UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE FÍSICA

ANOMALIAS DE TRAÇO E RADIAÇÃO DE HAWKING

MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO

Daniel Alf Drehmer

Santa Maria, RS, Brasil
2007

ANOMALIAS DE TRAÇO E RADIAÇÃO DE HAWKING

por

Daniel Alf Drehmer

Monografia apresentada ao curso de graduação em física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Bacharel em Física**

Orientador: Vilson Tonin Zanchin

Santa Maria, RS, Brasil
2007

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas qua colaboraram para a realização deste trabalho, e em particular ao meu orientador prof. Vilson Tonin Zanchin, por toda sua dedicação. A meus colegas Alex dos Santos Miranda, Gustavo Cipolat Colvero e em especial a Jaqueline Morgan.

RESUMO

Monografia de Graduação
Curso de Física
Universidade Federal de Santa Maria

ANOMALIAS DE TRAÇO E RADIAÇÃO DE HAWKING
AUTOR: DANIEL ALF DREHMER
ORIENTADOR: VILSON TONIN ZANCHIN
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 08 de março de 2007

Neste trabalho obtemos a forma geral do tensor de energia-momento anômalo para buracos negros estáticos com simetria esférica, para os três estados de vácuo quântico de interesse dentro da física dos buracos negros. Posteriormente particularizamos o resultado obtido para os buracos negros de Schwarzschild e Reissner-Nordström, para os quais conseguimos determinar os valores explícitos do tensor de energia-momento por comparação de nossa solução geral com os resultados da teoria quântica de campos.

Palavras-chave: Buracos negros; anomalias de traço; tensor de energia-momento; vácuo; radiação de Hawking.

ABSTRACT

In the present work we obtain the general form for the anomalous stress-energy tensor for static black holes with spherical symmetry, for the three quantum vacuum states of interest in black holes physics. The particular cases of Schwarzschild and Reissner-Nordström black holes are then analyzed, for which we determine the explicit values of the stress-energy tensor by comparison of our general solution to the results of the quantum field theory.

Key-words: Black holes; trace anomalies; stress tensor; vacuum; Hawking radiation.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 4

2 REVISÃO 7

2.1 Transformação e invariância conforme em relatividade restrita 7

2.1.1 Transformação conforme na teoria de campos 10

2.1.2 Transformação de Weyl: As transformações conformes em espaços-tempos curvos 13

2.2 Anomalias de traço e curvatura 20

2.3 Anomalias de traço e radiação de Hawking 22

2.4 Os estados de vácuo quânticos 23

3 O Tensor de energia-momento e as anomalias 25

3.1 Um espaço-tempo suficientemente geral: Características geométricas . . . 25

3.2 Solução geral da equação de conservação da energia 27

3.2.1 O caso bidimensional 30

3.3 Particularização dos resultados 32

3.3.1 O buraco negro de Schwarzschild 32

3.3.1.1 Caso bidimensional. 33

3.3.1.2 Caso quadridimensional 37

3.3.2 O buraco negro de Reissner-Nordström 41

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 45

4.1 Resumo dos resultados obtidos 45

4.2 Possibilidades de futuros trabalhos. 46

4.3 Conclusão 47

Apêndice A – Sistemas de unidades **48**

A.1 Unidades Geometrizadas 48

A.2 Unidades de Planck 50

Apêndice B – O tensor de energia-momento **52**

Referências **54**

1 INTRODUÇÃO

A teoria da relatividade geral, apresentada em sua formulação definitiva em 1915 por Albert Einstein, pode ser resumida pela afirmação de que o espaço-tempo tem suas propriedades totalmente definidas pelo conteúdo de matéria e energia, e vice versa: as propriedades do espaço-tempo determinam a forma como a matéria e a energia se organizam tanto no tempo quanto no espaço. As propriedades locais do espaço-tempo são totalmente determinadas por sua geometria, sendo esta totalmente caracterizada por um objeto matemático denominado tensor métrico. As principais equações matemáticas da relatividade geral são as equações de Einstein, que em sua forma compacta são dadas por

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

onde G é a constante gravitacional e c é a velocidade da luz. O lado esquerdo desta equação está associado com a geometria do espaço-tempo, enquanto que o lado direito está associado com a matéria e energia constituintes do universo.

Uma das previsões mais interessantes da relatividade geral é a existência de buracos negros. Do ponto de vista clássico da relatividade geral, estes objetos são regiões do espaço-tempo que agregam campos gravitacionais tão intensos que nenhum tipo de partícula ou radiação poderia escapar de seu interior. No final da década de sessenta HAWKING e PENROSE (1969), mostraram que após sua formação, estes objetos seriam eternamente indestrutíveis. HAWKING (1971), também conseguiu mostrar que a área do horizonte de eventos de um buraco negro nunca diminui, característica esta, que imediatamente nos faz lembrar do conceito termodinâmico de entropia. Contudo, até então esta semelhança aparentemente não teria nenhuma justificativa física, sendo considerada apenas uma grande coincidência. Porém o próprio HAWKING em (1974), ao estudar a quantização dos campos no *background* de uma estrela submetida ao processo de colapso gravitacional, mostrou que buracos negros podem decair, emitindo radiação térmica com uma temperatura característica dada por

$$T = \frac{\hbar}{2\pi c k_B}\kappa,$$

onde $\hbar$ é a constante de Dirac, k_B é a constante de Boltzmann e κ é a gravidade superficial no horizonte de eventos, que para um buraco negro com massa M é dada por $\kappa = \frac{c^4}{4GM}$. Desta forma Hawking conseguiu associar uma entropia aos buracos negros dada por

$$S_{bn} = \frac{c^3 k_B}{4\hbar G}A$$

onde A é área do horizonte de eventos do buraco negro.

A radiação de Hawking, ou seja, o processo de evaporação de buracos negros é considerada uma das maiores descobertas da física teórica das últimas décadas, uma vez que ao contrário do previsto pela relatividade geral clássica, buracos negros poderiam decair até um possível desaparecimento total.

Apesar de terem se passado quatro décadas desde os resultados iniciais de HAWKING em (1974) e (1975), com muitos estudos a respeito do assunto, detalhes da evolução e morte dos buracos negros ainda não são bem conhecidos. Em termos formais, a evolução de um buraco negro no espaço-tempo é descrita pelas flutuações quânticas dos campos da matéria, que é descrita por uma ação efetiva. Desta forma, dando origem a uma teoria semi-clássica, na qual a métrica dos espaço-tempo é determinada pelas equações clássicas de Einstein. Por outro lado, de acordo com BIRREL (1977), os campos quânticos seguem sua dinâmica ditada pelas respectivas ações quânticas no espaço-tempo curvo, desta forma, considera-se a evolução dos campos quânticos segundo a dinâmica obtida via acoplamento mínimo com o campo gravitacional clássico. Ou seja, os campos quânticos satisfazem equações no espaço curvo, onde a curvatura do espaço-tempo é representada pelo campo gravitacional clássico. E a dinâmica do campo gravitacional, descrita pela métrica, é determinada pelas equações clássicas de Einstein, tendo como fonte o tensor de energia-momento dos respectivos campos quânticos, como sugerido por FULLING (1976).

O campo gravitacional encurva o espaço-tempo onde os campos da matéria evoluem, e estes campos por sua vez interagem com o campo gravitacional através do momento e da energia que carregam, representados pelo tensor de energia-momento do referido campo. Esta é a estrutura básica da teoria de campos no espaço curvo, uma abordagem semiclássica onde somente os campos da matéria são quantizados, enquanto o campo gravitacional ainda é descrito classicamente de acordo com a teoria da relatividade geral.

Uma das características fundamentais da teoria de campos dentro do modelo padrão da física de partículas elementares, é que, em geral estes modelos são invariantes frente a transformações conformes. Esta característica aparece explicitamente no tensor de energia-momento do campo considerado, o qual tem traço identicamente nulo. Ocorre que a relatividade geral não é invariante frente a transformações conformes, o que pode gerar inconsistências em algumas teorias semi-clássicas de campos. Também em muitos casos, ocorre que a teoria de campos em espaços curvos renormalizada, deixa de ser invariante frente estas transformações, dando origem ao que se chama de anomalia de Weyl, ou anomalia de traço, a qual se manifesta nas propriedades do tensor de energia-momento, que adquire traço no processo de renormalização. Do ponto de vista da física de buracos negros, estas anomalias estão relacionadas a fenômenos quânticos, que ocorrem no processo de colapso gravitacional, como por exemplo a produção e aniquilação de partículas e o efeito Hawking.

Usaremos na realização deste trabalho o sistema de unidades de Planck, descrito no apêndice A. No qual a velocidade da luz (c) a constante de gravitação universal(G), a constante de Dirac ($\hbar$) e a constante de Boltzmann (k_B) assumem valor unitário, $c = G = \hbar = k_B = 1$.

2 REVISÃO

2.1 Transformação e invariância conforme em relatividade restrita

Como mencionado na seção anterior, uma das características fundamentais de uma teoria de campos dentro do modelo padrão da física de partículas elementares é a invariância destes modelos frente a transformações conformes. Com o intuito de tornar claro o conceito de invariância conforme nas teorias físicas, apresentamos nesta seção uma revisão sobre tais transformações no contexto da relatividade restrita, definindo-as e apresentando suas principais características e aplicações que são de interesse no contexto deste trabalho.

Consideremos um espaço $\Re$ de dimensão n, com geometria descrita pela métrica $g_{\mu\nu}$. O elemento de linha neste espaço é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{2.1}$$

Sob uma transformação geral das coordenadas, $x \rightarrow x'$, a métrica se transforma por

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x). \tag{2.2}$$

De acordo com a definição dada por GINSPARG (1989) e DI FRANCESCO (1997), o grupo conforme é formado pelo conjunto de transformações de coordenadas que mantém o tensor métrico invariante, a não ser por uma mudança de escala,

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\alpha\beta}(x). \tag{2.3}$$

Ou seja, as transformações conformes são localmente equivalentes a pseudo-rotações e dilatações.

Como já mencionado, o conjunto de todas as transformações conformes, forma um grupo algébrico, sendo que um dos subgrupos deste é o grupo de Poincaré, que é formado pelo produto das transformações de Lorentz e das translações no espaço plano, o qual corresponde ao caso especial $\Lambda(x) = 1$. Uma das características das transformações conformes é que, apesar da dilatação local, elas preservam o ângulo formado entre duas curvas que se cruzam em um determinado ponto.

Os geradores infinitesimais do grupo conforme podem ser obtidos considerando-se a seguinte transformação de coordenadas,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu, \tag{2.4}$$

onde ϵ^μ é uma variação infinitesimal sobre x^μ. Diante desta transformação a métrica varia por

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x) + \left(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu\right). \tag{2.5}$$

Impondo que esta transformação seja conforme, de acordo com a Eq. (2.3), devemos ter

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x) g_{\mu\nu}. \tag{2.6}$$

Tomando o traço dos dois lados dessa equação obtemos a função $f(x)$ em termos dos ϵ^μ,

$$f(x) = \frac{2}{n} \partial_\rho \epsilon^\rho. \tag{2.7}$$

Esse resultado, juntamente com a Eq. (2.6) produz

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{n} \left(\partial \cdot \epsilon\right) g_{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Assim, a transformação conforme das coordenadas, dada por (2.4) faz a métrica variar por,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x) + \frac{2}{n} \left(\partial \cdot \epsilon\right) g_{\mu\nu}(x). \tag{2.9}$$

De onde, comparando com a definição de transformação conforme dada pela Eq. (2.3), obtém-se

$$\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{n} \left(\partial \cdot \epsilon\right). \tag{2.10}$$

Para continuar, podemos assumir por uma questão de simplicidade e sem perda de generalidade, que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu} = diag(1, 1, ..., 1)$. Substituindo a nova métrica em (2.8) e derivando mais uma vez, temos

$$\partial_\rho \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\rho \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{n} \partial_\rho \left(\partial \cdot \epsilon\right) \eta_{\mu\nu}. \tag{2.11}$$

Construindo uma relação análoga a esta última através de uma permutação de índices, e tomando uma combinação linear adequada obtemos a relação

$$2\partial_\mu \partial_\rho \epsilon_\nu = \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu f - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f. \tag{2.12}$$

Contraindo ambos os lados com $\eta^{\mu\nu}$ e derivando mais uma vez encontramos

$$2\partial_\nu \left(\partial^2 \epsilon_\mu\right) = (2-n)\, \partial_\mu \partial_\nu f. \tag{2.13}$$

Por outro lado, aplicando ∂^2 na equação (2.8) temos

$$\partial^2 \left(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu\right) = \eta_{\mu\nu} \partial^2 f \tag{2.14}$$

Das duas últimas equações obtemos a seguinte identidade

$$\left[\eta_{\mu\nu} \Box + (n-2) \partial_\mu \partial_\nu\right] (\partial \cdot \epsilon) = 0. \tag{2.15}$$

Desta equação podemos ver que a derivada terceira de ϵ se anula e, por conseguinte, que a derivada segunda é uma constante. Daí concluímos que a dependência de ϵ com x deve ser através de no máximo uma função quadrática.

Assim, as transformações conformes infinitesimais possíveis são de três diferentes classes, conforme listamos a seguir.

a) Se ϵ não depende de x, temos que

$$\epsilon^\mu = a^\mu, \tag{2.16}$$

que representa uma translação arbitrária independente das coordenadas.

b) Para o caso em que ϵ possui dependência linear com x, existem duas possibilidades:

(i)

$$\epsilon^\mu = \omega^\mu_\nu x^\mu, \tag{2.17}$$

que representa uma rotação, sendo $\omega^{\mu\nu}$ antissimétrico; e

(ii)

$$\epsilon^\mu = \lambda x^\mu, \tag{2.18}$$

que representa dilatações.

c) Por último, em caso de dependência quadrática de ϵ com x, temos que

$$\epsilon^{\mu} = b^{\mu}x^2 - 2x^{\mu}b \cdot x \,, \tag{2.19}$$

a qual é denominada transformação conforme especial (SCT).

As correspondentes formas finitas destas transformações são as seguintes:

$$x \to x' = x + a, \tag{2.20}$$

e

$$x \to x' = \mathcal{R}x, \tag{2.21}$$

que são respectivamente translações e rotações. Estas duas são as geradoras do grupo de Poincaré, para as quais $\Lambda(x) = 1$.

As dilatações são dadas por,

$$x \to x' = \lambda x, \tag{2.22}$$

para as quais temos $\Lambda(x) = \lambda^{-2}$.

E as SCT, cuja transformação das coordenadas é

$$x \to x' = \frac{x + bx^2}{1 + 2b \cdot x + b^2x^2} \,, \tag{2.23}$$

para a qual o fator de escala é $\Lambda(x) = \left(1 + 2b \cdot x + b^2x^2\right)^2$.

Vale lembrar que esta última forma corresponde a transformação mais geral possível que preservam localmente os cones de luz. Por isso, têm algum interesse no contexto da teoria clássica dos campos, como mostrado por SOPER, (1975).

2.1.1 Transformação conforme na teoria de campos

Dentro da teoria de campos clássica dizemos que esta possui simetria conforme se a ação do referido campo é invariante frente a transformações conformes das coordenadas do espaço tempo de Minkoswski apresentadas na seção anterior.

A ação de um campo escalar ϕ pode ser definida por

$$S = \frac{1}{2}\int d^nx\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi \,. \tag{2.24}$$

Nessa relação estamos usando unidades de Planck, onde a constante de Dirac foi normalizada á unidade, $\hbar = 1$ (ver Apêndice A).

Se consideramos uma transformação infinitesimal arbitrária de coordenadas, como a dada por (2.4), temos que a variação produzida por esta transformação sobre a ação é

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^n x T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu \\ &= \frac{1}{2} \int d^n x T^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu \right) . \end{aligned} \tag{2.25}$$

Nesta equação $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento do campo considerado, que assumimos ser simétrico pela permutação de μ e ν.

Usando as equações (2.6) e (2.7) podemos escrever a variação da ação frente a transformação conforme das coordenadas e do campo como

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2} \int d^n x T^{\mu\nu} \frac{2}{n} \left(\partial \cdot \epsilon \right) g_{\mu\nu} \, , \\ &= \frac{1}{n} \int d^n x T^\mu_\mu \left(\partial \cdot \epsilon \right) . \end{aligned} \tag{2.26}$$

Assim, para que a ação seja invariante frente a transformações conformes e, por conseqüência, a teoria de campos considerada possua simetria conforme, é necessário que o tensor de energia-momento do campo considerado tenha traço identicamente nulo.

O tensor de energia-momento é classicamente definido pela relação

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \, . \tag{2.27}$$

Ou seja, ele representa a reação do campo em relação à variação da métrica. No caso do campo escalar, cuja ação é dada por (2.24) , resulta

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\rho \phi \partial_\rho \phi . . \tag{2.28}$$

Como discutido acima, o tensor de energia-momento deve satisfazer a exigência de ter traço nulo,

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu_\mu = 0 \, , \tag{2.29}$$

o que é verdade para o campo escalar somente para $n = 2$.

Usando a equação do movimento para ϕ, vemos que $T_{\mu\nu}$ também respeita a princípio de conservação da energia

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \partial_\nu \phi \Box \phi = 0 \, , \tag{2.30}$$

onde $\Box$ é o operador de Laplace-Beltrami, que ao ser aplicado sobre o campo escalar ϕ, satisfaz as identidades

$$\Box\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi\right) = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi. \tag{2.31}$$

No contexto da teoria quântica de campos, uma expressão análoga a (2.28) para o tensor de energia-momento de um campo escalar ϕ, evoluindo em um *background* clássico é a seguinte

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta Z}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{2.32}$$

onde Z é o funcional do estado de vácuo, definido por

$$Z = \int [d\phi]\exp\left(\frac{i}{2}\int d^n x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right). \tag{2.33}$$

Como o campo escalar ϕ não varia frente a transformações conformes, temos que $[d\phi]$ também permanece invariante. Dessa forma, a expressão semiclássica para o valor esperado do tensor de energia-momento é dada por

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle = \langle\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\rho\phi\partial_\rho\phi\rangle. \tag{2.34}$$

Uma vez que estamos considerando que o espaço-tempo curvo de *background* é clássico, esperamos que valham as seguintes relações

$$g^{\mu\nu}\langle T_{\mu\nu}\rangle = \langle g^{\mu\nu}T_{\mu\mu}\rangle = 0, \tag{2.35}$$

e

$$\nabla^\mu\langle T_{\mu\nu}\rangle = \langle\nabla^\mu T_{\mu\nu}\rangle = \langle\partial_\nu\phi\Box\phi\rangle. \tag{2.36}$$

Não podemos afirmar que esta última equação é identicamente nula, pois não podemos usar a equação de movimento clássica em um tratamento quântico. Porém, não há motivo que nos faça concluir que o tensor de energia-momento não seja conservado quando consideramos fenômenos quânticos.

Com base nas hipóteses acima, podemos chegar a uma conclusão a respeito de a equação (2.36) anular-se ou não. Para isso, multiplicamos o campo escalar ϕ pelo fator $(-g)^{\frac{1}{4}}\phi$, definindo um novo campo Φ,

$$\Phi = (-g)^{\frac{1}{4}}\phi. \tag{2.37}$$

Com esta alteração, a ação para este campo é da forma (2.24), que é conformalmente invariante, e o tensor de energia-momento é da forma (2.28), que respeita o princípio de conservação da energia.

A transformação conforme para o novo campo Φ pode ser escrita na forma

$$\tilde{\Phi} = e^{\alpha}\Phi. \tag{2.38}$$

onde α é uma função característica para cada tipo de campo. Porém, agora na expressão do funcional do estado de vácuo, o termo $[d\Phi]$ não é mais invariante frente a transformação conforme. De acordo com Fujikawa (1980, apud ALVES e BARCELOS-NETO (2004)), sua variação é dada por

$$[d\tilde{\Phi}] = \exp\left(i\int d^n x\sqrt{-g}\alpha(x)A(x)\right)[d\Phi]\,, \tag{2.39}$$

onde $A(x)$ é uma quantidade divergente que pode ser regularizada.

Uma conseqüência da troca de ϕ por Φ é que o tensor de energia-momento conformalmente transformado $\tilde{T}_{\mu\nu}$ associado ao novo campo, obtido a partir do funcional de vácuo, possui traço não nulo. Para o caso bidimensonal o valor esperado do tensor de energia-momento é dado por ALVES e BARCELOS-NETO (2004), como sendo

$$\langle \tilde{T}_{\mu\nu}\rangle = \langle T_{\mu\nu}\rangle - \frac{1}{48\pi}g_{\mu\nu}\,R, \tag{2.40}$$

onde $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ é o tensor dado por (2.34), e o termo $\frac{1}{48\pi}g_{\mu\nu}\,R$ é a anomalia que surge da regularização da função $A(x)$.

2.1.2 Transformação de Weyl: As transformações conformes em espaços-tempos curvos

No contexto da teoria da relatividade geral as transformações conformes foram inicialmente consideradas por WEYL (1952). Agora vamos definir estas transformações e analisar o comportamento dos invariantes geométricos do espaço-tempo e de certas equações de interesse físico frente as mesmas.

Consideremos um espaço-tempo curvo n-dimensional, com geometria definida pela métrica $g_{\alpha\beta}$, e seja Ω uma função homogênea e estritamente positiva das coordenadas.

Nestas condições temos que a métrica

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2 g_{\alpha\beta}, \tag{2.41}$$

é obtida a partir de $g_{\alpha\beta}$ através de uma transformação conforme da métrica (veja-se também a Eq. (2.3)). Como a métrica do espaço-tempo tem inversa, segue de (2.41) a relação entre as métricas inversas

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = \Omega^{-2} g^{\alpha\beta}. \tag{2.42}$$

Destas relações temos

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma} = \Omega^{-2} g^{\alpha\beta}\Omega^2 g_{\beta\gamma} = g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}\,, \tag{2.43}$$

conforme o esperado.

O próximo passo consiste em obter a relação entre os operadores derivada, associados com as duas métricas. Para esse fim, considere-se um campo vetorial ω_β. Então, em qualquer ponto do espaço-tempo a diferença entre $\nabla_\alpha\omega_\beta$ e $\tilde{\nabla}_\alpha\omega_\beta$ depende apenas do valor do campo vetorial neste ponto, e portanto, pode ser escrita como uma combinação linear dos mesmos. Ou seja,

$$\nabla_\alpha\omega_\beta - \tilde{\nabla}_\alpha\omega_\beta = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\omega_\gamma\,, \tag{2.44}$$

onde os coeficientes $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ podem ser funções do ponto e são determinados a partir das propriedades da derivada covariante, conforme vemos a seguir.

Uma vez que, para uma dada métrica $\tilde{g}_{\beta\gamma}$ existe um, e somente um, operador derivada $\tilde{\nabla}_\alpha$ que satisfaz a equação

$$\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{g}_{\beta\gamma} = 0, \tag{2.45}$$

segue a identidade

$$0 = \tilde{\nabla}_\alpha\tilde{g}_{\beta\gamma} = \nabla_\alpha\tilde{g}_{\beta\gamma} - C^{\epsilon}_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\epsilon\gamma} - C^{\epsilon}_{\alpha\gamma}\tilde{g}_{\beta\epsilon}\,. \tag{2.46}$$

Ou seja,

$$\nabla_\alpha\tilde{g}_{\beta\gamma} = C_{\gamma\alpha\beta} + C_{\beta\alpha\gamma}. \tag{2.47}$$

Permutando os índices, podemos escrever

$$\nabla_\beta\tilde{g}_{\alpha\gamma} = C_{\gamma\beta\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma}, \tag{2.48}$$

e

$$\nabla_\gamma \tilde{g}_{\alpha\beta} = C_{\beta\gamma\alpha} + C_{\alpha\gamma\beta}. \tag{2.49}$$

Somando as duas primeiras dentre as relações (2.47), (2.48) e (2.49), e subtraindo a terceira, temos

$$C_{\gamma\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha \tilde{g}_{\beta\gamma} + \nabla_\beta \tilde{g}_{\alpha\gamma} - \nabla_\gamma \tilde{g}_{\alpha\beta}\right), \tag{2.50}$$

ou ainda,

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\gamma\epsilon}\left(\nabla_\alpha \tilde{g}_{\beta\epsilon} + \nabla_\beta \tilde{g}_{\alpha\epsilon} - \nabla_\epsilon \tilde{g}_{\alpha\beta}\right). \tag{2.51}$$

Note-se também que vale a relação

$$\nabla_\alpha \tilde{g}_{\beta\gamma} = \nabla_\alpha\left(\Omega^2 g_{\beta\gamma}\right) = 2\Omega g_{\beta\gamma}\nabla_\alpha\Omega, \tag{2.52}$$

e, então, podemos escrever a equação (2.51) como

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = \Omega^{-1} g^{\gamma\epsilon}\left(g_{\beta\epsilon}\nabla_\alpha\Omega + g_{\alpha\epsilon}\nabla_\beta\Omega - g_{\alpha\beta}\nabla_\epsilon\Omega\right), \tag{2.53}$$

Além disso, lembrando a identidade $\Omega^{-1}\nabla_\alpha\Omega = \nabla_\alpha \ln\Omega$, obtemos finalmente

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = \delta^\gamma_\beta \nabla_\alpha \ln\Omega + \delta^\gamma_\alpha \nabla_\beta \ln\Omega - g_{\alpha\beta} g^{\gamma\epsilon}\nabla_\epsilon \ln\Omega. \tag{2.54}$$

Assim, a relação entre os operadores derivada associados com a métrica original $g_{\alpha\beta}$ e com a métrica conformalmente transformada é dada por (2.44), cujos coeficientes $C^\gamma_{\alpha\beta}$ são definidos conforme a relação (2.54).

Podemos usar a equação (2.44) para comparar as geodésicas em relação à ∇_α com as geodésicas em relação à $\tilde{\nabla}_\alpha$. Consideremos para isso um vetor v^α tangente a uma geodésica *afim* parametrizada em relação a ∇_α. Então, a seguinte relação deve ser satisfeita

$$v^\alpha \nabla_\alpha v^\beta = 0. \tag{2.55}$$

Em relação ao operador $\tilde{\nabla}_\alpha$, usando (2.44) e (2.54), temos

$$\begin{aligned} v^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha v^\beta &= v^\alpha \nabla_\alpha v^\beta + v^\alpha C^\beta_{\alpha\gamma} v^\gamma\,, \\ &= v^\alpha\left(2\delta^\beta{}_{(\alpha}\nabla_{\gamma)} \ln\Omega - g_{\alpha\gamma} g^{\beta\epsilon}\nabla_\epsilon \ln\Omega\right) v^\gamma\,, \\ &= 2 v^\beta v^\gamma \nabla_\gamma \ln\Omega - (g_{\alpha\gamma} v^\alpha v^\gamma) g^{\beta\epsilon}\nabla_\epsilon \ln\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.56}$$

onde vemos que, em geral, as trajetórias geodésicas em relação a ∇_α não são trajetórias geodésicas em relação a $\tilde{\nabla}_\alpha$. Porém, se consideramos geodésicas nulas, para as quais

$g_{\alpha\gamma}v^\alpha v^\gamma = 0$, a equação anterior fica

$$v^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha v^\beta = 2v^\beta v^\gamma \nabla_\gamma \ln \Omega = \alpha v^\beta, \tag{2.57}$$

que é justamente a equação para uma geodésica não *afim* parametrizada. Assim, as geodésicas nulas em relação a $\tilde{\nabla}_\alpha$ também são geodésicas nulas em relação a ∇_α, ou seja, geodésicas nulas são conformalmente invariantes.

Vamos agora analisar o comportamento do tensor de Riemann frente a uma transformação conforme da métrica. A relação entre o tensor de Riemann $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon$ associado ao operador $\tilde{\nabla}_\alpha$ e o tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon$ associado com o operador ∇_α é dada por

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon - 2\nabla_{[\alpha}C^\epsilon{}_{\beta]\gamma} + 2C^\eta{}_{\gamma[\alpha}C^\epsilon{}_{\beta]\eta}, \tag{2.58}$$

onde

$$\nabla_{[\alpha}C^\epsilon{}_{\beta]\gamma} = \nabla_\alpha C^\epsilon{}_{\beta\gamma} - \nabla_\beta C^\epsilon{}_{\alpha\gamma}. \tag{2.59}$$

Substituindo os coeficientes $C^\epsilon_{\alpha\gamma}$ a partir da Eq. (2.54), podemos escrever a relação explícita entre os tensores de Riemann associados com a métrica original e a métrica conformalmente transformada, resultando

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon &= R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon + 2\delta^\epsilon{}_{[\alpha}\nabla_{\beta]}\nabla_\gamma \ln\Omega - 2g^{\epsilon\eta}g_{\gamma[\alpha}\nabla_{\beta]}\nabla_\eta \ln\Omega + \\ &+ 2\left(\nabla_{[\alpha}\ln\Omega\right)\delta^\epsilon{}_{\beta]}\nabla_\gamma \ln\Omega - 2g_{\gamma[\alpha}\delta^\epsilon{}_{\beta]}g^{\eta\lambda}\left(\nabla_\eta \ln\Omega\right)\nabla_\lambda \ln\Omega + \\ &- 2\left(\nabla_{[\alpha}\ln\Omega\right)g_{\beta]\gamma}g^{\epsilon\lambda}\nabla_\lambda \ln\Omega.\end{aligned} \tag{2.60}$$

Agora, contraindo esta expressão sobre β e ϵ obtemos a seguinte relação para os tensores de Ricci associados com as duas métricas

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\alpha\gamma} &= R_{\alpha\gamma} - (n-2)\nabla_\alpha\nabla_\gamma \ln\Omega - g_{\alpha\gamma}g^{\epsilon\eta}\nabla_\epsilon\nabla_\eta \ln\Omega + \\ &+ (n-2)\left(\nabla_\alpha \ln\Omega\right)\nabla_\gamma \ln\Omega - (n-2)g_{\alpha\gamma}g^{\epsilon\eta}\left(\nabla_\epsilon \ln\Omega\right)\nabla_\gamma \ln\Omega,\end{aligned} \tag{2.61}$$

onde n é a dimensão do espaço-tempo considerado.

Multiplicando esta expressão por $\tilde{g}^{\alpha\gamma}$ e usando a identidade $\tilde{g}^{\alpha\gamma} = \Omega^{-2}g^{\alpha\gamma}$, obtemos a forma pela qual o escalar de curvatura associado com a métrica conformalmente transformada relaciona-se com o escalar de curvatura associado à métrica original, ou seja,

$$\tilde{R} = \Omega^{-2}\left\{R - 2(n-2)g^{\alpha\gamma}\nabla_\alpha\nabla_\gamma \ln\Omega - (n-2)(n-1)g^{\alpha\gamma}(\nabla_\alpha \ln\Omega)\nabla_\gamma \ln\Omega\right\}. \tag{2.62}$$

Por último, consideremos o tensor de Weyl, que é definido por

$$C_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} - \frac{2}{n-2}\left(g_{\alpha[\gamma}R_{\epsilon]\beta} - g_{\beta[\gamma}R_{\epsilon]\alpha}\right) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{\alpha[\gamma}g_{\alpha]\beta}, \tag{2.63}$$

onde $R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = g_{\eta\epsilon}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\eta}$ é o tensor de Riemann. Substituindo este, que é obtido da equação (2.60), os $R_{ij}'s$, que são obtidos de forma análoga a equação (2.61) e o escalar de curvatura obtido de (2.62), temos que o tensor de Weyl associado com a métrica conformalmente transformada é igual ao tensor de Weyl original

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = C_{\alpha\beta\gamma\epsilon}. \tag{2.64}$$

Ou seja, o tensor de Weyl é invariante frente a transformações conformes da métrica.

Neste ponto é necessário analisar o comportamento de algumas equações de campos de interesse físico, que envolvem a métrica, frente às transformações conformes.

Consideremos inicialmente um campo Ψ qualquer. Uma equação para este campo é considerada conformalmente invariante se existe um número $s \in \Re$, tal que Ψ é uma solução para a equação com métrica $g_{\alpha\beta}$ se, e somente se, $\tilde{\Psi} = \Omega^s\Psi$ for uma solução para equação com métrica $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2 g_{\alpha\beta}$. O parâmetro s é chamado de peso conforme do campo considerado.

Vejamos então o comportamento frente a uma transformação conforme, da seguinte equação para o campo escalar Φ,

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi = 0. \tag{2.65}$$

Esta equação corresponde à equação de Laplace se $g^{\alpha\beta}$ for uma métrica Riemanniana, e à equação de Klein-Gordon se $g^{\alpha\beta}$ for uma métrica Lorentziana. Em relação a métrica conformalmente transformada, esta equação fica

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}_\beta\Phi &= \Omega^{-2}g^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\left[\nabla_\beta(\Omega^s\Phi)\right] = \Omega^{-2}g^{\alpha\beta}\left[\nabla_\alpha\nabla_\beta(\Omega^s\Phi) - C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\nabla_\gamma(\Omega^s\Phi)\right],\\ &= \Omega^{s-2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi + (2s+n-2)\Omega^{s-3}g^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha\Omega)\nabla_\beta\Phi +\\ &+ s\Omega^{s-3}g^{\alpha\beta}\Phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega + s(n+s-3)\Omega^{s-3}g^{\alpha\beta}\Phi(\nabla_\alpha\Omega)\nabla_\beta\Omega.\end{aligned} \tag{2.66}$$

Como podemos ver, esta equação em geral não é invariante frente a transformações conformes da métrica. Porém, se considerarmos o caso bidimensional ($n = 2$), e escolhendo o peso conforme do campo como sendo $s = 0$, temos

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}_\beta\Phi = \Omega^{-2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi = 0\,. \tag{2.67}$$

Ou seja, as equações de Laplace e Klein-Gordon, em espaços-tempos bidimensionais, são invariantes frente a transformações conformes da métrica, sendo que o peso conforme do campo é $s = 0$.

Consideremos agora espaços-tempos com dimensão $n > 2$. Nesse caso podemos modificar a equação (2.65) de maneira simples para que ela se torne conformalmente invariante. Primeiro escolhemos o peso conforme do campo como sendo $s = 1 - \frac{n}{2}$, de forma que o termo proporcional à $(\nabla_\alpha \Omega)\nabla_\beta \Phi$ se anule, e então

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}_\beta\Phi = \Omega^{s-2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi + s\Omega^{s-3}g^{\alpha\beta}\Phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega + \\ + s(n+s-3)\Omega^{s-3}g^{\alpha\beta}\Phi(\nabla_\alpha\Omega)\nabla_\beta\Omega. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Essa última relação lembra o comportamento do escalar de curvatura R frente a uma transformação conforme, que é dado pela equação (2.62). Consideremos então um termo da forma $\alpha R\Phi$, o qual será no final adicionado à equação (2.65). Em relação a métrica conformalmente transformada este termo fica

$$\begin{aligned} \alpha\tilde{R}\tilde{\Phi} = \alpha\Omega^{-1-\frac{n}{2}}R\Phi - 2(n-1)\alpha\Phi\Omega^{-2-\frac{n}{2}}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega + \\ + 2(n-1)\alpha\Phi\Omega^{-3-\frac{n}{2}}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega - (n-2)(n-1)\alpha\Phi\Omega^{-3-\frac{n}{2}}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Com esta alteração temos

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}_\beta\Phi + \alpha\tilde{R}\tilde{\Phi} = {} & \Omega^{-1-\frac{n}{2}}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi + \left(1 - \frac{n}{2}\right)\Omega^{-2-\frac{n}{2}}\Phi g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega + \\ & + \left(-\frac{n^2}{4} + \frac{3}{2}n - 2\right)\Omega^{-3-\frac{n}{2}}\Phi g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega + \alpha\omega^{-1\frac{n}{2}}R\Phi + \\ & - 2(n-1)\alpha\Phi\Omega^{-2-\frac{n}{2}}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega + \\ & + 2(n-1)\alpha\Phi\Omega^{-3-\frac{n}{2}}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega + \\ & + (n-2)(n-1)\alpha\Phi\Omega^{-3-\frac{n}{2}}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega\,. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Fazendo $\alpha = -\frac{(n-2)}{4(n-1)}$, obtemos

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}_\beta\Phi - \frac{(n-2)}{4(n-1)}\alpha\tilde{R}\tilde{\Phi} = \Omega^{-1-\frac{n}{2}}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi - \frac{(n-2)}{4(n-1)}\Omega^{-1-\frac{n}{2}}R\Phi. \tag{2.71}$$

Assim, a equação

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi - \frac{n-2}{4(n-1)}R\Phi = 0, \tag{2.72}$$

é conformalmente invariante, com o peso conforme do campo Φ sendo $s = 1 - \frac{n}{2}$. Esta equação é uma extensão conformalmente invariante das equações de Laplace e Klein-Gordon para espaços-tempos curvos.

Consideremos agora as equações de Maxwell no vácuo

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.73}$$

e

$$\nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0. \tag{2.74}$$

Escrevendo a primeira dessas equações em relação a métrica conformalmente transformada

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{\alpha\gamma}\tilde{\nabla}_\gamma\tilde{F}_{\alpha\beta} &= \Omega^{-2}g^{\alpha\gamma}\tilde{\nabla}_\gamma\left(\Omega^s F_{\alpha\beta}\right) \\ &= \Omega^{-2}g^{\alpha\gamma}\left\{\nabla_\gamma(\Omega^s F_{\alpha\beta}) - C^{\epsilon}{}_{\gamma\alpha}(\Omega^s F_{\epsilon\beta}) - C^{\epsilon}{}_{\gamma\beta}(\Omega^s F_{\alpha\epsilon})\right\},\end{aligned} \tag{2.75}$$

substituindo os $C^{\epsilon}_{\gamma i}$ e fazendo as derivadas necessárias encontramos

$$\tilde{g}^{\alpha\gamma}\tilde{\nabla}_\gamma\tilde{F}_{\alpha\beta} = \Omega^{s-2}g^{\alpha\gamma}\nabla_\gamma F_{\alpha\beta} + (n-4+s)\Omega^{s-3}g^{\alpha\gamma}F_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\Omega. \tag{2.76}$$

De modo análogo, para a segunda equação temos

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{[\alpha}\tilde{F}_{\beta\gamma]} &= \tilde{\nabla}_{[\alpha}(\Omega^s F_{\beta\gamma]}) \\ &= \Omega^s\nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} + s\Omega^{s-1}(\nabla_{[\alpha}\Omega)F_{\beta\gamma]}.\end{aligned} \tag{2.77}$$

Assim, podemos ver que em geral as equações de Maxwell não são conformalmente invariantes. Porém, se consideramos o caso de interesse físico $n = 4$, a equação (2.76) reduz-se a

$$\tilde{g}^{\alpha\gamma}\tilde{\nabla}_\gamma\tilde{F}_{\alpha\beta} = \Omega^{s-2}g^{\alpha\gamma}\nabla_\gamma F_{\alpha\beta} + s\Omega^{s-3}g^{\alpha\gamma}F_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\Omega, \tag{2.78}$$

e escolhendo $s = 0$ esta última equação fica na forma

$$\tilde{g}^{\alpha\gamma}\tilde{\nabla}_\gamma\tilde{F}_{\alpha\beta} = \Omega^{-2}g^{\alpha\gamma}\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}, \tag{2.79}$$

enquanto que a equação (2.77) resulta invariante,

$$\tilde{\nabla}_{[\alpha}\tilde{F}_{\beta\gamma]} = \nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]}. \tag{2.80}$$

Logo, as equações de Maxwell no espaço-tempo quadridimensional são comformalmente invariantes, sendo o peso conforme do tensor eletromagnético $s = 0$.

Por último vamos analisar o comportamento da equação de conservação da energia $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ frente a uma transformação conforme da métrica e das coordenadas do campo. Para um tensor de energia-momento simétrico $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$, tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{T}^{\alpha\beta} &= \tilde{\nabla}_\alpha(\Omega^s T^{\alpha\beta}) \\ &= \nabla_\alpha(\Omega^s T^{\alpha\beta}) + C^\alpha_{\alpha\gamma}\Omega^s T^{\gamma\beta} + C^\beta_{\alpha\gamma}\Omega^s T^{\alpha\gamma}.\end{aligned} \tag{2.81}$$

Substituindo os $C^i_{j\gamma}$ e fazendo as respectivas derivadas resulta

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{T}^{\alpha\beta} = \Omega^s \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} + (s+n+2)\Omega^{s-1}T^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Omega - \Omega^{s-1}g^{\beta\alpha}\nabla_\alpha\Omega. \tag{2.82}$$

Assim, a equação de conservação da energia não é invariante frente a transformações conformes.

2.2 Anomalias de traço e curvatura

O valor da anomalia do traço do tensor de energia-momento pode ser dada como uma combinação linear dos invariantes de curvatura do espaço-tempo considerado. Usando o método da regularização dimensional, que leva em consideração o princípio de covariância geral e algumas considerações dimensionais que envolvem a ordem das derivadas do tensor métrico que são fisicamente aceitáveis na expressão do tensor de energia-momento, DESER, DUFF e ISHAM (1976), demonstraram que a forma geral da anomalia de traço é dada por

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle_{Ren} = \alpha R, \tag{2.83}$$

para espaços-tempos bidimensionais, e

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle_{Ren} = a_1 C^2 + a_2\left(R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2\right) + a_3\Box R + a_4 R^2, \tag{2.84}$$

para o caso quadridimensional. Nestas expressões o símbolo $\langle\rangle_{Ren}$ indica o valor esperado da quantidade renormalizada, α e os a_i são constantes a serem determinadas. Apesar, dos argumentos de gerais de DESER, DUFF e ISHAM não determinarem o valor destas constantes, sabemos que elas devem ser as mesmas para todos os estados de vácuo quântico e todos os espaços-tempos para uma determinada dimensão.

Após a apresentação desta forma geral para a anomalia do traço, foram realizados vários estudos para fixar o valor das constantes que aparecem nestas expressões. Para o caso bidimensional o valor da constante α é bem determinado, uma vez que pode-se comparar a eq. (2.83) com o valor do tensor de energia-momento calculado por DAVIES, FULLING e UNRUH (1976), o qual sugere que $\alpha = (24\pi)^{-1}$. De fato pode-se verificar que este é o único valor consistente com a lei de conservação da energia.

Para espaços-tempos de quatro dimensões, a análise feita para determinar o valor das constantes a_i não é tão simples, porém existem inúmeros resultados obtidos por diferentes métodos que concordam entre si, permitindo fixar o valor destas constantes. Segundo DAVIES et al. (apud CHRISTENSEN e FULLING, 1977), no espaço tempo de Friedman-Robertson-Walker é possível definir um estado de vácuo quântico para o qual o tensor de energia-momento deve ser homogêneo e isotrópico. Porém, ao estudarem a lei de conservação da energia sob essas condições, eles chegaram a conclusão de que a única função tensorial homogênea, isotrópica e que respeita a lei de conservação para a qual o traço seja uma combinação linear de $R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ e R^2 é a combinação $\left(R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2\right)$. Essa observação sugere que o termo contendo R^2 isoladamente em (2.84) não deve aparecer, ou seja, deve-se ter $a_4 = 0$.

CHRISTENSEN (1976), calculou a forma geral para o valor esperado do tensor de energia-momento para um *background* curvo arbitrário no caso de um campo escalar massivo. Embora seus cálculos não sejam diretamente aplicáveis para o caso sem massa, seus resultados sugerem que as constantes a_1, a_2 e a_3 tenham todas o mesmo valor e que este seja igual a $(2880\pi^2)^{-1}$. DOWKER e CRITCHLEY (1976), calcularam o valor do tensor de energia-momento para um campo escalar sem massa no espaço-tempo de Sitter, para o qual encontram $\langle T^\alpha_\alpha \rangle_{Ren} = \frac{1}{2880\pi^2}\left(R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2\right)$. Dado que nesta geometria temos $C^2 = \Box R = 0$, este resultado confirma o valor de a_2 sugerido por Christensen. Além disso, um cálculo feito por CAPPER e DUFF (1974 apud CHRISTENSEN e FULLING, 1977), usando o método de regularização dimensional no espaço dos momentos, também confirma o valor de a_3 citado acima. Por último, para a constante a_1, DUFF (apud CHRISTENSEN e FULLING, 1977) mostrou que no *background* de Schwarzschild, onde $R_{\alpha\beta} = R = 0$, o traço do tensor energia-momento é dado por $\langle T^\alpha_\alpha \rangle_{Ren} = \frac{1}{2880\pi^2}C^2$, o que confirma também o valor de a_1 previamente sugerido.

Com tais resultados, a relação esperada entre o traço do tensor de energia-momento renormalizado (anômalo) e os escalares de curvatura num espaço-tempo quadridimensional para um campo escalar deve ser (ver Eq. (2.84)) da forma

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle_{Ren} = \frac{1}{2880\pi^2}\left(C^2 + R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 + \Box R\right) . \tag{2.85}$$

2.3 Anomalias de traço e radiação de Hawking

A efeito Hawking é considerado um dos fenômenos mais extraordinários já previstos pela física teórica. Sua origem está na combinação da teoria da relatividade geral com a mecânica quântica, combinação conhecida pelo nome de teoria de campos em espaços curvos. Usando este método para estudar a dinâmica de um campo escalar sem massa no *background* de um espaço-tempo com horizonte de eventos, como por exemplo um buraco negro formado através do colapso gravitacional de uma estrela, Hawking surpreendentemente chegou ao resultado que buracos negros emitem um fluxo de radiação para o infinito, o qual apresenta um espectro característico de corpo negro à uma temperatura que é totalmente definida pelos parâmetros do buraco negro: massa, momento angular e cargas associadas a campos de longo alcance, como a carga elétrica.

Outro resultado interessante da teoria de campos em espaços curvos é o surgimento de anomalias, que surgem como um conflito entre o processo de quantização dos campos e as simetrias clássicas apresentadas pela lagrangeana destes campos. De acordo com as teorias clássicas, espera-se que a ação efetiva de um determinado campo conformalmente invariante seja conservada, conforme discutimos mais acima. Para que isto ocorra, é necessário que o traço do tensor de energia-momento associado a este campo seja identicamente nulo. Porém ocorre que, ao quantizarmos o campo considerado, ou seja, ao expandirmos o campo em modos normais, aparecem termos divergentes no tensor de energia-momento do campo quantizado, o que é fisicamente inaceitável, uma vez que este representa grandezas físicas mensuráveis. Para removermos estas partes divergentes (e obtermos um tensor de energia-momento que respeite o princípio de conservação da energia), é necessário adotarmos um método de renormalização. Independentemente do método escolhido, o tensor de energia-momento resultante adquire traço no processo de renormalização.

A radiação de Hawking e a anomalia de traço do tensor de energia estão profundamente relacionadas, como mostrado por CHRISTENSEN e FULLING (1977). Segundo estes, a anomalia pode ser interpretada como um fluxo de radiação, o qual está em plena concordância quantitativa com o fluxo obtido por HAWKING (1974) em seu cálculo original. Segundo tal ponto de vista, isto significa que a radiação de Hawking, ou seja, a criação e aniquilação de partículas, é uma conseqüência do processo de regularização necessário para a preservação do princípio de covariância geral.

2.4 Os estados de vácuo quânticos

O estado de vácuo é geralmente associado ao estado que emerge em um sistema do qual se excluem todas as partículas de matéria. Porém, no contexto da mecânica quântica, sendo o vácuo o estado de mínima energia acessível ao sistema, além de excluir todas as partículas massivas, devemos também excluir todas as formas de radiação. O conceito de vácuo, do totalmente vazio, é bastante difícil de ser concebido. É natural nos perguntarmos o que sobraria após retirarmos todas as partículas e todas as formas de radiação de um determinado sistema. De acordo com a mecânica quântica, o vácuo é povoado por partículas virtuais que não podem ser removidas. Estas partículas são criadas e aniquiladas aos pares tão rapidamente que, de acordo com o previsto pelo princípio da incerteza, sua detecção se torna impossível.

Do ponto de vista formal, na teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos, o processo de quantização é feito da forma usual, expandindo-se o operador de campo em termos dos operadores de aniquilação (a_i) e criação $(a_i^\dagger)$, sobre um conjunto de modos que são solução das equações de campo. Nesse contexto, o estado de vácuo $|0\rangle$, é o estado aniquilado por (a_i), $a_i|0\rangle = 0$, indicando que não há mais quanta de campo a serem aniquilados no estado $|0\rangle$. Um dos resultados mais surpreendentes deste procedimento, é que, na presença do campo gravitacional, ou seja, em um espaço-tempo curvo, a noção de estado de vácuo torna-se um pouco vaga, uma vez que, diferentemente do que ocorre no espaço-tempo plano de Minkowski, onde a teoria quântica de campos prevê a existência de um único estado de vácuo, num *background* curvo existem infinitos estados de vácuo possíveis, sendo que nem todos os estados possíveis são vazios. O tipo de partículas que constituem estes estados de vácuo não vazios dependem do observador. Dentro de nossa compreensão atual deste problema, as diferenças entre as constituições dos estados de vácuo de possível existência, representam situações físicas diferentes as quais o sistema considerado está submetido. Em espaços-tempos na vizinhança de buracos negros, é usual considerar-se três tipos de estado de vácuo.

O primeiro dos estados considerados e que tem interesse para o presente estudo é o estado de vácuo de Boulware $|B\rangle$. Este estado foi definido no trabalho de BOULWARE (1975), sendo construído exigindo-se que partículas tenham energia positiva em relação ao vetor de Killing na geometria de Schwarzschild, ou seja, que os modos do campo que chegam ao horizonte do futuro e que saem do horizonte do passado tenham freqüências positivas em relação a coordenada temporal que assintoticamente se aproxima do tempo de Minkowski. A grandes distâncias do buraco negro $r \to \infty$, os modos se reduzem a ondas planas, ou seja, no infinito este estado se aproxima do estado de Minkowski, $(|B\rangle \sim |0\rangle_M$, que é vazio. Porém, próximo ao horizonte de eventos, este estado não é bem comportado, pois, no estado quântico de Boulware um observador inercial caindo nas proximidades do horizonte de eventos mediria uma densidade de energia e pressões infinitas.

Outro estado de vácuo que nos interessa é o estado de Hartle-Hawking $|H\rangle$, o qual é definido nos trabalhos de HARTLE e HAWKING (1976) e de ISRAEL (1976). Este estado é construído usando modos com freqüência positiva em relação a um parâmetro afim, chegando no horizonte do futuro, e modos com freqüência positiva saindo no horizonte do passado. No infinito estes modos não se reduzem a ondas planas, $(|H\rangle \neq |0\rangle_M$, ou seja, $|H\rangle$ não é vazio no infinito. Este estado descreve um fluxo de radiação térmica em equilíbrio na temperatura de Hawking, tem as propriedades de um estado térmico, sendo também o único estado entre os considerados que é regular no horizonte do passado e no horizonte do futuro. Este estado pode ser usado para descrever um buraco negro em equilíbrio com a radiação emitida pelo próprio, onde o estado de equilíbrio é obtido através do confinamento do sistema em uma caixa com paredes totalmente refletoras. Assim, este estado pode ser usado para descrever um buraco negro em equilíbrio num banho térmico de radiação de corpo-negro.

Por último, temos o estado de vácuo de Unruh $|U\rangle$ definido por UNRUH (1976), que é construído com modos que chegam com freqüência positiva em relação a um parâmetro afim no horizonte do futuro que assintoticamente se aproxima do tempo Minkowskiano, e modos que partem com freqüência positiva em relação a um parâmetro afim no horizonte do passado. Dos estados considerados este é o mais interessante, uma vez que ele descreve o comportamento de campos quânticos na vizinhança de um corpo colapsando na formação de um buraco negro. Neste estado não temos fluxo de partículas entrando do infinito do passado, mas temos um fluxo térmico de partículas na temperatura de Hawking fluindo na direção do infinito do futuro. Este estado é regular no horizonte do futuro, porém no horizonte do passado ele é tão mal comportado quanto $|B\rangle$. Podemos usar este estado para descrever a emissão de radiação de Hawking por um buraco negro.

3 O TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO E AS ANOMALIAS

Neste capítulo nós vamos encontrar a forma geral do tensor de energia-momento do vácuo, para o espaço-tempo nas vizinhanças de buracos negros estáticos com simetria esférica. Esta solução será obtida resolvendo-se a equação de conservação de energia, cuja solução será encontrada a partir de considerações geométricas sobre o espaço-tempo considerado e algumas restrições impostas sobre a própria solução. A solução geral da equação de conservação de energia será escrita em termos de duas constantes de integração e duas funções, sendo uma destas o traço do tensor de energia-momento. Após esta etapa, vamos particularizar os resultados encontrados considerando-se dois casos específicos, o buraco negro de Schwarzschild e o buraco negro de Reissner-Nordström, comparando o nosso resultado com o tensor de energia-momento quântico, determinamos o valor das constantes de integração para os três estados de vácuo quântico de interesse na física de buracos negros.

3.1 Um espaço-tempo suficientemente geral: Características geométricas

O espaço-tempo que consideramos é dado pela seguinte métrica,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{3.1}$$

onde $f(r)$ é uma função contínua da coordenada r, que pode ter zeros e singularidades isoladas. Esta métrica descreve a geometria do espaço-tempo na região exterior à buracos negros estáticos com simetria esférica, sendo que o horizonte de eventos corresponde ao zero cujo raio r_h tem o maior valor dentre os zeros de $f(r)$, tal que $f(r) > 0$ para $r > r_h$.

Para esta geometria, os símbolos de Christoffel, definidos por

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\rho\nu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu} \right), \tag{3.2}$$

e não identicamente nulos são os seguintes

$$\Gamma^{t}_{rt} = \Gamma^{t}_{tr} = \frac{f'}{2f},$$

$$\Gamma^{r}_{tt} = \frac{f'f}{2},$$

$$\Gamma^{r}_{rr} = -\frac{f'f}{2},$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta} = -rf,$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -rf\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\cos\theta\sin\theta,$$

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{r},$$

e

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \cot\theta\,,$$

onde, f' representa a derivada da função f em relação a coordenada r,

$$f' = \frac{\partial}{\partial r} f(r). \tag{3.3}$$

O tensor de Ricci, definido por

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \tag{3.4}$$

para esta geometria tem todas as componentes fora da diagonal principal identicamente nulas, e as componentes não nulas são

$$R_{tt} = \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{f''}{f} + \frac{2f'}{rf} \right), \tag{3.5}$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2} f^2 \left(\frac{f''}{f} + \frac{2f'}{rf} \right), \tag{3.6}$$

$$R_{\theta\theta} = f - rf' - 1, \tag{3.7}$$

e

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta \left(f - rf' - 1 \right). \tag{3.8}$$

O escalar de curvatura, ou escalar de Ricci, é dado por

$$R = -f'' + \frac{4f'}{r} - \frac{f}{r^2} - \frac{2}{r^2}. \tag{3.9}$$

Conseqüentemente, o tensor de Einstein, definido por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{3.10}$$

tem as seguintes componentes não nulas:

$$G_{tt} = \frac{f'}{r^2} - \frac{f^2}{r^2} - \frac{ff'}{r}, \tag{3.11}$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} + \frac{f'}{rf} - \frac{f'}{r^2 f^2}, \tag{3.12}$$

$$G_{\theta\theta} = rf' + \frac{r^2 f''}{2}, \tag{3.13}$$

e

$$G_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta \left(rf' + \frac{r^2 f''}{2} \right). \tag{3.14}$$

3.2 Solução geral da equação de conservação da energia

A forma geral do tensor de energia-momento para buracos negros estáticos com simetria esférica, para os quais a geometria do espaço-tempo em sua vizinhança é descrita pela métrica dada por (3.1), pode ser obtida resolvendo-se a equação de conservação da energia

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0, \tag{3.15}$$

onde a derivada covariante de um tensor misto de segunda ordem é dada por

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu_\lambda, \tag{3.16}$$

sendo que $\partial_\mu T^\mu_\nu$ indica a derivada parcial convencional da componente do tensor de energia-momento. Os coeficientes $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$'s são os símbolos de Christoffel definidos anteriormente.

Na equação (3.15), o índice repetido μ, indica a soma sobre todos os valores possíveis do mesmo. Explicitamente, em termos das coordenadas do espaço-tempo, esta equação pode ser escrita na forma

$$\nabla_t T^t_\nu + \nabla_r T^r_\nu + \nabla_\theta T^\theta_\nu + \nabla_\varphi T^\varphi_\nu = 0\,. \tag{3.17}$$

Para a geometria descrita por buracos negros estáticos com simetria esférica, supomos que T^μ_ν seja independente do tempo, o que é uma boa aproximação para a região de estado estacionário, e também que os estados quânticos de interesse possuam simetria esférica. Segue então que as únicas componentes não nulas do tensor de energia-momento são T^t_t, T^r_t, T^t_r, T^r_r, T^θ_θ e T^φ_φ. Outra conseqüência da simetria esférica é a identidade $T^\theta_\theta = T^\varphi_\varphi$. Com estas considerações a equação de conservação de energia fornece as seguintes três equações diferenciais:

$$\partial_r T^r_t + \frac{2}{r} T^r_t = 0, \tag{3.18}$$

$$\partial_r T^r_r + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{2}{r}\right) T^r_r - \frac{f'}{2f} T^t_t - \frac{2}{r} T^\theta_\theta = 0, \tag{3.19}$$

e

$$T^\theta_\theta = T^\varphi_\varphi. \tag{3.20}$$

Resolvendo a equação (3.18) temos que a componente T^r_t é dada por

$$T^r_t = -\frac{A}{M^2 r^2}\,, \tag{3.21}$$

onde A é uma constante de integração.

A componente T^t_t pode ser escrita em termos do traço, e das outras três componentes da diagonal principal do tensor de energia-momento, sendo

$$T^t_t = T^\alpha_\alpha - T^r_r - 2T^\theta_\theta\,. \tag{3.22}$$

Usando esta relação, a equação (3.19) pode ser escrita como

$$\partial_r T^r_r + \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r}\right) T^r_r + \left(\frac{f'}{f} - \frac{2}{r}\right) T^\theta_\theta - \frac{f'}{2f} T^\alpha_\alpha = 0, \tag{3.23}$$

ou, de maneira mais simples, na forma

$$\partial_r T^r_r + \frac{1}{r^2 f}\left[\left(2rf + r^2 f'\right) T^r_r - \left(2rf - r^2 f'\right) T^\theta_\theta - \frac{f'}{2f} T^\alpha_\alpha\right] = 0, \tag{3.24}$$

cuja solução em termos de $f(r)$ e $f'(r)$ é dada por

$$T^r_r = \frac{1}{r^2 f}\left\{\frac{B-A}{M^2} + \int_{r_H}^{r}\left[\frac{r'^2 f'}{2} T^\alpha_\alpha(r') - \left(r'^2 f' - 2r' f\right) T^\theta_\theta(r')\right] dr'\right\}. \tag{3.25}$$

Para a análise a ser feita no presente trabalho, é conveniente introduzirmos a coordenada r^*, definida de maneira que tenhamos

$$\frac{dr}{dr^*} = f(r)\,. \tag{3.26}$$

Em termos das coordenas (t, r^*), as componentes do tensor de energia-momento transformam-se da seguinte maneira

$$T^{r^*}_{r^*} = T^r_r, \tag{3.27}$$

$$T^{r^*}_t = \frac{1}{f} T^r_t, \tag{3.28}$$

e

$$T^t_{r^*} = -T^{r^*}_t\,. \tag{3.29}$$

Para facilitar a análise que faremos a seguir, vamos definir as seguinte funções:

$$\Theta(r) \equiv T^\theta_\theta(r) - \frac{1}{4} T^\alpha_\alpha(r), \tag{3.30}$$

$$G(r) \equiv \int_{r_H}^{r} \left(2r'f - r'^2 f'\right) \Theta(r') dr', \tag{3.31}$$

e

$$H(r) \equiv \frac{1}{2} \int_{r_H}^{r} \left(\frac{r'^2 f}{2} + r' f\right) T^\alpha_\alpha(r') dr'. \tag{3.32}$$

Usando estas funções podemos escrever o tensor de energia-momento como sendo a soma de quatro termos.

$$T^\mu_\nu = T^{(1)\mu}_\nu + T^{(2)\mu}_\nu + T^{(3)\mu}_\nu + T^{(4)\mu}_\nu. \tag{3.33}$$

Nas coordenadas $(t, r^*, \theta$ e φ) esses termos são:

$$T^{(1)\mu}_\nu = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r^2 f} H(r) + \frac{1}{2} T^\alpha_\alpha(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 f} H(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} T^\alpha_\alpha(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} T^\alpha_\alpha(r) \end{bmatrix}, \tag{3.34}$$

$$T^{(2)\mu}_\nu = \frac{A}{M^2 r^2 f} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0, \end{bmatrix}, \tag{3.35}$$

$$T_\nu^{(3)\mu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r^2 f}G(r) - 2\Theta(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 f}G(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta(r) \end{bmatrix}, \tag{3.36}$$

e

$$T_\nu^{(4)\mu} = \frac{B}{M^2 r^2 f} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0, \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

Cada um dos quatro tensores apresentados acima, independentemente satisfaz a equação de conservação da energia $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$. Em função da análise que faremos posteriormente para definir os valores das constantes de integração A e B nos estados de vácuo na vizinhança de alguns buracos negros específicos, é importante observarmos que, somente $T_\nu^{(1)\mu}$ possui traço não nulo, somente $T_\nu^{(2)\mu}$ tem componentes fora da diagonal principal e somente $T_\nu^{(3)\mu}$ possui traço nulo, cuja componente T_θ^θ é não nula.

Os resultados obtidos até este ponto aplicam-se de maneira geral a buracos negros estáticos com simetria esférica. As equações (3.34) a (3.37) fornecem a forma correta do tensor de energia-momento independentemente do tipo de campo considerado. Somente quando particularizamos os nossos resultados, fornecendo o valor do traço do tensor de energia-momento, é possível fazermos considerações adicionais a respeito dos resultados obtidos e traçarmos novas conclusões acerca da teoria de campos específica.

3.2.1 O caso bidimensional

A análise que faremos aqui depende do conhecimento prévio do valor esperado de tensor de energia-momento quântico. Ocorre que estes valores esperados, em geral, não são encontrados na literatura para geometrias quadridimensionais, pois em virtude das complicações técnicas que surgem nos cálculos decorrentes dos métodos da teoria quântica de campos, que fornecem estes resultados, os cálculos são em geral realizados apenas para geometrias bidimensionais. Assim, é necessário restringirmos nossa análise para esse caso. Esta restrição será feita truncando-se a métrica (3.1) considerando apenas as coordenas t e r do espaço-tempo. Fazendo isto obtemos

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2. \tag{3.38}$$

Esta métrica pode ser escrita, de forma conformalmente transformada, em termos das coordenadas (t, r^*), definidas por (3.26) como,

$$ds^2 = f(r)\left(-dt^2 + dr^{*2}\right). \tag{3.39}$$

Ou ainda, em termos das coordenadas nulas (v, u), definidas respectivamente por

$$v = t + r^*, \tag{3.40}$$

$$u = t - r^*, \tag{3.41}$$

temos

$$ds^2 = f(r)dudv. \tag{3.42}$$

Para a métrica dada por (3.38) a equação de conservação da energia nos fornece as seguintes equações diferenciais:

$$\partial_r T^r_t = 0, \tag{3.43}$$

e

$$\partial_r T^r_r + \frac{f'}{2f}\left(2T^r_r - T^t_t\right) = 0. \tag{3.44}$$

Escrevendo novamente a componente T^t_t em termos do traço

$$T^t_t = T^\alpha_\alpha - T^r_r, \tag{3.45}$$

podemos escrever a segunda equação na forma

$$\partial_r T^r_r + \frac{1}{f}\left(f' T^r_r - \frac{f'}{2}T^\alpha_\alpha\right) = 0. \tag{3.46}$$

Resolvendo as equações (3.43) e (3.46) temos que as componentes do tensor de energia-momento são

$$T^r_t = -\frac{A}{M^2}, \tag{3.47}$$

$$T^r_r = \frac{1}{f}\left(\frac{B-A}{M^2} + \int_{r_H}^{r} \frac{f'}{2} T^\alpha_\alpha(r')dr'\right), \tag{3.48}$$

e

$$T^t_t = -\frac{1}{f}\left(\frac{B-A}{M^2} + \int_{r_H}^{r} \frac{f'}{2} T^\alpha_\alpha(r')dr'\right) + T^\alpha_\alpha(r). \tag{3.49}$$

A relação de transformação entre as coordenadas (t, r) e (t, r^*), das componentes deste tensor, é a mesma que para o caso quadridimensional. Da mesma forma que no caso da geometria quadridimensional, podemos definir a seguinte função, análoga à função

$H(r)$ definida em (3.32),

$$H_2(r) = \frac{1}{2}\int_{r_H}^{r} f' T^{\alpha}_{\alpha}(r')dr'. \tag{3.50}$$

Usando esta equação podemos escrever o tensor de energia-momento como sendo a soma de três termos

$$T^{\mu}_{\nu} = T^{(1)\mu}_{\nu} + T^{(2)\mu}_{\nu} + T^{(3)\mu}_{\nu}, \tag{3.51}$$

onde

$$T^{(1)\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{f}H_2(r) + T^{\alpha}_{\alpha}(r) & 0 \\ 0 & \frac{1}{f}H_2(r) \end{bmatrix}, \tag{3.52}$$

$$T^{(2)\mu}_{\nu} = \frac{A}{fM^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{3.53}$$

e

$$T^{(3)\mu}_{\nu} = \frac{B}{fM^2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.54}$$

3.3 Particularização dos resultados

A partir desta seção particularizaremos os resultados gerais obtidos até agora, especificando o tipo de campo considerado e a geometria do espaço-tempo onde este campo evolui. Consideraremos em todos os casos um campo escalar Φ. Para este caso o valor do traço do tensor de energia-momento pode ser encontrado, através do procedimento descrito na seção 2.2. Até este momento os cálculos realizados aplicam-se de forma correta a qualquer tipo de buraco negro estático com geometria esférica, para o qual exista um horizonte de eventos. Nesta seção especificaremos qual a função $f(r)$, ou seja, o tipo particular de buraco negro considerado, e analisaremos a forma da radiação de Hawking em um infinito espacial desta geometria. Assim por comparação com os resultados obtidos da teoria quântica de campos podemos determinar o valor das constantes de integração A e B. Os casos que consideraremos são os espaços-tempos na vizinhança dos buracos negros de Schwarzschild e Reissner-Nordström.

3.3.1 O buraco negro de Schwarzschild

A geometria do espaço-tempo de Schwarzschild é descrita por uma métrica que é a solução para as equações de Einstein no vácuo com simetria esférica. O buraco negro de Schwarzschild pode ser imaginado como uma casca esférica de massa M que forma um buraco negro ao ser submetida ao processo de colapso gravitacional. A métrica que descreve o buraco negro de Schwarzschild é dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{3.55}$$

Comparando esta métrica com a equação (3.1) vemos que

$$f(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \tag{3.56}$$

onde podemos observar que $f(r)$ se anula quando $r = 2M$, sendo este o valor do raio do horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild.

3.3.1.1 Caso bidimensional.

Agora vamos obter a forma explícita do tensor de energia-momento para a métrica de Schwarzschild truncada,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \tag{3.57}$$

Para esta métrica o tensor de curvatura é dado por

$$R = \frac{4M}{r^3}, \tag{3.58}$$

e assim, usando a relação (2.83), segue que o traço do tensor de energia-momento é

$$\langle T^{\alpha}_{\alpha} \rangle_{Ren} = \frac{M}{6\pi r^3}. \tag{3.59}$$

Substituindo este valor na equação (3.50) e integrando a função $H_2(r)$ fica determinada,

$$H_2(r) = \frac{M^2}{24\pi}\left(\frac{1}{16M^4} - \frac{1}{r^4}\right). \tag{3.60}$$

Com este resultado temos que a forma geral do tensor de energia-momento do buraco negro de Schwarzschild bidimensional pode ser escrito, nas coordenadas (t, r^*), da seguinte forma.

$$T^{\mu}_{\nu} = T^{(1)\mu}_{\nu} + T^{(2)\mu}_{\nu} + T^{(3)\mu}_{\nu}, \tag{3.61}$$

onde

$$T^{(1)\mu}_{\nu} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{M^2}{24\pi}\left(\frac{1}{16M^4} - \frac{1}{r^4}\right) + \frac{M}{6\pi r^3} & 0 \\ 0 & \frac{M^2}{24\pi}\left(\frac{1}{16M^4} - \frac{1}{r^4}\right) \end{bmatrix}, \tag{3.62}$$

$$T_{\nu}^{(2)\mu} = \frac{A}{M^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{3.63}$$

e

$$T_{\nu}^{(3)\mu} = \frac{B}{M^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.64}$$

A fim determinarmos os valores das constantes A e B vamos comparar as três expressões acima com o valor do tensor de energia-momento do buraco negro de Schwarzschild para os três estados de vácuo mencionados na seção 2.4. Isto será feito analisando o valor esperado do tensor de energia momento em um infinito espacial, onde o comportamento desta quantidade física deve ser bem definida, e é conhecida através de resultados obtidos da teoria quântica de campos.

Consideremos inicialmente o estado de vácuo de Boulware. Dado que este estado é vazio no infinito, o valor esperado do tensor de energia momento deve se anular quando $r \to \infty$. Portanto, vemos que a única forma de obtermos este resultado é com $A_B = 0$ em (3.63). Assim, o tensor de energia momento do buraco negro de Schwarzschild bidimensional para este estado deve ser da forma

$$T_{\nu}^{(B)\mu} = T_{\nu}^{(1)\mu} + T_{\nu}^{(3)\mu}. \tag{3.65}$$

No infinito temos que

$$T_{\alpha}^{\alpha}(\infty) = 0, \tag{3.66}$$

e a equação (3.60) assume o valor

$$H_2(\infty) = \frac{1}{384\pi}. \tag{3.67}$$

Dessa forma a equação (3.65) no infinito é dada por

$$T_{\nu}^{(B)\mu}(\infty) = \left(\frac{1}{384\pi M^2} + \frac{B_B}{M^2}\right)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.68}$$

Como este estado é vazio no infinito, devemos ter que $T_t^{(B)t}(\infty) = T_r^{(B)r}(\infty) = 0$. Com esta imposição podemos calcular a constante de integração B_B, para a qual obtemos o valor

$$B_B = -\frac{1}{384\pi}. \tag{3.69}$$

Portanto, o tensor de energia-momento do buraco negro de Schwarzschild bidimensional, no estado de vácuo de Boulware é

$$
\begin{aligned}
T_{\nu}^{(B)\mu} = {} & \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{M^2}{24\pi}\left(\frac{1}{16M^4}-\frac{1}{r^4}\right)+\frac{M}{6\pi r^3} & 0 \\ 0 & \frac{M^2}{24\pi}\left(\frac{1}{16M^4}-\frac{1}{r^4}\right) \end{bmatrix} + \\
& -\frac{1}{384\pi M^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.70}
$$

Para o estado de Hartle-Hawking o valor esperado do tensor de energia-momento do buraco negro de Schwarzschild bidimensional no infinito é dado por Christesen e FULLING (1977) como sendo

$$
\langle H|T_{\nu}^{\mu}(\infty)|H\rangle = \frac{1}{384\pi M^2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.71}
$$

Comparando este valor com a equação (3.63) vemos que para obtermos este resultado devemos ter novamente

$$
A_H = 0. \tag{3.72}
$$

Assim, neste estado de vácuo o tensor de energia-momento é como no estado de Boulware, a soma das equações (3.62) e (3.64), ou seja, no infinito ele é dado por (3.68). Comparando (3.68) com (3.71) resulta

$$
\langle H|T_{t}^{t}(\infty)|H\rangle = T_{t}^{(1)t}(\infty) + T_{t}^{(3)t}(\infty),
$$

de onde segue que,

$$
-\frac{1}{384\pi M^2} = -\frac{1}{384\pi M^2} - \frac{B_H}{M^2},
$$

e assim temos

$$
B_H = 0. \tag{3.73}
$$

Logo, o tensor de energia-momento do buraco negro de Schwarzschild bidimensional no estado de vácuo de Hartle-Hawking é dado por

$$
T_{\nu}^{(H)\mu} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{M^2}{24\pi}\left(\frac{1}{16M^4}-\frac{1}{r^4}\right)+\frac{M}{6\pi r^3} & 0 \\ 0 & \frac{M^2}{24\pi}\left(\frac{1}{16M^4}-\frac{1}{r^4}\right) \end{bmatrix}. \tag{3.74}
$$

Consideremos agora o caso da radiação de Hawking. Em tal caso, ou seja, no estado de vácuo quântico de Unruh, o tensor de energia-momento do buraco negro de Schwarzschild bidimensional apresentado por Christesen e FULLING (1977) tem seu valor esperado no infinito dado por

$$\langle U|T^{\mu}_{\nu}(\infty)|U\rangle = \frac{1}{768\pi M^2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.75}$$

Comparando este resultado com $T^{(2)\mu}_{\nu}(\infty)$ temos,

$$\langle U|T^{r}_{t}(\infty)|U\rangle = T^{(2)r}_{t}(\infty),$$
$$-\frac{1}{768\pi M^2} = -\frac{A_U}{M^2}$$

de onde obtemos, para a radiação de Hawking,

$$A_U = \frac{1}{768\pi}. \tag{3.76}$$

Uma vez conhecidos os valores de A_U e $H_2(\infty)$, podemos determinar a outra constante de integração usando a relação

$$\langle U|T^{t}_{t}(\infty)|U\rangle = T^{(1)t}_{t}(\infty) + T^{(2)t}_{t}(\infty) + T^{(3)t}_{t}(\infty),$$

obtida de (3.61, e as Eqs. (3.62), (3.63) e (3.64) no limite $r \longrightarrow \infty$. Ou seja,

$$-\frac{1}{768\pi M^2} = -\frac{1}{384\pi M^2} + \frac{1}{768\pi M^2} + \frac{B_U}{M^2},$$

de onde conclui-se que

$$B_U = 0. \tag{3.77}$$

Assim, o tensor de energia-momento da radiação de Hawking emitida pelo buraco negro de Schwarzschild é dado por

$$\begin{aligned} T^{(U)\mu}_{\nu} = {} & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{M^2}{24\pi}\left(\frac{1}{16M^4} - \frac{1}{r^4}\right) + \frac{M}{6\pi r^3} & 0 \\ 0 & \frac{M^2}{24\pi}\left(\frac{1}{16M^4} - \frac{1}{r^4}\right) \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{768\pi M^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Desta forma conseguimos obter o valor do tensor de energia-momento da radiação de Hawking partindo do conhecimento da anomalia do traço. Podemos também fazer a análise inversa, ou seja, obter o valor da anomalia do traço a partir do conhecimento da radiação de Hawking.

Como para o estado de Unruh $B_U = 0$, a densidade total de energia no limite $r \to \infty$

é, $T_{tt} = H_2(\infty) - T^{\alpha}_{\alpha}(\infty) - \frac{A_U}{M^2}$. Para qualquer tipo de campo considerado, espera-se que esta quantidade seja maior ou igual ao fluxo assintótico, $T_{tr} = \frac{A_U}{M^2}$. Para o nosso caso, que consiste em um campo escalar descrevendo partículas sem massa, temos que a densidade de energia no infinito e o fluxo assintótico são iguais, ou seja

$$T^{tt} = T^{tr},$$

$$H_2(\infty) - T^{\alpha}_{\alpha}(\infty) - \frac{A_U}{M^2} = \frac{A_U}{M^2}.$$

De onde obtemos

$$A_U = \frac{M^2}{2}\left[H_2(\infty) + T^{\alpha}_{\alpha}(\infty)\right] . \tag{3.79}$$

Como no caso bidimensional o traço do tensor de energia momento deve ser proporcional ao escalar de curvatura, $T^{\alpha}_{\alpha}(r) = \alpha R$, resulta

$$A_U = \frac{M^2}{2}\left\{M\int_{2M}^{\infty}(r')^{-2}\alpha\frac{4M}{r'^{-3}}dr'\right\} . \tag{3.80}$$

Resolvendo para A_U temos

$$A_U = \frac{\alpha}{32}, \tag{3.81}$$

e substituindo o valor de A_U obtido em (3.76) encontramos o valor de α,

$$\alpha = \frac{1}{24\pi}. \tag{3.82}$$

Assim, partindo do conhecimento daradiação de Hawking, conseguimos obter a anomalia do traço do tensor de energia-momento.

3.3.1.2 Caso quadridimensional

Agora vamos analisar a solução geral da equação de conservação da energia dada pelas equações (3.34) a (3.37) para o caso do buraco negro de Schwarzschild, cuja métrica é dada por (3.55), afim de obter informações a respeito da relação existente entre a anomalia de traço do tensor de energia-momento e o fluxo de radiação de Hawking emitido por este buraco negro. Porém, para o caso quadridimensional esta relação não poderá ser obtida tão diretamente como foi feito para a métrica de Schwarzschild truncada, pois não conhecemos a função $\Theta(r)$. Uma alternativa para transpor tal dificuldade é, então, usarmos o conhecimento do coeficiente da anomalia e do fluxo assintótico da radiação calculados independentemente, para obter as informações possíveis e estimar o valor de $\Theta(r)$.

Para a geometria de Schwarzschild, o valor do traço do tensor de energia-momento anômalo em termos dos invariantes geométricos do espaço-tempo dada pela equação (2.85) assume o valor

$$\langle T^{\alpha}_{\alpha}\rangle_{Ren} = \frac{1}{2880\pi^2}C^2 = \frac{1}{60\pi^2}\frac{M^2}{r^6}. \tag{3.83}$$

Substituindo este valor em (3.32) e resolvendo a integral encontramos

$$H(r) = \frac{\beta}{M^2}\left(\frac{3}{640} - \frac{M^4}{8r^4} + \frac{M^5}{10r^5}\right), \tag{3.84}$$

onde, $\beta = \frac{1}{60\pi^2}$.

O tensor $T^{(1)\mu}_{\nu}$ é o mesmo para todos os estados de vácuo para um dado campo sem massa, e suas componentes não nulas são dadas por

$$T^{(1)t}_{t} = \frac{\beta}{M^2r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(-\frac{3}{640} + \frac{5M^4}{8r^4} - \frac{11M^5}{10r^5}\right), \tag{3.85}$$

$$T^{(1)r}_{r} = \frac{\beta}{M^2r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{3}{640} - \frac{M^4}{8r^4} + \frac{M^5}{10r^5}\right), \tag{3.86}$$

$$T^{(1)r}_{r} - \frac{1}{4}T^{(1)\alpha}_{\alpha} = \frac{\beta}{M^2r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{3}{640} - \frac{3M^4}{8r^4} + \frac{3M^5}{5r^5}\right), \tag{3.87}$$

e

$$T^{(1)\theta}_{\theta} - \frac{1}{4}T^{(1)\alpha}_{\alpha} = \frac{\beta}{M^2r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{M^4}{4r^4} - \frac{M^5}{2r^5}\right). \tag{3.88}$$

Para o estado de vácuo de Boulware ($|B\rangle$), que é definido de forma que seja vazio no infinito, espera-se que as componentes de $T^{(B)\mu}_{\nu}$ tendam rapidamente à zero a medida que $r \to \infty$, e também que se anulem no limite $M \to 0$. Sabemos ainda que $T^{(B)\mu}_{\nu}$ não é regular no horizonte do futuro, de forma que existe a possibilidade de $\Theta_B(r)$ não ser bem comportada a medida que $r \to 2M$, e, com isso, a integral que define $G_B(r)$ pode não ser convergente. Para contornar este problema vamos redefinir a função $G_B(r)$, substituindo o limite de integração inferior, o que equivale a redefinirmos a constante B_B. Para este estado de vácuo consideraremos, ao invés de (3.31), a seguinte integral

$$G_B(r) = 2\int_{\infty}^{r}(r'-3M)\,\Theta_B(r')dr'. \tag{3.89}$$

O tensor de energia-momento para o estado de Boulware é

$$T^{(B)\mu}_{\nu} = T^{(1)\mu}_{\nu} + T^{(3)\mu}_{\nu}\left[\Theta_B\right] + T^{(4)\mu}_{\nu}\left[B_B\right] \tag{3.90}$$

e as componentes de $T_\nu^{(B)\mu}$ são:

$$\begin{aligned} T_t^{(B)t} &= \frac{\beta}{M^2 r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(-\frac{3}{640}+\frac{5M^4}{8r^4}-\frac{11M^5}{10r^5}\right)+ \\ &-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}G_B(r)-2\Theta_B(r)-\frac{B_B}{M^2r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned} T_r^{(B)r} &= \frac{\beta}{M^2 r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{3}{640}-\frac{M^4}{8r^4}+\frac{M^5}{10r^5}\right)+ \\ &+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}G_B(r)+\frac{B_B}{M^2r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.92}$$

e

$$T_\theta^{(B)\theta} = T_\varphi^{(B)\varphi} = \Theta_B(r)+\frac{1}{4}T_\alpha^\alpha(r). \tag{3.93}$$

Dado que este estado de vácuo é regular no infinito, devemos ter $T_t^{(B)t}(\infty) = T_r^{(B)r}(\infty) = 0$, o que fornece a equação

$$\frac{\beta}{M^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(-\frac{3}{640}-\frac{M^4}{8r^4}\right)+G_B(r)+\frac{B_B(r)}{M^2}=0\,. \tag{3.94}$$

Tomando o limite $r \to \infty$ nesta última equação , a função $G_B(r)$ se anula, e resulta

$$B_B = -\frac{3\beta}{640}\,, \tag{3.95}$$

o que completa a determinação das constantes arbitrárias no tensor de energia-momento anômalo para o estado de vácuo de Boulware.

A análise para o estado quântico de Hartle-Hawking no caso quadridimencional envolve complexidades técnicas que estão além do escopo deste trabalho e portanto não será feita aqui.

Para o estado de vácuo de Unruh que é regular no horizonte do futuro, temos que $B_U = 0$ e, portanto, o tensor de energia-momento para este estado é dado por

$$T_\nu^{(U)\mu} = T_\nu^{(1)\mu} + T_\nu^{(2)\mu}[A_U] + T_\nu^{(3)\mu}[\Theta_U] \tag{3.96}$$

Desta forma, as componentes do tensor de energia-momento para o estado de vácuo de Unruh, na geometria de Schwarzschild são:

$$\begin{aligned} T_t^{(U)t} &= \frac{\beta}{M^2 r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(-\frac{3}{640}+\frac{5M^4}{8r^4}-\frac{11M^5}{10r^5}\right)+\frac{\beta M^2}{2r^6} \\ &+\frac{A_U}{M^2r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}G_U(r)-2\Theta_U(r), \end{aligned} \tag{3.97}$$

$$
\begin{aligned}
T_r^{(U)r} = & \frac{\beta}{M^2 r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{3}{640}-\frac{M^4}{8r^4}+\frac{M^5}{10r^5}\right)+ \\
& -\frac{A_U}{M^2 r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} G_U(r),
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

e

$$
T_t^{(U)r} = -\frac{A_U}{M^2 r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}. \tag{3.99}
$$

A única forma de matéria na região assintótica é o fluxo de radiação emitido pelo buraco negro. Isso implica que os termos principais de T_r^r e $-T_t^t$, que são da ordem de r^{-2}, devem ser iguais a T_r^t, ou seja, a densidade total de energia deve ser igual ao fluxo assintótico. Igualando estes termos, no limite $r \to \infty$ resulta

$$
M^2 G_U(\infty) = 2A_U - \frac{3\beta}{640}\,, \tag{3.100}
$$

onde $G_U(r)$ é definida em termos de $\Theta_U(r)$ pela equação (3.31). A equação (3.100) é análoga a (3.79) e é uma condição que a função $\Theta_U(r)$ deve satisfazer.

Neste ponto podemos afirmar pouca coisa a respeito da forma da função $\Theta_U(r)$, uma das informações que temos é que, assintoticamente ela deve corresponder à pressão transversal, T_θ^θ, exercida pela radiação emitida pelo buraco negro. Esta quantidade não pode ser nula para a radiação vinda de uma fonte com dimensão efetiva finita. Sabe-se que a contribuição para o tensor de energia-momento proveniente de uma partícula com quadri-momento p^μ é proporcional a $p_\mu p_\nu$. No espaço-tempo plano, um corpo com raio b é visto por um observador posicionado a uma distância r do corpo, como sendo um disco. Para este observador, a razão entre as componentes p_θ e p_r do momento de uma partícula emitida de um ponto localizado na extremidade do disco é dada por

$$
\frac{p_\theta}{p_r} \approx \frac{b}{r}\,. \tag{3.101}
$$

Logo, a relação entre as componentes do tensor de energia-momento é

$$
\frac{T_\theta^\theta}{T_r^r} \approx \left(\frac{b}{r}\right)^2, \tag{3.102}
$$

onde $T_r^r \sim \frac{L}{4\pi r^2}$, sendo L a luminosidade do corpo, ou seja, a potência total irradiada. Para um buraco negro, essa quantidade é dada por

$$
L = \int_{r\to\infty} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \langle T_r^t \rangle = \frac{4\pi A_U}{M^2}\,, \tag{3.103}
$$

resultando em
$$T_\theta^\theta \approx \frac{b^2 A_U}{M^2 r^4}. \tag{3.104}$$
Para partículas vindas de pontos mais próximos do centro do disco, a pressão transversal é menor do que a aproximação obtida em (3.104).

Uma análise da trajetória de partículas sem massa na geometria de Schwarzschild feita por AMES e THORNE (1968), mostra que, um corpo cuja massa é ligeiramente maior que $2M$, e que irradia, é visto por um observador distante como sendo um disco de raio efetivo $b \sim \sqrt{27}M$. Esta conclusão aplica-se também à radiação de Hawking. Dessa forma, podemos escrever
$$T_\theta^\theta \approx \frac{27 A_U}{r^4}. \tag{3.105}$$
Conseqüentemente, a função Θ_U é estimada como sendo dada por
$$\Theta_U(r) \sim \lambda \frac{A_U}{r^4}, \tag{3.106}$$
sendo λ um parâmetro cujo valor está no intervalo $0 < \lambda \lesssim 27$, CHRISTENSEN e FULLING (1976).

3.3.2 O buraco negro de Reissner-Nordström

A métrica de Reissner-Nordström é a solução com simetria esférica para as equações de Einstein-Maxwell no vácuo,
$$G_{\nu\mu} = 8\pi T_{\nu\mu}, \tag{3.107}$$
onde $T_{\nu\mu}$, é o tensor de energia-momento de Maxwell. A geometria de Reissner-Nordström descreve a região exterior a uma casca esférica de massa M e carga Q submetida ao colapso gravitacional. A métrica que descreve este buraco negro é dada pela equação (3.1) com
$$f(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)., \tag{3.108}$$
ou seja,
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{3.109}$$

No presente estudo consideraremos apenas buracos negros para os quais sua massa é maior que o módulo de sua carga elétrica ($M > |Q|$). Para este caso existem dois valores de r que anulam a função $f(r)$. Estes valores são

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \tag{3.110}$$

onde r_- é chamado de horizonte de Cauchy, e r_+ é o horizonte de eventos do buraco negro de Reissner-Nordström.

Consideraremos apenas o caso bidimensional, truncando a métrica nas coordenadas t e r. Assim, a métrica resultante é

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} dr^2. \tag{3.111}$$

Os cálculos que seguem são análogos aos feitos para o caso bidimensional da solução de Schwarzschild.

Para a métrica (3.111) o tensor de curvatura vale,

$$R = \frac{4M}{r^3} - \frac{6Q^2}{r^4} \tag{3.112}$$

e o traço do tensor de energia-momento anômalo é

$$\langle T^{\alpha}_{\alpha} \rangle_{Ren} = \frac{M}{6\pi r^3} - \frac{Q^2}{4\pi r^4}. \tag{3.113}$$

Substituindo este valor na equação (3.50) e fazendo a integração resulta

$$H_2(r) = \frac{1}{24\pi}\left(-\frac{M^2}{r^4} + \frac{2MQ^2}{r^5} - \frac{Q^4}{r^6} + \frac{M^2}{r_+^4} - \frac{2MQ^2}{r_+^5} + \frac{Q^4}{r_+^6}\right), \tag{3.114}$$

que no limite $r \to \infty$ se reduz a

$$H_2(\infty) = \frac{1}{24\pi}\left(\frac{M^2}{r_+^4} - \frac{2MQ^2}{r_+^5} + \frac{Q^4}{r_+^6}\right). \tag{3.115}$$

Uma vez que conhecemos $H_2(r)$ para o buraco negro de Reissner-Nordström, podemos obter uma solução para a equação de conservação da energia análoga as equações (3.51) a (3.54) do buraco negro de Schwarzschild para o caso de Reissner-Nordström substituindo (3.114) na equação (3.52). Com isso, obtemos o tensor de energia-momento do buraco negro de Reissner-Nordström, o qual, no o limite $r \to \infty$, é dado por

$$T^{(1)\mu}_{\nu}(\infty) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{24\pi}\left(\frac{M^2}{r_+^4} - \frac{2MQ^2}{r_+^5} + \frac{Q^4}{r_+^6}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{24\pi}\left(\frac{M^2}{r_+^4} - \frac{2MQ^2}{r_+^5} + \frac{Q^4}{r_+^6}\right) \end{bmatrix}, \tag{3.116}$$

$$T^{(2)\mu}_{\nu}(\infty) = \frac{A}{M^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.117}$$

e

$$T^{(3)\mu}_{\nu}(\infty) = \frac{B}{M^2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.118}$$

O valor esperado do tensor de energia-momento quântico do buraco negro de Reissner-Nordström bidimensional nos três estados de vácuo considerados é calculado nos artigos de HISCOCK (1977) e de BALBINOT et al. (2004), sendo as suas componentes nas coordenadas (v, u) dadas por:

Boulware:

$$\langle B|T_{uu}|B\rangle = \langle B|T_{vv}|B\rangle = \frac{1}{24\pi}\left(-\frac{M}{r^3} + \frac{3(M^2+Q^2)}{2r^4} - \frac{3MQ^2}{r^5} + \frac{Q^4}{r^6}\right), \tag{3.119}$$

e

$$\langle B|T_{uv}|B\rangle = \langle B|T_{vu}|B\rangle = \frac{1}{24\pi}\left(-\frac{M}{r^3} + \frac{2M^2}{r^4} + \frac{3Q^2}{2r^4} - \frac{4MQ^2}{r^5} + \frac{3Q^4}{2r^6}\right). \tag{3.120}$$

Hartle-Hawking:

$$\langle H|T_{uu}|H\rangle = \langle H|T_{vv}|H\rangle = \langle B|T_{uu}|B\rangle + \frac{M^2-Q^2}{48\pi r_+^4}, \tag{3.121}$$

e

$$\langle H|T_{uv}|H\rangle = \langle H|T_{vu}|H\rangle = \langle B|T_{uv}|B\rangle. \tag{3.122}$$

Unruh:

$$\langle U|T_{uu}|U\rangle = \langle H|T_{uu}|H\rangle = \langle B|T_{uu}|B\rangle + \frac{M^2-Q^2}{48\pi r_+^4}, \tag{3.123}$$

$$\langle U|T_{vv}|U\rangle = \langle B|T_{uu}|B\rangle, \tag{3.124}$$

e

$$\langle U|T_{uv}|U\rangle = \langle U|T_{vu}|U\rangle = \langle B|T_{uv}|B\rangle. \tag{3.125}$$

Para o estado de Boulware o tensor de energia-momento deve anular-se no infinito. Assim temos novamente que

$$A_B = 0. \tag{3.126}$$

Da mesma forma que para o buraco negro de Schwarzschild, obtemos

$$B_B = -M^2 H_2(\infty), \tag{3.127}$$

ou seja,

$$B_B = -\frac{1}{24\pi}\left(\frac{M^2}{r_+^4} - \frac{2MQ^2}{r_+^5} + \frac{Q^4}{r_+^6}\right). \tag{3.128}$$

Para o estado de vácuo de Hartle-Hawking o valor esperado do tensor de energia-momento do buraco negro de Reissner-Nordström nas coordenadas (t, r^*), pode ser obtido a partir de (3.121) e (3.122), sendo o seu valor no infinito

$$\langle H|T^\mu_\nu(\infty)|H\rangle = \frac{M^2 - Q^2}{24\pi r_+^4}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.129}$$

Logo, para este estado de vácuo encontramos

$$A_H = 0. \tag{3.130}$$

Comparando a componente $\langle T^t_t\rangle$ de (3.129) com $T^{(1)t}_t + T^{(3)t}_t$ no infinito, obtemos

$$H_2(\infty) + \frac{B_H}{M^2} = \frac{1}{24\pi}\frac{M^2 - Q^2}{r_+^4}. \tag{3.131}$$

Dessa relação e de (3.115) determina-se o valor da constante B_H,

$$B_H = \frac{1}{24\pi}\left(-\frac{M^2Q^2}{r_+^4} + \frac{2M^3Q^2}{r_+^5} - \frac{M^2Q^4}{r_+^6}\right). \tag{3.132}$$

Para o estado de vácuo de Unruh o valor esperado do tensor de energia-momento no infinito é dado por

$$\langle U|T^\mu_\nu(\infty)|U\rangle = \frac{M^2 - Q^2}{48\pi r_+^4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.133}$$

Comparando a componente T^r_t desta equação com a componente T^r_t de (3.119) temos

$$A_U = \frac{M^4 - M^2Q^2}{48\pi r_+^4}. \tag{3.134}$$

Seguindo os mesmos procedimentos usados no caso do estado de Hartle-Hawking, encontramos

$$B_U = \frac{1}{24\pi}\left(-\frac{M^2Q^2}{r_+^4} + \frac{2M^3Q^2}{r_+^5} - \frac{M^2Q^4}{r_+^6}\right). \tag{3.135}$$

Fazendo $Q = 0$ nestas expressões, os valores das constantes de integração obtidas para os três estados de vácuo considerados na geometria de Reissner-Nordström coincidem com os encontrados para os mesmos estados para o buraco negro de Schwarzschild.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1 Resumo dos resultados obtidos

No capítulo dois desta monografia obtivemos a forma geral do tensor de energia-momento para buracos negros estáticos com simetria esférica. Este resultado foi encontrado resolvendo-se a equação covariante de conservação da energia, supondo-se que os estados quânticos de interesse são esfericamente simétricos, e que o valor esperado do tensor de energia-momento nesses estados seja independente do tempo. Para o caso bidimensional a solução obtida foi dada em função de duas constantes de integração indeterminadas (A e B) e uma função, ($H_2(r)$) que depende do valor do traço do tensor de energia-momento. Para o caso quadridimensional a solução encontrada é análoga ao caso bidimensional, porém, temos uma função adicional ($G(r)$), a qual carrega informação a respeito das componentes angulares do tensor de energia-momento.

Uma vez encontrada a solução geral para a equação de conservação da energia, passamos a considerar alguns casos particulares de interesse. Primeiramente consideramos o caso do buraco negro de Schwarzschild bidimensional, no qual trunca-se a métrica considerando apenas as coordenadas t e r. Para este caso pudemos, por comparação de nossas expressões com o valor esperado do tensor de energia-momento quântico, o qual é encontrado na literatura, determinar o valor das constantes A e B para os estados de vácuo quântico de Boulware $|B\rangle$, Hartle-Hawking $|H\rangle$ e Unruh $|U\rangle$, sendo que os resultados por nós obtidos estão em concordância com os obtidos por CHRISTENSEN e FULLING (1977). Também realizamos o processo inverso, determinando a anomalia do traço a partir do conhecimento do tensor de energia-momento da radiação de Hawking. Para o buraco negro de Schwarzschild não podemos fazer uma análise tão simples e com resultados tão objetivos como com a métrica truncada, uma vez que não conhecemos o valor da função $G(r)$, desta forma não é possível determinar o valor das constantes de integração para todos os estados de vácuo considerados. Porém, analisando o comportamento assintótico do tensor de energia-momento no estado de Unruh, conseguimos estabelecer certas condições que a função $\Theta(r)$ deve satisfazer (Eqs.. (3.100) e (3.106)). Para o estado de Boulware conseguimos determinar explicitamente o valor de B (Eq. (3.95)).

Por último, estendemos a análise feita no caso do buraco negro de Schwarzschild com a métrica truncada para o buraco negro de Reissner-Nordström, determinado os valores das constantes de integração para os três estados de vácuo considerados. Fazendo $Q = 0$ nas expressões obtidas para estas constantes, temos que elas tomam os mesmos valores que no caso de Schwarzschild, como o esperado.

4.2 Possibilidades de futuros trabalhos.

Como já mencionado anteriormente, o resultado obtido para a forma geral do tensor de energia-momento dada pelas equações (3.34) a (3.37) e (3.52) a (3.54) é aplicável a qualquer buraco negro estático com simetria esférica. Assim, a análise feita pode ser estendida para outros buracos-negros com esta simetria. Desde se conheça previamente o valor do tensor de energia-momento quântico, podemos determinar o valor das constantes de integração. Para buracos negros para os quais não conhecemos o valor do tensor de energia-momento quântico, podemos, por considerações geométricas, estimar o valor destas constantes, como feito por CHRISTENSEN e FULLING (1977). A mesma análise feita aplica-se a outros efeitos quânticos, como por exemplo o efeito Casimir.

Também podemos considerar campos gerados por outros tipos de partículas além das escalares, como neutrinos e elétrons, uma vez que a única alteração necessária está nos coeficientes da expressão que dá a anomalia do traço em termos das propriedades geométricas do espaço-tempo.

Outra possibilidade é calcularmos diretamente através da teoria quântica de campos o valor esperado do tensor de energia-momento de diferentes efeitos quânticos, em *background's* nos quais este ainda não seja conhecido, e comparar com os resultados do presente trabalho.

4.3 Conclusão

Neste trabalho realizamos um estudo a respeito da relação entre a anomalia de traço com o valor esperado do tensor de energia-momento de buracos negros estáticos com simetria esférica, para os três estados de vácuo quântico de interesse físico no *background* de buracos negros. Obtivemos uma solução geral para a equação covariante de conservação da energia e, posteriormente, particularizamos os resultados considerando os buracos negros de Schwarzschild e Reissner-Nordström, calculando os valores das constantes de integração e desta forma obtendo o valor explícito do tensor de energia-momento para os três estados de vácuo de interesse. Para o buraco negro de Schwarzschild, os resultados obtidos estão em concordância com os já encontrados na literatura. Para o caso de Reissner-Nordström podemos testar os resultados obtidos no limite sem carga elétrica, e constatamos que os resultados coincidem com os obtidos para o buraco negro de Schwarzschild, o que indica que nossos resultados estão corretos.

APÊNDICE A – SISTEMAS DE UNIDADES

No desenvolvimento deste trabalho, todas quantidades físicas, equações e fórmulas foram escritas em termos das unidades de Planck, também conhecidas como unidades naturais. Este apêndice dedica-se a especificar os sistemas de unidades geometrizadas e de unidades de Planck, os quais geralmente são usados na literatura referente a relatividade geral e na mecânica quântica, respectivamente.

A.1 Unidades Geometrizadas

Na relatividade geral é conveniente usar-se o sistema de unidades geometrizadas. Neste sistema de unidades físicas fundamentais são escolhidas de tal forma que as constantes fundamentais como a velocidade da luz c e a constante gravitacional G assumam o valor adimensional de uma unidade. Conseqüentemente, todas as quantidades físicas que no sistema internacional de unidades (SI) são dadas em unidades de comprimento (L), tempo (T), massa (M) e potências desta quantidades, são dadas no sistema de unidades geometrizadas com dimensões da unidade de comprimento e de potências desta, ou seja, como comprimentos, áreas, volumes, grandezas adimensionais, etc.... Mais precisamente, uma quantidade física que no SI tem sua dimensão dada em unidades de $L^m T^n M^o$ no sistema de unidades geometrizadas terá sua dimensão dada em unidades de L^{m+n+o}. Uma vez que a velocidade da luz c e constante gravitacional G assumem um valor unitário, adimensional e constante, podemos omitir estas constantes em todas as expressões onde originalmente elas apareceriam. Desta forma, o uso do sistema de unidades geometrizadas torna-se conveniente e extremamente útil na relatividade geral, uma vez que simplifica os cálculos e notações.

Porém, é importante ressaltar que para aplicações práticas como medidas experimentais, é sempre necessário expressar quaisquer grandezas físicas em termos das unidades originais do sistema internacional. Felizmente, é fácil encontrarmos o fator de conversão que relaciona o sistema de unidades geometrizadas com o SI. Podemos citar, por exemplo, a velocidade da luz, que no sistema internacional de unidades tem dimensões de $\left(\frac{L}{T}\right)$. Assim, o fator de conversão do SI para unidades geometrizadas de uma quantidade com dimensão de tempo é exatamente o valor numérico da velocidade da luz no vácuo, c. Outro exemplo simples é uma quantidade que no SI tem dimensões de massa, cujo fator de conversão para o sistema de unidades geometrizadas é o valor numérico correspondente a $\left(\frac{G}{c^2}\right)$. Em geral, uma quantidade que no sistema internacional de unidades tem dimensão dada em unidades de $L^m T^n M^o$ possui um fator de conversão em relação ao sistema de unidades geometrizadas dado por $c^n \left(\frac{G}{c^2}\right)^o$. Em termos práticos, para converter uma equação escrita em unidades geometrizadas para um forma que seja válida no SI, devemos primeiramente identificar a dimensão em unidades não-geometrizadas de cada uma das quantidades físicas que aparecem na referida equação. Feito isto, basta multiplicar cada quantidade por seu respectivo fator de conversão.

Em cálculos que envolvem propriedades eletromagnéticas e térmicas de sistemas físicos, é usual fixarmos também a constante de Boltzmann k_B e a constante de Coulomb $k_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ iguais a um. Na tabela abaixo apresentamos os fatores de conversão mais utilizados.

Tabela 1: Fatores de conversão para unidades geometrizadas

Grandeza Física	Dimensão no SI	Dimensão em unidades geometrizadas	Fator de conversão
Comprimento	L	L	1
Tempo	T	L	c
Velocidade	LT^{-1}	1	c^{-1}
Massa	M	L	Gc^{-2}
Carga	Q	L	$(GK_C)^{1/2}\, c^{-2}$
Aceleração	LT^{-2}	L^{-1}	c^{-2}
Força	$LT^{-2}M$	1	Gc^{-4}
Momento	$L^2T^{-1}M$	L^2	Gc^{-3}
Energia	$L^2T^{-2}M$	L	Gc^{-4}
Potência	$L^2T^{-3}M$	1	Gc^{-5}
Temperatura	θ	L	GK_Bc^{-4}
Pressão	$L^1T^{-2}M$	L^{-2}	Gc^{-4}
Densidade	$L^{-3}M$	L^{-2}	Gc^{-2}

A.2 Unidades de Planck

Quando efeitos quânticos são considerados na relatividade geral, é usual fazer-se também a constante de Dirac $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, onde h é a constante de Planck, assumir o valor unitário, $\hbar = 1$. No sistema de unidades de Planck todas as grandezas físicas que originalmente são expressas em unidades de comprimento, tempo e massa, passam a ser adimensionais. Neste sistema as unidades de medida fundamenteis passam a ser o Comprimento de Planck (l_p), o tempo de Planck (l_p), a massa de Planck (m_p) a carga de Planck (Q_p) e a temperatura de Planck (T_p).

Na tabela abaixo listamos estas e outras quantidades que podem ser derivadas a partir das unidades fundamentais, apresentando as expressões que as definem e seu valor numérico no sistema internacional de unidades.

Tabela 2: Unidades de Planck

Grandeza Física	Expressão	Valor numérico no SI
Comprimento de Planck	$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$	$1.61624 \times 10^{-35} m$
Tempo de Planck	$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$	$5.39121 \times 10^{-44} s$
Massa de Planck	$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	$2.17645 \times 10^{-8} kg$
Carga de Planck	$Q_p = \sqrt{\frac{\hbar c^4}{K_C}}$	$1.87555 \times 10^{-18} C$
Temperatura de Planck	$\theta_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}}$	$1.41679 \times 10^{32} K$
Energia de Planck	$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$	$1.9561 \times 10^{9} J$
Densidade de Planck	$\rho_p = \frac{c^5}{\hbar G^2}$	$5.15500 \times 10^{9}6 \frac{kg}{m^3}$
Força de Planck	$F_p = \frac{c^4}{G}$	$1.21027 \times 10^{44} N$
Pressão de Planck	$P_p = \frac{c^7}{\hbar G^2}$	$4.63309 \times 10^{113} Pa$

Nessa tabela podemos ver que os valores numéricos da maioria das unidades de Planck são imensuráveis ou inatingíveis para a física experimental. As unidades de Planck são muitas vezes, dentro do modelo atual da física teórica, o limite superior ou inferior que uma determinada quantidade física pode assumir. Por exemplo, uma velocidade de Planck igual a um, corresponde a uma velocidade igual a velocidade da luz no vácuo. Podemos também citar o comprimento e o tempo, sendo que dentro de nossa compreensão atual da natureza, valores menores que uma unidade de Planck destas quantidades não são aplicáveis a nenhum sistema físico. Por último, podemos considerar a temperatura e a pressão de Planck, o único modelo de sistema físico onde valores correspondentes a uma unidade de Planck destas quantidades são possíveis, é o *Big Bang*.

Para fins práticos, devemos sempre, apresentar nossas equações e formulas nas unidades do sistema internacional de unidades. Para convertermos uma equação escrita em termos das unidades de Planck para uma forma que seja válida no sistema de coordenadas convencional, o fator de conversão para cada quantidade que aparece na equação, é o respectivo fator de conversão em unidades geometrizadas divididos por l_p^m, onde m é o expoente da dimensão de comprimento desta quantidade em unidades geometrizadas.

APÊNDICE B – O TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO

O principal foco da realização deste trabalho foi a determinação do tensor de energia-momento anômalo de buracos negros estáticos com simetria esférica, para os três estados de vácuo quântico de interesse no contexto da física dos buracos negros. Neste apêndice apresentamos uma breve revisão sobre o tensor de energia-momento.

O tensor de energia-momento de um dado sistema físico é um objeto matemático que carrega grande parte da informação necessária para a descrição do sistema em questão. Este objeto matemático pode ser apresentado na forma de uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, sendo n a dimensão do espaço tempo considerado.

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & \cdots & T^{0n} \\ T^{10} & T^{11} & \cdots & T^{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T^{n0} & T^{n1} & \cdots & T^{nn} \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

O nosso maior interesse não está no tensor de energia-momento em si, mas sim em suas componentes, uma vez que estas representam quantidades físicas bem definidas, as quais determinam a estrutura do sistema físico caracterizado pelo referido tensor de energia-momento.

A componente T^{00} é interpretada como sendo a densidade total de energia, ou seja, a energia por unidade de volume. Se considerarmos, por exemplo um fluido perfeito em repouso, esta componente corresponde a densidade de massa do fluido.

As outras componentes da primeira linha da matriz são interpretadas como fluxos de energia. Cada uma das componente T^{0j} corresponde ao fluxo de energia através de um plano cujo vetor normal ao mesmo aponta na direção x^j.

As componentes restantes da primeira coluna correspondem a densidades de momento, sendo a componente T^{i0} a densidade da i-ésima componente do momento. Para um tensor simétrico, esta componente é equivalente a j-ésima componente do fluxo de energia.

As componentes espaciais da diagonal principal, (T^{ii}), do tensor de energia-momento representam quantidades físicas do tipo pressão.

As outras componentes puramente espaciais, (T^{ij}) são interpretadas como fluxos de momento.

Em unidades geometrizadas todas as componentes do tensor de energia-momento são dadas com dimensões de m^{-2}.

REFERÊNCIAS

[1] ALVES, M.; BARCELOS-NETO, J. *On the trace anomaly and the energy-momentum conservation of quantum fields at D=2 in classical curved backgrounds.* Brazilian Journal of Physics, v. 34, p. 531-534, 2004.

[2] AMES, W. L.; THORNE, K. S. *The Optical Appearance of a Star that is Collapsing Through its Gravitational Radius.* Astrophysical Journal, v. 151, p. 659-670, 1968.

[3] BALBINOT, R. et al. *Quantum stress tensor for extreme 2D Reissner-Nordström black holes.* Physical Review D, v. 70, p. 064031-064035, 2004.

[4] BIRREL, N. D.; DAVIES P. C. W. *Quantum fields in curved space.* Cambridge University Press, Cambridge, 1977.

[5] BOULWARE, D. G. *Quantum field theory in Schwarzschild and Rindler spaces.* PhysIcal Review D, v. 11, p. 1404-1423, 1975.

[6] CHRISTENSEN, S. M. *Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background: The covariant point-separation method.* Physical Review D, v. 14, p. 2490-2501, 1976.

[7] CHRISTENSEN, S. M.; FULLING, S. A. *Trace Anomalies and the Hawking Effect.* Physical Review D, v. 15, p. 2088-2104, 1977.

[8] DAVIES, P. C. W.; FULLING, S. A.; UNRUH, W. G. *Energy-momentum tensor near an evaporating black hole.* Physical Review D, v. 13, p. 2720-2723, 1976.

[9] DI FRANCESCO, P.; MATHIEU, P. SÉNÉCHAL, D. *Conformal Field Theory.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[10] DESER, D.; DUFF, M. J.; ISHAM, C. J. *Non-local conformal anomalies.* Nuclear Physics B, v. 111, nº. 1, p. 45-55, 1976.

[11] DOWKER, J. S.; CRITCHLEY, R. *Effective Lagrangian and energy-momentum tensor in de Sitter space.* Physical Review D, v. 13, p. 3224-3232, 1976.

[12] FULLING, S. A.; DAVIES, P. C. W.; *Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time - Conformal anomaly.* Royal Society London, Proceedings A, v. 348, p. 393-414, 1976.

[13] GINSPARG, P. *Applied Conformal Field Theory: Fields, Strings and Critical Phenomena* ed. by E. Brézin and Zinn-Justin, Elseiver Science Publishers, 1989.

[14] HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. *Path-integral derivation of black-hole radiance.* Physical. Review D, v. 13, p. 2188-2203, 1976.

[15] HAWKING, S. W. *Black hole explosions?*, Nature, v. 248, p. 30- , 1974.

[16] HAWKING, S. W. *Particle Creation by Black Holes.* Physical Review D, v. 14, p. 199-220, 1975.

[17] HISCOCK, W. A. *Stress-energy tensor near a charged, rotating, evaporating black hole.* Physical Review D, v. 15, p. 3054-3057, 1977.

[18] ISRAEL, W. *Thermo-field dynamics of black holes.* Physics Letters A, v. 57-2, p. 107-110, 1976.

[19] SOPER, D. E. *Classical Field Theory.* Princeton University Press, New York, 1975.

[20] UNRUH, W. G. *Notes on black-hole evaporation.* Physical. Review. D, v. 14, p. 870-892, 1976.

[21] WEYL, H. *Space, Time, Matter.* Dover, New York, 1952.