

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

SOLUÇÃO SEMIANALÍTICA PARA O PERFIL
VERTICAL DO VENTO
NA CAMADA LIMITE PLANETÁRIA

TESE DE DOUTORADO

Lidiane Buligon

Santa Maria, RS, Brasil

2009

**SOLUÇÃO SEMIANALÍTICA PARA O PERFIL VERTICAL
DO VENTO NA CAMADA LIMITE PLANETÁRIA**

por

Lidiane Buligon

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Doutor em Física.**

Orientador: Antônio Gledson Oliveira Goulart

Co-Orientador: Gervásio Annes Degrazia

Santa Maria, RS, Brasil

2009

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Tese de Doutorado

**SOLUÇÃO SEMIANALÍTICA PARA O PERFIL VERTICAL
DO VENTO NA CAMADA LIMITE PLANETÁRIA**

elaborada por
Lidiane Buligon

como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Física

COMISSÃO EXAMINADORA:

Antônio Gledson Goulart, Dr. (UNIPAMPA)
(Presidente/Orientador)

Gervásio Annes Degrazia, Dr. (UFSM)
(Co-Orientador)

Acir Mércio Loredo Souza, Dr. (UFRGS)

Jonas da Costa Carvalho, Dr. (UFPEL)

Otávio Costa Acevedo, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 04 de Agosto de 2009.

Aos meus pais, Alamir e Marlene, e à meu namorado, Charles.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, colaboraram para a realização deste trabalho e, em particular:

– Aos professores, Antônio Gledson Goulart e Gervásio Annes Degrazia, pelos ensinamentos, apoio, incentivo e dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho;

– Ao professor, Otávio Acevedo, pela orientação sempre dedicada e prestativa, bem como o esforço em colaborar com o trabalho, apesar da distância em alguns momentos, meu muito obrigada;

– Ao professor, Marco T. N. B. Vilhena, pelos ensinamentos e amizade;

– Aos amigos, Fábio e Alex, obrigada pelas dicas de informática e física;

– Aos colegas do Laboratório de Micrometeorologia da UFSM, valeu pessoal;

– Agradeço, em especial, ao meu namorado e colega Charles pelo apoio, pela amizade, pela cumplicidade e pelo carinho demonstrados durante todo o curso;

– Aos professores do PPGFis, que colaboraram com a minha formação;

– Ao PPGFis, pela oportunidade e disponibilização dos recursos, materiais e humanos, necessários à realização deste trabalho;

– Aos funcionários do PPGFis, Saionara e Carlos, pelo atendimento sempre prestativo e dedicado;

– À minha mãe, Marlene, ao meu pai, Alamir e aos meus irmãos: Eliane, Alamir Leandro e Ediane Andréia, pelo incentivo e carinho que sempre me dispensaram;

– Por fim, agradeço à CAPES, pelo suporte financeiro.

*Aprender com a experiência dos outros
é menos penoso do que aprender com a própria.*
José Saramago

RESUMO

Tese de doutorado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

SOLUÇÃO SEMIANALÍTICA PARA O PERFIL VERTICAL DO VENTO NA CAMADA LIMITE PLANETÁRIA

AUTOR: LIDIANE BULIGON

ORIENTADOR: ANTÔNIO GLEDSON GOULART

CO-ORIENTADOR: GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 04 de Agosto de 2009.

No presente estudo, usando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), deriva-se uma solução semianalítica para as Equações de Navier-Stokes aplicada à Camada Limite Planetária (CLP). A técnica combina uma expansão em série com uma integração por meio de um par de transformada-inversa. A CLP é discretizada em N subintervalos de maneira que, dentro de cada sub-região, os coeficientes de difusão assumam valores médios, o que nos permite utilizar perfis mais realísticos para o coeficiente de difusão e que dependem das características dos turbilhões mais energéticos. Os termos não-lineares são escritos em função das propriedades cinemáticas do escoamento, como divergência e vorticidade, permitindo que a solução seja interpretada em termos das condições sinóticas de grande escala. O desempenho do modelo estudado foi comparado com dados experimentais de vento medidos durante os experimentos de Wangara. Adicionalmente, os resultados obtidos através do modelo proposto são comparados com o modelo unidimensional resolvido pelo método de discretização, com o modelo de duas camadas, com a Lei Logarítmica e com o modelo de Ekman. O método empregado mostrou-se eficiente para o problema estudado, uma vez que apresentou resultados coerentes com os disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Equação de Navier-Stokes; Modelo de Ekman; Teoria-K; Transformada Integral Generalizada (GITT).

ABSTRACT

Tese de doutorado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

A SEMI-ANALYTICAL SOLUTION FOR THE VERTICAL WIND PROFILE IN THE ATMOSPHERIC BOUNDARY LAYER

AUTHOR: LIDIANE BULIGON

ADVISER: ANTÔNIO GLEDSON GOULART

ADVISER: GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA

Local and Date: Santa Maria, August 04th, 2009.

In the present study, using the Generalized Integral Transform Technique (GITT), we derive a semi-analytical solution of the Navier-Stokes equation to obtain the mean wind profile in the atmospheric boundary layer. The technique combines series expansion and an integration employing an inverse-transform pair. The PBL is discretized into N sub-intervals in such manner that inside each sub-region the eddy diffusivity is the average value, this allows the use of realistic eddy diffusivity profiles, which depend on the physical characteristics of the energy-containing eddies. The nonlinear terms are written in terms of kinematical properties of the flow, such as divergence and vorticity, allowing the solutions to be interpreted in terms of large-scale synoptic conditions. The model results are compared to observed wind profiles obtained from the classical Wangara experiment. In addition, the results obtained by the proposed model are compared with the unidimensional model solved by the method of discretization, the model of two layers, with the logarithmic law and the Ekman model. The method used was efficient for the problem studied, since it has presented results consistent with those available in literature.

Keywords: Navier-Stokes Equations; Ekman Model; Theory-K; Generalized Integral Transform Technique (GITT)

LISTA DE FIGURAS

2.1	Fluxo de massa através das paredes de um elemento de volume, em virtude do escoamento ao longo do eixo- x . Figura adaptada de: HOLTON, J. R. <i>An Introduction to Dynamic Meteorology</i> , 2004.	23
2.2	Parcela de ar em Equilíbrio Hidrostático. Figura adaptada de: VIANELLO, R. L.; ALVES, A. R. <i>Meteorologia Básica e Aplicações</i> , UFV, 2006.	25
2.3	Representação Gráfica do Vento Geostrófico no Hemisfério Sul. Figura adaptada de: VIANELLO, R. L.; ALVES, A. R. <i>Meteorologia Básica e Aplicações</i> , UFV, 2006.	26
4.1	a) Hodógrafo da solução espiral de Ekman. b) Perfil Vertical da Velocidade Média, $ U = \sqrt{u^2 + v^2}$	39
4.2	Perfil Vertical da Velocidade Média a partir da equação (4.13) com equação (4.14) no caso $\frac{z}{L} < 0$	40
4.3	Perfis analíticos do vento médio e da direção (linhas) versus dados observados durante o experimento de Wangara (símbolos). A figura (a) refere-se ao dia 40 e a figura (b) ao dia 33. Figura adaptada de: WILSON, J.D.; FLESCHE, T.K. <i>An Idealized Mean Wind Profile for the Atmospheric Boundary Layer. Boundary-Layer Meteorology</i> , 2004.	42
4.4	Componentes do vento (u, v), coeficiente de difusão K e hodógrafo para o modelo de Ekman com K constante, ambas soluções (WKB(I) e WKB(II)) e solução numérica. Figura adaptada de: PARMHED, O.; KOS, I.; GRISOGONO, B. <i>An improved Ekman layer approximation for smooth eddy diffusivity profiles. Boundary-Layer Meteorology</i> , 2005.	43
4.5	O elemento de fluido, que é representado por um retângulo desenhado com linhas sólidas, está inicialmente na origem. Depois ele é representado por linhas pontilhadas. Em a) o retângulo permanece na origem, mas aumenta a área; b) o retângulo permanece na origem, mas diminui a área. A forma e a orientação do elemento de fluido permanece os mesmos em ambos os casos. Figura adaptada de: BLUESTEIN, H.B. <i>Principles of Kinematics and Dynamics</i> . Vol. I. Synoptic - Dynamic Meteorology in Midlatitudes, 1992.	50

4.6	O elemento de fluido, que é representado por um retângulo desenhado com linhas sólidas, está inicialmente na origem. Depois ele é representado por linhas pontilhadas. Em a) o retângulo sofre uma rotação no sentido anti-horário; b) o retângulo sofre uma rotação no sentido horário. A forma e a área do elemento de fluido permanece os mesmos em ambos os casos. Figura adaptada de: BLUESTEIN, H.B. <i>Principles of Kinematics and Dynamics</i> . Vol. I. Synoptic - Dynamic Meteorology in Midlatitudes, 1992.	50
6.1	Condições de contornos em $z = z_0$ e na região retangular. Figura adaptada de: ÖZİŞİK, M. N. <i>Heat Conduction</i> . John Wiley & Sons, Inc., 1993.	61
6.2	Desenho esquemático da discretização da CLP.	62
7.1	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados para diferentes ordem de truncamento.	73
7.2	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados para diferentes valores de x e y	74
7.3	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados para diferentes valores de L_x e L_y	75
7.4	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados para diferentes valores de Δz	76
7.5	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados para diferentes valores de δ e em todos os casos $\zeta = 0$	77
7.6	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados para diferentes valores de ζ e em todos os casos $\delta = 0$	78
7.7	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados para diferentes valores de δ e ζ	79
7.8	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados para diferentes valores de δ e ζ	79
7.9	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados para diferentes valores de δ e ζ	80

8.1	a) Localização das Estações no Experimento de Wangara. b) Localização da Estação 5. Figura adaptada de CLARKE, R.H. et al. The Wangara Experiment: Boundary Layer Data, CSIRO, 1971.	82
8.2	Temperatura Potencial Virtual. A linha contínua refere-se aos dados do dia 33; a pontilhada, aos dados do dia 40.	84
8.3	Hodógrafo do modelo de Ekman (Equação (4.11)) e da solução (6.5). Eq. (6.5)-a refere-se ao caso barotrópico e Eq. (6.5)-b, ao caso baroclínico.	84
8.4	Coeficientes de difusão calculados pela Equação (4.32) para $\alpha = x, y, z$	85
8.5	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Comparações realizadas entre os modelos: o unidimensional; a Lei Logarítmica; o sugerido por Wilson e Flesch e o tridimensional. A Eq. (6.5)-a refere-se ao caso unidimensional barotrópico e a Eq. (6.5)-b, ao unidimensional baroclínico. Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 33.	86
8.6	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Comparações realizadas entre os modelos: o unidimensional; a Lei Logarítmica; o sugerido por Wilson e Flesch e o tridimensional. A Eq. (6.5)-a refere-se ao caso unidimensional barotrópico e a Eq. (6.5)-b, ao unidimensional baroclínico. Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 40.	88
8.7	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados pela Equação (6.46) para diferentes valores de δ e ζ . Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 33.	90
8.8	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados pela Equação (6.46) para diferentes valores de δ e ζ . Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 33.	92
8.9	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados pela Equação (6.46) para diferentes valores de δ e ζ . Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 40.	93

8.10	Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b) . Os perfis são calculados para diferentes valores de δ e ζ , a partir da Equação (6.46). Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 40.	95
D.1	Carta Sinótica do Experimento de Wangara do dia 33. Figura adaptada de CLARKE, R.H. et al. The Wangara Experiment: Boundary Layer Data, CSIRO, 1971.	107
D.2	Carta Sinótica do Experimento de Wangara do dia 40. Figura adaptada de CLARKE, R.H. et al. The Wangara Experiment: Boundary Layer Data, CSIRO, 1971.	108
E.1	Representação da região de interesse $V \in \mathbb{R}^3$ com contorno suave - ∂V , e elemento de superfície dS com normal \mathbf{n} exterior e Campo de Fluxo Φ . Esquematiza - se, Figura D.1 - b, a dedução da Integral de Fluxo do Campo Vetorial Φ . Figura modificada a partir de figuras de Logan (1994) - Figura D.1 - a; e Swokowski (1994) - Figura D.1 - b.	110

LISTA DE TABELAS

7.1	Comparação entre o tempo computacional exigido em cada simulação para diferentes espessuras das subcamadas. Os valores apresentados nesta tabela referem-se à Figura 7.4.	76
8.1	Parâmetros meteorológicos observados durante os experimentos de Wangara. .	82
8.2	Diferença entre os valores do vento térmico (m/s) observada durante o experimento de Wangara (CLARKE et al., 1971). O índice 1 refere-se à diferença entre os intervalos de 0 a 1 km e o 2, à diferença entre 1 a 2 km	83
8.3	Componentes do vento térmico estimados às 15 horas, a partir de dados observados durante o experimento de Wangara (CLARKE et al., 1971). O índice 1 refere-se à diferença entre os intervalos de 0 a 1 km e 2, à diferença entre 1 a 2 km	83
8.4	Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.5.	87
8.5	Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio apresentados na Figura 8.5.	87
8.6	Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.6.	88
8.7	Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio da Figura 8.6.	88
8.8	Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.7	91
8.9	Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio apresentados na Figura 8.7	91
8.10	Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.8	91
8.11	Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio da Figura 8.8	92
8.12	Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.9	94
8.13	Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio da Figura 8.9	94

8.14 Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.10	94
8.15 Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio mostrado na Figura 8.10	95

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DE CONSERVAÇÃO	20
2.1	Equação Geral do Movimento	21
2.2	Equação da Continuidade	22
2.3	Equação de Estado	23
2.4	Primeira Lei da Termodinâmica	24
2.5	Equação do Equilíbrio Hidrostático	25
2.6	Vento Geostrófico	26
3	AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA AS COMPONENTES MÉ- DIAS	28
3.1	As Equações de Navier-Stokes Unidimensionais Estacionárias para as Compo- nentes Horizontais da Velocidade Média	31
4	TURBULÊNCIA NA CAMADA LIMITE PLANETÁRIA	33
4.1	Modelagem da Turbulência na Camada Limite Planetária (CLP)	33
4.1.1	Teorias de Similaridade	33
4.1.2	Modelos Numéricos	34
4.1.3	Soluções Analíticas	36
4.2	Coeficientes de Difusão para Turbulência Térmica e Mecânica	44
4.3	Divergência horizontal e Vorticidade Vertical	48
5	TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL - GITT	51
5.1	Solução Geral de EDPs Parabólicas Acopladas	53
6	MODELOS E SOLUÇÕES	57
6.1	As Equações de Navier-Stokes Unidimensionais Estacionárias para as Compo- nentes Horizontais da Velocidade Média: O Modelo de Subcamadas	57
6.2	As Equações de Navier-Stokes Tridimensionais Estacionárias para as Compo- nentes Horizontais da Velocidade Média	59
6.2.1	Discretização	61
6.2.2	GITT	64

7	RESULTADOS	72
8	VALIDAÇÃO DO MODELO	81
8.1	O experimento de Wangara	81
8.2	Simulações	82
9	CONCLUSÃO	97
10	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	99
A	Componentes Horizontais da Velocidade Média	100
B	Cálculo da Integral da Equação 6.32	103
C	Índices Estatísticos	106
D	Cartas Sinóticas	107
E	Dedução da Equação Geral para Leis de Conservação e a sua correspondente em forma diferencial	109
E.1	Aplicações e Exemplos	112
E.1.1	Equação de Reação-Difusão	112
E.1.2	Equação da Advecção	113
E.1.3	Equação de Burgers	114

1 INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes fornecem bases para a interpretação do escoamento na camada limite atmosférica. Entretanto, para a obtenção de soluções analíticas utiliza-se de simplificações e suposições, geralmente distintas da realidade. Particularmente, o perfil do vento médio é uma solução das equações que governam o escoamento cuja derivação pode ser aplicada em um grande número de processos naturais.

O sistema de quatro equações diferenciais, composto pelas equações de Navier-Stokes e da equação da continuidade, contém cinco variáveis desconhecidas (ρ , p , u , v e w), as quais são consideradas funções da coordenada temporal t e das coordenadas espaciais x , y e z . Adicionando a este sistema duas equações, a equação de estado e a primeira lei da termodinâmica, obtém-se um sistema fechado que descreve completamente o escoamento, mediante condições iniciais e condições de contorno apropriadas. Esse sistema é formado de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) não-lineares; a teoria matemática dessa classe de equações ainda não está suficientemente desenvolvida para permitir a obtenção de soluções analíticas em regiões arbitrárias e condições de contorno gerais. Além disso, dificuldades adicionais surgem do fato de que as equações descrevem uma enorme variedade de movimentos de origens diferentes, que compreendem a circulação geral de escala planetária; os sistemas transientes de escalas sinóticas; sistemas de menores escalas (meso e micro escalas) e um amplo espectro de movimentos oscilatórios.

A modelagem matemática das equações de movimento proporcionam bases teóricas para a interpretação do escoamento na atmosfera. No entanto, para resolvê-las, é necessário inicialmente selecionar um apropriado esquema de fechamento e, posteriormente, resolver o conjunto fechado das equações médias que governam o escoamento. As equações médias podem ser obtidas aplicando o procedimento de média sobre ensemble (média de Reynolds) ou média de volume (SORBJAN, 1989). Os modelos de média de Reynolds estão baseados no tratamento estatístico do escoamento turbulento. Nesse caso, os processos que ocorrem em pequena e grande escala são parametrizados. A parametrização dos termos turbulentos está fundamentada em propriedades físicas do meio e em medidas experimentais e, independentemente da ordem do fechamento, apresentam deficiências na representação de muitos processos físicos (GARRATT et al., 1996). Os modelos de média de volume, também denominados de modelos LES, estão baseados na simulação direta dos grandes turbilhões (escala resolvida) e

o efeito dos pequenos turbilhões são parametrizados (parametrização de subgrade ¹) (DEARDORFF, 1972a; MOENG, 1984; MASON, 1994). Os modelos do tipo LES apresentam algumas limitações como o fechamento da escala de subgrade e o domínio limitado da dimensão da grade, além do elevado custo computacional (MASON, 1994; LESIEUR; MÉTAIS, 1996; SORBJAN, 1996; MARQUES, 2004).

Do ponto de vista físico, uma parametrização significa uma representação idealizada do fenômeno de transporte turbulento. Nesse sentido, quando se parametrizam os processos de troca turbulenta, introduzem-se, nas equações que descrevem as leis de conservação (modelos físicos), relações matemáticas aproximadas que, em princípio, são usadas como substitutas dos termos desconhecidos presentes no fenômeno natural. Portanto, a confiabilidade do modelo depende fortemente da maneira como esses parâmetros turbulentos são calculados e relacionados ao entendimento da CLP (DEGRAZIA; MANGIA; RIZZA, 1998a).

Através da teoria de difusão estatística clássica (BATCHELOR, 1949), é possível relacionar os parâmetros turbulentos na CLP à distribuição espectral da energia cinética turbulenta. Seguindo essa metodologia, Degrazia et al. (1997), Degrazia et al. (1998) e Degrazia et al. (2000) desenvolveram um modelo para o espectro turbulento na camada limite convectiva e propuseram uma formulação para as escalas de tempo de decorrelação Lagrangiana e variâncias de velocidade turbulentas e, conseqüentemente, expressões para o coeficiente de difusividade turbulenta, em termos da teoria de similaridade na CLP instável.

As equações, que descrevem o movimento do fluido, são expressões matemáticas obtidas de três princípios físicos: conservação da massa, momento e energia. Elas podem ser deduzidas de diversas maneiras e escritas de diferentes formas. Todavia, essas equações apresentam dificuldades de serem resolvidas tanto analítica quanto numericamente. Por isso, é conveniente, quando possível, simplificá-las levando em conta as propriedades do escoamento. Essas simplificações são realizadas em função da existência ou não de variações de densidade do fluido e da influência dos efeitos de viscosidade sobre o escoamento. A especificação correta de condições iniciais e de contorno também constituem um passo importante na obtenção de solução (analítica ou numérica) compatível com o problema físico estudado.

Com a capacidade atual dos computadores digitais e com o aperfeiçoamento das técnicas de solução numérica, significativos avanços têm sido feitos a fim de resolver problemas matemática e fisicamente complexos, como, por exemplo, problemas de difusão de massa e calor. Apesar de tais avanços numéricos, existe, ainda, uma vasta classe de problemas de importância prática que pode ser estudada por aproximações que permitem, mesmo em situ-

¹Parametrização dos processos que ocorrem em pequena escala.

ações idealizadas, a obtenção de soluções analíticas. Além disso, estas, quando disponíveis, são vantajosas, uma vez que fornecem uma boa compreensão de vários parâmetros do sistema que influenciam os fenômenos de transporte, bem como, um preciso ponto de referência para a comparação com as soluções numéricas (MIKHAILOV; ÖZİŞIK, 1984).

A Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT) (MIKHAILOV; ÖZİŞIK, 1984; ÖZİŞIK, 1993; COTTA, 1993) é um método híbrido, analítico-numérico aplicado ao tratamento e solução de equações diferenciais-parciais. Esta técnica fornece uma sistemática, eficiente e direta aproximação para a solução de problemas de valor de contorno homogêneos e não-homogêneos, estacionários e não-estacionários, lineares e não lineares, combinando uma expansão em série com uma integração por meio de um par de transformada-inversa.

Segundo o formalismo da GITT, a função-solução é expandida em termos das autofunções correspondentes ao problema auxiliar (Sturm-Liouville), associado ao problema original. A condição de ortogonalidade das autofunções é utilizada para determinar os coeficientes da expansão e, assim, dando origem à integral transformada e sua inversa. Aplicando a transformação integral, as derivadas parciais em relação a uma ou mais variáveis independentes são removidas, reduzindo o problema a um sistema de equações diferenciais ordinárias, denominado problema transformado. Uma vez que o problema transformado é resolvido, a fórmula inversa é utilizada para obter a solução do problema original. A ordem de truncamento é selecionada de acordo com a precisão desejada. Se o problema transformado apresentar solução analítica, esta pode ser obtida por meio de métodos aplicados à solução de equações ou sistema de equações diferenciais ordinárias, ou através de sistemas de computação simbólica, caso contrário, através de solução numérica.

Neste trabalho, apresenta-se a solução semianalítica das equações de Navier-Stokes em Geometria Cartesiana aplicada à Camada Limite Planetária. Supondo incompressibilidade e utilizando a média de Reynolds (STULL, 1988), obtém-se o campo médio de velocidade bidimensional. Os termos turbulentos serão parametrizados seguindo a teoria K (DEGRAZIA et al., 2000), descritos em relação as características do campo turbulento na camada limite convectiva. Por sua vez, os termos não-lineares serão escritos em função das propriedades cinemáticas do escoamento, como divergência e vorticidade. A solução para a equação prognóstica para um campo de vento médio bidimensional estacionário será obtida em duas etapas. Na primeira etapa aplica-se o Método de Discretização da CLP (MOREIRA, 1995), que consiste, basicamente, em dividir a CLP em subcamadas. Em cada uma delas, os parâmetros turbulentos assumem valores médios; em uma segunda, a resolução do sistema de equações diferenciais parciais lineares é realizada empregando-se a Técnica de Transformada Integral

Generalizada (GITT) (COTTA, 1993). O desempenho do modelo estudado é comparado com dados experimentais de vento medidos durante os experimentos de Wangara (CLARKE et al., 1971). Adicionalmente, os resultados obtidos através do modelo proposto são comparados com os seguintes modelos: o modelo unidimensional resolvido pelo método de discretização; o modelo proposto por Wilson e Flesch (2004); com a Lei Logarítmica (STULL, 1988) e com o modelo de Ekman (HOLTON, 2004).

Estruturou-se o trabalho em dez capítulos: no segundo capítulo apresenta-se a descrição das Equações Fundamentais de Conservação; o terceiro, as equações de Navier-Stokes escritas nas componentes médias; o quarto, descreve a turbulência na CLP, os coeficientes de difusão propostos por Degrazia et al. (1998b; 1992), apresenta, ainda, uma breve abordagem sobre divergência e vorticidade; o quinto, a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). No sexto, descrevem-se os modelos e soluções; no sétimo, simula-se o campo de velocidade para o caso convectivo e discutem-se os resultados. No oitavo, faz-se a validação do modelo, através da comparação entre as soluções encontradas neste trabalho e os dados experimentais obtidos durante o experimento de Wangara (CLARKE et al., 1971) e confrontam-se os resultados do presente estudo com os modelos encontrados na literatura. No nono capítulo, expõem-se as conclusões e, finalmente, possíveis encaminhamentos para trabalhos no décimo capítulo.

2 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DE CONSERVAÇÃO

As equações de momento, continuidade e energia ¹ formam um conjunto de equações diferenciais que descrevem o movimento dos fluidos. Estas estabelecem relações entre as “taxas de variação” ou fluxos das variáveis de interesse, por exemplo, velocidade e pressão. Em termos matemáticos, estas razões correspondem a suas derivadas.

A validade destas equações está vinculada a várias suposições impostas aos fluidos. A primeira delas é que um fluido é um meio contínuo; isto significa que a natureza discreta da atmosfera pode ser ignorada. Supõe-se, também, que as várias quantidades físicas que caracterizam o estado da atmosfera, tais como pressão, velocidade, densidade, temperatura, etc., e suas derivadas são funções contínuas no espaço e no tempo, permitindo que as leis de conservação sejam expressas como equações diferenciais parciais.

As equações que descrevem o movimento do fluido são obtidas de princípios básicos de conservação da massa, momento e energia. Para este objetivo, algumas vezes é necessário considerar um volume arbitrariamente finito, chamado de um volume de controle ², sobre o qual estes princípios possam ser facilmente aplicados.

As mudanças nas propriedades de um fluido em movimento podem ser medidas de duas formas diferentes. A primeira, *Euleriana*, consiste em fazer medições, simultâneas e em pontos distintos, das variáveis que caracterizam o estado do fluido. A segunda, *Lagrangiana*, consiste em medir as variáveis de estado de uma mesma parcela de fluido, à medida que ela se desloca dentro do fluido. Como o escoamento independe do método utilizado para descrevê-lo, as duas técnicas são equivalentes, em princípio, conversíveis.

A derivada material é definida pelo operador:

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\cdot) \quad (2.1)$$

em que \mathbf{v} é a velocidade do fluido. O primeiro termo do lado direito da equação é a derivada tradicional de Euler, isto é, a derivada em relação a um ponto fixo de referência), contudo o segundo termo representa as mudanças provocadas pelo movimento do fluido.

Na sua forma mais geral, uma lei de conservação estabelece que a razão de mudança

¹Na literatura é comum encontrar a expressão “equações de Navier-Stokes” referindo-se ao conjunto formado pelas equações de momento, continuidade e energia. Porém, as equações de Navier-Stokes são apenas as equações decorrentes da conservação de momento.

²Um elemento de fluido é um volume de controle muito pequeno comparado ao da atmosfera, mas ainda contém um grande número de moléculas.

de uma propriedade contínua definida em todo volume de controle deve ser igual àquilo que é perdido através das fronteiras do volume, carregado para fora pelo movimento do fluido, mais o que é criado/consumido pelas fontes e sorvedouros dentro do volume de controle. Ver Apêndice E.

No caso de fluidos incompressíveis (densidade constante), as variáveis a serem selecionadas são os componentes da velocidade e a pressão. Nesses escoamentos, a pressão não é uma variável termodinâmica, sendo apenas um “parâmetro ajustável” que permite ao campo de velocidade satisfazer a equação da continuidade. Assim, as três componentes das equações de Navier-Stokes mais a conservação da massa (equação de continuidade) formam um sistema fechado de equações diferenciais parciais bem definidas para estas variáveis, que pode ser resolvido, em princípio, para condições iniciais e condições de contorno adequadas.

Nas próximas seções serão apresentadas, resumidamente, as equações fundamentais que governam os movimentos atmosféricos. Demonstrações completas das equações apresentadas a seguir podem ser obtidas em livros como Hinze (1975), Sorbjan (1989), Brown (1990), Holton (2004), Vianello e Alves (2006), Lemes e Moura (2002) e Fortuna (2000). Posteriormente apresentar-se-ão duas aproximações muito importantes para problemas aplicados à atmosfera, ao Equilíbrio Hidrostático e à Aproximação Geostrófica.

2.1 Equação Geral do Movimento

Pela segunda lei de Newton, a taxa de variação do momento (quantidade de movimento) de um sistema é igual à soma de todas as forças que nele atuam. Para movimentos atmosféricos de interesse meteorológico, as forças que predominam são a força gravitacional, a força devida ao gradiente de pressão e a força de fricção, estas chamadas de *forças reais* e se aplicam apenas aos referenciais inerciais. No caso em que a rotação da Terra é considerada, o que implica a adoção de um sistema de coordenadas que gira conjuntamente com a Terra (referencial não-inercial), algumas forças, ditas *aparentes*, devem ser adicionadas para que a segunda lei de Newton possa ainda ser aplicada. Forças como: força centrífuga (oposta à centrípeta, em virtude da rotação da Terra) e força de Coriolis (VIANELLO; ALVES, 2006).

Para um elemento de fluido clássico, o princípio de conservação de momento é expresso pelas equações de Navier-Stokes ³

³Foram assumidas hipóteses como fluidos Newtonianos

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad (2.2)$$

em que: μ é a viscosidade do fluido. δ_{ij} é o delta Kronecker ($1, i = j; 0, i \neq j$).

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -g\delta_{i3} + f_c \epsilon_{ij3} U_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}, \quad (2.3)$$

em que $(U_1, U_2, U_3) = (U, V, W)$ são as componentes da velocidade, e $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ são as coordenadas cartesianas.

O primeiro e o segundo termos do lado esquerdo da Equação (2.3) representam, respectivamente, a variação local da velocidade ⁴ e o transporte advectivo da velocidade ⁵. Os termos do lado direito da Equação (2.3) representam: o primeiro, leva em conta a ação da gravidade somente na direção vertical; o segundo, descreve a influência da rotação da Terra (efeito de Coriolis); o terceiro, corresponde à aceleração causada em um elemento de fluido devido ao gradiente de pressão ⁶; o quarto, corresponde à desaceleração causada na partícula de fluido devido à viscosidade (dissipação).

Note que as equações de Navier-Stokes descrevem, de uma maneira aproximada, o escoamento de um fluido contínuo e homogêneo, em uma escala extremamente pequena ou sob condições extremas. Contudo, dentro de suas limitações, as equações de Navier-Stokes são úteis para um grande número de problemas práticos.

2.2 Equação da Continuidade

A equação da continuidade expressa um princípio físico fundamental, a *conservação de massa*. Esta equação relaciona as componentes horizontais com a componente vertical do escoamento. O princípio da conservação de massa exige que o fluxo de massa, através das paredes de um elemento de volume, iguale-se à taxa de variação de massa dentro do volume, isto é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4)$$

ou

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.5)$$

em que ρ é a densidade de massa (massa por unidade de volume) e \mathbf{v} é a velocidade do fluido. Fisicamente significa que, se entra mais massa que sai (convergência), a massa estará

⁴Corresponde à variação Euleriana de velocidade, ou seja, à variação temporal da velocidade em um único ponto do campo de velocidade.

⁵A soma desses dois termos equivale à variação temporal total do campo de velocidade, ou variação Lagrangiana deste campo.

⁶O sinal negativo indica que a aceleração causada é sempre contrária ao gradiente de pressão, ou seja, a força, devido a este termo, tem sentido que aponta da região de alta para baixa pressão.

aumentando dentro do volume. Caso contrário, se sai mais que entra (divergência), a massa estará diminuindo dentro do volume considerado.

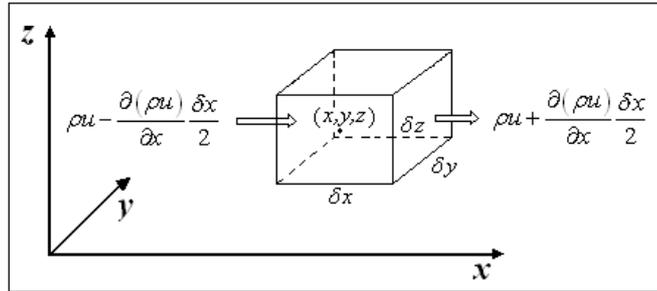


Figura 2.1: Fluxo de massa através das paredes de um elemento de volume, em virtude do escoamento ao longo do eixo- x . Figura adaptada de: HOLTON, J. R. *An Introduction to Dynamic Meteorology*, 2004.

No caso de um fluido incompressível, ρ não depende nem da variável temporal, nem das variáveis espaciais, isto implica que Equação (2.4) se reduz a:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.6)$$

Então, em um fluido incompressível, a divergência da velocidade desaparece; isso equivale dizer que o fluido é não-divergente. Esta simplificação é válida em escoamentos na baixa atmosfera em que a ordem de grandeza das flutuações de densidade são muito menores que a grandeza da própria densidade.

2.3 Equação de Estado

O estado termodinâmico da atmosfera em qualquer ponto é determinado pelos valores de pressão, temperatura e densidade (ou volume específico). Estas variáveis de campo estão relacionadas umas com as outras pela equação de estado para um gás ideal. Denotando p , T , ρ e $\alpha = \rho^{-1}$ como pressão, temperatura, densidade e volume específico, respectivamente, podemos expressar a equação de estado para o ar seco como

$$p = \rho RT \quad (2.7)$$

em que R é a constante do gás para o ar seco ($R = 287 \text{ J K g}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

A pressão atmosférica p é a soma parcial das pressões do vapor de água e do ar seco (*Lei de Dalton*). Assumindo que o vapor de água e o ar seco são gases ideais, segue:

$$p = \rho R T_v \quad (2.8)$$

em que $T_v = T(1 + 0,61q)$ é a *temperatura virtual*⁷, q é a umidade específica.

2.4 Primeira Lei da Termodinâmica

Esta lei nada mais é que o princípio da conservação de energia aplicado a um sistema termodinâmico. Por ele, tem-se que o calor fornecido ao sistema deve ser igual ao aumento da energia interna mais o trabalho de expansão, matematicamente

$$dq = dU + dW \quad (2.9)$$

ou

$$dq = c_v dT + p d\alpha \quad (2.10)$$

Na prática, não se faz medições da variação do volume específico. Por esta razão, faz-se necessário substituir $d\alpha$ por quantidades equivalentes, mas que sejam mais facilmente medidas. Para isso, deriva-se a Equação de Estado, combinando-a com Equação (2.10) e usando que $c_p = c_v + R$ (calor específico) obtém-se

$$dq = c_p dT + \alpha dp \quad (2.11)$$

Esta é a versão da Primeira Lei da Termodinâmica mais utilizada em Meteorologia, uma vez que as variáveis p e T são rotineiramente observadas.

Pode-se obter uma expressão para a *temperatura potencial* (θ) de uma parcela de ar que se encontra num nível de pressão p , a temperatura T , a partir da Equação (2.11), fazendo $dq = 0$, uma vez que se supõe que a parcela foi trazida adiabaticamente⁸ seca a uma pressão padrão p_0 . Combinando a equação resultante com a Equação (2.7) e integrando a partir de um estado inicial (T, p) até um estado de interesse (θ, p_0) , tem-se

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \quad (2.12)$$

⁷A temperatura a que deve ser submetida uma amostra de ar seco para que passe a apresentar a mesma massa específica do ar úmido, ambos submetidos à mesma pressão (VAREJÃO-SILVA, 2005)

⁸Processo adiabático refere-se ao processo em que se verificam variações de energia interna, sem o acréscimo ou a supressão de calor (SORBJAN, 1989; VIANELLO; ALVES, 2006).

sendo $p_0 = 1000 \text{ hPa}$ e $R/c_p = 0,286$.

Ainda, pode-se definir a *temperatura potencial virtual* (θ_v) combinando Equação (2.12) e T_v ,

$$\theta_v = T_v \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \quad (2.13)$$

O princípio da conservação de energia, juntamente à Equação de Estado e à Equação do Equilíbrio Hidrostático, explicam-se inúmeros fenômenos que ocorrem na atmosfera.

2.5 Equação do Equilíbrio Hidrostático

As componentes verticais da velocidade e da aceleração do ar atmosféricos são normalmente muito pequenas, com exceção dos problemas que envolvem fortes correntes convectivas. Assim, na maioria dos problemas de Meteorologia, uma parcela de ar pode ser tratada como se estivesse em equilíbrio em relação aos movimentos verticais. A condição para que este se estabeleça é que haja uma força dirigida para cima, devida ao gradiente vertical de pressão, que anule o efeito de seu peso.

Matematicamente

$$(p + dp) A + (\rho A dz) g = p A,$$

o que leva a

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (2.14)$$

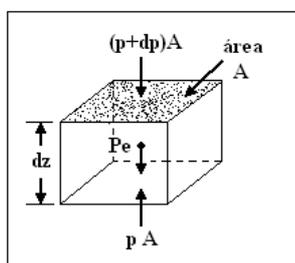


Figura 2.2: Parcela de ar em Equilíbrio Hidrostático. Figura adaptada de: VIANELLO, R. L.; ALVES, A. R. *Meteorologia Básica e Aplicações*, UFV, 2006.

2.6 Vento Geostrófico

Trata-se de um escoamento horizontal, uniforme, paralelo às isóbaras ⁹ e ocorre nos níveis superiores da atmosfera (atmosfera livre), em que os efeitos de fricção são desprezíveis. Para o vento geostrófico tem-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -f_c u_g, \quad (2.15a)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_c v_g, \quad (2.15b)$$

em que u_g e v_g são componentes zonal e meridional do vento geostrófico e f_c é o parâmetro de Coriolis.

Observe que, no escoamento geostrófico, a força do gradiente de pressão é equilibrada pela força de Coriolis, resultando num escoamento com velocidade constante, \vec{V}_g , paralela às isóbaras.

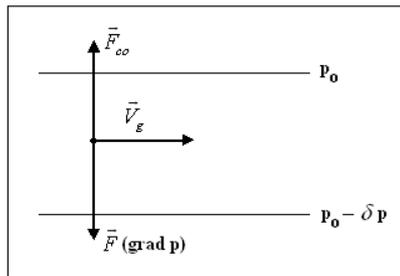


Figura 2.3: Representação Gráfica do Vento Geostrófico no Hemisfério Sul. Figura adaptada de: VIANELLO, R. L.; ALVES, A. R. *Meteorologia Básica e Aplicações*, UFV, 2006.

O vento geostrófico é uma excelente aproximação do vento observado na atmosfera livre, exceto nas vizinhanças do Equador ($\sin\phi \rightarrow 0$) e em locais de escoamento excessivamente curvos.

A partir da equação do equilíbrio hidrostático (Equação (2.14)) e da equação de estado (Equação (2.7)), tem-se, ao substituí-las nas Equações (2.15b) e (2.15a), que

$$\frac{RT}{p} \frac{\partial p}{\partial y} = -f_c u_g, \quad (2.16a)$$

$$\frac{RT}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = f_c v_g, \quad (2.16b)$$

⁹A partir dos valores de pressão atmosférica plotados em uma carta geográfica, podem ser traçadas linhas que unam pontos de mesmo valor da pressão; tais linhas são chamadas isóbaras (VAREJÃO-SILVA, 2005).

Derivando as Equações (2.16a) e (2.16b) em relação a z , tem-se

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{R}{f_c} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \ln p}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \ln p}{\partial z} \right), \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{R}{f_c} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \ln p}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \ln p}{\partial z} \right), \quad (2.17b)$$

em que $\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \ln p}{\partial x_i}$, $i = x, y$.

A variação vertical do vento geostrófico dada pelas Equações (2.17) é chamada de *vento térmico* e sua existência está vinculada a existência de um gradiente horizontal de temperatura ao longo das superfícies isobáricas.

Quando a camada limite planetária é *barotrópica*, a densidade depende apenas da pressão ($\rho = \rho(p)$); segue das Equações (2.17) que o vento térmico é zero e, conseqüentemente, as componentes do vento geostrófico são constantes. No entanto, quando a camada limite planetária é *baroclínica*, a densidade depende da pressão e da temperatura ($\rho = \rho(p, T)$) e resulta no vento térmico diferente de zero.

Valores típicos para os termos do lado direito das Equações (2.17) mostram que os primeiros termos entre parênteses são da ordem de $10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}/\text{km}^2$, enquanto os segundos são da ordem de $10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}/\text{km}^2$. Este fato permite negligenciar os primeiros termos.

Utilizando novamente a equação hidrostática (Equação (2.14)) e a equação de estado (Equação (2.7)), tem-se

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{g}{f_c T} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (2.18a)$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{g}{f_c T} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2.18b)$$

As componentes do vento geostrófico, no caso baroclínico, são obtidas integrando as Equações (2.18) no intervalo (z_0, z) , resultando em

$$u_g = u_T z + u_{g0}, \quad (2.19a)$$

$$v_g = v_T z + v_{g0}, \quad (2.19b)$$

em que u_{g0} e v_{g0} são as componentes do vento geostrófico na superfície da Terra e

$$u_T = -\frac{g}{f_c T} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (2.20a)$$

$$v_T = \frac{g}{f_c T} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2.20b)$$

3 AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA AS COMPONENTES MÉDIAS

Soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes completas ainda são desconhecidas e mesmo soluções numéricas, ainda que possíveis, são extremamente custosas do ponto de vista computacional.

A dificuldade numérica pode ser, em parte, superada adotando a aproximação de Reynolds, que em 1895, propôs decompor qualquer fluxo variável na forma de uma quantidade média mais parte turbulenta, isto é:

$$\begin{aligned} U_i &= u_i + u'_i, \\ P &= p + p'. \end{aligned}$$

O método proposto por Reynolds permite obter soluções para as equações de Navier-Stokes nas componentes médias, o que torna a solução do problema mais acessível computacionalmente. No entanto, como consequência da não-linearidade das Equações (2.3), a decomposição de Reynolds introduz termos adicionais, os fluxos turbulentos ¹. Estes necessitam ser representados matematicamente, tarefa baseada em propriedades físicas do meio e providas de justificações empíricas (observacional). A esse tipo de problema dá-se o nome de *problema de fechamento*.

O processo de média pode ser definido de diferentes maneiras: como média no tempo, média espacial ou média sobre ensemble ². Em processos convencionais, as quantidades médias são médias sobre ensemble, que equivale assumir que os fluxos atmosféricos são membros de um ensemble cujas realizações individuais obedecem às equações de Navier-Stokes.

Então, aplicando a decomposição de Reynolds nas Equações (2.3) ³,

$$\frac{\partial (u_i + u'_i)}{\partial t} + (u_j + u'_j) \frac{\partial (u_i + u'_i)}{\partial x_j} = -g\delta_{i3} + f_c \epsilon_{ij3} (u_j + u'_j) - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial (p + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (u_i + u'_i)}{\partial x_j^2}. \quad (3.1)$$

¹Representam o transporte turbulento de momento (cisalhamento de Reynolds), agindo como termos extras de atrito.

²Média temporal é tomada sobre medidas feitas durante um determinado intervalo de tempo; média espacial é tomada sobre medidas feitas no mesmo instante, em vários pontos no espaço; e média amostral (ou ensemble) é tomada sobre um conjunto de realizações idênticas do mesmo experimento.

³Aplica-se a média de Reynolds, de maneira análoga, às demais que compõem o sistema de equações que modelam a o escoamento de um fluido na atmosfera.

Separando os termos das Equações (3.1),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) + u'_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) = -g\delta_{i3} + f_c \epsilon_{ij3} u_j + f_c \epsilon_{ij3} u'_j \\ - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Utilizando a incompressibilidade do fluido, $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$, multiplicando por u'_i temos $u'_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$, somando nas Equações (3.2) e observando que $u'_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial (u'_i u_k)}{\partial x_k}$, onde $k = j$ e $u_k = u'_j$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) + u'_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j} = -g\delta_{i3} + f_c \epsilon_{ij3} u_j + f_c \epsilon_{ij3} u'_j \\ - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aplicando a média de Reynolds e suas propriedades nas Equações (3.3), (Stull (1988), Sorbjan (1989)), obtém-se,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g\delta_{i3} + f_c \epsilon_{ij3} u_j - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}. \quad (3.4)$$

Observe que as Equações (3.4) são similares às Equações (2.3), exceto pela adição do termo turbulento, o último termo do lado direito. O primeiro termo do lado esquerdo representa a conservação de momento médio e o segundo, descreve a advecção do momento médio pelo vento médio. O primeiro termo do lado direito das Equações (3.4) leva em conta a ação da gravidade somente na direção vertical; o segundo, descreve a influência da rotação da Terra (efeito de Coriolis); o terceiro, representa o gradiente de pressão; o quarto, a influência do *stress* viscoso no movimento médio e o último, a influência do *stress* de Reynolds no movimento médio, também descrito como a divergência do fluxo de momento turbulento.

Reescrevendo as Equações (3.4) nas três componentes das equações de movimento

médias,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_c v - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \\ - \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -f_c u - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \\ - \left(\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (3.5b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \\ - \left(\frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.5c)$$

O problema de fechamento (parametrização dos fluxos turbulentos) pode ser resolvido aplicando fechamento de primeira ordem ou *Teoria K*, a qual foi baseada em um modelo análogo ao da teoria cinética dos gases, em que parcelas do fluido se comportam como moléculas transportando momento, calor, umidade ou material em suspensão. Em outras palavras, a ideia principal da Teoria K é supor que a difusão turbulenta age de maneira análoga à difusão molecular e, portanto, o fluxo de qualquer propriedade é proporcional ao gradiente de seu campo médio (LEMES; MOURA, 2002; HOLTON, 2004; STULL, 1988). Assim, escrevem-se

$$\overline{u'u'} = -K_x \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial (\overline{u'u'})}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$\overline{u'v'} = -K_y \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\overline{u'w'} = -K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

Então

$$\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (3.6)$$

De forma análoga, obtém-se,

$$\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (3.7)$$

$$\frac{\overline{\partial w' u'}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial w' v'}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial w' w'}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (3.8)$$

Utilizando as Equações (3.6), (3.7) e (3.8) nas Equações (3.5a), (3.5b) e (3.5c), respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_c v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (3.9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -f_c u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (3.9b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.9c)$$

São as equações de movimento para as componentes médias u , v e w .

3.1 As Equações de Navier-Stokes Unidimensionais Estacionárias para as Componentes Horizontais da Velocidade Média

Mesmo com o fechamento de primeira ordem, as equações de movimento, Equações (3.9), oferecem muitas dificuldades quando o objetivo é obter uma solução analítica. Um caso especial pode ser obtido, quando se assume:

- homogeneidade horizontal: esta suposição implica que a estrutura da atmosfera não varia no plano horizontal e permite a omissão dos gradientes horizontais, matematicamente $\left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = 0; \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = 0 \right]$;
- estacionariedade: as variáveis independem do tempo, $\left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0 \right]$;
- não subsidência, os movimentos, na vertical, podem ser negligenciados, $[\bar{w} = 0]$;
- despreza-se o termo de viscosidade molecular, isto é, as forças de atrito de natureza molecular são bem menores que as análogas para o caso turbulento;
- escoamento geostrófico barotrópico: o primeiro refere-se ao balanço entre as forças de gradiente de pressão e a força de Coriolis; o segundo, indica que as componentes do

vento geostrófico são constantes, (Ver Seção 2.6).

Assim, as equações de movimento para as componentes u e v podem ser escritas como,

$$0 = f_c v - f_c v_g + \frac{d}{dz} \left(K_z \frac{du}{dz} \right), \quad (3.10a)$$

$$0 = -f_c u + f_c u_g + \frac{d}{dz} \left(K_z \frac{dv}{dz} \right). \quad (3.10b)$$

4 TURBULÊNCIA NA CAMADA LIMITE PLANETÁRIA

4.1 Modelagem da Turbulência na Camada Limite Planetária (CLP)

As descrições matemáticas do comportamento dos fluidos ganharam uma representação no século *XIX*, na forma das equações de Navier-Stokes, a partir dos trabalhos pioneiros dos franceses Navier (1822), Poisson (1829) e do inglês Stokes (1845). Lamb (1945) apresentou algumas soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes, em casos simplificados. A partir dos anos 50, uma série de desenvolvimentos possibilitou melhor descrição do escoamento turbulento na camada limite planetária. Entre esses, destacam-se o estabelecimento de teorias de similaridade, modelos numéricos e soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes aplicáveis à CLP.

4.1.1 Teorias de Similaridade

Na década de 50, Monin e Obukhov (1954) propuseram uma teoria de similaridade válida para a camada limite superficial, baseada na suposição de que o regime turbulento é descrito por alguns parâmetros-chaves, com os quais é possível construir escalas características do movimento. Em 1970, Deardorff (1970) desenvolveu a teoria de similaridade para a camada bem misturada, propondo as escalas de movimentos características desta região.

A teoria de similaridade do número de Rossby para uma Camada Limite Atmosférica (CLA) barotrópica (BLACKADAR; TENNEKES, 1968) e uma baroclínica (YORDANOV; WIPPERMANN, 1972) foi derivada com a finalidade de fornecer uma maneira de calcular fluxos superficiais a partir de parâmetros de grande escala em modelos de resolução vertical limitada, em que a teoria de similaridade de Monin-Obukhov não poderia ser aplicada. Em meados de 1980, esta teoria não se manteve e, em muitos modelos de circulação de grande escala, a teoria número de Rossby foi substituída pela de Monin-Obukhov. Tennekes (1982) forneceu uma excelente descrição para a camada limite atmosférica, geralmente em problemas de escala.

Na década de setenta e início da década de oitenta, a compreensão da difusão turbulenta na camada limite planetária convectiva teve considerável avanço a partir dos experimentos de tanque de Willis e Deardorff (1974; 1976; 1978; 1981) que comprovaram que a estrutura vertical da turbulência na camada limite convectiva não obedece a uma distribuição Gaussiana. Os primeiros suportes para as observações de laboratório de Willis e Deardorff foram obtidos a partir de modelos numéricos de Lamb (1978; 1982), que usou resultados do modelo

de “Large Eddy Simulation”, de Deardorff (1972b). No ano de 1985, Briggs (1985) propôs uma expressão para a distribuição de concentração vertical obtida a partir dos resultados de laboratório de Willis e Deardorff.

Uma teoria de similaridade local válida para toda a camada limite planetária estável foi introduzida por Nieuwstadt (1984). Esta mostrou-se, em muitos aspectos, como uma generalização da teoria de Monin-Obukhov para a camada superficial (DERBYSHIRE, 1990; SORBJAN, 1989).

Experimentos de campo, tais como o Experimento de Kansas (IZUMI, 1971), o Experimento de Wangara (CLARKE et al., 1971) e o Experimento de Minnessota (KAIMAL et al., 1976; IZUMI; CAUGHEY, 1976) estudaram o perfil, os fluxos, as variâncias, os espectros e outras características estatísticas de vento e de temperatura, dando uma grande contribuição para o entendimento de processos que governam a camada limite atmosférica. Muitos desses resultados foram usados como base para a determinação de funções da teoria de similaridade.

4.1.2 Modelos Numéricos

Nas décadas de 70 e 80, muitos autores estudaram a estrutura e a dinâmica da camada de mistura. Os modelos desenvolvidos com esta finalidade baseavam-se em casos em que os gradientes verticais eram pequenos em toda a camada limite atmosférica. Eles se dividiam em modelos que utilizavam equações médias sobre ensemble ¹, ou média sobre volume e em de simulação de grandes turbilhões (LES) com média sobre volume. Estes procuram simular, principalmente, perfis de temperatura, vento, umidade, fluxos de calor e umidade, variância de temperatura, reproduzir os perfis verticais dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem.

Deardorff (1972a), (1974a), (1974b) propôs um modelo numérico tridimensional, no qual a maior parte da turbulência foi explicitamente calculada e a escala da turbulência de subgrade foi modelada pelo esquema de fechamento de segunda ordem. Porém, este modelo exigia uma resolução muito pequena nas variáveis espaciais e na variável temporal, o que implicava em um enorme tempo computacional e memória para o armazenamento dos dados. Por esse motivo, Mellor e Yamada (1974), Wyngaard e Coté (1974), Zeman e Lumley (1976), André et al. (1978), entre outros, utilizaram esquema de turbulência média sobre ensemble com fechamento de ordem superior (segundo e terceira ordem).

Mellor e Yamada (1974) apresentaram uma análise que simplificava o modelo de fe-

¹A média sobre ensemble corresponde a média aritmética sobre um número grande e finito de experimentos idênticos (STULL, 1988).

chamento de segunda ordem em um de três níveis (nível-3), que usa somente duas equações diferenciais parciais prognóstica e um conjunto de equações lineares algébricas para resolver as variáveis turbulentas em uma camada limite convectiva seca. O modelo nível-3 foi utilizado por Yamada e Mellor (1975) para simular variações diurnas da camada limite planetária, observada durante o experimento de Wangara.

Sun e Ogura (1980) modificaram o esquema sugerido por Mellor e Yamada (1974) incorporando fórmulas para os momentos de terceira ordem e termos para a pressão propostos por Zeman e Lumley (1976). Em oposição aos trabalhos de Mellor e Yamada (1974), Deardorff (1974a) e (1974b) introduziu a escala de comprimento da turbulência, que depende da estratificação da atmosfera. Embora os resultados obtidos por Sun e Ogura concordem melhor com os dados do experimento de Wangara, comparados aos simulados por Yamada e Mellor (1975), o esquema para a turbulência é mais difícil de se aplicar em modelos de duas ou três dimensões, que é a parametrização sugerida no modelo nível-3.

Deardorff (1980) simplificou o modelo sugerido por ele na década de 70, assumindo que as relações para o coeficiente de difusão são válidas para fluxos turbulentos e que o coeficiente de difusão é proporcional à raiz quadrada da energia cinética turbulenta. Ainda que este modelo calcule turbulência de subgrade, suas equações básicas são similares às apresentadas em Mellor e Yamada (1977) (modelo de nível-2.5 que calcula turbulência média sobre ensemble), embora o último esquema apresente fórmulas mais complicadas para a escala de comprimento e coeficiente de difusão.

Enger (1986) and Sun e Chang (1986a) e Sun e Chang (1986b) simularam dados do experimento de Wangara, bem como a dispersão de poluentes na camada limite convectiva.

Wyngaard (1975), Yamada e Mellor (1975) e André et al. (1978) simularam evoluções noturnas da camada limite planetária.

O modelo LES, proposto por Moeng (1984), é composto de um conjunto de cinco equações prognósticas, as quais determinam a evolução temporal e espacial das componentes médias da velocidade do vento, da temperatura potencial média na escala resolvida e a energia cinética turbulenta média na escala de subgrade. O modelo ainda é constituído por uma equação diagnóstica que determina o campo espacial das flutuações de pressão na escala resolvida. Estas equações são obtidas aplicando-se um filtro passa-baixa ² nas equações de conservação de momento, massa e energia e assume-se a aproximação de Boussinesq. A condição de contorno inferior, ou contorno de superfície, no modelo LES, é uma interface

²As escalas de movimento são separadas através da aplicação de um filtro de frequências que elimina as altas frequências do escoamento turbulento.

rígida em que a velocidade vertical é nula. A conexão entre os dados de superfície utilizados como forçante no modelo e o primeiro ponto da grade numérica é realizada através da teoria de similaridade de Monin-Obukov (STULL, 1988). As condições de contorno superior impõem velocidade vertical média nula, fluxos de subgrade nulos, barotropia e gradiente linear de temperatura potencial. Isso significa que não há variação da velocidade entre os dois últimos pontos verticais da grade e a variação de temperatura é linear (MARQUES, 2004; PUHALES, 2008). Este modelo emprega o método pseudo-espectral para resolver numericamente as derivadas em relação às coordenadas horizontais e ao método de diferenças finitas para as derivadas em relação à coordenada vertical (SULLIVAN; MCWILLIAMS; MOENG, 1994; MOENG, 1984; MARQUES, 2004; RIZZA et al., 2006; DEGRAZIA et al., 2007).

4.1.3 Soluções Analíticas

O esquema de fechamento de ordem superior e modelos de simulação de grandes turbulências são mais realísticos fisicamente, no entanto ainda apresentam um grande custo computacional. Assim, a escolha geralmente recai em esquemas que utilizam parametrizações da turbulência com fechamento de primeira ordem, os quais calculam os fluxos de um certo nível através das quantidades médias neste nível. Um exemplo deste tipo de fechamento são os chamados modelos-K. No entanto, existem certas deficiências nestes modelos, associadas, em particular, à escolha da escala de comprimento de mistura e à impossibilidade de reproduzirem os fluxos contra-gradiente.

Ekman, em 1905, utilizou-se da teoria-K para parametrizar os componentes das tensões de Reynolds. Na sua análise, ele assumiu estacionariedade, homogeneidade horizontal, movimento vertical desprezível, o balanço entre as forças de gradiente de pressão e a força de Coriolis, um vento geostrófico que não varia com altura, uma viscosidade molecular desprezível e considerou o coeficiente de difusão constante na vertical. Com estas simplificações, ele obteve uma solução analítica para as equações de Navier-Stokes, conhecida como *Espiral de Ekman* (STULL, 1988; SORBJAN, 1989; BROWN, 1990), representada matematicamente por

$$K_m \frac{d^2 u}{dz^2} + f_c v - f_c v_g = 0, \quad (4.1a)$$

$$K_m \frac{d^2 v}{dz^2} - f_c u + f_c u_g = 0, \quad (4.1b)$$

As condições de contorno para u e v impõem que ambas as componentes horizontais da velocidade desapareçam no solo e se aproximem dos seus valores geostróficos, quando distantes

do solo:

$$u = 0 \quad \text{e} \quad v = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, \quad (4.2a)$$

$$u = u_g \quad \text{e} \quad v = v_g \quad \text{em} \quad z \rightarrow \infty, \quad (4.2b)$$

Para resolver Equação (4.1a) e Equação (4.1b), combinam-se as duas equações em apenas uma. Ao multiplicar Equação (4.1b) por $i = \sqrt{-1}$, adicionando o resultado à Equação (4.1a), obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem na velocidade complexa $w = u + i v$:

$$K_m \frac{d^2 w}{dz^2} - i f_c w = -i f_c w_g, \quad (4.3)$$

com $w_g = u_g + i v_g$.

Aplicando o método de resolução de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes (BOYCE; PRIMA, 1999), obtém-se a equação característica associada à Equação (4.3):

$$r^2 - i \frac{f_c}{K_m} = 0$$

assim

$$r = \pm \sqrt{i \frac{f_c}{K_m}}$$

para $f_c < 0$ (Hemisfério Sul) e $\sqrt{-i} = \pm \frac{(i-1)}{\sqrt{2}}$, então

$$r_1 = \sqrt{\frac{-f_c}{2K_m}} (i - 1) \quad (4.4a)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{-f_c}{2K_m}} (1 - i) \quad (4.4b)$$

Assim

$$w_h(z) = A \exp[r_1 z] + B \exp[r_2 z], \quad (4.5)$$

com $A, B \in \mathbb{C}$. O índice h se refere à solução da equação homogênea decorrente da Equação (4.3).

Seja w_g constante ou uma função linear ³, a solução particular é dada por:

$$w_p(z) = w_g. \quad (4.6)$$

Com os resultados (4.5) e (4.6), tem-se a solução geral para a Equação (4.3) expressa

³Foi aplicado o método dos coeficientes indeterminados (BOYCE; PRIMA, 1999)

por:

$$w(z) = A \exp [\gamma (i - 1) z] + B \exp [\gamma (1 - i) z] + w_g, \quad (4.7)$$

com $\gamma = \sqrt{\frac{-f_c}{2K_m}}$.

Aplicando as condições de contorno,

$$w = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, \quad (4.8a)$$

$$w = w_g \quad \text{em} \quad z \rightarrow \infty, \quad (4.8b)$$

Conclui-se de que, $B = 0$ e $A = -w_g$. Daí

$$w(z) = -w_g \exp [\gamma (i - 1) z] + w_g, \quad (4.9)$$

com $\gamma = \sqrt{\frac{-f_c}{2K_m}}$.

Aplicando a Fórmula de Euler ⁴ e separando w e w_g , em parte real e parte imaginária, escreve-se a solução nas variáveis u e v ,

$$u(z) = \exp [-\gamma z] [-u_g \cos (\gamma z) + v_g \text{sen} (\gamma z)] + u_g, \quad (4.10a)$$

$$v(z) = \exp [-\gamma z] [-u_g \text{sen} (\gamma z) - v_g \cos (\gamma z)] + v_g. \quad (4.10b)$$

Rotando o sistema de coordenadas para que o vento geostrófico coincida com o eixo- x , isto implica que $v_g = 0$, assim:

$$u(z) = u_g [1 - \exp [-\gamma z] \cos (\gamma z)], \quad (4.11a)$$

$$v(z) = -u_g \exp [-\gamma z] \text{sen} (\gamma z), \quad (4.11b)$$

com $\gamma = \sqrt{\frac{-f_c}{2K_m}}$.

As Equações (4.11a) e (4.11b) são conhecidas como *Espiral de Ekman*, neste caso válidas para o Hemisfério Sul. Ver Figura 4.1.

A solução de Ekman geralmente não é observada na atmosfera, devido, principalmente, ao fato de que o coeficiente de difusão deve variar mais rapidamente com a altura próxima ao solo e à importância de considerar o cisalhamento do vento na camada superficial.

⁴ $\exp (-\theta i) = \cos \theta - i \text{sen} \theta$

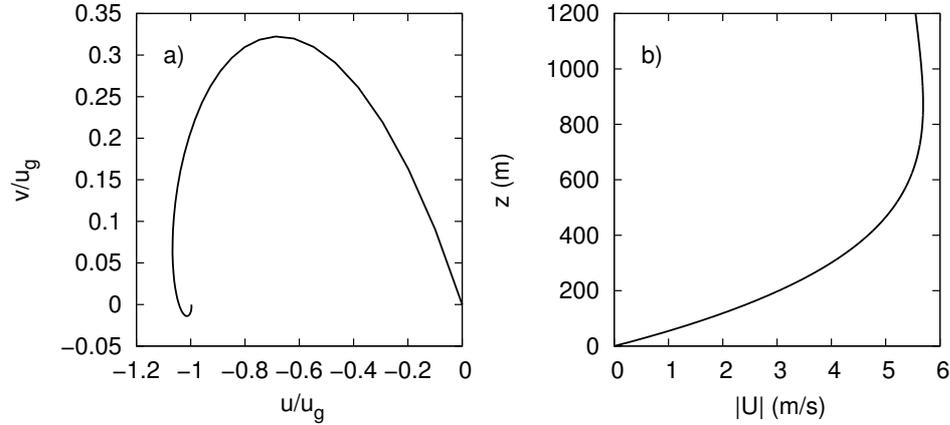


Figura 4.1: **a)** Hodógrafo da solução espiral de Ekman. **b)** Perfil Vertical da Velocidade Média, $|U| = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Entretanto, uma maneira de se obter uma solução mais satisfatória para a camada limite planetária é combinar a solução de Ekman (válida acima da camada superficial) com o perfil logarítmico da camada superficial (HOLTON, 2004).

O perfil de velocidade vertical do vento médio, sob condições de estabilidade atmosférica neutra, sobre um local relativamente liso e aberto e em uma camada limite superficial horizontalmente homogênea, pode ser aproximado pela Lei Logarítmica segundo a relação

$$|U(z)| = \frac{u_*}{\kappa} \log\left(\frac{z}{Z_0}\right) \quad (4.12)$$

em que $|U(z)| = \sqrt{u^2(z) + v^2(z)}$ é a velocidade média do vento na altura z , Z_0 é a rugosidade do terreno, u_* é a velocidade de fricção e κ é a constante de von Kármán. A expressão anterior leva em consideração apenas a influência da rugosidade no perfil de velocidade, negligenciando o efeito da estratificação térmica da atmosfera e, portanto, desvios significativos podem ocorrer em relação ao perfil de velocidade real da atmosfera.

A Teoria da Similaridade de Monin-Obukhov (MONIN; OBUKHOV, 1954; MONIN; YAGLOM, 1971) descreve um perfil mais geral da velocidade vertical média, levando em consideração os efeitos da rugosidade e da estabilidade térmica, expressando-se matematicamente por

$$|U(z)| = \frac{u_*}{\kappa} \left[\log\left(\frac{z}{Z_0}\right) - \Psi\left(\frac{z}{L}\right) \right] \quad (4.13)$$

em que L é chamado de comprimento de Monin-Obukhov e a função empírica da estratificação

térmica da atmosfera (BUSINGER et al., 1971; DYER, 1974) é

$$\Psi\left(\frac{z}{L}\right) = \begin{cases} 0 & \text{para } \frac{z}{L} = 0, \\ \frac{4,7z}{L} & \left(\frac{z}{L} > 0\right), \\ -2 \ln\left[\frac{(1+x)}{2}\right] - \ln\left[\frac{(1+x^2)}{2}\right] + 2\arctg x - \frac{\pi}{2} & \left(\frac{z}{L} < 0\right), \end{cases} \quad (4.14)$$

$x = [1 - (15z/L)]^{1/4}$. A expressão para o caso instável foi apresentada por Paulson (1970).

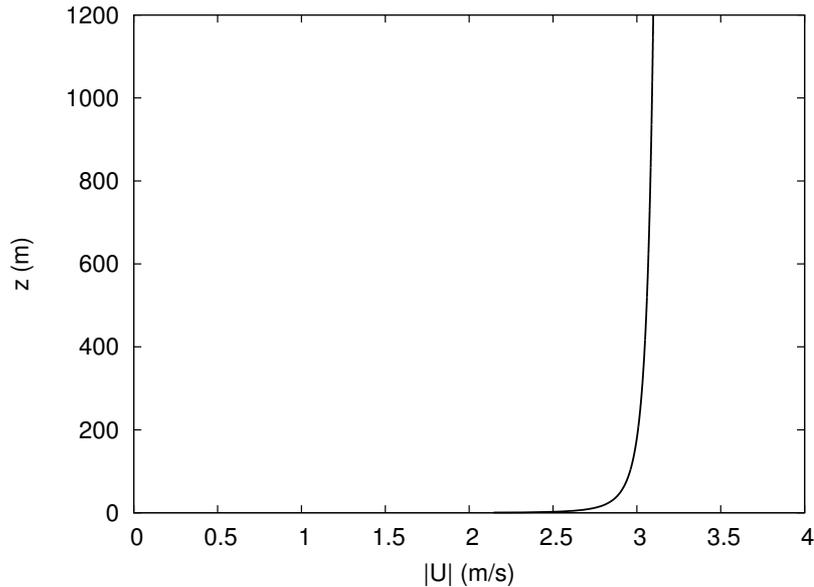


Figura 4.2: Perfil Vertical da Velocidade Média a partir da equação (4.13) com equação (4.14) no caso $\frac{z}{L} < 0$.

Alguns estudos foram realizados com a finalidade de melhorar o modelo sugerido por Ekman incluindo, por exemplo, coeficiente de difusão variável, baroclinicidade e aceleração advectiva. Miles (1994) desenvolveu um modelo que combina a camada de Ekman ⁵ e a camada superficial, utilizando o coeficiente de difusão variável.

O modelo de duas camadas, sugerido por Bannon e Salem (1995), assume que o vento geostrófico varia com a altura; considera a camada mais baixa consistente com a teoria da similaridade de Monin-Obukhov e, acima, a camada de Ekman com coeficiente de difusão constante. É similar ao de Krishna (1981) e Brown (1982). Neste trabalho, os autores discutiram aspectos da baroclinicidade linear da camada de Ekman, vorticidade superficial, divergência e movimento vertical na camada limite.

Berger e Grisogono (1998) estenderam os resultados obtidos por Grisogono (1995) para o caso baroclínico e coeficiente de difusão variável. Em ambos os trabalhos, os autores utilizaram o método WKB (ver BENDER; ORSZAG, 1978). No entanto, no trabalho de 1998,

⁵Camada em que a solução do modelo de Ekman é válida.

os autores uniram o método WKB à técnica de variação de parâmetros. O comportamento da solução é ilustrada comparando soluções obtidas a diferentes expressões, ao coeficiente de difusão e ao gradiente de pressão. Caso em que o gradiente de pressão decresce com a altura, acentua o pico supergeostrófico no perfil do vento. Com a diminuição do coeficiente de difusão com a altura, este efeito é acentuado. Aumentando o gradiente de pressão com a altura, o pico é reduzido ou eliminado. Para o coeficiente de difusão que apresenta um pico de baixo-nível, o modelo proposto apresentou melhores resultados que a solução clássica, quando comparado a dados para a camada limite marinha (dados obtidos em ASTEX). O modelo também foi comparado a dados obtidos em ERICA.

Tan (2001) propôs uma solução para a camada de Ekman semi-geostrófica, incluindo coeficiente de difusão variável com a altura e assumindo campo de pressão baroclínico. Este modelo uniu as soluções apresentadas por Wu e Blumen (1982) e de Grisogono (1995). Os resultados mostraram que a estrutura do vento em uma camada de Ekman semi-geostrófica depende da interação entre a aceleração inercial, coeficiente de difusão variável e gradiente de pressão baroclínico. Cisalhamento anticiclônico tem um efeito de acelerar o movimento do ar, enquanto que o ciclônico tem efeito contrário. A variação do gradiente de pressão e do coeficiente de difusão mostraram as mesmas conclusões obtidas por Berger e Grisogono (1998). Cisalhamento anticiclônico e coeficiente de difusão decrescendo com a altura acentuam o efeito de pico.

Garratt, Wyngaard e Francey (1982) utilizaram um modelo de três camadas para a camada limite atmosférica instável, composta por camada superficial, camada de mistura e camada de transição. Assumindo camada limite atmosférica fracamente baroclínica, derivaram relações para as componentes do vento na camada de mistura e o déficit de velocidade. Além do mais, eles incluíram efeitos de advecção e de entranhamento (transporte vertical através da camada de transição).

Wilson e Flesch (2004) utilizaram um modelo composto por camada superficial (perfil logarítmico da teoria de Monin-Obukhov, Equação (4.13)), pela camada de Ekman modificada (profundidade finita) e por uma camada geostrófica (aproximada pelo vento térmico). Para demonstrar a flexibilidade do modelo de duas camadas, os autores otimizaram os parâmetros livres para fornecer melhores curvas interpoladas para simples perfis de vento de multi-níveis. Estes incluíam modelos para perfis vento extraídos de Canadian Global Environmental Multi-scale weather model (GEM), bem como perfis experimentais obtidos a partir do experimento de Wangara e do experimento de dispersão sobre oceanos (LROD). Segundo os autores, em muitos casos, os perfis simulados pelo modelo de duas camadas mostram-se satisfatórios. A

performance do modelo comparado ao experimento de Wangara nos dias 33 e 40 podem ser verificados na Figura 4.3.

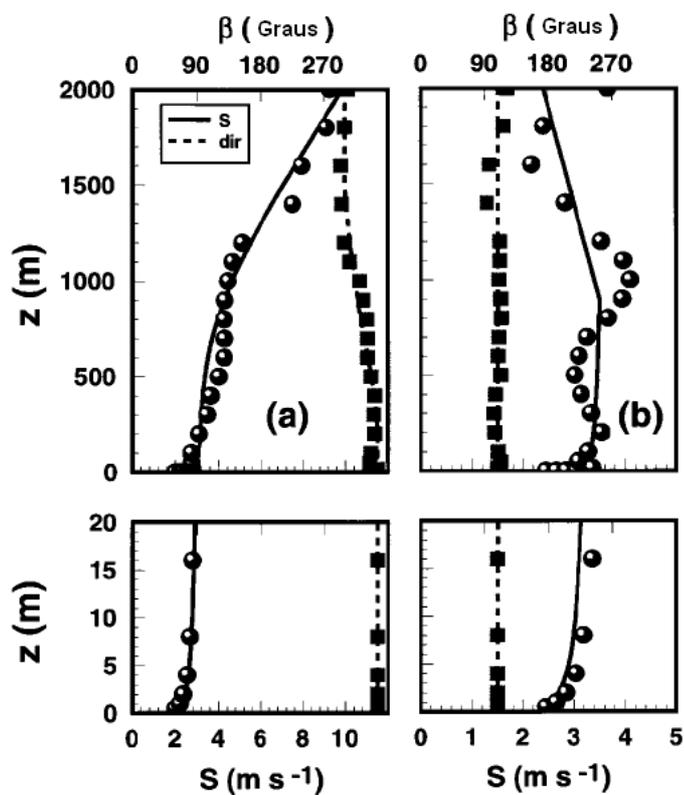


Figura 4.3: Perfis analíticos do vento médio e da direção (linhas) versus dados observados durante o experimento de Wangara (símbolos). A figura (a) refere-se ao dia 40 e a figura (b) ao dia 33. Figura adaptada de: WILSON, J.D.; FLESCHE, T.K. An Idealized Mean Wind Profile for the Atmospheric Boundary Layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 2004.

Parmhed, Kos e Grisogono (2005) resolveram o modelo de Ekman com coeficiente de difusão constante e variável, utilizando o método WKB (ver BENDER; ORSZAG, 1978). Este modelo pode ser aplicado para descrever uma camada limite quase neutra e horizontalmente homogênea. Os autores resolveram analiticamente o modelo de Ekman para coeficiente de difusão variável com a altura, $k(z) \geq 0$, $z \geq 0$ usando o método WKB, seguindo os trabalhos de Grisogono (1995), Grisogono e Oerlemans (2001a) e Grisogono e Oerlemans (2001b) denominado WKB(I). O método WKB(II) aperfeiçoou o modelo anterior, determinando uma expressão para a altura em que a solução WKB de primeira ordem poderia ser aplicada. Foi feita a comparação desses dois modelos com a solução clássica de Ekman e com uma solução numérica, que usou um esquema trapezoidal com eliminação Gaussiana. Ver Figura 4.4.

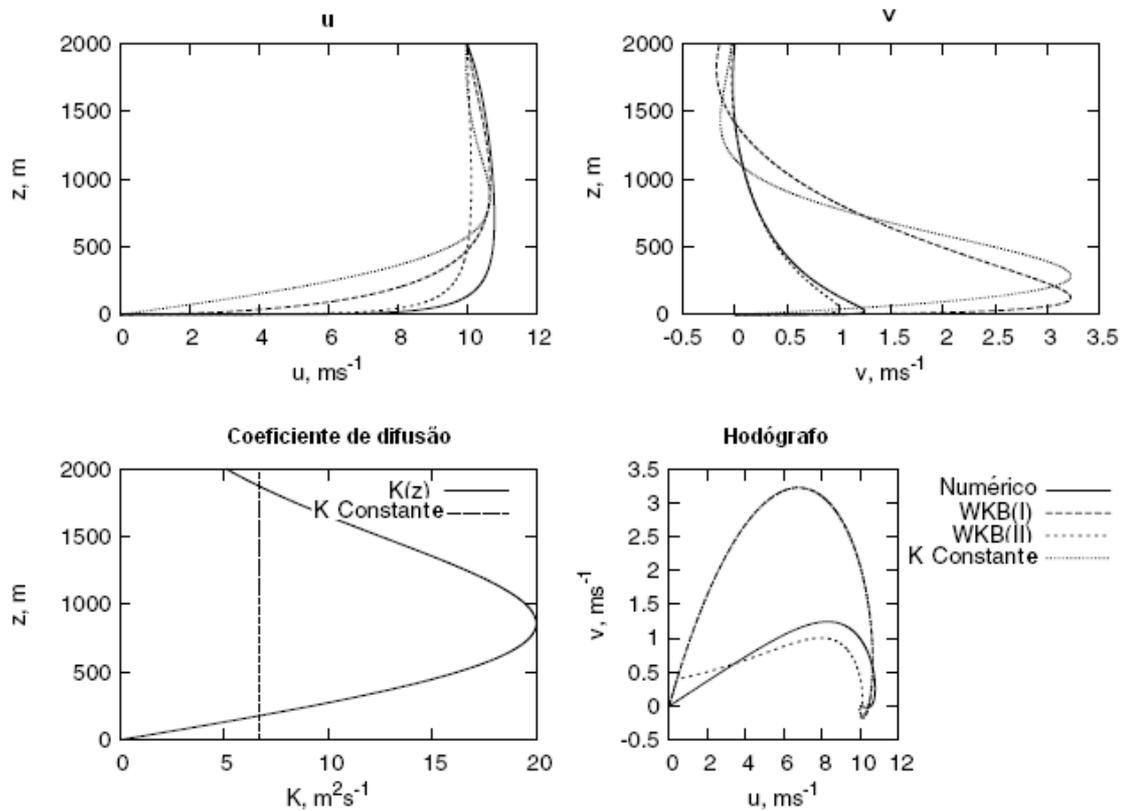


Figura 4.4: Componentes do vento (u, v), coeficiente de difusão K e hodógrafo para o modelo de Ekman com K constante, ambas soluções (WKB(I) e WKB(II)) e solução numérica. Figura adaptada de: PARMHED, O.; KOS, I.; GRISOGONO, B. An improved Ekman layer approximation for smooth eddy diffusivity profiles. *Boundary-Layer Meteorology*, 2005.

4.2 Coeficientes de Difusão para Turbulência Térmica e Mecânica

Os coeficientes de difusão utilizados nesse estudo foram propostos por Degrazia et al. (2000). Eles são derivados a partir da teoria de difusão estatística de Taylor, considerando-se que os espectros turbulentos, gerados pelos forçantes térmicos e mecânicos, são modelados a partir de uma combinação linear (HINZE, 1975; FRISCH, 1995). Portanto, no presente caso, tal parametrização permite reproduzir de maneira realística a camada limite convectiva, na qual a turbulência próxima à superfície é gerada por efeito mecânico.

Assumindo a hipótese de superposição, pode-se escrever o espectro Euleriano unidimensional como:

$$S_i^E(n) = S_{ib}^E(n) + S_{is}^E(n), \quad (4.15)$$

onde o primeiro termo do lado direito representa a parte produzida por empuxo e o segundo termo representa a parte mecânica. Os índices b e s referem-se aos forçantes térmico e mecânico, respectivamente.

A componente térmica do espectro unidimensional é dada por (DEGRAZIA et al., 1998):

$$\frac{n S_{ib}^E(n)}{w_*^2} = \frac{1,06 c_i f \psi_\epsilon^{2/3} \left(\frac{z}{z_i}\right)^{2/3}}{(f_m^*)_i^{5/3} \left[1 + 1,5 \left(\frac{f}{(f_m^*)_i}\right)\right]^{5/3}}, \quad (4.16)$$

com:

- $c_i = \alpha_i \alpha_u (2\pi\kappa)^{-2/3}$; α_i é derivado experimentalmente a partir do espectro para cada componentes de direção do vento, e vale 1, $\frac{4}{3}$ e $\frac{4}{3}$ para u, v e w , respectivamente; e $\alpha_u = 0,5 \pm 0,05$ (CHAMPAGNE et al., 1977; SORBJAN, 1989) e $\kappa = 0,4$ é a constante de von Kármán;
- $f = \frac{nz}{U(z)}$, é a frequência reduzida onde z é a altura acima do solo e $U(z) = U$ é a velocidade média do vento horizontal;
- $\psi_\epsilon = \frac{\epsilon_b z_i}{w_*^3}$ é a taxa de dissipação adimensional, $\epsilon_b = (0,75)^{3/2} (w_*^3/z_i)$ é a taxa média de dissipação térmica do ECT (CAUGHEY; PALMER, 1979; HØJSTRUP, 1982; WILSON, 1997);
- z é a altura acima do solo;
- z_i é o topo da camada limite convectiva;

- $(f_m^*)_i = \frac{z}{(\lambda_m)_i}$ é a frequência reduzida do pico espectral convectivo, onde $(\lambda_m)_i$ é o comprimento de onda associado ao máximo do espectro vertical (KAIMAL et al., 1976; CAUGHEY, 1982; DEGRAZIA; ANFONSSI, 1998), com:

$$(\lambda_m)_u = (\lambda_m)_v = 1,5z_i,$$

$$(\lambda_m)_w = 1,8z_i \left[1 - \exp\left(\frac{-4z}{z_i}\right) - 0,0003 \exp\left(\frac{8z}{z_i}\right) \right];$$

- $w_* = (u_*)_0 \left(\frac{z_i}{\kappa|L|}\right)^{1/3}$ é a escala de velocidade convectiva;
- L é o comprimento de Monin-Obukov;
- $(u_*)_0$ é a velocidade de fricção na superfície;

Substituindo f em (4.16) e integrando analiticamente a equação para o espectro sobre todo o domínio da frequência, como segue

$$\int_0^\infty S_{ib}^E(n) dn = \frac{1,06 c_i z \psi_\epsilon^{2/3}}{U (f_m^*)_i^{5/3}} \left(\frac{z}{z_i}\right)^{2/3} w_*^2 \int_0^\infty \left[1 + 1,5 \left(\frac{z}{U (f_m^*)_i} n\right) \right]^{-5/3} dn \quad (4.17)$$

e, assim, pode-se obter a expressão da variância da velocidade do vento σ_{ib}^2 , que é dada por:

$$\sigma_{ib}^2 = 1,06 c_i \frac{\psi_\epsilon^{2/3}}{(f_m^*)_i^{2/3}} \left(\frac{z}{z_i}\right)^{2/3} w_*^2. \quad (4.18)$$

O valor do espectro de energia Euleriano normalizado pela variância da velocidade turbulenta pode ser expresso por:

$$F_{ib}^E(n) = \frac{S_{ib}^E(n)}{\sigma_{ib}^2} = \frac{z}{U (f_m^*)_i} \left[1 + 1,5 \frac{f}{(f_m^*)_i} \right]^{-5/3} \quad (4.19)$$

e, conseqüentemente, em $n = 0$:

$$F_{ib}^E(0) = \frac{z}{U (f_m^*)_i}. \quad (4.20)$$

A componente mecânica do espectro dimensional é dada por (DEGRAZIA; MORAES, 1992):

$$\frac{n S_{is}^E(n) n}{u_*^2} = \frac{1,5 c_i f \phi_\epsilon^{2/3}}{(f_m)_i^{5/3}} \left[1 + \frac{1,5 f^{5/3}}{(f_m)_i^{5/3}} \right]^{-1}, \quad (4.21)$$

onde:

- c_i e f seguem as mesmas definições dadas anteriormente;
- u_* é a velocidade de fricção; $u_* = (u_*)_0^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha_1}$, $\alpha_1 = 1,7$ (WYNGAARD; COTE; RAO, 1974);
- $\phi_\epsilon = \frac{\epsilon_s k z}{u_*^3}$ é a função taxa de dissipação molecular, e $\epsilon_s = \frac{u_*^3}{kz} \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)$ é a taxa média de dissipação mecânica do TKE (HØJSTRUP, 1982), k é a constante de van Kármán;
- $(f_m)_i$ é a frequência do pico espectral da estratificação neutra dado por:

$$(f_m)_i = \begin{cases} 0,045 \left(1 + 117 \frac{f_c z}{(u_*)_0}\right), & i = u \\ 0,16 \left(1 + 33 \frac{f_c z}{(u_*)_0}\right), & i = v \\ 0,35 \left(1 + 15 \frac{f_c z}{(u_*)_0}\right), & i = w \end{cases} \quad (4.22)$$

$f_c = 2\Omega \sin\phi$ é o parâmetro de Coriolis.

Substituindo f em (4.21), pode-se escrever a equação para o espectro mecânico, da seguinte forma:

$$S_{is}^E(n) = \frac{1,5 c_i \phi_\epsilon^{2/3}}{(f_m)_i^{5/3}} u_*^2 \frac{z}{U} \left[1 + \frac{1,5 f^{5/3}}{(f_m)_i^{5/3}}\right]^{-1}.$$

Integrando $S_{is}^E(n)$ analiticamente sobre todo o domínio de frequências:

$$\int_0^\infty S_{is}^E(n) dn = \frac{1,5 c_i \phi_\epsilon^{2/3}}{(f_m)_i^{5/3}} \frac{u_*^2 z \phi_\epsilon^{2/3}}{U} \int_0^\infty \left[1 + \frac{1,5 \left(\frac{nz}{U}\right)^{5/3}}{(f_m)_i^{5/3}}\right]^{-1} dn, \quad (4.23)$$

onde

$$\int_0^\infty \left[1 + \frac{1,5 \left(\frac{nz}{U}\right)^{5/3}}{(f_m)_i^{5/3}}\right]^{-1} dn = \frac{3}{5} \pi \csc\left(\frac{2\pi}{5}\right) \left[\frac{1,5}{(f_m)_i^{5/3}} \left(\frac{z}{U}\right)^{5/3}\right]^{-3/5},$$

obtém-se a expressão para a variância da velocidade do vento para o caso mecânico:

$$\sigma_{is}^2 = \frac{2,32 c_i \phi_\epsilon^{2/3} u_*^2}{(f_m)_i^{2/3}}. \quad (4.24)$$

O valor do espectro de energia Euleriano normalizado pela variância da velocidade turbulenta pode ser expresso por:

$$F_{is}^E(n) = \frac{S_{is}^E(n)}{\sigma_{is}^2} = \frac{0,64}{(f_m)_i} \frac{z}{U} \left[1 + \frac{1,5}{(f_m)_i^{5/3}} \left(\frac{n z}{U} \right)^{5/3} \right]^{-1} \quad (4.25)$$

e, conseqüentemente, em $n = 0$:

$$F_{is}^E(0) = \frac{0,64}{(f_m)_i} \frac{z}{U}. \quad (4.26)$$

Assumindo a superposição linear dos efeitos térmico e mecânico, o espectro Euleriano adimensional é dado por:

$$F_i^E(n) = F_{ib}^E(n) + F_{is}^E(n) = \frac{S_{ib}^E(n)}{\sigma_{ib}^2} + \frac{S_{is}^E(n)}{\sigma_{is}^2}. \quad (4.27)$$

Considerando, agora, o valor do espectro adimensional para grandes tempos de viagem, toma-se (4.27) na origem ($n \approx 0$), resultando em:

$$F_i^E(0) = F_{ib}^E(0) + F_{is}^E(0) = \frac{S_{ib}^E(0)}{\sigma_{ib}^2} + \frac{S_{is}^E(0)}{\sigma_{is}^2}, \quad (4.28)$$

que juntamente com as equações (4.20), (4.26), (4.18) e (4.24), resulta em:

$$F_i^E(0) = \frac{z}{U (f_m^*)_i} + \frac{0,64z}{U (f_m)_i}. \quad (4.29)$$

Conforme expressão obtida em Degrazia et al. (2000) para o coeficiente de difusão

$$K_\alpha = \frac{\sigma_i^2 \beta_i F_i^E(0)}{4}, \quad (4.30)$$

onde $\beta_i = \frac{\gamma U}{\sigma_i}$ é a razão entre as escalas de tempo Lagrangianas e Eulerianas, é possível obter o coeficiente de difusão, K_α com $\alpha = x, y, z$, para dispersão em regime de turbulência térmica e mecânica:

$$K_\alpha = \frac{0,11\sigma_{ib}z}{(f_m^*)_i} + \frac{0,07\sigma_{is}z}{(f_m)_i}, \quad (4.31)$$

ou

$$K_\alpha = 0,11\sqrt{c_i} \left[\frac{z\psi_\epsilon^{1/3} w_* (z/z_i)^{1/3}}{(f_m^*)_i^{4/3}} + \frac{u_* z \phi_\epsilon^{1/3}}{(f_m)_i^{4/3}} \right], \quad (4.32)$$

onde assume-se o valor de γ igual a 0,44.

4.3 Divergência horizontal e Vorticidade Vertical

A análise linear de um escoamento quase-horizontal (caso dos movimentos atmosféricos de grande escala) consiste em uma expansão das componentes do vento em série de Taylor em torno de um ponto (x_0, y_0) (ponto da análise), em que a velocidade é conhecida com o propósito de se determinar os valores da velocidade em um ponto (x, y) qualquer de sua vizinhança, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Seguindo os procedimentos apresentados em Bluestein (1992), Hess (1979) e Lemes e Moura (2002), a decomposição do movimento horizontal em translação, rotação e deformação (linear e angular) é expressa pela equação matricial:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}_{\text{Termo I}} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}}_{\text{Termo II}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\zeta \\ \zeta & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Termo III}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2 & -D_1 \end{pmatrix}}_{\text{Termo IV}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

em que u_0 e v_0 são os valores de u e v na origem do plano cartesiano- xy .

- O Termo I: representa a translação uniforme da parcela de ar perto da origem;
- O Termo II: representa a expansão ($\delta > 0$) ou contração ($\delta < 0$) em torno da origem;
- O Termo III: representa a rotação anti-horária ($\zeta > 0$) ou horária ($\zeta < 0$) em torno da origem;
- O Termo IV: representa a deformação, a mudança na forma do elemento de fluido, em torno da origem.

Em Meteorologia, devido à predominância de movimentos horizontais, a divergência usualmente se refere à divergência horizontal bidimensional do campo velocidade (unidade indicada $10^{-5} s^{-1}$). A divergência horizontal do campo velocidade é relacionada às variações de movimento vertical e pressão, através das equações da continuidade e equações do movimento. Convergência é o negativo de divergência, sendo a contração do campo vetorial. A divergência horizontal é expressa por,

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.35)$$

Nos estudos atmosféricos, vorticidade é uma propriedade que caracteriza a rotacionalidade em grande escala das massas de ar. Se a circulação atmosférica é aproximadamente horizontal, a vorticidade é aproximadamente vertical. A vorticidade relativa do escoamento atmosférico em latitudes médias tem a ordem de magnitude de $10^{-5} s^{-1}$, sendo uma ordem de magnitude menor que a vorticidade planetária de terra, $f_c \approx 10^{-4} s^{-1}$.

No Hemisfério Sul, a vorticidade negativa, quando a parcela de ar tem uma rotação horária, corresponde a uma circulação ciclônica; a positiva, quando anti-horária, corresponde à anticiclônica. Em outras palavras, vorticidade negativa está associada ao centro de baixa pressão (mau tempo) e positiva, ao centro de alta pressão (bom tempo). A componente vertical da vorticidade (vorticidade relativa vertical) é dada por:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.36)$$

Os dois termos de deformação são: $D_1 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ e $D_2 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$.

Um campo de divergência pura é dada apenas pelo Termo II, isto é,

$$u = \frac{1}{2}\delta x \quad (4.37a)$$

$$v = \frac{1}{2}\delta y. \quad (4.37b)$$

Desde que a taxa de expansão ou contração seja independente da direção, a forma da parcela de ar é preservada (Ver Figura 4.5). Observe, também, que, neste caso, o termo de vorticidade é zero, por isso é chamado de campo de vento *irrotacional*. Os termos de deformação também são zero.

Um campo de vorticidade pura é dada apenas pelo Termo III, isto é,

$$u = -\frac{1}{2}\zeta y \quad (4.38a)$$

$$v = \frac{1}{2}\zeta x. \quad (4.38b)$$

Desde que a taxa de rotação seja uniforme (independente da direção), a área e a forma da parcela de ar são preservadas (Ver Figura 4.6). Observe, também, que, neste caso, o termo de divergência é zero, isto é, o campo é não-divergente e também não há deformação.

Um escoamento com deformação pura é aquela que apresenta um campo irrotacional e não-divergente. Apesar de ter um papel secundário em fluidos geofísicos, a deformação adquire uma grande importância no estudo de certos fenômenos, como, por exemplo, as

frentes atmosféricas e oceânicas.

Um escoamento bidimensional irrotacional e não-divergente, $\delta = 0$ e $\zeta = 0$, é conhecido por um escoamento tipo Laplace e, tem sido bastante estudado em Mecânica dos Fluidos.

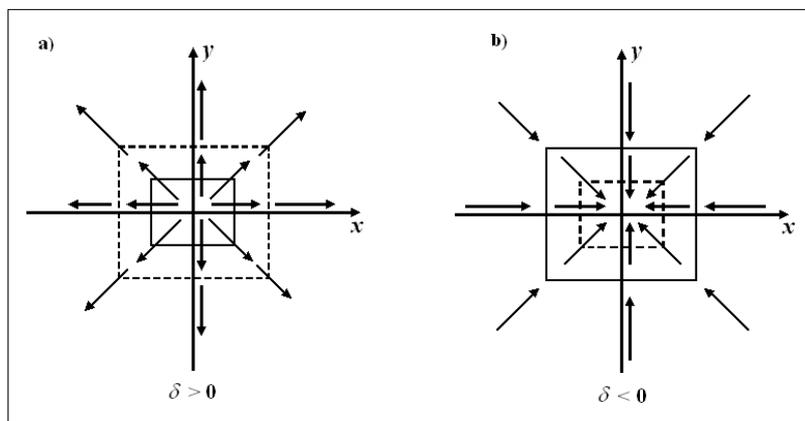


Figura 4.5: O elemento de fluido, que é representado por um retângulo desenhado com linhas sólidas, está inicialmente na origem. Depois ele é representado por linhas pontilhadas. Em **a)** o retângulo permanece na origem, mas aumenta a área; **b)** o retângulo permanece na origem, mas diminui a área. A forma e a orientação do elemento de fluido permanece os mesmos em ambos os casos. Figura adaptada de: BLUESTEIN, H.B. *Principles of Kinematics and Dynamics*. Vol. I. Synoptic - Dynamic Meteorology in Midlatitudes, 1992.

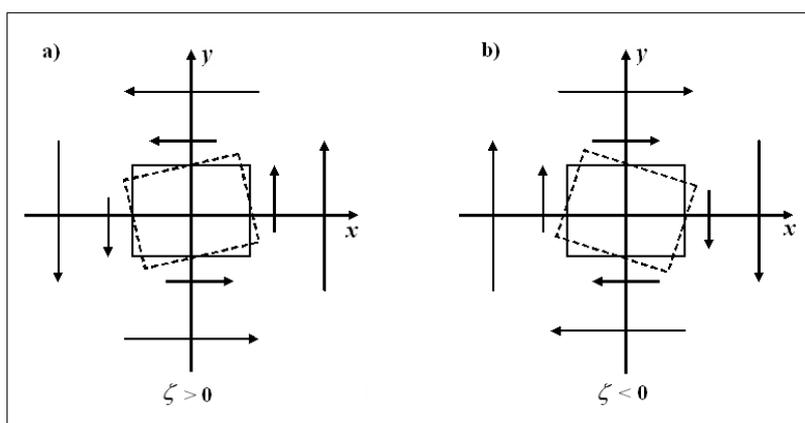


Figura 4.6: O elemento de fluido, que é representado por um retângulo desenhado com linhas sólidas, está inicialmente na origem. Depois ele é representado por linhas pontilhadas. Em **a)** o retângulo sofre uma rotação no sentido anti-horário; **b)** o retângulo sofre uma rotação no sentido horário. A forma e a área do elemento de fluido permanece os mesmos em ambos os casos. Figura adaptada de: BLUESTEIN, H.B. *Principles of Kinematics and Dynamics*. Vol. I. Synoptic - Dynamic Meteorology in Midlatitudes, 1992.

5 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL - GITT

Os princípios básicos da Técnica da Transformada Integral tiveram origem na teoria clássica de separação de variáveis. Essa nova abordagem eliminava a necessidade do problema ser separável à priori (ÖSIŞIK; MURRAY, 1974; MIKHAILOV, 1975). De forma geral, a Técnica da Transformada Integral Clássica é aplicada em soluções de problemas de difusão não separáveis, lineares, homogêneos ou não homogêneos, permanentes ou transientes.

O primeiro livro generalizando os formalismos da Técnica de Transformada Integral Clássica (CITT) foi publicado por Mikhailov e Özişik em 1984. Os problemas associados à difusão de calor e massa encontrados na literatura da época foram classificados em sete classes:

- Classe I: problemas que abrangem difusão de calor e massa estacionária e não estacionária, sujeitos a condições inicial e de contorno generalizada;
- Classe II: problemas que abrangem difusão transiente de calor e massa composta por n sub-regiões médias;
- Classe III: problemas caracterizados pela difusão de calor e massa em capilares, corpos porosos, governados pelo sistema de equações de Luikov e transferência de calor em entrada simultânea de fluxo;
- Classe IV: problemas caracterizados por um conjunto de equações de difusão, em que a temperatura ou a concentração de massa em todos os pontos do espaço estão acoplados pelos termos de fonte-sorvedouro;
- Classe V: problemas governados por duas equações de difusão acoplados através dos termos de fonte-sorvedouro em todos os pontos do espaço, mas, diferentemente dos problemas da Classe IV, não existe simetria entre os coeficientes que governam o acoplamento;
- Classe VI: problemas caracterizados por um conjunto de equações de difusão, em que o acoplamento, através das condições de contorno, são complicados;
- Classe VII: problemas que tratam dos casos com reações química reversíveis.

Apesar da contribuição da CITT para o avanço da Transformada Integral em vários tipos de problemas físicos, essa técnica limitou-se a situações lineares, pois era necessário que

todos os termos admitissem ser transformados. Com o objetivo de ampliar a flexibilidade desta técnica, estabeleceram-se, então, os princípios da Técnica da Transformada Integral Generalizada (Generalized Integral Transform Technique - GITT) que, nas últimas décadas, ganhou uma estrutura híbrida analítico-numérica, oferecendo ao usuário uma performance computacional muito eficiente para uma ampla variedade de problemas a priori não-transformáveis, incluindo formulações de problemas não lineares em aplicações de transferência de calor e em mecânica de fluidos (COTTA, 1993; COTTA; MIKHAILOV, 1997; COTTA, 1998; ÖZİŞİK, 1993).

O segundo livro sobre a Técnica de Transformada Integral foi publicado por Cotta (1993), que se limitou à solução de problemas convecção-difusão de massa e calor. Apresentou uma revisão dos formalismos clássicos; tratou, principalmente, de problemas com coeficientes variáveis nas equações governantes; nas condições de contorno; problemas em que a complexidade está associada ao problema auxiliar, à análise de problemas de difusão-convecção não-linear e propôs mecanismos para melhorar a eficiência das soluções numéricas.

Os problemas de difusão, difusão-advecção, de autovalor, as equações para camada limite e as equações de Navier-Stokes são abordados pela GITT em trabalhos como Machado e Cotta (1995); Ribeiro e Cotta (1995); Lima, Perez-Guerrero e Cotta (1997); Pereira, Pérez-Guerrero e Cotta (1998); Lima et al. (2007); Cotta, Santos e Kakaç (2007), entre outros.

Os trabalhos de Moura (1999), Cataldi et al. (2000) e Ribeiro et al. (2000) foram os primeiros que aplicaram à GITT em problemas de poluição atmosférica.

Wortmann (2003) e Wortmann et al. (2005) têm evidenciado o uso da GILTT em problemas de poluição na Camada Limite Planetária (CLP). A GILTT (Generalized Integral Laplace Transform Technique) combina a técnica da GITT com a Transformada de Laplace. A vantagem da GILTT, suscitada pelos autores, está no fato de que o problema transformado (EDO), diferentemente da GITT que resolve numericamente (MIKHAILOV; ÖZİŞİK, 1984), é resolvido analiticamente pelo uso da transformada de Laplace e diagonalização. Uma das limitações do uso desta técnica está nas condições de contorno do problema original, pois o método só é aplicável em problemas com condições de contorno homogêneas. No caso de problemas com contornos não homogêneos, deve-se fazer uso de filtros (COTTA; MIKHAILOV, 1997).

A técnica GITT foi utilizada juntamente ao método ADMM por Costa et al. (2006) e Vilhena et al. (2008) para resolver a equação de difusão-advecção; este método foi denominado GIADMT (Generalized Integral Advection Diffusion Multilayer Technique).

O método ADMM (Advection Diffusion Multilayer Method) é um método semianalítico que discretiza a CLP em N subcamadas de maneira que, em cada uma, os parâmetros tur-

bulentos assumam valores médios, resultando em N problemas do mesmo tipo (tanto quanto for o número de subdomínios), estes são resolvidos pela Técnica da Transformada de Laplace (MOURA, 1995; MOREIRA, 1995; VILHENA et al., 1998; BULIGON; VILHENA; MOREIRA, 2006). Uma revisão do método pode ser encontrado no trabalho de Moreira et al. (2006).

A redução do tempo de processamento, aceleração na taxa de convergência numérica, inexistência de malhas, controle prescrito de erro, soluções analíticas de referência e versatilidade do método em se hibridizar com outros, devido às suas características analítico-numéricas (MIKHAILOV; ÖZİŞİK, 1984; COTTA, 1994) foram algumas das vantagens que motivaram a aplicação da GITT, em vez de métodos puramente numéricos, como diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos (BURDEN; FAIRES, 2003; FORTUNA, 2000).

5.1 Solução Geral de EDPs Parabólicas Acopladas

Os problemas transientes e lineares associados à difusão de calor e massa podem ser encontrados em Mikhailov e Özişik (1984), fazendo o uso da Técnica da Transformada Integral Clássica. Aqui, será apresentada a solução geral para um sistema parabólico acoplado não-linear, seguindo o formalismo GITT, encontrado nas referências Cotta (1993), Ribeiro (1992) e Andrade (1996).

Seja o seguinte sistema parabólico acoplado não linear, definido em uma região finita V , com superfície de contorno S e com $k = 1, 2$:

$$h_k(\mathbf{x}) \frac{\partial T_k(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -L_k T_k(\mathbf{x}, t) + P_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t)) \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

em que condições iniciais

$$T_k(\mathbf{x}, t) = f_k(\mathbf{x}), \quad \text{com } \mathbf{x} \in V \text{ e } t = 0, \quad (5.2)$$

e com condições de contorno

$$B_k T_k(\mathbf{x}, t) = \phi_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t)), \quad \text{com } \mathbf{x} \in S \text{ e } t > 0, \quad (5.3)$$

em que os operadores lineares L_k e B_k são definidos por:

$$L_k \equiv -\nabla \cdot K_k(\mathbf{x}) \nabla + d_k(\mathbf{x}), \quad (5.4)$$

$$B_k \equiv \alpha_k(\mathbf{x}) + \beta_k(\mathbf{x}) K_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}, \quad (5.5)$$

em que $T_k(\mathbf{x}, t)$ são os potenciais a serem obtidos.

Os termos não homogêneos, não-lineares e de acoplamento estão representados por $P_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t))$ e $\phi_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t))$. $h_k(\mathbf{x})$, $K_k(\mathbf{x})$ e $d_k(\mathbf{x})$ são os coeficientes do sistema, enquanto que $\alpha_k(\mathbf{x})$ e $\beta_k(\mathbf{x})$ são os coeficientes das equações de contorno; $\frac{\partial}{\partial n}$ corresponde à derivada na direção normal e externa à superfície de contorno S ; \mathbf{x} e t são as variáveis independentes e representam as coordenadas espaciais e temporal, respectivamente.

Seguindo o formalismo da GITT, definem-se os problemas auxiliares desacoplados, os pares de transformada integral e o sistema transformado, relativos ao sistema de equação parabólicas acopladas, conforme Ribeiro e Cotta (1995).

Inicialmente, admite-se a representação do potencial $T_k(\mathbf{x}, t)$ através de uma expansão em autofunções da seguinte forma:

$$T_k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_k(\mu_{ki}, t) \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}), \quad (5.6)$$

para $k = 1, 2$.

As autofunções $\Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x})$ são obtidas a partir do problema auxiliar dado a seguir:

$$\mu_{ki}^2 h_k(\mathbf{x}) \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) = L_k \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V, \quad (5.7)$$

com condições de contorno

$$B_k \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) = 0, \quad \text{com } \mathbf{x} \in S, \quad (5.8)$$

cujos termos preservam as informações contidas nas Equações (5.1) e (5.3), desprezando os termos $P_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t))$ e $\phi_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t))$.

O problema auxiliar é um problema de autovalor do tipo Sturm-Liouville, que possui as seguintes propriedades (ÖZİŞİK, 1993; BOYCE; PRIMA, 1999).

i) os autovalores μ_{ki}^2 são reais, positivos e podem ser dispostos em ordem crescente $\mu_{k1}^2 < \mu_{k2}^2 < \mu_{k3}^2 \dots$;

ii) as autofunções $\Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x})$ associadas aos autovalores μ_{ki}^2 obedecem à relação de ortogonalidade

$$\int_V h_k(\mathbf{x}) \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) \Psi_k(\mu_{kj}, \mathbf{x}) dV = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j, \\ N(\mu_{ki}) & \text{para } i = j. \end{cases} \quad (5.9)$$

Os coeficientes da expansão $A_k(\mu_{ki}, t)$ são obtidos aplicando o operador $\int_V h_k(\mathbf{x}) \Psi_k(\mu_{kj}, \mathbf{x}) dV$ na Equação (5.6), conforme se mostra abaixo:

$$\int_V h_k(\mathbf{x}) \Psi_k(\mu_{kj}, \mathbf{x}) T_k(\mathbf{x}, t) dV = \sum_{i=1}^{\infty} A_k(\mu_{ki}, t) \int_V h_k(\mathbf{x}) \Psi_k(\mu_{kj}, \mathbf{x}) \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) dV. \quad (5.10)$$

Utilizando a condição de ortogonalidade (5.9), tem-se

$$A_k(\mu_{ki}, t) = \frac{1}{N(\mu_{ki})} \int_V h_k(\mathbf{x}) \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) T_k(\mathbf{x}, t) dV, \quad (5.11)$$

em que a integral de normalização, ou simplesmente norma ($N(\mu_{ki})$), é definida por:

$$N(\mu_{ki}) = \int_V h_k(\mathbf{x}) [\Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x})]^2 dV. \quad (5.12)$$

As Equações (5.6) e (5.11) definem os pares de transformada integral e transformada inversa ($k = 1, 2$):

1. Transformada Integral

$$\overline{T}_k(\mu_{ki}, t) = \frac{1}{N(\mu_{ki})^{1/2}} \int_V h_k(\mathbf{x}) \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) T_k(\mathbf{x}, t) dV. \quad (5.13)$$

2. Fórmula de Inversão

$$T_k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N(\mu_{ki})^{1/2}} \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) \overline{T}_k(\mu_{ki}, t). \quad (5.14)$$

Note que, na representação formal acima, o somatório pode ser simples, duplo ou triplo, bem como a integral pode ser de linha, de superfície ou de volume, para regiões de três, duas ou uma dimensão, respectivamente. No sistema em coordenadas cartesianas, as autofunções $\Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x})$ associadas aos autovalores μ_{ki}^2 e às integrais de normalização $N(\mu_{ki})$ são compostas pelo produto das autofunções e das integrais de normalização unidimensionais, respectivamente.

A escolha de problemas auxiliares desacoplados constitui um importante passo na solução do problemas proposto, pois evita o aparecimento de eventuais autovalores complexos (COTTA, 1993; RIBEIRO, 1992; RIBEIRO; COTTA, 1995).

Os potenciais transformados $\overline{T}_k(\mu_{ki}, t)$ são obtidos através da solução do sistema de equações diferenciais ordinário acoplado resultante da eliminação da dependência de \mathbf{x} nas Equações (5.1), conforme apresentado a seguir:

Aplicando o operador $\frac{1}{N(\mu_{ki})^{1/2}} \int_V \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) dV$ na equação (5.6):

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{T}_k(\mu_{ki}, t)}{dt} = \frac{1}{N(\mu_{ki})^{1/2}} \int_V \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) \left[\nabla \cdot (K_k(\mathbf{x}) \nabla T_k(\mathbf{x}, t)) - d_k(\mathbf{x}) T_k(\mathbf{x}, t) \right. \\ \left. + P_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t)) \right] dV. \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

De maneira similar, aplica-se o operador $\frac{1}{N(\mu_{ki})^{1/2}} \int_V T_k(\mathbf{x}, t) dV$ sobre a equação (5.7),

$$-\mu_{ki}^2 \overline{T}_k(\mu_{ki}, t) = \frac{1}{N(\mu_{ki})^{1/2}} \int_V T_k(\mathbf{x}, t) [\nabla \cdot (K_k(\mathbf{x}) \nabla \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x})) - d_k(\mathbf{x}) \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x})] dV. \quad (5.16)$$

Subtraindo membro a membro das Equações (5.15) e (5.16), utilizando as condições de contorno (5.3) e (5.8), tem-se o problema transformado:

$$\frac{d\overline{T}_k(\mu_{ki}, t)}{dt} + \mu_{ki}^2 \overline{T}_k(\mu_{ki}, t) = \overline{G}_k(\mu_{ki}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t)) \quad t > 0 \text{ e } i = 1, 2, \dots, \quad (5.17)$$

em que:

$$\begin{aligned} \overline{G}_k(\mu_{ki}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t)) = \frac{1}{N(\mu_{ki})^{1/2}} \int_V \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) P_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t)) dV \\ + \frac{1}{N(\mu_{ki})^{1/2}} \int_S \phi_k(\mathbf{x}, t, T_1(\mathbf{x}, t), T_2(\mathbf{x}, t)) \frac{\Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) - K_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}}{\alpha_k(\mathbf{x}) + \beta_k(\mathbf{x})} dS, \end{aligned} \quad (5.18)$$

com condições iniciais,

$$\overline{T}_k(\mu_{ki}, 0) = \overline{f}_k(\mu_{ki}) = \frac{1}{N(\mu_{ki})^{1/2}} \int_V h_k(\mathbf{x}) \Psi_k(\mu_{ki}, \mathbf{x}) f_k(\mathbf{x}) dV, \quad (5.19)$$

As fórmulas de inversão definidas pelas Equações (5.14) são truncadas em um número finito de termos. Para encontrar a ordem de truncamento que satisfaça a tolerância prescrita de erro, basta verificar a convergência numérica das séries de expansão em autofunções após, sucessivas variações na ordem de truncamento.

6 MODELOS E SOLUÇÕES

O capítulo de Modelos e Soluções está dividido em duas seções. Na primeira seção, apresenta-se a versão unidimensional estacionária para as componentes horizontais da velocidade média resolvida, mediante a aplicação do método de subcamadas (MOREIRA, 1995). Na segunda, apresenta-se o caso tridimensional estacionário para as componentes horizontais da velocidade média e resolve-se aplicando o método das subcamadas (MOREIRA, 1995) e GITT (COTTA, 1993). Nessa seção, procurando facilitar a solução do modelo, supõem-se, além das hipóteses clássicas, a discretização da altura da CLP e a substituição dos termos não-lineares por expressões escritas em função da divergência e de vorticidade (BLUESTEIN, 1992).

6.1 As Equações de Navier-Stokes Unidimensionais Estacionárias para as Componentes Horizontais da Velocidade Média: O Modelo de Subcamadas

Moreira (1995) sugeriu um modelo aplicado à dispersão de poluentes no qual discretizava a altura da CLP em N subcamadas. Assumindo valores médios para o coeficiente de difusão em cada subcamada, ele contornava a dependência de K_z com a altura, facilitando a resolução do problema. Com a discretização, diferentemente do modelo de Ekman, o coeficiente de difusão não é considerado constante em toda camada limite planetária e, sim, em cada subcamada, mantendo, dessa forma, a característica de perfil variável.

As médias são calculadas da seguinte forma:

$$K_{zn} = \frac{1}{z_{(n+1)} - z_n} \int_{z_n}^{z_{(n+1)}} K_z(z) dz \quad (6.1a)$$

$$u_{gn} = \frac{1}{z_{(n+1)} - z_n} \int_{z_n}^{z_{(n+1)}} u_g(z) dz \quad (6.1b)$$

$$v_{gn} = \frac{1}{z_{(n+1)} - z_n} \int_{z_n}^{z_{(n+1)}} v_g(z) dz \quad (6.1c)$$

com $n = 1, 2, \dots, N$.

O algoritmo utilizado para a integração numérica foi o Romberg (BURDEN; FAIRES, 2003) e a linguagem de programação usada para a implementação do algoritmo foi FORTRAN 90 (KERRIGAN, 1993).

A partir da discretização, K_z , u_g e v_g passam a ser denominados K_{zn} , u_{gn} e v_{gn} , respectivamente, uma vez que eles dependem do meio n considerado. As Equações (3.10)

discretizadas são expressas por

$$K_n \frac{d^2 u_n}{dz^2} + f_c v_n - f_c v_{gn} = 0, \quad (6.2a)$$

$$K_n \frac{d^2 v_n}{dz^2} - f_c u_n + f_c u_{gn} = 0, \quad (6.2b)$$

com $z_n \leq z \leq z_{n+1}$ e $n = 1, 2, \dots, N$.

As condições de contorno para u_n e v_n impõem que ambas as componentes horizontais da velocidade assumam um valor constante no solo e se aproximem dos seus valores geostróficos no topo da camada limite planetária, expressas, matematicamente, a seguir:

$$u_n = u_0 \quad \text{e} \quad v_n = v_0 \quad \text{em} \quad z = z_0 \quad \text{e} \quad n = 1, \quad (6.3a)$$

$$u_n = u_{gn} \quad \text{e} \quad v_n = v_{gn} \quad \text{em} \quad z = z_i, \quad \text{e} \quad n = N. \quad (6.3b)$$

As condições de continuidade para as componentes do vento médio e fluxos nas interfaces garantem contato perfeito entre as subcamadas em que a CLP foi dividida; são necessárias para determinar as $2N$ constantes que surgem da solução do problema, representado pelas Equações (6.2), condições, estas, dadas por:

$$u_n = u_{n+1} \quad \text{em} \quad z = z_n \quad \text{e} \quad n = 1, 2, \dots, (N-1), \quad (6.4a)$$

$$v_n = v_{n+1} \quad \text{em} \quad z = z_n \quad \text{e} \quad n = 1, 2, \dots, (N-1), \quad (6.4b)$$

$$K_{zn} \frac{\partial u_n}{\partial z} = K_{z(n+1)} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial z} \quad \text{em} \quad z = z_n \quad \text{e} \quad n = 1, 2, \dots, (N-1), \quad (6.4c)$$

$$K_{zn} \frac{\partial v_n}{\partial z} = K_{z(n+1)} \frac{\partial v_{n+1}}{\partial z} \quad \text{em} \quad z = z_n \quad \text{e} \quad n = 1, 2, \dots, (N-1). \quad (6.4d)$$

Utilizando o mesmo procedimento do Capítulo 4, em que se obteve a solução para o modelo de Ekman (Seção 4.1.3), tem-se a solução para Equações (6.2) válidas para o Hemisfério Sul:

$$w_n(z) = A_n \exp[\gamma_n (i-1)z] + B_n \exp[\gamma_n (1-i)z] + w_{gn}, \quad (6.5)$$

com $\gamma_n = \sqrt{\frac{-f_c}{2K_n}}$ e $A_n, B_n \in \mathbb{C}$.

As constantes complexas A_n e B_n são calculadas aplicando as condições de contorno,

$$w_n = w_0 \quad \text{em} \quad z = z_0 \quad \text{e} \quad n = 1, \quad (6.6a)$$

$$w_n = w_{gn} \quad \text{em} \quad z = z_i, \quad \text{e} \quad n = N. \quad (6.6b)$$

e as condições de interfaces,

$$w_n = w_{n+1} \quad \text{em } z = z_n \quad \text{e } n = 1, 2, \dots, (N - 1), \quad (6.7a)$$

$$K_{z_n} \frac{\partial w_n}{\partial z} = K_{z_{(n+1)}} \frac{\partial w_{n+1}}{\partial z} \quad \text{em } z = z_n \quad \text{e } n = 1, 2, \dots, (N - 1). \quad (6.7b)$$

Observe que, ao aplicar as duas condições de contorno e as $2(N - 1)$ condições de interfaces, tem-se formado um sistema de $2N$ equações, o qual é resolvido numericamente. A Subsecção (6.2.2) apresenta maiores detalhes.

Aplicando a Fórmula de Euler e separando w_n e w_{gn} em parte real e parte imaginária, escreve-se a solução nas variáveis u_n e v_n . Ver Apêndice A.

Expressões para o coeficiente de difusividade e vento geostrófico são dados nas Seções 4.2 e 2.6, respectivamente.

6.2 As Equações de Navier-Stokes Tridimensionais Estacionárias para as Componentes Horizontais da Velocidade Média

Nesse modelo, supõem-se, a estacionariedade, o desprezo do movimento vertical médio, o desprezo do termo de viscosidade molecular, o escoamento geostrófico baroclínico ¹ e a variação horizontal do escoamento, que proporcionam a investigação de uma solução mais real para o campo de vento médio bidimensional turbulento descrito por:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = f_c v - f_c v_g + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (6.8a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -f_c u + f_c u_g + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (6.8b)$$

com $u \equiv u(x, y, z)$, $v \equiv v(x, y, z)$, $z_0 < z < z_i$, $0 < x < L_x$ e $0 < y < L_y$.

As condições de contorno para as componentes horizontais da velocidade média nas fronteiras da região retangular formada pelo plano- xy podem ser obtidas assumindo a aproximação dada na Seção 4.3, nas fronteiras $x = 0$ e $y = 0$ e nas fronteiras $x = L_x$ e $y = L_y$, isto é, supõe-se um campo divergente e rotacional (Ver Figura 6.1). Para a direção vertical, impõem-se, para as componentes horizontais da velocidade média, que, no solo, ambas tenham um valor constante e que, no topo da camada limite planetária, se aproximem de seus valores geostróficos; matematicamente, escreve-se:

¹Ver Capítulo 2, Seção 2.6

$$u(x, y, z) = u_0 \quad \text{em} \quad z = z_0, \quad (6.9a)$$

$$u(x, y, z) = u_g \quad \text{em} \quad z = z_i, \quad (6.9b)$$

e

$$v(x, y, z) = v_0 \quad \text{em} \quad z = z_0, \quad (6.10a)$$

$$v(x, y, z) = v_g \quad \text{em} \quad z = z_i, \quad (6.10b)$$

$$u = -\frac{1}{2}\zeta y \quad \text{em} \quad x = 0, \quad (6.11a)$$

$$u = \frac{1}{2}\delta L_x - \frac{1}{2}\zeta y \quad \text{em} \quad x = L_x, \quad (6.11b)$$

$$u = \frac{1}{2}\delta x, \quad \text{em} \quad y = 0, \quad (6.11c)$$

$$u = \frac{1}{2}\delta x - \frac{1}{2}\zeta L_y \quad \text{em} \quad y = L_y, \quad (6.11d)$$

e

$$v = \frac{1}{2}\delta y \quad \text{em} \quad x = 0, \quad (6.12a)$$

$$v = \frac{1}{2}\zeta L_x + \frac{1}{2}\delta y \quad \text{em} \quad x = L_x, \quad (6.12b)$$

$$v = \frac{1}{2}\zeta x, \quad \text{em} \quad y = 0, \quad (6.12c)$$

$$v = \frac{1}{2}\zeta x + \frac{1}{2}\delta L_y \quad \text{em} \quad y = L_y, \quad (6.12d)$$

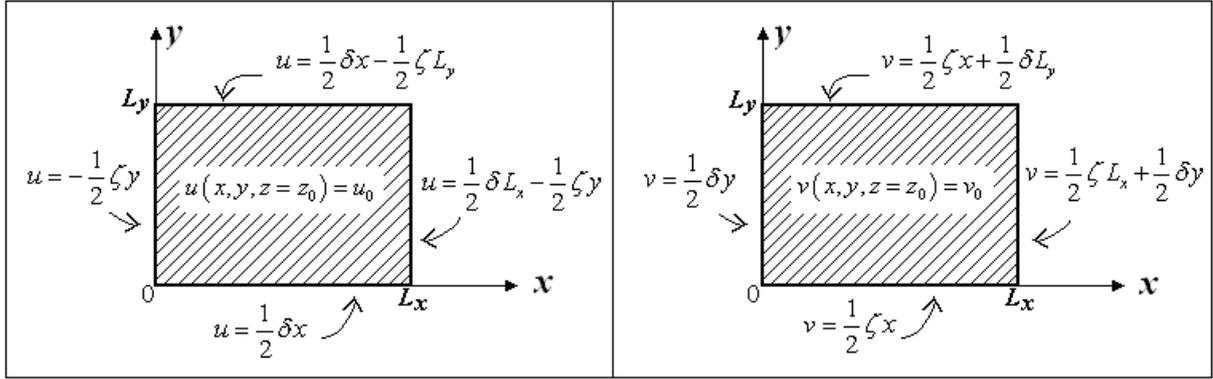


Figura 6.1: Condições de contornos em $z = z_0$ e na região retangular. Figura adaptada de: ÖZİŞİK, M. N. *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, Inc., 1993.

6.2.1 Discretização

Para produzir um perfil de vento mais real, é importante considerar coeficientes de difusão que variam com a altura. Para facilitar a solução do problema, discretiza-se a CLP em N subcamadas ((MIKHAILOV; ÖZİŞİK, 1984); VILHENA; BARICHELLO, 1991; MOREIRA, 1995), de modo que, dentro de cada uma delas $K_x(z)$, $K_y(z)$, $K_z(z)$, $u_g(z)$ e $v_g(z)$ ² assumam valores médios³:

$$K_{xn} = \frac{1}{z_{(n+1)} - z_n} \int_{z_n}^{z_{(n+1)}} K_x(z) dz \quad (6.13a)$$

$$K_{yn} = \frac{1}{z_{(n+1)} - z_n} \int_{z_n}^{z_{(n+1)}} K_y(z) dz \quad (6.13b)$$

$$K_{zn} = \frac{1}{z_{(n+1)} - z_n} \int_{z_n}^{z_{(n+1)}} K_z(z) dz \quad (6.13c)$$

$$u_{gn} = \frac{1}{z_{(n+1)} - z_n} \int_{z_n}^{z_{(n+1)}} u_g(z) dz \quad (6.13d)$$

$$v_{gn} = \frac{1}{z_{(n+1)} - z_n} \int_{z_n}^{z_{(n+1)}} v_g(z) dz \quad (6.13e)$$

com $n = 1, 2, \dots, N$.

Com a discretização, K_x , K_y , K_z , u_g e v_g passam a ser denominados K_{xn} , K_{yn} , K_{zn} , u_{gn} e v_{gn} , respectivamente, uma vez que eles dependem do meio n considerado.

A Figura (6.2) mostra um esquema que considera a CLP dividida em N subcamadas.

²Para o caso baroclínico.

³O algoritmo utilizado para a integração numérica foi o Romberg (BURDEN; FAIRES, 2003) e a linguagem de programação usada para a implementação do algoritmo foi FORTRAN 90 (KERRIGAN, 1993).

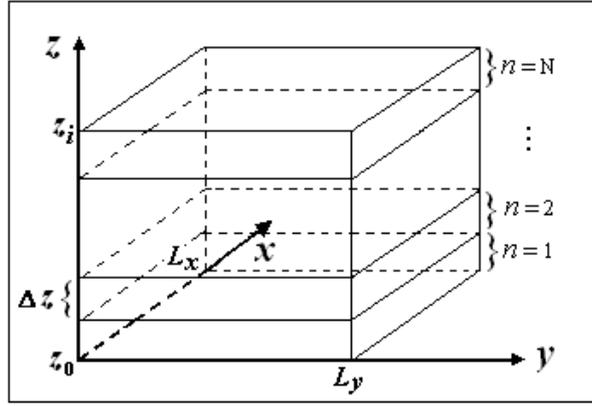


Figura 6.2: Desenho esquemático da discretização da CLP.

Levando-se em consideração a discussão anterior, as Equações (6.8a) e (6.8b) podem ser reescritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y} = f_c v_n - f_c v_{gn} + K_{xn} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + K_{yn} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + K_{zn} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}, \quad (6.14a)$$

$$u_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} = -f_c u_n + f_c u_{gn} + K_{xn} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + K_{yn} \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} + K_{zn} \frac{\partial^2 v_n}{\partial z^2}, \quad (6.14b)$$

com $z_n \leq z \leq z_{n+1}$, $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$ e $n = 1, 2, \dots, N$.

Além das condições de contorno (6.9a) - (6.12c), supõe-se, também, contato perfeito entre as subcamadas nas quais a CLP foi dividida. Sendo assim, consideram-se as condições de continuidade para as componentes da velocidade média e para os fluxos nas interfaces, respectivamente:

$$u_n = u_{n+1} \quad \text{em } z = z_n \quad \text{e } n = 1, 2, \dots, (N-1), \quad (6.15a)$$

$$v_n = v_{n+1} \quad \text{em } z = z_n \quad \text{e } n = 1, 2, \dots, (N-1), \quad (6.15b)$$

$$K_{zn} \frac{\partial u_n}{\partial z} = K_{z(n+1)} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial z} \quad \text{em } z = z_n \quad \text{e } n = 1, 2, \dots, (N-1), \quad (6.15c)$$

$$K_{zn} \frac{\partial v_n}{\partial z} = K_{z(n+1)} \frac{\partial v_{n+1}}{\partial z} \quad \text{em } z = z_n \quad \text{e } n = 1, 2, \dots, (N-1). \quad (6.15d)$$

Observe, ainda, que o problema dado acima é não-linear, o que torna sua solução muito difícil. Para contorná-lo, supõe-se a seguinte aproximação (Ver Seção 4.3),

$$u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\delta}{2} u_n - \frac{\zeta}{2} v_n, \quad (6.16a)$$

$$u_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} = \frac{\delta}{2} v_n + \frac{\zeta}{2} u_n. \quad (6.16b)$$

Substituindo as Equações (6.16a) e (6.16b) nas Equações (6.14a) e (6.14b), tem-se

$$\frac{\delta}{2}u_n - \frac{\zeta}{2}v_n = f_c v_n - f_c v_{gn} + K_{xn} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + K_{yn} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + K_{zn} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}, \quad (6.17a)$$

$$\frac{\delta}{2}v_n + \frac{\zeta}{2}u_n = -f_c u_n + f_c u_{gn} + K_{xn} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + K_{yn} \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} + K_{zn} \frac{\partial^2 v_n}{\partial z^2}. \quad (6.17b)$$

com $z_n \leq z \leq z_{n+1}$, $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$ e $n = 1, 2, \dots, N$.

Multiplicando a Equação (6.17b) por i ($i \in \mathbb{C}$) e somando termo a termo à Equação (6.17a),

$$\frac{\delta}{2}w_n + i\frac{\zeta}{2}w_n = -if_c w_n + if_c w_{gn} + K_{xn} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + K_{yn} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} + K_{zn} \frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2},$$

isto é,

$$\left[K_{xn} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + K_{yn} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} + K_{zn} \frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\delta}{2} + \left(f_c + \frac{\zeta}{2} \right) i \right] w_n = -f_c w_{gn} i, \quad (6.18)$$

em que $w_n = u_n + v_n i$, $w_{gn} = u_{gn} + v_{gn} i$, $z_n \leq z \leq z_{n+1}$, $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$ e $n = 1, 2, \dots, N$.

Com condições de contorno,

Para direção- z

$$w_n = w_0 \quad \text{em } z = z_0 \quad \text{e } n = 1, \quad (6.19a)$$

$$w_n = w_{gn} \quad \text{em } z = z_i \quad \text{e } n = N. \quad (6.19b)$$

Para direção- x, y

$$w_n = \frac{1}{2}(-\zeta + \delta i) y \quad \text{em } x = 0, \quad (6.20a)$$

$$w_n = \frac{1}{2}(\delta + \zeta i) L_x + \frac{1}{2}(-\zeta + \delta i) y \quad \text{em } x = L_x, \quad (6.20b)$$

$$w_n = \frac{1}{2}(\delta + \zeta i) x, \quad \text{em } y = 0, \quad (6.20c)$$

$$w_n = \frac{1}{2}(\delta + \zeta i) x + \frac{1}{2}(-\zeta + \delta i) L_y \quad \text{em } y = L_y. \quad (6.20d)$$

As condições de interfaces,

$$w_n = w_{n+1} \quad \text{em } z = z_n \quad \text{e } n = 1, 2, \dots, (N-1), \quad (6.21a)$$

$$K_{zn} \frac{\partial w_n}{\partial z} = K_{z(n+1)} \frac{\partial w_{n+1}}{\partial z} \quad \text{em } z = z_n \quad \text{e } n = 1, 2, \dots, (N-1). \quad (6.21b)$$

6.2.2 GITT

A equação (6.18) é resolvida pela Técnica de Transformada Integral Generalizada - GITT, (ÖZIŞIK, 1993; MIKHAILOV; ÖZIŞIK, 1984; COTTA, 1993). Nessa técnica, a função-solução é expandida em termos das autofunções correspondentes ao problema auxiliar (Sturm-Liouville), associado ao problema original. A condição de ortogonalidade das autofunções é utilizada para determinação dos coeficientes da expansão; assim, dando origem à integral transformada e sua inversa. Aplicando a transformação integral as derivadas parciais em relação às variáveis x e y serão removidas, reduzindo o problema a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem na variável z (problema transformado). Uma vez que o problema transformado é resolvido, a fórmula inversa é utilizada para obter a solução do problema original. A ordem de truncamento é selecionada de acordo com a precisão desejada. O procedimento a seguir resulta da aplicação dos resultados obtidos na Seção 5.1.

(i) Problema auxiliar

O problema auxiliar associado a w_n é:

$$\frac{K_{xn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 \psi(\lambda_{pq}, x, y)}{\partial x^2} + \frac{K_{yn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 \psi(\lambda_{pq}, x, y)}{\partial y^2} = -\lambda_{pq}^2 \psi(\lambda_{pq}, x, y), \quad (6.22)$$

com condições de contorno

$$\psi = 0 \quad \text{em} \quad x = 0, \quad \text{e} \quad x = L_x, \quad (6.23a)$$

$$\psi = 0 \quad \text{em} \quad y = 0, \quad \text{e} \quad y = L_y. \quad (6.23b)$$

Supondo que, $\psi(\lambda_{pq}, x, y) = \psi_1(\beta_p, x) \psi_2(\gamma_q, y)$, a solução do problema auxiliar associado a w_n é (ÖZIŞIK, 1993; MIKHAILOV; ÖZIŞIK, 1984):

- autofunções

$$\psi_1(\beta_p, x) = \text{sen}(\beta'_p x) \quad \text{para} \quad p = 1, 2, \dots \quad (6.24a)$$

$$\psi_2(\gamma_q, y) = \text{sen}(\gamma'_q y) \quad \text{para} \quad q = 1, 2, \dots \quad (6.24b)$$

$$\text{com} \quad \beta'_p = \sqrt{\frac{K_{zn}}{K_{xn}}} \beta_p \quad \text{e} \quad \gamma'_q = \sqrt{\frac{K_{zn}}{K_{yn}}} \gamma_q.$$

- autovalores

$$\beta_p = \frac{p \pi}{L_x} \sqrt{\frac{K_{xn}}{K_{zn}}}, \quad \text{para } p = 1, 2, \dots \quad (6.25a)$$

$$\gamma_q = \frac{q \pi}{L_y} \sqrt{\frac{K_{yn}}{K_{zn}}}, \quad \text{para } q = 1, 2, \dots \quad (6.25b)$$

os autovalores são raízes positivas das equações $\text{sen}(\beta'_p L_x) = 0$ e $\text{sen}(\gamma'_q L_y) = 0$, respectivamente.

- norma

$$\frac{1}{N(\beta_p)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \quad \text{para } p = 1, 2, \dots \quad (6.26a)$$

$$\frac{1}{N(\gamma_q)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \quad \text{para } q = 1, 2, \dots \quad (6.26b)$$

com $\lambda_{pq}^2 = \beta_p^2 + \gamma_q^2$.

(ii) Problema transformado

- Fórmula de Inversão:

$$w_n(x, y, z) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\psi(\lambda_{pq}, x, y)}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \overline{w}_n(\lambda_{pq}, z), \quad (6.27)$$

com $N(\lambda_{pq}) = N(\beta_p) N(\gamma_q)$.

- Transformada Integral:

$$\overline{w}_n(\lambda_{pq}, z) = \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') w_n(x', y', z) dy' dx', \quad (6.28)$$

onde

$$N(\lambda_{pq}) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} [\psi(\lambda_{pq}, x', y')]^2 dy' dx'. \quad (6.29)$$

Para explicitar o sistema transformado, aplica-se o operador

$\frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') dy' dx'$ sobre a Equação (6.18) como segue:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') \frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2} dy' dx' \\ & + \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') \left[\frac{K_{xn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x'^2} + \frac{K_{yn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y'^2} \right] dy' dx' \\ & - \left[\frac{\delta}{2K_{zn}} + \left(\frac{f_c}{K_{zn}} + \frac{\zeta}{2K_{zn}} \right) i \right] \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') w_n dy' dx' \\ & = -\frac{f_c w_{gn} i}{K_{zn}} \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') dy' dx', \end{aligned} \quad (6.30)$$

com $w_n \equiv w_n(x', y', z)$.

Resolvendo cada termo da equação acima, separadamente,

1. No primeiro termo, aplica-se a Regra de Leibniz, (Lima (2000)),

$$\frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') \frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2} dy' dx' = \frac{d^2 \overline{w_n}}{dz^2}, \quad (6.31)$$

onde $\overline{w_n}(\lambda_{pq}, z) \equiv \overline{w_n}$.

2. A integral presente no segundo termo é calculada usando o Teorema de Green ou integrando por partes duas vezes, utilizando o problema de autovalor (6.22) e as condições de contorno (6.20) (Ver Apêndice B), sendo expressa por

$$\frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') \left[\frac{K_{xn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x'^2} + \frac{K_{yn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y'^2} \right] dy' dx' = -\lambda_{pq}^2 \overline{w_n} + C_n, \quad (6.32)$$

sendo que C_n é dado no Apêndice B.

3. A terceira integral, resulta da definição (6.28)

$$\frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') w_n dy' dx' = \overline{w_n}. \quad (6.33)$$

4. A quarta, pelos resultados (6.24) e (6.25)

$$G = \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') dy' dx' \quad (6.34)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \left[\left(\frac{1 - \cos(p\pi)}{\beta'_p} \right) \left(\frac{1 - \cos(q\pi)}{\gamma'_q} \right) \right]. \quad (6.35)$$

Substituindo os resultados (6.31), (6.32), (6.33) e (6.34) em (6.30), tem-se a equação diferencial ordinária de segunda ordem,

$$\frac{d^2 \bar{w}_n}{dz^2} - \left[\left(\lambda_{pq}^2 + \frac{\delta}{2K_{zn}} \right) + \left(\frac{f_c}{K_{zn}} + \frac{\zeta}{2K_{zn}} \right) i \right] \bar{w}_n = -\frac{f_c w_{gn} G i}{K_{zn}} - C_n. \quad (6.36)$$

Nomeando,

$$\alpha_{1n} = \lambda_{pq}^2 + \frac{\delta}{2K_{zn}}, \quad (6.37a)$$

$$\alpha_{2n} = \frac{f_c}{K_{zn}} + \frac{\zeta}{2K_{zn}}. \quad (6.37b)$$

Assim

$$\frac{d^2 \bar{w}_n}{dz^2} - (\alpha_{1n} + \alpha_{2n} i) \bar{w}_n = -\frac{f_c w_{gn} G i}{K_{zn}} - C_n. \quad (6.38)$$

As condições de contorno e interfaces, do problema transformado na direção- z , são determinadas aplicando a definição (6.28) em (6.19a), (6.19b), (6.21a) e (6.21b) dadas, respectivamente, por

$$\bar{w}_n = G w_0 \quad \text{em } z = z_0 \quad \text{e } n = 1, \quad (6.39a)$$

$$\bar{w}_n = G w_{gn} \quad \text{em } z = z_i \quad \text{e } n = N, \quad (6.39b)$$

$$\bar{w}_n = \bar{w}_{n+1} \quad \text{em } z = z_n \quad \text{e } n = 1, 2, \dots, (N-1), \quad (6.40a)$$

$$K_{zn} \frac{\partial \bar{w}_n}{\partial z} = K_{z(n+1)} \frac{\partial \bar{w}_{n+1}}{\partial z} \quad \text{em } z = z_n \quad \text{e } n = 1, 2, \dots, (N-1). \quad (6.40b)$$

A Equações (6.38) é resolvida por métodos clássicos. Sendo assim, resolve-se primeiramente a equação homogênea associada à Equação (6.38), que é expressa por:

$$\frac{d^2 \bar{w}_{nh}}{dz^2} - (\alpha_{1n} + \alpha_{2n} i) \bar{w}_{nh} = 0.$$

Aplicando o método de resolução de equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes (BOYCE; PRIMA, 1999), obtém-se à equação característica associada a equação diferencial homogênea:

$$r^2 - (\alpha_{1n} + \alpha_{2n} i) = 0,$$

assim

$$r = \pm \sqrt{(\alpha_{1n} + \alpha_{2n} i)},$$

logo

$$r_{1n} = (\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2)^{1/4} \left[\cos \left(\frac{\theta_n}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_n}{2} \right) \right], \quad \alpha_{1n} \neq 0 \text{ e } \alpha_{2n} \neq 0, \quad (6.41)$$

$$r_{2n} = (\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2)^{1/4} \left[\cos \left(\frac{\theta_n}{2} + \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_n}{2} + \pi \right) \right], \quad \alpha_{1n} \neq 0 \text{ e } \alpha_{2n} \neq 0, \quad (6.42)$$

onde $\theta_n = \operatorname{arctg} \left(\frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{1n}} \right)$; $\theta_n \neq \frac{\pi}{2} + \kappa\pi$, $\kappa = 0, 1$.

Assim

$$\overline{w_n^h}(\lambda_{pq}, z) = A_n \exp[r_{1n} z] + B_n \exp[r_{2n} z], \quad (6.43)$$

com $A_n, B_n \in \mathbb{C}$.

A solução particular é obtida utilizando o método dos coeficientes indeterminados (BOYCE; PRIMA, 1999), isto é, supõe-se que $\overline{w_n^p} = K$, K uma constante. Substituindo na Equação (6.38), obtém-se

$$K = \frac{1}{(\alpha_{1n} + \alpha_{2n} i)} \left(\frac{f_c w_{gn} G i}{K_{zn}} + C_n \right),$$

Logo

$$\overline{w_n^{particular}}(\lambda_{pq}, z) = \frac{1}{(\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2)} \left[(\alpha_{2n} + \alpha_{1n} i) \frac{f_c w_{gn} G}{K_{zn}} + (\alpha_{1n} - \alpha_{2n} i) C_n \right]. \quad (6.44)$$

A partir das Equações (6.43) e (6.44), tem-se que a solução geral da Equação (6.38) é:

$$\overline{w_n}(\lambda_{pq}, z) = A_n \exp[r_{1n} z] + B_n \exp[r_{2n} z] + \overline{w_n^{particular}}(\lambda_{pq}, z), \quad (6.45)$$

com $A_n, B_n, r_{1n}, r_{2n}, \overline{w_n^p} \in \mathbb{C}$.

Para determinar as constantes A_n e B_n , aplicam-se as condições de contorno (6.39a) e (6.39b), e as $2(N - 1)$ condições de interface (6.40a) e (6.40b), como segue:

$$\begin{aligned} \text{em } z = z_0: & \quad \overline{w_1}(\lambda_{pq}, z) = G w_0 \\ \text{em } z = z_2: & \quad \begin{cases} \overline{w_1}(\lambda_{pq}, z) = \overline{w_2}(\lambda_{pq}, z) \\ K_{z1} \frac{\partial \overline{w_1}(\lambda_{pq}, z)}{\partial z} = K_{z2} \frac{\partial \overline{w_2}(\lambda_{pq}, z)}{\partial z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{em } z = z_3: & \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{w}_2(\lambda_{pq}, z) = \overline{w}_3(\lambda_{pq}, z) \\ K_{z_2} \frac{\partial \overline{w}_2(\lambda_{pq}, z)}{\partial z} = K_{z_3} \frac{\partial \overline{w}_3(\lambda_{pq}, z)}{\partial z} \end{array} \right. \\
\text{em } z = z_4: & \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{w}_3(\lambda_{pq}, z) = \overline{w}_4(\lambda_{pq}, z) \\ K_{z_3} \frac{\partial \overline{w}_3(\lambda_{pq}, z)}{\partial z} = K_{z_4} \frac{\partial \overline{w}_4(\lambda_{pq}, z)}{\partial z} \end{array} \right. \\
\vdots & \quad \vdots \\
\text{em } z = z_N: & \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{w}_{(N-1)}(\lambda_{pq}, z) = \overline{w}_N(\lambda_{pq}, z) \\ K_{z_{(N-1)}} \frac{\partial \overline{w}_{(N-1)}(\lambda_{pq}, z)}{\partial z} = K_{z_N} \frac{\partial \overline{w}_N(\lambda_{pq}, z)}{\partial z} \end{array} \right. \\
\text{em } z = z_i: & \quad \overline{w}_N(\lambda_{pq}, z) = G w_{gN}
\end{aligned}$$

Com as expressões obtidas acima, chega-se a um sistema linear de dimensão ($\eta = 2N$) dado por: $\mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{b}$,

em que:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{65} & M_{66} & M_{67} & M_{68} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{75} & M_{76} & M_{77} & M_{78} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{\eta-1, \eta-3} & M_{\eta-1, \eta-2} & M_{\eta-1, \eta-1} & M_{\eta-1, \eta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{\eta, \eta-1} & M_{\eta, \eta} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \left[A_1 \quad B_1 \quad A_2 \quad B_2 \quad A_3 \quad B_3 \quad \dots \quad A_N \quad B_N \right]^T$$

e

$$\mathbf{b} = \left[b_1 \quad b_2 \quad 0 \quad b_4 \quad 0 \quad \dots \quad b_{\eta-2} \quad 0 \quad b_\eta \right]^T,$$

⁴são definidos como segue:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \exp [r_{11} z_0] \\ M_{12} &= \exp [(r_{21} z_0)] \end{aligned}$$

$$b_1 = G w_0 - \overline{w}_{1particular} (\lambda_{pq}, z_0)$$

e para $n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$

$$\begin{aligned} M_{2n,2n-1} &= \exp [r_{1n} z_n] \\ M_{2n,2n} &= \exp [r_{2n} z_n] \\ M_{2n,2n+1} &= -\exp [r_{1(n+1)} z_n] \\ M_{2n,2n+2} &= -\exp [r_{2(n+1)} z_n] \\ M_{2n+1,2n-1} &= K_{zn} r_{1n} \exp [r_{1n} z_n] \\ M_{2n+1,2n} &= K_{zn} r_{2n} \exp [r_{2n} z_n] \\ M_{2n+1,2n+1} &= -K_{z(n+1)} r_{1(n+1)} \exp [r_{1(n+1)} z_n] \\ M_{2n+1,2n+2} &= -K_{z(n+1)} r_{2(n+1)} \exp [r_{2(n+1)} z_n] \end{aligned}$$

$$b_{2n} = \overline{w}_{n+1particular} (\lambda_{pq}, z_n) - \overline{w}_{nparticular} (\lambda_{pq}, z_n)$$

e, por fim:

$$\begin{aligned} M_{2N,2N-1} &= \exp [r_{1N} z_N] \\ M_{2N,2N} &= \exp [r_{2N} z_N] \end{aligned}$$

$$b_{2N} = G w_{gN} - \overline{w}_{Nparticular} (\lambda_{pq}, z_N)$$

Então, para cada p e q , resolve-se o sistema $\mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ numericamente. O método numérico adotado é *Eliminação de Gauss* (BURDEN; FAIRES, 2003).

(iii) Transformada Inversa

Aplicando os resultados (6.24) - (6.26) na Equação (6.27), tem-se a transformada inversa e, conseqüentemente, a solução procurada,

$$w_n(x, y, z) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \text{sen}(\beta'_p x) \text{sen}(\gamma'_q y) \overline{w}_n(\lambda_{pq}, z) \quad (6.46)$$

⁴ T representa que o vetor está transposto.

com $\overline{w}_n(\lambda_{pq}, z)$ dada pela equação (6.45) e $\lambda_{pq}^2 = \beta_p^2 + \gamma_q^2$.

O algoritmo foi executado na linguagem de programação FORTRAN 90 (KERRIGAN, 1993).

Finalmente, obtêm-se as componentes do vento médio, u e v , a partir do fato que $w_n(x, y, z) = u_n(x, y, z) + v_n(x, y, z) i$, neste caso

$$u_n(x, y, z) = \Re w_n(x, y, z) \quad (6.47a)$$

$$v_n(x, y, z) = \Im w_n(x, y, z) \quad (6.47b)$$

em que \Re representa a parte real de w e \Im representa a parte imaginária de w_n .

As equações para u_n e v_n , escritas explicitamente, são mostradas nos Apêndices A e B.

7 RESULTADOS

No capítulo que segue, apresentam-se os resultados referentes à solução das equações de Navier-Stokes tridimensionais estacionárias, para as componentes horizontais da velocidade média do vento (Ver Seção 6.2). Em cada simulação foi considerada a variação independente dos seguintes parâmetros: o tamanho da área horizontal definida por L_x e L_y ; a espessura das subcamadas em que a CLP foi dividida, representada por Δz ; as variáveis horizontais x e y ; a ordem de truncamento p e q e os valores de divergência δ e vorticidade ζ . Foram simulados os perfis da magnitude do vento médio e da direção do vento. Neste ponto, é importante salientar que, durante a variação de cada um dos parâmetros citados anteriormente, todos os outros permanecem constantes.

As condições iniciais foram dadas pela Equação (4.12), com rugosidade $Z_0 = 0,0012 m$ e $\theta = 16^\circ$ (ângulo meteorológico). Assim, as componentes horizontais iniciais são dadas por:

$$u_0 = |U| \cos(\theta) \quad (7.1a)$$

$$v_0 = |U| \sin(\theta) \quad (7.1b)$$

para $z_0 = 0,5 m$.

Os demais parâmetros são obtidos a partir dos dados do experimento de Wangara (CLARKE et al., 1971, Capítulo 8).

Na Figura 7.1, verificou-se a convergência da solução do modelo proposto mediante a variação no número de termos do somatório da Equação (6.46). Obteve-se a convergência do modelo para $p = q = 9$. Os demais parâmetros são: $L_x = L_y = 10 \text{ km}$, $x = 0,5L_x$, $y = 0,5L_y$, $\delta = 0$, $\zeta = 0$ e $\Delta z = 5 \text{ m}$.

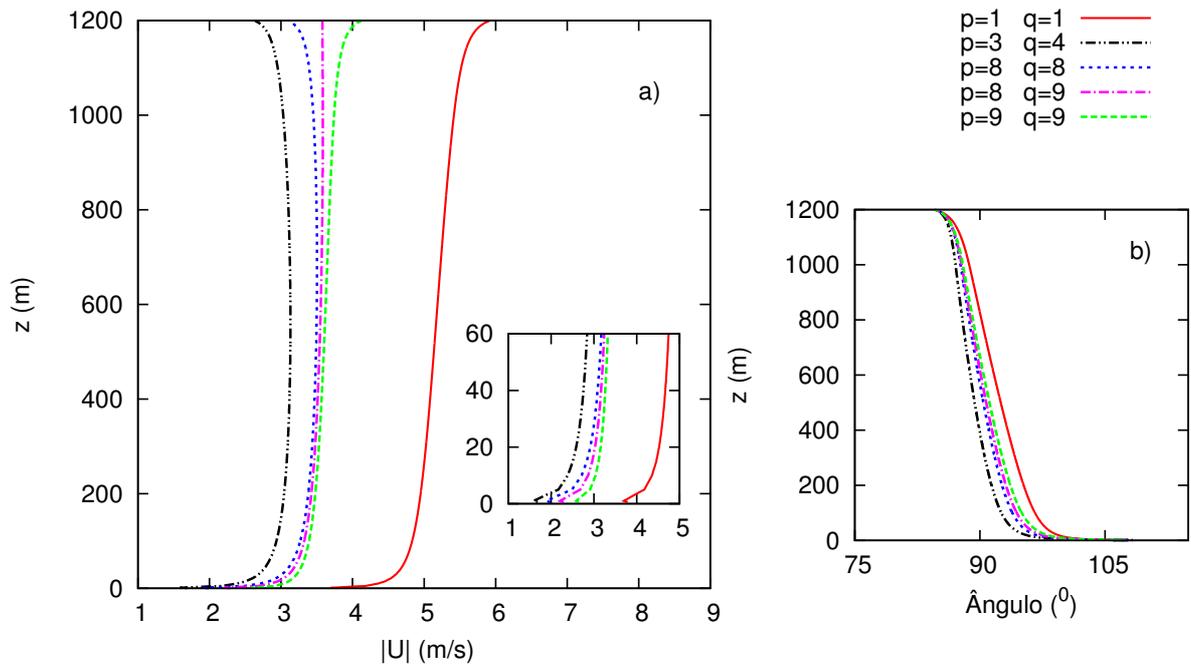


Figura 7.1: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados para diferentes ordem de truncamento.

Na Figura 7.2, testou-se a solução do modelo variando as coordenadas horizontais, sendo que $0 < x < L_x$ e $0 < y < L_y$. O resultado do modelo depende da posição horizontal dentro do domínio, mesmo quando não se consideram os efeitos de grande escala, que são a divergência e a vorticidade. A variação horizontal é grande nas proximidades das fronteiras, no entanto, existe uma porção do domínio, próximo ao centro, em que os perfis de vento não variam muito horizontalmente. Considerou-se $L_x = L_y = 10 \text{ km}$, $p = q = 9$, $\delta = 0$, $\zeta = 0$ e $\Delta z = 5 \text{ m}$.

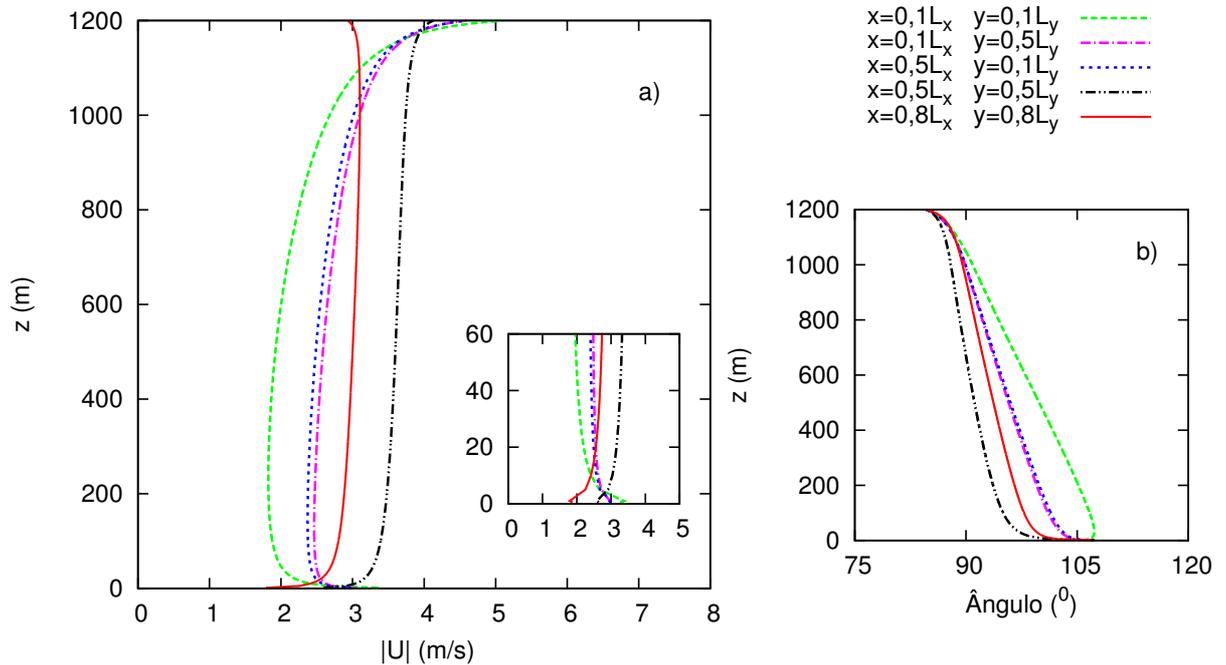


Figura 7.2: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados para diferentes valores de x e y .

Na Figura 7.3, simularam-se os perfis da magnitude do vento médio e da direção do vento horizontal, fazendo-se variar o tamanho da área horizontal. Assumiu-se $p = q = 9$, $x = 0,5L_x$, $y = 0,5L_y$, $\delta = 0$, $\zeta = 0$ e $\Delta z = 5 \text{ m}$. O tamanho do domínio horizontal tem um considerável impacto na solução, mas somente para pequenas áreas. A medida que L_x e L_y são sucessivamente aumentados de 1 km a 100 km , a solução tornou-se independente do tamanho do domínio para $L_x = L_y \geq 50 \text{ km}$. Isso significa que a solução é adequada para áreas horizontais maiores que 50 km .

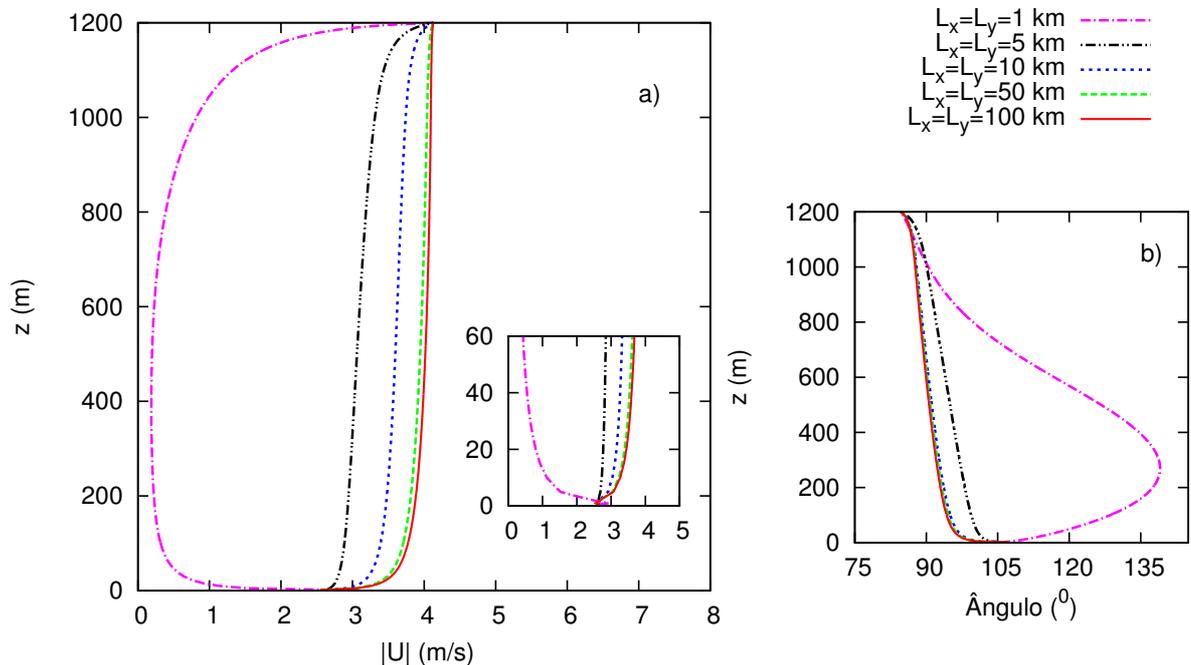


Figura 7.3: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados para diferentes valores de L_x e L_y .

Na Figura 7.4, investigou-se a convergência da solução do modelo proposto, mediante a variação da espessura das subcamadas em que a CLP foi dividida. Utilizou-se, $L_x = L_y = 50 \text{ km}$, $p = q = 9$, $\delta = 0$, $\zeta = 0$ e $x = 0,5L_x$, $y = 0,5L_y$. Pode-se observar que a influência de Δz é importante para baixos níveis, sendo que, quanto mais refinada a camada, menor a magnitude do vento médio e da direção do vento horizontal. Note, também, que na altura correspondente à metade da CLP até o topo da camada, a variação é muito pequena. Por outro lado, como pode ser visto na Tabela 7.1, o tempo computacional exigido para cada simulação apresentou grandes variações. Essa análise permite escolher $\Delta z = 5 \text{ m}$.

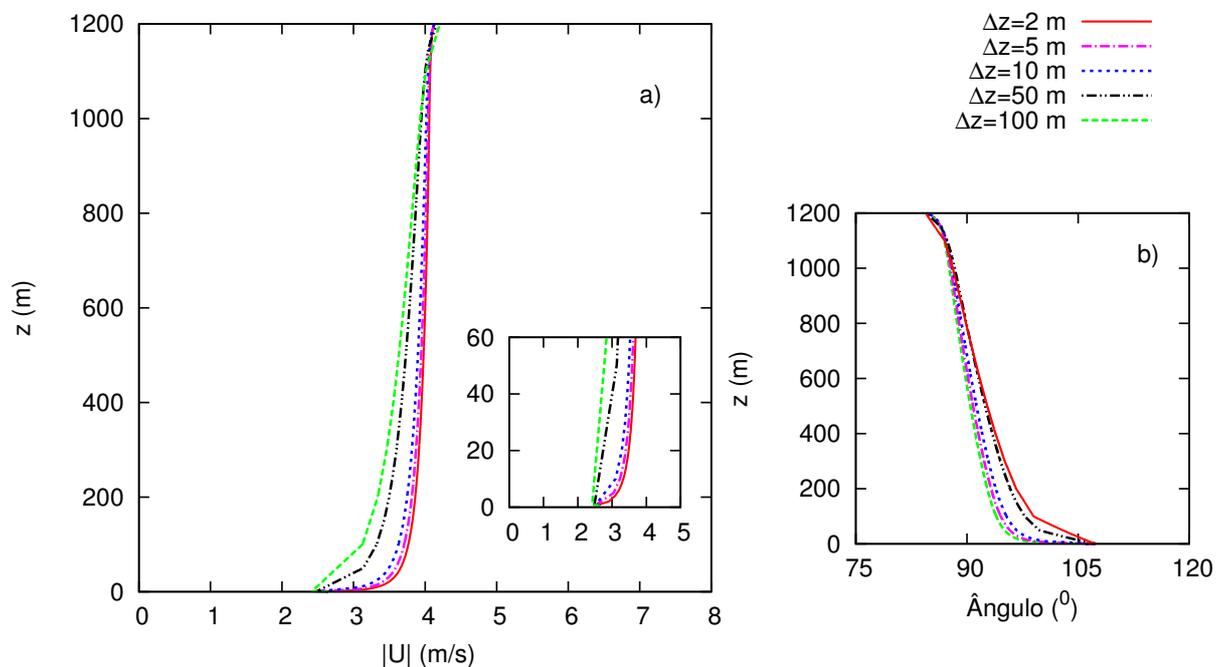


Figura 7.4: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados para diferentes valores de Δz .

Tabela 7.1: Comparação entre o tempo computacional exigido em cada simulação para diferentes espessuras das subcamadas. Os valores apresentados nesta tabela referem-se à Figura 7.4.

Δz (m)	Tempo Computacional
2	29' 22''
5	1' 19''
10	8''
50	1''
100	< 1''

Nas Figuras 7.5, 7.6, 7.7, 7.8 e 7.9, simularam-se os perfis de velocidade do vento médio horizontal e direção, para diversos valores de divergência (δ) e vorticidade (ζ). Todos os resultados foram obtidos para valores de $p = q = 9$, $L_x = L_y = 50 \text{ km}$, $x = 0,5L_x$, $y = 0,5L_y$ e $\Delta z = 5 \text{ m}$.

Analisando-se a Figura 7.5, que considera vorticidade nula, observa-se que, tanto no caso divergente quanto no caso convergente, existe uma grande variação no valor da magnitude do vento médio, quando se assumem valores grandes para δ . Esse fato é mais evidente nos perfis da direção do vento. Conclusão semelhante é obtida para a Figura 7.6, que assume divergência nula e considera casos ciclônicos e anticiclônicos.

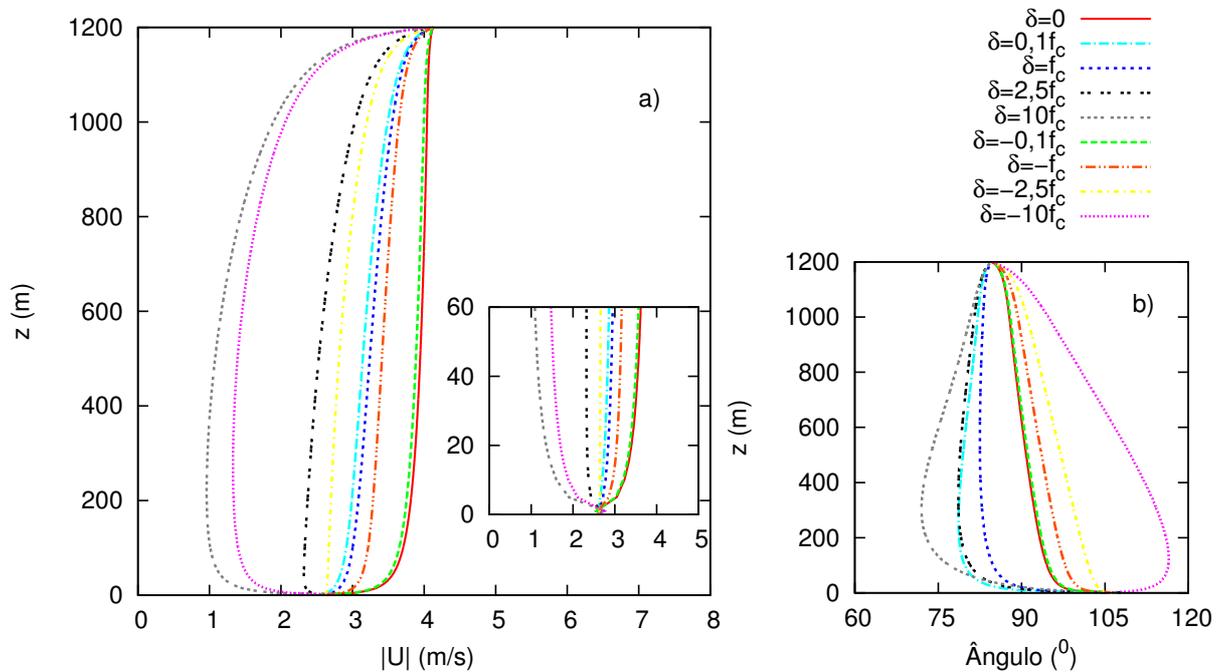


Figura 7.5: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados para diferentes valores de δ e em todos os casos $\zeta = 0$.

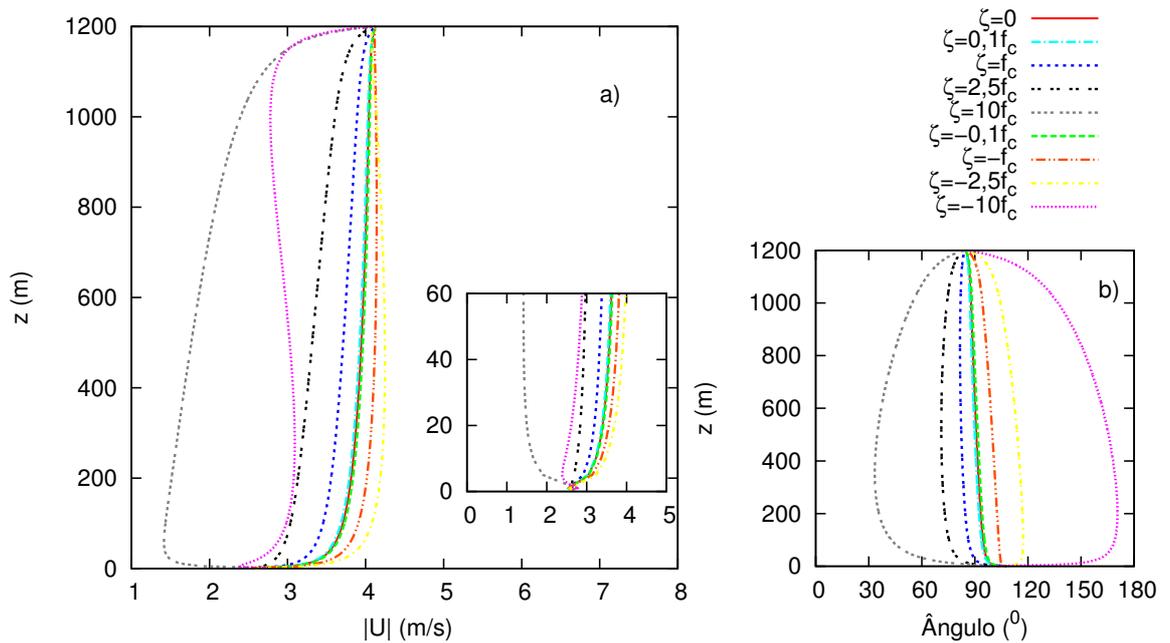


Figura 7.6: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados para diferentes valores de ζ e em todos os casos $\delta = 0$.

Nas simulações mostradas nas figuras 7.7, 7.8 e 7.9, consideraram-se combinações entre diferentes valores de divergência e vorticidade. Observam-se perfis semelhantes para o vento médio, com magnitudes maiores para o caso em que a divergência e a vorticidade são nulas. Ressalta-se que, na direção do vento, são observadas as maiores variações entre os casos simulados. As mudanças na forma dos perfis ocorrem quando pelo menos um dos parâmetros de grande escala (vorticidade e divergência) é consideravelmente maior que o parâmetro de Coriolis.

Essa análise permite concluir que os valores para a divergência e a vorticidade devem estar próximos ao valor de Coriolis.

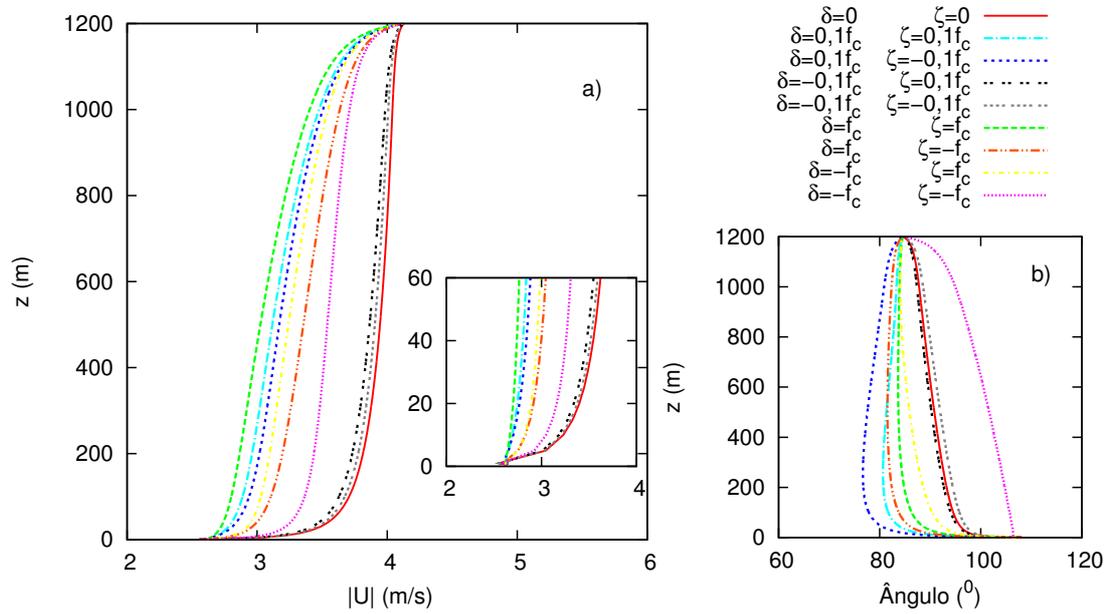


Figura 7.7: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados para diferentes valores de δ e ζ .

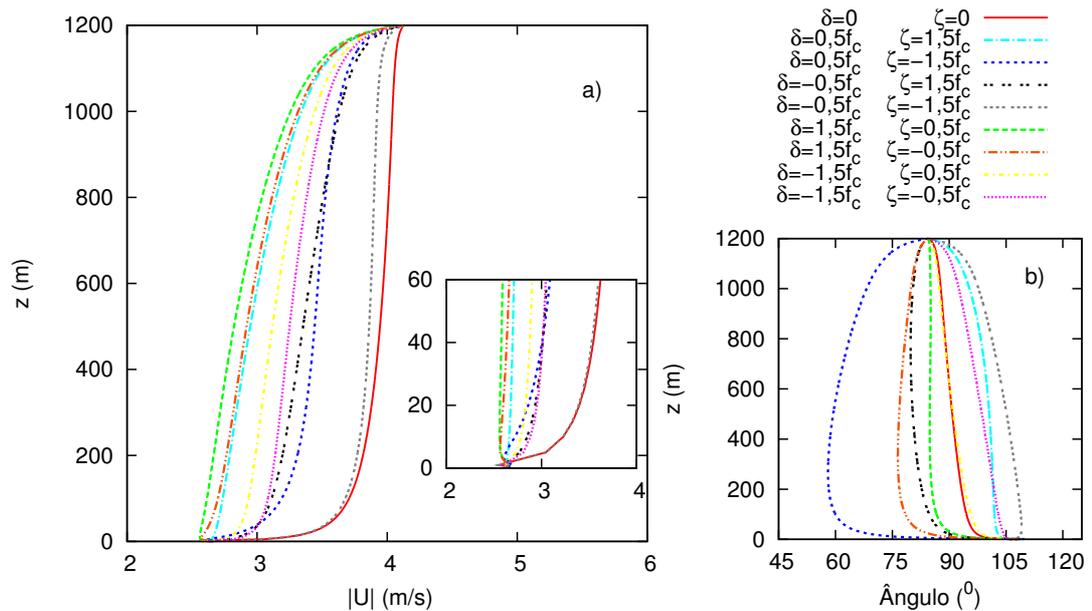


Figura 7.8: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados para diferentes valores de δ e ζ .

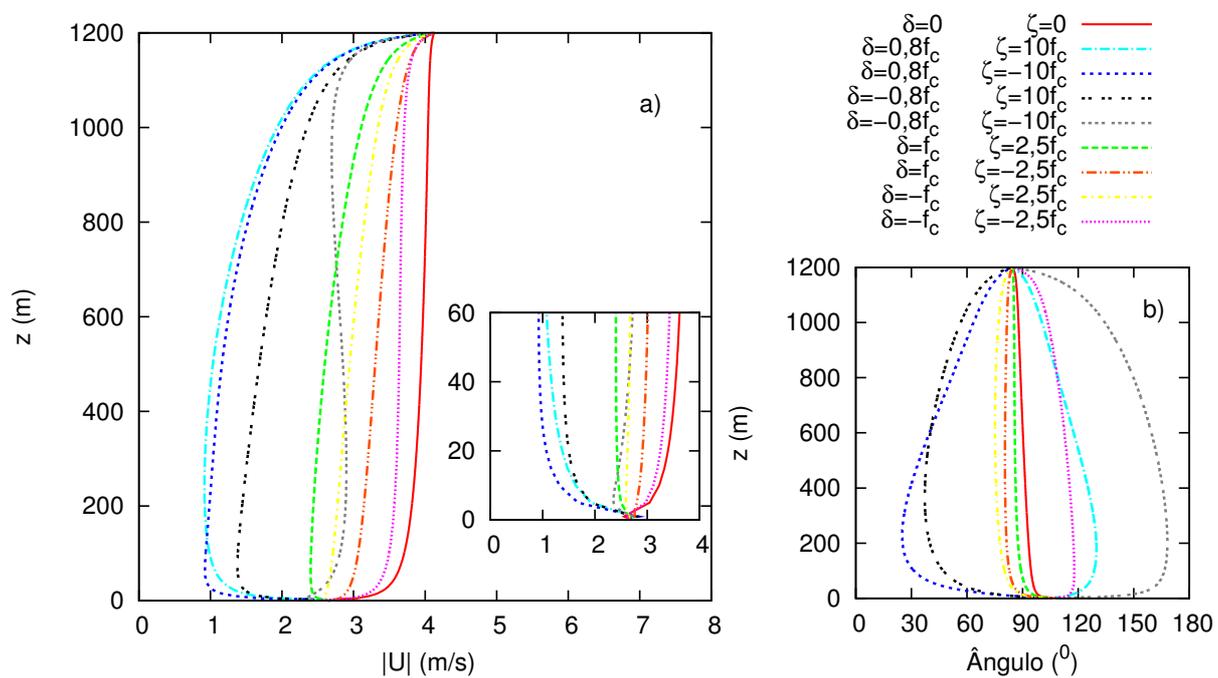


Figura 7.9: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados para diferentes valores de δ e ζ .

8 VALIDAÇÃO DO MODELO

8.1 O experimento de Wangara

O experimento de Wangara foi realizado de 15 de julho a 27 de Agosto de 1967 em Hay, New South Wales ($34^{\circ}30'S.$, $144^{\circ}56'L.$), Austrália (CLARKE et al., 1971). As observações meteorológicas realizaram-se em uma CLP desenvolvida acima de um terreno plano, composto por uma vegetação rasteira e apresentando uma certa inclinação. Medidas de vento realizadas de hora em hora foram efetuadas por um balão piloto até uma altura de 2 km . Os valores médios destes dados de vento foram feitos em cinco estações. Quatro dessas estações estavam localizadas aproximadamente nos vértices de um quadrado de 60 km de comprimento; a quinta, próxima ao centro do quadrado. O valor médio dos ventos foi apresentado nas componentes zonal e meridional, em intervalos de 50 m até uma altura de 1 km . A partir daí, em intervalos de 100 m até uma altura de 2 km . Na estação central, uma radiossonda coletou valores para a razão de mistura e temperatura em intervalos de 3 horas.

As medidas meteorológicas de uma torre forneceram informações sobre os ventos na camada superficial em 1, 2, 4, 8 e 16 m em duas das cinco estações: na central (estação 5) e na 4; as medidas de vento em $0,5\text{ m}$ foram realizadas na 5. As diferenças de temperatura foram medidas entre 1 e 2 m e 2 e 4 m , com o uso de um par combinado de termômetros de resistência.

Durante os experimentos, realizaram-se concomitantemente as observações superficiais de pressão, temperatura em bulbo seco e úmido e direção do vento na superfície.

Os ventos geostróficos na superfície foram estimados de duas maneiras: a primeira, obtida a partir de medidas de pressão superficial lidas de hora em hora nas cinco estações; a segunda, proveniente de medidas de pressão superficial lidas nas cinco estações e na Estação Meteorológica de Bureau em intervalos de 3 horas. Ventos térmicos foram estimados duas vezes por dia na Estação Meteorológica de Bureau, em intervalos de 0 a 1 km e 1 a 2 km , a partir de uma rede de radiossondas sinóticas.

As medidas do experimento de Wangara forneceram as bases para a determinação das funções de similaridade de Monin-Obukhov, que também foram usadas para calcular os valores das funções universais da teoria de similaridade de Rossby e, ainda, determinaram muitas escolhas apropriadas para os parâmetros de escala. Dados, em condições convectivas coletados durante o famoso experimento do dia 33, foram usados para testar muitos modelos numéricos na camada limite atmosférica. Finalmente, os resultados do experimento de

Wangara, apontaram as dificuldades e limitações na obtenção das medidas exatas de vento térmico, velocidades verticais e fluxos mediados espacialmente (SORBJAN, 1989).

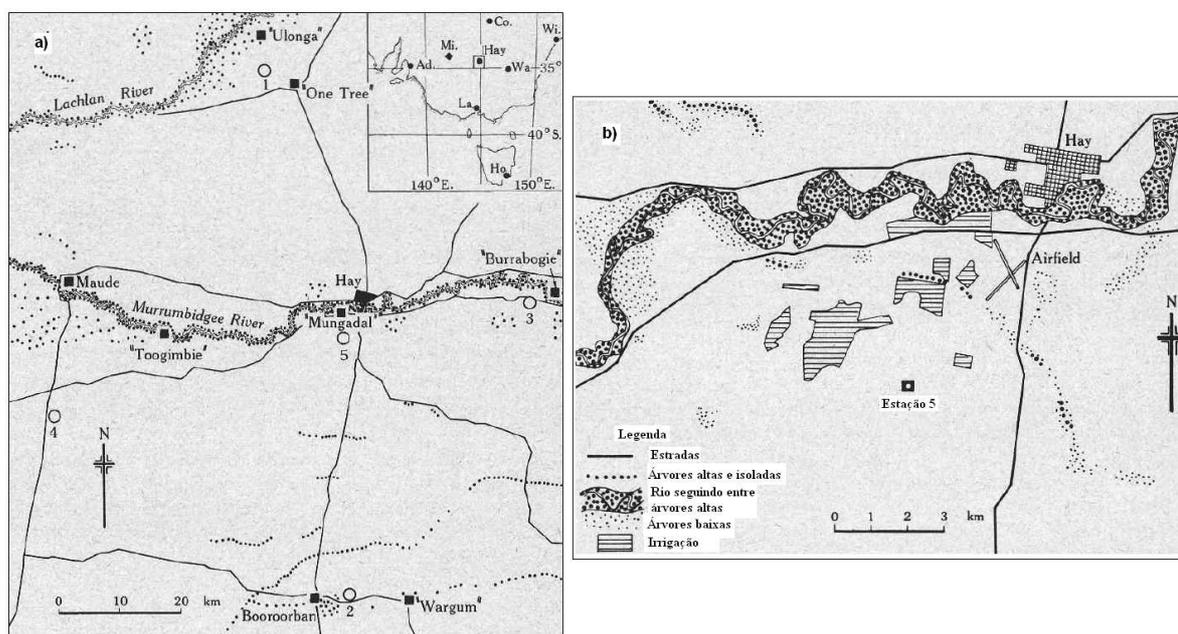


Figura 8.1: **a)** Localização das Estações no Experimento de Wangara. **b)** Localização da Estação 5. Figura adaptada de CLARKE, R.H. et al. The Wangara Experiment: Boundary Layer Data, CSIRO, 1971.

8.2 Simulações

A Tabela 8.1 apresenta os parâmetros meteorológicos observados durante os experimentos de Wangara.

Tabela 8.1: Parâmetros meteorológicos observados durante os experimentos de Wangara.

<i>dia</i>	<i>hora</i>	$-L$ (m)	z_i (m)	u_* (m/s)	u_{g0} (m/s)	v_{g0} (m/s)
33	15 : 00	2,1	1200	0,155	-5,32	-0,77
40	15 : 00	10	1200	0,14	1,7	-2,55

Os parâmetros L e u_* para o dia 33 foram retirados de Yamada (1976) e Melgarejo e Deardorff (1975); para o dia 40, de Wilson e Flesch (2004). Os valores para u_{g0} e v_{g0} foram obtidos em Clarke et al. (1971). A partir do gráfico da temperatura potencial virtual (Figura 8.2), estimaram-se os valores de z_i (CLARKE et al., 1971). O parâmetro de Coriolis foi aproximado em $f_c = -8,21 \times 10^{-5} s^{-1}$.

A variação do vento térmico às 15 horas é estimada interpolando linearmente os dados

da Tabela 8.2. Os valores dados na Tabela 8.3 obtêm-se a partir das equações $u_T = \frac{(\Delta u_T)}{\Delta z}$ e $v_T = \frac{(\Delta v_T)}{\Delta z}$. Os valores para o vento geostrófico, para o caso baroclínico, calculam-se pela Equação (2.19).

Tabela 8.2: Diferença entre os valores do vento térmico (m/s) observada durante o experimento de Wangara (CLARKE et al., 1971). O índice 1 refere-se à diferença entre os intervalos de 0 a 1 km e o 2, à diferença entre 1 a 2 km .

Dia	33		40	
Hora	9 h	21 h	9 h	21 h
$(\Delta u_T)_1$	2,98	2,82	0,76	1,17
$(\Delta v_T)_1$	-0,04	-0,67	-1,16	-0,41
$(\Delta u_T)_2$	1,49	1,32	2,44	1,65
$(\Delta v_T)_2$	0,26	0,45	-0,94	-1,51

Tabela 8.3: Componentes do vento térmico estimados às 15 horas, a partir de dados observados durante o experimento de Wangara (CLARKE et al., 1971). O índice 1 refere-se à diferença entre os intervalos de 0 a 1 km e 2, à diferença entre 1 a 2 km .

Dia	33	40
	$10^{-3} (s^{-1})$	$10^{-3} (s^{-1})$
$(u_T)_1$	2,9	0,965
$(v_T)_1$	-0,355	-0,785
$(u_T)_2$	1,405	2,045
$(v_T)_2$	0,355	-1,125

Na Figura 8.3, representam-se a solução do modelo de Ekman (Equação (4.11)) e a do modelo unidimensional (Equação (6.5)). O modelo unidimensional resolveu-se para dois casos, para diferenciá-los usam-se as letras **a** e **b**, para os casos barotrópico e baroclínico, respectivamente. As condições iniciais são as mesmas assumidas para o modelo de Ekman, isto é, $u_0 = v_0 = 0$ no solo e $v_g = 0$. Nessas simulações, consideraram-se subcamadas de espessura $\Delta z = 2 m$.

O hodógrafo do modelo unidimensional apresentou, para ambos os casos, magnitudes menores que a da solução de Ekman. Para o baroclínico, representado por Eq. (6.5)-b, observa-se um comportamento diferente dos outros dois simulados, devido à sua baroclinicidade. Estes resultados concordam com os apresentados por Parmhed, Kos e Grisogono (2005) e mostrados na Figura 4.4.

Na Figura 8.4, apresentam-se os perfis para os coeficientes de difusão obtidos na Seção 4.2.

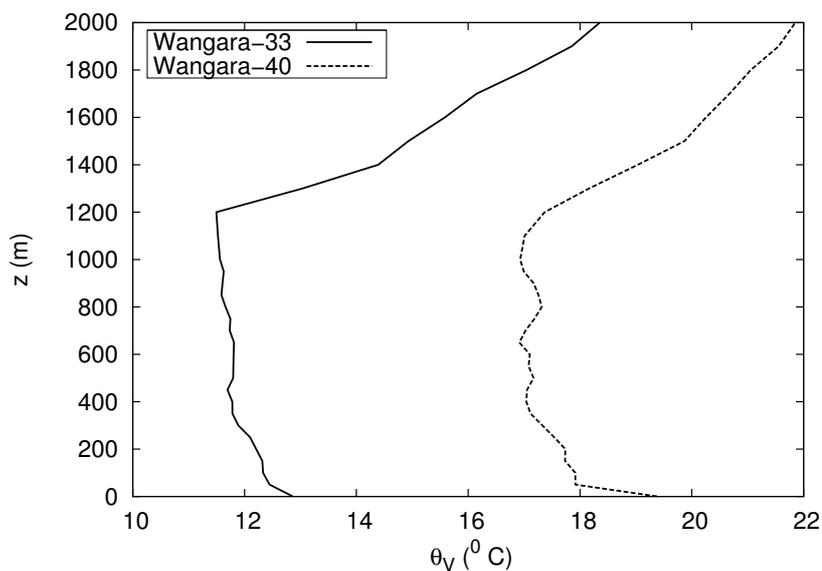


Figura 8.2: Temperatura Potencial Virtual. A linha contínua refere-se aos dados do dia 33; a pontilhada, aos dados do dia 40.

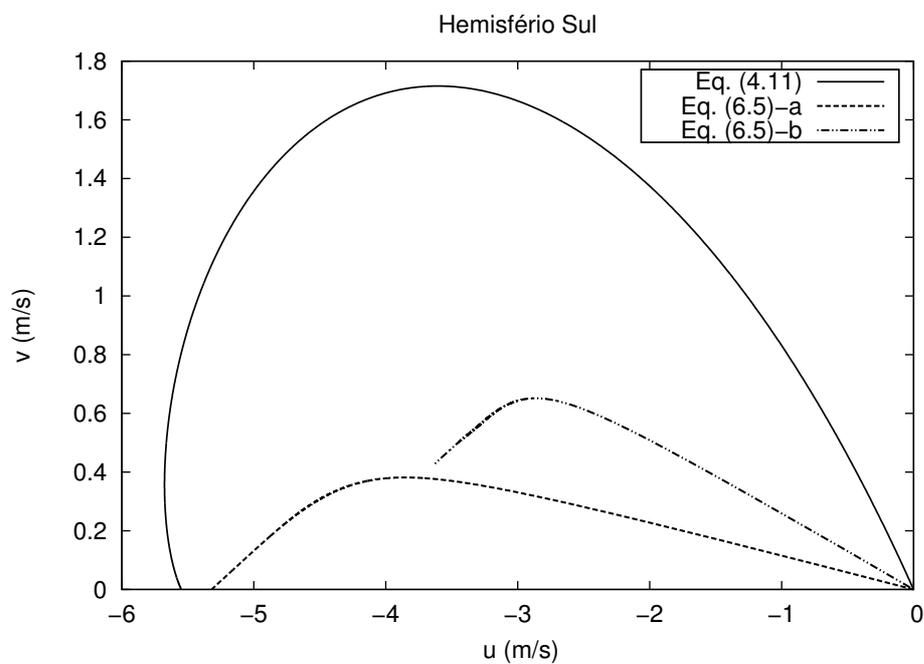


Figura 8.3: Hodógrafo do modelo de Ekman (Equação (4.11)) e da solução (6.5). Eq. (6.5)-a refere-se ao caso barotrópico e Eq. (6.5)-b, ao caso baroclínico.

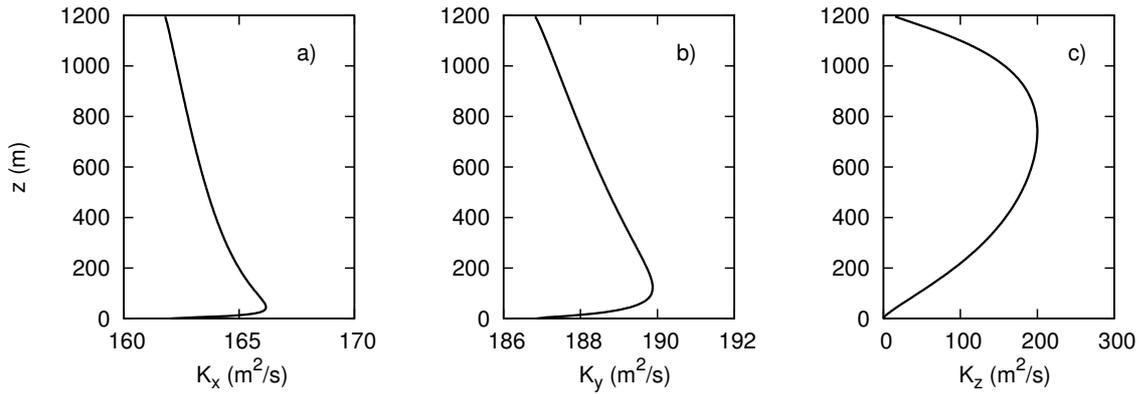


Figura 8.4: Coeficientes de difusão calculados pela Equação (4.32) para $\alpha = x, y, z$.

Nas Figuras 8.5 e 8.6, compararam-se os dados de Wangara com as seguintes aproximações: a unidimensional, dada pela Equação (6.5) (o caso barotrópico nomeado por Eq. (6.5)-a, e o baroclínico por Eq. (6.5)-b, ambas resultam da Equação (6.5)); a sugerida por Wilson e Flesch (2004); a Lei Logarítmica (Equação (4.13)) e a tridimensional dada pela Equação (6.46). Assumiram-se divergência $\delta = 0$, vorticidade $\zeta = 0$ e espessura das subcamadas $\Delta z = 5 m$. Nos outros casos utilizaram-se $\Delta z = 2 m$. Todos os resultados foram obtidos para valores de $p = q = 9$, $L_x = L_y = 50 km$, $x = 0,5L_x$ e $y = 0,5L_y$. Os índices estatísticos para a magnitude do vento médio e para a direção do vento horizontal são apresentados nas Tabelas 8.4 e 8.5; 8.6 e 8.7, respectivamente.

Observa-se que os perfis para o vento médio são semelhantes; no entanto, o caso barotrópico, Equação (6.5), apresentou o maior afastamento em relação aos dados experimentais para ambos os dias 33 (Figura 8.5) e 40 (Figura 8.6). Para a direção do vento, embora os perfis se mostrem próximos, os índices estatísticos revelam diferenças no caso simulado pelo modelo de Wilson e Flesch (2004). Para o dia 40, os índices confirmam os perfis apresentados na Figura 8.6-b.

Na primeira simulação, Figura 8.5, os índices estatísticos sugerem as seguintes avaliações: para a magnitude do vento médio, o *FB* indicou que os modelos analisados superestimaram, na média, os valores observados de Wangara, exceto o modelo sugerido por Wilson e Flesch (2004). Este subestimou, na média, os valores experimentais. Para a direção do vento horizontal, todos os modelos examinados subestimaram, na média, os valores observados de Wangara. O *FS* indicou que a dispersão simulada em torno da quantidade média prevista superestimou a observada. Isso não ocorreu no modelo sugerido por Wilson e Flesch (2004).

Nesse caso, a dispersão simulada em torno da quantidade média prevista subestimou a dos dados de Wangara. O coeficiente R indicou uma forte correlação positiva entre os valores do vento médio previstos pelos modelos e os observados no experimento de Wangara. Todavia, o modelo sugerido por Wilson e Flesch (2004) apresentou uma correlação fraca positiva. Para a direção do vento horizontal, todos os modelos analisados apresentaram uma correlação fraca negativa.

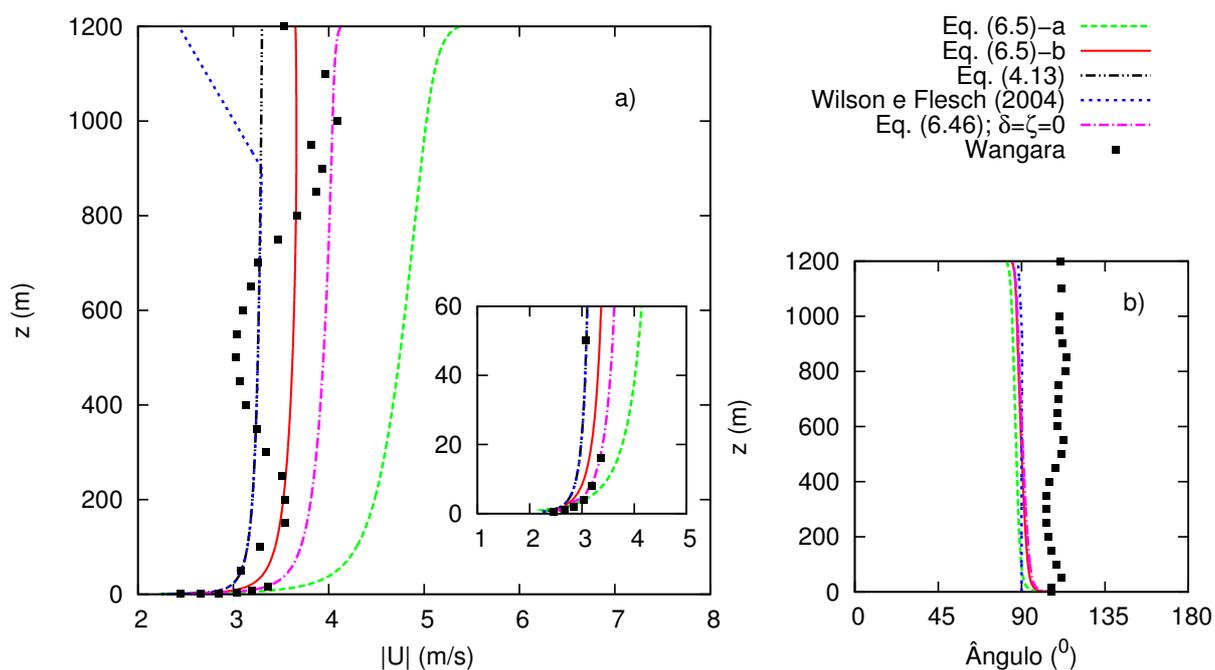


Figura 8.5: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Comparações realizadas entre os modelos: o unidimensional; a Lei Logarítmica; o sugerido por Wilson e Flesch e o tridimensional. A Eq. (6.5)-a refere-se ao caso unidimensional barotrópico e a Eq. (6.5)-b, ao unidimensional baroclínico. Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 33.

Tabela 8.4: Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.5.

Vento Médio (m/s)	$NMSE$	FB	FS	R	$FA2$
Eq. (6.5)-a	0,100	-0,268	-0,736	0,712	1,000
Eq. (6.5)-b	0,009	-0,009	-0,052	0,683	1,000
Wilson e Flesch (2004)	0,022	0,087	0,243	0,388	1,000
Eq. (6.46); $\delta = \zeta = 0$	0,021	-0,107	-0,183	0,685	1,000

Tabela 8.5: Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio apresentados na Figura 8.5.

Direção ($^{\circ}$)	$NMSE$	FB	FS	R	$FA2$
Eq. (6.5)-a	0,043	0,189	-0,635	-0,464	1,000
Eq. (6.5)-b	0,032	0,159	-0,544	-0,512	1,000
Wilson e Flesch (2004)	0,036	0,187	1,524	-0,074	1,000
Eq. (6.46); $\delta = \zeta = 0$	0,029	0,151	-0,583	-0,526	1,000

Na segunda simulação, Figura 8.6, o FB indicou que os modelos, a Equação (6.5)-a (barotrópico) e o sugerido por Wilson e Flesch (2004), subestimaram, na média, os valores observados de Wangara. Entretanto, a Equação (6.5)-b (baroclínico) e a Equação (6.46) superestimaram, na média, os valores observados. Para a direção do vento horizontal, todos os modelos analisados subestimaram, na média, os valores observados de Wangara. O FS indicou que, para a Equação (6.5)-a e a solução sugerida por Wilson e Flesch (2004), a dispersão simulada em torno da quantidade média prevista subestimaram a observada. Entretanto, a Equação (6.5)-b e a Equação (6.46) superestimaram a dados de Wangara. Para a direção do vento horizontal, todos os modelos examinados subestimaram a dispersão em torno da quantidade média observada. O coeficiente R indicou uma forte correlação positiva entre a magnitude do vento médio prevista pelos modelos e a observada pelo experimento de Wangara. Para a direção do vento horizontal, todos os valores previstos apresentaram uma correlação moderada positiva, exceto o modelo sugerido por Wilson e Flesch (2004), que apresentou uma forte correlação negativa.

Nas duas simulações, o $NMSE$ indicou que os desvios entre os valores do vento médio, previstos pelos modelos e observados pelo experimento de Wangara, foram satisfatórios para todos os casos simulados. Resultados semelhantes obtiveram-se para a direção do vento horizontal.

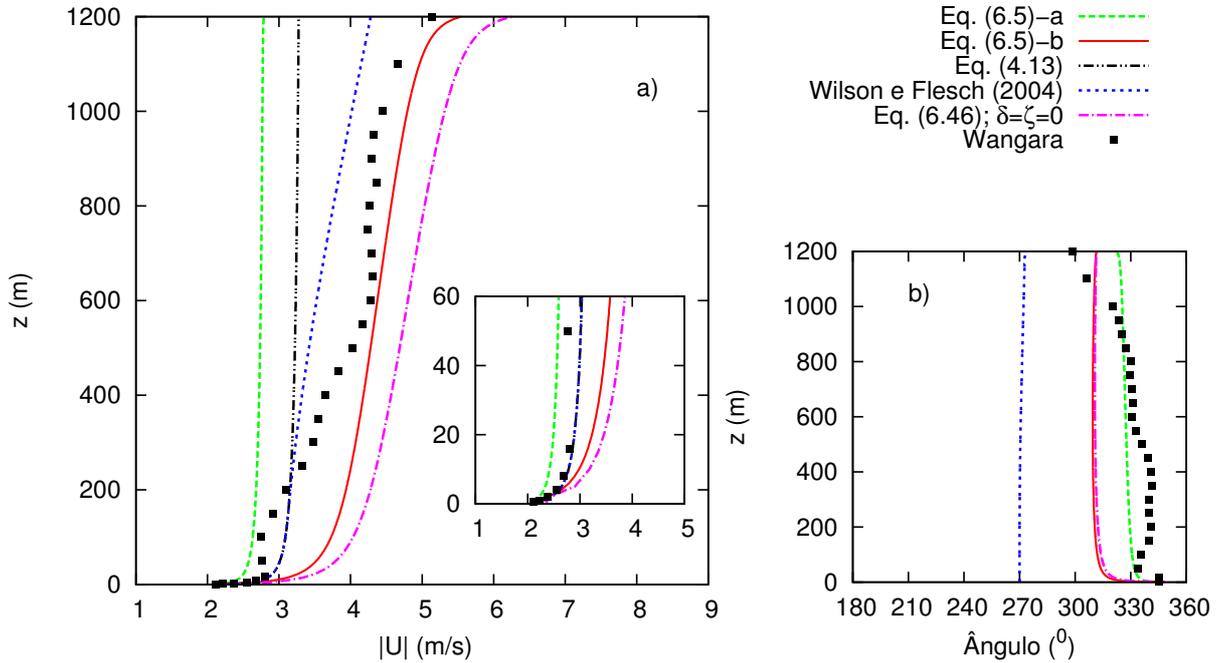


Figura 8.6: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Comparações realizadas entre os modelos: o unidimensional; a Lei Logarítmica; o sugerido por Wilson e Flesch e o tridimensional. A Eq. (6.5)-a refere-se ao caso unidimensional barotrópico e a Eq. (6.5)-b, ao unidimensional baroclínico. Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 40.

Tabela 8.6: Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.6.

Vento Médio (m/s)	$NMSE$	FB	FS	R	$FA2$
Eq. (6.5)-a	0,147	0,313	1,213	0,852	1,000
Eq. (6.5)-b	0,015	-0,097	-0,037	0,947	1,000
Wilson e Flesch (2004)	0,016	0,082	0,402	0,960	1,000
Eq. (6.46); $\delta = \zeta = 0$	0,042	-0,187	-0,179	0,952	1,000

Tabela 8.7: Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio da Figura 8.6.

Direção ($^{\circ}$)	$NMSE$	FB	FS	R	$FA2$
Eq. (6.5)-a	0,001	0,011	0,635	0,690	1,000
Eq. (6.5)-b	0,005	0,058	0,100	0,449	1,000
Wilson e Flesch (2004)	0,046	0,208	1,714	-0,945	1,000
Eq. (6.46); $\delta = \zeta = 0$	0,004	0,052	0,005	0,493	1,000

Nas figuras mostradas a seguir, calcularam-se os perfis de velocidade do vento médio e direção do vento horizontal, a partir da Equação (6.46), para diversos valores de divergência (δ) e vorticidade (ζ). Todos os resultados foram obtidos para valores de $p = q = 9$, $L_x = L_y = 50 \text{ km}$, $x = 0,5L_x$, $y = 0,5L_y$ e $\Delta z = 5 \text{ m}$. Os perfis foram comparados com os dados experimentais de Wangara, Figuras 8.7 e 8.8 para o dia 33; Figuras 8.9 e 8.10 para o dia 40. Apresentam-se os índices estatísticos nas Tabelas 8.8, 8.10, 8.9, 8.11, 8.12, 8.14, 8.13, 8.15.

Os perfis, para a magnitude do vento médio, simulados pelo modelo para o dia 33, são similares àqueles observados em Wangara. Os valores simulados para as diferentes condições das grandes escalas sinóticas (em termos da divergência e vorticidade), apresentando uma gama de magnitudes de vento, geralmente estão em acordo com as observações. Na parte central da CLP, os valores simulados que mais se afastam dos observados são aqueles em que a condição de divergência e a vorticidade são inexistentes. Por outro lado, essa mesma condição proporciona o melhor conjunto de resultados comparados às observações em níveis mais baixos. Não há distinção clara entre a maioria delas, como pode ser visto nas Figuras 8.7 e 8.8. Uma análise baseada em índices estatísticos (Tabelas 8.8 e 8.9; 8.10 e 8.11) revela que os resultados são muito semelhantes para a magnitude do vento e a aproximação é melhorada quando, tanto a divergência e a vorticidade, são positivas.

Resultados semelhantes obtiveram-se para o dia 40 (Figuras 8.9 e 8.10). Na verdade, os índices estatísticos (Tabelas 8.12 e 8.13; 8.12 e 8.13) indicam que o modelo reproduziu as observações um pouco melhor do que para o dia 33. Nesse caso, a condição sem divergência e vorticidade apresentou um maior afastamento entre os dados calculados e os observados. Novamente, a melhor representação oferecida pelo modelo, para magnitude e direção do vento, ocorreu com os valores positivos de divergência e vorticidade. Além disso, as soluções com vorticidade negativa apresentaram as piores aproximações de direção do vento.

Nas Figuras 8.8 e 8.10, simularam-se somente casos de divergência e vorticidade anti-ciclônica.

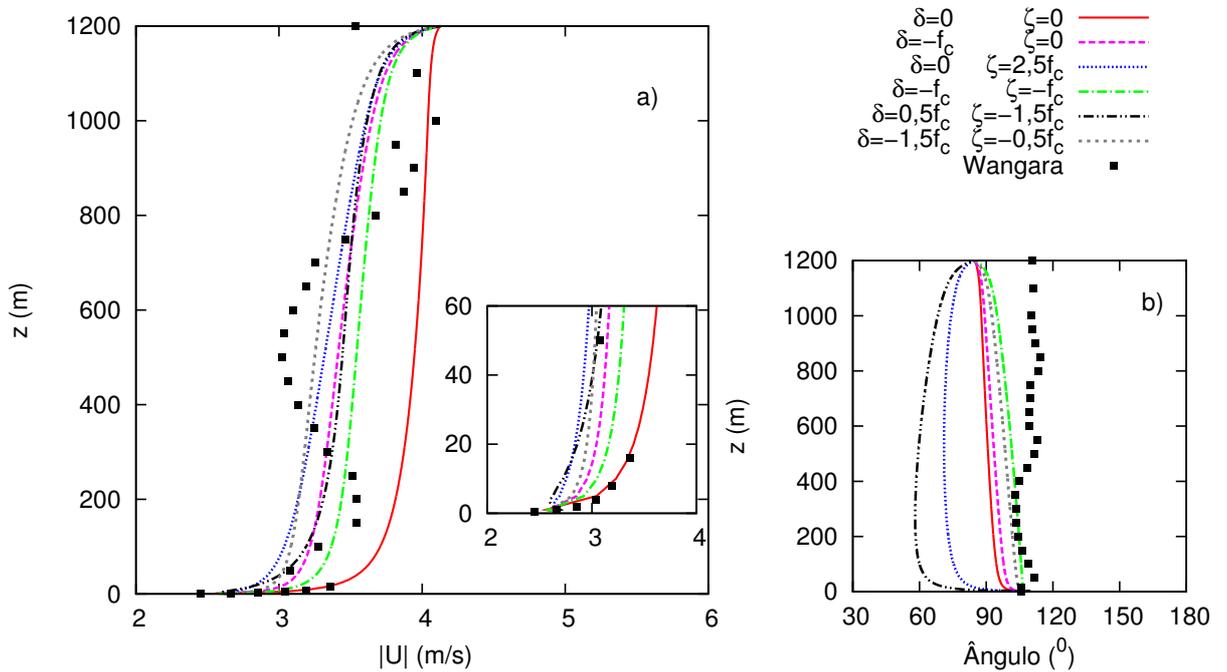


Figura 8.7: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados pela Equação (6.46) para diferentes valores de δ e ζ . Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 33.

Nos perfis verticais apresentados na Figura 8.7, a análise estatística sugeriu: nos casos em que $\delta = \zeta = 0$ e $\delta = -f_c$; $\zeta = -f_c$, o *FB* indicou que a magnitude do vento médio prevista pelo modelo superestimou, na média, os valores observados de Wangara, resultado oposto foi obtido pelos demais casos analisados. Para a direção do vento horizontal, todos os casos analisados subestimaram, na média, os valores observados em Wangara. O *FS* indicou que, para a magnitude do vento médio nos casos analisados, a dispersão simulada em torno da quantidade média prevista subestimou a observada, exceto no caso em que $\delta = \zeta = 0$, que apresentou o comportamento contrário. Para a direção do vento horizontal, em todos os casos examinados a dispersão simulada em torno da média prevista subestimou a dos dados de Wangara. O coeficiente *R* indicou uma moderada à forte correlação positiva entre a magnitude do vento médio prevista e a observada pelo experimento de Wangara. Para a direção do vento horizontal, todos os casos analisados apresentaram uma moderada à fraca correlação negativa.

Tabela 8.8: Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.7

Vento Médio (m/s)	$NMSE$	FB	FS	R	$FA2$
$\delta = \zeta = 0$	0,021	-0,107	-0,183	0,685	1,000
$\delta = 0; \zeta = 2,5f_c$	0,009	0,032	0,067	0,688	1,000
$\delta = -f_c; \zeta = 0$	0,007	0,004	0,110	0,719	1,000
$\delta = -f_c; \zeta = -f_c$	0,008	-0,024	0,071	0,711	1,000
$\delta = 0,5f_c; \zeta = -1,5f_c$	0,009	0,010	0,039	0,650	1,000
$\delta = -1,5f_c; \zeta = -0,5f_c$	0,009	0,040	0,193	0,702	1,000

Tabela 8.9: Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio apresentados na Figura 8.7

Direção ($^\circ$)	$NMSE$	FB	FS	R	$FA2$
$\delta = \zeta = 0$	0,029	0,151	-0,583	-0,526	1,000
$\delta = 0; \zeta = 2,5f_c$	0,123	0,318	-1,121	-0,309	1,000
$\delta = -f_c; \zeta = 0$	0,023	0,129	-0,535	-0,579	1,000
$\delta = -f_c; \zeta = -f_c$	0,010	0,068	-0,446	-0,599	1,000
$\delta = 0,5f_c; \zeta = -1,5f_c$	0,235	0,437	-1,301	-0,172	1,000
$\delta = -1,5f_c; \zeta = -0,5f_c$	0,014	0,090	-0,470	-0,619	1,000

Tabela 8.10: Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.8

Vento Médio (m/s)	$NMSE$	FB	FS	R	$FA2$
$\delta = -0,5f_c; \zeta = -0,5f_c$	0,012	-0,067	-0,057	0,702	1,000
$\delta = -0,5f_c; \zeta = -0,8f_c$	0,014	-0,076	-0,076	0,695	1,000
$\delta = -0,8f_c; \zeta = -0,5f_c$	0,008	-0,033	0,035	0,714	1,000
$\delta = -0,8f_c; \zeta = -0,8f_c$	0,009	-0,041	0,020	0,709	1,000
$\delta = -f_c; \zeta = -0,8f_c$	0,007	-0,019	0,078	0,714	1,000
$\delta = -1,2f_c; \zeta = -0,8f_c$	0,007	0,002	0,129	0,714	1,000

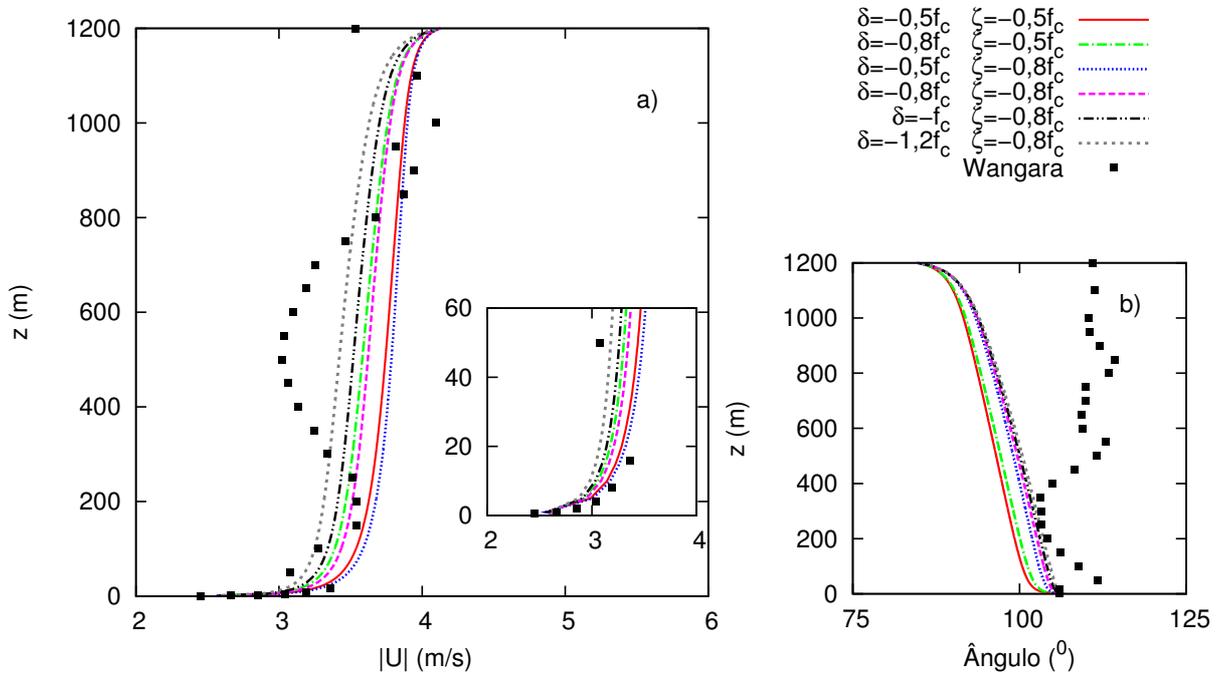


Figura 8.8: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados pela Equação (6.46) para diferentes valores de δ e ζ . Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 33.

Tabela 8.11: Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio da Figura 8.8

Direção ($^\circ$)	$NMSE$	FB	FS	R	$FA2$
$\delta = -0,5f_c$; $\zeta = -0,5f_c$	0,017	0,107	-0,454	-0,598	1,000
$\delta = -0,5f_c$; $\zeta = -0,8f_c$	0,013	0,087	-0,423	-0,605	1,000
$\delta = -0,8f_c$; $\zeta = -0,5f_c$	0,016	0,101	-0,455	-0,606	1,000
$\delta = -0,8f_c$; $\zeta = -0,8f_c$	0,012	0,083	-0,433	-0,608	1,000
$\delta = -f_c$; $\zeta = -0,8f_c$	0,012	0,080	-0,442	-0,609	1,000
$\delta = -1,2f_c$; $\zeta = -0,8f_c$	0,011	0,077	-0,451	-0,611	1,000

Na simulação apresentada na Figura 8.9, *FB* indicou que nos casos analisados, a magnitude do vento médio prevista pelo modelo superestimou, na média, os valores observados de Wangara, exceto no caso $\delta = -1,5f_c$; $\zeta = -0,5f_c$. Para a direção do vento horizontal, todos os casos analisados subestimaram, na média, os valores observados. O *FS* sugeriu que, para a magnitude do vento médio, em todos os casos examinados a dispersão simulada em torno da quantidade média prevista subestimou a observada experimentalmente. Para a direção do vento horizontal, os casos em que $\delta = 0$, $\zeta = 1,5f_c$ e $\delta = -0,1f_c$, $\zeta = f_c$, a dispersão simulada em torno da média da direção do vento prevista superestimou a dos dados de Wangara. *R* indicou uma forte correlação positiva entre a magnitude do vento médio prevista e a observada pelo experimento de Wangara. Para a direção do vento horizontal, todos os casos analisados oscilaram entre uma fraca, moderada e forte correlação positiva.

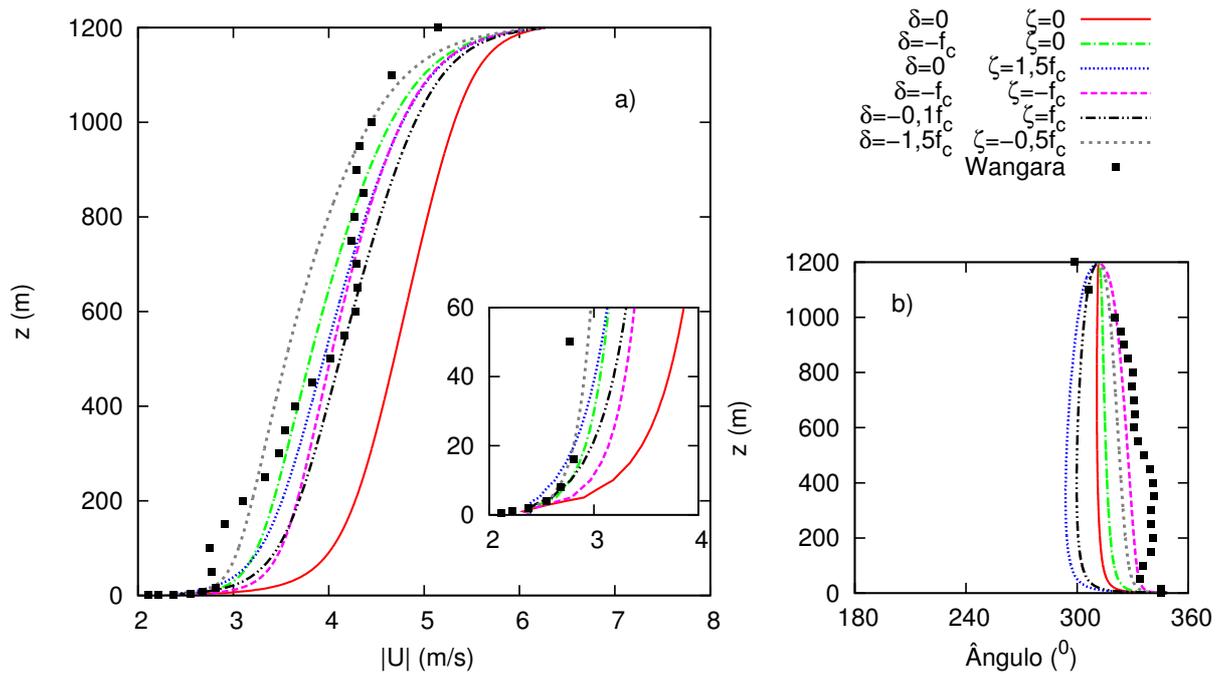


Figura 8.9: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados pela Equação (6.46) para diferentes valores de δ e ζ . Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 40.

Tabela 8.12: Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.9

Vento Médio (m/s)	$NMSE$	FB	FS	R	$FA2$
$\delta = \zeta = 0$	0,042	-0,187	-0,179	0,952	1,000
$\delta = -f_c; \zeta = 0$	0,007	-0,028	-0,038	0,941	1,000
$\delta = 0; \zeta = 1,5f_c$	0,008	-0,047	-0,095	0,954	1,000
$\delta = -f_c; \zeta = -f_c$	0,011	-0,071	-0,038	0,946	1,000
$\delta = -0,1f_c; \zeta = f_c$	0,012	-0,083	-0,107	0,960	1,000
$\delta = -1,5f_c; \zeta = -0,5f_c$	0,010	0,022	-0,001	0,914	1,000

Tabela 8.13: Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio da Figura 8.9

Direção ($^{\circ}$)	$NMSE$	FB	FS	R	$FA2$
$\delta = \zeta = 0$	0,004	0,052	0,005	0,493	1,000
$\delta = -f_c; \zeta = 0$	0,002	0,040	0,101	0,604	1,000
$\delta = 0; \zeta = 1,5f_c$	0,011	0,091	-0,364	0,288	1,000
$\delta = -f_c; \zeta = -f_c$	0,001	0,013	0,340	0,850	1,000
$\delta = -0,1f_c; \zeta = f_c$	0,008	0,078	-0,249	0,346	1,000
$\delta = -1,5f_c; \zeta = -0,5f_c$	0,001	0,023	0,244	0,763	1,000

Tabela 8.14: Índices estatísticos para os perfis verticais da magnitude do vento médio apresentados na Figura 8.10

Vento Médio (m/s)	$NMSE$	FB	FS	R	$FA2$
$\delta = -0,5f_c; \zeta = -0,5f_c$	0,023	-0,134	-0,108	0,955	1,000
$\delta = -0,5f_c; \zeta = -0,8f_c$	0,028	-0,149	-0,114	0,952	1,000
$\delta = -0,8f_c; \zeta = -0,5f_c$	0,012	-0,084	-0,063	0,952	1,000
$\delta = -0,8f_c; \zeta = -0,8f_c$	0,015	-0,097	-0,065	0,951	1,000
$\delta = -f_c; \zeta = -0,8f_c$	0,010	-0,065	-0,039	0,946	1,000
$\delta = -1,2f_c; \zeta = -0,8f_c$	0,008	-0,033	-0,019	0,937	1,000

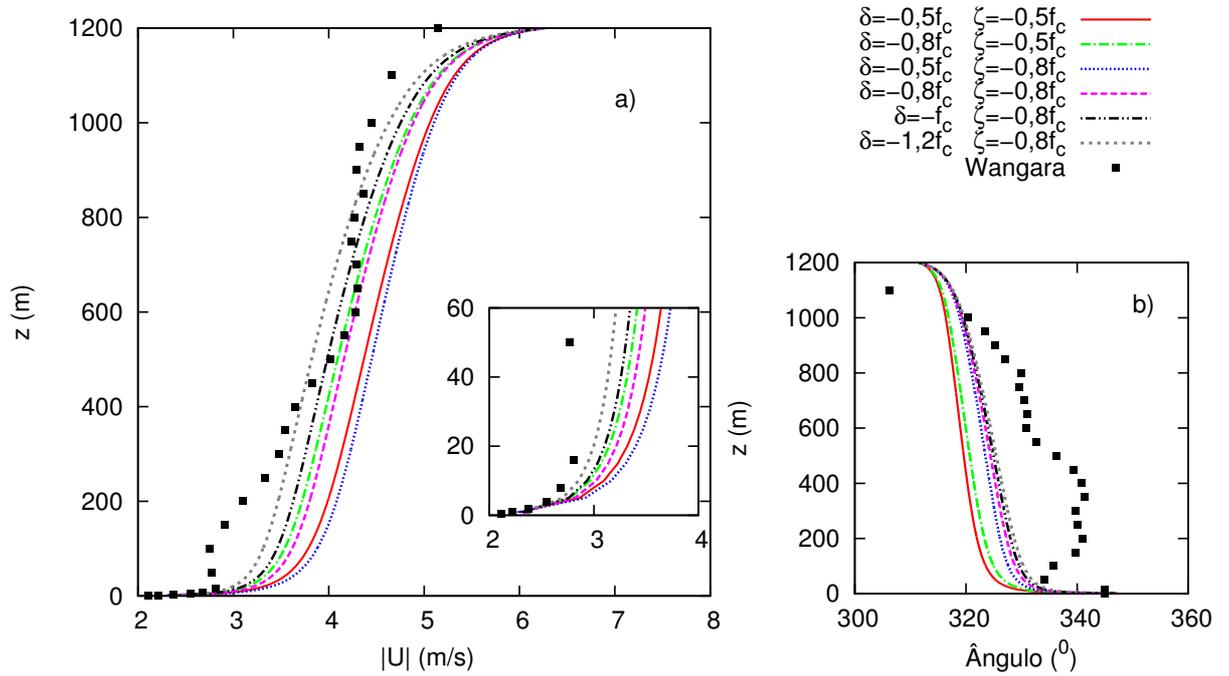


Figura 8.10: Perfis verticais da magnitude do vento médio Figura (a) e da direção do vento horizontal Figura (b). Os perfis são calculados para diferentes valores de δ e ζ , a partir da Equação (6.46). Os símbolos representam os dados do experimento de Wangara do dia 40.

Tabela 8.15: Índices estatísticos para os perfis verticais da direção do vento médio mostrado na Figura 8.10

Direção ($^{\circ}$)	<i>NMSE</i>	<i>FB</i>	<i>FS</i>	<i>R</i>	<i>FA2</i>
$\delta = -0,5f_c$; $\zeta = -0,5f_c$	0,002	0,031	0,208	0,675	1,000
$\delta = -0,5f_c$; $\zeta = -0,8f_c$	0,001	0,022	0,292	0,760	1,000
$\delta = -0,8f_c$; $\zeta = -0,5f_c$	0,001	0,029	0,223	0,705	1,000
$\delta = -0,8f_c$; $\zeta = -0,8f_c$	0,001	0,020	0,299	0,785	1,000
$\delta = -f_c$; $\zeta = -0,8f_c$	0,001	0,019	0,302	0,800	1,000
$\delta = -1,2f_c$; $\zeta = -0,8f_c$	0,001	0,017	0,303	0,814	1,000

Em todos os casos simulados, o índice estatístico $NMSE$ indicou que os desvios entre as magnitudes do vento médio previstas pelo modelo e as observadas pelo experimento de Wangara foram satisfatórios. Resultados semelhantes foram obtidos para a direção do vento horizontal.

O índice estatístico $FA2$ mostrou que, em todos os casos analisados, 100% das frações $\frac{|U|_o}{|U|_p}$ e $\frac{\hat{Angulo}_o}{\hat{Angulo}_p}$ encontraram-se entre 0,5 e 2.

Pôde-se notar que o modelo apresentou uma maior dificuldade em reproduzir adequadamente os dados observados durante o dia 33. A causa desse desvio do modelo foi provocada pelo comportamento sinuoso do perfil de vento observado. No caso do dia 40, o modelo conseguiu simular, de maneira satisfatória, o perfil de vento e a direção do vento horizontal.

Em ambos os dias, coerentes com o escoamento de grande-escala anticiclônico ocorrido no período, as melhores aproximações para os perfis observados foram obtidos para divergência e vorticidade positivas. De fato, as cartas sinóticas (Apêndice D) indicam a presença de um sistema de alta pressão na região nesses dias. Tal coerência é um indício de que o modelo pode reproduzir um campo de vento de maneira realística.

9 CONCLUSÃO

No presente estudo, a partir das Equações de Navier-Stokes, derivou-se uma nova aproximação para se obter o perfil médio do vento horizontal. O método emprega a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), aplicada à uma Camada Limite Convectiva (CLC), discretizada em subcamadas, que permite o uso de coeficientes de difusão que variam verticalmente. A técnica da GITT combina desenvolvimento em série com uma transformada integral e resulta em uma solução (Equação (6.46)), que contém os parâmetros físicos, controladores da variabilidade do perfil de vento com a altura. As propriedades de grande escala do escoamento cinemático, tais como a divergência e a vorticidade, são incluídas na solução, através das condições de contorno e dos termos advectivos não-lineares da equação original.

Os resultados obtidos, no caso sem divergência e vorticidade, são compatíveis com os disponíveis na literatura, tais como o modelo proposto por Wilson e Flesch (2004) e o da Lei Logarítmica (Equação (4.13)). Entretanto, no caso da ausência de dos efeitos de grande escala, os resultados mostram-se um pouco piores que os simulados pelo modelo unidimensional (Equação (6.5)), que simulou satisfatoriamente os dados experimentais de Wangara (CLARKE et al., 1971), quando foi considerado o caso baroclínico.

Na análise de convergência, observou-se que o modelo convergiu, quando a área foi de $L_x = L_y \geq 50 \text{ km}$; a espessura das subcamadas em que a CLP foi dividida foi de $\Delta z = 5 \text{ m}$ e a ordem de truncamento foi $p = q = 9$. Os melhores valores para a magnitude do vento médio obtiveram-se no centro da região definida pelas variáveis horizontais x e y . Feitas simulações para diferentes valores de divergência δ e vorticidade ζ , observou-se maior variação nos perfis quando se assumiram valores grandes destes parâmetros em comparação ao de Coriolis.

Além disso, o modelo tridimensional proposto neste trabalho apresentou bons resultados quando comparados aos dados experimentais de Wangara. As melhores aproximações foram obtidas para a divergência ($\delta \geq 0$) e a vorticidade anti-horária ($\zeta \geq 0$). Observou-se, ainda, que os resultados mais satisfatórios foram obtidos quando $\delta \geq \zeta$ e assim que se assumiram, para as quantidades δ e ζ , valores próximos do parâmetro de Coriolis f_c . Esses valores, considerados para os parâmetros de grande escala, são consistentes com as cartas sinóticas do experimento de Wangara.

Objetivou-se estabelecer um método alternativo para determinar os perfis de vento médio horizontal. O método foi mostrado em detalhes, bem como validado através de dados experimentais. Sendo assim, o presente modelo pode ser utilizado em problema mais genera-

lizado e serve como um ponto de referência para a comparação com soluções numéricas. No estudo, não foi considerada a evolução temporal, no entanto, um problema não-estacionário pode ser resolvido aplicando à GITT juntamente à Transformada de Laplace. Apesar do modelo ter sido aplicado em um caso convectivo, o desenvolvimento permite a utilização da mesma abordagem para qualquer condição de estabilidade. O uso adequado de coeficientes de difusão podem conduzir à determinação do perfil do vento sob condições estáveis.

Finalmente, pode-se salientar que o método empregado é de fácil implementação e eficiente para o problema estudado, uma vez que apresentou resultados coerentes com os disponíveis na literatura. A solução tridimensional não gerou esforço computacional adicional significativo. Alcançou-se o objetivo proposto para este trabalho, uma vez que o método apresentou uma solução semianalítica para as equações de Navier-Stokes em Geometria Cartesiana aplicada à Camada Limite Planetária.

10 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O aprendizado e a experiência obtidos na elaboração desse trabalho são úteis e servem como referência a futuros trabalhos.

Perspectivas para a continuação desse trabalho:

- Aplicar o modelo para outras condições de estabilidade, em um outro, em condição estável;
- Resolver o modelo aplicando o método da GITT sem a discretização, o que resulta em um problema auxiliar com coeficientes variáveis;
- Resolver o problema não-linear pelo método de Decomposição de Adomian (ADOMIAN, 1994);
- Resolver o problema não-estacionário, aplicando o método GIADMT (Generalized Integral Advection Diffusion Multilayer) (COSTA et al., 2006; VILHENA et al., 2008) e pela Técnica de Transformada em Ondaleta (FARGE, 1992);
- Utilizar os perfis de vento em modelos de poluição do ar.

A Componentes Horizontais da Velocidade Média

Seja \overline{w}_n dada pela Equação (6.45), isto é,

$$\overline{w}_n(\lambda_{pq}, z) = A_n \exp[r_{1n} z] + B_n \exp[r_{2n} z] + \overline{w}_{n\text{particular}}(\lambda_{pq}, z),$$

com

$$\overline{w}_{n\text{particular}}(\lambda_{pq}, z) = \frac{1}{(\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2)} \left[(\alpha_{2n} + \alpha_{1n} i) \frac{f_c w_{gn} G}{K_{zn}} + (\alpha_{1n} - \alpha_{2n} i) C_n \right],$$

$$w_{gn} = u_{gn} + v_{gn} i,$$

G é dado pela Equação (6.34); α_{1n} é dada pela Equação (6.37a); α_{2n} é dada pela Equação (6.37b) e C_n é dada em Apêndice B .

Escrevendo,

$$A_n = a_n + c_n i, \tag{A.1a}$$

$$B_n = b_n + d_n i, \tag{A.1b}$$

$$r_{1n} = r_{1nR} + r_{1nI} i, \tag{A.1c}$$

$$r_{2n} = r_{2nR} + r_{2nI} i, \tag{A.1d}$$

com $a_n, b_n, c_n, d_n, r_{1nR}, r_{1nI}, r_{2nR}$ e $r_{2nI} \in \mathbb{R}$. Sendo que os subíndices R e I referem-se a parte real e imaginária do número complexo r_{1n} e r_{2n} , que são dados pela Equações (6.41) e (6.42), respectivamente. E ainda, $\overline{w}_n(\lambda_{pq}, z) = \overline{u}_n(\lambda_{pq}, z) + \overline{v}_n(\lambda_{pq}, z) i$ e, $\lambda_{pq}^2 = \beta_p^2 + \gamma_q^2$.

Assim

$$\begin{aligned}
\overline{w}_n(\lambda_{pq}, z) &= \overline{u}_n(\lambda_{pq}, z) + \overline{v}_n(\lambda_{pq}, z) i \\
&= (a_n + c_n i) \exp[(r_{1n_R} + r_{1n_I} i) z] + (b_n + d_n i) \exp[(r_{2n_R} + r_{2n_I} i) z] \\
&\quad + \frac{1}{(\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2)} \left[(\alpha_{2n} + \alpha_{1n} i) \frac{f_c w_{gn} G}{K_{zn}} + (\alpha_{1n} - \alpha_{2n} i) C_n \right] \\
&= a_n \exp(r_{1n_R} z) \cos(r_{1n_I} z) + b_n \exp(r_{2n_R} z) \cos(r_{2n_I} z) \\
&\quad - c_n \exp(r_{1n_R} z) \text{sen}(r_{1n_I} z) - d_n \exp(r_{2n_R} z) \text{sen}(r_{2n_I} z) \\
&\quad + i \left[a_n \exp(r_{1n_R} z) \text{sen}(r_{1n_I} z) + b_n \exp(r_{2n_R} z) \text{sen}(r_{2n_I} z) \right. \\
&\quad \left. + c_n \exp(r_{1n_R} z) \cos(r_{1n_I} z) + d_n \exp(r_{2n_R} z) \cos(r_{2n_I} z) \right] \\
&\quad + \frac{f_c G}{(\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2) K_{zn}} [(\alpha_{2n} u_{gn} - \alpha_{1n} v_{gn}) + i (\alpha_{1n} u_{gn} + \alpha_{2n} v_{gn})] \\
&\quad + \frac{1}{(\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2)} [(\alpha_{1n} D_I + \alpha_{2n} D_{II}) + (\alpha_{1n} D_{II} - \alpha_{2n} D_I) i]
\end{aligned}$$

em que

$$D_I = (-D_{14} \zeta + D_{23} \delta), \quad (\text{A.2a})$$

$$D_{II} = (D_{14} \delta + D_{23} \zeta), \quad (\text{A.2b})$$

$$D_{14} = D1 + D4 \quad (\text{A.2c})$$

$$D_{23} = D2 + D3 \quad (\text{A.2d})$$

$$D1 = -\frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \frac{K_{xn}}{K_{zn}} L_y \beta'_p \left(\frac{\cos(q \pi)}{\gamma'_q} \right) [1 - \cos(p \pi)] \quad (\text{A.2e})$$

$$D2 = -\frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \frac{K_{xn}}{K_{zn}} L_x \beta'_p \cos(p \pi) \left[\frac{1 - \cos(q \pi)}{\gamma'_q} \right] \quad (\text{A.2f})$$

$$D3 = -\frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \frac{K_{yn}}{K_{zn}} L_x \gamma'_q \left(\frac{\cos(p \pi)}{\beta'_p} \right) [1 - \cos(q \pi)] \quad (\text{A.2g})$$

$$D4 = -\frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \frac{K_{yn}}{K_{zn}} L_y \gamma'_q \cos(q \pi) \left[\frac{1 - \cos(p \pi)}{\beta'_p} \right] \quad (\text{A.2h})$$

Então,

$$\begin{aligned}
\overline{u}_n(\lambda_{pq}, z) &= a_n \exp(r_{1n_R} z) \cos(r_{1n_I} z) + b_n \exp(r_{2n_R} z) \cos(r_{2n_I} z) \\
&\quad - c_n \exp(r_{1n_R} z) \text{sen}(r_{1n_I} z) - d_n \exp(r_{2n_R} z) \text{sen}(r_{2n_I} z) \\
&\quad + \frac{f_c G}{(\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2) K_{zn}} (\alpha_{2n} u_{gn} - \alpha_{1n} v_{gn}) \\
&\quad + \frac{1}{(\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2)} (\alpha_{1n} D_I + \alpha_{2n} D_{II}), \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{v}_n(\lambda_{pq}, z) &= a_n \exp(r_{1n_R} z) \text{sen}(r_{1n_I} z) + b_n \exp(r_{2n_R} z) \text{sen}(r_{2n_I} z) \\
&\quad + c_n \exp(r_{1n_R} z) \cos(r_{1n_I} z) + d_n \exp(r_{2n_R} z) \cos(r_{2n_I} z) \\
&\quad + \frac{f_c G}{(\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2) K_{zn}} (\alpha_{1n} u_{gn} + \alpha_{2n} v_{gn}) \\
&\quad + \frac{1}{(\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2)} (\alpha_{1n} D_{II} - \alpha_{2n} D_I), \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Substituindo $w_n(x, y, z) = u_n(x, y, z) + i v_n(x, y, z)$, $\overline{u}_n(\lambda_{pq}, z)$ e $\overline{v}_n(\lambda_{pq}, z)$ na Equação (6.46) tem-se

$$u_n(x, y, z) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \text{sen}(\beta'_p x) \text{sen}(\gamma'_q y) \overline{u}_n(\lambda_{pq}, z), \tag{A.5}$$

com $\overline{u}_n(\lambda_{pq}, z)$, dada pela Equação (A.3). E

$$v_n(x, y, z) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \text{sen}(\beta'_p x) \text{sen}(\gamma'_q y) \overline{v}_n(\lambda_{pq}, z), \tag{A.6}$$

com $\overline{v}_n(\lambda_{pq}, z)$, dada pela Equação (A.4).

As constantes complexas A_n e B_n são calculadas mediante o procedimento descrito no Capítulo 6.

B Cálculo da Integral da Equação 6.32

A integral presente no segundo termo da Equação (6.30) é dada por

$$I_1 = \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') \left[\frac{K_{xn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x'^2} + \frac{K_{yn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y'^2} \right] dy' dx', \quad (\text{B.1})$$

ou,

$$I_1 = \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') \frac{K_{xn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x'^2} dy' dx' + \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') \frac{K_{yn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y'^2} dy' dx'. \quad (\text{B.2})$$

Separando a Equação (B.2) e nomeando as partes, como segue

$$I_2 = \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') \frac{K_{xn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x'^2} dy' dx'. \quad (\text{B.3})$$

$$I_3 = \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') \frac{K_{yn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y'^2} dy' dx'. \quad (\text{B.4})$$

Calculando a Equação (B.3).

$$I_2 = \frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi(\lambda_{pq}, x', y') \frac{K_{xn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x'^2} dy' dx' = \frac{1}{N(\beta_p)^{1/2}} \frac{1}{N(\gamma_q)^{1/2}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \psi_1(\beta_p, x') \psi_2(\gamma_q, y') \frac{K_{xn}}{K_{zn}} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x'^2} dy' dx' = \frac{1}{N(\gamma_q)^{1/2}} \frac{K_{xn}}{K_{zn}} \int_0^{L_y} \psi_2(\gamma_q, y') \underbrace{\left[\frac{1}{N(\beta_p)^{1/2}} \int_0^{L_x} \psi_1(\beta_p, x') \frac{\partial^2 w_n}{\partial x'^2} dx' \right]}_{I_4} dy'. \quad (\text{B.5})$$

Utilizando integração por partes, resolve-se a integral I_4 , mediante a substituição:

$$\begin{aligned} u &= \psi_1 & dv &= \frac{\partial^2 w_n}{\partial x'^2} dx' \\ du &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x'} dx' & v &= \frac{\partial w_n}{\partial x'} \end{aligned}$$

assim

$$I_4 = \frac{1}{N(\beta_p)^{1/2}} \int_0^{L_x} \psi_1(\beta_p, x') \frac{\partial^2 w_n}{\partial x'^2} dx' = \frac{1}{N(\beta_p)^{1/2}} \left[\psi_1 \frac{\partial w_n}{\partial x'} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x'} \frac{\partial w_n}{\partial x'} dx' \right]. \quad (\text{B.6})$$

Sendo que $\psi_1 \frac{\partial w_n}{\partial x'} \Big|_0^{L_x} = 0$ pelas condições de contorno (6.23a). Daí

$$I_4 = -\frac{1}{N(\beta_p)^{1/2}} \int_0^{L_x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x'} \frac{\partial w_n}{\partial x'} dx'. \quad (\text{B.7})$$

Utilizando integração por partes, resolve-se a integral B.7 mediante a substituição:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x'} & dv &= \frac{\partial w_n}{\partial x'} dx' \\ du &= \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x'^2} dx' & v &= w_n \end{aligned}$$

Tem-se

$$I_4 = \frac{1}{N(\beta_p)^{1/2}} \left[-w_n \frac{\partial \psi_1}{\partial x'} \Big|_0^{L_x} + \int_0^{L_x} w_n \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x'^2} dx' \right]. \quad (\text{B.8})$$

Utilizando o problema de autovalor (6.22), isto é, $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x'^2} = -\beta_p^2 \frac{K_{zn}}{K_{xn}} \psi_1$. Assim,

$$I_4 = -\frac{1}{N(\beta_p)^{1/2}} \left(w_n \frac{\partial \psi_1}{\partial x'} \Big|_0^{L_x} \right) - \frac{\beta_p^2}{N(\beta_p)^{1/2}} \frac{K_{zn}}{K_{xn}} \int_0^{L_x} w_n \psi_1 dx'. \quad (\text{B.9})$$

Substituindo o resultado (B.9) em (B.5), obtém-se

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \frac{K_{xn}}{K_{zn}} \int_0^{L_y} \underbrace{\psi_2(\gamma_q, y') \left(w_n \frac{\partial \psi_1}{\partial x'} \Big|_0^{L_x} \right)}_{I_{2a}} dy' \\ &\quad - \underbrace{\beta_p^2 \left[\frac{1}{N(\lambda_{pq})^{1/2}} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} w_n \psi_1(\beta_p, x') \psi_2(\gamma_q, y') dx' dy' \right]}_{I_{2b}}. \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

Em que,

$$\begin{aligned} I_{2a} &= \int_0^{L_y} \psi_2(\gamma_q, y') \left[\beta'_p \cos(p\pi) w_n(L_x) - \beta'_p w_n(0) \right] dy' \\ &= \int_0^{L_y} \text{sen}(\gamma_q, y') \left[\beta'_p \cos(p\pi) w_n(L_x) - \beta'_p w_n(0) \right] dy' \\ &= C_1 \int_0^{L_y} y' \text{sen}(\gamma_q, y') dy' + C_2 \int_0^{L_y} \text{sen}(\gamma_q, y') dy' \\ &= -C_1 L_y \frac{\cos(q\pi)}{\gamma'_q} + C_2 \left[\frac{1 - \cos(q\pi)}{\gamma'_q} \right], \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

sendo que,

$$C_1 = -\frac{1}{2}(-\zeta + \delta i) \beta'_p [1 - \cos(p \pi)], \quad (\text{B.12a})$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(\delta + \zeta i) L_x \beta'_p \cos(p \pi), \quad (\text{B.12b})$$

$$C_3 = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \frac{K_{xn}}{K_{zn}} \left[C_1 L_y \frac{\cos(q \pi)}{\gamma'_q} - C_2 \left(\frac{1 - \cos(q \pi)}{\gamma'_q} \right) \right], \quad (\text{B.12c})$$

com $w_n(0)$ e $w_n(L_x)$, dadas pelas Equações (6.20a) e (6.20b), respectivamente. E por (6.33),

$$I_{2b} = -\beta_p^2 \overline{w_n}. \quad (\text{B.13})$$

Daí

$$I_2 = C_3 - \beta_p^2 \overline{w_n}. \quad (\text{B.14})$$

De maneira análoga, obtém-se a solução para I_3 (Equação (B.4)), escrita abaixo:

$$I_3 = C_6 - \gamma_p^2 \overline{w_n}, \quad (\text{B.15})$$

com

$$C_4 = -\frac{1}{2}(\delta + \zeta i) \gamma'_q [1 - \cos(q \pi)], \quad (\text{B.16a})$$

$$C_5 = \frac{1}{2}(-\zeta + \delta i) L_y \gamma'_q \cos(q \pi), \quad (\text{B.16b})$$

$$C_6 = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \frac{K_{yn}}{K_{zn}} \left[C_4 L_x \frac{\cos(p \pi)}{\beta'_p} - C_5 \left(\frac{1 - \cos(p \pi)}{\beta'_p} \right) \right], \quad (\text{B.16c})$$

$w_n(0)$ e $w_n(L_y)$, dadas pelas Equações (6.20c) e (6.20d), respectivamente.

Substituindo as Equações (B.14) e (B.15) em Equação (B.1), obtém-se

$$I_1 = C_n - \lambda_{pq}^2 \overline{w_n}, \quad (\text{B.17})$$

com $C_n = C_3 + C_6$ e $\lambda_{pq}^2 = \beta_p^2 + \gamma_q^2$.

C Índices Estatísticos

Seguindo Hanna (1989), os índices estatísticos usados neste estudo estão definidos como:

$$NMSE = \frac{\overline{(C_o - C_p)^2}}{\overline{C_o} \overline{C_p}} \quad (\text{Erro Quadrático Médio Normalizado}) \quad (\text{C.1a})$$

$$FB = 2 \frac{(\overline{C_o} - \overline{C_p})}{(\overline{C_o} + \overline{C_p})} \quad (\text{Desvio Fracional}) \quad (\text{C.1b})$$

$$FS = 2 \frac{(\sigma_o - \sigma_p)}{(\sigma_o + \sigma_p)} \quad (\text{Desvio Padrão Fracional}) \quad (\text{C.1c})$$

$$R = \frac{(\overline{C_o} - \overline{C_o})(\overline{C_p} - \overline{C_p})}{(\sigma_o \sigma_p)} \quad (\text{Coeficiente de Correlação}) \quad (\text{C.1d})$$

$$FA2 = 0,5 \leq \frac{C_o}{C_p} \leq 2 \quad (\text{Fator de 2}) \quad (\text{C.1e})$$

em que C é a quantidade analisada e os subscritos o e p representam os valores observados e previstos, respectivamente. As barras nos índices estatísticos indicam os valores médios da quantidade analisada.

O índice estatístico $NMSE$ fornece a informação dos desvios entre as quantidades previstas e observadas. O índice estatístico FB indica a tendência do modelo de subestimar ($FB > 0$) ou superestimar ($FB < 0$) as quantidades médias observadas. O índice estatístico FS indica se a dispersão simulada em torno da quantidade média é subestimada ou superestimada; se $FS > 0$ o valor previsto está menos disperso que o observado; caso contrário se $FS < 0$ o valor previsto está mais disperso que o observado. O índice estatístico $FA2$ fornece a fração dos dados (%) para os quais $0,5 \leq \frac{C_o}{C_p} \leq 2$. O fator de correlação R indica a relação entre duas variáveis lineares; o sinal indica se a correlação é positiva ou negativa; o tamanho da variável indica a força da correlação. Quanto mais próximos de zero estiverem os valores de $NMSE$, FB e FS , quanto mais próximo de 1 estiver o valor de $FA2$ e quanto mais próximo de ± 1 estiver o valor de R , melhores serão os resultados.

D Cartas Sinólicas

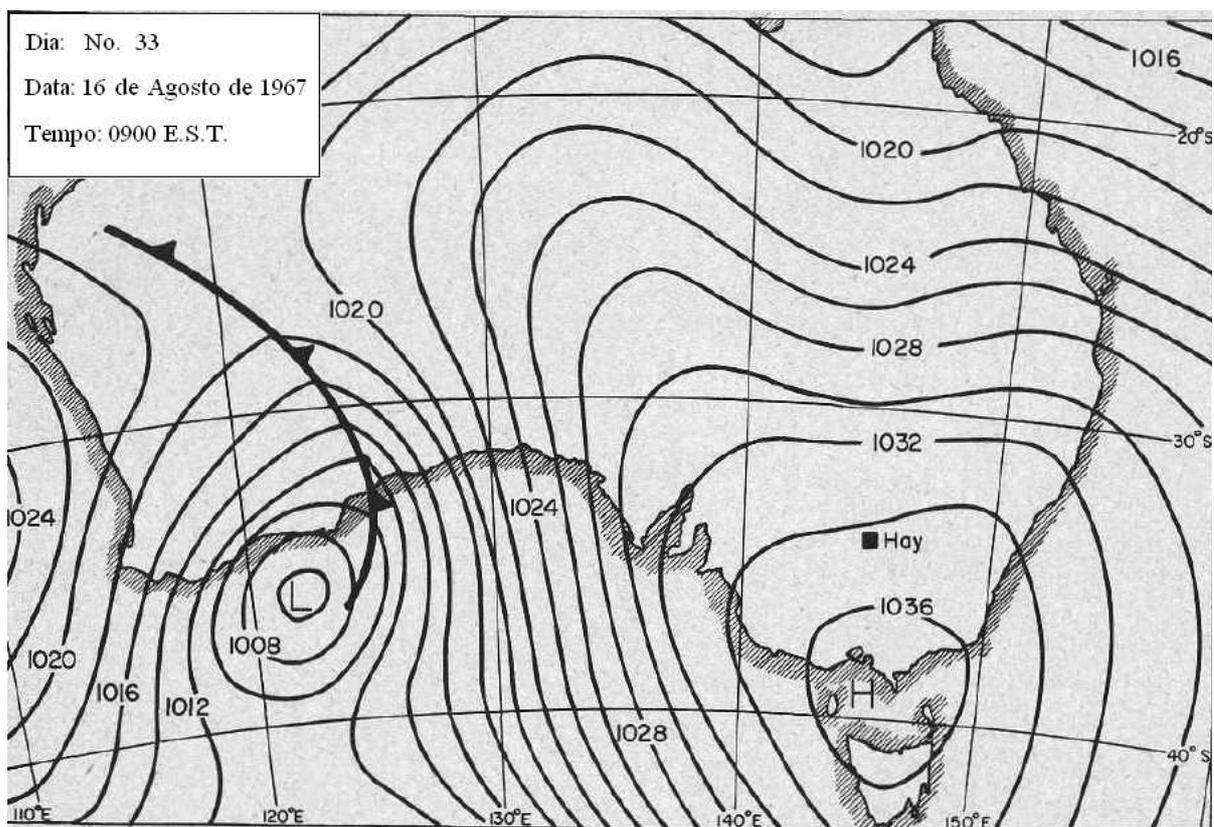


Figura D.1: Carta Sinótica do Experimento de Wangara do dia 33. Figura adaptada de CLARKE, R.H. et al. The Wangara Experiment: Boundary Layer Data, CSIRO, 1971.

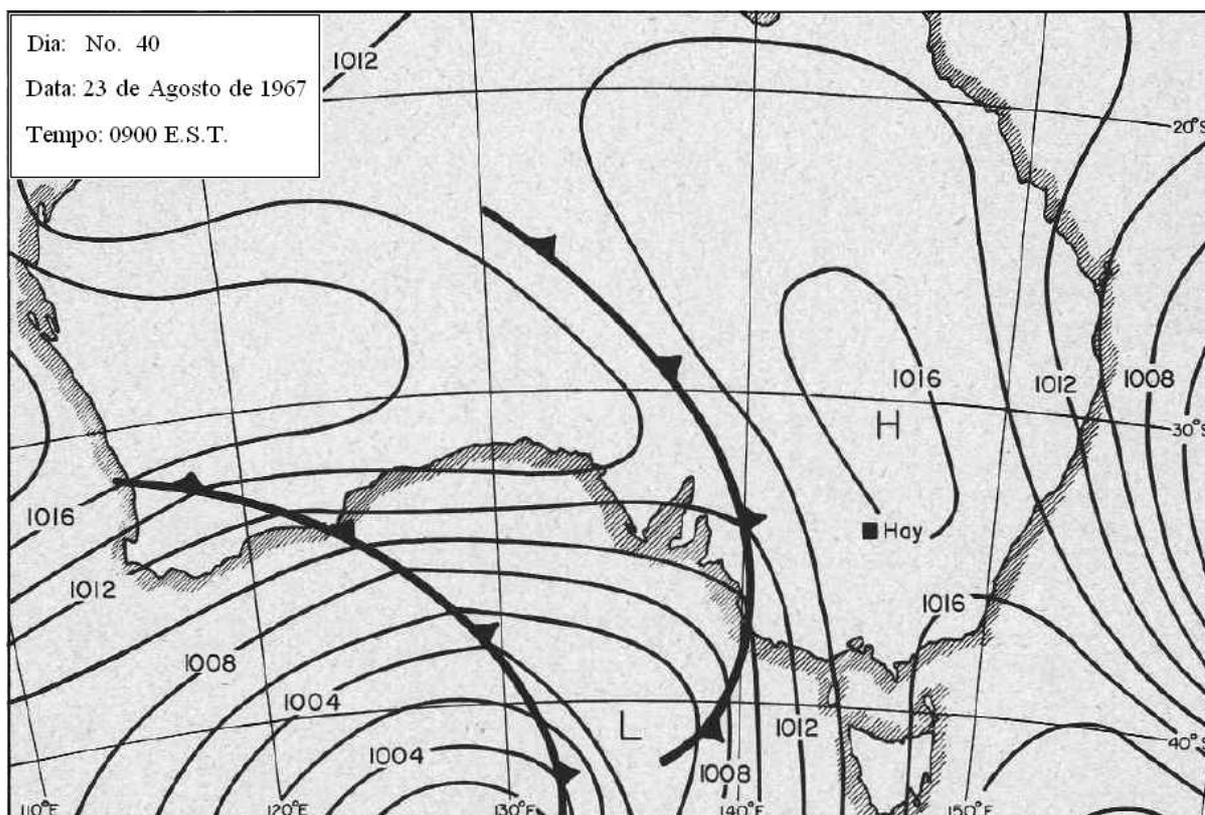


Figura D.2: Carta Sinótica do Experimento de Wangara do dia 40. Figura adaptada de CLARKE, R.H. et al. The Wangara Experiment: Boundary Layer Data, CSIRO, 1971.

E Dedução da Equação Geral para Leis de Conservação e a sua correspondente em forma diferencial

Dentre os variados princípios e leis, mais gerais ou não, provenientes desta pesquisa destacam-se as *leis de conservação*, com aplicações em diversas áreas da Física (conservação de massa, de cargas, de energia, etc.) e outras ciências naturais (taxa de variação populacional de uma determinada espécie - Biologia; no cálculo estequiométrico em que há uma equação que dá o balanço do número de mols de cada reagente e o de cada produto em reações químicas - Química; etc.).

Como citado anteriormente, entende-se por *leis de conservação* equações que descrevem o modo que determinado ente físico, químico, etc. é balanceado através de um processo, seja este físico, químico, etc. Assim, basicamente, são *leis de balanço* (ver LOGAN, 1994, pág. 13).

Em termos notacionais, define-se $u = u(\mathbf{x}, t)$, com $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}_+$, onde u é uma função escalar que representa a densidade ou a concentração medida de uma determinada quantidade do ente por unidade de volume no espaço n -dimensional; ou unidade de *hipervolume*, para um específico tempo t . Seja $V \subset \mathbb{R}^n$, a região de interesse na evolução do processo e ∂V sua borda, com parametrização suave (Figura E.1-a, no caso tridimensional). É imediato que a taxa de variação temporal da quantidade total contida em V é dada por

$$\frac{d}{dt} \int_V u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

com elemento de volume n -dimensional $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n$.

Agora, considerar-se-á que a taxa temporal de variação do total da quantidade do ente, ou simplesmente ente, em V ; esta será balanceada pela taxa produzida por uma fonte (ou destruída por um sumidouro) em V , mais a taxa líquida da quantidade que flui, através de ∂V . Toma-se $f(\mathbf{x}, t, u)$ como termo de fonte (ou termo de sumidouro) e a contribuição total deste termo em V será dado por:

$$\int_V f(\mathbf{x}, t, u) d\mathbf{x},$$

cabe observar que esse termo de fonte (ou termo de sumidouro) depende tanto das variáveis espaciais e temporal, como propriamente de u , uma vez que esta carrega informações sobre a distribuição espacial e temporal do ente em cada ponto $P \in V$.

A taxa líquida que flui através de V se dá na direção do campo vetorial (seja de velocidade, de massa, de cargas, etc.), definido pela função $\Phi(\mathbf{x}, t)$, uma função contínua,

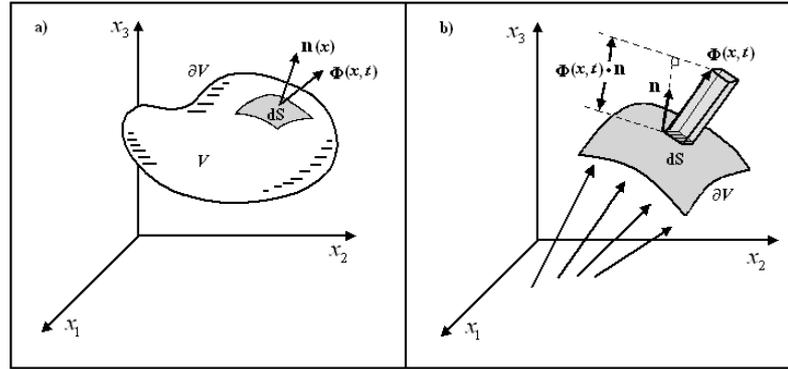


Figura E.1: Representação da região de interesse $V \in \mathbb{R}^3$ com contorno suave $-\partial V$, e elemento de superfície dS com normal \mathbf{n} exterior e Campo de Fluxo Φ . Esquematisa - se, Figura D.1 - b, a dedução da Integral de Fluxo do Campo Vetorial Φ . Figura modificada a partir de figuras de Logan (1994) - Figura D.1 - a; e Swokowski (1994) - Figura D.1 - b.

em que se supõe que o bordo ∂V é composto por uma membrana delgada, pela qual o ente possa fluir. Sobre esta superfície, define-se o vetor normal unitário exterior $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, com componentes contínuos e dS , um elemento infinitesimal de superfície, ou elemento infinitesimal de *hiperfície* - sem perda de generalidade, usar-se-á *elemento de superfície* e *elemento de volume* dentro de uma contextualização explícita (aqui, no espaço \mathbb{R}^n). Logo, tem-se que $\Phi(\mathbf{x}, t)$ é praticamente constante em dS , pois $\Phi(\mathbf{x}, t)$ é uma função contínua (ver Figura E.1-b, no caso tridimensional)(SWOKOWSKI, 1994 Vol II); e a quantidade de ente que flui através de dS , é aproximadamente o volume do prisma de área dS e altura $\Phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$, logo $dV = \Phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}dS$, o que permite estabelecer o fluxo total de $\Phi(\mathbf{x}, t)$ através da superfície ∂V é

$$\int_{\partial V} \Phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}dS.$$

De uma maneira geral, para uma região de interesse V , uma *lei de conservação fundamental* para um determinado ente u é dado pelo equacionamento:

taxa temporal de mudança do ente em $V =$ taxa líquida do ente que flui através de $V +$ a taxa que o ente é produzido (ou destruído) em V .

Ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_V u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \Phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}dS + \int_V f(\mathbf{x}, t, u) d\mathbf{x}, \quad (\text{E.1})$$

o sinal de menos representa o fato de que o ente está sendo direcionado para o interior ou

exterior de V por Φ , em que na primeira situação, o sentido do campo Φ é contrário a \mathbf{n} e, na segunda os sentidos são “concordantes”¹.

Esta equação integral é a forma geral para uma *lei de conservação*.

Pelo *Teorema da Divergência* (LIMA, 2000 pág. 493), segue que:

$$\int_V \nabla \cdot \Phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \Phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS,$$

logo, utilizando a *Regra de Leibniz* (Lima (2000) pág. 143) - derivação sob o sinal de integração - e agrupando os termos, tem-se:

$$\int_V \left(\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t, u) \right) d\mathbf{x} = 0,$$

seja um ponto $P = (x_1, \dots, x_n) \in V$, e fazendo a região $V \rightarrow P$, sendo V_P o volume no ponto P , utiliza-se do fato que²:

$$\left(\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t, u) \right) \Big|_{(P \in V)} \cdot V_P = 0,$$

tem-se a forma diferencial da *lei de conservação* dada por (E.1):

$$u_t(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \Phi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t, u) \quad (\text{E.2})$$

Em ambas as equações, (E.1) e (E.2), existem dois termos desconhecidos (u e Φ). Logo, necessita-se de uma equação que relacione esses desconhecidos, geralmente baseada em propriedades físicas do meio e provida de justificações empíricas. Essas equações são denominadas *relações constitutivas* ou *equações de estado*. Enquanto que as leis de conservação representam uma lei fundamental relacionada à densidade de u ao fluxo Φ , as equações constitutivas são equações de origem empírica (LOGAN, 1994).

¹ $\frac{\Phi \cdot \mathbf{n}}{\|\Phi\| \cdot \|\mathbf{n}\|} = \hat{\Phi} \cdot \mathbf{n} = \cos(\theta) = \begin{cases} |\cos(\theta)|, & -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -|\cos(\theta)|, & \pi/2 < \theta < -\pi/2 \end{cases}$, onde $\hat{\Phi}$ é o versor do campo Φ , e $\theta = \Phi \angle \mathbf{n}$, com $\mathbf{n} \angle \mathbf{n} = 0$.

²Teorema do Valor Médio para Integrais Múltiplas:

$$\int_V f d\mathbf{x} = (f |_{\exists P \in V}) \cdot V,$$

onde f é uma função escalar contínua ((LIMA, 2000), pág. 352 Teorema 3-e).

E.1 Aplicações e Exemplos

A mais simples e usual destas *relações constitutivas* surgem ao supor que a variação da densidade do ente u , que flui através de uma de uma região V , seja proporcional ao gradiente da densidade de u , isto é, $\Phi \propto \nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t)$.

Como exemplo mais simples de uma relação constitutiva, da forma acima, é a bem conhecida *Lei de Fick*, dada pela suposição:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -\nu \nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t), \quad \nu > 0, \quad (\text{E.3})$$

onde ν é a *coeficiente de difusão* (constante), com dimensões *comprimento²/tempo*.

E.1.1 Equação de Reação-Difusão

Ao considerar a Equação (E.2) no espaço tridimensional e a hipótese (E.3), obtém-se:

$$u_t - \nu \nabla^2 u = f(\mathbf{x}, t, u), \quad (\text{E.4})$$

a *Equação de Reação-Difusão*, em que o fluxo se dá no sentido contrário (negativa) ao gradiente de u , e $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ é o *operador Laplaciano* e ν uma constante real. Como consequência, se não há termo de fonte ($f(\mathbf{x}, t, u) = 0$), tem-se:

$$u_t - \nu \nabla^2 u = 0, \quad (\text{E.5})$$

a conhecida *Equação de Difusão*. Ao tomar o ente u como temperatura, a Equação (E.5) é a *Equação do Calor*.

Numa direção selecionada, o caso unidimensional de um experimento de difusão, a constante ν define um tempo característico (tempo de escala) - T para o processo, pois seja L o comprimento de escala (comprimento da direção selecionada na região do processo), tem-se $T = L^2/D$. Esse tempo T representa o tempo necessário para que mudanças perceptíveis da concentração ocorram ao longo da direção tomada (Logan (1994)).

Em Biologia, a Equação de Reação-Difusão com o termo de fonte parametrizado como, num caso unidimensional $ru \left(1 - \frac{u}{k}\right)$, tem-se a *Equação de Fisher*:

$$u_t - \nu u_{xx} = ru \left(1 - \frac{u}{k}\right), \quad r, k > 0, \quad (\text{E.6})$$

aplicada na investigação da distribuição de um gene vantajoso numa determinada população.

Para maiores informações sobre esta equação, indica-se Logan (1994).

E.1.2 Equação da Advecção

Se parametrizarmos o fluxo, tomando unidimensional a variável \mathbf{x} e $f(x, t, u) = 0$, como $\Phi = cu$ - depende linearmente da função densidade u , c uma constante positiva, a Equação (E.2) torná-se-á a *Equação da Advecção*:

$$u_t + cu_x = 0, \quad (\text{E.7})$$

que é a forma mais simples da *Equação de Transporte* unidimensional. Sua interpretação é imediata, pois as informações contidas em u serão transportadas na direção- x no sentido do movimento do fluido e c é a “velocidade” de propagação dessas informações.

Em Mecânica dos Fluidos, existe um sistema de equações denominado como: *Equações de Navier-Stokes* (ver Chorin e Marsden (1992); Fetter e Walecka (1980), pág 438; Stull (1988); Brown (1990) e Holton (2004)), que descreve o escoamento de fluidos compressíveis e incompressíveis, turbulentos e laminares. Essas equações são as representações matemáticas dos seguintes princípios físicos (parte retirada de Fortuna (2000), pág. 227):

- Conservação de massa;
- Conservação de momento (segunda lei de Newton): a taxa de variação temporal de momento do fluido é igual à resultante das forças que atuam sobre o fluido;
- Conservação de energia (primeira lei da termodinâmica): a taxa de variação temporal da energia é igual à soma do fluxo líquido, ou resultante de calor para o fluido com trabalho realizado sobre o fluido;

mais as relações constitutivas associados ao meio de escoamento.

A região de escoamento é o espaço tridimensional (ou dimensão menor, escoamento bidimensional ou unidimensional) mais uma variável temporal $(\mathbf{x}, t) = (x_1, x_2, x_3, t)$.

Em particular, uma lei de conservação para a densidade de massa é obtida quando se parametriza o fluxo de massa como:

$$\Phi = \rho \mathbf{v} \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (n \leq 3), \quad (\text{E.8})$$

em que ρ é uma função escalar que determina a densidade de massa de um determinado ponto na região de escoamento (\mathbf{x}) , num especificado tempo (t) ; a função vetorial \mathbf{v} repre-

senta o campo de velocidades associado à região de escoamento (vide a semelhança com a parametrização de Φ no início da seção). A unidade de (E.8) é $[\Phi]_{SI} = kg/m^2s$, no SI.

Assim, pela relação constitutiva (E.8), a Equação (E.1) e a Equação (E.2), obtêm-se, respectivamente, a *lei de conservação de massa* e a *equação da continuidade* geral, a saber:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V f(\mathbf{x}, t, \rho) d\mathbf{x}, \quad (\text{E.9})$$

e

$$\rho_t(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = f(\mathbf{x}, t, \rho) \quad (\text{E.10})$$

esta última equivalente à

$$\rho_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \nabla \rho(\mathbf{x}, t) + (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \rho(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t, \rho). \quad (\text{E.11})$$

Em uma situação simplificada, em que se considera que não há fonte f em V (na região de escoamento) e o fluxo de massa através de ∂V é nulo, implica que $\rho_t = 0$ (em (E.9), pois $\rho \geq 0$), isto é, a densidade de fluxo de massa é estacionária (constante no tempo) e, ainda, se for homogênea em sua distribuição espacial (constante em \mathbf{x}); logo

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \overbrace{\nabla \rho}^{=0} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

conhecida como *condição de incompressibilidade*, o que permite reescrever a Equação (E.11), como

$$\rho_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \nabla \rho(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t, \rho), \quad (\text{E.12})$$

a *Equação da continuidade para fluidos incompressíveis*.

Fazendo $\rho = u$, onde u representa a densidade de um ente, a Equação (E.10) é a formulação geral para a Equação de Advecção.

E.1.3 Equação de Burgers

Como um último exemplo, considera-se a expressão de densidade de fluxo unidimensional $\Phi = -\nu u_x + s(u)$ (ν uma constante), que aplicada à Equação (E.2) gera

$$u_t - \nu u_{xx} + s(u) = f(x, t, u), \quad (\text{E.13})$$

no caso unidimensional, com $f = 0$ e $s(u) = u^2/2$ produz a *Equação de Burgers unidimensional* (uma derivação para este caso é encontrado em Logan (1994), pág. 227):

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad (\text{E.14})$$

uma equação-exemplo para fenômenos de advecção (convecção) e difusão ocorrendo simultaneamente.

No caso de $\nu = 0$, ela é denominada *Equação de Burgers invíscida* (sem viscosidade), dada por:

$$u_t + uu_x = 0, \quad (\text{E.15})$$

que é uma equação de advecção da forma (E.7), isto é, uma EDP de 1ª ordem, porém não-linear.

Um exemplo de aplicação e método de resolução para a Equação de Burgers n -dimensional pode ser vista em Taghizadeh e Akbari (2007).

Referências Bibliográficas

- ADOMIAN, G. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. 1^a. ed. Boston, USA: Kluwer Acad., 1994. 372 p.
- ANDRÉ, J. et al. Modeling the 24-Hour evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 35, p. 1861–1883, 1978.
- ANDRADE, F. *Solução de Equações Diferenciais Parabólicas Acopladas pela Técnica de Transformada Integral e Computação Simbólica*. Tese (Dissertação) — Dissertação de Mestrado, DC-UFC, 1996.
- BANNON, P.; SALEM, T. Aspects of the baroclinic boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 52, p. 574–596, 1995.
- BATCHELOR, G. K. Diffusion in a field of homogeneous turbulence, eulerian analysis. *Australian Journal of Scientist Research*, v. 2, p. 437–450, 1949.
- BENDER, C.; ORSZAG, S. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill, 1978.
- BERGER, B.; GRISOGONO, B. The baroclinic, variable eddy viscosity ekman layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 87, p. 363–380, 1998.
- BLACKADAR, A. K.; TENNEKES, H. Asymptotic similarity in neutral barotropic planetary boundary layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 25, p. 1015–1020, 1968.
- BLUESTEIN, H. *Principles of Kinematics and Dynamics. Vol. I. Synoptic - Dynamic Meteorology in Midlatitudes*. [S.l.]: Oxford University Press, 1992.
- BOYCE, W. E.; PRIMA, R. C. D. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno*. Brasil: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1999.
- BRIGGS, G. A. Analytical parameterizations of diffusion: the convective boundary layer. *Journal Climate and Applied Meteorology*, v. 24, p. 1167–1186, nov 1985.
- BROWN, R. On two-layer models and the similarity functions for the pbl. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 24, p. 451–463, 1982.

- BROWN, R. A. *Fluid Mechanics to the Atmosphere*. San Diego, USA: Academic Press, Inc, 1990. 499 p.
- BULIGON, L.; VILHENA, M.; MOREIRA, D. Uma solução semi-analítica da dispersão de poluente com a equação do telégrafo e fluxo contra-gradiente. *Revista Brasileira de Meteorologia*, v. 21, p. 77–85, 2006.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica*. São Paulo: Thomson, 2003.
- BUSINGER, J. A. et al. Flux profile relationships in the atmospheric surface layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 28, p. 181 – 189, 1971.
- CATALDI, M. et al. Estudo do transporte de poluentes na região da camada de superfície sob diversas condições de estabilidade atmosférica. *XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*, v. 1, p. 2890–2899, 2000.
- CAUGHEY, S. J. Observed characteristics of the atmospheric boundary layer. In: Nieuwstadt F. T. M., and van Dop, H. (Eds.). *Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling.*, p. 107–158, 1982.
- CAUGHEY, S. J.; PALMER, S. G. Some aspects of turbulence structure through the depth of the convective boundary layer. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 105, p. 811–827, 1979.
- CHAMPAGNE, F. H. et al. Flux measurements, flux estimation techniques, and fine scale turbulence measurements in the instable surface layer over land. *Journal Atmospheric Society*, v. 34, p. 515–520, 1977.
- CHORIN, A. J.; MARSDEN, J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. 3. ed. New York, USA: Springer-Verlag New York, Inc, 1992. 182 p.
- CLARKE, R. et al. The wangara experiment: Boundary layer data. *Division of Meteorological Physical Technical Paper - CSIRO- Austrália*, v. 19, p. 1–339, 1971.
- COSTA, C. et al. Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer. *Atmospheric Environment*, v. 40, p. 5659–5669, 2006.
- COTTA, R. *Integral transforms in computational heat and fluid flow*. Boca Raton: CRC Press, 1993. 340 p.

- COTTA, R. Benchmark results in computational heat and fluid flow: the integral transform method. *International journal of heat and mass transfer*, v. 37, p. 381–393, 1994.
- COTTA, R. *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Sciences and Engineering*. New York: Begell House, 1998.
- COTTA, R.; MIKHAILOV, M. *Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation*. New York: John Wiley & Sons, 1997. 352 p.
- COTTA, R.; SANTOS, C.; KAKAÇ, S. Unified hybrid theoretical analysis of nonlinear convective heat transfer. In: *Proceedings of IMECE2007, ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition, Seattle, Washington, USA*. [S.l.: s.n.], 2007.
- DEARDORFF, J. W. Convective velocity and temperature scales for the unstable planetary boundary layer and for Raleigh convection. *Journal of Atmospheric Science*, v. 27, p. 1211–1213, 1970.
- DEARDORFF, J. W. Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers. *Journal of Atmospheric Science*, v. 29, p. 91–115, 1972.
- DEARDORFF, J. W. Theoretical expression for the counter-gradient vertical heat flux. *J. Geophys. Res.*, v. 77, p. 5900–5904, 1972.
- DEARDORFF, J. W. Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 7, p. 81–106, 1974.
- DEARDORFF, J. W. Three-dimensional numerical study of turbulence in an entraining mixed layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 7, p. 199 – 226, 1974.
- DEARDORFF, J. W. Strato-cumulus capped mixed layers derived from a three-dimensional model. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 18, p. 495–527, 1980.
- DEGRAZIA, G. A.; ANFONSSI, D. Estimation of the Kolmogorov constant C_0 from classical statistical diffusion theory. *Atmospheric Environment*, v. 22, 1998.
- DEGRAZIA, G. A. et al. Turbulence parameterisation for PBL dispersion models in all stability conditions. *Atmospheric Environment*, v. 34, p. 3575–3583, 2000.
- DEGRAZIA, G. A. et al. A lagrangian decorrelation time scale for non-homogeneous turbulence. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 86, p. 525–534, 1998.

DEGRAZIA, G. A.; MANGIA, C.; RIZZA, U. A comparison between different methods to estimate the lateral dispersion parameter under convective conditions. *Journal of Applied Meteorology*, v. 37, p. 227–231, fev 1998.

DEGRAZIA, G. A.; MANGIA, C.; RIZZA, U. A comparison between different methods to estimate the lateral dispersion parameter under convective conditions. *Journal of Applied Meteorology*, v. 37, p. pp. 227–231, 1998.

DEGRAZIA, G. A.; MORAES, O. L. L. A model for eddy diffusivity in a stable boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 58, p. 205–214, 1992.

DEGRAZIA, G. A. et al. Employing heisenberg's turbulent spectral transfer theory to parameterize sub - filter scales in les models. *Atmospheric Environment*, v. 41, p. 7059–7068, 2007.

DEGRAZIA, G. A. et al. Validation of a new turbulent parameterization for dispersion models in convective conditions. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 85, p. 243–254, 1997.

DERBYSHIRE, S. Nieuwstadt's stable boundary layer revisited. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 116, p. 127–158, 1990.

DYER, A. J. A review of flux-profile relationships. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 7, p. 363 – 372, 1974.

ENGER, L. A higher order closure model applied to dispersion in a convective pbl. *Atmospheric Environment*, v. 20, p. 879 – 894, 1986.

FARGE, M. Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Reviews, v. 24, n. 1, p. 395–458, 1992.

FETTER, A. L.; WALECKA, J. D. *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*. USA: McGraw-Hill, Inc, 1980. 790 p.

FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. São Paulo: Edusp, 2000.

FRISCH, U. *Turbulence*. New York: Cambridge University Press, 1995. 296 p.

GARRATT, J.; WYNGAARD, J.; FRANCEY, R. Winds in the atmospheric boundary layer-prediction and observation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 39, p. 1307–1316, 1982.

- GARRATT, J. R. et al. The atmospheric boundary layer - advances in knowledge and application. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 78, p. 9–37, 1996.
- GRISOGONO, B. A generalized ekman layer profile with gradually varying eddy diffusivities. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 121, p. 445–453, 1995.
- GRISOGONO, B.; OERLEMANS, J. Katabatic flows: Analytic solution for gradually varying eddy diffusivities. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 58, p. 3349–3354, 2001.
- GRISOGONO, B.; OERLEMANS, J. A theory for the estimation of surface fluxes in simple katabatic flows. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 127, p. 2125–2739, 2001.
- HANNA, S. R. Confidence limits for air quality model evaluations as estimated by bootstrap and backife resampling methods. *Atmospheric Environment*, v. 23, p. 1385–1398, 1989.
- HESS, S. *Introduction to Theoretical Meteorology*. New York: Krieger Pub Co, 1979. 85 p.
- HINZE, J. O. *Turbulence*. New York: McGraw–Hill, 1975. 790 p.
- HOLTON, J. R. *An Introduction to Dynamic Meteorology*. 4^a. ed. USA: Elsevier Inc, 2004. 547 p.
- HØJSTRUP, J. Velocity spectra in the unstable surface planetary boundary layer. *Journal of Atmospheric Science*, v. 39, p. 2239–2248, 1982.
- IZUMI, Y. Kansas 1968 field program data report. *Environmental Research Paper. Air Force Cambridge Research Paper*, n. 369, 1971.
- IZUMI, Y.; CAUGHEY, S. J. Minnesota 1973 atmospheric boundary layer experiment data report. *Air Force Cambridge Research Paper*, n. 547, 1976.
- KAIMAL, J. C. et al. Turbulence structure in the convective boundary layer. *Journal of Atmospheric Science*, v. 33, p. 2152–2226, 1976.
- KERRIGAN, J. F. *Migrating to Fortran 90*. Sebastopol/CA: O'Reilly and Associates, Inc., 1993.
- KRISHNA, K. A two-layer first - order closure model for the study of the baroclinic atmospheric boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 38, p. 1401–1417, 1981.
- LAMB, H. *Hydrodynamics*. New York: Dover Publications, Inc., 1945.

- LAMB, R. G. A numerical simulation of dispersion from an elevated point source in the convective planetary boundary layer. *Atmospheric Environment*, v. 12, p. 1297–1304, 1978.
- LAMB, R. G. Diffusion in the convective boundary layer. *Atmospheric Turbulence and air Pollution Modelling*, F.T.M. Nieuwstadt and H. Van Dop, Eds., Reidel, p. 159–229, 1982.
- LEMES, M. A. M.; MOURA, A. D. *Fundamentos da dinâmica aplicados à meteorologia e Oceanografia*. Ribeirão Preto, SP: Holos Editora Ltda., 2002. 296 p.
- LESIEUR, M.; MÉTAIS, O. New trends in large-eddy simulations of turbulence. *Annual review of fluid mechanics*, v. 28, p. 45–82, 1996.
- LIMA, E. L. *Curso de análise volume 2*. 6^a. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000. 557 p.
- LIMA, G. et al. Integral transform solution of internal flow problems based on navier-stokes equations and primitive variables formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 69, 2007.
- LIMA, J.; PEREZ-GUERRERO, J.; COTTA, R. Hybrid solution of the averaged navier-stokes equations for turbulent flow. *Computational Mechanics*, v. 19, p. 297–307, 1997.
- LOGAN, J. D. *An Introductory to Nonlinear Partial Differential Equations*. U.S.A.: John Wiley & Sons, Inc., 1994. 408 p.
- MACHADO, H.; COTTA, R. Integral transform method for boundary layer equations in simultaneous heat and fluid flow problems. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, v. 5, p. 225–237, 1995.
- MARQUES, E. P. F. *Investigação da Camada Limite Planetária Convectiva com Modelo LES Aplicado à Dispersão de Poluentes*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2004.
- MASON, P. J. Large-eddy simulation: a critical review of the technique. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 120, p. 1–26, 1994.
- MELGAREJO, J.; DEARDORFF, J. Revision to “stability functions for the boundary-layer resistance laws based upon observed boundary-layer heights”. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 32, n. 4, p. 837–839, 1975.
- MELLOR, G.; YAMADA, T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Proc. Symp. on Turbulent Shear Flows*, p. 1–14, 1977.

- MELLOR, G. L.; YAMADA, T. A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 31, p. 1791–1806, 1974.
- MIKHAILOV, M. On the solution of the heat equation with time dependent coefficient. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, v. 18, p. 344–345, 1975.
- MIKHAILOV, M. D.; ÖZİŞİK, M. N. *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. New York: John Wiley & Sons, 1984.
- MILES, J. Analytical solutions for the ekman layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 67, p. 1–10, 1994.
- MOENG, C. A large-eddy-simulation model for the study of planetary boundary-layer turbulence. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 41, p. 2052–2062, 1984.
- MONIN, A. S.; OBUKHOV, A. M. Basic laws of turbulent mixing in the atmosphere near the ground. *Tr. Akad. Nauk, SSSR, Geofiz. Inst.*, v. 151, n. 24, p. 1963–1987, 1954.
- MONIN, A. S.; YAGLOM, A. M. *Statistical Fluid Mechanics*. Cambridge: Mit Press, 1971. 769 p.
- MOREIRA, D. et al. Simulation of pollutant dispersion in the atmosphere by the laplace transform: The admm approach. *Water, Air, & Soil Pollution*, v. 177, p. 411–439, 2006.
- MOREIRA, D. M. *Solução analítica para dispersão vertical turbulenta em uma camada limite estável*. Tese (Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)) — Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995.
- MOURA, A. *Modelos multidimensionais analíticos de dispersão de contaminantes na atmosfera: coeficientes de difusão dependentes da distancia da fonte*. Tese (Doutorado) — Doutorado em Engenharia Mecânica, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1999.
- MOURA, A. B. D. *Solução analítica para dispersão vertical turbulenta em uma camada limite estável*. Tese (Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)) — Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995.
- NAVIER, C. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*. [S.l.]: Paris, 1822.
- NIEUWSTADT, F. T. M. The turbulent structure of the stable nocturnal boundary layer. *J. Atmos. Society*, v. 41, p. 2202–2216, 1984.

- PARMHED, O.; KOS, I.; GRISOGONO, B. An improved ekman layer approximation for smooth eddy diffusivity profiles. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 115, p. 399–407, 2005.
- PAULSON, C. A. The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer. *Journal of Applied Meteorology*, v. 9, p. 857–861, 1970.
- PEREIRA, L.; PÉREZ-GUERRERO, J.; COTTA, R. Integral transformation of the navier-stokes equations in cylindrical geometry. *Computational Mechanics*, v. 21, p. 60–70, 1998.
- POISSON, S. D. Mémoire sur les Équations générales de l'Équilibre et du mouvement des corps solides Élastiques et des fluids. *Journal de L'Ecole Polytechnique*, v. 1, 1829.
- PUHALES, F. S. *Estudo do Ciclo Diário da Camada Limite Planetária através da Simulação dos Grandes Turbilhões*. Tese (Dissertação (Mestrado em Física)) — Programa de Pós-graduação em Física, 2008.
- RIBEIRO, J. *Solução das Equações de Luikov para Secagem em Meios Capilares Porosos pela Técnica da Transformada Integral*. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA. São José dos Campos, 1992.
- RIBEIRO, J.; COTTA, R. On the solution of non-linear drying problems in capillary porous media through integral transformation of luikov equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, 1995.
- RIBEIRO, M. et al. Estudo da dispersão de poluentes na atmosfera via transformação integral. In: *XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*. [S.l.: s.n.], 2000. v. 1, p. 2969–2975.
- RIZZA, U. et al. Estimation of the lagrangian velocity structure function constant c_0 by large - eddy simulation. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 120, p. 25–37, 2006.
- SORBJAN, Z. *Structure of the atmospheric boundary layer*. New Jersey.: Prentice Hall, 1989. 317 p.
- SORBJAN, Z. Numerical study of penetrative and “solid lid” nonpenetrative convective boundary layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 53, p. 101–112, 1996.
- STOKES, G. *On the Theory of the Internal Friction of Fluids in Motion and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids*. Cambridge, Inglaterra: Trans. Cambridge Phil. Society., 1845. 287 p.

- STULL, R. B. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. New Jersey: Kluwer Academic Publishers, 1988. 666 p.
- SULLIVAN, P.; MCWILLIAMS, J.; MOENG, C. A subgrid-scale model for large-eddy simulation of planetary boundary-layer flows. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 71, p. 247–276, 1994.
- SUN, W. Y.; CHANG, C. Z. Diffusion model for a convective layer: Part i. numerical simulation of a convective boundary layer. *Climate and Applied Meteorology*, v. 25, p. 1445–1453, 1986.
- SUN, W. Y.; CHANG, C. Z. Diffusion model for a convective layer: Part ii. plume released from a continuous point source. *Climate and Applied Meteorology*, v. 25, p. 1454–1463, 1986.
- SUN, W. Y.; OGURA, Y. Modeling the evolution of the convective planetary boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 37, p. 1558–1572, 1980.
- SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica. Volume II*. 2^a. ed. São Paulo. BR: Makron Books, 1994. 770 p.
- TAGHIZADEH, N.; AKBARI, M. The solution of n-dimension burgers equation by adomian decomposition method. *Korean Annals Mathematics*, v. 24, n. 1, p. 19–28, 2007.
- TAN, Z.-M. An approximate analytical solution for the baroclinic and variable eddy diffusivity semi - geostrophic ekman boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 98, p. 361–385, 2001.
- TENNEKES, H. Similarity relation, scaling laws and spectral dynamics. in: Nieuwstadt f.t.m. and van dop h. eds.. *Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modeling.*, p. 37–68, 1982.
- VAREJÃO-SILVA, M. A. *Meteorologia e Climatologia*. digital. Recife, Brasil: [s.n.], 2005.
- VIANELLO, R. L.; ALVES, A. R. *Meteorologia básica e aplicações*. 4. ed. Viçosa, MG: Editora UFV, 2006. 449 p.
- VILHENA, M. et al. A semi-analytical solution for the three-dimensional advection-diffusion equation considering non-local turbulence closure. *Atmospheric Research*, v. 90, p. 63–69, 2008.
- VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B. A new analytical approach to solve the neutron transport equation. *Kerntechnik*, v. 56, n. 5, p. 334–336, 1991.

- VILHENA, M. T. et al. An analytical air pollution model: development and evaluation. *Beiträge Zur Physik Der Atmosphäre*, v. 71, n. 3, p. 315–320, 1998.
- WILLIS, G. E.; DEARDORFF, J. W. A laboratory model of the unstable planetary boundary layer. *J. Atmos. Society*, v. 31, p. 1297–1307, 1974.
- WILLIS, G. E.; DEARDORFF, J. W. A laboratory model of diffusion into the convective planetary layer. *Quart. J. R. Met. Society*, v. 102, p. 427–445, 1976.
- WILLIS, G. E.; DEARDORFF, J. W. A laboratory study of dispersion from elevated source within a modeled convective planetary boundary layer. *Atmospheric Environment*, v. 12, p. 1305–1311, 1978.
- WILLIS, G. E.; DEARDORFF, J. W. A laboratory study of dispersion from a source in the middle of the convectively mixed layer. *Atmospheric Environment*, v. 15, p. 109–117, 1981.
- WILSON, J.; FLESCHE, T. An idealized mean wind profile for the atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 110, p. 281–299, 2004.
- WILSON, K. A three-dimensional correlation/spectral model for turbulent velocities in a convective boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 85, p. 35–52, 1997.
- WORTMANN, S. *Formulação semi-analítica para a equação transformada resultante da aplicação da GITT em problemas difusivos-advectivos*. Tese (Doutorado) — Doutorado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003.
- WORTMANN, S. et al. A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the pbl. *Atmospheric Environment*, v. 39, p. 2171–2178, 2005.
- WU, R.; BLUMEN, W. An analysis of ekman boundary layer dynamics incorporating the geostrophic momentum approximation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 39, p. 1774–1782, 1982.
- WYNGAARD, J. C. Modeling the planetary boundary layer - extension to the stable case. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 9, p. 441–460, 1975.
- WYNGAARD, J. C.; COTÉ, O. R. The evolution of a convective planetary boundary layer - a higher-order-closure model study. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 7, p. 289–308, 1974.

WYNGAARD, J. C.; COTE, O. R.; RAO, K. S. Modelling of the atmospheric boundary layer. *Advances. In Geophysics*, v. 18A, p. 193–212, 1974.

YAMADA, T. On the similarity functions A, B and C of the planetary boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 33, p. 781–793, 1976.

YAMADA, T.; MELLOR, G. L. A simulation of the wangara atmospheric boundary layer data. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 32, p. 2309–2329, 1975.

YORDANOV, D.; WIPPERMANN, F. The parameterization of the turbulent fluxes of momentum heat and moisture at the ground in a baroclinic planetary boundary layer. *Beit. Phys. Atmos.*, v. 45, p. 58–65, 1972.

ZEMAN, O.; LUMLEY, J. Modeling buoyancy driven mixed layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 33, p. 1974–1988, 1976.

ÖZİŞİK, M.; MURRAY, R. On the solution of linear diffusion problems with variable boundary condition parameters. *J. Heat Transfer*, v. 96, p. 48–51, 1974.

ÖZİŞİK, M. N. *Heat Conduction*. New York: John Wiley & Sons, 1993. 692 p.