

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**PARAMETRIZAÇÃO DO TRANSPORTE DE ENERGIA
CINÉTICA TURBULENTE NA CAMADA LIMITE
CONVECTIVA**

TESE DE DOUTORADO

Franciano Scremin Puhales

Santa Maria, RS, Brasil

2011

PPGFIS/UFSM, RS

PUHALES, Franciano Scremin

Doutor

2011

PARAMETRIZAÇÃO DO TRANSPORTE DE ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA NA CAMADA LIMITE CONVECTIVA

Franciano Scremin Puhales

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Áreas Clássicas da Fenomenologia e suas Aplicações, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Física.**

Orientador: Prof. Gervásio Annes Degrazia

Santa Maria, RS, Brasil

2011

P978p Puhales, Franciano Scremin

Parametrização do transporte de energia cinética turbulenta na camada limite convectiva / por Franciano Scremin Puhales. – 2011. 159 p. : il. ; 31 cm

Orientador: Gervásio Annes Degrazia.

Coorientador: Umberto Rizza

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciência Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, RS, 2011

1. Física 2. Mecânica dos fluidos 3. Turbulência 4. Camada limite atmosférica 5. Balanço de Energia Cinética Turbulenta - ECT I. Degrazia, Gervásio Annes II. Rizza, Umberto III. Título.

CDU 531.3

Ficha catalográfica elaborada por Simone G. Maisonave – CRB 10/1733
Biblioteca Central da UFSM

©2011

Todos os direitos autorais reservados a Franciano Scremin Puhales. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

End. Eletr.: fpuhales@gmail.com

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Tese de Doutorado

**PARAMETRIZAÇÃO DO TRANSPORTE DE ENERGIA CINÉTICA
TURBULENTA NA CAMADA LIMITE CONVECTIVA**

elaborada por
Franciano Scremin Puhales

como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Física

COMISSÃO EXAMINADORA:

Gervásio Annes Degrazia, Dr.
(Presidente/orientador)

Umberto Rizza, Dr. (ISAC/CNR)
(co-orientador)

Antônio Goulart, Dr. (UNIPAMPA)

Otávio Costa Acevedo, Dr. (UFSM)

Lidiane Buligon, Dra. (UFSM)

Santa Maria, 15 de dezembro de 2011.

*A jornada. A jornada é o que nos faz feliz.
Não o destino.*

(Dan Millman – O Caminho do Guerreiro Pacífico)

À minha mãe, irmãos, Lai e à Professora Maria Ines Thomas.

AGRADECIMENTOS

A minha família, sobre tudo a minha mãe e aos meus irmãos, sempre presentes até mesmo quando eu estive ausente...não há palavras que descrevam ou equações que quantifiquem a minha gradidão a vocês!

A minha namorada, Lairane, pelo carinho, dedicação, compreensão e apoio nesta reta final do doutorado.

Ao professor Gervásio, pelos anos de orientação...não só no doutorado mas desde a iniciação científica.

Ao professor Otávio, pela grande ajuda na elaboração desse trabalho e pela amizade que extrapola os vínculos acadêmicos.

Aos colegas do laboratório, em especial aos habitantes da sala 1052 – Guilherme (Pogão), Felipe (Simpático) e Luis Gustavo (LG,Pareto) pela camaradagem e colaboração científica dos últimos anos.

Aos amigos (irmãos), sempre presentes mesmo que distantes...Je, Bruna, Ed, Nemo, Cau, Kinca, Márcio, Bóris, Luis Antônio, Germano...(me perdoem se esqueci de alguém...)

À gurizada medonha do time dos Dragões da Taquareira.

Aos colegas da UFSM – PPGFIS, GruMA, Meteoro...aquele abraço!

Aos meus grandes companheiros de ideal do GEARAS, sobretudo ao mestre Vidor, à madrinha Bel e a Wania.

Aos meus colegas do Instituto Federal Farroupilha que me acompanham nestes últimos tempos, em especial ao Muraro e a Cátia.

À UFSM, enquanto instituição e servidores de todos os segmentos que tive a oportunidade de passar...desde o colégio técnico ao doutorado (Creche Ipê Amarelo, tu és a próxima!!!)

E finalmente, mas de forma alguma menos importante, à minha professora de matemática da quinta até oitava série do primeiro grau (naquela época era primeiro grau!), Professora Maria Ines Thomas, cuja dedicação daqueles anos contribuiu de forma preponderante na minha trajetória na academia.

RESUMO

Tese de Doutorado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

PARAMETRIZAÇÃO DO TRANSPORTE DE ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA NA CAMADA LIMITE CONVECTIVA

AUTOR: FRANCIANO SCREMIN PUHALES

ORIENTADOR: GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 15 de dezembro de 2011.

Neste trabalho, uma parametrização para os termos de transporte da equação de balanço de energia cinética turbulenta (ECT), válida para uma camada limite convectiva (CLC), é apresentada. Esta é uma tarefa complicada de ser realizada a partir de dados experimentais, especialmente devido a dificuldade associada às medidas das flutuações de pressão, que são necessárias para a determinação do termo de correlação de pressão. Desta forma, empregando a simulação dos grandes turbilhões (LES, do inglês *Large Eddy Simulation*), todos os termos da equação de balanço de ECT foram determinados para a CLC. A partir desses dados, foram ajustados polinômios que descrevem os perfis verticais dos termos de transporte para a CLC. Os polinômios obtidos fornecem uma boa descrição dos dados da simulação LES, e em função deles é mostrado que uma formulação simples, que se relaciona com os termos de transporte a partir da ECT, apresenta vantagens em relação a outras parametrizações comumente empregadas em modelos numéricos para a CLC. Além disso, o presente estudo mostra que o termo de transporte turbulento domina sobre o transporte devido a flutuações de pressão, e que para a maior parte da extensão vertical CLC estes dois termos tem sinais opostos. A simulação consiste em um ciclo diário da CLP, utilizando como forçante de superfície dados obtidos experimentalmente, assim o experimento numérico representa um caso mais realista que uma simulação de CLC estacionária.

Palavras chave: LES, turbulência, camada limite atmosférica, balanço de ECT.

ABSTRACT

Tese de Doutorado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

PARAMETERIZATION FOR THE TURBULENT KINETIC ENERGY TRANSPORT IN THE CONVECTIVE BOUNDARY LAYER

AUTOR: FRANCIANO SCREMIN PUHALES

ORIENTADOR: GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 15 de dezembro de 2011.

In this work a parameterization for the transport terms of the turbulent kinetic energy (TKE) budget equation, valid for a convective boundary layer (CBL) is presented. This is a hard task to accomplish from experimental data, especially because of the difficulty associated to the measurements of pressure turbulent fluctuations, which are necessary to determine the pressure correlation TKE transport term. Thus, employing a large eddy simulation (LES), all terms of the TKE budget equation were determined for a CBL. From these data, polynomials that describe the TKE transport terms vertical profiles were adjusted for a CBL. The found polynomial fits are a good description of the LES data, and from them it is shown that a simple formulation that directly relates the transport terms to the TKE magnitude has advantages on other parameterizations commonly used in CBL numerical models. Furthermore, the present study shows that the TKE turbulent transport term dominates over the TKE transport by pressure perturbations and that for most of the CBL these two terms have apposite signs. The simulation consists of a full diurnal PBL cycle utilizing, at the surface, a forcing obtained from experimental data, so that the numerical experiment represents a more realistic case than a idealized CBL.

Key Words: LES, turbulence, atmospheric boundary layer, TKE budget.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Ocupação do volume de contorno que encerra um líquido (a) e de um gás (b). (a) Fonte: < http://pe.kalipedia.com/fisica-quimica >. (b) Adaptado de Halliday, Resnick e Walker (2010).	21
Figura 2.2 – Consequência da ação de uma força tangencial sobre um elemento sólido (a) e um fluido (b). Adaptado de Kundu (1990).	21
Figura 2.3 – Variação da densidade média $\bar{\rho}$ com o aumento do volume. Adaptado de Brown (1991).	23
Figura 2.4 – Perfis verticais de temperatura potencial caracterizando as condições de estabilidade de uma camada do escoamento	26
Figura 2.5 – Análogo mecânico das condições de estabilidade estática	26
Figura 2.6 – Perfil de temperatura potencial caracterizando uma camada instável (globalmente), porém neutra entre z_a e z_b (localmente).	27
Figura 2.7 – Representação idealizada do escoamento próximo a uma superfície rígida (camada limite).	30
Figura 2.8 – Variação no regime de escoamento. Adaptado de Oke (1987).	31
Figura 2.9 – Magnitude da velocidade do vento em um escoamento turbulento. O eixo horizontal representa o número de pontos da amostra.	33
Figura 2.10 – Representação da atmosfera padrão – uma idealização da atmosfera. A linha pontilhada (em aproximadamente $32km$) indica a altura que compreende aproximadamente 99% da massa da atmosfera. Adaptado de Wallace e Hobbs (2006).	41
Figura 2.11 – Escalas temporais e espaciais de vários fenômenos atmosféricos. Adaptado de Oke (1987).	42
Figura 3.1 – Espectro de emissão de um corpo negro a diferentes temperaturas e Lei do Deslocamento de Wien	44
Figura 3.2 – Representação do espectro eletromagnético. Fonte: < http://pion.sbfisica.org.br >. Acesso: 30 de setembro de 2011.	45
Figura 3.3 – Absorção dos constituintes da atmosfera em função do comprimento de onda da radiação incidente. Adaptado de Tolentino e Rocha-Filho (1998).	46
Figura 3.4 – Evolução das médias horárias de fluxo de radiação	48
Figura 3.5 – Representação da variação diária da CLP. Adaptado de Stull, 1988.	49
Figura 3.6 – Perfis típicos de velocidade média do vento, \bar{u} , direção média do vento \bar{d} e temperatura potencial média $\bar{\theta}$ para a CLC. Os perfis foram apresentados em função da altura normalizada z/z_i , onde z é a altura em relação ao solo e z_i a altura do topo da CLC. Adaptado de Kaimal e Finnigan (1994).	50
Figura 3.7 – Perfis típicos de velocidade média do vento, \bar{u} , direção média do vento \bar{d} e temperatura potencial média $\bar{\theta}$ para a CLE. Os perfis foram apresentados em função da altura normalizada z/h , onde z é a altura em relação ao solo e h a altura do topo da CLE. Adaptado de Kaimal e Finnigan (1994).	51
Figura 4.1 – Dados experimentais de ECT ((a) e velocidade média do vento ((b)), Candiota-RS, em 30/09/2007 e 01/10/2007.	53
Figura 4.2 – (a) Esquema da distribuição da energia cinética turbulenta nas diferentes	

	escalas e números de onda. Adaptado de Sorbjan (1989). (b) Representação do gráfico log-log do espectro de energia cinética turbulenta para TCD.	60
Figura 5.1	– Representação dos efeitos do processo de média na quantidade de energia cinética turbulenta resolvida no escoamento. Adaptado de Sagaut (1998)	64
Figura 5.2	– (a) – Representação do gráfico log-log para o espectro de densidade de energia cinética turbulenta $S(k)$ em função do número de onda k . A linha tracejada indica a separação entre os grandes turbilhões (resolvida) e os pequenos (parametrizada), sendo k_c o número de onda de filtro ou corte. Adaptado de Sagaut (1998). (b) – Efeito da filtragem sobre um sinal turbulento. A curva superior (traço fino) mostra o sinal turbulento e a sua média (traço grosso) a partir de um processo de filtragem. A curva inferior mostra o resíduo da filtragem $u'' = u - \tilde{u}$ (traço fino) e a média do próprio resíduo. Adaptado de Pope (2000)	66
Figura 5.3	– Comportamento das funções filtro tipo caixa (pontilhado), gaussiana (linha cheia) e filtro agudo (tracejado). A figura 5.3(a) mostra o comportamento em um espaço físico (onde $r = (x_i - x'_i)$) e a 5.3(b) em um espaço de números de onda, sendo que em (a) é a própria função G e em (b) a função de transferência \hat{G} associada a função filtro. Adaptado de Pope (2000)	69
Figura 5.4	– Atuação do filtro no escoamento. Em termos do espaço físico, os turbilhões resolvidos são aqueles maiores que as dimensões da grade numérica Δ . Em termos do espaço de números de onda – espaço de Fourier – os resolvidos são aqueles com número de onda menores que k_c . Adaptado de Sagaut (1998)	70
Figura 5.5	– Representação das taxas de dissipação da escala resolvida e de subfiltro no espectro de ECT.	77
Figura 6.1	– Variação do passo de tempo Δt durante a simulação do ciclo diário da CLP. ..	78
Figura 6.2	– Perfis iniciais de temperatura potencial e umidade específica obtidos a partir da análise do modelo GFS	79
Figura 6.3	– Perfis iniciais das componentes e velocidade do vento obtidos a partir da análise do modelo GFS	80
Figura 6.4	– Dados experimentais de temperatura da superfície e umidade relativa interpolados e incorporados ao modelo LES como forçantes de superfície. A linha indica a função interpoladora e os pontos o valor experimental de cada um dos forçantes.	81
Figura 6.5	– Perfis verticais do vento geostrófico. A componente zonal e meridional (u_g e v_g) foram calculadas a partir do campo de geopotencial das análises do modelo GFS.	82
Figura 6.6	– Variação temporal do vento geostrófico. Obtida a partir da interpolação linear dos perfis apresentados na figura 6.5.	82
Figura 7.1	– Evolução temporal e espacial da energia cinética turbulenta (a) e do termo de transporte total de ECT (b). A escala de cores indica a intensidade das variáveis.	83
Figura 7.2	– Evolução temporal e espacial do termo de transporte turbulento de ECT (a) e do termo de transporte por flutuação de pressão (b) A escala de cores indica a intensidade das variáveis.	85

Figura 7.3 – Perfis verticais dos diferentes mecanismos de transporte de ECT na CLC para os horários apresentados na tabela 7.1, normalizados por w_*^3/z_i ..	88
Figura 7.4 – Perfil vertical do termo de transporte total de ECT na CLC para os horários apresentados na tabela 7.1, normalizados por w_*^3/z_i	89
Figura 7.5 – Perfil vertical de ECT normalizado por w_*^2 . A forma do perfil de ECT simulado está de acordo com aqueles encontrados experimentalmente e através de outras simulações LES (DEARDORFF; WILLIS, 1985; CAUGHEY, 1981; DEGRAZIA et al., 2011).	92
Figura 7.6 – Curvas de similaridade para os mecanismos de transporte de ECT na camada superficial (normalizado por u_*^3/kz).	94
Figura 7.7 – Ajuste polinomial para a equação 7.27.	96
Figura A.1 – Representação de V_c e V_s	105
Figura A.2 – Elemento de área infinitesimal de V_c e vetores	106
Figura A.3 – (a) Representação do elemento de fluido e as forças que sobre ele atuam. (b) Representação das tensões que agem em uma face do elemento de fluido.	114
Figura A.4 – Representação das bases dos espaços vetoriais associados os sistemas de referência inercial (x, y, z) e não inercial (x', y', z')	119

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Funções associadas aos filtros no espaço físico e espaço de número de ondas, onde H é a função de Heaviside, e a constante γ é geralmente da ordem de 6. Adaptado de Pope (2000).	68
Tabela 7.1 – Parâmetros que descrevem a CLC. $\langle w'\theta'_v \rangle_s$ é o fluxo de energia na forma de calor na superfície, L é o comprimento de Obukov, θ_{vs} é a temperatura potencial virtual na superfície e w_* e u_* são, respectivamente, as escalas de velocidade convectiva e de fricção. Todos os valores apresentados na tabela estão no sistema internacional de unidades.	86
Tabela 7.2 – Coeficientes polinomiais para a equação 7.14. EAM=Erro Assimptótico Médio.	90
Tabela 7.3 – Coeficientes polinomiais para a equação 7.15. EAM=Erro Assimptótico Médio.	91
Tabela 7.4 – Coeficientes polinomiais para a equação 7.27. EAM=Erro Assimptótico Médio.	96

SUMÁRIO

RESUMO	8
ABSTRACT	9
1 INTRODUÇÃO	16
2 MECÂNICA DE FLUIDOS	20
2.1 Definição de fluido	20
2.2 Hipótese do contínuo e modelo de fluido newtoniano	22
2.3 Definições gerais - grandezas macroscópicas caracterizando o escoamento de um fluido	24
2.3.1 Campo de velocidade.....	24
2.3.2 Campo de temperatura.....	24
2.3.3 Campo de umidade.....	27
2.3.4 Métodos de descrição de um escoamento.....	28
2.4 Camada limite	30
2.5 Regimes de escoamento	31
2.5.1 Escoamentos turbulentos.....	32
2.6 Equações básicas no estudo da mecânica de fluidos	35
2.6.1 Equação da continuidade - conservação da massa em um escoamento.....	35
2.6.2 Equação de estado dos gases ideais.....	36
2.6.3 Primeira Lei da Termodinâmica.....	37
2.6.4 Segunda Lei de Newton aplicada a fluidos – equação de Navier-Stokes.....	38
2.6.5 Considerações sobre as equações básicas.....	39
2.6.6 Aproximação de Boussinesq.....	40
2.6.7 Modelo da atmosfera padrão.....	40
2.7 Escalas dos fenômenos atmosféricos	42
3 CAMADA LIMITE PLANETÁRIA	43
3.1 Balanço radiativo na superfície	43
3.2 Variação diária da CLP	47
3.2.1 Camada limite convectiva.....	49
3.2.2 Camada limite estável.....	50
3.2.3 Camada limite neutra.....	51
3.2.4 Camada limite residual.....	51
4 ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA	52
4.1 Equação de balanço da energia cinética turbulenta na camada limite planetária	53
4.1.1 Termo I: variação temporal local da energia cinética turbulenta média.....	54
4.1.2 Termo II: transporte advectivo médio de energia cinética turbulenta média... ..	54
4.1.3 Termo III: produção de energia cinética turbulenta a partir do cisalhamento do campo de velocidade do vento.....	55
4.1.4 Termo IV: transporte turbulento de energia cinética turbulenta média.....	56
4.1.5 Termo V: produção ou destruição de energia cinética turbulenta devido ao fluxo de energia na forma de calor.....	56
4.1.6 Termo VI: transporte de energia cinética turbulenta devido as flutuações de pressão.....	57
4.1.7 Termo VII: taxa de dissipação de energia cinética turbulenta.....	58
4.1.8 Simplificações na equação de balanço da ECT.....	58

4.2	Espectro de energia cinética turbulenta	59
5	SIMULAÇÃO DOS GRANDES TURBILHÕES	61
5.1	Descrição do escoamento a partir do processo de médias	62
5.2	Modelo de simulação dos grandes turbilhões	65
5.2.1	Filtros utilizados em modelos LES.....	66
5.3	Modelo LES de Moeng (1984)	68
5.3.1	Esquema numérico	69
5.3.2	Condições de contorno.....	71
5.3.2.1	Condições de contorno laterais.....	71
5.3.2.2	Condições de contorno inferior	71
5.3.2.3	Condições de contorno superior.....	71
5.3.3	Equações para as escalas resolvidas	72
5.3.4	Modelo de subfiltro	73
5.4	Equação de balanço da energia cinética turbulenta para a escala resolvida	75
6	EXPERIMENTO NUMÉRICO	78
6.1	Condições iniciais	79
6.2	Forçantes.....	80
6.2.1	Superfície	80
6.2.2	Grande escala	80
7	TRANSPORTE DE ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA	83
7.1	Termos de transporte de ECT na CLC	86
7.2	Uma nova proposta para a parametrização do transporte de energia cinética turbulenta na camada limite convectiva	95
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	98
	Apêndice A – Demonstrações	101
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	136

1 INTRODUÇÃO

A camada limite planetária (CLP) é a região da atmosfera que tem seu escoamento diretamente afetado pela presença da superfície. Tal influência se dá na forma de arraste com o solo e transferência de energia na forma de calor entre a superfície e a atmosfera nas suas adjacências. Além do mais, essa influência da superfície acaba tornando o escoamento turbulento em toda a extensão da CLP, fazendo com que a CLP também seja definida como a porção da troposfera na qual os efeitos da turbulência sobre o escoamento são apreciáveis (BUSINGER, 1981).

A turbulência consiste em um conjunto de vórtices acoplados, de diferentes escalas espaciais e temporais, os quais interagem uns com os outros e com os contornos do escoamento. Como consequência disto, a descrição matemática desse fenômeno físico é muito complexa. Contudo, apesar da complexidade, espera-se que toda a informação do escoamento turbulento esteja contida no conjunto de equações que o descrevem. Tais equações são dadas pelos princípios e leis da mecânica e da termodinâmica. Porém, além da complexidade, a grande quantidade de informações necessária para descrever o escoamento turbulento tornam uma solução analítica ainda não possível. Dessa forma, opta-se por uma abordagem probabilística para turbulência, ao invés de uma determinística. Tal descrição probabilística se dá em termos de variáveis médias, variâncias, covariâncias e demais momentos estatísticos, o que introduz um novo problema: a definição do processo de média e as condições necessárias para que as propriedades matemáticas de funções aleatórias sejam válidas, como convergência, estacionariedade, etc.

Uma variável comumente utilizada para quantificar a intensidade da turbulência é a energia cinética turbulenta (ECT), que se refere à energia cinética associada às flutuações no campo de velocidade do vento, provocadas pela turbulência. Tal energia é usualmente expressa em termos intensivos, ou seja, por unidade de massa. Além do mais, considera-se como uma variável representativa da intensidade do escoamento o valor médio da ECT, e desta forma a ECT pode ser definida em função da variância do campo de velocidade do vento. A variação temporal da ECT é descrita por uma equação diferencial parcial, citada na bibliografia como equação de balanço da ECT. Essa equação leva em conta os diferentes processos que agregam, retiram, ou transportam energia no campo turbulento. Desta forma, a equação de balanço é dada por:

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} = - \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial x_j} - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{g_i}{\theta_0} \langle u'_i \theta'_v \rangle - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u'_i E \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u'_i p' \rangle - \langle \varepsilon \rangle \quad (1.1)$$

onde E é a ECT, u_i e g_i são, respectivamente, as i -ésimas componentes da velocidade do vento e da aceleração da gravidade, θ_0 é a temperatura potencial de referência, θ_v é a temperatura potencial virtual, ρ é a densidade do ar, p é a pressão e ε é a taxa de

dissipação de ECT. O operador $\langle \cdot \rangle$ representa o operador média e o apóstrofo (') a flutuação em torno da média, tal que, qualquer variável ξ do escoamento pode ser descrita como

$$\xi = \langle \xi \rangle + \xi' \quad (1.2)$$

Além do mais, os termos dados por $\langle u'_i \xi' \rangle$ na equação 1.1 são definidos como os fluxos turbulentos médios, onde $\langle u'_i u'_j \rangle$, $\langle u'_i \theta'_v \rangle$, $\langle u'_i E \rangle$ e $\langle u'_i p' \rangle$ representam respectivamente os fluxos turbulentos de *momentum*, energia na forma de calor, ECT e pressão. O lado esquerdo da equação 1.1 expressa a variação local da ECT enquanto, no lado direito, cada termo representa um processo que cria, destrói ou redistribui ECT dentro da CLP. O primeiro termo do lado direito representa a advecção de ECT pelo escoamento médio; o segundo termo a produção de ECT devido ao cisalhamento do campo de velocidade do vento, também referenciado na bibliografia como termo de produção mecânica. O terceiro termo representa a produção ou destruição de ECT devido a flutuabilidade das parcelas de fluido. O quarto e quinto termos são os termos de transporte. Esses termos não representam criação ou destruição de turbulência, apenas redistribuem a ECT em toda a CLP. Embora estes termos de redistribuição tenham funções semelhantes, eles se referem a processos físicos distintos. O quarto termo é o transporte de ECT pela turbulência em si. O quinto termo é um termo de correlação de pressão, e ele descreve como a ECT é transportada por perturbações de pressão dentro da CLP. Finalmente, o último termo é a taxa de dissipação de ECT, que representa a conversão de ECT em energia na forma de calor (SORBJAN, 1989).

A equação de balanço da ECT é frequentemente utilizada para quantificar a turbulência em modelos numéricos, de diferentes naturezas. Neste caso, cada um dos termos da equação de balanço de ECT é parametrizada em termos de quantidades mais simples. Para que esta tarefa seja realizada é de extrema importância a obtenção de dados que possam nos levar a descrição dos momentos estatísticos de ordem mais alta, em termos de outros de ordem mais baixa. Entretanto, existem grandes dificuldades em se conduzir experimentos que capturem informações temporais e espaciais de campos turbulentos. O termo de correlação de pressão é particularmente difícil de ser obtido experimentalmente (STULL, 1988), e por essa razão, usualmente ambos os termos de transporte são parametrizados juntos, apesar do seu caráter físico distinto.

A metodologia LES resolve numericamente as equações de movimento para os maiores turbilhões e parametriza os efeitos da turbulência nas menores escalas, as quais tem comportamento quase universal. Isto é necessário pois resolver diretamente a turbulência, ou seja, resolver as equações de movimento para todos os turbilhões – Simulação numérica direta (DNS) – implica em considerar uma solução com um grande número de graus de liberdade do movimento e desta forma uma malha computacional de altíssima resolução (WYNGAARD, 1981). Assim, os modelos LES apresentam um caminho viável

ao associar uma solução numérica (para as grandes escalas) a um esquema de modelagem da turbulência (para as pequenas escalas).

A simulação dos grandes turbilhões consiste em um modelo de médias de volume, no qual os turbilhões mais energéticos são resolvidos diretamente, enquanto os menores são filtrados e tem a sua energia parametrizada por um modelo chamado de subfiltro ou subgrade. A quantidade de turbilhões e, portanto, de energia cinética turbulenta resolvida diretamente, é tão grande quanto for a resolução da grade do modelo (POPE, 2000). Dessa forma, a metodologia LES é capaz de fornecer informações detalhadas (em alta resolução temporal e espacial) sobre os campos turbulentos, sendo uma opção para a obtenção de dados confiáveis uma vez que, na maioria dos casos, as medidas experimentais são impraticáveis (PUHALES, 2008).

A simulação LES que originou os dados para este trabalho compreende um ciclo diário completo da CLP, levando em conta o crescimento e decaimento da CLC, onde são considerados forçantes obtidos a partir de dados experimentais e campos de análise de modelos de grande escala. Como uma consequência, os dados não representam uma condição convectiva estacionária e sim uma condição que se aproxima de um caso real.

Neste estudo, a partir de dados obtidos através da metodologia da simulação dos grandes turbilhões, propõe-se um conjunto de equações que representam o perfil vertical dos termos de transporte de ECT para a CLP convectiva, CLC. Assim, o principal objetivo dessa análise é obter uma parametrização que permita uma distinção clara entre os processos físicos associados à divergência do fluxo turbulento de ECT e da correlação de pressão. Tal parametrização é comparada com estimativas experimentais e com resultados de modelos (LENSCHOW, 1974; LENSCHOW; WYNGAARD; PENNELL, 1980; DEARDORFF; WILLIS, 1985; WYNGAARD; COTÉ, 1971). Além disso, diferentemente do que é comumente realizado (DUYNKERKE, 1988; HURLEY, 1997; WENG; TAYLOR, 2003; BAAS; ROODE; LENDERINK, 2008; COSTA et al., 2011; DEARDORFF, 1980; MOENG, 1984; MOENG; WYNGAARD, 1989; SULLIVAN; MCWILLIAMS; MOENG, 1994; MOENG et al., 2004), propõe-se uma parametrização para o transporte de ECT em função da própria ECT e não do seu gradiente.

O presente trabalho está dividido em capítulos. O capítulo 2 faz uma revisão de mecânica de fluidos, discutindo as propriedades deste particular estado da matéria, suas equações de movimento e as principais variáveis utilizadas para descrever sua dinâmica, sobre tudo em relação a fluidos geofísicos. O capítulo 3 aborda os escoamentos atmosféricos na baixa troposfera, região definida como camada limite planetária, que tem como essência do seu escoamento a turbulência. O capítulo 4 é referente à Energia Cinética Turbulenta, variável comumente utilizada para quantificar a intensidade da turbulência na CLP. O capítulo 5 discute a metodologia da simulação dos grandes turbilhões, técnica bastante difundida no estudo de escoamentos turbulentos de várias escalas, com aplicações relevantes em engenharia e física da atmosfera, por fornecer uma descrição detalhada

dos campos turbulentos. Neste capítulo, além da discussão geral da metodologia LES, o modelo LES de Moeng (1984) é discutido detalhadamente, uma vez que tal modelo é empregado no presente estudo. O capítulo 6 descreve a metodologia empregada na simulação numérica que gerou os dados para a presente análise, apresentando os forçantes de superfície e externos para a realização do experimento numérico. O capítulo 7 exibe os resultados da simulação e a metodologia utilizada para a obtenção da parametrização dos termos de transporte, discutindo os resultados extraídos a partir de dados do modelo LES com outros contidos na literatura. O capítulo 8 traz algumas considerações finais do trabalho, resumizando e rediscutindo os resultados do estudo. Finalmente, o apêndice A apresenta diversas demonstrações para a obtenção de diferentes equações e aproximações consideradas no desenvolvimento deste estudo.

2 MECÂNICA DE FLUIDOS

A mecânica de fluidos tem como objetivo tratar de escoamentos de fluidos. Este estudo é relevante para diversas áreas do conhecimento e aplicações tecnológicas. A compreensão da dinâmica do escoamento de um fluido nos dá informações sobre o comportamento da atmosfera e oceanos, além de ser fundamental na solução de problemas de engenharia como a construção de grandes edifícios, tubulações, aplicações aeroespaciais, dentre várias outras (KUNDU, 1990).

2.1 Definição de fluido

Em geral, podemos descrever as substâncias em três estados básicos da matéria: sólido, líquido e gasoso, fazendo isso baseado no seu estado de agregação (DURST, 2008). Dentro dessa classificação, as substâncias no estado líquido e gasoso compreendem o que chamamos de fluido, tendo o fluido gasoso a capacidade de se expandir e ocupar completamente o espaço que o encerra, ao contrário do fluido na forma líquida, o qual seu volume varia muito pouco, por isso não ocupa, necessariamente, todo o espaço que o encerra, quando este espaço tem volume maior que o volume ocupado pelo fluido, formando assim uma superfície livre separando o fluido líquido do fluido na forma gasosa que preenche o restante do espaço (KUNDU, 1990), como pode ser observado na figura 2.1.

Além das diferenças microscópicas no comportamento desses estados da matéria, macroscopicamente podemos definir a diferença entre um sólido e um fluido a partir da sua capacidade de manter a sua forma. Assim, podemos dizer que um elemento sólido possui elasticidade e, por isso mantém uma forma preferencial, enquanto um fluido não possui tal forma e tem como característica a viscosidade, contudo, existem exceções: materiais que possuem características mistas, possuindo viscoelasticidade (DURST, 2008; KUNDU, 1990). Quando uma força de cisalhamento (força com direção tangente a uma determinada superfície) é aplicada sobre um sólido, suas propriedades elásticas tendem a manter sua forma original. Porém, se esta força for de uma magnitude capaz de superar o regime de comportamento elástico do sólido, este elemento será deformado permanentemente. Já um fluido, responde a uma força de cisalhamento com uma variação na sua velocidade, sendo o gradiente de velocidade normal a força de cisalhamento (DURST, 2008). A figura 2.2 mostra a diferença do comportamento de um elemento sólido e de um fluido encerrado entre duas placas horizontais, quando submetido a ação de uma força de cisalhamento \vec{F} . Essa figura mostra que, um elemento sólido definido pelos pontos

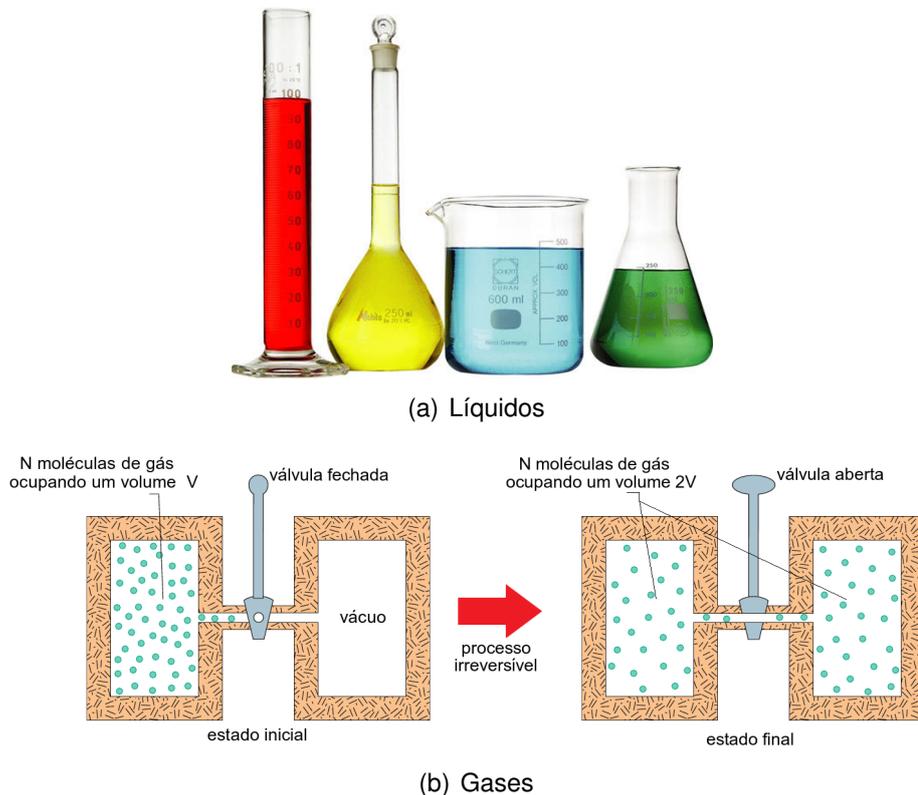


Figura 2.1 – Ocupação do volume de contorno que encerra um líquido (a) e de um gás (b). (a) Fonte: <<http://pe.kalipedia.com/fisica-quimica>>. (b) Adaptado de Halliday, Resnick e Walker (2010).

$ABCD$ assume a forma $ABC'D'$ quando submetido a uma força tangencial \vec{F} . Caso o regime de deformação elástica seja mantido, este sólido retornará a sua forma original quando a força deixar de atuar sobre ele. Isso não sendo verdade, assumirá a sua nova forma permanentemente. Todavia, conforme a figura 2.2(b), o fluido encerrado entre as placas deforma-se continuamente, desde sua forma original $ABCD$, até suas formas $ABC'D'$ e $ABC''D''$, e continuará se deformando enquanto a força tangencial atuar sobre a placa superior.

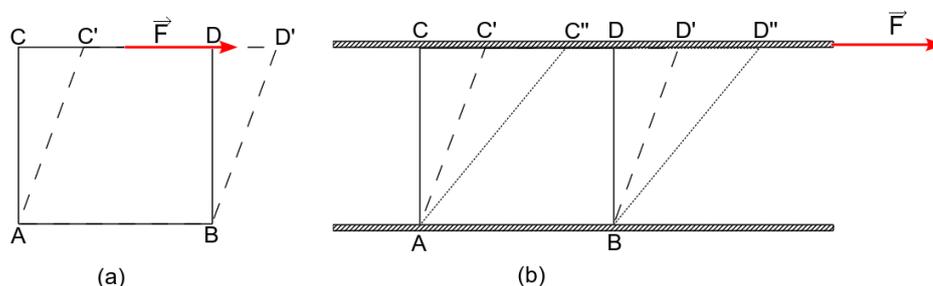


Figura 2.2 – Consequência da ação de uma força tangencial sobre um elemento sólido (a) e um fluido (b). Adaptado de Kundu (1990).

Ainda considerando a figura 2.2(b), a ação da força tangencial sobre a placa horizontal, faz com que a placa aplique sobre a superfície do fluido em contato com a mesma, uma tensão tangencial em todos os pontos onde há tal contato. A partir disso, podemos

definir fluido como um conjunto de partículas que se deforma continuamente sob a ação de uma tensão tangencial (tensão de cisalhamento).

2.2 Hipótese do contínuo e modelo de fluido newtoniano

A matéria, em qualquer um dos seus estados físicos, é composto por um grande número de moléculas, cujo seu arranjo espacial, consequência da energia potencial entre as moléculas, define seu estado físico. Além do mais, é comum a todos os estados físicos o movimento desordenado, as colisões inter-moleculares e as colisões entre as moléculas e os seus contornos, nas quais existe troca de *momentum*. Dessa maneira, é possível tratar um fluido, do ponto de vista estatístico, a partir da teoria cinética proposta pela mecânica estatística. Porém, a média das quantidades relacionadas ao movimento molecular são representadas por variáveis macroscópicas, ou seja, as grandezas macroscópicas tem sua origem em movimentos moleculares. Contudo, podemos ignorar as causas microscópicas, associando as características do escoamento à grandezas macroscópicas. Isto equivale considerar o fluido como um meio contínuo, formado por elementos de fluido. Para que essa hipótese seja válida, um elemento de fluido (partícula ou parcela de fluido) deve ser definida como uma quantidade infinitesimal de fluido, muito maior que a escala molecular (constituído por várias moléculas) e bem menor que a escala macroscópica. Como consequência, as dimensões do escoamento devem ser muito maiores que o livre caminho médio molecular. Desta maneira, do ponto de vista da termodinâmica as interações eletromagnéticas na escala molecular são bem definidas em função das grandezas macroscópicas. Essa aproximação não é válida em ambientes onde o fluido é rarefeito, por exemplo, nos altos níveis atmosféricos. Dessa forma, a hipótese do contínuo pode ser considerada válida em um determinado intervalo de escalas de movimento nas quais as flutuações das variáveis macroscópicas são muito menores que as variações da média dessas características, pois não são influenciadas pelas variações na escala microscópica do fluido (BROWN, 1991). A figura 2.3 mostra a variação da densidade de um elemento de fluido com o aumento do volume deste elemento. Para pequenos volumes a variação é intensa, e, neste intervalo, as interações moleculares interferem no valor médio, ou seja, a hipótese do contínuo não é satisfeita. Tal hipótese é válida no intervalo onde a densidade média passa a ser constante.

Pela hipótese do contínuo, as interações eletromagnéticas entre os elementos de fluido podem ser resolvidas em função de variáveis macroscópicas. Contudo, precisamos estabelecer como esta relação é feita. Para isso, doravante, usaremos o modelo de fluido newtoniano. O modelo de fluido newtoniano é aquele onde a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional ao gradiente de velocidade nas direções perpendiculares a

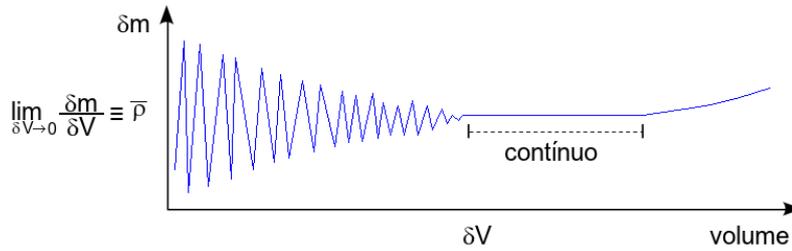


Figura 2.3 – Variação da densidade média $\bar{\rho}$ com o aumento do volume. Adaptado de Brown (1991).

própria tensão.

A tensão de cisalhamento é o resultado da interação eletromagnética entre os constituintes do fluido e suas vizinhanças. Este gradiente também é chamado de cisalhamento do campo de velocidade. Para um fluido newtoniano a tensão de cisalhamento é dada por (LANDAU; LIFSHITZ, 1959; KUNDU, 1990):

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

para todo $i \neq j$, onde μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido, $x_\alpha = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ representa a direção analisada, sendo que x e y compõem o plano horizontal e z define a direção vertical e $u_\alpha = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ são as componentes do vetor velocidade em cada uma das direções anteriormente definidas por x_α . Além das tensões tangenciais existem as tensões normais que agem sobre o elemento de fluido. Assim, estas tensões são bem definidas pelo tensor τ_{ij} , representado pela matriz 3×3 em coordenadas retangulares:

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}.$$

onde os elementos da diagonal principal da matriz representam as componentes normais da tensão. Para um fluido newtoniano cada um dos termos da matriz é definido como (LANDAU; LIFSHITZ, 1959):

$$\tau_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e p é a pressão. Analisando-se a equação (2.2) é fácil perceber que se $i \neq j$ as componentes do tensor recaem na expressão para a tensão de cisalhamento do fluido. Além disto, se utilizarmos a aproximação extrema de fluido não viscoso ($\mu = 0$) as tensões tangenciais são nulas e as tensões normais correspondem a pressão sobre o elemento de fluido. Neste caso não há deformação do elemento de fluido e a sua dinâmica corresponde a de um corpo rígido que não possui elasticidade, ou seja,

não se deforma.

Quando abordamos escoamentos sobre a superfície do planeta, como atmosfera e oceanos, denominamos estes escoamentos como geofísicos. A partir daqui, usaremos o modelo de fluido newtoniano para estudar o comportamento dos fluidos geofísicos, mais especificamente os escoamentos atmosféricos.

2.3 Definições gerais - grandezas macroscópicas caracterizando o escoamento de um fluido

2.3.1 Campo de velocidade

Seja \vec{U} o vetor velocidade de uma partícula de fluido. Considerando-se como referencial um conjunto de eixos cartesianos este vetor pode ser escrito como

$$\vec{U} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} = u_i \quad (2.3)$$

onde $\vec{U} = \vec{U}(x, y, z, t) = u_i(x_i, t)$ e

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (2.4)$$

O campo de velocidade do escoamento é formado pelo conjunto de vetores velocidade de cada ponto do escoamento. Se o campo de velocidade é invariante no tempo em cada ponto do escoamento dizemos que este escoamento é estacionário e então

$$u_i = u_i(x_i)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0$$

2.3.2 Campo de temperatura

Seja T a temperatura de cada ponto do escoamento. O campo de temperatura é descrito por uma função escalar que descreve a temperatura no tempo e no espaço, assim:

$$T = T(x, y, z, t) = T(x_i, t) \quad (2.5)$$

Quando uma parcela de fluido se desloca verticalmente na atmosfera sua temperatura varia devido à variação de pressão e densidade do ar. Porém, se considerarmos um processo adiabático podemos definir uma grandeza que se mantém constante neste processo. Assim definimos a temperatura potencial (θ). Considere uma parcela de fluido com temperatura absoluta T a uma pressão p e densidade ρ . A temperatura potencial desta parcela é a temperatura que esta parcela teria se fosse levada de um nível com pressão p até um nível de pressão p_0 , geralmente assumido como $p_0 = 1000hPa$, através de um processo adiabático (expansão ou compressão). Matematicamente temos¹:

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (2.6)$$

onde R é a constante do gás e c_p o calor específico a pressão constante. Se o gás for o ar seco $R \equiv R_d = 287J(kgK)^{-1}$ e $c_p = 1004J(kgK)^{-1}$. A temperatura potencial é então uma variável de estado do sistema termodinâmico, uma vez que é definida em função de duas variáveis de estado: pressão e temperatura. Além disso, em um processo adiabático a temperatura potencial é constante, ou seja, uma grandeza conservativa nesse tipo de processo. Assim, a temperatura potencial torna-se uma variável de grande interesse em fenômenos atmosféricos, uma vez que tais processos podem ser muito bem aproximados por processos adiabáticos (ROGERS; YAU, 1989).

A componente vertical do gradiente de temperatura potencial é utilizada para avaliar a estabilidade estática² na atmosfera. A figura 2.4 mostra três diferentes perfis verticais de temperatura potencial caracterizando as condições de estabilidade estática do escoamento. Em geral, podemos ter três casos de estabilidade:

- Estável: quando uma parcela de ar é retirada de sua posição de equilíbrio, levada até uma posição arbitrária e, quando abandonada nesta posição, inicia um movimento oscilatório em torno da posição de equilíbrio, devido a ação de uma força restauradora, até retornar a sua posição original. O análogo mecânico desta condição de estabilidade é um corpo sobre uma superfície côncava, conforme a figura 2.5(a). Em termos da temperatura potencial, identifica-se uma camada estável quando:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0 \quad (2.7)$$

- Neutra: quando uma parcela de ar é retirada de sua posição de equilíbrio, levada até uma posição arbitrária e permanece nesta posição. O análogo mecânico desta condição de estabilidade é um corpo sobre uma superfície plana na horizontal, con-

¹A demonstração da equação 2.6 é apresentada no apêndice A, página 101.

²Estabilidade estática é uma definição geral em mecânica e refere-se a capacidade de um determinado corpo permanecer, ou não, em sua posição de equilíbrio após ser retirado desta posição. Na atmosfera não consideraremos um corpo, mas uma parcela de ar.

forme a figura 2.5(b). Em termos da temperatura potencial, identifica-se uma camada neutra quando:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

- Instável: quando uma parcela de ar é retirada de sua posição de equilíbrio, levada até uma posição arbitrária e não retorna a sua posição inicial. Caso a parcela seja levada a um nível superior tende a continuar subindo e se levada a um nível inferior tende a continuar descendo. O análogo mecânico desta condição de estabilidade é um corpo sobre uma superfície convexa, conforme a figura 2.5(c). Em termos da temperatura potencial, identifica-se uma camada instável quando:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0 \quad (2.9)$$

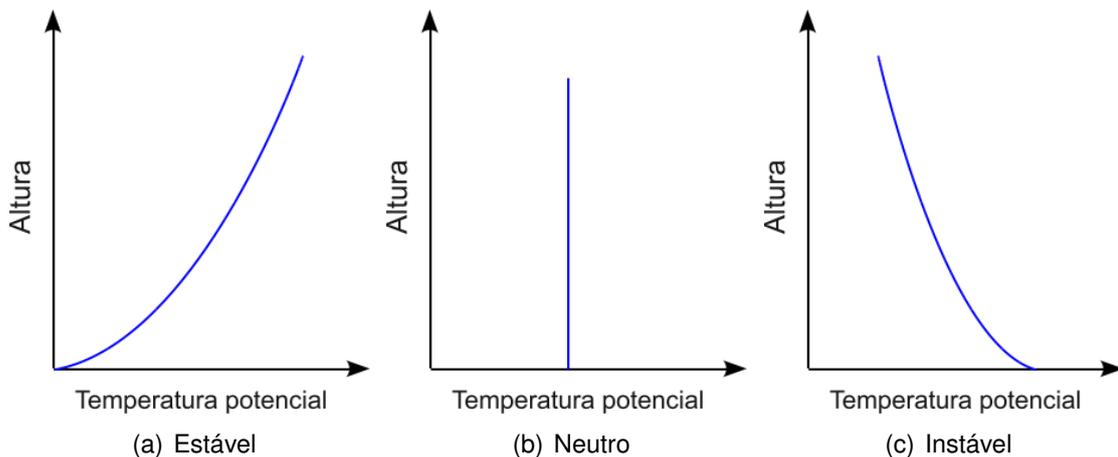


Figura 2.4 – Perfis verticais de temperatura potencial caracterizando as condições de estabilidade de uma camada do escoamento

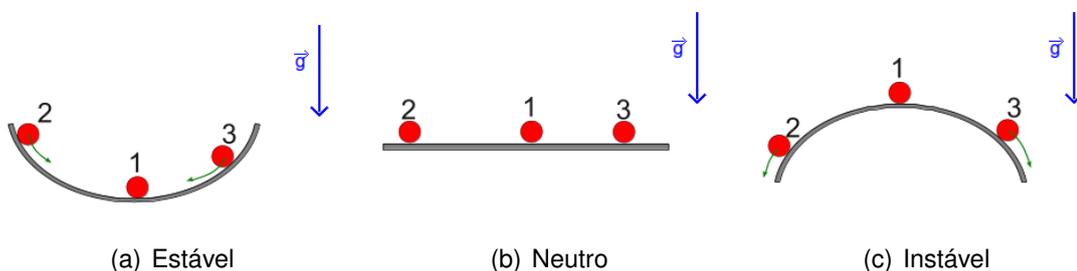


Figura 2.5 – Análogo mecânico das condições de estabilidade estática

Essa classificação refere-se a uma classificação global da camada do fluido. Contudo, pode-se avaliar a estabilidade local da camada. A estabilidade local é avaliada em um único ponto. Assim, uma camada pode ser instável porém, localmente neutra, por exemplo, conforme mostra a figura 2.6. Essa figura apresenta uma camada instável (globalmente), porém localmente estável na faixa de alturas entre z_a e z_b .

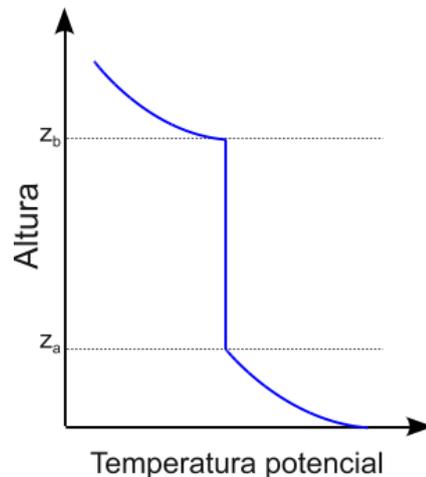


Figura 2.6 – Perfil de temperatura potencial caracterizando uma camada instável (globalmente), porém neutra entre z_a e z_b (localmente).

2.3.3 Campo de umidade

A presença de água na atmosfera é um fator determinante em seus processos termodinâmicos. Isto é mais evidente quando ocorre a mudança de fase, pois quando este fenômeno ocorre, uma grande quantidade de energia na forma de calor latente é liberado ou absorvido do meio. Este fato é determinante para o favorecimento ou inibição de vários processos atmosféricos. Existem várias formas de se quantificar o teor de umidade do ar:

– Umidade absoluta ρ_v : é a densidade de vapor d'água de uma parcela de ar de volume V .

$$\rho_v = \frac{m_v}{V} \quad (2.10)$$

onde m_v é a massa do vapor d'água contido no volume V .

– Umidade específica q : é a razão entre a massa de ar úmido m_v e a massa total da parcela de ar $m = m_d + m_v$ contida em um volume V , onde m_d é a massa de ar seco da parcela.

$$\begin{aligned} q &= \frac{m_v}{m} \\ q &= \frac{m_v}{m_d + m_v} \\ q &= \frac{m_v V}{m_d V + m_v V} \\ q &= \frac{\rho_v}{\rho_d + \rho_v} \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde ρ_d é a densidade do ar seco.

– Razão de mistura w : é a razão entre a massa de vapor d'água e ar seco contidos

no volume V da parcela

$$\begin{aligned} w &= \frac{m_v}{m_d} \\ w &= \frac{m_v V}{m_d V} \\ w &= \frac{\rho_v}{\rho_d} \end{aligned} \quad (2.12)$$

– Umidade relativa f : é a razão entre a razão de mistura w e a razão de mistura para o ar saturado w_s . Ar saturado é aquele que não é mais capaz de acumular vapor d'água. Em geral, após atingir a saturação, a umidade excedente condensa. A quantidade de vapor d'água que o ar consegue armazenar é função da temperatura.

$$f = \frac{w}{w_s} \quad (2.13)$$

Independentemente da grandeza escolhida para quantificar a umidade do ar, matematicamente define-se um campo de umidade qualquer ψ como

$$\psi = \psi(x, y, z, t) = \psi(x_i, t) \quad (2.14)$$

2.3.4 Métodos de descrição de um escoamento

Um escoamento é comumente descrito em termos eulerianos e lagrangianos. Para diferenciar os dois métodos vamos adotar um referencial no qual a superfície da Terra está em repouso.

Um escoamento descrito sob o ponto de vista euleriano é aquele onde um observador em repouso em relação ao referencial adotado anteriormente avalia o comportamento do fluido analisando um único ponto do escoamento. Desta forma uma variável qualquer ξ do fluido é matematicamente definida como

$$\xi \equiv \xi(x_i, t) \quad (2.15)$$

onde as coordenadas espaciais x_i são independentes do tempo, ou seja, um ponto fixo em relação ao referencial do observador. Em termos experimentais a descrição euleriana é equivalente as medidas realizadas em uma torre.

A descrição lagrangiana é aquela onde um observador em repouso avalia o comportamento do escoamento seguindo um elemento de fluido no tempo enquanto ele se desloca pelo espaço. Assim, uma variável qualquer do fluido sob o ponto de vista lagran-

giano é definida matematicamente como

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \xi(x_i) \\ x_i &= x_i(t)\end{aligned}$$

Nesta descrição o ponto de observação varia no tempo e no espaço em relação ao referencial do observador. Experimentalmente esta descrição corresponde, por exemplo, a um balão sonda que é carregado pelo vento.

É possível relacionar variações lagrangianas e eulerianas de uma determinada variável ξ para um determinado escoamento. Uma maneira de fazer isto é diferenciando-se ξ .

$$\begin{aligned}d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \xi}{\partial t} dt \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{d\xi}{dt} &= u_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{d\xi}{dt} - u_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{d\xi}{dt} - \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \xi\end{aligned}\tag{2.16}$$

onde a derivada parcial em relação ao tempo de ξ corresponde a variação local de ξ , ou seja, a variação em um único ponto – euleriana. Já a variação temporal total corresponde a variação lagrangiana de ξ . O termo $-\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \xi$ é o termo que descreve o transporte de ξ devido ao campo de velocidade do vento, chamado de transporte advectivo ou de advecção. Assim, definimos advecção de uma variável atmosférica ξ qualquer, $adv(\xi)$, como

$$adv(\xi) = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \xi.\tag{2.17}$$

Uma outra forma de relacionar estes dois pontos de vista é o Teorema do Transporte de Reynolds. Seja B uma quantidade qualquer relativa a um fluido e b seu valor por unidade de massa, tal que

$$B = mb.\tag{2.18}$$

Este fluido escoar através de um volume de controle V_c , encerrado por uma superfície SV_c , e tem uma quantidade de massa contida no volume do sistema V_{sis} , que se move com velocidade u_i em relação ao referencial, no qual V_c está fixo. O Teorema do Transporte de Reynolds relaciona a variação temporal de B no volume de controle e no sistema através

da equação³

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{\partial B_{V_c}}{\partial t} + \oint_{SV_c} \rho b u_i dA_i. \quad (2.19)$$

2.4 Camada limite

A expressão camada limite, é definida de maneira geral em mecânica de fluidos como a região do escoamento onde existe um intenso gradiente de velocidade, forçando as componentes deste campo convergirem para zero quando se aproximam de uma superfície rígida ou interface entre dois meios (LANDAU; LIFSHITZ, 1959). A figura 2.7 apresenta, de forma simplificada, o processo de formação de camada limite em um escoamento. A linha pontilhada, $h(x)$, mostra a espessura da camada limite (região sombreada sob a linha) e os vetores \vec{u}_0 e $\vec{u}(z)$, representam o campo de velocidade. Os vetores \vec{u}_0 tem magnitude constante e representam o escoamento sem formação de camada limite, enquanto os vetores $\vec{u}(z)$ possuem um gradiente normal a direção do escoamento. Acima da camada limite, o escoamento permanece idêntico ao inicial, pois não há interação com a superfície. Contudo, o escoamento em uma camada limite é, em geral, muito mais complexo. Na figura 2.7 o escoamento apresentado é laminar. Em situações mais realísticas uma camada limite é caracterizada por um escoamento turbulento. A diferença entre esses dois regimes de escoamento de um fluido será abordada na próxima seção. Nas proximidades da superfície do planeta Terra há a formação de uma camada limite que será discutida em detalhe no capítulo 3.

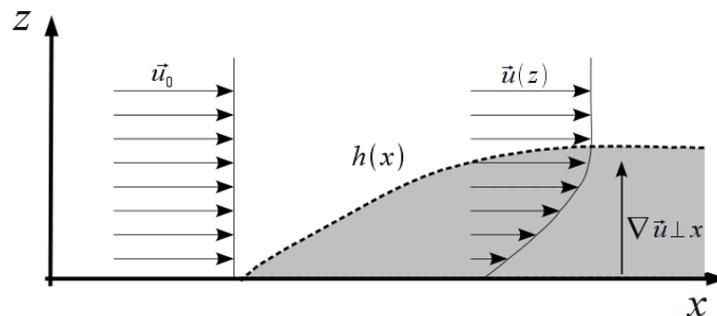


Figura 2.7 – Representação idealizada do escoamento próximo a uma superfície rígida (camada limite).

³A demonstração do Teorema do Transporte de Reynolds é apresentada no apêndice A, página 104.

2.5 Regimes de escoamento

Conforme as propriedades do escoamento ele pode ser classificado em dois regimes: regime de escoamento laminar ou turbulento. Quando um escoamento é laminar o fluido escoar como finas lâminas (camadas) que deslizam uma sobre as outras. Neste caso, não há trocas de propriedades macroscópicas entre estas camadas do escoamento. Quando a velocidade do escoamento atinge um valor crítico este escoamento passa por um processo de transição onde as simetrias do escoamento laminar são quebradas e o regime de escoamento converge para um regime de turbulência (exceto para uma fina camada do fluido próxima a superfície que continua a ser laminar – camada superficial laminar).

A turbulência consiste em um movimento irregular e quase aleatório do fluido. Devido a este comportamento que envolve várias escalas do escoamento, existe uma intensa troca de quantidades macroscópicas entre as diferentes regiões do escoamento. Quanto mais complexo este movimento se torna, ou seja, mais turbulento, mais simetrias vão sendo quebradas. Entretanto, para um número de Reynolds muito alto existe uma tendência a recuperar as simetrias do escoamento em um senso estatístico para regiões afastadas dos contornos do escoamento (FRISCH, 1995). Nesta condição se define a turbulência completamente desenvolvida, onde se espera que todos os possíveis graus de liberdade do sistema sejam alcançados e supõe-se que exista um domínio onde um equilíbrio estatístico universal seja atingido.

Turbulência completamente desenvolvida (TCD) é caracterizada por um comportamento espacial e temporal desordenado nas características dinâmicas e termodinâmicas que descrevem o escoamento. Por isso, a utilização de teorias estatísticas é fundamental na compreensão deste fenômeno (WELTER, 2006). A figura 2.8 mostra de forma simplificada essa variação no regime de escoamento. O valor crítico de velocidade para que ocorra a mudança de regime de escoamento é definida pelo Número de Reynolds.

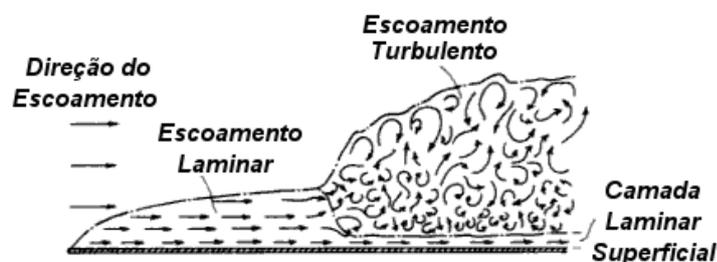


Figura 2.8 – Variação no regime de escoamento. Adaptado de Oke (1987).

O Número de Reynolds Re é a razão entre os forçantes inerciais e viscosos do escoamento. Sua definição é oriunda da segunda Lei de Newton. O seu valor crítico varia no intervalo $2300 \leq Re \leq 3000$. Para os escoamentos na baixa atmosfera, Re pode ser da ordem de 10^7 . O Número de Reynolds é dado por

$$Re = \frac{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}{\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} \quad (2.20)$$

onde ν é a viscosidade cinemática do fluido. Escrevendo-se esta definição em função da ordem de grandeza de cada termo temos que

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.21)$$

onde U é uma velocidade característica do escoamento e L uma escala de comprimento característica.

À medida que um escoamento converge para um regime turbulento, ocorre um grande aumento no intervalo de escalas de movimento do fluido. Após alcançado um desenvolvimento pleno, as flutuações das variáveis que descrevem esse escoamento compreendem um amplo e denso intervalo de escalas, que mesmo as menores escalas observáveis, apresentam movimentos característicos da turbulência.

2.5.1 Escoamentos turbulentos

Grande parte dos escoamentos observados, tanto em aplicações de engenharia (como tubulações e tuneis de vento), tanto como escoamentos naturais (escoamentos atmosféricos, rios, correntes oceânicas) são escoamentos turbulentos (KUNDU, 1990).

Escoamentos turbulentos desenvolvem-se a partir de escoamentos laminares a medida que o número de Reynolds aumenta, ou seja, a energia associada a turbulência é obtida a partir da energia cinética do escoamento laminar, pois pequenas perturbações do escoamento não são amortecidas e acabam aumentando, retirando assim energia cinética da condição de escoamento anterior.

A turbulência é um fenômeno físico complexo e sua investigação teórica pode ser embasada em princípios físicos e leis, que são expressas nas equações da mecânica clássica e termodinâmica (MONIN; YAGLOM, 2007). Neste complexo fenômeno, as variáveis que descrevem o escoamento possuem características estocásticas, que podem ser percebidas em todas as escalas do escoamento. Tal escoamento é composto por turbilhões de diferentes escalas espaciais e temporais. Desta forma, o fenômeno da turbulência pode ser amplamente visualizado, desde o escoamento de um pequeno córrego ou tubulação até a emissão de gases devido a uma erupção vulcânica. O gráfico da figura 2.9 apresenta valores da magnitude da velocidade do vento medidos em um escoamento turbulento na baixa atmosfera.

Os dados apresentados na figura 2.9 foram obtidos no sítio experimental de Can-

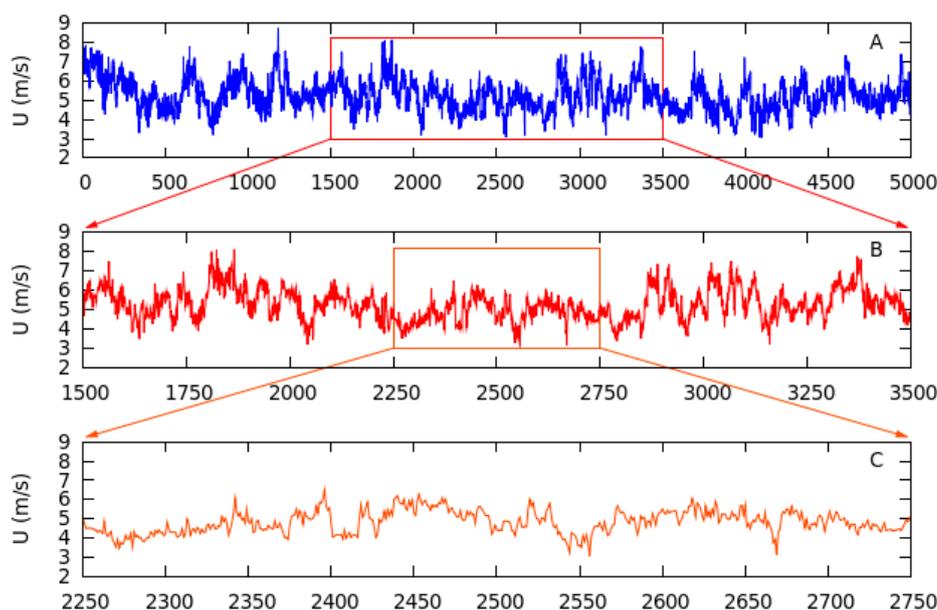


Figura 2.9 – Magnitude da velocidade do vento em um escoamento turbulento. O eixo horizontal representa o número de pontos da amostra.

diota, RS, com uma taxa de amostragem de $10Hz$. O painel B da figura 2.9 foi obtido a partir de um intervalo de pontos do painel A. O mesmo vale para o painel C em função do B. Nessa figura observa-se que a complexidade do escoamento turbulento se mantém mesmo quando diminuimos o intervalo de aquisição dos dados.

No desenvolvimento do conhecimento em turbulência, estudos analíticos e de primeiros princípios, mesmo que possíveis, são bastante complicados, devido a complexidade que envolve o tratamento matemático do fenômeno. Assim, o estudo da turbulência depende, segundo Kundu (1990), de intuição física e análise de escalas. Além do mais, pela dificuldade imposta pelo problema, soluções determinísticas são impraticáveis e questionáveis quanto a sua utilização prática, uma vez que, para armazenar os dados de um escoamento turbulento integralmente necessitaríamos de muito espaço virtual. Assim, uma abordagem do ponto de vista estatístico é bastante apropriada ao fenômeno (TENNEKES; LUMLEY, 1972).

Mesmo sendo a turbulência um fenômeno cotidiano, a sua definição não é simples. Além disso, existe uma grande tendência a confundir um escoamento turbulento com um escoamento aleatório, o que não é correto, pois a turbulência possui estruturas coerentes em seu comportamento quase-aleatório. Segundo Kundu (1990 apud LESIEUR, 1987), a turbulência é um problema tão complexo de ser resolvido que é difícil chegar a um consenso sobre qual é realmente o problema.

Sobre algumas características do escoamento turbulento, Lumley e Panofsky (1964), Tennekes e Lumley (1972), Kundu (1990), Lesieur (2008) apontam algumas considerações:

- Turbulência é um fenômeno contínuo. Na maioria dos escoamentos a escala dinâmica de menor importância é muito maior que o livre caminho médio das moléculas e, conseqüentemente, muito maior que as próprias moléculas.
- A turbulência é caracterizada por uma grande flutuação na vorticidade do escoamento. As estruturas que identificam o escoamento turbulento são chamados turbilhões ou vórtices. A visualização de um escoamento turbulento mostra várias estruturas se unindo, se dividindo, se esticando e, acima de tudo girando. Uma das características da turbulência é possuir um enorme intervalo de tamanhos de turbilhões. Os grandes turbilhões possuem dimensões da ordem da dimensão do escoamento; em uma camada limite, são da ordem da espessura da camada; e possuem a maior parte da energia associada ao escoamento turbulento. A energia é transferida dos grandes turbilhões para os menores, até que seja dissipada por esses turbilhões devido a viscosidade, sendo os menores turbilhões da ordem de milímetros.
- Turbulência é não linear. A transferência de energia que ocorre de um turbilhão para o outro acontece de forma não linear.
- Turbulência é estocástica. De fato, não importa com qual cuidado as condições de um experimento são reproduzidas. O campo de velocidade não poderá ser predito em detalhes. A combinação entre não linearidade e as características estocásticas do escoamento turbulento tornam o tratamento matemático da turbulência muito complexo, pois aproximações determinísticas não são aplicáveis a este fenômeno.
- A turbulência ocorre para grandes valores do Número de Reynolds. A turbulência se origina a partir de instabilidades no escoamento laminar se o número de Reynolds tende para grandes valores. Tais instabilidades são devidas as interações entre os termos de viscosidade e o termo não-linear, expressos na equação de Navier-Stokes.
- Turbulência é observada ser rotacional e dissipativa, isto é, a energia mecânica é transformada em energia na forma de calor; há movimentos aleatórios tridimensionais que são aproximadamente irrotacionais e não dissipativos, tais como um corpo em um fluido. Neste particular caso a sua superfície é perturbada por um escoamento turbulento, mas os turbilhões não dissipam energia mecânica em energia interna do sistema através de uma cascata que vai dos vórtices maiores para os menores (espectro de energia cinética turbulenta).
- Turbulência é tridimensional. A cascata de energia para turbilhões menores pode ser pensada como um reposicionamento de “vórtices esticados” descritos pelos ter-

mos não lineares das equações de movimento que impõe um caráter tridimensional e não linear ao movimento.

- Turbulência é difusiva. Uma partícula de fluido marcada irá se deslocar em relação a sua posição inicial de maneira análoga a uma molécula em um gás, porém, quantitativamente, de maneira muito mais intensa. Isto implica em um transporte de quantidades como matéria, *momentum*, energia na forma de calor, etc..
- Em turbulência, as escalas de tempo e comprimento do movimento são grandes e geralmente da mesma ordem de tempo e comprimento, das escalas espaciais e temporais, que limitam o processo de difusão.

Devido a estas características, muitos escoamentos aleatórios, tais como ondas de gravidade, não são escoamentos turbulentos, pois não são dissipativos, rotacionais e não lineares (KUNDU, 1990).

2.6 Equações básicas no estudo da mecânica de fluidos

Acredita-se que a equação de Navier-Stokes, que nada mais é que a segunda lei de Newton aplicada a um elemento de fluido, associada as equações da termodinâmica e da continuidade seja capaz de descrever todo o comportamento do escoamento. Isto implica que esta equação também contenha a informação sobre todas as quebras de simetrias que ocorrem na transição e formação de um escoamento turbulento.

2.6.1 Equação da continuidade - conservação da massa em um escoamento

A equação da continuidade relaciona a variação local da densidade do fluido em função da divergência do campo de velocidade. Esta equação e dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.22)$$

onde ρ é a densidade do fluido. No apêndice A, página 108 é apresentada uma derivação desta equação.

É possível fazer uma análise interessante desta equação quanto a compressibilidade do fluido. Supondo um fluido não compressível, sua densidade é constante, temos que a sua variação local é nula. Portanto, assumir a hipótese de fluido incompressível é equivalente a hipótese de fluido não divergente, ou seja,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.23)$$

Esta simplificação é bastante válida em escoamentos na baixa atmosfera onde as flutuações de densidade são de uma ordem bem menor que a própria densidade do fluido.

Assim, usando o modelo de fluido newtoniano e incompressível podemos explicitar as tensões atuantes sobre um elemento de fluido, dadas pela equação 2.2 conforme a equação a seguir:

$$\tau_{ij} = -\delta_{ij}p + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.24)$$

2.6.2 Equação de estado dos gases ideais

O modelo da teoria cinética para um gás ideal é formulado com base nas seguintes condições:

- O gás é constituído por um número gigantesco de moléculas em movimento aleatório que possuem dimensões insignificantes perante ao meio em que se movem.
- A interação entre as moléculas se dá apenas nas colisões (perfeitamente elásticas e com tempo de duração desprezível) e seu deslocamento entre uma colisão e outra é o de uma partícula livre.
- Assume-se que o movimento das moléculas se dá em um referencial inercial.

As condições deste modelo são satisfeitas, se não em sua totalidade, em boa parte pelos escoamentos na atmosfera. Portanto é possível utilizá-lo para ajudar a descrever estes escoamentos. Para o gás ideal a equação de estado termodinâmico é dada por

$$pV = n\mathfrak{R}T \quad (2.25)$$

onde V é o volume, n o número de mols, \mathfrak{R} é a constante dos gases ideais e T é a temperatura absoluta. O número de mols contidos em um determinado volume V de alguma substância pode ser obtido através da razão entre a massa contida em V e a massa molar M da substância:

$$\begin{aligned} pV &= \frac{m}{M} \mathfrak{R}T \\ p &= \frac{m}{V} \frac{\mathfrak{R}}{M} T \\ p &= \rho \frac{\mathfrak{R}}{M} T \end{aligned} \quad (2.26)$$

Como uma boa aproximação, podemos considerar a atmosfera como um gás ideal. Assim, definimos a constante dos gases para o ar atmosférico, R como

$$R = \frac{\mathfrak{R}}{M}. \quad (2.27)$$

A constante dos gases para a atmosfera depende da concentração dos diferentes gases que compõem tal fluido. Para o ar seco este valor é bem definido pois a atmosfera possui concentração fixa de seus principais componentes: nitrogênio, oxigênio, gás carbônico e argônio. Porém, quando consideramos o ar úmido devemos levar em conta a quantidade de vapor d'água na atmosfera o que implica numa constante termodinâmica que depende dos constituintes da mistura, o que não é interessante do ponto de vista matemático. A partir desta necessidade define-se a temperatura virtual T_v . A temperatura virtual é a temperatura que uma parcela de ar, mantida a mesma densidade e pressão teria se o ar fosse seco. Matematicamente tem-se⁴:

$$T_v = T (1 + 0,61w) \quad (2.28)$$

onde w é a razão de mistura. Consequentemente,

$$\theta_v = \theta (1 + 0,61w). \quad (2.29)$$

Então, podemos reescrever a equação de estado do gás ideal para uma atmosfera úmida utilizando a constante do ar seco

$$p = \rho R_d T_v \quad (2.30)$$

2.6.3 Primeira Lei da Termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica é uma consequência direta da aplicação do princípio da conservação da energia em um sistema termodinâmico. Seja E_{in} a energia interna do sistema. Se o sistema for perturbado infinitesimalmente uma variação da energia interna dE_{in} é percebida. Isto é decorrência da quantidade de energia na forma de calor dQ trocada com as vizinhanças e pela quantidade de energia trocada na forma de trabalho dW devido a expansão ou contração do sistema contra as vizinhanças. Logo, por conservação de energia, a variação da energia interna é dada por,

$$dE_{in} = \bar{d}Q + \bar{d}W \quad (2.31)$$

⁴A demonstração das equações 2.28 e 2.29 são apresentadas na página 109 do apêndice A

onde a expressão (2.31) é a representação matemática da primeira lei da termodinâmica.

2.6.4 Segunda Lei de Newton aplicada a fluidos – equação de Navier-Stokes

A segunda Lei de Newton aplicada a fluidos é dada por⁵:

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_I + \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{II} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{III} + \underbrace{g_i}_{IV} - \underbrace{2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k}_V + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_{VI} \quad (2.32)$$

esta equação também é chamada de equação de Navier-Stokes. Nela estão contidas todas as informações sobre um determinado escoamento e cada termo tem uma interpretação física. Ela relaciona a aceleração (\vec{a}) em uma partícula de fluido com as suas causas (forças (\vec{F})) usando como constante de proporcionalidade o inverso da massa (m).

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F} \quad (2.33)$$

- Termo I – Variação local de velocidade: Corresponde a variação Euleriana de velocidade, ou seja, a variação temporal da velocidade em um único ponto do campo de velocidade.
- Termo II – Transporte advectivo: Corresponde ao transporte advectivo de velocidade. A soma do termo I com o termo II equivale a variação temporal total do campo de velocidade ou variação Lagrangiana deste campo.
- Termo III – Gradiente de pressão: Corresponde a aceleração causada em um elemento de fluido devido ao gradiente de pressão. O sinal negativo indica que a aceleração causada é sempre contrária ao gradiente de pressão ou seja, a força devido a este termo tem sentido que aponta da região de alta para baixa pressão.
- Termo IV – Gravidade efetiva: É a resultante da aceleração gravitacional e da aceleração centrífuga imposta por um referencial não inercial que apresenta movimento de rotação.
- Termo V – Coriolis: Este termo representa a aceleração imposta pela força de Coriolis que surge devido a rotação da Terra.
- Termo VI – Dissipação: Este termo corresponde a aceleração no sentido contrário do escoamento devido a viscosidade.

⁵As considerações realizadas e o desenvolvimento matemático para obter a equação são descritos no apêndice A, página 113.

2.6.5 Considerações sobre as equações básicas

Acredita-se que a equação de Navier-Stokes juntamente com as demais equações possa descrever completamente o escoamento mediante condições iniciais e contorno apropriadas. Porém, a solução desta equação é de grande complexidade matemática devido a natureza desta equação. Welter (2006 apud STANIŠIĆ, 1988) indica os seguintes fatores complicadores para a realização da solução da equação de Navier-Stokes:

- não linearidade;
- acoplamento;
- não ser compreendida pelo conjunto de equações com simetria hiperbólica, parabólica e elíptica;
- a geometria e as condições de fronteira dinâmicas para quais o sistema é sujeito.

Além da dificuldade matemática que envolve a solução da equação que descreve a segunda lei de Newton aplicada na dinâmica de fluidos, há o problema físico de não se conhecer as condições iniciais e os fatores que controlam o movimento. Mesmo que as complexidades matemáticas e físicas fossem suplantadas e, fosse possível conhecer a velocidade do escoamento em cada ponto da região de domínio, para cada instante de tempo, ainda recairíamos em um outro obstáculo: como aplicá-lo. A quantidade de informação seria absurdamente gigantesca e não teríamos como lidar com essa quantidade de informação e armazená-la seria extremamente custoso computacionalmente. Isto porque o número de graus de liberdade para um escoamento turbulento é proporcional a $Re^{9/4}$ (LANDAU; LIFSHITZ, 1959), ou seja, o número de graus de liberdade cresce rapidamente quando o escoamento se torna turbulento. Desta forma, a ferramenta que torna viável o estudo deste fenômeno complexo é o tratamento estatístico das variáveis.

Anteriormente foi discutido o fluido como um meio contínuo. Contudo, as interações moleculares podem controlar a estabilidade do fluido e pequenas flutuações na viscosidade originadas a partir da colisão entre as moléculas, pode desencadear o processo de quebra de simetrias que leva ao regime de escoamento turbulento. Uma investigação mais rigorosa sobre os processos de transferência de *momentum* na escala molecular deveria ser tratada utilizando-se o formalismo da teoria cinética dos gases. Seguindo este método, perderíamos de vista o modelo de fluido como meio contínuo e passaríamos a tratar o escoamento como um problema de muitos corpos. Neste contexto, não poderíamos utilizar o emprego da mecânica estatística clássica pois um escoamento turbulento caracteriza um sistema longe do equilíbrio termodinâmico. Esta é uma outra razão para se evitar considerações em primeiros princípios e considerar métodos estatísticos no estudo da turbulência (WELTER, 2006).

2.6.6 Aproximação de Boussinesq

Quando utilizamos o modelo de fluido incompressível assumimos que as flutuações de densidade são muito menores que a própria densidade, e devido a isso temos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \approx 0$$

Contudo, este modelo impossibilita a formação de convecção, ou seja, inibe a flutuabilidade das parcelas de ar, além da propagação de ondas sonoras. Quando aplicamos a mecânica de fluidos a escoamentos geofísicos é muito importante a consideração da flutuabilidade do elemento de fluido para uma boa descrição teórica deste escoamento. Uma maneira de incluir a flutuabilidade, mesmo assumindo a condição de fluido incompressível, nas equações de movimento é a aproximação de Boussinesq.

A aproximação de Boussinesq assume que as flutuações de densidade são muito pequenas e desprezíveis, menos quando multiplicadas pelo termo da aceleração gravitacional na equação de movimento. Além disso, segundo a aproximação de Boussinesq, as flutuações de densidade são causadas apenas pelas flutuações de temperatura, desconsiderando assim as flutuações de pressão em função da sua pequena magnitude. Tal aproximação é dada pela equação 2.34, conforme segue⁶

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \left(1 - \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{0v}}\right) g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2.34)$$

onde θ_{0v} é um valor de referência para a temperatura potencial virtual e θ_v^\dagger uma flutuação em relação a este valor de referencial, tal que $\theta_v = \theta_{0v} + \theta_v^\dagger$, e ρ_0 é um valor de referência para a densidade, definido analogamente à temperatura. Este valor de referência é, de certa forma, arbitrário, podendo-se escolher qualquer valor consistente com a variável (KUNDU, 1990). Em estudos da atmosfera, assume-se que o valor de referência é função apenas da altura, enquanto as flutuações são funções das coordenadas espaciais (todas as direções) e do tempo. Em estudos de camada limite planetária, o valor de referência é geralmente tomado como um valor médio da variável em questão.

2.6.7 Modelo da atmosfera padrão

A atmosfera padrão é uma representação idealizada da atmosfera em latitudes médias com condições anuais médias. As variações de pressão com altura na atmos-

⁶A demonstração da obtenção da aproximação de Boussinesq é apresentada no apêndice A, página 122

fera padrão são típicas e, em muitos casos, utilizadas como aproximação inicial. Uma representação do perfil vertical da atmosfera padrão é apresentado na figura 2.10. É interessante observar que a maior parte da massa da atmosfera está até 32km de altitude, portanto são os movimentos atmosféricos até este nível que tem impacto direto sobre o Clima e o Tempo na Terra e influenciam diretamente a baixa atmosfera.

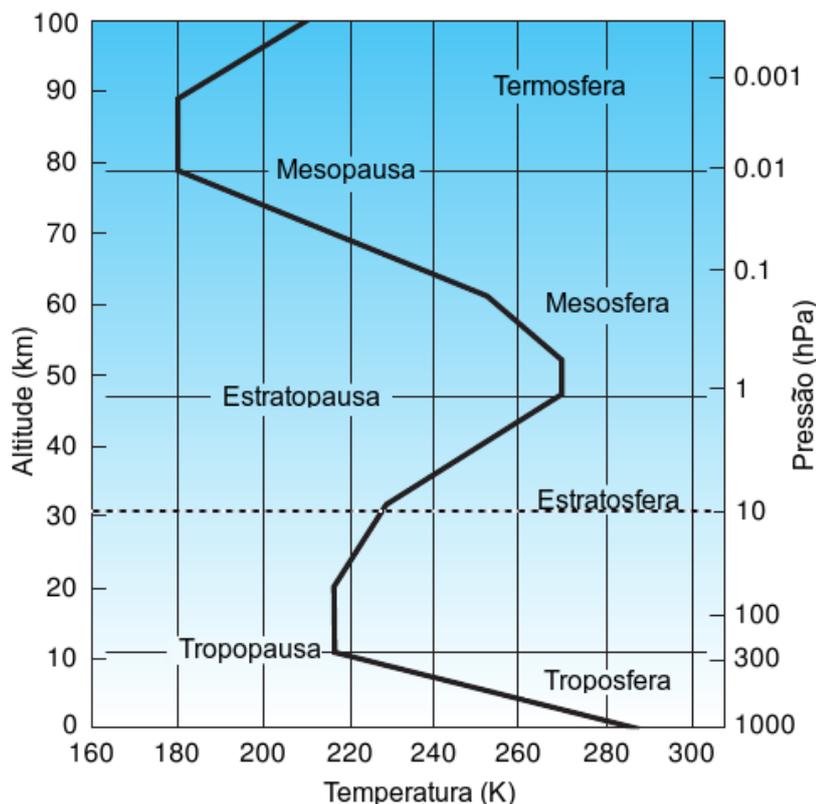


Figura 2.10 – Representação da atmosfera padrão – uma idealização da atmosfera. A linha pontilhada (em aproximadamente 32km) indica a altura que compreende aproximadamente 99% da massa da atmosfera. Adaptado de Wallace e Hobbs (2006).

Além do mais, é possível verificar a partir da figura 2.10 que a hipótese do contínuo se aplica a baixa atmosfera (até aproximadamente 30km , compreendendo a troposfera e a baixa estratosfera), pois a condição de ar não rarefeito é bem contemplada nesta região. Em níveis mais altos da atmosfera, o ar se torna rarefeito e a hipótese do contínuo não é mais válida para descrever o comportamento do fluido. Com isso, o livre caminho médio das moléculas na atmosfera padrão, para a baixa atmosfera em condições normais de temperatura e pressão é da ordem de 10^{-6}m (BROWN, 1991), que é muito menor que a ordem de grandeza dos escoamentos atmosféricos, mesmo os de pequena escala como será apresentado na figura 2.11 da seção 2.7. Já para as regiões mais altas, o livre caminho médio das moléculas pode chegar a ordem de metros. Assim, uma teoria cinética específica para gases rarefeitos se faz necessária (KUNDU, 1990).

2.7 Escalas dos fenômenos atmosféricos

A atmosfera é caracterizada por fenômenos cujas escalas temporais e espaciais variam em um grande intervalo. As escalas espaciais destes fenômenos são determinadas a partir de um tamanho ou comprimento de onda típico e a escala de tempo se baseia no intervalo de tempo de duração ou período destes fenômenos. A figura 2.11 mostra uma correlação entre fenômenos atmosféricos e suas escalas temporais e espaciais. A área sombreada na figura representa os fenômenos que são influenciados pela superfície. Esta primeira análise parece dar uma ideia de que os fenômenos na atmosfera se manifestam de forma discretizada e que ocorrem independentemente uns dos outros. Porém isto não é correto – os fenômenos, cada qual em suas escalas atmosféricas, são partes de um fenômeno dinâmico contínuo que são separados apenas para fins de simplicidade no estudo (OKE, 1987).

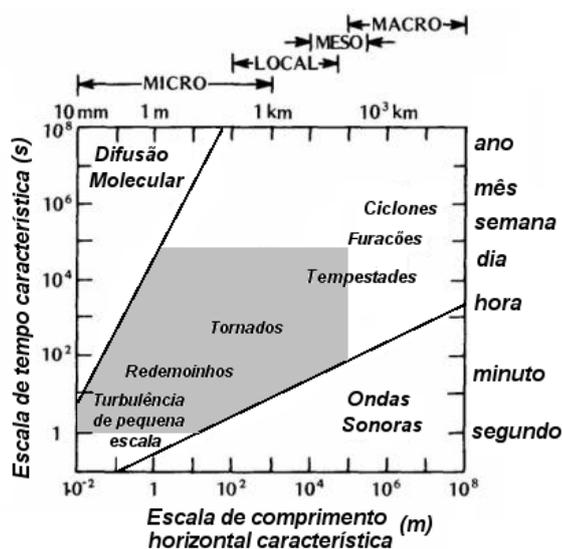


Figura 2.11 – Escalas temporais e espaciais de vários fenômenos atmosféricos. Adaptado de Oke (1987).

3 CAMADA LIMITE PLANETÁRIA

Em mecânica de fluidos, de maneira geral, define-se camada limite como a região do escoamento na qual a velocidade tende a zero na vizinhança de uma parede sólida. Portanto, esta região é caracterizada por um gradiente de velocidade de grande magnitude (LANDAU; LIFSHITZ, 1959). Esta definição leva em conta apenas o forçante mecânico, ou seja, o cisalhamento do campo de velocidade do escoamento. Na troposfera, próximo à superfície, também há a formação de uma camada limite, na qual além do cisalhamento do vento deve-se considerar os efeitos térmicos gerados pelo aquecimento da superfície devido a incidência de radiação eletromagnética proveniente do Sol. Deste modo, considerando-se este forçante adicional, define-se Camada Limite Planetária (CLP) como a região da atmosfera que tem seu regime de escoamento diretamente influenciado pela presença da superfície (cisalhamento do campo de velocidade do vento e aquecimento (ou resfriamento) dos níveis inferiores da atmosfera). O escoamento atmosférico na CLP é essencialmente turbulento e o número de Reynolds é da ordem de 10^7 . A intensidade da turbulência na CLP é diretamente influenciada pelos forçantes que formam a própria camada limite planetária. Por isso uma outra definição de CLP pode ser dada em função da turbulência: CLP pode ser definida como a porção da atmosfera onde os efeitos diretos da superfície sobre o processo de transporte turbulento são apreciáveis (BUSINGER, 1981). A altura da CLP possui uma grande variabilidade e depende de condições como cobertura de nuvens, quantidade de radiação recebida pela atmosfera, estação do ano etc. Durante um dia ensolarado o seu valor pode chegar a mais de $1000m$. Sobre regiões continentais e na ausência de nuvens a CLP tem um ciclo diário, particularmente bem definido, onde a sua estrutura se modifica ao longo do dia em função dos forçantes que atuam sobre o escoamento. Porém, deve ser enfatizado que o forçante fundamental na CLP é a incidência de radiação eletromagnética na superfície.

3.1 Balanço radiativo na superfície

Na superfície do planeta Terra ocorre a quase totalidade das entradas de massa e energia disponível no sistema Terra–Atmosfera. Estas transferências ocorrem através de diferentes processos para níveis superiores da atmosfera ou para o interior do planeta. Todos os corpos com temperatura acima do zero absoluto emitem energia na forma de radiação eletromagnética, e o fluxo desta energia por comprimento de onda é descrito pela Lei de Planck (LIOU, 2002)

$$E_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/K\lambda T) - 1} \quad (3.1)$$

onde T é a temperatura absoluta do corpo, h é a constante de Planck e c a velocidade da luz. A integral da função $E_\lambda d\lambda$ para todos os comprimentos de onda equivale ao fluxo de energia total recebido ou emitido pelo corpo e isto também pode ser descrito pela Lei de Stefan-Boltzmann (LIOU, 2002)

$$E = \varepsilon\sigma T^4 \quad (3.2)$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e ε é a emissividade do corpo. O comprimento de onda no qual ocorre o pico de emissão depende da temperatura do corpo. A lei que descreve a variação do comprimento de onda máximo em função da temperatura é a Lei de Deslocamento de Wien, escrita como (LIOU, 2002)

$$\lambda_m = 2,88 \times 10^{-3} \frac{1}{T} \quad (3.3)$$

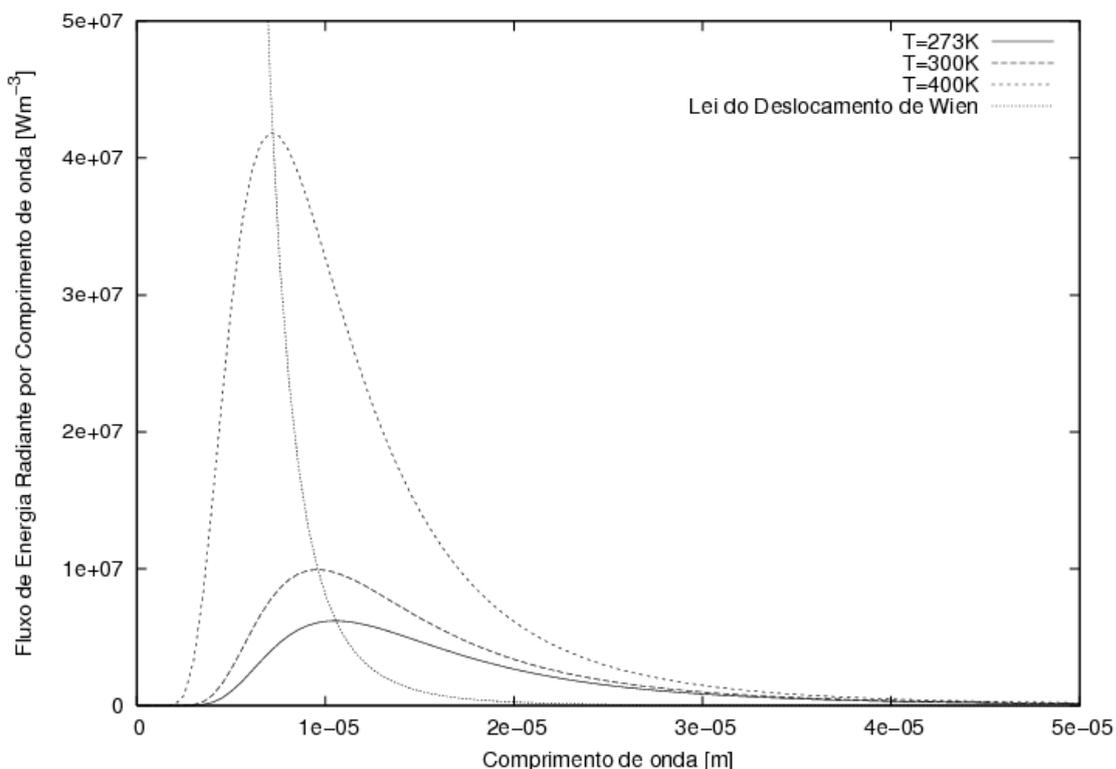


Figura 3.1 – Espectro de emissão de um corpo negro a diferentes temperaturas e Lei do Deslocamento de Wien

É possível distinguir a radiação solar da terrestre pela análise do comprimento de onda. Define-se radiação de onda curta a radiação solar e a radiação de onda longa a radiação terrestre.

A emissão solar se dá em uma extensa faixa, desde frequências altíssimas até

muito baixas. A radiação solar é caracterizada por comprimentos de onda menores que $10^{-8} \mu m$ até $10^{16} \mu m$.

Raios *gamma*, raios-X e ultravioleta, em ondas curtas, antecedem a região espectral em que a luz é visível. O espectro visível é a faixa de radiação de ondas curtas, na qual as ondas eletromagnéticas, atuando sobre a matéria, são captadas pelo olho humano. Tal espectro, de 400 a $700nm$, contém o comprimento de onda máximo de emissão do Sol. Nesta faixa de comprimentos de onda a atmosfera é praticamente transparente, por isso, é o canal mais importante de aquecimento da Terra (cerca de 70% da energia solar incidem na Terra). A região do infravermelho, de $700nm$ em diante, desempenhará uma importante função: captar energia liberada pela superfície em onda longa. Neste caso, os gases em suspensão na atmosfera desempenham um papel fundamental.

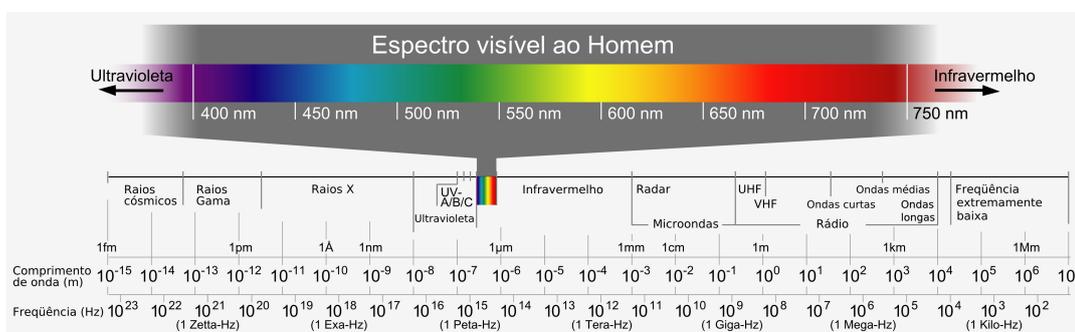


Figura 3.2 – Representação do espectro eletromagnético. Fonte: <<http://pion.sbfisica.org.br>>. Acesso: 30 de setembro de 2011.

Cada gás constituinte da atmosfera tem propriedades radiativas específicas. Assim, a radiação solar incidente é por eles parcialmente refletida, transmitida, absorvida e reemitida. Os constituintes atmosféricos em geral não são bons absorvedores de onda curta, exceto o ozônio, que é bastante eficaz na absorção de radiação ultravioleta. Por outro lado, o vapor d'água que se torna progressivamente bom absorvedor para comprimentos de onda acima de $800nm$. Na banda em que ocorre o pico de emissão solar, em torno de $480nm$, a atmosfera é transparente.

A absorção de onda longa por constituintes atmosféricos é mais complexa, pois a maioria dos constituintes atmosféricos são bons absorvedores em alguma faixa. Os constituintes que mais contribuem são o vapor d'água, o dióxido de carbono e o ozônio, sendo o vapor d'água o mais importante pois está em maiores concentrações na atmosfera. Porém, no intervalo de 8×10^3nm a 11×10^3nm a atmosfera, na ausência de nuvens, é transparente para onda longa. Esse intervalo é chamado de janela atmosférica, e é neste local que se dá a maior perda de energia do sistema Terra–Atmosfera para o espaço.

Quando a radiação de determinado comprimento de onda incide (I_λ) sobre uma substância, pode ser transmitida através desta (T_λ), refletida por sua superfície (R_λ) ou absorvida (A_λ), de forma que a conservação de energia pode ser expressa como:

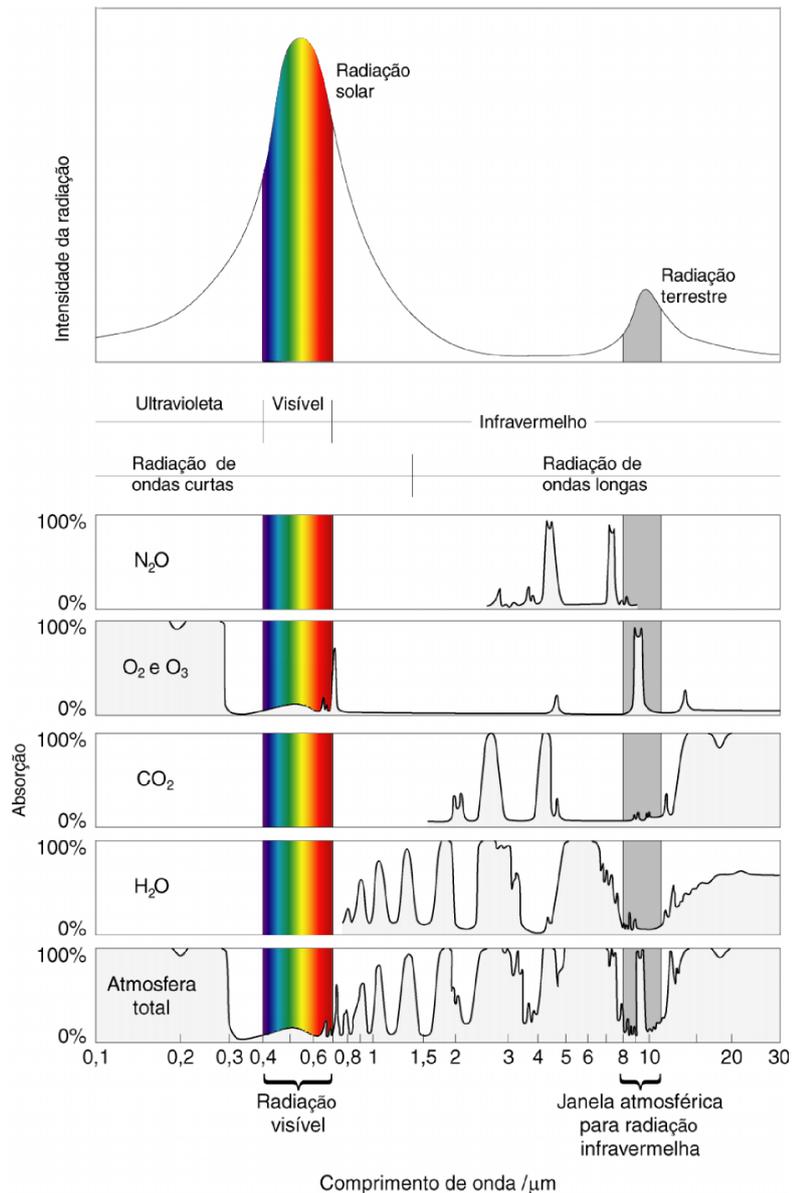


Figura 3.3 – Absorção dos constituintes da atmosfera em função do comprimento de onda da radiação incidente. Adaptado de Tolentino e Rocha-Filho (1998).

$$I_{\lambda} = T_{\lambda} + R_{\lambda} + A_{\lambda} \quad (3.4)$$

ou

$$t_{\lambda} + r_{\lambda} + a_{\lambda} = 1 \quad (3.5)$$

onde t_{λ} é a transmissividade, r_{λ} é a refletividade e a_{λ} é a absorvidade.

Essas propriedades são típicas de cada substância e definidas em cada comprimento de onda. Podemos definir, então, o albedo al , como a a refletividade em onda curta:

$$al = \frac{\text{Radiação refletida de onda curta}}{\text{Radiação incidente de onda curta}} \quad (3.6)$$

Quanto maior o albedo, menos radiação de onda curta é absorvida pela superfície.

O balanço radiativo corresponde a soma de quatro componentes e determina a radiação líquida (Q^*). Assume-se como referência valores positivos de radiação quando esta é emitida da superfície para atmosfera e negativos quando a radiação é emitida da atmosfera para a superfície. As componentes do balanço radiativo são:

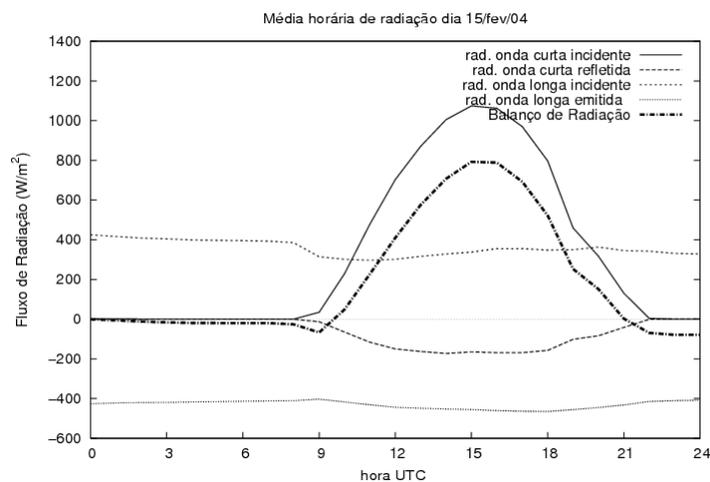
- $K \downarrow$ – radiação incidente de onda curta: é a soma das componentes direta (S) e difusa (D). Varia com a latitude e a época do ano. A cobertura de nuvens também afeta seu valor.
- $K \uparrow$ – radiação de onda curta refletida: depende da radiação incidente e do albedo superficial.
- $L \downarrow$ – radiação de onda longa emitida pela atmosfera para a superfície: depende da composição e temperatura atmosféricas. Tem pouca variação durante o dia.
- $L \uparrow$ – radiação de onda longa emitida pela superfície: depende da temperatura e emissividade superficial, de acordo com a lei de Stefan-Boltzmann. Apresenta pouca variação diária, os valores maiores ocorrem durante o dia do que à noite (devido à temperatura).

$$Q^* = K \downarrow - K \uparrow + L \downarrow - L \uparrow \quad (3.7)$$

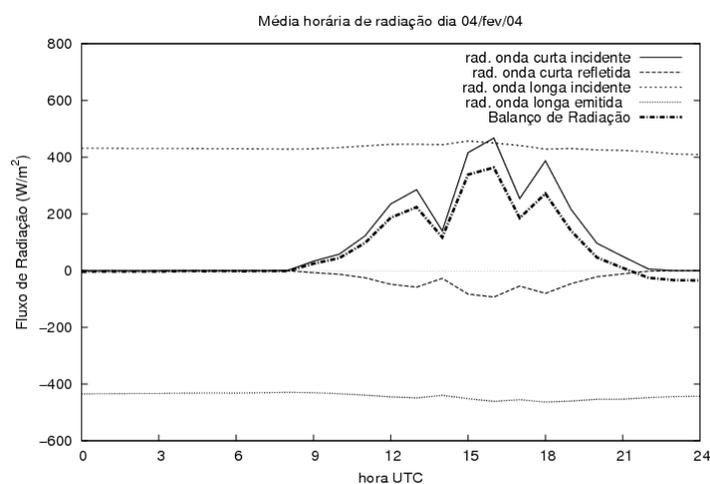
A radiação líquida é positiva durante o dia, e negativa durante a noite como pode ser observado nas figuras 3.4(a) e 3.4(b) que apresentam gráficos de médias horárias de fluxo de radiação medidos na estação experimental de Paraíso do Sul. A primeira para um dia sem cobertura de nuvens e a segunda para um dia nublado.

3.2 Variação diária da CLP

Com o nascer do Sol ocorre o processo de aquecimento da superfície pela radiação incidente de onda curta. A atmosfera é semi-transparente a este intervalo de frequências do espectro eletromagnético, portanto não é a radiação incidente que aquece diretamente a CLP mas sim a radiação absorvida pela superfície e reemitida para a atmosfera. A partir deste aquecimento começa a se formar a Camada Limite Planetária Convectiva ou simplesmente Camada Limite Conectiva (CLC). Esta camada vai crescendo com o passar da manhã e atinge o seu valor máximo por volta do meio dia. Esta



(a) 15 de fevereiro de 2004



(b) 4 de fevereiro de 2004

Figura 3.4 – Evolução das médias horárias de fluxo de radiação

estrutura se mantém até o momento em que começa a diminuir a incidência de radiação e esta começa a decair. Com isso, no pôr-do-sol, a CLC deixa de existir e em seu lugar começa a se formar uma Camada Limite Planetária Estável ou Camada Limite Estável (CLE). Acima desta CLE, formada pela estratificação térmica, existe uma camada caracterizada por resíduos da CLC, a chamada Camada Limite Planetária Residual ou Camada Limite Residual (CLR), associada ao decaimento da turbulência convectiva que ocorre por, aproximadamente, 1h após o pôr-do-sol. A CLE se mantém até o crepúsculo matutino onde o ciclo novamente se inicia. Durante a transição entre a CLC–CLE–CLR, em momentos onde há um campo de velocidades intenso ou cobertura de nuvens, a CLP pode ter um caráter neutro. Esta é a Camada Limite Planetária Neutra ou Camada Limite Neutra (CLN). Acima da CLP existe a chamada Atmosfera Livre. Nessa região da troposfera, que se estende desde o topo da CLP até o topo da Troposfera não há presença constante de turbulência e os efeitos do solo não são relevantes para o escoamento. Con-

tudo, a presença de jatos (acelerações no campo de velocidade do vento) nesta região podem criar um intenso gradiente de velocidade e então cisalhamento, e devido a este cisalhamento pode ocorrer a formação de turbulência denominada Turbulência de ar claro.

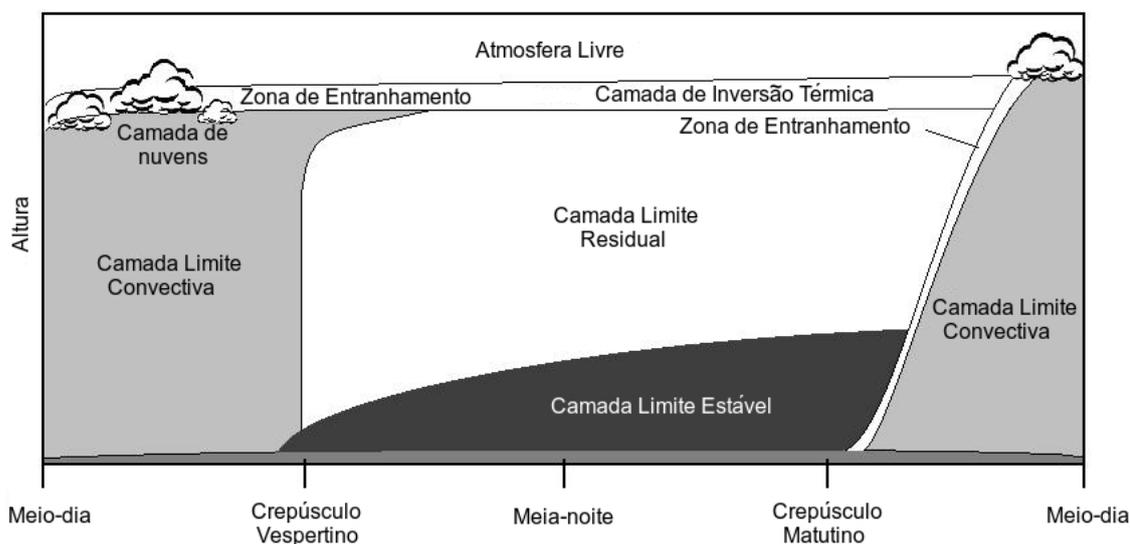


Figura 3.5 – Representação da variação diária da CLP. Adaptado de Stull, 1988.

3.2.1 Camada limite convectiva

Devido ao aquecimento da superfície pela incidência de radiação eletromagnética de onda curta o solo adquire uma temperatura maior que a da atmosfera. Isto estabelece um gradiente vertical de temperatura e, conseqüentemente, a troca de energia na forma de calor entre a superfície e a CLP se dá no sentido solo-atmosfera e então as camadas de ar adjacentes ao solo se tornam menos densas que as superiores e ascendem criando células de convecção ou termas (com um caráter instável) estabelecendo um escoamento turbulento na vertical. A turbulência nesta estrutura particular da CLP é predominantemente convectiva (devido ao forçante térmico que a superfície impõe a atmosfera). Quanto mais intensa é a turbulência mais eficiente é o processo de transporte das camadas inferiores de ar para as superiores promovendo uma eficiente troca de energia na forma de calor, *momentum* e matéria entre os níveis inferiores e superiores. Quando este processo é bem estabelecido uma região homogênea é criada no interior da CLC, a camada de mistura, caracterizada pelo gradiente vertical nulo de velocidade, temperatura etc. Além disto, nos primeiros metros, em relação a superfície, existe a influência da turbulência gerada mecanicamente devido ao cisalhamento do campo de vento com o solo. A figura 3.6 mostra perfis de temperatura potencial, velocidade e direção do vento típicos de uma camada convectiva. Nesta figura pode-se observar que a camada de mistura ocupa grande parte

da extensão vertical da CLC.

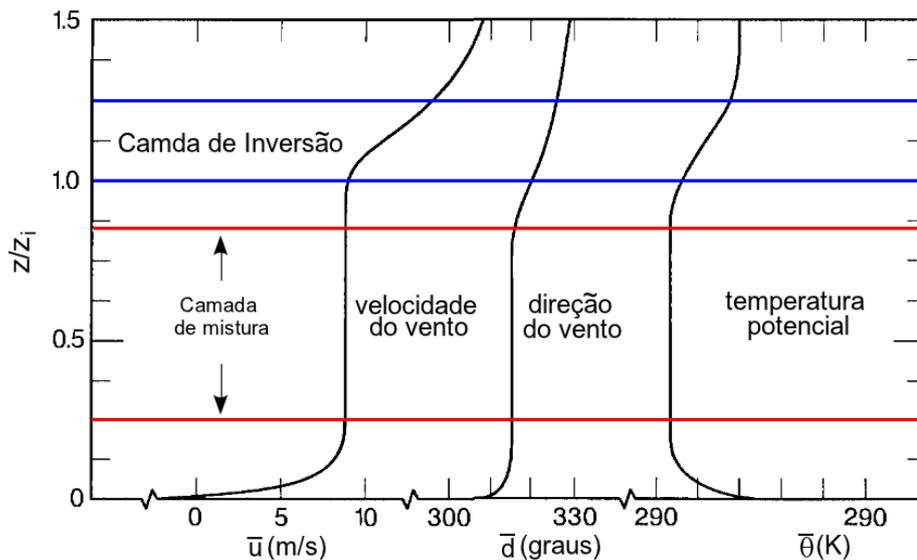


Figura 3.6 – Perfis típicos de velocidade média do vento, \bar{u} , direção média do vento \bar{d} e temperatura potencial média $\bar{\theta}$ para a CLC. Os perfis foram apresentados em função da altura normalizada z/z_i , onde z é a altura em relação ao solo e z_i a altura do topo da CLC. Adaptado de Kaimal e Finnigan (1994).

3.2.2 Camada limite estável

No final do dia quando desaparece a incidência de radiação eletromagnética de onda curta na superfície, o gradiente vertical de temperatura se inverte. Nesta situação a atmosfera torna-se mais quente que a superfície passando a aquecê-la através da troca de energia na forma de calor. Com isso os níveis inferiores tornam-se menos aquecidos que os superiores e os movimentos ascendentes das termas são freados por ação da força de empuxo. A atuação desta força de empuxo torna a camada estável, ou seja, uma parcela de fluido que por algum motivo é deslocada de baixo para cima (ou de cima para baixo) encontra regiões mais quentes (mais frias) e portanto menos densas (mais densas) e acaba sendo forçada a descer (subir). Então, o forçante térmico que antes era fonte de instabilidade e por consequência turbulência agora é sumidouro e começa a destruir estas estruturas. A CLE vai aumentando sua altura de domínio conforme este gradiente de temperatura negativo vai se estabelecendo nos níveis mais elevados da CLP. A turbulência na CLE é predominantemente mecânica. Em regiões onde os ventos noturnos possuem uma velocidade baixa durante a noite a intensidade da turbulência é bastante reduzida chegando quase a extinção. Uma peculiaridade da turbulência na CLE é o fenômeno da intermitência que corresponde a uma reorganização do escoamento gerando picos de intensidade turbulenta durante a evolução desta camada. Outros fenômenos interessantes que ocorrem na CLE é o meandro do vento e a formação de jatos de baixos

níveis. Em geral a CLE atinge alturas bem menores que a CLC. A figura 3.7 mostra perfis de temperatura potencial, velocidade e direção do vento típicos de uma camada estável.

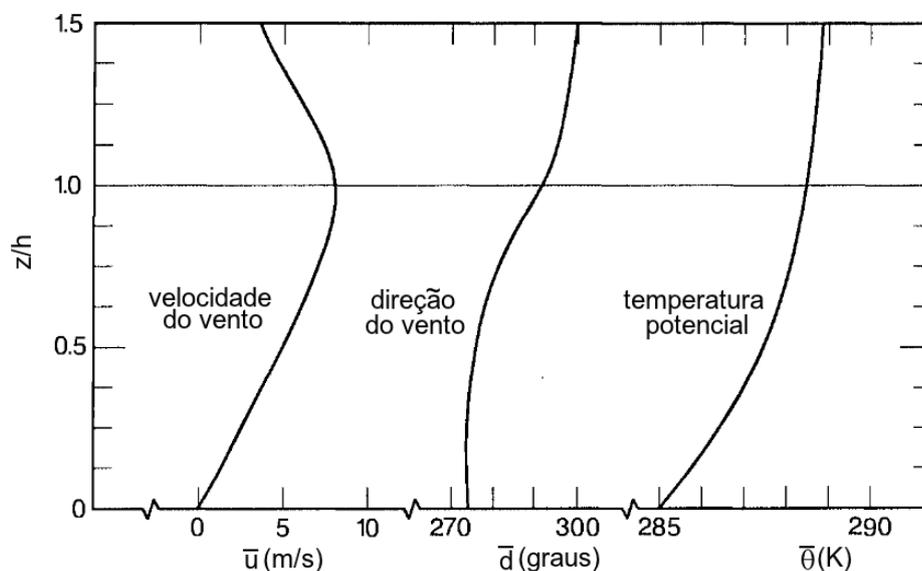


Figura 3.7 – Perfis típicos de velocidade média do vento, \bar{u} , direção média do vento \bar{d} e temperatura potencial média $\bar{\theta}$ para a CLE. Os perfis foram apresentados em função da altura normalizada z/h , onde z é a altura em relação ao solo e h a altura do topo da CLE. Adaptado de Kaimal e Finnigan (1994).

3.2.3 Camada limite neutra

Esta camada não tem sua existência caracterizada por períodos apreciáveis na CLP. Ela ocorre em momentos de transição de estabilidade ou em dias com forte vento. Sua principal característica é o gradiente vertical de temperatura nulo.

3.2.4 Camada limite residual

A CLR se forma logo após o pôr do sol e é constituída pelo resíduo de turbulência da CLC que persiste nos níveis mais altos da CLP. A turbulência convectiva nesta camada decai rapidamente (aproximadamente 1h) e há pouca influência da turbulência gerada na superfície nesta camada.

4 ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

A energia cinética em um escoamento pode ser decomposta em duas partes: uma associada à velocidade média do vento e outra associada as flutuações de velocidade em torno deste valor médio. Sendo $\langle u_i \rangle$ o valor médio da velocidade do escoamento u_i e $\langle \cdot \rangle$ o operador média, e u'_i a flutuação em torno da média, tal que $u'_i = u_i - \langle u_i \rangle$, define a energia cinética turbulenta como a energia cinética associada as flutuações do campo de velocidade, ou seja:

$$E_c = \frac{1}{2} m u_i'^2 \quad (4.1)$$

onde E_c é a energia cinética turbulenta e m a massa. Contudo, é comum em mecânica de fluidos o uso de variáveis intensivas, logo, usualmente, nos referimos a energia cinética turbulenta como a energia cinética associada às flutuações do campo de velocidade por unidade de massa, ou seja

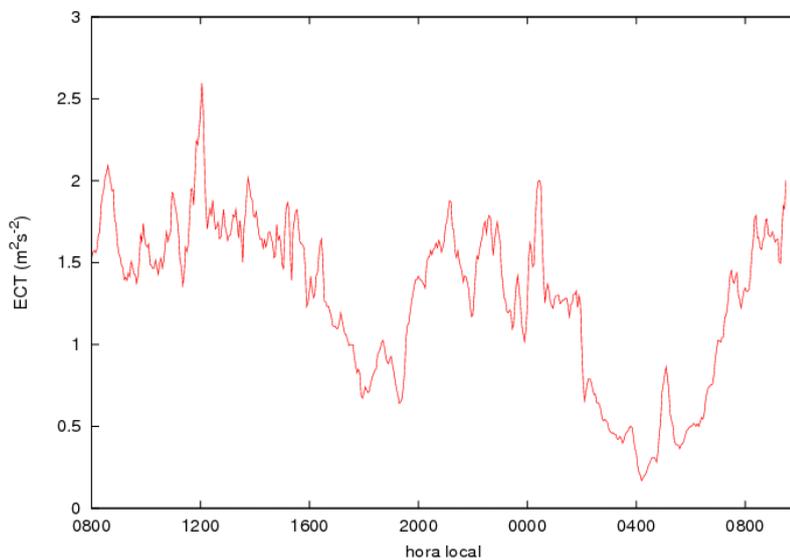
$$E = \frac{E_c}{m} = \frac{1}{2} u_i'^2 \quad (4.2)$$

onde E é a energia cinética turbulenta por unidade de massa. A energia cinética turbulenta (ECT) é um indicativo da intensidade da turbulência em um escoamento turbulento. Porém, as características do escoamento turbulento dificultam uma descrição determinística do mesmo. Assim, usamos um tratamento estatístico é fundamental para o estabelecimento de parâmetros que descrevem um escoamento turbulento (STULL, 1988). Desta forma, utiliza-se processos de média para obter a energia cinética turbulenta média e assim descrever a intensidade da turbulência

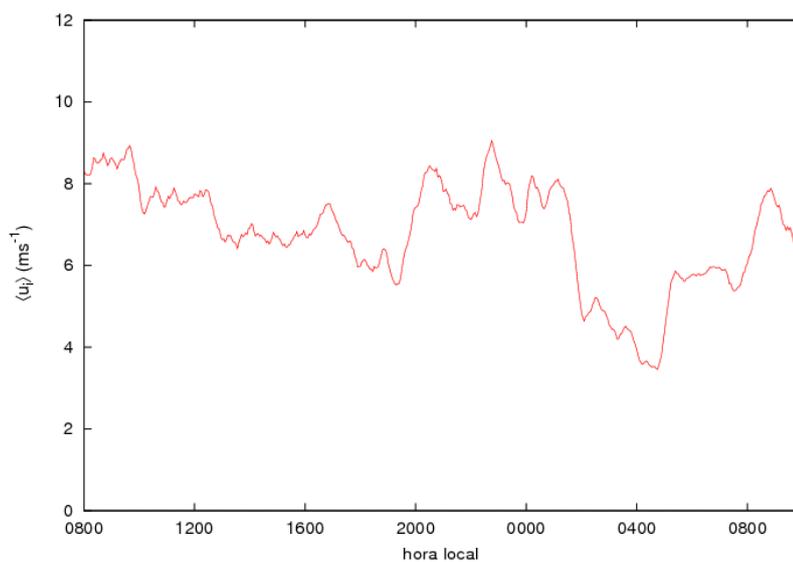
$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i'^2 \rangle \quad (4.3)$$

Da equação 4.3 pode-se concluir que a ECT média é diretamente associada à variância do campo de velocidade do vento. A figura 4.1 mostra a variação da ECT e da velocidade média do vento, durante um ciclo diário da CLP, obtido a partir de dados experimentais do sítio de Candiota do Sul-RS. A o quadro (4.1(a)) mostra a variação da ECT. Percebe-se que, ao fim da tarde a magnitude da ECT começa a decair devido a diminuição dos forçantes térmicos, provenientes do aquecimento da superfície. Contudo, por volta das 20h (horário local) há um crescimento no sinal de energia cinética turbulenta, aumento este que possui uma correlação positiva com o aumento da velocidade média do vento, que gera turbulência mecanicamente. Com o decréscimo do valor da velocidade do vento, por volta das 2h da manhã, a intensidade da ECT volta a diminuir devido a diminuição do forçante mecânico. Com o nascer do sol e o restabelecimento do forçante térmico a ECT

volta a aumentar. Para descrever os processos de produção e destruição de energia cinética turbulenta na CLP utiliza-se a equação de balanço desta variável turbulenta.



(a) Energia cinética turbulenta média



(b) Velocidade média do vento

Figura 4.1 – Dados experimentais de ECT ((a) e velocidade média do vento ((b)), Candiota-RS, em 30/09/2007 e 01/10/2007.

4.1 Equação de balanço da energia cinética turbulenta na camada limite planetária

A equação de balanço da energia cinética turbulenta expressa como a ECT média varia com o passar do tempo, em função dos diferentes mecanismos que atuam na CLP.

Tal equação pode ser obtida a partir da equação de Navier-Stokes¹ e é dada por:

$$\underbrace{\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t}}_I = - \underbrace{\langle u_j \rangle \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial x_j}}_{II} - \underbrace{\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{III} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_j E \rangle}_{IV} + \underbrace{\frac{g}{\langle \theta_v \rangle} \langle u'_i \theta'_v \rangle \delta_{i3}}_V - \underbrace{\frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u'_i p' \rangle}_{VI} - \underbrace{\varepsilon}_{VII} \quad (4.4)$$

Cada um dos sete termos destacados na equação 4.4 tem uma interpretação física própria, e está associado com a produção, destruição ou transporte de ECT na CLP.

4.1.1 Termo I: variação temporal local da energia cinética turbulenta média

Este termo representa o “armazenamento” ou a tendência da ECT no escoamento. Quando positivo, indica um aumento local da ECT ao passar do tempo e se é negativo, um decréscimo. Na CLP este termo tem seus maiores valores (em módulo) no desenvolvimento matutino da CLP e no seu decaimento vespertino, sendo negativo neste período. Quando a turbulência atinge seu pleno desenvolvimento podemos assumir que a ECT converge para um estado estacionário, logo seu termo de variação temporal local é nulo. Contudo, quando comparado aos demais termos da equação ele pode ser, em geral, desprezado.

4.1.2 Termo II: transporte advectivo médio de energia cinética turbulenta média

Este termo representa o transporte advectivo da ECT pelo campo de velocidade média. Sua magnitude está diretamente associada a magnitude da velocidade média do vento, do gradiente de ECT e do ângulo entre esses dois vetores. Em geral, este termo é desprezado pois o gradiente de ECT tende a ser pequeno nas direções horizontais, e na direção vertical a velocidade média do vento é praticamente nula. Contudo, em escoamentos de pequena escala (menores que a escala da CLP) os gradientes horizontais de ECT podem ser importantes tornando o transporte advectivo relevante ao transportar ECT. Um exemplo disso são regiões onde existe formação de uma camada limite interna devido às diferenças de rugosidade da superfície ou aquecimento da mesma.

¹A demonstração da obtenção da equação 4.4 é realizada no apêndice A, página 126.

4.1.3 Termo III: produção de energia cinética turbulenta a partir do cisalhamento do campo de velocidade do vento

Este termo surge devido a interação do campo turbulento com o escoamento médio (considerado laminar). Fisicamente está associado com o trabalho realizado por forças que causam deformação nos elementos de fluido, devido a atuação da tensão de Reynolds, que por sua vez é diretamente associada ao fluxo turbulento de *momentum* $\langle u'_i u'_j \rangle$. Rigorosamente a tensão de Reynolds é definida como um tensor τ_{ij}^R e não tem o mesmo senso físico das tensões como as de cisalhamento que correspondem a razão entre força e área. Cada componente do tensor de Reynolds é definido como

$$\tau_{ij}^R = -\langle \rho \rangle \langle u'_i u'_j \rangle \quad (4.5)$$

onde ρ é a densidade d fluido.

Esse termo é associado a produção de ECT pois os fluxos turbulentos de *momentum* e de gradiente de velocidade do campo médio são, em geral, de sinais opostos (TENNEKES; LUMLEY, 1972), logo

$$-\langle \rho \rangle \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} > 0 \quad (4.6)$$

Entretanto fica mais claro entender a origem desta quantidade de energia que se transforma em ECT quando analisamos a equação da energia cinética (por unidade de massa) associada ao campo de velocidade média. Esta equação, assim como a equação de balanço para ECT, pode ser obtida a partir da equação de Navier-Stokes, em uma derivação semelhante à realizada para a ECT no apêndice A. A equação para a energia cinética média para o campo de velocidade média é dada por

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = -\langle u_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} - \langle u_i \rangle g \delta_{i3} - \frac{\langle u_i \rangle}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \langle u_i \rangle \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \langle u_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle \quad (4.7)$$

onde T é energia cinética por unidade de massa associada ao campo médio de velocidade. Assim como na equação de balanço de ECT, cada termo da equação 4.7 possui uma interpretação física². Contudo, estamos interessados apenas no último termo do lado direito da 4.7, pois ele representa a interação do campo médio com a turbulência. Usando a regra do produto para derivar, podemos escrever tal termo como (STULL, 1988):

$$\langle u_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u'_i u'_j \rangle \langle u_i \rangle) + \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \quad (4.8)$$

Pode-se, agora, facilmente notar uma semelhança entre o primeiro termo do lado

²A interpretação de cada termo pode ser obtida em Stull (1988)

direito da expressão 4.8 com o termo de produção mecânica (termo III) da equação de balanço da ECT. Eles tem o mesmo significado físico, porém quando substituído na equação 4.7 possui o sinal positivo e então representa um termo de “destruição” de energia cinética do campo médio. Tal destruição é o que provoca o aumento de ECT devido ao trabalho associado ao tensor de Reynolds, ou seja, um mesmo termo representa perda de energia cinética do campo médio e acréscimo no campo turbulento, evidenciando a transferência de energia entre esses dois campos. O outro termo da equação 4.8 também representa uma interação entre a turbulência e o campo médio, porém é um termo de transporte de energia cinética do campo médio devido a ação da turbulência. Segundo Tennekes e Lumley (1972), o tensor de Reynolds está associado, em geral, a dissipação de energia, ou seja, associado a um trabalho negativo no escoamento, contudo isso favorece a turbulência produzindo um termo de produção de ECT.

A magnitude do termo de produção mecânica é maior próximo aos contornos rígidos do escoamento, pois nestas regiões há um maior gradiente de velocidade média e também os fluxos turbulentos de *momentum* são mais intensos. Contudo, no topo da CLP, na região de entranhamento este termo pode ser apreciável devido ao cisalhamento do campo de velocidade nessa região.

4.1.4 Termo IV: transporte turbulento de energia cinética turbulenta média

Este termo representa o transporte de ECT devido à própria turbulência. Matematicamente é entendido como a divergência do fluxo turbulento de ECT dado por $\langle u'_j E \rangle$. Este termo de transporte atua no sentido de homogeneizar, espacialmente, a ECT do escoamento, transportando ECT de regiões com mais energia para regiões com menos energia. Com isso, quando analisamos este termo isoladamente, ele pode ser uma fonte ou consumidor local de ECT. Na CLP, em geral, temos uma maior quantidade de ECT nos níveis inferiores que superiores, com isso, em geral, tal termo é negativo na porção inferior da CLP e positivo na superior. Contudo, o transporte de ECT fica completamente compreendido com a análise do termo VI da equação de balanço de ECT.

4.1.5 Termo V: produção ou destruição de energia cinética turbulenta devido ao fluxo de energia na forma de calor

Este termo, também chamado de termo de produção/destruição térmica, representa o processo de produção ou destruição de ECT devido as condições de estabilidade estática da CLP.

Durante o dia, geralmente, temos a formação da CLC, na qual o solo possui uma temperatura maior que a atmosfera e devido a isto temos um processo de convecção, e tal processo acaba gerando instabilidades que são amplificadas pelo escoamento tornando-o turbulento. Ou seja, a convecção é uma fonte de turbulência, e com isso de ECT. Nessas condições o fluxo de energia na forma de calor $\langle u'_i \theta'_v \rangle$ é positivo e então o termo V também é. Assim, durante o dia, este termo é uma fonte de ECT para a CLP, com exceção do topo da CLP onde o entranhamento com o ar da atmosfera livre (que possui temperatura potencial maior que o ar imediatamente inferior na CLP) produz um fluxo negativo e assim o termo V torna-se negativo no topo da CLP.

Durante a noite, geralmente, temos a formação da CLE na qual o regime de estabilidade estática impede a convecção e mantém os elementos ou parcelas de fluido oscilando em torno de um ponto de equilíbrio. Tal condição suprime a turbulência. Em termos do fluxo, temos $\langle u'_i \theta'_v \rangle < 0$ e com isso o termo V torna-se um termo de destruição de ECT em toda a CLP. Devido a este fato, durante a noite, o balanço de ECT entra em uma condição delicada pois somente o termo de produção mecânica (termo III) introduz ECT no escoamento, enquanto o termo V (juntamente com o termo VII) consomem essa energia. Portanto, em condições muito estáveis a turbulência quase se extingue e outros fenômenos começam a ser observados no escoamento, como o meandro do vento e os eventos de turbulência intermitente.

Para quantificar a turbulência, em função dos termos III e V da equação de balanço, define-se o Número de Richardson Fluxo, R_f ,

$$R_f = \frac{\frac{g}{\langle \theta_v \rangle} \langle u'_i \theta'_v \rangle}{\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}} = - \frac{\text{termo V}}{\text{termo III}} \quad (4.9)$$

Assim, quando $R_f < 0$ temos dois termos de produção de ECT. Contudo, quando $R_f > 0$, entramos em um regime estável e complicado para a manutenção da turbulência. Inicialmente aceitava-se que quando R_f atingia um valor crítico $R_f^* = 1$ a turbulência se extinguiu no escoamento, porém experimentos mostraram que $R_f^* \approx 0,25$ (SORBJAN, 1989).

4.1.6 Termo VI: transporte de energia cinética turbulenta devido as flutuações de pressão

Este termo é o que apresenta a maior incerteza na equação de balanço. As medidas de flutuação de pressão (pressão estática) são muito complexas de ser obtidas e uma vez que são obtidas estão bastante contaminadas por flutuações dinâmicas de

pressão. Assim, segundo Stull (1988), os resultados do fluxo de pressão $\langle u'_i p' \rangle$ tem mais informação sobre ruído do que sobre a variável em si. Assim, estimativas do termo VI da equação de balanço de ECT são obtidas através de resíduos da equação ou simplesmente tal termo é desconsiderado. Este termo, além de transportar ECT dentro da CLP, transporta energia para fora da CLP, atuando também como um termo de dissipação de ECT.

O termo VI, juntamente com o termo IV representam o transporte de ECT na CLP. Rigorosamente, existe um terceiro termo de transporte que foi suprimido na derivação da equação 4.4. Tal termo relaciona o transporte de ECT devido a difusão molecular. Tal termo é dado por:

$$\text{transporte molecular} = \nu \frac{\partial^2 \langle E \rangle}{\partial x_j^2} \quad (4.10)$$

4.1.7 Termo VII: taxa de dissipação de energia cinética turbulenta

O termo VII é sempre um termo de destruição de ECT. Tal termo tem sua origem na interação eletromagnética entre os menores turbilhões do escoamento. Tal termo é diretamente ligado a ECT: quanto maior a ECT maior é a dissipação reforçando a ideia da turbulência como um agente dissipativo no escoamento. Na CLP a taxa de dissipação atinge seu valor máximo próximo a superfície, e é nesta região que encontramos o máximo de ECT bem como os menores turbilhões do escoamento.

4.1.8 Simplificações na equação de balanço da ECT

Algumas simplificações podem ser feitas na equação (4.4). Considerando a homogeneidade horizontal da turbulência a soma dos fluxos turbulentos horizontais é nula e ainda, fazendo uma rotação de coordenadas e alinhando a componente $\langle u \rangle$ do vento com o próprio valor da velocidade média do vento, temos que $\langle v \rangle$ e $\langle w \rangle$ são nulas. Assim, reescrevemos a equação (4.4) como:

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} = - \langle u' w' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \langle w' E \rangle + \frac{g}{\langle \theta_v \rangle} \langle w' \theta'_v \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial z} \langle w' p' \rangle - \varepsilon \quad (4.11)$$

4.2 Espectro de energia cinética turbulenta

Um parâmetro descrevendo um campo turbulento possui uma grande variabilidade, tanto espacial como temporal. Esta variabilidade está associada ao número de graus de liberdade que, por sua vez, está diretamente relacionado com o número de Reynolds (LANDAU; LIFSHITZ, 1959). Desta maneira, pode-se conceber a ideia de uma variável turbulenta ser composta pela sobreposição de harmônicos de diferentes números de onda (k) chamados turbilhões ou vórtices. Assim, como a radiação eletromagnética, cada número de onda corresponde a uma quantidade de energia cinética turbulenta e portanto, precisamos saber como esta energia está distribuída nos turbilhões de diferentes tamanhos ou harmônicos de diferentes números de onda. Assim, os turbilhões associados a uma escala de movimento ℓ , possuem um número de onda k dado por

$$k = \frac{2\pi}{\ell} \quad (4.12)$$

Os turbilhões são formados nas grandes escalas e transferem energia para os menores e assim por diante. Esta transferência de energia cinética turbulenta em forma de cascata, que vai dos maiores para os menores turbilhões, ocorre até um comprimento de onda limite no qual a ação da viscosidade se torna importante no processo de dissipação da energia cinética turbulenta na forma de calor (WELTER, 2006 apud RICHARDSON, 1922, POPE, 2000). A figura 4.2(a) ilustra o processo de cascata de energia cinética turbulenta.

Mesmo que uma certa analogia com o espectro de energia eletromagnética seja válida, a distribuição da energia cinética turbulenta entre os turbilhões de diferentes números de onda não se dá de forma linear como a energia eletromagnética se distribui entre fótons de diferentes frequências. O espectro de energia cinética turbulenta está distribuído em intervalos que possuem diferentes características, conforme a figura 4.2(b). Nesta figura, cada um dos intervalos do domínio é descrito como:

- Intervalo I: Grandes turbilhões com tamanho maior ou igual a L (escala integral).
- Intervalo II – sub intervalo inercial: o caráter da turbulência, nestes números de onda, é inteiramente determinado pelo fluxo de energia e pela taxa de dissipação. O fluxo de energia mais a dissipação é igual a energia total fornecida para este intervalo. Da forma do espectro observa-se que esta energia é proveniente dos turbilhões que possuem maior conteúdo de energia. Esta região do espectro se encerra entre turbilhões menores que a escala integral e maiores que a micro escala de Kolmogorov³, η .

³A microescala de Kolmogorov é uma escala de comprimento de turbilhões, na qual os efeitos dissipativos são apreciáveis.

- Intervalo III: nesta região do espectro ocorre a dissipação da energia cinética turbulenta em energia na forma de calor. Os turbilhões aqui são menores que a micro escala de Kolmogorov.

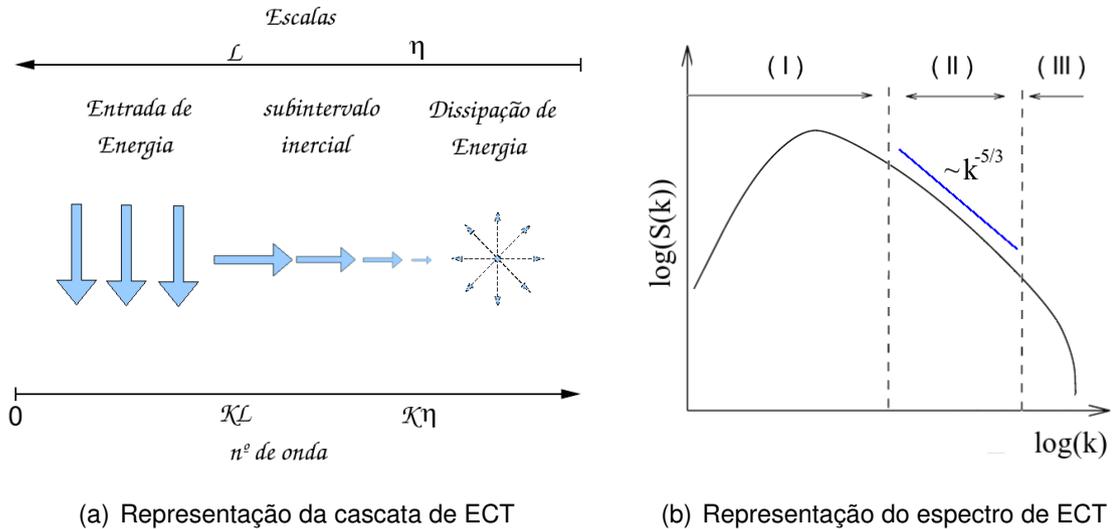


Figura 4.2 – (a) Esquema da distribuição da energia cinética turbulenta nas diferentes escalas e números de onda. Adaptado de Sorbjan (1989). (b) Representação do gráfico log-log do espectro de energia cinética turbulenta para TCD.

A Energia cinética turbulenta associada a um determinado intervalo de escalas, compreendida entre $[\ell_a, \ell_b]$ é dada pela integral da curva do espectro de energia, onde os limites de integração são os números de onda k_a e k_b , diretamente relacionados com o intervalo de escalas de movimento pela equação 4.12

$$E_{[k_a, k_b]} = \int_{k_a}^{k_b} S(k) dk \quad (4.13)$$

A energia cinética total do escoamento, ou seja, a energia cinética turbulenta associada a todas as escalas de movimento é dada pela soma da energia associada a cada escala de movimento, desde os pequenos turbilhões, onde $\ell \rightarrow 0$ até os grandes turbilhões, onde $\ell \rightarrow \infty$. Logo

$$E = \int_0^{\infty} S(k) dk \quad (4.14)$$

Para a turbulência bem desenvolvida e isotrópica, a função densidade de energia $S(k)$ apresenta uma lei de potência para o intervalo inercial, tal que $S(k) \propto k^{-5/3}$. Tal lei de potência é denominada como Espectro de Kolmogorov (POPE, 2000; HINZE, 1975; PANCHEV, 1971; FRISCH, 1995).

5 SIMULAÇÃO DOS GRANDES TURBILHÕES

A dinâmica de fluidos computacional (CFD, do inglês *Computational Fluid Dynamic*) é o estudo de escoamentos através de simulações numéricas. Este tipo de estudo é empregado tanto no desenvolvimento de pesquisas científicas de base como no de produtos tecnológicos (SAGAUT, 1998). No que se refere a investigação de escoamentos complexos, as simulações numéricas nos ajudam a entender, modelar e prever os diferentes efeitos causados por cada um dos forçantes que atuam no escoamento. Contudo, este tipo de estudo exige que as simulações numéricas forneçam dados com grande precisão e alta performance o que implica em uma forte relação entre o modelo físico e o algoritmo implementado para reproduzi-lo.

A qualidade ou coerência física dos dados gerados pela simulação é extremamente dependente da resolução do modelo. Para uma precisão ótima, a simulação deve ter uma resolução que contemple todas as escalas temporais e espaciais do escoamento. Quando o intervalo de escalas é muito grande, como no escoamento turbulento, o problema torna-se complicado uma vez que a razão entre as maiores e menores escalas tende a um número bastante elevado.

Para inserir todas as escalas espaciais relevantes na simulação de um escoamento turbulento, ou seja, para se realizar uma simulação numérica direta (DNS, do inglês *direct numerical simulation*) deve-se considerar os turbilhões mais energéticos, de escala ℓ_e e a microescala de Kolmogorov η . A razão entre essas duas escalas é diretamente relacionada com o número de Reynolds expressa pela seguinte relação (WYNGAARD, 1981)

$$\frac{\ell_e}{\eta} \sim Re^{3/4}. \quad (5.1)$$

Então, a razão entre as escalas aumenta quando o escoamento torna-se mais turbulento. Welter (2006), estimou o número de Reynolds da microescala de Taylor (R_λ) e a microescala de Kolmogorov para várias séries de dados consecutivas de CLP. Utilizando-se uma destas séries com $R_\lambda = 20975m$ e $\eta = 0,53mm$, tem-se $Re \sim 10^7$. Logo, $\ell_e \sim 100m$.

Considerando-se a hipótese de que a menor escala que contribui para o escoamento turbulento é da ordem de η e utilizando-se um domínio horizontal de $5km$ em cada dimensão e $2km$ na vertical necessitamos de uma grade tridimensional da ordem de 4×10^{20} pontos. Assim, torna-se inviável a aplicação desta técnica para simulações de escoamentos com número de Reynolds elevado.

Neste contexto aplica-se a técnica de Simulação dos Grandes Turbilhões (LES, do inglês *large eddy simulation*). Esta técnica não resolve completamente o intervalo de escalas que compõem o escoamento e sim a parte que contém a maior porção da energia

cinética turbulenta, ou seja, os grandes turbilhões.

5.1 Descrição do escoamento a partir do processo de médias

Como visto anteriormente, é uma tarefa impossível resolver completamente as equações para o campo de velocidade de um escoamento com elevado número de Reynolds (como o escoamento na CLP). Por isso utiliza-se modelos que resolvem as equações médias para o escoamento. Antes de definir a natureza do processo de média aplicado às variáveis do escoamento, escreveremos uma variável qualquer a como a soma da parte média A e um desvio em relação à média \check{a} ,

$$a = A + \check{a} \quad (5.2)$$

Considerando-se um campo de velocidade descrito em coordenadas retangulares (x, y, z) , e aplicando-se a decomposição acima ao termo não linear do campo de velocidade de um escoamento, temos

$$\begin{aligned} u_i u_j &= (U_i + \check{u}_i)(U_j + \check{u}_j) \\ u_i u_j &= U_i U_j + U_i \check{u}_j + \check{u}_i U_j + \check{u}_i \check{u}_j \end{aligned} \quad (5.3)$$

Realizando-se na equação (5.3) o processo de média sobre *ensemble*¹ a equação se reduz a (GARRATT, 1994; STULL, 1988; SORBJAN, 1989):

$$\begin{aligned} u_i &= \overline{u_i} + u'_i \\ \overline{u_i u_j} &= \overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u'_i u'_j} \end{aligned} \quad (5.4)$$

já que neste processo a média das flutuações é nula. O operador média sobre *ensemble* é representado pela barra acima do termo mediado e as flutuações pelo apóstrofo ('). Logo o termo não linear, neste processo, é representado pelo produto das médias da velocidade em cada direção e pela média do produto das flutuações, onde este produto $\overline{u'_i u'_j}$ é conhecido como tensor de Reynolds, em homenagem a Osborn Reynolds que o propôs em 1895 (WYNGAARD, 1981), sendo Reynolds um dos precursores do estudo de escoamentos turbulentos. O processo de média sobre *ensemble*, largamente utilizado em mecânica estatística, na mecânica de fluidos é bastante referenciado como média de Reynolds. Este processo de média descreve as equações de movimento em função

¹ Considerando-se um experimento repetido infinitas vezes com as mesmas condições, a média sobre *ensemble* corresponde a média aritmética de cada variável $a(x_i, t)$

dos campos médios, necessitando-se assim de uma resolução numérica muito menos apurada que o DNS, pois se espera que a resolução de grade seja da ordem de ℓ_e . Todavia este método não descreve os processos de flutuação intrínsecos ao escoamento turbulento (WYNGAARD, 1981).

Por não fornecer informações sobre os processos de flutuação do escoamento turbulento, muitas vezes se utiliza outros processos de média. Um deles é o processo de média sobre volume. Considerando-se a componente i do campo de velocidade descrito em coordenadas retangulares (x, y, z) , a operação média sobre volume da variável u_i pode ser definida pela seguinte expressão (DEARDORFF, 1972):

$$\tilde{u}_i(x_i, t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} u_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (5.5)$$

onde o til (\sim) representa o operador média sobre volume. Este operador aplicado em um termo não linear do tipo $u_i u_j$ é escrito como (WYNGAARD, 1981)

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \quad (5.6)$$

$$\widetilde{u_i u_j} = \tilde{u}_i \tilde{u}_j + R_{ij} \quad (5.7)$$

onde R_{ij} é o termo que representa o tensor generalizado de Reynolds. Este tensor é definido por

$$R_{ij} = \widetilde{u_i'' u_j''} + \widetilde{u_i'' u_j'} + \widetilde{u_i' u_j''} \quad (5.8)$$

Este tensor contém a interação entre os termos de subfiltro e escala resolvida, os produtos não lineares dos termos de subfiltro e a influência da escala resolvida. Tal tensor é conhecido como termo de Leonard (WYNGAARD, 1981; MARQUES FILHO, 2004).

O processo de média sobre volume e *ensemble* possuem diferentes propriedades. Uma das mais importantes está diretamente relacionada com a capacidade de reproduzir as flutuações do escoamento turbulento. O processo de média sobre *ensemble* remove completamente as características estocásticas da variável mediada, enquanto a média sobre volume não, ou seja, enquanto o campo de velocidade $u_i(x_i, t)$ é estocástico, o campo $\overline{u_i}$ não é. O campo descrito em função de médias de volume $\tilde{u}_i(x_i, t)$ continua apresentando características aleatórias uma vez que o volume de controle não engloba todos os possíveis estados da variável mediada. Conseqüentemente, a média sobre volume converge para uma média sobre *ensemble* ao passo em que o volume de controle empregado no processo de média aumenta. Em termos de escoamentos turbulentos, podemos dizer que a média de Reynolds remove as características turbulentas do escoamento enquanto a média sobre volume remove algumas componentes (turbilhões) ou

graus de liberdade deste escoamento. Os turbilhões removidos são aqueles que possuem uma escala espacial menor que as dimensões da grade onde é realizada a média. Assumindo-se condições estatisticamente estacionárias e homogêneas a média sobre volume corresponde a média sobre *ensemble* dos turbilhões compreendidos nas grandes escalas do escoamento (WYNGAARD, 1981).

A figura 5.1 compara os efeitos do processo de média em termos da quantidade de energia cinética turbulenta resolvida. Nesta figura pode-se perceber que uma simulação DNS resolve completamente o espectro de ECT, enquanto uma simulação baseada em médias sobre volume resolve parcialmente, parametrizando o restante da energia, enquanto o processo de média de Reynolds parametriza completamente a energia cinética turbulenta.

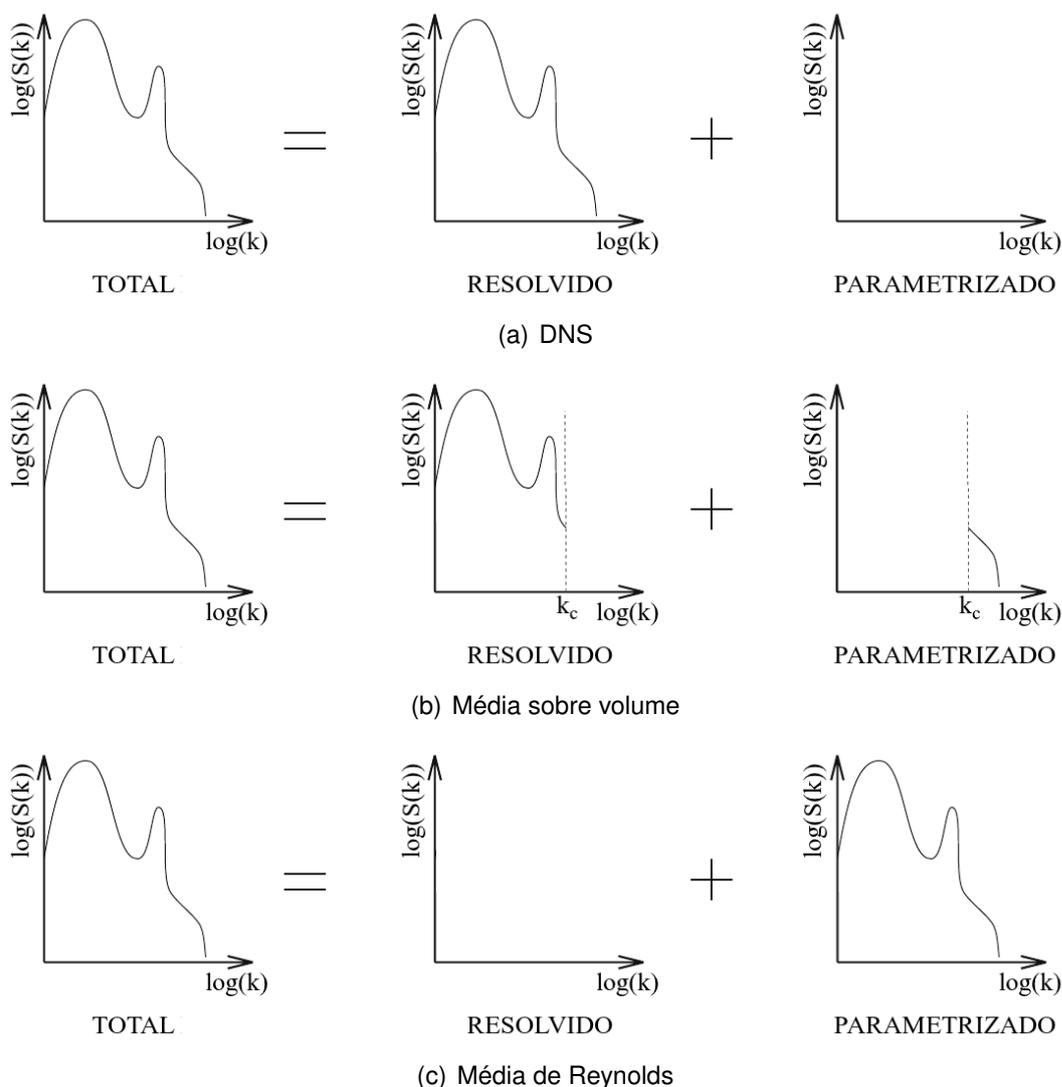


Figura 5.1 – Representação dos efeitos do processo de média na quantidade de energia cinética turbulenta resolvida no escoamento. Adaptado de Sagaut (1998)

5.2 Modelo de simulação dos grandes turbilhões

O modelo LES consiste na aplicação do processo de médias sobre volume para resolver as equações que descrevem um escoamento turbulento. O argumento físico deste modelo é a separação de escalas de movimento (filtragem); as grandes escalas² que contém a maior parte da ECT e são dependentes do ambiente (grandes turbilhões) são separados das pequenas escalas (pequenos turbilhões) nas quais acredita-se que exista um comportamento universal.

Os efeitos atribuídos aos pequenos turbilhões estão diretamente ligados à dissipação da ECT, já que nestas escalas a ação das forças de viscosidade é mais intensa e dominante no escoamento. Esta escala não é resolvida diretamente, mas parametrizada por um modelo de subfiltro. Já os grandes turbilhões são resolvidos a partir de médias de volume. Se o volume no qual é realizada a operação de média for suficientemente pequeno e garantir a separação entre estas escalas o modelo LES é muito mais preciso para simular escoamentos turbulentos que dependem diretamente de características dos forçantes térmicos e mecânicos. Ao contrário dos modelos baseados em médias sobre volume, os modelos tratados em termos das médias de Reynolds apresentam sérias dificuldades em representar estes detalhes do escoamento devido à remoção da aleatoriedade.

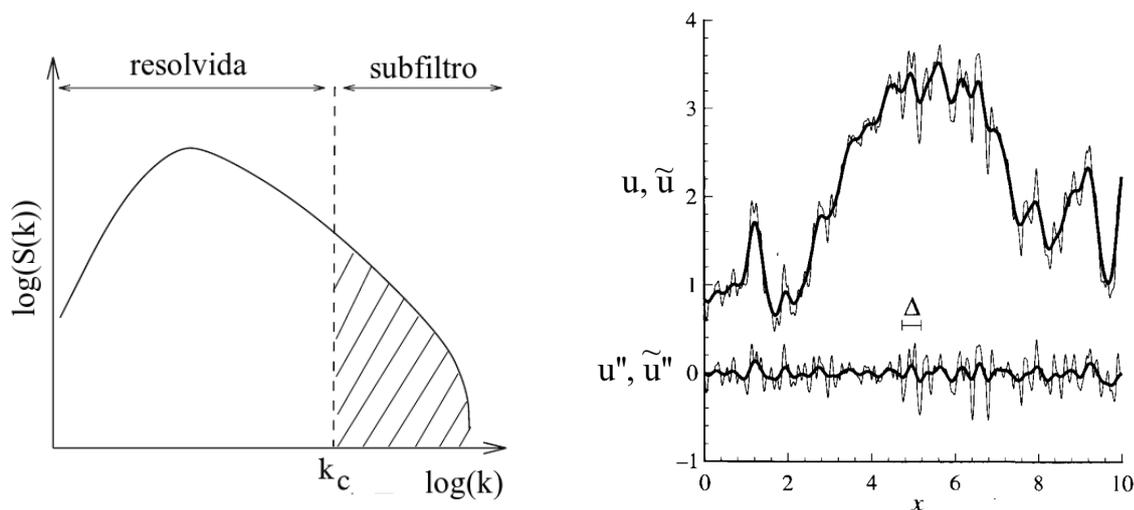
Segundo Pope (2000), o modelo LES é composto, conceitualmente, por quatro passos:

- (i) Filtragem: a operação de filtragem é definida como a decomposição da velocidade $u_i(x_i, t)$ em uma parte filtrada ou resolvida $\tilde{u}_i(x_i, t)$ e uma parte residual ou subfiltro $u_i''(x_i, t)$. O campo de velocidade resolvido $\tilde{u}_i(x_i, t)$ representa a solução para a equação de movimento para as grandes escalas (ver figura 5.2(a)).
- (ii) Obtenção da equação de movimento: a equação de movimento para o campo de velocidade filtrada é obtida a partir da equação de Navier-Stokes. Esta equação contém o tensor de cisalhamento (tensor residual) que é responsável por descrever a evolução das pequenas escalas.
- (iii) Modelo de subfiltro: o fechamento da equação é obtido através da parametrização do tensor residual por um modelo de subfiltro.
- (iv) Resolução numérica: a equação de movimento é resolvida numericamente para as componentes filtradas $\tilde{u}_i(x_i, t)$.

A figura 5.2(a) apresenta um esquema sobre a separação de escalas realizadas pelo processo de filtragem. Os números de onda menores que k_c são resolvidos e os

²Grandes escalas dentro do escoamento turbulento

maiores filtrados. Desta maneira, somente os maiores turbilhões, que por sua vez contém a maior parte da energia cinética turbulenta do escoamento são resolvidos. Já a figura 5.2(b) mostra o efeito do processo de filtragem sobre um sinal turbulento. Na figura fica claro que o filtro não remove totalmente a aleatoriedade do sinal, apenas o suaviza, uma vez que $\tilde{u}_i'' \neq 0$.



(a) Separação de escalas

(b) Efeitos do processo de filtragem em um sinal turbulento

Figura 5.2 – (a) – Representação do gráfico log-log para o espectro de densidade de energia cinética turbulenta $S(k)$ em função do número de onda k . A linha tracejada indica a separação entre os grandes turbilhões (resolvida) e os pequenos (parametrizada), sendo k_c o número de onda de filtro ou corte. Adaptado de Sagaut (1998).

(b) – Efeito da filtragem sobre um sinal turbulento. A curva superior (traço fino) mostra o sinal turbulento e a sua média (traço grosso) a partir de um processo de filtragem. A curva inferior mostra o resíduo da filtragem $u'' = u - \tilde{u}$ (traço fino) e a média do próprio resíduo. Adaptado de Pope (2000)

5.2.1 Filtros utilizados em modelos LES

As discussões anteriores mostram claramente que a metodologia LES é baseada na separação de escalas de movimento. As escalas de movimento são separadas através da aplicação de um filtro de frequências que elimina as altas frequências do escoamento turbulento (filtro passa-baixa). Matematicamente, a filtragem é representada em um espaço físico pela convolução da função filtro G pela variável a ser filtrada, assim:

$$\tilde{f} = G * f \quad (5.9)$$

Entretanto, muitas vezes, os efeitos da filtragem são mais claros quando se utiliza uma representação espectral. Utilizando-se a transformada de Fourier $F(k_i)$ da função $f(x_i)$, definida por

$$F(k_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_i) e^{-ik_i x_i} dx_i. \quad (5.10)$$

Podemos escrever a convolução para F , como

$$\tilde{F} = \hat{G} * F \quad (5.11)$$

onde \hat{G} é a função de transferência associada a G . A operação de filtragem apresenta algumas propriedades (POPE, 2000):

1. As constantes envolvidas no processo de média se conservam:

$$\tilde{a} = a \Leftrightarrow \iiint_V G(x_i - x'_i, t) dx'_i = 1 \quad (5.12)$$

2. O Princípio de Superposição Linear é válido:

$$\widetilde{f + g} = \tilde{f} + \tilde{g} \quad (5.13)$$

3. A comutação do operador derivada parcial temporal é válida:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \quad (5.14)$$

4. Relação entre derivadas espaciais é dada pela seguinte expressão

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} + \iiint_V f(x_i - x'_i, t) \frac{\partial}{\partial x_i} G(x_i - x'_i, t) dx'_i \quad (5.15)$$

Se o filtro for isotrópico e homogêneo:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \quad (5.17)$$

Logo, para filtros deste tipo a operação derivada parcial espacial também comuta.

Em modelos LES, existem três tipos de filtro que são normalmente utilizados para realizar a separação de escalas. O filtro do tipo caixa, gaussiano e espectral agudo.

- **Filtro tipo caixa:** a função filtro G assume um valor constante e não nulo para um determinado intervalo de frequências e nulo para o resto do domínio de filtragem.

- **Filtro Gaussiano:** A função filtro é expressa por uma distribuição gaussiana
- **Filtro espectral agudo:** Neste filtro a função G assume o valor nulo para os turbilhões com número de onda (ou frequência) maiores que o número de onda de corte k_c .

A tabela 5.1 apresenta as relações matemáticas para os filtros brevemente descritos acima. Nas funções apresentadas nesta tabela, o número de onda de corte é definido como

$$k_c \equiv \frac{\pi}{\Delta} \quad (5.18)$$

e Δ é o espaçamento da grade numérica.

Filtro	$G(x_i - x'_i)$	$\hat{G}(k)$
Caixa	$\frac{1}{\Delta} H\left(\frac{1}{2}\Delta - (x_i - x'_i) \right)$	$\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{2}k\Delta\right)}{\frac{1}{2}k\Delta}$
Gaussiano	$\left(\frac{\gamma}{\pi\Delta^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\left(\frac{\gamma}{\Delta^2}\right)(x_i - x'_i)^2\right]$	$\exp\left(-\frac{k^2\Delta^2}{4\gamma}\right)$
Espectral agudo	$\frac{\text{sen}[k_c(x_i - x'_i)]}{\pi(x_i - x'_i)}$	$H(k_c - k)$

Tabela 5.1 – Funções associadas aos filtros no espaço físico e espaço de número de ondas, onde H é a função de Heaviside, e a constante γ é geralmente da ordem de 6. Adaptado de Pope (2000).

A figura 5.3 esboça o comportamento de cada função filtro descrita anteriormente em um espaço físico e de números de onda, enquanto a figura 5.4 apresenta uma comparação entre a atuação do filtro no espaço físico e no espaço de número de ondas.

5.3 Modelo LES de Moeng (1984)

O modelo LES de Moeng (1984) é um dos mais utilizados pela comunidade científica para o estudo da CLP. Este modelo emprega o método pseudo-espectral para resolver numericamente as derivadas espaciais horizontais. Para as derivadas espaciais verticais o método de diferenças finitas (MOENG, 1984; MOENG; WYNGAARD, 1989; MOENG et al., 2004; SULLIVAN; MCWILLIAMS; MOENG, 1994; MARQUES FILHO, 2004; GIOIA, 2003; RIZZA et al., 2006; DEGRAZIA et al., 2007, 2009; PUHALES, 2008; PUHALES et al., 2010). O processo de separação de escalas neste modelo LES é realizado por um filtro do tipo espectral agudo, definido como

$$k_c = \frac{\pi}{\Delta x} \quad (5.19)$$

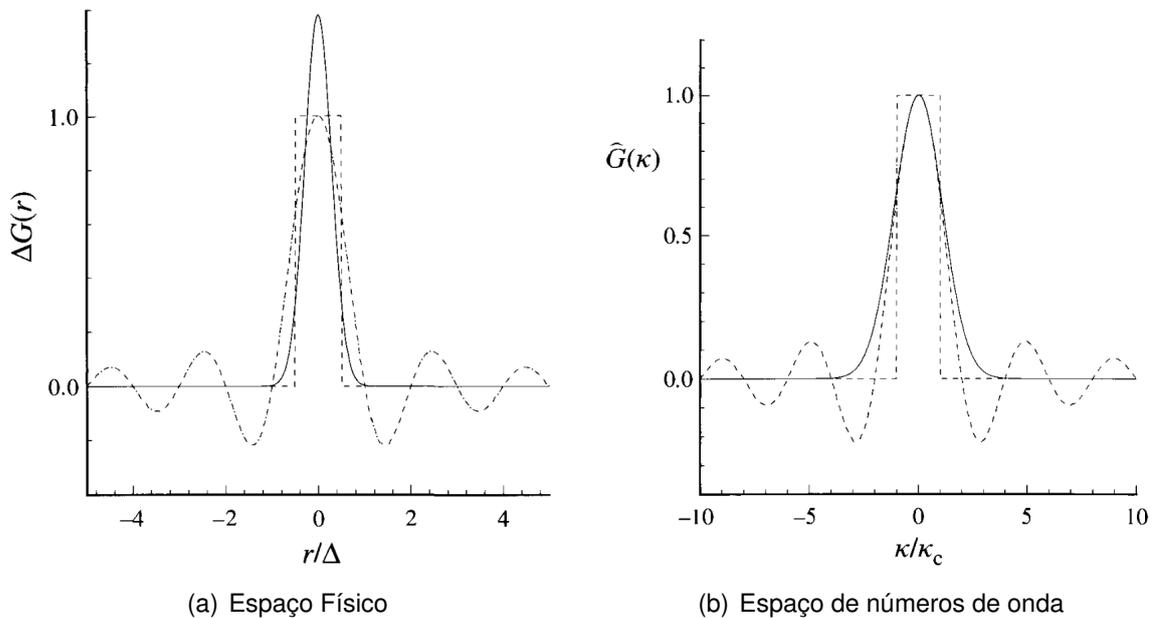


Figura 5.3 – Comportamento das funções filtro tipo caixa (pontilhado), gaussiana (linha cheia) e filtro agudo (tracejado). A figura 5.3(a) mostra o comportamento em um espaço físico (onde $r = (x_i - x'_i)$) e a 5.3(b) em um espaço de números de onda, sendo que em (a) é a própria função G e em (b) a função de transferência \hat{G} associada a função filtro. Adaptado de Pope (2000)

onde Δx é o espaçamento de grade no plano horizontal.

5.3.1 Esquema numérico

A escolha do esquema numérico deste modelo é baseada no comportamento da turbulência na CLP. Em relação à homogeneidade, a turbulência atmosférica apresenta um comportamento totalmente diferente na horizontal e vertical. A quase homogeneidade em todos os planos horizontais possibilita a aplicação de condições de contorno periódicas nas direções x e y . Por outro lado, na vertical, a presença de fontes e sumidouros de turbulência distribuídos de forma não uniforme implica em uma não homogeneidade vertical (GIOIA, 2003). Desta forma, um esquema misto de expansão em séries de Fourier, utilizada nas componentes horizontais, e diferenças finitas na vertical é apropriado para a discretização das equações de movimento.

A formulação matemática do modelo pseudo-espectral permite calcular as derivadas de qualquer ordem no plano horizontal do modelo, por exemplo a derivada da componente v na direção y , levando-se esta dimensão para um espaço de Fourier (MOENG, 1984 apud FOX; ORSZAG, 1973),

$$\tilde{v}(x, k_m, z) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{v}(x, y_n, z) e^{-ik_m y_n} \quad (5.20)$$

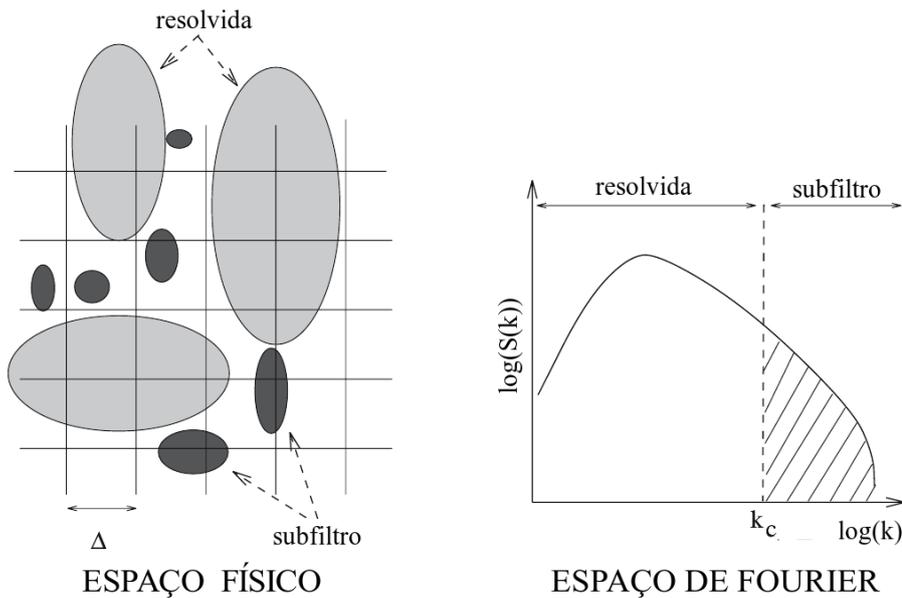


Figura 5.4 – Atuação do filtro no escoamento. Em termos do espaço físico, os turbilhões resolvidos são aqueles maiores que as dimensões da grade numérica Δ . Em termos do espaço de números de onda – espaço de Fourier – os resolvidos são aqueles com número de onda menores que k_c . Adaptado de Sagaut (1998)

A derivada de \tilde{v} em relação a y é dada por

$$\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right)_n = \sum_{m=-(N/2)+1}^{N/2} ik_m \tilde{v}(x, k_m, z) e^{-ik_m y_n} \quad (5.21)$$

onde N é o número total de pontos no plano, m é o ponto onde está sendo realizada a transformada, e k_m é o número de onda dado por

$$k_m = 2\pi \frac{m}{N} \frac{1}{\Delta y} \quad (5.22)$$

O avanço dos campos tridimensionais no tempo é realizado através da aplicação do esquema numérico explícito de terceira ordem – Runge-Kuta (RK3). A estabilidade numérica é verificada a cada interação temporal n do modelo, através de um parâmetro cfl (Número de Courant-Friedrich-Levy). Neste modelo LES o número $cfl = 0,6$. Este esquema temporal implica em um passo de tempo Δt variável durante a simulação, pois se torna dependente do campo de velocidade e da estabilidade da camada.

$$\Delta t = cfl \frac{\Delta x_i}{\max(u_i)} \quad (5.23)$$

5.3.2 Condições de contorno

5.3.2.1 Condições de contorno laterais

O uso do método pseudo-espectral nas componentes horizontais do modelo impõe condições de contorno periódicas, ou seja, os valores obtidos na borda de fuga do modelo são utilizados como entrada no outro lado do domínio do plano $x - y$. Esta condição facilita o processo computacional pois elimina o problema das bordas laterais mal definidas. Todavia ele é apropriado somente para condições de terreno homogêneo.

5.3.2.2 Condições de contorno inferior

A borda inferior, ou contorno de superfície, no modelo LES é uma interface rígida onde a velocidade vertical é nula. A conexão entre os dados de superfície, que são utilizados como forçante no modelo, e o primeiro ponto da grade numérica é realizada através da teoria de similaridade de Monin-Obukov, através das relações (STULL, 1988):

$$\frac{\partial V_s}{\partial z} = \frac{u_* \phi_m}{kz} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\theta_* \phi_h}{kz} \quad (5.25)$$

onde V_s é a velocidade do escoamento dada por $V_s = \sqrt{u^2 + v^2}$, θ é a temperatura potencial, u_* a velocidade de fricção, θ_* é a escala de temperatura superficial, ϕ_m a função de estabilidade mecânica de Monin-Obukov, ϕ_h a função de estabilidade térmica de Monin-Obukov, k é a constante de Von Karman e z é a altura em relação a superfície.

5.3.2.3 Condições de contorno superior

As condições de contorno superior impõem velocidade vertical média nula, fluxos de subgrade nulos, barotropia e gradiente linear de temperatura potencial. Isto significa que não há variação da velocidade entre os dois últimos pontos verticais da grade e a variação de temperatura é linear. Matematicamente, definimos estas condições da seguinte maneira

$$\frac{\partial V_s}{\partial z} = 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \gamma \quad (5.27)$$

$$\tilde{w} = 0 \quad (5.28)$$

Este tipo de condição de contorno não permite a transmissão de ondas de gravidade que podem ser geradas em uma camada estável. Desta forma, para que esta condição artificial não se propague para o restante do domínio durante a simulação, a condição de contorno superior é estabelecida bem acima do topo da camada limite planetária simulada (MARQUES FILHO, 2004; GIOIA, 2003).

5.3.3 Equações para as escalas resolvidas

De acordo com Moeng (1984), a escala resolvida do modelo LES é descrita pelo seguinte conjunto de equações³:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \widetilde{\zeta_z \tilde{v}} - \widetilde{\zeta_y \tilde{w}} - \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{uu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{uw}}{\partial z} - f(v_g + \tilde{v}) \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \widetilde{\zeta_x \tilde{w}} - \widetilde{\zeta_x \tilde{u}} - \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{vu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{vv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{vw}}{\partial z} + f(u_g - \tilde{u}) \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = \widetilde{\zeta_y \tilde{u}} - \widetilde{\zeta_x \tilde{v}} + \frac{\tilde{\theta}}{\theta_o} g - \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{wu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{wv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{ww}}{\partial z} - \left\langle \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \right\rangle \quad (5.31)$$

onde ζ_α é a vorticidade do campo de velocidade do escoamento na direção x_α , θ é a temperatura potencial, θ_o a temperatura potencial de referência, Π a pressão modificada dada por $\Pi = \left(\frac{\tilde{u}_\alpha^2}{2} + \frac{R_{\alpha\alpha}}{3} + \frac{\tilde{p}}{\rho} \right)$, $R_{\alpha\alpha}$ representa a energia cinética de subgrade ou sub-filtro e u_g e v_g as componentes zonal e meridional, respectivamente, do vento geostrófico. Na equação (5.31) o que garante a condição de velocidade média vertical nula e também a aceleração vertical média nula é a última parcela do segundo termo da equação, mantendo assim o equilíbrio hidrostático (DEARDORFF, 1972).

Para resolver o campo de pressão modificado utiliza-se a equação de Poisson (MOENG, 1984):

$$\nabla^2 \Pi = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \quad (5.32)$$

onde H_x , H_y , e H_z são obtidos das equações (5.29), (5.30) e (5.31), respectivamente, através da soma das parcelas do lado direito de cada equação, exceto os gradientes de pressão modificada (MOENG, 1984).

A equação que torna este sistema de equações um sistema fechado é a equação

³A demonstração para obtenção das equações do modelo LES é apresentada no apêndice A, página 132

de conservação da temperatura potencial, dada por (MOENG, 1984)

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} = -\tilde{u} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} - \tilde{v} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} - \tilde{w} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} - \tilde{w} \frac{\partial \theta_o}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{\theta u}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{\theta v}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{\theta w}}{\partial z} \quad (5.33)$$

onde $\tau_{\theta j}$ representa o fluxo cinemático turbulento de energia na forma de calor sensível de subfiltro.

Os tensores τ_{ij} e $\tau_{\theta j}$ são desconhecidos e devem ser parametrizados pelo modelo LES. A parametrização destes termos é realizada através de um modelo de subgrade ou subfiltro. Nestes termos estão as grandes incertezas do modelo LES, principalmente em regiões próximas a superfície e camada de entranhamento onde os turbilhões menores são dominantes.

5.3.4 Modelo de subfiltro

O modelo de subfiltro tem como objetivo parametrizar os tensores τ_{ij} e $\tau_{\theta j}$ presentes nas equações do modelo LES. Estes tensores estão relacionados com a escala resolvida através dos coeficientes de difusividade turbulenta, obtidos a partir do modelo de viscosidade de Smagorinsky (1963) (MARQUES FILHO, 2004).

O modelo de viscosidade de Smagorinsky é um modelo não linear que impõe um equilíbrio local entre a produção mecânica de energia cinética turbulenta (ECT) e a dissipação viscosa. Além disto, supõe uma cascata de transferência onde a energia passa dos grandes turbilhões para os de menor estrutura. Porém, em condições convectivas, o principal forçante da CLP é o térmico, o que torna o modelo de Smagorinsky pouco eficaz neste caso. Adicionalmente, próximo a superfície, o cisalhamento do campo de velocidade induz a uma quebra na isotropia das flutuações de velocidade, fazendo com que os turbilhões dominantes no escoamento, nesta região, sejam menores do que a escala do filtro. Assim, estes fatores comprometem a capacidade do modelo LES em reproduzir o escoamento turbulento na camada superficial.

Tendo em vista esses problemas fenomenológicos e baseando-se na descrição estatística da turbulência, Sullivan, McWilliams e Moeng (1994) propuseram um modelo de subgrade. Neste modelo o tensor de cisalhamento é dividido em dois termos: um isotrópico – dependente da flutuação do tensor de deformação do escoamento e um termo não homogêneo relacionado com a média espacial horizontal do tensor de deformação. Este modelo de subgrade também garante o perfil log-linear da velocidade do vento junto a superfície e satisfaz a teoria de similaridade de Monin-Obukov.

Os tensores que representam os fluxos cinemáticos turbulentos de momento e de energia na forma de calor de subgrade são dados respectivamente por (SULLIVAN;

MCWILLIAMS; MOENG, 1994)

$$\tau_{ij} = -2K_M\gamma S_{ij} - 2K_{\langle M \rangle} \langle S_{ij} \rangle \quad (5.34)$$

$$\tau_{\theta j} = -K_H \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_j} \right) \quad (5.35)$$

onde $\tilde{}$ representa o operador média sobre volume, $\langle \rangle$ o operador média espacial horizontal, K_M é o coeficiente de difusividade turbulenta de momento isotrópico, $K_{\langle M \rangle}$ é o coeficiente de difusividade turbulenta de momento não homogêneo, K_H é o coeficiente de difusividade turbulenta de energia na forma de calor, γ é o fator de isotropia e S_{ij} é o tensor de deformação do escoamento, sendo este definido por

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.36)$$

e o fator de isotropia é dado por

$$\gamma = \left(\frac{(S_{ij} - \langle S_{ij} \rangle)^2}{\langle (S_{ij} - \langle S_{ij} \rangle)^2 \rangle + \langle S_{ij} \rangle^2} \right)^{1/2} \quad (5.37)$$

O fator de isotropia é definido como a razão entre a taxa de estiramento dos vórtices de pequena e grande escala. Próximo ao contorno inferior, o fator de isotropia tende a zero enquanto nas regiões superiores da CLP tende a um (SULLIVAN; MCWILLIAMS; MOENG, 1994; GIOIA, 2003).

Os coeficientes de difusividade turbulenta são dados pelas seguintes expressões:

$$K_M = c_k \ell \sqrt{e} \quad (5.38)$$

$$K_H = \left(1 + 2 \frac{\ell}{\Delta} \right) K_M \quad (5.39)$$

onde e é a energia cinética turbulenta associada à subgrade e c_k uma constante cujo o valor, neste modelo é 0,1 (MOENG, 1984), Δ é o espaçamento médio da grade dado por $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ e ℓ é a escala de comprimento de mistura de subgrade. De acordo com Deardorff (1980), para contemplar os efeitos da estabilidade local da camada, ℓ é definido como o valor mínimo entre duas escalas (MOENG, 1984; MARQUES FILHO, 2004)

$$\ell = \min \left[0, 76 \sqrt{e} \left(\frac{g}{\theta_o} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right)^{-1/2} ; \Delta \right] \quad (5.40)$$

onde a primeira escala esta relacionada com a frequência de Brünt-Vaisäla. Em condições bastante estáveis $K_H \approx K_M$ e em condições convectivas $K_H = 3K_M$. Para uma

CLP homogênea na horizontal, a parte não homogênea do coeficiente de difusão de momento é dado por

$$K_{\langle M \rangle} = (c_k \ell)^2 \left[\left(\frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \langle \tilde{v} \rangle}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.41)$$

A energia cinética turbulenta na escala de subgrade é calculada a partir da seguinte equação

$$\underbrace{\frac{\partial e}{\partial t}}_{(I)} = - \underbrace{\tilde{u}_j \frac{\partial e}{\partial x_j}}_{(II)} - \underbrace{\tau_{ij} S_{ij}}_{(III)} + \underbrace{\frac{g}{\langle \theta \rangle} \tau_{\theta w}}_{(IV)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(2K_M \frac{\partial e}{\partial x_i} \right)}_{(V)} - \underbrace{\varepsilon}_{(VI)} \quad (5.42)$$

onde (I) corresponde ao termo de tendência ou “armazenamento” de energia cinética turbulenta (variação local), (II) corresponde ao termo advectivo, (III) à parametrização do termo de produção mecânica, (IV) a parametrização para o termo de empuxo, (V) a parametrização do termo de transporte total (turbulento e flutuação de pressão) e (VI) é a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta, dada por (MOENG, 1984)

$$\varepsilon = c_\varepsilon \frac{e^{3/2}}{\ell} \quad (5.43)$$

e $c_\varepsilon = 0,19 + 0,74(\ell/\Delta)$.

Contudo, estudos realizados em laboratório e com simulações DNS mostram que o processo de transferência de energia cinética turbulenta nos pequenos turbilhões também ocorre dos menores para os maiores turbilhões (cascata inversa). Assim, os modelos de subgrade ainda precisam de muito aprimoramento para representar fidedignamente a turbulência próxima a superfície do escoamento (MARQUES FILHO, 2004).

5.4 Equação de balanço da energia cinética turbulenta para a escala resolvida

Como visto na sessão 5.3.4 o modelo de subgrade calcula, através de parametrizações, a equação da energia cinética turbulenta para aquela escala. Entretanto, para a escala resolvida, são obtidas apenas as equações de movimento. Logo, a equação da energia cinética turbulenta deve ser inferida a partir das flutuações, em relação a algum processo de média, das variáveis calculadas pelo modelo LES, ou seja, flutuações do campo de velocidade, temperatura potencial virtual e pressão. Utilizando-se um processo de médias que consiste na média aritmética de cada variável em um plano horizontal, podemos escrever uma variável $\tilde{\xi}$ referente a escala resolvida como a soma entre uma parte média e uma flutuação em relação a esta média, logo tem-se

$$\tilde{\xi} = \langle \tilde{\xi} \rangle + \tilde{\xi}' \quad (5.44)$$

onde $\langle \rangle$ representa a operação média espacial, definida (em cada nível vertical) como

$$\langle \tilde{\xi} \rangle = \frac{1}{(n_x n_y)} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \tilde{\xi}_{ij} \quad (5.45)$$

onde n_α representa o número de pontos em cada direção do plano horizontal.

Considerando-se este tipo de média na equação da energia cinética turbulenta (4.11) e definindo $K = 0,5 (\tilde{u}_i')^2$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} = & - \langle \tilde{u}_j \rangle \frac{\partial \langle K \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \tilde{u}_j' K \rangle + \frac{g_i}{\langle \tilde{\theta}_v \rangle} \langle \tilde{u}_i' \tilde{\theta}_v' \rangle - \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' \rangle \frac{\partial \langle \tilde{u}_i \rangle}{\partial x_j} \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \tilde{u}_i' \tilde{p}' \rangle - \langle \varepsilon \rangle_{le} \end{aligned} \quad (5.46)$$

A partir da operação de média aplicada na equação (5.46) podemos fazer algumas simplificações nessa equação. Levando-se em conta as seguintes imposições:

- As derivadas em relação as componentes horizontais (x e y) dos valores médios são nulas. Isto se deve ao fato do processo de média ser efetuado em relação a cada plano horizontal, ou seja, os valores médios são constantes em relação a x e y .
- A componente média da velocidade vertical é nula ($\langle \tilde{w} \rangle = 0$).

Aplicando-se estas imposições na equação (5.46) obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} = & - \langle \tilde{u}' \tilde{w}' \rangle \frac{\partial \langle \tilde{u} \rangle}{\partial z} - \langle \tilde{v}' \tilde{w}' \rangle \frac{\partial \langle \tilde{v} \rangle}{\partial z} + \frac{g}{\langle \tilde{\theta}_v \rangle} \langle \tilde{w}' \tilde{\theta}_v' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{w}' K \rangle \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{w}' \tilde{p}' \rangle - \langle \varepsilon \rangle_{le} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Na equação (5.47) não aparecem os termos de advecção média e apenas as diferenciações na vertical são diferentes de zero (consequência da definição da operação média). É importante salientar que a energia cinética turbulenta dissipada na escala resolvida é transferida para a subgrade. Este transporte entre escalas é determinado pelos termos de divergência do tensor de subgrade e gradiente de energia cinética turbulenta de subgrade presentes nas equações de movimento para a escala resolvida (equações (5.29), (5.30), (5.31)). Assim, o termo da dissipação na escala resolvida (ou transporte de

energia cinética turbulenta entre escalas (processo de cascata) é dado por:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle_{le} = & - \left\langle \tilde{u}' \left(\frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial e}{\partial x} \right) \right\rangle \\ & - \left\langle \tilde{v}' \left(\frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial e}{\partial y} \right) \right\rangle \\ & - \left\langle \tilde{w}' \left(\frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{zz}}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial e}{\partial z} \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (5.48)$$

A figura 5.5 ilustra a diferença entre a taxa de dissipação da escala resolvida e da escala de subfiltro. A taxa de dissipação $\langle \varepsilon \rangle_{le}$ representa a transferência de energia para a escala de subfiltro, enquanto a taxa de dissipação que aparece na equação equação 5.42 representa a dissipação de ECT na forma de calor.

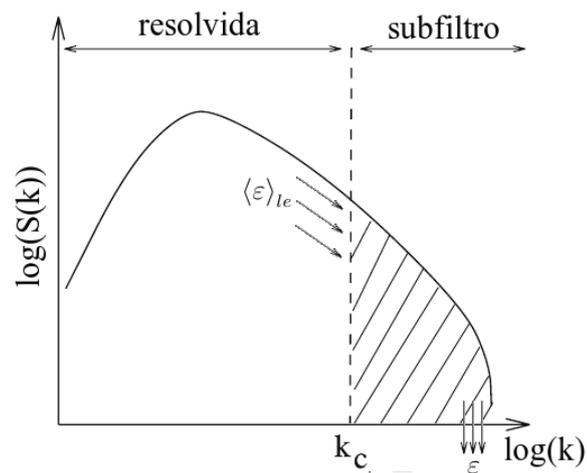


Figura 5.5 – Representação das taxas de dissipação da escala resolvida e de subfiltro no espectro de ECT.

6 EXPERIMENTO NUMÉRICO

Para a realização do experimento numérico utilizando o modelo LES foram empregados dados experimentais do projeto Candiota 2007, realizado pelo Laboratório de Micrometeorologia da UFSM na cidade de Candiota, RS (MORAES, 2000). O experimento consiste na simulação do ciclo diário da CLP, totalizando, aproximadamente, $26h$ simuladas. O dia escolhido para o início do experimento numérico foi 30 de setembro de 2007, às 9h da manhã (horário local). Este dia foi escolhido devido à ausência de nebulosidade sobre a região de interesse e à presença de condições de umidade relativa abaixo dos 100%. A ausência de nebulosidade é uma condição necessária já que o modelo LES de Moeng (1984) não resolve e nem mesmo parametriza a cobertura de nuvens na CLP.

O domínio de simulação corresponde a uma caixa medindo $4km$ nos eixos horizontais $x - y$ e $2km$ na vertical. A discretização do domínio corresponde a uma grade numérica de 128 pontos em cada uma das dimensões horizontais (x e y) e 192 pontos da direção vertical (z). O espaçamento de grade é o quociente entre o tamanho do domínio e o número de pontos em uma dada direção. Para esta simulação temos: $\Delta x = \Delta y = 31,25m$ e $\Delta z \approx 10,42m$. A simulação utilizou um tempo computacional de 140 horas (aproximadamente) sendo gerados em torno de $30Gb$ de dados. O passo de tempo da simulação é variável e depende das características do escoamento. O gráfico da figura 6.1 mostra a variação do passo de tempo Δt em função do número de interações.

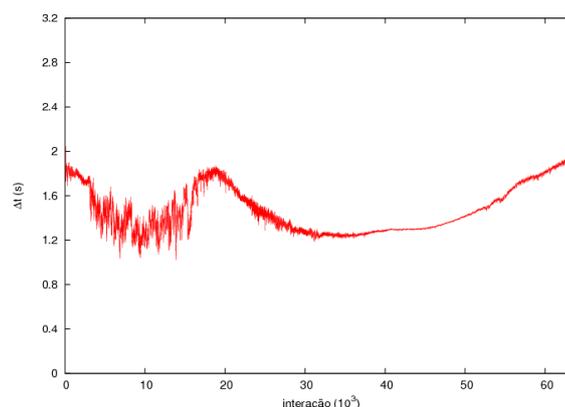


Figura 6.1 – Variação do passo de tempo Δt durante a simulação do ciclo diário da CLP.

6.1 Condições iniciais

Como qualquer modelo numérico, o LES de Moeng (1984) necessita de soluções iniciais para a simulação. Esta condição inicial inclui perfis verticais de velocidade do vento, temperatura potencial e umidade específica, bem como parâmetros da CLP: velocidade de fricção (u_*), fluxo de energia na forma de calor na superfície ($\langle w'\theta' \rangle_0$) e a altura da camada (z_i). Os valores de u_* e $\langle w'\theta' \rangle_0$ foram obtidos de dados experimentais. Neste trabalho, utilizou-se o valor inicial de $u_* = 0.52 \text{ms}^{-1}$ e $\langle w'\theta' \rangle_0 = 0.04 \text{Kms}^{-1}$. O valor de z_i bem como os perfis verticais de temperatura, umidade específica e velocidade do vento não puderam ser estimados a partir de medidas devido a falta de sondagens verticais em todo o perfil da CLP. Desta forma, foram utilizados perfis extraídos dos campos de análise do modelo GFS (Global Forecast System), obtidos a partir do banco de dados do NCEP (National Centers for Environmental Prediction – EUA – <http://www.emc.ncep.noaa.gov/>). O GFS é um modelo de previsão de tempo global que conta com uma resolução espacial de um grau (latitude e longitude) e é executado a cada seis horas. O campo de análise é o campo inicial do modelo. Ele é obtido através do tratamento computacional de dados mensurados a partir de estações meteorológicas de superfície, altitude, imagens de satélite, boias oceânicas, etc.. O valor de altura inicial da CLP empregado foi de $z_i \approx 200 \text{m}$. Portanto, as condições iniciais para a simulação LES foram obtidas em parte de dados experimentais e em parte de um modelo de previsão do tempo. A figura 6.2 mostra os perfis iniciais de temperatura potencial e umidade relativa utilizados na inicialização do modelo, já a figura 6.3 mostra o perfil das duas componentes do vento (u e v).

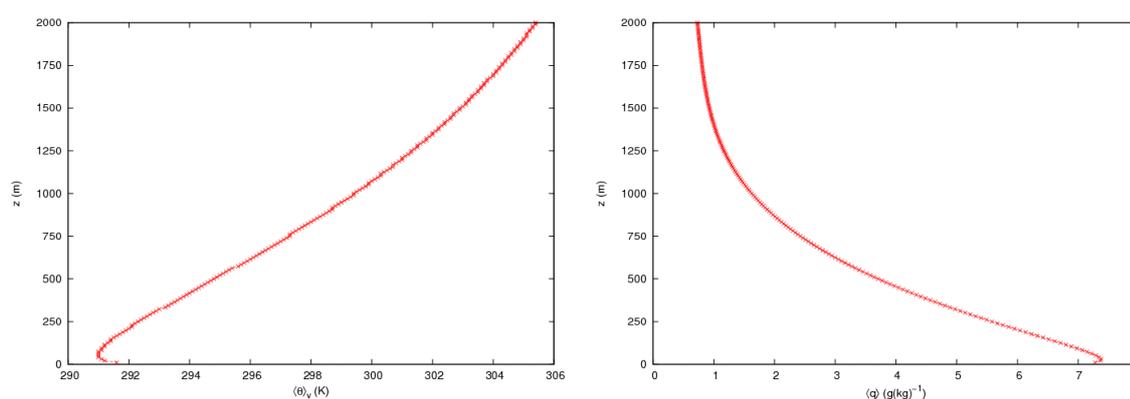


Figura 6.2 – Perfis iniciais de temperatura potencial e umidade específica obtidos a partir da análise do modelo GFS

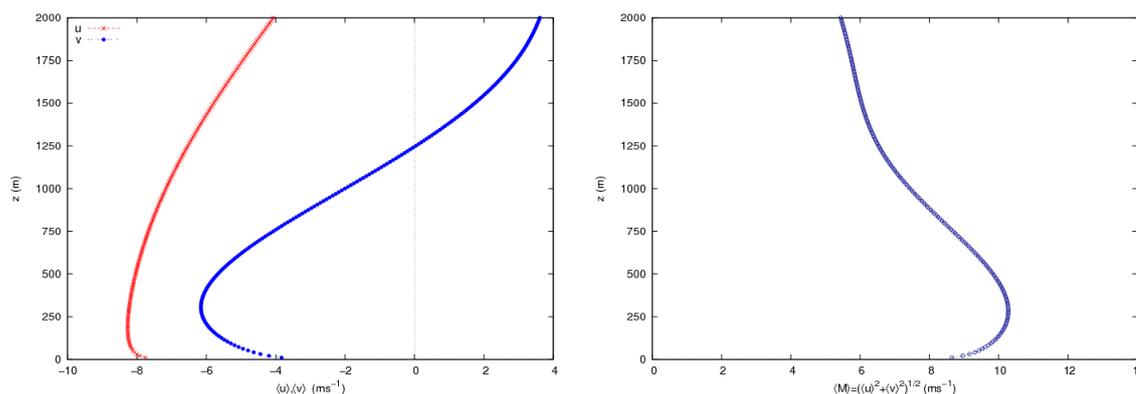


Figura 6.3 – Perfis iniciais das componentes e velocidade do vento obtidos a partir da análise do modelo GFS

6.2 Forçantes

6.2.1 Superfície

Para realizar a simulação, o modelo LES de Moeng (1984) utiliza valores de fluxo de energia na forma de calor ou temperatura, ambos em superfície para forçar o primeiro nível do modelo através da teoria de similaridade de Monin-Obukov. O mesmo ocorre para a umidade. Neste trabalho utilizou-se os dados de temperatura e umidade específica medidos a $0,3m$ do solo com taxa de aquisição de $1Hz$. Estes dados foram tratados através de um processo de média móvel de $30min$ com um passo de tempo de $3min$ a cada janela.

Os dados de superfície foram introduzidos no modelo LES através de uma função do tempo ($T = T(t)$ e $q = q(t)$). As funções que descrevem as variações de temperatura e umidade específica no tempo foram obtidos a partir da interpolação polinomial da série de dados de cada uma das variáveis. A figura 6.4 apresenta os gráficos da temperatura e umidade específica de superfície.

6.2.2 Grande escala

A conexão entre o escoamento na camada limite planetária e o escoamento em grande escala (no modelo LES) é realizado pelo gradiente de pressão na escala sinótica. O gradiente de pressão no modelo LES é introduzido como a parte média (tomando uma média espacial em cada plano (x, y) do gradiente de pressão). Em geral, o gradiente de pressão da escala sinótica é representado pela aproximação geostrófica, e introduzido na equação para a escala resolvida do modelo (equações (5.29), (5.30) e (5.31)) através

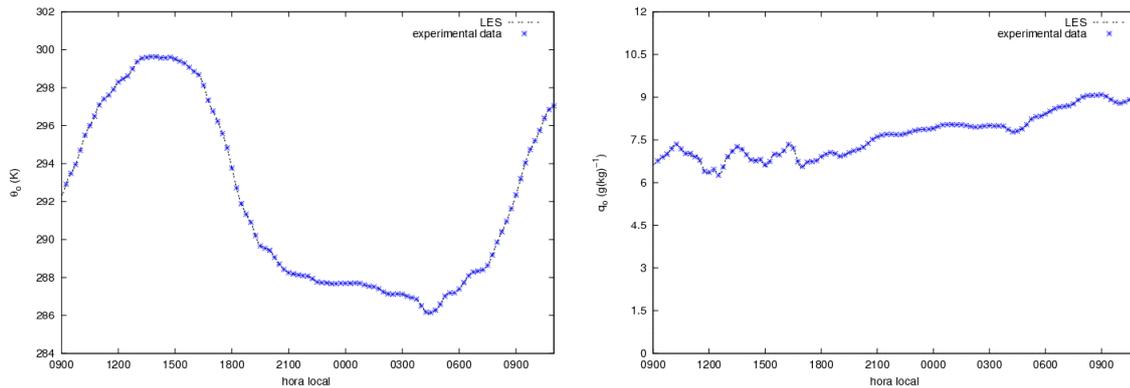


Figura 6.4 – Dados experimentais de temperatura da superfície e umidade relativa interpolados e incorporados ao modelo LES como forçantes de superfície. A linha indica a função interpoladora e os pontos o valor experimental de cada um dos forçantes.

do vento geostrófico. Esta aproximação é utilizada quando não se tem uma descrição do campo do gradiente de pressão, ou algo equivalente. Assim, parametrizamos o gradiente de pressão a partir de outros dados meteorológicos. Todavia, a análise do modelo GFS possui o campo de geopotencial (variável cujo o gradiente também é relacionada ao vento geostrófico e, portanto, ao campo do gradiente de pressão). Assim, o gradiente de pressão foi introduzido diretamente no modelo LES a partir do cálculo do vento geostrófico, obtido a partir dos campos de geopotencial da análise do GFS. Além disso, como a assimilação de dados (análise) do modelo GFS é realizada a cada seis horas, pode-se incluir a evolução temporal do vento geostrófico no modelo LES. Para isso, inicialmente, obteve-se polinômios (através de interpolação em função da altura) para cada um dos perfis de vento geostrófico, ou seja

$$U_{gi} = \sum_{k=0}^n [\eta_{j,k} z^k] \quad (6.1)$$

onde o índice k representa a variação na altura z , j o instante da análise e i a componente do vento geostrófico. Para se obter os perfis do vento geostrófico nos instantes entre duas análises consecutivas j e $j + 1$, fez-se uma interpolação linear entre os coeficientes η_{jk} . Assim, a função que descreve o vento geostrófico entre duas análises consecutivas (instantes t_f e t_0) é dada por

$$U_{gi}(z, t) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{(\eta_{j+1,k} - \eta_{j,k})}{t_f - t_0} (t - t_0) z^k \right] \quad (6.2)$$

Os diferentes perfis interpolados verticalmente, a partir dos dados do modelo GFS são apresentados na figura 6.5. Já a variação temporal, obtida a partir da interpolação linear dos coeficientes de cada um dos perfis é mostrada na figura 6.6.

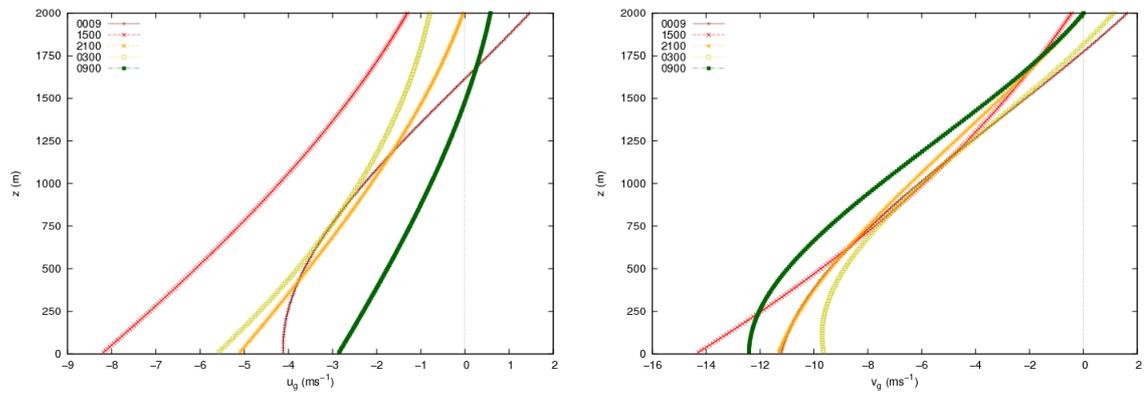


Figura 6.5 – Perfis verticais do vento geostrófico. A componente zonal e meridional (u_g e v_g) foram calculadas a partir do campo de geopotencial das análises do modelo GFS.

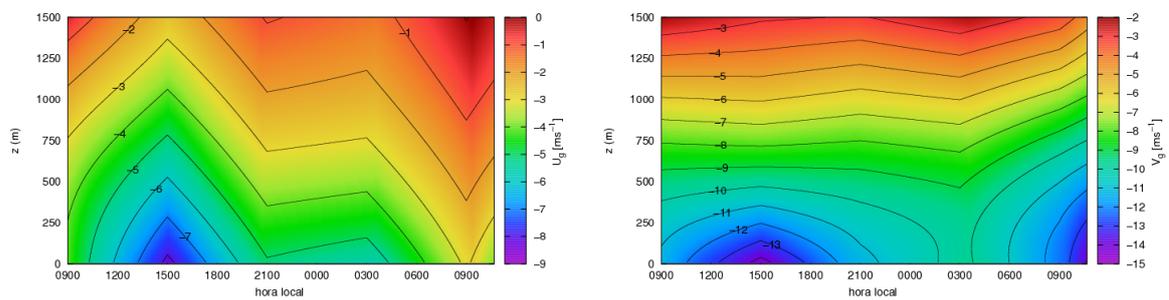
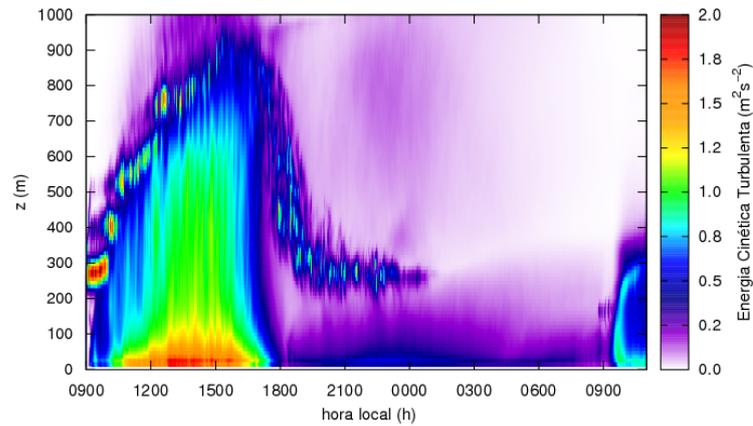


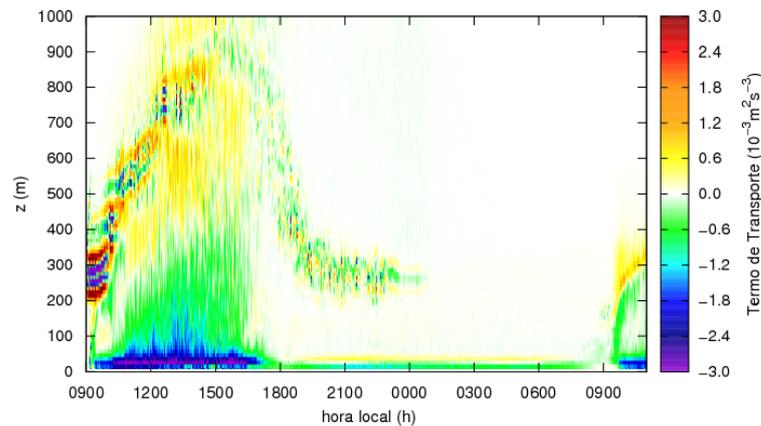
Figura 6.6 – Variação temporal do vento geostrófico. Obtida a partir da interpolação linear dos perfis apresentados na figura 6.5.

7 TRANSPORTE DE ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Para a realização do experimento numérico foi desenvolvida uma simulação do ciclo diário da CLP. A figura 7.1 apresenta dois gráficos: a figura 7.1(a) mostra a evolução, tanto temporal como na direção vertical, da ECT média na CLP. Nesta figura, a escala de cores representa a intensidade da ECT e, conseqüentemente, da turbulência. Assim, verifica-se que a turbulência é mais intensa junto ao solo e que seu desenvolvimento vertical vai evoluindo durante o dia com a formação da CLC. No final da tarde, a turbulência decai durante a formação da CLE. A figura 7.1(b) indica o transporte total de ECT, ou seja, a soma dos dois mecanismos que realizam transporte.



(a) Energia Cinética Turbulenta



(b) Transporte total

Figura 7.1 – Evolução temporal e espacial da energia cinética turbulenta (a) e do termo de transporte total de ECT (b). A escala de cores indica a intensidade das variáveis.

Os termos de transporte de ECT são dados pela equação 4.4 (termos IV e VI). No modelo LES, os termos de transporte correspondem a soma dos termos de transporte em ambas as escalas (resolvida e de subgrade). Assim, o transporte total de ECT (ou termo de transporte de ECT) é dado por

$$\langle T \rangle = \langle T^t \rangle + \langle T^p \rangle \quad (7.1)$$

onde $\langle T \rangle$ é o transporte total de ECT na CLP, $\langle T^t \rangle$ e $\langle T^p \rangle$ são respectivamente, os termos de transporte turbulento e transporte devido a flutuação de pressão. Em termos das escalas do modelo LES, cada um dos termos de transporte é dado por

$$\langle T^t \rangle = \langle T^t \rangle_{LE} + 0,5 \langle T \rangle_{SGS} \quad (7.2)$$

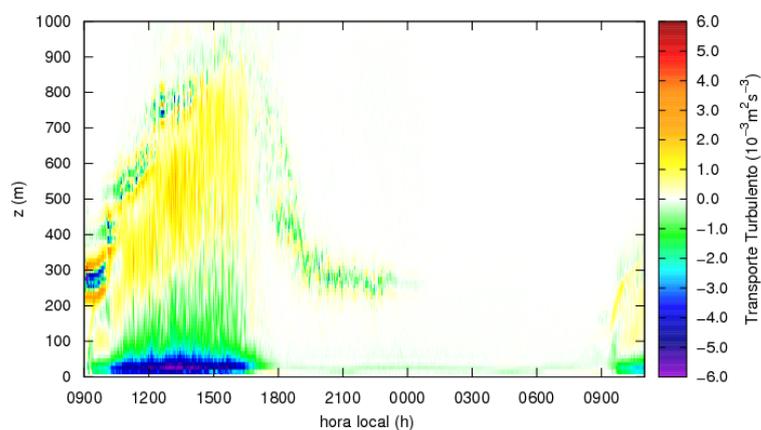
$$\langle T^p \rangle = \langle T^p \rangle_{LE} + 0,5 \langle T \rangle_{SGS} \quad (7.3)$$

onde $\langle T^t \rangle_{LE}$ e $\langle T^p \rangle_{LE}$ são, respectivamente, os termos de transporte turbulento e por flutuação de pressão na escala resolvida (fornecidos pela equação 5.47) e $\langle T \rangle_{SGS}$ o termo de transporte de ECT de subgrade, que compreende os dois mecanismos de transporte nesta escala, como descrito no modelo de subgrade. Pelas equações 7.2 e 7.3 a escala de subgrade colabora com porções idênticas para cada mecanismo de transporte de ECT. Tal consideração ficará clara no decorrer do texto (página 88) quando a parametrização do transporte de ECT for discutida. Todavia, o mecanismo de transporte de ECT na escala de subgrade é muito menor do que o na escala resolvida (MOENG et al., 2004), podendo até ser, em primeira hipótese, desconsiderado.

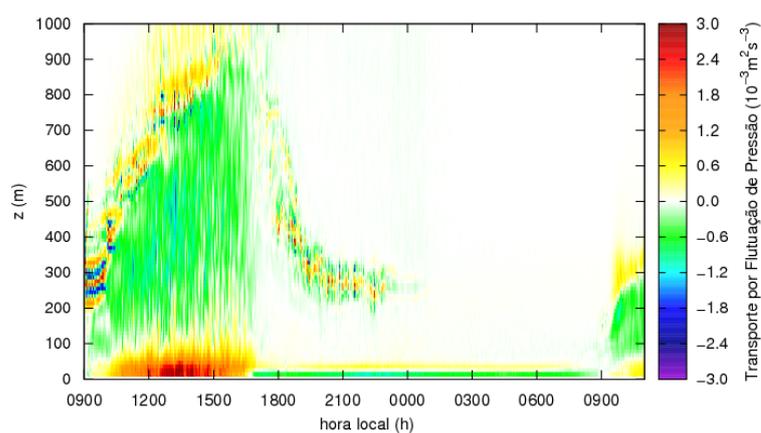
As figuras 7.2(a) e 7.2(b) exibem a evolução temporal e espacial dos termos de transporte turbulento e por flutuação de pressão, respectivamente. Analisando estas duas figuras nota-se que os termos de transporte são, em geral, anticorrelacionados, ou seja, quando um é positivo o outro é negativo. Além disso, são muito mais intensos durante o dia, na CLC.

O objetivo principal deste trabalho é obter uma parametrização para o transporte de ECT na CLC. Para se obter tais resultados foram empregados dados de diferentes horários da CLC, afim de encontrar uma parametrização que, na média, fosse representativa desse particular estado da CLP. A tabela 7.1 apresenta os diferentes horários e parâmetros que caracterizam a CLC em cada um desses horários. A partir dos horários apresentados nesta tabela foram extraídos os perfis verticais de ECT e os termos de transporte da equação de balanço de ECT.

Os valores de z_i apresentados na tabela 7.1 foram obtidos a partir da metodologia proposta por Sullivan et al. (1998). Nesta metodologia a altura da camada limite é obtida a partir do perfil de temperatura potencial, pois a altura da camada limite é definida, para cada coordenada horizontal da grade numérica, como a altura na qual o gradiente vertical



(a) Transporte turbulento



(b) Transporte por flutuação de pressão

Figura 7.2 – Evolução temporal e espacial do termo de transporte turbulento de ECT (a) e do termo de transporte por flutuação de pressão (b) A escala de cores indica a intensidade das variáveis.

de temperatura é máximo, sendo $z_{ig}(x, y)$ a altura da camada limite para cada coordenada horizontal da grade numérica. Dessa maneira, z_i é dada por

$$z_i = \langle z_{ig}(x, y) \rangle \quad (7.4)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ representa o operador média no plano horizontal. As demais variáveis são extraídas do modelo de superfície, descrito pelas condições de contorno superficiais durante a simulação.

n	<i>hora local</i>	z_i	$\langle w'\theta'_v \rangle_s$	L	θ_{vs}	w_*	u_*
1	10h55min	609,9	0,1948	-54,995	297,0	1,577	0,331
2	11h07min	637,7	0,1975	-52,659	297,3	1,607	0,321
3	11h19min	670,9	0,1866	-55,630	297,5	1,603	0,322
4	11h31min	698,5	0,1767	-55,525	297,6	1,596	0,317
5	11h43min	727,6	0,1811	-54,097	297,9	1,630	0,310
6	11h54min	747,9	0,1848	-55,236	298,2	1,656	0,309
7	12h05min	776,8	0,1889	-54,512	298,4	1,689	0,304
8	12h16min	802,4	0,1753	-56,707	298,5	1,665	0,305
9	12h28min	836,6	0,1700	-59,124	298,6	1,671	0,305
10	12h39min	845,3	0,1746	-58,337	298,8	1,691	0,303
11	12h50min	866,1	0,1887	-56,423	299,1	1,749	0,297
12	13h00min	881,2	0,1951	-55,456	299,4	1,778	0,293
13	13h10min	902,7	0,1921	-55,929	299,5	1,783	0,292
14	13h21min	921,6	0,1791	-57,564	299,6	1,754	0,293
15	13h32min	947,6	0,1681	-58,458	299,6	1,733	0,291
16	13h43min	963,0	0,1565	-63,106	299,6	1,702	0,297
17	13h54min	974,1	0,1445	-67,412	299,6	1,663	0,303
18	14h05min	992,9	0,1330	-76,731	299,6	1,628	0,314
19	14h16min	991,2	0,1194	-81,985	299,6	1,570	0,321
20	14h28min	1109,0	0,1079	-95,769	299,6	1,576	0,326
21	14h40min	1016,0	0,1028	-89,594	299,6	1,506	0,328
22	15h04min	1041,0	0,0778	-118,027	299,5	1,384	0,357
23	15h28min	1097,0	0,0577	-147,824	299,3	1,275	0,378

Tabela 7.1 – Parâmetros que descrevem a CLC. $\langle w'\theta'_v \rangle_s$ é o fluxo de energia na forma de calor na superfície, L é o comprimento de Obukov, θ_{vs} é a temperatura potencial virtual na superfície e w_* e u_* são, respectivamente, as escalas de velocidade convectiva e de fricção. Todos os valores apresentados na tabela estão no sistema internacional de unidades.

7.1 Termos de transporte de ECT na CLC

A figura 7.3 mostra os perfis verticais dos termos de transporte de ECT. Especificamente, a figura 7.3(a) exibe o perfil vertical para o mecanismo de transporte turbulento, enquanto a figura 7.3(b) apresenta o mecanismo de transporte de ECT devido à flutuação de pressão. Por outro lado, a figura 7.4 exibe a soma de ambos os mecanismos de transporte, representando o transporte total de ECT na CLC (figura 7.4(a)) e uma comparação entre os dados obtidos pelo modelo LES e a função de similaridade fornecida por Lenschow, Wyngaard e Pennell (1980), extraída de dados experimentais (figura 7.4(b)). Em seu trabalho, Lenschow, Wyngaard e Pennell (1980) fornecem uma expressão para o perfil vertical do fluxo turbulento de ECT na CLC. Tal função de similaridade é dada por:

$$\frac{\langle w'E \rangle}{w_*^3} = 0,8z_* (1 - 0,9z_*)^2 \quad (7.5)$$

onde $z_* = z/z_i$. Assim, derivando-se a equação 7.5 em relação a vertical podemos apontar uma expressão de similaridade para tal termo de transporte a partir de resultados

experimentais¹

$$\begin{aligned}
 \langle T^t \rangle &\equiv -\frac{\partial}{\partial z} \langle w' E \rangle \\
 \langle T_L^t \rangle &= -\frac{\partial}{\partial z} [0,8z_* (1 - 0,9z_*)^2 w_*^3] \\
 &= -w_*^3 \frac{\partial z_*}{\partial z_*} \frac{\partial}{\partial z} [0,8z_* (1 - 0,9z_*)^2] \\
 &= -w_*^3 \frac{\partial z_*}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z_*} [0,8z_* (1 - 0,9z_*)^2] \\
 &= -\frac{w_*^3}{z_i} \frac{\partial}{\partial z_*} [0,8z_* (1 - 0,9z_*)^2] \\
 \frac{\langle T_L^t \rangle}{w_*^3/z_i} &= -0,8 [(1 - 0,9z_*)^2 - 1,8z_* (1 - 0,9z_*)] \tag{7.6}
 \end{aligned}$$

onde $\langle T_L^t \rangle$ é o termo de transporte turbulento obtido a partir de Lenschow, Wyngaard e Pennell (1980).

Além do mais, a figura 7.4(b) indica uma comparação entre diferentes parametrizações para o transporte de ECT na CLC, empregada em vários estudos relatados na literatura (SUN; CHANG, 1986a, 1986b; MELLOR; YAMADA, 1982; ANGEVINE, 2005). Em geral, tais parametrizações são baseadas em um modelo de fechamento de primeira ordem para representar o transporte de ECT na CLC. Tal fechamento é dado pela seguinte equação (STULL, 1988; SORBJAN, 1989; POPE, 2000; SUN; CHANG, 1986a, 1986b; MELLOR; YAMADA, 1982; ANGEVINE, 2005)

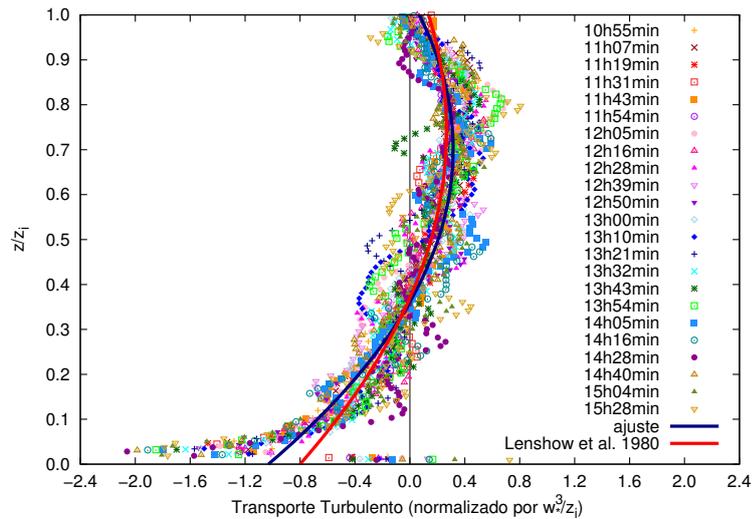
$$\frac{\partial}{\partial z} [\langle w' E \rangle + \langle w' p' / \rho \rangle] = -\frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial z} \left[K_e \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} \right) \right] \tag{7.7}$$

onde K_e é o coeficiente de difusão de ECT e σ_e é o número de Prandtl para a ECT (POPE, 2000). Em geral, o número de Prandtl para a ECT, σ_e é assumido como 1, 0 ou 0,5 e o coeficiente de difusão de ECT é assumido como idêntico ao coeficiente de difusão de *momentum* $K_e = K_m$, mesmo que não haja nenhuma razão para que tal igualdade seja assumida, pois K_e relaciona momento estatístico de terceira ordem com um de segunda ordem, enquanto K_m relaciona um momento estatístico de segunda com um de primeira ordem. Isto fica claro quando definimos formalmente o fechamento de primeira ordem para a turbulência. Tal fechamento é dado da seguinte forma:

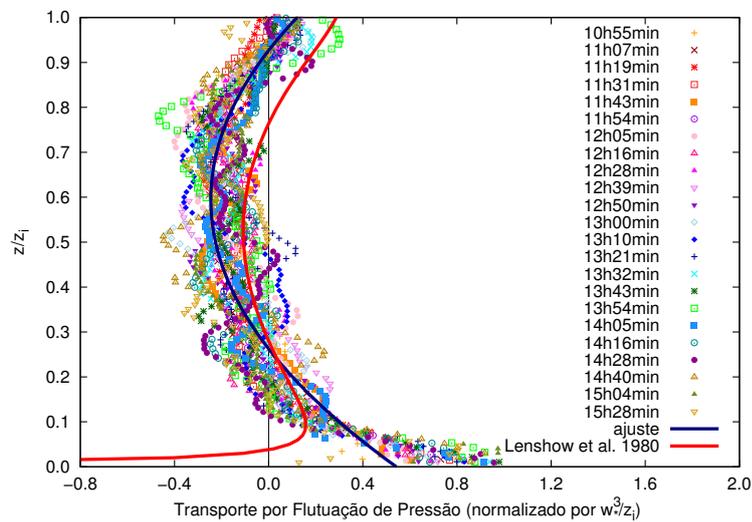
$$\langle u'_i A \rangle = -K_A \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial x_j} \tag{7.8}$$

onde A é uma variável qualquer do escoamento turbulento e K_A seu coeficiente de difusão. Quando consideramos $A = E$, ou seja, a energia cinética turbulenta, o fluxo que

¹artifício utilizado por Lenschow, Wyngaard e Pennell (1980) para obter o balanço de ECT na CLC em seu trabalho



(a) Transporte turbulento



(b) Transporte por flutuação de pressão

Figura 7.3 – Perfis verticais dos diferentes mecanismos de transporte de ECT na CLC para os horários apresentados na tabela 7.1, normalizados por w_*^3/z_i

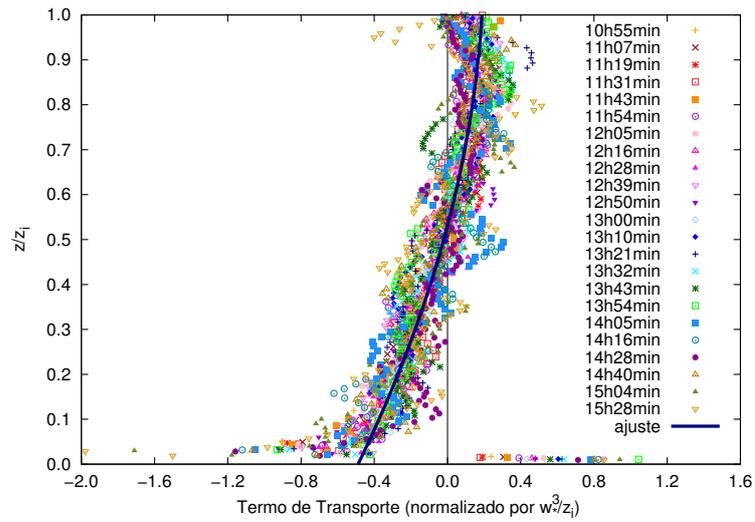
aparece no lado esquerdo da equação 7.8 é um momento estatístico de terceira ordem, enquanto a média (que aparece no lado direito) é um momento estatístico de segunda ordem e $K_A = K_e$. Neste caso, o fechamento resulta em

$$\langle u'_i E \rangle = -K_e \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial x_j} \quad (7.9)$$

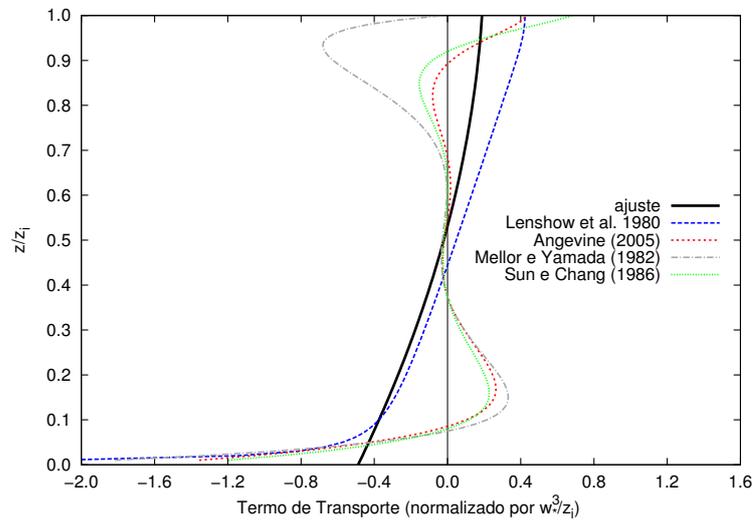
Quando assumimos A como uma componente do campo de velocidade do vento, temos

$$\langle u'_i u'_j \rangle = -K_m \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \quad (7.10)$$

Assim, em analogia ao caso anterior, o fluxo de *momentum* (momento estatístico de segunda ordem) se relaciona com a velocidade média do vento, que é um momento es-



(a) Transporte total



(b) Transporte total – comparação entre diferentes parametrizações

Figura 7.4 – Perfil vertical do termo de transporte total de ECT na CLC para os horários apresentados na tabela 7.1, normalizados por w_*^3/z_i

tatístico de primeira ordem. Desta forma, não temos porque assumir $K_e = K_m$. Além disso, comparando as equações 7.7 e 7.9, podemos analisar o papel do coeficiente σ_e na equação 7.7. Substituindo-se a equação 7.9 na equação 7.7, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z} \left(-K_e \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} + \langle w'p' / \rho \rangle \right) &= -\frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial z} \left[K_e \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} \right) \right] \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left(-K_e \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \langle w'p' / \rho \rangle &= -\frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial z} \left[K_e \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} \right) \right] \\
 \frac{\partial}{\partial z} \langle w'p' / \rho \rangle &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K_e \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} \right) - \frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial z} \left[K_e \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} \right) \right] \\
 \frac{\partial}{\partial z} \langle w'p' / \rho \rangle &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K_e \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} \right) \left(1 - \frac{1}{\sigma_e} \right) \quad (7.11)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se na equação 7.11 as definições dos termos de transporte, dadas pela equação de balanço de energia cinética turbulenta, resulta

$$\langle T^p \rangle = - \langle T^t \rangle \left(1 - \frac{1}{\sigma_e} \right) \quad (7.12)$$

Pela equação 7.12, quando $\sigma_e = 1,0$, o termo de transporte de correção de pressão é desprezado pois $\langle T^p \rangle = 0$. Já nos casos em que $\sigma_e = 0,5$ assumimos que os termos de transporte possuem a mesma magnitude e mesmo sinal em todo o perfil vertical da CLC, pois $\langle T^p \rangle = \langle T^t \rangle$. A condição de $\sigma_e = 0,5$ é utilizada no modelo de subgrade do modelo LES de Moeng (1984), dentre outros. Tal imposição é que justifica a contribuição do transporte de ECT de subgrade nas equações 7.2 e 7.3, pois

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_{SGS} &= \langle T^t \rangle_{SGS} + \langle T^p \rangle_{SGS} \\ \text{se } \sigma_e = 0,5 &\rightarrow \langle T^t \rangle_{SGS} = \langle T^p \rangle_{SGS} \\ \langle T \rangle_{SGS} &= \langle T^t \rangle_{SGS} + \langle T^t \rangle_{SGS} \\ 0,5 \langle T \rangle_{SGS} &= \langle T^t \rangle_{SGS} = \langle T^p \rangle_{SGS} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Os perfis apresentados na figura 7.3(a) e (b) concordam com os resultados experimentais (LENSCHOW; WYNGAARD; PENNELL, 1980; DEARDORFF; WILLIS, 1985) e com outros resultados obtidos a partir de modelos LES presentes na literatura (LENSCHOW, 1974; ANDRÉ et al., 1978; MOENG, 1984; DWYER; PATTON; SHAW, 1997; LIN, 2000).

Os ajustes polinomiais representados pelas linhas contínuas nas figuras 7.3(a) e (b) foram obtidos utilizando um polinômio de segunda ordem. Tais funções polinomiais são descritas pela seguinte formulação matemática

$$\frac{\langle T^t \rangle}{w_*^3/z_i} \equiv f(z_*) = a_j z_*^j \quad (7.14)$$

$$\frac{\langle T^p \rangle}{w_*^3/z_i} \equiv g(z_*) = b_j z_*^j \quad (7.15)$$

Os coeficientes polinomiais, a_j e b_j são apresentados nas tabelas 7.2 e 7.3, respectivamente.

j	a_j	EAM
0	-1,031	$\pm 1,46\%$
1	3.384	$\pm 1,80\%$
2	-2.746	$\pm 2,42\%$

Tabela 7.2 – Coeficientes polinomiais para a equação 7.14. EAM=Erro Assimptótico Médio.

j	b_j	EAM
0	0,542	$\pm 1,56\%$
1	-2,650	$\pm 1,46\%$
2	2,228	$\pm 1,68\%$

Tabela 7.3 – Coeficientes polinomiais para a equação 7.15. EAM=Erro Assimptótico Médio.

Analisando-se as figuras 7.3(a) e (b) é importante ressaltar que, ambos os termos de transporte (transporte turbulento e por flutuação de pressão) possuem perfis com sinais opostos na maior parte de seu domínio vertical na CLC. Entretanto, a magnitude do transporte turbulento é maior que a do transporte por flutuação de pressão. Como uma consequência disto, o padrão do transporte total de ECT (dado pela soma de ambos os processos de transporte) é controlado, em geral, pelo transporte turbulento. Apesar caráter dominante associado ao transporte turbulento, o termo de transporte associado ao trabalho realizado pelas flutuações de pressão tem um papel importante na CLC e não deve ser desconsiderado. Relacionando-se com o fechamento de primeira ordem, as condições de σ_e igual a 1,0 ou 0,5, largamente utilizadas em modelos atmosféricos, não é eficaz ao descrever a relação entre os dois processos de transporte de pressão na CLC.

O ajuste apresentado na figura 7.4(a) é a soma das equações 7.14 and 7.15 e sua representação matemática é dada por

$$\frac{\langle T \rangle}{w_*^3/z_i} = \frac{\langle T^t \rangle + \langle T^p \rangle}{w_*^3/z_i} \equiv h(z_*) = c_j z_*^i \quad (7.16)$$

onde $c_j = a_j + b_j$.

As demais parametrizações apresentadas na figura 7.4(b) não concordam com os resultados descritos na literatura para o transporte de ECT. A razão para tal, além das questões já levantadas anteriormente, pode ser explicada pela análise do perfil vertical de ECT na CLC. A figura 7.5 exibe o perfil vertical de ECT obtido a partir dos dados da simulação, e a linha contínua, nesta figura, representa um ajuste polinomial para o perfil de ECT, normalizado por w_*^2 . A forma do perfil vertical de ECT possui um a região na qual a ECT é aproximadamente constante em relação a altura. Desta forma, o gradiente vertical de ECT nesta região é nulo, e como resultado, o transporte de ECT modelado pela formulação definida pela equação 7.7 também é nulo, o que não é observado em vários estudos já citados.

Por definição, a integral do termo de transporte da equação de balanço da ECT, em todo o perfil vertical da CLP é nula, ou seja, o termo de transporte representa um processo físico que apenas redistribui a ECT e não um termo de fonte ou sumidouro, dessa forma

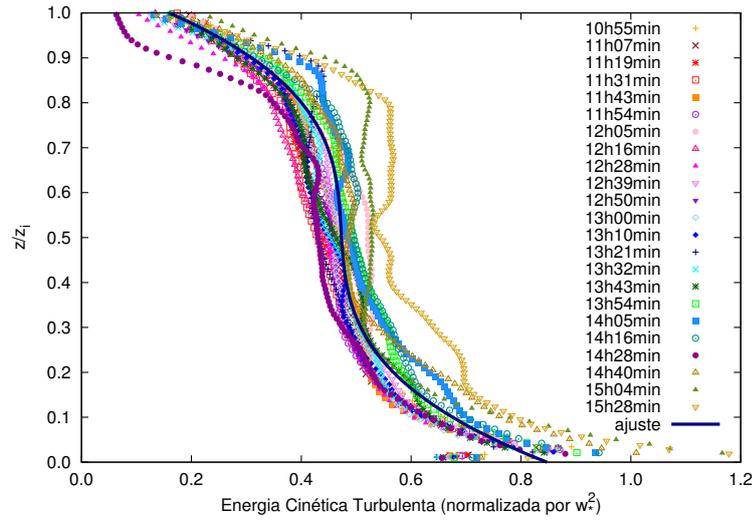


Figura 7.5 – Perfil vertical de ECT normalizado por w_*^2 . A forma do perfil de ECT simulado está de acordo com aqueles encontrados experimentalmente e através de outras simulações LES (DEARDORFF; WILLIS, 1985; CAUGHEY, 1981; DEGRAZIA et al., 2011).

$$I_t = \int_0^{z_i} \langle T \rangle dz = 0 \quad (7.17)$$

Substituindo-se a equação 7.16 em 7.17, temos

$$I_t = \frac{w_*^3}{z_i} \int_0^{z_i} h(z_*) dz \quad (7.18)$$

por definição $z_* = z/z_i$, logo $dz = z_i dz_*$. Fazendo esta substituição de variáveis na integral da equação 7.18,

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{w_*^3}{z_i} \int_0^1 h(z_*) z_i dz_* \\ I_t &= \frac{w_*^3}{z_i} z_i \int_0^1 h(z_*) dz_* \\ I_t &= w_*^3 \int_0^1 c_j z_*^j dz_* \\ I_t &= \left(\frac{c_j}{j+1} \right) z_*^{j+1} w_*^3 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Aplicando os valores de c_j na equação 7.19, temos

$$I_t = -0,063 w_*^3 \quad (7.20)$$

O resultado apresentado na equação 7.20 indica a presença de um fluxo de ECT para fora da CLP. Stull (1988) aponta que tal efeito é causado devido ao mecanismo de transporte associado às flutuações de pressão. Além disso, trabalhos sobre ondas internas na atmosfera sugerem que tal transporte de energia excita a formação de ondas de gravidade interna, na atmosfera livre a partir da ECT, sendo que tal porção de energia é da ordem de um décimo da taxa de dissipação total (STULL, 1988). O valor encontrado na equação 7.20 corrobora tal afirmação. Contudo, o seu valor numérico deve ser tomado como uma aproximação, uma vez que tal valor é totalmente dependente da definição da altura da CLP, ou seja, pequenas variações na altura da CLP podem comprometer o valor obtido. A consideração de que o transporte total é apenas um termo de redistribuição na CLP é válido apenas quando a CLP é definida em função do perfil de ECT. Desta forma, z_i é altura na qual a ECT tende a zero.

Além do comportamento do perfil vertical, em termos de variáveis de similaridade da CLC, os termos de transporte podem ser expressos em função de variáveis que descrevem a camada superficial. A figura 7.6 apresenta a função de similaridade para os termos de transporte turbulento e por flutuação de pressão na camada superficial². Especificamente, a figura 7.6(a) mostra a relação entre o transporte turbulento, (normalizado por u_*^3/kz , onde $k = 0.4$ é a constante de von Karman) e o parâmetro de estabilidade $\zeta = z/L$. Por outro lado, a figura 7.6(b) exibe a relação entre o transporte devido a flutuação de pressão (normalizado por u_*^3/kz) e ζ na camada superficial.

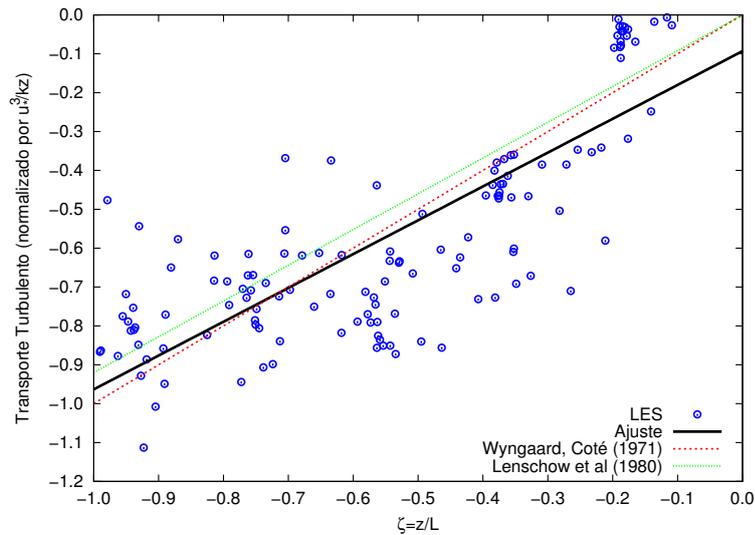
A figura 7.6(a) também apresenta uma comparação entre um ajuste a partir dos dados de LES gerados nesse estudo e dados experimentais apresentados na literatura (LENSCHOW; WYNGAARD; PENNELL, 1980; WYNGAARD; COTÉ, 1971). Lenschow, Wyngaard e Pennell (1980) fornecem uma relação de similaridade entre o fluxo turbulento de ECT (normalizado por u_*^3) e ζ . Tal relação é expressa por

$$\frac{\langle w'E \rangle}{u_*^3} = -2,3\zeta \quad (7.21)$$

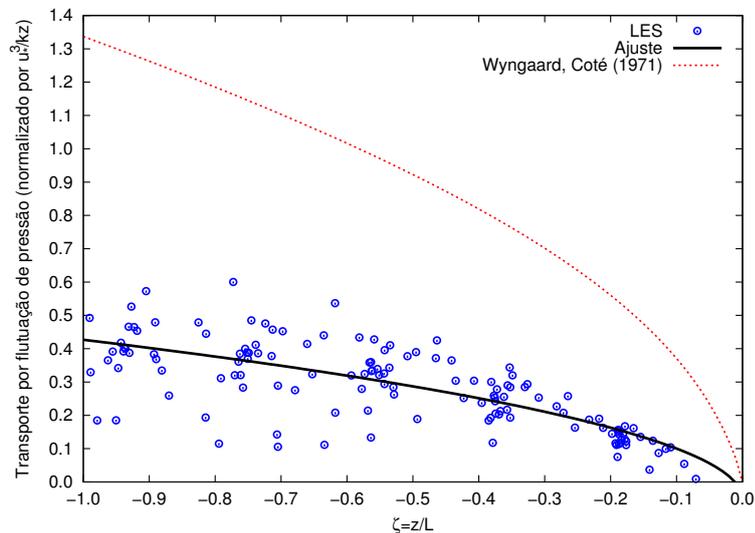
Realizando na equação 7.21 um desenvolvimento matemático similar ao que resultou na equação 7.6, a relação de similaridade superficial para o termo de transporte turbulento dado por Lenschow, Wyngaard e Pennell (1980), $\langle T_L^t \rangle$, é

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\langle w'E \rangle}{u_*^3} &= 2,3 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \frac{\langle T_L^t \rangle}{u_*^3} &= 2,3 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \frac{\langle T_L^t \rangle}{u_*^3} &= \frac{2,3}{L} \end{aligned}$$

²Assume-se como camada superficial a região compreendida entre o solo e uma altura de $0,1z_i$



(a) Transporte turbulento



(b) transporte por flutuação de pressão

Figura 7.6 – Curvas de similaridade para os mecanismos de transporte de ECT na camada superficial (normalizado por u_*^3/kz).

$$\begin{aligned} \frac{kz}{u_*^3} \langle T_L^t \rangle &= 2,3k \frac{z}{L} \\ \frac{kz}{u_*^3} \langle T_L^t \rangle &= 0,92\zeta \end{aligned} \quad (7.22)$$

Já Wyngaard e Coté (1971), fornecem a seguinte expressão

$$\frac{kz}{u_*^3} \langle T_W^t \rangle \approx \zeta \quad (7.23)$$

Comparando-se a curva contínua, obtida pelo ajuste de dados do modelo LES, com as curvas dadas por dados experimentais, o modelo LES se mostra eficaz em representar os termos de transporte, mesmo na camada superficial, região na qual o modelo tem sua capacidade de resolver a turbulência reduzida pelo deslocamento do pico do espectro de

ECT. A curva ajustada a partir dos dados do modelo LES é dada por

$$\frac{kz}{u_*^3} \langle T^t \rangle = 0.870\zeta - 0.09 \quad (7.24)$$

A figura 7.6(b) indica uma comparação entre a função ajustada a partir dos dados do modelo LES (linha contínua) e uma função de similaridade superficial obtida por Wyngaard e Coté (1971). Esta função de similaridade é resultado do resíduo dos demais termos para a equação de balanço de ECT. Em seu trabalho, Wyngaard e Coté (1971) ressaltam o fato de que a função de similaridade obtida pelo resíduo da equação de balanço é superestimada. Dessa forma, mesmo não havendo uma indicação precisa, pois não há dados de flutuação de pressão para serem comparados, os resultados apontados pelo modelo LES se mostram coerentes. A função de similaridade obtida para o termo de transporte por flutuação de pressão é dada por:

$$\frac{kz}{u_*^3} \langle T^p \rangle = -0.051 + 0.478|\zeta|^{1/2} \quad (7.25)$$

7.2 Uma nova proposta para a parametrização do transporte de energia cinética turbulenta na camada limite convectiva

Como visto anteriormente, o fechamento de primeira ordem, a partir do gradiente vertical de ECT, não é capaz de descrever o transporte de ECT na CLC. A partir desse fato, procurou-se desenvolver uma nova metodologia que fosse capaz de descrever o transporte de ECT de maneira mais eficiente. Nesta nova proposta considera-se que o transporte de ECT é diretamente proporcional a própria ECT e não ao seu gradiente vertical. Do ponto de vista físico, a ECT representa a intensidade da turbulência no escoamento, de modo que tal consideração assume que o transporte de ECT é mais efetivo quando a turbulência é mais intensa, ou seja:

$$\langle T \rangle \propto \langle E \rangle^n \quad (7.26)$$

A parametrização proposta consiste na determinação de um ajuste polinomial para o perfil vertical do termo de transporte (soma de ambos os mecanismos de transporte). Para se obter esse polinômio foram empregados diferentes horários da simulação, já descritos na tabela 7.1, porém, para a determinação deste polinômio, os perfis verticais foram normalizados por $\langle E \rangle^{3/2} / z_i$, o que garante a dependência da intensidade do termo de transporte com a intensidade da ECT. Então, o transporte de ECT, normalizado por $\langle E \rangle^{3/2} / z_i$ é dado por uma função adimensional $F(z_*)$, tal que

$$\frac{\langle T \rangle}{\langle E \rangle^{3/2} / z_i} \equiv F(z_*) = \xi_j z_*^j \quad (7.27)$$

A figura 7.7 apresenta os perfis do termo de transporte normalizados conforme a definição da equação 7.27. A linha contínua descreve o polinômio ajustado a partir dos dados obtidos na simulação LES.

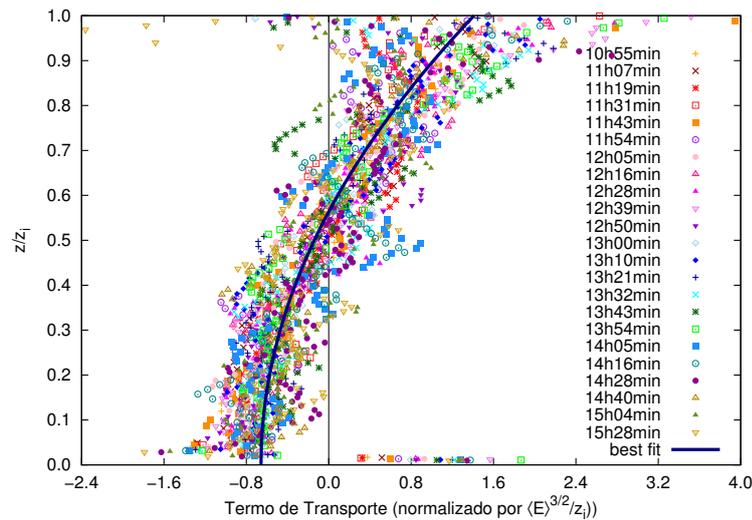


Figura 7.7 – Ajuste polinomial para a equação 7.27.

O ajuste foi realizado a partir de um polinômio de segunda ordem, onde os coeficientes de interpolação são exibidos na tabela 7.4.

j	ξ_j	EAM
0	-0,657	$\pm 2,48\%$
1	0,000	–
2	0,036	$\pm 1,76\%$

Tabela 7.4 – Coeficientes polinomiais para a equação 7.27. EAM=Erro Assimptótico Médio.

A curva determinada pelo polinômio ajustado para os dados da figura 7.7 apresenta um comportamento semelhante àquela proposta para o transporte de ECT, normalizado por w_*^3 / z_i . Nos níveis mais altos da CLC pode ser visualizado um maior espalhamento da razão $\frac{\langle T \rangle}{\langle E \rangle^{3/2} / z_i}$. Porém isso é facilmente entendido observando-se a magnitude da ECT nesses níveis (figura 7.5); a magnitude da ECT decai com a altura tornando o denominador da normalização menor, e assim amplificando as flutuações. Contudo, a julgar pelos desvios dos coeficientes de interpolação, o ajuste foi capaz de capturar o comportamento geral médio dos dados, dando credibilidade a parametrização em relação aos dados da simulação LES. A curva definida pela equação 7.27 é uma opção de fácil implementação numérica para modelos baseados na equação de balanço de ECT. Além do mais, tem

como vantagem ter como variável de normalização a própria ECT, dispensando variáveis de similaridade como w_* , presente na equação 7.16.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho constitui um estudo sobre os termos de transporte da equação de balanço de energia cinética turbulenta (ECT), apresentada na seção 4.1, equação 4.4. A investigação destes termos é bastante complicada de ser realizada a partir de dados experimentais, sobretudo devido ao termo de transporte associado às flutuações do campo de pressão (STULL, 1988). Desta forma, utilizou-se a simulação dos grandes turbilhões (LES) para se obter tais termos da equação na camada limite convectiva (CLC). O experimento numérico reproduziu um ciclo diário da camada limite planetária (CLP). O desenvolvimento de um ciclo completo da CLP assegura que sejam simulados tanto o crescimento como o decaimento da CLC e não apenas uma condição estacionária, na qual os forçantes são constantes. Além do mais, para realizar tal simulação foram empregados dados experimentais como forçantes de superfície e dados obtidos de campos de análise de um modelo de grande escala. Empregando-se os dados extraídos do modelo LES, relativos a diversos instantes do período convectivo da simulação (conforme a tabela 7.1), um conjunto de equações foi proposto para descrever os mecanismos de transporte de ECT na CLC. Tais equações são representadas pelos polinômios descritos pelas equações 7.14, 7.15, 7.16 e 7.27.

As equações 7.14 e 7.15 fornecem expressões para os termos de transporte turbulento e transporte devido à flutuações de pressão, normalizados por w_*^3/z_i , em função da altura normalizada $z_* = z/z_i$. Tais expressões consistem em polinômios de segunda ordem, cujos coeficientes de interpolação são apresentados nas tabelas 7.2 e 7.3. Os perfis obtidos para os termos de transporte da equação de balanço de ECT, exibidos nas figuras 7.3(a) e (b) mostram que os termos de transporte (transporte turbulento e por flutuação de pressão) possuem perfis com sinais opostos na maior parte de seu domínio vertical na CLC, com domínio (em termos de magnitude) do transporte turbulento. Contudo, o termo de transporte associado às flutuações de pressão não deve ser desprezado pois apresenta um papel importante no transporte de ECT na CLC. Quando comparados a dados experimentais, os resultados do modelo LES apresentam boa representatividade dos perfis verticais (LENSCHOW, 1974; LENSCHOW; WYNGAARD; PENNELL, 1980).

A equação 7.16 representa a soma das funções dadas pelas equações 7.14 e 7.15. Desta forma, corresponde a um ajuste polinomial representativo do transporte total de ECT na CLC, ou seja, a soma de ambos os processos de transporte. Além do mais, a figura 7.4(b) apresenta uma comparação entre o transporte de ECT obtido a partir de dados do modelo LES e outras parametrizações largamente empregadas (DEARDORFF, 1980; MOENG, 1984; MOENG; WYNGAARD, 1989; SULLIVAN; MCWILLIAMS; MOENG, 1994; MOENG et al., 2004; SUN; CHANG, 1986a, 1986b; MELLOR; YAMADA, 1982; ANGEVINE, 2005). A análise da figura 7.4(b) conduz a uma importante constata-

ção: significa que a relação fluxo-gradiente, empregada em modelos de diversas escalas para representar o transporte de ECT, falha em grande parte da CLC. Tal evidência física represente uma importante indicação, uma vez que tal proposta de parametrização é largamente utilizada para representar o transporte de ECT na CLC.

O polinômio proposto pela equação 7.16, quando integrado em toda a extensão vertical da CLC apresenta um valor diferente de zero. Espera-se que o termo de transporte seja apenas de redistribuição de ECT na CLC e não um termo de ganho ou destruição. Todavia, a integral de 0 a z_i da equação 7.16 tem como valor $-0.063w_*^3$. Tal resultado indica um fluxo negativo de ECT, ou seja, o termo de transporte está levando ECT para fora da CLC. Alguns estudos sobre movimentos ondulatórios na atmosfera, sugerem que o termo de transporte devido a flutuação de pressão acaba excitando ondas de gravidade internas na atmosfera livre acima da CLP (STULL, 1988). Contudo, mesmo que o resultado da integral descrita acima corrobore a hipótese teórica apresentada, o seu valor numérico não é conclusivo, uma vez que não há uma definição precisa da altura da CLP. Sullivan et al. (1998) sugere que a altura da CLC seja obtida a partir do gradiente vertical da temperatura potencial, e que este valor de z_i corresponda a uma altura na qual o perfil vertical da variância da temperatura potencial tem seu valor máximo. Porém, nessa altura ainda existe ECT (cerca de $0,2w_*^2$). Por outro lado, considerando-se que a própria CLP é definida pela presença de turbulência, a altura da CLP não é precisamente definida quando estimada pelo gradiente de temperatura. Então, como o limite de integração é a própria altura da CLC, não há como assegurar a precisão do valor encontrado para a integral. O que pode-se afirmar é que o transporte de ECT deve ter sua integral nula quando define-se como z_i a altura na qual a ECT é nula.

Além dos perfis verticais para o transporte de ECT na CLC, funções de similaridade superficiais foram obtidas para o transporte turbulento (equação 7.24) e para o transporte devido à flutuações de pressão (equação 7.25). Tais equações foram comparadas com outras propostas na literatura (LENSCHOW; WYNGAARD; PENNELL, 1980; WYNGAARD; COTÉ, 1971) e apresentam bons resultados, conforme mostram as figuras 7.6(a) e 7.6(b). Especificamente, nas comparações entre o termo relativo ao transporte de ECT por flutuação de pressão, tanto nos perfis verticais como nas funções de similaridade superficiais, os dados LES são comparados com termos residuais do balanço de ECT, onde assume-se que o termo de tendência (variação local de ECT) é nulo e o resíduo é equivalente ao termo de pressão. Tal fato evidencia a dificuldade inerente às medidas experimentais do campo de flutuação de pressão e aumenta a relevância do presente estudo.

Em relação aos resultados obtidos na comparação entre as parametrizações comumente utilizadas na literatura para o transporte de ECT na CLC e os dados obtidos a partir do modelo LES, uma nova e simples formulação para a parametrização do termo de transporte de ECT é proposta. Tal formulação consiste em relacionar o transporte de

ECT diretamente a própria ECT e não ao seu gradiente vertical. Do ponto de vista físico, tal consideração é suportada pelo fato de que o transporte de ECT é mais efetivo em condições de turbulência mais intensa. A partir desse resultado, de acordo com a equação 7.27, um ajuste polinomial dos dados de saída do modelo LES foi proposto, o qual parametriza o termo total de transporte em função da ECT na CLC.

Em um recente estudo, Witek, Teixeira e Matheou (2011) abordam o mesmo problema de forma diferente, separando o termo de transporte em duas partes: uma associada a difusão turbulenta e outra ao fluxo de massa. O embasamento físico de sua proposta é mais robusto que o considerado neste trabalho, mas, por outro lado, a parametrização de Witek, Teixeira e Matheou (2011) depende de uma constante de ajuste em função do *skewness* da componente vertical da velocidade e da escala de velocidade da corrente de ar ascendente (*updraft*). Embora a formulação atual não tenha a dependência dessas propriedades que descrevem a CLC, ela é mais simples e pode ser mais adequada para o uso em condições simplificadas, quando não há informações detalhadas sobre a estrutura dos campos turbulentos.

Dessa forma ainda se faz necessária a implementação da proposta atual de parametrização dos termos de transporte de ECT na CLC em modelos numéricos, como os de coluna simples. Nesse caso é importante quantificar o quanto a presente parametrização modifica a solução da equação de balanço de ECT em comparação à relação fluxo-gradiente comumente utilizada. Além disso, a parametrização proposta nesse trabalho deve ser testada em outras condições de estabilidade atmosférica, tais como o regime estável e de convecção livre.

Apêndice A – Demonstrações

A.1 Temperatura potencial

Assumindo a atmosfera como um gás ideal, podemos escrever a equação de estado termodinâmico para uma parcela de ar como

$$pV = n\mathfrak{R}T \quad (\text{A.1})$$

onde p é a pressão, V o volume, n o número de mols, \mathfrak{R} a constante dos gases ideais e T a temperatura absoluta da parcela. O número de mols pode ser dado pela razão entre a massa total da parcela m e a massa molar do ar atmosférico M^1 . Além disso, usaremos sempre grandezas intensivas do sistema, que neste contexto refere-se a grandeza em questão por unidade de massa. Assim, da equação A.1

$$\begin{aligned} pV &= \frac{m}{M}\mathfrak{R}T \\ pV &= m\frac{\mathfrak{R}}{M}T \\ \frac{V}{m} &= \frac{\mathfrak{R}}{M}T \\ pv &= RT \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde v é o volume por unidade de massa e $R = \mathfrak{R}/M$ é a constante dos gases ideais equivalente a \mathfrak{R} para uma parcela de ar com massa molar M .

A variação na energia interna da parcela, quando levada de um estado A para um estado B , através de um processo qualquer é dada pela Primeira Lei da Termodinâmica, $du = dq - dw$, onde u é a energia interna, q a quantidade de energia trocada na forma de calor e w a quantidade de energia trocada na forma de trabalho, todos na sua forma intensiva. Assim, temos que

$$du = cdT - pdv \quad (\text{A.3})$$

onde c é o calor específico da parcela, definido por

$$c = \frac{dq}{dT} \quad (\text{A.4})$$

O calor específico, para um gás, depende de como o processo é realizado pois

¹O ar atmosférico é uma mistura de gases composta por nitrogênio, oxigênio, vapor d'água e outros gases, sendo que a fração de vapor d'água é bastante variável

esta associado as quantidades de energia trocadas na forma de calor e trabalho. Assim, para processos a volume constante, definimos c_v como o valor específico de um gás submetido a um processo que mantém seu volume, quando passa de um estado A para um estado B , e c_p o calor específico de um gás submetido a um processo no qual sua pressão permanece constante enquanto passa de um estado A para B .

Diferenciando a equação A.2,

$$vdp + pdv = RdT \quad (\text{A.5})$$

e substituindo em A.3, temos

$$\begin{aligned} du &= cdT - (RdT - vdp) \\ du &= cdT - RdT + vdp \\ du &= (c - R) dT + vdp \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Considerando que a parcela evolua de um estado A para um estado B através de um processo a volume constante, da equação A.3, temos que

$$du = c_v dT. \quad (\text{A.7})$$

Por outro lado, considerando que o processo seja a pressão constante, da equação A.6, temos que

$$du = (c_p - R) dT. \quad (\text{A.8})$$

Logo, concluímos que $c_p = c_v + R$ e $c_p > c_v$. Esta relação de grandeza entre c_p e c_v se dá pois em um processo a pressão constante parte da energia trocada na forma de calor é utilizada para realizar trabalho (dado pelo termo pdv) e parte para variar a energia interna, logo a temperatura do sistema. Já para processos a volume constante o trabalho é nulo, logo toda a energia transferida na forma de calor é utilizada para variar a energia interna.

Os processos termodinâmicos na atmosfera, nos quais não há mudança de estado físico da água, podem ser aproximados por processos adiabáticos. Tais processos são caracterizados por $dq = 0$, então da Primeira Lei da Termodinâmica e das equações A.3, A.5 e A.8 temos

$$\begin{aligned} dq &= du + dw \\ dq &= c_p dT - RdT + pdv \\ dq &= c_p dT - RdT + (Rdt - vdp) \\ dq &= c_p dT - vdp \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Considerando o caso adiabático em que $dq = 0$, isolando v na equação A.2 e substituindo em A.9, temos

$$\begin{aligned}
 0 &= c_p dT - RT \frac{dp}{p} \\
 c_p dT &= RT \frac{dp}{p} \\
 \frac{dT}{T} &= \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} \\
 \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} &= \frac{R}{c_p} \int_{p_A}^{p_B} \frac{dp}{p} \\
 \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) &= \frac{R}{c_p} \ln \left(\frac{p_B}{p_A} \right) \\
 \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) &= \ln \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{\frac{R}{c_p}} \\
 \left(\frac{T_B}{T_A} \right) &= \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{\frac{R}{c_p}}
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

onde a equação A.10 é chamada equação de Poisson para um processo adiabático. Denominando o estado termodinâmico A como o estado inicial com temperatura e pressão (T_0, p_0) e estado termodinâmico B como o estado final com temperatura e pressão dados por (T, p) , a equação A.10 é escrita como

$$\left(\frac{T}{T_0} \right) = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \tag{A.11}$$

A partir da equação A.11 podemos definir uma nova variável termodinâmica chamada temperatura potencial, representada por θ ,

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \tag{A.12}$$

que pode ser interpretada como a temperatura que a parcela de ar teria se, partindo de um estado termodinâmico com temperatura e pressão dados por (T, p) , fosse levada através de um processo adiabático até o estado inicial caracterizado por pressão p_0 . Desta forma, a temperatura potencial é uma variável de estado termodinâmico, pois é expressa em função de outras variáveis de estado. Além do mais, para processos adiabáticos, a temperatura potencial é uma grandeza conservada durante o processo.

Considerando a equação A.12 é bastante usual definir a temperatura potencial para o ar seco, ou seja, considerar $R = R_d$, o que resulta

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d}{c_p}} \quad (\text{A.13})$$

onde o valor numérico de R_d/c_p é 0,286.

A.2 Teorema do transporte de Reynolds

Seja B uma quantidade qualquer relativa a um fluido e b seu valor por unidade de massa, m , tal que

$$B = mb. \quad (\text{A.14})$$

Este fluido escoia através de um volume de controle V_c e tem uma quantidade de massa contida no volume do sistema V_s , que se move com velocidade $\vec{U} = (u, v, w) = u_i$ em relação ao referencial em que V_c está fixo e $U = \sqrt{u_i^2}$ o módulo desta velocidade². O Teorema do Transporte de Reynolds relaciona a variação temporal de B no volume de controle e no sistema. Para um volume infinitesimal δV de fluido temos que

$$\delta m = \rho \delta V, \quad (\text{A.15})$$

logo,

$$\begin{aligned} B &= mb \\ B &= \rho \delta V b. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

O valor de B para todo o sistema vale:

$$B_s = \sum_i b_i (\rho \delta V_i). \quad (\text{A.17})$$

No limite em que $\delta V_i \rightarrow 0$,

$$B_s = \int_{V_s} \rho b dV. \quad (\text{A.18})$$

De forma análoga, o valor de B no volume de controle é dado por

²onde $u_i = (u, v, w)$ são as componentes do vetor velocidade nas direções $(x, y, z) = x_i$, respectivamente. As direções x e y formam o plano horizontal e z representa a direção vertical

$$B_c = \int_{V_c} \rho b dV. \quad (\text{A.19})$$

A taxa de variação temporal de B em cada um dos volumes de contorno analisados é dada por:

$$\frac{dB_s}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_s} \rho b dV \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{dB_c}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho b dV \quad (\text{A.21})$$

Considerando-se que em um tempo inicial $t' = t$, $B_c = B_s$ e analisando-se a figura A.1 em um instante $t' = t + \delta t$ teremos

$$B_s(t + \delta t) = B_c(t + \delta t) - B_{V_I}(t + \delta t) + B_{V_{II}}(t + \delta t). \quad (\text{A.22})$$

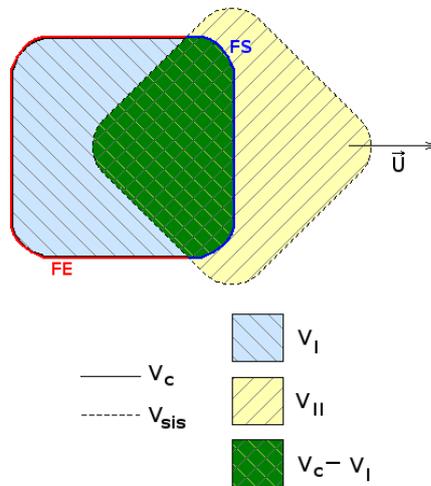


Figura A.1 – Representação de V_c e V_s

A variação de B_s em um intervalo de tempo δt é dada por

$$\frac{\delta B_s}{\delta t} = \frac{B_s(t + \delta t) - B_s(t)}{\delta t}, \quad (\text{A.23})$$

substituindo a equação (A.22) em (A.23) temos:

$$\frac{\delta B_s}{\delta t} = \frac{B_c(t + \delta t) - B_{V_I}(t + \delta t) + B_{V_{II}}(t + \delta t) - B_s(t)}{\delta t}. \quad (\text{A.24})$$

Lembrando-se que em $t' = t$, $B_c = B_s$ e, substituindo-se em (A.24),

$$\frac{\delta B_s}{\delta t} = \frac{B_c(t + \delta t) - B_c(t)}{\delta t} - \frac{B_{V_I}(t + \delta t)}{\delta t} + \frac{B_{V_{II}}(t + \delta t)}{\delta t}. \quad (\text{A.25})$$

Calculando-se (A.25) no limite em que $\delta t \rightarrow 0$, resulta

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta B_s}{\delta t} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_c(t + \delta t) - B_c(t)}{\delta t} - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{V_I}(t + \delta t)}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{V_{II}}(t + \delta t)}{\delta t} \\ \frac{dB_s}{dt} &= \frac{\partial B_c}{\partial t} - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{V_I}(t + \delta t)}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{V_{II}}(t + \delta t)}{\delta t} \\ \frac{dB_s}{dt} &= \frac{\partial B_c}{\partial t} - \dot{B}_{\otimes} + \dot{B}_{\odot} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

onde \dot{B}_{\otimes} representa a taxa com B entra e \dot{B}_{\odot} a taxa com B sai do volume de controle V_c através das superfícies que fazem fronteira entre V_c e V_s , sendo estas superfícies definidas como FE e FS , respectivamente. O valor de \dot{B}_{\odot} é dado pela soma das contribuições desta quantidade que passa por cada elemento infinitesimal de área δA de FS . Analisando-se a figura A.2, podemos chegar nas seguintes relações:

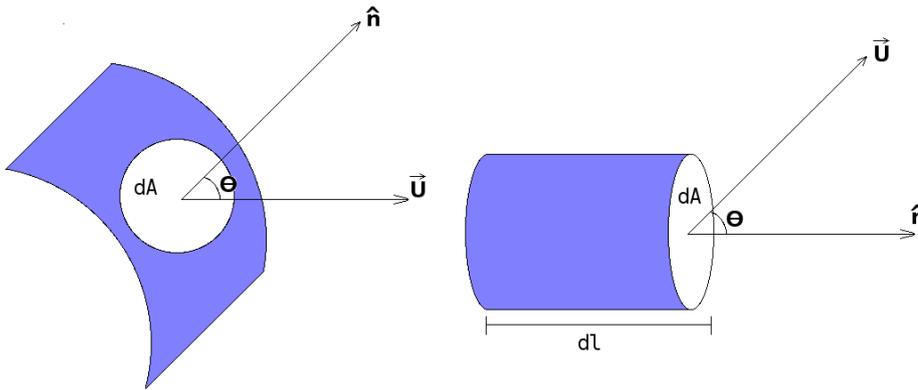


Figura A.2 – Elemento de área infinitesimal de V_c e vetores

$$\begin{aligned} \delta B &= \delta mb \\ \delta B &= \rho \delta V b \\ \delta V &= \delta A \delta l \\ \delta l &= U \delta t \cos \theta \\ \delta B &= \rho b \delta A U \delta t \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

então

$$\begin{aligned} \delta \dot{B}_{\odot} &= \frac{\delta B}{\delta t} \\ \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta B}{\delta t} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\rho b \delta A U \delta t \cos \theta}{\delta t} \end{aligned}$$

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta B}{\delta t} = \rho b \delta A U \cos \theta, \quad (\text{A.28})$$

escrevendo $U \cos \theta$ como $\vec{U} \cdot \hat{n}$, onde \hat{n} é o vetor unitário normal a superfície

$$\begin{aligned} \delta \dot{B} &= \rho b u_i \delta A_j \delta_{ij} \\ \delta \dot{B} &= \rho b u_i \delta A_i \end{aligned}$$

onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker. No limite em que $\delta A \rightarrow 0$, faz-se a soma de todos os elementos \dot{B}_\odot que atravessam a superfície FS . Isto equivale a integrar $\delta \dot{B}_\odot$ sobre esta superfície, então

$$\begin{aligned} \dot{B}_\odot &= \int_{FS} \delta \dot{B}_\odot \\ \dot{B}_\odot &= \int_{FS} \rho b u_i dA_i. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

De maneira análoga, \dot{B}_\otimes é dado por

$$\dot{B}_\otimes = - \int_{FE} \rho b u_i dA_i \quad (\text{A.30})$$

Logo, o saldo da variação de B no volume de controle é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{B}_\odot - \dot{B}_\otimes &= \int_{FS} \rho b u_i dA_i + \int_{FE} \rho b u_i dA_i \\ \dot{B}_\odot - \dot{B}_\otimes &= \oint_{SV_c} \rho b u_i dA_i, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

onde SV_c é a superfície do volume de controle. Substituindo-se a equação (A.31) em (A.26) obtém-se

$$\frac{dB_s}{dt} = \frac{\partial B_c}{\partial t} + \oint_{SV_c} \rho b u_i dA_i \quad (\text{A.32})$$

A equação (A.32) relaciona a variação temporal do volume de contorno do sistema com a variação temporal local do volume de controle. A diferença entre as duas é a variação do fluxo da quantidade B através da superfície do volume de contorno. A variação temporal de B_s fornece a descrição lagrangiana, ou seja, a variação vista por um observador fixo que segue uma determinada partícula de fluido. Já a variação local de B_c fornece uma descrição euleriana da quantidade B . O termo que indica a variação do fluxo é o termo de transporte ou advecção de B .

A.3 Equação da continuidade

Existem várias maneiras de se obter a equação da continuidade. Aqui, a sua derivação será feita a partir do Teorema de Transporte de Reynolds. Fazendo-se as mesmas considerações para os volumes de contorno da seção A, e $B = m$, logo, $b = 1$, pelo Teorema de Transporte de Reynolds, temos:

$$\frac{dm_s}{dt} = \frac{\partial m_c}{\partial t} + \oint_{SV_c} \rho u_i dA_i. \quad (\text{A.33})$$

Se a massa se conserva,

$$\frac{dm_s}{dt} = 0, \quad (\text{A.34})$$

logo

$$\frac{\partial m_c}{\partial t} + \oint_{SV_c} \rho u_i dA_i = 0. \quad (\text{A.35})$$

Aplicando-se o teorema da divergência de Gauss na integral de superfície da equação (A.35) e considerando-se as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{dm}{dV} \\ dm &= \rho dV \\ m &= \int \rho dV, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

a expressão (A.35) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) dV = 0. \quad (\text{A.37})$$

Como os limites de integração da região V_c independem do tempo, o operador derivada parcial pode ser manipulado e colocado dentro do operador integral,

$$\begin{aligned} \int_c \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_c \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) dV &= 0 \\ \int_c \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) \right] dV &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

A equação (A.38) é a equação da continuidade e, nesta forma, associa a variação

local da densidade do fluido com a divergência do fluxo de massa do fluido. Manipulando o termo do divergente na equação, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) &= 0 \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\
 \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\
 \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} u_i &= 0,
 \end{aligned} \tag{A.39}$$

onde a equação (A.39) associa a variação total da densidade de um fluido com a divergência do campo de velocidade, ou seja, se um fluido for incompressível, portanto, apresentando densidade constante, o escoamento é não divergente. Assim, as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{aligned}
 \rho &= cte \\
 \frac{d\rho}{dt} &= 0,
 \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

A.4 Temperatura virtual

O ar atmosférico consiste em uma mistura homogênea de gases. Essa mistura contém alguns constituintes que apresentam concentrações constantes, como o nitrogênio e o oxigênio. Contudo, contém outros elementos cuja a concentração varia consideravelmente, como o vapor d'água. A atmosfera é bem representada pelo modelo de gás ideal. Contudo, a constante de gás ideal presente na equação de estado depende da massa molar do ar atmosférico, e esta, por sua vez, depende dos constituintes da mistura homogênea de gases. Seja uma parcela de ar de massa m , constituída por ar seco e vapor d'água, sendo m_d a massa de ar seco e m_v a massa de vapor d'água contidos em uma parcela de volume V , temperatura absoluta T e pressão p . Logo,

$$m = m_d + m_v \tag{A.40}$$

$$\frac{m}{V} = \frac{m_d}{V} + \frac{m_v}{V}$$

$$\rho = \rho_d + \rho_v \tag{A.41}$$

onde ρ é a densidade do ar, ρ_d a densidade do ar seco e ρ_v a densidade de vapor d'água contidos na parcela de ar. Sendo a atmosfera bem representada pelo modelo de gás ideal a equação de estado termodinâmico para o ar atmosférico é dada pela equação de estado do gás ideal,

$$pV = n\mathfrak{R}T \quad (\text{A.42})$$

onde n é o número de mols da parcela e $\mathfrak{R} = 8,314\text{J/Kmol}$ a constante do gás ideal. O número de mols pode ser dado pela razão entre a massa do sistema e a massa molar do constituinte do sistema. Sendo M a massa molar do ar atmosférico contido na parcela, temos

$$\begin{aligned} pV &= \frac{m}{M}\mathfrak{R}T \\ p &= \frac{m}{V}\frac{\mathfrak{R}}{M}T \\ p &= \rho RT \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

onde $R = \mathfrak{R}/M$ é uma constante específica para a parcela de ar. Pela Lei de Dalton temos que a pressão total na mistura é dada pela soma das pressões parciais de cada constituinte da mistura, então

$$p = p_d + p_v \quad (\text{A.44})$$

e por analogia à equação A.43, temos

$$p_d = \rho_d R_d T \quad (\text{A.45})$$

$$p_v = \rho_v R_v T \quad (\text{A.46})$$

onde R_d é a constante para o ar seco e R_v a constante para o vapor d'água. A partir das equações A.41, A.45 e A.46, podemos obter a seguinte equação

$$\rho = \frac{p_d}{R_d T} + \frac{p_v}{R_v T} \quad (\text{A.47})$$

Como visto anteriormente

$$\mathfrak{R} = MR = M_d R_d = M_v R_v \quad (\text{A.48})$$

onde $M_d = 28,966\text{g/mol}$ é a massa molar do ar seco e $M_v = 18,015\text{g/mol}$ é a massa molar do vapor d'água. Logo,

$$R_v = \gamma R_d \quad (\text{A.49})$$

onde $\gamma = M_d/M_v$. Substituindo as relações dadas pelas equações A.49 e A.44 na equação A.47, obtemos

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{p - p_v}{R_d T} + \frac{p_v}{\gamma R_d T} \\ \rho &= \frac{\gamma(p - p_v) + p_v}{\gamma R_d T} \\ \rho &= \frac{\gamma p + (1 - \gamma)p_v}{\gamma R_d T} \\ \rho &= \frac{p + \frac{(1-\gamma)}{\gamma}p_v}{R_d T} \\ \rho &= \frac{p}{R_d T} \left[1 + \frac{(1 - \gamma)p_v}{\gamma p} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.50})$$

A partir da equação A.50 podemos reescrever a equação de estado para uma parcela de ar, como

$$p = \rho R_d T \left[1 + \frac{(1 - \gamma)p_v}{\gamma p} \right]^{-1} \quad (\text{A.51})$$

onde

$$T \left[1 + \frac{(1 - \gamma)p_v}{\gamma p} \right]^{-1}$$

é a temperatura que a parcela de ar teria se fosse composta apenas por ar seco, com a mesma densidade do ar composto por ar seco e vapor d'água, sob a mesma pressão p . Tal temperatura é definida como temperatura virtual T_v ,

$$T_v = T \left[1 + \frac{(1 - \gamma)p_v}{\gamma p} \right]^{-1} \quad (\text{A.52})$$

Para fins práticos, podemos trabalhar algebricamente a equação A.52 a fim de simplificá-la. Expandindo em uma série binomial o termo entre colchetes da equação A.52, temos

$$T_v = T \left[1 - \frac{(1 - \gamma)p_v}{\gamma p} + \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - \gamma)p_v}{\gamma p} \right)^2 + \dots \right] \quad (\text{A.53})$$

Como $|p_v/p(1 - \gamma)|/\gamma < 1$, podemos truncar a série no termo de primeira ordem, pois os termos de ordem maior que um serão muito menores que o termo de primeira ordem. Desta simplificação resulta

$$T_v = T \left[1 - \frac{(1 - \gamma)p_v}{\gamma p} \right] \quad (\text{A.54})$$

onde a razão p_v/p quantifica a quantidade de vapor d'água na parcela. Existem muitas formas de se quantificar o teor de umidade na atmosfera. Duas muito semelhantes são a

razão de mistura w e a umidade específica q_e , definidas por

$$w = \frac{\rho_v}{\rho_d} \quad (\text{A.55})$$

e

$$q_e = \frac{\rho_v}{\rho_d + \rho_v} \quad (\text{A.56})$$

Os valores de w e q_e são bastante parecidos e muitas vezes tratados como equivalentes, pois, em geral, $\rho_v \ll \rho_d$. Assim, utilizaremos a razão de mistura para esta demonstração. Substituindo os resultados das equações A.41, A.45 e A.46 na equação A.55, obtemos

$$\begin{aligned} w &= \frac{\frac{p_v}{R_v T}}{\frac{p_d}{R_d T}} \\ w &= \frac{R_d p_v}{R_v p_d} \\ w &= \frac{R_d}{R_v} \frac{p_v}{(p - p_v)} \\ w &= \frac{1}{\gamma} \frac{p_v}{p \left(1 - \frac{p_v}{p}\right)}, \quad \frac{p_v}{p} \ll 1 \\ w &= \frac{1}{\gamma} \frac{p_v}{p} \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Substituindo a aproximação para a razão de mistura apresentada na equação A.57 na equação A.54, temos

$$\begin{aligned} T_v &\approx T \left[1 - \frac{(1 - \gamma)}{\gamma} \gamma w \right] \\ T_v &\approx T [1 + (\gamma - 1) w] \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Pela definição, $\gamma = 1,610$, logo

$$T_v \approx T [1 + 0,61w] \quad (\text{A.59})$$

$$w \approx q_e$$

$$T_v \approx T [1 + 0,61q_e] \quad (\text{A.60})$$

Substituindo a equação A.59 e, A.13, temos:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{T_v}{[1 + 0,61w]} \left(\frac{p_o}{p} \right)^{R_d/c_p} \\ \theta [1 + 0,61w] &= T_v \left(\frac{p_o}{p} \right)^{R_d/c_p} \\ \theta_v &= T_v \left(\frac{p_o}{p} \right)^{R_d/c_p}\end{aligned}\tag{A.61}$$

onde $\theta_v = \theta [1 + 0,61w]$ é a temperatura potencial virtual. A temperatura potencial virtual de uma parcela equivale a temperatura virtual que uma parcela de ar teria se fosse levada adiabaticamente de um estado de pressão p para um estado de pressão p_0 .

A.5 Equação de Navier-Stokes

A segunda Lei de Newton expressa a relação “causa-consequência” na dinâmica de uma partícula em relação a um referencial. Isto é feito através da relação entre força resultante que atua sobre a partícula (causa) com a variação temporal do momento linear da mesma, (consequência). Matematicamente, definimos a força resultante F_i como

$$F_i = \frac{dp_i}{dt}\tag{A.62}$$

sendo que p_i é o momento linear da partícula na direção x_i . Considerando-se a segunda Lei de Newton aplicada a um elemento de fluido (representado por um cubo, como o da figura A.3(a)) devemos inicialmente analisar as forças que atuam sobre tal elemento afim de encontrar a sua resultante. Adotando-se um referencial fixo na Terra e assumindo-se este referencial como inercial, as forças atuantes em um elemento de fluido presente na atmosfera terrestre são: a força peso (de origem gravitacional) que atua no centro gravitacional do elemento de fluido e a força de superfície (de origem eletromagnética) que atua nas paredes do elemento de fluido e surge devido ao contato de um elemento de fluido com as adjacências.

A.5.1 Força de natureza gravitacional – força peso

Aproximando-se a forma do planeta como esférico e de massa uniformemente distribuída e um elemento infinitesimal de fluido, a força de origem gravitacional que atua sobre o elemento é dada pela Lei de Newton para a Gravitação

$$\delta F_{gi} = -G \frac{M \delta m}{x_i^2} \hat{x}_i\tag{A.63}$$

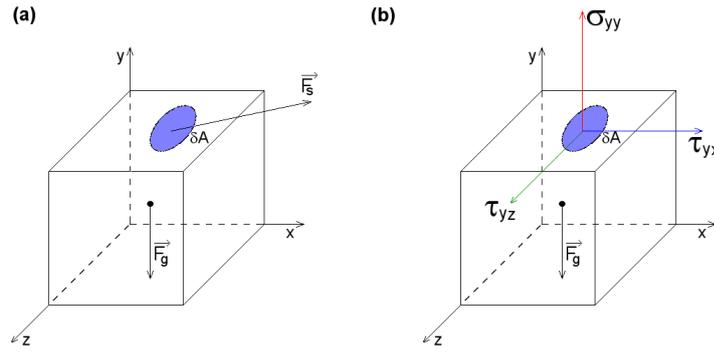


Figura A.3 – (a) Representação do elemento de fluido e as forças que sobre ele atuam. (b) Representação das tensões que agem em uma face do elemento de fluido.

onde G é a constante de gravitação universal, M a massa do planeta, δm a massa do elemento de fluido, x_i é a distância do centro da Terra até a posição do elemento de fluido e (\hat{x}_i o versor que indica a direção e sentido da força gravitacional). Definindo-se o seguinte conjunto de eixos coordenados $x_i = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, e mantendo o eixo z sempre na mesma direção e sentido do vetor que aponta radialmente do centro para fora da Terra, temos que

$$\delta F_{gi} = -G \frac{M \delta m}{x_i^2} \hat{x}_i \delta_{i3} \quad (\text{A.64})$$

Como a força gravitacional é a própria força peso definida como $P_i = m g_i$, onde g_i é a aceleração da gravidade, igualando-se as equações (A.64) e a definição de força peso resulta

$$\begin{aligned} \delta F_{gi} &= \delta P_i \\ -G \frac{M \delta m}{x_i^2} \hat{x}_i \delta_{i3} &= \delta m g_i \\ g_i &= -G \frac{M}{x_i^2} \hat{x}_i \delta_{i3} \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

$$g_i = (0, 0, -g_0) \quad (\text{A.66})$$

onde g_0 é dado por

$$g_0 = G \frac{M}{z^2} \quad (\text{A.67})$$

A posição, em relação ao eixo z da partícula pode ser dada pela soma do raio da Terra (R_T) com a altura h da partícula, em relação à superfície. Assim, a equação A.67 é escrita como

$$g_0 = G \frac{M}{(R_T + h)^2} \quad (\text{A.68})$$

Como discutido na seção 2.6.7 (página 40), grande parte da atmosfera está confinada em uma camada de, aproximadamente, $30km$ de altura. Comparando com o raio médio da Terra, que é da ordem de $6,3 \times 10^3 Km$, podemos desprezar as variações de h na expressão A.68, uma vez que $R_T \gg h$ e portanto $R_T + h \approx R_T$. Assim,

$$g_0 = G \frac{M}{(R_T)^2} \quad (\text{A.69})$$

onde g_0 é definido como o módulo da aceleração da gravidade na superfície da Terra.

Desta maneira o elemento diferencial de força de origem gravitacional que atua sobre um fluido é dado por

$$\delta F_{gi} = \delta m g_i$$

Pela definição de densidade:

$$\rho = \frac{\delta m}{\delta V}, \quad (\text{A.70})$$

onde ρ é a densidade e δV o volume do elemento diferencial de fluido. Logo,

$$\delta m = \rho \delta V, \quad (\text{A.71})$$

e a equação (A.70) é reescrita como:

$$\begin{aligned} \delta F_{gi} &= \rho \delta V g_i \\ \frac{\delta F_{gi}}{\delta V} &= \rho g_i \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

No limite $\delta V \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta F_{gi}}{\delta V} &= \lim_{\delta V \rightarrow 0} \rho g_i \\ \frac{dF_{gi}}{dV} &= \rho g_i \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

A.5.2 Forças de natureza eletromagnética – forças de superfície

A análise da força de superfície é um pouco mais sofisticada pois além de considerar a direção em que a força atua também devemos levar em conta a “face” do elemento de fluido. Logo, as interações eletromagnéticas na superfície do elemento de fluido são bem descritas pelas componentes de um tensor τ_{ij} , onde defini-se que o primeiro índice identifica a direção normal à face analisada e o segundo índice a direção da componente

do tensor. De acordo com a figura A.3(b) o tensor τ_{ij} é definido pela matriz:

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}.$$

onde as componentes do tensor que são normais as faces do elemento de fluido ocupam a diagonal principal da matriz e doravante serão definidos como $\tau_{i,i} = \sigma_{i,i}$. A relação entre cada componente do tensor e a respectiva componente da força de superfície é dada por

$$\tau_{ij} = \frac{\delta F_{si}}{\delta A_j} \quad (\text{A.74})$$

onde δF_{si} é a força de superfície na direção x_i e $\delta A_j = \delta x_i \delta x_k$ é um elemento de área normal à direção x_j . A força de superfície resultante em cada dimensão x_i , pode ser dada pela diferença entre $\delta F'_{si}$ e $\delta F''_{si}$, tendo a primeira o mesmo sentido do eixo x_i . Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \delta F_{si} &= \delta F'_{si} - \delta F''_{si} \\ \delta F_{si} &= (\tau_{ij} \delta A_j)' - (\tau_{ij} \delta A_j)'' \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Para calcular a tensão em cada face do elemento de fluido obtemos a sua variação através do elemento de fluido. Considerando-se um ponto central no elemento de fluido, no qual $\tau_{ij} = \tau_{ij0}$, cada um dos tensores τ_{ij} é dado por

$$\tau_{ij} = \tau_{ij0} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta l \quad (\text{A.76})$$

onde $\delta l = (1/2)\delta x_j$, quando consideramos o sentido positivo de x_j e $\delta l = -(1/2)\delta x_j$, quando consideramos o sentido negativo de x_j . Dessa forma, da equação A.75 resulta

$$\begin{aligned} \delta F_{si} &= \left(\tau_{ij0} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \frac{\delta x_j}{2} \right) \delta A_j - \left(\tau_{ij0} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \frac{\delta x_j}{2} \right) \delta A_j \\ \delta F_{si} &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta x_j \delta A_j \\ \delta F_{si} &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta V \\ \frac{\delta F_{si}}{\delta V} &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

No limite $\delta V \rightarrow 0$:

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta F_{si}}{\delta V} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{dF_{si}}{dV} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.78})$$

A.5.3 Equação de Cauchy

Substituindo-se os resultados obtidos pelas equações A.73 e A.78 na equação A.62,

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \delta F_{gi} + \delta F_{si} \\ \frac{d}{dt} (\delta m u_i) &= \delta F_{gi} + \delta F_{si} \\ \delta m \frac{du_i}{dt} &= \delta F_{gi} + \delta F_{si} \\ \rho \delta V \frac{du_i}{dt} &= \delta F_{gi} + \delta F_{si} \\ \rho \frac{du_i}{dt} &= \frac{\delta F_{gi}}{\delta V} + \frac{\delta F_{si}}{\delta V} \\ \delta V &\rightarrow 0 \\ \rho \frac{du_i}{dt} &= \frac{\delta F_{gi}}{dV} + \frac{\delta F_{si}}{dV} \\ \frac{du_i}{dt} &= g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

onde a equação A.79 é a Equação de Cauchy para o movimento de uma partícula de fluido. Esta equação relaciona a aceleração resultante em uma partícula de fluido devido a ação da força gravitacional e das ações viscosas. Contudo, a equação A.79 não relaciona as tensões τ_{ij} com o campo de deformação do escoamento. Nesse sentido é necessário estabelecer um modelo de fluido que descreva as interações viscosas, que será realizado na próxima subseção dessa demonstração.

A.5.4 Equação de Navier-Stokes em referenciais inerciais

A equação de Navier-Stokes constitui um fechamento para a equação de Cauchy. Na equação de Cauchy os termos relativos as tensões de cisalhamento do fluido precisam de um modelo físico para serem expressas. A equação de Navier-Stokes utiliza o modelo de fluido newtoniano para reescrever a equação de Cauchy. Para um fluido newtoniano as tensões de cisalhamento são dadas por (LANDAU; LIFSHITZ, 1959; KUNDU, 1990)

$$\tau_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.80})$$

Substituindo-se a equação A.80 em A.79, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \frac{du_i}{dt} &= g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[- \left(p + \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\
 \frac{du_i}{dt} &= g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
 \frac{du_i}{dt} &= g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned} \tag{A.81}$$

onde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ é a viscosidade cinemática do fluido. Desta forma a equação A.81 é a equação de Navier-Stokes para um fluido newtoniano em relação a um referencial inercial. Aplicando a condição de fluido incompressível, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{du_\alpha}{dx_\alpha} &= 0 \\
 \frac{du_i}{dt} &= g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\
 \frac{du_i}{dt} &= g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \\
 \frac{du_i}{dt} &= g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \\
 \frac{du_i}{dt} &= g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\
 \frac{du_i}{dt} &= g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}
 \end{aligned} \tag{A.82}$$

onde a equação A.82 é a equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível. Em uma simplificação extrema onde assumimos um fluido invíscido, temos $\nu = 0$ e a equação A.82 recai na equação de Euler,

$$\frac{du_i}{dt} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{A.83}$$

A.5.4.1 Equação de Navier-Stokes em referencias não-inerciais

A primeira Lei de Newton define os referenciais inerciais como sendo aqueles onde uma partícula livre esta em repouso ou com movimento retilíneo uniforme (MRU) e, nestes referenciais muito peculiares, as leis de Newton são válidas. Portanto, um referencial que se move juntamente com o planeta Terra, em relação a um referencial inercial, não pode ser considerado um referencial desta natureza devido ao movimento de translação e rotação da Terra, que são acelerados. Então, para utilizarmos as Leis de Newton para uma partícula que tem sua posição obtida a partir de um referencial que se move com

a superfície da Terra (em relação a um referencial inercial) devemos incluir forças de origem inercial (que surgem devido a aceleração do referencial em relação a um referencial inercial) no somatório das forças que atuam sobre partícula. Estas forças surgem naturalmente quando manipulamos matematicamente a segunda Lei de Newton. Um referencial aceito como inercial é aquele no qual as estrelas distantes estão em repouso ou em MRU, pois é senso comum na física que o movimento destas estrelas em relação a um referencial fixo na Terra é imperceptível, portanto estão em repouso.

Tomando como referencial o conjunto de eixos coordenados (x, y, z) que garantem a condição de repouso ou MRU das estrelas distantes e o conjunto de eixos coordenados (x', y', z') (figura A.4) como fixo no centro do planeta podemos obter as forças de origem inercial e incluí-las na segunda lei de Newton.

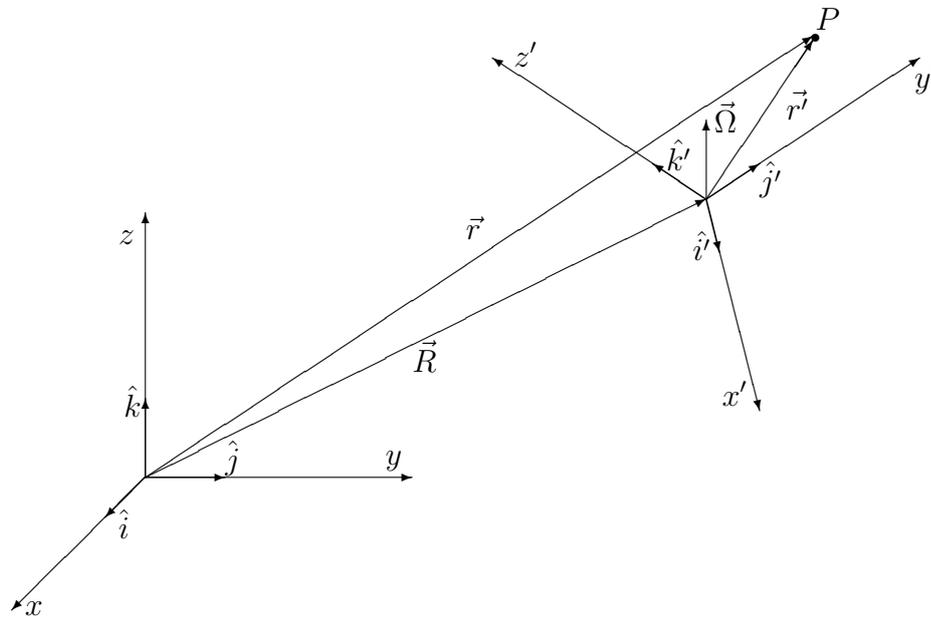


Figura A.4 – Representação das bases dos espaços vetoriais associados aos sistemas de referência inercial (x, y, z) e não inercial (x', y', z') .

Vamos considerar como exemplo o elemento de fluido na posição P (figura A.4) tal que sua posição em relação ao referencial (x, y, z) é dada pelo vetor \vec{r} e em relação ao referencial (x', y', z') é dada pelo vetor \vec{r}' . O vetor \vec{R} define a posição da origem do sistema (x', y', z') em relação a (x, y, z) , logo $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$. Se tomarmos a a variação temporal de \vec{r} em relação ao referencial fixo (inercial), onde

$$\vec{r} = \alpha \hat{j}_i = x_i \quad (\text{A.84})$$

$$\vec{R} = A \hat{j}_i = X_i \quad (\text{A.85})$$

$$\vec{r}' = \alpha' \hat{j}'_i = x'_i \quad (\text{A.86})$$

sendo \hat{j}_i e \hat{j}'_i versores que indicam a direção da componente i . No referencial em questão temos que \hat{j}_i é constante e \hat{j}'_i é variável pois se move juntamente com o sistema de referência (x', y', z') . Assim, a variação da posição P , no tempo, em relação ao referencial fixo é dada por:

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_f = \left(\frac{dX_i}{dt}\right)_f + \left(\frac{dx'_i}{dt}\right)_f \quad (\text{A.87})$$

$$u_i^f = U_i^f + \left(\frac{dx'_i}{dt}\right)_f \quad (\text{A.88})$$

onde o índice f representa uma variação em relação ao referencial inercial. Utilizando a definição dadas por A.86, o último termo do lado direito da equação A.88 pode ser obtido como:

$$\left(\frac{d}{dt}x'_i\right)_f = \frac{d\alpha'}{dt}\hat{j}'_i + \alpha'\frac{d\hat{j}'_i}{dt} \quad (\text{A.89})$$

porém, o primeiro termo do lado direito da equação A.88 é equivalente a derivada de x'_i em relação ao tempo, no referencial (x', y', z') , pois neste referencial \hat{j}'_i é constante. Já a derivada temporal de \hat{j}'_i indica o versor do vetor velocidade com que a partícula se move em relação ao referencial não inercial (\hat{v}'_i). Tal velocidade podemos escrever como o produto vetorial entre a velocidade angular e a posição, ou seja, $\hat{v}'_i = \varepsilon_{ijk}\Omega_j\hat{j}'_k$. Substituindo essas relações ena equação A.89, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx'_i}{dt}\right)_f &= u_i'^r + \alpha'\varepsilon_{ijk}\Omega_j\hat{j}'_k \\ \left(\frac{dx'_i}{dt}\right)_f &= u_i'^r + \varepsilon_{ijk}\Omega_j\alpha\hat{j}'_k \\ \left(\frac{dx'_i}{dt}\right)_f &= u_i'^r + \varepsilon_{ijk}\Omega_jx'_k \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

Substituindo a equação A.90 na equação A.88

$$u_i^f = U_i^f + u_i'^r + \varepsilon_{ijk}\Omega_jx'_k \quad (\text{A.91})$$

onde a equação A.91 expressa a velocidade, em relação a um referencial inercial, de uma partícula presa a um referencial não inercial. Uma vez obtida a velocidade da partícula, podemos obter a sua variação temporal e então chegar a aceleração. Derivando a equação A.91 em relação ao tempo em um referencial inercial, temos:

$$\left(\frac{du_i^f}{dt}\right)_f = \left(\frac{dU_i^f}{dt}\right)_f + \left(\frac{du_i^{r'}}{dt}\right)_f + \varepsilon_{ijk}\Omega_j \left(\frac{dx_k^{r'}}{dt}\right)_f \quad (\text{A.92})$$

Analogamente à equação A.90, podemos escrever as variações temporais em relação ao referencial inercial das variáveis obtidas de um referencial não inercial, como

$$\begin{aligned} \left(\frac{du_i^f}{dt}\right)_f &= \left(\frac{dU_i^f}{dt}\right)_f + \left(\frac{du_i^{r'}}{dt}\right)_r + \varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k^{r'} + \varepsilon_{ijk}\Omega_j \left(\left(\frac{dx_k^{r'}}{dt}\right)_r + \varepsilon_{ijk}\Omega_j x_k^{r'}\right) \\ \left(\frac{du_i^f}{dt}\right)_f &= \left(\frac{dU_i^f}{dt}\right)_f + \left(\frac{du_i^{r'}}{dt}\right)_r + \varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k^{r'} + \varepsilon_{ijk}\Omega_j \left(\frac{dx_k^{r'}}{dt}\right)_r + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\Omega_l x_m^{r'} \\ \left(\frac{du_i^f}{dt}\right)_f &= \left(\frac{dU_i^f}{dt}\right)_f + \left(\frac{du_i^{r'}}{dt}\right)_r + \varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k^{r'} + \varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k^{r'} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\Omega_l x_m^{r'} \\ \left(\frac{du_i^f}{dt}\right)_f &= \left(\frac{dU_i^f}{dt}\right)_f + \left(\frac{du_i^{r'}}{dt}\right)_r + 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k^{r'} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\Omega_l x_m^{r'} \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

Na equação A.93 o primeiro termo do lado direito da equação refere-se a aceleração associada ao movimento de translação da Terra. Para estudos atmosféricos esse termo é desprezível. Além do mais, o termo do lado direito da equação corresponde as acelerações medidas em um referencial inercial, que foram obtidas na equação A.82. Substituindo-se tais considerações em A.93, temos

$$g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \left(\frac{du_i^{r'}}{dt}\right)_r + 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k^{r'} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\Omega_l x_m^{r'} \quad (\text{A.94})$$

onde, para facilitar a notação, iremos assumir $u_i^{r'} = u_i$, ou seja, a velocidade que é realmente medida no referencial não inercial. Disso resulta:

$$\frac{du_i}{dt} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k^{r'} - \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\Omega_l x_m^{r'} \quad (\text{A.95})$$

onde os dois últimos termos do lado direito da equação representam, respectivamente, as acelerações devido a atuação da força de Coriolis e força centrífuga. Estas duas forças são forças de origem inercial e aparecem para introduzir os efeitos desse referencial na segunda lei de Newton. A força de Coriolis depende da velocidade do corpo que se desloca no referencial inercial, já a centrífuga do raio de rotação. Além disso, a força centrífuga acaba atuando em conjunto com a força gravitacional, desviando a resultante da direção imposta pela gravitação. Dessa forma, podemos unir as forças de origem gravitacional e a força centrífuga em uma única resultante, e dessa força obtemos a aceleração efetiva da gravidade. Então, redefinimos g_i como:

$$g_i = g_{i(\text{grav})} - \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\Omega_l x_m^{r'} \quad (\text{A.96})$$

Além do mais, a intensidade da força centrífuga é muito menor que a gravitacional, sendo relevante apenas na direção vertical. Assim, podemos escrever

$$g_i = -g\delta_{i3} \quad (\text{A.97})$$

onde g é o módulo da componente vertical da aceleração centrífuga adicionado a g_o anteriormente definido. Dessa maneira, podemos reescrever a equação de Navier-Stokes para referenciais não inerciais, como

$$\frac{du_i}{dt} = -g\delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k' \quad (\text{A.98})$$

Aplicando o Teorema do Transporte de Reynolds na equação A.98, resulta

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g\delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k' \quad (\text{A.99})$$

A.6 Aproximação de Boussinesq

A aproximação de Boussinesq implica em assumir a seguinte hipótese: as flutuações de densidade em um fluido são desprezíveis, menos quando multiplicadas pela aceleração da gravidade. Para obter tal aproximação partimos da Equação de Navier-Stokes:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho} (a_v + a_{in})_i \quad (\text{A.100})$$

onde a_v e a_{in} são, respectivamente, as acelerações devido as forças viscosas e de origem inercial. Multiplicando a equação A.100 pela densidade ρ , obtemos

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + (a_v + a_{in})_i \quad (\text{A.101})$$

assumindo, na equação A.101 que a pressão e a densidade podem ser escritas como a soma de um estado de referência mais uma perturbação em relação a este estado, temos

$$p = p_0 + p^\dagger \quad (\text{A.102})$$

$$\rho = \rho_0 + \rho^\dagger \quad (\text{A.103})$$

onde p_0 e ρ_0 são os valores de referência de pressão e densidade, respectivamente, ao passo que p^\dagger e ρ^\dagger são suas respectivas perturbações. Substituindo-se as equações

A.102 e A.103 em A.101, obtemos

$$\begin{aligned}
 (\rho_0 + \rho^\dagger) \frac{du_i}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} (p_0 + p^\dagger) + (\rho_0 + \rho^\dagger) g_i + (a_v + a_{in})_i \\
 \frac{1}{\rho_0} (\rho_0 + \rho^\dagger) \frac{du_i}{dt} &= \frac{1}{\rho_0} \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (p_0 + p^\dagger) + (\rho_0 + \rho^\dagger) g_i + (a_v + a_{in})_i \right] \\
 \left(1 + \frac{\rho^\dagger}{\rho_0} \right) \frac{du_i}{dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^\dagger}{\partial x_i} + g_i + \frac{\rho^\dagger}{\rho_0} g_i + \frac{1}{\rho_0} (a_v + a_{in})_i \\
 \frac{du_i}{dt} + \frac{\rho^\dagger}{\rho_0} \frac{du_i}{dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^\dagger}{\partial x_i} + g_i + \frac{\rho^\dagger}{\rho_0} g_i + \frac{1}{\rho_0} (a_v + a_{in})_i \quad (\text{A.104})
 \end{aligned}$$

Aplicando uma análise de escala na equação A.104, temos que a razão entre a flutuação da densidade e seu valor de referência é muito pequeno, sobretudo quando multiplica o termo inercial da equação, que também possuem um valor pequeno (KUNDU, 1990), então

$$\frac{\rho^\dagger}{\rho_0} \frac{du_i}{dt} \approx 0 \quad (\text{A.105})$$

além disso, podemos assumir que o valor de referência de pressão e densidade se relacionam pela aproximação hidrostática, logo

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} = g_i \quad (\text{A.106})$$

Substituindo as considerações impostas pelas equações A.105 e A.106 em A.104, resulta

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^\dagger}{\partial x_i} + \frac{\rho^\dagger}{\rho_0} g_i + \frac{1}{\rho_0} (a_v + a_{in})_i \quad (\text{A.107})$$

Assumindo o modelo de gás ideal, a equação de estado para a atmosfera e seu estado de referência são dadas respectivamente por

$$p = \rho R_d T_v \quad (\text{A.108})$$

$$p_0 = \rho_0 R_d T_{v0} \quad (\text{A.109})$$

onde T_v é a temperatura virtual e T_{v0} a temperatura virtual de referência, cuja a relação é análoga a apresentada para pressão e densidade, ou seja: $T_v = T_{v0} + T_v^\dagger$. Dessa forma, a equação A.108 pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 p_0 + p^\dagger &= (\rho_0 + \rho^\dagger) R_d (T_{v0} + T_v^\dagger) \\
 p_0 + p^\dagger &= \rho_0 R_d T_{v0} + \rho_0 R_d T_v^\dagger + \rho^\dagger R_d T_{v0} + \rho^\dagger R_d T_v^\dagger \quad (\text{A.110})
 \end{aligned}$$

Dividindo a equação A.110 pela equação A.109, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{p_0 + p^\dagger}{p_0} &= \frac{\rho_0 R_d T_{v0}}{\rho_0 R_d T_{v0}} + \frac{\rho_0 R_d T_v^\dagger}{\rho_0 R_d T_{v0}} + \frac{\rho^\dagger R_d T_{v0}}{\rho_0 R_d T_{v0}} + \frac{\rho^\dagger R_d T_v^\dagger}{\rho_0 R_d T_{v0}} \\ 1 + \frac{p^\dagger}{p_0} &= 1 + \frac{T_v^\dagger}{T_{v0}} + \frac{\rho^\dagger}{\rho_0} + \frac{\rho^\dagger T_v^\dagger}{\rho_0 T_{v0}} \\ \frac{p^\dagger}{p_0} &= \frac{T_v^\dagger}{T_{v0}} + \frac{\rho^\dagger}{\rho_0} + \frac{\rho^\dagger T_v^\dagger}{\rho_0 T_{v0}}\end{aligned}\quad (\text{A.111})$$

Fazendo novamente uma análise de escala, temos que $\rho^\dagger T_v^\dagger \ll \rho_0 T_{v0}$, e com isso podemos desprezar o terceiro termo da equação A.111. Além disso, a razão entre as flutuações de pressão e o valor de referência desta variável é de uma a duas ordens de grandeza menor que os demais termos da equação A.111, sobretudo na baixa atmosfera. Com isso podemos assumir $p^\dagger/p_0 \approx 0$ (STULL, 1988). Aplicando as considerações feitas na equação A.111, resulta

$$\begin{aligned}0 &= \frac{T_v^\dagger}{T_{v0}} + \frac{\rho^\dagger}{\rho_0} \\ \frac{\rho^\dagger}{\rho_0} &= -\frac{T_v^\dagger}{T_{v0}} \\ \frac{\rho^\dagger}{\rho_0} &= -\left(\frac{T_v - T_{v0}}{T_{v0}}\right) \\ \frac{\rho^\dagger}{\rho_0} &= -\left(\frac{T_v}{T_{v0}} - 1\right)\end{aligned}\quad (\text{A.112})$$

Pela definição de temperatura potencial virtual, temos

$$\theta_v = T_v \left(\frac{p_*}{p}\right)^k \quad (\text{A.113})$$

onde p_* é a pressão final do processo adiabático associado a definição de temperatura potencial³ e $k = R_d/c_p$. Da equação A.113 podemos definir a temperatura potencial virtual de referência, como segue

$$\theta_{v0} = T_{v0} \left(\frac{p_*}{p_0}\right)^k \quad (\text{A.114})$$

onde $\theta_{v0} = \theta_v - \theta_v^\dagger$. A partir disso, a equação A.113 pode ser escrita e manipulada da seguinte forma

$$T_v = \theta_v \left(\frac{p}{p_*}\right)^k$$

³ver seção A desde apêndice.

$$\begin{aligned}
T_{v0} + T_v^\dagger &= (\theta_{v0} + \theta_v^\dagger) \left(\frac{p}{p_*} \right)^k \\
T_v^\dagger &= (\theta_{v0} + \theta_v^\dagger) \left(\frac{p}{p_*} \right)^k - T_{v0} \\
T_v^\dagger &= \theta_{v0} \left(\frac{p}{p_*} \right)^k + \theta_v^\dagger \left(\frac{p}{p_*} \right)^k - \theta_{v0} \left(\frac{p_0}{p_*} \right)^k \\
T_v^\dagger &= \theta_{v0} \left[\left(\frac{p}{p_*} \right)^k - \left(\frac{p_0}{p_*} \right)^k \right] + \theta_v^\dagger \left(\frac{p}{p_*} \right)^k
\end{aligned} \tag{A.115}$$

Dividindo a equação A.115 pela equação A.114

$$\begin{aligned}
\frac{T_v^\dagger}{T_{v0}} &= \left[\left(\frac{p}{p_*} \right)^k - \left(\frac{p_0}{p_*} \right)^k \right] \left(\frac{p_*}{p_0} \right)^k + \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} \left(\frac{p}{p_*} \right)^k \left(\frac{p_*}{p_0} \right)^k \\
\frac{T_v^\dagger}{T_{v0}} &= \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^k - 1 \right] + \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^k \\
\frac{T_v^\dagger}{T_{v0}} &= \left[\left(\frac{p_0 + p^\dagger}{p_0} \right)^k - 1 \right] + \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} \left(\frac{p_0 + p^\dagger}{p_0} \right)^k \\
\frac{T_v^\dagger}{T_{v0}} &= \left[\left(1 + \frac{p^\dagger}{p_0} \right)^k - 1 \right] + \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} \left(1 + \frac{p^\dagger}{p_0} \right)^k
\end{aligned} \tag{A.116}$$

Como $p^\dagger/p_0 \ll 1$, os termos entre parenteses na equação A.116 podem ser expandidos em uma série binomial. Desconsiderando-se os termos de ordem $n > 1$, resulta

$$\left(1 + \frac{p^\dagger}{p_0} \right)^k \approx \left(1 + k \frac{p^\dagger}{p_0} \right) \tag{A.117}$$

substituindo a equação A.117 em A.116,

$$\begin{aligned}
\frac{T_v^\dagger}{T_{v0}} &= \left[\left(1 + k \frac{p^\dagger}{p_0} \right) - 1 \right] + \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} \left(1 + k \frac{p^\dagger}{p_0} \right) \\
\frac{T_v^\dagger}{T_{v0}} &= k \frac{p^\dagger}{p_0} + \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} + k \frac{\theta_v^\dagger p^\dagger}{\theta_{v0} p_0}
\end{aligned} \tag{A.118}$$

Fazendo novamente uma análise de escala, temos que o primeiro e o quarto termo da equação A.118 são desprezíveis quando comparados aos demais termos, e consequentemente

$$\frac{T_v^\dagger}{T_{v0}} = \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} \tag{A.119}$$

Associando-se as equações A.107, A.112 e A.119, é possível encontrar uma equação para o movimento onde a aproximação de Boussinesq é expressa por uma relação entre a perturbação e o valor de referência da temperatura potencial virtual. Disso segue que

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^\dagger}{\partial x_i} - \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} g_i + \frac{1}{\rho_0} (a_v + a_{in})_i \quad (\text{A.120})$$

Manipulando-se a equação A.120, a partir das definições assumidas nas expressões A.102 e A.106

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_i} (p - p_0) - \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} g_i + \frac{1}{\rho_0} (a_v + a_{in})_i \\ \frac{du_i}{dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} - \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} g_i + \frac{1}{\rho_0} (a_v + a_{in})_i \\ \frac{du_i}{dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i - \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} g_i + \frac{1}{\rho_0} (a_v + a_{in})_i \\ \frac{du_i}{dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \left(1 - \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}}\right) g_i + \frac{1}{\rho_0} (a_v + a_{in})_i \end{aligned} \quad (\text{A.121})$$

onde a equação A.121 também é a equação de movimento para uma parcela de fluido aplicando-se a correção de Boussinesq. Porém, esta versão da equação é mais prática, uma vez que é muito mais fácil obter valores de temperatura que densidade do ar. Esta equação pode ser expandida para cada uma das três componentes do campo de velocidade do vento. Seja o vetor u_i dado por $u_i = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ para cada uma das direções $x_i = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, onde x e y formam o plano horizontal e z a direção vertical, orientada com o sentido positivo para cima. Assim, o vetor g_i é dado por $g_i = (0, 0, -g_0)$, onde g_0 é o módulo da aceleração gravitacional. A partir destas considerações, o conjunto de equações para cada uma das direções do campo de velocidades do vento é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} (a_v + a_{in})_x \quad (\text{A.122})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} (a_v + a_{in})_y \quad (\text{A.123})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\theta_v^\dagger}{\theta_{v0}} g + \frac{1}{\rho_0} (a_v + a_{in})_z \quad (\text{A.124})$$

A.7 Equação de balanço da energia cinética turbulenta

Para obtermos a equação de balanço da energia cinética turbulenta média na CLP precisamos antes definir as propriedades do operador média. Nesta demonstração seguiremos as propriedades da decomposição e média de Reynolds (STULL, 1988; SORBJAN, 1989). Sejam $a = a(x_i, t)$ e $b = b(x_i, t)$ duas variáveis do escoamento turbulento e c uma constante qualquer. Essas duas variáveis podem ser decompostas como a soma de duas

partes: uma parte média e uma perturbação em relação a média, tal que:

$$a = \langle a \rangle + a' \quad (\text{A.125})$$

$$b = \langle b \rangle + b' \quad (\text{A.126})$$

onde o operador $\langle \cdot \rangle$ é definido como o operador média que segue as seguintes propriedades (STULL, 1988; SORBJAN, 1989)

$$\langle a \rangle = \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{n=N_i} a_i \quad (\text{A.127})$$

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \langle \langle a \rangle + a' \rangle \\ &= \langle \langle a \rangle \rangle + \langle a' \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \langle a \rangle \rangle = \langle a \rangle = \text{constante}^4 \quad (\text{A.128})$$

$$\langle a' \rangle = 0 \quad (\text{A.129})$$

$$\langle ca \rangle = c \langle a \rangle \quad (\text{A.130})$$

$$\begin{aligned} \langle a + b \rangle &= \langle (\langle a \rangle + a') + (\langle b \rangle + b') \rangle \\ &= \langle \langle a \rangle \rangle + \langle a' \rangle + \langle \langle b \rangle \rangle + \langle b' \rangle \\ &= \langle a \rangle + \langle b \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.131})$$

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle a \rangle \quad (\text{A.132})$$

$$\begin{aligned} \langle \langle a \rangle b \rangle &= \langle \langle a \rangle \rangle \langle (\langle b \rangle + b') \rangle \\ &= \langle a \rangle (\langle b \rangle + \langle b' \rangle) \\ &= \langle a \rangle \langle b \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.133})$$

$$\begin{aligned} \langle ab \rangle &= \langle (\langle a \rangle + a') (\langle b \rangle + b') \rangle \\ &= \langle \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle a \rangle b' + \langle b \rangle a' + \langle a' b' \rangle \rangle \\ &= \langle \langle a \rangle \langle b \rangle \rangle + \langle \langle a \rangle b' \rangle + \langle \langle b \rangle a' \rangle + \langle a' b' \rangle \\ &= \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle a \rangle \langle b' \rangle + \langle b \rangle \langle a' \rangle + \langle a' b' \rangle \\ &= \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle a' b' \rangle \\ \langle a \rangle b' &= \langle b \rangle a' = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.134})$$

Com as propriedades do operador média definidos, a equação da energia cinética turbulenta para a CLP pode ser obtida a partir da equação de Navier-Stokes.s

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (\text{A.135})$$

utilizando a Aproximação de Boussinesq na equação A.135, obtém-se

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g_i - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} \theta'_v - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial p}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (\text{A.136})$$

onde o estado básico da aproximação de Boussinesq corresponde à média e a perturbação em relação ao estado básico a perturbação em relação à média.

Aplicando a decomposição de Reynolds no campo de velocidade e pressão da equação A.136,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\langle u_i \rangle + u'_i) &= - (\langle u_j \rangle + u'_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i \rangle + u'_i) + g_i - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} \theta'_v - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle p \rangle + p') \\ &\quad - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j (\langle u_k \rangle + u'_k) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\langle u_i \rangle + u'_i) \\ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} u'_i &= - \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \langle u_j \rangle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + g_i - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} \theta'_v \\ &\quad - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle u_k \rangle - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u'_k + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} \\ &\quad + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

Aplicando o operador média na equação A.137,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u'_i \right\rangle &= - \left\langle \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \langle u_j \rangle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle + g_i - \left\langle \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} \theta'_v \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right\rangle \\ &\quad - \langle 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle u_k \rangle \rangle - \langle 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u'_k \rangle + \left\langle \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} \right\rangle + \left\langle \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \right\rangle \\ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u'_i \rangle}{\partial t} &= - \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u'_i \rangle}{\partial x_j} - \langle u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle + g_i \\ &\quad - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} \langle \theta'_v \rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial \langle p' \rangle}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle u_k \rangle \\ &\quad - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle u'_k \rangle + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 \langle u'_i \rangle}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} &= - \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle + g_i - \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle u_k \rangle \\ &\quad + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (\text{A.138})$$

A equação A.138 é a equação de movimento para o campo de velocidade média do escoamento. Para obtermos a equação de movimento para as flutuações do campo de velocidade, ou seja, a equação para as perturbações do campo de velocidade, em relação

ao campo médio, fazemos:

$$\begin{aligned} u'_i &= u_i - \langle u_i \rangle \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t} &= \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.139})$$

A operação sugerida pela equação A.139 é equivalente a subtrair a equação A.138 da equação A.137. Efetuando tal operação

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_i}{\partial t} &= - \langle u_j \rangle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} \theta'_v - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \\ &\quad - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u'_k + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (\text{A.140})$$

Multiplicando a equação A.140 por u'_i , temos

$$\begin{aligned} u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t} &= - u'_i \langle u_j \rangle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - u'_i u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - u'_i u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_i \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} u'_i \theta'_v \\ &\quad - \frac{u'_i}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} u'_i \Omega_j u'_k + u'_i \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (\text{A.141})$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \alpha^2}{\partial \xi} = \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \quad (\text{A.142})$$

e ainda, pelas propriedades do tensor de Levi-Civita,

$$\varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k = 0 \quad (\text{A.143})$$

Substituindo as propriedades dadas pelas equações A.142 e A.143 em A.141,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u_i'^2}{\partial t} &= - \frac{1}{2} \langle u_j \rangle \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} - u'_i u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{2} u'_j \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} + u'_i \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} u'_i \theta'_v \\ &\quad - \frac{u'_i}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u'_i \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (\text{A.144})$$

No entanto, $(1/2)u_i'^2$ é a definição de energia cinética turbulenta E (por unidade de massa),

$$E = \frac{1}{2} u_i'^2 \quad (\text{A.145})$$

Substituindo A.145 em A.144, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = & - \langle u_j \rangle \frac{\partial E}{\partial x_j} - u'_i u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial E}{\partial x_j} + u'_i \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} u'_i \theta'_v \\ & - \frac{u'_i}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (\text{A.146})$$

Assumindo a condição de fluido incompressível temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial (\langle u_j \rangle + u'_j)}{\partial x_j} &= 0 \\ \left\langle \frac{\partial (\langle u_j \rangle + u'_j)}{\partial x_j} \right\rangle &= \langle 0 \rangle \\ \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u'_j \rangle}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.147})$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A.148})$$

Se multiplicarmos a equação A.148 por qualquer valor a expressão continuará nula, logo, pode ser somada ou subtraída de uma equação sem alterar a igualdade. Assim, da equação A.148

$$-E \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A.149})$$

$$-\frac{p'}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.150})$$

Somando as equações A.149 e A.150 ao lado direito da equação A.146:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = & - \langle u_j \rangle \frac{\partial E}{\partial x_j} - u'_i u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial E}{\partial x_j} - E \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} + u'_i \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} u'_i \theta'_v \\ & - \frac{u'_i}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{p'}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + u'_i \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial E}{\partial t} = & - \langle u_j \rangle \frac{\partial E}{\partial x_j} - u'_i u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_j E) + u'_i \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} u'_i \theta'_v \\ & - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} (u'_i p') + u'_i \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (\text{A.151})$$

onde a equação A.151 é a equação de balanço para a energia cinética turbulenta. Apli-

cando o operador média nessa equação, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial E}{\partial t} \right\rangle &= - \left\langle \langle u_j \rangle \frac{\partial E}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle u'_i u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_j E) \right\rangle + \left\langle u'_i \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} u'_i \theta'_v \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} (u'_i p') \right\rangle + \left\langle u'_i \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \right\rangle \\
\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} &= - \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial x_j} - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_j E \rangle - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} \langle u'_i \theta'_v \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u'_i p' \rangle \\
&\quad + \left\langle u'_i \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \right\rangle
\end{aligned} \tag{A.152}$$

O último termo do lado direito da equação A.152 pode ser reescrito como:

$$u'_i \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} = \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 u'^2_i}{\partial x_j^2} - \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \tag{A.153}$$

Segundo Stull (1988), o primeiro termo do lado direito da equação A.153 é desprezível quando comparado com os demais termos, logo

$$u'_i \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} = -\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \tag{A.154}$$

Substituindo-se a equação A.154 em equação A.152,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial E}{\partial t} \right\rangle &= - \left\langle \langle u_j \rangle \frac{\partial E}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle u'_i u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_j E) \right\rangle + \left\langle u'_i \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} u'_i \theta'_v \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} (u'_i p') \right\rangle + \left\langle u'_i \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \right\rangle \\
\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} &= - \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial x_j} - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_j E \rangle - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} \langle u'_i \theta'_v \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u'_i p' \rangle \\
&\quad - \left\langle \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle
\end{aligned} \tag{A.155}$$

A média do segundo termo do lado direito da equação A.154 (sem o sinal negativo) é definido como a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta ε (STULL, 1988; SORBJAN, 1989; HINZE, 1975; POPE, 2000; PANCHEV, 1971)

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \tag{A.156}$$

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} = - \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial x_j} - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_j E \rangle - \frac{g_i}{\langle \theta_v \rangle} \langle u'_i \theta'_v \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u'_i p' \rangle - \varepsilon \quad (\text{A.157})$$

Considerando um sistema de referência dado por $x_i = (x_1, x_2, x_3)$, no qual os índices 1 e 2 referem-se as componentes horizontais e 3 a componente vertical, podemos reescrever a equação A.157 como

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} = - \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial x_j} - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_j E \rangle + \frac{g}{\langle \theta_v \rangle} \langle u'_i \theta'_v \rangle \delta_{i3} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u'_i p' \rangle - \varepsilon \quad (\text{A.158})$$

onde a equação A.158 é a equação balanço de energia cinética turbulenta para a camada limite planetária.

A.8 Equações para escala resolvida no modelo LES de Moeng (1984)

As equações da escala resolvida neste modelo LES são obtidas a partir da equação de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (\text{A.159})$$

Assumindo-se a hipótese de fluido incompressível, temos

$$\begin{aligned} \rho &= cte \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \\ u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.160})$$

assim, podemos somar a expressão (A.160) ao lado esquerdo da equação (A.159) sem alterar a igualdade,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (\text{A.161})$$

Por se tratar de um escoamento turbulento, a difusividade molecular é desprezível quando comparada à turbulenta, logo podemos considerar $\nu \approx 0$.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k \quad (\text{A.162})$$

Aplicando-se o operador média sobre volume em todos os termos da equação (A.162), resulta

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{u_i u_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \tilde{u}_k \quad (\text{A.163})$$

O termo não linear pode ser substituído pela equação (5.7), onde o tensor R_{ij} pode ser escrito como

$$R_{ij} = \tau_{ij} + \frac{1}{3} R_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \quad (\text{A.164})$$

onde τ_{ij} é o tensor de Reynolds diretamente relacionado ao fluxo cinemático turbulento de *momentum* de subgrade e $R_{\alpha\alpha}$ os termos da diagonal principal do tensor R_{ij} . Desta forma, o termo não linear é dado por

$$u_i u_j = \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \tau_{ij} + \frac{1}{3} R_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \quad (\text{A.165})$$

Substituindo-se a equação A.165 em A.163, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\widetilde{u_i u_j} \right) + \tau_{ij} + \frac{1}{3} R_{\alpha\alpha} \delta_{ij} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \tilde{u}_k \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial x_i} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \tilde{u}_k \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial x_i} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \tilde{u}_k \end{aligned} \quad (\text{A.166})$$

Na equação A.166 podemos simplificar o lado esquerdo da igualdade já que por assumir a incompressibilidade do fluido, a terceira parcela deste termo é nula. Além disto, podemos aplicar as propriedades do cálculo vetorial e escrever o termo de advecção da seguinte maneira

$$\begin{aligned} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\varepsilon_{ijk} u_j \left(\varepsilon_{kij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_k + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^2}{\partial x_j} \delta_{ij} \\ u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \varepsilon_{ikj} \left(\varepsilon_{kij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_k u_j + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^2}{\partial x_i} \\ u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \varepsilon_{ikj} \zeta_k u_j + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^2}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{A.167})$$

onde ζ_i é a vorticidade do campo de velocidade do escoamento na direção x_i . Realizando a substituição de (A.167) na equação (A.166), temos

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \varepsilon_{ikj} \widetilde{\zeta_k \tilde{u}_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_\alpha^2}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \tilde{u}_k \quad (\text{A.168})$$

O termo de pressão da equação (A.168) pode ser separado em duas partes: $\tilde{p} = \langle \tilde{p} \rangle + \tilde{p}'$, onde o operador $\langle \cdot \rangle$ representa uma média sobre o plano horizontal e ' a flutuação em relação a essa média. Logo, $\langle \tilde{p} \rangle$ representa a média horizontal da pressão hidrostática na escala resolvida e \tilde{p}' a flutuação dessa média. Logo, o gradiente de $\langle \tilde{p} \rangle$ pode ser representado pelo vento geostrófico, e este termo corresponde a um forçante no modelo LES. Substituindo-se a decomposição de pressão na equação (A.168), obtém-se

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = -\varepsilon_{ikj} \widetilde{\zeta_k \tilde{u}_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_\alpha^2}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \tilde{p} \rangle}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \tilde{u}_k \quad (\text{A.169})$$

O gradiente horizontal de $\langle \tilde{p} \rangle$ pode ser representado pela aproximação geostrófica. Deste modo, agrupando os demais termos derivados em relação a x_i , ficamos com a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} &= -\varepsilon_{ikj} \widetilde{\zeta_k \tilde{u}_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \tilde{u}_\alpha^2 + \frac{1}{3} R_{\alpha\alpha} + \frac{1}{\rho} \tilde{p}' \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \tilde{p} \rangle}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \tilde{u}_k \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} &= -\varepsilon_{ikj} \widetilde{\zeta_k \tilde{u}_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \tilde{u}_\alpha^2 + \frac{1}{3} R_{\alpha\alpha} + \frac{1}{\rho} \tilde{p}' \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - f U_{gj} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \tilde{u}_k \end{aligned} \quad (\text{A.170})$$

onde f é o parâmetro de Coriolis e U_{gj} a j -ésima componente do vento geostrófico. O termo entre parenteses é definido como a pressão modificada Π e representa o efeito dinâmico da turbulência sobre o campo de pressão na escala resolvida. Se não houvesse escoamento, a pressão modificada seria igual a pressão hidrostática. A presença do termo de vento geostrófico indica que o forçante externo do modelo induz à convergência para um estado de equilíbrio geostrófico (MARQUES FILHO, 2004). Substituindo-se a definição de Π , temos

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = -\varepsilon_{ikj} \widetilde{\zeta_k \tilde{u}_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - f U_{gj} + g_i - \varepsilon_{ijk} \Omega_j \tilde{u}_k \quad (\text{A.171})$$

Esta é a principal equação do modelo LES de Moeng (1984). Dela são derivadas as equações para cada componente da velocidade do escoamento. Para as componentes horizontais, u e v , temos:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \widetilde{\zeta_z \tilde{v}} - \widetilde{\zeta_y \tilde{w}} - \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{uu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{uw}}{\partial z} - f (V_g + \tilde{v}) \quad (\text{A.172})$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \widetilde{\zeta_x \tilde{w}} - \widetilde{\zeta_z \tilde{u}} - \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{vu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{vv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{vw}}{\partial z} + f (U_g - \tilde{u}) \quad (\text{A.173})$$

A equação para a velocidade vertical inclui a aproximação de Boussinesq e impõe a condição de velocidade vertical mediada na horizontal nula, dada por:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = \tilde{\zeta}_y \tilde{u} - \tilde{\zeta}_x \tilde{v} + \frac{\tilde{\theta}_v}{\theta_o} g - \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{wu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{wv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{ww}}{\partial z} - \left\langle \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \right\rangle \quad (\text{A.174})$$

onde θ é a temperatura potencial e θ_o a temperatura potencial de referência. Na equação (A.174) o que garante a condição de velocidade média vertical nula e também a aceleração vertical média nula é a última parcela do segundo termo da equação, mantendo assim o equilíbrio hidrostático (DEARDORFF, 1972).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRÉ, J. C.; MOOR, G. D.; LACARRÈRE, P.; VACHAT, R. du. Modeling the 24-hour evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 35, n. 10, p. 1861–1883, 1978.

ANGEVINE, W. M. An integrated turbulence scheme for boundary layers with shallow cumulus applied to pollutant transport. **Journal of Applied Meteorology**, v. 44, n. 9, p. 1436–1452, 2005.

ARIS, R. **Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics**. New York: Dover Publications, 1989. 286 p.

ARYA, S. P. **Introduction to micrometeorology**. 2. ed. San Diego: Academic Press, 2001. 420 p.

BAAS, P.; ROODE, S. de; LENDERINK, G. The scaling behaviour of a turbulent kinetic energy closure model for stably stratified conditions. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 127, n. 1, p. 17–36, 2008.

BROWN, R. A. **Fluid mechanics of the atmosphere**. San Diego: Academic Press, 1991. 489 p.

BUSINGER, J. A. Equations and concepts. In: NIEUWSTADT, F.; DOP, H. V. (Ed.). **Atmospheric turbulence and air pollution modeling**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1981. cap. 1, p. 1–36.

CAUGHEY, S. J. Observed characteristics of the atmospheric boundary layer. In: NIEUWSTADT, F. T. M.; DOP, H. von (Ed.). **Atmospheric turbulence and air pollution modeling**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1981. cap. 4, p. 69–106.

COSTA, F. D.; ACEVEDO, O. C.; MOMBACH, J. C. M.; DEGRAZIA, G. A. A simplified model for intermittent turbulence in the nocturnal boundary layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 68, n. 8, p. 1714–1729, 2011.

DEARDORFF, J. W. Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 29, n. 1, p. 91–115, 1972.

_____. Stratocumulus-capped mixed layers derived from a three-dimensional model. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 18, n. 4, p. 495–527, 1980.

DEARDORFF, J. W.; WILLIS, G. E. Further results from a laboratory model of the convective planetary boundary layer. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 32, n. 3, p. 205–236, 1985.

DEGRAZIA, G.; RIZZA, U.; PUHALES, F.; GOULART, A.; CARVALHO, J.; WELTER, G.; MARQUES FILHO, E. A variable mesh spacing for large-eddy simulation models in the convective boundary layer. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 131, n. 2, p. 277–292, 2009.

DEGRAZIA, G.; RIZZA, U.; PUHALES, F.; WELTER, G.; ACEVEDO, O.; MALDANER, S. Employing taylor and heisenberg subfilter viscosities to simulate turbulent statistics in les models. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, 2011. Artigo aceito para publicação. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843711100731X>>.

DEGRAZIA, G. A.; NUNES, A. B.; VELHO, H. F. C.; ACEVEDO, O. C.; SATYAMURTY, P.; RIZZA, U.; CARVALHO, J. C. Employing heisenberg's turbulent spectral transfer theory to parameterize sub-filter scales in les models. **Atmospheric Environment**, v. 41, n. 33, p. 7059–7068, 2007.

DINIZ, G. B. **Meteorologia física**. Pelotas: Editora Universitária UFPEL, 2006. 156 p.

DURST, F. **An introduction to the theory of fluid flows**. Verlag: Springer, 2008. 728 p.

DUYNKERKE, P. G. Application of the $E - \epsilon$ turbulence closure model to the neutral and stable atmospheric boundary layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 45, n. 5, p. 865–880, 1988.

DWYER, M. J.; PATTON, E. G.; SHAW, R. H. Turbulent kinetic energy budgets from a large-eddy simulation of airflow above and within a forest canopy. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 84, n. 1, p. 23–43, 1997.

FOKEN, T.; NAPPO, C. J. **Micrometeorology**. Berlin: Springer, 2008. 306 p.

FRISCH, U. **Turbulence**: The legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 296 p.

GARRATT, J. R. **The atmospheric boundary layer**. New York: Cambridge University Press, 1994. 316 p.

GIOIA, G. **Study of the dispersion properties of planetary boundary layer by means of large-eddy simulation**. 2003. 138 f. Tese (Doutorado em Geofísica) — Consorzio Interuniversitario Lecce-Messina-Palermo, Lecce, 2003.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical mechanics**. 3. ed. San Francisco: Addison-Wesley Pub. Co., 2002. 638 p.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentals of Physics Extended**. 9. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2010. 1328 p.

HINZE, J. O. **Turbulence**. New York: McGraw-Hill, 1975. 790 p.

HURLEY, P. J. An evaluation of several turbulence schemes for the prediction of mean and turbulent fields in complex terrain. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 83, n. 1, p. 43–73, 1997.

KAIMAL, J. C.; FINNINGAN, J. J. **Atmospheric boundary layer flows**: Their structure and measurement. Oxford: Oxford University Press, 1994. 289 p.

KALIPEDIA. **Ciencias Naturales**: Física y química. Madrid, 2011. Acesso em 30 set. 2011. Disponível em: <<http://www.kalipedia.com/fisica-quimica/>>.

KUNDU, P. K. **Fluid mechanics**. San Diego: Academic press, 1990. 638 p.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Fluid mechanics**. London: Pergamon Press, 1959. 536 p.

LENSCHOW, D. H. Model of the height variation of the turbulence kinetic energy budget in the unstable planetary boundary layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 31, n. 2, p. 465–474, 1974.

LENSCHOW, D. H.; WYNGAARD, J. C.; PENNELL, W. T. Mean-field and second-moment budgets in a baroclinic, convective boundary layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 37, n. 6, p. 1313–1326, 1980.

LESIEUR, M. **Turbulence in fluids**. 4. ed. Dordrecht: Springer, 2008. 593 p.

LIN, C.-L. Local pressure-transport structure in a convective atmospheric boundary layer. **Physics of Fluids**, v. 12, n. 5, p. 1112–1128, 2000.

LIOU, K. **An introduction to atmospheric radiation**. 2. ed. San Diego: Academic Press, 2002. 583 p.

LUMLEY, J. L.; PANOFSKY, H. A. **Structure of the atmospheric turbulence**. London: John Wiley and Sons, 1964. 232 p.

MARION, J. B.; THORNTON, S. T. **Classical dynamics of particles and systems**. 4. ed. San Diego: Saunders College Publishing, 1995. 595 p.

MARQUES FILHO, E. P. **Investigação da camada limite planetária convectiva com modelo LES aplicado à dispersão de poluentes**. 2004. 139 f. Tese (Doutorado em Meteorologia) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

MELLOR, G. L.; YAMADA, T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. **Reviews of Geophysics and Space Physics**, v. 20, n. 4, p. 851–875, 1982.

MOENG, C.-H. A large-eddy-simulation model for the study of planetary boundary layer turbulence. **Journal of Atmospheric Science**, v. 41, n. 13, p. 2052–2062, 1984.

MOENG, C.-H.; MCWILLIAMS, J. C.; ROTUNNO, R.; SULLIVAN, P. P.; WEIL, J. Investigating 2d modeling of atmospheric convection in the pbl. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 61, n. 8, p. 889–903, 2004.

MOENG, C.-H.; WYNGAARD, J. C. Evaluation of turbulent transport and dissipation closures in second-order modeling. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 46, n. 14, p. 2311–2330, 1989.

MONIN, A. S.; YAGLOM, A. M. **Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence**. London: Dover Publications, 2007. 769 p.

MORAES, O. L. L. Turbulence characteristics in the surface boundary layer over the south american pampa. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 96, n. 3, p. 317–335, 2000.

- OKE, T. R. **Boundary layer climates**. 2. ed. London: Taylor & Francis Group, 1987. 435 p.
- PANCHEV, S. **Random functions and turbulence**. 1. ed. Oxford: Pergamon Press, 1971. 444 p.
- PANOFSKY, H. A.; DUTTON, J. A. **Atmospheric turbulence: Models and methods for engineering applications**. New York: John Wiley and Sons, 1983. 405 p.
- POPE, S. B. **Turbulent flows**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 771 p.
- PUHALES, F. S. **Estudo do ciclo diário da camada limite planetária através da simulação dos grandes turbilhões**. 2008. 179 f. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2008.
- PUHALES, F. S.; ACEVEDO, O. C.; RIZZA, U.; DEGRAZIA, G. A.; MORAIS, O. L. L. de. Analysis of the turbulent kinetic energy budget in the planetary boundary layer by large eddy simulation. In: SYMPOSIUM ON BOUNDARY LAYERS AND TURBULENCE, 19., 2010, Keystone. **Anais eletrônicos...** Keystone: American Meteorological Society, 2010. Acesso em: 10/5/2011. Disponível em: <http://ams.confex.com/ams/19Ag19BLT9Urban/techprogram/paper_173113.htm>.
- RIZZA, U.; MANGIA, C.; CARVALHO, J. C.; ANFOSSI, D. Estimation of the lagrangian velocity structure function constant C_0 by large-eddy simulation. **Journal Boundary-Layer Meteorology**, v. 120, n. 1, p. 25–37, 2006.
- ROGERS, R. R.; YAU, M. K. **Short course in cloud physics**. 3. ed. Woburn: Butterworth-Heinemann, 1989. 306 p.
- SAGAUT, P. **Large eddy simulation for incompressible flows**. 3. ed. Berlin: Springer, 1998. 560 p.
- SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA. **Pion**: Portal sbf de ensino e divulgação da física. São Paulo, 2011. Acesso em 30 set. 2011. Disponível em: <<http://pion.sbfisica.org.br>>.
- SORBJAN, Z. **Structure of the atmospheric boundary layer**. New Jersey: Prentice Hall Inc., 1989. 317 p.
- STULL, R. **An introduction to boundary layer meteorology**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. 666 p.
- SULLIVAN, P. P.; MCWILLIAMS, J. C.; MOENG, C.-H. A subgrid-scale model for large-eddy simulations of planetary boundary-layer flows. **Boundary Layer Meteorology**, v. 71, n. 3, p. 247–276, 1994.
- SULLIVAN, P. P.; MOENG, C.-H.; STEVENS, B.; LENSCHOW, D. H.; MAYOR, S. D. Structure of the entrainment zone capping the convective atmospheric boundary layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 55, n. 19, p. 3042–3064, 1998.
- SUN, W.-Y.; CHANG, C.-Z. Diffusion model for a convective layer. part i: Numerical simulation of convective boundary layer. **Journal of Climate and Applied Meteorology**, v. 25, n. 10, p. 1445–1453, 1986.

_____. Diffusion model for a convective layer. part ii: plume released from a continuous point source. **Journal of Climate and Applied Meteorology**, v. 25, n. 10, p. 1463, 1986.

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. **A first course in turbulence**. Cambridge: The MIT Press, 1972. 310 p.

TOLENTINO, M.; ROCHA-FILHO, R. A química no efeito estufa. **Química Nova na Escola**, n. 8, p. 10–14, 1998.

WALLACE, J. M.; HOBBS, P. V. **Atmospheric science**: An introductory survey. 2. ed. Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2006. 504 p.

WELTER, G. S. **A hipótese de turbulência localmente isotrópica e a universalidade da constante de Kolmogorov**. 2006. 95 f. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2006.

WENG, W.; TAYLOR, P. On modelling the one-dimensional atmospheric boundary layer. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 107, n. 2, p. 371–400, 2003.

WITEK, M. L.; TEIXEIRA, J.; MATHEOU, G. An eddy diffusivity-mass flux approach to the vertical transport of turbulent kinetic energy in convective boundary layers. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 68, n. 10, p. 2385–2394, 2011.

WYNGAARD, J. C. Boundary-layer modeling. In: NIEUWSTADT, F.; DOP, H. V. (Ed.). **Atmospheric turbulence and air pollution modeling**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1981. cap. 3, p. 69–106.

WYNGAARD, J. C.; COTÉ, O. R. The budgets of turbulent kinetic energy and temperature variance in the atmospheric surface layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 28, n. 2, p. 190–201, 1971.