\Box$C)), (i) e (ii) em (13);

15) T $\vdash$ $\Box$($\bot$) $\rightarrow$ $\Box\neg\Box$C, modus ponens em (14);

16) T $\vdash$ $\Box\neg\Box$C $\leftrightarrow$ $\Box$($\bot$), (12) e (15);

17) T $\vdash$ C $\rightarrow$ ($\Box$(C) $\rightarrow$ $\Box$($\bot$)), derivando de (DC);

18) T $\vdash$ $\neg\Box$($\bot$) $\rightarrow$ (C $\rightarrow$ $\neg\Box$C), transformações de (17);

19) se T $\vdash$ $\neg\Box$($\bot$), então;

20) T $\vdash$ C $\rightarrow$ $\neg\Box$C, modus ponens de (18) e (19);

21) T $\vdash$ $\neg\Box$C $\leftrightarrow$ C, (2) e (20);

22) T $\vdash$ $\Box\neg\Box$C $\leftrightarrow$ $\Box$C, aplicando (i) e (ii) e modus ponens nas derivações de (20);

23) T $\vdash$ $\Box$($\bot$) $\leftrightarrow$ $\Box$C, (16) e (20);

24) T $\vdash\neg$ $\Box$($\bot$) $\leftrightarrow$ $\neg\Box$C, contrapositiva de (22);

25) T $\vdash$ $\neg\Box$C, modus ponens de (23) e (19);

26) T $\vdash$ $\neg\Box\neg\Box$C $\leftrightarrow$ $\neg\Box$($\bot$), contrapositiva de (16);

27) T $\vdash$ $\neg\Box\neg\Box$C, modus ponens de (26) e (19);

28) Porém, T $\vdash$ $\Box\neg\Box$C, aplicando (i) em (25);

29) T $\vdash$ $\neg\Box\neg\Box$C $\wedge$ $\Box\neg\Box$C, (27) e (28), onde temos uma contradição. Como T $\nvdash$ $\bot$;

30) T $\nvdash$ $\neg\Box$($\bot$), i.e. T $\nvdash$ Con(T).

Se observarmos a prova simplificada do segundo teorema oferecida em (BOOLOS, 1994), ela é mais reduzida devido justamente ao lema diagonal relativo a sentença indecidível ser mais "direto". Podemos observar uma versão fraca do lema considerando a contrapositiva de (4), que seria a diagonalização parcial da sentença $\neg\Box C$, como $T \vdash \neg\Box C \rightarrow \neg\Box\neg\Box C$. Porém, o lema diagonal completo em C só aparece dependente da suposição da validade de $T \vdash \neg\Box(\bot)$ em (21), ou seja, o segundo teorema pode ser demonstrado não necessariamente com lemas diagonais explícitos às sentenças indecidíveis, mas implícitos na própria consideração da demonstração em T da indemonstrabilidade da consistência de T.

3.3.3 Variantes do Paradoxo do Prefácio

O exemplo mais divulgado do paradoxo/ do prefácio trata de um especialista que resolve escrever um livro acerca da sua expertise, porém no prefácio – devido à crença de que todos estamos sujeitos a alguns graus de falibilidade, independente de quanto saibamos – acha prudente acrescentar uma sentença P, afirmando que pode haver algum erro ou falsidade no livro, incidindo rigorosamente em sua incoerência, pois se a sentença do prefácio for verdadeira, há ao menos uma falsidade, e se não houver, a própria sentença P seria falsa[61]. O paradoxo expõe como, dentro de um conjunto substancial de sentenças propositivas que consideramos verdadeiras, podemos ter inclusa a crença racional de que alguma daquelas sentenças é falsa, mesmo que esta afirmação leve a uma inconsistência do próprio sistema de crenças. Mesmo sendo de natureza mais epistêmica e doxástica, variantes do Paradoxo do Prefácio podem ser formalizadas em PA utilizando a mesma técnica que fora utilizada no paradoxo de Yablo. Em (CHENG, 2016) são oferecidas três variantes infinitárias, onde suas traduções informais, porém modificadas para referirem-se a sentenças e não pessoas, são:

A. Alguma sentença é falsa;
B. Alguma outra sentença é falsa;
C. Algumas sentenças são falsas.

61 O tópico geral acerca do tema com explicações e propostas de resolução do paradoxo encontram-se em (JACQUETTE, 2008).

Em (A), se a afirmação por todos de “alguma sentença é falsa” for verdadeira, então em ao menos um caso a alegação de alguma sentença ser falsa é falsa, i.e., sua negação – ninguém está errado – será verdadeira. Porém, temos uma contradição. Se admitirmos que nenhuma é falsa, então todas serão falsas: contradição, dando legitimidade ao paradoxo. No caso de (B), o paradoxo não se apresenta se houver apenas uma sentença falsa dentre as outras, pois o conjunto de afirmações torna-se consistente. Porém, não há como rastrear quem mentirá, pois as afirmações são idênticas e seu valor de verdade acaba sendo arbitrário, tal como no Paradoxo True Teller (CHENG, 2016, p. 4). Na sentença (C), supõe-se que a enésima sentença afirme que há ao menos n sentenças falsas. Vemos que se ela for verdadeira, todas as sentenças anteriores a n serão verdadeiras. Porém, se ela for falsa, todas as sentenças posteriores também serão. Supondo que não haja contradições, logicamente a primeira sentença sempre será verdadeira, pois se for falsa ela mesmo se confirma verdadeira, contradizendo-se. Portanto, vamos supor que a k-ésima sentença é a primeira falsa. Se for, todas após ela também serão. Contudo, passará de mais de k sentenças, sendo ela verdadeira. Contradição. Desta forma caracterizam-se os três paradoxos.

A formalização de (A) é dado pela fórmula:

$$\exists z(Prov_T(neg(sub(y, <x>, <z>)))) \wedge (0 \leq x)$$

Onde $neg(<a>) = <\neg a>$, i.e., o número de Gödel da negação da fórmula *a*, existindo uma fórmula aberta P(x) pelo lema diagonal tal que:

$$T \vdash P(x) \leftrightarrow \exists z(Prov_T(neg(sub(<P(x)>, <x>, <z>)))) \wedge (0 \leq x);$$
$$T \vdash P(x) \leftrightarrow \exists z(Prov_T(<\neg P(z)>)) \dashv. \quad (A')$$

Em (A’), para qualquer numeral k, provaremos que P(k) é indecidível. Se consideramos P(k) provável, então se segue que $\exists z(Prov_T(<\neg P(z)>))$. Supondo que é o valor n que satisfaz a sentença, temos que $Prov_T(<\neg P(n)>)$ é provável. Sendo T correta, $T \vdash \neg P(n)$. Substituindo x por n, segue-se que $\neg\exists z(Prov_T(<\neg P(z)>))$. Contradição. Agora, supondo $\neg P(k)$ provável, temos:

$T \vdash \neg P(x) \leftrightarrow \neg \exists z(Prov_T(<\neg P(z)>))$, derivação e contrapositiva em (A’);

$T \vdash \neg P(k) \leftrightarrow \neg \exists z(Prov_T(<\neg P(z)>))$, substituição de x pelo numeral k;
$T \vdash \forall z \neg(Prov_T(<\neg P(z)>))$, por modus ponens e transformação;
$T \vdash \neg Prov_T(<\neg P(k)>))$, por instanciação universal;
$T \vdash Prov_T(<\neg P(k)>))$, por (i) em $\neg P(k)$; contradição.

No caso de (B) a formalização é ligeiramente diferente devido a exclusão da própria sentença do escopo representável por ela, ou seja, deve-se expressar que a sentença é acerca de outras que não ela mesma, portanto:

$$\exists z(z \neq x \wedge Prov_T(neg(sub(y, <x>, <z>))))$$

Nomeando e aplicando o lema diagonal na fórmula aberta Q(x) acima, temos:

$$T \vdash Q(x) \leftrightarrow \exists z(z \neq x \wedge Prov_T(<\neg Q(z)>)) \dashv. \quad (B')$$

A prova da indecidibilidade se dá para qualquer valor k de Q(k), porém há um fato curioso que a envolve: ela necessita do segundo teorema da incompletude para que provemos ser indecidível. Vamos inicialmente supor que $\neg Q(k)$ é provável em T, ou seja, Q(k) é refutável. Segue-se que:

$T \vdash \neg Q(k) \leftrightarrow \neg \exists z(z \neq x \wedge Prov_T(<\neg Q(z)>))$, derivando de (B') e por modus ponens;
$T \vdash \neg \exists z(z \neq x \wedge Prov_T(<\neg Q(z)>))$;
$T \vdash \forall z(z \neq k \rightarrow \neg Prov_T<\neg Q(z)>))$.

Consequentemente, aplicando instanciação universal em z por qualquer numeral n diferente de k temos como resultado $\neg Prov_T(<\neg Q(n)>))$. Porém, de acordo com (i), se $T \vdash \neg Q(k)$, então $Prov_T(<\neg Q(k)>))$. Ou seja, se houver outra sentença Q(m) refutável em T, obviamente sendo m distinto de k, T seria inconsistente, pois teríamos como resultado dado $T \vdash \neg Q(m)$, $\neg Prov_T(<\neg Q(k)>))$, e o mesmo caso em k. Logo, podemos entender que se T é consistente, só há uma sentença tal que Q(k) é falsa, sendo todas as outras verdadeiras. Desta maneira, quando temos por consequência $T \vdash \neg Prov_T(<\neg Q(n)>))$, esta sentença é equivalente a demonstrabilidade da consistência de T, que sabemos por meio do segundo teorema da incompletude ser indemonstrável em T. Este raciocínio se aplica inclusive a qualquer valor que substituamos em x, pois se pressupormos $T \vdash \neg Q(n)$, sendo Q(n) verdadeiro, temos por consequência $T \vdash \neg Prov_T(<\neg Q(k)>))$ - sendo $\neg Q(k)$ verdadeiro, isto reforça a incompletude de

T – e sabendo pelo segundo teorema que não temos como obter T $\vdash \neg Prov_T(<\neg Q(n)>)$), então T $\nvdash \neg Q(k)$ para todo valor de k.

Agora, pressupondo que T $\vdash$ Q(k), por modus ponens $\exists z(z\neq x \land Prov_T(<\neg Q(z)>))$. Isto significa que temos um numeral n tal que T $\vdash \neg Q(n)$, incidindo na indecidibilidade exposta já na primeira parte da prova, portanto T $\nvdash$ Q(k) para todo valor de k, como queríamos demostrar. O paradoxo (B) tem um fator interessante a ser apontado de que a indecidibilidade de suas instâncias está no fato de não termos como rastrear o valor de verdade das Q(k) em T, não em sua prova por contradição, fazendo-a depender diretamente da indemonstrabilidade da consistência de T para obtermos o resultado, o que não é claro no artigo original de Cheng.

Agora o caso de (C) é um pouco mais complexo, pois demanda algumas definições a mais. Seja Hs(x) a representação de uma sequência com k números naturais distintos uns dos outros onde x é seu número de Gödel. Esta sequência é denominada de heterosequência de comprimento k, tal que cada elemento desta sequência pode também ser identificado por codificação específica. A fórmula que buscamos, denominada R(k), permite estabelecer que um elemento t de uma heterosequência de código p e comprimento k+1 leve a demonstração que a própria fórmula com número de Gödel t, i.e., R(t) seja refutável de maneira que, generalizando, cada elemento da heterosequência estabelecida tenham por consequência este fim, ou seja, a prova da negação de uma heterosequência com seu valor numérico. Temos assim a seguinte formalização:

$$\exists z(Hs(z) \land (l(z) = Sx) \land (\forall t \leq z)\, (Ele\,(t, z) \rightarrow Prov_T(neg(sub(y, <x>, <t>)))))$$

Onde l(z) é a representação do comprimento da heterosequência de número de Gödel z, Sx é o numeral sucessor de x, ou seja, x+1, e Ele(t, z) é a representação do elemento t em z. Aplicando o lema diagonal na função substituição com variável livre y, temos:

$$T \vdash R(x) \leftrightarrow \exists z(Hs(z) \land (l(z) = Sx) \land (\forall t \leq z)\, (Ele(t, z) \rightarrow Prov_T(<\neg R(t)>))) \dashv. \quad (C')$$

A interpretação da fórmula composta R(x) é que ela é provável se e somente se há uma heterosequência de comprimento x+1 tal que de cada valor dos elementos da sequência segue-se a prova de que a instância da fórmula com estes valores é refutável (lembrando que os valores dos elementos são números naturais, distintos uns dos outros). Assim, a partir de (C’) temos que se m < n, então $T \vdash R(n) \rightarrow R(m)$. Eis a prova. Supondo que $T \vdash R(n)$, então:

$T \vdash \exists z(Hs(z) \land (l(z) = Sn) \land (\forall t \leq z)(Ele(t, z) \rightarrow Prov_T(<\neg R(t)>)))$, portanto, há um numeral N tal que;

$$T \vdash Hs(N) \land (l(N) = Sn) \land (\forall t \leq N)(Ele(t, N) \rightarrow Prov_T(<\neg R(t)>))).$$

Por esta última sentença ter n+1 elementos, considerando que m< n, podemos escolher m+1 destes e fazer uma nova heterosequência de código M, onde Hs(M), (l(M) = Sm) e $(\forall t \leq M)(Ele(t, M) \rightarrow Prov_T(<\neg R(t)>)))$ - Este último por $Ele(t, M) \rightarrow Ele(t, N)$ por provável em T, se seguindo modus ponens a $Ele(t, N) \rightarrow Prov_T(<\neg R(t)>)$ - pelos elementos estarem contidos em N e devido a isso, a propriedade de ser uma heterosequência é preservada. Logo:

$$T \vdash Hs(M) \land (l(M) = Sm) \land (\forall t \leq M)(Ele(t, M) \rightarrow Prov_T(<\neg R(t)>)));$$

$T \vdash R(m)$, e pelos termos de R(m) serem uma derivação lógica de R(n), então; $T \vdash R(n) \rightarrow R(m) \dashv$ (C1).

Podemos observar também que se segue pela contrapositiva que $T \vdash \neg R(m) \rightarrow \neg R(n)$ (C2). Assim, obtemos as características identificadas pelo paradoxo expresso em (C) que, se a k-ésima sentença for verdadeira, então todas anteriores a ela serão e, se for falsa, todas posteriores a ela também serão. Assim obtemos o teorema de que *para qualquer numeral n, R(n) é indecidível*. Eis a prova. Suponha que $T \vdash \neg R(n)$. Por (C2) temos que todas as sentenças $\neg R(p)$ tal que n < p são prováveis em T. Portanto, se $\neg R(n+1), \neg R(n+2), ..., \neg R(2n)$ são prováveis, de acordo com (i), então $Prov_T(<\neg R(n)>)$, $Prov_T(<\neg R(n+1)>)$, $Prov_T(<\neg R(n+2)>)$, …, $Prov_T(<\neg R(2n)>)$ também são. Considere c o número de Godel da heterosequência (n, n+1, n+2,..., 2n). As sentenças Hs(c), l(c) = Sn e $(\forall t \leq c)(Ele(t, c) \rightarrow Prov_T(<\neg R(t)>))$ são prováveis, o que implica em:

$T \vdash Hs(c) \land (l(c) = Sn) \land (\forall t \leq c)(Ele(t, c) \rightarrow Prov_T(<\neg R(t)>)))$, modus ponens em (C);

$T \vdash R(n)$. Contradição.

Agora, com $T \vdash R(n)$, temos que:

$T \vdash \exists z(Hs(z) \land (l(z) = Sn) \land (\forall t \leq z)(Ele(t, z) \rightarrow Prov_T(<\neg R(t)>)))$, por instanciação existencial;

$T \vdash Hs(c) \land (l(c) = Sn) \land (\forall t \leq c)(Ele(t, c) \rightarrow Prov_T(<\neg R(t)>)))$, por eliminação de conjunções, fica;

$T \vdash (\forall t \leq c)(Ele(t, c) \rightarrow Prov_T(<\neg R(t)>)))$.

Deste modo, temos que $T \vdash Prov_T(<\neg R(w)>)))$, onde w é a codificação do primeiro elemento da heterosequência codificada por c. Contudo, considerando T correta, temos $T \vdash R(w)$, com o mesmo resultado contraditório da primeira parte da prova. Logo, $T \nvdash R(n)$ e $T \nvdash \neg R(n)$ para qualquer valor de n. As variantes do paradoxo do prefácio têm uma mesma ideia de derivar em suas provas a capturabilidade de uma sentença de Gödel da negação de uma instanciação de seu próprio predicado, cada uma com propriedades a serem reproduzidas que caracterizam seus paradoxos.

3.3.4 Ciclo do Mentiroso

As sentenças acima se assemelham ao ciclo do mentiroso (The Liar cycles). Porém, todos os exemplos são de ordem infinitária. Para mostrarmos que o paradoxo do ciclo do mentiroso também tem uma formalização finitária adequada, devemos entender como ele se forma. Esta variante mais simples e conhecida abaixo[62] é chamada de "paradoxo do cartão postal" em (HAACK, 2002, p. 186). Temos duas pessoas, A e B, onde as duas sentenças L_A e L_B enunciadas por eles, respectivamente, são:

L_A: A sentença L_B é verdadeira;
L_B: A sentença L_A é falsa.

Vemos rapidamente que independente do valor de verdade que atribuímos às duas sentenças, elas sempre entrarão em contradição. Para desenvolver sentenças em PA que reproduzam tal paradoxo semântico, devemos observar que o conteúdo de uma sentença faz parte da outra, porém com variáveis livres e ligadas invertidas. Portanto, tomemos J_A e J_B, respectivamente, como fórmulas semelhantes à de Gödel da forma:

---

62 Este é um problema que era denominado no período medieval, tal como outros paradoxos, de insolúveis (*insolubilia*), referido inicialmente pelo filósofo Jean Buridan no capítulo oito de sua obra, *Sophismata* e sendo retomado em discussão por (ANDERSON, 1971, p. 20).

$$\exists x(Pr_T(x, inv(neg(sub(y, <y>, y))), <x>, <y>))$$
$$\neg\exists y(Pr_T(y, inv(neg(sub(x, <x>, x))), <y>, <x>))$$

onde $inv(<L>, <a>, <b>)$ é uma função aritmética constituída por funções de substituição encadeadas por recursão, tal que $inv(<L>, <a>, <b>) =_{def} sub(sub(sub(<L>,<b>,<c>),<a>,<b>),<c>,<a>)$, sendo c uma variável arbitrária não pertencente a sentença I. Substituindo em J_A e J_B as variáveis livres por $<J_A>$ e $<J_B>$, obtemos:

$$\exists x(Pr_T(x, inv(neg(sub(<J_A>, <y>, <J_A>))), <x>, <y>));$$
$$\neg\exists y(Pr_T(y, inv(neg(sub(<J_B>, <x>, <J_B>))), <y>, <x>)).$$

Denominando tais sentenças de L_A e L_B, vemos que suas substituições incidem no argumento diagonal, autorreferenciando-se. Porém, a função inversão garante que as variáveis x e y sejam trocadas. Esta tática utilizada foi inspirada pela noção abstrata de referência cruzada (*cross reference*) e propriedades da dupla recursão apresentadas e desenvolvidas em (SMULLYAN, 1994). Assim, temos:

$$L_A \leftrightarrow \exists x(Pr_T(x, inv(<\neg L_A>, <x>, <y>)))$$
$$L_B \leftrightarrow \neg\exists y(Pr_T(y, inv(<\neg L_B>, <y>, <x>)))$$

Desta forma, aplicando a função inversão em L_A na codificação de sua negação, obtemos como resultado a sentença L_B, devido a dois detalhes importantes: primeiro, a diagonalização da função substituição $sub(y, <y>, y)$, devido a inversão, será implementada aritmeticamente pela codificação da variável a que foi substituída, i.e., $sub(x, <x>, x)$. Segundo, uma óbvia propriedade da função inversão é a igualdade $inv(<S>, <a>, <b>) = inv(<S>, <b>, <a>)$. O mesmo argumento vale a L_B, ou seja:

(1) $T \vdash L_A \leftrightarrow \exists x\, Pr_T(x, <L_B>)$ ou $T \vdash L_A \leftrightarrow Prov_T(<L_B>)$

(2) $T \vdash L_B \leftrightarrow \neg\exists y\, Pr_T(y, <L_A>)$ ou $T \vdash L_B \leftrightarrow \neg Prov_T(<L_A>)$

Agora, vamos ao entendimento das partes da prova. Para concluirmos que ambas as sentenças são indecidíveis, devemos provar que todas as possibilidades de arranjo das sentenças L_A e L_B em T levarão a contradição. Neste caso, como são duas sentenças, há de se supor quatro arranjos possíveis envolvendo as sentenças e suas negações. Logo, temos inicialmente $T \vdash L_A$ e $T \vdash L_B$. Se tenho L_A, então há um numeral n, tal que Pr_T (n, $<L_A>$). Porém, de acordo com (2), por termos L_B, então $\neg\exists y Pr_T(y, <L_A>)$, isso acarreta em uma ω-inconsistência. A segunda parte tem $T \vdash L_A$ e $T \vdash \neg L_B$. A segunda parte tem $T \vdash L_A$ e $T \vdash \neg L_B$. Por (1) e modus ponens com L_A, temos $\exists x\, Pr_T(x, <L_B>)$, e se $T \vdash \neg L_B$, então há um m tal que $Pr_T(m, <\neg L_B>)$. Considerando T correta, derivariam em T tanto L_B quanto sua negação. Contradição. Considerando $T \vdash \neg L_A$ e $T \vdash L_B$, por (1) e modus ponens com L_A, temos $T \vdash \neg \exists x Pr_T(x, <L_B>)$, porém, $T \vdash L_B$ e há um p tal que $T \vdash Pr_T(p, <L_B>)$, incidindo em ω-inconsistência. Por último, $T \vdash \neg L_A$ e $T \vdash \neg L_B$. Em (2), por modus ponens com $\neg L_B$ temos $\exists y\, Pr_T(y, <L_A>)$, e se $T \vdash \neg L_A$, então temos um numeral q onde $T \vdash Pr_T$ (q, $< \neg L_A>$), incidindo em contradição tal como na segunda parte da prova. Admitindo que T é ω-consistente em todos os casos, então $T \nvdash L_A$ e $T \nvdash L_B$, tal como $T \nvdash \neg L_A$ e $T \nvdash \neg L_B$, como queríamos demonstrar.

A partir deste resultado, apontaremos dois fatos interessantes. Um deles é que L_B é verdadeiro, porém L_A é falsa! Então, neste caso as sentenças indemonstráveis em T porém verdadeiras seriam $\neg L_A$ e L_B. Outro fato é que podemos implementar o predicado de Rosser para obter o resultado considerando apenas consistência simples sem problemas, posto que utilizamos somente a primeira condição de derivabilidade HBL e a prova surge tal como na sentença de Gödel, porém com o dobro de etapas necessárias.

3.4 SENTENÇAS DO TIPO-BERRY

As sentenças indecidíveis que trataremos agora são baseadas no chamado Paradoxo de Berry. A primeira versão deste paradoxo foi apresentada por Bertrand Russell em (RUSSELL, 1908), atribuindo sua elaboração ao bibliotecário da Universidade de Oxford da época, Mr. G. G. Berry. Sua enunciação adaptada tem por base a sentença que define um número inteiro como “o menor número inteiro não-nomeável com menos de doze palavras”. A definição dada tem onze palavras, ou seja, todo primeiro número não-nomeável com menos de doze palavras será nomeável por esta sentença que tem menos de doze palavras. Portanto, temos uma contradição. Claro, podemos tal qual foi feito com o Paradoxo de Richard apontar que este é um problema linguístico, não matemático de fato. A questão aqui é estabelecer uma caracterização formalizada de um tipo de definição semelhante e expressar o paradoxo por meio dela.

3.4.1 Característica Principal

De acordo com (KIKUCHI e KURAHASHI, 2015) às sentenças do tipo Berry se diferem do Mentiroso pela última ter autorreferenciação explícita, enquanto a primeira encontra-se implícita:

> "Um [tipo] são paradoxos com explícita ou direta autorreferência. Esta é uma categoria de paradoxos sobre noções definidas referindo-se às noções mesmas. O Paradoxo do Mentiroso é um exemplo típico dos paradoxos desta categoria. O Paradoxo de Yablo também é classificado nesta categoria se admitirmos que há autorreferência nele. Os outros são os paradoxos com autorreferência implícita ou indireta. Esta categoria consiste em paradoxos relativos a noções definidas por condições em que quantificações sobre classes de noções às quais as noções definidas pertencem são usadas. Encontramos autorreferência em tais noções apenas quando percebemos que tais noções são referidas indiretamente no escopo dos quantificadores. Paradoxo de Berry e o Paradoxo de Grelling-Nelson são categorizados nesta classe." (KIKUCHI e KURAHASHI, 2015, p. 396-397, tradução nossa)

Formalmente e de modo simples, a distinção entre autorreferenciação explícita e implícita podem ser expressas pelas respectivas fórmulas $p \leftrightarrow \varphi(p)$ e $p \leftrightarrow \forall x\varphi(x)$ ou $\forall x(p(x) \leftrightarrow \varphi(x))$, onde da derivação das últimas temos $p \rightarrow \varphi(p)$ e $p(p(x)) \leftrightarrow \varphi(p(x))$, que assemelham-se ao tipo mentiroso mas persistem em ter a diferença crucial de autorreferência explícita ser o fenômeno da circularidade em uma definição enquanto a implícita seria autoaplicabilidade de uma noção definida (KIKUCHI e KURAHASHI, 2015, p. 397). A elaboração destas distinções conceituais são interessantes e úteis. Porém, observações que podemos realizar é que, aparentemente, da autoaplicabilidade se deriva a circularidade, mas o inverso não se segue[63], e, além disso, a própria noção de circularidade não é bem esclarecida na literatura, como já apontamos no artigo.

Assim, com base no Paradoxo de Berry foram feitas provas do primeiro teorema da incompletude em (BOOLOS, 1998), com uma modificação proposta por (KIKUCHI, 1994), e (CAICEDO, 1993) com base no modelo standard da Aritmética (PA) e por (CHAITIN, 1974) utilizando-se da Teoria Algorítmica da Informação. Este último terá uma atenção maior e será

63 (JACQUETTE, 2002) trata uma das principais características da diagonalização ou método diagonal é uma autoaplicação – a designação de um item envolvendo um termo que é aplicado a si mesmo – que é ligeiramente distinto de autorreferenciação ou circularidade.

tratado em separado, devido ao questionamento e crítica na literatura da legitimidade de sua prova.

3.4.2 Prova de George Boolos

Sua primeira versão foi apresentada em artigo de 1989, e republicada em seu livro *Logic, logic and Logic*. Na época, sua justificativa foi proporcionar uma prova fácil da incompletude na forma “não existe algoritmo cuja saída (output) contém todos os enunciados[64] (*statement*) aritméticos verdadeiros e nenhum falso” (BOOLOS, 1998, p. 383, tradução nossa). Ele dá exemplos de enunciados na linguagem aritmética falsos e outros verdadeiros, como $\forall x \exists y\ (x = Sy)$ - todo número natural tem um antecessor – e $\forall x \exists y\ ((x = y + y) \vee (x = S(y + y)))$ - para cada número natural x existe um y tal que x = 2y ou x = 2y + 1, ou seja, todo número natural é par ou ímpar – respectivamente, assim como de definições expressas por meio da linguagem da aritmética. Por um algoritmo, como veremos melhor mais adiante, ele entende como um procedimento mecânico no qual por meio de certas regras e rotinas previamente estabelecidas (programa em uma linguagem computável), admitindo-se uma saída, um conjunto de informações que ele imprime após a realização da computação. Assim, considerando tal algoritmo como o sistema formal no qual há o mínimo de Aritmética (tal como o sistema T), então sua saída fornece o conjunto de todos os enunciados que são prováveis no sistema e nenhuma dessas saídas é falsa. Boolos demonstrará que há uma verdade aritmética que não está na saída deste algoritmo T.

Para todo número natural n no sistema formal T, sua representação se dá pelo 0 seguido de n símbolos de sucessor, que será expresso aqui por [n]. Também lembremos que por |p| temos a expressão do tamanho de algum termo ou sentença p. Considere por definição que a fórmula F(x) nomeia o número natural n se o enunciado seguinte está na saída de T:

$$\forall x(F(x) \leftrightarrow (x = [n]))$$

64 Há discussões em Filosofia da Linguagem e na Lógica sobre que entidades linguísticas que portam a verdade ou que se possa dizer que são verdadeiras. Resumindo os candidatos: frases ou sentenças são o conjunto léxico de símbolos que têm um conteúdo significativo dentro de uma linguagem determinada; enunciados ou declarações são os veículos pelos quais todos nós comunicamos tal conteúdo significativo; proposições são o conteúdo significativo *per se*, independente da linguagem e ser utilizada para comunicá-lo. Boolos aqui tem o compromisso ontológico de que enunciados são os portadores de verdade. Para detalhes sobre este tema ver (HAACK, 2002).

Nenhum F(x) nomeia diferentes números, portanto se $\forall x(F(x) \leftrightarrow (x = [n]))$ e $\forall x(F(x) \leftrightarrow (x = [p]))$ são verdadeiros, então $\forall x((x = [n]) \leftrightarrow (x = [p]))$ e [n] = [p]. Assim, quando Boolos destaca que todas as fórmulas bem formadas de T devem ter tamanho finito e há, obviamente, um número limitado de fórmulas com i símbolos (assim como a soma de fórmulas com tamanho menor que um número m também é finita), por termos infinitos números naturais, tem-se por conclusão que há um menor número que não seria nomeável por nenhuma fórmula contendo menos que m símbolos. Temos aqui o início de uma versão do paradoxo de Berry. Agora, se temos um número finito de símbolos em uma fórmula que nomeia com número n em T, então sua formalização tem início por meio da suposição de uma fórmula aritmética C(x, z) que significa *x é um número nomeado por alguma fórmula com z símbolos*. Em seguida, define-se B(x, y) como $\exists z(z<y \wedge C(x, z))$, que significa que *x é nomeado por alguma fórmula com menos de y símbolos*. Desta forma, seja A(x, y) uma fórmula tal que:

$$A(x, y) =_{def} \neg B(x, y) \wedge \forall a((a < x) \rightarrow B(a, y))$$

Podemos dizer que se A(x, y) é verdadeiro, então *x é o menor número não nomeável por nenhuma fórmula contendo menos que y símbolos* (BOOLOS, 1998, p. 385). Considerando k o número de símbolos de A(x, y), sendo k > 3.[65] Com a formalização dos componentes necessários para realização da prova, seja F(x) a fórmula $\exists y(y = [10].[k] \wedge A(x, y))$, que significa x é o menor número nomeável por nenhuma fórmula com menos de 10k símbolos. Porém, se contarmos os símbolos utilizados em F temos: $|[k]| = k + 1$, $|[10]| = 11$, $|A(x, y)| = k$ e mais 12 outros símbolos que compõem a fórmula. Portanto, temos $|F(x)| = 2k + 24$. Ou seja, sendo k >3, 2k + 24 < 10k, i.e., F(x) contém menos de 10k símbolos. Como visto no raciocínio mais acima, existe um número que não pode ser expresso por qualquer fórmula que tenha menos de m símbolos. Consideremos n um número que só possa ser representado por m = 10k símbolos. Logo, $\exists y((y = [10].[k] \wedge A(x, y))$ não seria uma fórmula que nomeasse n, por ter menos de 10k símbolos, não estando na saída do algoritmo T. No entanto, $\forall x \exists y((y = [10].[k] \wedge A(x, y)) \leftrightarrow (x = [n]))$ é justamente a representação da nomeação do menor número

65 O número três não parece ser arbitrário, pois leva em consideração o mínimo possível de símbolos utilizados para representar uma fórmula, que é a predicação A e as variáveis associadas x e y.

não nomeável por fórmulas com menos de 10k símbolos! Ou seja, F(x) é uma sentença verdadeira e que não se encontra na saída de T.

Considerada uma prova elegante e razoavelmente didática, dada a complexidade do tema, e ainda aparentemente não utilizando-se do Lema Diagonal, foi até elogiada por John Barwise como uma prova graciosa e a mais direta (*straightforward*) que ele já vira (BARWISE, 1989). Porém, há críticas envolvendo ela ser distinta da prova de Gödel por tratar da verdade e não da provabilidade das sentenças, e por ser uma prova mais fraca, não conseguindo-se obter o corolário do segundo teorema por meio dela, como destaca Makoto Kikuchi em (KIKUCHI, 2012). A partir destas críticas, ele modifica a prova de Boolos, reelaborando a definição de nomear pela aritmetização da provabilidade em T das fórmulas de PA em (KIKUCHI, 1994). Inicialmente, a definição de nomear passa a ser: sendo v_0 uma variável livre em F, $F(v_0)$ nomeia um número n se a sentença $F([n]) \wedge \forall x \forall y\, (F(x) \wedge F(y) \rightarrow x = y)$ for provável em T, representando a relação do número de Gödel da fórmula que nomeia n como $N(<F(v_0)>, n)$.

Desta maneira, Kikuchi passa nas definições a se referir não a fórmula que nomeia n em si, mas a sua codificação. Assim, $C_T(x, z)$ significa que *x é um número de Gödel de uma fórmula em PA que nomeia n com z símbolos*; $B_T(x, y)$ é $\exists z(z<y \wedge C_T(x, z))$, havendo uma fórmula intermediária onde $Q_T(x, y) = \exists z B_T(z, y) \wedge Prov_T(N(z, x))$, com $A_T(x, y) =$ *def* $\neg Q_T(x, y) \wedge \forall a((a < x) \rightarrow Q_T(a, y))$, que significa *x é o menor número não nomeável por nenhuma fórmula F(v0) que satisfaz $B_T(<F(v_0)>,y)$*. Supondo que a quantidade de símbolos em $A_T(x, y)$ seja k e determinemos a fórmula A(x, [10k]), que podemos representar também por S(x), onde *x é o menor número não nomeável por nenhuma fórmula contendo menos que 10k símbolos*. Do mesmo modo que no artigo de Boolos, porém mais detalhado, S(x) tem uma quantidade de símbolos menor que 10k, portanto $S(v_0)$ satisfaz $B_T(<S(v_0)>, [10k])$. Agora, supondo T consistente, podemos entender formalmente um princípio deixado claro pelo próprio Boolos: como as fórmulas que nomeiam números têm tamanho finito, há sempre finitos números naturais que são nomeados por fórmulas de tamanho menor ou igual a j. Dito isso, seja n_j o menor número que não pode ser nomeado com fórmulas de tamanho menor ou igual a j, portanto:

$$T \vdash \forall x(B_T(<F(v_0)>,j) \rightarrow (x < n_j))$$

Isto é, se para todo x, se x é um número nomeado com menos de j símbolos por uma fórmula $F(v_0)$, então x é menor que um número n_j sendo ele o menor número não nomeável por nenhuma fórmula contendo menos que j símbolos. Logo, temos que se $B_T(<S(v_0)>, [10k])$, então $x < n_{10k}$ existindo um número não nomeável com uma fórmula de 10k símbolos ou menos, ou seja, $T \vdash \neg Q_T(n_{10k}, [10k])$. Porém, se temos $T \vdash B_T(<S(v_0)>, [10k])$ e sabemos que o menor número não nomeável por nenhuma fórmula contendo menos que 10k símbolos é n_{10k}, então $T \vdash N(<S(v_0)>, n_{10k})$. Aplicando (i), obtemos $T \vdash Prov_T(N(<S(v_0)>, n_{10k}))$. Assim, $T \vdash B_T(<S(v_0)>, [10k]) \wedge Prov_T(N(<S(v_0)>, n_{10k}))$, i.e., $T \vdash Q_T(n_{10k}, [10k])$. Contradição.

Aqui, podemos observar que há sim um tipo de diagonalização indireta de $A_T(x, y)$ (ou S(x)) em $Q_T(x, y)$, um componente da fórmula A, sendo este fenômeno melhor elaborado em (KIKUCHI; KURAHASHI e SAKAI, 2012), onde podemos denominá-lo propriamente de autorreferenciação implícita, tema já destacado acima em (KIKUCHI e KURAHASHI, 2016).

3.4.3 Prova de Xavier Caicedo

As motivações iniciais envolvidas no artigo de Xavier Caicedo (CAICEDO, 1993) para desenvolver alguma sentença indecidível a partir do Paradoxo de Berry é mais relacionada à análise do paradoxo em si do que ao tema da indecidibilidade. Ele é direcionado por uma afirmação do filósofo Alexandre Koyré que o paradoxo se dissolve caso seja formalizado em uma linguagem suficientemente precisa. Caicedo procura mostrar que não seria este o caso, e tal como o Paradoxo do Mentiroso, há um conteúdo lógico relevante no paradoxo que remete a indefinibilidade da definibilidade por meios finitos a relação “a expressão A define univocamente o objeto B”.

Para tal, Caicedo começa definindo a parte sintática já explicitadas aqui relativas a Aritmética de Dedekind-Peano (PA), com uma distinção: a apresentação que ele denomina de nome canônico de um número natural n é da soma sucessiva de 1´s n vezes intercalada por parênteses, i.e., n = (1+ (1+ (1+ (1+...(1+1))...)), não a utilizada no sistema T de n ocorrências da função sucessor recursivamente aplicada a constante 0. Observando que toda fórmula em PA $\varphi(x)$, sendo x uma variável livre, expressa uma propriedade de números naturais, podendo ser verdadeira ou falsa, temos $\varphi(x/n)$ como a fórmula $\varphi(x)$ substituindo x pelo nome canônico de n. Além disso, sabemos que há φ(x) onde apenas um número satisfaz suas condições, como por exemplo a fórmula em (CAICEDO, 1993, p. 40):

$$\varphi(x) = ((\ 1 < x \wedge \forall y \forall z(x = y.z \rightarrow (y = 1 \vee z = 1))) \wedge \exists w(\ x = w + w))$$

φ(x) é apenas é satisfeita quando x = (1+1). Por meio destas considerações, dizemos que uma fórmula φ(x) define um número natural n se este é o único número que a faz verdadeira, ou seja:

$$PA \vdash \varphi(x/n) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \rightarrow (x = n))$$

Obviamente, há um nome canônico para cada número natural, onde deste caso n = (1+ (1+ (1+ (1+...(1+1))...)) sempre terá |n| = 4.n - 3 símbolos, onde |n| representa o tamanho canônico de n. Porém, Caicedo dá o exemplo no número 10000 e como ele pode ser algoritmicamente otimizado com apenas 41 símbolos, mostrando assim que há uma grande utilidade econômica em sabermos a menor fórmula que define um número natural, estabelecendo que uma propriedade P é aritmeticamente definível se, havendo um n que satisfaça P, então φ(x/n) é verdadeira, assim como uma relação R entre os números n e m é aritmeticamente definível se, havendo um n e um m que satisfaça R, então θ(x/n, y/m) é verdadeira em PA, assim sucessivamente com relações entre mais variáveis.

Agora, para um entendimento formal dos princípios e definições mais gerais da noção de definibilidade, Caicedo relaciona tal conceito a Tese de Church: propriedades e relações são algoritmicamente verificáveis se um algoritmo nos diz que, para cada número natural que realizamos a substituição da(s) variável(eis), as sentenças são ou não satisfeitas. Levando em conta a tese de que todo algoritmo verificável é efetivamente computável e que todos são aritmeticamente definiveis, segue-se que propriedades e relações calculáveis/verificáveis são aritmeticamente definíveis. Com todo o background dado, considere a codificação de fórmulas feita por Gödel e a relação dela com propriedades da própria fórmula, neste caso, a da quantidade de símbolos. A relação *a fórmula com número de Gödel m tem n símbolos* é algoritmicamente verificável, portanto aritmeticamente definível pela relação L(x, y), assim como é a importante relação ternária:

k é um número de Gödel da fórmula $\varphi(x/n) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow (x = n))$, onde φ(x) é uma fórmula de código m.

Caicedo explica todas as etapas para esta relação entre k, m e n ser aritmeticamente definível por S(x, y, z). A próxima sentença abordada é *m é a codificação de uma fórmula dedutível*, obviamente mais associada a noção de provabilidade em T de Gödel e já comprovada ser algoritmicamente calculável, pois a partir dessa fórmula dedutível podemos realizar sua codificação recursivamente – sejam as regras utilizadas quais forem – e comparar o número de Gödel com tal m. Com axiomas do sistema formal mais a aplicação de regras dedutivas, vemos que uma prova é nada menos representada como uma sequência de fórmulas concatenadas dedutivamente, e portanto, computáveis e aritmeticamente definíveis. Ou seja, podendo ser expressos na forma ∃yP(x, y). Desta forma, podemos analisar se a própria noção de definibilidade possa ser codificada e ela mesma aritmeticamente definível, expressando-se tal sentença, denominada θ(x, y) e informalmente como *a fórmula com código m define o número n*, ou:

a fórmula com código m e apenas uma variável livre x, com y satisfazendo a fórmula $\varphi(x/n) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow (x = n))$

Supondo que exista tal θ(x, y), consideremos a seguinte fórmula $D_n(x)$:

$$\exists z(\theta(z, x) \wedge \exists w(L(z, w) \wedge w = n.n))$$

Onde $D_n(x)$ significa *x é definível por uma fórmula de comprimento menor que n^2*. Com esta construção, Caicedo pode formalizar sua sentença de tipo-Berry $B_n(x)$:

$$\neg D_n(x) \wedge \forall y(\, y < x \rightarrow D_n(y))),$$

Com a definição *x é o menor número não definível por uma fórmula de comprimento menor que n^2*. Este número existe, posto que há uma quantidade finita de fórmulas que definem um número somente, logo, uma quantidade também finita de números, devendo haver um número mínimo que não seja definível por uma quantidade específica de símbolos. Chamando tal número de *b*, concluímos que $B_n(x)$ define *b*. Vemos que o comprimento de $B_n(x)$ é diretamente relacionado ao comprimento de n, posto que é o único termo que varia na fórmula, com $|B_n(x)| = k + 16n$, sendo k constante. Considerando um número $M = k + 17$, temos que $|B_M(x)| = k + 16M < M^2$. Então "[...] a fórmula $B_M(x)$ tem menos de M^2 símbolos, e por outra parte define um número que é o mínimo número não definível por uma fórmula de comprimento menor que M^2" (CAICEDO, 1993, p. 44, tradução nossa). Sendo o sistema formal T – e portanto PA – consistente, podemos concluir que $B_M(x)$ não é capturável, e como a fórmula $\theta(z, x)$ é a única que não tinha sua existência assegurada, concluímos que a definibilidade na aritmética é indefinível por sua própria linguagem.

Caicedo tira como corolário desta conclusão o Teorema da Indefinibilidade da Verdade de Tarski, bem como o Primeiro Teorema da Incompletude. Eis a prova. Inicialmente, temos por definição que uma fórmula define dedutivamente em T um número n se $T \vdash \varphi(x/n) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow (x = n))$, ou seja, é demonstrável no sistema T que φ define n. Se a sentença *n é o código de uma fórmula dedutível* é definível aritmeticamente pela fórmula $\exists y P(x,y)$, como exposto anteriormente, então a sentença *a fórmula com código n define dedutivamente o número m* – expressa por $\theta^*(x, y)$ - será formalizada como $\exists z\, (S(z, x, y) \wedge \exists w P(z,w))$, novamente entrando na estrutura da sentença que formaliza o Paradoxo de Berry, substituindo $\theta(x, y)$ por $\theta^*(x, y)$ em $D_n(x)$, com $B^*_n(x)$, que significa:

x é o número mínimo não dedutivamente definível por fórmulas de comprimento menor que n^2.

E, assim como $B_n(x)$, podemos pegar um M tal que $B^*_M(x)$ tenha comprimento menor que M^2. Sendo b* este número mínimo, a sentença $B^*_M(x/b^*) \wedge \forall x\, (B^*_M(x) \rightarrow (x = b^*))$ é verdadeira, porém não dedutível em T, quer dizer, $T \nvdash B^*_M(x/b^*) \wedge \forall x\, (B^*_M(x) \rightarrow (x = b^*))$. Logo após, ao final do artigo ele trata do que ele denomina de *números de Berry* e da função d(n) que expressa *o mínimo comprimento de uma definição de n*, sobre as quais falaremos mais a frente.

3.3.4 Comparações entre as duas abordagens

Boolos publicou pela primeira vez sua prova em 1989, enquanto Caicedo em 1993, sendo que o segundo admite ter sido o artigo de Boolos que lhe deu incentivo para publicar seus trabalhos que foram divulgados em um congresso anos antes, em 1987. Vemos grande semelhança tanto entre as noções e expressões do que é *nomeável* e *definível* utilizadas pelos dois lógicos para embasar formalmente o paradoxo, quanto as outras fórmulas consequentes, como entre $A_T(x, y)$ e $B_n(x)$. Também vemos a importância dada por ambos ao que é chamado de calculabilidade efetiva ou computabilidade algorítmica das fórmulas consideradas, explicitamente devido a própria natureza do Paradoxo de Berry que, diferentemente de outros paradoxos, trata de processos finitários de representabilidade de um conjunto de símbolos em um sistema formal determinado, coisa que a abordagem por complexidade que Chaitin também tem como fundamental.

Porém, nitidamente seus objetivos em desenvolver sentenças indecidíveis são bem distintos. Boolos deixa claro no início do artigo que é uma questão de possibilidade de demonstrações distintas de um teorema parte da motivação, além da busca de certa simplicidade e a alegada economia de recursos lógico-matemáticos na prova, como a diagonalização. Já Caicedo, a partir de uma afirmação de Koyré que o Paradoxo de Berry quando formalizado seria dissolvido, procura mostrar que há relevância lógica neste paradoxo, com um foco mais geral de analisar se a própria noção de definibilidade aritmética é definível pelas próprias leis de PA, o que é uma temática mais ampla e robusta que a abordagem de Boolos, pois a indefinibilidade da verdade e o primeiro teorema de Gödel seguem como seus corolários.

Outra característica relevante a ser destacada é o parâmetro escolhido por ambos como limite superior do número de símbolos, sendo de Boolos 10k, sendo k o número de símbolos de $A_T(x, y)$ e por Caicedo, M^2. Há uma distinção na implementação destes limites por ambos: Boolos opta pela derivação da sentença $\exists y((y = [10].[k] \wedge A_T(x, y))$, menor que 10k, ao final da formalização de A, enquanto em Caicedo a limitação de símbolos por um n^2 já encontra-se dentro da formalização do paradoxo, sendo tais valores dependentes do somatório dos próprios símbolos que as constituem, i.e, valores numéricos em parte arbitrários. Contudo, há uma semelhança entre ambos obviamente utilizarem expressões reduzidas para os valores de 10k ([10].[k]) e n^2 (n.n), sendo tais expressões também nomeáveis/definíveis em T. Se tais números não fossem capturados de forma mais comprimida, a demonstração da indecidibilidade neste caso seria impossível, pois o número de símbolos excederia a limitação, descaracterizando a contradição envolvida na sentença se ela fosse dedutível em T. Desta forma, parece fundamental que a limitação superior estipulada seja capturável por uma quantidade menor de símbolos do que a definição canônica do número limitante para que a autoaplicação da função produza a indecidibilidade da sentença. Este último tópico será retomado adiante.

4. A PROVA TEORÉTICO-INFORMACIONAL DE CHAITIN: ANÁLISE E CRÍTICA

Chegamos ao tópico principal de expor a prova de Chaitin com as críticas que a envolvem. Mesmo tendo base no Paradoxo de Berry, sua prova foi separada por haver muitos comentários sobre sua legitimidade demonstrativa e ser a mais distinta de todas, utilizando uma outra técnica formal: a definição de complexidade de Kolmogorov ou complexidade algorítmica para estabelecer uma versão do Primeiro Teorema da Incompletude. A prova foi apresentada pela primeira vez no artigo do cientista da computação Gregory Chaitin *Information-Theoretic Limitations of Formal Systems* (CHAITIN, 1974), desde então suas justificativas e explicações de natureza algorítmico-informacionais foram constantemente mais elaboradas. Porém, aparentemente, anos antes de sua primeira publicação sobre o tema, Gödel já tinha manuscritos e ideias que o levavam pela mesma direção que Chaitin seguiu.

4.1 O ESBOÇO DE GÖDEL NOS COLLECTED WORKS

Em Collected Works II, onde reúnem-se manuscritos de Kurt Gödel com comentários acerca destes, há três observações reunidas de 1972 intitulado "*Some remarks on the undecidability results*" (GÖDEL, 1972), onde na segunda observação Gödel faz um esboço do que seria uma outra versão de seu primeiro teorema: o teorema estabelece que para resolução de problemas de tipo-Goldbach[66] dentro de um sistema formal com um grau de complicação (ou complexidade) k, teríamos que ter um sistema de axiomas com grau maior ou igual a k, sendo que a medição deste grau se dá pelo número de símbolos necessários para formular o problema. Porém, tendo o sistema de axiomas sempre um tamanho finito, temos um dilema, pois sempre haverá sentenças verdadeiras porém não prováveis dentro de um grau maior que K, onde K é o número de símbolos do conjunto de axiomas do sistema em questão. Como diz Gödel:

66 Este termo foi utilizado pelo próprio Gödel em seu artigo de 1931. Franzén o explica sucintamente: "uma sentença da forma $\forall x A x$ onde Ax é uma fórmula ligada [...] esta definição satisfaz a condição que um algoritmo para checar se A(n) é verdadeiro para um particular número n pode ser formulado com base na formulação da condição A(x)" (FRANZÉN, 2005, p. 162). Ou seja, é uma sentença com quantificador delimitado que afirma que cada número x tem uma propriedade A, sendo A recursiva ou computável, i.e, verificável efetivamente se este número tem ou não esta propriedade.

> “Agora, toda a Matemática atual pode ser derivada de uma quantidade bem simples de axiomas sobre alguns termos primitivos. Portanto, mesmo que sejam solucionáveis apenas os problemas que possam ser formulados em poucas páginas, os poucos axiomas simples usados hoje devem ser complementados por um grande número de outros novos, ou por axiomas de grande complicação. Pode-se duvidar se axiomas evidentes em tais grandes números (ou de tão grande complexidade) possam existir e, portanto, o teorema mencionado pode ser tomado como uma indicação para a existência de questões matemáticas sim ou não indecidíveis para a mente humana” (GÖDEL, 1972, p. 309, tradução nossa).

Sua preocupação no texto se direciona a possibilidade e necessidade de axiomas mais elaborados e complexos no desenvolvimento da matemática moderna, como o Axioma do Infinito na Teoria de Conjuntos, que têm relação direta com seu projeto de extensão dos fundamentos da Aritmética para torná-la completa. Contudo, vemos que a descrição feita por Gödel é muito semelhante à de complexidade algorítmica que falaremos a seguir, abordada por Chaitin e Kolmogorov – e pensada antes da publicação de (CHAITIN, 1974). Robert Solovay e Solomon Feferman, nos comentários acerca das observações de Gödel, esquematizam o esboço de seu teorema. Seja o grau de complexidade de uma fórmula A expressada por d(A) = m onde m é o número de símbolos de A. Considere um conjunto finito de fórmulas não-lógicas $A = \{A_1, A_2, A_3, ... A_n\}$ como axiomas de um sistema S. Temos que a complexidade d(S) é definida pelo comprimento das fórmulas que integram S mais a conjunção entre as mesmas, ou seja, $d(A_1) + d(A_2) + d(A_3) + \ldots + d(A_n) + n+1$. O teorema afirma que, para resolver problemas de complexidade k, $d(S) \geq k$, sendo esta sentença verdadeira e indecidível em S.

Interessantemente, vemos que o esboço de Gödel tem o mesmo significado da versão informacional de Chaitin. Os dois apenas tiveram contato duas vezes, como relatado em (CHAITIN, 1995). Porém, pelas estimativas de Solovay e Feferman, Gödel já previra a versão da incompletude de Chaitin alguns anos antes com a noção de complexidade algorítmica. Todavia, este conceito já estava sendo elaborado anteriormente de forma independente por outros pesquisadores.

4.2 INFORMAÇÃO ALGORÍTMICA E A PROVA DE CHAITIN

Há diversas abordagens sobre o conceito de Informação, todas dentro de contextos e aplicações voltadas às necessidades teóricas e práticas do empreendimento da qual fazem parte. Em geral, não há análise que conseguiu alcançar uma definição unificadora do termo adequada, mas sim a aplicação e uso do termo de acordo com certas propriedades e aspectos, desenvolvendo-se conceitos intensionalmente distintos. Mesmo sendo questionável o fato de falarmos sobre informação dependendo do contexto que o conceito se encontra, e sem termos nenhum aspecto entre estes contextos que convirja a uma ou algumas características abrangentes a todos os casos, a questão é que a análise conceitual do termo parece depender dos fenômenos, objetos e eventos aos quais nos referimos utilizando tal termo em nossa linguagem, pois como o filósofo Luciano Floridi afirma:

> "Informação é notoriamente um fenômeno polimórfico e um conceito polissemântico, podendo ser associado com várias explicações dependendo do [...] feixe de requerimentos e as intenções que orientam a teoria." (FLORIDI, 2011, p. 81, tradução nossa)

Em suma, podemos argumentar que as noções de informação podem ser aplicadas nos mais diferentes investigações sem os termos de uma anular as restrições conceituais impostas à outra. Pelo visto, até Claude Shannon, idealizador da Teoria Matemática da Informação – sofrendo críticas por considerar-se que ele realizou uma análise matemática da informação desprovida de conteúdo semântico – concebia a informação desta forma, e enxergava dificuldades de sucesso em uma pretensa unificação conceitual, como se segue:

> "Á palavra 'informação' tem sido dado diferentes sentidos por vários escritores na teoria geral da informação. É preferível que ao menos uma quantidade deles provem-se suficientemente úteis para merecerem estudos posteriores e permanente reconhecimento. Dificilmente deve se esperar que uma única definição de informação poderia satisfatoriamente dar conta das inúmeras possíveis aplicações para esta área mais geral." (SHANNON, 1993, p.180, tradução nossa)

Em nosso caso, com o crescimento da área da Teoria da Computação e o desenvolvimento do conceito de software e das linguagens de programação, havia a necessidade premente do entendimento do que seria uma unidade de informação e de formas quantitativas confiáveis de medição de informação. E é dentro deste contexto que surge uma abordagem algorítmica da informação.

4.2.1 Sobre a Informação Algorítmica

Trabalhos em direção a abordagem denominada Informação Algorítmica foram desenvolvidas inicialmente com objetivos distintos por Andrei Kolmogorov, Ray Solomonoff e Per Martin-Löf, respectivamente voltados para medição de complexidade computacional, predição/probabilidade algorítmica e aleatoriedade de strings (conjunto de caracteres ou símbolos), dando origem à versão algorítmica da informação de Gregory Chaitin elaborada em (CHAITIN, 1976) com aplicação em sua versão teorético informacional do teorema da incompletude.

Tendo Kolmogorov como precursor teórico, em (KOLMOGOROV, 1968) há o destaque de duas abordagens comuns para definir a quantidade de informação de um conjunto de caracteres ou sinais, que seriam as mais utilizadas em teoria da transmissão de informação contidas na análise de Claude Shannon[67]: combinatorial e probabilística. A primeira interpreta quantidade de informação à combinação entre um conjunto pré-definido de caracteres levando em conta seus possíveis arranjos, e no outro a distribuição de probabilidade de tais caracteres na string considerada. Mas ambos têm em comum a condição de serem dependentes da ocorrência dos caracteres utilizados.

Porém, estas abordagens encontram algumas restrições por não realizarem uma medição de informação levando em consideração o objeto a ser descrito, mas a sequência de caracteres que o descrevem, bem como permitirem apenas um cálculo baseado na frequência destes caracteres, o que não favorece uma otimização efetiva de strings mais ou menos informativas, dependendo diretamente de sua aleatoriedade. Por exemplo, a string binária ‘111111000000’, pelas abordagens anteriores, teria a mesma quantidade de informação que ‘001011101001’, mesmo a primeira string aparentemente sendo mais simples e tendo o potencial de ser comprimida e transmitida de modo mais efetivo com menos caracteres[68].

Assim, colocamos certas críticas que envolvem soluções não-probalibísticas dentro das definições de computabilidade e do que seria efetivamente computável por meio de funções recursivas de menor tamanho possível, ou seja, do que pode ser descrito por algum programa ou algoritmo mínimo. Entramos aqui na abordagem algorítmica de Kolmogorov[69] com sua noção de informação como complexidade, que tem suas condições cumpridas

67 Para introdução sobre os principais conceitos e aplicações da Teoria da Informação ver (COVER e THOMAS, 1991).
68 Há uma confrontação entre as abordagens de Shannon e Kolmogorov em (GRUNWALD e VITANYÍ, 2008).
69 Sobre o tema da Complexidade de Kolmogorov, para introdução e aplicações ver (LI e VITANYÍ, 2006).

teoricamente considerando-se um código universal na realização do programa e com o que é chamado de princípio do comprimento mínimo, que define a complexidade K(x) de um objeto ou observação x qualquer como sendo a menor string lg(x) (relativo a comprimento, do inglês *length*) comprime dos algoritmos possíveis que possam representar x, dado um computador Ư que compile a linguagem com este código universal que seja capaz de reproduzir x, imprimi-lo e parar.

Devemos lembrar aqui que nenhuma programação efetiva é ideal, pois ainda depende de regras de programação e rotinas específicas para o algoritmo ser implementado. Porém todas as programações existentes podem ser compiladas em outras, e estas reduzidas a passos em um modelo de programação seguido por uma Máquina de Turing, portanto a diferença entre o comprimento dos strings produzidos por programas distintos para descrever um mesmo objeto ou observação são uma constante, ou seja, a complexidade de Kolmogorov independe dos caracteres utilizados. Além do mais, os avanços de Ray Solomonoff auxiliaram na consolidação desta noção de complexidade como informação algorítmica. Em (SOLOMONOFF, 1997), ele destacava como o problema da compressão de informações (Information Packing Problem) – um problema computacional de como dados podiam ser acondicionados em um número específico de bits ou vice-versa[70].

Inspirado pela noção de Shannon de que a quantidade de informação estava fortemente relacionada com sua probabilidade (SHANNON, 1948) e na sua intenção de dar uma resposta ao problema da indução, Solomonoff tem como influência a obra de Carnap sobre o tema. A Filosofia da Informação carnapiana se desenrola medindo probabilisticamente as descrições-de-estado (state descriptions) dentro de estruturas linguísticas analisadas por meio de sua abordagem semântica da informação (BAR-HILLEL e CARNAP, 1953). Solomonoff considerava a descoberta do que ele denominou de Probabilidade Algorítmica[71] muito similar ao proposto modelo carnapiano (SOLOMONOFF, 1997, p. 80). A proximidade entre as noções de informação e os problemas aos quais elas estão inseridas reforçou tal noção de informação como complexidade.

Gregory Chaitin utilizou-se desta abordagem algorítmica para realizar sua prova do primeiro teorema da incompletude, pois ele destaca que:

70 Problema este muito próximo da definição da Complexidade de Kolmogorov K(x) como o menor algoritmo possível que represente x.

71 Ver (SOLOMONOFF, 2009) para mais detalhes.

> “A requisição-chave de Hilbert para um sistema matemático formal foi de existir um critério objetivo para decidir se uma prova escrita em uma linguagem de um sistema é válida ou não. Em outras palavras, deve existir um algoritmo, programa de computador ou Máquina de Turing para checagem de provas. […] Aplica-se o checador de provas a todas as possíveis provas e imprime-se todos os teoremas.” (CHAITIN, 1982, 943-944, tradução nossa)

Desta forma, em (CHAITIN, 1974) associando esta concepção algorítmica de prova, Chaitin teve uma ideia de demonstração da incompletude de sistemas formais baseada no Paradoxo de Berry, retratado aqui de um modo mais adequado aos propósitos como “o menor número natural cuja definição requer mais caracteres dos que os existentes nesta frase” (CHAITIN, 1974, p. 418, tradução nossa). Chaitin tem uma descrição explicativa acerca do porquê este programa apresenta a prova da incompletude de um sistema formal baseado no Problema da Parada de Alan Turing:

> “[…] Encontre uma série de dígitos binários onde possamos provar ser de complexidade maior que o número de bits deste programa. O programa testa todas as possíveis provas no sistema formal por ordem de tamanho até encontrar o primeiro, provando que uma sequência binária específica é de uma complexidade maior que o número de bits no programa. Então ele imprime a série que encontrou e para. (…) O programa supostamente calcula um número que nenhum programa com este tamanho deva ser capaz de calcular. A absurdidade dessa conclusão apenas demonstra que o programa nunca deverá encontrar o número que está designado para achar.” (CHAITIN, 1975, p. 52, tradução nossa)

Com essa interpretação, muitos teóricos defendem que a prova Chaitin do primeiro teorema da incompletude é legítima e elegante, assim como a Teoria Algorítmica da Informação mostra com este resultado muito potencial. Tanto que em artigos como (CHAITIN, 1987), Chaitin busca uma extensão do seu papel com uma interpretação teórico-informacional do primeiro teorema da incompletude, porém, há controvérsias e críticas às suas técnicas e definições estabelecidas. Vamos a tal prova.

4.2.2 A versão da incompletude de Gregory Chaitin

Como informações preliminares, temos que na Teoria da Informação Algorítmica, *bits* são os símbolos que representam a quantidade mínima de informação, sendo eles 0 e 1; *strings* são cadeias de bits; lg(p) = |p|, ou seja, o comprimento de uma ou o conjunto de strings; 0^k e 1^k expressam strings de k zeros e k uns, respectivamente; Chaitin especifica relações de sinonímia entre os termos computacionais e metamatemáticos, “computador” e “regras de inferência”, “programa” e “axiomas”, relevantes para entender relações entre sua prova informacional algorítmica e a lógico-matemática. Assim, seja uma Máquina de Turing Universal U que simula um computador C, rodando um programa p, sendo C(p) sua saída, neste caso podendo representar um sistema formal como [U, p]. Considera-se quando o programa p calcula S rodando em C quando C(p) = S e pára, bem como o programa p enumera S (sendo S finito ou infinito) se C(p) = S. U tem a seguinte propriedade: para qualquer computador C, existe um programa p’ tal que lg(p’) ≤ lg(p) + sim(C), onde U(p’) = C(p), com sim(C) como o custo computacional em bits para a simulação de C em U.

Desta forma, temos I(S) e I_e(S) (complexidade e e-complexidade, respectivamente) como a informação necessária para calcular o conjunto finito S e para a enumeração do conjunto (finito ou infinito) S, onde I(S) = l_{min}(p) com U(p) = S e para e I_e(S) = lmin(p) quando U(p) = S ou infinito quando não existe p. Assim, definimos $I_e(f)$ como a e-complexidade de uma função recursiva f de um conjunto de pares ordenados na forma (n, f(n)), com cada par ordenado (i, j) podendo ser relacionado em uma função de correspondência 1-1 a uma sequência de números naturais construídos através de i e j, que será mostrada adiante. A partir disso, temos certas propriedades a serem consideradas. Baseado em Combinatória, vemos que a quantidade de programas de tamanho n é 2n e menores ou iguais a n é 2^{n+1} - 1, sendo assim, a quantidade dos diferentes conjuntos de complexidade ou e-complexidade iguais entre si, também indicando pela variação entre programas de comprimento n e menores ou iguais a n que boa parte dos programas que têm sua descrição mínima são incompressíveis ao seu comprimento mais próximo de seu limite superior, i.e, n.

Com estas observações, chegamos a conclusão em (CHAITIN, 1974, p. 414) que:

$$I_e(C(p)) = I_e(C'(s)) \leq lg(s) + sim(C') = I(p) + sim(C'); \text{ e}$$
$$I(C(p)) = I(C'(s)) \leq lg(s) + sim(C') = I(p) + sim(C') \text{ se } C(p) \text{ pára.}$$

Seguindo-se que a maioria dos programas tem comprimento aproximado de n, sendo c uma constante dependente da implementação computacional e tomando C = U, temos I(p) + c ≥ I(U(p)) = lg(p). Agora, pensando algoritmicamente um sistema formal com um conjunto de seus teoremas expresso por T e um computador (regras de inferência) C rodando um programa p – que são as instruções, ou seja, axiomas do sistema – tal que C(p) = T, então lg(p) ≥ I_e(T) - sim(C). Assim, vemos que a quantidade de bits (símbolos) dos axiomas é maior ou igual a e-complexidade dos teoremas de <U, p> menos o custo da simulação de C em U. Temos que todos os programas que param rodando em U, assim como seus teoremas que tem complexidade menor ou igual à de seus axiomas são recursivamente enumeráveis, portanto verificáveis. Para isso, precisamos de um programa que faça a checagem dos programas que rodam em U tal que para algum temos a prova de um teorema em [U, p]. A questão que é colocada agora é se a sentença, I(s) > n – que significa *a string de comprimento s tem complexidade maior que n* – é um teorema de [U, p].

Chaitin explica que um computador C por um programa p’ em U que realiza checagem de provas verificando os pares ordenados (i, j), sendo i o comprimento da computação envolvida e p o programa rodado. Ele age como Torkel Franzén em (FRANZÉN, 2005) explicita; esta checagem nada mais é do que uma enumeração computável das provas de T. Esta enumeração pode ser a que (FRANZÉN, 2005, p. 140) fornece, pela representação em strings de (i, j) por 1^i0ij ou como Chaitin, invertendo a utilização de zeros e uns (talvez por economia energética) e omitindo a repetição de i (0^i1j), para otimizar o comprimento da string (que será a adotada aqui), sendo que ambas são realizadas por compressão algorítmica[72].

Pela abordagem de Chaitin, na busca de I(s) vale a inequação n ≥ lg(p’) + k por n ser limite superior do comprimento do programa p’ junto a uma computação de comprimento k tal que onde a primeira string que tiver complexidade maior que n, para-se a computação k e imprime-se s. A busca por I(s) > n simula-se nesta rodagem do programa p em U, ou seja, U(p). Supondo que p satisfaça tal sentença e encontre um I(s) > n e pare, temos o string do par ordenado (sim(C), p) como resposta ao string s de I(s), tal que $C(0^{sim(C)}1p) = s$. Portanto, temos que k = sim(C) e $p' = 0^{sim(C)}1p$, logo pelas propriedades antes destacadas $I(s) \leq lg(0^{sim(C)}1p) + sim(C) = lg(p) + 2.sim(C) + 1$. Porém, como C para encontrando um s tal que I(s) > n, segue-se que $n \geq lg(p') + k = lg(0^{sim(C)}1p) + sim(C) = lg(p) + 2.sim(C) + 1$, o que gera contradição com o limite superior de I(s). Consequentemente, $C(0^{sim(C)}1p)$ não pára, portanto não fazendo parte das sentenças prováveis em T, mesmo o teorema sendo verdadeiro levando em

72 Porém, como é descrito em (FRANZÉN, 2005, p. 139-140), a escolha da maneira que algoritmicamente se expressa e comprime-se os strings são, pelo Teorema da Invariância, qualitativamente semelhantes e quantitativamente distintos por valores aproximadamente constantes e independentes das variáveis a serem consideradas nas computações com estes strings, ou seja, independente da implementação computacional otimizada de um programa ser mais longa ou mais curta que outra, sua complexidade não varia de acordo com a entrada fornecida à computação. Ver (LI e VITANYI, 2006, pp. 197-198).

consideração a inequação $I(p) + c \geq lg(p)$, onde $c = 2.sim(C) + 1$ (CHAITIN, 1974, pp. 419-420).

Chaitin em (CHAITIN, 1982) destaca que seu resultado dá margem a uma nova interpretação de que há limitações teorético-informacionais na Aritmética, considerando que a quantidade de informação contida no conjunto de axiomas considerado é menor que a necessária para demonstrar $I(s) > n$ e que a incompletude é um fenômeno que não seria exclusivo e raro, mas algo comum e amplamente espalhado dentro de outras áreas de investigação, propondo pesquisas que indicassem seu ponto. Há provas que são mais intuitivas e simples do que a apresentada acima em seu principal artigo. Porém, com o tempo ela passou a sofrer escrutínio da comunidade filosófica devido a fatores metodológicos e epistêmicos.

4.3 CRÍTICAS A PROVA DE CHAITIN

Os principais interesses de Chaitin ao demonstrar a incompletude pela via algorítmica é ter um novo ponto de vista da existência na Matemática de sentenças verdadeiras por pura questão de aleatoriedade; devido a um natural excesso de complexidade de certas sentenças que por vezes seus axiomas não conseguem capturar, argumentando que a incompletude pode ser um fenômeno que perpassa outras áreas de investigação, bem como mostrar a força teórica de sua teoria da informação algorítmica. Veremos que alguns destes argumentos e pontos de vista podem ser considerados controversos e até mesmo infundados por parte de seus críticos.

4.3.1 Análise dos aspectos relevantes a crítica

O artigo (VAN LAMBALGEN, 1989) foi a primeira crítica publicada a versão da incompletude de Chaitin, seguida pelos complementos e desenvolvimentos de (RAATIKAINEN, 1998) com comentários de (FRANZÉN, 2005). Eles se ativeram a três principais aspectos da prova:

1. A alegação que a prova de Chaitin é uma extensão do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel;
2. A pressuposição de um limite superior bem definido relacionado a medida do poder, ou conteúdo informativo, da teoria axiomática formalizada em um sistema formal, denominada de *constante característica*[73], e;
3. Falta de justificativa para confirmar como suficiente a dependência da medida de complexidade dos teoremas da teoria em um sistema formal pela medida de complexidade dos axiomas desta teoria através do comprimento destes.

Começando por Van Lambalgen, em seu artigo ele destaca que na prova de Gödel há uma construção explícita de uma sentença recursiva indecidível, enquanto que na prova de Chaitin, isto não ocorre. Devido à equivalência entre Turing-computabilidade e funções recursivas, sabemos que a função da complexidade de Kolmogorov não é Turing-computável, portanto não é recursiva. Sendo o limite superior que expressa o conteúdo informativo de uma teoria S como f (S) e w(S) uma saída em função de S, é impossível estabelecer recursivamente um w(S) tal que $K(w(S)) > f(S) \geq c_S$ – sendo c_S a constante característica estipulada – pois se fosse, existiria uma sequência recursivamente enumerável infinita de teorias tal que $S_0 = PA$, $S_1 = S_0 \cup \{K(w(S_0) > f(S_0)\}$ e assim sucessivamente. Assim, suas constantes características vão aumentando progressivamente, com o limite de $f(S_n)$ tende ao infinito com n tendendo ao infinito, tal como o string $w(S_n)$. Porém, devido à natureza finita das strings expressas em S, não temos como determinar efetivamente/recursivamente em uma teoria S, w(S) tal que $K(w(S)) > f(S)$. Logo, para Van Lambalgen, este fato não mostra a prova algorítmica como uma extensão, mas sim revela-se mais fraca que a exposta por Gödel.

Em seguida, é iniciado o tema (2) da arbitrariedade das constantes características, abordando que entre a Aritmética de Dedekind-Peano e um fragmento aritmético da Teoria de Zermelo-Fraenkel (doravante ZF) podem haver infinitas teorias com constantes c iguais, porém diferentes conteúdos informativos[74], não havendo nenhuma evidência para que possamos associar a indecidibilidade de $K(w) > n$ a afirmação de excesso de conteúdo informativo da string *w*, havendo uma grande diferença aqui entre uma string conter muita

73 Lembrando que no caso da Teoria da Informação Algorítmica, a constante característica é um valor aproximado pelo comprimento do conjunto de axiomas da teoria em conjunto com o custo da implementação necessária a uma Máquina de Turing Universal U para simular tal teoria, que em nosso caso é PA.

74 Podemos afirmar isso sem saber inclusive se $c_{ZF} > c_{PA}$ mesmo o contrário sendo contraintuitivo na lógica empregada na Teoria Algorítmica da Informação, pois ZF é mais robusta que PA, sendo inclusive não-axiomatizável em PA.

informação e uma fórmula expressar esta afirmação acerca de *w*. Contudo, isto pode ser corrigido aplicando-se o Teorema do Ponto-Fixo em K(x), onde temos que $T \vdash \varphi \leftrightarrow (K(<\varphi>) > c_{PA})$, onde de modo informal $K(<\varphi>) > c_{PA}$ significa “eu contenho muita informação para PA”. Porém, mesmo com a diagonalização, como não temos um método efetivo de estipular a constante característica c_{PA}, não é exato dizer que φ expressa e desfaz a confusão entre linguagem e metalinguagem do modo que gostaríamos.

Van Lambalgen conclui que não descarta a possibilidade da utilização de uma medida de informação para analisar o fenômeno da incompletude, entretanto esta maneira proposta por Chaitin não parece uma boa medida por existir a possibilidade de termos teorias mais poderosas que outras que, de acordo com a noção de complexidade algorítmica aqui considerada, teria conteúdo igual à outra bem mais fraca.

4.3.2 Raatikainen e a imprecisão da constante característica

Panu Raatikainen em (RAATIKAINEN, 1998) dá prosseguimento a análise de (2), desenvolvendo uma maneira de mostrar como pode ser arbitrária a escolha de uma constante característica a ponto de reduzi-la a 0 por meio de uma função que modifica o código (ou numeração de Gödel, se estivermos nos referindo a T), a definindo como $\pi^n(x)$, dado um parâmetro n tal que:

$$\pi^n(x) = \begin{cases} 0, & \text{(se } x = n) \\ x + 1, & \text{(se } x < n) \\ x, & \text{(se } x > n) \end{cases}$$

Assim, estabelecemos uma nova complexidade algorítmica baseada nesta nova recodificação, $K^n(x) = z$, sendo que a função K é a função mínima de z onde existe um y tal que $\pi^n(y) = z$ e a Máquina de Turing U_y de código inicial y pára, obtendo como saída o valor de x. Admitindo a complexidade algorítmica como função aritmetizável, podemos encontrar K^n formalizando π^n podendo achar o número de Gödel do primeiro através do último, e também efetivamente encontrar uma Máquina de Turing Um tal que procure o menor x tal que para algum numeral p, $Pr_T(x, <(K^n(p) > 0)>)$. Agora, a questão é encontrar uma máquina que realize estas operações e utilizemos seu código inicial como parâmetro (RAATIKAINEN, 1998, p. 577), ou seja, n = m. Como podemos encontrar esta máquina? Se temos como código inicial um valor n, U_e deve computar desde 0 todo número até chegar a um número de Gödel da prova de $K_n(p) > 0$ para algum p, imprimindo-o. De acordo com o Teorema do Ponto-Fixo aplicado a funções recursivas, existe uma função f tal que $f(n) = m$. Se n = m, existe um e onde $U_e \approx U_{f(e)}$, i.e., eles computam a mesma função. Aqui, podemos observar então que este programa U_e nunca vai parar, pois ele vai persistir infinitamente devido a instanciação $U_{f(e)}$ em U_e executando na prática o mesmo programa em looping. Porém, se houvesse um resultado, este incidiria em contradição, pois encontraríamos $K^e(p) > 0$ tal que, por definição, $\pi^e(e) = 0$, logo $K^e(p) = 0$, o que conclui o argumento.

Raatikainen igualmente expõe artificialmente, por meio do conjunto de instruções por quádruplas que representam uma Máquina de Turing simulando um programa simples, maneiras de mostrar que a implementação pode ser feita com a necessidade de uma constante característica muito grande e com uma complexidade axiomática de valor bem inferior à constante. Mesmos tais contraexemplos sendo efetivos, podemos alegar que eles são artificiais demais para considerá-los. Porém, não há nenhuma justificativa para que uma dita “forma natural” de representar formalizações em sistemas tenha prioridade ou algum tipo de status epistêmico mais privilegiado, o que serve para mostrar o quanto esta alegada versão da incompletude por Chaitin é dependente dos modos de implementar o programa que simule a teoria que intencionamos analisar. Desta forma, podemos interpretar o valor da constante característica relacionado ao código da menor Máquina de Turing que não pára, consequentemente não-provável no sistema formal T,[75] levantando a suspeita de que aparentemente tal código nada de relevante traz para entender o poder ou conteúdo informativo da teoria analisada.

Destarte, após o aprofundamento de (2), ele desenvolve (3) dando um exemplo simples de uma teoria S_1 e S_2 tal que S_1 tem como axiomas uma quantidade finita de sentenças da forma n = n, enquanto em S_2 há a generalização $\forall x(x = x)$. Nitidamente o poder axiomático de S_2 é maior que S_1, porém, de acordo com a medida de complexidade estipulada, ocorre o inverso. Inclusive, Raatikainen cita teorias matemáticas que sintaticamente aparentam ser mais complexas, porém tem um poder de prova bem menor que outras, como Z_2 e PRA com relação a ZFC. Com isso, ele argumenta que há a velha confusão entre uso e

75 Raatikainen ainda analisa extensões Q* e Q** da Aritmética de Robinson Q por sentenças deste tipo seguidas, em comparação com Z2, mostrando que mesmo que a constante característica da primeira seja maior que a última (mesmo havendo em seus axiomas sentenças não-prováveis em Z2), a força da teoria Z2 é incomparavelmente maior que Q**, tal como Van Lambalgen já havia apontado.

menção neste problema, pois uma sentença pode expressar de forma sintaticamente simples um objeto de ampla complexidade, i.e., em nosso caso, Chaitin “[...] compara a complexidade dos axiomas como mencionada e a complexidade afirmada por um teorema quando usada” (RAATIKAINEN, 1998, p. 581, tradução nossa).

Ao fim, Raaitikainen toma por conclusão que deve-se abandonar esta noção de relação entre o conteúdo informativo de uma teoria com base na complexidade algorítmica de seus axiomas e sua constante característica. Ele expõe quatro procedimentos para a construção de uma Máquina de Turing que compute K(*w*) > c, que são:

1. Instrução para encontrar o menor x que satisfaça a condição;
2. Algoritmo para gerar em ordem de comprimento, todas as provas da teoria;
3. Algoritmo que examine se um dado teorema tem ou não a forma K(*w*) > c, e;
4. Algoritmo que extraia o número *w* do número de Gödel $<(K(w) > c)>$, imprima-o e pare.

Juntos, estes quatro procedimentos formam a Máquina de Turing que é necessária, e os custos para a simulação de T dependem destes algoritmos, que servem como subrotinas, programas menores que compõem o principal. Com tantas variáveis a serem implementadas efetivamente, mesmo considerando aqui o Teorema da Invariância[76], dizer que a prova de Chaitin fornece um comprimento mínimo, um limite superior que depende inteiramente do comprimento dos axiomas da teoria é, para Raaitikainen, ao menos uma má interpretação de seus resultados.

Em (FRANZÉN, 2005) há comentários sobre uma consequência do teorema de Chaitin: a incapacidade de estabelecer um algoritmo que estipule, dada uma string *w*, que tenhamos como decidir se a sentença *w é uma string maximamente incompressível* é válida ou não em uma teoria no sistema formal T, pois só se consegue estabelecer tal decisão para conjuntos finitos de strings devido a limitação pela medida de complexidade dos axiomas da teoria. Porém, como o próprio Franzén comenta, há as críticas de (2) ou (3) que deixam o problema indefinido, não-delimitado. Desta forma, Chaitin em (CHAITIN, 1993, p. 69) propôs uma versão melhorada de seu princípio na forma *uma teoria S não pode provar K(w) > n, para nenhum n maior que K(S) + c*. Porém, Franzén destaca que não é muito óbvio a

76 Trata-se de um teorema que em resumo demonstra que, dado duas Máquinas de Turing distintas programadas para realizar a descrição dos mesmos objetos, a diferença das medidas de complexidade de Kolmogorov de ambas de um mesmo objeto tem valor aproximadamente constante. Este teorema serve como justificativa para mostrar que a medida de complexidade não é afetada qualitativamente pela implementação computacional escolhida. Uma prova simples do teorema e mais detalhes em (LI e VITANYI, 2006).

justificativa para tal alteração, devido ao fato das críticas em (2) e (3) não serem diretamente atingidas.

4.3.3 Comentários acerca das críticas

No caso de (1), no sentido de aplicabilidade a outros contextos e sistemas, realmente pode-se se dizer que houve uma extensão do resultado da incompletude. Contudo, seria uma extensão no sentido trivial do termo, significando o acréscimo mais de um novo caso de incompletude, posto que não há precedentes de uma versão semelhante a demonstração dada por Chaitin na área da computação[77]. Já no sentido epistêmico de extensão como uma ampliação mais generalizante (tal como é considerado por Gödel os resultados de Turing do Problema da Parada com relação ao Primeiro Teorema da Incompletude), seja pelos compromissos epistêmicos assumidos na Complexidade Algorítmica (como a Tese de Church-Turing) ou pela imprecisão relacionada a constante característica, dizer que há uma dramática extensão dos resultados por esta versão como alegado por Martin Davis é, no mínimo, exagerado e inadequado.

Percebemos que as três críticas são de certa maneira interligadas por (2). O foco na imprecisão para estabelecer a constante característica é levado a sério por uma área que preza fortemente pelas justificativas e o uso de contraexemplos como a Filosofia. Porém, Chaitin aparentemente não se preocupa muito com este problema justamente pelo Teorema da Invariância, visto que o desenvolvimento de diferentes Máquinas de Turing que implementem os quatro procedimentos acima em tese não tem interferência de ordem qualitativa no resultado de K(S). Ou seja, o valor estabelecido relativo ao código de qualquer Máquina de Turing, se for simulado por outro programa, pode alterar-se, mas apenas há uma mudança constante e de ordem quantitativa[78]. Todavia, para determinar o valor de K(S) necessitamos estabelecer precisamente uma implementação de um algoritmo que compute K(w), sendo o conjunto de axiomas de S o mais otimizado possível, logo precisamos da resposta afirmativa

77 Claro, neste caso não levando em consideração a solução negativa ao Problema da Parada de Turing, por não envolver a noção precisa de incompletude, mas de incomputabilidade.

78 Há uma prova algoritmo-informacional do princípio heurístico de Chaitin em (CALUDE; JÜRGENSEN, 2005), mostrando que a complexidade dos teoremas estão ligados à complexidade da teoria por meio de seu conjunto de axiomas independentemente da elaboração dos procedimentos necessários. Porém, a crítica acerca do estabelecimento do valor de K(S) feita acima aparentemente persiste.

para se S é incompressível. Porém, esta é uma sentença que não consegue se responder dentro de S, pois retornamos à questão inicial de estabelecer se não há um S’ com uma função de parada que seja igual ou contenha S, sendo lg(S’) < lg(S), o que seria impossível, dificultando a determinação de K(S) e até a própria definição de complexidade algorítmica, obtendo-se um problema de circularidade, assunto que falaremos mais adiante.

Já os argumentos apresentados em (3) podem ser enfraquecidos com a versão melhorada de Chaitin, pois do caso dos contraexemplos dados, se tivermos S1 e S2, lg(S1) ≥ lg(S2) e a complexidade dos axiomas de S1 seria igual ou menor que K(S2), dado que o conjunto de teoremas de S2 contém os de S1 e pode haver algum S3 com um conjunto de axiomas de comprimento menor que S2 tenha um poder ou conteúdo informativo maior ou igual a ele. Entretanto, a crítica exposta no parágrafo acima se mantém, bem como a comparabilidade de conteúdo informativo de duas teorias com o acréscimo de sentenças que são indemonstráveis em uma das teorias continua incerta, indicando que a prova de Chaitin continua com alguns pontos a serem melhor definidos. Para compreendermos melhor estes pontos, vamos retornar as outras provas da incompletude do tipo-Berry.

4.4 RETORNANDO A CAICEDO E A DEFINIÇÃO DE COMPLEXIDADE

Ao final de (CAICEDO, 1993), há o desenvolvimento de uma função aritmética do que Caicedo chama de números de Berry, onde b(x) é o número mínimo y não definível na Aritmética por uma fórmula de comprimento x. Esta função é incalculável e até indefinível em T, pois se o fosse, teríamos uma função efetivamente computável φ(x,y) que calcularia y, portanto o resultado de φ(x, n*n) definiria o menor número não definível por uma fórmula com comprimento menor que n^2, o que leva a contradição da conclusão obtida por Caicedo anteriormente. Agora, a parte interessante é a existência de outra função d(x), que tem sua definibilidade atrelada a b(x), pois ela determina *o comprimento mínimo das definições de x*, portanto $b(x) = \min\{x \in \mathbb{N} \,/\, d(x) \geq n\}$. Por conseguinte, se b(x) é indefinível, d(x) também o é. Porém, se olharmos com cuidado, d(x) pode ser interpretada como uma função de complexidade algorítmica dentro de PA em T. Indiretamente, mostra-se através deste esboço que uma noção de complexidade algorítmica (que podemos chamar de complexidade numérico-algorítmica) não é aritmeticamente definível.

A conclusão acima muda a perspectiva com que encaramos uma definição recursiva ou Turing-computável de complexidade algorítmica, pois se esta pequena porção não é aritmeticamente definível, ela não é efetivamente calculável, logo não é Turing-computável nem recursiva. Vamos aqui expor uma prova mais substancial do caso se atendo as análises feitas neste trabalho previamente. Algumas fórmulas confeccionadas por Caicedo têm a determinação de n^2 em seus termos, como queremos que seja o mais generalista e preciso possível, vamos nos utilizar das modificações feitas por Kikuchi nas sentenças de Boolos e buscar um valor menos arbitrário. Considere a função d(x) = y como a função de complexidade numérico-algorítmica de x e $K_T(x,y)$ como a relação *y é o comprimento mínimo de uma fórmula φ(x) que define aritmeticamente x*. Para sabermos que ela é mínima, devemos ter uma resposta afirmativa para a sentença de que y é o menor número não definível por uma fórmula com comprimento menor que um $|\varphi(x)|$, assim temos:

$$K_T(x, y) \leftrightarrow \exists z D_T(z, x) \wedge \forall y(\neg Q_T(x, y) \rightarrow (y = |\varphi(x)|)),$$

Sendo $D_T(x, y)$ semelhante a $\theta(x, y)$, porém com os elementos melhorados de Kikuchi, i.e.: um $\varphi(v_0)$ define aritmeticamente um número n se $T \vdash \varphi(n) \wedge \forall x \forall y\, (\varphi(x) \wedge \varphi(y) \rightarrow x = y)$ for válida, representando a relação do número de Gödel da fórmula que define n como $N(<\varphi(v_0)>, n)$. E $Q_T(x, y) = \exists z B_T(z, y) \wedge Prov_T(N(z, x))$ significa z é um número de Gödel de uma fórmula demonstrável em T que define aritmeticamente x com menos de y símbolos. Agora, seja a fórmula W(x, y):

$\neg K_T(x, y) \wedge \forall z \forall w((z < x) \wedge (w \leq y) \rightarrow K_T(z, w))$, ou seja, W(x, y) significa que *x é o menor número definível por uma fórmula de comprimento mínimo maior que y símbolos, somente*.

Assim, substituindo a variável *y* pela constante característica *n*, teríamos acima a formalização em T da sentença de Chaitin onde existe uma string *w* tal que K(*w*) > n. E também substituindo na fórmula o símbolo de menor ou igual pelo de menor, teríamos W'(x, y), sendo x o menor número não definível por fórmulas de comprimento mínimos menores que y símbolos, formalizando a função característica de b(x) = y dos números de Berry. Isto posto, lembremos da seção 3.3.4 de comparabilidade entre as provas tipo-Berry, onde era fundamental o estabelecimento de um limite superior capturável por uma quantidade de símbolos menor que a forma canônica do numeral deste limite. Ou seja, podemos substituir em W(x, y) a forma canônica de y pela função mínima que o defina aritmeticamente, quer dizer, W(x, φ(y)). Substituindo y por n, tem-se que W(x, φ(n)) define um número de comprimento maior que n, ou seja, |W(x, y)| + d(n) > |W(x, φ(n))| > n. Visto que |W(x, y)| é constante e d(n) < n com $\lim_{n\to\infty}$ d(n)/n = 0, haverá um número natural mínimo e tal que |W(x, y)| + d(e) < e, logo a função W(x, e) será a fórmula de menor comprimento que expressa o próprio e, portanto W(x, e) = φ(e); contudo, e > |W(x, y)| + d(e) > |W(x, φ(e))| > e. Contradição.

Vemos aqui que o lema diagonal surge naturalmente por meio de uma inevitável autoaplicação de uma instância de W(x, y) em si mesma: não há como evitar a contradição. Contudo, como já vimos, não se trata desta fórmula não ser computável, e sim que a complexidade numérico-algorítmica desenvolvida aqui não é definível na Aritmética de Dedekind-Peano pela própria noção de definibilidade aritmética modificada D_T(x, y) ser o único componente das fórmulas apenas pressuposto, diferente dos demais, calculáveis, tal como nas provas de Caicedo apresentadas anteriormente. Porém, mesmo com o resultado que obtemos acima, não significa que devemos abandonar a Teoria da Informação Algorítmica ou a medição por complexidade algorítmica de strings. Só temos que ter plena noção de que não há definicionalmente como formalizá-la rigorosamente em um sistema formal que contenha PA, realizando-se assim apenas medidas aproximadas de descrição mínima de strings.

4.5 SENTENÇAS TIPO-BERRY, FINITUDE E PROCESSOS COMPUTÁVEIS

As sentenças de tipo-Berry acima, além da distinção com as sentenças tipo-Mentiroso envolvendo a diferença entre autorreferenciação e autoaplicação, há também em seus aspectos de prova casos explícitos de recursão infinita nas sentenças sob as quais existem autoaplicação – o que não ocorre (ao menos explicitamente) com as sentenças tipo-Mentiroso – tendo como consequência sua indecidibilidade. Por exemplo, a relação de Boolos A(x, y). Havendo um algoritmo P que computa A e sabendo que A é aplicável em B(x, y) por meio do valor de |A(x, y)|, o algoritmo realizará a provabilidade de todas as sentenças bem formadas com número de símbolos menores ou iguais ao numeral $|A(x, y)|$. Deste modo, haverá um $[k] > |A(x, k)|$ sendo que em algum momento na computação, o programa encontrará um $|F(x)| \leq k$ tal que ele será o próprio A, ou seja, uma etapa de sua solução acabará sempre incidindo no mesmo programa que está sendo executado, e testará a si mesmo entrando em *looping*, sem parar[79].

Se formos pensar em um programa H que ao menos respondesse se $A(x, k)$ pára ou não, vemos que se este programa imprime ‘sim’, então não há um $|F(x)| \leq k$ que nomeie um numeral p, e P o imprimiria. Porém, vemos assim que $A(x, k)$ nomeia p, e sendo menor que [k], logo há um $|F(x)| \leq k$ que nomeie p. Contradição. Agora, se H imprime que P não pára, então não conseguimos encontrar um número que seja o menor número que não possa ser nomeado com k símbolos. Ora, como já falamos acima, devido às fórmulas terem natureza finita e assim nomearem uma quantidade limitada de números, a existência deste número p é garantida, mesmo que passemos por ele e P não consiga identificá-lo, i.e., se a resposta de não parar for equivalente à conclusão de não haver um x tal que $A(x, k)$, então temos aqui outra contradição. Vemos uma relação próxima entre a parada ou não de programas que computam finitamente certas propriedades ou relações e a indecidibilidade de sentenças. Mas quão ligados estes fenômenos estão?

Suponha que o Problema da Parada de Turing tem resultado afirmativo, ou seja, há um processo efetivamente computável por uma Máquina de Turing Π_e que calcule a função característica de parada $H(<\Pi_m>, n)$ de toda Máquina de Turing com número de Gödel $<\Pi_m>$ com entrada n. Portanto, dado um Π_m, Π_e determina, dado uma entrada n, se ela pára ou não, i.e, $H(<\Pi_m>, n)$ ou $\neg H(<\Pi_m>, n)$. Agora, consideremos a função aritmetizável de substituição em T de uma variável y $sub(a, <y>, b)$. Temos uma função substituição diagonalizadora quando $sub(d, <y>, d)$, ou seja, ela substitui a variável pelo numeral de seu próprio número de Gödel. Podemos reduzir a notação desta substituição por $sub(d, <y>)$. Sendo ela aritmetizável, é efetivamente computável, então podemos representá-la por alguma Máquina de Turing Π_q que, dado um número s, tem como resultado em Π_e $H(<\Pi_q>, s)$ ou $\neg H(<\Pi_q>, s)$. Seja S a fórmula diagonalizável de Gödel $\neg\exists x Pr_T(x, sub(y, <y>))$. Se substituirmos y por $<S>$ em S, temos expressa a sentença de Gödel G. Logo, se $H(<\Pi_q>, <S>)$, então é porque a Máquina de

79 Mesmo se fizéssemos uma cláusula “pulando” esta etapa do looping, isso não solucionaria o problema, pois teríamos um programa distinto e uma relação distinta das estipuladas anteriormente – sejam estes P’ e A’, respectivamente – onde existiria um numeral k’ tal que $[k'] > |A'(x, k)|$, incidindo em outro *looping*. Dentro das sentenças tipo-Berry como a de Boolos, este fenômeno é equivalente à incompletabilidade de T, independente de suas extensões, e à indecidibilidade essencial da Aritmética, tema também tratado por Caicedo ao final de seu artigo (CAICEDO, 1993).

Turing fornece uma resposta, e com isso, uma prova. Logo, existe um x, tal que x é o número de Gödel da prova de sub(<S>, <y>) em T, ou seja, $\exists x Pr_T(x, sub(<S>, <y>))$. Logo:

1. $T \vdash H(<\Pi_q>, <S>) \rightarrow \neg G$;

Agora, se $\neg H(<\Pi_q>, <S>)$, admitindo que sub(y, <y>) possa ser uma função semirrecursiva, temos como pensar em duas circunstâncias na qual o algoritmo que calcula tal função não pára: na primeira ele analisa todas as instanciações de seu domínio, sem sucesso de encontrar uma instanciação na qual o algoritmo forneça uma saída; ou então em determinado estado, o programa entra em *looping*, não fornecendo nenhum resultado; em nosso caso, trata-se da segunda opção, pois é especificada a instanciação com valor <S>. Como o resultado de seu número de Gödel de prova tende ao infinito, não há x tal que x seja o número de Gödel da prova de sub(<y>, <S>) em T. logo $\neg\exists x Pr_T(x, sub(<y>, <S>))$, assim temos:

2. $T \vdash \neg H(<\Pi_q>, <S>) \rightarrow G$;
3. $T \vdash \neg G \rightarrow H(<\Pi_q>, <S>)$, fazendo a contrapositiva de (2);
4. $T \vdash \neg H(<\Pi_q>, <S>) \leftrightarrow G$, com (1) e (3).

Há uma outra forma de pensarmos no problema: considerando que se $\exists x Pr_T(x, sub(n, <y>))$ – para algum n, sendo n a godelização de uma fórmula de T – então há um método efetivamente computável de calculá-lo. Sendo Π_q este método e, existindo um x tal que Π_q imprime o número de Gödel da prova de sub(n, <y>), por definição ele pára. Logo podemos generalizar $T \vdash \forall z \exists x(Pr_T(x, sub(z, <y>)) \rightarrow H(<\Pi_q>, z))$. Substituindo z por <S>, obtemos $T \vdash \neg G \rightarrow H(<\Pi_q>, <S>)$, incidindo novamente em (4).

Por consequência, sabendo que se T é consistente, pelo Primeiro Teorema da Incompletude $T \nvdash G$ e se T é ω-consistente, $T \nvdash \neg G$. Segue-se com isso que tanto $H(<\Pi_q>, <S>)$ quanto $\neg H(<\Pi_q>, <S>)$ são indecidíveis, pois, dado a entrada <S>, assumindo-se que uma ou outra será o caso, por *modus ponens* derivar-se-ia ¬G ou G, respectivamente, incidindo em contradição. Portanto, se há incompletude, não há como sabermos se o algoritmo de Π_q pára ou não. Ou seja, $T \nvdash \neg H(<\Pi_q>, <S>)$ e $T \nvdash H(<\Pi_q>, <S>)$. Um corolário que podemos tirar deste resultado é que sendo G verdadeiro e indemonstrável em T, segue-se que $\neg H(<\Pi_q>, <S>)$ também o é, e Π_q roda indefinidamente sem fornecer uma resposta. Além disso, o resultado mais interessante a ser exposto: há uma prova abstrata em (CALUDE,

2021) mostrando que, a partir do Problema da Parada, segue-se o Primeiro Teorema da Incompletude. No esboço acima fizemos o percurso contrário, expondo em conjunto com seu resultado a equivalência entre o Problema da Parada e a incompletude.

Mesmo alguns lógicos – entre eles inclusive o próprio Gödel – acreditam ou acreditaram que o trabalho de Turing era mais generalista e robusto que a incompletude, pois trata-se do estabelecimento de uma noção adequada ao que seriam processos mecânicos computáveis e a demonstração de suas limitações por meio do Problema da Parada, tendo como corolário a resposta negativa ao Problema de Decisão de Hilbert (*Entscheidungsproblem*), enquanto a incompletude é a indecidibilidade de sentenças dentro de sistemas formais considerados consistentes e bons, parecendo este ser um caso particular de problema de decisão. Todavia, com tal resultado, vemos que são problemas equivalentes, podendo este resultado ser reproduzido de forma abstrata para toda sentença indecidível em um sistema formal T, ou seja, toda sentença $\psi(x)$ onde se aplique $T \vdash \forall x(\psi(x) \leftrightarrow \varphi(x, <\psi(y_0)>)$, existe uma Máquina de Turing U que computa a função diagonalizadora $\varphi(x, y)$ tal que, tendo o número de Gödel $<\psi(y_0)>$ como entrada, não fornece resposta alguma. Assim sendo, U nunca para. Isto pode nos reforçar uma direção para o entendimento da natureza da incompletude associada a extrapolação semântica de processos computáveis finitos, na passagem da capturabilidade por processos finitários do que é transfinito, semelhante ao que Gödel cita em sua nota de rodapé 48a:

> “Como será mostrado na parte II deste ensaio, a verdadeira razão inerente a todos os sistemas formais de Matemática serem incompletos é que a formação de tipos cada vez mais altos pode ser continuada até o transfinito [...] enquanto em qualquer sistema formal só se dispõe de no máximo muitos denumeravelmente disponíveis. Nomeadamente pode-se mostrar que as proposições indecidíveis que se construíram aqui se podem tornar sempre decidíveis através da adição de tipos suficientemente altos.” (GÖDEL, 1931a, p. 181, tradução nossa)

Observando que tal investigação continuaria em uma segunda parte do seu artigo, que infelizmente nunca saiu dos planos, talvez até pela grande aceitabilidade que teve na comunidade filosófica. Há muitas interpretações da incompletude na literatura do tema[80], variando entre a distinção conceitual entre demonstrabilidade e verdade, como argumento da irredutibilidade da mente humana apenas a processos computáveis, até a versão teorético informacional de Chaitin. O filósofo e lógico Jaakko Hintikka em um livro sobre Gödel critica

80 Há discussões substanciais sobre as interpretações adequadas e inadequadas da incompletude em (FRANZÉN, 2005).

o que ele chama de “reações estranhas” não ao resultado de Gödel, mas a sua prova. Ele cita a versão de Chaitin, onde comenta que:

> “Infelizmente, para Chaitin, estas medidas de informação acabaram não medindo nada que pudesse ser chamado de informação. Claramente há uma necessidade de entender claramente o que Gödel provou e não provou – e precisamente como ele fez isso.” (HINTIKKA, 2000, p. 29, tradução nossa)

Ao dissertar acerca da aritmetização da sintaxe e o Lema Diagonal, Hintikka destaca que os resultados de Gödel pertencem a Matemática, não a Lógica, alegando que a prova da incompletude mostra, de fato, é que não são todas as sentenças aritméticas verdadeiras que podem ser provadas mecanicamente (ibidem, 2000, p. 37), ou seja, o tipo de incompletude exposta por Gödel seria uma *incompletude dedutiva*, relativa a Aritmética de primeira-ordem, no qual não existiria um processo computável para enumerar todas as suas verdades. Portanto, a incompletude não versaria acerca dos limites da lógica, mas sobre a limitação de nossa noção idealizada de computabilidade e de processo mecânico, i.e, do que foi chamado posteriormente de Máquina de Turing. Gödel mesmo afirma que a incompletude significa que “o tipo de raciocínio necessário na Matemática não pode ser completamente mecanizado” (HINTIKKA, 2000, p. 42, *apud* DAWSON, 1997, p. 263, tradução, nossa) e, vemos também que em seu *Postscriptum* de (GÖDEL, 1934), ele declara que Alan Turing em (TURING, 1937) deu uma “[...] definição precisa e incontestavelmente adequada de sistema formal”, destacando que:

> “A obra de Turing fornece uma análise do conceito de “processo mecânico” (ou antes “algoritmo”, ou “processo de cálculo” ou “processo combinatório finito”). Mostra-se que esse conceito é equivalente a uma “Máquina de Turing”. Um sistema formal pode ser simplesmente definido como sendo qualquer processo mecânico de produzir fórmulas, chamadas fórmulas demonstráveis” (GÖDEL, 1934, p. 355).

Com a ressalva de que, para a definição de sistema formal tenha significado equivalente em ambos os trabalhos, no artigo de Turing a expressão “processo finito” deveria ter o mesmo significado de “processo mecânico”. Vemos assim, através de nosso resultado e comentários anteriores, que realmente a incompletude de sistemas formais está intimamente ligada às limitações da computabilidade, e ambos aparentemente envolvem a extrapolação do que é finito em seus processos de inferência dedutiva ou computacionais, respectivamente. Este é um tema em aberto para aprofundamento e investigações futuras.

5. OBSERVAÇÕES CONCLUSIVAS

O progresso em áreas e investigações da Filosofia, seja o que quer que definamos como progresso, é um tema em pauta na comunidade filosófica que surge junto à discussão da existência de progresso no campo científico, gerando controvérsias sobre sua substancialidade, levando em consideração a distinção entre a natureza da investigação científica e da filosófica e havendo, no mínimo, o debate se há muito ou pouco progresso na área[81]. Porém, é inegável que com o desenvolvimento de setores da Lógica e da Epistemologia fomos levados a um melhor delineamento e compreensão de seus conceitos e técnicas, até com obtenção de respostas a problemas de natureza filosófica, mesmo que sejam dependentes de um sistema formal ou interpretação, trazendo a tona a concordância da existência de grandes progressos na área. E parece que toda a história envolvendo a prova de Gödel corrobora isso. A incompletude de sistemas formais com o mínimo de Aritmética é um dos resultados mais conhecidos na Lógica Matemática do século XX. Como observamos, além de ter em seu background discussões com programas de pesquisa de diferentes correntes preocupadas com os fundamentos da Matemática, seu resultado dependeu de muitos outros avanços na formalização e axiomatização de teorias, de discussões sobre finitismo e infinitismo na prática matemática, Teoria de Conjuntos e da diagonalização de Cantor, modelos e métodos de prova de consistência relativa e absoluta.

Assim, a partir do próprio artigo de Gödel de 1931, já é possível obter inicialmente três resultados de interesse interdisciplinar: a conclusão metamatemática de que $\neg \exists x Pr_T(x,\langle G \rangle)$ era verdadeira, porém indemonstrável em T – ou seja, há verdades aritméticas que podem ser expressas em PA porém não prováveis dentro da própria PA – o corolário denominado *Segundo Teorema da Incompletude*: sendo o sistema formal T consistente, não é possível uma prova de consistência absoluta de PA em T – resultado esse que põe em xeque o Programa de Hilbert. E o terceiro, o sistema T é essencialmente incompleto, i.e., continuará sendo incompleto independentemente dos axiomas que lhe sejam acrescidos.

Sobre suas consequências, podemos destacar que seu próprio resultado também foi precursor de grandes avanços em várias áreas teóricas e filosóficas[82], como da noção de computabilidade com o desenvolvimento da teoria de funções recursivas e na elaboração de

81 Ver a exemplo do tema, (CHALMERS, 2015).
82 Para uma discussão acerca da importância e implicações da incompletude de Gödel no cenário das discussões e problemas filosóficos, ver (RAATIKAINEN, 2005).

uma melhor definição de procedimento efetivamente computável – que veio a culminar no conceito de Informação Algorítmica de Chaitin – na abordagem de conceitos da metamatemática dentro de sistemas como o sistema formal T, obtendo-se resultados como a teoria da indefinibilidade da verdade de Tarski, e na resolução e descobrimento de teoremas e outras sentenças indecidíveis em outras formalizações, tendo por exemplo a resposta negativa ao Problema da Parada, fornecido separadamente por Alonzo Church e Alan Turing em 1936 e 1937, respectivamente.

Em conjunto a tais avanços, estudos envolvendo diferentes interpretações e outras demonstrações construídas com diferentes instrumentos lógico-matemáticos, baseadas em paradoxos diversos e teorias de outras áreas – como a da complexidade algorítmica – continuam levando a análises sobre a abrangência e a natureza da incompletude em sistemas formais. Tais avanços destacados acima só foram possíveis com um progresso dentro do campo da análise de conceitos e entendimento de suas aplicabilidades. Os resultados de Gödel são exemplo disso devido, além da capacidade técnica de desenvolvimento de suas intrincadas funções recursivas, ao estabelecimento de distinções filosóficas relevantes entre sentenças aritméticas e metamatemáticas, bem como a dissolução deste ponto crítico ao Paradoxo de Richard pela aritmetização da sintaxe, bem como através de sua demonstração expôs uma cisão entre verdade e provabilidade na Aritmética[83].

A partir da análise dos aspectos de versões alternativas de sentenças paradoxais indecidíveis que surgem no Primeiro Teorema da Incompletude, podemos entender um pouco mais acerca da aplicação dos instrumentos lógico-matemáticos que levam a incompletude de um sistema formal, bem como corroborar com a afirmação de Gödel de que realmente o tipo de paradoxo semântico envolvido não importa, e percebemos com isso que é a estrutura de diagonalização de fórmulas, seja ela implícita ou explicita, fazendo-as incidir em uma aurorreferenciação ou autoinaplicação que, se provável em T, leva a contradição. Distinguindo-os entre sentenças de tipo-Mentiroso e tipo-Berry, vemos que estas últimas fornecem elementos de comparabilidade distintos das primeiras e especialmente úteis para uma análise da versão do Teorema da Incompletude de Chaitin em conjunto com as críticas já publicadas de Van Lambalgen e Raatikainen e, dada a forma lógica adequada, conseguimos delinear a noção de complexidade algorítmica associada a capturabilidade de numerais por determinadas funções em PA e assim, demonstrar sua indefinibilidade pelas investigações e recursos lógico matemáticos expostos nos capítulos anteriores, acrescentando mais uma

83 Para uma visão crítica desta interpretação, ver (VIDAL-ROSSET, 2006).

camada as críticas da prova de Chaitin: tal como o conceito de verdade aritmética, não há como definir de maneira precisa o conceito algorítmico de informação em uma parte mínima da Aritmética.

Por meio destas investigações, podemos constatar que, considerando um procedimento mecânico e efetivamente computável de provabilidade de fórmulas em T, podemos ter algoritmos, Máquinas de Turing voltadas para implementação destes procedimentos. Observando que mais explicitamente em sentenças do tipo-Berry há recursões ao infinito, deixamos mais claro como estabelecer se isto seria uma constante dentro de funções nas quais podemos realizar diagonalizações, tais como sub(a, <y>, b), culminando na equivalência entre o Problema da Parada e a incompletude no sentido de, *se existe uma sentença que pode ser expressa e não é provável nem refutável em T, então não conseguimos determinar em T se o procedimento efetivamente computável que implemente a capturabilidade desta instanciação pára ou não, e vice-versa*. Este é um resultado interessante para buscarmos compreender o teorema da incompletude como um fenômeno intimamente associado às complicações e dificuldades dentro de sistemas formais com o mínimo de Aritmética que envolvem a capturabilidade parcial do transfinito por métodos finitistas de raciocínio, onde investigações futuras podem mostrar-se muito promissoras.

E através desta pesquisa, colateralmente podemos concluir que a realização de uma revisão teórica direcionada adequadamente a certos pontos pode trazer a tona certas conclusões que já haviam de alguma maneira sido exploradas na literatura – como no caso dos números de Berry e sua relação com o princípio de descrição mínima da complexidade algorítmica – cabendo ao pesquisador por vezes a função de buscar compreensão do texto, afastar-se e observar o quadro amplo (*big picture*) do que está envolvido no tema, reinterpretando e por vezes complementando empreendimentos anteriores a fim de maiores esclarecimentos do tema. Desta forma, o dito progresso há de se fazer presente no horizonte de possibilidades da área de investigação abordada.

6. BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, A. R. **St Paul's epistle to Titus**. In MARTIN, Robert L. (org.). The Paradox of the Liar, (Yale U.P.), pp. 16-28, 1970.

BAR-HILLEL, Yehoshua e CARNAP, R. **Semantic Information**, The British Journal for the Philosophy of Science, 4(14): pp. 147–157, 1953.

BEALL, J.. **Is Yablo's Paradox Non-Circular?**, Analysis 61: pp. 176-187, 2001.

BERTO, Francesco. **There's Something About Gödel: The Complete Guide to the Incompleteness Theorem**. Wiley-Blackwell, 2009.

BÓLYAI, János; KÁRTESZI, Ferenc (ed.) e SZÉNÁSSY, Barna. **Appendix, The Theory of Space**. Amsterdam; New York: North-Holland, 1987.

BOOLOS, George. **Gödel´s second incompleteness theorem explained in words of one syllable**. Mind, Vol. 103, January 1994, pp. 1 – 3, 1994.

___________. **A new proof of Gödel Incompleteness Theorem.** In Logic, Logic and Logic. Harvard University Press, pp. 383-388, 1998.

BOOLOS, George; BURGESS, John P.; JEFFREY, Richard C. **Computabilidade e Lógica**. tradução de César Mortari – Editora UNESP, São Paulo, 2012.

BULDT, Bernd. **The Scope of Gödel's First Incompleteness Theorem**. *Logica Universalis* 8 (3-4): pp. 499-552, 2014.

BURALI-FORTI, C. **A question on transfinite numbers**. In VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). From Frege to Gödel. Cambridge: Harvard University Press: pp. 105-111, 1897.

CAICEDO, Xavier. **La paradoja de Berry revisitada, o la indefinibilidad de la definibilidad y las limitaciones de los formalismos**. Lecturas Mathematicas, Vol. 14, pp. 37-48, 1993.

CALUDE, Cristian S. **Incompleteness and the Halting Problem**. *Studia Logica* 109 (5): pp. 1159-1169, 2021.

CALUDE, Cristian S.; JÜRGENSEN, Helmut. **Is complexity a source of incompleteness?**, Advances in Applied Mathematics, Volume 35, Issue 1: pp. 1-15, 2005.

CANTOR, G. **Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen**. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 77: pp. 258–262, 1874.

__________. **Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre**. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1: pp. 75–78, 1891.

CARNAP, R. **The Logical Syntax of Language**. Kegan Paul, Trench, Trubner & Co Ltd, 1937.

__________. **Letter to Dedekind**. In VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). From Frege to Gödel. Cambridge: Harvard University Press: pp. 113-117, 1899.

CHAITIN, Gregory J. **Information-theoretic limitations of formal systems**, J. of the ACM 21, 403–424, 1974.

_____________. **Randomness and mathematical proof**, Scientific American 232(5), pp. 47–52, 1975.

_____________. **Algorithmic information theory**, IBM Journal of Research and Development, vol. 21, pp. 350-359, 1976.

_____________. **Godel's theorem and information**, International Journal of Theoretical Physics, vol. 21, pp. 941-954, 1982.

_____________. **Incompleteness theorems for random reals**, Advances in Applied Mathematics, vol.8, pp. 119-146, 1987.

____________. **Information-Theoretic Incompleteness**. World Scientific, Singapore, 1992.

_____________. **The Berry paradox**. Complexity, 1(1), pp. 26–30, 1995.

CHALMERS, David J. **Why Isn't There More Progress in Philosophy?** Philosophy 90 (1): pp. 3-31, 2015.

CHENG, Ka Yue. **Some Infinitary Paradoxes and Undecidable Sentences in Peano Arithmetic**. pp. 1-10. 2016. URL = <https://arxiv.org/pdf/1604.03452.pdf>

CHURCH, Alonzo. **The Richard Paradox**. The American Mathematical Monthly Vol. 41, No. 6, pp. 356-361, 1934.

CIERLINSKI, C.; URBANIAK, R. **Gödelizing the Yablo Sequence**, Journal of Philosophical Logic 42: pp. 679-695, 2013.

COOK, Roy T. **The Yablo Paradox – An essay on circularity**. Oxford University Press, EUA, 2014.

COPI, I. M. **The Burali-Forti Paradox**. Philosophy of Science, 25(4): pp. 281–286, 1958.

COVER, T. M. e THOMAS, J. A. **Elements of Information Theory**, New York; Chichester: Wiley, 1991.

CURRY, Haskell. **The inconsistency of certain formal logics**, Journal of Symbolic Logic 7, pp. 115-117, 1942.

DAUBEN, Joseph. **Revolutions in Mathematics**. Oxford University Press, 1992.

DAVIS, Martin. **Why Gödel Didn't Have Church's Thesis**. Information and Control 54: pp. 3-24, 1982.

____________. **The Undecidable: Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions**. Dover Publications: New York, 2004.

DEAN, Walter. **Recursive Functions**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2021/entries/recursive-functions/>, 2020.

DEDEKIND, Richard. **The Nature and Meaning of Numbers**. Em 'Essays on the Theory of Numbers'. Dover Publications, New York, 1888.

DETLEFSEN, Michael. **Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism**. Reidel, 1986.

DE RISI, Vicenzo. ***Analysis Situs*****, the Foundations of Mathematics and a Geometry of Space**. Em M.R. Antognazza (ed.). The Oxford Handbook of Leibniz. Oxford, Oxford University Press: pp. 247-258, 2018.

FEFERMAN, S. **Predicativity.** Em SHAPIRO, S. (ed.), Oxford Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic. Oxford University Press, Oxford: pp. 590-624, 2005.

___________. **Lieber Herr Bernays!, Lieber Herr Gödel! Gödel on finitism, constructivity and Hilbert's program**. Dialectica 62 (2): pp.179-203, 2008.

FERREIRÓS, J. **On the relations between Georg Cantor and Richard Dedekind**. *Historia Mathematica*, *20(4)*, 1993.

___________. **Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics –** 2nd edition. Basel, Boston: Birkhäuser Verlag, 2007.

FLORIDI, L**. The Philosophy of Information,** Oxford University Press, 2011.

FRANZÉN, Torkel. **Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to its Use and Abuse**. A K Peters, 2005.

GAIFMAN, Haim. **Naming and Diagonalization, From Cantor to Gödel to Kleene**. Logic Journal of the IGPL, 14: pp. 709–728, 2006.

GÖDEL, Kurt. **On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems I**. In Collected Works I (1986), Clarendon Press, pp. 145–195, 1931a.

___________. **Acerca de proposições formalmente indecidíveis nos Principia Mathematica e sistemas associados**. Em LOURENÇO, Manuel (ed.). O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. Fundação Calouste Gulbenkian, 1979: pp. 245-290, 1931b.

___________. **Acerca de proposições indecidíveis em sistemas matemáticos formais**. Em LOURENÇO, Manuel (ed.). O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. Fundação Calouste Gulbenkian, 1979: pp. 291-358, 1934.

___________. **Lecture at Zilsel´s**. Em FEFERMAN, Solomon (ed.) Collected Works III. Oxford University Press, New York, 1993: pp. 87-113, 1938.

____________. **Some remarks on the undecidability results.** In GÖDEL, Kurt (1986). Collected Works II: Publications 1938-1974, com notas introdutórias por Solomon Feferman, Robert M. Solovay e Judson C. Webb. Oxford, England and New York, NY, USA: Oxford University Press, pp. 281-306, 1986.

GRÜNWALD, P.; VITÁNYI, Paul M.B. **Algorithmic Information Theory**. In ADRIAANS, P. and VAN BENTHEM, J. *Handbook of Philosophy of Information*. Elsevier, pp. 289-328, 2008.

HAACK, Susan. **Filosofia das Lógicas**. São Paulo. Tradução de Paulo César Mortari: UNESP, 2002.

HILBERT, David. **Mathematical Problems**. Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 8, pp. 437–479, 1902.

___________. **On the Foundations of Logic and Arithmetic**. Monist , Vol. 15, No. 3 (July, 1905), pp. 338-352, 1905.

___________. **On the Infinity**. Em VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). **From Frege to Gödel.** Cambridge: Harvard University Press, 1967: pp. 367-392, 1925.

___________. **Axiomatic thinking**. *Philosophia Mathematica* (1-2):1-12, 1970.

___________. **Foundations of Geometry**. 2º edition - Open Court, 1999.

___________. **David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902**, MAJER, Ulrich; HALLETT, Michael (eds.). Springer, New York, 2004.

___________. **Sobre o Infinito**. Traduzido em CARNIELLI, Walter; EPSTEIN, Richard L. Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da Matemática . São Paulo: Editora UNESP, pp. 75 -91, 2006.

HINTIKKA, Jaakko. **On Gödel**. Wadsworth Publishing Company, 2000.

INCURVATI, Luca. **On the Concept of Finitism**. Synthese 192 (8): 2413-2436, 2015.

HUNTER, Geoffrey. **What Do the Consistency Proofs for Non-Euclidean Geometries Prove?** Analysis, Vol. 40, No. 2, pp. 79-83, 1980.

IGNJANOVÍC, ALEKSANDAR. **Hilbert's program and the omega-rule**. Journal of Symbolic Logic 59 (1): pp. 322-343, 1994.

JAQUETTE, Dale. **Diagonalization in Logic and Mathematics**. In GABBAY, Dov M.; GUENTHNER, F.(eds.). Handbook of philosophical logic, 2º edition, (Volume 11). Dordrecht: Kluwer Academic Publishing: pp. 55-147, 2002.

____________. **The Logic of the Preface paradox**. Principia, 12(2), pp. 203–16. Published by NEL — Epistemology and Logic Research Group, Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil, 2008.

KETLAND, J. **Yablo's Paradox and ω-Inconsistency**, Synthese 145: pp. 295-302, 2005.

KIKUCHI, Makoto. **A Note on Boolos' Proof of the Incompleteness Theorem**. *Mathematical Logic Quarterly* 40 (4): pp. 528-532, 1994.

KIKUCHI, Makoto; KURAHASHI, Taishi; SAKAI, Hiroshi. **On proofs of the incompleteness theorems based on Berry's paradox by Vopěnka, Chaitin, and Boolos**. *Mathematical Logic Quarterly* 58 (4-5): pp. 307-316, 2012.

KIKUCHI, Makoto; KURAHASHI, Taishi. **Liar-type Paradoxes and the Incompleteness Phenomena**. *Journal of Philosophical Logic* 45 (4): pp. 381-398, 2015.

KURAHASHI, Taishi (2014). **Rosser-type undecidable sentences based on Yablo's paradox**, Journal of Philosophical Logic, 43(5), pp. 999-1017, 2014.

KLEENE, Stephen Cole. **Introduction to Metamathematics**. North Holland, 1952.

KREISEL, G.. **Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof**. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 14–21 August 1958, Cambridge at the University Press, pp. 289–299, 1960.

LEWIS, Florence P. **History of the Parallel Postulate**.The American Mathematical Monthly, Vol. 27, No. 1, pp. 16-23, 1920.

LI, Ming; VITANYI, Paul M. B. An **Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications (2ªed.)**. Springer Publishing Company, 2006.

MANCOSU, Paolo. **Abstraction and Infinity**. Oxford: Oxford University Press, 2016.

MEYER, Robert K.; ROUTLEY, Richard & DUNN, J. Michael. **Curry's Paradox**. Analysis 39 (3): pp.124-128, 1979.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R. **A Prova de Gödel**. Tradução de Gita K. Guinsburg, São Paulo: Editora Perspectiva, 2ª ed. 2001.

PARSONS, Charles. **Finitism and intuitive knowledge**. Em Matthias Schirn (Ed.), The Philosophy of Mathematics Today. Oxford: Oxford University Press: pp. 249–270, 1998.

PEANO, Giuseppe. **The principles of arithmetic, presented by a new method**. em VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). From Frege to Gödel. Cambridge: Harvard University Press. pp. 83-97, 1889.

___________. **Supplement to 'On the Cantor-Bernstein Theorem'**. Em KENNEDY, Rupert, C. (ed.). Select Works of Giuseppe Peano. University of Toronto Press, Toronto, 1973: pp. 206-218, 1906.

PELEGRIN, Jaroslav. **Diagonal Arguments**. Acta Universitatis Carolinae, Philosophica et Historica 2, Miscallanea Logica: pp. 33–43, 2017.

POINCARÉ, H. **Les Mathématiques et la Logique**. Revue de Métaphysique et de Morale, 14: pp.294-317, 1906.

____________. **Papers on Topology: Analysis Situs and it´s Five Supplements**. Tradução de John Stillwell: History of Mathematics vol. 37, American Mathematical Society, 2010.

PRIEST, G. **Yablo's Paradox**, Analysis 57: pp. 236-242, 1997.

RAATIKAINEN, Panu. **On Interpreting Chaitin's Theorem**. Journal of Philosophical Logic 27: pp. 269-286, 1998.

____________. **On the Philosophical Relevance of Gödel's Incompleteness Theorems**. Revue Internationale de Philosophie, 59: 513–534, 2005.

RESNIK, Michael D. **The Frege-Hilbert Controversy**. Philosophy and Phenomenological Research, 34 (3), pp. 386-403, 1974.

RICHARD, Jules. **The principles of mathematics and the problem of sets**. Em VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). From Frege to Gödel. Cambridge: Harvard University Press. pp. 142-144, 1905.

ROSENFELD, B. A. **A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space**. Translated by Abe Shenitzer. New York (Springer-Verlag), 1988.

ROSSER, Barkley. **Extensions of some theorems of Gödel and Church**. Journal of Symbolic Logic 1 (3): pp. 87-91, 1936.

RUSSELL, B. **Letter to Frege**. Em VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). From Frege to Gödel. Cambridge: Harvard University Press, 1967: pp. 124-125, 1902.

____________. **Principles of Mathematics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

_____________. **On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types**. Proceedings of the London Mathematical Society 4 (14): pp. 29-5, 1906..

_____________. **Mathematical logic as based on a theory of types**. *American Journal of Mathematics*, 30: 222-262. Republicado em VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). From Frege to Gödel. Cambridge: Harvard University Press. pp. 150-182, 1908.

RUSSELL, B. e WHITEHEAD, Alfred N. **Principia Mathematica (volume 1, 2ª ed.)**, Cambridge: Cambridge University Press, 1927.

SHANNON, C. A **Mathematical Theory of Communication**, Bell System Technical Journal, 27: pp. 379–423, 1948.

_____________. **Collected Papers**, por N. J. A. Sloane and A. D. Wyner (eds.), New York: IEEE Press, 1993.

SHAPIRO, Lionel; BEALL, J.C **Curry's Paradox**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta (ed.). <https://plato.stanford.edu/archives/win2021/entries/curry-paradox/>, 2017.

SIEG, Wilfried. **Only two letters: The correspondence between Herbrand and Gödel**. Bulletin of Symbolic Logic 11 (2):172-184, 2005.

SKOLEM, Thoralf. **The foundations of elementary arithmetic established my means of the recursive mode of thought, without the use of apparent variables ranging over infinite domains**. Em VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). From Frege to Gödel. Cambridge: Harvard University Press. pp. 302-333, 1923.

SMITH, Peter. **An Introduction to Gödel's Theorems**. Cambridge University Press, 2013.

SMORYNSKI, Craig. **The incompleteness theorems**. Em Jon Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic. North-Holland. pp. 821- 865, 1977.

SMULLYAN, Raymond M. **Diagonalization and self-reference**. Clarendon Press, 1994.

SORENSEN, R. **Yablo's paradox and kindred infinite liars.** Mind 107: pp. 137-55, 1998.

SOLOMONOFF, Ray. **The Discovery of Algorithmic Probability**, Journal of Computer and System Sciences, Vol. 55, No. 1, pp. 73-88, 1997.

TAIT, William W. **Finitism**. Journal of Philosophy, 78: pp. 24–546, 1981.

____________. **Remarks on finitism**. In Wilfried Sieg, Richard Sommer, and Carolyn Talcott (eds.), Reflections on the Foundations of Mathematics. Essays in Honor of Solomon Feferman, Lecture Notes in Logic 15. Association for Symbolic Logic and A K Peters, pp. 410-419, 2002.

___________. **Gödel on intuition and on Hilbert's finitism**. Em FEFERMAN, Solomon; PARSONS, Charles; SIMPSON, Stephen G. (eds.), Kurt Gödel: Essays for His Centennial. Association for Symbolic Logic, 2010.

___________. **Primitive Recursive Arithmetic and its Role in the Foundations of Arithmetic: Historical and Philosophical Reflections**. Em DYBJER, Peter; LINDSTROM, Sten; PALMGREN, Erik e SUNDHOLM, Göran (eds.) *Epistemology versus ontology. Essays on the philosophy and foundations of mathematics in honour of Per Martin-Löf*. Based on the conference, "Philosophy and foundations of mathematics: Epistemological and ontological aspects", Uppsala, Sweden, May 5–8, 2009; pp. 161-180, 2012.

TURING, Alan. **On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem**. P*roceedings of the London Mathematical Society* 42 (1): pp. 230-265, 1936.

URQHART, Alasdair. **Russell's Zigzag Path to the Ramified Theory of Types**. Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies 8 (1): pp. 82-91, 1988.

WILLE, Matthias. **Metamathematics in Transition**. History and Philosophy of Logic, 32:4, 333-358, 2011.

VAN HEIJENOORT, Jean (ed.). **From Frege to Gödel**. Cambridge: Harvard University Press, 1967.

ZACH, Richard. **Hilbert's Finitism: Historical, Philosophical, and Metamathematical Perspectives**. PhD Dissertation, University of California, Berkeley, 2001.

___________.**Hilbert's Program**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy,EdwardN.Zalta(ed.),URL=<https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/hilbert-program/>, 2003.

___________. **Hilbert's program then and now**. Em JACQUETTE, Dale (ed.). Philosophy of Logic. Amsterdam: North Holland. pp. 411–447, 2007.

VAN LAMBALGEN, M. **Algorithmic information theory**, J. Symbolic Logic 54, pp. 1389–1400, 1989.

VIDAL-ROSSET, Joseph. **Does Gödel's Incompleteness Theorem Prove that Truth Transcends Proof?** In BENTHEM, Johan van; HEINZMAN, Gerhard; REBUSHI, M. & VISSER, H. (eds.), The Age of Alternative Logics. Springer. pp. 51–73, 2006.

YABLO, S. **Paradox without Self-Reference**, Analysis 53: pp. 251-252, 1993.

ZALTA, Edward N., **Frege's Theorem and Foundations for Arithmetic**, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL =<https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/frege-theorem/>, 1998.