

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**LEIS DE ESCALA E ANÁLISE DO FENÔMENO DE
INTERMITÊNCIA EM TURBULÊNCIA BEM
DESENVOLVIDA**

TESE DE DOUTORADO

Guilherme Sausen Welter

Santa Maria, RS, Brasil

2010

**LEIS DE ESCALA E ANÁLISE DO FENÔMENO DE
INTERMITÊNCIA EM TURBULÊNCIA BEM
DESENVOLVIDA**

Guilherme Sausen Welter

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física,
Área de Concentração em Áreas Clássicas da Fenomenologia e suas
Aplicações, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como
requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Física.

Orientador: Prof. Gervásio Annes Degrazia

Santa Maria, RS, Brasil

2010

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Tese de Doutorado

**LEIS DE ESCALA E ANÁLISE DO FENÔMENO DE
INTERMITÊNCIA EM TURBULÊNCIA BEM DESENVOLVIDA**

elaborada por
Guilherme Sausen Welter

como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Física

COMISSÃO EXAMINADORA:

Gervásio Annes Degrazia, Dr.
(Presidente/orientador)

Luca Moriconi, Dr. (UFRJ)

Bardo Ernst Josef Bodmann, Dr. (UFRGS)

Otávio Costa Acevedo, PhD. (UFSM)

José Carlos Merino Mombach, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 15 de outubro de 2010.

O preferível não é o desejo de acreditar, mas o desejo de descobrir, que é exatamente o oposto.

(Bertrand Russell)

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Gervásio Annes Degrazia, por toda a liberdade, confiança, motivação e amizade ao longo de todo este caminho.

Aos professores Otávio Costa Acevedo e José Carlos Merino Mombach, pelo grande apoio e conversas inspiradoras.

Aos meus amigos, companheiros da Fortaleza da Solidão e fora dela, Franciano Scremin Puhales, Felipe Denardin Costa e Luis Gustavo Nogueira Martins, pela grande amizade, cooperação e todas as gracinhas que tornaram (muito) agradável esta jornada.

Ao pessoal do laboratório de Física da Atmosfera, em especial ao Vagner Anabor, Charles Paveglio Szinvelski e Lidiane Buligon.

Ao Adrián Roberto Wittwer, pela colaboração e auxílio com dados experimentais de túnel de vento.

Ao professor Fernando Manoel Ramos pelas conversas e questionamentos que, ainda que não pude respondê-los, me fizeram mudar a maneira de pensar sobre turbulência e complexidade.

Ao INPE/LAC de São José dos Campos, pelo ótimo recebimento e estadia que tive por lá em 2007 e ao CRS-INPE de Santa Maria pelo uso de suas instalações.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFSM, em especial à Saionara, por toda atenção.

RESUMO

Tese de Doutorado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

LEIS DE ESCALA E ANÁLISE DO FENÔMENO DE INTERMITÊNCIA EM TURBULÊNCIA BEM DESENVOLVIDA

AUTOR: GUILHERME SAUSEN WELTER

ORIENTADOR: GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 15 de outubro de 2010.

O presente estudo apresenta uma revisão da teoria estatística aplicada ao intervalo inercial de um escoamento turbulento bem desenvolvido. A investigação principal é centrada nas estimativas experimentais do chamado coeficiente de intermitência através de métodos estatísticos recentemente desenvolvidos e sua possível dependência nos mecanismos de grande escalas.

A análise empregada permite observar que mesmo em escoamentos com número de Reynolds muito alto, como em camadas limite atmosféricas, não são observadas leis de escalas (leis de potência) no intervalo inercial de turbulência. Considerando-se as proposições de modelos “não invariantes” de escala sugeridos na literatura e empregando-se dados turbulentos tanto de túnel de vento como de camada limite atmosférica, verifica-se que a lei de escala tipo logarítmica (SREENIVASAN; BERSHADSKII, 2006b) descreve adequadamente o intervalo inercial em todos os cenários de turbulência analisados. Da mesma forma, a relação de isotropia e incompressibilidade clássica $S_2^\perp(r)/S_2^\parallel(r)$, a qual relaciona tensores de segunda ordem (funções estrutura) longitudinais e transversais, não é constante e sim levemente dependente em r no intervalos inercial. Se observa que uma expressão baseada na lei de escala logarítmica descreve razoavelmente bem esta dependência em r .

Uma metodologia de estimativa do coeficiente de intermitência recentemente desenvolvida (BASU et al., 2007) foi modificada para incluir o efeito de não invariância de escala de acordo com o modelo de lei de escala logarítmica. Esta nova metodologia permite se obter estimativas mais precisas de parâmetros de intermitência mesmo em séries de dados curtas e ruidosas, como as tipicamente obtidas por anemometria sônica na camada limite atmosférica. A eficiência do método é testada em séries multifractal sintéticas e comparada com resultados obtidos através de um formalismo multifractal baseado em ondaletas.

Finalmente, dados de camada limite atmosférica superficial são analisados através da metodologia sugerida e variabilidade das estimativas são avaliadas com o emprego de uma ferramenta de reamostragem multifractal (PALUŠ, 2008). Os parâmetros de intermitência para as três componentes de velocidade e temperatura apresentaram grande variabilidade em relação

ao parâmetro de estabilidade atmosférica, entretanto não foi observado um padrão de dependência definido. Isto sugere que a estabilidade atmosférica não tem um papel significativo nas estatísticas do intervalo inercial, assim outros mecanismos devem ser os responsáveis pela grande variabilidade das estimativas.

Palavras-chave: Turbulência bem-desenvolvida. Intermitência. Multifractais. Leis de Escala. Não-invariância de Escala.

ABSTRACT

Tese de Doutorado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

SCALING LAWS AND ANALYSIS OF THE INTERMITTENCY PHENOMENON IN WELL-DEVELOPED TURBULENCE

AUTOR: GUILHERME SAUSEN WELTER

ORIENTADOR: GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 15 de outubro de 2010.

This study presents a review of the statistical theory for the inertial range of well-developed turbulent flows. The main focus of the study is on the experimental estimation of the so called intermittency exponent through recently developed statistical methods and its possible dependence on large scale mechanisms.

The analysis employed allows to observe that even in very high Reynolds number, as those occurring in atmospheric boundary layer flows, clear scaling laws (power laws) are never observed in the inertial range. Comparing the non-scaling invariant models proposed in the literature, it is observed that the logarithmic scaling (SREENIVASAN; BERSHADS-KII, 2006b) is suitable for all turbulence scenarios analyzed. Likewise, the classic isotropic-incompressibility relation $S_2^\perp(r)/S_2^\parallel(r)$, which relates longitudinal and transversal second rank tensors (structure functions), it is not constant but slightly dependent on the scale r in the inertial range.

A recently developed methodology for estimation of the intermittency coefficient (BASU et al., 2007) was modified according to the logarithmic scaling model in order to include the non-scaling invariance behavior. The new methodology allows obtaining more accurate estimations of the intermittency coefficient, even for short and noisy time series, as typically observed in sonic anemometry. The efficiency of the method is assessed by analysis of synthetic multifractal series and compared to wavelet-based multifractal formalism.

Finally, the proposed methodology is applied to an atmospheric surface layer dataset and the variability of the estimations are assessed by employing a multifractal bootstrap method (PALUŠ, 2008). Intermittency coefficients for velocity components and temperature are found to present large variability but no clear dependence on stability condition. It suggests that atmospheric stability does not directly affect the small-scale intermittency, therefore, other mechanisms may be responsible for the large variability found in the estimations.

Keywords: Well-developed Turbulence. Intermittency. Multifractals. Scaling laws. Non-scale-invariant.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 – Os incrementos de velocidade $\delta_r \mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$ são definidos de forma que o versor unitário $\hat{\mathbf{e}}_1$ seja alinhado com a direção da velocidade média do escoamento. Desta forma, os incrementos longitudinais são definidos como $\delta_r u_{\parallel}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_1 r) - \mathbf{u}(\mathbf{x})]$, enquanto os incrementos transversais como $\delta_r u_{\perp}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_1 r) - \mathbf{u}(\mathbf{x})]$ 36
- Figura 1.2 – Modelo conceitual da cascata de Richardson-Kolmogorov. Os turbilhões com número de Reynolds local $Re_{\ell_n} = \ell_n v_{\ell_n} / \nu$ perdem estabilidade, originando turbilhões menores, os quais herdam energia dos turbilhões “pais”, que por sua vez também perdem estabilidade e transferem sua energia à turbilhões menores. Esse processo continua sucessivamente até que o número de Reynolds local crítico $Re_{\eta_K} = \eta_K u_{\eta_K} / \nu \equiv 1$ seja alcançado. 38
- Figura 1.3 – No painel *a*) uma série temporal de velocidade com $Re_{\lambda} \simeq 800$. Nos painéis inferiores são mostradas funções estrutura dos valores absolutos com momentos $q = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 , dispostos de baixo para cima nos gráficos. Na figura *b*) a região que se comporta aproximadamente como uma reta no gráfico log-log define-se o intervalo inercial. Na representação apresentada na figura *c*), entretanto, é possível verificar uma região aproximadamente linear mais extensa. 41
- Figura 2.1 – Modelo-*p* de de intermitência de Meneveau e Sreenivasan (1987), representando aqui 11 estágios de uma cascata multiplicativa conservativa com pesos $p_1 = 0,40$ e $p_2 = 1 - p_1 = 0,60$. O modelo assume uma massa inicial (topo da figura), a qual se divide em duas partes com pesos p_1 e p_2 , distribuídos aleatoriamente entre direita e esquerda. Este modelo de intermitência é equivalente ao conjunto de Cantor diádico assimétrico. 46
- Figura 2.2 – Amostra de um sinal de velocidade medido em túnel de vento com $Re_{\lambda} \simeq 600$ em *a*) e sua dissipação instantânea normalizada em *b*). No painel inferior é representado quantas vezes a taxa de dissipação instantânea é maior que seu valor médio, enfatizando o comportamento intermitente. 47
- Figura 2.3 – Expoentes ζ_q de acordo com K41, modelo log-normal com $\mu = 0,25$ e o modelo log-Poisson. 50
- Figura 2.4 – Representação semi-logarítmica da distribuição $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$ de acordo com alguns valores de r/η_K . Para este sinal de velocidade transversal do conjunto de dados de Kang, Chester e Meneveau (2003), $Re_{\lambda} \simeq 600$ e $L/\eta_K \simeq 900$. É possível perceber que para as escalas r comparáveis à escala integral L a distribuição $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$ é aproximadamente gaussiana, entretanto, $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$ tende progressivamente a uma distribuição com caudas aproximadamente exponenciais à medida que r se aproxima de η_K . A linha pontilhada representa a distribuição gaussiana e $\sigma_{\delta_r u}$ é o desvio padrão da variável $\delta_r u$. . . 53
- Figura 3.1 – Traços unidimensionais de Movimentos Fracionários Brownianos de acordo com diferentes expoentes de Hurst. Do alto a baixo os traços correspondem a $H = 0,20, 0,30, 0,40, 0,50, 0,60, 0,70$ e $0,80$, gerados a partir da mesma sequência aleatória. É possível observar que quanto maior H , mais suave é o traço. 61
- Figura 3.2 – Difusão anômala representada através de caminhadas aleatórias em 2D. Nos painéis *(a)*, *(b)* e *(c)*, movimento fracionário browniano com $H = 0,30$,

	0, 50 e 0, 70, respectivamente. Em <i>d</i>), <i>e</i>) e <i>f</i>), voos de Lévy com $\alpha = 1, 65, 1, 80$ e $1, 95$, respectivamente.	62
Figura 3.3	– O plano acima, descrito pelos parâmetros H de Hurst e α de Lévy, permite representar um processo hipotético $X(t)$, cujo espectro de potência é proporcional a $1/f^{2H+1}$ e seus incrementos $\delta_\tau X(t)$ obedecem uma distribuição de Lévy α -estável. O ponto correspondente a $H = 1/2$ e $\alpha = 2$, como indicado pela seta, representa o processo de Wiener.	64
Figura 3.4	– Coeficientes de ondaletas dominantes representados na grade diádica do plano espaço-escala. Cada ponto (círculos abertos) representa um coeficiente discreto de ondaleta $d_{j,k}$ e a área interna ao retângulo representa o intervalo diádico $\lambda_{j,k}$. A área sombreada representa o sub-conjunto de coeficientes 3λ , associado ao coeficiente dominante $l_{j,k}$ (círculo cheio, indicado pela seta).	68
Figura 3.5	– Árvore de coeficientes de ondaletas representando a estrutura multiplicativa usada para construir sinais multifractais.	69
Figura 3.6	– No alto da figura, uma realização de um sinal multifractal log-normal ($c_1 = 0,37$ e $c_2 = -0.025$) com $N = 2^{16}$ amostras, obtido através do algoritmo de Cascatas Aleatórias de Ondaletas utilizando a ondaleta da classe Daubechies Db10. Nos dois painéis inferiores são mostrados as estimativas de $\zeta(q)$ e $\mathcal{D}(h)$ a partir do método de Ondaletas Dominantes (com a ondaleta Db5). A barra de erros mostrada no gráfico de $\zeta(q)$ corresponde ao desvio-padrão da simulação de 256 séries, correspondendo a um total de 16 777 216 pontos. As linhas tracejadas representam os valores teóricos de $\zeta(q)$ e $\mathcal{D}(h)$	70
Figura 4.1	– Comparação das leis de escalas com dados experimentais de turbulência. A função estrutura de segunda ordem é exibida de maneira a apresentar um comportamento linear, em acordo às leis de escalas sugeridas: <i>a</i> lei potência, <i>b</i>) lei exponencial e <i>c</i>) lei logarítmica.	71
Figura 4.2	– Análise experimental dos expoentes de escala obtidos através da lei de escala logarítmica. Em <i>a</i>) a dependência dos expoentes ζ_2 e ζ_3 com Re_λ , em <i>b</i>) se verifica que a razão ζ_2/ζ_3 praticamente constante, em acordo com as hipóteses de auto-similaridade estendida. O conjunto de dados de túnel de vento obtidos por A. R. Wittwer e são descritos em Welter et al. (2009). ..	72
Figura 4.3	– Funções estruturas de segunda ordem longitudinal (círculos) e transversal (triângulos) obtidas a partir dos dados de Kang, Chester e Meneveau (2003). As linhas contínuas representam ajuste pela lei de escala logarítmica dada pela equação (4.3). No painel inferior do gráfico são apresentados os ajustes dos dados experimentais (por razão de melhor visualização) e são comparados com o resultado obtido a partir equação (4.7), que é mostrado como linha tracejada.	74
Figura 4.4	– Uma série de turbulênta de velocidade em a) e uma realização <i>surrogate</i> através do algoritmo de Theiler et al. (1992) em b).	75
Figura 4.5	– Expoentes de escala normalizados obtidos usando auto-similaridade estendida em uma série de turbulência (círculos) e em seu <i>surrogate</i> (triângulos) com o mesmo conjunto de dados usado na figura 4.3. Componente longitudinal em a) e em b), a componente transversal.	76
Figura 4.6	– a) Distribuição de probabilidades das série da Figura 4.4 (linha contínua), seu <i>surrogate</i> (linha tracejada) e uma gaussiana (linha pontilhada). b) Função	

	estrutura de segunda ordem para a série e seu <i>surrogate</i>	77
Figura 4.7 –	Primeiro e segundo cumulantes obtidos a partir dos dados de Kang, Chester e Meneveau (2003) para a componente longitudinal (círculos) e seu <i>surrogate</i> (triângulos). As figuras a) e b) correspondem a assumir leis de potência, enquanto as figuras c) e d) correspondem a assumir lei de escala logarítmica.	78
Figura 4.8 –	Aproximação telegráfica para um registro de velocidade obtido em um túnel de vento $Re_\lambda \cong 1\,300$	80
Figura 4.9 –	Comparação entre $S_2(r)$ e $\langle(\Delta n_\tau)^2\rangle^{1/2}$ em para a série da figura 4.8. O intervalo inercial é apresentado sendo proporcional a $r^{2/3}$ em a) e proporcional a $r^{-1/3}$ em b).	80
Figura 5.1 –	Exemplo da variabilidade diária nas três componentes de velocidade (sistema de referência do sensor) e da temperatura.	82
Figura 5.2 –	Comparação entre estimativas baseadas em funções estrutura e Auto-Similaridade Estendida com método da Coeficientes Dominantes de Ondaletas para uma série de velocidade longitudinal na Camada Limite Atmosférica com condição de estabilidade aproximadamente neutra (caso S3). Observe que a diferença entre as estimativas dos métodos é muito maior que barra de erros obtida através do algoritmo de reamostragem multifractal (Apêndice B.2) de Paluš (2008). A barra de erros indica o desvio padrão da estimativa baseada em um ensemble de 256 realizações.	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Descrição qualitativa de $\zeta = z/L_0$ (PANOFSKY; DUTTON, 1984, pág. 114).	30
Tabela 5.1 – Resultados da seleção de dados.	84
Tabela 5.2 – Estimativa dos parâmetros caracterizando o intervalo inercial: Utilizando lei de potência.....	85
Tabela 5.3 – Estimativa dos parâmetros caracterizando o intervalo inercial: Utilizando lei logarítmica.....	86

SUMÁRIO

RESUMO	11
ABSTRACT	13
INTRODUÇÃO	23
1 DINÂMICA DA TURBULÊNCIA E INVARIÂNCIA DE ESCALA	35
1.1 Conceitos preliminares	35
1.2 Leis de escala no intervalo inercial	36
1.2.1 Transferência de energia na cascata de Richardson-Kolmogorov	36
1.2.2 Distribuição de energia entre escalas no intervalo inercial	38
1.2.3 Leis de escala anômalas	39
1.2.4 Auto-similaridade estendida	40
1.3 Questões sobre turbulência completamente desenvolvida e universalidade	42
1.3.1 Turbulência e universalidade	42
1.3.2 Turbulência mantida por mecanismo forçante	43
2 FENOMENOLOGIA DE INTERMITÊNCIA EM TURBULÊNCIA BEM DESENVOLVIDA	45
2.1 Modelos estatísticos de intermitência	45
2.1.1 Modelo log-normal de Kolmogorov e Obukhov	46
2.1.2 Modelo log-Poisson de She e Lévéque	48
2.2 Análise estatística	49
2.2.1 Funções estrutura	50
2.2.2 Quantificação de intermitência a partir de medidas de dissipação instantânea	51
2.2.3 Formalismo baseado em propagadores aleatórios	52
2.2.3.1 Formulação original de Castaing, Gagne e Hopfinger (1990)	54
2.2.4 Expansão em séries de cumulantes dos expoentes ζ_q	56
3 FORMALISMO MULTIFRACTAL	59
3.1 Fractais aleatórios	60
3.1.1 Movimento fracionário browniano	60
3.1.2 Voos de Lévy	61
3.1.3 Difusão anômala	63
3.2 Processos multifractais	63
3.3 Modelos de intermitência log-normal e log-Poisson de acordo com o formalismo multifractal	65
3.3.1 O modelo log-normal	66
3.3.2 O modelo log-Poisson	66
3.4 Formalismo multifractal baseado nos coeficientes de ondaletas dominantes ...	67
3.5 Cascata multifractal de ondaletas	68
4 ESTRUTURA FINA DA TURBULÊNCIA	71
4.1 Invariância de escala	71
4.2 Consequência da não-invariância de escala para intermitência nas componentes transversais	72
4.3 Estimativa do coeficiente de intermitência utilizando <i>surrogates</i>	74
4.4 Não-invariância de escala e expansão em cumulantes	76
4.5 Aproximação telegráfica	78
5 INTERMITÊNCIA NA CAMADA LIMITE ATMOSFÉRICA	81
5.1 Considerações sobre a construção de um ensemble físico de turbulência	81

5.2	Um critério para estacionariedade de parâmetros da CLA	82
5.3	Descrição e tratamento dos dados de camada limite atmosférica	83
5.4	Resultados	84
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	89
6.1	Conclusões gerais	89
6.2	Trabalhos futuros	91
	Apêndice A – Transformada em ondaletas	93
A.1	Transformada contínua	93
A.2	Transformada discreta	93
	Apêndice B – Algoritmos de reamostragem de sinais	95
B.1	Transformação iso-espectral	95
B.2	Reamostragem multifractal baseada em cascata discreta de ondaletas	95
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97

INTRODUÇÃO

Fluidos e turbulência

Na natureza, líquidos e gases em movimento são comumente observados a apresentar comportamento caracterizado por padrões irregulares aperiódicos e complexos, consistindo de estruturas de diversas escalas de movimento. Este estado de comportamento é conhecido como *turbulência* e é observado de forma similar em todas as variáveis dinâmicas e termodinâmicas do fluido.

Natureza das flutuações

A partir do conhecimento heurístico sabe-se que, independentemente da precisão e do controle das condições de um determinado experimento com fluidos, um escoamento turbulento se desenvolverá sempre de maneira distinta. Este fato impede a repetição em detalhe do experimento e, conseqüentemente, a descrição precisa e determinística de parcelas individuais do fluido em estado turbulento.

À medida que um escoamento se torna mais e mais turbulento, se observa um grande enriquecimento de estruturas de diversas escalas de movimento em todo o domínio do fluido. Após alcançado um desenvolvimento pleno, as flutuações nas grandezas físicas do fluido compreendem um espectro amplo e denso de escalas, apresentando movimentos irregulares mesmo nas menores escalas experimentalmente observáveis.

Caracterização da turbulência e suas conseqüências

O comportamento turbulento em um fluido se distingue do laminar em diversos aspectos. Uma das características mais notáveis é sua capacidade de promover mistura e transporte de momento e variáveis escalares do fluido, e também de substâncias dissolvidas e imersas no fluido.

Além do interesse de estudo da física associada à natureza dos movimentos complexos da turbulência e da matemática relacionada às equações que os descrevem, a turbulência desempenha um papel importante em diversos aspectos da engenharia e tecnologia e no entendimento de processos naturais.

A turbulência é responsável pelo aumento da dissipação de energia em dutos de água e óleo, aumento da resistência aero e hidrodinâmica de carros, aviões e navios (SREENIVASAN,

1999). Flutuações turbulentas do índice de refração afetam significativamente a propagação de luz e ondas de rádio, promovem também amplificação e estiramento de campos magnéticos tanto em escalas terrestres como em galácticas (MONIN; YAGLOM, 1971; SHRAIMAN; SIGGIA, 2000). A turbulência é relevante também no contexto biológico, onde a estratégia de busca por odores atrativos de alguns organismos é diferente se o processo difusivo do meio é dominado por difusão molecular ou por difusão turbulenta (SHRAIMAN; SIGGIA, 2000). Turbulência é o mecanismo mais importante no transporte de calor e umidade por massas de ar, na evaporação da superfície da água e interação térmica e dinâmica entre atmosfera e superfície (WYNGAARD, 1992). Portanto, a turbulência também desempenha um papel considerável nas mudanças do tempo e a longo prazo, no clima da Terra.

Do ponto de vista físico, o entendimento da turbulência é associado a compreensão de um fenômeno natural universal, cuja descrição congrega diferentes argumentos e abordagens científicas. Estas distintas aproximações ao problema envolvem desde modelos teóricos conceituais (KRAICHNAN, 1974), desenvolvimento de novos métodos em matemática aplicada (FOIAS et al., 2001; VIGNERON, 2010), avanços em metodologias e recursos computacionais de alto desempenho (ISHIHARA; GOTOH; KANEDA, 2009) e também observações experimentais baseadas em tecnologias sofisticadas de grande precisão (La PORTA et al., 2001; OUELLETTE; XU; BODENSCHATZ, 2006; TOSCHI; BODENSCHATZ, 2008). O entendimento da turbulência, portanto, não consiste de um problema singular e sim de um vasto campo de aplicações multidisciplinares (FALKOVICH; SREENIVASAN, 2006).

As diversas abordagens e pontos de vista aplicados no estudo da turbulência compartilham a complexidade geral do fenômeno e também a inabilidade de se resolver individualmente cada problema específico (LESIEUR, 2008). A generalização desta diversidade de aspectos associados à turbulência frustra qualquer tentativa de entendimento universal, pois inicialmente torna obscura a formulação do que vem a ser “o problema da turbulência”.

De ponto de vista prático, como observado por Sreenivasan (1999), a busca por uma maneira eficiente de como prever e controlar as consequências da turbulência é o maior e mais proeminente desafio no estudo de turbulência.

Fenomenologia e escalas inerciais em turbulência

A riqueza de estruturas e escalas do presentes em turbulência motivou a busca por uma descrição da distribuição de energia entre estas escalas. O conceito de intervalo inercial da turbulência e a lei espectral $E(k) \sim k^{-5/3}$ de A. N. Kolmogorov no início da década de 40, estabelecem um grande marco no entendimento da turbulência. Embora houve um número razoável de abordagens ao problema¹, os conceitos e formalismos atualmente usados

¹Os estudos independentes de A. M. Obukhov, C. F. von Weizsäcker, W. Heisenberger e L. Onsager também chegaram a uma lei para a densidade espectral de energia em termos do número de onda na forma $E(k) \sim k^{-5/3}$

no estudo de turbulência estatística seguem basicamente as ideias originalmente introduzidas por Kolmogorov.

O intervalo inercial de Kolmogorov

A teoria de turbulência localmente isotrópica de Kolmogorov (KOLMOGOROV, 1941c, 1941b, 1941a), na literatura conhecida como K41, foi elaborada sob a consideração de um escoamento turbulento no limite do número de Reynolds² tendendo a infinito, no qual os mecanismos que primeiramente geraram turbulência completamente desenvolvida são então desligados e o fluido em estado turbulento é então deixado decair livremente, através do processo irreversível de dissipação³.

Neste tipo conceitual de escoamento se considera válida a ideia de uma cascata de energia de acordo com modelo pictórico de Richardson (1922). De acordo com este modelo, a energia cinética que atua primeiramente nas maiores escalas de movimento é transferida em processo de cascata para escalas menores e menores sucessivamente, até um determinado estágio, onde as escalas de movimento são tão pequenas que os efeitos de viscosidade do fluido tornam-se importantes ao movimento, ocasionando a dissipação da energia cinética em calor.

Kolmogorov, assumindo o conceito de cascata de Richardson, postulou que, como o processo de fragmentação dos turbilhões deve ocorrer de maneira não-linear, havendo numerosas etapas de fragmentação, então as influências de anisotropias possivelmente presentes nas grandes escalas de movimento seriam rapidamente perdidas ao longo das etapas de cascata. Em consequência de um número de Reynolds suficientemente grande, Kolmogorov previu a existência de um intervalo de escalas de movimento, para o qual as escalas deveriam ser muito menores que as grandes escalas, porém muito maiores que as escalas dissipativas. Neste intervalo, chamado de *intervalo inercial*, as escalas de movimento poderiam ser isotrópicas e descritas por leis estatísticas universais, de acordo com o raciocínio de Kolmogorov.

Embora o raciocínio seja convincente quando considera-se o um número de Reynolds muito elevado, as considerações dimensionais de Kolmogorov não são tão óbvias como podem parecer à primeira vista (L'VOV, 1991). A primeira argumentação contra a universalidade das leis estatísticas no intervalo inercial foi feita por L.D. Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1959), alegando que a existência de flutuações intermitentes na transferência de energia invalidaria a argumentação sobre usada para a obtenção de valores médios.

Uma linha de argumentação feita por R.H Kraichnan (KRAICHNAN, 1974), entre-

(FRISCH, 1995).

²O número de Reynolds é definido como $Re = LU/\nu$, onde L e U são escalas características de comprimento e velocidade, respectivamente. Grosseiramente, Re representa uma razão entre os mecanismos de entrada de energia e dissipação.

³Este conceito idealizado de escoamento turbulento havia sido recentemente introduzido por von Kármán e Howarth (1938) com o objetivo de se estudar as relações entre tensores isotrópicos, obtidos a partir da equação de Navier-Stokes.

tanto, sustenta que a ocorrência de flutuações intermitentes extremas durante a transferência de energia do processo de cascata não invalida a teoria K41, como arguido por Landau. No entanto, na teoria K41 está implicitamente assumido que, uma vez que ocorra uma flutuação extrema no domínio do fluido, o retorno ao equilíbrio local deve ocorrer muito rapidamente, garantindo que as flutuações extremas sejam suavizadas. Contudo, as evidências experimentais apontam indiretamente⁴ que o retorno a este equilíbrio não acontece tão rapidamente como assumido pela K41 (MENEVEAU; SREENIVASAN, 1991; FRISCH, 1995).

Formulações sobre as flutuações intermitentes da transferência de energia

As primeiras evidências experimentais sobre a natureza intermitente da cascata de energia no intervalo inercial se baseiam no comportamento não-linear dos expoentes de escala⁵ ζ_q em função do momento estatístico q . De acordo com a generalização dos argumentos dimensionais da teoria K41, o conjunto de expoentes ζ_q deve ser uma função linear de q , mais precisamente, $\zeta_q = q/3$. Experimentalmente é observado que a diferença $\delta_q \equiv q/3 - \zeta_q$ tende a aumentar significativamente para $q > 3$ (FRISCH, 1995). Este resultado sugere que o modelo conceitual de cascata de Richardson-Kolmogorov deve ser revisado para incorporar o fenômeno de intermitência.

Um refinamento imediato da teoria K41 para incorporar o fenômeno de intermitência consiste em associar a dependência da flutuação instantânea da transferência de energia com a flutuação do campo de velocidade numa mesma escala. Este refinamento permite agregar detalhes específicos à distribuição da flutuação na transferência local de energia. Desta maneira, as flutuações intermitentes das transferências locais de energia, as quais são quantidades que não são observadas diretamente, são atribuídas a serem a consequência da intermitência nas flutuações de velocidade, as quais, por sua vez, são quantidades diretamente mensuráveis. Desta forma, a forma funcional de ζ_q dependerá da função de distribuição de probabilidade das flutuações de velocidade em cada escala.

Investigação experimental de intermitência

A análise experimental da estrutura fina da turbulência foi notavelmente baseada em registros de séries temporais de experimentos obtidos em laboratório. Até a década de 80, grande parte das análises experimentais se restringiam a estimação do chamado coeficiente

⁴Estas medidas estão relacionadas a forma não-linear dos expoentes das funções estrutura e médias locais da taxa de dissipação instantânea. Embora existe grande suporte a esta possibilidade (ARGOUL et al., 1989; FRISCH, 1995), não há evidência direta de que o processo de transferência de energia no intervalo inercial ocorra de maneira intermitente (FRISCH, 1995; SREENIVASAN; ANTONIA, 1997).

⁵A serem introduzidos no Capítulo 1.

de intermitência μ .⁶ Até então, as estimativas para o coeficiente de intermitência variavam de 0,18 a 0,70 (SREENIVASAN; KAILASNATH, 1993). Com a melhoria da qualidade dos dados e emprego de técnicas mais robustas para estimativas (principalmente baseadas no formalismo multifractal e, sobretudo, com o emprego da Auto-Similaridade Estendida (BENZI et al., 1993b)), as estimativas mais recentes convergem para o valor $\mu \cong 0,22$ (BENZI et al., 1993b; DELOUR; MUZY; ARNÉODO, 2001; CHEVILLARD et al., 2006; LASHERMES et al., 2008).

Embora experimentos laboratoriais de turbulência em geral apresentam números de Reynolds da microescala de Taylor⁷ considerados somente moderados ($Re_\lambda \approx 100 - 2000$), há de certa forma uma predominância na aceitação de que a função ζ_q tem um comportamento universal com Re_λ (ARNÉODO et al., 1996), ao menos para $q \in [1, 6]$ e para a componente longitudinal da velocidade em turbulência neutra⁸. Estes resultados experimentais estão em acordo com o trabalho de Ishihara, Gotoh e Kaneda (2009) que analisaram o estado da arte da simulação numérica direta das equações de Navier-Stokes, cuja simulação foi realizada por Yokokawa et al. (2002) e corresponde a uma grade de $4096^3 \approx 10^{8,4}$ pontos, com $Re_\lambda \simeq 1200$.

Algumas questões em aberto

À parte da discussão de qual modelo de intermitência é mais apropriado para descrever a estatística das flutuações da taxa de dissipação, há uma série de questões pertinentes inter-relacionadas que são apresentadas abaixo.

Invariância de escala

Um dos resultados fundamentais da K41 é a predição de leis de escala⁹ para tensores estatísticos no intervalo inercial. Esta predição é obtida com o auxílio das hipóteses de isotropia local e de incompressibilidade do fluido.

Em alguns modelos de intermitência, como o log-normal, por exemplo, a garantia de obtenção de leis de escala é somente obtida com o emprego de uma hipótese auxiliar sobre a dependência na escala da dispersão da variância do logaritmo da taxa de dissipação.

⁶Este coeficiente é um parâmetro do modelo log-normal de intermitência, o qual prediz um comportamento quadrático para a função dos expoentes de escala: $\zeta_q = q/3 - (\mu/18)q(q-3)$.

⁷É uma definição local de Re , definido como $Re_\lambda = \lambda\sigma_u/\nu$, onde $\lambda = \sigma_u/((\partial_x u)^2)^{1/2}$ é a microescala de Taylor e σ_u velocidade quadrática média.

⁸Onde a turbulência é gerada e mantida por efeitos mecânicos e os efeitos térmicos são desprezíveis.

⁹Leis de escala são funções solução de relações invariantes de escala, as quais fornecem uma relação funcional na forma $f(\lambda x) = \lambda^H f(x)$ com λ e H constantes. A solução destes funcionais resulta em leis de potência para $f(x)$.

Observações de comportamento ligeiramente deflectido, ao invés de invariância de escala estrita, tem sido sistematicamente observada experimentalmente por vários autores (CASTAING; GAGNE; HOPFINGER, 1990; BENZI et al., 1993b; ARNÉODO; MANNEVILLE; MUZY, 1998; ARNÉODO et al., 1999; DELOUR; MUZY; ARNÉODO, 2001; SREENIVASAN; BERSHADSKII, 2006b; BERSHADSKII, 2007), porém a natureza deste comportamento, isto é, se é efeito de finitude do número de Reynolds, influência de anisotropias ou ainda, se é um comportamento universal ou não de turbulência bem desenvolvida não está esclarecido. Tipicamente se constata que, quando o objetivo da análise é determinar ζ_q , este comportamento “inesperado” é geralmente contornado com a utilização da Auto-Similaridade Estendida, a qual explora um outro tipo de similaridade observado em turbulência (BENZI et al., 1993b).

Alguns trabalhos teóricos apontam que a falta de invariância de escala pode ser esperada quando se considera a turbulência mantida por um mecanismo forçante (QIAN, 1997, 1999; LINDBORG, 1999; LUNDGREN, 2002, 2003). Embora houve algum interesse na direção de encontrar uma forma funcional para este deflexão da lei de escala (CASTAING; GAGNE; HOPFINGER, 1990; DUBRULLE, 1996; BERSHADSKII, 2007), a origem e consequências deste comportamento não são bem entendidas.

Componentes transversais

Se por uma lado há linha de tendência apontando para uma possível universalidade de alguns aspectos da componente longitudinal da velocidade, experimentos (DHURVA; TSUJI; SREENIVASAN, 1997; CAMUSSI; BENZI, 1997; WATER; HERWEIJER, 1999; SHEN; WARHAFT, 2002) e simulações numéricas (GROSSMANN; LOHSE; REEH, 1997; ISHIHARA; GOTOH; KANEDA, 2009) mostram que este cenário é bastante diferente para as componentes transversais de velocidade.

Este fato também é inesperado, já que nenhum modelo teórico antecipou aos experimentos expoentes transversais (lateral e vertical) distintos dos expoentes longitudinais em turbulência localmente isotrópica. A consolidação destes resultados pode significar a necessidade um revisão profunda sobre os mecanismo físicos associados à intermitência nas pequenas escalas (NELKIN, 1999; CHEN et al., 2003; HE et al., 1998).

Persistência de anisotropia

Enquanto a tendência à isotropia local parece uma ser consequência natural dentro das hipóteses da K41 com $\lim Re_\lambda \rightarrow \infty$, não é claro o que se esperar quando se considera conjuntamente o processo de estiramento dos vórtices.

O trabalho de Arad et al. (1998) aponta que efeitos anisotrópicos atuam de forma mais significativa nas componentes transversais do que na longitudinal. De forma semelhante, Kurien e Sreenivasan (2000) e também Biferale e Vergassola (2001) mostram que a tendência à isotropia em direção às pequenas escalas ocorre mais de maneira mais lenta do que antes se imaginava. Estas observações contradizem o modelo clássico K41 e desafiam a possibilidade de universalidade de um modelo estatístico para intermitência, sugerindo que a dinâmica do estiramento dos vórtices mantém as pequenas escalas conectadas ao mecanismo de produção de turbulência.

Dependência no número de Reynolds

As questões previamente citadas são profundamente conectadas, a ponto de uma ser consequência de outra. Um outro fator, comum a estes elementos em discussão, é a dependência com o número de Reynolds.

As análises de dados laboratoriais, e também de dados obtidos por simulação numérica, não permitem avaliar ainda se existe um limite finito para o qual o intervalo inercial apresente leis estatísticas universais. Se por um lado, as leis de Kolmogorov tem sido observadas em diversos escoamentos, mesmo em situações onde não eram esperadas serem válidas (KRAICHNAN, 1974), argumentações de bases mais fundamentais (QIAN, 1997) sugerem que o número de Reynolds dos escoamentos tipicamente analisados estão muito aquém da real aplicabilidade destas leis.

Análise de turbulência na baixa atmosfera

Um caminho não tão bem explorado ainda no estudo das propriedades estatísticas das pequenas escalas de turbulência é a análise de escoamentos geofísicos. Neste tipo de escoamento, os números de Reynolds típicos podem ser várias ordens de grandeza maiores que os laboratoriais. Contudo, os mecanismos forçantes geralmente apresentam alto grau de não-estacionariedade, comprometendo seriamente a análise de momentos estatísticos de ordens elevadas.

Características da camada limite atmosférica

Um exemplo deste tipo de escoamento é a Camada Limite Atmosférica (CLA). A CLA é a camada de ar mais próxima a superfície da Terra, cuja espessura varia de poucas centenas de metros durante a noite, até um ou dois quilômetros durante o dia. Por definição, uma Camada

Limite é a região de um fluido, a qual torna-se turbulenta pela presença de uma superfície (LANDAU; LIFSHITZ, 1959).

Muito simplificada, a turbulência na CLA é gerada e mantida por dois tipos de forçantes: um forçante térmico, devido ao aquecimento da superfície que gera convecção; e um mecânico, devido principalmente ao arraste do vento devido aos elementos de relevo. Os movimentos atmosféricos constituem uma enorme variedade de escalas de movimento, das quais, a turbulência na CLA é apenas uma pequena parte de um espectro contínuo (WYNGAARD, 1992).

Devido sua complexidade, uma maneira mais apropriada de se estudar a CLA é com o emprego de variáveis características, definidas através de uma teoria de similaridade. A teoria de similaridade de Monin-Obukhov define uma escala de comprimento, a qual é usada para caracterizar a estabilidade atmosférica, ou seja, se o mecanismo predominante é de natureza mecânica ou convectiva. Define-se o comprimento de Obukhov como (MONIN; YAGLOM, 1971; PANOFSKY; DUTTON, 1984)

$$L_O = -\frac{u_*^3 \Theta}{\kappa g \phi_{w\theta}}, \quad (1)$$

onde u_* é a velocidade de fricção, Θ é a temperatura absoluta média, $\kappa \cong 0,40$ é a constante de von Kármán, g é a aceleração da gravidade e $\phi_{w\theta}$ é fluxo cinemático de calor na vertical tomado na superfície. O parâmetro de estabilidade é definido a partir da altura de medida z e do comprimento L_O como $\zeta = z/L_O$.

Valores grandes e negativos de ζ caracterizam uma CLA convectiva, valores grandes e positivos de ζ uma CLA estável e $\zeta \cong 0$ uma CLA neutra. A tabela 1, apresenta uma descrição dos valores de z/L_O de a interpretação de acordo com a teoria de similaridade.

Tabela 1: Descrição qualitativa de $\zeta = z/L_O$ (PANOFSKY; DUTTON, 1984, pág. 114).

z/L_O	Descrição
Fortemente negativo	Convecção de térmica dominante
Levemente negativo	Turbulência mecânica dominante
Zero	Turbulência puramente mecânica
Levemente positivo	Turbulência mecânica levemente atenuada por estratificação térmica
Fortemente positivo	Turbulência mecânica severamente reduzida por estratificação térmica

Anemometria e análise estatística na camada limite atmosférica

Embora a CLA apresente números de Reynolds muito elevados, a variabilidade estocástica associada a *infundável sucessão de diferentes casos* da turbulência atmosférica (WYN-

GAARD, 1992) torna difícil a análise estatística da intermitência que requer determinação de momentos estatísticos de ordens elevadas.

Em experimentos de laboratório geralmente são empregados instrumentos de resposta rápida. Anemômetros de fio-quente são usados para realizar medidas de velocidade do vento a taxas de amostragem elevadas, geralmente no intervalo de 1 – 100 kHz. Devido a dificuldades técnicas, anemometria de fio-quente é usada para se obter registros de velocidade de apenas uma ou duas componentes do campo de velocidade. O emprego de anemometria de fio-quente na CLA é possível, porém o seu uso requer muitos cuidados com calibração devido à variabilidade atmosférica, especialmente a mudanças na umidade e temperatura do ar (KUNKEL; MARUSIC, 2006). Por esta razão, a anemometria de fio-quente, quando empregada, é usada em experimentos atmosféricos para registros de séries temporais curtas.

Anemômetros sônicos, por outro lado, são amplamente usados em experimentos de campos em estimativas de fluxos turbulentos, pois necessitam menos cuidados de calibração e manutenção além de fazerem medidas das três componentes da velocidade do vento. Entretanto, anemômetros sônicos operam com taxas de amostragem muito mais modestas, tipicamente no intervalo de 1 – 100 Hz.

Na análise de dados de turbulência, para a convergência estatística de momentos de até sexta ordem em geral é necessário $\mathcal{O}(10^7)$ pontos de dados (BASU et al., 2007). Por exemplo, para uma taxa de amostragem de 20 Hz, tipicamente usado por anemometria sônica na CLA, uma série com 10^7 pontos de dados corresponde a um período de aproximadamente 5, 8 dias. Além do mais, a CLA raramente pode ser considerada estacionária.¹⁰ Conseqüentemente, o caráter permanentemente não-estacionário da CLA é a principal razão pela preferência dos dados laboratoriais no estudo da estrutura fina da turbulência.

Recentemente, há um crescente interesse sobre a influência da estabilidade atmosférica (ou fenômenos de escalas externas às da CLA) na estrutura fina da turbulência (AIVALIS et al., 2002; SHI et al., 2005; ANGELINI et al., 2005; BASU et al., 2007; KATUL; PORPORATO; POGGI, 2009; GUALA; METZGER; MCKEON, 2009; CAVA; KATUL, 2009; MUZY; BAILE; POGGI, 2009). A possível dependência das características da intermitência na estabilidade atmosférica é uma questão fundamental em turbulência bem desenvolvida. Ela está relacionada com a validade da hipótese da cascata de Richardson-Kolmogorov, segundo a qual, os pequenos turbilhões tornam-se independentes do mecanismo de entrada de energia nas grandes escalas. Além do mais, os números de Reynolds típicos encontrados são $Re_\lambda \approx 10\,000 - 20\,000$ (WELTER, 2006; WELTER et al., 2009). Conseqüentemente, uma ordem de grandeza maior que experimentos laboratoriais.

Parte desta motivação à análise de dados de escoamentos geofísicos é devido ao desenvolvimento de métodos estocásticos de análise mais robustos (BASU et al., 2007; LASHER-

¹⁰Para fins práticos, as séries temporais na CLA são tipicamente tomadas com duração de 10 a 60 minutos. Esta escolha é uma tentativa de satisfazer a escolha de uma janela com duração muito maior que o comprimento de correlação, mas suficientemente curta para não sofrer seriamente de variações tendenciais.

MES et al., 2008) e também técnicas de reamostragem (ANGELINI et al., 2005; KEYLOCK, 2007; PALUŠ, 2008). A aplicação de ambas metodologias torna possível então a análise da estrutura fina da turbulência da camada limite atmosférica.

Aspectos relacionados à intermitência

Intermitência em turbulência bem desenvolvida é associada a vórtices alongados ¹¹, que se dispõem esparsamente no espaço, porém podem representar uma quantidade apreciável da energia cinética.

Devido ao traço extremamente irregular e não homogêneo de um sinal turbulento, o formalismo multifractal se apresenta como uma metodologia bastante apropriada da caracterização destes sinais. Assim, intermitência e multifractalidade serão considerados sinônimos neste trabalho.

Um outro aspecto que pode ser associado à turbulência é a natureza da intermitência. Dentro do formalismo multifractal, há duas possíveis maneiras de ocorrer multifractalidade (KANTEHARDT et al., 2002):

1. Devido à correlações de longo alcance entre grandes e pequenas escalas;
2. Devido à flutuações (descorrelacionadas) com distribuições de probabilidade com longas caudas.

É importante notar que os dois tipos de multifractalidade podem estar presentes num mesmo sinal. Desta forma, se é esperado que a intermitência seja dependente de fatores externos, é importante portanto saber a qual tipo de complexidade esta dependência está associada.

Uma maneira de se avaliar a importância de cada tipo complexidade através do formalismo multifractal, como sugerido por Kantelhardt et al. (2002), é aplicar um embaralhamento aleatório na série de dados, de modo a quebrar todas as correlações existentes. Assim, a multifractalidade resultante, se existir, estará associada às amplitudes das flutuações, ou seja, do segundo tipo.

Um outro procedimento, baseado na *aproximação telegráfica* do sinal, desenvolvido por Bershadskii et al. (2004), Sreenivasan e Bershadskii (2006a, 2006b), consiste em analisar somente a tendência a aglomeração das flutuações do sinal, ignorando completamente as flutuações das amplitudes.

Os dois procedimentos podem ser vistos portanto como complementares a caracterização das flutuações intermitentes.

¹¹Tipicamente podem ter alguns centímetros de comprimento e uma fração de milímetro de largura.

Objetivos gerais do estudo

Este trabalho apresenta os seguintes objetivos:

1. Fundamentar e validar uma metodologia que permita quantificar com certo grau de confiança as características da intermitência aplicáveis à CLA.
2. Alternativamente à consideração de leis de potência no intervalo inercial, comparar dois *Ansätze* (um sugerido por Castaing, Gagne e Hopfinger (1990) e outro por Sreenivasan e Bershadskii (2006b)) como formas de leis de escala não-invariantes no intervalo inercial e analisar suas consequências para as flutuações transversais. Como dados de teste, será utilizado um conjunto de dados obtidos por Kang, Chester e Meneveau (2003) correspondente a um experimento laboratorial de boa precisão, com medidas de velocidades tomadas nas componentes longitudinal e lateral. Com testes neste conjunto de dados, e resultados do item anterior, é proposto também uma modificação da metodologia desenvolvida por Basu et al. (2007), a qual, embora muito mais simples que a baseada no formalismo multifractal, se mostra muito precisa na estimativa do coeficiente de intermitência em dados de anemometria sônica.
3. Aplicar a metodologia desenvolvida em um conjunto de dados atmosféricos, com o objetivo de avaliar a possível dependência das características multifractais da turbulência na estabilidade atmosférica.
4. Assumindo que já existem indicativos de que a estabilidade atmosférica e flutuações de grandes escalas interferem nas características (multifractais) da turbulência, o objetivo final consistirá em avaliar em que aspecto ocorre a influência. Se é nas amplitudes de flutuação ou nas correlações internas (tendência a aglomeração) das variáveis. Esta etapa será realizada com a aplicação da metodologia anteriormente estudada em um conjunto de dados micrometeorológicos previamente obtidos pelo grupo de Física de Atmosfera da UFSM.

Estrutura do trabalho

No Capítulo 1 é feita uma revisão de turbulência, apresentando as considerações que levaram à previsão da existência de um intervalo inercial de equilíbrio e leis de escala e também estudos mais recentes direcionados a situações mais realísticas de turbulência e também o fenômeno da Auto-Similaridade Estendida.

O Capítulo 2 discute fenomenologia de intermitência, processos multiplicativos, modelos estatísticos de intermitência mais conhecidos e diversos formalismos de análise estatísticos.

O formalismo conceitual de sinais fractais aleatórios invariantes de escalas e o formalismo multifractal são apresentados no Capítulo 3, juntamente com algoritmos de síntese e análise e também os modelos de intermitência discutidos no Capítulo 2 são revistos dentro do formalismo multifractal.

No Capítulo 4 são discutidas generalizações de leis não-invariante de escalas e consequências para as componentes transversais, aplicação da forma não-invariante de escala a um método baseado expansão em cumulantes para a determinação do coeficiente de intermitência e validação destes procedimentos com dados laboratoriais.

No Capítulo 5 os procedimentos descritos no Capítulo 4 são aplicados a uma coleção de dados de CLA.

Finalmente, no Capítulo 6 uma breve revisão do trabalho e resultados são apresentados e discutidos.

1 DINÂMICA DA TURBULÊNCIA E INVARIÂNCIA DE ESCALA

1.1 Conceitos preliminares

Mecânica de fluidos é a área da física que estuda o comportamento de líquidos e gases. Desde que estes fenômenos são considerados macroscópicos, um fluido é então entendido como um meio contínuo. O sistema de equações que descreve um fluido incompressível, e acreditado conter toda a informação sobre a turbulência, é conhecido como o sistema de equações de Navier-Stokes, que são definidas como

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, t é o tempo, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é o campo de velocidade, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ é a densidade, $p = p(\mathbf{x}, t)$ é o campo de pressão, ν é a viscosidade cinemática e $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ representa um campo de forças externas (LANDAU; LIFSHITZ, 1959; TENNEKES; LUMLEY, 1972).

O campo de divergência nulo na equação (1.1) é devido à hipótese de incompressibilidade no fluido. Esta consideração implica que $\rho^{-1} \partial_t \rho \ll \nabla \cdot \mathbf{u}$ na equação da continuidade

$$\partial_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

consequentemente, a densidade ρ é considerada constante.

Em teoria estatística da turbulência o campo de velocidade $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = u \hat{\mathbf{e}}_1 + v \hat{\mathbf{e}}_2 + w \hat{\mathbf{e}}_3$ é considerado uma variável estocástica estacionária. Tradicionalmente, o vetor $\hat{\mathbf{e}}_1$ é alinhado com a direção velocidade média constante do vento U , como representado na figura 1.1. Esta escolha está associada as propriedades isotrópicas da turbulência, como primeiramente discutido por Taylor (1935, 1938).

Experimentalmente, dados de turbulência são obtidos através de medidas tomadas em um ponto fixo no espaço (x_0, y_0, z_0) e são observados ao longo do tempo. Estas medidas temporais são convertidas em medidas espaciais através da *hipótese de turbulência congelada* de Taylor com $x \rightarrow x_0 - Ut$. Esta hipótese, além de estacionariedade e homogeneidade espacial do campo turbulento, requer que o tempo de vida característico dos turbilhões seja muito maior que o tempo que levam para passar por um sensor de velocidade localizado num ponto fixo do espaço.

Em consequência das hipóteses requeridas pela análise experimental, a operação $\langle \cdot \rangle$ usada em turbulência estatística tem o significado de uma média espacial, porém é obtida a partir de medidas temporais em um ponto fixo no espaço.

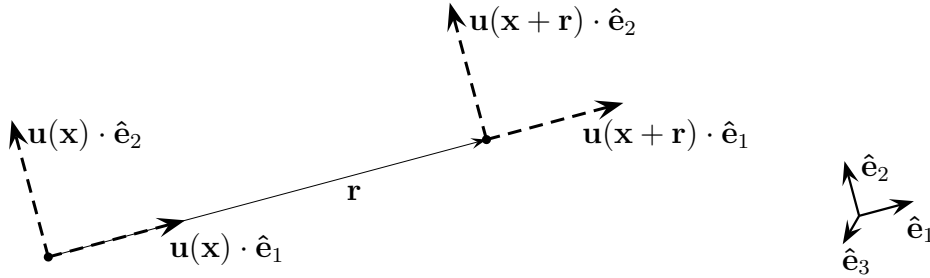


Figura 1.1: Os incrementos de velocidade $\delta_r \mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$ são definidos de forma que o versor unitário $\hat{\mathbf{e}}_1$ seja alinhado com a direção da velocidade média do escoamento. Desta forma, os incrementos longitudinais são definidos como $\delta_r u_{\parallel}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_1 r) - \mathbf{u}(\mathbf{x})]$, enquanto os incrementos transversais como $\delta_r u_{\perp}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_1 r) - \mathbf{u}(\mathbf{x})]$.

1.2 Leis de escala no intervalo inercial

Invariância de escala é uma característica presente em diversos fenômenos naturais complexos e é geralmente relacionada com o aparecimento de formas irregulares, as quais não podem ser descritas por conceitos da geometria diferencial (PALADIN; VULPIANI, 1987; STANLEY; MEAKIN, 1988). Um dos fenômenos mais conhecidos por apresentar invariância de escala é a turbulência, onde a existência de um intervalo de escalas com comportamento auto-similar foi antecipada por Kolmogorov.

1.2.1 Transferência de energia na cascata de Richardson-Kolmogorov

O sucesso da teoria K41 se deve ao fato de que o emprego de incrementos de velocidade, ao invés da velocidade, permitiu a uma descrição mais natural do campo turbulento, possibilitando a associação destas variáveis estatísticas com conceitos fenomenológicos.

A teoria de Kolmogorov apresenta duas hipóteses específicas. A primeira hipótese assume que as distribuições multivariadas dos incrementos

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})] \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (1.3)$$

são funções isotrópicas dependentes unicamente da diferença dos vetores posição \mathbf{r} , viscosidade cinemática ν e da taxa de dissipação média $\langle \epsilon \rangle$, para $r \equiv |\mathbf{r}| \ll L$, onde L é um

comprimento característico das grandes escalas de movimento.

Devido à isotropia local do campo de velocidade, as propriedades estatísticas podem ser descritas pelos incrementos de velocidade longitudinal e transversal (PANCHEV, 1971), definidos como (ver figura 1.1)

$$\begin{cases} \delta_r u_{\parallel}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_1 r) - \mathbf{u}(\mathbf{x})], \\ \delta_r u_{\perp}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{e}}_1 r) - \mathbf{u}(\mathbf{x})]. \end{cases} \quad (1.4)$$

Em consequência da isotropia local e incompressibilidade, a variável longitudinal $\delta_r u_{\parallel}$ tem características distintas das duas variáveis transversais $\delta_r u_{\perp}^{(v)}$ e $\delta_r u_{\perp}^{(w)}$. Contudo, as distribuições de probabilidade das componentes lateral e vertical são iguais, por esta razão são tipicamente representadas da mesma forma.

Devido ao contexto histórico e razões experimentais, as variáveis transversais são raramente consideradas nas análises. Para simplificar a notação, considera-se por enquanto somente a componente longitudinal, renomeada simplesmente como $\delta_r u$.

De maneira análoga à derivação dos tensores de correlação feita por von Kármán e Howarth (1938), Kolmogorov derivou a seguinte equação relacionando funções estrutura de terceira e segunda ordem

$$S_3(r) = -\frac{4}{5}\langle\epsilon\rangle r + 6\nu \frac{dS_2(r)}{dr}, \quad r \ll L, \quad (1.5)$$

onde $S_q(r) \equiv \langle(\delta_r u)^q\rangle$ define uma função estrutura de ordem q .

A segunda hipótese na teoria K41 assume que para um certo intervalo de escalas, muito menores que L , mas muito maiores que as escalas dissipativas, as distribuições de probabilidade de $\delta_r u$ tornam-se independentes da viscosidade cinemática ν , dependendo unicamente da taxa média de dissipação $\langle\epsilon\rangle$, que deve ser igual ao fluxo de energia entre as escalas.

Através de um argumento de similaridade Kolmogorov introduziu uma microescala de comprimento caracterizando o limite inferior deste intervalo onde as flutuações independem de ν . A microescala de dissipação, ou microescala de Kolmogorov, é definida como $\eta_K \equiv \nu^{3/4}\langle\epsilon\rangle^{-1/4}$ e caracteriza a escala de movimento onde os efeitos de viscosidade tornam-se apreciáveis.

Na consideração de $Re \rightarrow \infty$, o intervalo de escalas definido por $\eta_K \ll r \ll L$, é chamado de *intervalo inercial*, pois nele é assumido que o processo de cascata acontece com dissipação desprezível. Como consequência destas considerações, a equação (1.5) pode ser então escrita como

$$S_3(r) = -\frac{4}{5}\langle\epsilon\rangle r. \quad (\text{Lei dos } 4/5) \quad (1.6)$$

Na equação (1.6)¹, o sinal negativo é associado à transferência de energia de acordo

¹Considerada um dos poucos resultados exatos em turbulência (FRISCH, 1995)

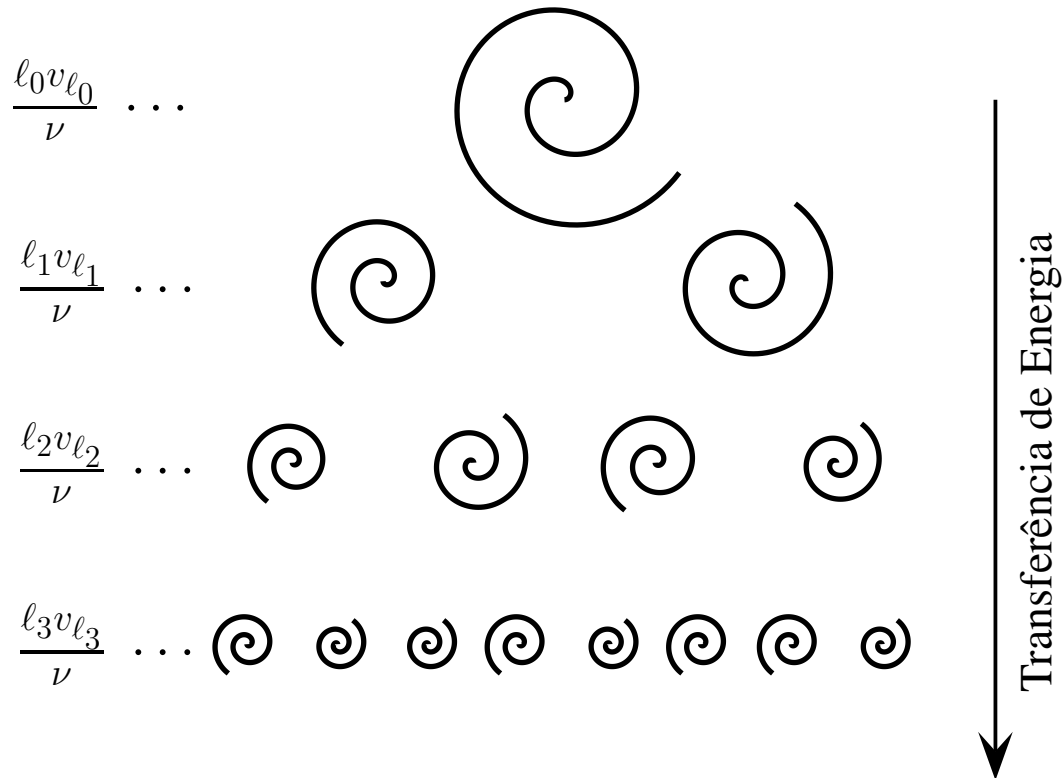


Figura 1.2: Modelo conceitual da cascata de Richardson-Kolmogorov. Os turbilhões com número de Reynolds local $Re_{\ell_n} = \ell_n v_{\ell_n} / \nu$ perdem estabilidade, originando turbilhões menores, os quais herdam energia dos turbilhões “pais”, que por sua vez também perdem estabilidade e transferem sua energia à turbilhões menores. Esse processo continua sucessivamente até que o número de Reynolds local crítico $Re_{\eta_K} = \eta_K u_{\eta_K} / \nu \equiv 1$ seja alcançado.

com o modelo conceitual apresentado na figura 1.2. Neste modelo, os grandes turbilhões se dividem em turbilhões com número de Reynolds local menor, e estes, por também perderem estabilidade, transferem sua energia a turbilhões com números de Reynolds local menores e assim sucessivamente, até que o processo alcance o número de Reynolds local unitário:

$$Re_{\ell_0} = \frac{\ell_0 v_{\ell_0}}{\nu} > \frac{\ell_1 v_{\ell_1}}{\nu} > \dots > \frac{\ell_n v_{\ell_n}}{\nu} \dots > \frac{\eta_K u_{\eta_K}}{\nu} \equiv 1, \quad (1.7)$$

caracterizados pelas escalas de comprimento e de velocidade de Kolmogorov, η_K e u_{η_K} , respectivamente.

1.2.2 Distribuição de energia entre escalas no intervalo inercial

Através de considerações dimensionais, é possível generalizar a equação (1.6) para momentos estatísticos de ordens arbitrárias. Este procedimento equivale a considerar que no intervalo inercial a forma funcional das distribuições densidade de probabilidade de $\delta_r u$ não

muda com r . Em outras palavras, os incrementos $\delta_r u$ devem ser auto-similares.

De acordo com estas hipóteses, uma função estrutura de ordem q também obedece lei de potência no intervalo inercial e os expoentes das leis de potência ζ_q se comportam de forma linear de acordo com o momento estatístico q :

$$S_q(r) = C_q \langle \epsilon \rangle^{q/3} r^{q/3} \propto r^{\zeta_q} = r^{q/3}, \quad (1.8)$$

onde C_q é representa um conjunto de constantes adimensionais.

A lei para a função estrutura de segunda ordem $S_2(r)$ tem interesse especial, ela fornece informação sobre o conteúdo de energia em cada escala de movimento, de modo que $S_2(r)$ pode ser interpretada como a energia contida nos números de onda maiores que $1/r$.

A função estrutura de segunda ordem, também é conhecida como a lei dos 2/3, é dada por

$$S_2(r) = C_2 \langle \epsilon \rangle^{2/3} r^{2/3}, \quad (\text{Lei dos } 2/3) \quad (1.9)$$

onde $C_2 \cong 2$ é a constante de Kolmogorov (SREENIVASAN, 1995). A função estrutura de segunda ordem se relaciona com a função de auto-correlação² com $S_2(r) = 2[\sigma_u^2 - R(r)]$ e, conseqüentemente, também está relacionada com o espectro de potência através do teorema de Wiener-Khinchin³ (MONIN; YAGLOM, 1971; TENNEKES; LUMLEY, 1972).

O equivalente espectral de $S_2(r)$ é famosa lei dos $-5/3$ e é dada por

$$E_{1,1}(k_1) \cong (C_2/4) \langle \epsilon \rangle^{2/3} k_1^{-5/3}, \quad (\text{Lei dos } -5/3) \quad (1.10)$$

com $E_{i,j}(\mathbf{k}) = \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \widehat{u}_j^*(\mathbf{k})$, onde $\widehat{u}_i(\mathbf{k})$ é a transformada de Fourier de $u_i(\mathbf{x})$ e o símbolo $*$ representa conjugação complexa na variável.

1.2.3 Leis de escala anômalas

Através do conhecimento de $S_2(r)$ e $S_3(r)$, ou mesmo de $E_{1,1}(k_1)$, é possível determinar a extensão do intervalo inercial de um determinado escoamento. Num gráfico log-log, de acordo com as leis de Kolmogorov, o intervalo inercial deve corresponder a uma região de comportamento linear. As leis de Kolmogorov têm grande importância prática, pois através delas possível se estimar a taxa média de dissipação de uma maneira mais precisa que outros métodos. Por outro lado, a determinação experimental dos expoentes ζ_q no intervalo inercial mostrou grande discrepância com comportamento linear $\zeta_q = q/3$ sugerido pela generalização das leis de Kolmogorov (ANSELMET et al., 1984; FRISCH, 1995).

A diferença entre os expoentes obtidos e a predição linear da K41, $\delta_q \equiv q/3 - \zeta_q$, é

²A forma não-normalizada é definida como $R(r) = \langle [u(x+r) - \langle u(x+r) \rangle] [u(x) - \langle u(x) \rangle] \rangle$.

³O espectro de potência de uma função e sua auto-correlação formam um par de transformadas de Fourier.

observada aumentar progressivamente com q , para $q > 3$. Este fato aponta que deve haver alguma inconsistência nos argumentos usados na construção da teoria K41.

Este desvio da linearidade dos expoentes ζ_q é chamado de lei de escala anômala. Fisicamente, o comportamento anômalo indica que a generalização para momentos estatísticos arbitrários não pode ser deduzida de argumentos dimensionais simples. Estatisticamente, é evidência de que os incrementos $\delta_r u$ não são auto-similares.

1.2.4 Auto-similaridade estendida

Funções estrutura, tanto para velocidade como para escalares em um campo turbulento, têm sido consistentemente observadas a apresentarem uma ligeira deflexão no gráfico log-log de $S_p(r) \times r$ (DELOUR; MUZY; ARNÉODO, 2001). Este comportamento inesperado foi primeiramente atribuído a diversos fatores como, número de Reynolds finito e presença fatores anisotrópicos de grande escala, apenas mais recentemente que maior atenção tem sido dada ao fato.⁴

Uma prática que se tornou comum para determinação experimental dos expoentes foi a metodologia sugerida por Benzi et al. (1993b). O procedimento permite contornar o fato de que experimentalmente as funções estrutura não são leis de potência. A argumentação é baseada numa generalização de leis de potência, escrita na seguinte forma:

$$S_q(r) \propto f(r, q)^{\zeta_q}. \quad (1.11)$$

Observações experimentais (BENZI et al., 1993b) fornecem evidência de que a função $f(r, q)$ é independente do momento q e, desta forma, tem-se que $S_q(r) \propto f(r)^{\zeta_q}$ para qualquer valor de q . Consequentemente, as funções estrutura devem apresentar relações de escala entre si na forma

$$S_q(r) \propto S_p(r)^{\beta_{q,p}}, \quad (1.12)$$

onde $\beta_{q,p} = \zeta_q/\zeta_p$.

Para tornar os expoentes compatíveis com a lei dos 4/5, para a qual $\zeta_3 = 1$, a função $f(r)$ é definida como $f(r) \equiv \langle |\delta_r u|^3 \rangle$. Esta escolha está baseada no fato de que a função $\tilde{S}_3(r) \equiv \langle |\delta_r u|^3 \rangle$ é esperada ter a mesma dependência em r que a função $S_3(r)$. Com este procedimento é possível se observar retas muito mais claras e extensas num gráfico log-log, como é apresentado na figura 1.3.

Esta propriedade de sinais turbulentos é conhecida como Auto-Similaridade Estendida (ASE, na literatura conhecida pela sigla ESS, do inglês *Extended Self-Similarity*). O espectro

⁴De acordo com o conhecimento do autor, a primeira argumentação sustentando que as funções estrutura não seriam exatamente leis de potência no intervalo inercial foi dada por Castaing, Gagne e Hopfinger (1990).

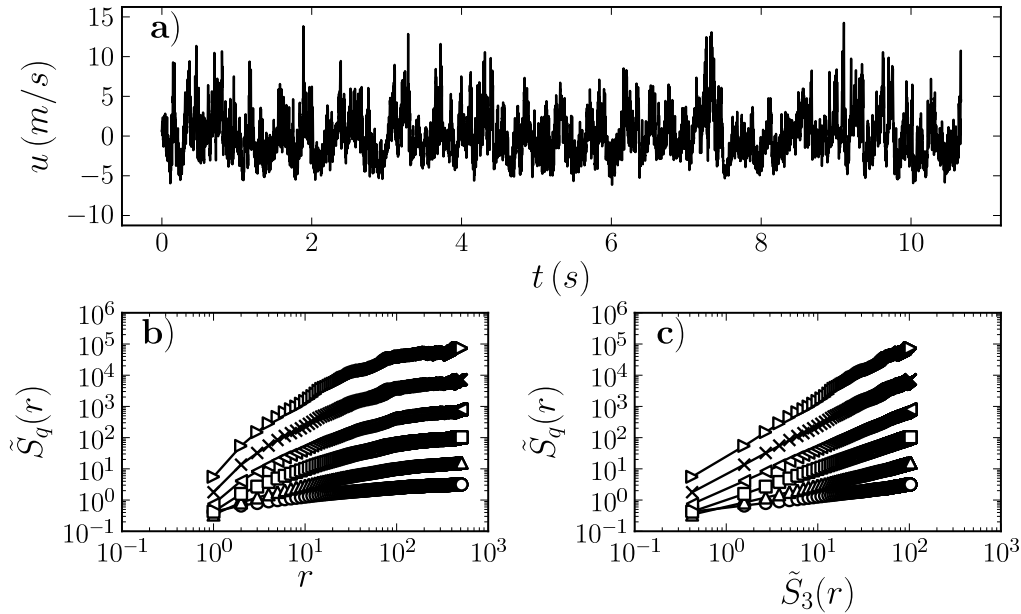


Figura 1.3: No painel *a*) uma série temporal de velocidade com $Re_\lambda \simeq 800$. Nos painéis inferiores são mostradas funções estrutura dos valores absolutos com momentos $q = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 , dispostos de baixo para cima nos gráficos. Na figura *b*) a região que se comporta aproximadamente como uma reta no gráfico log-log define-se o intervalo inercial. Na representação apresentada na figura *c*), entretanto, é possível verificar uma região aproximadamente linear mais extensa.

de expoentes $\tilde{\zeta}_q$ da ASE é obtido considerando

$$\tilde{S}_q(r) \propto \tilde{S}_3(r)^{\tilde{\zeta}_q}, \quad (1.13)$$

onde $\tilde{\zeta}_3 = 1$, por definição.

Um fator importante a se observar, é que o emprego do valor absoluto das diferenças de velocidade elimina a assimetria da distribuição de $\delta_r u$ e também as oscilações ruidosas observadas nas funções estrutura de ordens ímpares⁵. Conseqüentemente, $\tilde{S}_3(r)$ não está relacionado com o mecanismo de transferência de energia assim como $S_3(r)$ está pela lei dos 4/5.

Embora alguns trabalhos apontam que a ASE possa ser um fenômeno aparente e não uma propriedade intrínseca de turbulência (MENEVEAU, 1996; CHANAL et al., 2000; DELOUR; MUZY; ARNÉODO, 2001), ela se tornou uma técnica amplamente usada para a obtenção dos expoentes das funções estrutura em escoamentos turbulentos (FRISCH, 1995) e também em outros fenômenos de multiescala (QUEIROS-CONDE, 1997; TURIEL et al., 1998; BERSHADSKII; SREENIVASAN, 2003).

⁵Frisch (FRISCH, 1995, página 124), atribui esse fato ao cancelamento acidental ou por simetria das flutuações na obtenção dos momentos ímpares.

1.3 Questões sobre turbulência completamente desenvolvida e universalidade

Um aspecto fundamental no âmbito das teorias estatísticas de turbulência, a existência de leis de potência no intervalo inercial, apenas nas últimas décadas tem sido examinado mais atentamente. A forma funcional atribuída a não-invariância de escala ⁶ inequivocamente observada em diversos experimentos pode vir a ser entendida até mesmo como uma assinatura intrínseca da turbulência, mas, até o presente, não está claro se a não-invariância de escala observada é universal ou é dependente do número de Reynolds.

1.3.1 Turbulência e universalidade

Ao longo dos últimos 70 anos, diversos cenários de possíveis estados e quantidades universais em turbulência foram conjecturados e intensivamente discutidos e questionados.

Entre os temas discutidos sobre universalidade, destacam-se

- Constante de Kolmogorov (KOLMOGOROV, 1941c; LANDAU; LIFSHITZ, 1959; PRAS-KOVSKY; ONCLEY, 1994; SREENIVASAN, 1995; WELTER et al., 2009; DONZIS; SREENIVASAN, 2010);
- Estatísticas das flutuações intermitentes nas pequenas escalas (KOLMOGOROV, 1962; CASTAING, 1996; SHE; LÉVÊQUE, 1994; RENNER et al., 2002);
- Expoentes generalizados (ARNÉODO et al., 1996; BENZI et al., 1996; ARNÉODO et al., 2008);
- Mecanismo de cascata (SCHMITT et al., 1992; CLEVE et al., 2004);
- Estatísticas de variáveis escalares (CELANI et al., 2000; SHRAIMAN; SIGGIA, 2000; CHAVES et al., 2001; FALKOVICH; SREENIVASAN, 2006).

Ainda não há consenso sobre a antiga discussão de universalidade: se a turbulência poderá exibir estados universais com número de Reynolds grande mas finito, se poderá exibir estados universais somente no limite infinito do número de Reynolds, ou ainda, se estados universais jamais poderiam ser alcançados.

⁶Neste trabalho se considera os conceitos de *falta de invariância de escala* e *não-invariância de escala* como deflexões suaves da forma original de invariância de escala. Não confundir com a completa inexistência do estado de invariância de escala.

1.3.2 Turbulência mantida por mecanismo forçante

Uma questão importante, também referente à universalidade, é a consideração de um cenário mais realístico de turbulência, no qual se considera também a presença de mecanismos forçantes. É importante ressaltar que os aspectos estatísticos da transferência intermitente de energia no processo de cascata e as leis de escalas anômalas foram muito mais estudados do que a aplicabilidade da equação de von Kármán-Howarth-Kolmogorov (1.5) em sistemas físicos mais realísticos. Este fato é fundamental, pois, as questões associadas à universalidade e existência de um estado de turbulência completamente desenvolvida (BARENBLATT; GOLDENFELD, 1995) são aspectos supostamente decorrentes da equação de von Kármán-Howarth-Kolmogorov.

De modo geral, não se deve esperar que a equação de von Kármán-Howarth-Kolmogorov seja aplicável à qualquer sistema realístico, devido às hipóteses usadas na sua derivação (o mecanismo gerador de turbulência é “desligado” e a turbulência é deixada decair livremente). Contudo, é memorável o fato de que, mesmo em sistemas anisotrópicos e com número de Reynolds relativamente baixo, é possível se reconhecer um intervalo de escalas onde se observa a lei espectral de Kolmogorov.

A influência dos forçantes externos ao intervalo inercial e efeitos da finitude do número de Reynolds vem sendo estudados sistematicamente com base em equações fundamentais (NOVIKOV, 1993; QIAN, 1997, 1999; LUNDGREN, 2003; GAGNE et al., 2004; ANTONIA; BURATTINI, 2006; SREENIVASAN; BERSHADSKII, 2006b). Nestes trabalhos, considera-se a energia introduzida nas grandes escalas por um mecanismo forçante estacionário f , a qual se dissipa em calor a uma taxa constante $\langle \epsilon \rangle = \sum_i \langle f_i u_i \rangle$.

No trabalho pioneiro sobre turbulência forçada, Novikov (1965) considera um forçante gaussiano e decorrelacionado no tempo, dado por

$$\langle f_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} F_{ij}(\mathbf{r}), \quad (1.14)$$

do qual obtém para $S_3(r)$ uma relação na forma

$$S_3(r) = 6\nu \frac{dS_2(r)}{dr} - \frac{2}{r^4} \int_0^r r' \sum_i F_{ii}(r') dr'. \quad (1.15)$$

Devido à presença do forçante nas grandes escalas, a equação equivalente à lei dos 4/5 torna-se

$$S_3(r) = -\frac{4}{5} \langle \epsilon \rangle r \left(1 - \frac{5}{14} \frac{r^2}{L_f^2} \right). \quad (1.16)$$

Esta equação é conhecida como equação de von Kármán-Howarth-Kolmogorov-Novikov, onde L_f é a escala característica do forçante externo. A validade desta relação foi comprovada com um experimento específico para testar estas hipóteses (MOISY; TABELING; WILLAIME,

1999).

Alternativamente ao trabalho de Novikov (1965), diferentes formas para a lei dos 4/5 foram derivadas independentemente (QIAN, 1997, 1999; LINDBORG, 1999; LUNDGREN, 2002, 2003; SREENIVASAN; BERSHADSKII, 2006b). Uma comparação entre as diferentes formulações para a lei dos 4/5 é apresentada abaixo:

$$\frac{-S_3(r)}{\langle \epsilon \rangle r} = \begin{cases} 4/5 & \text{Kolmogorov (1941a)} \\ (4/5) \left(1 - (5/14) (r/L_f)^2 \right), & \text{Novikov (1965)} \\ 4/5 - C_1 (r/L)^m - C_2 (r/\eta_K)^{-4/3}, & \text{Qian (1997)} \\ 4/5 - C \left(4 (r/\eta_K)^{-4/3} + C_* \text{Re}_\lambda^{-1} (r/\eta_K)^{2/3} \right), & \text{Lindborg (1999)} \\ 4/5 - (3, 34/\sqrt{5}) (r/L)^{2/3} - 8 (r/\eta_K)^{-4/3}, & \text{Lundgren (2002)} \\ (4/5) C \left(1 + D (\ln r/r_m)^2 \right), & \text{Sreenivasan e Bershadskii (2006b)}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Nas equações (1.17) as constantes seguem a notação usada nos trabalhos originais⁷, L_f se refere à escala característica do forçante no trabalho de Novikov (1965), m é um expoente que depende do tipo de escoamento segundo a teoria de Qian (1997), r_m é a localização do máximo local do forçante de acordo com o trabalho de Sreenivasan e Bershadskii (2006b), L é a escala integral de comprimento, Re_λ é o número de Reynolds da microescala de Taylor e η_K é a microescala de Kolmogorov.

Embora estes modelos tenham sido construídos de maneira distinta e considerando distintos tipos de escoamentos, estas formulações mostram que a presença de forçantes resulta em não-invariância de escala para $S_3(r)$. Além do mais, nestes modelos de turbulência forçada o máximo da função $-S_3(r)/\langle \epsilon \rangle r$ se aproxima muito lentamente de 4/5⁸, sugerindo que a turbulência apenas pode ser considerada bem desenvolvida com Re_λ maior que 10^4 (QIAN, 1997).

A principal conclusão de acordo com estes modelos de turbulência forçada é que mesmo com número de Reynolds muito grande, mas não infinito, não há lei de escala no limite assintótico.

⁷Os valores das constantes não importantes na presente discussão.

⁸Proporcionalmente a $\text{Re}_\lambda^{-\mu}$ nos trabalhos de Qian (1997), Lindborg (1999) e Lundgren (2002), onde $2/3 \leq \mu \leq 1$, de acordo com o tipo de escoamento.

2 FENOMENOLOGIA DE INTERMITÊNCIA EM TURBULÊNCIA BEM DESENVOLVIDA

Na teoria clássica de Kolmogorov, além da hipótese de que a taxa média de dissipação $\langle \epsilon \rangle$ seja igual a transferência de energia entre as escalas e_r , e constante em todas as escalas, é implicitamente assumido que a dispersão das flutuações de e_r também não varia através das escalas. A dependência da dispersão de e_r com as escalas está associada ao fato que é conhecido como intermitência na transferência de energia, o qual é atribuído ser a responsável pela anomalia dos expoentes ζ_q .

2.1 Modelos estatísticos de intermitência

O objetivo de um modelo de intermitência é fornecer uma forma funcional para o espectro de expoentes ζ_q . Embora mecanismos dependentes da dinâmica e estrutura dos vórtices sejam responsáveis pela deformação dos turbilhões, neste trabalho apenas revisamos o ponto de vista estatístico de acordo com os modelos multiplicativos.

Um exemplo simples modelo de cascata multiplicativa pode ser visto na figura 2.1, onde se observa a transferência de informação das grandes escalas para as pequenas, ocasionando a formação de estruturas mais e mais intermitentes a medida que o processo se desenvolve.

Uma dificuldade encontrada na elaboração de modelos de intermitência é como incorporar a transferência de energia entre escalas à outras grandezas estatísticas. Esta dificuldade se deve em parte ao fato de que a transferência de energia entre turbilhões, ou escalas, não é uma quantidade diretamente mensurável. Mesmo o valor médio desta quantidade dependerá de como se define escala de movimento, ou ainda turbilhão¹. Por outro lado, o último estágio do processo de cascata de energia, que é limitado pela taxa de dissipação, definida como (LANDAU; LIFSHITZ, 1959)

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right)^2, \quad (2.1)$$

é uma quantidade mensurável.

Do ponto de vista da análise experimental, os termos das componentes transversais na equação (2.1) são raramente conhecidos. Entretanto, considerando uma aproximação isotró-

¹Tennekes (1976) discute o problema de uma definição apropriada de turbilhão e suas consequências em modelos de transferência de energia. Ele propõe definir turbilhão como pacotes de onda muito curtos e não-propagadores.

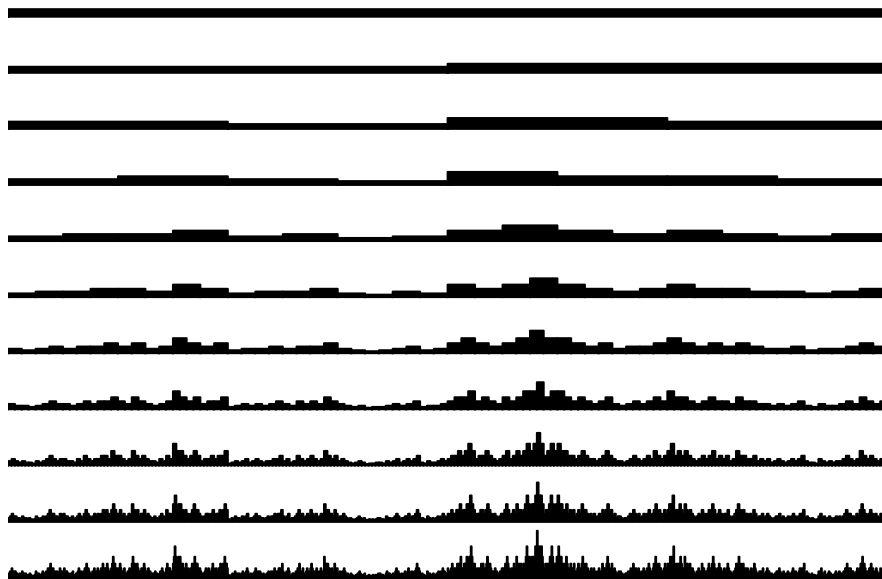


Figura 2.1: Modelo- p de de intermitência de Meneveau e Sreenivasan (1987), representando aqui 11 estágios de uma cascata multiplicativa conservativa com pesos $p_1 = 0,40$ e $p_2 = 1 - p_1 = 0,60$. O modelo assume uma massa inicial (topo da figura), a qual se divide em duas partes com pesos p_1 e p_2 , distribuídos aleatoriamente entre direita e esquerda. Este modelo de intermitência é equivalente ao conjunto de Cantor diádico assimétrico.

pica para turbulência juntamente com a hipótese de Taylor, valores instantâneos de dissipação podem ser obtidos através de uma única componente de velocidade (TAYLOR, 1935):

$$\epsilon(x) \simeq 15\nu \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 = \frac{15\nu}{U} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} \right)^2. \quad (2.2)$$

A aplicabilidade da equação (2.2) também assume que a taxa de amostragem seja suficientemente alta. Kuznetsov, Praskovsky e Sabelnikov (1992) e Muschinski, Frehlich e Balsley (2004) sugerem que a resolução espacial deve ser pelo menos $2\eta_K$. A figura 3.2 mostra um sinal de velocidade e sua dissipação instantânea obtida com o emprego da equação (2.2), evidenciando o caráter altamente intermitente de ϵ .

Nas seções 2.1.1 e 2.1.2 os dois modelos de intermitência mais estudados são sucintamente apresentados.

2.1.1 Modelo log-normal de Kolmogorov e Obukhov

Como discutido anteriormente, na teoria K41 é assumido que as estatísticas das flutuações das velocidades dependem somente do fluxo médio de energia $\langle \epsilon \rangle$, entretanto, como observado por Landau e Lifshitz (1959), ϵ é uma variável estocástica dependente das coor-

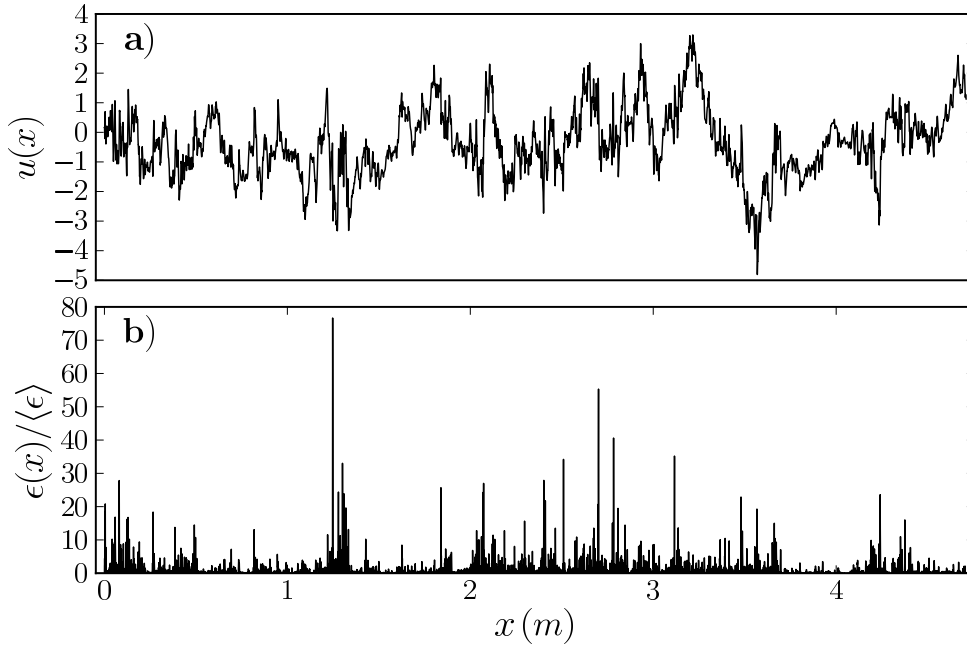


Figura 2.2: Amostra de um sinal de velocidade medido em túnel de vento com $Re_\lambda \simeq 600$ em *a*) e sua dissipação instantânea normalizada em *b*). No painel inferior é representado quantas vezes a taxa de dissipação instantânea é maior que seu valor médio, enfatizando o comportamento intermitente.

denadas \mathbf{x} e do tempo t , cujos valores flutuam juntamente com $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. As flutuações destas variáveis podem depender das grandes escalas de movimento e de Re . Uma vez que Re determina a razão L/η_K , grosso modo, também determina o número de estágios da cascata até que a energia cinética seja transformada em calor. Em consequência disto, as propriedades estatísticas de ϵ não devem ser estritamente universais (MONIN; YAGLOM, 1975).

Com o objetivo de incorporar os efeitos da intermitência da dissipação, Kolmogorov (1962) e Obukhov (1962) propuseram a partir da relação dimensional $(\delta_r u)^q \sim (\langle \epsilon \rangle r)^{q/3}$ usada na K41, uma generalização local, na forma

$$(\delta_r u)^q \sim (\epsilon_r r)^{q/3}, \quad (2.3)$$

onde

$$\epsilon_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{(4/3)\pi r^3} \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|<r} \epsilon(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'^3 \quad (2.4)$$

é a dissipação média numa esfera de raio r .

A nova variável ϵ_r é assumida ter uma distribuição log-normal, dada por

$$\mathcal{P}_r(\epsilon_r) d\epsilon_r = \mathcal{P}_r(\ln \epsilon_r) d \ln \epsilon_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\ln \epsilon_r}^2}} \exp\left[-\frac{(\ln \epsilon_r - m_{\ln \epsilon_r})^2}{2\sigma_{\ln \epsilon_r}^2}\right] d \ln \epsilon_r, \quad (2.5)$$

onde $m_{\ln \epsilon_r}$ é o momento central da distribuição $\mathcal{P}_r(\ln \epsilon_r)$ e $\sigma_{\ln \epsilon_r}^2$ é a variância desta distribui-

ção.

Como a cascata é assumida ser conservativa na média, $m_{\ln \epsilon_r}$ é portanto independente de r . Entretanto, a variância é postulada ter a seguinte dependência com r :

$$\sigma_{\ln \epsilon_r}^2 = A - \mu \ln \frac{r}{L}, \quad (2.6)$$

onde A é uma constante dependente do escoamento, μ é um parâmetro universal e L é escala integral de comprimento.

A escolha da log-normalidade da variável ϵ_r não está associado à algum princípio físico, é uma escolha estatística devido ao fato de que, com a determinação apropriada dos dois primeiros momentos, uma distribuição log-normal consegue descrever aproximadamente bem qualquer distribuição positiva (MONIN; YAGLOM, 1975, pág. 612).

A dependência linear de $\sigma_{\ln \epsilon_r}^2$ com $\ln r/L$ na equação (2.6) é necessária para garantir que as funções estrutura exibam leis de escalas no intervalo inercial. De acordo com estas hipóteses, os momentos estatísticos de ϵ_r são dados por

$$\langle \epsilon_r^q \rangle = \int_{\mathbb{R}} (\epsilon_r)^q \mathcal{P}_r(\ln \epsilon_r) d \ln \epsilon_r = \exp \left[\frac{1}{2} q (q \sigma_{\ln \epsilon_r}^2 + 2 m_{\ln \epsilon_r}) \right], \quad (2.7)$$

assim,

$$\langle \epsilon_r^q \rangle \propto r^{\tau_q} = r^{\frac{1}{2} \mu q (1-q)}. \quad (2.8)$$

Como a transferência de energia é postulada ser conservada na média com $\langle \epsilon_L \rangle = \langle \epsilon \rangle$ e com $\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_r \rangle$ para todo $r \ll L$, segue que

$$\langle \epsilon_r^q \rangle = \langle \epsilon \rangle^q \left(\frac{r}{L} \right)^{\tau_q}, \quad (2.9)$$

consequentemente, introduz uma lei de escala anômala nas funções estrutura

$$S_q(r) = \langle (\delta_r u)^q \rangle \propto r^{\zeta_q} = r^{q/3 + \tau_q/3}, \quad (2.10)$$

onde

$$\zeta_q = \frac{q}{3} - \frac{1}{18} \mu q (q - 3). \quad (2.11)$$

2.1.2 Modelo log-Poisson de She e Lévêque

Este modelo, introduzido por She e Lévêque (1994), conjectura uma “simetria escondida”, na qual a razão dos momentos da dissipação de energia estariam relacionados a estruturas vorticais.

A estrutura hierárquica é definida como

$$\frac{\langle \epsilon_r^{q+1} \rangle}{\langle \epsilon_r^q \rangle} = A_q \left(\frac{\langle \epsilon_r^q \rangle}{\langle \epsilon_r^{q-1} \rangle} \right)^\beta (\epsilon_r^{(\infty)})^{1-\beta}, \quad (2.12)$$

onde A_q é um conjunto de constantes geométricas adimensionais, ϵ_r é a dissipação numa esfera de raio r da mesma forma que no modelo log-normal, definida na equação (2.4), e

$$\epsilon_r^{(\infty)} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\langle \epsilon_r^{q+1} \rangle}{\langle \epsilon_r^q \rangle}.$$

Neste modelo, She e Lévéque (1994) assumem $\beta = 2/3$ fazendo considerações sobre a estrutura filamentar quase-unidimensional dos vórtices. Este valor para β foi confirmado experimentalmente por Chavarría, Baudet e Ciliberto (1995) e numericamente por Grossmann, Lohse e Reeh (1997). O modelo prevê uma lei de escala universal, isto é, sem parâmetro de ajuste, dada por

$$\zeta_q = \frac{q}{9} + 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{q/3} \right). \quad (2.13)$$

Esta equação está em ótimo acordo com o trabalho experimental de Benzi et al. (1993b) e inúmeros trabalhos mais recentes. Este modelo de intermitência foi demonstrado, independentemente, por Dubrulle (1994) e She e Waymire (1995) que é equivalente a assumir que ϵ_r tem uma distribuição quantizada do tipo log-Poisson.

A figura 2.3 mostra uma comparação entre os modelos K41, log-normal e log-Poisson. É possível notar que para $0 < q < 6$ os modelos log-normal e log-Poisson apresentam valores bastante similares, entretanto, a discrepância aumenta rapidamente para momentos maiores.

2.2 Análise estatística

Turbulência bem desenvolvida tem sido tradicionalmente estudada através de funções estrutura. Elas foram introduzidas no contexto de turbulência por Kolmogorov durante a elaboração da teoria de 1941, porém, já haviam sido aplicadas no estudo de teoria de campos aleatórios pela escola russa de estatística (PANCHEV, 1971). Hoje são usadas na caracterização de sinais fractais e multifractais (VOSS, 1989; BARABÁSI; VICSEK, 1991) e também na análise de sinais de diversos fenômenos multi-escala (GAO et al., 2007).

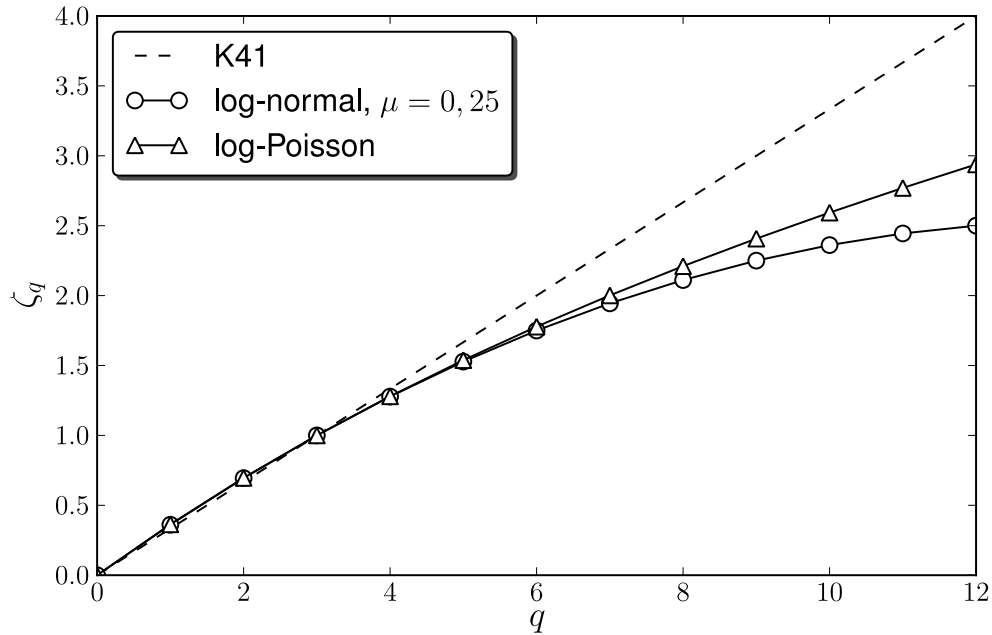


Figura 2.3: Expoentes ζ_q de acordo com K41, modelo log-normal com $\mu = 0,25$ e o modelo log-Poisson.

2.2.1 Funções estrutura

Uma função estrutura descreve variação do momento estatístico do incremento de uma certa variável de acordo com a escala incremental ². Momentos estatísticos de ordens elevadas evidenciam as flutuações mais intensas, as quais, em turbulência são associadas à estruturas de vórtices filamentosas responsáveis pela dissipação, enquanto momentos de baixas ordens evidenciam flutuações mais suaves. O conhecimento do espectro de expoentes ζ_q possibilita, portanto, caracterizar alguns aspectos da natureza da intermitência de um determinado sinal e interpretá-la de acordo a algum modelo estatístico de intermitência.

Alternativamente à definição clássica, as funções estruturas podem ser generalizadas dentro do contexto da Transformada de Ondas (Apêndice A). Vergassola e Frisch (1991) observam que o incremento $\delta_r u(x) \equiv u(x+r) - u(x)$ pode ser obtido através da seguinte transformada

$$\delta_r u(x) = T_\psi[u](r, x) \equiv \langle \psi_{r,x}^{(\delta)} | u \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x') \psi_{r,x}^{(\delta)*}(x') dx', \quad (2.14)$$

onde $\psi_{r,x}^{(\delta)}(\cdot) = r^{-1} \psi^{(\delta)}((\cdot - x)/r)$ representa as ampliações e translações da ondaleta mãe, a qual é definida por $\psi^{(\delta)}(\cdot) = \delta(\cdot - 1) - \delta(\cdot)$, onde $\delta(\cdot)$ é a distribuição delta de Dirac.

Do ponto de vista da análise de ondas, a função $\psi^{(\delta)}$ não satisfaz os critérios para

²Uma formulação alternativa que ao invés da velocidade considera a distribuição de distâncias, chamada de *função estrutura inversa*, tem sido estudada no contexto da formulação multifractal (JENSEN, 1999; ROUX; JENSEN, 2004; BEAULAC; MYDLARSKI, 2004; PEARSON; WATER, 2005).

ser uma ondaleta analisadora eficiente no plano tempo-escala (MUZY; BACRY; ARNÉODO, 1993; ARNEODO et al., 1998). Não obstante, outras ondaletas podem ser usadas para generalizar a definição de função estrutura para uma ondaleta qualquer ψ ,

$$S_q^{(\psi)}(r) = \langle |T_\psi[u](r, x)|^q \rangle_x \propto r^{\zeta_q^{(\psi)}}, \quad (2.15)$$

permitindo a determinação do espectro de expoentes. Na equação (2.15) o sobrescrito (ψ) indica possível dependência na ondaleta escolhida.

No caso específico de ondaletas ortogonais (ver Apêndice A.2), as estimativas de $\zeta_q^{(\psi)}$ podem ser mais robustas quando o número de amostras de dados é restrito. Este resultado é consequência de fato que os coeficientes de ondaletas, em escalas diferentes, são descorrelacionados, ou ao menos, fracamente correlacionados (KATUL; PORPORATO; POGGI, 2009).

O valor absoluto tomado nos incrementos, ou nos coeficientes de ondaletas, permite a determinação das funções estrutura com momentos estatísticos de qualquer valor real. Contudo, como discutido por Muzy, Bacry e Arnéodo (1993), os valores nulos dos incrementos podem causar divergências nos momentos, para $q \leq -1$. Deste modo, a determinação dos expoentes ζ_q só possível para $q > -1$.

Métodos baseados no formalismo multifractal, apresentados na Seção 3.4, são mais robustos na estimação do espectro de expoentes, pois evitam o problema da divergência, permitindo a determinação do espectro de expoentes em todo o domínio real.

2.2.2 Quantificação de intermitência a partir de medidas de dissipação instantânea

Como foi visto, o conhecimento do espectro de expoentes obtido através das funções estrutura,

$$\zeta_q = \frac{d \ln S_q(r)}{d \ln r}, \quad \eta_K \ll r \ll L, \quad (2.16)$$

permite obtenção de informação acerca da intermitência. Considerando a aproximação log-normal, o conhecimento do expoente ζ_q para um único momento q , exceto para $q = 0$ ou 3 , possibilita a determinação do coeficiente de intermitência μ . No entanto, a determinação de μ diretamente de $\epsilon(x)$ pode ser mais precisa, como sugere o estudo de Cleve, Greiner e Sreenivasan (2003).

Há distintas definições para μ que podem ser encontradas na literatura. Por exemplo,

$$\langle (\epsilon_r)^2 \rangle \propto r^{-\mu} \quad (2.17a)$$

$$\langle \epsilon(x)\epsilon(x+r) \rangle \propto r^{-\mu} \quad (2.17b)$$

$$\langle (\epsilon(x) - \langle \epsilon \rangle)(\epsilon(x+r) - \langle \epsilon \rangle) \rangle \propto r^{-\mu}, \quad (2.17c)$$

entretanto, como exposto por Sreenivasan e Kailasnath (1993), as definições apresentadas nas equações 2.17 não correspondem exatamente ao mesmo coeficiente, o que justifica em parte a discrepância encontrada em algumas estimativas.

Num estudo comparativo envolvendo dados de turbulência atmosférica, jato de gás hélio em temperaturas criogênicas e um modelo de cascata multiplicativa, Cleve et al. (2004) mostram que o coeficiente obtido pela definição dada pela equação 2.17b está em excelente acordo com o modelo teórico proposto.

2.2.3 Formalismo baseado em propagadores aleatórios

Funções estrutura também podem ser interpretadas como os momentos estatísticos da função de densidade de probabilidade da variável $\delta_r u$, definidas como

$$S_q(r) = \langle (\delta_r u)^q \rangle = \int_{\mathbb{R}} (\delta_r u)^q \mathcal{P}_r(\delta_r u) d(\delta_r u), \quad (2.18)$$

onde $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$ é a distribuição densidade de probabilidade de $\delta_r u$ na escala r .

O conhecimento da densidade de probabilidade de uma certa variável estocástica determina unicamente o conjunto, possivelmente infinito, de momentos estatísticos desta variável³. Consequentemente, a análise e também a elaboração de hipóteses diretamente sobre a distribuição $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$ proveem um conjunto ferramental mais maleável no estudo do fenômeno de intermitência nas pequenas escalas do que a baseada explicitamente nos momentos estatísticos.

A distribuição do incremento $\delta_r u$ de uma variável estocástica auto-similar u , quando representada num gráfico $\sigma_{\delta_r u} \mathcal{P}_r(\delta_r u) \times \delta_r u / \sigma_{\delta_r u}$, tende a colapsar em uma única curva para qualquer valor de r . No entanto, a mesma representação gráfica para um sinal de velocidade turbulenta apresenta uma deformação contínua na distribuição, passando de uma forma aproximadamente gaussiana nas grandes escalas, a distribuições com longas asas, aproximadamente exponenciais, nas pequenas escalas (Figura 2.4).

Com o objetivo de descrever a mudança da distribuição de probabilidades através das escalas, Castaing, Gagne e Hopfinger (1990) desenvolveram um formalismo que postula uma deformação constante através de propagador. Neste formalismo, a primeira hipótese é assumir que a distribuição de $\delta_r u$ na escala r , representada por $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$, pode ser expressa como uma superposição re-escalada de $\mathcal{P}_l(\delta_l u)$ para qualquer r e l com $r < l$. Em outras palavras, é assumido que é possível definir uma variável aleatória positiva $\alpha_{r,l}$, de tal forma que

$$\delta_r u \stackrel{\text{dist}}{=} \alpha_{r,l} \delta_l u, \quad \forall r < l, \quad (2.19)$$

onde o símbolo $\stackrel{\text{dist}}{=}$ representa a igualdade de distribuições.

³Conhecido como problema dos momentos de Hausdorff (FELLER, 1971, pág. 225).

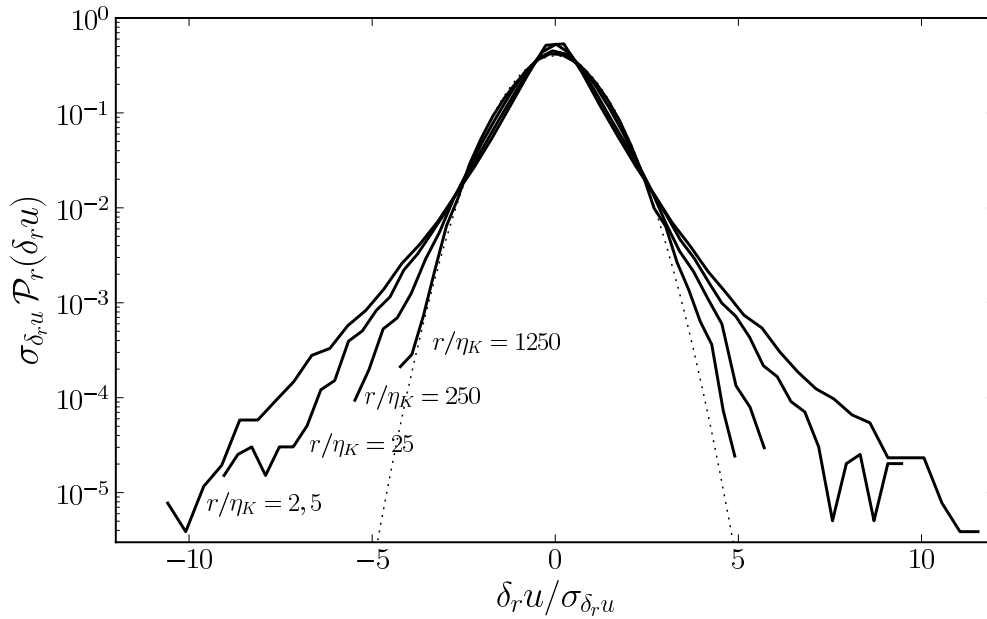


Figura 2.4: Representação semi-logarítmica da distribuição $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$ de acordo com alguns valores de r/η_K . Para este sinal de velocidade transversal do conjunto de dados de Kang, Chester e Meneveau (2003), $\text{Re}_\lambda \simeq 600$ e $L/\eta_K \simeq 900$. É possível perceber que para as escalas r comparáveis à escala integral L a distribuição $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$ é aproximadamente gaussiana, entretanto, $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$ tende progressivamente a uma distribuição com caudas aproximadamente exponenciais à medida que r se aproxima de η_K . A linha pontilhada representa a distribuição gaussiana e $\sigma_{\delta_r u}$ é o desvio padrão da variável $\delta_r u$.

Em termos da distribuição de probabilidades, a equação (2.19) pode ser escrita como (KAHALERRAS; MALÉCOT; GAGNE, 1998; MALÉCOT et al., 2000):

$$\mathcal{P}_r(\delta_r u) = \int_{\mathbb{R}} G_{r,l}(\ln \alpha_{r,l}) \frac{1}{\alpha_{r,l}} \mathcal{P}_l \left(\frac{\delta_l u}{\alpha_{r,l}} \right) d \ln \alpha_{r,l}, \quad (2.20)$$

onde $G_{r,l}$ é a distribuição da variável $\ln \alpha_{r,l}$ e pode ser entendida como um propagador que continuamente deforma a distribuição inicial \mathcal{P}_l .

Em um escoamento turbulento a distribuição da componente longitudinal $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$ é levemente assimétrica. No trabalho original, Castaing, Gagne e Hopfinger (1990) incluem também uma parametrização que incorpora esta assimetria, contudo, aqui por simplicidade na apresentação do formalismo, é considerado somente a parte simétrica da distribuição.

Considerando que a distribuição $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$ consiste da soma de uma distribuição simétrica e uma anti-simétrica,

$$\mathcal{P}_r(\delta_r u) = \mathcal{P}_r^{(+)}(\delta_r u) + \mathcal{P}_r^{(-)}(\delta_r u), \quad (2.21)$$

onde $\mathcal{P}_r^{(+)}(\delta_r u)$ representa a parte simétrica e $\mathcal{P}_r^{(-)}(\delta_r u)$ a anti-simétrica. Utilizando-se então

uma propriedade das distribuições ⁴, pode-se escrever a distribuição do logaritmo dos valores absolutos de $\delta_r u$ como (CHEVILLARD, 2004; CHEVILLARD et al., 2006)

$$\overline{\mathcal{P}}_r(\ln |\delta_r u|) = |\delta_r u| (\mathcal{P}_r(\delta_r u) + \mathcal{P}_r(-\delta_r u)). \quad (2.22)$$

Através das expressões (2.20) e (2.22) é possível escrever a evolução da distribuição $\overline{\mathcal{P}}_r(\ln |\delta_r u|)$ através as escalas como

$$\overline{\mathcal{P}}_r(\ln |\delta_r u|) = \int_{\mathbb{R}} G_{r,l}(\ln \alpha_{r,l}) \overline{\mathcal{P}}_l(\ln |\delta_r u| - \ln \alpha_{r,l}) d \ln \alpha_{r,l}, \quad r < l. \quad (2.23)$$

A equação (2.23) é um resultado fundamental no formalismo, pois permite interpretar a deformação da distribuição através das escalas, isto é, a emergência da intermitência nas pequenas escalas, como uma operação de convolução com uma função deformadora $G_{r,l}$:

$$\overline{\mathcal{P}}_r = G_{r,l} \star \overline{\mathcal{P}}_l. \quad (2.24)$$

De acordo com essa ideia, o processo de cascata é descrito como a aplicação contínua da operação de convolução que, conseqüentemente, gera distribuições mais intermitentes quanto menor for a escala r .

A segunda hipótese feita no formalismo é assumir que em cada processo de cascata a função deformadora $G_{r_j r_{j-1}}$ possui a mesma forma funcional para qualquer geração j . Esta hipótese é equivalente a assumir que a distribuição $G_{r,l}$ é uma distribuição infinitamente divisível (MALÉCOT et al., 2000; MUZY; BACRY, 2002). Idealizando-se um número discreto n de processos de cascata, a partir da escala inicial l até a escala r , a função deformadora $G_{r,l}$ pode entendida como a operação de n convoluções

$$G_{r,l} = G_{r,r_{n-1}} \star \cdots \star G_{r_1 l}, \quad (2.25)$$

com $r \leq r_{n-1} \leq \cdots \leq r_1 \leq l$.

2.2.3.1 Formulação original de Castaing, Gagne e Hopfinger (1990)

A equação (2.23) representa uma formulação matemática que explica a mudança na forma funcional da distribuição $\overline{\mathcal{P}}_r(\ln |\delta_r u|)$ através das escalas em termos de uma operação contínua de convolução com a função $G_{r,l}$. Portanto, de maneira a se descrever consistentemente o fenômeno de intermitência, a função $G_{r,l}$ deve fornecer a fenomenologia do processo.

⁴Para determinar a distribuição de probabilidade de $\ln(\delta_r u)$, dado que é a distribuição de $\delta_r u$ é conhecida, pode-se usar a relação $\mathcal{P}_2(y) = \int_{\mathbb{R}} \delta(y - f(x)) \mathcal{P}_1(x) dx$, onde x é uma variável aleatória, $y = f(x)$ e $\delta(\cdot)$ é a distribuição delta de Dirac, assim $\mathcal{P}_2(y) = \mathcal{P}_1(x)/(dy/dx)$. No caso particular $y = \ln x$, tem-se $\mathcal{P}_2(y) = x \mathcal{P}_1(x)$ (TOMÉ; DE OLIVEIRA, 2001, pág. 22).

Considerando o caso especial no qual a função deformadora $G_{r,l}(\ln \alpha_{r,l})$ é uma distribuição tipo delta de Dirac, a aplicação contínua de operações de convolução na distribuição inicial $\mathcal{P}_l(\delta_l u)$, resultará em uma distribuição $\mathcal{P}_r(\delta_r u)$ com a mesma forma funcional que $\mathcal{P}_l(\delta_l u)$, para qualquer valor $r < l$. Em outras palavras, corresponde a um processo auto-similar. Este caso específico representa a hipótese feita na teoria K41 (CASTAING, 1996), no entanto, como observado por Castaing, Gagne e Hopfinger (1990), uma distribuição intermitente de $\delta_r u$ é unicamente consequência do fato de que a distribuição de densidade de probabilidade da transferência de energia na escala r possui uma grande variância.

Como, para escalas r da ordem e maiores que a escala integral L , a distribuição de δ_r é aproximadamente gaussiana, é possível reescrever a equação (2.20) para $r = L$ como

$$\mathcal{P}_r(\delta_r u) = \int_{\mathbb{R}} G_{r,L}(\ln \alpha_{r,L}) \mathcal{G}\left(\frac{\delta_r u}{\alpha_{r,L}}\right) \frac{d \ln \alpha_{r,L}}{\alpha_{r,L}}, \quad (2.26)$$

onde

$$\mathcal{G}(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-x^2/(2\sigma^2)\right] \quad (2.27)$$

é uma distribuição gaussiana de média nula e variância $\sigma^2 = \langle(\delta_L u)^2\rangle$.

A partir deste desenvolvimento, é possível obter uma expressão para as funções estrutura, na forma

$$\begin{aligned} \langle(\delta_r u)^q\rangle &= \int_{\mathbb{R}} (\delta_r u)^q \mathcal{P}_r(\delta_r u) d(\delta_r u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\delta_r u)^q d(\delta_r u) \int_{\mathbb{R}} G_{r,L}(\ln \alpha_{r,L}) \mathcal{G}\left(\frac{\delta_r u}{\alpha_{r,L}}\right) \frac{d \ln \alpha_{r,L}}{\alpha_{r,L}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} X^q \mathcal{G}(X) dX \int_{\mathbb{R}} (\alpha_{r,L})^q G_{r,L}(\ln \alpha_{r,L}) d \ln \alpha_{r,L} \\ &= \mu_q^{(\mathcal{G})} \langle(\alpha_{r,L})^q\rangle, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde $\mu_q^{(\mathcal{G})}$ representa o momento central de ordem q da distribuição dada pela equação (2.27) (CHEVILLARD, 2004).

Com o objetivo de vincular a função deformadora $G_{r,l}(\ln \alpha_{r,l})$ a um processo físico, Castaing, Gagne e Hopfinger (1990) a associaram à distribuição da transferência instantânea de energia, de maneira similar às hipóteses dimensionais da K41. Para este propósito, o propagador aleatório é então definido como (CASTAING; GAGNE; HOPFINGER, 1990; CHANAL et al., 2000)

$$\alpha_{r,l} = \left(\frac{e_r r}{e_l l}\right)^{1/3}, \quad (2.29)$$

onde e_r representa a transferência local de energia na escala r ⁵. Desta a forma, a dependência

⁵No estudo de séries temporais de velocidade, Gagne, Marchand e Castaing (1994) usam a seguinte aproximação para a transferência local: $e_r(x) \simeq 15\nu[r^{-1} \int_x^{x+r} (\partial_x u)^2 dx - (\delta_r u/r)^2]$.

entre $\delta_r u$ e e_r pode ser expressa através do teorema de Bayes,

$$\mathcal{P}_r(\delta_r u) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{P}_r(e_r) \mathcal{P}_r(\delta_r u | e_r) de_r. \quad (2.30)$$

O trabalho experimental de Gagne, Marchand e Castaing (1994) mostra que a distribuição condicional $\mathcal{P}_r(\delta_r u | e_r)$ possui uma distribuição gaussiana ⁶ na forma

$$\mathcal{P}_r(\delta_r u | e_r) = \exp\left(-(\delta_r u)^2 / (re_r)^{2/3}\right). \quad (2.31)$$

Experimentalmente, Castaing, Gagne e Hopfinger (1990) mostram que a variância da variável $\ln e_r$ é melhor descrita pelo *Ansatz*

$$\lambda^2(r) \equiv \sigma_{\ln e_r}^2 = \Lambda_0 + \left(\frac{r}{L}\right)^{-\beta}, \quad (2.32)$$

do que a dependência linear com $\ln r$ utilizada no modelo log-normal. Em outras palavras, assume-se não-invariância de escala. Assim, de acordo com o formalismo, as funções estrutura são finalmente expressas como

$$S_q(r) = \mu_q^{(G)} \exp\left(\frac{q(q-2)\lambda^2(r)}{2}\right). \quad (2.33)$$

As funções estrutura dadas pela equação (2.33) apresentam um comportamento não-invariante de escala, onde o parâmetro β , introduzido na equação (2.32), depende do número de Reynolds.

2.2.4 Expansão em séries de cumulantes dos expoentes ζ_q

Como visto na seção anterior, a modelagem de intermitência a partir da distribuição de probabilidades pode ser vantajosa em diversos aspectos em relação às funções estrutura. De maneira semelhante, a expansão apresentada aqui é mais eficiente na caracterização de alguns aspectos.

Embora não haja rigor em assumir que $\langle(\delta_r u)^q\rangle$ e $\langle|\delta_r u|^q\rangle$ tenham as mesmas leis de escala, a partir dos valores absolutos dos incrementos de velocidade é possível usar a seguinte expansão

$$\tilde{S}_q(r) = \langle|\delta_r u|^q\rangle = \langle\exp[q \ln(|\delta_r u|)]\rangle = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k(r) \frac{q^k}{k!}\right]. \quad (2.34)$$

Os coeficientes $C_k(r)$ são chamados de cumulantes (CRAMÉR, 1946) e são determi-

⁶Outras evidências experimentais (STOLOVITZKY; KAILASNATH; SREENIVASAN, 1992; GAGNE; MARCHAND; CASTAING, 1994; NAERT et al., 1998) também dão suporte a esta hipótese.

dados pelos momentos centrais da variável $\ln |\delta_r u|$:

$$\begin{aligned} C_1(r) &= \langle \ln |\delta_r u| \rangle \\ C_2(r) &= \left\langle \left(\ln |\delta_r u| - \langle \ln |\delta_r u| \rangle \right)^2 \right\rangle \\ C_3(r) &= \left\langle \left(\ln |\delta_r u| - \langle \ln |\delta_r u| \rangle \right)^3 \right\rangle \\ &\dots \end{aligned} \tag{2.35}$$

Se é esperado que as funções estrutura sejam leis de potência, ou seja, $\tilde{S}_q(r) \propto r^{\zeta_q}$, os cumulantes, conseqüentemente, devem ter dependência logarítmica com a escala r :

$$C_k(r) = b_k + c_k \ln r. \tag{2.36}$$

Neste caso, os coeficientes c_k são algumas vezes chamados log-cumulantes.

O resultado importante da expansão em cumulantes, é que o espectro de expoentes ζ_q pode-se ser expresso a partir de um polinômio de log-cumulantes. Assim, os modelos de intermitência podem então ser caracterizados em termos destes log-cumulantes:

$$\zeta_q = \begin{cases} c_1 q, & \text{K41} \\ c_1 q + c_2 \frac{q^2}{2}, & \text{KO62} \\ \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{q^k}{k!}, & \text{outros.} \end{cases} \tag{2.37}$$

Estas expansões refletem o teorema de Marcinkiewicz (1939), segundo o qual uma distribuição possui dois momentos estatísticos (no caso de uma gaussiana), ou um número infinito de momentos⁷.

A equação (2.37) evidencia porque o modelo log-normal serve como um modelo de prova devido à sua dependência parabólica em q . Em outras palavras, se $c_k \neq 0$ para $k \geq 3$, significa que a intermitência obedece uma estatística diferente da log-normal.

Diversos trabalhos têm mostrado uma certa preferência pela análise via cumulantes de séries intermitentes à análise baseada em momentos (KAHALERRAS; MALÉCOT; GAGNE, 1998; ARNÉODO; MANNEVILLE; MUZY, 1998; ARNÉODO et al., 1999; DELOUR; MUZY; ARNÉODO, 2001; CHEVILLARD et al., 2005; WENDT; ROUX; ABRY, 2006; JAFFARD; LASHERMES; ABRY, 2007; BASU et al., 2007; LASHERMES et al., 2008; KATUL; PORPORATO; POGGI, 2009), pois permitem estimativas mais precisas de parâmetros multifractais.

⁷De fato esta argumentação somente é válida para os casos em que a função ζ_q é derivável em todo o domínio, excluindo assim os casos bifractais como voos de Lévy.

3 FORMALISMO MULTIFRACTAL

Uma grande diversidade de estruturas complexas tem sido quantitativamente caracterizadas através de uma dimensão fractal (STANLEY; MEAKIN, 1988). Fractais são objetos matemáticos complexos que se caracterizam por possuir estrutura auto-similar, e assim consequentemente, não possuir uma escala natural característica (VOSS, 1989; ARNÉODO; BACRY; MUZY, 1995). Tais objetos são, portanto, caracterizados por uma dimensão fractal d_f . Seguindo a definição de Mandelbrot (1982, pág. 15),

um fractal é por definição um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch estritamente excede a dimensão topológica.

Os exemplos mais conhecidos de objetos fractais são a curva de von Koch e o triângulo de Sierpiński (MANDELROT, 1982). Embora estes objetos sirvam para criar intuição e um vocabulário apropriado para entender a ideia de invariância de escalas, a grande parte dos fractais encontrados na natureza possuem uma auto-similaridade estatística e não geometricamente exata (VOSS, 1989). Por essa razão, Mandelbrot e van Ness (1968) propuseram uma generalização do movimento browniano (processo de Wiener) como um modelo para caracterizar processos estocásticos com estrutura auto-similar e distintos graus de irregularidade.

Talvez o exemplo mais antigo utilizando movimento irregular que concebe um comportamento auto-similar é a explicação do movimento browniano por A. Einstein. O movimento browniano é descrito como saltos de distribuição de probabilidade gaussiana descorrelacionados. Este processo estocástico descreve uma caminhada aleatória, cuja variância média da posição das partículas é solução da equação de difusão clássica, conhecida como lei de Einstein-Smoluchowski, e é dada por

$$\sigma^2 = 2Dt, \quad (3.1)$$

onde D é o coeficiente de difusão (GARDINER, 1985).

A partir do modelo de caminhada aleatória de Einstein, se generalizam duas classes de processos estocásticos, hoje usados para modelar diversos processos para os quais o modelo clássico de difusão é inapropriado:

1. A partir de caminhadas aleatórias com saltos gaussianos, define-se correlações incrementais de maneira que o processo se mantenha auto-similar. (Movimento fracionário browniano.)
2. Considerando caminhada aleatória com saltos descorrelacionados, atribui-se saltos que obedecem distribuições com longas asas, assintoticamente convergindo para leis de potência. (Voo de Lévy.)

Estes casos descrevem dois aspectos que levam à difusão anômala pois violam o teorema do limite central (JESPERSEN; METZLER; FOGEDBY, 1999) e são exemplos clássicos de processos monofractais.

3.1 Fractais aleatórios

3.1.1 Movimento fracionário browniano

Define-se um processo fracionário browniano (MFB, conhecido na literatura como *fractional Brownian motion*) como

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left(\int_{-\infty}^0 \left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right),$$

onde $H \in]0, 1[$ é o parâmetro de auto-similaridade, também conhecido como expoente de Hurst.

Os incrementos *estacionários* $\delta_\tau B_H(t) \equiv B_H(t + \tau) - B_H(t)$ são definidos de modo a possuírem distribuição gaussiana e invariância de escala, tal que

$$\delta_{\lambda\tau} B_H(t) \stackrel{dist}{=} \lambda^H \delta_\tau B_H(t), \quad \forall \lambda > 0. \quad (3.2)$$

Devido à propriedade de auto-similaridade dos incrementos, os momentos estatísticos variam de acordo com leis de potência,

$$\langle |\delta_\tau B_H|^q \rangle \propto \tau^{qH}, \quad \forall \tau > 0. \quad (3.3)$$

O processo $B_H(t)$ possui correlação da forma

$$\langle B_H(t) B_H(s) \rangle \propto (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad (3.4)$$

enquanto os incrementos $\delta_\tau B_H$ possuem correlação da forma

$$\langle \delta_\tau B_H(t+s) \delta_\tau B_H(t) \rangle \propto (|s+\tau|^{2H} + |s-\tau|^{2H} - 2|s|^{2H}). \quad (3.5)$$

O expoente de Hurst é o parâmetro de controle deste processo estocástico (veja a figura 3.1), cujo traço possui uma dimensão fractal dada por $d_f = 2 - H$. O movimento fracionário browniano é um processo contínuo mas não diferenciável e seu espectro de potência

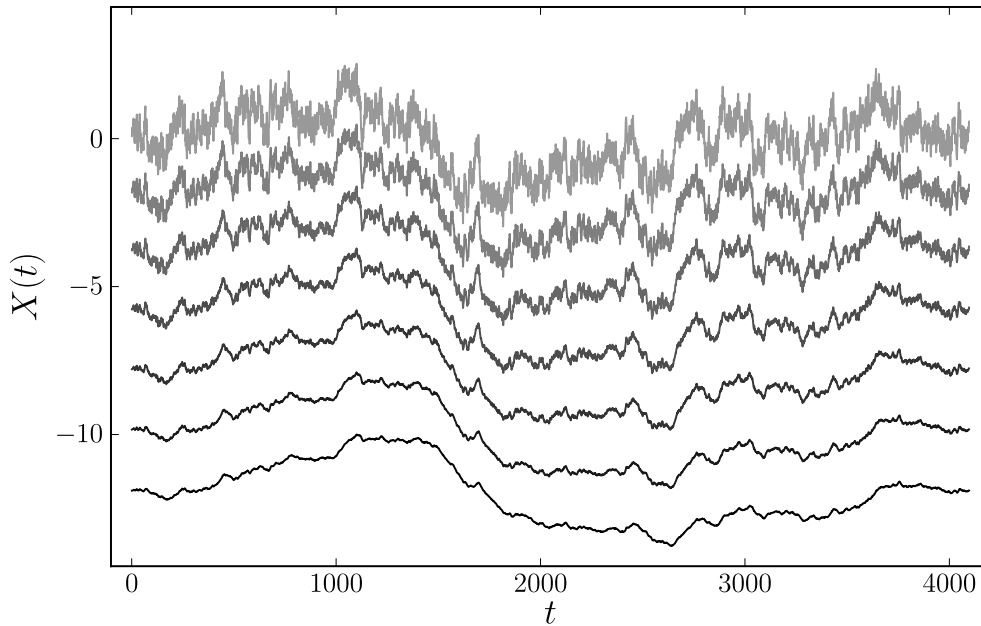


Figura 3.1: Traços unidimensionais de Movimentos Fracionários Brownianos de acordo com diferentes expoentes de Hurst. Do alto a baixo os traços correspondem a $H = 0, 20, 0, 30, 0, 40, 0, 50, 0, 60, 0, 70$ e $0, 80$, gerados a partir da mesma sequência aleatória. É possível observar que quanto maior H , mais suave é o traço.

possui uma dependência na forma $1/f^\beta$, onde $\beta = 2H + 1$ (VOSS, 1989; WORNELL, 1995). Dada a dependência espectral, tipo lei de potência, sinais MFBs não possuem escala externa característica.

3.1.2 Voos de Lévy

A segunda classe de sinais auto-similares é conhecida como voo de Lévy. A distribuição de Lévy não possui forma analítica, é definida a partir da transformada de Fourier de uma função característica $\varphi(k; \alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{F}[\mathcal{P}(x; \alpha, \beta, \gamma)]$, definida a partir de (MANTEGNA; STANLEY, 2000)

$$\ln \varphi(k) = \begin{cases} i\mu k - \gamma|k|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{k}{|k|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right], & \alpha \neq 1 \\ i\mu k - \gamma|k| \left[1 + i\beta \frac{k}{|k|} \ln|k| \right], & \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Considerando uma distribuição simétrica ($\beta = 0$), com média $\mu = 0$ e fator de escala $\gamma > 0$, a distribuição conhecida como α -estável é dada por

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp[-\gamma k^\alpha \cos(kx)] dk. \quad (3.7)$$

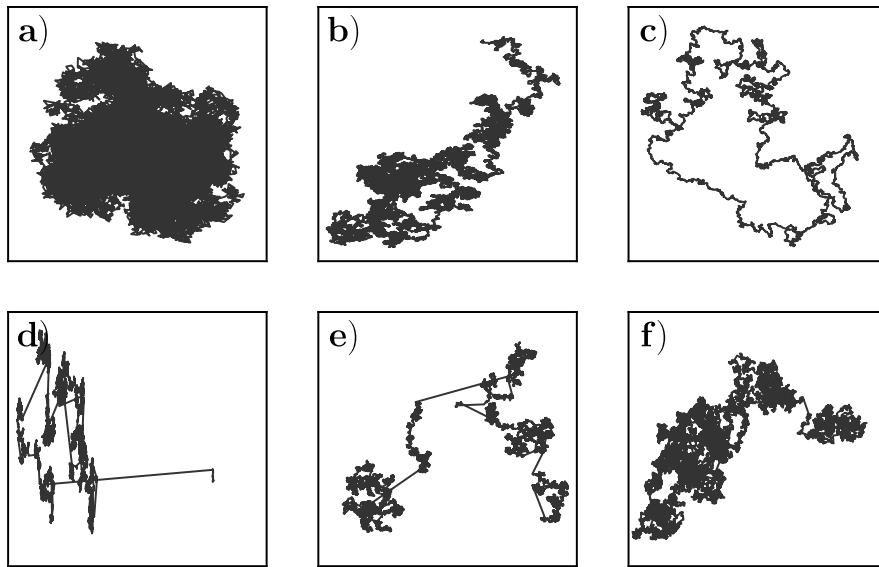


Figura 3.2: Difusão anômala representada através de caminhadas aleatórias em 2D. Nos painéis (a), (b) e (c), movimento fracionário browniano com $H = 0, 30, 0, 50$ e $0, 70$, respectivamente. Em (d), (e) e (f), voos de Lévy com $\alpha = 1, 65, 1, 80$ e $1, 95$, respectivamente.

Observa-se que, para $x \gg 1$, a distribuição (3.7) possui uma forma assintótica na forma

$$\mathcal{P}(x) \sim \frac{1}{x^{1+\alpha}}, \quad (3.8)$$

o que caracteriza uma distribuição com longas asas.

De maneira similar a construção de caminhadas fracionárias brownianas, voos de Lévy são construídos a partir da determinação dos incrementos $\delta_\tau L_\alpha(t) \equiv L_\alpha(t + \tau) - L_\alpha(t)$ descorrelacionados, obedecendo a distribuição (3.8). Assim, o voo descrito por $L_\alpha(t)$ obedecerá uma trajetória auto-similar de acordo com a lei (GAO et al., 2007)

$$L_\alpha(\lambda t) \stackrel{dist}{=} \lambda^{1/\alpha} L_\alpha(t). \quad (3.9)$$

Para o voo de Lévy, o parâmetro $0 < \alpha \leq 2$ controla as características do traço e, conseqüentemente, as propriedades difusivas do processo. No caso $\alpha = 2$, o processo resultante descreve o processo de Wiener, pois $\mathcal{P}(x; \alpha = 2, \beta = 0, \gamma > 0)$ equivale a distribuição gaussiana.

3.1.3 Difusão anômala

Processos difusivos cujos deslocamentos quadráticos não obedecem a dependência linear com o tempo, equação (3.1), são chamados de anômalos (KLAGES; RADONS; SOKOLOV, 2008).

Movimentos fracionários brownianos possuem incrementos $\delta_\tau B_H(t)$ estacionários com distribuição gaussiana, portanto, possuem variância finita. Por outro lado, quando $H \neq 1/2$, o movimento fracionário browniano torna-se um processo de difusão anômala (JESPERSEN; METZLER; FOGEDBY, 1999). Quando $0 < H < 1/2$ o processo é chamado de sub-difusivo e, quando $1/2 < H < 1$, de super-difusivo.

Os voos de Lévy, por outro lado, em decorrência da forma assintótica tipo lei de potência da distribuição (3.8), possuem variância infinita para $\alpha < 2$. Para estes casos, os saltos não obedecem o teorema do limite central e o processo resultante corresponderá a uma caminhada super-difusa (SOLOMON; WEEKS; SWINNEY, 1993). Exemplos de difusão anômala em caminhadas aleatórias em $2D$ são ilustrados na figura 3.2. Observe a semelhança das caminhadas nos gráficos 3.2 *b*) e 3.2 *f*).

3.2 Processos multifractais

O controle conjunto do expoente de Hurst, o qual permite controlar as correlações, e do parâmetro de Lévy, o qual controla a distribuição dos saltos em uma caminhada aleatória, torna possível, ao menos em princípio, a modelagem uma de grande classe de processos estocásticos, como esquematizado na figura (3.3). Entretanto, esta classe de processos não permite uma caracterização global de um grande número de fenômenos com estruturas irregulares encontrados na natureza.

Uma entidade fractal é caracterizada por ocorrência de singularidades únicas e inerentes que controlam a forma e complexidade do objeto (RIEDI, 2003). Existe entretanto uma classe de fenômenos que apresentam grandes variações nas regularidades, onde diferentes regiões do objeto apresentam propriedades fractais distintas e, conseqüentemente, não podem ser completamente descritos por uma única dimensão fractal. Estes objetos são chamados multifractais pois necessitam um número infinito de expoentes, os quais são descritos pelo espectro de singularidades (STANLEY; MEAKIN, 1988).

Se $X(t) \in \mathbb{R}$ é uma função ou sinal cujas características multifractais desejamos estimar, a singularidade local de $X(t)$ num ponto t_0 é caracterizada pelo expoente de Hölder $h(t_0)$, definido como (JAFFARD, 1999)

$$|X(t) - P_n(t - t_0)| \leq C|t - t_0|^{h(t_0)}, \quad t \rightarrow t_0 \quad (3.10)$$

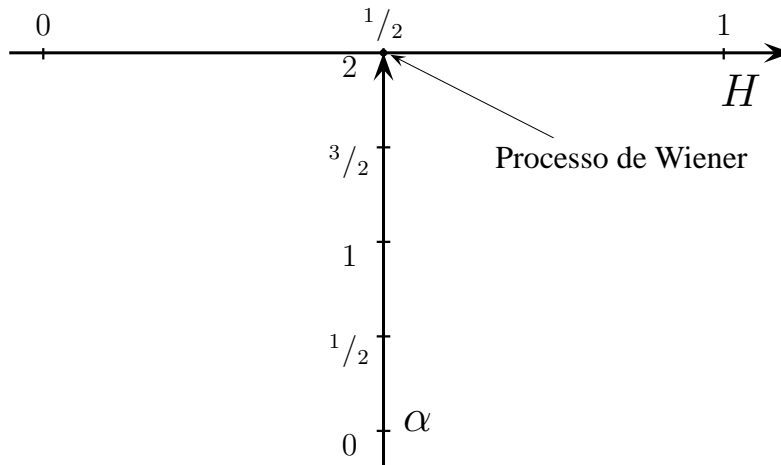


Figura 3.3: O plano acima, descrito pelos parâmetros H de Hurst e α de Lévy, permite representar um processo hipotético $X(t)$, cujo espectro de potência é proporcional a $1/f^{2H+1}$ e seus incrementos $\delta_\tau X(t)$ obedecem uma distribuição de Lévy α -estável. O ponto correspondente a $H = 1/2$ e $\alpha = 2$, como indicado pela seta, representa o processo de Wiener.

onde $C > 0$ é uma constante e $h(t_0)$ é o maior expoente tal que existe um polinômio $P_n(t)$, de grau n , que satisfaz a condição (3.10). Este polinômio, P_n , pode ser pensado como a expansão em série de Taylor no ponto t_0 , cuja ordem deve garantir $n < h(t_0) < n + 1$.

O espectro de singularidades $\mathcal{D}(h)$ é definido como (JAFFARD, 1999; RIEDI et al., 1999; RIEDI, 2003; JAFFARD; LASHERMES; ABRY, 2007)

$$\mathcal{D}(h) = d_H\{t, h(t) = h\}, \quad (3.11)$$

isto é, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch d_H do conjunto de todos os pontos tais que $h(t) = h$.

O expoente de Hölder descreve a regularidade local de uma função, isto é, a suavidade ou a rugosidade do gráfico da função em cada ponto. Esta nova interpretação, permite generalizar o conceito de sinal fractal para funções ou sinais cujas regularidades variam no tempo ou espaço. A exemplo de um MFB, a lei de invariância da forma da equação (3.2) implica que o conteúdo de singularidades é único e uniforme em todo o sinal. Em outras palavras, o espectro de singularidade de um MFB é (JAFFARD; LASHERMES; ABRY, 2007)

$$\mathcal{D}(h) = \begin{cases} 1, & \text{se } h = H \\ -\infty, & \text{se } h \neq H. \end{cases} \quad (3.12)$$

Em um sinal multifractal, por outro lado, o expoente h assume uma distribuição de valores, dada por seu espectro de singularidades $\mathcal{D}(h)$, cujos valores finitos são definidos dentro de um intervalo $[h_{\text{mín}}, h_{\text{máx}}]$.

No formalismo multifractal é postulado¹ que o expoente h ocorre de acordo com uma

¹Esta escolha é devido ao fato de que as função estrutura são leis de potência.

distribuição de probabilidade $\mathcal{P}_\tau(h)$, dependente da escala $\tau = t - t_0$, dada por

$$\mathcal{P}_\tau(h) \sim \tau^{1-\mathcal{D}(h)}. \quad (3.13)$$

Consequentemente, como

$$\langle |\delta_\tau X|^q \rangle = \int |\delta_\tau X|^q \mathcal{P}_\tau(\delta_\tau X) d(\delta_\tau X)$$

e $\delta_\tau X \sim \tau^h$, devido à definição (3.10), pode se definir funções estrutura como (PARISI; FRISCH, 1983; BENZI et al., 1984; FRISCH, 1995; BOFFETTA; MAZZINO; VULPIANI, 2008)

$$S(\tau; q) = \langle |\delta_\tau X|^q \rangle \propto \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \tau^{|qh+1-\mathcal{D}(h)|} d\mu(h) \sim \tau^{\zeta(q)}. \quad (3.14)$$

A definição (3.14) requer que o espectro de singularidades $\mathcal{D}(h)$ seja uma função contínua e côncava, desta forma, a integral é dominada pelo valor mínimo de $|qh + 1 - \mathcal{D}(h)|$, assim o resultado da integração independe da forma da função $\mu(h)$.

Finalmente, a relação entre $\mathcal{D}(h)$ e $\zeta(q)$ é obtida a partir da transformada de Legendre (PARISI; FRISCH, 1983; HALSEY et al., 1986; FRISCH, 1995):

$$\begin{cases} q = d\mathcal{D}(h)/dh \\ \zeta(q) = hq + 1 - \mathcal{D}(h). \end{cases} \quad (3.15)$$

O conhecimento do espectro multifractal, portanto, fornece uma ideia geométrica da repartição de singularidades de um sinal (BARRAL; SEURET, 2005). Além disto, o formalismo permite representar o espectro de expoentes $\zeta(q)$ para momentos negativos e ordem não inteira.

3.3 Modelos de intermitência log-normal e log-Poisson de acordo com o formalismo multifractal

Os modelos log-normal e log-Poisson são os dois modelos de intermitência mais conhecidos no estudo de turbulência bem desenvolvida. Estes modelos também podem ser entendidos como casos específicos de um processo mais geral de cascata infinitesimalmente divisível (CASTAING; GAGNE; HOPFINGER, 1990; NOVIKOV, 1994). Nesta seção, estes dois modelos são rerepresentados dentro do formalismo multifractal.

Nas seguintes sub-seções, as derivações são resultados dos trabalhos de Lashermes (2005) e Lashermes et al. (2008).

3.3.1 O modelo log-normal

O espectro de singularidades para o modelo log-normal também possui forma quadrática, dado por

$$\mathcal{D}_{\ln}(h) = \begin{cases} 1 + \frac{(h-c_1)^2}{c_2}, & \text{se } h_*^+ \leq h \leq h_*^-, \\ -\infty & \text{outro,} \end{cases} \quad (3.16)$$

onde c_1 e c_2 são log-cumulantes e os expoentes críticos $h_*^- = c_1 + \sqrt{-2c_2}$ e $h_*^+ = c_1 - \sqrt{-2c_2}$ limitam a domínio onde $\mathcal{D}_{\ln}(h)$ é positivo.

Os expoentes de escala correspondentes a este espectro são dados por

$$\zeta_{\ln}(q) = \begin{cases} c_1 q + \frac{c_2}{2} q^2, & \text{se } q_*^- \leq q \leq q_*^+ \\ 1 + q h_*^-, & \text{se } q > q_*^+ \\ 1 + q h_*^+, & \text{se } q < q_*^-, \end{cases} \quad (3.17)$$

onde $q_*^+ = -q_*^- = \sqrt{-2/c_2}$.

Um problema de consistência física bem conhecida do modelo log-normal, como evidenciado por Frisch (1991), impõe que os expoentes $\zeta(q)$ não podem ser decrescentes com q . Resultado que implicaria a existência de velocidades supersônicas, o que não é esperado de acordo com a física de escoamentos incompressíveis.

No entanto, de acordo com o formalismo multifractal, para $q < q_*^-$ e $q > q_*^+$ a função expoente de escala tem comportamento linear e portanto é sempre crescente com q , evitando a inconsistência física (LASHERMES, 2005).

3.3.2 O modelo log-Poisson

Para o modelo log-Poisson, o espectro de singularidades é dado por

$$\mathcal{D}_{\text{SL}}(h) = \begin{cases} (h - \frac{1}{9})[A_1 - A_2 \ln(h - \frac{1}{9})] - 2, & \text{se } h_*^+ \leq h \leq h_*^-, \\ -\infty & \text{outro,} \end{cases} \quad (3.18)$$

e o espectro de expoentes, por

$$\zeta_{\text{SL}}(q) = \begin{cases} \frac{q}{9} + 2[1 - (\frac{2}{3})^{q/3}], & \text{se } q_*^- \leq q \leq q_*^+ \\ 1 + q h_*^-, & \text{se } q \geq q_*^+ \\ 1 + q h_*^+, & \text{se } q \leq q_*^-, \end{cases} \quad (3.19)$$

com $A_1 = 3[(1 + \ln(\ln(3/2)))/\ln(3/2) - 1]$, $A_2 = 3/\ln(3/2)$.

Os parâmetros críticos h_*^+ , h_*^- , q_*^+ e q_*^- para o modelo log-Poisson são

$$h_*^+ \cong 0,162, \quad h_*^- \cong 0,694,$$

e

$$q_*^- \cong -5,69, \quad q_*^+ \cong 12,36.$$

3.4 Formalismo multifractal baseado nos coeficientes de ondaletas dominantes

Em contrapartida ao formalismo multifractal está a obtenção do espectro de singularidades $\mathcal{D}(h)$ a partir de um determinado sinal (BARRAL; SEURET, 2005). O formalismo baseado em funções estrutura não permite a obtenção de $\zeta(q)$ para $q < -1$, impossibilitando a determinação das singularidades mais suaves, correspondentes ao lado direito do espectro de $\mathcal{D}(h)$ (MUZY; BACRY; ARNÉODO, 1993).

Uma metodologia recentemente introduzida por Jaffard (2004), baseada nos coeficientes de ondaletas dominantes² possui demonstração rigorosa de sua validade (ABRY; JAFFARD; LASHERMES, 2004; LASHERMES, 2005; WENDT; ROUX; ABRY, 2006; JAFFARD; LASHERMES; ABRY, 2007; LASHERMES et al., 2008; WENDT, 2008) e permite a determinação completa do espectro de singularidades. Este novo método foi comparado ao conhecido método MF DFA (do inglês *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis*), o qual foi introduzido por Kantelhardt et al. (2002), e foi considerado mais mais preciso, segundo as análises de Serrano e Figliola (2009).

Os coeficiente dominantes são obtidos a partir dos coeficientes discretos de ondaletas $\{\psi_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}}$ (ver Apêndice A). Para cada coeficiente de detalhe $d_{j,k} = \langle \psi_{j,k} | X \rangle$, pode ser associado um intervalo diádico

$$\lambda_{j,k} = [2^j k, 2^j (k+1)[, \quad (3.20)$$

no qual se define o coeficiente dominante como

$$l_{j,k} = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda_{j,k}, j' \leq j} |d_{j',k'}|, \quad (3.21)$$

onde

$$3\lambda \equiv \lambda_{j,k-1} \cup \lambda_{j,k} \cup \lambda_{j,k+1}. \quad (3.22)$$

Na figura (3.4) pode-se ver a representação esquemática dos coeficientes dominantes na estrutura diádica dos coeficientes de ondaletas.

²Conhecida na literatura por *Wavelet Leader*.

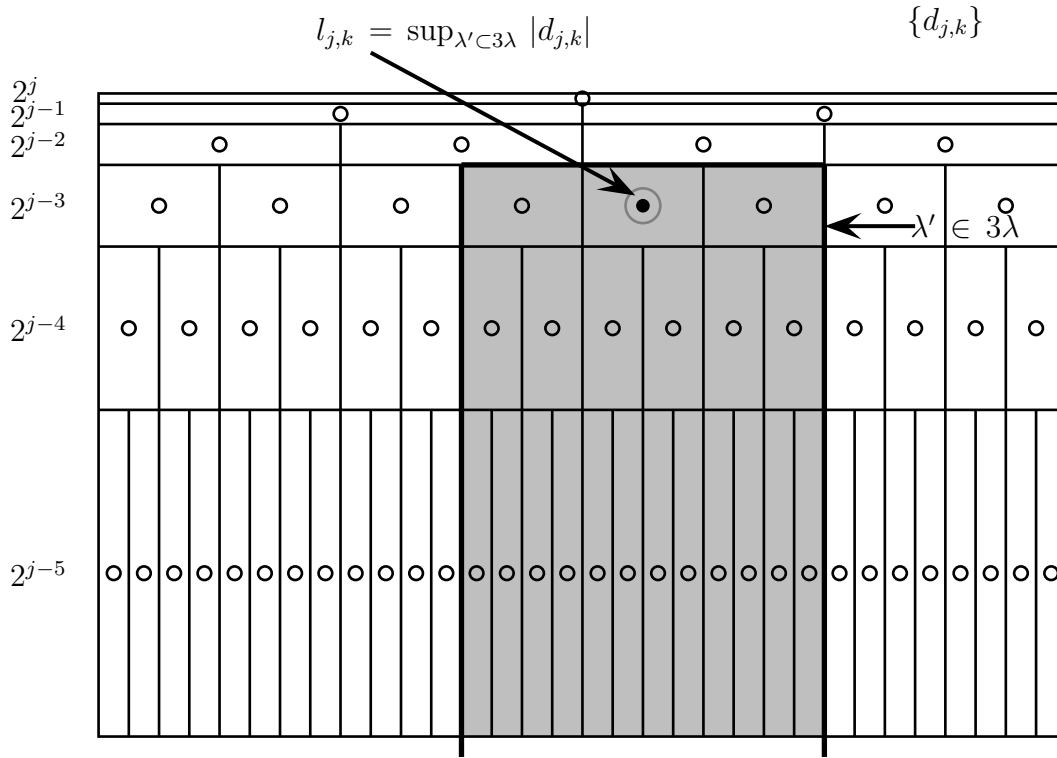


Figura 3.4: Coeficientes de ondaletas dominantes representados na grade diádica do plano espaço-escala. Cada ponto (círculos abertos) representa um coeficiente discreto de ondaleta $d_{j,k}$ e a área interna ao retângulo representa o intervalo diádico $\lambda_{j,k}$. A área sombreada representa o sub-conjunto de coeficientes 3λ , associado ao coeficiente dominante $l_{j,k}$ (círculo cheio, indicado pela seta).

De maneira a se obter funções de escala relacionada com os formalismo multifractal, define-se então funções estrutura a partir dos coeficientes $l_{j,k}$ como

$$S(\tau; q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} (l_{j,k})^q \approx \kappa_q 2^{j\zeta(q)}, \quad (3.23)$$

onde $\tau = 2^j$, n_j é o número de coeficientes dominantes na escala j e κ_q são constantes de proporcionalidade (ABRY; JAFFARD; LASHERMES, 2004; JAFFARD; LASHERMES; ABRY, 2007).

3.5 Cascata multifractal de ondaletas

Sinais multifractais com que apresentam correlações entre escalas de modo similar ao conceito de cascata de energia em escoamentos turbulentos foram introduzidos por Benzi et al. (1993a). Tais processos podem ser construídos a partir da árvore de coeficientes discretos de ondaletas. A fundamentação matemática e resultados significativos sobre a convergência destes processos foi estudada por Arnéodo, Bacry e Muzy (1998).

O conjunto de coeficientes $\{d_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}}$ pode ser construídos recursivamente na se-

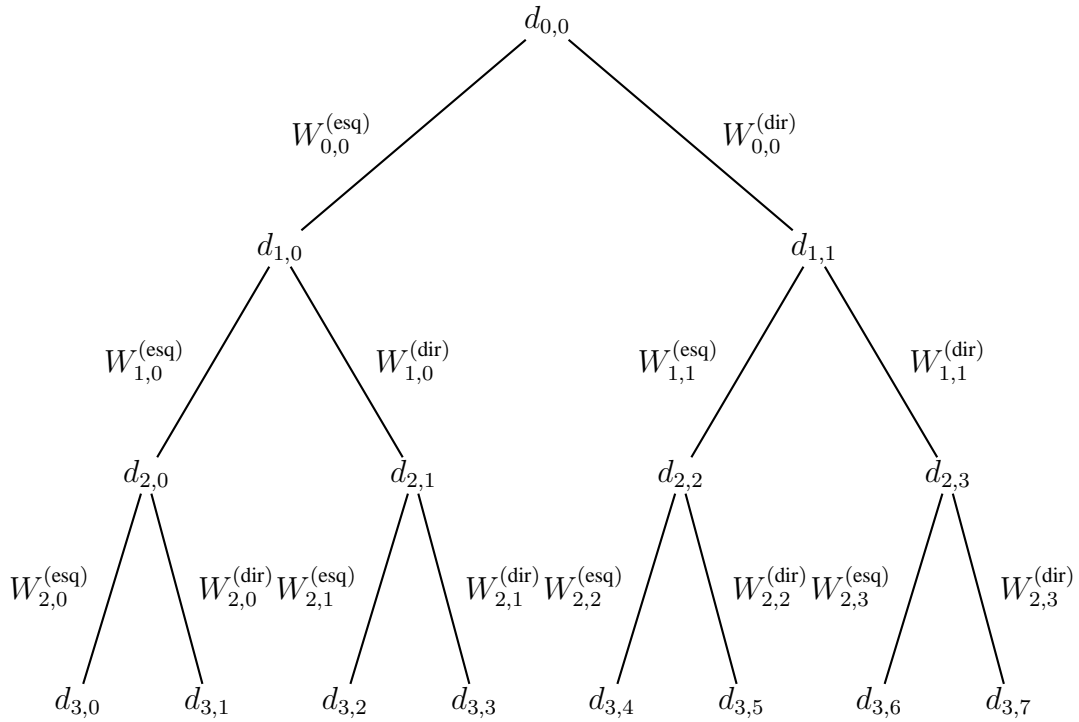


Figura 3.5: Árvore de coeficientes de ondaletas representando a estrutura multiplicativa usada para construir sinais multifractais.

guinte maneira (BENZI et al., 1993a; ARNÉODO; BACRY; MUZY, 1998; ARNÉODO; MANNEVILLE; MUZY, 1998; RIEDI et al., 1999; RIEDI, 2003; WENDT, 2008)

$$\begin{cases} d_{0,0} = 1, \\ d_{j,2k} = W_{j-1,k}^{(\text{esq})} d_{j-1,k}, \\ d_{j,2k+1} = W_{j-1,k}^{(\text{dir})} d_{j-1,k}, \end{cases} \quad (3.24)$$

para todo j ($j \geq 1$) e k ($0 \leq k < 2^{j-1}$), onde $W_{j,k}^{(\epsilon)}$ ($\epsilon = \text{esq}$ ou dir) são variáveis independentes e identicamente distribuídas.

De acordo com a construção acima, representada na figura (3.5), os coeficientes carregam informação das grandes escalas para as pequenas através da escala j , desta forma os coeficientes apresentam uma estrutura multiplicativa:

$$d_{j,k} = d_{0,0} \prod_{i=1}^j W_{i,k}^{\epsilon_i} \quad (3.25)$$

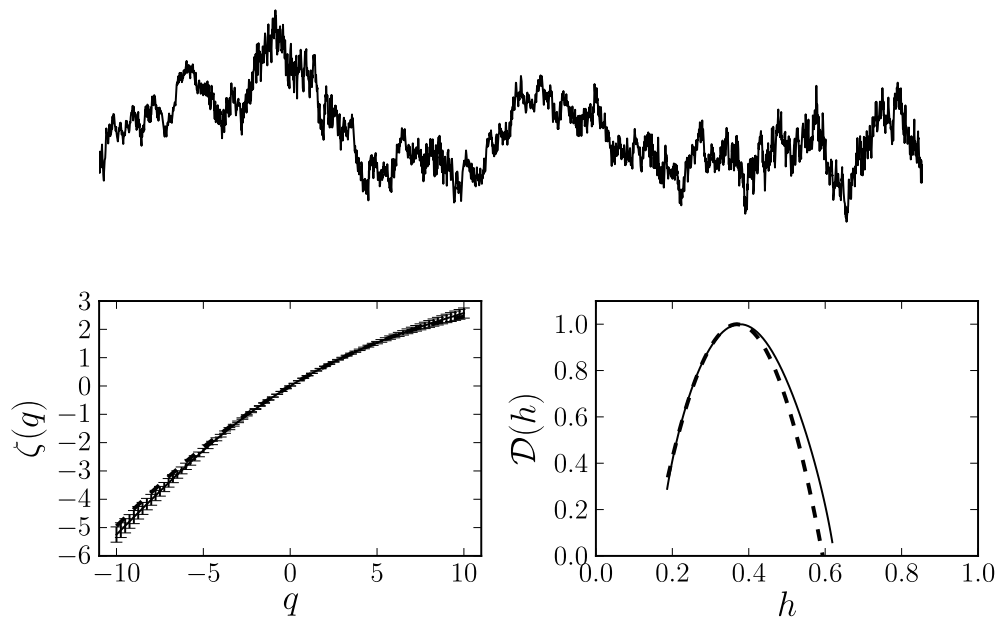


Figura 3.6: No alto da figura, uma realização de um sinal multifractal log-normal ($c_1 = 0,37$ e $c_2 = -0,025$) com $N = 2^{16}$ amostras, obtido através do algoritmo de Cascatas Aleatórias de Ondaletas utilizando a ondaleta da classe Daubechies Db10. Nos dois painéis inferiores são mostrados as estimativas de $\zeta(q)$ e $\mathcal{D}(h)$ a partir do método de Ondaletas Dominantes (com a ondaleta Db5). A barra de erros mostrada no gráfico de $\zeta(q)$ corresponde ao desvio-padrão da simulação de 256 séries, correspondendo a um total de 16 777 216 pontos. As linhas tracejadas representam os valores teóricos de $\zeta(q)$ e $\mathcal{D}(h)$.

O processo multiplicativo descrito pela equação (3.25) é usado para gerar sinais sintéticos, cuja estrutura de correlações é controlada pela distribuição de $W_{j,k}^\epsilon$. É possível, portanto, usar este processo para gera sinais multifractais de acordo com os modelos log-normal e log-Poisson, com a finalidade de testar formalismos e estudar limites de confiança em estimativas estatísticas.

Na figura 3.6 é apresentada a utilização do método multiplicativo baseado na transformada discreta de ondaletas para gerar sinais multifractais além das estimativas das funções $\zeta(q)$ e $\mathcal{D}(h)$ pelo método baseado coeficientes de ondaletas dominantes. Se observa na figura 3.6 que mesmo nesta simulação com parâmetros controlados, a estimativa torna-se inaccurada para momentos estatísticos mais altos.

4 ESTRUTURA FINA DA TURBULÊNCIA

4.1 Invariância de escala

É possível notar que as formas de não-invariância de escala (exponencial, sugerida por Castaing, Gagne e Hopfinger (1990), Dubrulle (1996) e a logarítmica, sugerida por Sreenivasan e Bershadskii (2006b)) podem ser escritas numa forma generalizada, juntamente com a forma invariância de escala, como

$$\frac{S_q(r)}{(\sigma_u)^q} = C'_q \exp[s(r)\zeta_q], \quad (4.1)$$

onde

$$s(r) = \begin{cases} \ln r/L, & \text{lei de escala} \\ (r/L)^{-\beta}, & \text{lei exponencial} \\ \ln \ln r/\eta_K, & \text{lei logarítmica.} \end{cases} \quad (4.2)$$

É importante notar esta representação generalizada é compatível com a ASE: $S_q(r) \propto S_3(r)^{\zeta'_q}$.

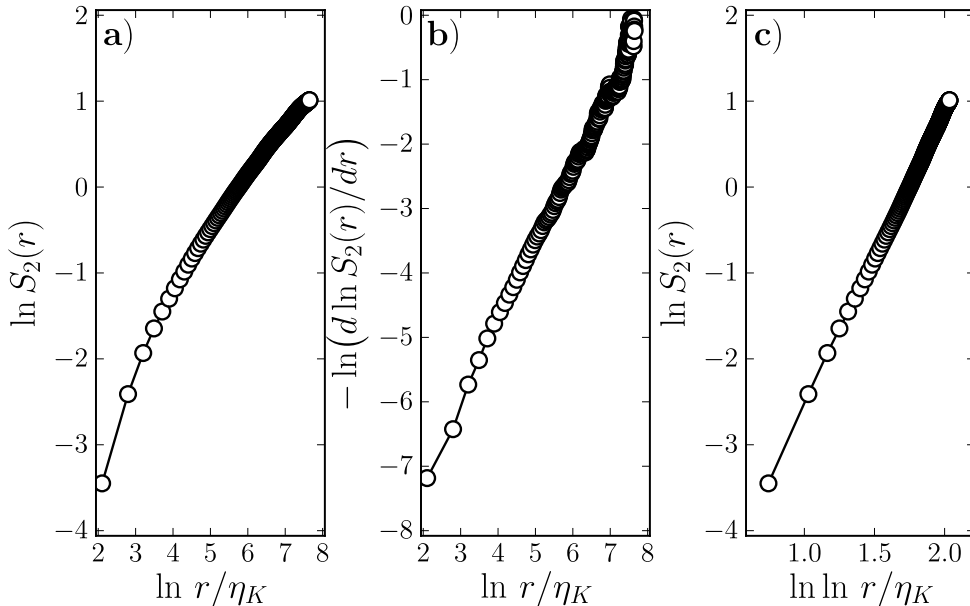


Figura 4.1: Comparação das leis de escalas com dados experimentais de turbulência. A função estrutura de segunda ordem é exibida de maneira a apresentar um comportamento linear, em acordo às leis de escalas sugeridas: a) lei potência, b) lei exponencial e c) lei logarítmica.

A partir da análise de dados (Figura 4.1), pode-se constatar que a lei de escala logarít-

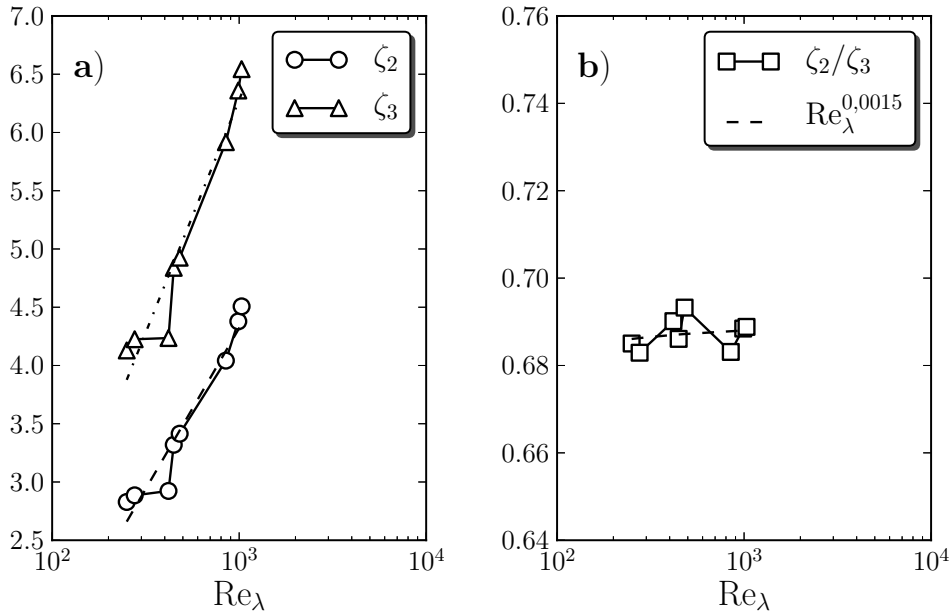


Figura 4.2: Análise experimental dos expoentes de escala obtidos através da lei de escala logarítmica. Em *a*) a dependência dos expoentes ζ_2 e ζ_3 com Re_λ , em *b*) se verifica que a razão ζ_2/ζ_3 praticamente constante, em acordo com as hipóteses de auto-similaridade estendida. O conjunto de dados de túnel de vento obtidos por A. R. Wittwer e são descritos em Welter et al. (2009).

mica, com

$$S_q(r) \sim (\ln(r/\eta_K))^{\zeta'_q}, \quad (4.3)$$

fornece um melhor modelo de ajuste para os dados. Cabe lembrar que, embora neste *Ansatz* não-invariante de escala os expoentes ζ'_q são dependentes de Re_λ , os expoentes normalizados $\tilde{\zeta}_q = \zeta'_q/\zeta'_3$ são independentes em acordo com a ASE (4.2).

4.2 Consequência da não-invariância de escala para intermitência nas componentes transversais

Como observado por Grossmann, Lohse e Reeh (1997) e também por Antonia, Pearson e Zhou (2000), devido à isotropia local e incompressibilidade, a existência de leis de escalas implica diretamente que $\zeta_2^\perp = \zeta_2^\parallel$. Contudo, as observações experimentais de Camussi e Benzi (1997), Dhruva, Tsuji e Sreenivasan (1997), Water e Herweijer (1999) e Antonia, Pearson e Zhou (2000) e também numéricas de Grossmann, Lohse e Reeh (1997) e Ishihara, Gotoh e Kaneda (2009) mostram que em geral $\zeta_q^\perp \neq \zeta_q^\parallel$.

Com base nestas observações Chen et al. (1997), Grossmann, Lohse e Reeh (1997) e também He et al. (1998) sugerem que os expoentes das componentes transversais devem estar

associados a um mecanismo de transferência de energia distinto dos longitudinais.

Seguindo Panchev (1971, página 127), tensores de segunda ordem localmente isotrópicos em campos solenoidais (incompressíveis) devem obedecer a seguinte relação:

$$S_2^\perp(r) = S_2^\parallel(r) + \frac{r}{2} \frac{d}{dr} S_2^\parallel(r). \quad (4.4)$$

Desta forma, se as funções estrutura seguem leis de escala $S_2(r) \propto r^{\zeta_2}$, é uma consequência imediata da equação (4.4) a relação entre funções estrutura transversais e longitudinais da forma

$$S_2^\perp(r) = \left(1 + \frac{\zeta_2}{2}\right) S_2^\parallel(r). \quad (4.5)$$

Portanto, de acordo com as considerações da teoria K41, de onde se obtém $\zeta_2 = 2/3$, resulta a relação

$$\frac{S_2^\perp(r)}{S_2^\parallel(r)} = \frac{4}{3}, \quad (4.6)$$

a qual é conhecida como a *razão isotrópica*, e é uma medida amplamente usada para verificar a existência de isotropia no intervalo inercial (MONIN; YAGLOM, 1975).

Por outro lado, considerando válidas as hipóteses de incompressibilidade e isotropia, como na derivação da relação (4.6), porém assumindo que funções estrutura obedecem leis de escala logarítmica ao invés de leis de potência, a relação entre as componentes transversal e longitudinal torna-se

$$\frac{S_2^\perp(r)}{S_2^\parallel(r)} = 1 + \frac{\zeta_2^\parallel}{2} \frac{1}{\ln(r/\eta_K)}, \quad (4.7)$$

consequentemente, a razão entre $S_2^\parallel(r)$ e $S_2^\perp(r)$ passa a ser levemente dependente da escala r .

A verificação experimental da equação (4.7) é apresentada na figura 4.3 com a análise do conjunto de dados obtidos por Kang, Chester e Meneveau (2003)¹. A função estrutura transversal de segunda ordem $S_2^\perp(r)$ foi obtida com o emprego da equação (4.7), onde foi usado o valor experimental de $\zeta_2^\parallel(r)$ para seu cálculo. Os resultados são mostrados no painel inferior da figura, onde se verifica que a relação (4.7) está em razoável acordo com o ajuste experimental de $S_2^\perp(r)$, especialmente para os menores valores de r .

Este resultado, embora atraente, pode ser contraditório às premissas usadas. Segundo os argumentos de Frisch (1995), o resultado $S_2(r) \propto r^{2/3}$ é consequência de um campo turbulento localmente homogêneo no limite de $\text{Re} \rightarrow \infty$. Assim, o resultado $S_2(r) \propto (\ln r/\eta_K)^{\zeta_2}$ implica que o escoamento não pode ser localmente homogêneo e isotrópico, desta forma, invalidando a equação 4.4.

¹Este conjunto de dados está disponível em <http://www.me.jhu.edu/meneveau/datasets.html>

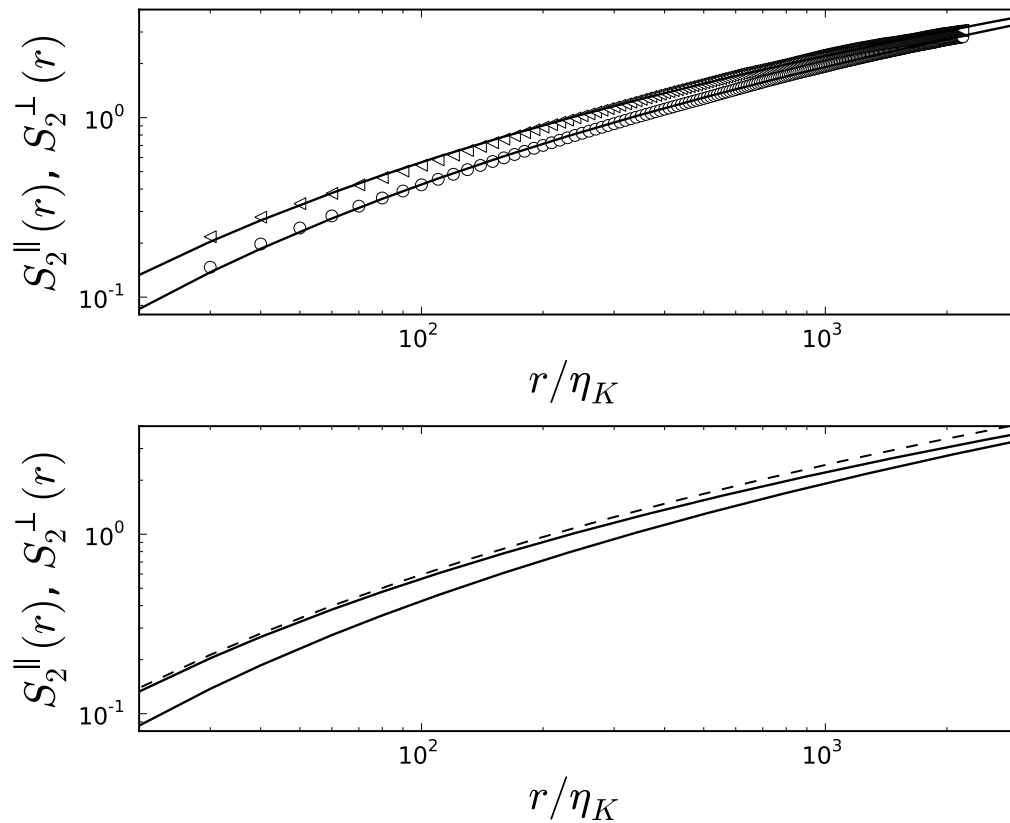


Figura 4.3: Funções estruturas de segunda ordem longitudinal (círculos) e transversal (triângulos) obtidas a partir dos dados de Kang, Chester e Meneveau (2003). As linhas contínuas representam ajuste pela lei de escala logarítmica dada pela equação (4.3). No painel inferior do gráfico são apresentados os ajustes dos dados experimentais (por razão de melhor visualização) e são comparados com o resultado obtido a partir equação (4.7), que é mostrado como linha tracejada.

4.3 Estimativa do coeficiente de intermitência utilizando *surrogates*

Recentemente, uma metodologia baseada na magnitude de cumulantes e em análise *surrogate* foi proposta por Basu et al. (2007) com o objetivo de viabilizar a estimativa do parâmetro de intermitência em séries de dados típicas de anemometria sônica.

A ideia por trás desta nova metodologia consiste em usar a propriedade de um certo método de embaralhamento de sinais, o qual possui o efeito de destruir a multifractalidade inerente de sinais². Este algoritmo de embaralhamento (Apêndice B.1), introduzido por Theiler et al. (1991, 1992) e corrigido posteriormente por Prichard e Theiler (1994), foi desenvolvido com a finalidade de testar hipóteses nulas com o objetivo de identificar características não-lineares em séries de dados. O algoritmo aleatoriza as fases no espaço de Fourier de maneira anti-simétrica, preservando o espectro de potência do sinal. Um exemplo de realização de

²Originalmente, Basu et al. (2007) utilizaram um algoritmo um pouco mais elaborado, conhecido como IA-AFT (do inglês, *Iterative Amplitude-Adjusted Fourier Transform*) que, além do espectro de potência, preserva também o histograma da série. Entretanto, para o propósito da metodologia de Basu et al. (2007), o algoritmo de embaralhamento apresentado é igualmente eficiente.

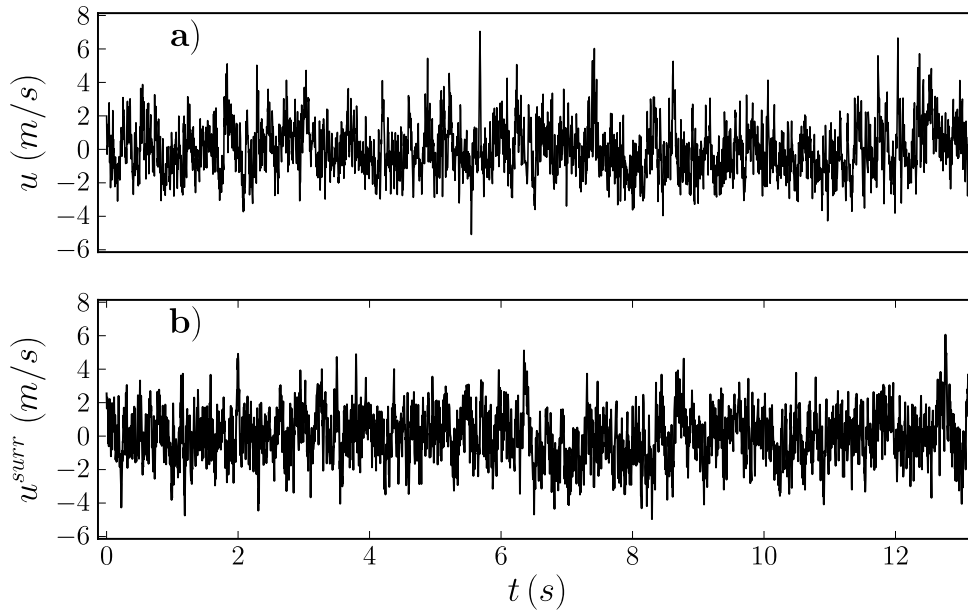


Figura 4.4: Uma série de turbulência de velocidade em **a)** e uma realização *surrogate* através do algoritmo de Theiler et al. (1992) em **b)**.

embaralhamento aplicado a uma série de turbulência é mostrado na figura 4.4.

Devido aos processos que resultam na intermitência observada em um sinal turbulento u , a dependência da função de escala de expoentes é não-linear e uma função não-linear de q , pode ser expressa como uma somatória envolvendo log-cumulantes na forma

$$\zeta_q^{turb} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{turb} \frac{q^k}{k!}. \quad (4.8)$$

Por outro lado, dado o fato de que a multifractalidade é perdida em uma realização *surrogate* (Figura 4.5), o sinal resultante u^{surr} é monofractal, assim, sua função de expoentes de escala de u^{surr} é linear e é dada por

$$\zeta_q^{surr} \cong c_1^{surr} q. \quad (4.9)$$

No entanto, devido ao fato do embaralhamento preservar o espectro de potência (Figura 4.6) é então correto considerar que $\zeta_2^{turb} = \zeta_2^{surr}$ nas escalas pertencentes ao intervalo inercial. Assim, da expansão em log-cumulantes (Equação 2.34, página 56), resulta

$$2c_1^{surr} = 2c_1^{turb} - 4c_2^{turb}/2 + 8c_3^{turb}/6 + \dots \quad (4.10)$$

Além disto, os log-cumulantes de ordem maior que 2 são consideravelmente menores que

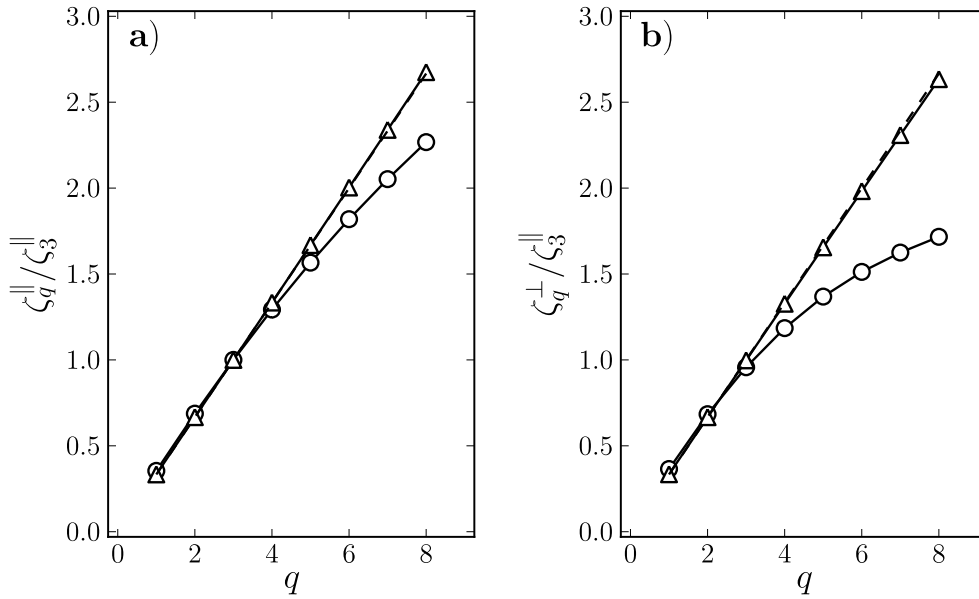


Figura 4.5: Expoentes de escala normalizados obtidos usando auto-similaridade estendida em uma série de turbulência (círculos) e em seu *surrogate* (triângulos) com o mesmo conjunto de dados usado na figura 4.3. Componente longitudinal em **a)** e em **b)**, a componente transversal.

c_2^{turb} , podendo-se então considerar

$$c_2^{turb} \cong c_1^{surr} - c_1^{turb}. \quad (4.11)$$

O coeficiente de intermitência pode então ser obtido com $\mu = -9c_2^{turb}$ e os log-cumulantes c_1^{turb} e c_1^{surr} determinados a partir do cumulante

$$C_1(r) \equiv \langle \ln |\delta_r u| \rangle = b_1 - c_1 \ln r, \quad (4.12)$$

para $u = u^{turb}, u^{surr}$.

A elegância do método está em obter uma estimativa bastante confiável de c_2^{turb} , mesmo para séries temporais curtas, unicamente estimando o primeiro cumulante para a série turbulenta e seu *surrogate*.

4.4 Não-invariância de escala e expansão em cumulantes

A metodologia sugerida por Basu et al. (2007) permite uma estimativa precisa para o coeficiente de intermitência em dados de anemometria sônica de baixa resolução temporal. Contudo, os autores reconhecem que há certa arbitrariedade de se definir o intervalo de esca-

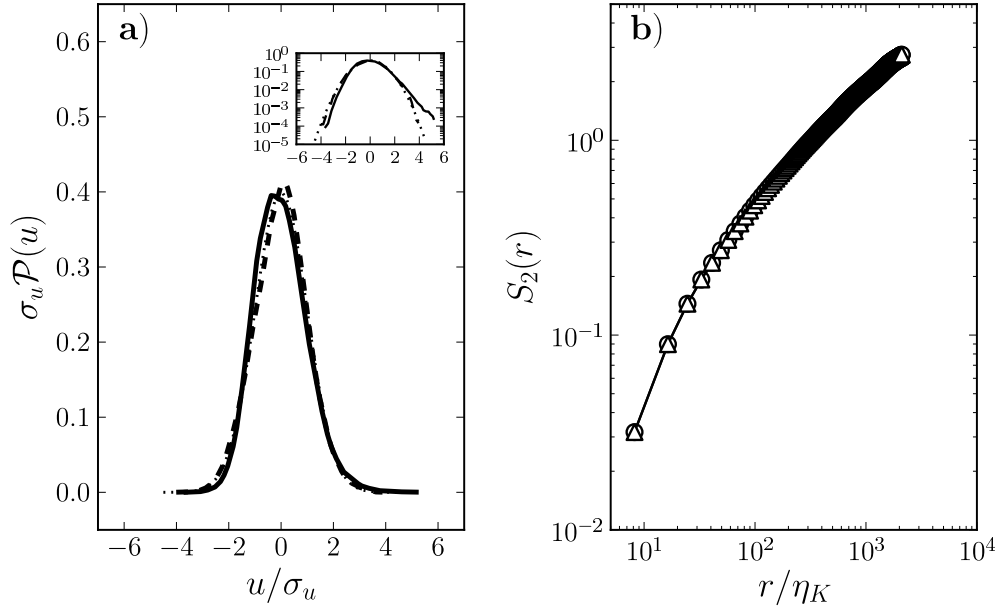


Figura 4.6: **a)** Distribuição de probabilidades da série da Figura 4.4 (linha contínua), seu *surrogate* (linha tracejada) e uma gaussiana (linha pontilhada). **b)** Função estrutura de segunda ordem para a série e seu *surrogate*.

las (intervalo inercial) para a estimativa dos cumulantes. Como observado na Seção 4.1, a lei de escala logarítmica descreve de maneira satisfatória o comportamento de $S_q(r)$ no intervalo inercial, podendo representar apropriadamente uma região mais extensa que o da lei de potência, aliviando um pouco o problema da determinação do início e fim do intervalo inercial. Nesta seção é proposto uma modificação na metodologia sugerida por Basu et al. (2007).

Como pode ser visto na figura 4.7, a lei de escala logarítmica fornece uma boa representação das leis de escala para os cumulantes. Para a lei de escala logarítmica, no intervalo inercial os cumulantes possuem a seguinte dependência

$$C_k(r) = b_k + c_k \ln \ln(r/\eta_K), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Os log-cumulantes e expoentes são em geral distintos dos obtidos via lei de escala, entretanto, quando se aplica a normalização por ζ_3 , como na ASL, os resultados tornam-se equivalentes. Portanto, o espectro de expoentes (na aproximação log-normal) pode ser escrito como

$$\zeta'_q = \zeta_q/\zeta_3 \cong \frac{c_1^{turb} q + c_2^{turb} q^2/2}{3c_1^{turb} + 9c_2^{turb}/2}, \quad (4.14)$$

onde $c_2^{turb} \cong c_1^{surr} - c_1^{turb}$, e, finalmente, um coeficiente de intermitência relativo pode ser estimado como

$$\mu = 2 - \zeta'_6. \quad (4.15)$$

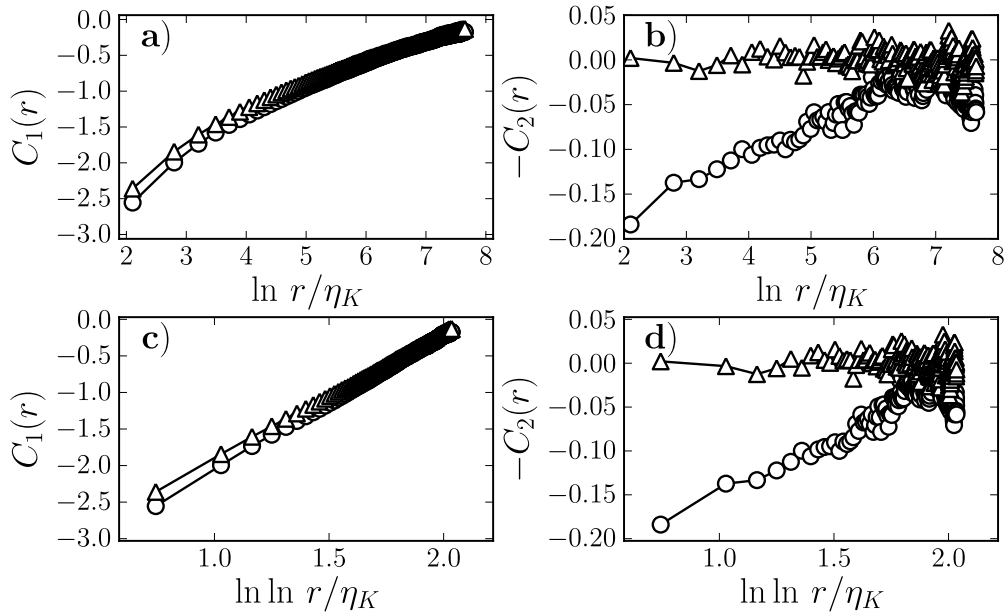


Figura 4.7: Primeiro e segundo cumulantes obtidos a partir dos dados de Kang, Chester e Meneveau (2003) para a componente longitudinal (círculos) e seu *surrogate* (triângulos). As figuras **a)** e **b)** correspondem a assumir leis de potência, enquanto as figuras **c)** e **d)** correspondem a assumir lei de escala logarítmica.

4.5 Aproximação telegráfica

Com o intuito de analisar a tendência à aglomeração em sinais turbulentos, Bershadskii et al. (2004) introduziram uma metodologia baseada na *Aproximação Telegráfica* de sinais, a qual é definida a partir de um sinal $X(t)$ como

$$X_{AT}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{X(t)}{|X(t)|} + 1 \right). \quad (4.16)$$

Na figura 4.8 se apresenta a aproximação telegráfica para uma série de turbulência.

A partir da aproximação telegráfica de $X(t)$, se define $n_\tau(t)$ como o número de vezes que o sinal muda entre os valores de 0 e 1 dividido pelo número total de pontos dentro da janela deslizando de tamanho τ . Introduz-se a uma variável dependente da escala τ , como

$$\Delta n_\tau(t) \equiv n_\tau(t) - \langle n_\tau \rangle. \quad (4.17)$$

A análise de ruídos estocásticos mostra que em geral $\langle (\Delta n_\tau)^2 \rangle^{1/2}$ se comporta como lei de escala (BERSHADSKII et al., 2004):

$$\langle (\Delta n_\tau)^2 \rangle^{1/2} \propto \tau^{-\mu_*}. \quad (4.18)$$

A partir da lei de dependência de $\langle (\Delta n_\tau)^2 \rangle^{1/2}$, se define um parâmetro μ_* , chamado

coeficiente de aglomeração.

Para um ruído branco gaussiano $\mu_* = 1/2$, enquanto para sinais de turbulência Sreenivasan e Bershadskii (2006a) e também Bershadskii et al. (2004) verificaram que μ_* depende do número de Reynolds na forma

$$\mu_*(\ln \text{Re}_\lambda) \cong a_0 + \frac{a_1}{\ln \text{Re}_\lambda}, \quad (4.19)$$

onde $a_0 \cong 0,1$ e $a_1 \cong 1,5$. Consequentemente,

$$\lim_{\text{Re}_\lambda \rightarrow \infty} \mu_*(\ln \text{Re}_\lambda) \cong 0,1.$$

A análise de Sreenivasan e Bershadskii (2006a) mostra que para Re_λ no intervalo de 200 a 20 000, o coeficiente μ_* é varia de 0,40 a 0,25. Este intervalo de Re_λ engloba o limite mínimo no qual a turbulência pode ser considerada bem desenvolvida, até os máximos valores de Re_λ observados na atmosfera.

Esta metodologia permite caracterizar sinais estocásticos ignorando as amplitudes das oscilações. Para sinais de turbulência é possível caracterizar claramente dois regimes distintos (Figura 4.9). Um regime correspondente aos regimes do intervalo inercial e de dissipação e as escalas externas ao domínio inercial, com $\mu_* = 1/2$ como um ruído branco, indicando oscilações desorganizadas nestas escalas. Além disso, a função $\langle (\Delta n_\tau)^2 \rangle^{1/2}$ é claramente uma lei de potência no intervalo inercial, sugerindo que a não-invariância de escala deve ser relacionada com as amplitudes das oscilações.

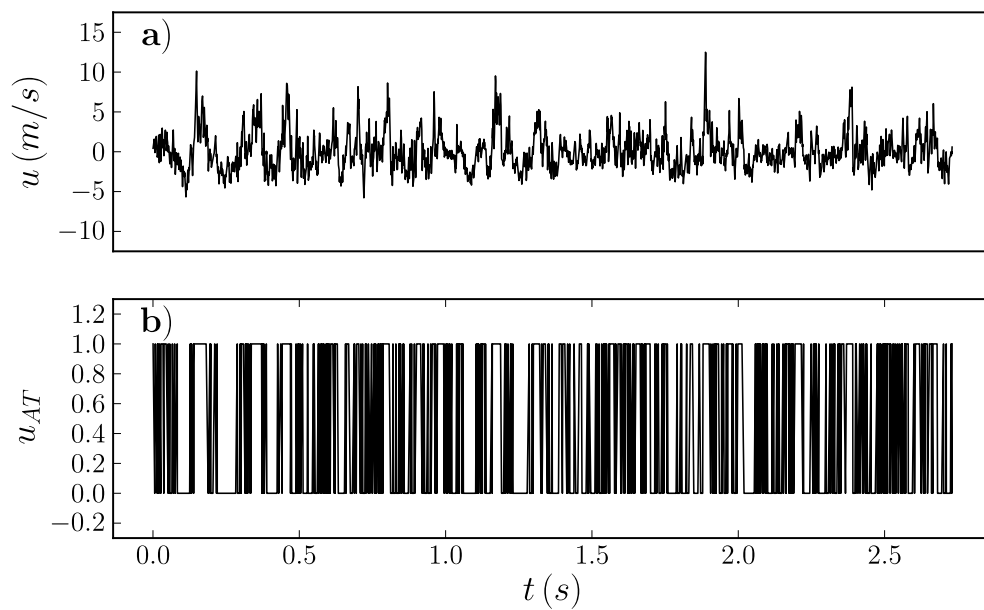


Figura 4.8: Aproximação telegráfica para um registro de velocidade obtido em um túnel de vento $Re_\lambda \cong 1300$.

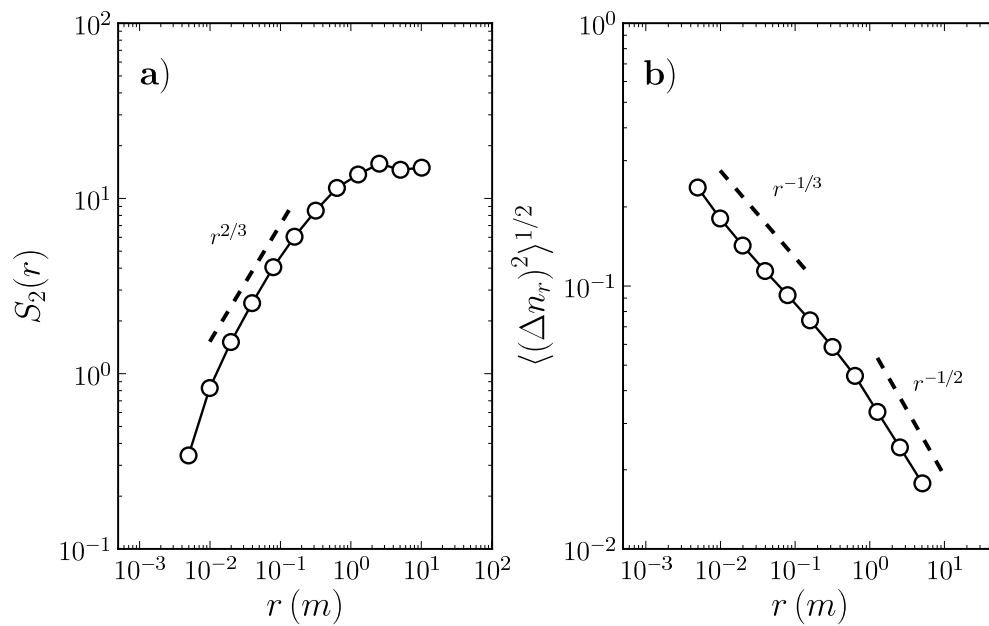


Figura 4.9: Comparação entre $S_2(r)$ e $\langle (\Delta n_\tau)^2 \rangle^{1/2}$ em para a série da figura 4.8. O intervalo inercial é apresentado sendo proporcional a $r^{2/3}$ em **a)** e proporcional a $r^{-1/3}$ em **b)**.

5 INTERMITÊNCIA NA CAMADA LIMITE ATMOSFÉRICA

A camada limite atmosférica consiste num sistema físico não-estacionário, complexo, com um número enorme de graus de liberdade. Sua complexidade pode ser distinta para diferentes variáveis, como é visto na figura 5.1.

5.1 Considerações sobre a construção de um ensemble físico de turbulência

Seguindo Kantz e Schreiber (2004), uma medida científica de qualquer tipo é somente útil se esta é reproduzível, a menos em princípio. No caso de medidas de séries temporais, reprodutibilidade está intimamente associada a dois conceitos distintos de estacionariedade. O primeiro, muitas vezes chamado de estacionariedade fraca, requer todos os parâmetros relevantes ao sistema físico sejam mantidos constante durante o tempo de medida. A partir desta exigência é possível presumir a existência de momentos estatísticos finitos. A necessidade de elaboração de um segundo conceito surge quando os parâmetros do sistema estudado são desconhecidos. Consequentemente, a noção de estacionariedade deve ser baseada inteiramente na informação contida na observação (KANTZ; SCHREIBER, 2004).

Considerando esta segunda classe, *não-estacionariedade* pode ser observada como transiências nos sinais, modulações nas amplitudes ou frequências, escalas integrais ou variâncias infinitas, intermitências, tendências ou sazonalidades entre outras possíveis formas (BENDAT; PIERSOL, 1971; MATASSINI, 2001; XIAO; BORGNAT; FLANDRIN, 2007; BORGNAT; FLANDRIN, 2009; WU et al., 2007; HUANG; WU, 2008). Assim, uma definição global de não-estacionariedade é sempre questionável, pois trata-se de uma *não-propriedade* (FLANDRIN, 1999).

A existência de uma escala integral finita muitas vezes não é considerada requerimento para estacionariedade, entretanto, é uma condição necessária para satisfazer a hipótese de ergodicidade (LUMLEY; PANOFSKY, 1964). Sinais fractais ou multifractais, por sua vez, são considerados não-estacionários no sentido que não possuem escala integral definida. Consequentemente, a determinação de parâmetros como o expoente de intermitência não deve depender da existência de uma escala característica na turbulência¹, desde que este é um parâmetro multifractal.

O objetivo aqui é esclarecer que a definição de estacionariedade a ser empregada neste estudo deve estar associada à constância dos parâmetros que controlam a dinâmica do sistema, ou seja, os forçantes. O sistema dinâmico que nos referimos aqui é o suposto processo em cas-

¹No modelo log-normal, por exemplo, uma escala integral é introduzida de maneira a manter a dimensão das funções estrutura para diferentes valores do expoente de intermitência.

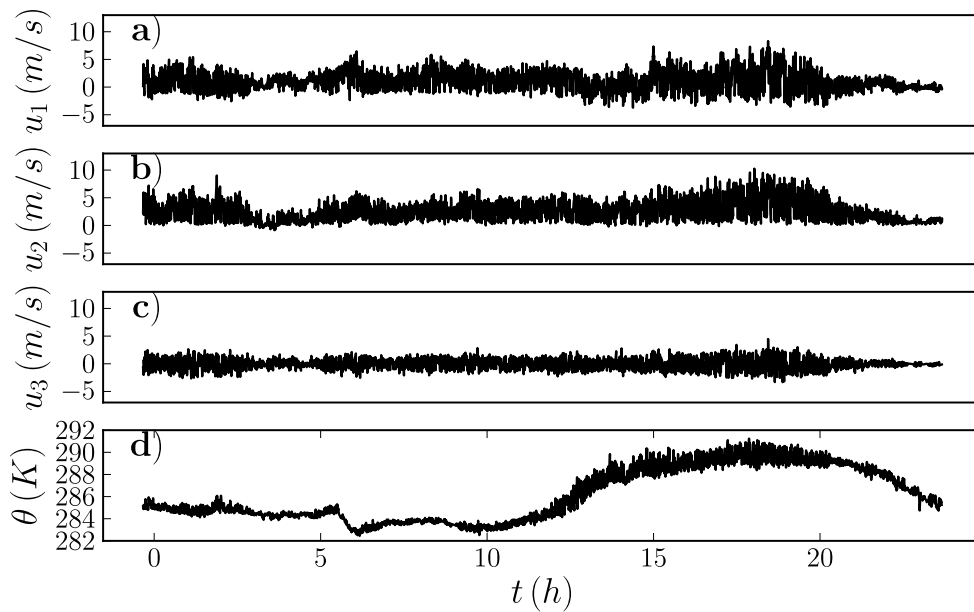


Figura 5.1: Exemplo da variabilidade diária nas três componentes de velocidade (sistema de referência do sensor) e da temperatura.

cata de fragmentação dos turbilhões, do qual, a forma não-linear da função ζ_q é interpretada como consequência direta da intermitência no processo de transferência de energia. A partir da analogia entre o formalismo multifractal e termodinâmica (FEIGENBAUM; JENSEN; PROCACCIA, 1986) se pode afirmar que determinação da função ζ_q é comparável à determinação do hamiltoniano do processo multiplicativo (ARNÉODO; BACRY; MUZY, 1995).

5.2 Um critério para estacionariedade de parâmetros da CLA

Como vimos, o conceito de estacionariedade é atribuído à diversos fatores. Poderia se afirmar que estacionariedade é uma propriedade que nunca pode ser positivamente estabelecida (KANTZ; SCHREIBER, 2004; MATASSINI, 2001). Contudo, é necessária uma definição operacional com aplicação prática. É introduzido aqui um método simples associado com conhecimento empírico prévio do sistema em estudo.

Considerando uma série temporal $X(t)$, com $0 < t < T$. Divide-se a série em K partes iguais e em cada fragmento k é calculada a média $\mu^{(k)}$ e o desvio-padrão $\sigma^{(k)}$. A partir dos K valores de $\mu^{(k)}$ e $\sigma^{(k)}$ é determinada por regressão-linear uma função linear para a média ($\mu + \mu't$) e uma para o desvio-padrão ($\sigma + \sigma't$). Este procedimento é equivalente a comparar

$X(t)$ ao seguinte modelo estocástico linear:

$$X'(t) = \mu + \mu't + (\sigma + \sigma't)\xi(t), \quad (5.1)$$

onde $\xi(t)$ é um processo estocástico com média zero, desvio-padrão unitário e estacionário no sentido proposto aqui. Define-se então as seguintes quantidades

$$\delta_\sigma = \frac{T|\sigma'|}{\sigma_0}, \quad \delta_\mu = \frac{T|\mu'|}{\sigma_0}, \quad (5.2)$$

onde σ_0 é o desvio-padrão de $X(t)$. Estas quantidades fornecem informação sobre variações nas amplitudes das flutuações e na tendência média, enquanto mantém um vínculo relativo entre elas (σ_0). Empiricamente observamos que tanto para $\delta_\sigma \leq 0,10$ como para $\delta_\mu \leq 0,10$ é difícil detectar visualmente tendências nas flutuações e na média, respectivamente. Adicionalmente, uma simples condição pode ser incluída para detectar intermitência global na série:

$$\frac{\text{máx}_k(\sigma^{(k)})}{\text{mín}_k(\sigma^{(k)})} > \text{fator.}$$

Obviamente este teste não garante as condições de estacionaridade dos parâmetros do sistema dinâmico em questão como discutido anteriormente, pois os parâmetros do sistema dinâmico em questão não conhecidos. Ainda assim, este teste relaciona de forma sutil e sugestiva a tendência média e variância. Em turbulência, a velocidade média U é relacionada com a energia cinética disponível, a qual por ventura poderá ser transformada em energia cinética turbulenta. Por outro lado, a variância σ_u^2 é propriamente a energia cinética turbulenta, a qual fatalmente será dissipada como calor num processo irreversível. Portanto, com este teste é possível analisar o equilíbrio entre estes dois fatores.

5.3 Descrição e tratamento dos dados de camada limite atmosférica

Os dados utilizados neste estudo são provenientes do projeto CT-HIDRO (2002–2004), obtidos num sítio experimental no município de Paraíso do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil. A torre micrometeorológica se localizava num terreno aproximadamente plano, sobre uma plantação de arroz. Foram analisados dados de velocidade e temperatura obtidos por um anemômetro sônico Campbell-3D operando a uma taxa de 16Hz, localizado a uma altura de 10m.

Foram selecionados 36 dias de dados entre 28/08/2003 e 12/10/2003. Os dados foram agrupados em arquivos correspondentes ao período de um dia. Janelas móveis de 2^{15} pontos (aproximadamente 34 minutos) com passos de 2^{12} pontos foram usados para localizar períodos estacionários. Para as componentes de velocidade (u, v, w), foram considerados os critérios δ_σ e δ_μ menores que 0,15, com $K = 8$. Para a temperatura foram somente considerado os casos

com $\delta_\sigma < 0,15$, a restrição relacionada a tendência média foi relaxada devido a grande variabilidade diurna. Séries intermitentes e transientes foram eliminadas utilizando como critério de exclusão $\max_k(\sigma^{(k)})/\min_k(\sigma^{(k)}) > 2,5$. Também foi aplicado um teste para eliminar séries com valores espúrios devidos a problemas de medidas e interferências eletrônicas no sensor.

Cada série considerada estacionária foi aplicada uma rotação planar com o objetivo de alinhar o sistema de referência com a direção do vento médio. Foram considerados somente séries com velocidade média $U \geq 2$ m/s. De maneira a selecionar casos correspondentes a turbulência bem desenvolvida, foram consideradas séries para as quais os expoentes das funções estrutura de segunda ordem ζ_2 das três componentes de velocidade diferiam no máximo por um fator de 10% de 2/3.

5.4 Resultados

Devido a exigências impostas na seleção de dados, somente uma pequena fração dos séries originais foi considerada para análise. A Tabela 5.1 mostra o número de casos por classe de estabilidade.

Tabela 5.1: Resultados da seleção de dados.

	Condição	Número de casos
S1	$z/L_O \leq -0,25$	0
S2	$-0,25 < z/L_O \leq -0,01$	9
S3	$ z/L_O \leq 0,01$	34
S4	$0,01 < z/L_O \leq 0,25$	15
S5	$z/L_O > 0,25$	2

Para a análise de intermitência somente foram consideradas as classes S2, S3 e S4 devido ao número de amostras de cada uma. Destas amostras 9 casos, tomados aleatoriamente de cada um dos casos, foram considerados para a estimativa do cumulantes e do coeficiente de aglomeração. Duas situações foram consideradas, lei de potência e lei de escala logarítmica. Os resultados são apresentados nas Tabelas 5.2 e 5.3.

De forma geral não se observa uma dependência sistemática na condição de estabilidade. Contudo a incerteza relativa é apreciavelmente grande em todas as estimativas, sugerindo que a estabilidade atmosférica sozinha não é o mecanismo mais importante em questão.

Primeiramente analisando a Tabela 5.2, é possível notar que para a componente longitudinal u , os valores estimados relativos $\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3$ estão em bom acordo com os valores encontrados na literatura ($\approx 0,70$) (FRISCH, 1995). Entretanto, analisando separadamente c_1 e c_2 , se observa que os valores médios de c_1 são pouco menos que os valores clássicos conhecidos de turbulência em túnel de vento ($\approx 0,38$) e o c_2 consideravelmente maior (em módulo) que os valores clássicos de laboratório ($\approx -0,025$). As componentes transversais não apresentam

Tabela 5.2: Estimativa dos parâmetros caracterizando o intervalo inercial: Utilizando lei de potência.

	u	v	w	θ
S2	$c_1 = 0,362 \pm 0,024$	$c_1 = 0,349 \pm 0,021$	$c_1 = 0,393 \pm 0,012$	$c_1 = 0,467 \pm 0,090$
	$\hat{c}_2 = -0,030 \pm 0,009$	$\hat{c}_2 = -0,031 \pm 0,008$	$\hat{c}_2 = -0,040 \pm 0,009$	$\hat{c}_2 = -0,113 \pm 0,076$
	$\hat{\zeta}_2 = 0,664 \pm 0,039$	$\hat{\zeta}_2 = 0,636 \pm 0,030$	$\hat{\zeta}_2 = 0,706 \pm 0,020$	$\hat{\zeta}_2 = 0,707 \pm 0,044$
	$\hat{\zeta}_3 = 0,952 \pm 0,057$	$\hat{\zeta}_3 = 0,908 \pm 0,036$	$\hat{\zeta}_3 = 0,999 \pm 0,035$	$\hat{\zeta}_3 = 0,890 \pm 0,097$
	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,698$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,701$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,706$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,794$
	$\alpha = 0,259 \pm 0,015$	$\alpha = 0,303 \pm 0,027$	$\alpha = 0,393 \pm 0,016$	$\alpha = 0,310 \pm 0,020$
S3	$c_1 = 0,363 \pm 0,017$	$c_1 = 0,357 \pm 0,028$	$c_1 = 0,386 \pm 0,013$	$c_1 = 0,265 \pm 0,162$
	$\hat{c}_2 = -0,043 \pm 0,010$	$\hat{c}_2 = -0,034 \pm 0,011$	$\hat{c}_2 = -0,041 \pm 0,006$	$\hat{c}_2 = -0,115 \pm 0,042$
	$\hat{\zeta}_2 = 0,639 \pm 0,045$	$\hat{\zeta}_2 = 0,647 \pm 0,050$	$\hat{\zeta}_2 = 0,690 \pm 0,027$	$\hat{\zeta}_2 = 0,301 \pm 0,253$
	$\hat{\zeta}_3 = 0,894 \pm 0,079$	$\hat{\zeta}_3 = 0,920 \pm 0,076$	$\hat{\zeta}_3 = 0,974 \pm 0,044$	$\hat{\zeta}_3 = 0,279 \pm 0,331$
	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,715$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,703$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,708$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 1,078$
	$\alpha = 0,299 \pm 0,020$	$\alpha = 0,304 \pm 0,056$	$\alpha = 0,384 \pm 0,019$	$\alpha = 0,182 \pm 0,068$
S4	$c_1 = 0,367 \pm 0,020$	$c_1 = 0,367 \pm 0,017$	$c_1 = 0,402 \pm 0,011$	$c_1 = 0,380 \pm 0,115$
	$\hat{c}_2 = -0,037 \pm 0,009$	$\hat{c}_2 = -0,037 \pm 0,005$	$\hat{c}_2 = -0,052 \pm 0,004$	$\hat{c}_2 = -0,118 \pm 0,040$
	$\hat{\zeta}_2 = 0,661 \pm 0,050$	$\hat{\zeta}_2 = 0,659 \pm 0,026$	$\hat{\zeta}_2 = 0,699 \pm 0,024$	$\hat{\zeta}_2 = 0,523 \pm 0,186$
	$\hat{\zeta}_3 = 0,936 \pm 0,086$	$\hat{\zeta}_3 = 0,934 \pm 0,035$	$\hat{\zeta}_3 = 0,970 \pm 0,038$	$\hat{\zeta}_3 = 0,608 \pm 0,263$
	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,706$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,706$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,721$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,861$
	$\alpha = 0,280 \pm 0,012$	$\alpha = 0,270 \pm 0,017$	$\alpha = 0,336 \pm 0,010$	$\alpha = 0,247 \pm 0,043$

inter-dependência nem para os valores dos log-cumulantes nem para o expoente de aglomeração. Os valores de c_1 e c_2 para a componente v são comparáveis aos da componente u , enquanto a componente w apresenta valores maiores para as duas quantidades.

Os resultados da análise utilizando lei de escala logarítmica, apresentados na Tabela 5.3, apresentaram menores erros relativos nos ajustes. Contudo os resultados são essencialmente os mesmos quanto ao comportamento.

De acordo com os resultados da Tabela 5.2, para a componente u na condição de estabilidade aproximadamente neutra (S3), o valor para o coeficiente de intermitência é $\mu = -9c_2 \approx 0,39$, que é consideravelmente maior que o resultado clássico de turbulência de laboratório ($\approx 0,25$).

Na figura 5.2 é apresentada uma comparação de estimativas da função de expoentes de escala $\zeta(q)$ obtida por ASE e pela análise multifractal baseada nos Coeficientes Dominantes de Ondaletas. Através do método dos cumulantes o valor de $\mu \approx 0,38$, que é próximo da estimativa $\mu \approx 0,40$ obtida pela técnica Coeficientes Dominantes de Ondaleta. Por outro lado, o coeficiente de intermitência estimado por ASE (observando a curva de $\zeta(q)$ e usando

Tabela 5.3: Estimativa dos parâmetros caracterizando o intervalo inercial: Utilizando lei logarítmica.

	u	v	w	θ
S2	$c_1 = 2,405 \pm 0,425$	$c_1 = 2,345 \pm 0,331$	$c_1 = 2,810 \pm 0,096$	$c_1 = 3,161 \pm 0,348$
	$\hat{c}_2 = -0,196 \pm 0,072$	$\hat{c}_2 = -0,204 \pm 0,066$	$\hat{c}_2 = -0,284 \pm 0,067$	$\hat{c}_2 = -0,735 \pm 0,443$
	$\hat{\zeta}_2 = 4,418 \pm 0,774$	$\hat{\zeta}_2 = 4,282 \pm 0,538$	$\hat{\zeta}_2 = 5,053 \pm 0,091$	$\hat{\zeta}_2 = 4,851 \pm 0,275$
	$\hat{\zeta}_3 = 6,332 \pm 1,117$	$\hat{\zeta}_3 = 6,117 \pm 0,718$	$\hat{\zeta}_3 = 7,155 \pm 0,131$	$\hat{\zeta}_3 = 6,173 \pm 1,018$
	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,698$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,700$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,706$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,786$
$\alpha = 0,259 \pm 0,015$	$\alpha = 0,303 \pm 0,027$	$\alpha = 0,393 \pm 0,016$	$\alpha = 0,310 \pm 0,020$	
S3	$c_1 = 2,482 \pm 0,240$	$c_1 = 2,294 \pm 0,358$	$c_1 = 2,714 \pm 0,208$	$c_1 = 1,689 \pm 0,909$
	$\hat{c}_2 = -0,298 \pm 0,083$	$\hat{c}_2 = -0,218 \pm 0,088$	$\hat{c}_2 = -0,285 \pm 0,049$	$\hat{c}_2 = -0,746 \pm 0,215$
	$\hat{\zeta}_2 = 4,369 \pm 0,541$	$\hat{\zeta}_2 = 4,152 \pm 0,618$	$\hat{\zeta}_2 = 4,858 \pm 0,353$	$\hat{\zeta}_2 = 1,887 \pm 1,481$
	$\hat{\zeta}_3 = 6,107 \pm 0,881$	$\hat{\zeta}_3 = 5,902 \pm 0,876$	$\hat{\zeta}_3 = 6,860 \pm 0,490$	$\hat{\zeta}_3 = 1,713 \pm 1,998$
	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,715$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,704$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,708$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 1,102$
$\alpha = 0,299 \pm 0,020$	$\alpha = 0,304 \pm 0,056$	$\alpha = 0,384 \pm 0,019$	$\alpha = 0,182 \pm 0,068$	
S4	$c_1 = 2,582 \pm 0,205$	$c_1 = 2,641 \pm 0,126$	$c_1 = 2,829 \pm 0,095$	$c_1 = 2,635 \pm 0,848$
	$\hat{c}_2 = -0,252 \pm 0,057$	$\hat{c}_2 = -0,265 \pm 0,046$	$\hat{c}_2 = -0,370 \pm 0,020$	$\hat{c}_2 = -0,808 \pm 0,285$
	$\hat{\zeta}_2 = 4,659 \pm 0,484$	$\hat{\zeta}_2 = 4,753 \pm 0,212$	$\hat{\zeta}_2 = 4,917 \pm 0,197$	$\hat{\zeta}_2 = 3,654 \pm 1,375$
	$\hat{\zeta}_3 = 6,611 \pm 0,788$	$\hat{\zeta}_3 = 6,731 \pm 0,308$	$\hat{\zeta}_3 = 6,821 \pm 0,305$	$\hat{\zeta}_3 = 4,269 \pm 1,921$
	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,705$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,706$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,721$	$\hat{\zeta}_2/\hat{\zeta}_3 = 0,856$
$\alpha = 0,280 \pm 0,012$	$\alpha = 0,270 \pm 0,017$	$\alpha = 0,336 \pm 0,010$	$\alpha = 0,247 \pm 0,043$	

$\mu = 2 - \zeta(q = 6)$ é de apenas $\mu \approx 0,15$. Ou seja, muito menor do que os valores obtidos pela técnica de cumulantes e de ondaletas. Embora tanto as estimativas do método dos cumulantes quanto a do de ondaletas não são normalizadas, os resultados sugerem que as estimativas o método amplamente difundido de auto-similaridade estendida tente a suprimir a variabilidade dos parâmetros de intermitência na CLA.

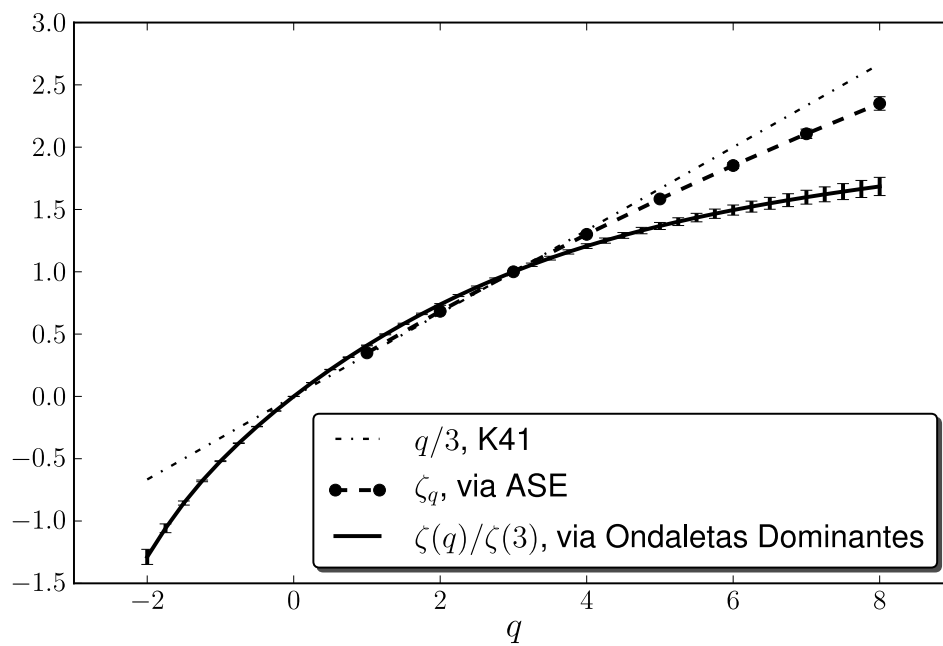


Figura 5.2: Comparação entre estimativas baseadas em funções estrutura e Auto-Similaridade Estendida com método da Coeficientes Dominantes de Ondaletas para uma série de velocidade longitudinal na Camada Limite Atmosférica com condição de estabilidade aproximadamente neutra (caso S3). Observe que a diferença entre as estimativas dos métodos é muito maior que barra de erros obtida através do algoritmo de reamostragem multifractal (Apêndice B.2) de Paluš (2008). A barra de erros indica o desvio padrão da estimativa baseada em um ensemble de 256 realizações.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Como observado por Lesieur (2008), ao longo da história do estudo de turbulência, duas abordagens relativas ao seu entendimento se destacam. A primeira, a de Teoria Estatística de Turbulência, que tenta descrever a evolução de quantidades estatísticas no escoamento, a qual seguiu o caminho trilhado por G. I. Taylor e A. N. Kolmogorov, considerando a fenomenologia de cascatas. E a segunda, a de Coerência e Caos, a qual considera turbulência de um ponto de vista determinístico, estudando o comportamento de sistemas dinâmicos e estabilidade, tratando a turbulência como um estado de coerência imerso em caos.

O estudo abordado no presente trabalho mantém tanto a linguagem como o formalismo referentes aos introduzidos pela descrição estatística da turbulência. Como conclusão, entretanto, os resultados indicam que o fenômeno de intermitência depende de macro-parâmetros, externos ao intervalo inercial. Desta forma, apontando que o conceito estrito de cascata de Richardson-Kolmogorov não é totalmente correto; sugerindo assim, a possível permanência de mecanismos dinâmicos no processo, sem perda de memória.

6.1 Conclusões gerais

Este trabalho apresenta um estudo detalhado que investiga diferentes aspectos do intervalo inercial em turbulência bem desenvolvida.

Na primeira parte do estudo são revisadas as hipóteses que deram origem ao conceito de invariância de escala em turbulência bem desenvolvida, tal conceito forma a base da teoria de Kolmogorov de 1941. Investiga-se a teoria clássica K41 sob dois aspectos. Primeiro, o processo de cascata de energia se dá de maneira intermitente, ocasionando leis de escalas anômalas. Segundo, devido a efeitos de finitude do número de Reynolds ou influência dos mecanismos forçantes externos, o estado de turbulência completamente desenvolvida não é alcançado, resultando em não-invariância de escala no intervalo inercial.

O formalismo fractal é revisto em termos de sinais fractais e multifractais. Os modelos log-normal e log-Poisson de intermitência são então apresentados em termos do formalismo multifractal. Um formalismo de análise multifractal baseado em ondaletas dominantes (ABRY; JAFFARD; LASHERMES, 2004; JAFFARD; LASHERMES; ABRY, 2007), que permite a determinação do espectro multifractal de uma maneira precisa, é estudado e comparado com o método das funções estrutura, tradicionalmente usado no estudo de turbulência. É verificado também, que as estimativas do espectro dos expoentes, tanto com o emprego de funções estrutura como ondaletas dominantes, são melhoradas com o emprego de um método de reamostragem multifractal, recentemente introduzido (PALUŠ, 2008).

Sinais longitudinais de velocidade obtidos em túneis de vento são analisados. Entre as três possíveis formas de leis de escala descritas na literatura, a lei de escala logarítmica, introduzida por Sreenivasan e Bershadskii (2005, 2006b), Bershadskii (2007) é observada descrever melhor o intervalo inercial. Os expoentes ζ_q resultantes da lei de escala logarítmica são diferentes dos valores encontrados na literatura e são dependentes do escoamento. Entretanto, os expoentes normalizados ζ_q/ζ_3 estão de acordo com os valores obtidos considerando as hipóteses de Auto-Similaridade Estendida.

Uma consequência importante da não-invariância de escala no intervalo inercial pode ser obtida a partir da aplicação da relação de isotropia e incompressibilidade para tensores de segunda ordem (Equação 4.4, página 73). Desta equação resulta a seguinte relação no caso de uma lei de escala logarítmica

$$\frac{S_2^\perp}{S_2^\parallel} = \left(1 + \frac{\zeta_2^\parallel}{2} \frac{1}{\ln r/\eta_K}\right).$$

Como consequência, observa-se uma leve dependência em r , ao invés do valor constante $(1 + \zeta_2^\parallel/2)$. Este resultado é compatível com as observações. Esta constatação fornece uma explicação parcial para a diferença dos expoentes ζ_2^\parallel e ζ_2^\perp , mais importante, este resultado independe de considerações de anisotropia nas pequenas escalas como sugeridos na literatura (BIFERALE; PROCACCIA, 2005). Contudo, não é possível generalizar este raciocínio para qualquer momento q , desde que relações isotrópicas e incompressíveis não são conhecidas para funções estrutura de ordem arbitrária.

A segunda parte deste trabalho é voltada à análise de dados de Camada Limite Atmosférica. A metodologia proposta por Basu et al. (2007) foi modificada para incluir leis de escala logarítmica. Essa modificação permite a determinação do coeficiente de intermitência de uma maneira mais precisa, isto é, com erro relativo menor no ajuste do intervalo inercial. Essa metodologia é comparada com a determinação do coeficiente de intermitência através de Ondas Dominantes e é verificada ser precisa, de fácil implementação e rápida. Desta forma, aplicável a grandes conjuntos de dados.

Para se estudar a possível influência da condição de estabilidade nas pequenas escalas da turbulência, foi aplicado um critério de estacionariedade e qualidade de dados. Este procedimento teve como objetivo selecionar períodos em que os forçantes externos pudessem ser considerados aproximadamente estacionários durante o período de observação, e não propriamente as séries temporais.

Os dados, originalmente organizados por dias, foram analisados através de janelas móveis de 2^{15} pontos de dados, com passos de 2^{12} . Um critério de estacionariedade foi aplicado individualmente a u , v , w e θ , e só foram selecionados os períodos nos quais as quatro variáveis foram consideradas estacionárias, portanto candidatas a um conjunto ergódico. A etapa seguinte foi classificar cada série temporal de acordo com a classe de estabilidade. Devido à possível redundância presente nas séries ocasionada pela média-móvel, somente uma parte dos elementos de cada classe de estabilidade foram considerados. Os quais foram escolhidos

de maneira aleatória com a finalidade de minimizar a redundância existente.

Esta metodologia de classificação de dados foi realizada com o objetivo de construir um ensemble físico de acordo com a estabilidade atmosférica. As análises mostram que a componente u da velocidade é mais intermitente que os resultados conhecidos de laboratório, embora é notável uma grande incerteza em torno dos valores médios, não há dependência consistente na classe de estabilidade. Para as componentes v e w e a temperatura θ , os parâmetros c_1 , c_2 , ζ_2 , ζ_3 , ζ_2/ζ_3 e μ_* mudam consistentemente, porém não é possível encontrar um padrão. Tal evidência sugere que a classificação apenas por classe de estabilidade não é um bom critério para a construção de um ensemble físico.

Estes resultados concordam qualitativamente com a simulação numérica de Ishihara, Gotoh e Kaneda (2009), em que as estatísticas de u são possivelmente universais, entretanto é difícil afirmar algo para as componentes transversais.

6.2 Trabalhos futuros

Como continuação do trabalho, propõe-se fazer um estudo detalhado sobre o conjunto de constantes κ_q e sobre os expoentes ζ_q , definidos a partir das funções estruturas normalizadas, na forma

$$\frac{S_q(r)}{(\sigma_u)^q} = \kappa_q (\ln r / \eta_K)^{\zeta_q}. \quad (6.1)$$

Estes parâmetros podem ser aplicados em estudos aerodinâmicos e de poluição. A análise realizada mostra que estes parâmetros podem depender da geometria e do número de Reynolds (Figura 4.2), portanto são necessários experimentos mais específicos para entender a dependência nestes parâmetros.

Neste ponto é importante salientar que no término deste trabalho, o professor Sukanta Basu gentilmente disponibilizou um conjunto de dados extremamente controlados, proveniente de um experimento antártico. O conjunto apresenta dados de ótima qualidade que, além do mais, corresponde a condições atmosféricas muito diferentes das analisadas aqui. Desta forma, com a inclusão deste conjunto de dados pretende-se enriquecer a análise desenvolvida no presente estudo.

Apêndice A – Transformada em ondaletas

A.1 Transformada contínua

A transformada em ondaletas é basicamente uma convolução de um sinal ou função com ampliações de função analisadora ψ , que possui forma ondulatória localizada. Para uma função $f(t)$ com energia finita, a transformada contínua é definida como (MALLAT, 1999)

$$T_\psi[f](a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi_{a,b}^*(t)dt, \quad t, b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\psi_{a,b}(t) \equiv \frac{1}{a}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (\text{A.2})$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 1. \quad (\text{A.3})$$

Na definição (A.2) é empregada uma normalização L_1 , da qual resulta o fator $1/a$, pois na análise multifractal o interesse está nos valores das amplitudes. Diferentemente, quando o interesse está na distribuição de energia de um sinal, tradicionalmente é empregada a normalização L_2 , a qual resultaria em um pré-fator $1/\sqrt{a}$ na equação (A.2).

Uma ondaleta pode ser caracterizada pelo número finito de momentos,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)t^m dt = 0 \quad m \leq M_\psi. \quad (\text{A.4})$$

onde M_ψ é o número de momentos nulos.

A transformada inversa é definida como

$$f(t) = C_\psi^{-1} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} T_\psi[f](a, b)\psi_{a,b}(t)\frac{da db}{a^2}, \quad (\text{A.5})$$

onde

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Transformada discreta

É possível também definir uma base ortogonal a partir certas formas de ondaletas, através de escalas diádicas (DAUBECHIES, 1992; MALLAT, 1999; NIELSEN, 1998),

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^{J_0}-1} c_{J_0,k} \phi_{J_0,k}(t) + \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.7})$$

onde ϕ é a função de escala, e

$$\psi_{j,k}(t) \equiv 2^{-j} \psi(2^j t - k), \quad \phi_{j,k}(t) \equiv 2^{-j} \phi(2^j t - k), \quad (\text{A.8})$$

para uma normalização em L_1 .

Os coeficientes de aproximação são definidos como

$$c_{j,k} = \langle \phi_{j,k} | f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \phi_{j,k}(t) dt, \quad (\text{A.9})$$

enquanto os coeficientes de detalhe são definidos como

$$d_{j,k} = \langle \psi_{j,k} | f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (\text{A.10})$$

Para aplicações em turbulência veja Farge (1992) e Meneveau (1991).

Apêndice B – Algoritmos de reamostragem de sinais

B.1 Transformação iso-espectral

Este algoritmo foi introduzido por Theiler et al. (1991), Prichard e Theiler (1994). Consiste em se fazer uma aleatorização nas fases da transformada de Fourier de um dado sinal, de maneira a manter inalterada a sua densidade espectral. Para isto, as fases aleatórias atribuídas deverão ser anti-simétricas: $\varphi(\omega) = \varphi(-\omega)$. A aleatorização da fase é realizada através de uma distribuição uniforme dada no intervalo $[0, 2\pi[$. Desta forma, para um sinal $X(t)$, o seu *surrogate* iso-espectral é dado por

$$X^{surr}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{X(t)\} \exp[i\varphi(\omega)]\}. \quad (\text{B.1})$$

B.2 Reamostragem multifractal baseada em cascata discreta de ondaletas

Um dos problemas associados a distinção do melhor modelo estatístico para turbulência entre log-normal e log-Poisson é o fato de que o erro associado à medida dos expoentes é maior que a diferença entre os modelos. Contudo, propriamente o erro associado à medida é muitas vezes negligenciado, tornando incompleta a análise.

Em alguns casos é possível usar uma grande coleção de dados, como um ensemble real, para fazer a inferência estatística. Contudo, esses casos obviamente raros. Por essa razão foram criadas técnicas de estimativas dos intervalos de confiança através de procedimentos baseados em reamostragem dos dados, conhecidas na literatura como *Bootstrap Methods*.

A dificuldade do método está em criar um grande ensemble de séries que reproduzem as *características desejadas* da série original e, ao mesmo tempo, gerando uma grande variedade na amostragem (ANGELINI et al., 2005). Um método, baseado no processo de cascata de ondaletas (ARNÉODO; BACRY; MUZY, 1998), recentemente foi introduzido por Paluš (2008). O estudo mostrou que este novo método conserva a cascata de informação das grandes para as pequenas escalas, em outras palavras, mantém as estruturas não-lineares entendidas como propriedades multifractais.

O procedimento sugerido por Paluš (2008) consiste em considerar um sinal $\{X(t)\}$, $t = 1, \dots, N$, $N = 2^n$ decomposto em termos dos coeficientes discretos de ondaletas $d_{j,k}$. Para cada escala $j \geq 2$, define-se os multiplicadores $M_{j,k}$ como

$$M_{j,2k} = d_{j,2k}/d_{j-1,k}, \quad M_{j,2k+1} = d_{j,2k+1}/d_{j-1,k}. \quad (\text{B.2})$$

Desta forma, mantendo inalterados os coeficientes $d_{0,0}$, $d_{1,0}$ e $d_{1,1}$, os coeficientes de todas as escalas mas finas são construídos recursivamente de acordo com

$$\tilde{d}_{j,2k} = \mu_{j,2k}/\tilde{d}_{j-1,k}, \quad \tilde{d}_{j,2k+1} = \mu_{j,2k+1}/\tilde{d}_{j-1,k}, \quad (\text{B.3})$$

onde os multiplicadores $\mu_{j,k}$ para cada escala $j \geq 2$ são obtidos como permutações aleatórias dos 2^j coeficientes $M_{j,k}$ em cada escala j . Finalmente, o novo conjunto de coeficientes $\{\hat{d}_{j,k}\}$ é obtido rearranjando os coeficientes originais $\{d_{j,k}\}$ de acordo com a ordem crescente (em cada escala j) dos coeficientes $\{\tilde{d}_{j,k}\}$. Desta forma, com a aplicação da transformada inversa de ondaletas nos coeficientes $\{\hat{d}_{j,k}\}$ é obtida uma série *surrogate*

$$\hat{X}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j} \hat{d}_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (\text{B.4})$$

que supostamente preserva as características multifractais da série original $X(t)$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRY, P.; JAFFARD, S.; LASHERMES, B. Revisiting scaling, multifractal, and multiplicative cascades with the wavelet leader lens. In: **Proc. SPIE**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 5607, p. 103–117.

AIVALIS, K.; SREENIVASAN, K.; TSUJI, Y.; KLEWICKI, J.; BILTOFT, C. Temperature structure functions for air flow over moderately heated ground. **Physics of Fluids**, v. 14, p. 2439, 2002.

ANGELINI, C.; CAVA, D.; KATUL, G.; VIDAKOVIC, B. Resampling hierarchical processes in the wavelet domain: A case study using atmospheric turbulence. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 207, n. 1-2, p. 24–40, 2005.

ANSELMET, F.; GAGNE, Y.; HOPFINGER, E.; ANTONIA, R. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 140, n. -1, p. 63–89, 1984.

ANTONIA, R.; BURATTINI, P. Approach to the 4/5 law in homogeneous isotropic turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, 550, p. 175–184, 2006.

ANTONIA, R.; PEARSON, B.; ZHOU, T. Reynolds number dependence of second-order velocity structure functions. **Physics of Fluids**, v. 12, p. 3000, 2000.

ARAD, I.; DHRUVA, B.; KURIEN, S.; L'VOV, V.; PROCACCIA, I.; SREENIVASAN, K. Extraction of anisotropic contributions in turbulent flows. **Physical review letters**, APS, v. 81, n. 24, p. 5330–5333, 1998. ISSN 1079-7114.

ARGOUL, F.; ARNEODO, A.; GRASSEAU, G.; GAGNE, Y.; HOPFINGER, E.; FRISCH, U. Wavelet analysis of turbulence reveals the multifractal nature of the Richardson cascade. Nature Publishing Group, 1989.

ARNEODO, A.; AUDIT, B.; BACRY, E.; MANNEVILLE, S.; MUZY, J.; ROUX, S. Thermodynamics of fractal signals based on wavelet analysis: application to fully developed turbulence data and dna sequences. **Physica A**, Elsevier, v. 254, n. 1-2, p. 24–45, 1998.

ARNÉODO, A.; BACRY, E.; MUZY, J. F. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. **Physica A - Statistical Mechanics and its Applications**, v. 213, p. 232–275, jan 1995.

_____. Random cascades on wavelet dyadic trees. **Journal of Mathematical Physics**, AIP, v. 39, p. 4142, 1998.

ARNÉODO, A.; BAUDET, C.; BELIN, F.; BENZI, R.; CASTAING, B.; CHABAUD, B.; CHAVARRIA, R.; CILIBERTO, S.; CAMUSSI, R.; CHILLÁ, F. et al. Structure functions in turbulence, in various flow configurations, at Reynolds number between 30 and 5000, using extended self-similarity. **Europhysics Letters**, v. 34, n. 6, p. 411–416, 1996.

ARNÉODO, A.; BENZI, R.; BERG, J.; BIFERALE, L.; BODENSCHATZ, E.; BUSSE, A.; CALZAVARINI, E.; CASTAING, B.; CENCINI, M.; CHEVILLARD, L. et al. Universal in-

intermittent properties of particle trajectories in highly turbulent flows. **Physical review letters**, APS, v. 100, n. 25, p. 254504, 2008.

ARNÉODO, A.; MANNEVILLE, S.; MUZY, J. Towards log-normal statistics in high Reynolds number turbulence. **The European Physical Journal B-Condensed Matter**, Springer, v. 1, n. 1, p. 129–140, 1998.

ARNÉODO, A.; MANNEVILLE, S.; MUZY, J.; ROUX, S. Revealing a lognormal cascading process in turbulent velocity statistics with wavelet analysis. **Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 357, n. 1760, p. 2415–2438, 1999.

BARABÁSI, A. L.; VICSEK, T. Multifractality of self-affine fractals. **Physical Review A**, APS, v. 44, n. 4, p. 2730–2733, 1991.

BARENBLATT, G. I.; GOLDENFELD, N. Does fully developed turbulence exist? reynolds number independence versus asymptotic covariance. **Physics of Fluids**, AIP, v. 7, n. 12, p. 3078–3082, 1995.

BARRAL, J.; SEURET, S. From multifractal measures to multifractal wavelet series. **Journal of Fourier Analysis and Applications**, Springer, v. 11, n. 5, p. 589–614, 2005.

BASU, S.; FOUFOULA-GEORGIU, E.; LASHERMES, B.; ARNÉODO, A. Estimating intermittency exponent in neutrally stratified atmospheric surface layer flows: A robust framework based on magnitude cumulant and surrogate analyses. **Physics of Fluids**, AIP, v. 19, p. 115102, 2007.

BEAULAC, S.; MYDLARSKI, L. Inverse structure functions of temperature in grid-generated turbulence. **Physics of Fluids**, v. 16, p. 2126, 2004.

BENDAT, J.; PIERSOL, A. **Random data: analysis and measurement procedures**. [S.l.]: Wiley, 1971.

BENZI, R.; BIFERALE, L.; CILIBERTO, S.; STRUGLIA, M.; TRIPICCIÓN, R. Generalized scaling in fully developed turbulence. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 96, n. 1-4, p. 162–181, 1996.

BENZI, R.; BIFERALE, L.; CRISANTI, A.; PALADIN, G.; VERGASSOLA, M.; VULPIANI, A. A random process for the construction of multifractal fields. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 65, n. 4, p. 352–358, 1993.

BENZI, R.; CILIBERTO, S.; TRIPICCIÓN, R.; BAUDET, C.; MASSAIOLI, F.; SUCCI, S. Extended self-similarity in turbulent flows. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 48, n. 1, p. R29–R32, Jul 1993.

BENZI, R.; PALADIN, G.; PARISI, G.; VULPIANI, A. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, Institute of Physics Publishing, v. 17, p. 3521–3531, 1984.

BERSHADSKII, A. Beyond scaling and locality in turbulence. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 128, n. 3, p. 721–739, 2007.

BERSHADSKII, A.; NIEMELA, J. J.; PRASKOVSKY, A.; SREENIVASAN, K. R. “clustering” and intermittency of temperature fluctuations in turbulent convection. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 69, n. 5, p. 056314, May 2004.

BERSHADSKII, A.; SREENIVASAN, K. Extended self-similarity of the small-scale cosmic microwave background anisotropy. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 319, n. 1-2, p. 21–23, 2003.

BIFERALE, L.; PROCACCIA, I. Anisotropy in turbulent flows and in turbulent transport. **Physics Reports**, Elsevier, v. 414, n. 2-3, p. 43–164, 2005.

BIFERALE, L.; VERGASSOLA, M. Isotropy vs anisotropy in small-scale turbulence. **Physics of Fluids**, v. 13, p. 2139, 2001.

BOFFETTA, G.; MAZZINO, A.; VULPIANI, A. Twenty five years of multifractals in fully developed turbulence: a tribute to giovanni paladin. **J. Phys. A**, v. 41, p. 363001, 2008.

BORGNAT, P.; FLANDRIN, P. Stationarization via surrogates. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, IOP Publishing, v. 2009, p. P01001, 2009.

CAMUSSI, R.; BENZI, R. Hierarchy of transverse structure functions. **Physics of Fluids**, v. 9, p. 257, 1997.

CASTAING, B. The temperature of turbulent flows. **J. Phys. II France**, v. 6, n. 105-114, p. 23, 1996.

CASTAING, B.; GAGNE, Y.; HOPFINGER, E. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. **Physica D**, Elsevier Science Publishers BV Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v. 46, n. 2, p. 177–200, 1990.

CAVA, D.; KATUL, G. The effects of thermal stratification on clustering properties of canopy turbulence. **Boundary-Layer Meteorology**, Springer, v. 130, n. 3, p. 307–325, 2009.

CELANI, A.; LANOTTE, A.; MAZZINO, A.; VERGASSOLA, M. Universality and saturation of intermittency in passive scalar turbulence. **Physical Review Letters**, APS, v. 84, n. 11, p. 2385–2388, 2000.

CHANAL, O.; CHABAUD, B.; CASTAING, B.; HÉBRAL, B. Intermittency in a turbulent low temperature gaseous helium jet. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 17, n. 2, p. 309–317, 2000.

CHAVARRIA, G. R.; BAUDET, C.; CILIBERTO, S. Hierarchy of the Energy Dissipation Moments in Fully Developed Turbulence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, 74, n. 11, p. 1986–1989, Mar 1995.

CHAVES, M.; EYINK, G.; FRISCH, U.; VERGASSOLA, M. Universal decay of scalar turbulence. **Physical Review Letters**, APS, v. 86, n. 11, p. 2305–2308, 2001.

CHEN, Q.; CHEN, S.; EYINK, G.; HOLM, D. Intermittency in the joint cascade of energy and helicity. **Physical review letters**, APS, v. 90, n. 21, p. 214503, 2003.

CHEN, S.; SREENIVASAN, K.; NELKIN, M.; CAO, N. Refined similarity hypothesis for transverse structure functions in fluid turbulence. **Physical Review Letters**, APS, v. 79, n. 12, p. 2253–2256, 1997.

CHEVILLARD, L. **Description multifractale unifiée du phénomène d'intermittence en turbulence Eulerienne et Lagrangienne**. set 2004. Tese (Doutorado) — Laboratoire de Physique, set 2004.

CHEVILLARD, L.; CASTAING, B.; LÉVÊQUE, E.; ARNÉODO, A. Unified multifractal description of velocity increments statistics in turbulence: Intermittency and skewness. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 218, n. 1, p. 77–82, 2006.

CHEVILLARD, L.; ROUX, S. G.; LÉVÊQUE, E.; MORDANT, N.; PINTON, J. F.; ARNÉODO, A. Intermittency of velocity time increments in turbulence. **Physical Review Letters**, v. 95, n. 6, p. –, AUG 5 2005.

CLEVE, J.; GREINER, M.; PEARSON, B.; SREENIVASAN, K. Intermittency exponent of the turbulent energy cascade. **Physical Review E**, APS, v. 69, n. 6, p. 066316, 2004.

CLEVE, J.; GREINER, M.; SREENIVASAN, K. On the effects of surrogacy of energy dissipation in determining the intermittency exponent in fully developed turbulence. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 61, p. 756, 2003.

CRAMÉR, H. **Mathematical Methods of Statistics**. [S.l.]: Princeton University Press, 1946.

DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets**. [S.l.]: SIAM, 1992. 1671 p.

DELOUR, J.; MUZY, J. F.; ARNÉODO, A. Intermittency of 1D velocity spatial profiles in turbulence: a magnitude cumulant analysis. **The European Physical Journal B-Condensed Matter**, Springer, v. 23, n. 2, p. 243–248, 2001.

DHRUVA, B.; TSUJI, Y.; SREENIVASAN, K. Transverse structure functions in high-reynolds-number turbulence. **Physical Review E**, APS, v. 56, n. 5, p. 4928–4930, 1997.

DONZIS, D.; SREENIVASAN, K. The bottleneck effect and the kolmogorov constant in isotropic turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 657, p. 171–188, 2010.

DUBRULLE, B. Intermittency in fully developed turbulence: Log-Poisson statistics and generalized scale covariance. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, 73, n. 7, p. 959–962, Aug 1994.

_____. Anomalous scaling and generic structure function in turbulence. **J. Phys. II France**, v. 6, p. 1825–1840, 1996.

FALKOVICH, G.; SREENIVASAN, K. Lessons from hydrodynamic turbulence. **Physics Today**, American Institute of Physics, 59, n. 4, p. 43, 2006.

FARGE, M. Wavelet Transforms and their Applications to Turbulence. **Annual Reviews in Fluid Mechanics**, Annual Reviews, v. 24, n. 1, p. 395–458, 1992.

FEIGENBAUM, M.; JENSEN, M.; PROCACCIA, I. Time ordering and the thermodynamics of strange sets: Theory and experimental tests. **Physical review letters**, APS, v. 57, n. 13, p. 1503–1506, 1986.

FELLER, W. **An introduction to probability theory and its applications**. [S.l.]: Inc., New York-London-Sydney, 1971.

FLANDRIN, P. **Time-frequency/time-scale analysis**. [S.l.]: Academic Pr, 1999.

FOIAS, C.; MANLEY, O.; ROSA, R.; TEMAM, R.; FOIAS, C. Navier-Stokes equations and turbulence. Cambridge University Press Cambridge, 2001.

FRISCH, U. From global scaling, a la kolmogorov, to local multifractal scaling in fully developed turbulence. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society, v. 434, n. 1890, p. 89, 1991.

_____. **Turbulence: The Legacy of AN Kolmogorov**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.

GAGNE, Y.; CASTAING, B.; BAUDET, C.; MALÉCOT, Y. Reynolds dependence of third-order velocity structure functions. **Physics of Fluids**, v. 16, p. 482, 2004.

GAGNE, Y.; MARCHAND, M.; CASTAING, B. Conditional velocity pdf in 3-D turbulence. **J. Phys. II France**, v. 4, n. 1, 1994.

GAO, J.; CAO, Y.; TUNG, W.; HU, J. **Multiscale analysis of complex time series**. [S.l.]: Wiley, 2007.

GARDINER, C. **Handbook of stochastic methods**. [S.l.]: Springer Berlin, 1985.

GROSSMANN, S.; LOHSE, D.; REEH, A. Different intermittency for longitudinal and transversal turbulent fluctuations. **Physics of fluids**, v. 9, p. 3817, 1997.

GUALA, M.; METZGER, M.; MCKEON, B. Intermittency in the atmospheric surface layer: Unresolved or slowly varying? **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, 2009.

HALSEY, T. C.; JENSEN, M. H.; KADANOFF, L. P.; PROCACCIA, I.; SHRAIMAN, B. I. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 33, n. 2, p. 1141–1151, Feb 1986.

HE, G.; CHEN, S.; KRAICHNAN, R.; ZHANG, R.; ZHOU, Y. Statistics of dissipation and enstrophy induced by localized vortices. **Physical Review Letters**, APS, v. 81, n. 21, p. 4636–4639, 1998.

HUANG, N.; WU, Z. A review on Hilbert-Huang transform: Method and its applications to geophysical studies. **Reviews of Geophysics**, Washington, DC: American Geophysical Union, c1985-, v. 46, n. 2, 2008.

ISHIHARA, T.; GOTOH, T.; KANEDA, Y. Study of high-Reynolds number isotropic turbulence by direct numerical simulation. **Annual Reviews of Fluid Mechanics**, Annual Reviews, v. 41, n. 1, p. 165–180, jan 2009.

JAFFARD, S. The multifractal nature of Lévy processes. **Probability Theory and Related Fields**, Springer, v. 114, n. 2, p. 207–227, 1999.

_____. Wavelet techniques in multifractal analysis. **Fractal geometry and applications: a jubilee of Benoît Mandelbrot**, 2004.

JAFFARD, S.; LASHERMES, B.; ABRY, P. Wavelet leaders in multifractal analysis. In: _____. [S.l.: s.n.], 2007.

JENSEN, M. Multiscaling and structure functions in turbulence: an alternative approach. **Physical review letters**, APS, v. 83, n. 1, p. 76–79, 1999.

JESPERSEN, S.; METZLER, R.; FOGEDBY, H. C. Lévy flights in external force fields: Langevin and fractional fokker-planck equations and their solutions. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 59, n. 3, p. 2736–2745, Mar 1999.

KAHALERRAS, H.; MALÉCOT, Y.; GAGNE, Y. Intermittency and reynolds number. **Physics of Fluids**, v. 10, n. 4, p. 910–921, abr. 1998.

KANG, H.; CHESTER, S.; MENEVEAU, C. Decaying turbulence in an active-grid-generated flow and comparisons with large-eddy simulation. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 480, p. 129–160, 2003.

KANTELHARDT, J. W.; ZSCHIEGNER, S. A.; KOSCIELNY-BUNDE, E.; HAVLIN, S.; BUNDE, A.; STANLEY, H. E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. **Physica A - Statistical Mechanics and its Applications**, v. 316, p. 87–114, DEC 2002.

KANTZ, H.; SCHREIBER, T. **Nonlinear Time Series Analysis**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.

KATUL, G.; PORPORATO, A.; POGGI, D. Roughness effects on fine-scale anisotropy and anomalous scaling in atmospheric flows. **Physics of Fluids**, v. 21, p. 035106, 2009.

KEYLOCK, C. A wavelet-based method for surrogate data generation. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 225, n. 2, p. 219–228, 2007.

KLAGES, R.; RADONS, G.; SOKOLOV, I. **Anomalous Transport: Foundations and Applications**. [S.l.]: Wiley-VCH, 2008.

KOLMOGOROV, A. N. Energy dissipation in locally isotropic turbulence. In: **Dokl. Akad. Nauk SSSR**. [S.l.: s.n.], 1941. v. 32, p. 19–21.

_____. On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. In: **Dokl. Akad. Nauk SSSR**. [S.l.: s.n.], 1941. v. 31, p. 538–540.

_____. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers. In: **Dokl. Akad. Nauk SSSR**. [S.l.: s.n.], 1941. v. 30, p. 301–305.

_____. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence. **J. Fluid. Mech**, v. 13, p. 83–85, 1962.

KRAICHNAN, R. On Kolmogorov's inertial-range theories (of isotropic homogeneous turbulence). **Journal of Fluid Mechanics**, v. 62, p. 305–330, 1974.

KUNKEL, G.; MARUSIC, I. Study of the near-wall-turbulent region of the high-reynolds-number boundary layer using an atmospheric flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 548, p. 375–402, 2006.

KURIEN, S.; SREENIVASAN, K. Anisotropic scaling contributions to high-order structure functions in high-Reynolds-number turbulence. **Physical Review E**, APS, v. 62, n. 2, p. 2206, 2000.

KUZNETSOV, V.; PRASKOVSKY, A.; SABELNIKOV, V. Fine-scale turbulence structure of intermittent shear flows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 243, n. -1, p. 595–622, 1992.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Fluid Mechanics**. [S.l.]: Pergamon Press Oxford, England, 1959.

LASHERMES, B. **Analyse multifractale pratique: coefficients dominants et ordres critiques. Applications à la turbulence pleinement développée. Effets de nombre de Reynolds fini**. oct 2005. Tese (Doutorado) — École doctorale de Physique et d'Astrophysique de Lyon, oct 2005.

LASHERMES, B.; ROUX, S. G.; ABRY, P.; JAFFARD, S. Comprehensive multifractal analysis of turbulent velocity using the wavelet leaders. **European Physical Journal B**, v. 61, n. 2, p. 201–215, JAN 2008.

LESIEUR, M. **Turbulence in fluids**. [S.l.]: Springer Verlag, 2008. ISBN 1402064349.

LINDBORG, E. Correction to the four-fifths law due to variations of the dissipation. **Physics of Fluids**, v. 11, p. 510, 1999.

La PORTA, A.; VOTH, G.; CRAWFORD, A.; ALEXANDER, J.; BODENSCHATZ, E. Fluid particle accelerations in fully developed turbulence. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 409, n. 6823, p. 1017–1019, 2001.

LUMLEY, J.; PANOFSKY, H. **The structure of atmospheric turbulence**. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1964.

LUNDGREN, T. Kolmogorov two-thirds law by matched asymptotic expansion. **Physics of Fluids**, v. 14, p. 638, 2002.

_____. Kolmogorov turbulence by matched asymptotic expansions. **Physics of fluids**, v. 15, p. 1074, 2003.

L'VOV, V. Scale invariant theory of fully developed hydrodynamic turbulence-Hamiltonian approach. **Physics Reports**, Elsevier, v. 207, n. 1, p. 1–47, 1991.

MALÉCOT, Y.; AURIAULT, C.; KAHALERRAS, H.; GAGNE, Y.; CHANAL, O.; CHAUBAUD, B.; CASTAING, B. A statistical estimator of turbulence intermittency in physical and numerical experiments. **The European Physical Journal B**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 16, n. 3, p. 549–561, Jul 2000.

- MALLAT, S. **A Wavelet Tour of Signal Processing**. [S.l.]: Academic Press, 1999.
- MANDELBROT, B. **The fractal geometry of nature**. [S.l.]: W. H. Freeman and Company, 1982.
- MANDELBROT, B.; van NESS, J. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. **SIAM Review**, JSTOR, v. 10, n. 4, p. 422–437, 1968.
- MANTEGNA, R.; STANLEY, H. **An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000.
- MARCINKIEWICZ, J. Sur une propriété de la loi de Gauss. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 44, n. 1, p. 612–618, 1939.
- MATASSINI, L. **Signal analysis and modelling of non-linear non-stationary phenomena: from Human Voice to Financial Markets**. jul. 2001. Tese (Doutorado) — Fakultät der Naturwissenschaften der Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal, jul. 2001.
- MENEVEAU, C. Analysis of turbulence in the orthonormal wavelet representation. **Journal of Fluid Mechanics Digital Archive**, Cambridge Univ Press, v. 323, p. 469–520, 1991.
- _____. Transition between viscous and inertial-range scaling of turbulence structure functions. **Physical Review E**, APS, v. 54, n. 4, p. 3657–3663, 1996.
- MENEVEAU, C.; SREENIVASAN, K. R. Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 59, n. 13, p. 1424–1427, Sep 1987.
- _____. The multifractal nature of turbulent energy dissipation. **Journal of Fluid Mechanics Digital Archive**, Cambridge Univ Press, v. 224, p. 42–84, 1991.
- MOISY, F.; TABELING, P.; WILLAIME, H. Kolmogorov equation in a fully developed turbulence experiment. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 82, n. 20, p. 3994–3997, May 1999.
- MONIN, A.; YAGLOM, A. **Statistical fluid mechanics: Vol. 1**. [S.l.]: MIT Press, 1971.
- _____. **Statistical fluid mechanics: Vol. 2**. [S.l.]: MIT Press, 1975.
- MUSCHINSKI, A.; FREHLICH, R.; BALSLEY, B. Small-scale and large-scale intermittency in the nocturnal boundary layer and the residual layer. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 515, n. -1, p. 319–351, 2004.
- MUZY, J.; BAILE, R.; POGGI, P. Intermittency of surface layer wind velocity series in the mesoscale range. **Arxiv preprint arXiv:0912.2419**, 2009.
- MUZY, J.-F.; BACRY, E. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log infinitely divisible scaling laws. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 66, n. 5, p. 056121, Nov 2002.

- MUZY, J. F.; BACRY, E.; ARNÉODO, A. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, 47, n. 2, p. 875–884, Feb 1993.
- NAERT, A.; CASTAING, B.; CHABAUD, B.; HEBRAL, B.; PEINKE, J. Conditional statistics of velocity fluctuations in turbulence. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 113, n. 1, p. 73–78, 1998.
- NELKIN, M. Enstrophy and dissipation must have the same scaling exponent in the high Reynolds number limit of fluid turbulence. **Physics of fluids**, v. 11, p. 2202, 1999.
- NIELSEN, O. M. **Wavelets in Scientific Computing**. mar 1998. Tese (Doutorado) — Department of Mathematical Modelling, mar 1998.
- NOVIKOV, E. Functionals and the random-force method in turbulence theory (Euler velocity field described by random forces method, using Lagrangian representation of turbulence). **Soviet Physics-JETP**, v. 20, p. 1290–1294, 1965.
- _____. Statistical balance of vorticity and a new scale for vortical structures in turbulence. **Physical review letters**, APS, v. 71, n. 17, p. 2718–2720, 1993.
- NOVIKOV, E. A. Infinitely divisible distributions in turbulence. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 50, n. 5, p. R3303–R3305, Nov 1994.
- OBUKHOV, A. On the dynamics of a stratified fluid. In: **Dokl. Akad. Nauk SSSR**. [S.l.: s.n.], 1962. 146, n. 6, p. 1239–1242.
- OUELLETTE, N.; XU, H.; BODENSCHATZ, E. A quantitative study of three-dimensional lagrangian particle tracking algorithms. **Experiments in Fluids**, Springer, v. 40, n. 2, p. 301–313, 2006.
- PALADIN, G.; VULPIANI, A. Anomalous scaling laws in multifractal objects. **Physics Reports**, Elsevier, v. 156, n. 4, p. 147–225, 1987.
- PALUŠ, M. Bootstrapping multifractals: Surrogate data from random cascades on wavelet dyadic trees. **Phys Rev Lett**, APS, v. 101, p. 134101, 2008.
- PANCHEV, S. **Random Function and Turbulence**. [S.l.]: Pergamon Press, 1971.
- PANOFSKY, H.; DUTTON, J. **Atmospheric turbulence**. [S.l.]: New York, 1984.
- PARISI, G.; FRISCH, U. On the singularity structure of fully developed turbulence. In: **Proc. Int. School of Physics Enrico Fermi 1983**. [S.l.: s.n.], 1983. p. 84–7.
- PEARSON, B.; WATER, W. M. Inverse structure functions. **Physical Review E**, APS, v. 71, n. 3, p. 036303, 2005.
- PRASKOVSKY, A.; ONCLEY, S. Measurements of the kolmogorov constant and intermittency exponent at very high reynolds numbers. **Physics of Fluids**, v. 6, p. 2886, 1994.
- PRICHARD, D.; THEILER, J. Generating surrogate data for time series with several simultaneously measured variables. **Physical review letters**, APS, v. 73, n. 7, p. 951–954, 1994.

QIAN, J. Inertial range and the finite Reynolds number effect of turbulence. **Physical Review E**, APS, v. 55, p. 337, jan. 1997.

_____. Slow decay of the finite Reynolds number effect of turbulence. **Physical Review E**, APS, v. 60, p. 3409, set. 1999.

QUEIROS-CONDE, D. Geometrical extended self-similarity and intermittency in diffusion-limited aggregates. **Physical Review Letters**, APS, v. 78, n. 23, p. 4426–4429, 1997.

RENNER, C.; PEINKE, J.; FRIEDRICH, R.; CHANAL, O.; CHABAUD, B. Universality of small scale turbulence. **Physical review letters**, APS, v. 89, n. 12, p. 124502, 2002. ISSN 1079-7114.

RICHARDSON, L. F. **Weather Prediction by Numerical Processes**. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 1922.

RIEDI, R. Multifractal processes. **Theory and applications of long-range dependence**, Birkhauser, p. 625–716, 2003.

RIEDI, R.; CROUSE, M.; RIBEIRO, V.; BARANIUK, R. A multifractal wavelet model with application to network traffic. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 45, n. 3, p. 992–1018, 1999.

ROUX, S.; JENSEN, M. Dual multifractal spectra. **Physical Review E**, APS, v. 69, n. 1, p. 016309, 2004.

SCHMITT, F.; VALLÉE, D. L.; SCHERTZER, D.; LOVEJOY, S. Empirical determination of universal multifractal exponents in turbulent velocity fields. **Physical review letters**, APS, v. 68, n. 3, p. 305–308, 1992.

SERRANO, E.; FIGLIOLA, A. Wavelet Leaders: A new method to estimate the multifractal singularity spectra. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 388, n. 14, p. 2793–2805, 2009.

SHE, Z.-S.; LÉVÊQUE, E. Universal scaling laws in fully developed turbulence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 72, n. 3, p. 336–339, Jan 1994.

SHE, Z.-S.; WAYMIRE, E. C. Quantized Energy Cascade and Log-Poisson Statistics in Fully Developed Turbulence. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, 74, n. 2, p. 262–265, Jan 1995.

SHEN, X.; WARHAFT, Z. Longitudinal and transverse structure functions in sheared and unshaped wind-tunnel turbulence. **Physics of fluids**, v. 14, p. 370, 2002.

SHI, B.; VIDAKOVIC, B.; KATUL, G.; ALBERTSON, J. Assessing the effects of atmospheric stability on the fine structure of surface layer turbulence using local and global multiscale approaches. **Physics of Fluids**, v. 17, p. 055104, 2005.

SHRAIMAN, B.; SIGGIA, E. Scalar turbulence. **Nature**, 405, n. 6787, p. 639–646, 2000.

SOLOMON, T.; WEEKS, E.; SWINNEY, H. Observation of anomalous diffusion and lévy flights in a two-dimensional rotating flow. **Physical review letters**, APS, v. 71, n. 24, p. 3975–3978, 1993.

SREENIVASAN, K. On the universality of the kolmogorov constant. **Physics of Fluids**, v. 7, n. 11, p. 2778, 1995.

SREENIVASAN, K.; ANTONIA, R. The phenomenology of small-scale turbulence. **Annual review of fluid mechanics**, Annual Reviews, v. 29, n. 1, p. 435–472, 1997. ISSN 0066-4189.

SREENIVASAN, K.; BERSHADSKII, A. Logarithmic scaling in the near-dissipation range of turbulence. **Pramana**, Springer, v. 64, n. 3, p. 315–321, 2005.

_____. Clustering properties in turbulent signals. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 125, n. 5, p. 1141–1153, 2006.

_____. Finite-Reynolds-number effects in turbulence using logarithmic expansions. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 554, p. 477–498, 2006.

SREENIVASAN, K.; KAILASNATH, P. An update on the intermittency exponent in turbulence. **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics**, v. 5, p. 512, 1993.

SREENIVASAN, K. R. Fluid turbulence. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 71, n. 2, p. S383–S395, Mar 1999.

STANLEY, H.; MEAKIN, P. Multifractal phenomena in physics and chemistry. **Nature**, v. 335, n. 6189, p. 405–409, 1988.

STOLOVITZKY, G.; KAILASNATH, P.; SREENIVASAN, K. Kolmogorov's refined similarity hypotheses. **Physical review letters**, APS, v. 69, n. 8, p. 1178–1181, 1992.

TAYLOR, G. Statistical theory of turbulence. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, JSTOR, v. 151, n. 873, p. 421–444, 1935.

_____. The spectrum of turbulence. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society, v. 164, n. 919, p. 476, 1938.

TENNEKES, H. Fourier-transform ambiguity in turbulence dynamics. **Journal of the Atmospheric Sciences**, American Meteorological Society, v. 33, n. 8, p. 1660–1663, 1976.

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. **A first course in turbulence**. [S.l.]: The MIT press, 1972.

THEILER, J.; EUBANK, S.; LONGTIN, A.; GALDRIKIAN, B.; Doyne Farmer, J. Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 58, n. 1-4, p. 77–94, 1992.

THEILER, J.; GALDRIKIAN, B.; LONGTIN, A.; EUBANK, S.; FARMER, J. Using surrogate data to detect nonlinearity in time series. In: **North Atlantic Treaty Organization (NATO) advanced research workshop on nonlinear modelling and forecasting**. [S.l.: s.n.], 1991. v. 17, p. 21.

TOMÉ, T.; DE OLIVEIRA, M. **Dinâmica estocástica e irreversibilidade**. [S.l.]: EdUSP, 2001.

TOSCHI, F.; BODENSCHATZ, E. Lagrangian properties of particles in turbulence. *Annual Reviews*, 2008.

TURIEL, A.; MATO, G.; PARGA, N.; NADAL, J.-P. Self-similarity properties of natural images resemble those of turbulent flows. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 80, n. 5, p. 1098–1101, Feb 1998.

VERGASSOLA, M.; FRISCH, U. Wavelet transforms of self-similar processes. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 54, n. 1-2, p. 58–64, 1991.

VIGNERON, F. Free Turbulence on \mathbb{R}^3 and \mathbb{T}^3 . **Dynamics of Partial Differential Equations**, Int Press Boston, Inc, 7, n. 2, p. 107–160, jun 2010.

von KÁRMÁN, T.; HOWARTH, L. On the statistical theory of isotropic turbulence. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, JSTOR, p. 192–215, 1938.

VOSS, R. Random fractals: Self-affinity in noise, music, mountains, and clouds. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 38, n. 1-3, 1989.

WATER, W. M.; HERWEIJER, J. High-order structure functions of turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge Univ Press, v. 387, p. 3–37, 1999.

WELTER, G. S. **Hipótese de turbulência localmente isotrópica e a universalidade da constante de Kolmogorov**. Abril 2006. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, Abril 2006.

WELTER, G. S.; WITWER, A. R.; DEGRAZIA, G. A.; ACEVEDO, O. C.; MORAES, O. L. L. de; ANFOSSI, D. Measurements of the Kolmogorov constant from laboratory and geophysical wind data. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, 388, n. 18, p. 3745–3751, 2009.

WENDT, H. **Contributions of Wavelet Leaders and Bootstrap to Multifractal Analysis: Images, Estimation Performance, Dependence Structure and Vanishing Moments. Confidence Intervals and Hypothesis Tests**. out. 2008. Tese (Doutorado) — École Normale Supérieure de Lyon, out. 2008.

WENDT, H.; ROUX, S.; ABRY, P. Bootstrap for log wavelet leaders cumulant based multifractal analysis. **Proceedings of EUSIPCO, Florence**, 2006.

WORNELL, G. W. **Signal Processing with Fractals: A Wavelet Based Approach**. [S.l.]: Prentice Hall, 1995. 18–18 p.

WU, Z.; HUANG, N.; LONG, S.; PENG, C. On the trend, detrending, and variability of nonlinear and nonstationary time series. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 104, n. 38, p. 14889, 2007.

WYNGAARD, J. Atmospheric turbulence. **Annual Review of Fluid Mechanics**, Annual Reviews, v. 24, n. 1, p. 205–234, 1992.

XIAO, J.; BORGNAT, P.; FLANDRIN, P. Testing stationarity with time-frequency surrogates. In: CITESEER. **Proc. EUSIPCO**. [S.l.], 2007. v. 7.

YOKOKAWA, M.; ITAKURA, K.; UNO, A.; ISHIHARA, T.; KANEDA, Y. 16.4-tflops direct numerical simulation of turbulence by a fourier spectral method on the earth simulator. In: **Supercomputing, ACM/IEEE 2002 Conference**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 50–50.