UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

PERÍMETRO E ÁREA: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA UTILIZANDO O GEOGEBRA SOB O OLHAR DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Paula Gabrieli Santos de Assumpção

Santa Maria, RS, Brasil

2015

PERÍMETRO E ÁREA: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA UTILIZANDO O GEOGEBRA SOB O OLHAR DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Paula Gabrieli Santos de Assumpção

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de concentração em Educação Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profª Drª Inês Farias Ferreira

Santa Maria, RS, Brasil

2015

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

PERÍMETRO E ÁREA: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA UTILIZANDO O GEOGEBRA SOB O OLHAR DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

elaborada por
Paula Gabrieli Santos de Assumpção

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Educação Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA

Inês Farias Ferreira, Drª
(Presidente/Orientador)

Marcus Vinícius de Azevedo Basso, Dr. (UFRGS)

Rita de Cássia Pistóia Mariani, Drª (UFSM)

Carmen Vieira Mathias, Drª (UFSM)

Santa Maria, 24 de agosto de 2015.

Para meus pais Maria e Germano (in memoriam) que me deram a vida e me proporcionaram ensinamentos valiosos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me concedido a oportunidade de realizar o Curso, me amparado espiritualmente, me guiando nos momentos de dúvidas e incertezas.

A minha família pelo apoio e incentivo durante o curso.

À minha orientadora, professora Inês Farias Ferreira, pela dedicação e contribuição com seus conhecimentos e sugestões. Também, por me transmitir segurança e apontar caminhos nos momentos de incertezas e tomadas de decisões. Obrigada por tudo!

Aos alunos que aceitaram participar da pesquisa e se envolveram ao máximo na realização das atividades propostas.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática- UFSM, que contribuíram direta ou indiretamente com o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos colegas do Mestrado pelo apoio nos estudos e convívio que fazem com que esses anos de estudo sejam lembrados com muito carinho.

Aos professores da banca examinadora que aceitaram o convite e colaboraram com sugestões acerca da pesquisa.

Aos colegas da escola que me incentivaram por meio do convívio e de palavras confortadoras nos momentos difíceis, muitas vezes me motivaram e contribuíram com a concretização desse trabalho.

À FAPERGS/CAPES pela concessão da bolsa de estudo.

RESUMO

Dissertação
Programa de Pós- Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física
Universidade Federal de Santa Maria

PERÍMETRO E ÁREA: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA UTILIZANDO O GEOGEBRA SOB O OLHAR DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

AUTORA: PAULA GABRIELI SANTOS DE ASSUMPÇÃO
ORIENTADORA: INÊS FARIAS FERREIRA

Esta dissertação coloca como questão norteadora de pesquisa: "Uma abordagem dinâmica pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem de geometria para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, relativa aos conceitos de perímetro e área de polígonos, à luz da teoria dos registros de representação semiótica?". Para tanto, foi elaborada, implementada e avaliada uma sequência de atividades desenvolvida no *software* GeoGebra a partir dos subsídios teóricos indicados pela teoria de registros de representação semiótica, segundo Duval (2003, 2005, 2009, 2011, 2012a, 2012b, 2013). A experiência didática foi realizada com duas turmas do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual do município de Toropi, RS. A organização desta pesquisa segue os pressupostos da metodologia da engenharia didática, conforme Artigue (1996). Com base na análise dos resultados da aplicação da sequência de atividades constatou-se que foi viabilizado aos alunos a aquisição de conhecimentos relativos aos conceitos de perímetro e área de polígonos com a utilização de um ambiente dinâmico sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica. Também, reconheceu-se como fundamental para o desenvolvimento das etapas presentes na engenharia didática as reflexões trazidas por essa teoria. Além disso, considerou-se satisfatórias as funcionalidades do *software* GeoGebra, uma vez que serviu como ferramenta mediadora, favorecendo o processo de visualização dos sujeitos da pesquisa, face a resolução das atividades com ênfase no registro figural. Uma vez que, percebeu-se no desenvolvimento das atividades, um aprimoramento dos seus processos visuais em relação à exploração heurística das figuras geométricas. Permitindo a estes, uma melhor percepção na forma de interpretarem as representações geométricas envolvidas.

Palavras-chave: Perímetro. Área. Registros de representação semiótica. GeoGebra.

ABSTRACT

Dissertation
Mathematics and Teaching Physics Post- Graduation Program from the Federal University of Santa Maria

PERIMETER AND AREA: A DIDACTIC ENGINEERING USING GEOGEBRA UNDER THE VIEW OF SEMIOTIC REPRESENTATIONS

AUTHOR: PAULA GABRIELI SANTOS DE ASSUMPÇÃO
ADVISER: INÊS FARIAS FERREIRA

This paper aims answering the following question: "Can a dynamic approach contribute to the geometry's teaching and learning process for 7th grade students in the fundamental school, concerning the concepts of perimeter and polygons' area, taking into consideration the theory of semiotic representation records?" In order to do this, it was elaborated, implemented and evaluated a sequence of activities in the GeoGebra *software* from the theoretical subsides found in the semiotic representation records theory, according to Duval (2003, 2005, 2009, 2011, 2012a, 2012b, 2013). The didactic experiment was accomplished with two groups of 7^{th} grade students from fundamental school in a public state school in the city of Toropi, RS. This research was organized following the guidelines of the didactic engineering methodology, according to Artigue (1996). Based on the analysis of results when putting into practice the sequence of activities it was verified the students could learn the concepts of perimeter and polygons' area in a dynamic environment under the view of the semiotic representation records theory. It was also recognized as fundamental to develop the steps in the didactic engineering the considerations brought by this theory. Besides, it was considered satisfactory the functionalities of the GeoGebra software since it was an intermediary tool, helping in the process of seeing the subjects of research, when solving activities with emphasis in image records. It was seen in the development of activities an improvement of their visual processes in relation to the heuristic examination of the geometrical figures. Allowing them a better perception of the way they elucidate the geometric representations involved.

Key-words: Perimeter. Area. Semiotic representation records. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

UFSM - Universidade Federal de Santa Maria
UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas
UFSCar - Universidade Federal de São Carlos
CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino fundamental
PNLD- Programa Nacional do Livro Didático
TI - Tecnologias Informática
3D -Tridimensionais
2D - Bidimensionais
1D - Unidimensionais
0D - Sem dimensão
CEP- Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Santa Maria

LISTA DE ANEXOS

LISTA DE APÊNDICES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Como forma de situar o presente estudo, apresenta-se inicialmente a trajetória da autora, na qual se mostra em destaque os aspectos que impulsionaram esta pesquisa, que por sua vez estão relacionados tanto na sua experiência profissional como acadêmica.

Durante a graduação (2004-2007) ocorreu os primeiros contatos com os recursos tecnológicos como ferramentas mediadoras do processo de ensino e aprendizagem e essa relação estreitou-se no Curso de Especialização em Educação Matemática (2010-2011) da Universidade Federal de Santa Maria - UFSM, como aluna de uma disciplina envolvendo as tecnologias de informação comunicação no ensino de matemática. Nesta disciplina foram proporcionados conhecimentos relativos a diversos *softwares* educativos, objetos de aprendizagem, uso de vídeos, entre outros recursos. Na conclusão do referido curso foi elaborado um trabalho de monografia intitulado: "Introdução ao estudo de derivada: uma sequência didática com o uso do *software* GeoGebra" contendo uma proposta de ensino, utilizando-se como ferramenta de apoio o referido *software* .

A partir disso, houve um aumento no interesse em buscar maior conhecimento em relação ao ensino de matemática aliado às tecnologias computacionais, que culminou com o ingresso no Programa de Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física na UFSM. Novamente, ao iniciar o curso de pós-graduação, foi cursada uma disciplina relacionada ao uso de recursos tecnológicos em sala de aula, denominada tecnologia de informação e comunicação na Educação Matemática, onde foram aprimorados alguns conhecimentos e também ampliada sua visão a respeito de possibilidades da inserção e integração de tais recursos no ensino de matemática.

Este trabalho integra essa trajetória, e como forma de adentrar-se a esse contexto foi feito, inicialmente, um levantamento e análise de algumas pesquisas realizadas em âmbito nacional quanto ao Ensino de Matemática nos diferentes níveis de educação, chegando-se aos estudos que dizem respeito ao ensino e aprendizagem de geometria, ramo da matemática presente no currículo escolar. Notou-se que esse tema já vem sendo pesquisado há bastante tempo, destacam-se as pesquisas de Pavanello (1989), Pereira (2001), Crescenti (2005) e Sena e Dorneles (2013) as quais serão detalhadas posteriormente.

Essas pesquisas mostram a problemática do ensino de geometria em diferentes níveis da educação, também mencionam as dificuldades encontradas tanto por alunos quanto professores nessa área. Dessa forma, o objeto de estudo dessas pesquisas vai ao encontro às inquietações pessoais e profissionais enquanto acadêmica e professora de Educação Básica, respectivamente.

Sendo que, se pode ainda, no âmbito profissional, destacar como motivações para a realização deste estudo, as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao tema, possibilidades de inserção efetiva destes conteúdos em sala de aula e a busca por propostas didáticas que possam subsidiar o ensino e aprendizagem de geometria.

Em face do exposto, buscou-se um conteúdo específico de geometria, presente nos conteúdos programáticos da disciplina de matemática do ensino fundamental, levando em conta o fato de estar atuando como professora regente em turmas dos anos finais desse nível de ensino. Assim, foi escolhido dar ênfase aos conceitos de perímetro e área de figuras planas, já que, na maioria das vezes, os mesmos são trabalhados a partir da aplicação direta de fórmulas e exercícios repetitivos deixando de lado os aspectos visuais e qualitativos presentes nas formas geométricas. Presume-se também que, por ser um assunto rico do ponto de vista geométrico, seja possível explorar situações nas quais objetos geométricos construídos e manipulados em um ambiente de geometria dinâmica possam contribuir para os alunos levantarem conjecturas, testarem hipóteses e chegarem até os conceitos de perímetro e área de polígonos.

Como mencionado anteriormente, a exploração desses conteúdos será feita dando-se ênfase nos aspectos visuais os quais, muitas vezes são substituídos por um enfoque preponderantemente numérico e algébrico. Nesse sentido, adotou-se como fundamentação teórica a teoria das representações semióticas, de Raymond Duval, sendo que esta teoria considera que a aprendizagem de conteúdos matemáticos só é possível a partir de suas representações semióticas, entre elas, o registro língua natural, sistemas de escritas (numéricas, algébricas, simbólicas), registro figural e registro gráfico. Em se tratando de geometria, o uso do registro figural é fundamental, principalmente no que se refere ao processo de visualização que, segundo Duval (2009) está relacionado com as diferentes apreensões e modos de ver figuras geométricas por parte dos educandos. Mas, também há necessidade de mobilização simultânea deste registro com os outros, e ainda, deve existir a passagem de um registro ao outro.

Diante disso, propõe-se a presente pesquisa com a intenção de desenvolver uma proposta que envolva conhecimentos relativos ao estudo de perímetro e área de figuras planas. Dessa forma, pretende-se que este estudo possa auxiliar na prática pedagógica da autora, bem como, contribuir nas pesquisas de Educação Matemática relacionadas ao tema. Sendo assim, apresenta-se como problema de pesquisa:

Uma abordagem dinâmica pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem de geometria para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, relativa aos conceitos de perímetro e área de polígonos, à luz da teoria dos registros de representação semiótica?

Como forma de responder a este problema, objetiva-se elaborar, aplicar e avaliar uma proposta didática com o uso de um ambiente dinâmico, a partir dos subsídios teóricos indicados pela teoria de registros de representação semiótica.

Para atender a isso, a organização da dissertação seguiu os pressupostos da metodologia denominada engenharia didática, caracterizada por Artigue (1996, p.196) como: "(...) um esquema experimental baseado em "experimentações didáticas" na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino.".

Segundo Artigue (1996), a engenharia didática emergiu em didática da matemática, no início de 1980. Tendo como objetivo organizar uma forma de trabalho didático semelhante ao de um engenheiro, apoiando-se em conhecimentos científicos e também práticos. Nesse sentido, essa metodologia identifica quatro fases que organiza o processo experimental, são elas: análises prévias; concepção e análise a priori; experimentação e, por fim, análise a posteriori e validação.

Os procedimentos metodológicos adotados nessa pesquisa seguiram essas etapas e, consequentemente, a elaboração e execução de cada uma delas, subsidiou a composição dos capítulos da mesma.

A primeira fase, análises prévias, segundo Artigue (1996), consiste em um quadro teórico didático geral, com análise de conhecimentos didáticos sobre os conteúdos envolvidos. Cita, entre eles, análise do seu ensino habitual e seus efeitos, as dificuldades e obstáculos apresentados pelos alunos e que, já foram apontados em outros estudos. Nesta etapa foi constituída as bases teóricas que delinearam a redação dos dois primeiros capítulos da dissertação. O primeiro capítulo apresenta um levantamento bibliográfico, referente ao ensino e aprendizagem de geometria, tanto em pesquisas de Educação Matemática, como em alguns documentos oficiais. Também, são abordados apontamentos presentes em pesquisa, em âmbito nacional, sobre o uso de recursos tecnológicos como ferramenta mediadora no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Bem como, buscou-se possibilidades e sugestões apresentadas por essas pesquisas, em especial aquelas que tratavam do uso de *softwares* de geometria dinâmica.

O segundo capítulo é destinado a ideias centrais da teoria de registros de representação semiótica, que sustentou teoricamente o desenvolvimento desta pesquisa tanto em relação a apropriação do objeto de estudo quanto à compreensão de como se dá a aprendizagem por parte do aluno.

Para compor os dois primeiros capítulos realizaram-se levantamentos através de pesquisa em livros, periódicos, dissertações e teses desenvolvidas em instituições de ensino superior com trabalhos de relevância na área de Educação Matemática. Posteriormente, analisou-se o material pesquisado, selecionando os mais relevantes à proposta deste trabalho de pesquisa. A partir disso, foram elaborados resumos, anotações, questionamentos sobre o assunto. Sendo que, nos encontros de orientação foram feitas discussões e apontamentos a respeito dos mesmos.

Cabe destacar, que na pesquisa bibliográfica realizada encontrou-se pouco material, em nível nacional, referente à teoria dos registros de representação semiótica relacionada com a geometria. Mais especificamente, referente aos processos de visualização e operacionalização das figuras geométricas. Dessa forma, foi necessário expandir a pesquisa para outros idiomas, no caso, inglês e francês, pois Raymond Duval é de origem francesa. Cabe ressaltar que, ao se fazer este estudo percebeu-se a existência de trabalhos abrangentes e valiosos que acabaram por subsidiar de forma bastante consistente e significativa a elaboração da sequência de atividades proposta, entre eles citam-se Vighi(2009), Paraskevi et al (2011) e Paraskevi (2013).

Na segunda fase enumerada pela engenharia, concepção e análise *a priori*, as variáveis pertinentes à pesquisa foram definidas. Essas variáveis, segundo Artigue (1996), são distinguidas em dois tipos: variáveis macrodidáticas e variáveis microdidáticas. As primeiras estão relacionadas a organização global da engenharia didática, já a segunda, estão relativas a organização local.

Assim, determinaram-se como escolhas globais, os conceitos envolvidos dentro do tema a ser pesquisado, ou seja, os conceitos de perímetro e área de figuras planas e também o uso do recurso tecnológico como ferramenta mediadora do processo de ensino e aprendizagem do mesmo.

Nas variáveis microdidáticas foi definido o público-alvo, como sendo alunos de duas turmas do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Toropi-RS, totalizando a participação de trinta alunos.

Para a definição dessas variáveis levou-se em consideração, a atuação da autora na condição de professora regente dessas duas turmas. Além do interesse profissional de propor uma abordagem diferente da que tradicionalmente estava sendo feita.

Destaca-se, ainda, nessa fase a elaboração de um projeto de pesquisa encaminhado e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UFSM, junto a este foi redigido um termo de assentimento e consentimento para os sujeitos da pesquisa (alunos) e seus responsáveis legais, o qual se encontra no anexo A.

Também, nessa fase realizou-se a análise *a priori* que, conforme Artigue (1996), objetiva determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem prever alguns comportamentos sentidos por parte dos alunos, sujeitos da pesquisa. Assim, devem ser descritas as escolhas e características didáticas. Além das ações e estratégias esperadas que os alunos desenvolvam e que são possíveis de exercer algum tipo de controle. Com base na proposta desta fase, elaborou-se uma sequência de atividades, tendo como ferramenta de apoio o *software* GeoGebra. Para isso, foi levada em consideração a realidade escolar na qual foi aplicada, a composição de atividades que contemplem a proposta pedagógica da escola e os conhecimentos prévios dos alunos. Dessa forma, foram constituídas atividades divididas em três blocos, cujo detalhamento encontra-se no capítulo 3.

A terceira fase, experimentação, considerada por Artigue (1996), como clássica. Sendo que nesta é possível garantir a proximidade dos resultados práticos com as bases teóricas. A descrição em detalhe da mesma encontra-se, ao longo do capítulo 4. Ressalta-se que após a aplicação de cada um dos blocos de atividades foi realizada uma socialização (discussão) das mesmas com os alunos, nas quais foram mostradas suas soluções e sistematizada a construção conceitual de perímetro e área de polígonos.

Também, no capítulo 4 descreve-se a última etapa da engenharia, fase de análise *a posteriori* e validação da sequência de atividades, evidenciada por Artigue (1996), como a fase na qual deve ser realizada a interpretação do conjunto de dados recolhidos durante a experimentação. Isso foi realizado por meio da observação direta da professora pesquisadora e da elaboração de um diário de bordo. Além de instrumentos pedagógicos utilizados na realização das atividades de ensino, tais como: registros em papel e em arquivos do *software* GeoGebra. A validação foi constituída a partir do confronto das duas análises, *a priori* e *a posteriori*, verificando as hipóteses definidas no início da pesquisa.

Por fim, o capítulo 5 destina-se as considerações finais da pesquisa, alguns apontamentos e sugestões para futuros estudos.

1 CONTEXTO DA PESQUISA

Neste capítulo, inicialmente, faz-se um breve apanhado de pesquisas em âmbito nacional, de documentos oficiais e, de livros didáticos, os quais abordam geometria e seu processo de ensino e aprendizagem no contexto escolar tendo como finalidade explorar e se inteirar acerca desse tema. Em consonância a isso, segue-se a descrição dos resultados de uma pesquisa bibliográfica realizada tratando do uso de recursos tecnológicos aliados no processo de ensino e aprendizagem de matemática, destacando algumas de suas potencialidades e benefícios segundo a ótica de pesquisadores em Educação Matemática. Por fim, apresentam-se os ambientes de geometria dinâmica, suas características e o *software* com o qual foi desenvolvida a sequência de atividades da presente pesquisa.

1.1 A geometria no contexto brasileiro

Primeiramente apresenta-se uma análise de algumas pesquisas nacionais que tiveram como objeto de estudo a geometria, contemplando diversos níveis de ensino. O intuito disso é localizar-se nesse contexto, inteirando-se acerca da problemática que motivou a presente pesquisa e, por outro lado, conhecer o que tem sido produzido de pesquisa sobre o assunto.

Pavanello (1989) elaborou uma dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Educação da Universidade Estadual de Campinas- UNICAMP onde procurou responder as seguintes perguntas: - O ensino de geometria vem gradualmente desaparecendo do currículo real das escolas. Será que esse conhecimento não é necessário ao homem moderno? Terá a geometria perdido sua importância do ponto de vista educacional? Que outros motivos fizeram com que ela fosse praticamente expulsa da sala de aula?

Em resposta a algumas dessas perguntas, Pavanello (1989) coloca que a geometria começa a ser excluída dos currículos escolares quando as escolas de nível médio dão início a um maior atendimento de alunos das classes menos favorecidas. Também é mencionado em sua pesquisa que, com o movimento da matemática moderna, a geometria passa a ser desenvolvida de modo muito mais formal. Outro fator destacado é que, em decorrência disso a mesma é reduzida e, em seu lugar, privilegia-se a álgebra e a aritmética, deixando-se a mesma de ser discursiva para tornar-se algébrica e com isso começa a desaparecer uma das funções da geometria, que consiste em formar o raciocínio hipotético-dedutivo.

Outra pesquisa que segue esta perspectiva foi desenvolvida por Pereira (2001). Neste trabalho a pesquisadora traz uma análise de dissertações e teses a respeito do modo pelo qual as pesquisas tem tratado o esvaziamento da geometria no paradigma curricular do Ensino Fundamental e Médio nos últimos 20 anos que antecede o ano de publicação do trabalho. Dentre suas conclusões, ela menciona problemas com a formação do professor, a omissão de geometria em livros didáticos e lacunas deixadas pelo movimento da matemática moderna. Por fim, Pereira (2001) coloca como necessária a discussão sobre novas abordagens, redimensionadas em conceitos e atividades que possam impulsionar o processo de ensino e aprendizagem de geometria, com novas leituras e novas propostas de ensino.

Complementando, Crescenti (2005) elaborou uma tese apresentada ao Programa de Doutorado em Educação da Universidade Federal de São Carlos - UFSCar. Neste trabalho a pesquisadora abordou como estava constituído o ensino de geometria nas escolas, nos anos finais do Ensino Fundamental e, também, como pensavam os professores de matemática a respeito de geometria e seu ensino. A partir das narrativas dos professores esta pesquisadora percebeu a falta de autonomia e conhecimento da geometria por parte dos mesmos. Quanto ao seu ensino, observou que os educadores estavam muito presos a organização burocrática e apoiados com maior força no livro didático. Ainda, foi identificado neste trabalho que, a maioria dos professores entrevistados tinha clareza de sua formação precária quanto aos conhecimentos geométricos, refletindo diretamente na sua prática, tanto, em aspectos teóricos como metodológicos.

Por fim, cita-se a pesquisa de Sena e Dorneles (2013) na qual foi realizado um mapeamento, nas teses brasileiras, cuja temática faz referência à geometria. A partir de uma investigação histórica no que diz respeito aos estudos desta área da matemática no Brasil, esta pesquisa quantificou produções realizadas entre os anos de 1991 e 2007 do banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES referentes a esse tema, por meio de uma análise quantitativa dessas produções e suas classificações quanto às linhas de pesquisas propostas por Fiorentini e Lorenzato (2006). Como conclusões, revela que o estudo de geometria não é uma das prioridades do ensino de matemática. Diante dessa constatação, estas pesquisadoras indicam entre os desafios para amenizar esse descaso, seria uma melhor qualificação dos professores para trabalharem com os conteúdos de geometria. Quanto às linhas de pesquisas examinadas, destacam-se como contribuições significativas para matemática, bem como perspectivas de avanços em relação ao ensino de geometria, as pesquisas voltadas para a área de formação de professores e também a de informática e tecnologias no ensino.

Com essa breve discussão, sobre a geometria e seu ensino entende-se que essa área apresenta em seu histórico, ao longo dos anos, diversas tentativas de implementá-la em sala de aula. Mas, em comum, essas pesquisas mostram que o conhecimento geométrico, na maioria das vezes, é trabalhado com caráter muito formal, com vistas ao raciocínio dedutivo e indutivo, por meio de teoremas e axiomas utilizando linguagens específicas da área. Ou ainda, com ênfase na aplicação de cálculos, realizados mecanicamente através de regras e procedimentos repetitivos e rigorosamente metódicos. Isso pode contribuir para o insucesso escolar por parte dos alunos, corroborando com a problemática apontada nas pesquisas citadas anteriormente.

Assim, coloca-se como fundamental, no tocante ao ensino de geometria, a busca por abordagens didático-metodológicas que possam contribuir para uma melhor compreensão, por parte dos alunos, dos conhecimentos geométricos. Em outras palavras, o ensino de geometria, necessita de estratégias que possam se adaptar tanto no que diz respeito às exigências do currículo escolar, como também, aos recursos didáticos que emergem atualmente. Dessa forma, estende-se essa pesquisa bibliográfica, centrando-se na geometria presente na Educação Básica, pois é esse o contexto escolar no qual a presente pesquisa irá se deter. A seguir, apresenta-se a visão de alguns autores quanto a sua importância no currículo escolar, bem como, apontam alguns entraves que dificultam ou interferem no seu ensino.

Segundo Crescenti (2005) a geometria é uma área da matemática que além de proporcionar capacidades e habilidades próprias de sua especificidade possui uma vasta aplicabilidade, isto é, a partir dela existe a possibilidade de solucionar problemas práticos em várias áreas do conhecimento e do cotidiano.

Além da importância da geometria, por seu caráter utilitário para resolver problemas práticos de diferentes áreas do conhecimento, Almeida (2010) considera que:

> As noções ligadas à Geometria são necessárias para compreender, interpretar e apreciar o mundo que nos rodeia. Estão intimamente associadas à realidade, uma vez que é o estudo do espaço e das formas, das grandezas e medidas que constituem essa realidade. Nossa vida diária envolve inúmeras relações espaciais. Tarefas simples como escolher um itinerário num mapa ou pendurar um quadro numa parede exigem sentido de orientação no espaço, de medida. Tarefas mais complexas como a construção de uma casa ou um prédio, também vão envolver conceitos geométricos. (ALMEIDA, 2010, p.15).

Embora a geometria apresente características relevantes para seu ensino, existem inúmeras pesquisas, em educação matemática, que demostram preocupação quanto ao seu ensino e aprendizagem na educação básica. Também, há o reconhecimento da necessidade de buscar alternativas e métodos que possam delinear as práticas pedagógicas e contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos.

Nessa perspectiva, Arbach (2002) aponta que os livros didáticos são instrumentos utilizados nas aulas de matemática. Entretanto, afirma que não se encontra em geral nestes, propostas que proporcionem um ensino de geometria em que os alunos possam participar na produção do saber, criando conjecturas e validação de resultados. Segundo esse pesquisador, o que se observa são cálculos algébricos entre elementos de figuras. Um exemplo disso são os cálculos com unidades de medidas que são repetidos à exaustão. Existe uma algoritmização dos procedimentos geométricos em detrimento do uso de propriedades existentes que podem ser obtidas e/ou exploradas através da manipulação de figuras.

Almeida (2010) ao referir-se ao descaso com o estudo da geometria na educação básica menciona que os conceitos são trabalhados de forma desvinculada, fora do cotidiano do aluno e deixados, muitas vezes, para as últimas aulas do ano letivo. Com isso, é natural que o aluno veja a geometria como algo distante da realidade, que foge da sua possibilidade de compreensão e sem utilidade prática. Esse aspecto, na visão do pesquisador, propicia o surgimento de sentimentos negativos que, de certa forma, podem contribuir para o fracasso escolar, insucesso em testes que envolvam esse conhecimento e, ainda, gerando sentimento de incapacidade de aprendizagem, por parte dos alunos, no que diz respeito a mesma.

Gravina (2011, p. 2) considera que: “de uma forma geral, o estudo da geometria escolar tem foco na apresentação de conceitos e propriedades geométricas, sem que haja maiores preocupações com o desenvolvimento do raciocínio geométrico”. Esta visão também é enfatizada por Buratto (2006), ao colocar que a geometria, considerada como corpo de conhecimento estático, abstrato e dogmático, pode auxiliar e manter o processo racionalista-técnico do ensino e da aprendizagem. Em contra partida, a pesquisadora diz que esta pode contribuir para uma formação diferenciada, implicando a desenvoltura do olhar, do pensar e do raciocinar. Afirma que, neste caso:

> [...] os alunos descobrem relações e desenvolvem o senso espacial construindo, desenhando, medindo, visualizando, comparando, transformando e classificando figuras. A discussão de ideias, o levantamento de conjeturas e a experimentação das hipóteses precedem as definições e o desenvolvimento de afirmações formais. A exploração informal da geometria pode ser motivadora e matematicamente produtiva. Seu ensino deve recair sobre a investigação, o uso de ideias geométricas e

> relações, ao invés de se ocupar com definições a serem memorizadas e fórmulas a serem decoradas. (BURATTO, 2006, p. 27).

Buratto (2006) ainda ressalta a necessidade de criar condições nas quais permitam ao aluno, o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento possibilitando a este compreender, descrever e representar de forma organizada os conhecimentos geométricos.

Em face ao exposto, considera-se que o ensino de geometria precisa englobar, concomitantemente, os conteúdos e contexto cultural e histórico da realidade escolar. Entre esses, estão os recursos e instrumentos didáticos coerentes com a proposta curricular e objetivos estabelecidos para tais conteúdos. Para adentrar nesse contexto, a seguir serão apresentadas, de modo geral, algumas características presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do ensino fundamental. Como também, em algumas coleções de livros didáticos referentes a este nível de ensino, no que concerne a geometria e, em especial, aos conteúdos que serão objetos de estudo desta pesquisa.

1.1.1 A geometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino fundamental e em livros didáticos

Os conceitos referentes à geometria presentes nos PCN de matemática do ensino fundamental, Brasil (1998), encontram-se acentuados no bloco espaço e forma. Esse documento oficial enfatiza a importância desses conteúdos no currículo de matemática, pois coloca que, por meio dos conceitos geométricos os alunos desenvolvem um tipo especial de pensamento permitindo, desta forma, compreenderem, descreverem e representarem de forma organizada o mundo em que vivem.

Ao analisar o terceiro ciclo dos PCN, anos finais do ensino fundamental, pelo fato do objeto de estudo desta pesquisa enquadrar-se nesse ciclo, percebeu-se o destaque em algumas características da geometria, entre elas citam-se: o interesse por parte dos alunos nesses conteúdos e seu campo fértil para a resolução de situações-problema.

Segundo os PCN, nesse campo de problemas são distinguidos três objetos de natureza diferentes:

- O espaço físico, ele próprio (domínio das materializações);
- A geometria, concebida como modelização desse espaço físico (domínio das figuras geométricas);

- O(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais (domínio das representações gráficas).

Junto a esses objetos são indicadas, ainda, três questões relativas à aprendizagem, a primeira está relacionada ao desenvolvimento das habilidades de percepção espacial. A segunda, a elaboração de um sistema de propriedades geométricas com uma linguagem que permita agir nesse modelo e, a última, a codificação e decodificação de desenhos. Cabe destacar, que essas questões estão interligadas, interagindo-se entre si.

Entre as possibilidades de trabalho apresentadas para esse ciclo, especificamente relacionadas ao campo das figuras geométricas, estão incluídas atividades de classificação destas figuras, com base na observação de suas propriedades e regularidades. Também, é indicada a exploração de composição e decomposição destas. Como é o caso de atividades envolvendo ladrilhamento que sugerem, aos alunos, a verificação do recobrimento de superfícies. Ou ainda, a partir da descoberta que toda a figura poligonal pode ser composta e decomposta por outra e, em particular, por triângulos. Sendo que, esse tipo de decomposição pode facilitar a resolução de alguns problemas envolvendo o estudo de áreas.

Ainda, referente às sugestões de atividades para o terceiro ciclo, os PCN evidenciam o desenvolvimento de atividades que privilegiam as transformações de uma figura no plano, destacando que a partir dessas, pode-se desenvolver conceitos geométricos de uma forma mais significativa, além de obter um caráter mais dinâmico para este estudo. Quanto aos sistemas de representação plana das figuras espaciais é colocado como funções do desenho: visualizar, ajudar a provar e a fazer conjecturas. Sendo que, na representação de um objeto geométrico por meio de um desenho, os alunos devem buscar uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades. A fim de organizarem o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem mental e global que possuem do objeto.

Outro aspecto, enfatizado no início deste ciclo está relacionado com a percepção. Esse documento diz que os alunos, nesta fase, usam de forma bastante espontânea sua percepção para representar as figuras geométricas e que, aos poucos, isso tende a diminuir e coloca como um fator determinante para isso, os métodos de ensino adotados pelo professor que acabam substituindo esta espontaneidade.

Cabe destacar, ainda, a indicação de atividades de geometria a partir de experiências concretas que podem levar os alunos a compreenderem a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Também, são evidenciadas atividades que envolvam experimentações concretas podendo ser aceitas como “provas”, isto é, as observações do material concreto podem ser consideradas justificativas para algumas conjecturas, sem necessariamente, se utilizar de uma prova formal.

Ao longo dessa análise bibliográfica, identificaram-se alguns apontamentos trazidos nos PCN que abordam objeto de estudo da pesquisa, conhecimentos relativos a perímetro e área de figuras planas. Ele reporta-se para a relevância desses conteúdos, no que tange ao bloco grandezas e medidas no currículo de matemática. Uma vez que, é possível estabelecer conexões entre os diversos temas, a partir desses conteúdos, proporcionando um campo de problemas para a ampliação e consolidação do conceito de número e a aplicação de conceitos geométricos. Mesmo reconhecendo a importância dos mesmos, os PCN afirmam que esses conteúdos, conforme Brasil (1998, p.129) “têm tido pouco destaque nas aulas de Matemática, em especial nas últimas séries do ensino fundamental”. Como forma de contornar isso, são apresentados ainda, alguns aspectos relevantes que podem ser levados em conta no processo de ensino de conteúdos que explorem conceitos de medidas, presentes no terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental:

> (....) para medir o comprimento de um objeto o aluno precisa saber quantas vezes é necessário aplicar uma unidade previamente escolhida nesse objeto, ou seja, executar duas operações: uma geométrica (aplicação da unidade no comprimento a ser medido) e outra aritmética (contagem de quantas unidades couberam). Os mesmos procedimentos são utilizados para obter áreas e volumes. Evidentemente, essa constatação somente será percebida em situações em que as medidas são acessíveis a essas comparações e contagens (BRASIL, 1998, p.129).

Menciona-se também, a importância da utilização de diversos instrumentos para determinar a medição das grandezas. Por exemplo, a elaboração de situações de ensino e aprendizagem nas quais os alunos possam utilizar unidades padronizadas de medidas. Além disso, cita que ao trabalhar esses tópicos é comum os alunos confundirem noções de área e de perímetro e inclusive estabelecerem relações não verdadeiras entre elas. Por exemplo, quando comparam dois polígonos e concluem que a figura de maior área tem necessariamente maior perímetro e vice-versa.

Outro aspecto salientado referente a conceitos de perímetro e área é a forma como os alunos utilizam as fórmulas para obter a medida dessas grandezas, afirmando que:

> A experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle, além de as esquecerem rapidamente. Desse modo, o trabalho com áreas deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter a área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e

> sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações. (BRASIL, 1998, p.131).

Para finalizar, os PCN evidenciam as conexões desses conceitos com outros conteúdos matemáticos, como o caso da articulação entre grandezas, aritmética, relações geométricas e algébricas.

Dando continuidade à pesquisa bibliográfica, entendeu-se como relevante, buscar informações quanto aos conteúdos de perímetro e área de polígonos nos anos finais do ensino fundamental, presentes em alguns livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Visto que, esses livros devem seguir as orientações propostas pelos PCN e, ainda, enquadrarem-se ao programa curricular deste nível de ensino. Ressalta-se que essa análise não tem a intenção de definir a função do livro didático em âmbito escolar, nem de julgar a forma como são apresentados esses conteúdos. Mas sim, como forma de apropriação do objeto de estudo, sob a ótica de que os livros didáticos são instrumentos importantes, tanto para o professor, quanto ao aluno, no que tange ao processo de ensino e aprendizagem. Ainda, pondera-se que, muitas vezes, este instrumento é utilizado nos planos de estudo pelos professores. Dessa forma, a maneira como os conteúdos estão disponíveis neles, pode influenciar diretamente no processo de ensino e aprendizagem.

Outro aspecto considerado pertinente a essa análise, consiste no fato de que as escolas públicas disponibilizam aos alunos gratuitamente estes instrumentos e os alunos podem utilizá-lo tanto para aprofundar seus conhecimentos acerca do que foi trabalhado em sala de aula, como também, sanar alguma dificuldade ou dúvida. Inicialmente, pensou-se em analisar a forma como os livros didáticos selecionados tratam os conteúdos de perímetro e áreas nos anos finais do ensino fundamental. Entretanto, algumas pesquisas já realizaram isso, cita-se: Secco (2007), Centenaro (2010) e Fischer (2011). Diante disso, optou-se por realizar essa análise no tópico “guia do professor” presente em coleções de livros destinadas ao uso exclusivo do professor. Dessa forma, buscou-se, a partir das orientações sugeridas, compreender como algumas coleções indicam aos professores o desenvolvimento dos conteúdos de perímetros e área de polígonos, com ênfase em aspectos tanto conceituais, como procedimentais e, ainda, a respeito dos objetivos esperados para a aprendizagem dos alunos. Para isso, escolheram-se duas coleções de livros didáticos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, presentes no acervo do banco de livros da escola na qual foi aplicada a sequência de atividades desenvolvida na presente pesquisa. Essas coleções integram as ofertadas pelo PNLD/2013 e uma delas é a coleção atualmente adotada pela escola. São elas:

- *Coleção A:* LEONARDO, F. M. de. Projeto Araribá: matemática: 6º ao 9º ano. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2010.
- *Coleção B*: IMENES, L. M.; LELLIS, M. Matemática: 6º ao 9º ano. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2012.

Os quatro volumes da *coleção A* dispõem, inicialmente, a descrição dos objetivos dos blocos propostos pelos PCN. Nesta descrição, optou-se explicitar somente os dois blocos que fazem parte do objeto de estudo da pesquisa. No caso, o bloco espaço e forma e, grandezas e medidas. No que diz respeito ao bloco espaço e forma, considera-se como fundamental o trabalho com geometria, salientando que isso pode contribuir para a aprendizagem de números e medidas. Além disso, ressalta a possibilidade de exploração dessa área a partir de objetos do mundo físico, cita como exemplo, obras de arte e desenhos. Também é mencionado que o estudo de formas requer a busca de semelhanças e diferenças na análise dos componentes de uma forma e, atribui a importância do reconhecimento de formas em diferentes representações e dimensões. Afirma que o trabalho com espaço e forma vem sendo negligenciado no ensino fundamental e pouco explorado no ensino médio.

Quanto ao bloco grandezas e medidas é associado a uma relevância social a partir de seu evidente caráter prático. Nesse sentido, podendo ser explorado por meio de uma abordagem histórica referente aos fenômenos os quais esses estão relacionados. Para exemplificar mostra-se o caso da comparação de superfícies, como sendo uma atividade humana desenvolvida na antiguidade. Sendo que, com seu aperfeiçoamento foi desenvolvendo-se os processos de medição da área de uma superfície.

Nessa coleção, os conhecimentos relativos a perímetro e áreas de figuras planas aparecem acentuados em três volumes, os quais serão descritos a seguir.

No volume 1 (6º ano) é destinado um capítulo ao tópico medidas e geometria, através de três unidades nestas colocam-se como objetivos:

- Construir e ampliar noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, com base em seu uso no contexto social;
- Explorar noções de área e perímetro de figuras geométricas planas, bem como, a decomposição e composição de superfície para determinação de sua área.

Nos conteúdos atitudinais são citados o desenvolvimento da capacidade de investigação, a valorização do uso de estratégias de verificação e, também, o desenvolvimento das formas de raciocínio e processos, entres eles, a intuição e a dedução.

O volume 3 (8º ano) é constituído por um capítulo que trata dos conteúdos: perímetro, área e volume, contemplados em subitens unidades consecutivas. Entre os objetivos traçados para os conteúdos de perímetro e área estão a resolução de situações-problema relacionadas a trajetória e distância entre pontos. Como também, as que envolvam conhecimentos relativos a área de figuras geométricas planas por meio de procedimentos de decomposição, composição e transformação.

No tocante aos conteúdos conceituais e procedimentais é colocada em evidência a compreensão de perímetro e de área de polígonos, com vistas aos procedimentos de cálculos. Ressalta-se, também, a equivalência de figuras planas por meio de decomposição e composição.

Por fim, esses conteúdos são retomados em um capítulo do volume 4 (9º ano), no qual contém dois subitens. O primeiro refere-se a áreas de polígonos, sendo que, como conteúdos conceituais e procedimentais coloca a construção de procedimentos para o cálculo de área de triângulos e quadriláteros. Para posteriormente, realizar a determinação da área de um polígono regular. Já na outro subitem, entre seus objetivos, está deduzir e aplicar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas de forma geral.

Na *coleção B* os conhecimentos relativos a perímetros e áreas de figuras planas são desenvolvidos ao longo dos quatro volumes. Em relação aos os conteúdos conceituais e procedimentais estipulados por essa coleção estão dispostos em um quadro composto por cinco grupos: aritmética, geometria, medidas, álgebra e estatística, e o respectivo ano para ser trabalhado. No entanto, somente o grupo referente a medidas aborda o objeto de estudo da presente pesquisa o qual é descrito no quadro 1.

Analisando separadamente as orientações propostas para cada volume dessa coleção, observou-se que, o 6º ano apresenta um capítulo intitulado, áreas e perímetros, o qual sugere que sejam construídas as noções desses conteúdos de forma conjunta. Afirma também que, uma pode auxiliar na compreensão da outra, na medida que o aluno vai se apropriando do significado particular das mesmas. Nesse capítulo não são abordadas fórmulas de cálculo de áreas, pois segundo o autor, isso ainda não tem sentido para os alunos do 6º ano. Nesse sentido, o que propõem são cálculos de áreas a partir da composição e decomposição de retângulos. Dessa forma, Imenes (2013, p.65) reitera que nessa etapa “se desenvolvem a criatividade e a percepção geométrica e prepara-se a classe para o entendimento das fórmulas de áreas que aparecerão nos anos seguintes”.

Conteúdo	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Medida de comprimento	Palmo, passo, polegada; instrumentos de medida; unidades do sistema métrico mais usadas e suas relações; perímetro de polígonos; estimativas.	Comprimento: a grandeza, os instrumentos e as unidades.	Perímetro da circunferência (experimental)	Relação decimal entre as unidades de comprimento do sistema métrico; perímetro da circunferência; determinação de distâncias inacessíveis.
Medida de área	Número de quadradinhos unitários contidos em uma figura; unidades mais usadas do sistema métrico e suas relações; fórmulas para o cálculo da área: quadrado e retângulo.	Decomposição e composição de uma figura plana: conservação da área.	Fórmulas para o cálculo da área: paralelogramo, triângulo, losango e trapézio.	Relação decimal entre as unidades de área do sistema métrico; fórmula para o cálculo da área do círculo.

Quadro 1-Recorte dos conteúdos conceituais e procedimentais referente ao objeto de estudo da pesquisa.
Fonte: Imenes, 2012, p.17.

Ainda, na análise do volume 1, percebe-se que não é apresentada uma definição formal para área e a exploração desse conceito, sob a ótica das orientações estabelecidas, é realizada através de conhecimentos que os alunos já possuem, inclusive os extraescolares. Quanto ao trabalho conceitual, encontra-se a construção da fórmula de área do retângulo. O uso dessa fórmula é colocado como procedimental e a resolução de problemas a nível atitudinal. Também é explorada conceitualmente a unidade de medida de área, apresentando as unidades mais usuais. Quanto aos procedimentos, orienta-se trabalhar as transformações dessas unidades mais comuns.

Cabe destacar que, embora o título desse capítulo seja perímetro e área, não possui especificamente descrito nas orientações para o professor como este poderia abordar as noções de perímetro apresentadas pelo livro.

No volume 2 encontra-se o capítulo, denominado medida, tratando do significado presente no processo de medir, bem como as unidades de medida mais usadas no dia a dia. Novamente, a dimensão conceitual está relacionada com conhecimentos extraescolares do aluno. Também, explora várias unidades de diferentes grandezas, tendo como objetivo a exploração do padrão decimal do sistema métrico, tanto para perímetro quanto para área. É destacada ainda, a formação dos nomes das unidades de medida, acreditando-se que isso torna mais claro o que significam. Além disso, se realça a ideia de que uma unidade "pequena" cabe mais vezes na grandeza medida que uma unidade "grande".

Outro capítulo no mesmo volume, chamado perímetro, áreas e volumes, retoma e amplia as noções relativas à área de superfícies a partir da obtenção das fórmulas. Sendo proposto por meio da decomposição e composição de formas, com o uso do recurso didático tangram. Destaca-se nesse item, a decomposição e composição de figuras nas quais a área permanece invariante, isso é, obtenção de figuras equivalentes em relação à área.

No volume 3 (8º ano), no capítulo áreas e volumes, o conteúdo de áreas é retomado e aprofundado utilizando-se alguns recursos que servem para o seu cálculo, tais como: preenchimento da figura com unidades de área e contagem destas unidades, decomposição e composição de figuras e ainda, completamento de figura, para obter outra mais simples. Dessa forma, subentende-se que os alunos possam compreender a dedução das fórmulas do cálculo da área dos polígonos: paralelogramos, triângulos, losangos e trapézios. Assim, o autor conclui que fornece ligação entre o cálculo numérico e o algébrico.

Para finalizar, o volume 4 (9º ano), apresenta um capítulo que contempla o que já foi trabalhado sobre esses conteúdos nos anos anteriores. No entanto, se propõem a resolver problemas e exercícios que demandam criatividade e raciocínio matemático. Além disso, são feitas conexões com semelhança de triângulos e com o teorema de Pitágoras.

1.2 O ensino e aprendizagem de geometria aliado ao uso de recursos tecnológicos

Em continuidade, a pesquisa bibliográfica é expandida para aspectos relacionados ao uso de recursos tecnológicos como ferramentas mediadoras no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Parte-se da descrição de algumas potencialidades que as tecnologias digitais podem oferecer nesse contexto. Em seguida, apresentam-se algumas considerações sobre *softwares* de geometria dinâmica de acordo com algumas pesquisas publicadas na área. Por fim, descreve-se um pouco sobre o *software* GeoGebra, o qual este trabalho fez uso.

1.2.1 Tecnologia digital na Educação Matemática

Gravina e Basso (2012) colocam que a tecnologia digital dispõem diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis. Segundo esses autores, isso vem se mostrando por meio dos reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, em especial aquelas que têm foco nos imbricados processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo em que aspectos individuais e sociais se fazem presentes.

Sob essa ótica, Matheus (2013) ressalta a existência de várias potencialidades que as tecnologias têm a oferecer para o ensino e aprendizagem de matemática. Entre elas, cita o aspecto instrumental dos recursos tecnológicos, que por meio desse existe a possibilidade de propiciar experiências que nem sempre são possíveis de realizar com o uso de recursos convencionais. Também, considera relevante a interação dinâmica entre os objetos matemáticos presentes nesses recursos. Salientando que, a partir deles há a possibilidade de permitir aos alunos e professores o desenvolvimento de uma postura investigativa e reflexiva que fomenta a troca de experiências, favorecendo a construção do conhecimento matemático.

Nessa perspectiva, Sella (2008) atribui favoravelmente o uso da tecnologia em âmbito escolar, ao considerá-la um meio potente e valioso, onde os alunos podem penetrar novas informações e com elas trabalharem de diversas formas.

Em vários fragmentos dos PCN é reforçado o uso de tecnologias como auxiliadoras no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Segundo Brasil (1998), as tecnologias em suas diferentes formas podem constituir um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático, possibilitando de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. No mesmo documento, enfatiza-se a importância de articular as tecnologias digitais a matemática, pois coloca que:

> A Matemática também faz parte da vida das pessoas como criação humana, ao mostrar que ela tem sido desenvolvida para dar respostas às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e aqui leva-se em conta a importância de se incorporar ao seu ensino os recursos das Tecnologias da Comunicação.(BRASIL, 1998, p.59).

Refletindo acerca do exposto, entende-se que, a sociedade atual usufrui cada vez mais do uso de tecnologias de informação e comunicação, seja como forma de lazer, ferramenta de trabalho, meio de comunicação, modalidade de ensino, entre outras. Portanto, fica evidente constatar que o ambiente escolar precisa enquadrar-se nessa realidade, já que o aluno, como membro social, presencia estas transformações no meio em que vive.

Nesse sentido, a escola deve destinar espaços para o uso de recursos tecnológicos como forma do educando adaptar-se, ter domínios básicos, conhecer e manipular ferramentas tecnológicas com fins educativos que promovam certas habilidades e impliquem na aquisição de novos conhecimentos. Diante disso, entende-se que a utilização de recursos tecnológicos com a finalidade de auxiliar a prática docente e intervir como ferramenta facilitadora no processo de ensino e aprendizagem de certos conteúdos matemáticos é uma forma de efetivar essa inserção no ambiente escolar.

Penteado (2000) enfatiza que as inovações educacionais que envolvem o uso de tecnologias digitais, pressupõem uma mudança na postura do professor, atribuindo a ele um papel decisivo, no qual este precisa explorar as potencialidades das tecnologias informáticas em âmbito escolar. Essa pesquisadora considera fundamental que o professor de matemática, conheça *softwares* que possam ser utilizados no ensino de diferentes tópicos. Ainda, seja capaz de reorganizar a sequência de conteúdos e metodologias apropriadas para o trabalho com a tecnologia informática.

Outro aspecto salientado por Penteado (2000) no que tange ao uso de tecnologias informática (TI) em sala de aula são as relações de poder que podem estar presentes nesse contexto. Para ilustrar, cita o fato de que o aluno, frente a um computador possui várias opções, desde buscar ajuda *on-line,* comparar com programas e equipamentos que possuem em casa e, até mesmo, descobrir caminhos novos que o professor desconhece. Assim, o domínio da informação não está apenas com o professor, os alunos conquistam espaços cada vez maiores no processo de negociação na sala de aula. Diante disso, a autora coloca como necessário que o professor, reconheça que as informações se renovam em alta velocidade e estão disponíveis em fontes diversas. Ainda, segundo Penteado (2000), para um uso que explore as vantagens das TI a fim de ampliar experiências de ensino e aprendizagem se requer:

> (...) um movimento em direção a situações imprevisíveis e com alto nível de surpresa. Essa dimensão – caracterizada por incerteza, flexibilidade e surpresa – é a zona de risco. O uso de TI na escola, como nos sugere seu uso fora dela, requer do professor uma avaliação permanente dos procedimentos adotados e disponibilidade para o engajamento num processo contínuo de atualização. (PENTEADO, 2000, p.32).

Em consonância a isso, Sella (2008) diz que cabe ao professor a escolha por ambientes informatizados que possam propiciar interações de forma a permitir o estabelecimento de relações entre esses e os conteúdos. Também afirma que, por meio dessas interações, existe a possibilidade de criação de novas heurísticas, que precisam ser avaliadas e reavaliadas. Nesse sentido, considera que isso esteja associado com a forma como o professor compreende o que é matemática e, também, como este concebe o processo de aprendizagem dos alunos.

Gravina e Basso (2012) ressaltam a existência de muitos recursos disponíveis na *internet* para uso educacional. Diante disso, consideram que critérios de escolhas destes se fazem necessários. Para isso, esses autores reforçam dois aspectos relevantes em diferentes *softwares;* o primeiro relacionado com os conteúdos de matemática que neles estão envolvidos e, o segundo, refere-se aos recursos disponíveis para que os alunos possam fazer muitos experimentos de pensamento. Dessa forma, segundo a ótica desses autores, as mídias digitais tornam-se realmente interessantes, pois ajudam a mudar a dinâmica da sala de aula na direção de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas concomitantemente à aprendizagem da matemática.

Diante da variedade de *softwares* educativos disponíveis atualmente no mercado, Rodrigues (2008, p. 5) afirma que "é imprescindível o professor possuir um bom conhecimento destes, pois seu conteúdo deve visar uma aprendizagem significativa, aliando interatividade e informações a quem vai utilizá-los".

Silva (2009) descreve algumas possibilidades quando se utiliza *softwares* no processo de aprendizagem. Entre elas, a possibilidade de uso destes para explorar e descobrir formas mais eficazes de resolver problemas ou permitir a visualização de um objeto em diferentes ângulos. Desta maneira o aluno pode migrar de uma atividade mecânica para uma atividade dinâmica.

Ainda, referente às possibilidades experimentais do uso de *softwares* em sala de aula, Borba (2010) sugere propiciar situações que por meio destes os alunos possam explorar os objetos matemáticos, podendo chegar à elaboração de conjecturas, como também, sua verificação. Outro aspecto evidenciado por esse pesquisador relaciona-se ao aspecto visual que esse tipo de recurso possibilita, o qual vai além de exibir uma imagem, o *software,* juntamente com o aluno passa a ser visto como um agente ativo nesse processo. Dessa forma, ampliam-se as possibilidades de investigação e experimentação proporcionada por essas mídias que podem conduzir os alunos a aprendizagem.

A seguir, serão descritas, na visão de alguns pesquisadores da área, algumas características de *softwares,* classificados como de geometria dinâmica.

1.2.2 Ambiente de geometria dinâmica

Como mencionado anteriormente, existem muitos *softwares* desenvolvidos com finalidades educacionais. Nesse estudo utilizou-se um *software* de geometria dinâmica que, segundo Giraldo (2012), de maneira geral, esses ambientes fornecem:

> (...) uma representação computacional para o plano euclidiano, e suas ferramentas básicas são concebidas para reproduzir régua não graduada e compasso físicos - os chamados *instrumentos euclidianos*. Esta estrutura permite a simulação de construções geométricas que podem ser feitas com instrumentos euclidianos, sendo que nesses ambientes, as construções tornam-se *dinâmicas*, isto é, podem ser manipuladas de forma que as propriedades e relações dos objetos construídos sejam preservadas. (GIRALDO, 2012, p.120).

Entre as características desse tipo de ambiente, Gravina e Contiero (2011) destacam o recurso de "estabilidade sob ação de movimento", isto é, após uma construção geométrica, podem-se movimentar os pontos que dão início a esta construção e a figura que está na tela do computador pode ser transformada variando seu tamanho e posição. Entretanto, é preservado as propriedades geométricas que foram impostas no processo de construção, além das propriedades delas decorrentes. Nesse sentido, a mesma pesquisadora afirma que:

> Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento. (GRAVINA, 1996, p.6).

Mais especificamente, em termos do ensino de geometria, Gravina e Souza (2009) apontam algumas dificuldades encontradas pelos alunos em relação aos conteúdos desta área que vão além das dificuldades inerentes ao entendimento do significado de demonstrar um teorema e ao desenvolvimento de habilidades necessárias para a produção de demonstrações. Estas são dificuldades que os alunos possuem, consideradas pela pesquisadora, como consequências da tradicional forma de apresentação do saber matemático. Como forma de contribuir na superação desta dificuldade, apontam para as contribuições que o uso de mídias digitais pode trazer à aprendizagem. Destacando, em particular, a sincronização de figuras dinâmicas e manipuláveis com o texto que apresenta a argumentação dedutiva. Acreditando que, dessa forma, o seu uso permite veicular as ideias e argumentos matemáticos, com uma transparência que podem contribuir, tanto para o entendimento das demonstrações dos teoremas, como para a desenvoltura no uso da linguagem matemática.

Ainda, Gravina (2010) diz que na área da Educação Matemática os alunos encontram dificuldades em relação ao domínio da linguagem matemática, com seus signos, símbolos e desenhos. Diante disso, esta considera que diversas pesquisas na área fazem referências aos aspectos semióticos. Para além da tradicional linguagem formal, que devem ser levados em consideração nos processos cognitivos que concorrem para a construção do conhecimento, como exemplo coloca a possibilidade de se utilizar esses aspectos semióticos nas representações dinâmicas e manipuláveis que hoje se descortinam nas telas dos computadores na forma de figuras, diagramas, sons e objetos metafóricos.

Nessa perspectiva, Gravina e Basso (2012) acentuam que a tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam *sistemas dinâmicos de representação* na forma de objetos *concreto-abstratos*. Esses são entendidos como concretos porque existem na tela do computador e, podem ser manipulados e são ditos abstratos, pois respondem as elaborações e construções mentais realizadas.

Em consonância a isso, Giraldo (2012) diz que, quando um objeto geométrico é representado por meio de papel e lápis, geralmente usam-se notações para indicar suas propriedades. Dessa forma, essas propriedades determinam a maneira de se representar, e se fazem notar na representação. Entretanto, quando a representação for construída em ambientes de geometria dinâmica, surge outra qualidade de reflexão em relação a suas propriedades e relações matemáticas. Estas são consideradas pelo pesquisador como a garantia de validade dessas propriedades e relações presentes no objeto representado, pois existe a necessidade de incorporá-la concretamente no próprio processo de construção da representação. Ainda, Giraldo (2012) considera que atividades que fazem o uso de construção em ambientes dinâmicos, demandam um maior nível de conhecimento matemático. Também afirma que, as experiências propiciadas nesse contexto podem fornecer pistas sobre outras propriedades e relações dos objetos construídos. Além daquelas que fazem parte de suas definições ou são dadas nos enunciados dos problemas. Isso pode sugerir sua validade ou não e, ainda, indicar caminhos para sua dedução.

A presente pesquisa, utilizou o *software* GeoGebra[1], para o desenvolvimento da sequência didática que está descrita no capítulo 3. Além das características mencionadas para esse tipo de recurso, destaca-se que este é um *software* de código aberto, multiplataforma e está disponível gratuitamente para usuários não comerciais. Outro fator considerado relevante é que o mesmo possui versão na língua portuguesa e apresenta uma *interface* amigável.

O formato inicial apresentado na tela, conforme ilustrado na figura 1 é caracterizado através de duas perspectivas: a janela algébrica, onde ficam armazenadas as representações algébricas e vetoriais e a janela de visualização, destinada a zona gráfica onde ficam dispostas as representações geométricas dos objetos construídos. Dessa forma, o GeoGebra, permite simultaneamente a articulação entre a geometria e a álgebra.

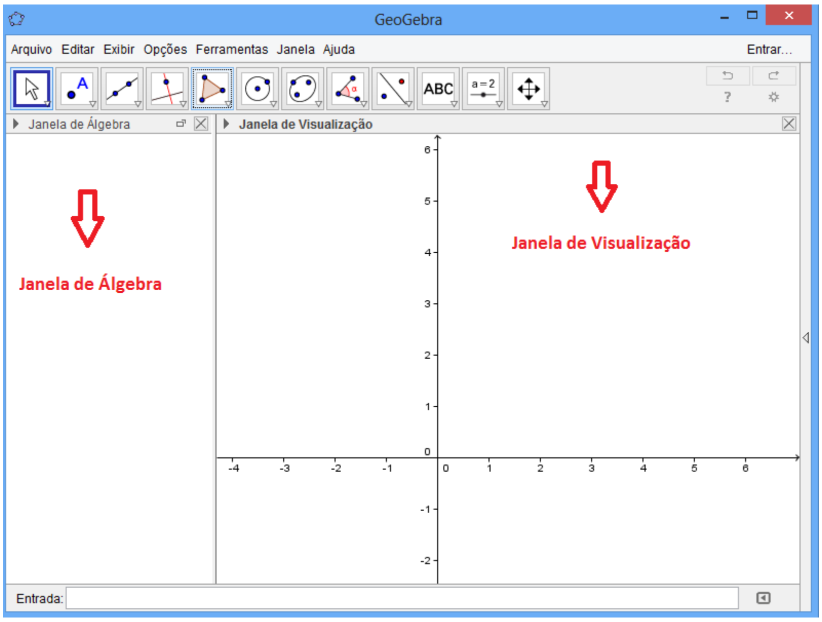


Figura 1- Tela inicial do *software* GeoGebra.

Gravina e Basso (2012) descrevem outras características na *interface* deste aplicativo citando que:

> A sua tela de trabalho disponibiliza, em linguagem clássica da geometria, recursos para construção de figuras a partir das propriedades que as definem. O processo de construção é feito mediante escolhas de primitivas que são disponibilizadas nos

[1] Disponível em: http://www.geogebra.org.

> diferentes menus – pontos, retas, círculos, retas paralelas, retas perpendiculares, transformações geométricas, por exemplo. A base inicial de menus pode ser expandida com a inclusão de automatização de rotina de construção – são as novas ferramentas que se incorporam ao *software*. (GRAVINA; BASSO, 2012, p.19).

Além disso, este recurso permite explorar conceitos na área de cálculo, álgebra, estatística e probabilidade através de diferentes representações, entre elas, cita-se: planilhas, janelas algébrica, gráfica e geométrica, em ambientes 2D e 3D.

Especificamente para essa pesquisa foram exploradas algumas funcionalidades do GeoGebra, as quais encontram-se detalhadas ao longo do capítulo 3.

2 BASES TEÓRICAS

Esse capítulo destina-se as fundamentações teóricas que subsidiam o presente estudo. Inicialmente, apresenta-se em linhas gerais a teoria dos registros de representação semiótica, em seguida, estendem-se as reflexões desta sobre o ensino de geometria e o uso de ambientes informatizados em âmbito escolar. Por fim, mostram-se algumas considerações propostas por pesquisas constituídas a partir da referida teoria sobre o objeto de estudo desta pesquisa.

2.1 Teoria dos registros de representação semiótica

A teoria apresentada por Raymond Duval, filósofo e psicólogo reconhecido em pesquisas de Educação Matemática, trata principalmente do funcionamento cognitivo, na atividade matemática e em problemas de aprendizagem. Dentre seus trabalhos, enfatiza-se a utilização da língua materna nos procedimentos matemáticos, as compreensões de textos matemáticos, as diferentes formas de raciocínio e argumentação. Salientam-se ainda, os estudos por ele desenvolvidos referentes a diversas representações mobilizadas pela visualização matemática.

O ensino de matemática, sob o ponto de vista de Raymond Duval (2003), tem como objetivo, contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. Também, atribui o papel primordial das representações semióticas na atividade cognitiva requerida pela matemática. Além disso, por essa razão, a diferencia dos demais domínios do conhecimento, pois seus objetos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente, mas somente através de suas representações semióticas.

Duval (2009) coloca como fundamental para compreender a matemática que o aluno consiga estabelecer a distinção entre um objeto e sua representação, já que um mesmo objeto pode ser dado através de diferentes representações.

Nessa perspectiva, entende-se a relevância de levar em consideração os aspectos indicados por Duval, que designa diferentes tipos de representações semióticas utilizadas nesta área do conhecimento, denominando-as de registro de representação. Esses registros são classificados em quatro grandes grupos: língua natural, sistemas de escritas, registro figural e registro gráfico.

Neste sentido, Duval (2012b) afirma que em um sistema semiótico um registro de representação, deve permitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose, que por sua vez, é considerada a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, são elas:

- A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado, em que se assegurem condições de identificação e reconhecimento da mesma e a possibilidade de sua utilização para tratamentos;
- O tratamento considerado como uma transformação de uma representação em outra no mesmo registro no qual ela foi formada;
- A conversão é a transformação de uma representação em outro registro conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial.

Como mencionado anteriormente as representações semióticas são consideradas vias de acesso aos objetos matemáticos. Diante disso, Duval (2003) diz que uma atividade matemática deve mobilizar ao menos dois registros de representações ao mesmo tempo, ou possibilitar momentos de trocas de registros de representação.

2.1.1 Um olhar à geometria sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica

Em diversas publicações de Duval (2005, 2011, 2012a, 2012b) acerca do estudo de geometria, o pesquisador enfatiza os processos cognitivos requeridos por essa área que preenchem as específicas funções epistemológicas: visualização, construção e raciocínio.

A visualização é entendida como a exploração heurística de uma situação complexa, nessa função destaca-se quatro formas de interpretação de figuras na resolução de problemas, denominadas de apreensões, são elas: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial.

A primeira dessas apreensões, a perceptiva, está relacionada aos problemas geométricos que envolvem as maneiras de ver as figuras e, com base nisso, interpretar as formas que as compõem.

A segunda apreensão, a discursiva, possui relação com a interpretação dos elementos da figura geométrica. Muitas vezes, depende do que é dito no enunciado a respeito do objeto geométrico, como hipótese e, também, pode estar relacionada com as propriedades deste. Esta apreensão pode ser considerada como uma teorização da representação figural. A terceira apreensão, a operatória, está centrada nas possíveis modificações de uma figura inicial e às reorganizações que essas mudanças podem possibilitar. Neste tipo de apreensão são distinguidos três casos específicos:

- modificação mereológica, que consiste em dividir uma figura em várias subfiguras ocorre em função da relação parte e todo (no item 2.1.4 este tipo de modificação encontra-se mais detalhado);
- modificação ótica: quando aumenta, diminui ou, ainda, deforma uma figura transformando-a em outra, tal que, esta seja vista como sua imagem;
- a modificação posicional: corresponde a deslocar, rotacionar e refletir a figura em relação ao campo de referência em que ela se encontra.

Por fim, a quarta apreensão, a sequencial, é explicitamente solicitada em atividades de construção ou de descrição; tendo como finalidade a reprodução de uma figura geométrica.

Cabe salientar que, na resolução de problemas geométricos, as quatro apreensões aparecem. Porém, dependendo do tipo de problema, umas podem ser mais requisitadas do que outras.

Retomando as formas de processo cognitivo requeridos em geometria, Duval (2011) coloca a construção de configurações, a qual pode ser trabalhada através de um modelo, em que as ações realizadas, bem como, os resultados observados, associam-se aos objetos matemáticos representados. O terceiro processo cognitivo, denominado raciocínio, é considerado como o processo do discurso, que conduz para a prova e a explicação.

Embora Duval (2011) descreva separadamente esses três processos cognitivos, considera que eles estejam entrelaçados em sua sinergia e, cognitivamente, necessários para a proficiência da geometria.

De acordo com essa teoria, as propriedades puramente qualitativas são consideradas o primeiro limite crítico na aprendizagem de geometria. Isso, consequentemente, está relacionado como se dá o ensino que, por sua vez, também é colocado como um processo complexo e decisivo no entendimento de uma abordagem geométrica.

Essas propriedades estão enraizadas na percepção e, Duval (2005) afirma que, os conteúdos de geometria estão dispostos no currículo escolar de forma muito limitada, não valorizando esses aspectos. Como forma de explorar estes aspectos, considera que no ensino de geometria, as figuras devem estar na intersecção de uma grande variedade de atividades que envolvam: observação, reprodução, construção, descrição e definição, entre outros.

Duval (2005), ainda menciona as dificuldades apresentadas pelos alunos nos sistemas de avaliação e, como forma de superá-las coloca como relevante a valorização da intuição geométrica. Sendo que, esta se baseia na percepção do espaço ao redor e suas representações, tais como: imagens, mapas, plantas, desenhos e figuras.

Nota-se que a percepção é um ponto fundamental para compreender a geometria. Mas, também é reconhecido nessa teoria que a percepção, muitas vezes, pode gerar problemas em algumas atividades. Porque, na maioria das vezes, ela impõe uma maneira comum de ver que, em alguns casos, dificultam as duas maneiras que são solicitadas no ensino de matemática: a primeira está centrada na construção de figuras utilizando instrumentos, e a segunda, centra-se na função heurística que permite aparecer formas que não são vistas em um primeiro olhar na atividade.

Geralmente, essa passagem dos modos de ver se torna difícil aos alunos, especialmente a segunda maneira. No entanto, estas duas formas de ver são uma manifestação de uma terceira, que constitui o mecanismo cognitivo da visualização matemática: a desconstrução dimensional das formas.

A construção de figuras, ou o uso heurístico, só têm sentido na medida em que elas se inserem no funcionamento de visualização matemática. Porque com este terceiro modo de ver, são discutidos aspectos referentes às suas dimensões e, também, a mudança do número de dimensões. Essa mudança está centrada no olhar geométrico das figuras.

2.1.2 Classificação das maneiras de ver uma figura geométrica

Duval (2005) diz que existem inúmeras atividades que podem envolver as maneiras de ver propostas pela teoria. Nesse sentido, está a reprodução de figuras de acordo com um modelo ou passos de construção; as modalidades concretas utilizando material manipulável; ou as modalidades representativas utilizando gráficos e, ainda, a modalidade técnica, utilizando instrumentos, entre outras. Devido a essa variedade de atividades, Duval distingue quatro maneiras de ver uma figura geométrica, sob olhar do: botânico, agrimensor, construtor e inventor. Far-se-á uma breve descrição de cada uma delas:

- Olhar do Botânico: considerada mais evidente e imediata. Está relacionada com o reconhecimento de formas e contornos básicos presentes na geometria plana. Como por exemplo, tipos de quadriláteros ou de triângulos. Evidencia as semelhanças e diferenças das formas para o reconhecimento.

  Segundo Duval (2005), esse tipo de atividade não é tipicamente geométrica, já que poderiam ser consideradas para uma análise, qualquer tipo de forma. Para exemplificar isso, sugere o reconhecimento de diferentes formas de folhas de árvores. No entanto, parece um olhar específico da geometria, na medida que, se faz o uso de formas "Euclidianas", mas isso não é suficiente para considerá-la tipicamente geométrica.

  Esse primeira maneira de ver não utiliza nenhum tipo de propriedade, nem quantifica ou mensura as formas. Porém, as características desse modo de ver são consideradas relevantes para preparar o aluno para os demais modos.

- Olhar do agrimensor: como é sugerido pela própria denominação está relacionada com medidas. Por exemplo, comprimentos de terras, ou distâncias entre pontos de referência. Esta maneira de ver está diretamente ligada a correspondência de transpor de uma escala de grandeza para outra. Nas atividades que envolvem esse tipo de olhar as propriedades geométricas são mobilizadas para fins de medição.
- Olhar do construtor: necessita a utilização de instrumentos para construir as figuras geométricas, pelo menos, aqueles que correspondem a formas euclidianas elementares e suas configurações. A partir do uso de instrumentos os alunos podem realmente compreender que as propriedades geométricas não são apenas características perceptivas. Outro aspecto deste modo de visualização consiste na possibilidade de experimentar, de alguma forma, as propriedades geométricas como restrições da construção. Alguns *softwares* podem ser considerados como instrumentos no quais uma figura construída neles deve manter a sua configuração.
- Olhar do inventor: Esse tipo de olhar está presente em problemas que exijam uma desconstrução visual das formas perceptivas elementares que se impõem à primeira vista, sendo capaz de obter a reconfiguração ou a figura solicitada. Salienta-se também que, esse modo de ver é condição necessária em qualquer problema de utilização heurística de figuras. Outra característica expressiva desse tipo de problema é adição de traços que permitam uma reorganização visual da figura de partida a fim de obter a resolução do mesmo.

Outro aspecto evidenciado por Duval (2005) consiste na passagem de uma maneira de ver para outra. Essa passagem constitui uma mudança profunda de olhar. Isso se deve ao fato de que o funcionamento cognitivo inerente a cada uma destas quatro maneiras de ver não é a mesmo. Sendo que, cada modo de ver leva a um tipo particular e limitado de compreensão e, consequentemente, o conhecimento desenvolvido também não é o mesmo. As características de compreensão e reconhecimento de uma figura geométrica para cada modo de ver são apresentadas no quadro 2.

	Botânico	Agrimensor	Construtor	Inventor
Estatuto epistemológico	Verificação perceptiva imediata, "Que se vê em ...”	Verificação a partir da leitura de um instrumento de medida.	Resultado de um procedimento de construção.	Resultado da decomposição de uma figura de partida em unidades figurativas que reconfiguradas em outra figura.
Fonte Cognitiva da certeza	Sobreposição realizada a olho ou utilização de um modelo.	Comparação valores numéricos que são obtidos empiricamente	Necessidade interna de uma sequência de operações e procedimentos de construção.	Invariância de unidades figurativas que são referências da transformação da figura de partida.

Quadro 2- Modo de compreensão e conhecimento relacionado a cada maneira de ver uma figura geométrica.
Fonte: Tradução nossa a partir de DUVAL, 2005, p. 19.

Duval (2005) denomina dois modos opostos de funcionamento cognitivo envolvido no ato de ver uma figura em geometria: a visualização icônica e a não icônica. Na visualização icônica as operações são o reconhecimento e diferenciação das formas e, na visualização não icônica, está a identificação dos objetos correspondentes às formas reconhecidas. Ele destaca ainda que, esses dois modos são diferentes e independentes um do outro. Porém, muitas vezes, eles se fundem na sinergia de um mesmo ato.

O maior problema cognitivo, conforme mencionando anteriormente, está em fazer a passagem de um reconhecimento e a diferenciação de formas para a identificação de objetos dados para a visualização. Na percepção do mundo que nos rodeia esses dois níveis de operação não parecem dissociados porque são simultâneos (pelo menos ao nível da nossa consciência), o objeto a ser imediatamente dado e a forma que permite distingui-lo. Assim, muitas vezes, o mecanismo cognitivo de iconicidade não é suficiente, sendo necessário o uso de um enunciado, implícito ou explícito. Em outras palavras, é preciso inserir informações verbais incorporadas na imagem como, por exemplo, uma legenda ou codificação de um elemento figurativo. Para que, dessa forma, seja possível identificar quais são as formas discriminadas na representação. Mas esse papel auxiliar do enunciado não deve deixar em segundo plano a importância do mecanismo de iconicidade. Pois ele continua a impor de forma autônoma, sempre que alguma "coisa" (desenho, figuras ou formas das peças a manipular) é dada para visualização.

Relacionando esses funcionamentos cognitivos com as quatro formas de visualização descritas anteriormente, tem-se que a passagem se efetua de maneira diferente: para as duas primeiras, olhar do botânico e do agrimensor, ela funciona como qualquer representação visual fora da geometria. Mas, para as outras duas, olhar do construtor e do inventor, ocorre contrariamente, pois exige a neutralização do mecanismo de iconicidade. Na figura 2 é apresentado um esquema a respeito desses funcionamentos cognitivos.

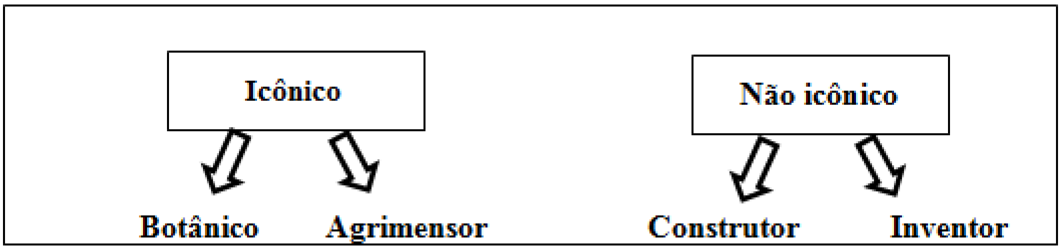


Figura 2- Funcionamentos cognitivos relacionados com a forma de ver. Imagem elaborada pela autora
Fonte: Adaptado a partir de Duval, 2005, p. 13.

Dessa forma, passar da maneira de ver no olhar do botânico ou do agrimensor para o olhar de um construtor e inventor, exige mais que a contribuição verbal de informação. Impõem-se transformações visuais nas figuras dadas e, isso pode ser realizado com, ou sem instrumento (régua, compasso ou *software*, entre outros). Nessa transformação, uma figura dada pode gerar outra, por extensão, de seu processo de construção, ou por reorganizações visuais das formas imediatamente reconhecidas.

2.1.3 Tratamentos puramente figurais

O estudo de geometria centra-se no uso do registro figural, no qual existe a possibilidade de explicitar nele operações de visualização específicas através de tratamentos puramente figurais.

A definição de figura dada por Duval (2012a) é a seguinte:

> Uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo. Segundo a sua dimensão, estes elementos podem ser pontos, traços ou zonas. Os pontos e os traços caracterizam-se, respectivamente, pelo aspecto discreto e contínuo. As zonas caracterizam-se pela sua forma, quer dizer, pelo seu contorno: um traço fechado ou uma sequência de pontos suficientes para destacar uma zona de um campo homogêneo. (DUVAL, 2012a, p.121).

Assim, no estudo de geometria é necessário propiciar situações em que, a partir dos registros figurais utilizados, seja possível explorar qualitativamente as figuras geométricas e o sujeito em interação com esses registros possa se tornar suscetível a interpretações que, por sua vez, são denominadas por Duval (2012b), de apreensões figurais.

Nessa perspectiva, Duval (2011) afirma que é preciso assumir que as figuras formam um registro de representação semiótico específico. Para mostrar isso surgem as operações figurais que permitem, independentemente ou até mesmo antes, a utilização de uma propriedade matemática. Uma característica dessas operações é que, a partir delas existe a possibilidade de transformar qualquer figura em outra, para fins de solução ou de produzir um contra exemplo, ou ainda modelar uma situação.

Duval (2011) coloca que as figuras geométricas podem ser reconhecidas de várias formas ou unidades figurais. Assim, para ver matematicamente uma figura é necessário mudar o olhar sem que a representação visual no papel ou na tela do computador seja modificada.

Assim, para analisar o funcionamento cognitivo dessa mudança de olhar, é preciso considerar a dimensão das unidades figurais das figuras geométricas, que podem ser reconhecidas como sendo tridimensionais (3D), bidimensionais (2D), unidimensionais (1D) ou 0D (sem dimensão). Como exemplos, cita-se: cubo, polígono, reta ou ponto, respectivamente.

Outro aspecto enfatizado por Duval (2011) é a realização de uma desconstrução dimensional das formas que são reconhecidas imediatamente, em outras, que não são vistas à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura inicial.

Nesse sentido, Duval (2005) diz que quando se toma uma figura reconhecida imediatamente como uma forma 2D, esta, na maioria das vezes, não se decompõe perceptivamente em uma forma 1D. Em outras palavras, existe uma prioridade cognitiva de figuras 2D sobre as figuras 1D. Este aspecto pode ser exemplificado a partir da figura 3, onde a visualização que prevalece é um pequeno triângulo BDC, colocado sobre um triângulo maior, AEF, ou ainda, como um mosaico de triângulos pequenos. No entanto, também poderia ser vista como um feixe de segmentos paralelos dois a dois $\overline{EF} // \overline{BC}$, $\overline{BD} // \overline{AF}$ ou $\overline{CD} // \overline{AE}$, entre outras formas.

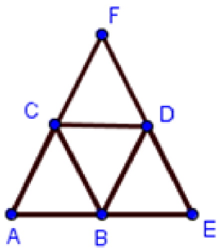
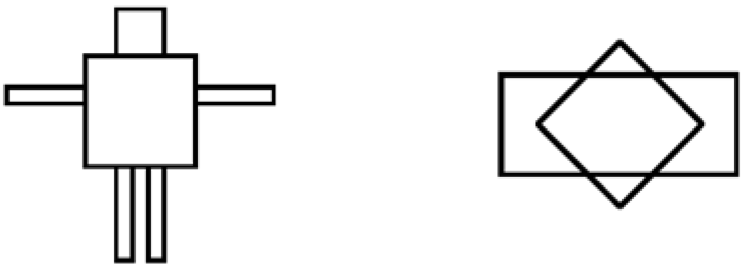


Figura 3- Prioridade cognitiva de figuras 2D sobre figuras 1D. Imagem elaborada no GeoGebra pela autora.

Com isso, coloca-se a importância de se criar atividades que explorem as mudanças na maneira de olhar as figuras. Pois na maioria das vezes, as definições e formulações de propriedades presentes em geometria privilegiam-se do reconhecimento de unidades figurais 1D/2D.

Duval (2005) também chama atenção à maneira visualizar uma figura que possui diversas unidades figurais de mesma dimensão. Como no caso das figuras planas, quando se pode distinguir pelo menos dois contornos fechados, dessa forma podem ser vistas como: um conjunto por justaposição (Figura 4a) ou sobreposição (Figura 4b).



(a) Justaposição (b) Sobreposição

Figura 4- Formas de ver unidades figurais 2D. Adaptado a partir de Duval (2011).

Na figura 4b, por sobreposição, as unidades figurais são: um quadrado e um retângulo. Nesta há uma redução significativa de formas efetivamente reconhecidas. Existe uma resistência perceptiva intrínseca de ver essa figura como um conjunto por justaposição. Por exemplo, neste caso seria um conjunto de três formas diferentes: dois triângulos, dois pentágonos não convexo e um hexágono convexo. Entretanto, ao analisar a figura 4a, o caráter figurativo da figura “corpo humano” propicia que ela seja vista como um conjunto de seis unidades figurais: dois quadrados e quatro retângulos. No entanto, esta mesma figura pode também ser vista como um conjunto por sobreposição: os dois "braços" seriam uma única forma retangular e o contorno da "cabeça", poderia ser considerada uma extensão das "pernas". Isto exemplifica uma análise visual, entretanto podem existir outras formas de olhar esta figura dentro das classificações propostas por Duval. Assim, percebe-se que as atividades que envolvem registros figurais podem mostrar diversas formas de ver.

2.1.4 A decomposição heurística por divisão mereológica de formas reconhecidas

Duval (2005) considera que, muitas vezes, a utilização heurística de uma figura exige olhares como se fossem peças de um quebra-cabeça. Mas isso pressupõe que se faça a decomposição da figura em unidades figurais do mesmo número de dimensões que a figura inicial (de partida).

Esta decomposição, denominada divisão mereológica**,** que corresponde a divisão do todo em partes justapostas ou sobrepostas é realizada para reconstruir com as partes obtidas, uma figura visualmente muito diferente da figura de partida, denominando-a de reconfiguração. Sendo este um tratamento que consiste na partição de uma figura em subfiguras. Em comparação, realiza-se com as mesmas uma eventual remontagem constituindo-se outra figura de contorno global diferente.

Almouloud (2010) considera a reconfiguração como sendo:

> [...] a operação que consiste em organizar uma ou várias subfiguras diferentes de uma figura dada em outra figura. Com efeito, as partes elementares obtidas por fracionamento podem ser reagrupadas em muitas subfiguras, todas dentro da figura de partida. Essa operação permite, portanto, engrenar imediatamente os tratamentos, tais como as medidas de áreas por soma de partes elementares, ou evidenciar a equivalência de dois reagrupamentos intermediários. (ALMOULOUD, 2010, p. 127).

Duval (2005) afirma que esse tipo de decomposição de figuras é uma das abordagens mais antigas da história da geometria. Sendo que, as primeiras "demonstrações" do teorema de Pitágoras foram baseadas em operações de decomposição por divisão mereológica. A decomposição mereológica pode ser considerada de três formas:

- Estritamente homogênea: a decomposição produz unidades da mesma forma da figura de partida. Para ilustrar, observar na figura 5, onde os quadriláteros constituem as unidades figurais.

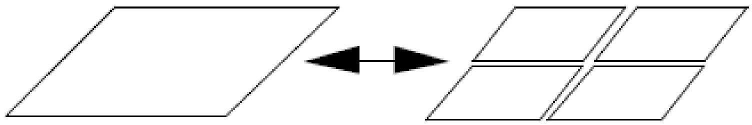


Figura 5- Exemplo de decomposição mereológica estritamente homogênea. Imagem adaptada de Duval (2005).

- Homogênea: a decomposição resulta em unidades figurais de formas diferentes da figura de partida, mas todas de mesma forma, conforme mostra a figura 6.

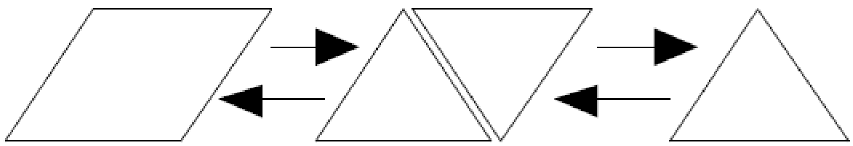


Figura 6- Exemplo de decomposição mereológica homogênea. Adaptado a partir de Duval (2005).

- Heterogênea: a decomposição é feita em unidades figurais de formas diferentes entre elas. Por exemplo, na figura 7, o problema de particionar um triângulo em duas partes para construir um paralelogramo implica em uma decomposição heterogênea.

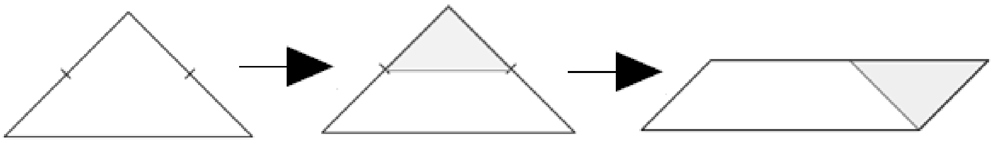


Figura 7- Exemplo de decomposição mereológica heterogênea. Adaptado a partir de Duval (2005).

A decomposição mereológica pode ser realizada materialmente, por recorte e montagem de peças obtidas, como no caso de um quebra-cabeça; graficamente, adicionando traços reorganizadores e ainda, apenas um olhar. Outra característica evidenciada por Duval (2005) na decomposição por divisão mereológica é que, na maioria das vezes, não está ligada diretamente com o discurso matemático. Por isso, ela permite uma exploração puramente visual de uma figura de partida, detectando as propriedades geométricas envolvidas, a fim de, utilizá-las para resolver um problema proposto.

2.1.5 A importância do registro língua natural e suas operações discursivas no ensino de geometria

Segundo Duval (2011), um campo de trabalho em geometria comporta duas dimensões. A primeira está associada aos aspectos dos objetos geométricos, forma ou grandeza, através de operações figurais ou de medida de cálculo. A segunda está relacionada com a sequência temporal das atividades que são proporcionadas aos alunos. Nesta segunda, encontra-se a manipulação de objetos físicos em relação a propriedade matemática. Sendo que, também pode ser um trabalho sobre as representações figurais 2D, com ênfase nos procedimentos de construção de uma figura que tenha uma propriedade estudada; para verificar a validade de uma propriedade; ou ainda, pode se constituir atividades que contemplem o recurso linguagem a fim de fixar resultados vistos em atividades anteriores.

Diante da variedade de atividades que podem ser propostas no estudo de geometria, Duval (2011) coloca como coerente, ao iniciar o trabalho com geometria propor atividades que centrem-se no reconhecimento das unidades figurais, ou na desconstrução dimensional 2D. Salientando que, em um primeiro momento, toda operação sobre o aspecto grandeza pode ser excluída. No entanto, ele chama a atenção para a importância do recurso linguagem nestas diferentes atividades. Acredita que esse recurso tenha que ocorrer não apenas oralmente, mas também, no modo escrito. Uma vez que, a passagem destes dois níveis constitui um salto muito grande para a maioria dos alunos.

A língua natural, segundo Duval (2011), é considerada como um registro de representação semiótica e não como um código. Pois, no seu entendimento, cumpre as funções cognitivas na qual o ato de expressão e de compreensão de um discurso discriminam unidades de sentido em função de diferentes níveis de organização dos discursos.

Nessa perspectiva, o discurso é entendido como o emprego de uma língua, seja para dizer alguma coisa, a saber: para falar de objetos físicos, ideais ou imaginários. Não sendo, conforme Duval (2009) explicita, somente as potencialidades significantes de uma língua.

Ainda, em Duval (2011, p. 76) este afirma que a língua "repousa nas operações discursivas que cumprem as funções cognitivas e que todo o ato de expressão e de compreensão de um discurso produz mobilizando diversos graus".

Em Duval (2009, 2011) este distingue três tipos de operações discursivas e as funções cognitivas das línguas naturais. A primeira, a função referencial, implica na operação de designação de objetos sobre os quais, ou a propósito do que, se vai enunciar algo. As unidades de sentido, correspondentes à designação dos objetos, não são as palavras, mas as expressões que combinam pelo menos duas palavras. Assim, essa operação pode ser mais ou menos complexa, em razão da insuficiência do número de palavras em relação a todos os objetos que se pode levar a querer designar.

A função apofântica implica na operação de constituição de um enunciado completo. Ou seja, consiste dizer algo dos objetos assim designados sob a forma de uma proposição. A enunciação de uma frase entra em outra dimensão de sentido dada pelas palavras para designar alguma coisa. Essa unidade de sentido é constituída por seu valor epistêmico (absurdo, possível, provável,...), seu valor lógico (verdadeiro, falso ou indefinível), pragmático (ordem, promessa,..) ou por seu *status* (hipótese, definição ou conclusão).

A função de expansão discursiva implica na operação de articulação de enunciados completos em uma unidade coerente, isto é, são aquelas que organizam uma sequência de frases em unidade com um mesmo propósito e, que lhe dão uma coerência. Elas podem ser: lógicas ou natural. Para exemplificar, respectivamente, essas funções, Brandt; Moretti e Basso (2014) sugerem os seguintes enunciados: "*Se ΔABC é isósceles com* $\hat{A} = \hat{B}$ *, ΔDEF é isósceles com* $\hat{E} = \hat{F}$ *e se* $\hat{A} \equiv \hat{E}$*, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes*." e "*A soma de dois números ímpares é um número par*.".

Entre essas funções designadas por Duval (2009), ele destaca a expansão discursiva. Pelo fato de articular diversos enunciados completos na unidade coerente. Seja por meio de uma narração, descrição, explicação ou passos de um raciocínio.

Dessa forma, para classificar as diferentes funções discursivas requeridas irá depender do tipo de atividade proposta. Além disso, é preciso levar em conta a escolaridade dos alunos, a forma de produção e de interlocução própria do meio no qual se produz esses discursos.

2.2 Apontamentos de Duval em relação a ambientes informatizados

Em uma entrevista concedida por Duval (2013), este afirma que os ambientes informatizados comandam tão poderosamente todos os setores da atividade humana, e considera que “se adaptar à realidade e ao mundo, é hoje se adaptar às telas *via* utilização de *softwares*”.

Segundo Duval (2011) os computadores não constituem um novo registro de representação. Pelo fato de que, as representações que eles exibem são as mesmas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. Em outras palavras, ver uma figura no monitor ou no papel, exige que seja feita a mesma desconstrução dimensional ou que se antecipem as mesmas operações mereológicas.

Quanto aos *softwares*, segundo sua ótica, se constituem um modo fenomenológico de produção novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos. Duval (2011, p.137) diz que “eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual.”. Dessa forma, ao se utilizar esses recursos se obtêm imediatamente, muito mais rápido do que se obteria fazendo à mão livre, com o uso de escritas, cálculos ou com a construção de figuras.

Outra característica salientada por Duval (2011) referente às potencialidades do uso de *softwares* está na novidade fenomenológica mais espetacular, ligadas às representações semióticas não discursivas, pois existe a possibilidade de manipulação destas representações como objetos reais. Destaca-se um trecho onde ele ressalta este aspecto:

> Podemos desloca-las, ao fazê-la rodar, ou estendê-la a partir de um ponto. Esse aspecto “dinâmico” é apenas uma consequência da potência ilimitada do tratamento. Mas, ele permite desempenhar uma função que nenhum dos outros modos fenomenológicos permite: a função de simulação. Extremamente importante fora da matemática, essa função de simulação permite a exploração heurística de problemas matemáticos. (DUVAL, 2011, p.137).

Duval (2013) considera que, do ponto de vista cognitivo, os *softwares* trazem três grandes inovações, sendo por ele, indicadas:

> A mais fascinante é *o poder de visualização* que eles oferecem em todas as áreas. A segunda é que eles constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela. Em outras palavras, eles não são somente um instrumento de cálculo cuja potência cresce de modo ilimitado, mas eles cumprem *uma função de simulação e de modelagem* que ultrapassa tudo o que podemos imaginar “mentalmente” ou realizar de modo gráfico-manual. Enfim, a produção pelos computadores é quase imediata: *um clique, e isto é obtido sobre a tela*! (DUVAL, 2013, p. 24).

O processo de visualização, quando se faz uso de um *software* nessa ótica seria completamente “externalizado”, ou seja, fica a cargo da ferramenta computacional. Porém, segundo Duval (2013) é necessário encontrar formas de superar duas dificuldades, são elas:

> A primeira é a *articulação com os enunciados* de propriedades e teoremas, sem os quais não existe prova matemática. Este aspecto é importante, não somente do ponto de vista cognitivo, mas também do ponto de vista matemático, porque *a visualização na tela repousa sobre o processo de discretização* e não visualiza a continuidade matemática e o infinito. A segunda dificuldade é *o olhar do aluno* que observa o que aparece na interface da tela, se deixando espontaneamente guiar pelo reconhecimento perceptivo de formas produzidas na tela. Mas o primeiro passo na aprendizagem da geometria é a educação ao modo matemático de ver as figuras. (DUVAL, 2013, p. 24).

Diante disso, ao propor atividades que utilizam *softwares* como ferramenta didática, é necessário propiciar situações que possam aguçar as maneiras de ver uma figura em geometria, conforme foi detalhado anteriormente.

Duval (2011) considera que a atividade cognitiva requerida pelo aluno ao utilizar o computador deve ser uma questão importante. Isso pode ser entendido como: ”o que é suficiente o usuário fazer para exibir qualquer coisa no monitor como resposta a uma pergunta?” Dessa forma, ele observa que a *interface* real entre o computador e o indivíduo não é o que se exibe no monitor. Mas o que permite comandar uma exibição, isto é, o *menu* de comando para as instruções. Assim, coloca-se como necessário analisar as tarefas cognitivas requeridas pela utilização de cada *software*, em função das ações que seu *menu* autoriza ou exclui. O quadro 3, exemplifica a análise de algumas atividades cognitivas requeridas para a utilização de um computador, de acordo com Duval (2011).

Menu de comando	Ação	Atividade cognitiva mobilizada
Uma lista de termos designando os objetos matemáticos e as operações matemáticas ou não.	Escolher um termo para uma instrução ou compor uma sequência de várias instruções.	Conhecimento dos termos matemáticos e decomposição da figura esperada em função da escolha dos termos do *menu*.
Lugar vazio para uma equação.	Escrever uma equação.	Conversão automática de uma equação dada, ou coordenação preliminar para escolher o tipo de equação, a fim de obter o tipo de curva ou superfície esperada.
Uma tabela de ícones.	Apoio sobre um ícone.	Reconhecimento do ícone que codifica a instrução correspondente ao pedido.
O *mouse* ou *tablet.*	Deslocar manualmente o *mouse*.	Coordenação do gesto e da visão para manipular a figura obtida.

Quadro 3- Descrição das tarefas cognitivas requeridas para a utilização de um computador.
Fonte: Duval, 2011, p.138.

Assim, Duval (2011, p. 134) considera que “o *menu* de comando intervém como um filtro muito vinculativo e restritivo, se não redutor, que pode ir contra a maneira de ver ou de formular os modos fenomenológicos de produção seja ela mental, oral ou gráfico-visual”. Ele ainda faz algumas observações nesse sentido:

- Uma quantidade grande de instruções pode ser feita. Mas pode ser exibido o gradativamente na tela do computador. Nesse sentido, aproximando-se muito com o modo de produção da fala. No entanto, isso pode encontrar limitações da memória que são aquelas próprias da escuta distraída ou atenta, dificultando o trabalho de observação ou comparação das representações utilizadas.
- Um *menu* que privilegia um registro de representação para obter a representação correspondente em outro registro. Assim, é imprescindível propiciar o desenvolvimento da coordenação de registros, efetuando a entrada inversa nesses, pelo menos em uma fase da aprendizagem.

- Na construção de figuras é necessário ficar atento ao *menu* verbal, pois esse pode impor a antecipação da desconstrução da figura em unidades figurais. As quais podem não se originar da visualização ou do modo de "ver" a decomposição de uma figura.

Diante disso, Duval (2011) considera duas variáveis didaticamente pertinentes na análise das atividades propostas aos alunos, bem como na produção destes. A primeira está relacionada aos conceitos matemáticos, as ferramentas e as situações que podem motivar e preparar a aprendizagem. A segunda está relacionada com os registros de representação e os modos fenomenológicos de produção que serão solicitados durante as atividades. Assim, a questão chave é a transferência de um modo a outro, como também, a troca de registros de representação.

2.3 Reflexões de pesquisas constituídas a partir da teoria de registros de representação semiótica sobre o tema

Neste subitem apresenta-se brevemente um levantamento bibliográfico realizado em trabalhos desenvolvidos sobre o ensino de perímetro e área de figuras planas em pesquisas na área de educação matemática, tendo como intuito resgatar o que vem sendo produzido de conhecimento científico referente a esses conteúdos. Busca-se apontar algumas questões metodológicas e teóricas que nortearam essas pesquisas e, consequentemente, puderam direcionar a presente pesquisa.

Inicia-se com a pesquisa de Buratto (2006) em que relaciona a formação inicial de professores de matemática com a utilização do registro figural enquanto representação semiótica. Nesse sentido, explora possibilidades de atividades cognitivas ligadas às apreensões de uma figura e apresenta uma proposta de atividades didáticas pautadas nas questões dos registros de representação. Esta, como alternativa metodológica que proporciona, tanto o conhecimento de conceitos geométricos por parte dos licenciandos, como uma metodologia de ensino para sua prática pedagógica, a qual foi desenvolvida em três fases: revisão bibliográfica, descrição da experiência e elaboração de uma proposta de atividades didáticas.

Dentre as conclusões obtidas por Buratto (2006), menciona-se que, embora esta tenha percebido, por parte do público alvo, dificuldades no domínio da fundamentação teórica utilizada, no caso o registro de representação semiótica e no processo das apreensões em geometria. Bem como, deficiências de conteúdo, a pesquisa propiciou aos licenciandos envolvidos a oportunidade de um ensino e aprendizagem reflexivos e motivadores. Além disso, promoveu nestes, um crescimento visual e uma desenvoltura na capacidade interpretativa da matemática.

Outra publicação analisada foi a pesquisa de Facco (2003). Nesta pesquisa se objetiva o estudo dos fenômenos que interferem no ensino e aprendizagem do conceito de área. Esta apresenta uma proposta de ensino do conceito de área por meio de uma sequência didática envolvendo a decomposição de figuras planas. A aplicação dessa proposta ocorreu para alunos da 5ª série (atual 6º ano) do ensino fundamental. Entre alguns levantamentos realizados por Facco (2003) sobre os obstáculos epistemológicos inerentes ao próprio conhecimento do conteúdo área, bem como, dos obstáculos didáticos, citam-se certas estratégias de ensino e atuação do professor. Ressaltando-se a transposição proposta por livros didáticos, evidenciando questões que frequentemente causam confusão no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo, tais como: confundir as unidades de medidas, área e perímetro; utilizar o mesmo cálculo para perímetro e área, e ainda, a pouca argumentação por parte do professor durante a explanação do conteúdo. Como fases da pesquisa, cita-se: realização de um teste piloto; elaboração de uma sequência didática proposta, inicialmente, para professores da rede de ensino; análise e discussões da mesma; reformulação da proposta e aplicação no ensino fundamental. Nas conclusões deste trabalho é enfatizado que no decorrer da realização das atividades os alunos começaram a se familiarizar com as estratégias de compensação de partes, a fim de visualizarem uma figura de fácil análise. Dessa forma, foram sendo instigados a realizarem a decomposição e composição de figuras por meio de traços internos ou externos as mesmas. Consequentemente, essas ações levaram a compreensão do conteúdo em questão.

Por fim, foi analisada a pesquisa de Secco (2007), onde ele realiza uma investigação envolvendo os conceitos de área e superfície, através do uso da composição e decomposição de figuras e ainda, explora posteriormente a isso a demonstração das fórmulas envolvidas. Esta proposta foi desenvolvida junto a alunos da 8ª série (9° ano) do ensino fundamental. Neste trabalho, colocou como questões de pesquisa: Como o processo de reconfiguração de figuras poligonais contribui para a apropriação do conceito de área de um polígono? Como esse processo favorece a passagem do empírico para o dedutivo?

Nas conclusões Secco (2007) ressalta que observou nos alunos, durante a aplicação da sequência didática, uma autonomia crescente, pois estes buscaram estratégias tanto de natureza algébrica como geométrica. Dessa forma, foram sendo atribuídos significados aos termos de área e superfície. Também, salienta o papel importante do *software* utilizado, Cabri-Géomètre, pois este oportunizou aos alunos ações, chamadas “fazer matemático”: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair e generalizar.

A análise e reflexão sobre o conteúdo dessas pesquisas foram fundamentais para investigação do objeto de estudo da presente pesquisa. Uma vez que, possibilitaram a aquisição de conhecimentos a respeito de situações de ensino, os quais serviram de subsídios para o desenvolvimento de algumas habilidades geométricas exploradas nas atividades propostas. Entre elas, cita-se a exploração heurística de figuras geométricas que são colocadas em destaque nos pressupostos da teoria dos registros de representação semiótica. Entretanto, a atual pesquisa possui características diferentes dos trabalhos pesquisados. Neste trabalho foi utilizado exclusivamente um ambiente de geometria dinâmica para o desenvolvimento da sequência de atividades, conforme descrito no capítulo 4. Além disso, explora outros aspectos indicados pela teoria dos registros de representação semiótica, tais como: os diferentes modos de ver as figuras; sua desconstrução visual; a articulação do registro figural com o numérico e/ou a língua natural, na exploração dos conceitos de perímetro e área de polígonos.

3 A EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

Pautadas nas reflexões da teoria dos registros de representação semiótica, detalhadas no capítulo 2, as atividades elaboradas visam propiciar, aos sujeitos da pesquisa, um leque de possibilidades de exploração dos conceitos de perímetro e área de polígonos. Através de suas representações, considerando-se três registros: figural, numérico e língua natural.

Em relação aos recursos manipuláveis, desenvolvidos no *software* GeoGebra que representam figuras geométricas, estes foram considerados como registros figurais de representação semiótica. Pois, segundo Duval (2011), os registros são considerados sistemas cognitivamente produtores, ou até mesmo "criadores", de representações novas, as quais permitem descobrir novos objetos.

Assim, o enfoque da utilização deste *software* está na manipulação interativa proporcionada por esses recursos, por meio do "arraste" das representações dos objetos geométricos na tela do computador. Uma vez que, os aspectos visuais dessas representações aparecem privilegiados no GeoGebra, permitindo aos alunos o despertar de apreensões figurais, sejam elas perceptivas, operatórias e/ou discursivas.

Em suma, os recursos manipuláveis criados no *software* visam possibilitar aos sujeitos da pesquisa a exploração e a simulação. Pois, existe a possibilidade de levantarem algumas hipóteses, testá-las e, ainda, analisar os resultados. Dessa forma, objetivou a partir da experimentação e observação dessas representações, por meio de tratamentos nesse registro, a compreensão pelos alunos de conceitos relativos a perímetro e área. Também, através da percepção de algumas regularidades nas representações existe a possibilidade destes estabelecerem alguns procedimentos numéricos para a medida dessas grandezas. Além disso, as atividades propostas permitem o reconhecimento da estratégia para a determinação da medida da área de polígonos através da utilização da decomposição e composição de figuras planas.

Cabe destacar, que neste estudo foram utilizadas algumas funcionalidades do GeoGebra que permitiram elaborar a referida sequência exclusivamente no recurso. Com isso, os sujeitos da pesquisa, não precisaram dominar as ferramentas e comandos do mesmo. Para isso, foram ocultadas a janela algébrica e a de barra de ferramentas, deixando visível apenas a janela de visualização, a qual foi adaptada para cada atividade proposta.

Dessa forma, ao se abrir os arquivos do GeoGebra de cada atividade, consta, em sua interface inicial, o enunciado e, quando necessário, instruções de como manipular os objetos construídos.

A sequência de atividades foi distribuída em três blocos, os quais serão descritos posteriormente em detalhes. Cada aluno ocupou um computador no laboratório de informática da escola, local onde foram desenvolvidas todas as atividades. No decorrer da aplicação da sequência foram sendo disponibilizados, por encontros, os arquivos correspondentes às atividades. Os registros foram feitos no próprio recurso computacional e, em algumas atividades, também em papel impresso na folha de registro correspondente a cada bloco de atividades, apêndice B.

A realização das atividades totalizou um período de 22 horas/aulas, dentre essas, 10 horas/aulas foram em turno inverso ao período regular de aula das duas turmas envolvidas.

Quando necessário, realizou-se intervenções, junto aos alunos, durante o desenvolvimento das atividades. Em alguns momentos, para responder questões referentes ao uso do recurso disponibilizado e, em outros, para auxiliar nas dúvidas a respeito do objeto de estudo.

Após a aplicação de cada bloco foi realizada uma discussão de uma a uma das atividades que a compunham. Na oportunidade, os alunos puderam relembrar como haviam feito as mesmas. Além disso, foram mostradas possíveis resoluções, evidenciando os conceitos gerados por meio das atividades. Também, neste momento, foi feita uma síntese do conteúdo abordado. Maiores detalhes serão fornecidos no capítulo 5, juntamente com a análise *a posteriori* dessas atividades.

Nos próximos subitens serão descritas, segundo a metodologia da engenharia didática, a análise *a priori* das atividades, por blocos. Nesta descrição serão explicitadas estratégias e possíveis dificuldades; ferramentas disponíveis no recurso; relações com a teoria que forneceu embasamento teórico à pesquisa e escolhas que poderão ser realizadas pelos alunos, fazendo-se dessa forma, previsões de comportamentos.

3.1 Concepção e análise *a priori* das atividades

A fim de dar uma ideia global das atividades que foram elaboradas e aplicadas em cada bloco, no apêndice A, encontram-se quadros explicativos (Quadro 28 a 30), contendo informações das atividades de cada bloco. Nestes quadros apresenta-se uma breve descrição, característica(s) do recurso criado, no que diz respeito a funcionalidade do mesmo.

3.1.1 Bloco 1 - Atividades

O primeiro bloco é composto por oito atividades. Aborda, inicialmente, os modos de ver contornos fechados, ou seja, unidades figurais 2D. A seguir, parte-se da diferenciação de contornos e de regiões internas limitadas por esses contornos. Para finalizar, propõem-se atividades de comparação de áreas de figuras planas. Este bloco centra-se no uso do registro figural por meio da exploração de aspectos visuais, presentes em algumas figuras geométricas. Também se utiliza do registro língua natural presente no enunciado das atividades, pois há necessidade de o aluno realizar sua leitura e interpretação, para que, a partir disso, possa realizar os tratamentos solicitados no registro figural. Este é o foco do bloco de atividades, ou seja, inicialmente as atividades não tem preocupação com medidas. Mas sim, com aspectos qualitativos decorrentes de tratamentos figurais. Nesse sentido, segundo Duval (2011), em primeiro lugar é preciso propor tarefas que excluam toda atividade de medida e de cálculo, porque para aprender a ver, os alunos devem aprender a trabalhar sem recorrer primeiro aos aspectos métricos.

1ª ATIVIDADE

A partir do processo de visualização de figuras planas, propõem-se uma análise visual de figuras geométricas compostas por contornos fechados.

Objetivo: reconhecer as unidades figurais, de formas 2D e verificar as duas formas distinguidas por Duval, citadas anteriormente, conjunto por justaposição e sobreposição de figuras planas.

Recurso criado no GeoGebra: o aluno irá abrir o arquivo correspondente à atividade, neste há caixas disponíveis para serem selecionadas, denominadas: “figura 1” e “figura 2”. Ao fazer isso, surgem as figuras que serão analisadas visualmente. Ressalta-se que estas não podem ser movimentadas na tela, pois a intenção, neste primeiro momento, é de apenas explorá-las visualmente. Também, é disponibilizado um espaço para digitar a resposta ao questionamento referente às figuras apresentadas: “Quantos e quais contornos fechados são necessários para formá-las?". A *interface* que o aluno terá na tela para esta atividade é ilustrada na figura 8.

A forma de registro utilizada pelos alunos foi no próprio recurso, digitando o número de contornos fechados visualizados e, ainda, registros no papel, no qual desenharam a mão livre as formas observadas em cada figura. No apêndice B encontra-se a folha de registro correspondente que fora entregue aos alunos.

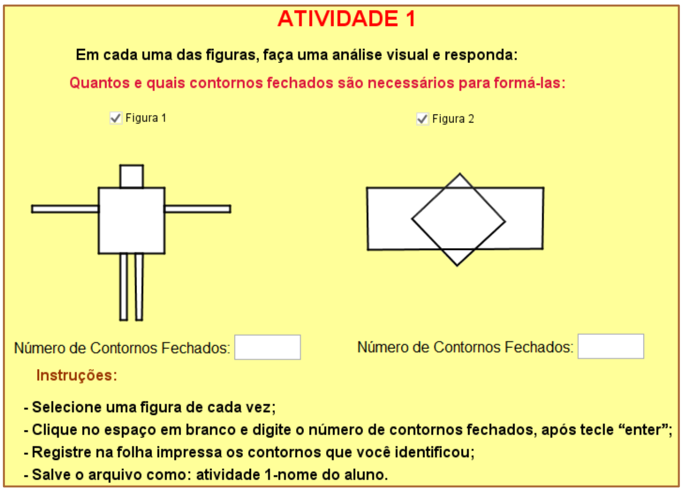


Figura 8- Imagem referente à atividade 1 do bloco 1.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Análise *a priori*: essa atividade centra-se na apreensão perceptiva das figuras geométricas apresentadas. Sendo que, segundo Duval (2012a), neste tipo de apreensão há interpretação das formas de maneira imediata. Para a análise visual destas, a maneira de ver exigida, seguindo a classificação de Duval (2005), é a do olhar do botânico. Uma vez que, basta identificar visualmente os contornos fechados presentes nas figuras geométricas apresentadas para que se chegue até uma solução da atividade.

Previsões de respostas possíveis: esperam-se as seguintes respostas:

- Resposta para figura 1: justaposição de seis formas (dois quadrados e quatro retângulos), conforme ilustra a figura 9.

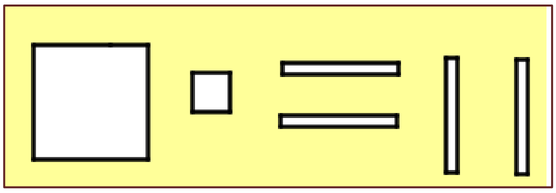


Figura 9- Possíveis unidades figurais 2D esperadas como resposta para a "figura1".

Esta previsão está respaldada em Duval (2011), que afirma que, quando uma figura é composta por um número maior de contornos fechados, o que prevalece é a visualização por justaposição das formas.

- Resposta para figura 2: superposição de duas formas: um quadrado e um retângulo; como ilustra a figura 10.

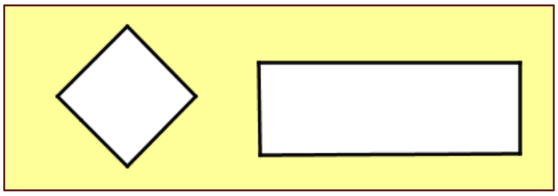


Figura 10- Possíveis unidades figurais 2D esperadas como resposta para a "figura 2".

Além dessas possibilidades pode acontecer que, alguns alunos respondam de outras formas. No entanto, acredita-se que, se isso ocorrer, será em um número menor de respostas. Para exemplificar mostram-se, a seguir, algumas possibilidades:

- Resposta para figura 1: por superposição do quadrado inicial com o retângulo de maior base e, ainda, um quadrado e dois retângulos, conforme ilustra a figura 11.

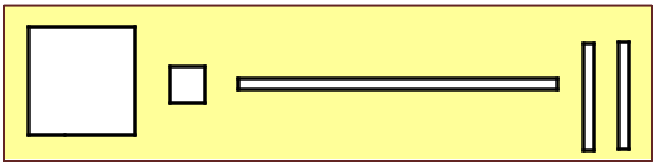


Figura 11- Outras unidades figurais 2D que podem ser respondidas para a "figura 1".

- Resposta para figura 2: justaposição de cinco formas (dois triângulos, dois pentágonos e um hexágono), conforme ilustra a figura 12.

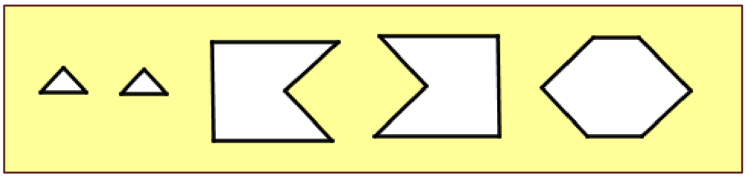


Figura 12 - Outras unidades figurais 2D que podem ser respondidas para a "figura 2".

Além, dessas respostas outras são possíveis, envolvendo justaposição e sobreposição em uma mesma montagem.

2ª ATIVIDADE

Esta atividade é composta por quatro figuras de partida diferentes.

Objetivo: reconhecer as unidades figurais que formam uma figura de partida, em seguida, construir duas composições a partir de contornos fechados disponibilizados, resultando nessa figura de partida.

Recurso criado no GeoGebra: para cada um destes arquivos é inicialmente apresentada uma instrução para que o aluno selecione uma caixa que corresponderá à figura a qual este deve ser realizada uma análise visual. Em seguida, a partir de contornos fechados disponibilizados através da seleção da caixa "Peças", este deverá montar essa figura. Todas as peças podem ser arrastadas e giradas na tela do computador. Existindo, assim, diversas combinações das peças que compõem a figura de partida indicada.

Além disso, é solicitado ao aluno que este faça duas diferentes construções da figura de partida. Sendo que, a primeira, deve levar em consideração o que ele enxergou automaticamente ao olhar a figura pela primeira vez. Neste caso, se não houver no recurso as peças que representem o que ele visualizou, ele deverá registrar, na folha impressa, os contornos observados.

Quando o aluno seleciona a caixa "segunda construção", automaticamente desaparece a primeira construção que ele fez e, novamente, surgem todas as peças disponibilizadas no início da atividade. Também, há um espaço específico para a realização da segunda montagem. Cabe destacar que, essa segunda construção parte de uma análise das peças disponibilizadas. Sendo que, a partir destas, o aluno usa a sua imaginação, partindo de reorganizações perceptivas, para compor a figura de partida. A professora, nesta etapa, deve reforçar que a segunda construção deve ser diferente da primeira.

Análise *a priori*: esta atividade pode ser considerada uma continuação da atividade anterior, porém, agora serão aguçados os modos de ver uma mesma figura geométrica. Isso será realizado a partir da desconstrução visual da primeira construção realizada pelo aluno. Em seguida, deve ser feito o reconhecimento de outras unidades figurais que podem ser combinadas para compor a mesma figura de partida.

Além do modo de visualização identificado como o olhar do botânico, esta atividade contempla o olhar de um construtor, pois por meio da manipulação das peças disponíveis o aluno deverá construir uma figura que seja igual a figura de partida.

Previsões de respostas possíveis:

- Resposta para a atividade 2A: analisando a figura proposta nesta atividade, ilustrada na figura 13, acredita-se que a primeira construção dessa figura seja realizada pela justaposição de peças, conforme sugere a imagem da figura 14.

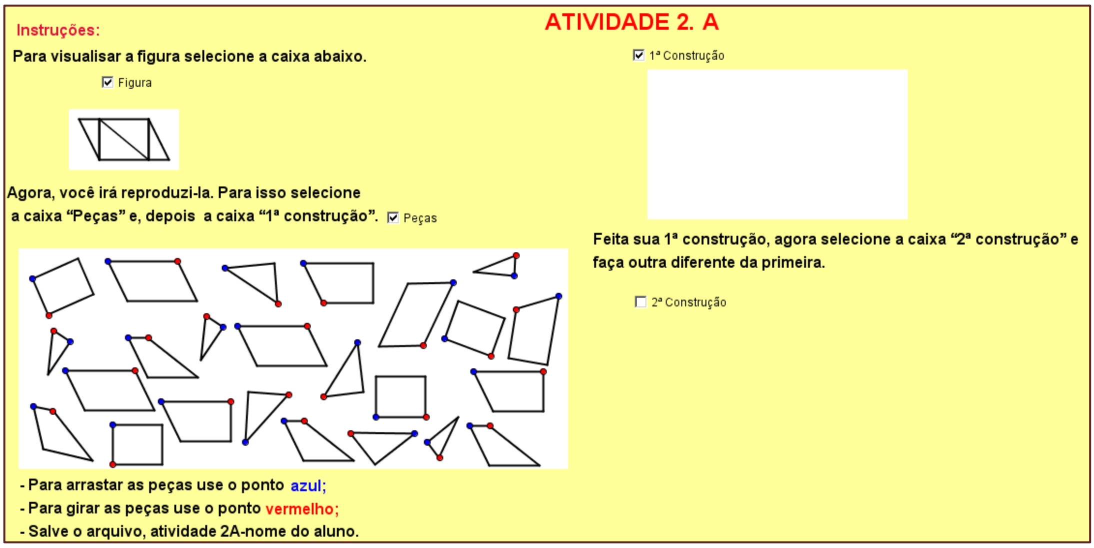


Figura 13- Imagem referente à atividade 2A do bloco 1.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

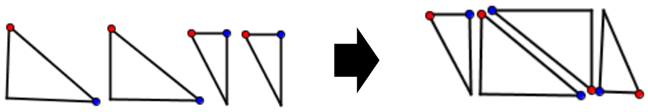


Figura14- Resposta esperada na 1ª construção (atividade 2A): visualizando por justaposição das peças.

Entretanto, a solução da primeira construção também pode ser dada pelos alunos, fazendo-se uso de sobreposição de peças. Mas acredita-se que, se isso ocorrer, deverão ser casos pontuais.

Já, na segunda construção, espera-se que o aluno a realize por sobreposição das peças. Neste caso existem inúmeras combinações de peças que poderão compor a figura de partida. Ainda, em uma mesma combinação, existem outras possibilidades de construção a partir da rotação de uma ou mais peças. Na figura 15 são ilustradas três possibilidades.

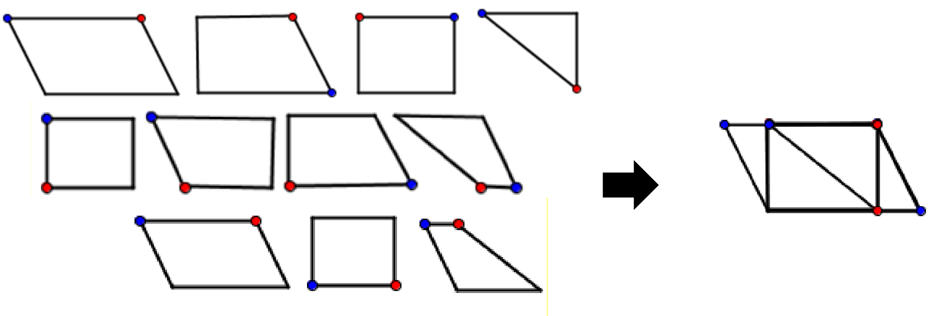


Figura 15- Descrição de três combinações possíveis para a figura de partida na 2ª construção (atividade 2A).

- Resposta para a atividade 2B: na figura 16 é exibida a imagem da *interface* que os alunos têm acesso nesta atividade. Analisando a figura proposta, acredita-se que aconteça o contrário do que se espera para a atividade anterior. Ou seja, que na primeira construção o aluno monte a figura de partida a partir da sobreposição do quadrado e do retângulo, conforme mostra a figura 17.

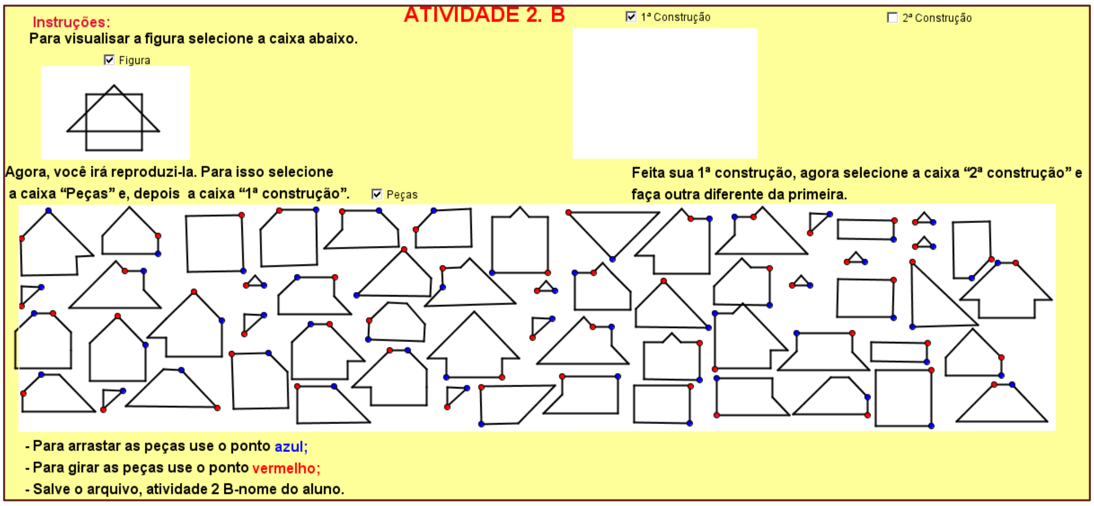


Figura 16- Imagem referente à atividade 2B do bloco 1.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

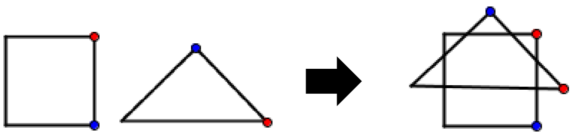


Figura 17- Resposta esperada na 1ª construção (atividade 2B): visualizando por sobreposição das peças.

Além disso, é possível que os alunos visualizem outras combinações para obterem a figura de partida. Em particular, utilizando-se a sobreposição podem ser inúmeras combinações de peças para compor a figura de partida, três possibilidades são indicadas na figura 18.

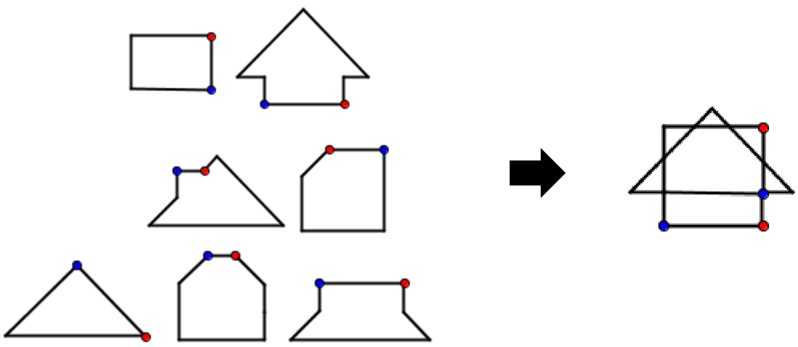


Figura 18- Descrição de três combinações possíveis para a figura de partida na 2ª construção (atividade 2B).

O número de possibilidades apresentadas anteriormente, utilizando sobreposição das peças, não se esgota . Nesse sentido, por seu um número grande de maneiras de compor a figura optou-se por não especificar todas essas possibilidades. Cabe ressaltar, ainda que, existe a possibilidade dos alunos utilizarem a visualização por justaposição de peças, conforme mostra a figura 19.

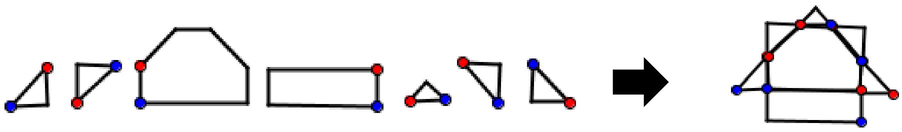


Figura 19- Possibilidade de visualização por justaposição das peças (atividade 2B).

Na atividade 2C (Figura 20), pelas características visuais da figura de partida, acredita-se que a sobreposição das peças mostradas na figura 21 será a maneira que predominará nas respostas dos alunos.

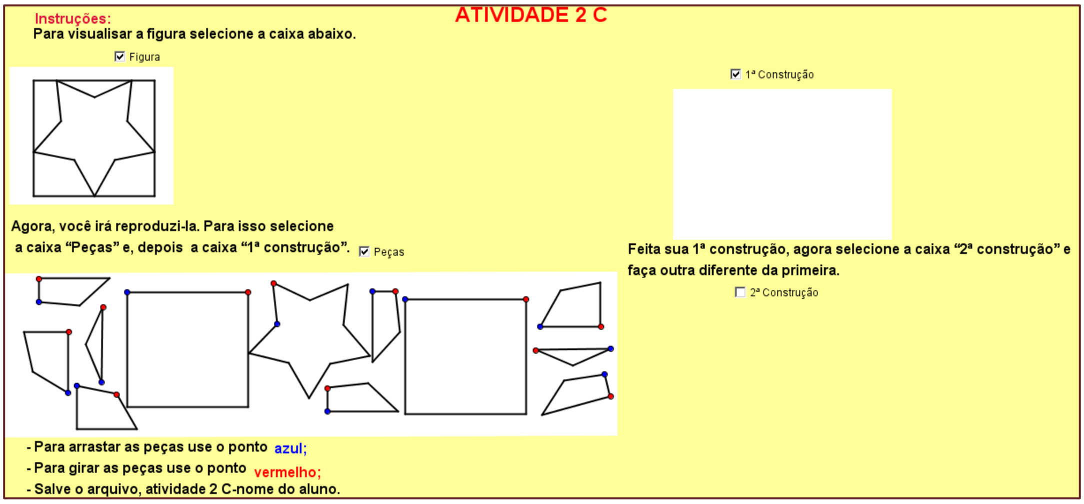


Figura 20- Imagem referente à atividade 2B do bloco 1.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

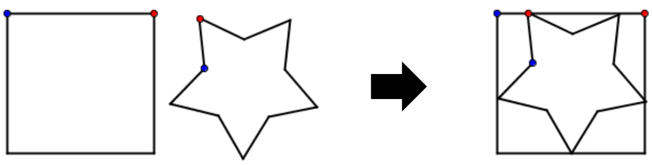


Figura 21- Possibilidade de visualização por sobreposição das peças (atividade 2C).

Utilizando jusposição das peças também é possível obter a figura de partida, conforme mostrado na figura 22.

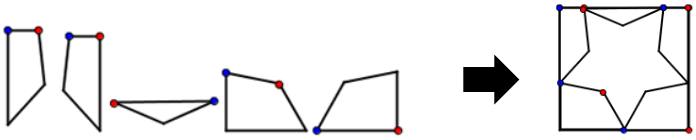


Figura 22- Possibilidade de visualização por justaposição das peças (atividade 2C).

Ainda, uma última possibilidade pode ocorrer, sobreposição das peças que foram justapostas na possibilidade anterior no quadrado, conforme ilustra a figura 23.

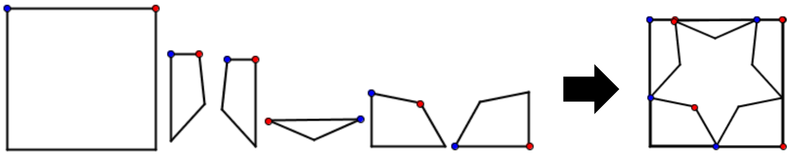


Figura 23- Possibilidade de visualização por justaposição e sobreposição das peças (atividade 2C).

Para finalizar, analisa-se a atividade 2D (Figura 24), a partir da figura de partida disponibilizada.

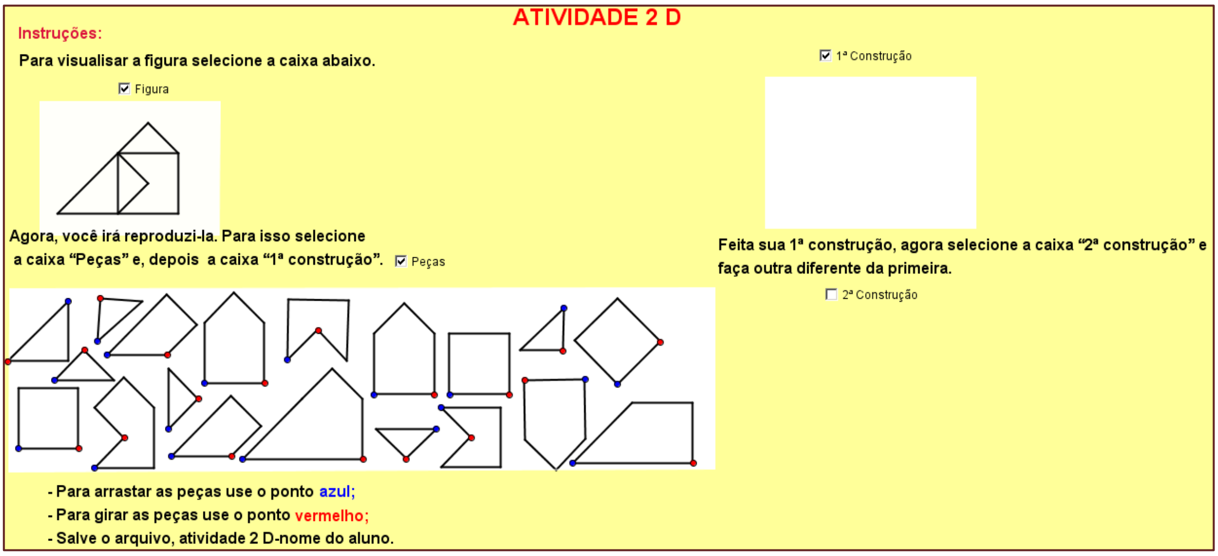


Figura 24- Imagem referente à atividade 2B do bloco 1.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Acredita-se que, em decorrência das construções anteriores, nessa figura ocorram diversas formas de montagem, pois se espera que nesta fase os alunos já tenham adquirido uma mudança na maneira de ver as figuras. Dessa forma, já consigam visualizar várias maneiras de composição da figura de partida com base nas peças disponibilizadas. A figura 25 mostra uma montagem por justaposição das peças.

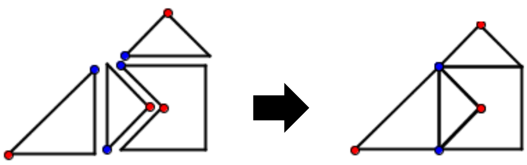


Figura 25- Possibilidade de visualização por justaposição das peças (atividade 2D).

A figura 26 ilustra três possibilidades diferentes de solução que podem estar presente nas respostas dos alunos.

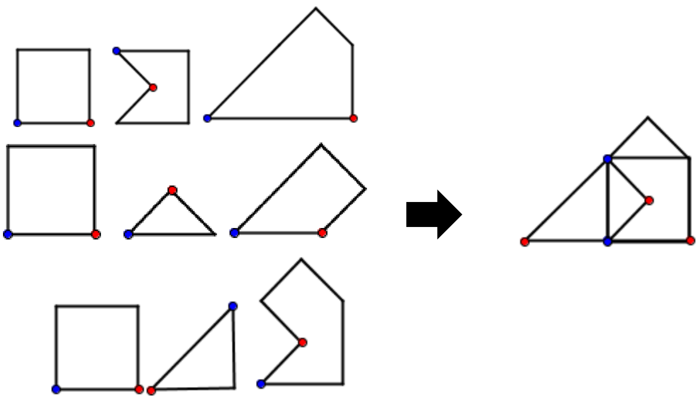


Figura 26- Descrição de três combinações possíveis por sobreposição das peças (atividade 2D).

As duas próximas atividades foram adaptadas da pesquisa de FACCO (2003).

3ª ATIVIDADE

Objetivo: distinguir contorno e região interna de um polígono.

Recurso criado no GeoGebra: quando o aluno seleciona as caixas denominadas: “Objetos 1” e “Objetos 2”, surgem na tela, em cada um dos grupos de objetos, sete figuras planas (polígonos) , conforme mostra a figura 27. Sendo que o aluno, após selecionar os dois grupos deverá responder no próprio recurso, em uma caixa de texto, a diferença observada entre as figuras dos dois grupos.

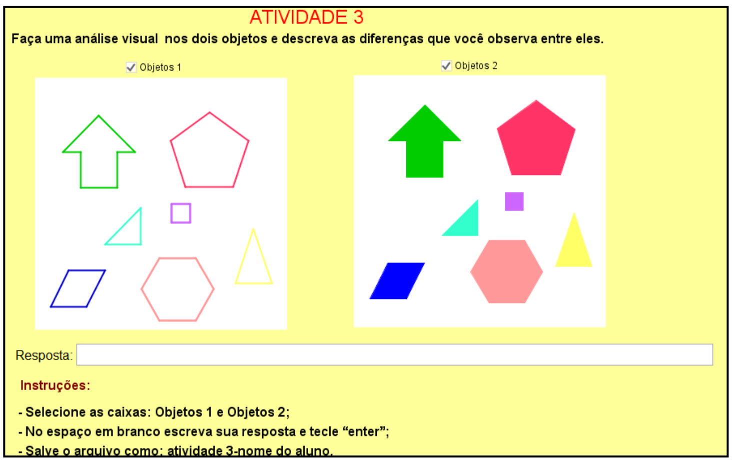


Figura 27- Imagem referente à atividade 3 do bloco 1.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Análise *a priori*: a partir do processo de visualização, por meio da apreensão perceptiva, considerado fundamental por Duval (2012b), no estudo de geometria, espera-se que os alunos percebam alguns aspectos diferentes entre os dois tipos de objetos disponibilizados. Destaca-se também, que essas sete figuras possuem formas diferentes entre si. Porém, as formas presentes nos dois grupos de objetos são as mesmas, o que os diferencia é que as figuras no primeiro são compostas apenas por contornos fechados e no segundo são formadas por regiões poligonais.

Para realizar esta atividade somente o mecanismo cognitivo de iconicidade é suficiente, pois solicita uma análise visual dos objetos. Após a identificação das diferenças existentes entre os dois tipos de objetos, o aluno deverá descrevê-las utilizando o registro língua natural. Para isso, deverá digitar uma frase no lugar disponibilizado no recurso. Entende-se que, desse modo o registro língua natural cumpre a função cognitiva, pois, segundo Duval (2011), isso ocorre quando o ato de expressão e de compreensão de um discurso discriminam unidades de sentido em função de diferentes níveis de organização destes discursos. Mais especificamente, a função apofântica será requerida por essa atividade, pois o aluno deverá, através da elaboração de uma frase, descrever as diferenças observadas pela análise visual feita entre os dois grupos de objetos.

Previsões de respostas possíveis: como resposta, espera-se que surjam descrições do tipo: os objetos que formam *o primeiro grupo estão vazios e no segundo estão cheios*, ou ainda, *um grupo de figuras não está pintado (coloridas) dentro e o outro está*. Acredita-se que os alunos tenham facilidade na resolução desta atividade, conseguindo após a análise visual, perceberem diferenças entre os grupos de objetos. Isso deverá ser registrado de forma escrita, através do uso da língua natural. Espera-se que existam respostas que tenham utilizado a operação de constituição de um enunciado completo.

4ª ATIVIDADE

Esta atividade complementa a atividade anterior.

Objetivo: construir de figuras geométricas planas e colorir a região interna delimitada por elas. Reforçando a diferença entre as linhas poligonais e a região interna delimitada pelas mesmas.

Recurso criado no GeoGebra: no recurso criado constam as instruções referentes aos comandos que devem ser utilizados para construção e preenchimento (colorir), por parte dos alunos, de três figuras diferentes em um espaço destinado, conforme mostra figura 28.

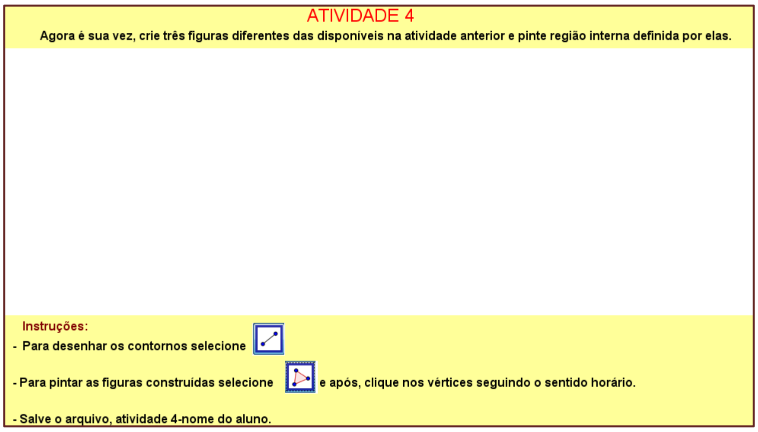


Figura 28- Imagem referente à atividade 4 do bloco 1.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Análise a priori: na terceira atividade utilizou-se a visualização como elemento principal para a solução da mesma. Agora, nesta atividade, além da disso, será utilizada a maneira de ver do construtor. Já que os alunos deverão construir as figuras geométricas planas e colorir utilizando as ferramentas disponibilizadas no recurso. Para isso, estes deverão utilizar a apreensão sequencial, pois utilizarão na construção ferramentas disponíveis no recurso, mantendo uma ordem de construção. Neste caso, primeiramente, construir o polígono e depois colori-lo.

Previsões de respostas possíveis: espera-se que as figuras construídas pelos alunos sejam diversificadas. Também, acredita-se que ocorram discussões entre estes, favorecendo a criatividade nas construções.

5ª ATIVIDADE

Objetivo: comparar as regiões internas de figuras geométricas planas de mesma forma.

Recurso criado no GeoGebra: nesta recurso são disponibilizados cinco grupos de figuras de mesma forma, conforme ilustrado na figura 29. Bastando que o aluno selecione a caixa correspondente ao grupo para que surjam as formas geométricas planas que deverão ser comparadas. Todas as figuras geométricas têm a possibilidade de arraste e giro na tela.

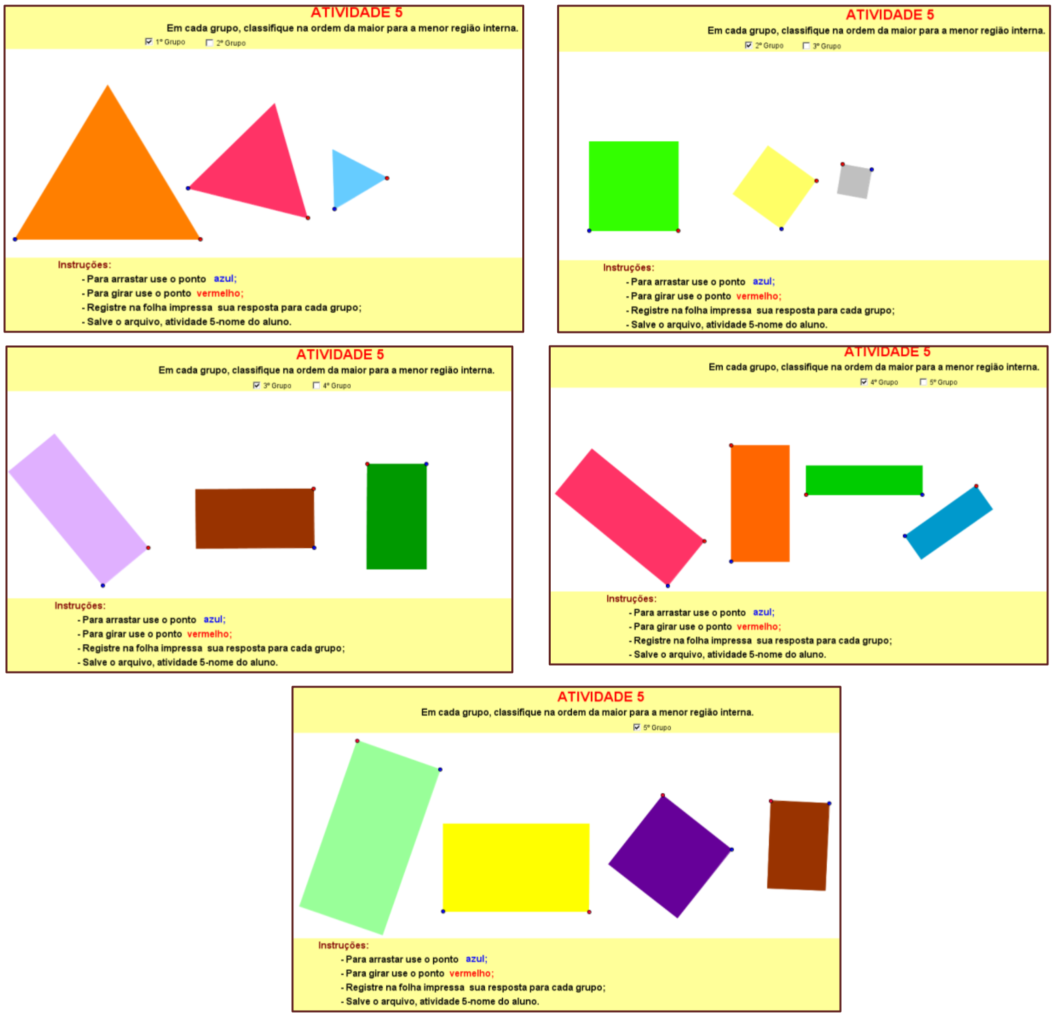
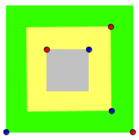
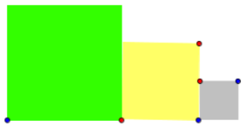
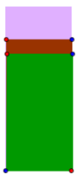
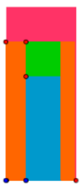
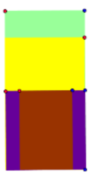
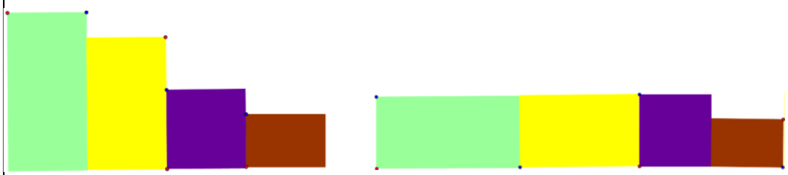


Figura 29- Imagem do cinco grupos de figuras referente à atividade 5 do bloco 1.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Cabe salientar que, quando uma caixa que corresponde a um grupo de figuras está selecionada as demais ficam ocultas. No entanto, os alunos têm a possibilidade de retomarem cada grupo, quantas vezes desejarem, bastando selecionar a caixa correspondente.

Análise *a priori*: como essa atividade visa a comparação de figuras planas de mesma forma, foi solicitado que os alunos realizem uma classificação na ordem da maior para a menor região interna das figuras geométricas apresentadas. Nessa atividade não foi usado o termo área porque os alunos ainda não possuem conhecimentos suficientes para compreender essa terminologia. Como nas atividades anteriores, a resolução dessa atividade, será por meio de abordagens qualitativas das figuras disponibilizadas, mais especificamente, através da comparação entre as figuras. Entende-se que três tipos de apreensões de figuras, distinguidas por Duval (2012b), fazem parte das interpretações que levarão à solução desta atividade. A apreensão perceptiva, a partir da interpretação das formas disponibilizadas em cada grupo de figuras. A apreensão discursiva enquadra-se no momento em que o aluno analisa os elementos e propriedades dessas figuras. Além da apreensão operatória pois, espera-se que sejam feitas reorganizações perceptivas das figuras disponibilizadas, mais especificamente, a modificação posicional, considerada por Duval (2012b), como o deslocamento ou a rotação das figuras em relação a um referencial.

Previsão de respostas possíveis: acredita-se que, a maioria dos alunos utilizarão sobreposição e justaposição das figuras. Para ilustrar isso, no quadro 4 apresenta-se uma sequência de possibilidades de representações figurais esperadas para a comparação das regiões internas das figuras.

	Sobreposição	Justaposição
1º Grupo		
2º Grupo		
3º Grupo		
4º Grupo		
5º Grupo		

Quadro 4- Possibilidades de representações figurais na análise de comparação de cada grupo de figuras.

Como forma de registro, serão analisadas as representações figurais realizadas no recurso. Além do registro que deve ser realizado na ficha impressa, que consta no apêndice B. Para isso, após a manipulação das figuras os alunos serão orientados a classificarem conforme as cores de cada figura.

O quadro 5 apresenta possíveis soluções esperadas para a comparação de cada grupo de figuras, cuja classificação deve ser feita da maior para a menor região interna.

Grupo	Classificação
1º	laranja, rosa e azul
2º	verde, amarelo e cinza
3º	lilás, marrom e verde
4º	rosa, laranja, verde e azul
5º	verde, amarelo, roxo e marrom

Quadro 5- Possibilidades de soluções para a comparação das figuras referente a atividade 5 do bloco 1.

6ª ATIVIDADE

Objetivo: comparar regiões internas de figuras planas com formas diferentes e reconhecer a equivalência de áreas de algumas dessas figuras.

Recurso criado no GeoGebra: esta atividade é composta por quatro situações. Em cada uma é disponibilizado um par de figuras com formas diferentes e solicita-se aos alunos a comparação das regiões internas entre as mesmas. No recurso criado existe a possibilidade de arraste e giro das figuras. Além disso, é possível recortar uma única vez cada figura. Como regra para recortar as figuras pede-se que, primeiramente, seja feita a sobreposição delas. Dessa forma, espera-se que os alunos observem possíveis linhas de corte. Os lados de cada figura estão nomeados com letras minúsculas e, para recortar, basta selecionar um par de lados que, automaticamente, aparecem os pontos de extremidades da linha de corte. O próximo passo é movimentar esses pontos até a posição desejada e selecionar a opção "recortar" que a figura desaparece e surgem as peças definidas após o corte.

Caso os alunos apresentem dificuldades em escolher a posição onde irão situar os pontos de extremidade do corte, existe a possibilidade de colocar uma malha quadriculada sobre a região destinada à manipulação das figuras. Dessa forma pretende-se, facilitar o procedimento, bastando selecionar a opção “Malha”.

A tela inicial construída para o desenvolvimento desta atividade é ilustrada na figura 30 (1º par de figuras). Sendo que, serão quatro pares diferentes de figuras a serem comparados, que surgem à medida que forem sendo selecionados.

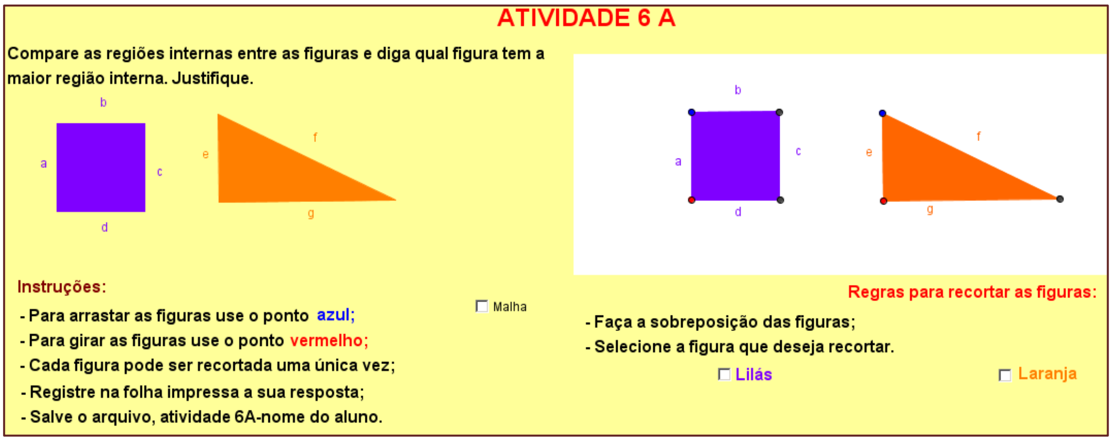


Figura 30- Imagem referente a atividade 6 do bloco 1 (1ª par de figuras).
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Análise *a priori*: durante o desenvolvimento desta atividade espera-se que os alunos façam a sobreposição das peças obtidas com a figura que não foi recortada ou, ainda, caso recortem as duas figuras façam a sobreposição duas a duas das peças formadas após o corte.

A solução dessa atividade parte de uma utilização heurística de, no mínimo, uma das duas figuras que serão comparadas as suas regiões internas, exigindo dos alunos o recorte de uma figura. Após, eles devem considerar as peças obtidas como fossem peças de um quebra-cabeça que, juntando podem ser reconfiguradas em outras figuras. Sendo que, a reconfiguração, em alguns casos, será igual a uma das figuras que se pretende fazer a comparação da região interna.

Outra característica presente na abordagem geométrica sugerida pela atividade consiste, no uso da divisão mereológica, considerada por Duval (2005), como a decomposição do todo em subfiguras. Em seguida, deve ser feita a reconfiguração das partes elementares compondo uma figura diferente da figura de partida. Assim, após o recorte das figuras, será possível classificar os tipos de decomposição mereológica presentes na atividade. Isso será descrito na análise específica de cada par de figuras propostas na atividade.

Nessa atividade não é suficiente a iconicidade do modo de olhar a figura, isto é, parte-se do olhar de botânico, para uma reorganização visual das formas imediatamente reconhecidas nas figuras, para um olhar de inventor. Deste modo, sob a ótica de Duval (2005), esta é uma condição necessária em qualquer problema de utilização heurística de figuras, pois nele existe a possibilidade de realizar uma desconstrução visual das formas perceptivas elementares que se impõem a primeira vista. Para uma posterior reconfiguração, definindo outra figura.

Outro aspecto enfatizado pela teoria, particularmente para a resolução de problemas que usam a divisão mereológica, é a adição de traços que permitam uma reorganização visual da figura de partida com finalidade de se obter a resolução do problema. Assim, na atividade proposta esse traço corresponde a linha de recorte sugerida pela sobreposição das figuras que terão suas áreas comparadas.

Em relação ao registro língua natural este foi utilizado no enunciado da questão, pois era necessário compreendê-lo para depois buscar estratégias de solução. Também, os alunos podem utilizar esse recurso para justificarem sua resposta, isto é, explicar os procedimentos ou métodos adotados que os conduziu até a solução. Assim, espera-se que os alunos utilizem as três funções discursivas distinguidas por Duval (2011). A função referencial, pois precisa designar as figuras geométricas em análise. A função apofântica, pois deverão dizer algo sobre as regiões internas dos pares de figuras. Ainda, a expansão discursiva do tipo natural com valor pragmático, uma vez que, a partir da utilização heurística das figuras pode-se chegar até a justificativa da solução encontrada para a atividade.

Previsão de respostas possíveis: a seguir serão detalhadas possíveis formas de resoluções esperadas na comparação das regiões internas de um dos quatro pares de figuras disponibilizadas nesta atividade. Para isso, será considerado o primeiro par de figuras, ilustrado na figura 31.

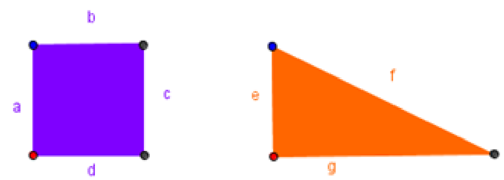


Figura 31- Primeiro par de figuras referente a atividade 6 do bloco 1.

Inicialmente, faz-se a sobreposição entre o quadrado (cor lilás) e o triângulo (cor laranja). Para ilustrar, foi considerada nesta descrição a sobreposição do triângulo sobre o quadrado. Além disso, como é possível recortar cada figura apenas uma vez, existem oito possibilidades de sobreposição das figuras em questão, conforme mostra a sequência de imagens exibidas na figura 32. Vale salientar que, para ilustrar essas possiblidades foram utilizadas as figuras na posição horizontal, mas podem ser giradas.

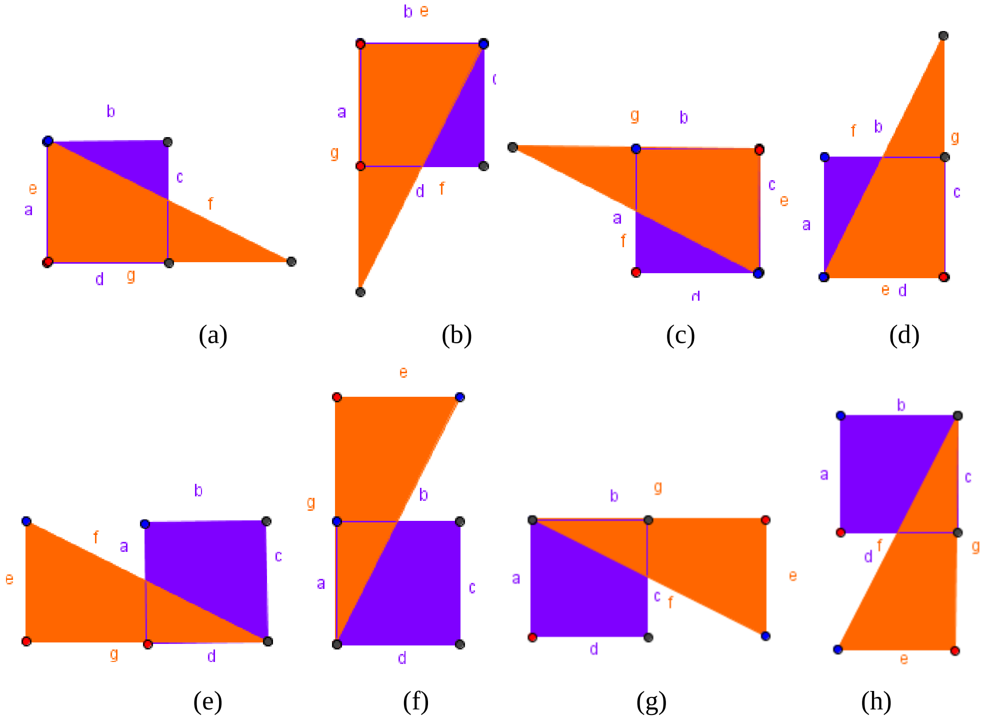


Figura 32- Possibilidades no 1º par de figuras de sobreposição do triângulo (cor laranja) no quadrado (cor lilás).

Após a sobreposição das figuras, de acordo com uma das oito possibilidades apresentadas na figura 32, o próximo passo deve ser a escolha da caixa que corresponderá à figura que se deseja recortar. Em seguida, deve ocorrer a seleção das caixas correspondentes aos lados que definirão a linha de corte. A figura 33 apresenta essas opções descritas.

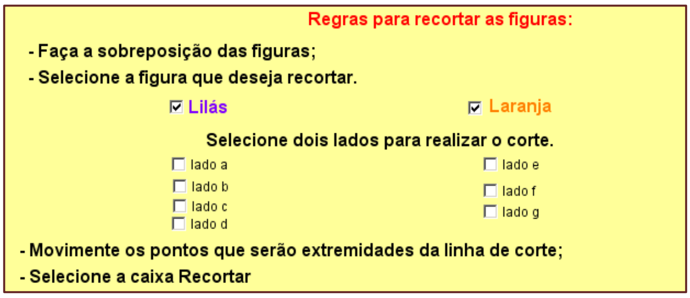


Figura 33- Informações que surge na tela do computador a fim de ser gerado o corte da figura selecionada.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Visto que as possibilidades de sobreposições das figuras são análogas. Uma vez que, foi apenas realizada uma rotação no triângulo (cor laranja) de forma que sempre estivessem dois vértices comuns com o quadrado (cor lilás), optou-se por especificar somente a figura 32(a), dentre as oito possibilidades encontradas. Como cada figura pode apenas ser recortada uma única vez, surge, neste caso, três maneiras para o recorte: recortar o quadrado (cor lilás); recortar o triângulo (cor laranja), ou ainda, ambas as figuras.

Caso o recorte seja somente no quadrado (cor lilás), existe a possibilidade de recortar nos seguintes pares de lados: *b* e *d*; *b* e *c*; *a* e *d* ou *a* e *c*. A figura 34 ilustra a situação em que os lados *a* e *c* foram selecionados.

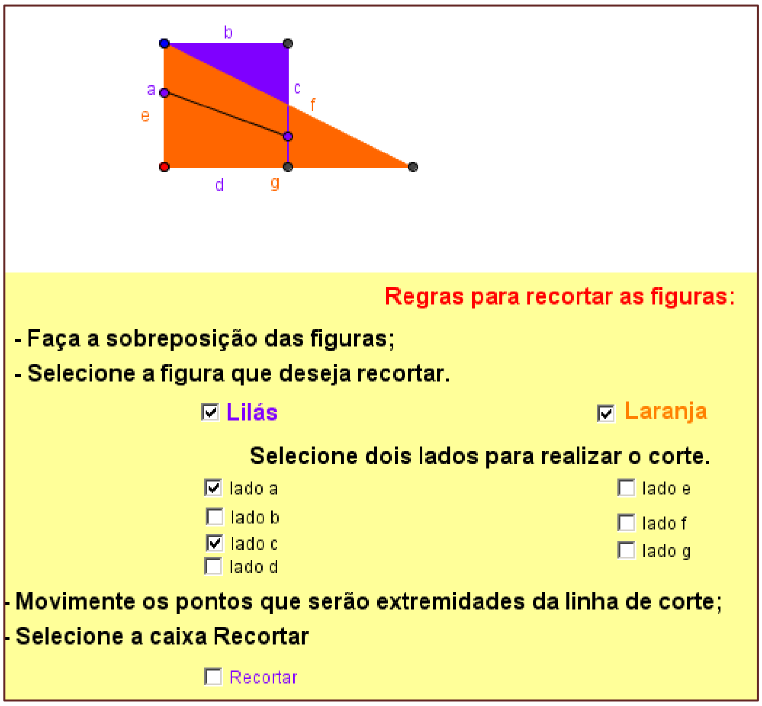
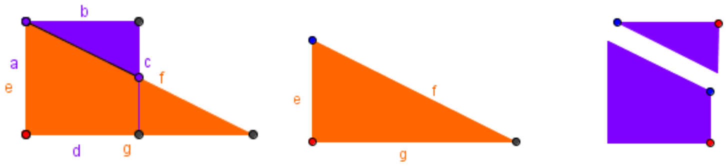


Figura 34- Imagem da linha de corte sugerida após escolha do quadrado (cor lilás) e dos lados *a* e *c*.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Em seguida, movimenta-se os pontos que são as extremidades da linha de corte até a linha sugerida pela sobreposição das figuras, conforme mostra a figura 35-(a). Por fim, seleciona-se a opção “recortar”. Dessa forma, o quadrado (cor lilás) divide-se em duas peças (triângulo e trapézio) e o triângulo (cor laranja) permanece inalterado, como indica a figura 35-(b).



(a) (b)

Figura 35- (a) Linha de corte (lados *a* e *c*) no triângulo (cor laranja); (b) Sobreposição das peças do quadrado (cor lilás) sobre as peças do triângulo (cor laranja).

Para finalizar, acredita-se que os alunos façam a sobreposição das duas peças obtidas a partir do quadrado (cor lilás) no triângulo (cor laranja), conforme mostra a figura 36, isto é, concluindo que, a reconfiguração do quadrado (cor lilás), para este par de figuras, é equivalente ao triângulo (cor laranja). A classificação da decomposição mereológica realizada nessa situação, segundo Duval (2005), é a denominada heterogênea já que a decomposição é feita em unidades figurativas de formas diferentes entre si.

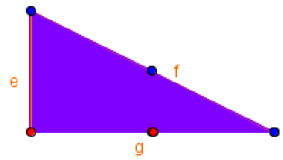


Figura 36- Reconfiguração do quadrado (cor lilás) e sobreposição no triângulo (cor laranja).

Cabe ressaltar, que existe outra possibilidade de recorte para esta mesma situação, que seria considerar os lados *f* e *g* para o corte, como mostra a figura 37.

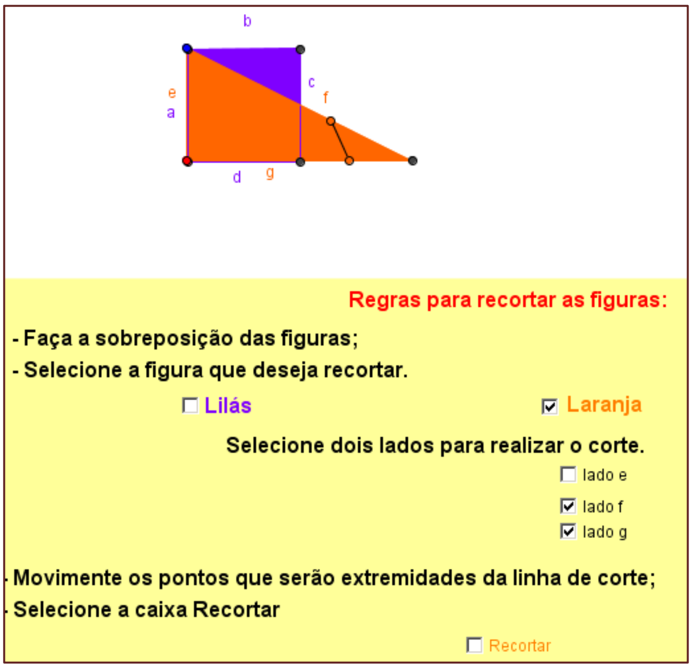
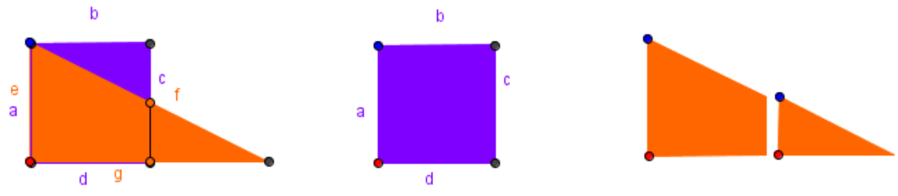


Figura 37- Imagem da linha de corte sugerida após escolha do triângulo (cor laranja) e dos lados *f* e *g*.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Para concluir essa abordagem, movimentam-se os pontos sobre os lados *f* e *g*, que são extremidades da linha de corte e, em seguida, seleciona-se a opção "recortar". Assim, o triângulo (cor laranja) é dividido em duas peças, obtendo-se uma decomposição heterogênea deste, conforme mostra a figura 38.



(a) (b)

Figura 38- (a) Linha de corte (lados *f* e *g*) no triângulo (cor laranja); (b) Sobreposição das peças do triângulo (cor laranja) sobre as peças do quadrado (cor lilás).

Em seguida, faz-se a reconfiguração das peças criadas após o recorte. Neste caso, a figura formada será igual ao quadrado (cor lilás). Para verificar isso, sobrepõem-se as peças de cor laranja sobre o quadrado (cor lilás) (Figura 39). Espera-se que os alunos possam concluir que há uma equivalência das regiões internas do par de figuras.

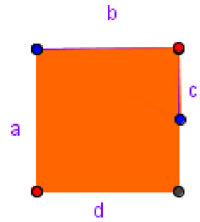


Figura 39- Reconfiguração do triângulo (cor laranja) e sobreposição no quadrado (cor lilás).

Além dessas duas possibilidades de recorte referentes na escolha da figura 32(a), pode ocorrer outra, recortando ambas as figuras, quadrado (cor lilás) e triângulo (cor laranja), como indica a figura 40. Dessa forma, após o recorte, cada figura resultará em duas peças (Figura41(a)). Após, deve-se sobrepor duas a duas as peças, conforme mostra a figura 41(b).

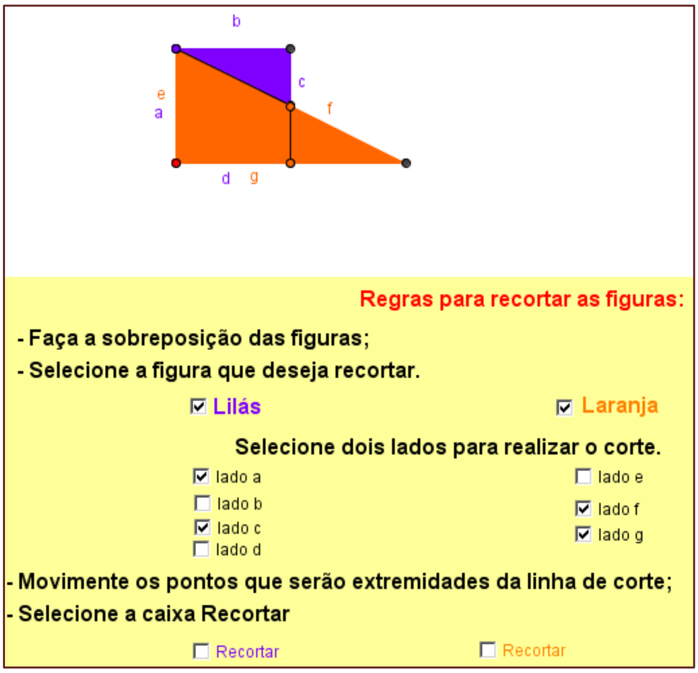


Figura 40- Imagem das linhas de corte (lados *a* e *c*; lados *f* e *g*) em ambas as figuras.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

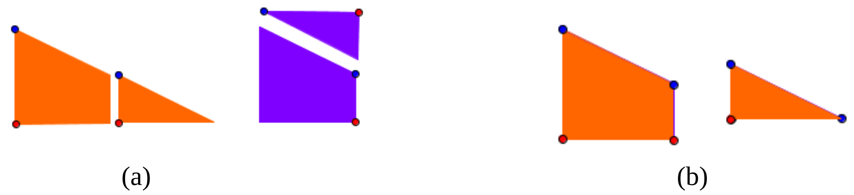


Figura 41- (a) Peças obtidas após o recorte de ambas as figuras triângulo (cor laranja) e quadrado (cor lilás); (b) Sobreposição das peças obtidas após o recorte de ambas as figuras.

Novamente pode-se observar a equivalência entre as regiões internas do par de figuras propostas nesta situação.

Em relação ao segundo par de figuras da atividade (Figura 42), existem quatro possibilidades para sobrepor as figuras de modo que seja possível fazer a comparação das regiões internas definidas por elas.

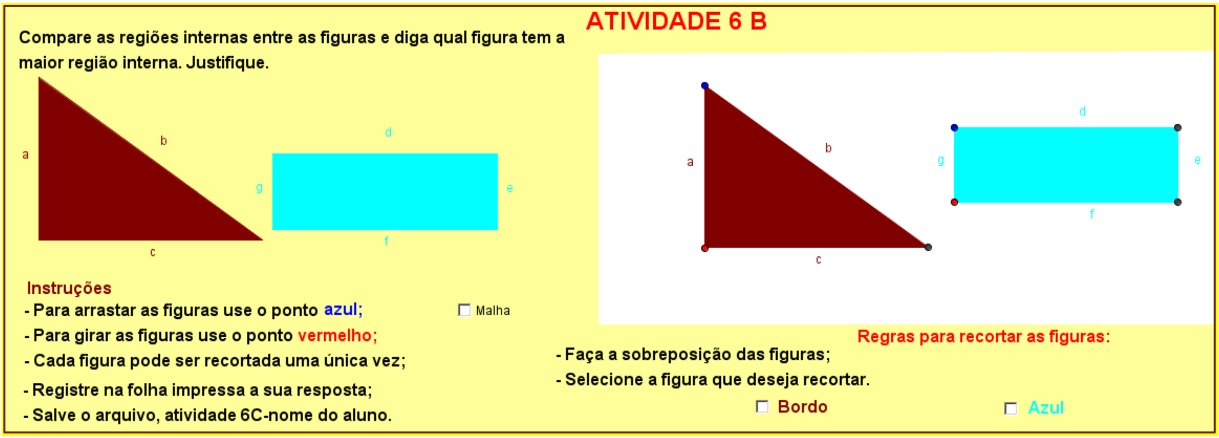
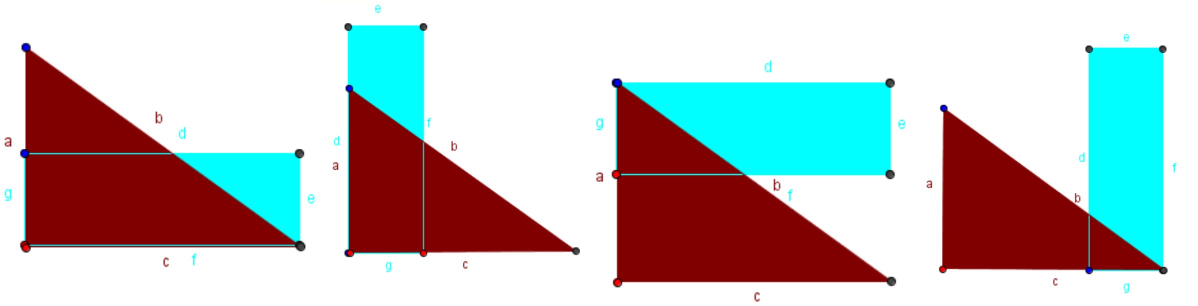


Figura 42- Imagem referente a atividade 6 do bloco 1 (2ª par de figuras).
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Para exemplificar, optou-se girar o retângulo (cor azul) (Figura 43). Entretanto, isso também poderia ser feito girando o triângulo (cor bordô) e, mesmo assim, permaneceriam as quatro possibilidades apresentadas a seguir. Também, destaca-se que as figuras estão na posição horizontal, mas poderiam ter sido giradas. Em todas as possibilidades de sobreposição a divisão mereológica será heterogênea, existindo várias formas de reconfiguração das peças obtidas com os possíveis recortes.

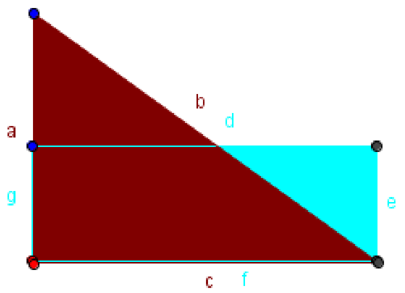
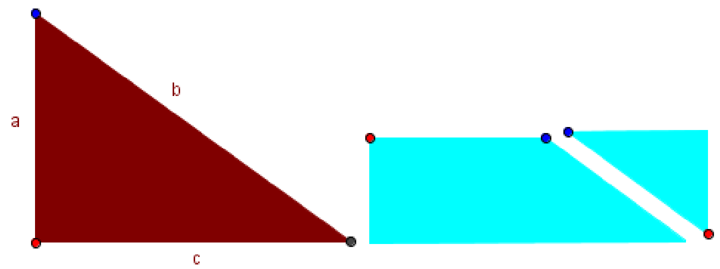
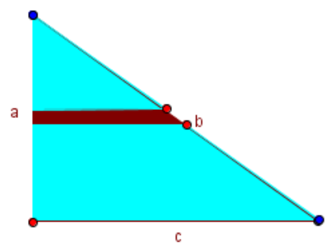


(a) (b) (c) (d)

Figura 43- Possibilidades no 2º par de figuras de sobreposição do triângulo (cor bordô) no retângulo (cor azul).

Na análise *a priori* referente ao caso mostrado na figura 43(a) tem-se três possibilidades de recorte para obter a solução da atividade, que será descrita a seguir.

Inicialmente, mostra-se o caso de corte do retângulo (cor azul). Para ilustrar, mostra-se a possibilidade de escolha dos lados *d* e *f* para extremidades da linha de corte. Feito isso, os alunos devem mover a linha de corte até o lugar sugerido pela sobreposição e selecionar a opção “recortar”. O quadro 6, apresenta um modo de continuar a resolução. Sendo que, a partir do processo de visualização se conduz a comparação das regiões internas desse par de figuras. Com base nisso, espera-se que os alunos percebam que o triângulo (cor bordô) possui região interna maior que o retângulo (cor azul). Uma vez que, após a sobreposição das peças obtidas com o recorte, sobra uma região de cor bordô.

<table>
<tr><th colspan="2">Recortar apenas o retângulo azul</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Peças formadas após recorte

</td></tr>
<tr><td>Exemplo de reconfiguração

</td></tr>
</table>

Quadro 6- Possibilidade de representação figural para o 2º par de figuras, com recorte no retângulo (cor azul).

No caso de recortar o triângulo (cor bordô), a linha de corte pode ter suas extremidades nos seguintes pares de lados: *a* e *b* ou *a* e *c*. A figura 44 mostra uma dessas possibilidades e o quadro 7 apresenta uma possibilidade decorrente desta escolha, a fim de se chegar a uma representação figural que permita concluir a atividade.

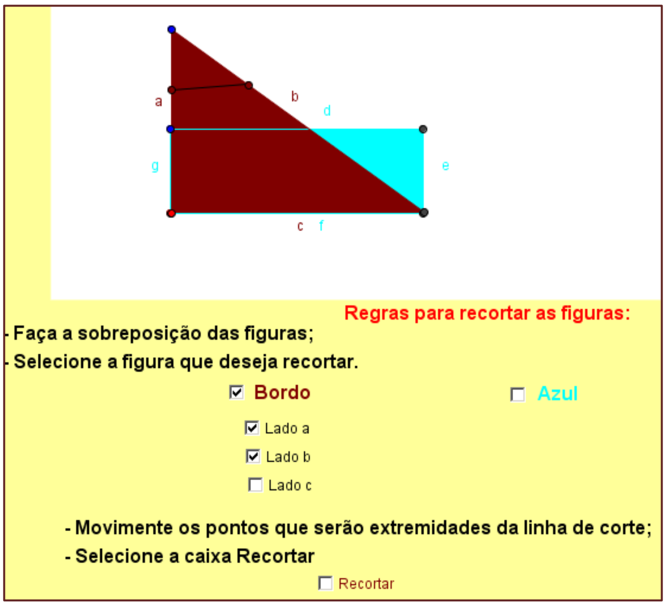
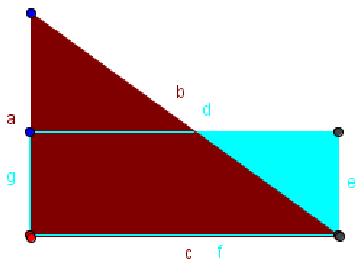
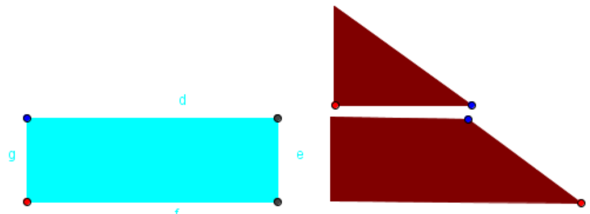


Figura 44- Imagem da linha de corte sugerida após escolha do triângulo (cor bordô) e dos lados *a* e *b*.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

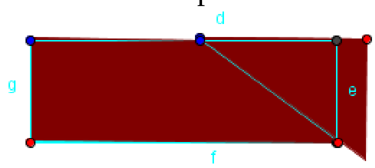
Recortar apenas o triângulo bordô



Peças formadas após recorte



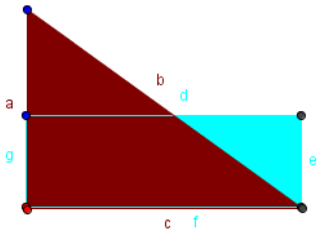
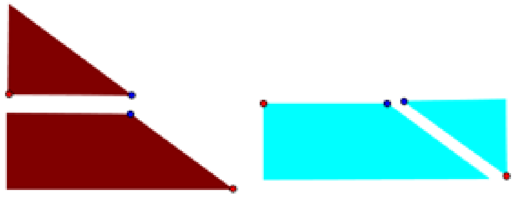
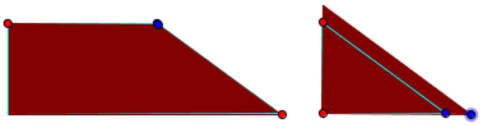
Exemplo de reconfiguração



Quadro 7- Possibilidade de representação figural para o 2º par de figuras, com recorte do triângulo (cor bordô).

Em decorrência disso, espera-se como resposta dos alunos concluírem que, o triângulo (cor bordô) tenha região interna maior que o retângulo (cor azul), pois as peças formadas após o recorte cobrem o retângulo (cor azul) e ainda a excede.

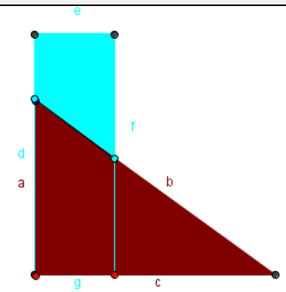
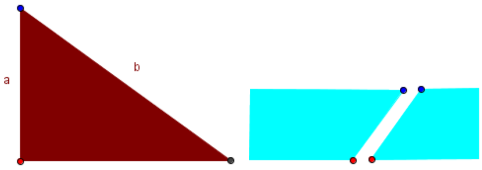
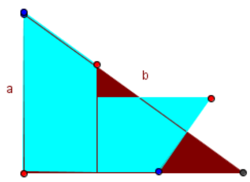
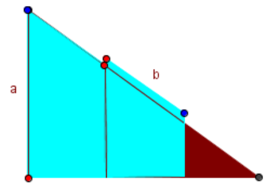
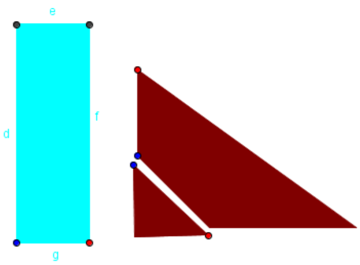
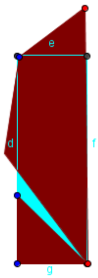
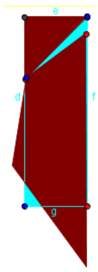
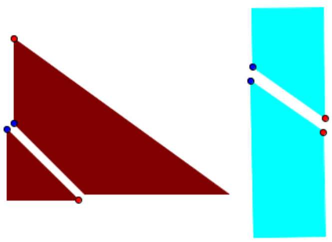
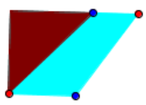
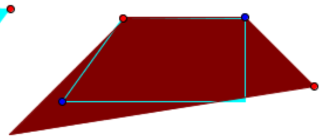
A terceira possibilidade que viabiliza a comparação das regiões internas do par de figuras consiste em recortar as duas figuras. Considere-se, para efeito de ilustração, os cortes no retângulo (cor azul), nos lados *d* e *e*, e no triângulo (cor bordô), nos lados *a* e *b*. Após, compara-se por sobreposição, duas a duas as peças obtidas, como indica o quadro 8.

<table>
<tr><th colspan="2">Recortando ambas as figuras</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Peças formadas após o corte
</td></tr>
<tr><td>Possibilidade de reconfiguração
</td></tr>
</table>

Quadro 8- Possibilidade de representação figural para o 2º par de figuras, com recorte no triângulo (cor bordô) e no retângulo (cor azul).

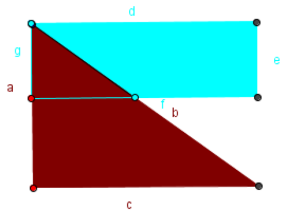
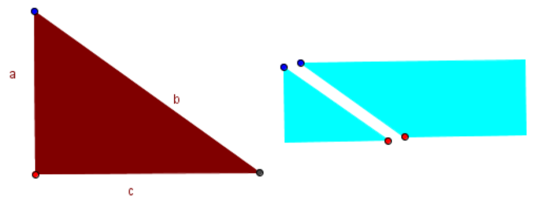
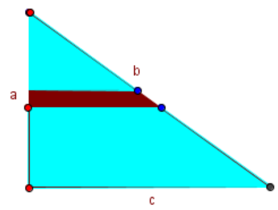
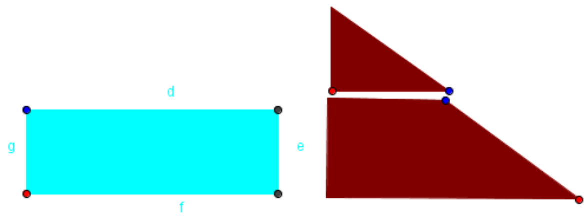
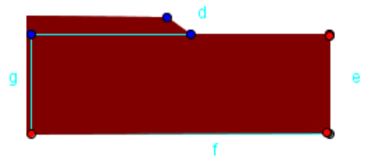
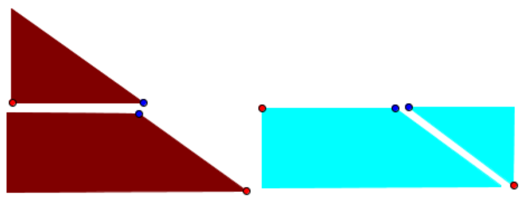
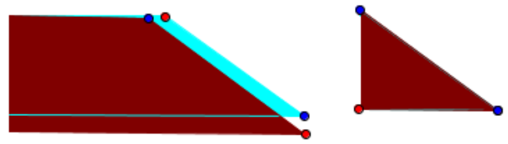
Conclui-se que a região interna do triângulo (cor bordô) é maior que a região interna do retângulo (cor azul). Já que na primeira sobreposição das peças as figuras são equivalentes e, na segunda, a peça de cor bordô apresenta maior região interna que a peça de cor azul.

A análise dos demais casos de sobreposição representados pela figura 48 são apresentadas algumas situações possíveis nos quadros 9 a11.

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de sobreposição</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th>Peças obtidas após o corte</th><th>Possibilidades de reconfiguração</th></tr>
<tr><td></td><td> </td></tr>
<tr><td></td><td> </td></tr>
<tr><td></td><td> </td></tr>
</table>

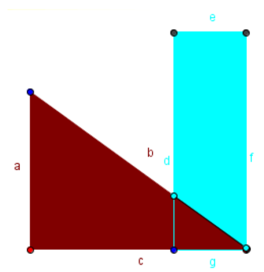
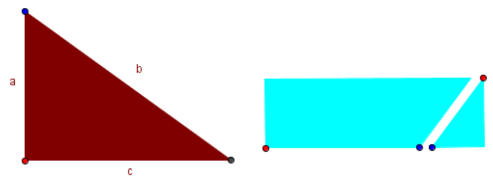
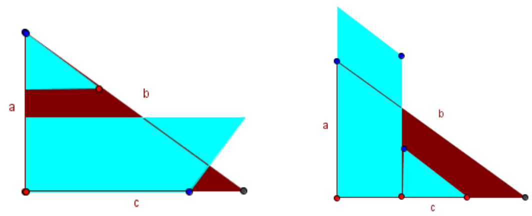
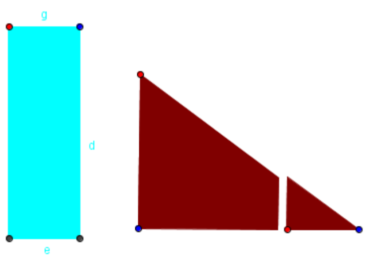
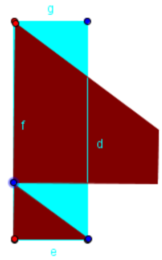
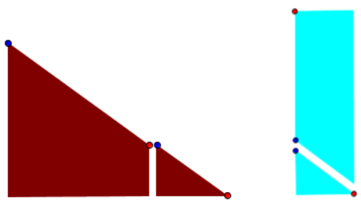
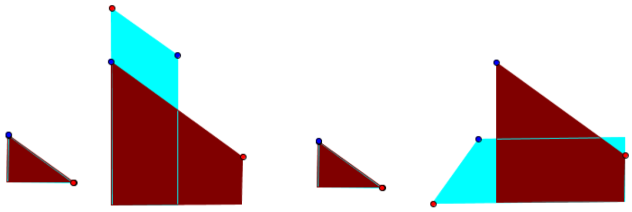
Quadro 9- Possibilidades de representações figurais para o 2º par de figuras, a partir de recortes nas figuras de partida correspondentes à figura 43 (b).

Nas possibilidades de reconfiguração realizadas com as peças obtidas com os recortes mostrados pelo quadro 9, espera-se que o aluno consiga verificar que triângulo (cor bordô) possui região interna maior que o retângulo (cor azul). Embora as reconfigurações e sobreposições realizadas não fiquem tão evidentes quanto às apresentadas no caso da figura 43(a).

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de sobreposição</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><th>Peças formadas após recorte</th><th>Possibilidades de reconfiguração</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

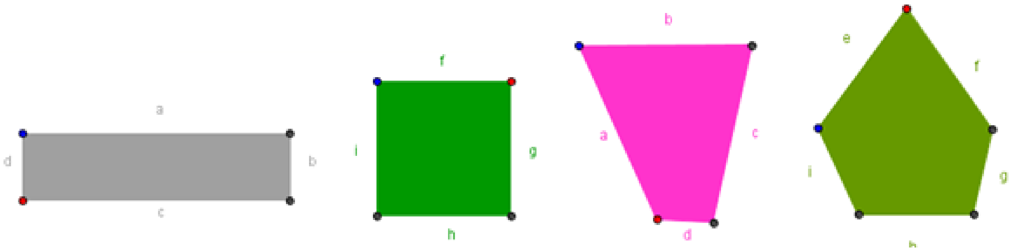
Quadro 10- Possibilidades de representações figurais para o 2º par de figuras a partir de recortes nas figuras de partida correspondentes à figura 43 (c) da atividade 6. Bloco 1.

Sendo assim, acredita-se que os casos ilustrados no quadro 10, possam ser seguidos pelos os alunos e, estes consigam concluir que a região interna do triângulo (cor bordô) é maior que a região interna do retângulo (cor azul).

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de sobreposição</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th>Peças formadas após o corte</th><th>Possibilidades de reconfiguração</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

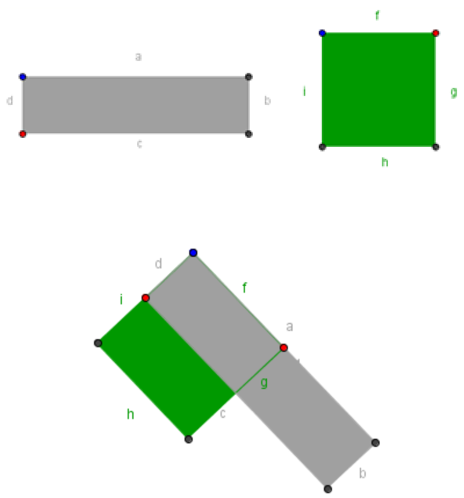
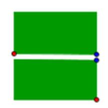
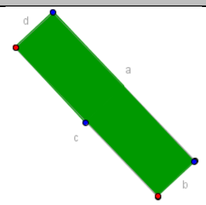
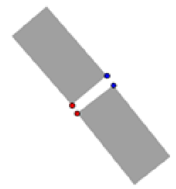
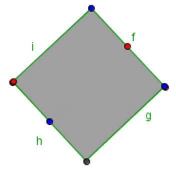
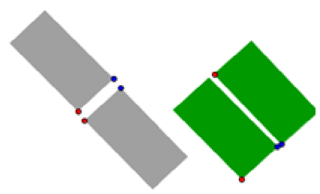
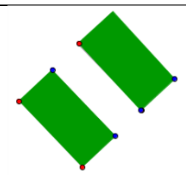
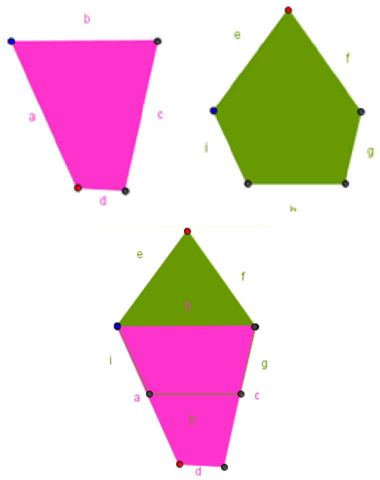
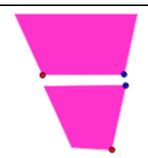
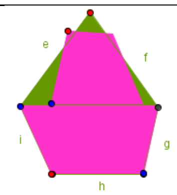
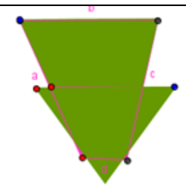
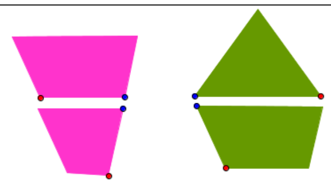
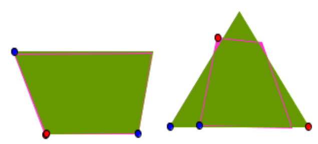
Quadro 11- Possibilidades de representações figurais para o 2º par de figuras a partir de recortes nas figuras de partida correspondentes à figura 43(d).

Os outros dois pares de figuras que compõem esta atividade (Figura 45) deverão ser explorados de forma semelhante aos pares analisados em detalhe anteriormente. No entanto, ressaltam-se, no quadro 12, algumas características dos pares de figuras.



(a) (b)

Figura 45- Imagem referente à atividade 6 do bloco 1. (a) Terceiro par de figuras; (b) Quarto par de figuras.

Figuras de partida- Sobreposição	Peças obtidas após o recorte	Reconfiguração
		
		
		
		
		
		

Quadro 12- Possibilidades de representações figurais que podem apresentadas pelos alunos referentes ao 3º e 4º par de figuras da atividade 6 do bloco 1.

Presume-se, finalmente que, independente da escolha de sobreposição ou recorte realizado pelos alunos estes tenham condições de concluir a equivalência das regiões internas do terceiro par de figuras. Quanto ao quarto par de figuras, devido às características das mesmas, espera-se que os alunos possam apresentar dificuldades para escolherem o modo de sobrepor as figuras. Mas, a partir de algumas manipulações, espera-se que possam concluir que o pentágono (cor verde) possui região interna maior que o quadrilátero (cor rosa).

As próximas atividades do bloco 1 foram adaptadas a partir do material disponibilizado em Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques, (2007).

7ª ATIVIDADE

Objetivo: explorar a equivalência entre áreas de figuras poligonais do tipo paralelogramo e retângulo.

Recurso criado no GeoGebra: na atividade surge, inicialmente, um diálogo entre dois personagens, João e Maria. Neste diálogo, cada personagem apresenta uma faixa pintada sobre um retângulo (cor preta). Sendo que, a faixa pintada por João é um retângulo na cor verde e a da Maria, um paralelogramo na cor rosa. João afirma que pintou mais que Maria. Porém, Maria discorda, conforme ilustra a figura 46. Para resolver esse impasse os alunos devem comparar as regiões pintadas pelos dois personagens.

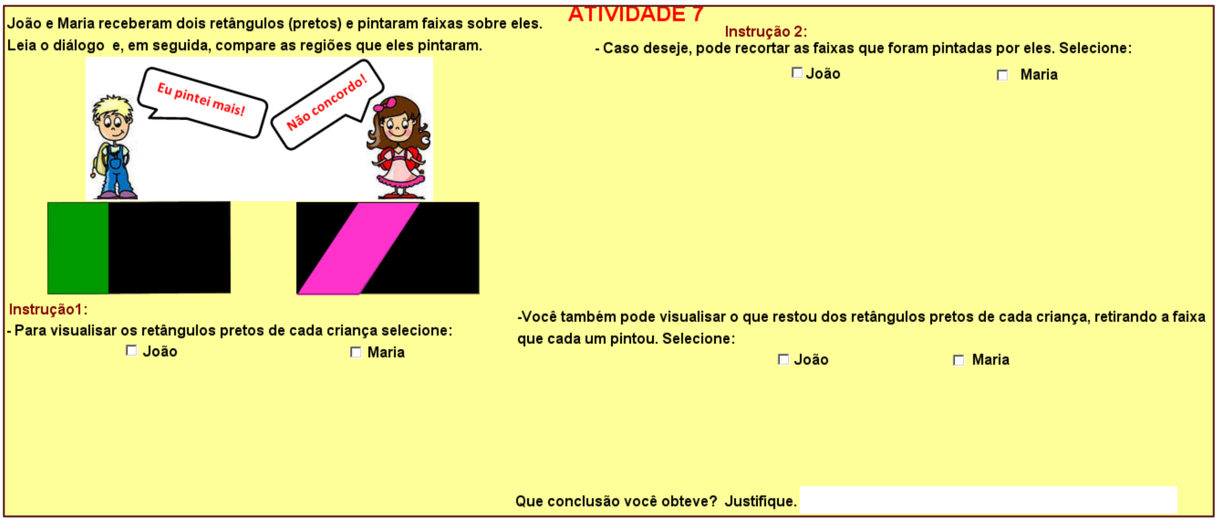


Figura 46- Imagem referente à atividade 7 do bloco 1.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Inicialmente os alunos podem comparar os retângulos (cor preta) nos quais os personagens pintaram a faixa, isso pode ser feito pela sobreposição. Para visualizar cada um dos retângulos seleciona-se a caixa com o nome do personagem (Figura 47). Sendo que estes podem ser arrastados e/ou rotacionados.

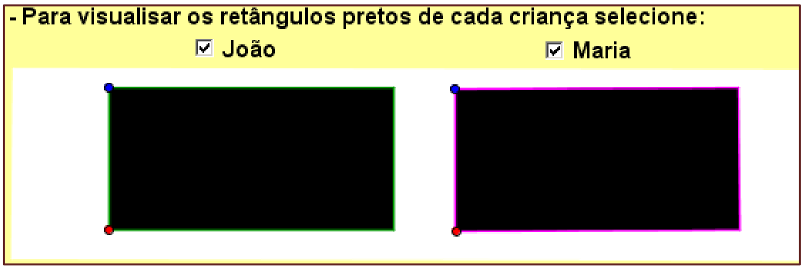


Figura 47- Imagem dos retângulos dos personagens.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora

Análise *a priori*: No início, espera-se que os alunos ao sobreporem os dois retângulos concluam que estes apresentam a mesma região interna. A partir disso, acredita-se que estes também possam perceber que basta compararem as regiões que os personagens pintaram, ou ainda, as regiões que sobraram de cada retângulo retiram-se a parte pintada pelos personagens. Como as operações figurais e discursivas envolvidas nessa atividade são semelhantes às operações da atividade anterior, estas não serão detalhadas aqui.

Previsão de respostas possíveis: no caso dos alunos escolherem comparar as faixas pintadas, basta selecionar o nome de cada personagem, surgindo assim, as mesmas. Bem como, as caixas correspondentes aos lados dessas figuras, como ilustra a figura 48.

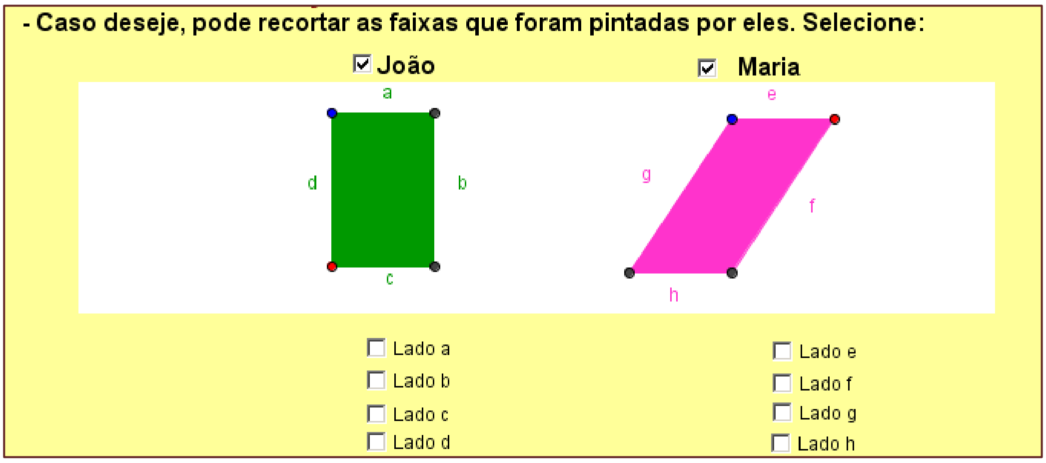
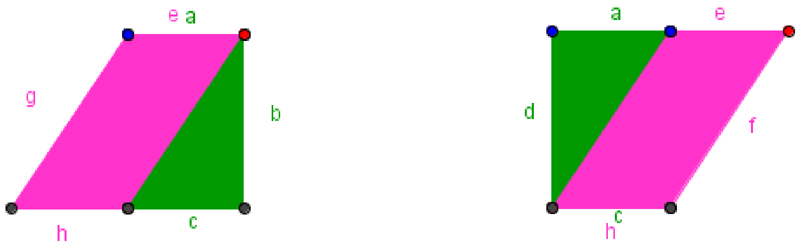


Figura 48- Analisando as faixas pintadas pelos personagens.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Posteriormente, para comparar as duas faixas, que correspondem a um retângulo (João) e um paralelogramo (Maria), pode ser feita a sobreposição entre elas, cujas possibilidades de sobrepor o paralelogramo no retângulo são exibidas na figura 49.



(a) (b)

Figura 49- Possibilidades de sobreposição entre as faixas pintadas pelos personagens.

De forma análoga a atividade anterior, os alunos poderão escolher os lados para o recorte das figuras, surgindo os pontos de extremidade da linha de corte. Estes poderão ser movimentados ao longo dos respectivos lados até a posição desejada.

Como essas possibilidades são idênticas, optou-se por detalhar a sobreposição mostrada na figura 49(a). Para isso, existem três casos. A primeira a possibilidade considerada seria de recortar o paralelogramo (Maria). Neste caso, seleciona-se os lados *e* e *h*; *g* e *h*; *e* e *f* ou *g* e *f* . A figura 50 mostra a seleção dos lados *e* e *h*.

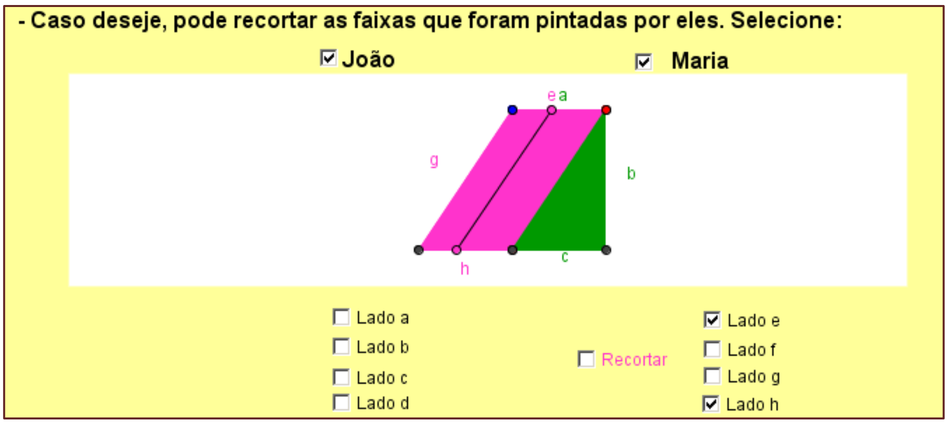
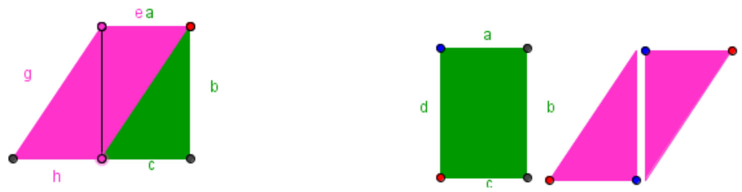


Figura 50- Imagem da linha de corte quando escolhido recortar o paralelogramo (Maria).
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Após, movem-se os pontos de cor rosa até a posição desejada e seleciona-se a opção “recortar”. Dessa forma é obtida a decomposição do paralelogramo, que resulta em dois triângulos congruentes, concluindo-se que a decomposição mereológica realizada é a homogênea. Na figura 51 são ilustrados estes passos.



(a) (b)

Figura 51-(a) Linha de corte no paralelogramo (Maria); (b) Retângulo (João) e peças obtidas com o corte no paralelogramo (Maria).

Sendo que, a reconfiguração do paralelogramo, faixa pintada por Maria, resultará em um retângulo congruente ao retângulo correspondente a faixa pintada por João. Isso pode ser verificado através da sobreposição entre as peças, como mostra a figura 52.

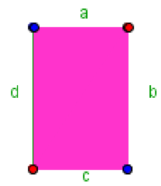


Figura 52- Reconfiguração do paralelogramo (Maria) e sobreposição sobre o retângulo (João).

Também, pode-se resolver a atividade utilizando um segundo caso, que consiste no recorte do retângulo (João). Analisando essa possibilidade, têm-se as opções de recorte nos lados: *a* e *c* ; *a* e *d*; *b* e *c* ou *b* e *d.* A figura 53 ilustra a escolha dos lados *a* e *d*.

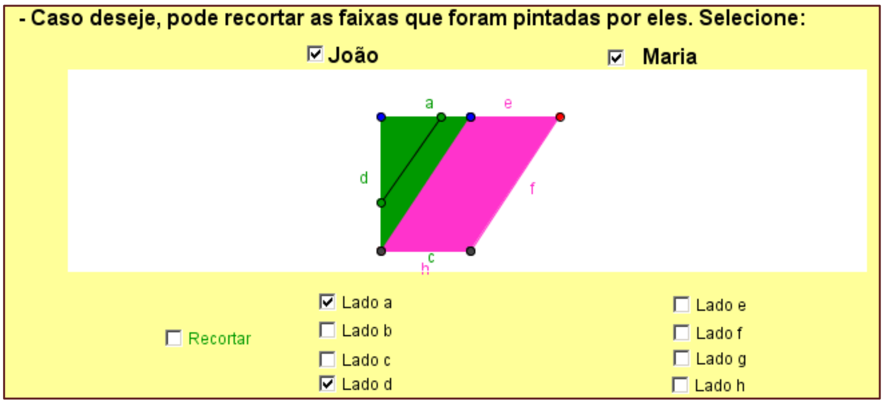
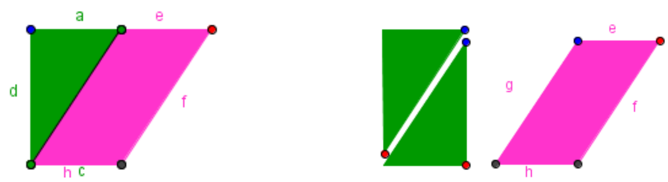


Figura 53- Imagem da linha de corte quando escolhido recortar o retângulo (João).
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Movimentando-se os pontos de extremidades da linha de corte, figura 54(a) e recortando a faixa verde obtêm-se duas peças, como mostra a figura 54(b).



(a) (b)

Figura 54- Linha de corte no retângulo (João); (b) Peças obtidas com o corte no retângulo (João) e o paralelogramo (Maria).

Sobrepondo as peças obtidas pelo recorte no paralelogramo, que corresponde a faixa pintada por Maria, têm-se a reconfiguração do retângulo em um paralelogramo congruente ao paralelogramo (Maria), como mostra a figura 55.

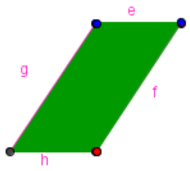


Figura 55- Reconfiguração do retângulo (João) e sobreposição sobre o paralelogramo (Maria).

Novamente, espera-se que os alunos possam concluir que há equivalência entre as regiões internas das duas faixas pintadas.

Ainda, para esta situação, poderá ocorrer uma terceira possibilidade, que é o recorte de ambas as faixas pintadas, conforme mostra a figura 56. Neste caso, para o recorte foram selecionados os lados *a* e *d* do retângulo (João) e os lados *e* e *f* do paralelogramo (Maria) . Vale salientar que, poderiam ser escolhidas outras combinações para os lados.

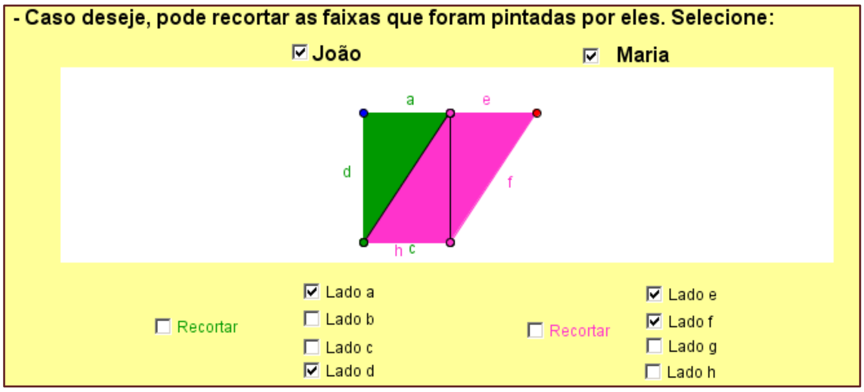


Figura 56- Imagem das linhas de corte quando escolhido recortar as duas faixas.

Após o corte, surgem quatro peças, como mostra a figura 57.

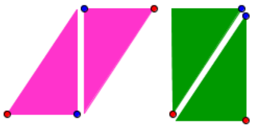


Figura 57- Peças obtidas o corte dos dois quadriláteros.

Sobrepondo duas a duas essas peças (Figura 58) conclui-se que há equivalência entre as regiões internas das faixas pintadas pelos personagens da atividade.

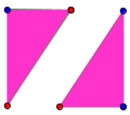
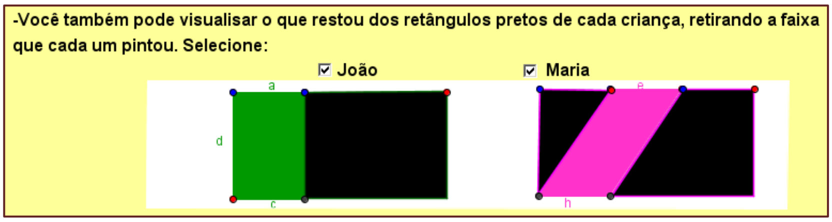
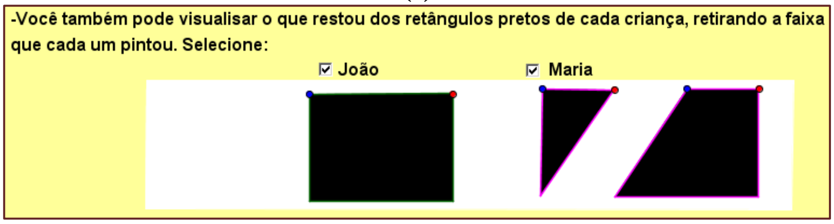


Figura 58- Sobreposição duas a duas das peças obtidas pelo corte das duas faixas.

Há, ainda, outra possibilidade de desenvolvimento da atividade. No entanto, acredita-se que seja a menos provável, pois consiste em concluir a partir da exploração e manipulação do recurso que a região interna não pintada (cor preta) de cada um dos retângulos são equivalentes entre si. Portanto, sugere-se que as regiões pintadas pelos personagens sejam também equivalentes, como mostram as imagens da figura 59.



(a)



(b)

Figura 59- a) Figuras de partida correspondente às faixas dos personagens; (b) Regiões internas resultantes dos retângulos (cor preta) retirando as faixas pintadas pelos personagens.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Assim, por sobreposição, compara-se o que restou dos retângulos (cor preta) de cada personagem retirando as respectivas faixas pintadas, como ilustrado na figura 60. Novamente, espera-se que os alunos possam concluir que há equivalência entre as regiões internas.

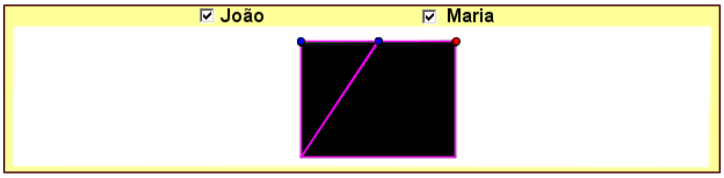


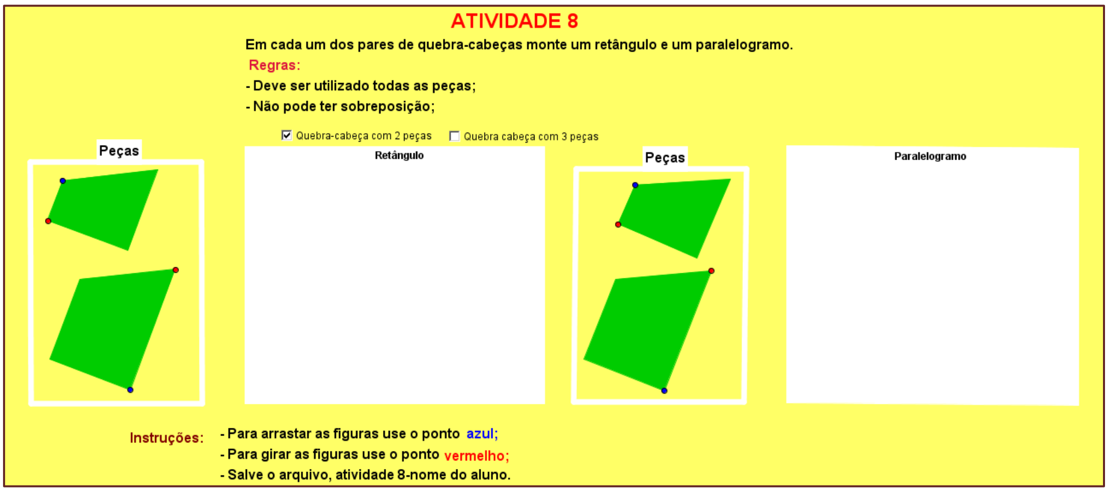
Figura 60- Sobreposição das regiões internas resultantes dos retângulos (cor preta) retirando-se as faixas pintadas pelos personagens.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

8ª ATIVIDADE

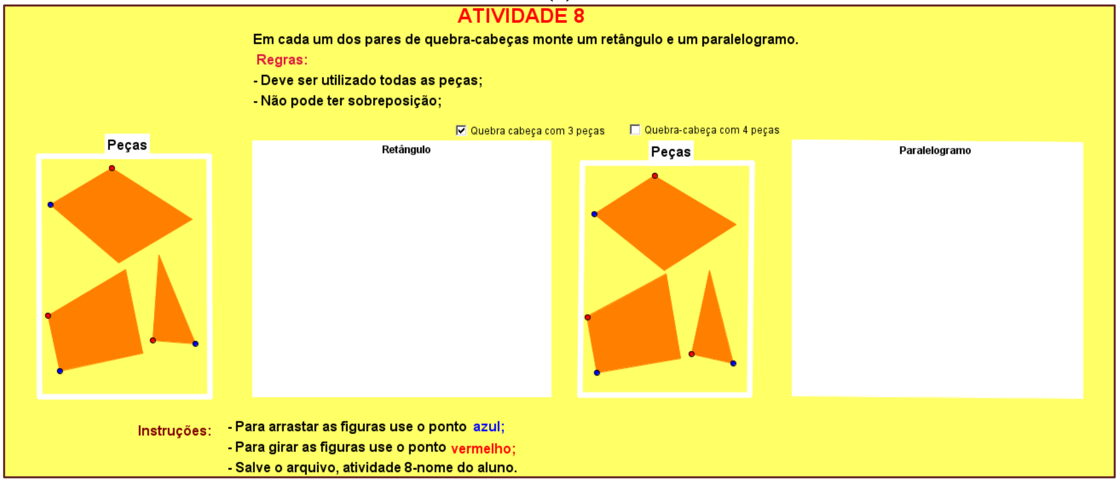
Nesta atividade serão disponibilizadas figuras geométricas, denominadas de peças, onde os alunos serão solicitados a montar três quebra-cabeças.

Objetivo: Construir retângulos e paralelogramos utilizando as peças disponibilizadas e identificar a equivalência entre suas áreas, sem usar, ainda, a terminologia "área".

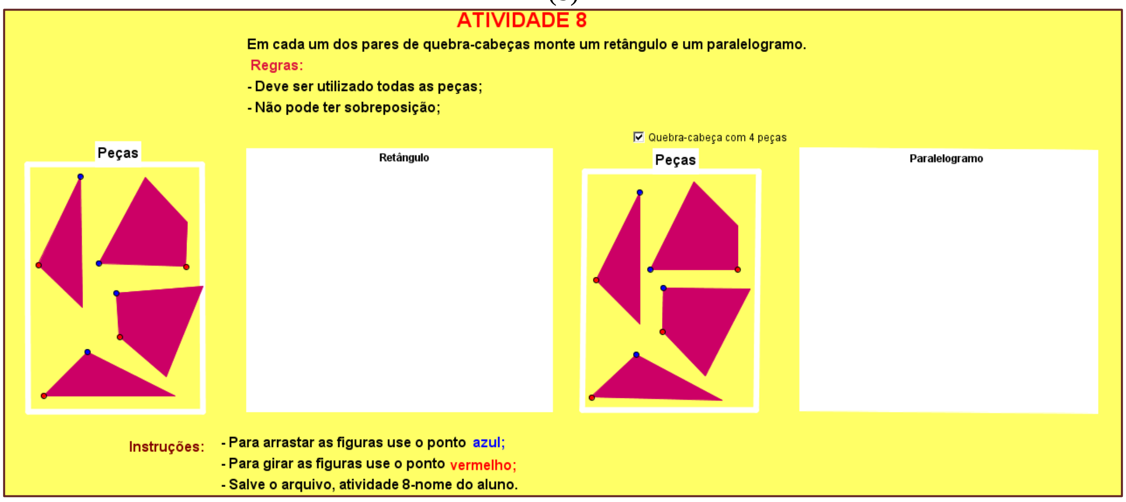
Recurso criado no GeoGebra: esta atividade é constituída por três quebra-cabeças com duas, três e quatro peças, respectivamente, conforme mostra a figura 61 . Em cada um desses, os alunos deverão montar duas reconfigurações, uma que resulte em um retângulo e, outra, em um paralelogramo.



(a)



(b)



(c)

Figura 61- Imagens referente aos três quebra-cabeças da atividade 8 do bloco 1.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Para realizar as reconfigurações, os alunos devem respeitar algumas regras, tais como: utilizarem todas as peças e não podem sobrepor as peças entre si. Sendo que, as peças disponibilizadas nos quebra-cabeças podem ser arrastadas e/ou rotacionadas. Quando um quebra-cabeça está selecionado os demais ficam ocultos. No entanto, os alunos têm a possibilidade de retornar a qualquer um dos quebra-cabeças, se desejarem.

Análise *a priori*: Em cada quebra-cabeça os alunos precisam montar um retângulo e um paralelogramo, utilizando em cada caso todas as peças fornecidas. Assim, entende-se que os três tipos de apreensões, distinguidos por Duval (2012b), estejam contemplados durante a resolução desta atividade. As apreensões perceptivas estão subordinadas a apreensão discursiva. Uma vez que, para resolver a atividade haverá a necessidade dos alunos conceituarem e conhecerem as propriedades do retângulo e do paralelogramo.

Essa subordinação referida anteriormente é considerada por Duval (1988 apud PIROLA, 2012, p.45), como:

> (...) uma teorização da representação figural: a figura geométrica torna-se, de uma certa maneira, um fragmento do discurso teórico. Os elementos e as propriedades que aparecem sobre a figura tem, não mais do que o estatuto e a certeza das asserções correspondentes no discurso geométrico, o qual é comandado por definições, axiomas e teoremas já estabelecidos. A mesma figura, do ponto perceptivo, pode, desse modo, ser uma figura geométrica diferente se modificamos o enunciado das hipóteses. (DUVAL, 1988, p.69 apud PIROLA, 2012, p.45).

Por fim, tem-se a apreensão operatória, pois os alunos terão que explorar a produtividade heurística das subfiguras (peças disponibilizadas) e, com elas, realizarem a reconfiguração intermediária (retângulo e paralelogramo). Assim, tanto a modificação mereológica quanto a modificação posicional serão utilizadas.

Esta atividade requer dos alunos a conversão do registro língua natural para o registro figural, pois a partir do enunciado da questão, estes devem mobilizar conhecimentos relativos a conceitualização das figuras geométricas, retângulo e paralelogramo. Em seguida, com a manipulação das peças dos quebra-cabeças estes devem reproduzi-las .

Previsões de respostas possíveis: inicialmente, para o primeiro quebra-cabeça, composto por 2 peças, espera-se que os alunos através de manipulações com as mesmas consiga construir o retângulo. Neste caso, tem-se apenas uma resposta, como mostra a figura 62. Porém, a figura construída (retângulo) pode estar em outras posições na tela do computador.

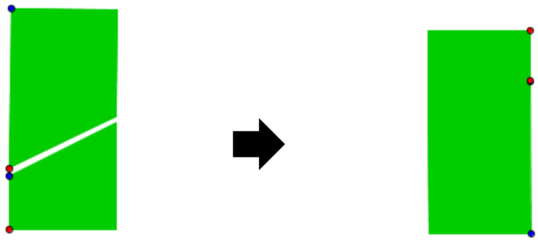


Figura 62- Reconfiguração das duas peças, criando-se um retângulo.

Entretanto, para reconfigurar as figuras (peças) a fim de se obter um paralelogramo, há duas possibilidades. Uma delas é exatamente o desenvolvimento anterior, obtendo-se outro retângulo. Já, a segunda possibilidade, seria a reconfiguração ilustrada na figura 63.

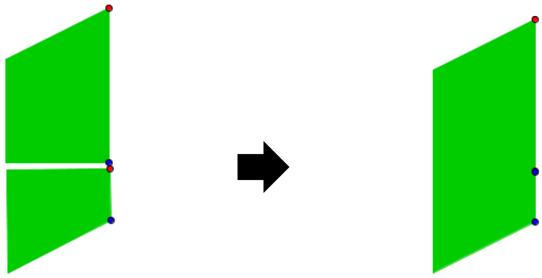


Figura 63- Reconfiguração das duas peças, criando-se um paralelogramo.

Para o segundo quebra-cabeça, composto por três peças, a fim de se montar um retângulo, basta realizar a disposição das peças como mostrado na figura 64. Evidencia-se, ainda que, para esse mesmo modo de justapor as peças, elas podem estar em outra posição na tela, para isso basta arrastá-las ou rotacionar as mesmas.

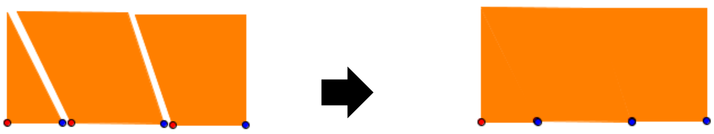
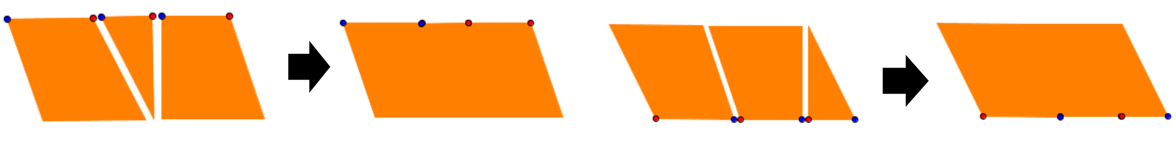


Figura 64- Reconfiguração das três peças, definindo-se um retângulo.

Além da possibilidade de obter um retângulo, têm-se outras duas maneiras, que são mostradas na figura 65.



(a) (b)

Figura 65- Duas possibilidades de reconfiguração das três peças, definindo-se um paralelogramo.

No último quebra-cabeça, constituído por quatro peças, existe uma única forma de montar um retângulo, como ilustra a figura 66.

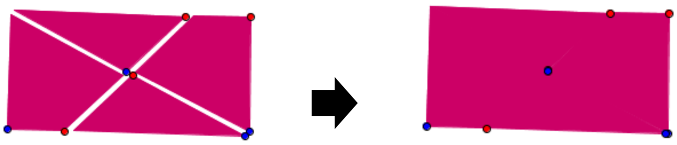


Figura 66- Reconfiguração das quatro peças obtendo-se um retângulo.

Já, neste caso, para obter-se um paralelogramo, além da possibilidade anterior, existem mais três formas distintas, como mostra a figura 67.

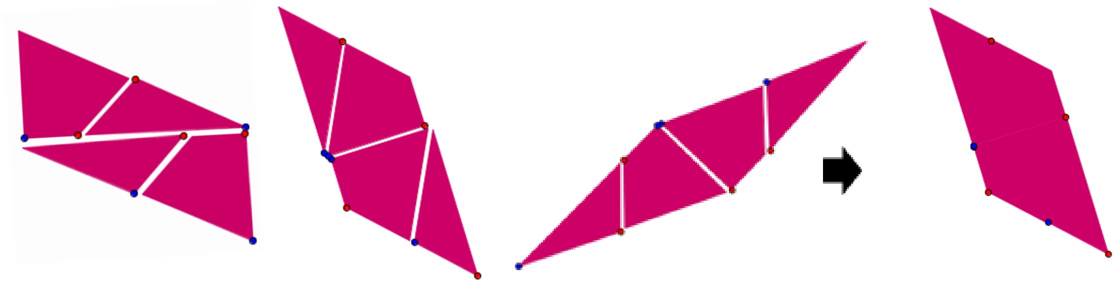


Figura 67- Três possibilidades de reconfiguração das quatro peças, obtendo-se um paralelogramo.

Entre os objetivos do primeiro bloco de atividades está proporcionar aos alunos, noções de área através da comparação entre as superfícies de figuras, denominadas, até então, de "regiões internas". Assim, espera-se que os alunos consigam com estas atividades, comparar as áreas de algumas figuras, identificando se uma figura tem região interna maior, menor ou igual à outra. Nesse último caso, concluir que as figuras são equivalentes em termos de região interna. Dessa forma, acredita-se que os alunos teriam, nesta etapa, condições de elaborar significados ao termo "região interna" como a quantidade de superfície ocupada pela figura.

3.1.2 Bloco 2 - Atividades

Nesse bloco inicia-se a correspondência entre áreas e números, tendo como objetivos:

• Utilizar três tipos de registros distintos de representação semiótica: língua natural, sistema de escrita (numérico) e registros figurais. Sendo que, em algumas atividades haverá a conversão entre esses registros;

• Fazer medições usando os padrões familiares e convencionais e expressar a medida do perímetro e da área de algumas figuras planas;

• Construir e utilizar procedimentos de cálculo para determinar a medida do perímetro e da área de algumas figuras planas;

• Reforçar a distinção entre perímetro e área. Para que os alunos possam constatar que essas grandezas são independentes uma da outra;

• Utilizar a operação de reconfiguração e tratamentos figurais para resolução das atividades.

Nas atividades 2, 4, 6, 7, 8 e 9 deste bloco, devido suas características, o item envolvendo previsões de respostas possíveis foi extinguido. As informações relacionadas a este item foram incorporadas nos itens: recurso criado no GeoGebra e na análise *a priori*. Uma vez que, existem muitas possibilidades de solução e, também, porque durante a descrição destes houve a necessidade de abordar algumas respostas possíveis dos alunos.

1ª ATIVIDADE

Nesta atividade serão exploradas as medições que envolvem o valor numérico associado aos conceitos de perímetro e de área de uma mesma figura. Para isso, serão utilizadas diferentes unidades de comprimento e de área.

Objetivo: realizar medições para o perímetro e área de uma figura e perceber que uma mesma figura plana pode possuir perímetro e área com valores numéricos associados diferentes, dependendo da unidade de medida adotada.

Embora não seja explorado explicitamente nesta atividade, espera-se que os alunos percebam que o perímetro está associado a um valor numérico com uma unidade de medida unidimensional e, a área, a uma unidade de medida bidimensional.

Recurso criado no GeoGebra: essa atividade está dividida em duas partes. Na primeira será explorada a ideia de perímetro de um quadrado dado, utilizando-se quatro diferentes unidades de comprimento, conforme ilustrado na figura 68.

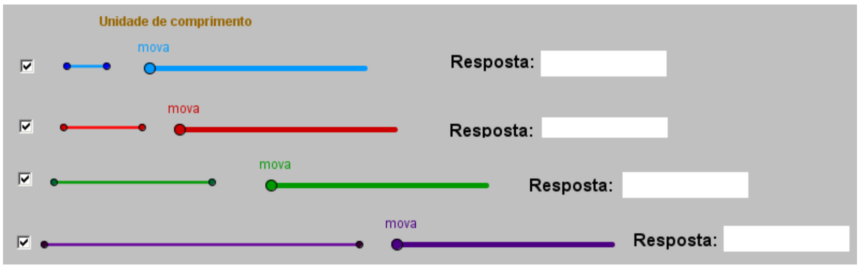


Figura 68- Diferentes unidades de comprimento utilizadas para medir o perímetro do quadrado.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Na descrição da atividade optou-se por utilizar o termo “medida do contorno” ao invés de “perímetro”, pois essa linguagem é mais próxima da língua natural dos alunos. Sendo que, após essa atividade, a professora poderá conduzir a definição de perímetro de um polígono como sendo a soma das medidas do comprimento dos seus lados.

Para determinar a medida do contorno do quadrado, inicialmente, os alunos devem selecionar a caixa que corresponde a uma unidade de comprimento. Assim, automaticamente, surge na tela um controle deslizante, denominado “mova” que está localizado ao lado da referida unidade. Ao movimentá-lo, se forma a linha métrica correspondente à unidade adotada contornando o quadrado na mesma cor da unidade utilizada. Simultaneamente a movimentação do seletor, os alunos podem contar quantas unidades de comprimento são utilizadas para obter a medida do contorno do quadrado. Quando uma caixa que corresponde a uma unidade de comprimento está selecionada, aparece a próxima caixa a ser utilizada que, por sua vez, ao ser selecionada, ocultará a caixa anterior e os objetos referentes a ela. Dessa forma, surge a próxima unidade de medida, seletor e o contorno correspondente. Entretanto, os alunos podem retornar a visualização das unidades que exploradas quantas vezes desejar, bastando selecionar a caixa correspondente.

A imagem apresentada na figura 69 ilustra a visualização da atividade quando o seletor “mova” já foi acionado, neste caso, correspondendo a primeira unidade de comprimento disponibilizada na atividade.

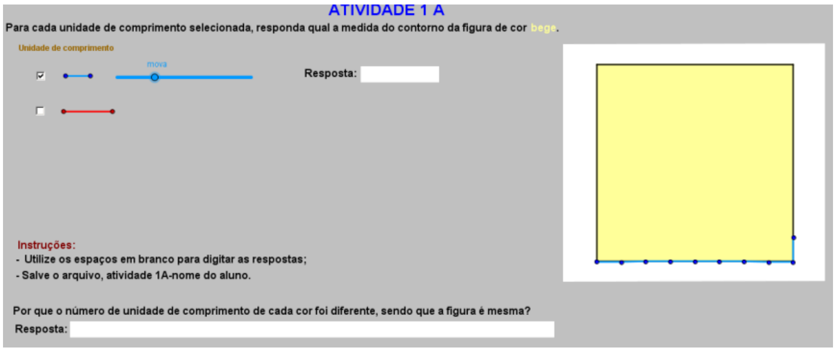


Figura 69- Imagem da linha métrica que se forma sobre o contorno do quadrado ao movimentar o seletor referente a atividade 1 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Após realizar a sobreposição da linha métrica sobre todo o contorno do quadrado, os alunos deverão identificar o valor encontrado para a medida do contorno, considerando-se as diferentes unidades de medida disponibilizadas.

Para finalizar, é feito o seguinte questionamento: “Por que o número de unidades de comprimento de cada cor foi diferente sendo que a figura é a mesma?”.

A resposta será registrada no próprio recurso numa caixa localizada na parte inferior da tela do computador.

O objetivo desse questionamento é possibilitar que os alunos reconheçam que a medida do contorno da figura dada, perímetro, varia de acordo com a unidade de comprimento adotada.

A segunda parte da atividade é semelhante à primeira, porém, serão explorados aspectos referentes à área do quadrado. Nesta etapa, serão consideradas quatro unidades diferentes de medidas de área, chamadas na atividade, de peças (Figura 70).

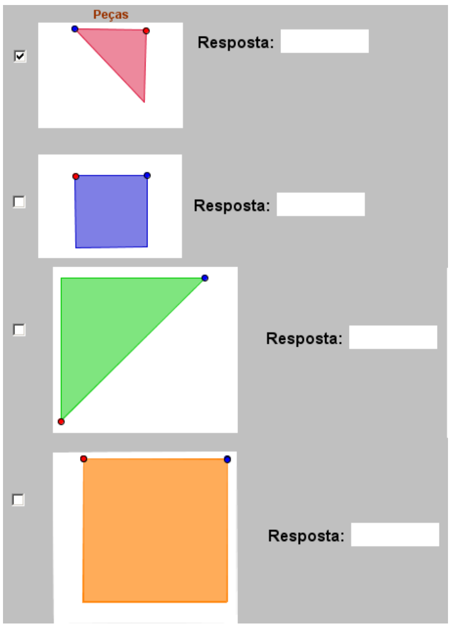


Figura 70- Diferentes unidades de medidas de área utilizadas para medir a região interna do quadrado dado.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

A segunda parte dessa atividade propõe o seguinte questionamento: “Para cada peça selecionada, responda quantas são necessárias para cobrir a região bege delimitada pelo contorno preto?”.

Sendo que, para construir a solução é necessário que os alunos realizem o preenchimento da região interna do quadrado utilizando as peças disponíveis (unidades de medidas de área). Para isso, deverão escolher, uma a uma, peças de uma mesma unidade de medida, preenchendo sem deixar espaços vazios e, sem sobreposição. As peças podem ser arrastadas e/ou rotacionadas na tela do computador.

A resposta para o questionamento feito deverá ser registrada no próprio recurso. Além disso, os alunos deverão responder ao final da atividade outro questionamento: “Por que o total de peças de cada cor, utilizadas para cobrir a figura bege foi diferente, sendo que, a região delimitada é a mesma?”.

Análise *a priori*: esta atividade se fundamenta no fato de que devem existir atividades que mobilizem simultaneamente, ao menos, dois registros de representação, ou que possam possibilitar trocas de passagens entre esses registros, conforme menciona Duval (2003). Assim, nesta é utilizado o registro língua natural, pois parte-se da interpretação do enunciado e das questões propostas. Além disso, no final de cada etapa, os alunos deverão responder por escrito os questionamentos feitos.

Há o registro numérico, onde os alunos deverão ter um olhar do agrimensor que, segundo Duval (2005), relaciona-se com atividades que exigem associação do registro figural com a finalidade de determinar uma medição. Sendo que, neste caso, deverá ser realizado o cálculo para obter a medida do contorno e do número de peças necessárias para cobrir a figura disponibilizada. O registro figural será explorado na primeira parte da atividade por meio da ferramenta “mova”, controle deslizante, que corresponde a medir o contorno da figura com diferentes unidades de medida. Assim, nesse momento a apreensão perceptiva das unidades de comprimento deverá ser suficiente para auxiliar na resolução dessa etapa da atividade.

A segunda parte da atividade é composta pelo preenchimento da região limitada pela figura, utilizando-se peças dinâmicas disponibilizadas. Neste caso, em relação a apreensão figural requerida pela atividade, tem-se que, parte-se da apreensão perceptiva das peças para a apreensão operatória. Pois, os alunos deverão organizar as peças no interior da figura de partida, de modo que seja possível cobrir toda a região interna e sem sobreposição de peças.

Diante disso, entende-se a importância desta atividade que, embora contemple apenas tratamentos específicos de cada registro: figural, numérico e língua natural, também, exige a articulação entre eles para que os alunos cheguem até a resolução da atividade.

Previsão de respostas possíveis: na primeira parte da atividade espera-se que os alunos sejam capazes de perceber que, dependendo da escolha da unidade de comprimento, o valor do contorno irá ser diferente para o quadrado apresentado. Uma vez que, ao movimentar o seletor eles poderão observar uma linha métrica sobre o contorno, a partir da unidade de comprimento selecionada. Além disso, deverão responder, em um espaço próprio, o valor deste contorno, como mostra a figura 71.

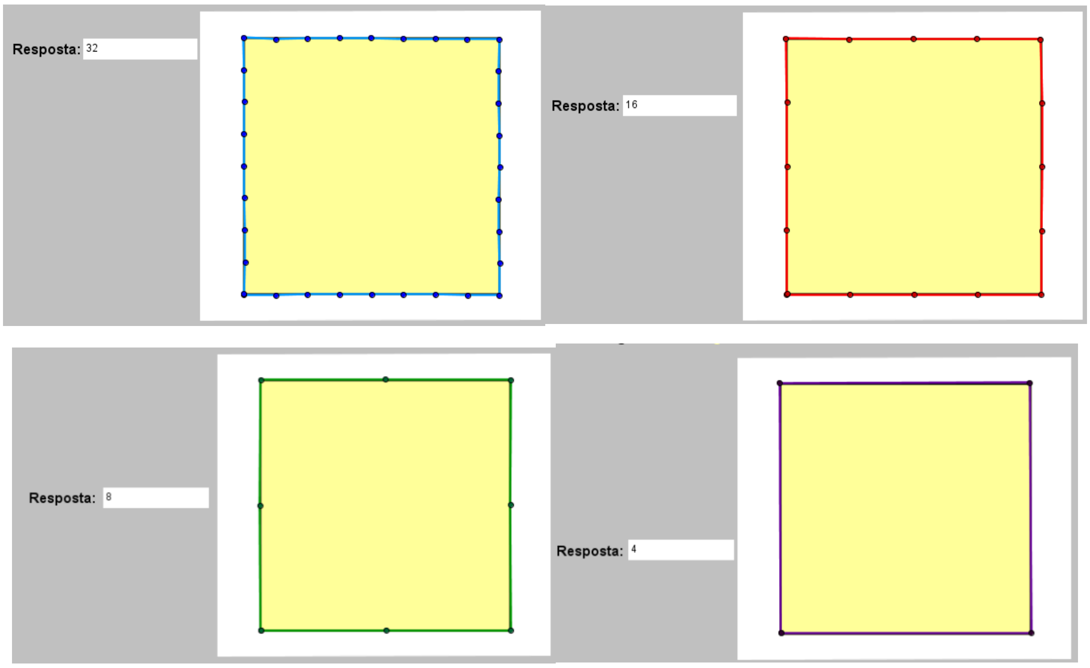
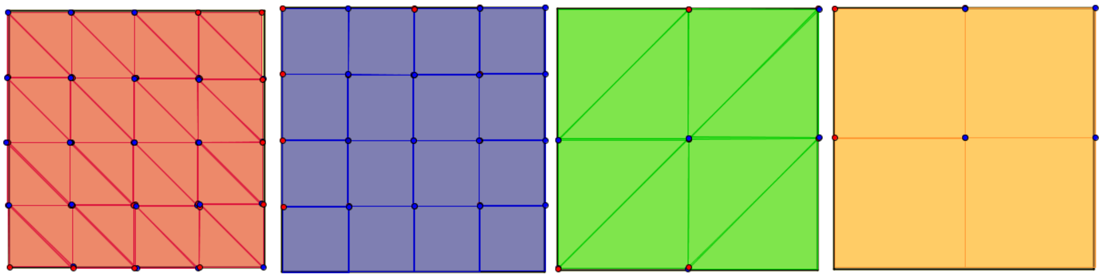


Figura 71- Imagens de respostas esperadas para a 1ª figura.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora

Destaca-se ainda que, nesta atividade, inicia-se o raciocínio do cálculo para obtenção do perímetro do quadrado. Acredita-se que, nas primeiras unidades de comprimento, os alunos façam a contagem uma a uma das unidades que cabem no contorno (perímetro) do quadrado. No entanto, espera-se que, nas próximas unidades de comprimento, estes possam já associar a medida do contorno do quadrado com a soma de quatro parcelas iguais (medida do lado do quadrado). Assim, concluindo que, para obter a medida do contorno (perímetro) do quadrado, basta multiplicar a medida do seu lado por quatro.

Outro aspecto que pode ser utilizado pelos alunos para obter a solução da atividade, a nível numérico, é a comparação das unidades de comprimento disponibilizadas. Ou seja, “quantas vezes uma delas contém a outra?”. Visto que, a segunda unidade de comprimento é o dobro da primeira; a terceira é o dobro da segunda e, a quarta o dobro da terceira. Dessa forma, os alunos poderão determinar a medida do contorno (perímetro) para as demais unidades utilizando a primeira unidade de comprimento.

Na segunda parte da atividade acredita-se que os alunos terão facilidade em preencher a figura original (quadrado) e determinar o número de peças utilizadas para isso. Na figura 72 são ilustrados os possíveis preenchimentos do quadrado dado, a partir de unidades de áreas diferentes.



(a) (b) (c) (d)

Figura 72- Imagens de respostas esperadas para a segunda etapa da atividade.

Em termos do registro numérico espera-se que, a partir da contagem do total de peças utilizadas para preencher a região interna do quadrado, alguns alunos comecem a relacionar o cálculo da medida da região interna (área) desta figura, com o produto da medida de dois lados. Isso fica mais visível nos itens (b) e (d), representados na figura 72, pois as unidades de medida de área utilizadas são também quadrados.

Novamente, as unidades de medida de área utilizadas na atividade são múltiplas entre si, isto é, a peça quadrada, de cor azul, é o dobro da peça triangular, de cor vermelha; a peça triangular, de cor verde, é o dobro da peça quadrada, de cor azul e, a peça quadrada, de cor laranja, é o dobro da peça triangular, de cor verde. No entanto, isso pode influenciar no raciocínio dos alunos para resolverem a atividade.

ATIVIDADE 2

Objetivo: construir figuras que possam ter medidas do contorno diferentes (perímetro) e com regiões internas (área) de mesma medida, a fim de se concluir que figuras que possuem mesma área podem ter perímetros diferentes.

Recurso criado no GeoGebra: nessa atividade o enunciado da questão solicita aos alunos construírem quatro figuras diferentes, utilizando para cada uma, cinco quadrados (cor laranja). Para isso, é indicada a regra de que, os quadrados (cor laranja) devem ser dispostos um ao lado do outro sem sobreposição das peças.

Além disso, a atividade apresenta um espaço (em branco) com uma malha quadriculada para a composição de cada figura. Sendo que, abaixo de cada um desses, encontram-se cinco peças na forma de quadrados (cor laranja) que estão sobrepostos. Os alunos irão arrastá-los até a malha para realizarem as composições solicitadas. Posteriormente, estes precisam determinar o valor do perímetro e da área de cada figura construída. Para isso, utilizarão um segmento (cor marrom) que é congruente ao lado do quadrado (cor laranja), o qual será considerado a unidade de comprimento. Além disso, também é disponibilizado um quadrado (cor marrom) que é congruente ao quadrado (cor laranja) o qual será considerado a unidade de área. A figura 73 apresenta uma imagem da atividade.

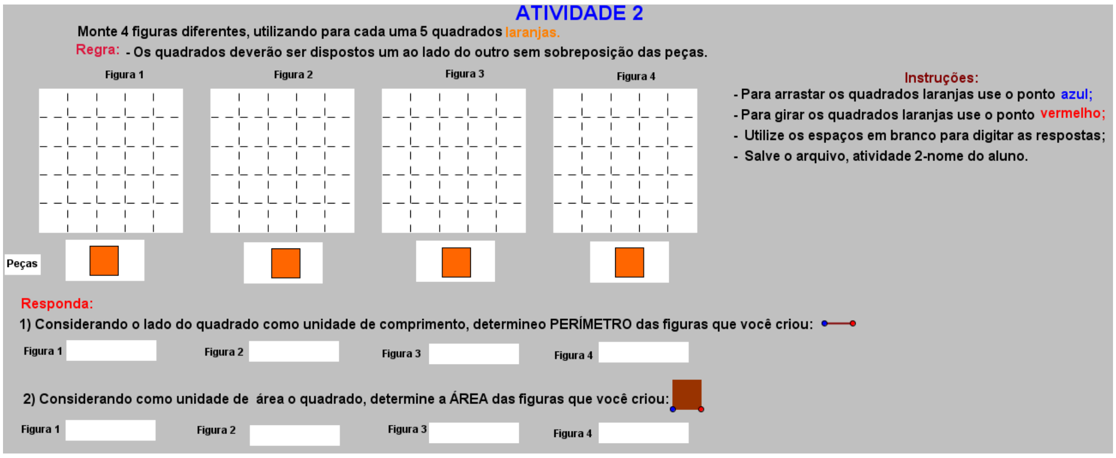


Figura 73- Imagem do arquivo do GeoGebra referente a atividade 2 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Análise *a priori*: nessa atividade os alunos partem do registro língua natural presente no enunciado, pois este requer uma interpretação e compreensão das instruções dadas, a fim de que, possam representar no registro figural o que se pede, isto é, a realização de uma reconfiguração de partes elementares, neste caso, cinco quadrados, para compor quatro figuras diferentes.

Em relação às apreensões figurais distinguidas por Duval (2012a), essa atividade contempla, a apreensão perceptiva, pois exige que sejam construídas figuras diferentes. Além disso, envolve a apreensão operatória, mais especificamente, a modificação posicional, pois os quadrados (cor laranja) deverão ser movimentados na tela do computador com a finalidade de construir tais figuras. Também, classifica-se como o olhar do inventor, conforme indica Duval (2005). Uma vez que, essa maneira ver as figuras requer que os alunos reorganizem visualmente as formas perceptivas elementares de uma figura. Nesse caso corresponde as quatro figuras a serem construídas, compostas a partir de unidades quadradas fornecidas. Para finalizar, serão utilizados nesta atividade tratamentos no registro numérico, a fim de determinar a medida do perímetro e da área das figuras construídas, assim contemplando o olhar do agrimensor.

Previsão de respostas possíveis: para esta atividade existem doze configurações diferentes que podem ser formadas com as cinco peças disponibilizadas, que correspondem as peças do jogo chamado *pentaminós*[2], as quais são formadas a partir da justaposição pelos lados de cinco quadrados, conforme mostra a figura 74.

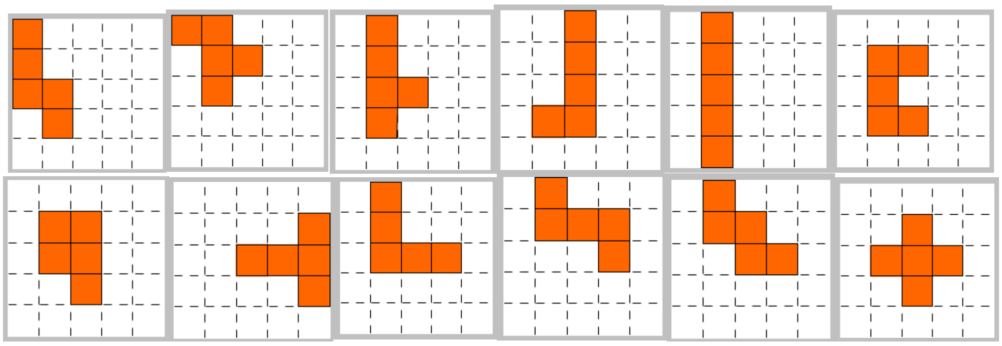


Figura 74- Imagens das possíveis reconfigurações a partir de cinco quadrados.

Espera-se também que, alguns alunos, considerem como figuras diferentes aquelas cujos lados possuem a mesma medida, porém, em posições diferentes, como sugere a figura 75.

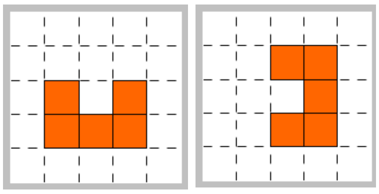


Figura 75- Duas possibilidades de reconfigurações que representam a mesma figura, no entanto, estão em posições diferentes.

Para determinar o perímetro, os alunos podem deslocar a unidade de comprimento (cor marrom) sobre o contorno das figuras criadas e realizarem a contagem. Ou ainda, podem utilizar a malha quadriculada. Quanto à área das figuras, embora elas sejam formadas a partir da justaposição de cinco quadrados, acredita-se que os alunos não percebam, inicialmente, que elas possuem a mesma área. Dessa forma, pode ocorrer que esses realizem a contagem dos quadrados (cor laranja), no mínimo, nas duas primeiras construções. Já, nas demais, espera-se que tenham percebido a consequência da condição imposta no enunciado: construir figuras com cinco quadrados de mesmo lado.

² É um conjunto de figuras formadas por cinco quadrados justapostos, sem formar "buracos". Trata-se de um caso particular dos *poliminós*, que, por sua vez, são formados por *n* quadrados. (ALMEIDA, 2005, p.1).

3ª ATIVIDADE

Objetivo: construir figuras com mesmo perímetro e determinar suas áreas para, após, constatar que as duas grandezas, perímetro e área, são independentes entre si.

Recurso criado no GeoGebra: são disponibilizadas duas figuras distintas, sendo indicadas nas mesmas a medida de seus lados e o cálculo do perímetro correspondente. Além disso, alguns dos vértices dessas figuras (cor verde) podem ser arrastados na tela do computador de modo que possam ser alteradas suas formas e, consequentemente, a medida de seus lados e, também, do perímetro. A figura 76 ilustra a imagem que os alunos visualizam ao iniciar a atividade.

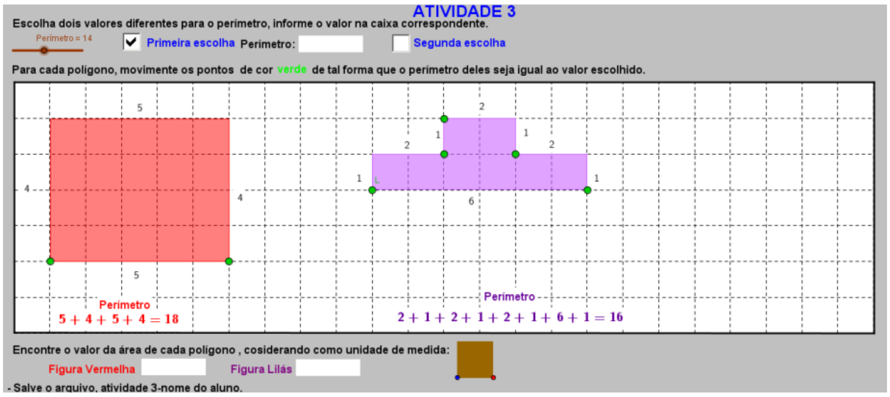


Figura 76- Imagens do arquivo do GeoGebra referente a atividade 3 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

O enunciado solicita que os alunos escolham dois valores diferentes para o perímetro, informando o valor na caixa correspondente. Com a primeira caixa selecionada, os alunos devem escolher um valor para o perímetro. Para isso, está definido um seletor com números naturais de 1 a 30, limitando-se, assim, a medida do perímetro. Essa limitação justifica-se porque as figuras construídas não devem ultrapassar o espaço destinado à sua construção.

Após escolher o valor para o perímetro, os alunos devem digitar em uma caixa esse valor. Posteriormente, a atividade propõe que, para cada polígono, eles movimentem os pontos (cor verde) de tal forma que o perímetro das figuras seja igual ao valor escolhido. Para finalizar, é solicitado que encontrem o valor da área de cada polígono, considerando como unidade de área o quadrado (cor marrom) disponibilizado.

Utilizou-se uma malha quadriculada e, ainda, um recurso do *software*, chamado “fixar ponto à malha”, que permite que as figuras construídas tenham apenas lados com medidas inteiras.

Depois da realização de todas as etapas propostas para a primeira escolha da medida do perímetro, os alunos deverão ir para a segunda escolha. Para isso, deve ser selecionada a caixa correspondente que fará com que as construções já realizadas e as resposta obtidas anteriormente desapareçam da tela. A partir daí, os alunos deverão dar continuidade na resolução da atividade utilizando os procedimentos análogos ao que já fora feito.

Nas figuras 77 e 78, são apresentadas imagens de resoluções possíveis utilizando-se como valores para o perímetro na primeira e segunda escolha, 12 e 20, respectivamente.

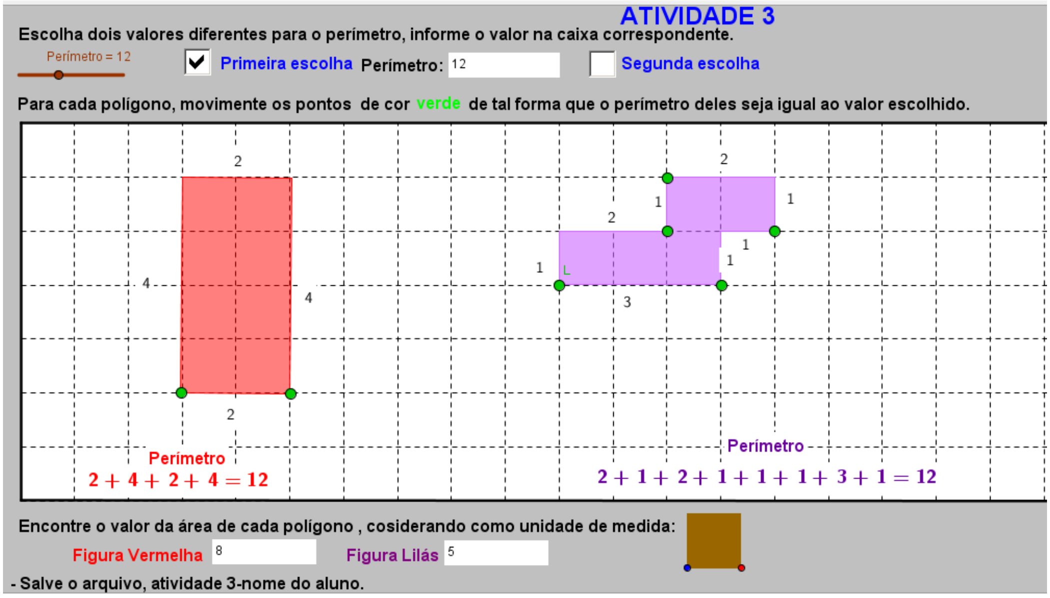


Figura 77- Imagem referente a primeira escolha na atividade 3 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

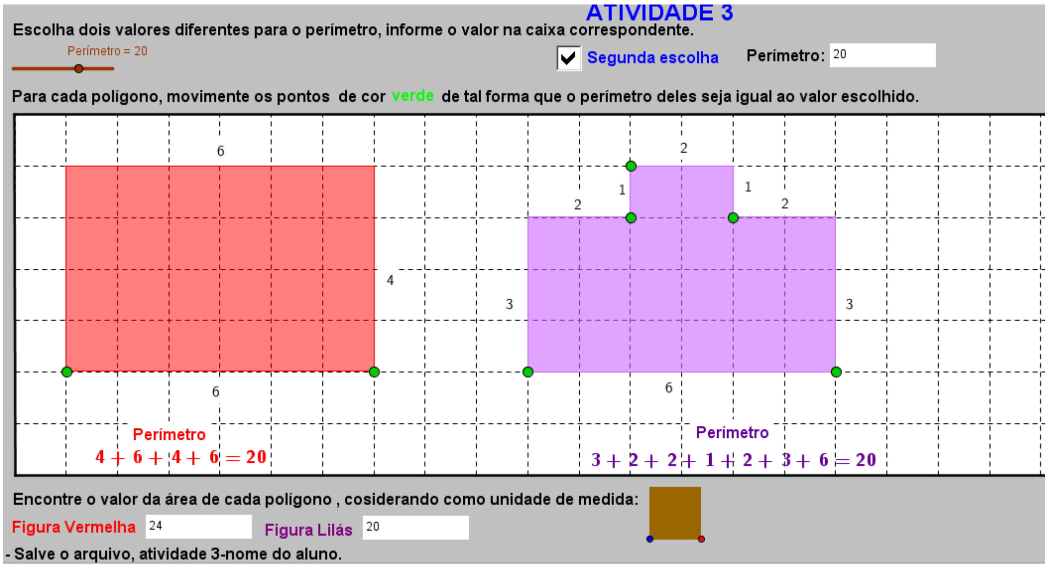


Figura 78- Imagem referente a segunda escolha na atividade 3 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Análise *a priori*: esta atividade é semelhante a atividade anterior, porém, explora figuras que possuem mesmo perímetro e calcula-se suas áreas. Assim, existirá a articulação por meio de tratamentos entre os três registos: língua natural, figural e numérico.

Novamente, neste caso, haverá o uso da apreensão perceptiva das figuras geométricas fornecidas, seguida, das operações figurais a partir de uma exploração heurística dessas figuras. Esta exploração, segundo Duval (2005), consiste em um método que permite uma investigação no objeto de estudo. Em relação ao modo ver as figuras geométricas, de acordo com a classificação de Duval (2005), esta atividade enquadra-se no olhar do agrimensor, uma vez que, solicita medições de perímetros e áreas. Ainda, envolve o olhar do inventor, por meio da reconfiguração das figuras de partida em outras, seguindo as instruções postas na atividade. Dessa forma, espera-se que os alunos consigam concluir que, figuras com mesmo perímetro podem ter áreas diferentes, constatando, assim, que as duas grandezas são independentes entre si.

ATIVIDADE 4

Nesta atividade busca-se explorar intuitivamente os procedimentos de cálculo do perímetro e da área de um quadrado qualquer.

Objetivo: montar diferentes quadrados e determinar a medida do perímetro e da área de cada um.

Recurso criado no GeoGebra: é proposta nesta atividade a criação de quatro quadrados com lados de medidas diferentes. Após, os alunos deverão determinar a medida do perímetro e da área desses quadrados.

No recurso elaborado existem caixas que poderão ser selecionadas correspondendo a cada um dos quadrados que devem criados. Ao selecionar a caixa “1º quadrado”, surge um controle deslizante, que representa a medida do lado do quadrado. Este seletor possui valores inteiros compreendidos entre 1 e 15. Sendo que, ao movê-lo vai sendo criado, sobre a malha quadriculada, um quadrado (cor verde) com a medida escolhida através do seletor, conforme ilustra a figura 79.

Figura 79- Imagem referente a criação do primeiro quadrado da atividade 4 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Após criar o primeiro quadrado e determinar a medida do perímetro e da área correspondente, os alunos deverão selecionar a caixa “2º quadrado”. Dessa forma, desaparecem da tela a primeira construção realizada e as respostas relacionadas, surgindo outro seletor que, por sua vez, corresponde a medida do lado do segundo quadrado a ser criado, novamente será calculado perímetro e área deste. Assim, estas etapas se repetem até o quarto quadrado.

Análise *a priori*: considerando as colocações de Duval (2009) a respeito da importância de se mobilizar em uma mesma atividade ao menos dois registros de representação, propiciando trocas entre esses registros, nesta atividade os alunos devem utilizar o registro língua natural, figural e numérico, pois irão partir da interpretação do enunciado para o registro figural, ao montarem os quadrados. Sendo que, à medida que irão criar os primeiros quadrados determinando as correspondentes medidas do perímetro e da área, espera-se que ocorra uma evolução em relação a realização desses cálculos. Em outras palavras, no cálculo da área, espera-se que aconteça uma passagem da contagem das unidades quadradas para a multiplicação entre o número de unidades quadradas em linha horizontal com o número de unidades que compõem a figura em linha vertical. De forma análoga, no cálculo do perímetro, espera-se que, este evolua na contagem da medida correspondente ao lado do quadrado para a multiplicação da medida do lado por quatro. Sendo que, isso será explorado novamente, no final da atividade, por meio do uso do registro língua natural, a partir dos seguintes questionamentos:

- No cálculo do perímetro você observou alguma relação entre o valor obtido e a medida do lado?
- No cálculo da área você observou alguma relação entre o valor obtido e a medida do lado?

As respostas serão dadas pelos alunos no próprio recurso fazendo uso do registro escrito, língua natural.

Em relação ao discurso esperado como resposta, este tem a função apofântica, pois exige que os alunos escrevam uma frase enunciada a partir das relações observadas entre os objetos matemáticos em análise. Nesse caso, a medida dos lados do quadrado, tanto em relação ao valor do perímetro, como da área. Assim, a unidade de sentido tem valor pragmático já que, deve ser constituída a partir da manipulação dos objetos matemáticos, disponibilizados no *software* GeoGebra, com o uso da apreensão discursiva das propriedades geométricas presentes nestes.

Ressalta-se ainda que, essa atividade contempla as apreensões perceptivas e discursivas, bem como, a articulação entre elas. Segundo Duval (2012a), isso acontece quando a apreensão discursiva pode ser considerada como uma teorização da representação figural e se observa isso a partir da análise da relação da medida do lado do quadrado com o cálculo do perímetro e área do mesmo.

A imagem da figura 80 mostra a criação de um quadrado de lado oito e os correspondentes valores para o perímetro e área.

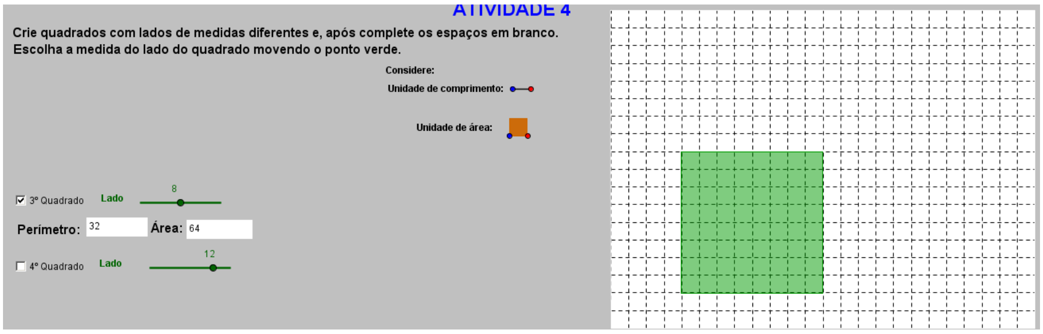


Figura 80- Possibilidade de resolução com a construção de um quadrado e os valores correspondentes do perímetro e da área.

ATIVIDADE 5

Objetivo: resolver uma situação-problema realizando a conversão entre os registros língua natural e figural. Paralelamente a isso, passando por tratamentos numéricos através de procedimentos de cálculo para a obtenção do perímetro e da área de regiões quadradas.

Recurso criado no GeoGebra: inicialmente, a atividade apresenta uma afirmação dita por um personagem, chamado Pedro: “Tenho 32 unidades quadradas, com elas consigo montar, no máximo, quatro quadrados diferentes e sobram duas unidades.”, conforme mostra a figura 81.

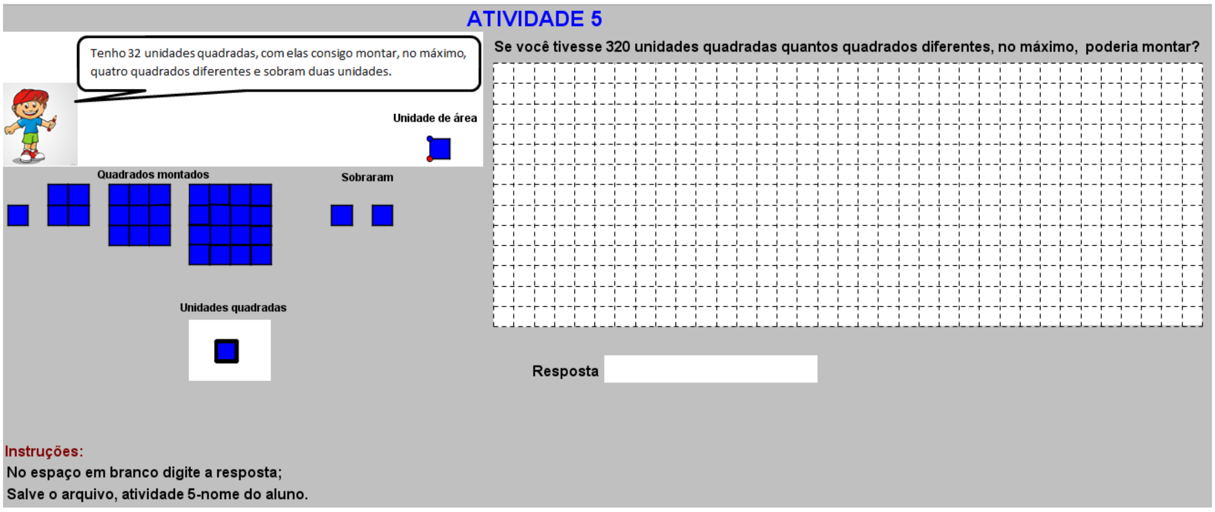


Figura 81- Imagem da tela inicial da atividade 5 do bloco 2.

Nesta atividade é proposta a seguinte situação problema: “Se você tivesse 320 unidades quadradas quantos quadrados diferentes, no máximo, poderia montar?”

No lado direito da tela é disponibilizado um espaço, para a representação figural, ou seja, nele os alunos poderão montar diferentes quadrados, a partir de unidades quadradas móveis. Para finalizar, a atividade possui uma caixa de texto onde deverá ser escrita a resposta encontrada para o problema.

Análise *a priori*: essa atividade complementa a atividade anterior, pois por meio de uma situação-problema os alunos deverão colocar em prática o procedimento numérico que já fora estabelecido. Este irá conduzi-los a obtenção do valor da área do quadrado. Dessa forma, o olhar de agrimensor, designado por Duval (2011), está presente, uma vez que, para resolver o problema os alunos precisam encontrar o valor da área de diversos quadrados.

Assim, para resolver a atividade os alunos devem partir da conversão entre o registro língua natural, presente no enunciado, para o registro figural. Salienta-se que, paralelamente a isso, deverão também realizar tratamentos numéricos. Nesse sentido, acredita-se que, a maioria, inicialmente, fará uso do registro figural para construir os quadrados. Entretanto, o número de unidades quadradas disponíveis para isso é inferior a trezentos e vinte. Uma vez que, a atividade pretende que os alunos passem pelo registro figural para chegarem ao registro numérico através dos conhecimentos adquiridos anteriormente. Concluindo que, para determinar o valor da área de um quadrado basta obter o produto da medida do lado do quadrado por ela mesma.

Assim, espera-se que, conforme vão sendo montados os primeiros quadrados, os alunos avancem para uma abordagem numérica, eliminando gradualmente o registro figural, o qual deve dar suporte inicial para os cálculos. Caso isso não ocorra de maneira espontânea, chegará em um determinado momento que irá terminar o número de unidades quadradas, pois foram disponibilizadas apenas setenta e cinco unidades (Figura 82).

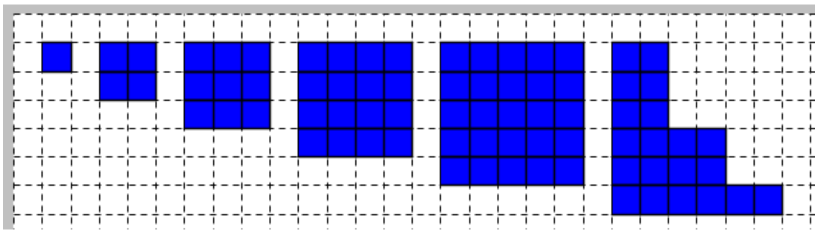


Figura 82- Imagem de uma sequência de construção de quadrados utilizando o total de unidades quadradas disponibilizadas na atividade 5 do bloco 2.

Caso isso ocorra, caberá a professora instigá-los para que procurem outra estratégia para resolver o problema.

Cabe salientar que, o número de unidades quadradas propostas no enunciado do problema, trezentos e vinte, não foi escolhido ao acaso. Esse número foi adotado para mostrar a falsa proporcionalidade do problema, pois se acredita que alguns alunos possam utilizar isso na resolução do problema, ou seja, justificarem da seguinte forma: “Se Pedro monta quatro quadrados com trinta e duas unidades então com trezentos e vinte unidades conseguirá montar quarenta quadrados”. Porém, por meio de tratamentos numéricos, mostra-se que isso não é válido.

Outro aspecto referente ao registro figural que pode ser levado em conta pelos alunos, ao resolverem o problema é considerarem a construção já realizada por Pedro e seguirem a partir desta, isto é, iniciar a construção com o quadrado de lado medindo cinco unidades.

O quadro 13 mostra o cálculo para obter a área dos quadrados com medida inferior a dez unidades. Para encontrar a solução do problema, pode-se fazer o uso da adição dos valores obtidos para as áreas, como representado no quadro 14. Assim, tem-se que nove é o número máximo de quadrados diferentes que podem ser montados com trezentos e vinte unidades quadradas, pois se fosse possível montar um quadrado de lado dez seria ultrapassado o número de unidades quadradas propostas pela atividade.

Medida do lado do quadrado (unidades de comprimento)	Área do quadrado: lado x lado (unidades de área)
1	1x1= 1
2	2x2= 4
3	3x3= 9
4	4x4= 16
5	5x5= 25
6	6x6= 36
7	7x7= 49
8	8x8= 64
9	9x9= 81
10	10x10= 100

Quadro 13- Cálculos esperados na atividade 5 do bloco 2.

Área do quadrado (unidades de área)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Número de quadrados usados na sequência de construção	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385

Quadro 14- Solução, a nível numérico, utilizando-se a operação de adição.

Também, esse problema pode ser resolvido utilizando-se a subtração (Quadro 15).

Número de quadrados usados	320	319	315	306	290	265	229	180	116	35
Valor da área do quadrado	1	4	9	16	25	36	49	64	100	

Quadro 15- Solução, a nível numérico, utilizando-se a operação de subtração.

Independente dos procedimentos de cálculo adotados pelos alunos, estes devem registrá-los na ficha impressa (Apêndice B) para, posteriormente, serem analisados na pesquisa.

ATIVIDADE 6

Nesta atividade espera-se que, de forma intuitiva, os alunos possam perceber as relações existentes entre a medida da base (lado do retângulo) e da altura (lado consecutivo à base) com a medida do perímetro e da área.

Objetivo: montar diferentes retângulos e determinar, para cada um, a medida do perímetro e da área correspondentes.

Recursos criados no GeoGebra: essa atividade solicita aos alunos criarem cinco retângulos diferentes. Após, devem preencher os espaços em branco relativos as medidas: da base, da altura, do perímetro e da área de cada um. Optou-se em utilizar as denominações “lado1” e “lado 2”, ao invés de, base e altura, evitando dúvidas, pois essas denominações não são, ainda, familiares para alguns alunos.

Para criar os retângulos, são disponibilizados controles deslizantes, “lado 1” e “lado 2”, que correspondem as medidas das dimensões do retângulo (cor verde). O valor para o “lado 1” varia de 1 a 6 e, para o “lado 2”, de 1 a 15. Essas variações foram escolhidas de acordo com o espaço destinado para a criação das figuras. No final desta atividade são apresentados dois questionamentos que devem ser respondidos no próprio recurso (Figura 83).

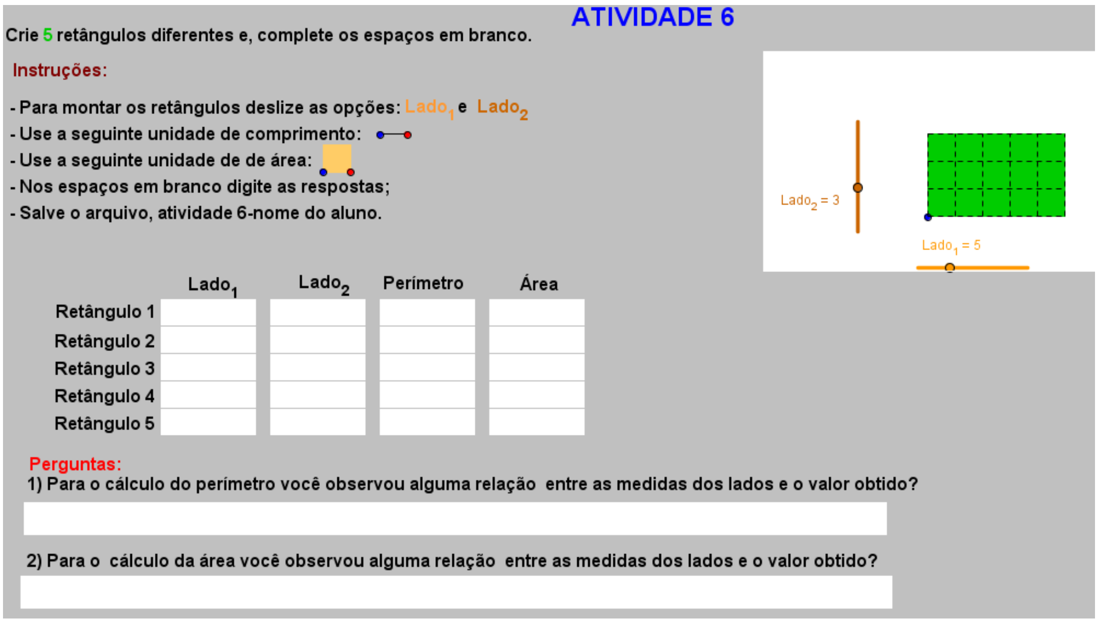


Figura 83- Imagem referente a tela inicial da atividade 6 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Análise *a priori*: essa atividade é semelhante a atividade 4. Porém, agora serão explorados aspectos referentes ao perímetro e a área de um retângulo qualquer. Assim, fez-se uso dos mesmos subsídios teóricos da atividade 4, contemplando dessa forma, as apreensões perceptivas e discursivas já detalhadas anteriormente.

Quanto ao registro escrito, este corresponde a resposta dos seguintes questionamentos:

- Para o cálculo do perímetro você observou alguma relação entre as medidas dos lados e o valor obtido?
- Para o cálculo da área você observou alguma relação entre as medidas dos lados e o valor obtido?

Para respondê-las os alunos precisarão relacionar as medidas dos lados de cada um dos retângulos com o valor obtido para o perímetro e área. Assim, entende-se que para responder aos questionamentos feitos, estes devam utilizar a função apofântica. Uma vez que, além da designação dos objetos geométricos em análise, eles precisarão expressar por meio de uma frase a relação matemática observada entre os mesmos.

Nesse sentido, no primeiro questionamento, esperam-se respostas semelhantes a: "*soma-se a medida do "lado1" com o "lado 2" e, multiplica por dois o resultado obtido*.". Já, no segundo, respostas do tipo: "*O produto da medida do "lado1" pelo "lado2"*.".

Acredita-se que a relação entre o cálculo da área com as medidas dos lados seja mais evidente. Porém, para responder o questionamento referente ao cálculo do perímetro, relacionando-o com a medida dos lados do retângulo, os alunos poderão apresentar maior dificuldade.

ATIVIDADE 7

Objetivo: construir diferentes retângulos de mesmo perímetro e calcular a medida de suas áreas.

Recurso criado no GeoGebra: inicialmente, a atividade solicita aos alunos a escolha de dois valores distintos para o perímetro do retângulo. Para isso, estão disponíveis no recurso duas caixas denominadas, "primeira escolha" e "segunda escolha".

Ao ser selecionada a "primeira escolha", surge um controle deslizante, chamado "perímetro", com números inteiros variando de 1 a 30. Ressalta-se que este controle não está associado a nenhum objeto geométrico. Ele foi disponibilizado somente para definir os valores para o perímetro, pois o espaço destinado a construção do retângulo é reduzido.

Assim, os alunos devem escolher o valor do perímetro movendo o controle deslizante e, após, esse valor deve ser incluído no espaço correspondente. Em seguida, é solicitada a criação de dois retângulos distintos que tenham como valor do perímetro a escolha feita. Para isso, é preciso mover os pontos (cor verde) que correspondem a dois vértices do retângulo. Estes pontos possibilitam aumentar e diminuir a medida da base (lado 1) e da altura (lado 2) do retângulo até se obter o valor correspondente a primeira escolha estipulada para o perímetro. A figura 84 ilustra a tela inicial da atividade.

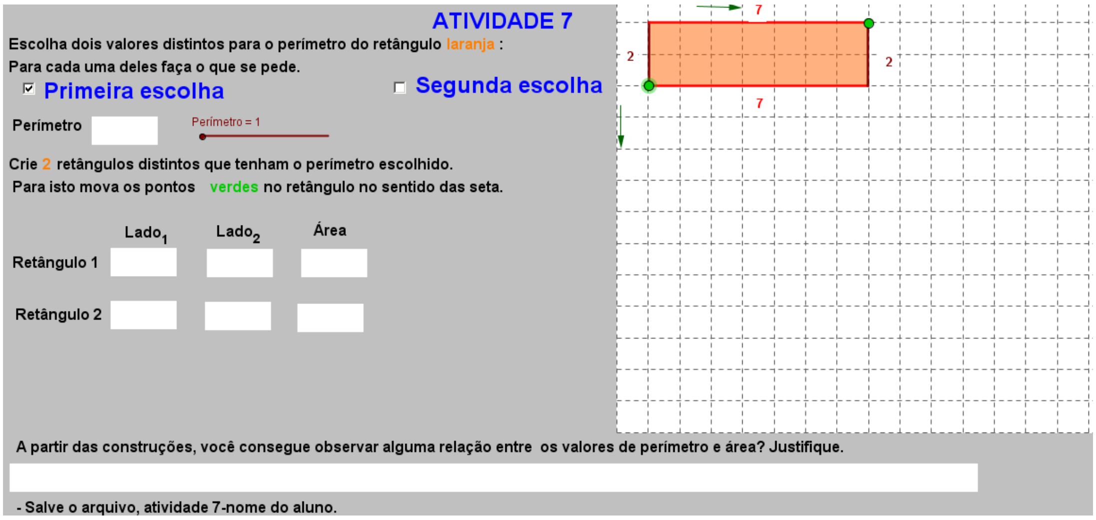


Figura 84- Imagem referente a tela inicial da atividade 7 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Após, os alunos precisam completar os espaços correspondentes as medidas dos lados do primeiro retângulo criado. Também, devem determinar o valor da área utilizando a unidade de área disponibilizada e, incluí-lo na caixa indicada. Em seguida, deve ser realizada a construção de outro retângulo, realizando-se os mesmos procedimentos.

Feito isso, os alunos devem selecionar a caixa “segunda escolha”, a fim de escolherem outro valor para o perímetro, repetindo os passos já descritos.

Destaca-se ainda que, ao contrário da atividade 3, o texto dinâmico representa apenas a medida dos lados do retângulo, pois o cálculo do perímetro será realizado pelos alunos. Dessa forma, reforçando os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.

Análise *a priori*: nessa atividade, novamente, se faz uso dos registros língua natural, numérico e figural. Inicialmente, existe a necessidade dos alunos interpretarem o enunciado da atividade e, também, seguirem as instruções propostas nele. Assim, nesse momento, os alunos utilizam o registro língua natural que, conforme Duval (2012b), esse registro não pode ser negligenciado no ensino de matemática, e sim deve ser entendido como fundamental nesse processo, tanto quanto os outros registros.

O registro figural será explorado por meio das ferramentas construídas no recurso que estão articuladas na construção de diferentes retângulos, os quais deverão ser vistos pelos alunos de maneira intuitiva e heurística. Segundo Duval (2012a), isso acontece quando as figuras permitem analisar uma situação em conjunto; sendo consideradas um meio direto para explorar diferentes aspectos, ou antecipar resultados. Nessa atividade, a exploração refere-se a verificação da possibilidade de existência de diferentes retângulos com mesmo valor para o perímetro e com áreas de medidas distintas. Dessa forma, o registro numérico está ligado a obtenção do valor da área desses retângulos. Assim, utiliza-se o olhar do agrimensor que, segundo Duval (2005), é requerido em atividades relacionadas a medições.

Ainda, ressaltam-se nesta atividade as apreensões figurais, distinguidas por Duval (2012a). Além disso, as apreensões perceptivas e discursivas são também mobilizadas, pois por meio destas espera-se que, os alunos possam responder ao questionamento proposto: “A partir das construções, você consegue observar alguma relação entre os valores de perímetro e área? Justifique.”.

Como resposta, espera-se que os alunos concluam que não observaram nenhuma relação, pois para os dois valores que fixaram ao perímetro obtiveram diferentes valores para a área dos retângulos construídos. Dessa forma, entende-se que o discurso produzido pelos alunos deva possuir a função de expansão discursiva, pois exigirá uma organização sequencial na forma de uma, ou mais frases que poderão justificar, de forma natural, a conclusão obtida pelos mesmos.

Previsão de respostas possíveis: esta atividade permite inúmeras possibilidades, tanto em termos de escolhas numéricas para o perímetro, 1 a 30, quanto de possibilidades de construção de retângulos que atendam a este valor. A fim de ilustrar algumas possibilidades de construção, apresenta-se uma escolha com o perímetro igual a 10 unidades de comprimento e duas possibilidades de construção relacionadas, conforme mostra a figura 85.

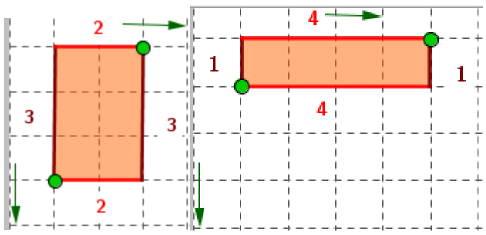


Figura 85- Possibilidades de retângulos construídos que possuam perímetro no valor de 10 unidades de comprimento.

Sendo que, a partir desta construção em que se faz uso da representação figural, os alunos deverão realizar registros numéricos relativos ao valor da área das figuras construídas. Este caso é ilustrado na figura 86.

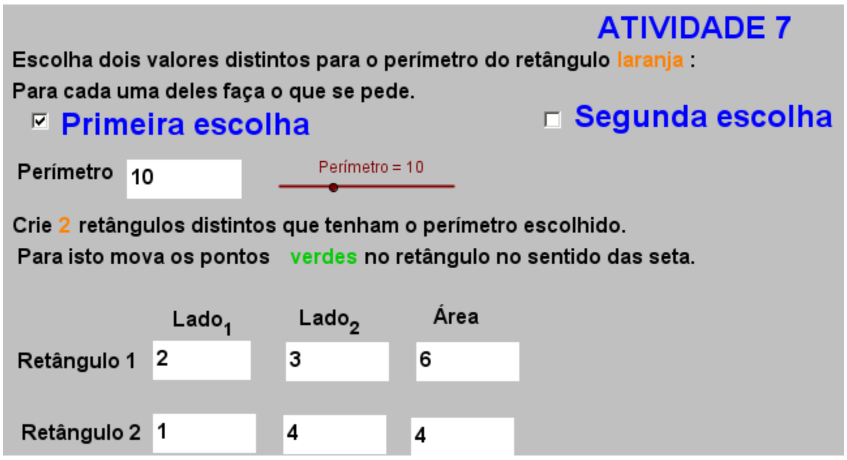


Figura 86- Registros escritos para o valor da área referente as construções indicadas na figura 85.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Com isso, os procedimentos referentes a primeira etapa da atividade ficam concluídos. Analogamente, realiza-se a segunda escolha para o perímetro, selecionando a caixa “Segunda escolha”. Feito isso, desaparecerá da tela as construções e respostas anteriores. Novamente, escolhe-se um valor diferente para o perímetro, criando-se dois retângulos que atendam a exigência de terem mesmo perímetro. Por último, preenchem-se nos espaços disponibilizados, os valores solicitados.

Ressalta-se que, nesta atividade, alguns alunos poderão considerar como diferentes, retângulos com lados de mesma medida, mas que, no entanto, estejam em posições diferentes, como mostra figura 87.

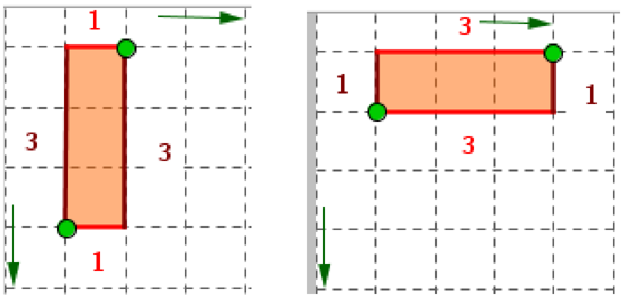


Figura 87- Exemplo de retângulos com lados de mesma medida e que estão em posições diferentes.

ATIVIDADE 8

Objetivo: construir diferentes retângulos com mesma área e calcular a medida dos perímetros destes.

Recursos criados no GeoGebra: essa atividade apresenta os mesmos recursos da atividade anterior. Porém, solicita a construção de retângulos definindo-se, primeiramente, o valor de sua área e, a seguir, determina-se o perímetro corresponde aos retângulos criados. A figura 88 ilustra a construção de dois retângulos escolhendo-se o valor da área do retângulo como sendo igual a oito unidades quadradas.

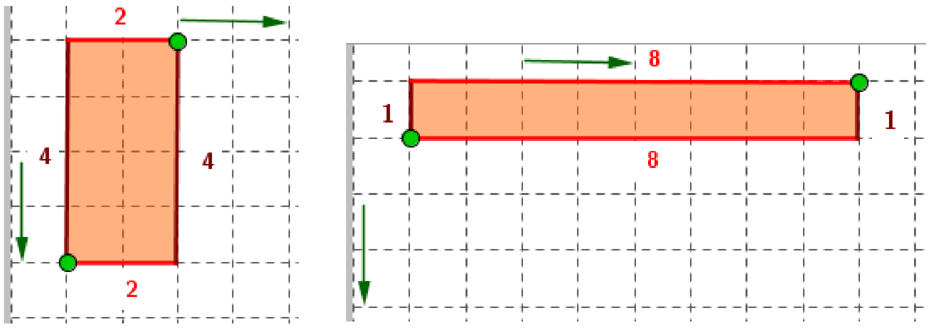


Figura 88- Possibilidade de construção de retângulos com oito unidades quadradas de área.

Após, preenche-se nos espaços em branco a medida dos lados dos retângulos e o valor do perímetro correspondente, como sugere a figura 89. A resolução após a seleção da ”Segunda escolha” repete-se.

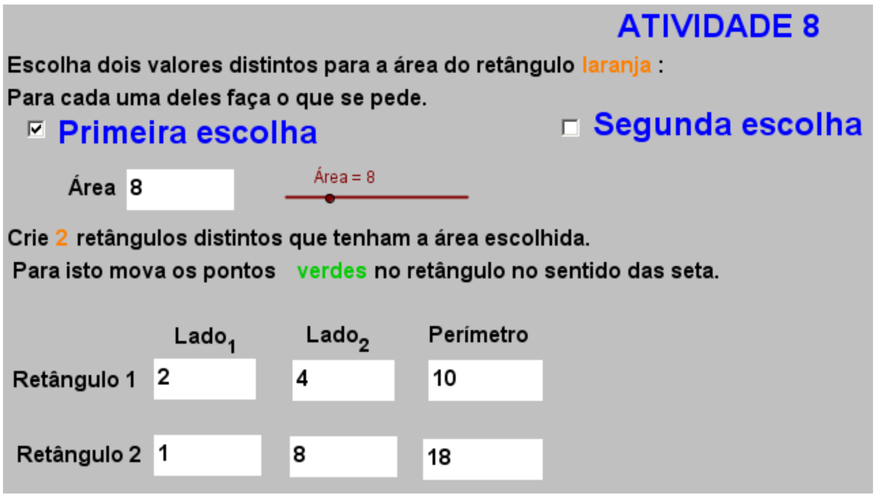


Figura 89- Possibilidade de registro escrito na atividade 7 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Por fim, novamente é questionado aos alunos se observaram alguma relação entre os valores do perímetro e da área. Isso é feito com o intuito de concluírem que há a possibilidade de existirem retângulos que possuam mesma área, no entanto, tenham valores diferentes para o perímetro.

Cabe salientar que, o recurso criado permite apenas a obtenção de valores pares para o cálculo do perímetro, isto está relacionado com o modo de construção do retângulo, pois fez-se uso da unidade quadrada a partir malha.

Análise *a priori*: conforme mencionado anteriormente, essa atividade possui as mesmas características da atividade 7, em termos de recursos elaborados no *software* GeoGebra, como em relação aos subsídios adotados pela teoria dos registros de representação semiótica. Dessa forma, optou-se por não detalhar novamente esses aspectos.

ATIVIDADE 9

Objetivo: determinar os valores associados ao perímetro e área de polígonos, após transformações isométricas do tipo: translação, rotação e reflexão nas figuras. Com isso, espera-se que os alunos possam perceber que estas grandezas permanecem invariantes.

Recurso criado no GeoGebra: nesta atividade são disponibilizadas duas figuras. Inicialmente é solicitado aos alunos determinarem o valor do perímetro e da área de cada uma delas. Para facilitar esses cálculos é disponibilizada uma malha quadriculada móvel, considera-se também, como unidade de comprimento, a medida do lado do quadrado (cor verde) e, como unidade de área, o quadrado (cor verde). A figura 90 ilustra a tela inicial dessa atividade.

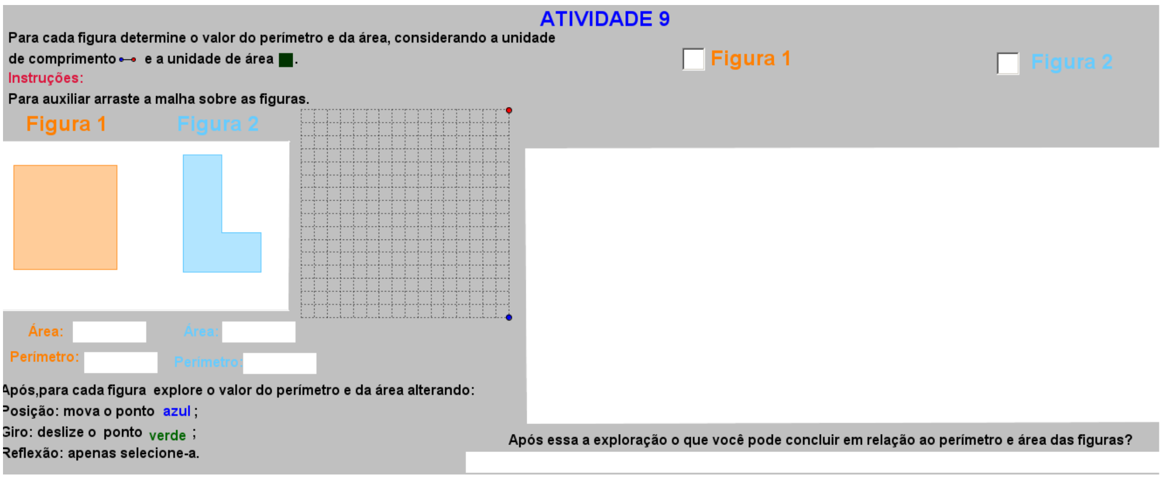


Figura 90- Imagem da tela inicial referente a atividade 9 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Os alunos devem explorar cada figura mudando a posição (translação), realizando giro (rotação) e fazendo uma reflexão em relação a uma reta. Após, devem realizar uma análise sobre o valor do perímetro e da área da figura transformada. Essa exploração será realizada no lado direito da tela do computador. Inicialmente, os alunos irão analisar essas isometrias para a “Figura 1”. Para isso deve ser selecionada a caixa correspondente, aparecendo na tela a referida figura, e também outra caixa, denominada, ”Posição”, que ao ser selecionada surgirá um ponto (cor amarela). Este ponto ao ser movimentado permitirá que a figura mude de posição, conforme ilustrado na figura 91.

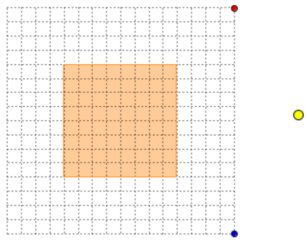


Figura 91- Imagem da primeira figura em que se explora a translação.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Dessa forma, os alunos podem mudar a posição da figura, realizando uma translação e, simultaneamente mover a malha sobre ela a fim de determinarem a medida do perímetro e da área após essa mudança. Seguindo, os alunos podem selecionar a caixa “Giro”. Sendo que, esta caixa somente irá aparecer quando a caixa “Posição” estiver selecionada. Dessa forma, aparece um controle deslizante que ao ser movimentado irá rotacionar a figura em torno de um de seus vértices, como sugere a figura 92.

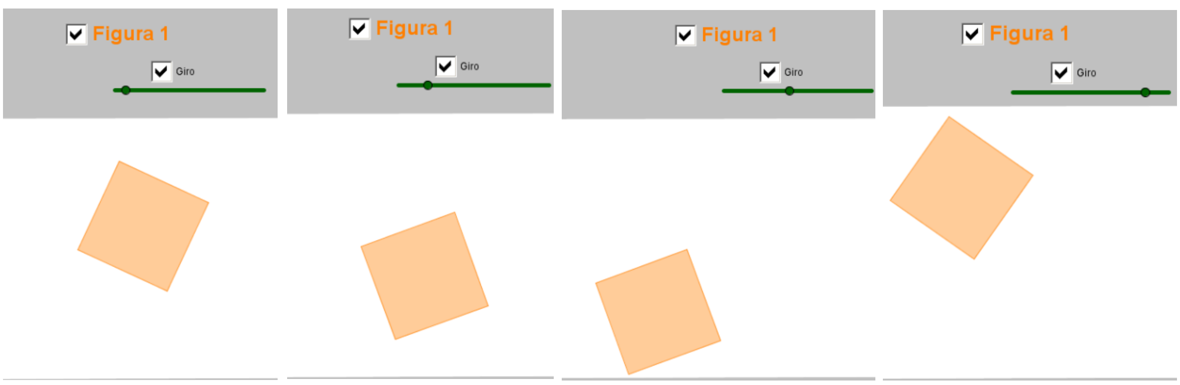


Figura 92- Imagem que ilustra uma rotação da primeira figura.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Após, os alunos deverão, novamente, determinar os valores do perímetro e da área da figura manipulada.

Por último, será realizada a reflexão da figura em torno de uma reta. Para isso, seleciona-se a caixa "Reflexão", desaparecendo a construção realizada anteriormente e surgindo a figura antes e depois da sua reflexão em torno da reta, como ilustra a figura 93.

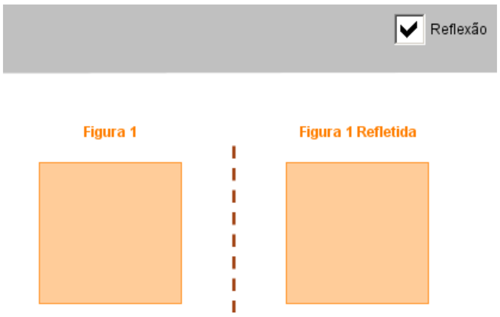


Figura 93- Imagem da reflexão em torno de uma reta da primeira figura.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Mais uma vez, solicita-se a indicação dos valores do perímetro e da área da figura refletida, encerrando assim, a exploração da primeira figura disponível na atividade.

Para a segunda figura os procedimentos são análogos. As figuras de 94 a 96 ilustram os três casos de isometrias explorados.

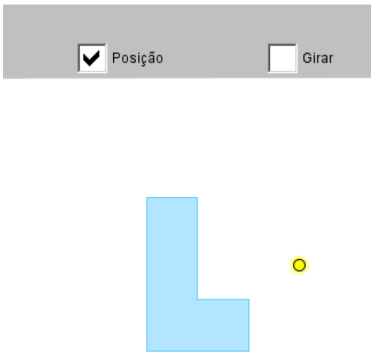


Figura 94- Imagem da segunda figura em que se explora a translação.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

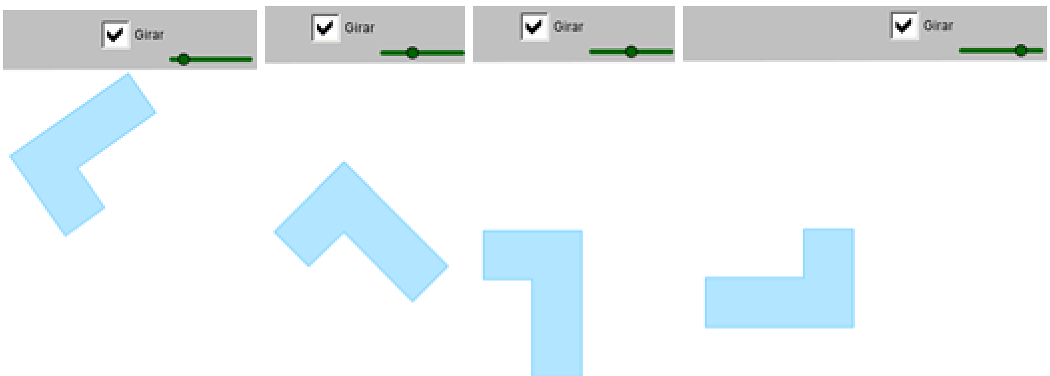


Figura 95- Imagem que ilustra uma rotação da segunda figura.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

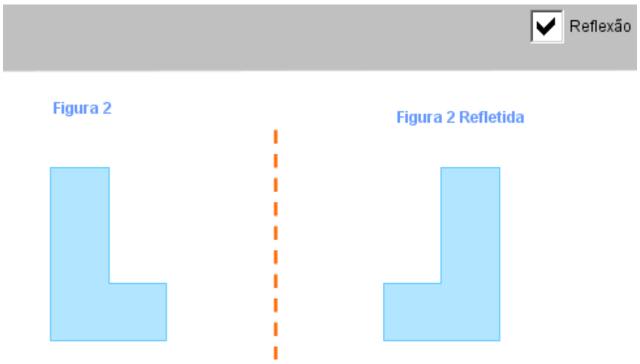


Figura 96- Imagem da reflexão da segunda figura em torno de uma reta.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Para finalizar a atividade é feito o seguinte questionamento aos alunos: "Após essa a exploração o que você pode concluir em relação ao perímetro e área das figuras?". Sendo que, deverá ser respondido no próprio recurso.

Análise *a priori*: essa atividade requer dois tipos de apreensões das figuras disponibilizadas, a perceptiva e a operatória. Esta última, mais especificamente, através da modificação posicional. Nesse sentido, Duval (2012a, p.125) a define como sendo a "de orientação e do lugar da figura dentro do seu ambiente." Assim, serão investigados os conceitos de perímetro e área de figuras planas utilizando-se modificação posicional das mesmas na tela do computador. Quanto ao registro numérico, novamente se dá por meio de procedimentos de cálculos que conduzam os alunos a determinarem os valores do perímetro e da área dessas figuras (Figura 97). Assim, utiliza-se o olhar do agrimensor, classificado por Duval (2005).

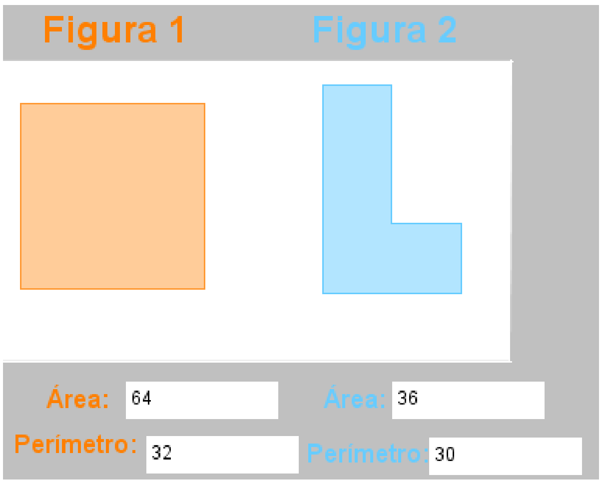


Figura 97- Possibilidade de respostas para os valores do perímetro e da área das duas figuras.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

A língua natural será utilizada em dois momentos, interpretação do enunciado e suas instruções e, também, na compreensão e resolução do questionamento feito no final da atividade. Assim, entende-se que as respostas escritas pelos alunos, segundo a classificação de Duval (2011), terá função apofântica, por meio da operação enunciação completa de uma frase. Uma vez que, através da articulação entre o registro figural e o numérico é possível expressarem que os valores do perímetro e da área das figuras devam permanecer inalterados após as transformações realizadas.

A próxima atividade foi adaptada a partir do material disponibilizado em Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques, 2007.

Atividade 10

Objetivo: realizar a conversão dos registros língua natural para o numérico, passando pelo registro figural, com a finalidade de resolver o problema proposto.

Recurso criado no GeoGebra: essa atividade é semelhante a atividade 5 deste bloco. A partir da fala de uma personagem, chamada Laura, os alunos deverão representar através do registro figural a situação proposta por ela. Esta afirma que possui 32 unidades quadradas e, com elas consegue construir, no máximo oito quadrados ou retângulos diferentes e, mesmo assim sobrará uma unidade!

Em seguida, um questionamento é feito: "Se Laura tivesse 64 unidades quadradas, quantos quadrados ou retângulos diferentes, no máximo, ela poderia construir?".

A imagem da tela inicial da atividade, que possui os mesmos recursos da atividade 5 deste bloco, é mostrada na figura 98.

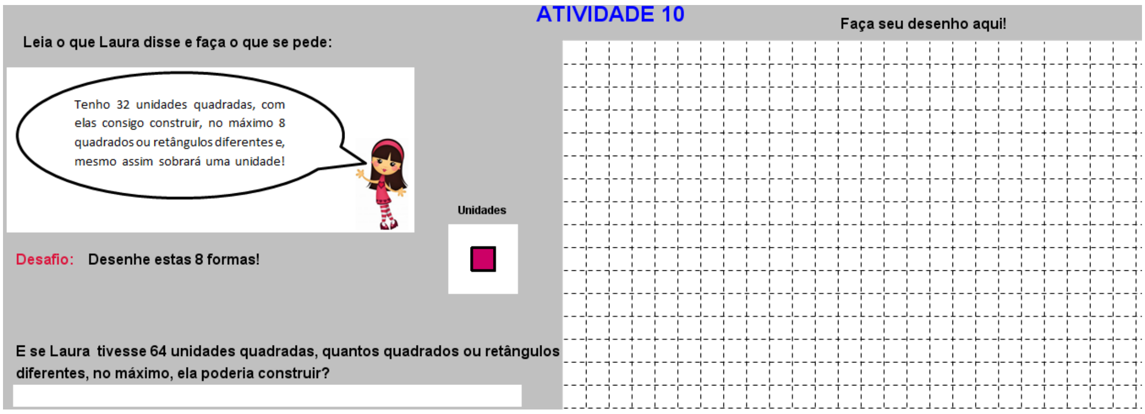


Figura 98- Imagem da tela inicial referente a atividade 10 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Análise a *priori*: inicialmente, os alunos devem ler e compreender o enunciado da atividade. Este se utiliza do registro língua natural para propor a situação-problema. Em seguida, devem converter as informações postas neste registro para o figural. Essa representação consiste em construir as oito formas distintas ditas no enunciado, isso é ilustrado na figura 99. Ressalta-se que os alunos podem construir essas figuras em outras posições.

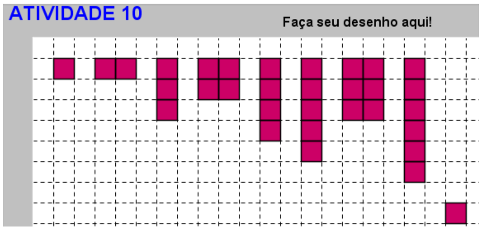
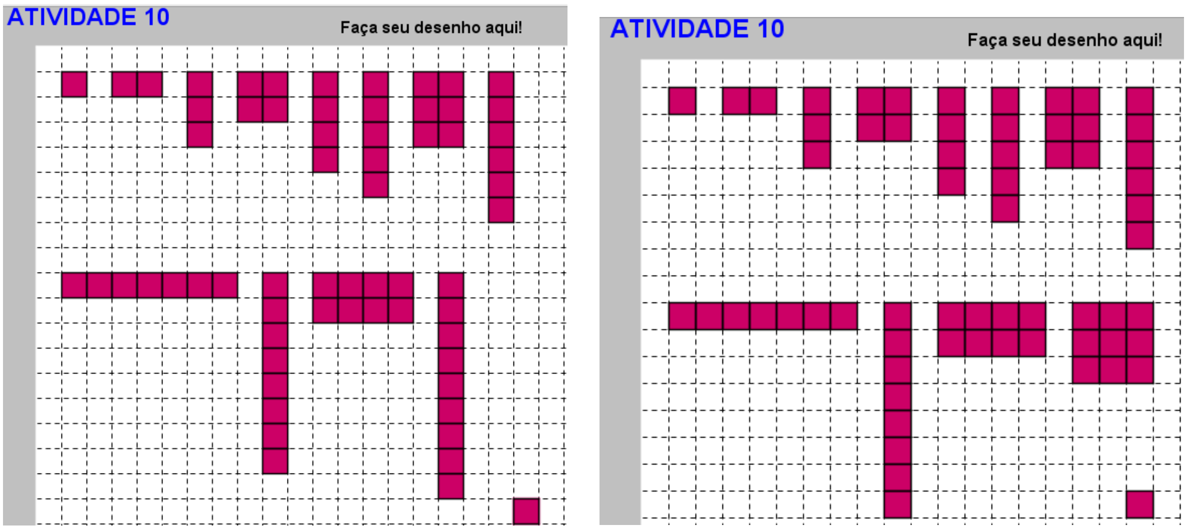


Figura 99- Imagem do registro figural esperado para a primeira parte da atividade 10 do bloco 2.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

A partir dessa representação é possível que os alunos articulem o registro figural com as operações numéricas, isto é, através da soma do número de unidades quadradas utilizadas para construir cada uma das formas: 1+ 2+ 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31.

Neste caso, sobra uma unidade quadrada. Dando continuidade no desenvolvimento da atividade, os alunos devem partir das construções já realizadas e construírem as demais formas até serem utilizadas 64 unidades quadradas. A figura 100 mostra as possibilidades de solução esperadas para o registro figural proposto. Assim, existem no máximo 12 formas (quadrados ou retângulos) diferentes.



(a) (b)

Figura 100- Imagem do registro figural esperado para a segunda etapa da atividade 10 do bloco2.

O cálculo esperado para a soma dos números de unidades quadradas utilizadas nas formas criadas é: 1+ 2+ 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 + 8 + 8 + 9 = 63. Neste caso, também sobra uma unidade quadrada.

Outro aspecto referente ao registro figural dever salientado, ele diz respeito a possibilidade de alguns alunos considerem como diferentes os retângulos formados com a mesma quantidade de unidades quadradas, porém, que estejam em posições diferentes na tela do computador.

3.1.3 Bloco 3- atividades

As atividades desenvolvidas para esse bloco visam consolidar os conhecimentos adquiridos nos blocos anteriores. Referente ao primeiro bloco resgata-se a exploração de aspectos relativos a comparação, decomposição e reconfiguração de figuras planas. Quanto ao segundo bloco, são retomados os procedimentos numéricos para obtenção do valor do perímetro e da área de quadrados e retângulos.

No apêndice A encontra-se um quadro explicativo (Quadro 30), onde são exibidas informações gerais a respeito das atividades que compõem esse bloco de atividades.

ATIVIDADE 1

Esta atividade está associada a uma aplicação, adaptada de uma situação-problema apresentada NOVO TELECURSO (2009).

Objetivo: resolver uma situação-problema na qual deve ser determinada a área de figuras planas com formatos diferentes que representam terrenos.

Recurso criado no GeoGebra: é proposto a seguinte situação-problema : “Seu João tem quatro filhos: Abel, Bia, Cássio e Diva. Ele decidiu dar um terreno para cada deles.”. Os terrenos possuem os formatos indicados na figura 101.

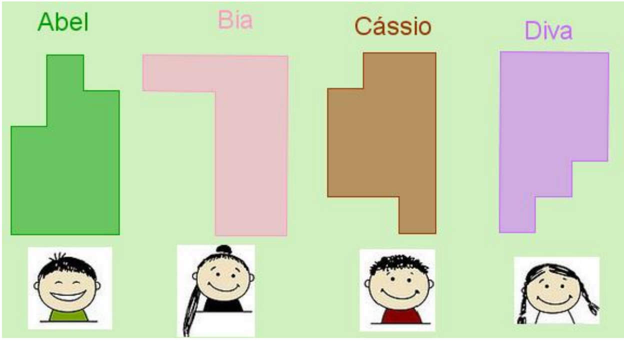


Figura 101- Imagem dos formatos dos terrenos da situação- problema proposta.

Após é feito o seguinte questionamento: “Você acha que Seu João distribuiu de forma justa os terrenos entre seus filhos? Justifique:”.

Para a resolução desta atividade é disponibilizada, além das figuras que representam os terrenos, uma malha quadriculada móvel. Sendo que, ambas podem ser arrastadas e rotacionadas na tela do computador. Também, há um espaço para os alunos responderem o questionamento feito, como mostra a figura 102.

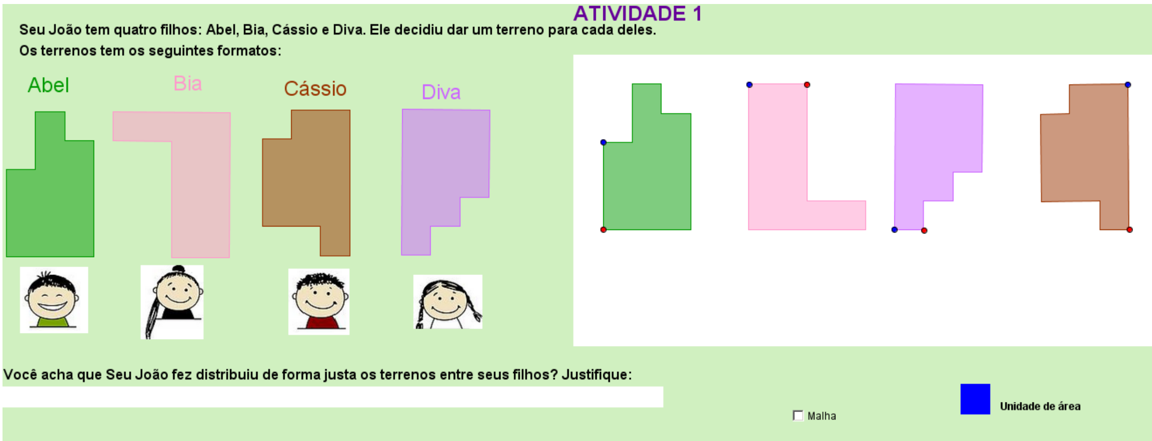


Figura 102- Imagem da tela inicial referente a atividade 1 do bloco 3.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Análise *a priori*: inicialmente, a partir do registro língua natural presente no enunciado da questão, espera-se que os alunos percebam que, para resolvê-la será necessário determinar a área de cada terreno. Acredita-se que, estes poderão a partir da realização das atividades do bloco anterior analisar cada um dos formatos dos terrenos, em termos de suas áreas, chegando ao valor numérico que as represente. Para isso, os alunos irão utilizar o registro numérico, isto é, eles deverão contar quantas unidades quadradas cabem em cada terreno, com o auxílio da malha quadriculada móvel. Nesse sentido, de acordo com Duval (2005), a interpretação das figuras que representam o formato do terreno se dará por meio da apreensão perceptiva. Sendo que, o olhar do agrimensor também se fará presente, pois haverá a necessidade de medição para determinar a área das figuras. Assim, os alunos deverão realizar uma comparação entre as mesmas a fim de concluírem a respeito do questionamento proposto. Após, deverão responder no próprio recurso, por meio do uso do registro língua natural, a respeito de suas conclusões sobre a divisão dos terrenos feita por seu João. Entende-se que essa resposta, segundo a classificação feita por Duval (2011), tem função apofântica, pois através de procedimentos numéricos, se pode obter um valor para a área dos terrenos, com o auxílio das ferramentas criadas no GeoGebra. Com base nisso, espera-se que os alunos concluam que foi feita uma distribuição justa dos terrenos entre os filhos do seu João, pois todos os terrenos possuem doze unidades de área.

ATIVIDADE 2

Objetivo: realizar a decomposição de figuras planas e fazer, posteriormente, a reconfiguração de suas partes elementares formando um retângulo e determinando a medida de sua área.

Recurso criado no GeoGebra: essa atividade utiliza as formas geométricas utilizadas na contextualização proposta na atividade 1. No enunciado da mesma é solicitado aos alunos transformarem cada uma das figuras em um retângulo, utilizando apenas um recorte. Sendo que, são disponibilizadas caixas que ao serem selecionadas, surgem alguns pontos (vértices) nas figuras. Neste caso, os alunos precisarão selecionar duas caixas correspondentes as extremidades da linha de corte de cada uma. Feito isso, surge uma outra caixa, denominada "recortar" que, quando selecionada, exibe as peças formadas após divisão da figura. Posteriormente, os alunos realizam a reconfiguração dessas peças formando dessa forma o retângulo solicitado. Por último devem determinar a área dessa figura e registrar o valor no espaço destinado no recurso. A figura 103 mostra a tela inicial da atividade.

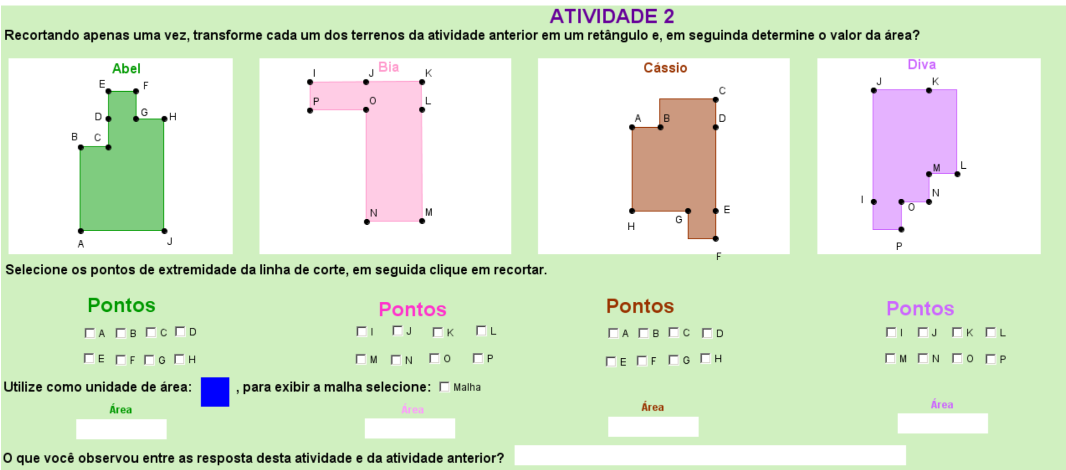


Figura 103- Imagem da tela inicial referente a atividade 2 do bloco 3.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Após as reconfigurações das figuras que representam os formatos do terreno, os alunos deverão responder no recurso o seguinte questionamento: “O que você observou entre as respostas desta atividade e da atividade anterior?”.

Análise *a priori*: nessa atividade somente a apreensão perceptiva das figuras disponibilizadas na atividade não é suficiente para resolvê-la. Há necessidade da utilização da apreensão operatória. No entanto, espera-se que os alunos já estejam familiarizados com a resolução de problemas que utilizam a reconfiguração de figuras a partir do reagrupamento de suas partes elementares, pois isso foi explorado em atividades dos blocos anteriores. Assim, acredita-se que os alunos realizarão, sem maiores dificuldades, a articulação necessária entre o registro figural, a partir da divisão mereológica definida por Duval (2005), e o numérico. Este último será explorado por meio de tratamentos para obtenção da medida das áreas das figuras disponibilizadas. Dessa forma, utiliza-se novamente o olhar de agrimensor, distinguido por Duval (2005).

Assim, como na atividade 1, as respostas esperadas para o questionamento final utilizará o registro língua natural, por meio da função cognitiva apofântica. Sendo que, a dimensão de sentido se dará pela elaboração de uma frase a partir da operação de enunciação completa, distinguida por Duval (2011).

Previsão de respostas possíveis: nas figuras 104 a 107 são representadas possibilidades de resolução que os alunos poderão utilizar. Na figura 104 é representado o terreno de Abel, onde existe apenas uma forma de recortar, escolhendo os pontos *D* e *G* como extremidades da linha de corte.

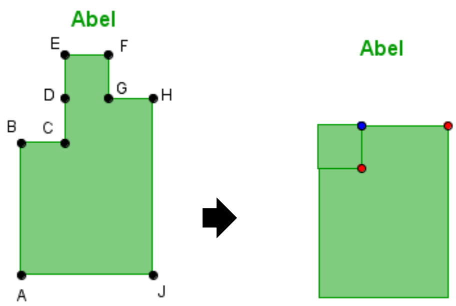


Figura 104- Imagem que representa o terreno de Abel e a sua reconfiguração em um retângulo.

Para o terreno de Bia, duas possibilidades são possíveis: realizar o recorte a partir dos pontos *J* e *O* ou, a partir dos pontos *O* e *L*, como é apresentado na figura 105.

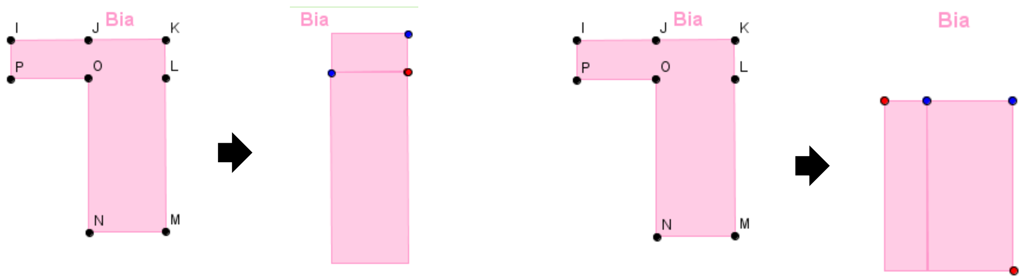


Figura 105- Imagem que representa o terreno de Bia e a sua reconfiguração em um retângulo.

No caso do terreno de Cássio, a linha de corte poderá possuir extremidades nos pontos *E* e *G* ou, nos pontos *B* e *D*, conforme mostra a figura 106.

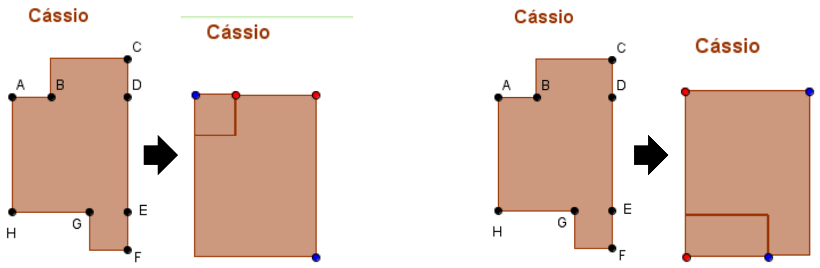


Figura 106- Imagem que representa o terreno de Cássio e a sua reconfiguração em um retângulo.

Os pontos que podem ser extremidades da linha de corte do terreno de Diva são *I* e *O*, conforme ilustra a figura 107.

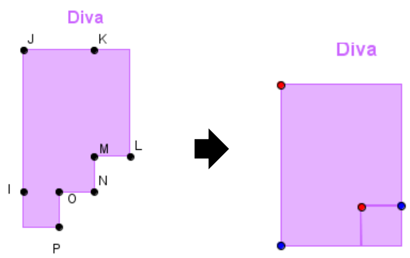


Figura 107- Imagem que representa o terreno de Diva e a sua reconfiguração em um retângulo.

Com as reconfigurações feitas os alunos devem determinar a área dos retângulos obtidos, utilizando a malha quadriculada móvel. Acredita-se que, a maioria destes irá realizar, inicialmente, o cálculo fazendo o produto da medida da base pela altura, sem levar em consideração que essa medida já foi encontrada na atividade anterior. No entanto, no decorrer da atividade, espera-se que à medida que forem encontrando 12 unidades quadradas eles percebam a equivalência das áreas. Isso será registrado utilizando-se o registro discursivo no final da atividade onde deverão responder o questionamento feito.

ATIVIDADE 3

Objetivo: utilizar o processo de reconfiguração de figuras planas por meio de sua decomposição e posterior, composição, de modo a obter como figura resultante um quadrado ou um retângulo e determinar suas áreas correspondentes.

Recursos criado no GeoGebra: nessa atividade estão dispostas duas figuras, denominadas “figura 1” e “figura 2”. No enunciado pede-se para determinar suas áreas utilizando a unidade de área disponibilizada e uma malha quadriculada móvel. A tela inicial da atividade é mostrada na figura 108. Para decompor as figuras apresentadas é dada a opção “recortar”, que surge no momento em que são selecionadas as caixas correspondentes as extremidades da linha de corte. Assim, com partes elementares formadas, para cada uma das figuras, deve-se obter uma reconfiguração que resulte em um quadrado ou um retângulo, ou ainda, uma figura que corresponda a uma composição das duas formas justapostas (Figura 113). Acredita-se que, nesta etapa os alunos devam já estar familiarizados com o procedimento de cálculo para determinar o valor das áreas de figuras desse tipo.

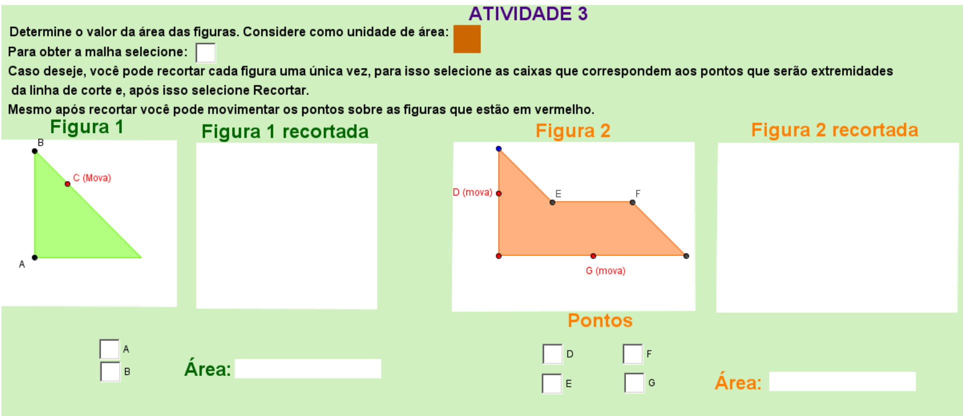


Figura 108- Imagem da tela inicial referente a atividade 3 do bloco 3.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

A “Figura 1” possui um ponto móvel sobre um de seus lados, denominado “C (MOVA)” e um ponto que representa um de seus vértices. Para fazer o recorte os alunos devem selecionar as caixas correspondentes a esses dois pontos (extremidades da linha de corte) e, em seguida, marcarem a opção “Recortar”, como mostra a figura 109.

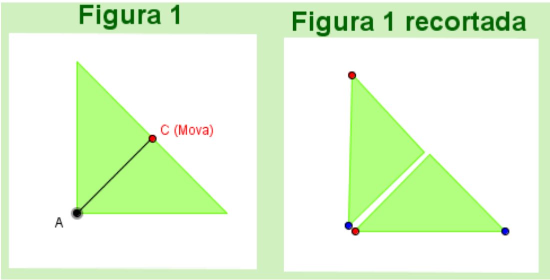


Figura 109- Imagem da primeira figura antes e depois do recorte.

Após, surge a decomposição da figura denominada, “Figura 1 recortada”. Assim, os alunos poderão realizar a reconfiguração da mesma formando um quadrado. Destaca-se que, mesmo após recortar, eles poderão movimentar o ponto *C*, alterando as peças. De forma análoga deverá ser explorada a “Figura 2”, assim optou-se por não detalhá-la.

Análise *a priori*: nessa atividade, ao contrário das atividades anteriores, acredita-se que os alunos não conseguirão determinar suas áreas somente com a sobreposição da malha quadriculada fornecida sobre as figuras. Isso, porque, ao realizarem a contagem das unidades quadradas eles irão verificar que existem partes no interior da figura que representam a metade de uma unidade quadrada, como mostra a figura 110.

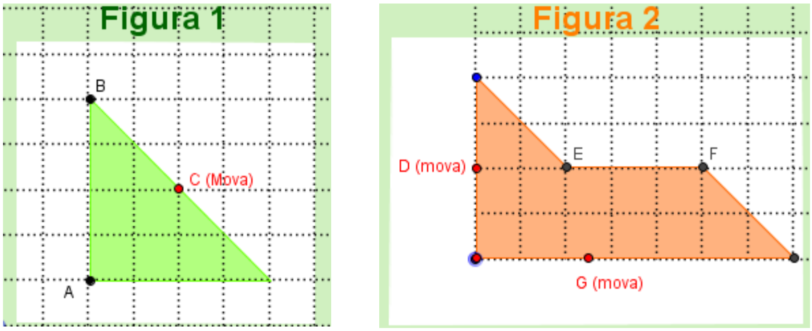


Figura 110 - Imagem das figuras com a malha dinâmica sobreposta.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Dessa forma, espera-se que os alunos tenham a necessidade de decompor as figuras, retomandoos conhecimentos discutidos no primeiro bloco de atividades. Dessa forma, evidenciando a importância do registro figural, mais especificamente, por meio da apreensão operatória e na exploração heurística de figuras geométricas. Segundo Duval (2012a), os tratamentos figurais vinculados com possibilidades de divisões mereológicas, realizadas por meio de material manipulativo, neste caso, com o auxílio de ferramentas construídas no recurso permitem explorar esses registros figurais. Dessa forma, com base em Duval (2005), conclui-se que esta atividade engloba o olhar de inventor e de agrimensor. O primeiro olhar surge por existir a necessidade de desconstrução visual das formas perceptivas elementares que se impõem a primeira vista nas figuras. Para, após, ser realizada a divisão mereológica, seguida da reconfiguração em outra figura. Já, o olhar de agrimensor, por tratar-se de aspectos relacionados a medidas, neste caso, cálculo da área das figuras.

Previsão de respostas possíveis: após decomporem utilizando a ferramenta apropriada, espera-se que os alunos cheguem até a reconfiguração ilustrada pela figura 111. Assim, conseguindo determinar a área da “Figura 1”, obtendo 9 unidades quadradas. Os procedimentos numéricos utilizados pelos alunos podem ser, tanto a contagem uma a uma das unidades quadradas que cabem no quadrado obtido, ou considerando a medida do lado multiplicada por ela mesma, isto é, $3 \times 3 = 9$.

Figura 111- Reconfiguração da primeira figura em um quadrado.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Quanto a reconfiguração esperada para a “Figura 2”, duas formas são possíveis, como mostram as figuras 112 e 113. Na primeira, os alunos compõem um retângulo, com lados medindo 7 e 2 unidades de comprimento. Assim, para obter sua área podem-se contar as unidades quadradas que cabem no retângulo, ou ainda, realizar o produto entre as medidas da base e da altura, ou seja, $2 \times 7 = 14$ unidades quadradas. A outra forma que pode ser utilizada acredita-se que, por um número menor de alunos, é a composição visual por justaposição de um quadrado de lado 2 unidades de comprimento e um retângulo de lados medindo 2 e 5 unidades de comprimento. Assim, para obterem suas áreas podem-se contar uma a uma as unidades quadradas que as compõem, ou ainda, realizar o cálculo separado de cada uma dessas figuras encontrando a soma dos dois valores obtidos, isto é, a área do quadrado, corresponde a $2 \times 2 = 4$ unidades quadradas; a do retângulo, $2 \times 5 = 10$ unidades quadradas, então realiza-se a adição $4 + 10 = 14$ unidades quadradas que corresponde ao valor da área total.

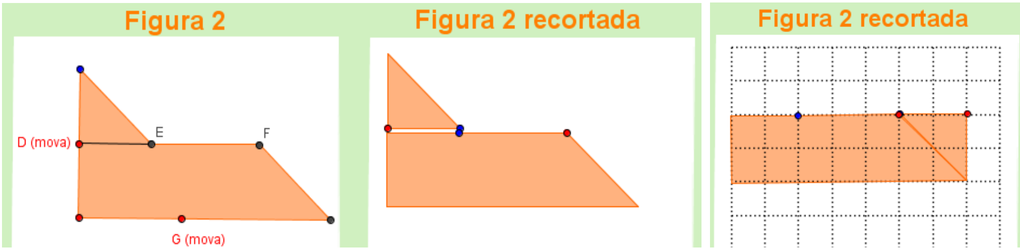


Figura 112- Imagem da segunda figura com uma possibilidade de corte e a sua reconfiguração em um retângulo.

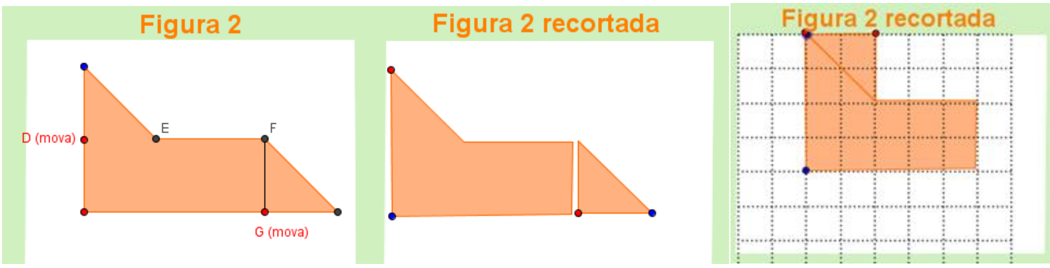


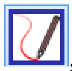
Figura 113- Imagem da segunda figura com outra possibilidade de corte e a sua reconfiguração considerando a justaposição entre um retângulo e um quadrado.

Acredita-se que, a maioria dos alunos utilize o processo de divisão mereológica seguido das reconfigurações de suas partes elementares. No entanto, não se descarta a possibilidade de ocorrer casos em que estes calculem a área das figuras somente a partir da contagem das unidades quadradas. Porém, para isso, existe a necessidade da soma duas a duas das metades das unidades quadradas presentes na figura, com a finalidade de obter certo número inteiro de unidades quadradas.

ATIVIDADE 4

Objetivo: consolidar o processo de reconfiguração de uma figura de partida, por meio de sua decomposição e composição, favorecendo a compreensão e o cálculo para a obtenção do valor da área de algumas figuras planas.

Recurso criado no GeoGebra: essa atividade é semelhante a anterior, porém nessa os alunos não terão disponível a opção “recortar”. Inicialmente, farão uma análise visual das figuras fornecidas e, com a ferramenta “caneta” disponível no recurso, deverão indicar o traço onde deveria ser feito o recorte. Após, deverão realizar a reconfiguração da figura mentalmente e, por fim, calcular o valor da área desta figura.

Para utilizar a ferramenta caneta, basta que os alunos selecionem o ícone , localizado na barra de ferramentas do GeoGebra. Em seguida, devem clicar no lugar no qual querem iniciar o traço e construí-lo. A figura 114 ilustra a tela inicial desta atividade.

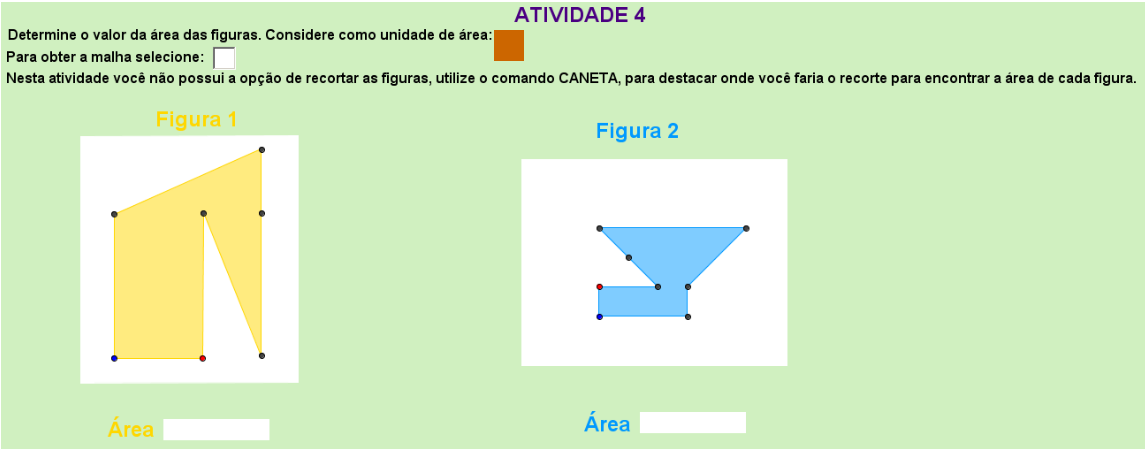


Figura 114- Imagem da tela inicial referente a atividade 4 do bloco 3.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Análise *a priori*: essa atividade usa, novamente, a apreensão operatória, mais especificamente por meio da divisão mereológica. Seguida da operação de reconfiguração, formando como figura resultante, um quadrado. Isso é feito com a finalidade de propiciar aos alunos uma maneira de ver e interpretar as figuras geométricas sob outros aspectos, a fim de chegarem na solução da atividade. Dessa forma esta mobiliza o olhar de inventor e, também, de agrimensor, conforme já fora mencionado na atividade anterior. Segundo Duval (2012a), a divisão mereológica pode ocorrer de duas formas: materialmente ou mentalmente. Aqui, essa divisão será realizada mentalmente pelos alunos.

Previsão de respostas possíveis: as resoluções esperadas pelos alunos para cada uma das figuras disponibilizadas na atividade estão ilustradas na figura 115.

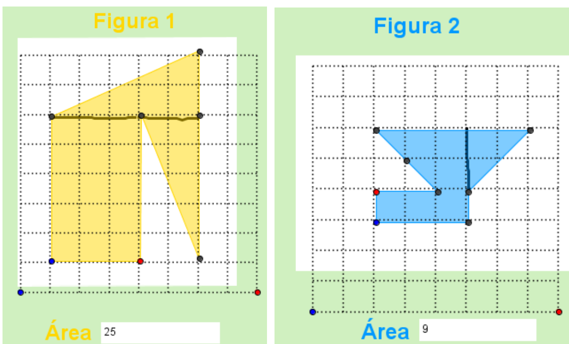


Figura 115- Possibilidade de respostas dos alunos para a atividade 4 do bloco 3.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Quanto ao registro numérico, a partir das reconfigurações das figuras que consistem em quadrados com medidas dos lados sendo, 5 e 3 unidades, respectivamente, os alunos podem contar as unidades quadradas que os compõem, ou podem realizar o produto da medida do lado por ela mesma, isto é, a área da “Figura 1” seria obtida fazendo-se, $5 \times 5 = 25$ unidades quadradas e a área da “figura 2”, dada por $3 \times 3 = 9$ unidades quadradas.

ATIVIDADE 5

Objetivo: decompor um paralelogramo em figuras e, por meio da operação de reconfiguração construir um retângulo a fim de obter o valor de sua área.

Recurso criado no GeoGebra: esta atividade possui os mesmos comandos elaborados no para a atividade 3 deste bloco. Sendo que, no seu enunciado consta a orientação para que os alunos trasformem o parelelogramo dado em um retângulo. Após, devem determinar o valor da área utilizando a unidade de área dada. Para isto, os alunos terão a opção de realizar um único corte no paralelogramo, no qual há dois pontos móveis, pontos *B* e *D*, e também dois vértices evidenciados (*A* e *C*). Dessa forma, esses pontos podem ser, dois a dois, as escolhas de extremidades da linha de corte. Após selecionadas as caixas correspondentes a essas extremidades bastará que os alunos selecionem a caixa “Recortar”. Dessa forma, surge as figuras obtidas com o recorte. Salienta-se que, para facilitar a manipulação foi disponibilizado o paralelogramo sobre uma malha quadriculada. Sendo que, após o corte, permanece na tela uma figura idêntica ao paralelogramo inicial, ao lado das figuras recortadas. Isto foi feito para faciliar a comparação. Ainda, há a possibilidade de movimentar os pontos móveis presentes no paralelogramo, mesmo com o recorte já realizado, isso para o caso de algum aluno que, não conseguir montar o retângulo com a primeira escolha feita. A tela inicial da atividade é apresentada na figura 116.

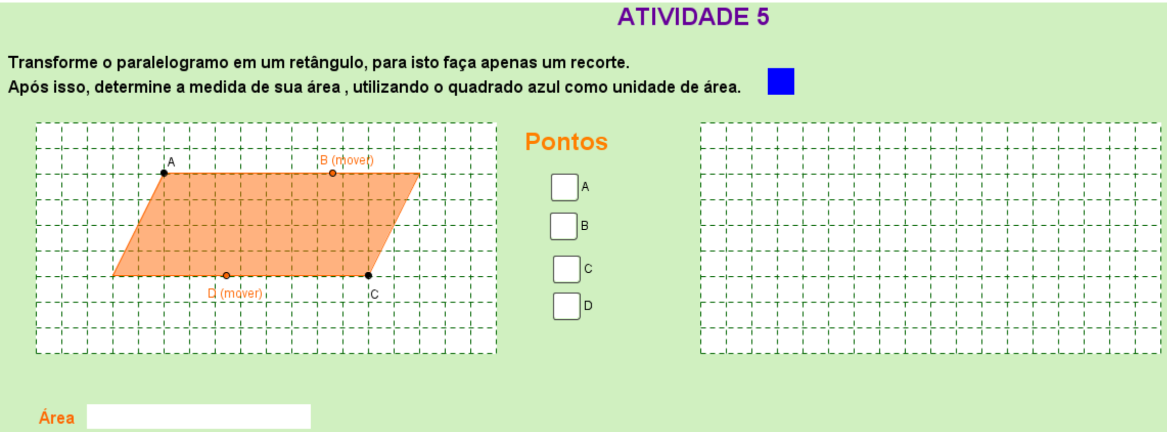


Figura 116- Imagem da tela inicial referente a atividade 5 do bloco 3.

Para finalizar, os alunos devem calcular o valor da área do retângulo formado e incluir este valor na caixa de texto fornecida no recurso.

Análise *a priori*: novamente, nesta atividade utiliza-se a apreensão operatória. Segundo Duval (2005), esta centra-se nas possíveis modificações de uma figura inicial e as reorganizações que essas mudanças podem possibilitar. Neste caso, por meio da modificação mereológica. A partir do paralelogramo dado os alunos devem decompô-lo em duas figuras e realizarem a reconfiguração, a fim de obter um retângulo. Após, por meio do olhar de agrimensor no retângulo obtido, os alunos deverão determinar o valor de sua área. Acredita-se que, o processo de obtenção do valor da área será através do cálculo do produto da medidas de dois lados consecutivos (base e altura), procedimento já desenvolvido em outras atividades.

Previsões de respostas: existem várias formas de realizar a decompomposição do paralelogramo em outras figuras e, com essas, ser feita a reconfiguração para um retângulo. Para isso, os alunos precisam escolher os pontos que serão extremidades da linha de corte. Uma maneira de fazer isso é selecionar as caixas que correspondem aos pontos *B* e *D*, e movimentá-los de forma que pertençam a uma reta perpendicular a base do paralelogramo e somente após devem realizar o recorte. Outra forma, é movimentar a ponto *B*, de modo que a linha de corte passe por ele e pelo ponto *C* e, ainda, seja perpendicular a base. Além dessas possibilidades, outra se coloca, quando se move o ponto *D* e a linha de corte passa por ele e pelo vértice *A* perpendicularmente a base do paralelogramo. As figuras 117 a 119 mostram, respectivamente, estes casos .

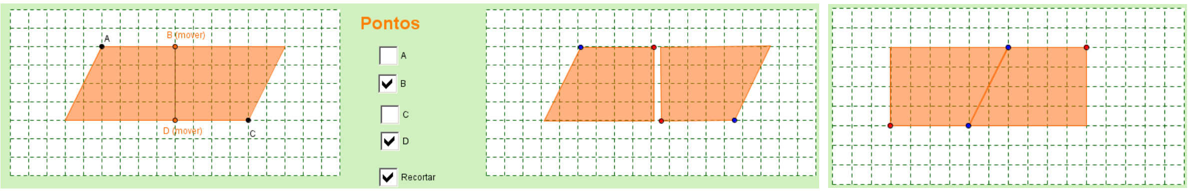


Figura 117- Primeira possibilidade de resolução da atividade 5 do bloco 3.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

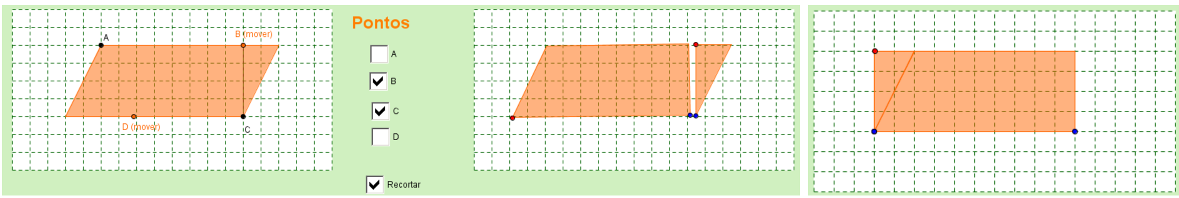


Figura 118- Segunda possibilidade de resolução da atividade 5 do bloco 3.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

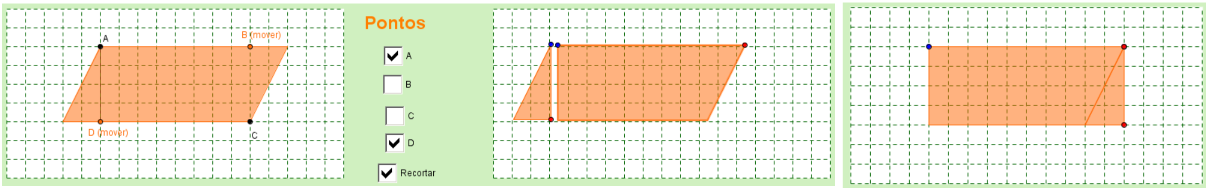


Figura 119- Terceira possibilidade de resolução da atividade 5 do bloco 3.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Por fim, os alunos devem calcular a medida da área do retângulo encontrado, isto é, considerar a área do retângulo, fazendo $10 \times 4 = 40$ unidades quadradas. Após, devem incluir este valor no recurso.

ATIVIDADE 6

Objetivo: comparar as medidas dos lados de um paralelogramo com os lados de um retângulo que possuam mesma área e altura.

Recurso criado no GeoGebra: essa atividade apresenta um paralelogramo e um retângulo possuindo a mesma medida para a altura e, também, o mesmo valor para a área. Estas figuras podem ser arrastadas ou rotacionadas sobre uma malha quadriculada. O enunciado da atividade solicita aos alunos que comparem as medidas dos lados dessas figuras. Para isso, acredita-se que estes irão realizar a justaposição ou a sobreposição dessas figuras, ou ainda, poderão utilizar a malha quadriculada a fim de realizarem a medição dos lados dessas figuras. Caso, os alunos tenham necessidade de recortar o paralelogramo e, por meio das peças obtidas, fazerem essa comparação. Isso será possível, pois o recurso possui uma caixa denominada "Recortar" que, ao ser selecionada surge duas figuras a partir do paralelogramo, conforme mostra a figura 120. Para finalizar a atividade é feito o seguinte questionamento: "O que você observou?".

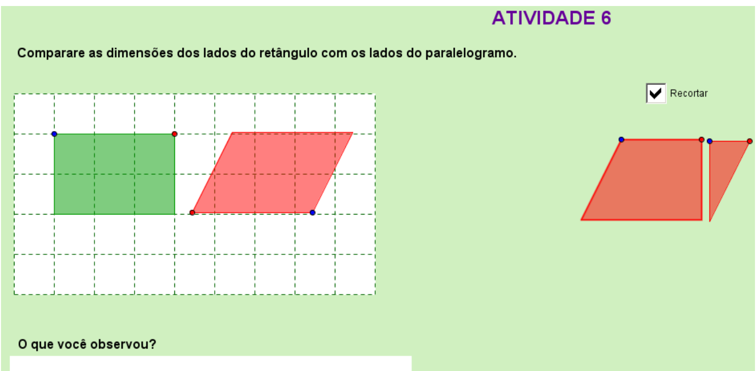
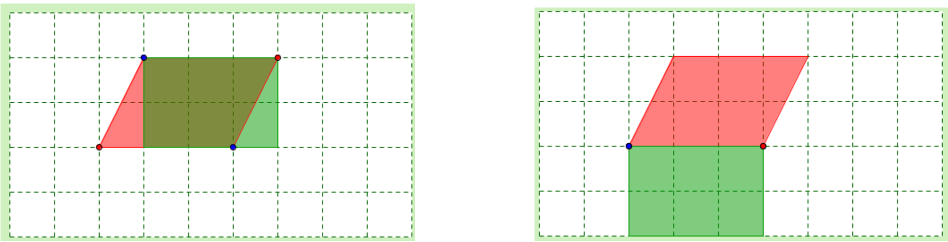


Figura 120- Imagem da tela inicial referente a atividade 6 do bloco 3.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Análise *a priori*: nesta atividade parte-se do registro natural, por meio da leitura e compreensão do enunciado da atividade. Em seguida, acredita-se que os alunos irão explorar as figuras disponibilizadas, seja por meio de justaposição ou sobreposição. Dessa forma, espera-se que o registro figural auxilie na comparação entre os lados das duas figuras. Por fim, novamente os alunos precisarão utilizar o registro língua natural para elaborarem uma frase a fim de responderem o questionamento proposto no final da atividade. Dessa forma, a função apofântica será mobilizada, por meio da operação de enunciação, distinguidada por Duval (2011). Uma vez que, espera-se que os estes concluam que as figuras dadas possuem um de seus lados com a mesma medida.

Previsão de respostas possíveis: Existe a possibibidade dos alunos verificarem a igualdade entre um par de lados do paralelogramo e do retângulo, conforme mostra a figura 121.



(a) Sobreposição (b) Justaposição

Figura 121- Possíveis soluções da atividade 6 do bloco 3 usando o registro figural.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Para finalizar, os alunos devem responder no recurso ao questionamento feito usando o registro lingua natural. Assim, espera-se que estes visualizem por meio do registro figural que as figuras possuem um par de lados com a mesma medida.

ATIVIDADE 7

Objetivo: verificar que uma região limitada por um paralelogramo qualquer pode ser reconfigurada, resultando em uma região retangular e, também, reconhecer a equivalência entre as áreas dessas figuras.

Recurso criado no GeoGebra: essa atividade apresenta um paralelogramo dinâmico, isto é, ao movimentar seus vértices (pontos de cor azul) suas propriedades permanecem inalteradas. No entanto, tem-se outro paraleogramo. Assim, os alunos poderão explorar, a partir de uma animação que, uma região limitada por um paralelogramo qualquer pode ser reconfigurada resultando em uma região retangular. Para verificar isso, disponibiliza-se um controle deslizante, denominado “Arraste”. Sendo que, à medida que este for sendo movimentado ocorre a translação de uma parte da sua região, resultando, no final, na composição de uma região retangular. A figura 122 ilustra a tela inicial dessa atividade.

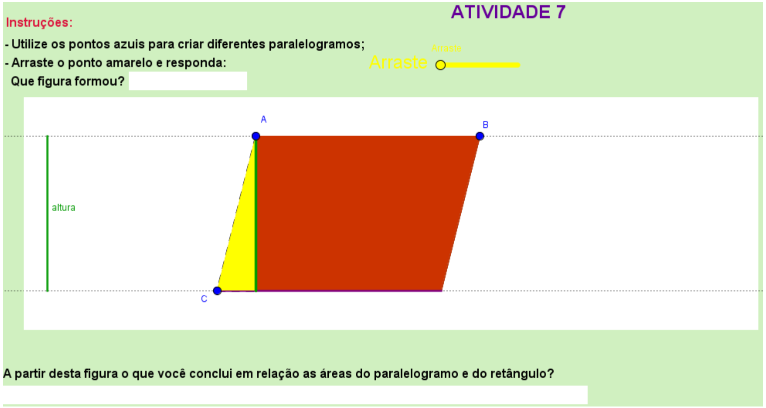


Figura 122- Imagem da tela inicial referente a atividade 7 do bloco 3.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Após, os alunos devem incluir no próprio recurso.a informação de qual figura foi formada após o movimento de arraste, ou seja, deverão indicar que será um retângulo. A sequência de imagens na figura 123 sugere esse movimento.

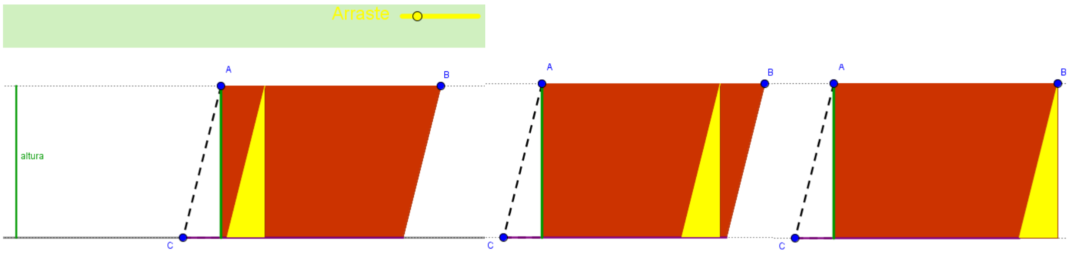


Figura 123- Imagens que sugerem o movimento de parte da figura a partir do arraste.
Fonte: Recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Por fim, é feito outro questionamento: “A partir desta animação o que você conclui em relação as áreas do paralelogramo e do retângulo?”.

Análise *a priori*: a partir de uma animação que mostra uma forma de reconfiguração de diferentes paralelogramos em retângulos espera-se que, pela visualização desse tratamento figural, os alunos concluam a equivalência entre as áreas dessas regiões. Desta forma, evidencia-se, mais uma vez, a característica de aceleração de tratamentos, considerada por Duval (2011), em relação ao uso de *softwares* no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Neste caso, destaca-se na função de simulação, pois permite a exploração heurística das figuras.

Previsão de respostas possíveis: conforme descrito anteriormente, o retângulo é a resposta esperada para o primeiro questionamento. Já, a partir da animação em que o paralelogramo transforma-se em um retângulo, é possível que os alunos concluam a respeito da equivalência entre as áreas das mesmas.

4 EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Este capítulo objetiva detalhar como aconteceu a experimentação das atividades que compõem a sequência proposta, destacando pontos que chamaram atenção, tais como: dificuldades e facilidades apresentadas pelos alunos e diferentes formas de resolução feitas por estes. Bem como, traçar um paralelo entre a análise *a priori* das atividades com as observações realizadas nesta etapa da pesquisa, articulando com o referencial teórico descrito no capítulo 2.

Como já mencionado no capítulo 3, os sujeitos participantes da pesquisa foram alunos de duas turmas de 7º ano do ensino fundamental, totalizando 30 alunos. Entretanto, em alguns dias da experimentação houve alunos que não compareceram. Esta indicação será feita durante as descrições.

Nesta etapa de análise *a posteriori*, inicialmente, analisou-se separadamente as atividades realizadas em cada turma, não sendo identificadas características distintas que justificassem um comparativo entre as mesmas. Dessa forma, optou-se por reuni-las em uma única análise.

Para a análise a *posteriori* foram levadas em consideração, em cada bloco: o conteúdo matemático envolvido; os aspectos estabelecidos acerca da teoria dos registros de representação semiótica, tais como: tipos de transformações (tratamento ou conversão) de registros utilizados para sua resolução e diferentes modos de ver uma figura geométrica. Também, foram consideradas as ferramentas elaboradas no recurso computacional. Optou-se por agrupar algumas atividades na descrição dessa etapa da pesquisa, entendendo que isso não comprometerá a mesma, pois algumas atividades se assemelham em alguns aspectos.

No quadro 16 constam informações referentes as datas nas quais foram aplicadas as atividades na escola, o número de horas-aula e o número de alunos que as realizaram.

Bloco de atividades	Data	Atividades realizadas	Horas-aula	Nº de alunos presentes
1º	13/11/2014	1 a 5	5 (turno inverso)	26
1º	24/11/2014	6 a 8	3 (turno regular)	26
1º	28/05/2015	Reaplicação atividade 3	20 min (turno regular)	27
2º	27/11/2014	1 a 5	5 (turno inverso)	27
2º	28/11/2014	6 a 8	1 (turno regular)	25
2º	01/12/2014	9 a 10	3 (turno regular)	28
3º	5/12/2014	1 a 7	5 (turno regular)	28

Quadro 16- Cronograma de realização das atividades junto aos alunos.

4.1 Análise *a posteriori* do primeiro bloco de atividades

Inicialmente, houve uma conversa com os alunos orientando-os para a realização das atividades da pesquisa. Nesse sentido, usou-se o projetor multimídia para exibir a *interface* do GeoGebra, indicando-lhes a forma de abrir e gravar arquivos, bem como, criação de uma pasta com o nome de cada aluno. Em seguida, os alunos receberam uma ficha impressa (apêndice B) contendo espaços destinados para os registros de resolução de algumas atividades. Uma vez que, algumas atividades foram realizadas somente no computador e, outras, inclui-se também o registro em papel.

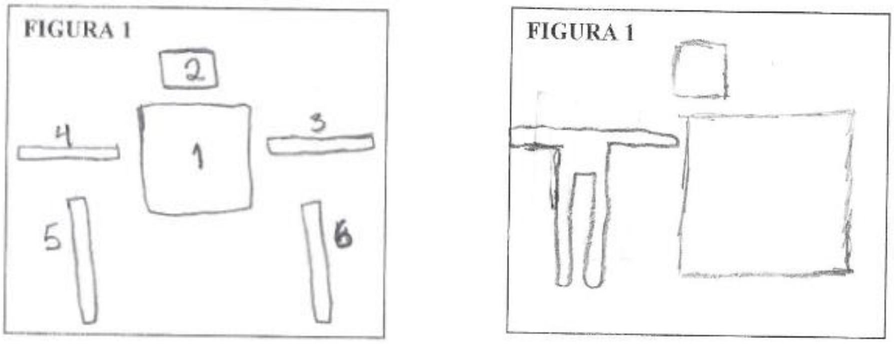
ATIVIDADES 1 E 2

Essas atividades referem-se a contornos fechados e reconhecimentos de formas bidimensionais, onde uma complementa a outra. Na primeira, é necessário apenas identificar contornos que podem compor as figuras de partida disponibilizadas, seja por justaposição, ou por sobreposição de formas bidimensionais. Já na segunda, além da análise visual, os alunos tiveram que reproduzir de duas maneiras distintas as figuras de partida, utilizando peças dinâmicas no recurso, na forma de contornos fechados.

Assim, essas duas atividades tem um caráter introdutório na sequência proposta. Estas foram elaboradas seguindo as considerações de Duval (2005), que coloca como fundamental, no início do estudo de objetos geométricos, atividades que contemplem tratamentos puramente figurais. Também foi abordada a passagem da maneira de ver uma figura para outra. Sendo que, na atividade 1 os alunos utilizaram o olhar do botânico e, na atividade 2, além deste, foi preciso usar o olhar de construtor. Isso vai ao encontro das considerações apresentadas por Duval (2005), que coloca como relevante propiciar atividades envolvendo figuras que contemplem aspectos relacionados à observação, construção e reprodução das mesmas.

Na análise da atividade 1 observou-se que, 24 dos 26 alunos que a realizaram, tiveram a mesma percepção, visualizaram seis formas justapostas (Figura 124(a)), confirmando a previsão realizada na análise *a priori*.

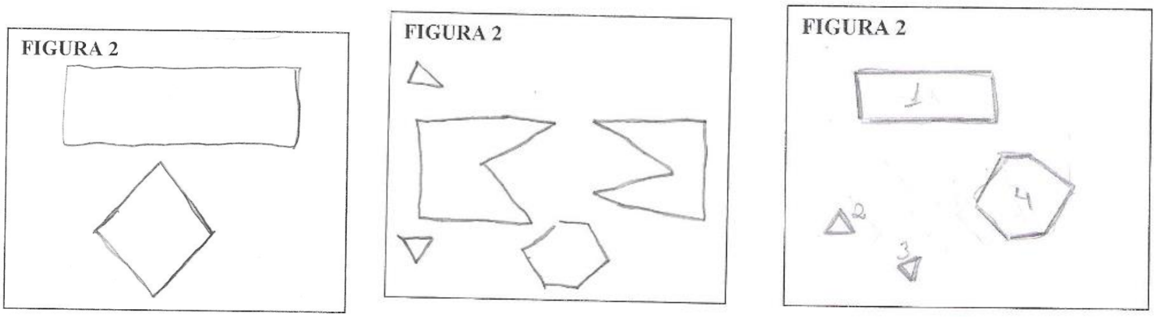
Um caso pontual foi registrado, conforme mostra a figura 124(b). O aluno visualizou a “Figura 1” como sendo a sobreposição de duas formas bidimensionais, seguida da justaposição de outro contorno. Menciona-se que no registro no papel o aluno não manteve a proporcionalidade das formas que a compõem.



(a) (b)

Figura 124 Resoluções da figura 1 na atividade 1 do bloco 1. (a) Apresentada pela maioria dos alunos; (b) Apresentada por um aluno.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Na figura 2 da atividade, 16 dos 26 alunos, visualizaram como sendo a sobreposição de duas formas bidimensionais (Figura 125(a)), de acordo com a análise *a priori* feita. Para esta figura outros casos pontuais se fizeram presentes, citam-se os casos: cinco contornos fechados justapostos (Figura 125(b)) e a sobreposição de duas formas bidimensionais, seguidas da justaposição de duas formas equivalentes (Figura 125(c)).



(a) (b) (c)

Figura 125 Resoluções da figura 2 na atividade 1 do bloco 1. (a) Apresentada pela maioria dos alunos; (b) e (c) Apresentadas por alguns alunos.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Em um caso não foi possível identificar, a partir do registro no papel, os contornos visualizados pelo aluno.

Também, ocorreu que, um aluno, durante a atividade, questionou como deveria registrar na folha os contornos fechados observados, já que visualizara a figura de duas maneiras diferentes. Diante disso, foi solicitado que registrasse os dois modos, como mostra a figura 126.

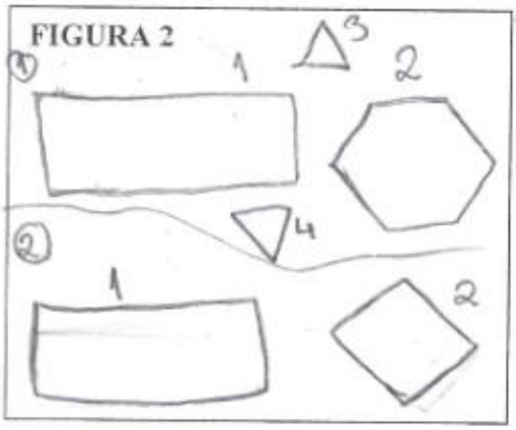


Figura 126- - Resolução apresentada por um aluno na figura 2 da atividade 1 do bloco 1.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Ressalta-se que, nesta atividade, os alunos registraram no papel o modo como visualizaram as figuras disponibilizadas, seja por justaposição ou sobreposição de formas bidimensionais. Durante a realização da mesma foi necessária a intervenção, pois a maioria dos alunos estava reproduzindo no papel exatamente a figura disponibilizada para análise. Diante disso, foram recomendados a reproduzirem separadamente os contornos que visualizaram. Conclui-se que foi difícil, inicialmente, realizarem a desconstrução visual reconhecida a primeira vista, conforme indica Duval (2011). Também, ressalta-se que nos registros feitos, os contornos fechados desenhados por eles seguiram a mesma posição que estes estavam nas figuras.

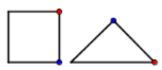
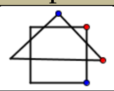
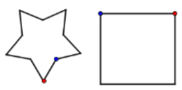
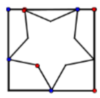
A segunda atividade é composta por quatro figuras de partida, as quais deveriam ser reproduzidas de duas maneiras distintas. Como foram formuladas, pelos alunos, diversas combinações de peças, encontram-se no apêndice C, quadro 31 suas construções e respostas detalhadas. Apresentam-se aqui algumas considerações gerais.

Percebeu-se que os alunos foram aos poucos aprimorando sua percepção. Ou seja, a dificuldade em decompor visualmente as figuras da atividade anterior foi se modificando. Destaca-se como ponto positivo, a dinamicidade dos contornos fechados (peças) criados no GeoGebra, pois os alunos puderam arrastar e rotacionar as figuras favorecendo esse processo. Essa é uma característica levantada por Duval (2011) ao abordar o uso de *softwares* no processo de aprendizagem. Segundo este, existe uma potencialidade ilimitada de tratamentos que podem ser realizados em uma construção utilizando este tipo de recurso. Isso foi observado com a realização desta atividade, que ao contrário da anterior, os alunos soltaram a imaginação.

Acredita-se que isso explique alguns casos específicos de resolução dos alunos para a atividade 2A. Nesta, para surpresa, as maneiras como montaram a figura da primeira construção não foram às imaginadas na análise a *priori*. Acreditava-se que a justaposição das peças seria a combinação mais utilizada e, isso foi feito por apenas um aluno. Analisando este fato, pode-se inferir que isso ocorreu porque as peças estavam disponíveis. Assim, os alunos puderam manipulá-las até formarem a figura sem realizar uma análise muito criteriosa da figura de partida. O quadro 31, no apêndice C, mostra as duas combinações de peças mais frequentes nesta construção.

Mesmo assim, considerou-se positiva as resoluções feitas e o objetivo almejado para a atividade foi alcançado. Os alunos tiveram a oportunidade de, após uma análise visual, comporem a figura de partida de duas maneiras diferentes.

Cabe salientar que, ao longo do desenvolvimento da atividade 2, em que foram percorrendo as quatro figuras que a constituíam, estes foram aprimorando o processo de desconstrução visual de uma mesma figura. Sendo que, na atividade 2B, 4 alunos não conseguiriam montar a figura de partida de modos distintos. Já, na atividade 2C, diminuiu para 2 alunos. Esses casos estão descritos no quadro 17. Por fim, na atividade 2D todos alunos conseguiram alcançar os objetivos almejados.

Contornos utilizados	Etapas da construção	Nº de alunos
		4
		3

Quadro 17- Representações figurais utilizadas por alguns alunos nas duas construções da segunda e terceira figura de partida da atividade 2 do bloco 1.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Por outro lado, alguns alunos demostraram dificuldade na realização da desconstrução visual de figuras. Por exemplo, no caso da atividade 1C, na segunda construção feita pela maioria, estes fizeram uso da união dos vértices das peças. Entretanto, eles sentiram a necessidade de também sobrepor a peça quadrada. Acredita-se que isso tenha acontecido por estarem ainda vinculados às suas percepções do primeiro modo de realização da construção. Consequentemente, isso demostra uma dificuldade em desconstruir dimensionalmente uma figura. Ainda em relação a esta atividade, durante a análise *a posteriori* dessa figura se observou que a construção solicitada não corresponderia a justaposição, pois neste tipo de construção há a necessidade de se ter uma intersecção entre dois lados das peças.

Salienta-se que somente na atividade 1B, ocorreu que 6 alunos construíram figuras diferentes da figura de partida (Figura 127).

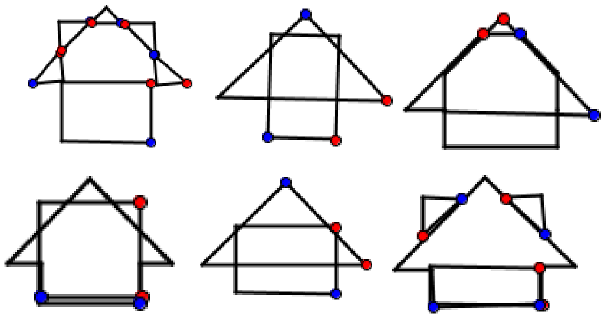


Figura 127- Representações figurais construídas a partir da segunda figura de partida por 6 alunos.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Destaca-se que os alunos mostraram-se muito motivados durante a realização das duas atividades. Não tiveram dificuldades em manipular as peças no recurso, girando-as e arrastando-as para comporem a figura de partida. Além disso, no momento de socialização das respostas obtidas na atividade 2, os alunos ficaram muito surpresos com o número de possibilidades que existiam para montar uma mesma figura de partida. Estes questionaram se havia uma única maneira correta de visualizar as mesmas, o qual fora lhes respondido que, não. Explicando-lhes que a visualização ocorre de acordo com a percepção de cada um, sendo que existem figuras que a maioria das pessoas visualizaria de uma mesma maneira, entretanto, pode existir outras formas de vê-la.

ATIVIDADES 3 E 4

Estas atividades foram agrupadas por serem consideradas complementares entre si. Sendo que, a atividade 3 da ênfase a visualização, pois os alunos precisam, a partir de uma análise visual, descreverem a diferença existente entre dois tipos de objetos. Enquanto que, na atividade 4, além dessa característica será utilizada a maneira de ver do construtor que, conforme Duval (2005), é solicitado que sejam construídas e coloridas as regiões limitadas por elas. Ambas as atividades referem-se a aspectos qualitativos relacionados ao registro figural. Sendo que, na atividade 3 o aluno utiliza também o registro da língua natural.

- Na atividade 3 houve um problema técnico onde o arquivo gravado pelos alunos não armazenou as resoluções. Isso ocorreu provavelmente por não ter sido vinculado alguns comandos entre si. Para resolver esta dificuldade, a atividade foi refeita por eles, de acordo com a indicação do quadro 16. Como a autora desta pesquisa continua atualmente, sendo a professora regente da disciplina de matemática, com os mesmos alunos cursando o 8º ano do ensino fundamental, não gerou grandes transtornos a reaplicação da mesma. Nesta atividade era solicitado aos alunos que elaborassem uma frase que pudesse descrever as diferenças que eles observaram nos dois tipos de objetos fornecidos. As respostas mais utilizadas pelos alunos foram: *"Um é pintado e outro não."* (6 alunos);

- *"Os objetos 1 não estão pintados e o 2 estão pintados."* (5 alunos)*;*
- *"Que os objetos 1 estão só contornados e os objetos 2 estão pintados."* (6 alunos).

Também, apareceram as seguintes respostas:

- *"Um tem o contorno e o outro a parte de dentro.";*
- *"É que a 2 tem o espaço interior preenchido e a outro não.";*
- *"Vi que a diferença dos dois objetos são que um é pintado por dentro e o outro não.".*

Baseando-se em Duval (2011), observou-se que por meio da operação de enunciação das frases, os alunos atribuíram outra dimensão de sentido, a qual se refere as formas das figuras que compõem os dois objetos. Este pesquisador denomina esta operação de designação. A seguir, são apresentadas algumas respostas dos alunos. (grifo da pesquisadora).

- *"As <u>formas são iguais</u> e o objetos 2 são pintados e outro não.";*
- *"São <u>iguais no formato</u> só que um é pintado e outro não.";*
- *"As figuras são <u>iguais no formato</u>, a única diferença é que os objetos 2 são pintados.";*
- *"O primeiro foi desenhado mas não foi pintado já o segundo foi desenhado e pintado, mas as <u>formas são iguais</u>.".*

Ainda, acredita-se que outros dois alunos, também observaram a característica descrita anteriormente. Porém, na elaboração de suas frases não utilizaram a operação discursiva de designação da forma das figuras presentes nos objetos disponibilizados. Essas frases foram (grifo da pesquisadora):

- *"Eles são <u>iguais</u> só os objetos 2 são pintados.";*
- *"São <u>igual</u> a diferença que o objeto 2 tá pintado.".*

Por fim, um aluno elaborou a seguinte frase:

- *"Um é colorido e o outro não.".*

Ao analisar esta última frase, entende-se que o termo "colorido" referido pelo aluno relaciona-se a região interna das figuras presentes nos objetos, mas isso não foi especificado na mesma. Assim, pode ser entendida de outra forma, como se as figuras que pertencessem ao "objetos 1" fossem sem coloração. Entretanto, ambas as figuras possuem coloração. Porém, um grupo é composto apenas por contornos fechados e o outro formado por regiões poligonais (coloridas). Dessa forma, acredita-se que esse aluno não tenha feito uma reflexão após a redação da frase, não percebendo a falta de designação do termo que estava associado à palavra "colorido". Isso vai ao encontro das considerações de Duval (2011, p. 79): "o conhecimento das palavras não é nada se não existe uma tomada de consciência das operações de designação e de sua complexidade".

A atividade 4 foi realizada com sucesso. Sendo que suas construções foram bem diversificadas, conforme previsto na análise *a priori* desta atividade.

Algumas características presentes nas construções realizadas pelos alunos chamaram atenção:

1. Embora o enunciado da atividade solicitasse a construção de figuras diferentes das disponibilizadas na atividade 3, acredita-se que essas figuras tenham influenciado nas construções feitas por eles. Uma vez que, construíram figuras muito parecidas com as apresentadas na atividade anterior, conforme ilustra a figura128.

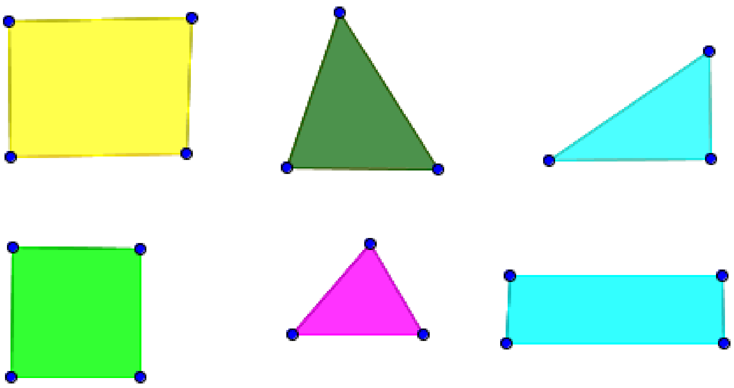
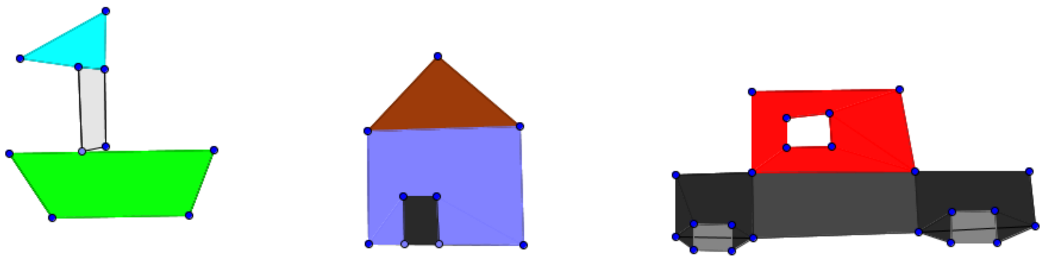


Figura 128- Algumas construções de figuras elaboradas pelos alunos referente a atividade 4 do bloco 1.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

2. Outro aspecto interessante refere-se ao modo como os alunos compreenderam a palavra "figura", presente no enunciado da atividade. Imaginou-se durante a elaboração da atividade que estes considerariam como sendo figura, uma única região poligonal e seu contorno. Entretanto, alguns deram outro significado para a palavra, como mostra a figura 129.



(a) (b) (c)

Figura 129- Construções de figuras elaboradas por alguns alunos referente a atividade 4 do bloco 1.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Nota-se que na construção da figura 129(a), o aluno construiu três contornos fechados, justapostos dois a dois e, com regiões internas pintadas. Como produto final obteve uma figura parecida a um barco. Já, na segunda construção, ele fez a construção de uma casa (Figura 129(b)), neste caso, além da justaposição utilizou também a sobreposição de um contorno fechado e sua região interna. Por fim, na sua terceira construção, construiu algo que se assemelha a um carro (Figura 129(c)), novamente fez uso da justaposição e da sobreposição das formas bidimensionais. Também, nessa perspectiva, outro aluno construiu uma figura tridimensional, conforme mostra a figura 130.

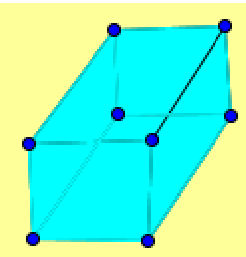


Figura 130- Construção de uma figura tridimensional feita por um aluno referente a atividade 4 do bloco 1.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

3. Alguns casos pontuais apareceram, como figuras com cruzamento (Figura 131). No entanto, nenhum aluno construiu as três figuras com essa característica.

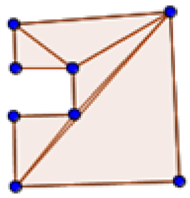


Figura 131- Construção de uma figura com cruzamento feita por um aluno referente a atividade 4 do bloco 1.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Ressalta-se, que essas atividades foram adaptadas da pesquisa de Facco (2003). Sendo que, em uma delas são disponibilizados dois objetos construídos com materiais diferentes, varetas e cartolina. Após, em sua pesquisa, foi solicitado aos alunos que descrevessem as diferenças que perceberam nos dois objetos. A outra atividade, da pesquisa de Facco (2003), consistia na construção de duas figuras diferentes utilizando-se varetas e borrachas e, posterior reprodução das mesmas no papel, onde deveriam pintar suas regiões internas. Na análise *a posteriori* destas atividades observou-se diferenças entre o conjunto de respostas dadas pelos alunos nas duas pesquisas. Na atividade 3, adaptada da atividade 1 de Facco (2003), o que diferiu foram as palavras e expressões utilizadas pelos alunos na elaboração de suas frases. Na atividade 4, quando comparada com a segunda atividade citada de Facco (2013), essa diferença foi mais acentuada. A explicação para isso deve estar associada ao tipo de recurso utilizado em cada uma, pois na pesquisa de Facco (2003), as construções realizadas pelos alunos para cada figura foram restritas a um contorno fechado e sua região interna. Sendo que, nesta pesquisa acreditava-se que eles iriam seguir este aspecto, isto é, construir figuras formadas por um contorno fechado e pintá-las com uso do recurso. Embora, isso tenha acontecido, na maioria das construções realizadas pelos alunos, ocorreram alguns casos diferentes, como as construções mostradas na figura 129. Acredita-se que isto esteja associado diretamente a utilização do recurso computacional. Novamente, reforçando o que Duval (2011) coloca quanto as inúmeras possibilidades de tratamento que o uso de *softwares* podem oferecer às atividades de geometria.

O momento de socialização foi relevante, pois foram discutidas as duas atividades enfatizando-se a distinção entre contorno e região interna de figuras planas.

ATIVIDADE 5

Esta atividade tem por objetivo a comparação de regiões internas entre figuras geométricas planas de mesma forma. Solicitando aos alunos realizarem uma classificação na ordem da maior para a menor região interna das figuras geométricas apresentadas em cinco grupos. Para isso, estes precisaram realizar uma análise visual, havendo a possibilidade de manipularem as figuras na tela do computador. Após, responderam na ficha impressa (Apêndice B), utilizando o registro em língua natural.

No apêndice D encontra-se um quadro com a descrição das representações figurais construídas pelos alunos para cada um dos grupos de figuras. Com base na análise dessas respostas, apresentam-se a seguir, algumas considerações.

Como o primeiro e o segundo grupo (Figura 132) eram compostos por figuras semelhantes, as representações figurais realizadas pelos alunos para fazerem a comparação solicitada foi baseada na análise dos lados ou das alturas dessas figuras. Sendo realizado por meio da sobreposição ou justaposição das figuras e, ainda, outro critério que não tinha sido previsto na análise a *priori* ocorreu. Este consistiu na comparação lado a lado das figuras alinhadas horizontalmente e separadas.

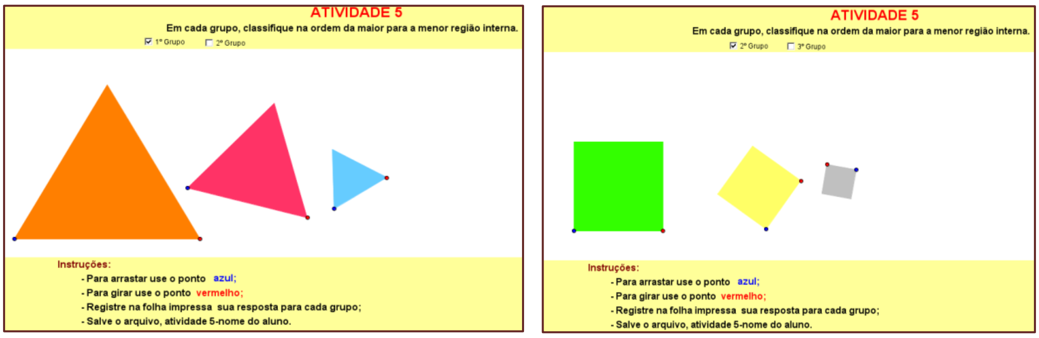
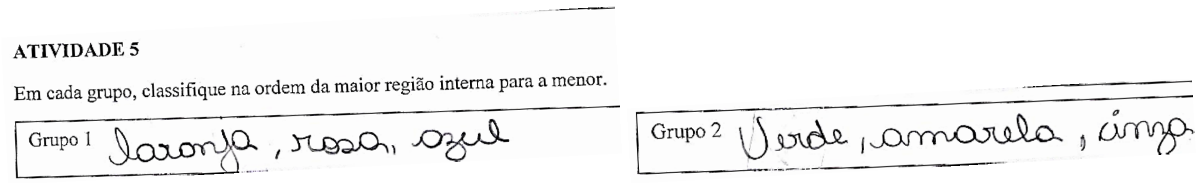


Figura 132- Primeiro e segundo grupo de figuras referentes a atividade 5 do bloco 1.
Fonte: Imagem do recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Todos os alunos responderam corretamente na ficha impressa. No entanto, na classificação quanto a ordenação de maior para a menor região interna das figuras nos dois primeiros grupos (Figura 133), ocorreram dois casos em que não foi possível compreender o critério utilizado. Uma das possibilidades é que esses alunos tenham movimentado as figuras no recurso e, após, deram a resposta na ficha impressa. Outra possibilidade seria que esses alunos tenham utilizado somente a apreensão perceptiva e não as outras duas apreensões descritas na análise *a priori* dessa atividade. No entanto, como as figuras que compõem este grupo eram semelhantes, acredita-se que esse tipo de apreensão possa ter sido suficiente para chegar à resposta esperada.



(a) (b)

Figura 133- Resposta escrita por um aluno para a comparação das regiões internas do primeiro grupo da atividade 5 do bloco 1.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Os mesmos critérios utilizados pelos alunos para comparação da região interna das figuras analisadas anteriormente ocorreram no terceiro grupo de figuras composta por retângulos de mesma medida em dois de seus lados, ilustradas na figura 134.

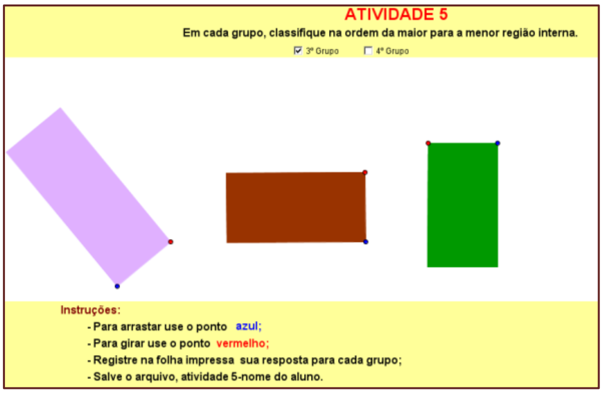
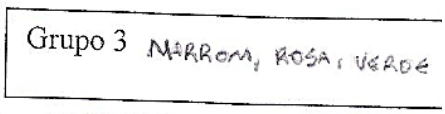
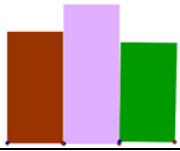
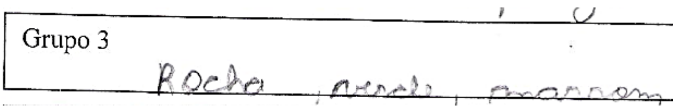
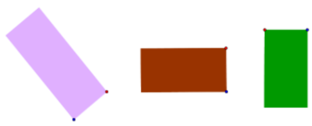
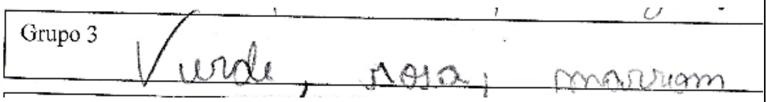
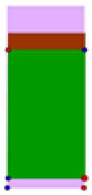


Figura 134- Figuras do terceiro grupo referentes a atividade 5 do bloco 1.
Fonte: Imagem do recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Da mesma forma, esses mesmos critérios se fizeram presentes nas respostas dos alunos para a comparação da região interna das figuras disponibilizadas no terceiro grupo. Em relação ao registro escrito para essa classificação, 3 alunos não registraram de forma correta na ficha impressa. O quadro 18 ilustra essas respostas.

Alunos	Registro língua natural	Representação figural
A	 Grupo 3 MARROM, ROSA, VERDE	
B	 Grupo 3 Rocha, verde, marrom	
C	 Grupo 3 Verde, rosa, marrom	

Quadro 18- Respostas obtidas por 3 alunos referente ao terceiro grupo da atividade 5 do bloco 1.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

No quarto grupo de figuras, embora sejam apresentadas novamente figuras geométricas do tipo retângulos, este grupo possui apenas duas que apresentam a mesma medida em dois de seus lados, como está indicado na figura 135.

Figura 135- Figuras do quarto grupo da atividade 5 do bloco 1.
Fonte:Imagem do recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Neste grupo, se fez presente nas representações figurais construídas pelos alunos, os mesmos critérios utilizados nos grupos anteriores. No entanto, destaca-se que alguns alunos, compararam por sobreposição dois a dois esses retângulos, como ilustra a figura 136.

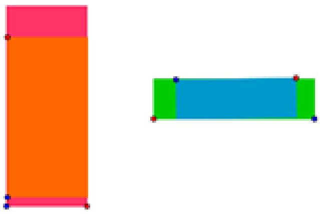
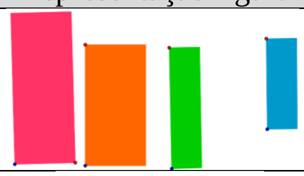
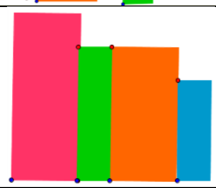


Figura 136- Representação figural construída por alguns alunos referente ao quarto grupo da atividade 5 do bloco 1.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

Também, neste grupo, houve um aumento no número de respostas dadas pelos alunos em que não foi possível identificar a representação figural utilizada. Entretanto, somente um destes respondeu de forma incorreta na ficha impressa. Também, observou-se que outro aluno, embora tenha utilizado a justaposição das figuras, respondeu de forma errada. Estes dois casos estão descritos no quadro 19.

Alunos	Registro língua natural	Representação figural
A	Grupo 4 laranja, rosa, azul, verde (laranja)	
B	Grupo 4 rosa verde laranja azul claro	

Quadro 19- Respostas obtidas por 2 alunos referente ao quarto grupo da atividade 5 do bloco 1.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

Por fim, o quinto grupo (Figura 137), apresentava três retângulos (verde claro, amarelo e marrom) com um par de lados de mesma medida e um quadrado (roxo) com lado de medida idêntica ao par de lados dos retângulos.

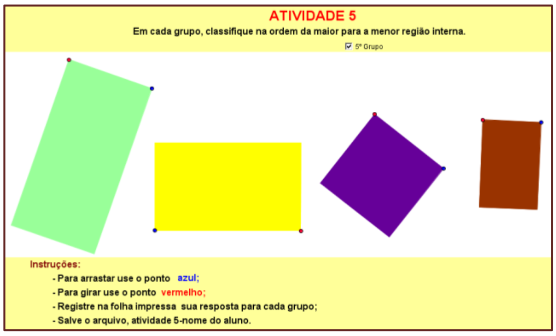


Figura 137- Figuras do quinto grupo referente a atividade 5 do bloco 1.
Fonte: Imagem do recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Os critérios utilizados para comparação nos outros grupos também foram utilizados neste. No entanto, uma diferença chamou atenção, consiste na sobreposição das quatro figuras, sendo que cada uma originalmente encontra-se em uma posição diferente, como mostra a figura 138.

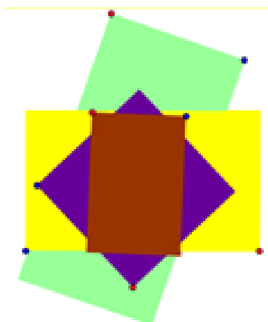
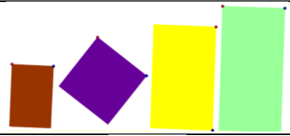
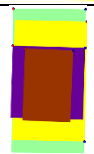


Figura 138- Representação figural construída por alguns alunos referente ao quinto grupo da atividade 5 do bloco 1.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

Para 3 alunos não foi possível identificar o critério utilizado por eles para comparar as regiões, pois deixaram as figuras disponibilizadas na tela do computador de forma aleatória.

Quanto ao registro escrito, correspondente a classificação da região interna destas figuras, somente 2 alunos não concluíram de forma correta, isto está detalhado no quadro 20.

Alunos	Registro língua natural	Representação figural
A	Grupo 5 MARROM, ROXO, AMARELO, AZUL	
B	Grupo 5 amarelo, verde, roxo e marrom	

Quadro 20- Respostas obtidas por 2 alunos referente ao quinto grupo da atividade 5 do bloco 1.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

Com a resolução desta atividade foi possível observar várias abordagens geométricas utilizadas (sobreposição, justaposição e figuras visualizadas lado a lado, mas mantendo-se um alinhamento horizontal) para resolverem um único tipo de atividade. Esta atividade proporcionou a estes uma análise puramente qualitativa referente ao registro figural. Esta, segundo Duval (2005), é imprescindível no estudo de geometria, e na maioria das vezes, é deixada de lado no processo de ensino e aprendizagem.

O momento de socialização desta atividade foi relevante, pois foram discutidos diferentes modos de solucionar a atividade. Sendo que, outros conteúdos geométricos emergiram e foram relembrados, tais como: elementos e nomenclaturas das figuras geométricas presentes na atividade.

Nos dois primeiros grupos como em cada um deles as figuras possuíam lados de mesma medida, bastava comparar a medida entre seus lados ou, entre suas alturas (grupo 1). Mas, na análise *a priori* não foi observado a possibilidade de comparação entre as alturas dos triângulos (grupo 1) percebendo-se isso somente na análise *a posteriori*.

No terceiro grupo, os retângulos possuíam entre si a mesma medida em dois de seus lados. Nesse sentido, foi questionado aos alunos quanto a necessidade de se comparar as duas dimensões desses retângulos. Como resposta, estes disseram que essas figuras possuíam "a mesma largura, então bastaria comparar a medida das alturas". Porém, no quarto grupo era necessário comparar as duas dimensões, pois nem todas as figuras possuíam a mesma medida em dois de seus lados. Assim, durante a socialização, através da exploração visual, foram mostradas algumas formas de análise a fim de concluírem corretamente a atividade.

Destaca-se o envolvimento e interesse dos alunos durante a realização desta atividade. Também durante a socialização, vários destes pediram para explicarem aos colegas o modo como haviam realizado a atividade.

ATIVIDADE 6 E 7

Essas duas atividades visam a comparação de regiões internas de figuras planas que possuem formas diferentes. Devido a esta característica, a interpretação das formas não é suficiente para obter a resposta. Assim, além da apreensão perceptiva, os alunos tiveram que realizar uma exploração qualitativa das figuras através da apreensão operatória, mais especificamente, a partir da divisão mereológica, seguida da reconfiguração das subfiguras obtidas. Nesta perspectiva, para resolvê-las houve a necessidade de se considerar as figuras com uma função heurística que, segundo Duval (2012a), consiste em aplicar tratamentos no registro figural que possam conduzir a solução da atividade.

Para isso, cada um dos recursos criados no GeoGebra envolvendo as duas atividades contiveram a opção de recortar uma única vez as figuras. Ainda, as figuras obtidas após o recorte poderiam ser arrastadas, rotacionadas e sobrepostas na tela do computador. Além disso, na atividade 6 existia uma malha quadriculada disponível para facilitar a sobreposição entre as duas peças a fim de auxiliar na visualização da posição linha de corte. Este recurso pode auxiliar na comparação lado a lado da reconfiguração das peças, após o corte, com a outra figura não recortada.

O que distingue as atividades 6 e 7 é que, no enunciado da primeira é solicitado diretamente a comparação das regiões internas dos pares de figuras, e na segunda, parte-se de uma situação-problema, que para ser solucionada há necessidade de comparar a região entre figuras planas. Diante disso, optou-se por analisar em conjunto essas atividades.

A atividade 6, como já mencionado na análise *a priori*, no capítulo 3 é composta por quatro pares de figuras. Apresenta-se na figura 139, novamente, a tela inicial do recurso elaborado para um desses pares.

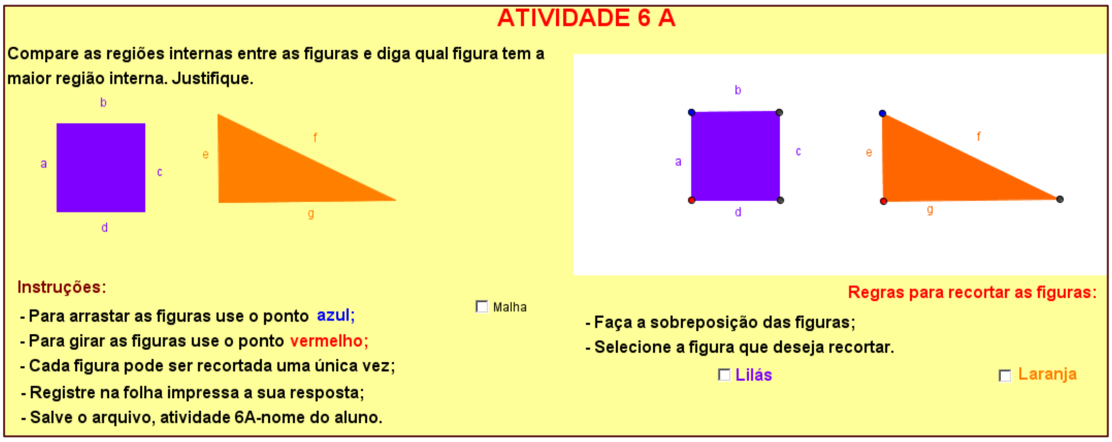


Figura 139- Tela inicial referente a atividade 6 do bloco1.
Fonte: Imagem do recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

As respostas dos alunos foram agrupadas de acordo com a representação figural realizada e estão explicitadas no apêndice E.

Com base na análise dessas repostas, bem como, na observação direta durante o desenvolvimento das atividades, foi possível confirmar as características do registro figural que estão ligados ao seu poder cognitivo. Uma vez que, conforme Duval (2011), este tipo de registro possui desde valor intuitivo presente na maneira como o aluno vê as figuras, como também, a possibilidade de assumir que as figuras formam um registro de representação semiótico específico. Neste registro existe a possibilidade de realizar operações puramente figurais que permitem transformar qualquer figura em outra, com a "finalidade de fazer aparecer uma solução ou de produzir um contraexemplo ou ainda de modelar uma situação" (DUVAL, 2011, p. 85).

Ainda, foi possível confirmar a afirmação de Duval (2011) quanto ao apoio do *software* nas atividades de geometria, este diz que: "confere às figuras uma confiabilidade e uma objetividade que permitem efetuar verificações e observações" (DUVAL, 2011, p. 84).

Desta forma, acredita-se que os alunos tiveram a oportunidade de analisar heuristicamente as figuras para compararem suas regiões internas. Também, foi possível observar que, a partir da divisão mereológica, seguida da operação de reconfiguração, possibilitada pela opção "Recortar", presente no recurso, estas facilitaram a apreensão operatória das figuras. No decorrer das etapas que foram necessárias para a resolução desta atividade os alunos foram se apropriando dessas operações. Acredita-se que a forma como a atividade foi constituída, com o auxílio do GeoGebra, tenha proporcionado uma potencialidade tanto na forma de pensar, como na forma de ver as figuras, auxiliando os alunos a refletirem, a criarem estratégias para resolverem o problema proposto.

Também foi possível observar que, alguns alunos, nas primeiras situações apresentadas na atividade 6, satisfizeram-se apenas com a apreensão perceptiva, realizada a partir da sobreposição das duas peças. Além disso, quando questionados se sabiam qual das duas figuras tinham maior ou se eram equivalentes suas regiões internas somente olhando para elas, estes resolveram realizar o recorte das figuras e compararem. Isso condiz com o que Duval (2012a) afirma, quando considera que a figura guarda uma estrutura cognitiva autônoma, fazendo com que os alunos apeguem-se na apreensão perceptiva.

Quanto ao registro escrito, solicitado aos alunos após a exploração do registro figural, na qual deveriam responder e justificar qual das figuras possuía maior região interna, em cada caso, percebeu-se que os mesmos apresentaram certa resistência. Alguns questionaram se não poderiam apenas responder oralmente. Diante disso, foram orientados sobre a necessidade de resposta escrita. Esse fato vai ao encontro de Duval (2011), quando este coloca que, de maneira geral, no ensino de matemática a língua natural é reduzida a função de comunicação.

Mesmo assim, no primeiro par de figuras, somente 4 alunos justificaram suas respostas. Essas foram, basicamente, citar as figuras recortadas e, em alguns casos, eles escreveram os lados que continham as extremidades da linha de corte. No entanto, sem mencionar a sobreposição ou o critério de comparação que utilizaram para chegar à solução. Com isso, conclui-se que os alunos apresentaram grandes dificuldades em relação às operações discursivas distinguidas por Duval (2011).

Outro aspecto chamou a atenção no registro escrito da atividade 6, o qual está relacionado a função referencial que, segundo Duval (2011), se dá por meio da operação de designação dos objetos geométricos. Observou-se que a maioria dos alunos, 18 dos 26 alunos, não utilizaram as mesmas expressões descritas no enunciado, isso pode ser observado nas respostas onde não utilizaram a expressão *regiões internas* e, em seu lugar, usaram como resposta expressões do tipo *"as duas figuras são iguais"*, ou "as *duas figuras tem o mesmo tamanho"*.

Nesta etapa, 6 alunos responderam apenas "*são iguais"* ou "*regiões internas iguais"*. Sendo que, 2 alunos não responderam corretamente. Apenas 1 aluno relatou quais foram os lados que realizou o corte e, outro, escreveu "*são iguais o lado laranja e lilás*".

Quanto ao registro escrito referente ao segundo par de figuras, a quantidade de alunos que justificou suas respostas foi menor que no item anterior. Somente 1 aluno justificou sua resposta, escreveu: "*o bordô é maior, pois recortei o azul e eles não são iguais"*. Nesta justificativa, observa-se que a enunciação da frase não está completa, a expressão "*figura bordô"* não aparece, utiliza apenas o termo "*bordô"*. Também, descreve que recortou "*o azul"*, ao contrário de indicar "*região interna da figura azul"*. E ainda, não diz o que realizou após o corte, para concluir que as regiões "*não são iguais"*.

Referente a comparação das regiões internas deste par de figuras, 15 dos 26 alunos responderam "*o bordô é maior que o azul"*. Além disso, 4 alunos mantiveram em suas respostas a palavra "*figura",* ao invés de '*região interna da figura"*. Por exemplo, uma resposta foi "*a figura com a cor bordô é mais grande do que a azul"*.

Por fim, salienta-se que 6 alunos não responderam corretamente. Destes, apenas 2 alunos realizaram a operação de designação para os lados que escolheram realizar o corte e não registraram qual figura possuía a maior ou menor região interna. Outro aluno, durante a realização desta atividade relatou que achava que tinha resolvido errada a atividade pois obteve que as regiões internas das figuras não eram iguais, diferente do que fora concluído no primeiro par de figuras da atividade anterior. Então, foi indagado se precisaria que as regiões internas fossem iguais para saber se a atividade havia sido resolvida corretamente. Mesmo assim, ele registrou na folha impressa que "*não dá muito certo pois o triângulo bordô é maior*". Os demais alunos responderam que "*as figuras são iguais*".

Nos registros escritos correspondentes a comparação das regiões internas do terceiro par de figuras, percebeu-se que somente 1 aluno não concluiu que as figuras possuíam regiões internas equivalentes, pois este realizou a sobreposição das figuras de forma que não coincidisse um par de vértices das mesmas (Figura 140).

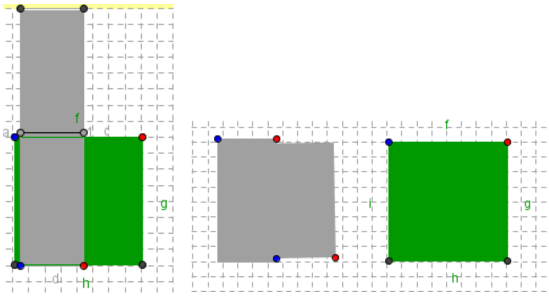


Figura 140- Representações figurais construídas por um aluno para o terceiro par de figuras da atividade 6 do bloco 1.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Salienta-se que, nas respostas registradas na folha impressa, o uso da língua natural pelos alunos não chegou até a função de expansão discursiva. Já que, não descreveram ou explicaram em uma unidade coerente os passos ou processos que os conduziram a comparação das regiões internas, apenas a conclusão encontrada. Por exemplo, algumas frases dos alunos foram: "*tem o mesmo tamanho*", "*as duas figuras ficaram iguais*", "*são iguais*" e "*os dois possuem a mesma parte interna*".

Por fim, após analisar os tratamentos figurais e os registros escritos realizados referentes ao quarto par de figuras, percebeu-se que, 17 dos 26 alunos, concluíram corretamente que a figura verde apresentava maior região interna que a figura rosa. Quanto ao discurso utilizado para justificar as respostas, mantiveram-se as mesmas observações evidenciadas nas análises dos itens anteriores. Alguns registros feitos foram: *"o verde é maior que o rosa"; "a rosa é menor que a verde"; "sobrou uns pedaços da figura verde, pois ela é maior"*.

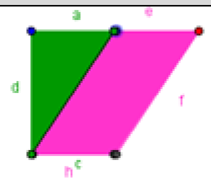
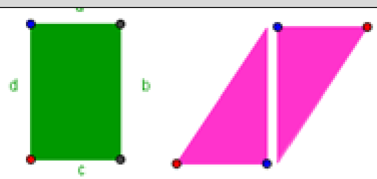
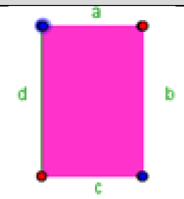
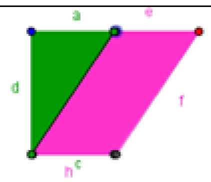
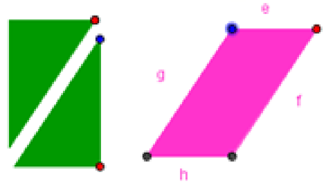
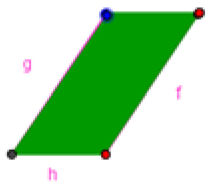
Nos registros escritos, também, ocorreram 2 casos pontuais, nos quais os alunos responderam que "*as figuras não são iguais*", mas não especificaram essa comparação. Por fim, outros 2 alunos, embora tenham feito o processo de divisão mereológica, seguido da reconfiguração, não responderam corretamente. Concluindo que a figura rosa possuía maior região interna que a figura verde.

Na atividade 7, como mencionado anteriormente, foi proposta uma situação-problema partindo de um diálogo entre dois personagens. No qual, cada um destes, apresentava uma faixa que havia pintado sobre um retângulo (cor preta). Esta atividade objetiva também comparar regiões internas.

No enunciado da situação-problema proposta não consta que os retângulos (cor preta) nos quais os personagens pintaram as faixas possuíam regiões internas equivalentes. Diante disso, foi criada na atividade a opção de visualização de ambos os retângulos. No entanto, para surpresa, somente 1 aluno, visualizou esses retângulos e fez a sobreposição entre eles, confirmando a equivalência das regiões internas, dentre, 8 alunos que apenas visualizaram os retângulos. Assim, percebe-se que a maioria dos alunos fez sua análise a partir da apreensão perceptiva que, conforme Duval (2012a) afirma, muitas vezes, os alunos se detêm nas figuras apresentadas sem refletir e interpretar o enunciado do problema. Neste caso, as figuras tinham regiões internas equivalentes, mas se houvesse diferença entre as regiões internas definidas isso poderia conduzir a um erro em suas conclusões.

Feito isso, bastava que os alunos comparassem as regiões internas pintadas pelos personagens, utilizando o mesmo recurso disponibilizado na atividade anterior. Existia também a possibilidade de comparação entre as regiões internas não pintadas (cor preta) de cada um dos retângulos.

A escolha em recortar uma das faixas e construir uma reconfiguração com as peças obtidas para, em seguida, sobrepô-las sobre a faixa não recortada, foi feita por 16 dos 26 alunos. O quadro 21 ilustra as construções elaboradas por estes alunos. Destaca-se que, 4 destes, além dessa exploração, fizeram a comparação da região interna não pintada (cor preta) de cada um dos retângulos.

Sobreposição antes do recorte	Figura recortada	Sobreposição após o recorte
		
		

Quadro 21- Representações figurais mais utilizadas pelos alunos para a comparação entre as regiões internas das figuras dadas na atividade 7 do bloco 1.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

Somente 1 aluno, escolheu comparar as regiões internas restantes dos retângulos fazendo a sobreposição destas, conforme mostra a figura 141.

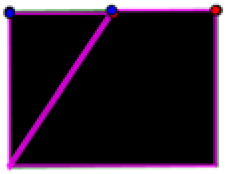
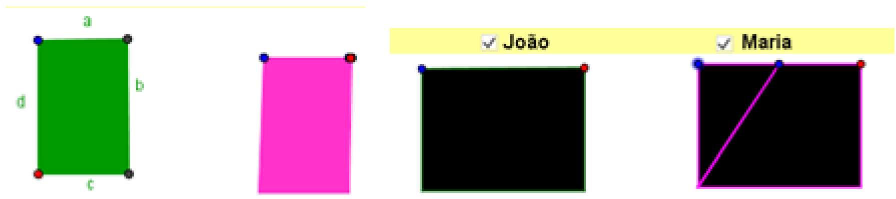


Figura 141- Representação figural construída por 1 aluno para comparar as regiões internas das figuras da atividade 7 do bloco 1.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

Outro critério utilizado por 7 alunos foi o de comparar lado a lado a reconfiguração obtida após o recorte da faixa de cor rosa colocada sobre a faixa de cor verde. Entre estes, alguns realizaram a comparação entre as reconfigurações das figuras formadas a partir dos retângulos, desconsiderando-se as faixas pintadas pelos personagens, como mostra a figura 142.

Ao contrário da atividade anterior, esta não apresentava a opção de utilizar uma malha quadriculada, a qual facilitaria a comparação entre as regiões internas. Dessa forma, os alunos que utilizaram compará-las basearam-se apenas na apreensão perceptiva das figuras, pois como estas eram equivalentes era suficiente para solucionar o problema. Caso não realizassem a análise através desse tipo de apreensão isso poderia levar a um erro, como mencionado anteriormente.



(a) (b)

Figura 142 Outros tipos de representações figurais construída por alguns alunos para comparação das regiões internas das figuras da atividade 7 do bloco 1.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

Apenas 2 alunos arrastaram as figuras correspondentes às faixas pintadas pelos personagens sobre os retângulos, isto é, reproduziram a imagem mostrada no enunciado da atividade. Com exceção destes, os demais concluíram que havia uma equivalência entre as regiões internas correspondentes as faixas pintadas pelos dois personagens. Ressalta-se que, nos seus registros escritos, apareceram expressões presentes na língua natural que não são as mesmas utilizadas no enunciado. Por exemplo, o enunciado descreve região interna das faixas e, escreveram da seguinte forma: *"o verde e o rosa são do mesmo tamanho"; "os dois pintaram a mesma quantidade"* e *"os dois pintaram figuras do mesmo tamanho apenas as formas são diferentes"*.

Isso vai ao encontro das considerações de Duval (2012a), que pondera que, muitas vezes, a postura dos alunos diante de um problema que envolve figuras prevalece a apreensão perceptiva sobre as demais. Isso faz com que estes leiam o enunciado, construam a figura e, em seguida, concentram-se na figura sem retornar ao enunciado. Este esquecimento ou abandono do enunciado marca a ausência da atitude que é chamada de interpretação discursiva da figura. Acredita-se que, isso possa justificar algumas das respostas dadas nos registros escritos, em que não utilizaram a expressão "*região interna da figura"*, escrevendo expressões do tipo: "*as figuras são iguais"* e "*as figuras são do mesmo tamanho"*. Assim, os alunos apresentaram dificuldades em registrar por escrito a justificativa para a comparação das regiões internas. No entanto, embora não tenham feito uma enunciação na forma de um discurso completo, como esperado pelas atividades, eles conseguiram decompor em unidades de sentidos os conhecimentos mobilizados pelas atividades.

Diante disso, ressalta-se a importância da socialização, junto aos alunos, após a realização das atividades. Esta dinâmica ocorreu com grande entusiasmo por parte dos mesmos, alguns, inclusive, demonstraram-se surpresos ao visualizar outros modos de recortar as figuras para realizarem as reconfigurações que levavam a comparação das regiões internas dos pares de figuras. Considera-se que, a maioria dos alunos tenha assimilado o processo de divisão mereológica, seguido da reconfiguração das figuras a fim de compararem as regiões internas de figuras com formas diferentes. Além de identificarem casos em que, figuras com formas diferentes podem possuir regiões internas iguais.

ATIVIDADE 8

Nesta atividade, por meio da manipulação das peças dinâmicas de três quebra-cabeças, os alunos deveriam em cada um realizarem a reconfiguração. Tendo como objetivo construir um retângulo e um paralelogramo, respectivamente, utilizando-se a justaposição de todas as peças disponibilizadas. A fim de verificarem, de forma intuitiva, a equivalência entre as áreas destes quadriláteros. Na figura 143 é ilustrada novamente a tela inicial desta atividade.

Como fora descrito na análise *a priori*, para resolvê-la era necessário realizar a conversão do registro língua natural para o registro figural. Em outras palavras, os alunos teriam que interpretar o enunciado da questão, mobilizando conhecimentos referentes aos conceitos e propriedades dos dois quadriláteros indicados. Em seguida, deveriam montar os quebra-cabeças a partir das peças que os compõem.

Figura 143- Imagem da tela inicial referente a atividade 8 do bloco 1.
Fonte: Imagem do recurso elaborado no GeoGebra pela autora.

Logo, após a leitura do enunciado da atividade, os alunos começaram a se questionar sobre a diferença entre esses quadriláteros. Inicialmente, procurou-se não intervir, no diálogo entre eles. Apenas, foram orientados a construírem as figuras de acordo com o que entendiam ser um retângulo e um paralelogramo, pois já haviam estudado tais formas geométricas.

Entre os comentários dos alunos destaca-se a associação que fizeram com a atividade anterior que envolvia um retângulo. Alguns, inclusive, questionaram se o retângulo era do “tipo” da faixa pintada por João e o paralelogramo da faixa pintada por Maria. Então, foi respondido que sim e, após, foram questionados: “Quais são as características que um quadrilátero deve ter para ser classificado como retângulo? E como paralelogramo?”.

A partir disso, alguns alunos se lembraram destas características e realizaram as construções. Para os que ainda apresentaram dúvidas, foi pedido que construíssem as figuras que eles julgavam ser um retângulo e um paralelogramo, pois, no momento da socialização, iria ser retomado este assunto. No apêndice F são detalhadas as construções por eles realizadas. Em relação as soluções encontradas pelos alunos, referentes ao primeiro quebra-cabeça, percebeu-se que os mesmos apresentaram facilidade em obtê-las, pois todos conseguiram montar o retângulo. Ressalta-se, porém, que somente 3 alunos fizeram a construção do retângulo em uma posição oblíqua, todos os outros consideraram na sua construção, um dos lados do retângulo disposto na horizontal.

No espaço destinado no recurso para a realização da reconfiguração das peças, com a finalidade de obterem um paralelogramo, foram observadas nas respostas dos alunos as duas possibilidades previstas na análise *a priori*. Cabe registrar que 4 alunos que realizaram as duas reconfigurações resultando na primeira, um retângulo com este construído com lados na posição horizontal, obtiveram na segunda construção, um paralelogramo na posição oblíqua.

Com base na análise das construções feitas para o segundo quebra-cabeça, observou-se que, 19 alunos construíram o retângulo conforme a previsão apresentada na análise *a priori*. Novamente, prevaleceram as construções com um dos lados na posição horizontal.

No entanto, um fato inesperado ocorreu, 7 alunos construíram o retângulo mas, fizeram sobreposição das peças. Sendo que, os 5 alunos restantes montaram figuras que não representavam um retângulo.

Da mesma forma, para construir o paralelogramo as reconfigurações mais utilizadas foram previstas na análise *a priori*, totalizando 20 alunos que a realizaram. Também, ocorreu de 3 alunos construírem nas duas composições, retângulos. Novamente, prevalecendo na segunda construção, retângulos em posições oblíquas. Os 3 alunos restantes não conseguiram realizar uma reconfiguração que resultasse em um retângulo. Novamente, apareceram alguns casos em que fizeram a construção de paralelogramos, porém utilizando a sobreposição de peças.

Por fim, no último quebra-cabeça, apresentaram dificuldades de realizarem as reconfigurações. No caso do retângulo, 17 dos 26 alunos, realizaram a composição prevista na analise *a priori*, os demais não conseguiram. Em relação a composição do paralelogramo, 13 alunos montaram com êxito as configurações. Sendo que, destes 5 alunos montaram novamente retângulos e 8 alunos construíram o paralelogramo utilizando somente uma das três formas distintas que haviam sido previstas.

O momento de socialização desta atividade foi fundamental, pois os alunos foram questionados em relação ao que entendiam por um quadrilátero ser um retângulo ou ser um paralelogramo. Um aluno respondeu oralmente: "*o paralelogramo tem lados paralelos e o retângulo ângulos retos*". A partir desta resposta, foi conduzida a discussão da seguinte forma: primeiramente, foi comentado que as duas figuras solicitadas na atividade eram quadriláteros, pois eram polígonos com quatro lados. Em seguida, foi dito que, quando um quadrilátero possui lados opostos paralelos ele é chamado de paralelogramo. Após, se utilizou das peças do primeiro quebra-cabeça e foi construído um paralelogramo, mostrando que seus lados opostos eram paralelos. A seguir, montou-se um retângulo na posição horizontal, e indagou se a figura construída era um paralelogramo? As respostas dos alunos divergiram, alguns diziam que sim, outros, que não, estes o classificavam como retângulo. Com isso, foi feito o seguinte questionamento: “Essa figura tem lados paralelos?”. Eles afirmaram que sim. Perguntou-se então: ”Para ser um paralelogramo que precisa acontecer?” Daí, um aluno perguntou: “Então um retângulo é um paralelogramo?” Respondeu-se, então que, um retângulo é um caso particular de um quadrilátero do tipo paralelogramo, pois este possui características específicas, ou seja, quatro ângulos retos que decorre serem os lados paralelos dois a dois.

Assim, retornando à atividade foi explicado que nas duas reconfigurações que eles precisavam realizar em cada quebra-cabeça poderiam ser construídas figuras na forma de retângulos. Também, nesta discussão, foi construído um retângulo numa posição oblíqua e questionado aos alunos se essa representação figural correspondia a um retângulo. Novamente, ocorreu um impasse nas respostas dos alunos, uns diziam que sim, outros, que não. Dessa forma, foi retomada a definição de retângulo e perguntado a eles se a figura construída tinha essas características, então eles concluíram que sim. Por fim, utilizando-se do aspecto dinâmico do GeoGebra, as peças foram rotacionadas na tela do computador mostrando-se várias reconfigurações que poderiam definir um retângulo.

Após, foi mostrado as reconfigurações possíveis nos outros quebra-cabeças. Com isso, os alunos tiveram a primeira exploração da equivalência entre as regiões internas dessas figuras sendo que, isso será posteriormente, resgatado em outras atividades.

Essas dúvidas que emergiram durante a socialização da atividade justificam as construções que haviam realizado. Acredita-se que isso esteja relacionado com a apreensão perceptiva dos alunos em relação a essas figuras que, sob a ótica de Duval (2005), esse tipo de apreensão pode favorecer ou, em alguns casos, impedir a resolução de um problema. Ele justifica afirmando que este tipo de apreensão é realizada de forma imediata e automática. Além de estar impregnada pelos saberes e pelo fato dos objetos que os rodeiam possuírem esta forma. Ainda, Duval (2005) salienta a importância da apreensão discursiva, que consiste na interpretação discursiva dos elementos, propriedades e axiomas definidos.

Em relação ao uso do *software* GeoGebra na elaboração destas atividades considera-se que este cumpriu um papel importante de simulação, evidenciadas por Duval (2011), pois, os alunos puderam deslocar e rotacionar as peças dos quebra-cabeças na tela do computador. Dessa forma, a atividade cognitiva mobilizada foi a de coordenação do gesto e da visão para manipularem as peças e assim obterem as reconfigurações solicitadas. Isso permitiu que grande parte dos alunos realizassem a conversão do registro língua natural para o figural.

Aqueles que não conseguiram durante a realização da atividade, tiveram a oportunidade de perceber essa conversão no momento da socialização.

4.2 Análise *a posteriori* do segundo bloco de atividades

ATIVIDADE 1

Esta atividade teve como finalidade auxiliar os alunos na compreensão, por meio dos recursos criados no GeoGebra, de conceitos relativos a perímetro e a área de uma mesma figura. Assim, o recurso apresentava diferentes unidades de comprimento e de área disponíveis para escolha na tela inicial da atividade. Por meio disso, procurou-se conduzir os alunos a perceberem que o valor associado à medida do contorno depende da unidade de medida adotada. Da mesma forma, o valor associado à medida da área depende da unidade de área escolhida para esse fim. Salienta-se que, as terminologias "perímetro" e "área" ainda não haviam sido utilizadas até o momento.

Como esta atividade envolve três registros de representação semiótica, serão descritas algumas características observadas durante a realização desta atividade, bem como, as resoluções mais utilizadas pelos alunos.

Quanto ao uso de registro figural proporcionado a partir de objetos geométricos manipuláveis no GeoGebra destaca-se que, os alunos tiveram facilidade em realizar o que estava sendo solicitado. Em relação à análise da atividade cognitiva requerida pelo uso desse recurso entende-se que classifica-se, segundo Duval (2011), como de coordenação do gesto e da visão para manipularem as ferramentas disponibilizadas até chegarem a solução.

Na primeira parte da atividade, destinada à exploração do perímetro de uma figura dada, utilizando-se diferentes unidades de comprimento, observou-se que todos os alunos moveram o controle deslizante até o final, ou seja, visualizaram todo o contorno formado sobre a figura para cada unidade de comprimento.

Em relação ao registro numérico, este foi utilizado para o cálculo da medida do contorno da figura disponibilizada, sendo feito este cálculo para cada uma das unidades fornecidas. Observou-se que, diferentes tipos de tratamentos numéricos foram utilizados pelos alunos. Para ilustrar, será considerada neste trabalho, a análise da primeira unidade disponibilizada, como mostra a figura 144.

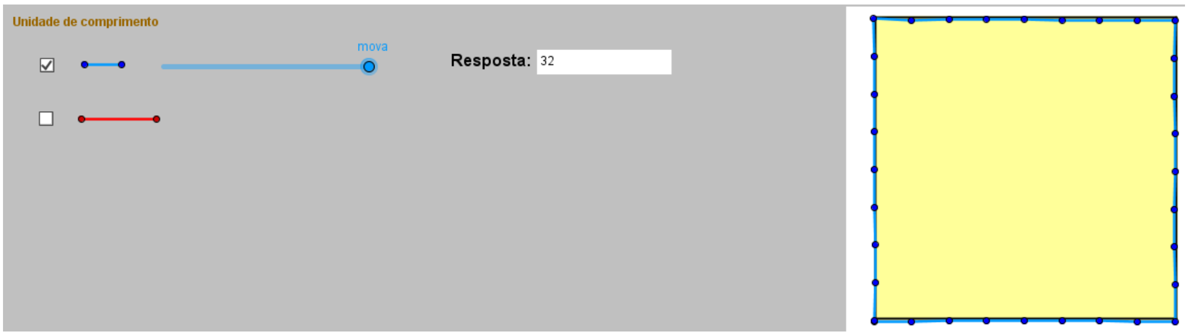


Figura 144- Resposta feita por um aluno referente a atividade 1 do bloco2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Observou-se durante a realização da atividade que alguns alunos fizeram a contagem uma a uma das unidades que cabiam no contorno. No entanto, outros contaram o número de unidades que cabiam em cada lado do quadrado. Neste caso, 8 unidades e, a seguir, realizaram numericamente a operação de adição com quatro parcelas iguais, 8 + 8 + 8 + 8 = 32 unidades de comprimento. Também, percebeu-se que alguns multiplicaram por 4, a medida obtida para o lado do quadrado, ou seja, $4 \cdot 8 = 32$ unidades de comprimento.

Além destes tratamentos, observou-se que, poucos alunos perceberam a relação existente entre as quatro unidades de comprimento disponibilizadas, pois na sequência elas tinham o dobro da medida da anterior. Assim, descobrindo a medida do contorno utilizando-se a primeira unidade de comprimento, bastaria encontrar a metade deste valor para obter o comprimento quando se considerava a próxima unidade. Dessa forma, sendo 32 unidades de comprimento a medida do contorno da figura utilizando-se a primeira unidade dada, os tratamentos utilizados para obter a medida do contorno usando as outras unidades, poderiam ser representados, respectivamente, por $32 \div 2 = 16$ unidades de comprimento, $16 \div 2 = 8$ unidades de comprimento e $8 \div 2 = 4$ unidades de comprimento.

Independente do tratamento numérico utilizado, com exceção de um aluno, os demais obtiveram, com êxito, a solução desta etapa da atividade.

Já, na segunda etapa, eles precisavam descobrir o número de peças necessárias para cobrir a figura (quadrado), sendo disponibilizadas peças de dois tipos, em tamanhos diferentes. Todos os alunos determinaram o número correto de peças em cada caso. Porém, alguns não cobriram toda a figura com as peças fornecidas, como mostra a figura 145.

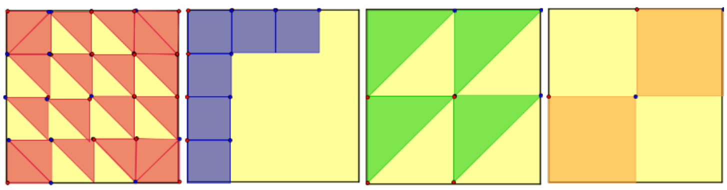


Figura 145- Representações figurais construídas por alguns alunos referente a atividade 1do bloco2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Alguns alunos tiveram dificuldade de cobrir a figura com a primeira peça disponibilizada, como mostra a figura 146. Diante disso, foi necessário realizar uma intervenção, instigando-os a escolherem outras maneiras de solução. Em alguns casos, inclusive, foi dito que seria mais fácil seguir um "padrão" para cobrir a figura. Após, esses alunos conseguiram realizar a atividade de forma satisfatória, na figura 147 ilustram-se alguns padrões utilizados para cobrir a região interna da figura.

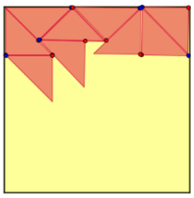
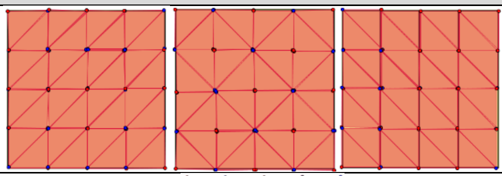
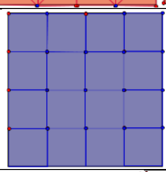
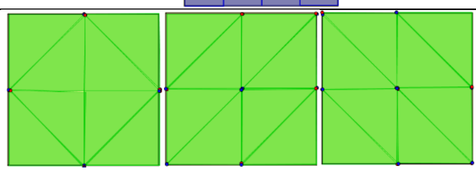
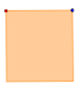
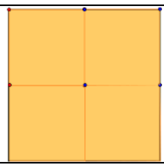


Figura 146- Representação figural utilizada por um aluno para cobrir a figura disponibilizada na atividade 1do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Com as outras duas peças no formato quadrangular, com tamanhos diferentes, existia para cada caso, uma única possibilidade de solução, como descrito na análise *a priori*.

Quanto ao registro numérico, se observou diversas estratégias que, por sua vez, estão relacionadas a representação figural construída pelos alunos. Entre elas, após cobrirem a figura, está a contagem uma a uma das peças. O quadro 22 ilustra alguns registros figurais e numéricos obtidos para essa atividade.

Peças	Registro Figural	Registro numérico
		64
		16
		8
		4

Quadro 22- Algumas soluções encontradas pelos alunos referentes a segunda parte da atividade 1 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Nos casos de cobrir a figura com peças que possuíam forma quadrangular, observou-se que, alguns alunos, determinaram quantas peças quadradas cabiam ao longo do lado da figura e, em seguida, calcularam o produto da medida desses lados.

Ressalta-se também que, alguns realizaram a comparação da região interna de cada peça, percebendo, assim que a 1ª peça quadrada (azul) tinha o dobro da região interna da 1ª peça triangular (vermelha); a 2ª peça triangular (verde) tinha o dobro da região interna da 1ª peça quadrada (azul) e a 2ª peça quadrada (laranja) tinha o dobro da região interna da 2ª peça triangular (verde).

Para concluir a atividade, eles precisavam fazer um registro escrito na folha impressa, por meio do registro língua natural respondendo as seguintes questões para cada uma das etapas analisadas anteriormente:

- Por que o número de unidade de comprimento de cada cor foi diferente, sendo que a figura é mesma?
- Por que o número de peças de cada cor foi diferente, sendo que a região delimitada é mesma?

Os alunos registraram suas respostas no próprio recurso. Sendo que, a operação discursiva esperada era do tipo enunciação completa, ou seja, através da função apofântica, distinguida por Duval (2011). Uma vez que, eles deveriam escrever algo dos objetos, neste caso, designados como *unidades de comprimento* e as *peças*, respectivamente. A unidade de sentido seria constituída por meio do valor pragmático, isto é, a partir da manipulação dos objetos no recurso e, a interpretação disso, articulada aos questionamentos feitos.

Todos os alunos registraram sua resposta entre estas, destacam-se nesta análise as expressões mais utilizadas nos seus discursos escritos.

Assim, ao responderem a primeira questão, observou-se que a maioria justificou que o número de unidades de comprimento de cada caso foi devido a medida de cada uma dessas unidades serem diferentes. Entre as expressões utilizadas para referirem-se a "*medida das unidades de comprimento são diferentes",* estão: *"porque o comprimento delas são diferentes"; "porque o tamanho delas são diferentes"; "as respostas são diferentes pois elas são diferentes"; "umas são maiores que as outras"* e *"por que uns espaços são maiores que os outros"*.

Além disso, nas respostas elaboradas por estes observou-se que alguns não utilizaram o termo "*unidade de comprimento"*, em seu lugar, utilizaram: *"traços"; "linhas"; "partes"* e *"espaços entre os pontos".* Citam-se algumas dessas respostas: "*a resposta é diferente porque* *o traço de cada figura é diferente"; "o tamanho de cada traço é diferente"; "porque os pontos estavam uns mais compridos que os outros"* e *"porque as linhas são diferentes".*

Em relação às respostas para o segundo questionamento, a maioria dos alunos, ao todo 16, responderam *"porque as peças são diferentes (não eram iguais)".*

Além desses, 8 alunos, responderam "*porque as figuras são diferentes".* Apenas um aluno designou, em sua frase, a forma das peças disponibilizadas, registrando *"porque existia quadrados e triângulos diferentes".*

Os 2 alunos restantes não responderam corretamente, afirmaram que: "*por que o número de peças de cada cor foi diferente"* e *"porque os quadrados são diferentes".*

No momento da socialização desta atividade, utilizou-se das informações e dos conceitos presentes na mesma para, em conjunto, se chegar até a definição de perímetro e área de uma figura plana. Inicialmente, foram questionados acerca da diferença entre essas duas grandezas, um aluno respondeu verbalmente:

"Na primeira nós medimos o contorno do quadrado bege e na segunda a parte de dentro dele".

A partir dessa resposta, foram conduzidos até os conceitos de perímetro e área e enfatizado que essas duas grandezas dependem da unidade de medida adotada. Os alunos foram comunicados que nas próximas atividades essas terminologias estariam presentes nos enunciados.

ATIVIDADES 2 E 3

As atividades 2 e 3 estão interligadas diretamente, pois, na primeira, tem como proposta conduzir os alunos a concluírem que figuras com mesma área podem possuir perímetros diferentes. Na segunda atividade, objetiva-se discutir que figuras com mesmo perímetro podem ter áreas diferentes. Constatando dessa forma que, essas duas grandezas são independentes entre si.

Na atividade 2 os alunos precisavam compor 4 figuras diferentes, utilizando para isso, 5 unidades quadradas que poderiam ser arrastadas e rotacionadas na tela do computador. Como regra, foi indicado que não poderia haver sobreposição das peças. Além disso, precisavam ser dispostas lado a lado. Após, os alunos deveriam determinar a medida do perímetro e da área das figuras montadas utilizando a unidade de comprimento e de área fornecida na tela inicial da atividade.

Na análise dos registros figurais construídos pelos alunos observou-se que, surgiram as 12 possíveis configurações de se realizar a construção solicitada, conforme previsto na análise *a priori*. Sendo que, as 3 representações figurais mais utilizadas pelos alunos são apresentadas na figura 147.

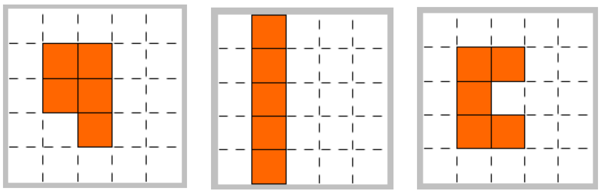


Figura 147-Três tipos de representações figurais mais frequentes nas construções dos alunos referente a atividade 2 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Destaca-se que as representações figurais mostradas na figura 148 apareceram uma única vez.

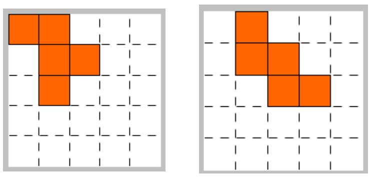


Figura 148- Representações figurais presentes, uma única vez, nas construções dos alunos referente a atividade 2 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Outro aspecto, mencionado na análise *a priori* foi confirmado, está relacionado a considerarem figuras diferentes aquelas dispostas em posições diferentes. Na figura 149 é ilustrado este aspecto em uma construção realizada por um aluno. Nesse sentido, 9 alunos, construíram configurações contendo pelo menos duas figuras seguindo essas características.

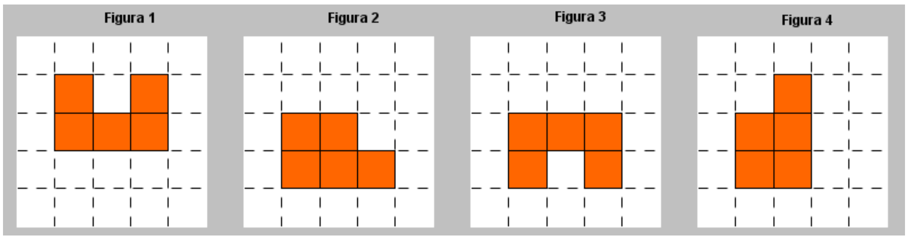


Figura 149- Representações figurais construídas por um aluno para a atividade 2 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Ocorreram apenas 2 casos de representação figural que não seguiram as regras estabelecidas para a atividade. Um desses alunos realizou a sobreposição das unidades quadradas e o outro, não dispôs as peças lado a lado.

Em relação ao registro numérico, alguns alunos determinaram o perímetro das figuras construídas, deslocando a unidade de comprimento sobre o contorno dessas figuras. Ressalta-se, a maioria utilizou a malha quadriculada disponibilizada para auxiliar na contagem que os conduzia à determinação do perímetro das figuras. Constatou-se que, 5 alunos determinaram de forma incorreta, o perímetro de uma, das quatro figuras construídas.

Quanto ao registro do valor da área das figuras, todos os alunos concluíram que correspondia a 5 unidades quadradas. Novamente, em geral, a malha quadriculada foi utilizada por eles, auxiliando na obtenção deste valor. Nesse sentido, ainda se observou que a grande maioria contou o número de quadrados para determinar a área, pelo menos nas duas primeiras figuras construídas. Ou seja, não associaram com a condição posta no enunciado da atividade. Isso reforça as colocações de Duval (2012a) que, geralmente, os alunos apegam-se prioritariamente na apreensão perceptiva, pois realizam, inicialmente, a leitura e interpretação do enunciado da atividade, depois elaboram a representação no registro figural com articulação nisso, no entanto, concentram-se totalmente na figura sem voltar novamente ao enunciado.

Na atividade 3 devem fixar um valor para o perímetro, variando de 1 a 30. Em seguida, mover os pontos (cor verde) sobre os polígonos, de modo que, o perímetro dessas figuras coincida com o valor fixado. Esse procedimento deveria ser feito duas vezes, escolhendo valores diferentes para o perímetro. Após, os alunos teriam que determinar a área desses polígonos utilizando a unidade de área disponibilizada na tela inicial da atividade.

Nessa atividade a maioria dos alunos a resolveu de forma satisfatória. Sendo que, 16 deles representaram corretamente, tanto por meio do registro figural, nas duas escolhas; como também, o cálculo para obtenção das áreas dessas figuras. Para ilustrar esta atividade, na figura 150 é exibida a resolução encontrada por um aluno para uma das escolhas a serem feitas.

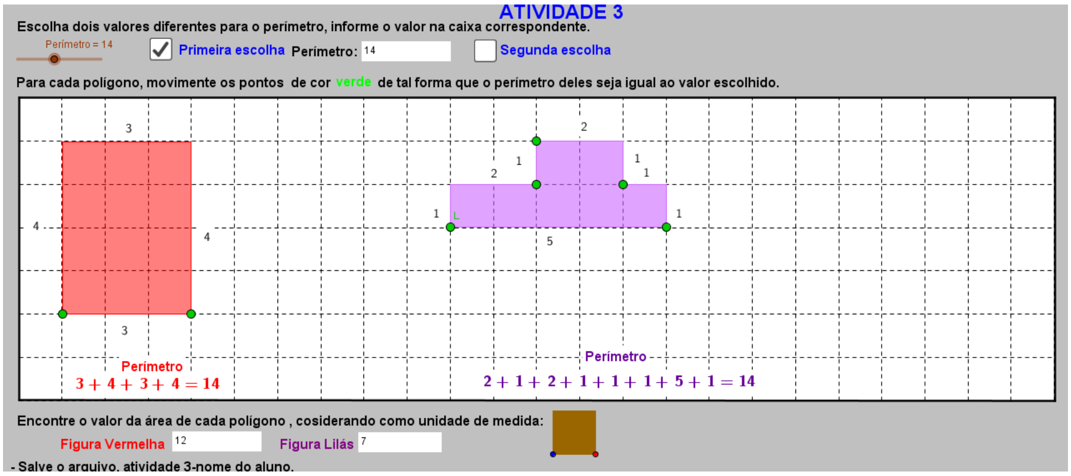


Figura 150- Solução encontrada por um aluno para a primeira escolha da atividade 3 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Cabe relatar que 6 alunos realizaram corretamente parte da atividade, resolvendo corretamente uma das escolhas. Desses acredita-se que, apenas um tenha confundido o significado das grandezas perímetro e área, os demais devem ter se equivocado durante o cálculo. A figura 151 mostra a tela final da atividade deste aluno.

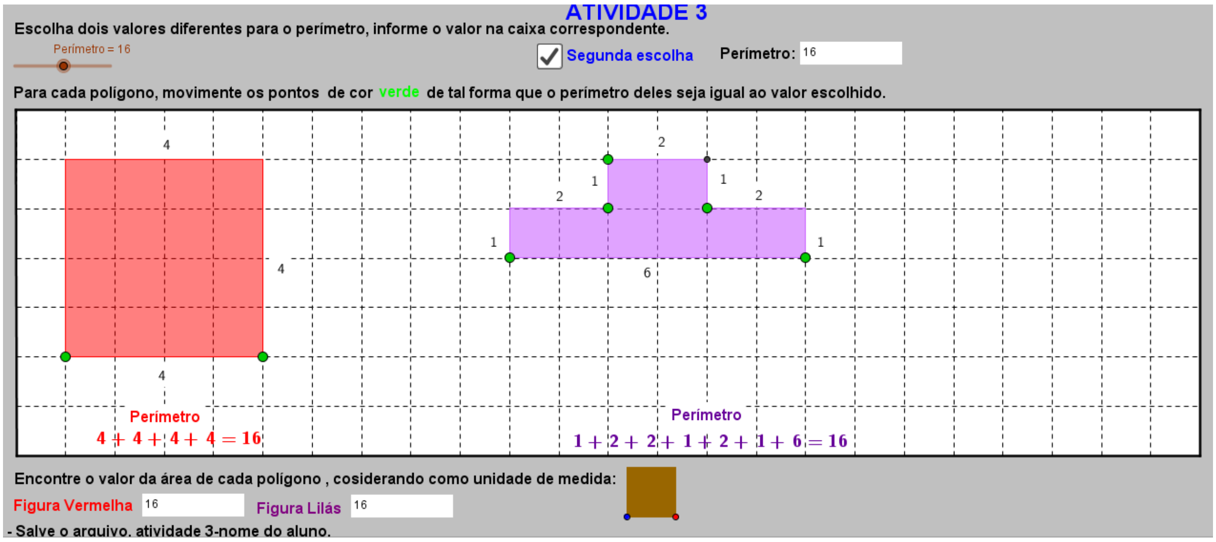


Figura 151- Solução incorreta encontrada por um aluno para a atividade 2 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Ainda, nesta atividade, 2 alunos cometeram erros no cálculo da área em uma das figuras construídas e, outros 4 alunos realizaram somente a primeira parte da atividade, referente a primeira escolha. Acredita-se que estes não tenham compreendido que deveriam escolher dois valores distintos para o perímetro.

Os alunos participaram ativamente no momento de socialização desta atividade, tendo interesse em mostrar para os colegas suas resoluções. Neste momento, foram construídas diversas figuras e determinadas suas áreas, seguindo as sugestões que eles davam oralmente. Concomitantemente, os conceitos de perímetro e área foram retomados. No final, os alunos foram questionados se duas figuras possuírem a mesma área seus perímetros também seriam iguais e, se o contrário valeria. Eles responderam que não, diante disso, a professora afirmou que essas duas grandezas são independentes uma da outra.

Destaca-se nestas atividades as características relevantes proporcionadas através do uso do *software* GeoGebra, pois com simples deslocamentos e rotações dos objetos geométricos disponibilizados foi possível potencializar inúmeros tratamentos figurais, que segundo Duval (2011), é um dos aspectos fundamentais propiciados com o uso de *softwares.* Ainda, ressalta-se agilidade de realizar esses tratamentos que se fossem feitos com lápis e papel demandaria, possivelmente, um período de tempo maior.

ATIVIDADES 4 E 6

Essas duas atividades apresentam características semelhantes, ambas exploram perímetro e área, porém, a partir de quadriláteros diferentes. Ressalta-se ainda que, cada uma, demandava que os alunos realizassem investigações na busca por relações existentes entre a medida dos lados dessas figuras com a medida de seu perímetro, bem como, com a sua área.

Como essas atividades não foram realizadas no mesmo dia houve um número diferente de alunos que as resolveram, 27 e 25 alunos, respectivamente.

Conforme descrito na análise *a priori* da atividade 4 foi solicitado que os alunos construíssem, em uma malha quadrangular, 4 quadrados diferentes e identificassem o valor do perímetro e da área de cada um, conforme mostra a figura 152.

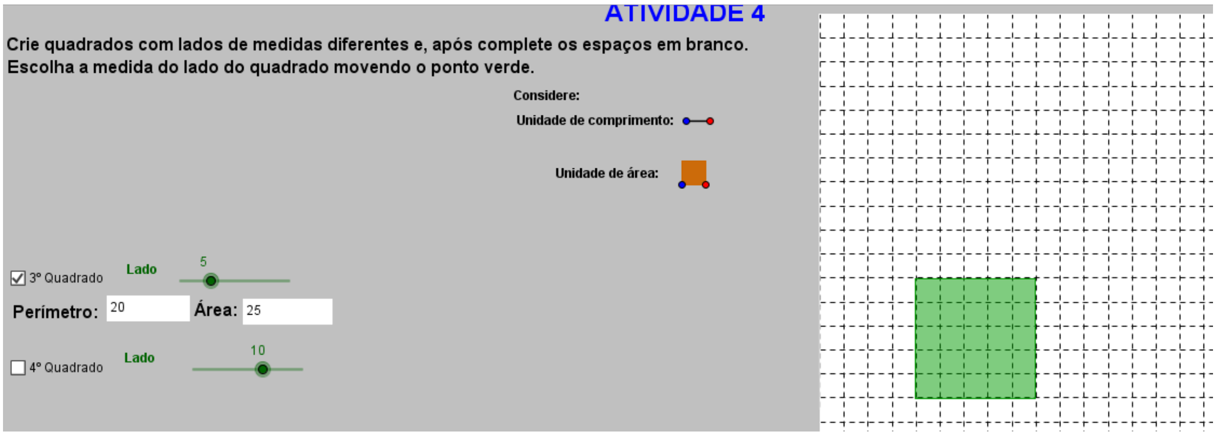


Figura 152- Solução encontrada por um aluno para a atividade 4 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Ao analisar as respostas dos alunos referentes à determinação do valor do perímetro e da área dos quadrados que estes montaram, observou-se que a maioria, 20 alunos, resolveram corretamente todos os cálculos para obter a medida dessas grandezas. No apêndice G, figura 173, é mostrada a resolução de um aluno.

Ocorreram, também, 7 casos em que os alunos erraram pelo menos em uma de suas construções, os valores do perímetro e/ou área do quadrado. Sendo que, em 1 desses casos, acredita-se que o aluno tenha confundido as duas grandezas, perímetro e área. Acredita-se que isso deva ter ocorrido na fase em que estes observaram a relação da medida dos lados com a área do quadrado. Diante disso, realizaram o produto da medida dos lados, porém, erraram o valor desse produto. No apêndice G, nas figuras 174 e 175 encontram-se ilustrados 2 destes casos.

Quanto ao registro escrito solicitado no final da atividade que se referia às relações observadas entre a medida do lado do quadrado e seu perímetro e área, respectivamente, organizou-se, no quadro 23, a análise dos mesmos.

Quanto à relação entre a medida do lado do quadrado e o seu perímetro	
Nº de alunos que acertaram	Respostas mais frequentes
23	• *"fazendo o lado vezes 4 para dar o perímetro correto";* • *"o perímetro é 4 vezes o lado";* • *"o perímetro é lado vezes quatro";* • *"o perímetro é multiplicar o número do lado por quatro";* • *"temos que multiplicar o lado por 4 para dar o perímetro";* • *"Sim, pois para calcular o perímetro é só fazer o determinado número × 4 " .* • *"fazer vezes 4 para conseguir o número do perímetro";*
Nº de alunos que erraram	Respostas mais frequentes
3	• *"lado vezes o perímetro";* • *"precisa quatro perímetro para dar uma área";* •*"o perímetro é a multiplicação dos lados";*
Quanto à relação entre a medida do lado do quadrado e a sua área	
Nº de alunos que acertaram	Respostas mais frequentes
23	• *"a área faz lado vezes lado";* •*"tem que multiplicar o lado por ele mesmo";* • *"a área é o lado multiplicado por ele mesmo";* • *"área é lado vezes lado";* • *"a área é igual ao número que eu escolhi vezes o número que eu escolhi";* • *"fazendo o lado vezes o lado".*
Nº de alunos que erraram	Respostas mais frequentes
3	• *"lado vezes a área";* • *"é sempre o lado vezes o perímetro";* • *"não sei".*

Quadro 23- Respostas dos alunos referentes aos questionamentos propostos no final da atividade 4 do bloco 2.

Nas duas respostas seguintes acredita-se que os alunos não compreenderam o questionamento proposto. Ou, ainda, não conseguiram perceber a relação existente entre a medida dos lados com o cálculo do perímetro. Na última resposta, acredita-se que 1 aluno confundiu o significado entre perímetro e área e, apenas 1 aluno, respondeu que não percebeu nenhuma relação entre a medida do lado do quadrado com o seu perímetro.

Em relação às respostas corretas apresentadas ao segundo questionamento, observou-se que vários alunos usaram a palavra "*lado*", ao invés de, "*medida do lado*". Assim como, na expressão "*número que eu escolhi*" esta, também, se refere a "*medida do lado*".

Além disso, observou-se que em algumas dessas respostas estes compreenderam a relação envolvida, mas não designaram todos os objetos geométricos para formar a frase, isto é, não efetuaram a operação de enunciação completa designada por Duval (2011). Esta enunciação seria elaborada a partir da observação da medida dos lados com os respectivos valores obtidos para seu perímetro e área.

Na resposta, "*fazendo o lado vezes o lado*", o aluno descreve a operação de multiplicação, porém, não conclui que o produto é igual a área. Nas respostas em que fazem menção a "*determinado número*" e "*ele*" não designam o objeto geométrico relacionado.

A atividade 6 é mostrada na figura 153, a partir da resposta correta fornecida por 1 aluno.

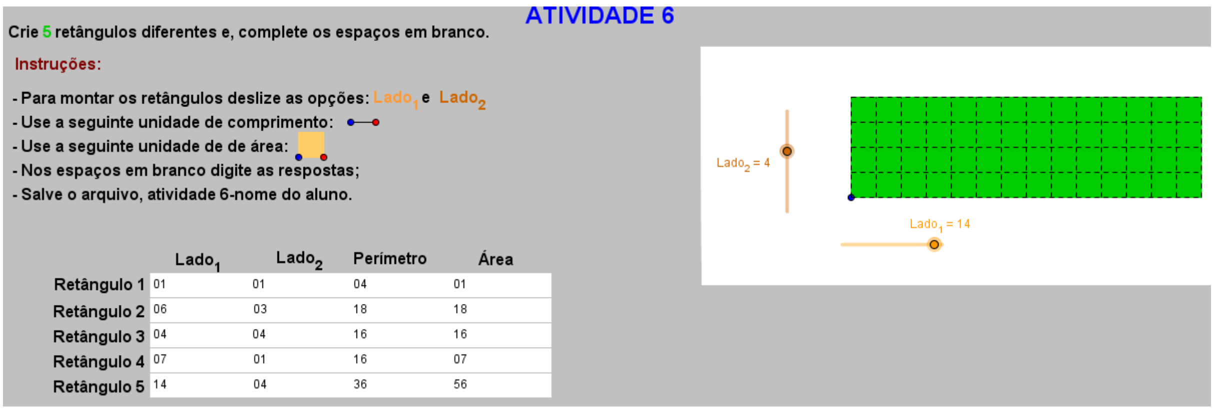


Figura 153- Solução encontrada por um aluno para a atividade 6 do bloco2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

O quadro 24 apresenta algumas considerações sobre as respostas obtidas para o perímetro e área dos 5 retângulos construídos.

Levantamento das respostas obtidas	Número de alunos
Acertaram todos os cálculos	16
Erros pontuais em pelo menos um cálculo para obter o perímetro e/ou área	6
Erraram o cálculo do perímetro de todos retângulos construídos.	2
Resolveu parte da atividade e deixou o resto em branco.	1

Quadro 24- Considerações sobre as respostas dos alunos referentes aos questionamentos propostos no final da atividade 6 do bloco 2.

Quanto aos alunos que cometeram erros pontuais em pelo menos um cálculo para obter o perímetro e/ou área, acredita-se que isso ocorreu por falta de atenção. Em relação aos que erraram o cálculo do perímetro de todos retângulos construídos, não foi possível identificar o que os levou ao erro.

Em relação ao registro escrito, solicitado no final desta atividade que se referia às relações observadas entre a medida dos lados do retângulo e seu perímetro e área respectivamente, organizou-se no quadro 35 a análise dos mesmos que está disponível no apêndice H.

Com base nisso e, também, com as observações realizadas durante o desenvolvimento das atividades percebeu-se que os alunos demostraram dificuldade em responder ao primeiro questionamento, havendo somente uma resposta considerada satisfatória. Em relação ao segundo questionamento, observou-se um número maior de respostas corretas. No entanto, percebe-se que, destes, 10 alunos, compreenderam a relação existente entre a medida dos lados do retângulo com o valor da área do mesmo. Pois, nas frases elaboradas como resposta, indicaram a operação que deveria ser feita entre a medida desses lados. Porém, não concluíram que o resultado corresponderia ao valor da área dos retângulos.

O momento de socialização destas atividades foi fundamental para a construção conceitual de perímetro e área e também, para a distinção entre essas duas grandezas. Também, durante esse momento foram retomadas algumas propriedades e elementos dos quadriláteros presentes. Durante a discussão coletiva com a turma, foram construídos no recurso, através da atividade 4, quadrados distintos e determinados seus respectivos perímetros e áreas. Em seguida, leu-se em voz alta o primeiro questionamento proposto na atividade. Imediatamente, 1 aluno respondeu que "*o perímetro do quadrado é 4 vezes o lado*". A partir de sua resposta foi dito que era essa enunciação que deveria ser observada que, em outras palavras, seria o mesmo que afirmar que: "*para obter o perímetro de um quadrado qualquer basta multiplicar por 4 a medida de seu lado*". De forma semelhante, foi analisado o segundo questionamento. Intuitivamente, foi estabelecido que, para o cálculo da área do quadrado bastaria multiplicar a medida do lado por ela mesma, isto é, corresponde a medida do lado ao quadrado.

Na discussão da atividade 6 foram construídos retângulos de medidas diferentes. Sendo que, no último, foi montado um quadrado de lado com 4 unidades de comprimento. Diante disso, um aluno questionou: *"professora, mas não é para construir retângulo, você construí um quadrado!"* Então fora respondido com outro questionamento: *"Mas o quadrado não é um retângulo?"* Isto gerou muitas dúvidas nos alunos, uns respondiam que sim, outros, que não. Após, foram retomadas as definições de retângulo e quadrado.

Ainda, durante a socialização foram exploradas as duas questões propostas. A primeira referente a relação existente entre as medidas dos lados do retângulo e o valor do perímetro. Sendo que, já havia sido observado durante o desenvolvimento da atividade que vários alunos não haviam percebido nenhuma relação entre essas grandezas. Nesse momento, isso foi confirmado, pois um número expressivo de alunos disse que não haviam encontrado nenhuma relação. O único aluno que respondeu corretamente no registro por escrito disse: "*Para obter o perímetro é só somar os lados 1 e 2 e fazer vezes 2.*". Em seguida, foi questionado se essa afirmação do colega era válida para qualquer retângulo, sendo retomados os dados que haviam sido calculados nas diferentes construções realizadas. Assim, a professora concluiu, então, que o perímetro de um retângulo qualquer é o dobro da soma da medida dos seus dois lados distintos. Ainda, alguns alunos comentaram que achavam mais fácil adicionar a medida dos quatro lados do retângulo para obter o perímetro. O que fora indicado que seriam formas equivalentes.

Em relação ao segundo questionamento, esse pareceu mais perceptível aos alunos, concluindo-se que, para determinar a área do retângulo bastaria multiplicar a medida dos lados distintos.

Considerou-se significativa essa atividade para a compreensão dos alunos acerca dos cálculos para se determinar o valor do perímetro e da área de quadriláteros, do tipo quadrados e retângulos. Embora, alguns tenham apresentado dificuldades em responder no registro de língua natural as relações observadas entre, a medida dos lados desses quadriláteros com os respectivos cálculos para determinar seu perímetro e área.

ATIVIDADE 7 E 8

O que diferencia as atividade 7 e 8 é que, na primeira os alunos deveriam fixar valores para o perímetro, montando retângulos que atendessem a esse valor, e após isso, teriam que determinar o valor de suas áreas. Na segunda, ocorre o contrário, são fixados valores para a área e deve-se calcular o perímetro de diferentes retângulos.

Existe uma grande variedade de retângulos que podem ser construídos com o apoio das ferramentas criadas no GeoGebra. Diante disso, apresentam-se algumas características presentes nas soluções dos alunos.

Os resultados foram considerados satisfatórios, pois 18 alunos realizaram de forma correta a primeira parte da atividade 7. Nesta, era necessário que os alunos fixassem 2 valores para o perímetro e, em cada um deles, montassem 2 diferentes retângulos. Após, deveriam calcular suas áreas. Destaca-se que 8 desses alunos, em uma de suas escolhas, construíram um quadrado. Acredita-se que isso aconteceu em consequência da socialização realizada na atividade anterior.

Também, dentre as respostas corretas ocorreram 6 casos em que foi considerado, em pelo menos uma das suas construções, como retângulos diferentes os que possuíam as mesmas dimensões, porém em posições diferentes, conforme ilustrado na figura 154.

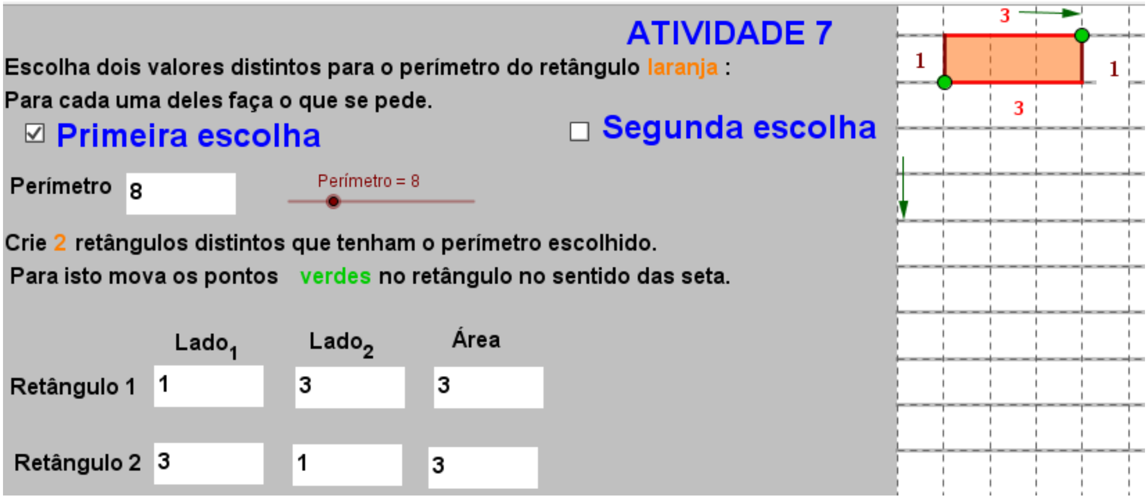


Figura 154- Solução encontrada por um aluno para a atividade 7 do bloco2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Nas demais respostas em que ocorreu algum tipo de erro, vale destacar que 3 alunos, embora construíssem retângulos que atendessem ao valor fixado ao perímetro, em uma das escolhas erraram o valor da área de um deles. Acredita-se que, isso ocorreu por erro no produto da medida entre os lados, ou na contagem das unidades quadradas. Ainda, 2 alunos fixaram um valor para o perímetro, porém, em uma de suas construções, o retângulo não atendeu a esse valor. Também, vale destacar que, 2 alunos não realizaram toda a atividade.

Em relação a segunda parte da atividade que propõe o questionamento: "*A partir das construções, você consegue observar alguma relação entre os valores de perímetro e área? Justifique.*"

Novamente, somente uma resposta foi considerada satisfatória: "*Não. Quando escolhemos o perímetro nem sempre temos a mesma área.*".

No entanto, acredita-se que outro aluno tenha verificado que, para o mesmo valor de perímetro poderia existir retângulos com áreas diferentes. Mas, não conseguiu fazer uma enunciação completa disso, sua resposta foi a seguinte: "*Não vai dar a mesma.*".

Nesta parte da atividade, 18 alunos responderam que não observaram nenhuma relação entre perímetro e área e não justificaram.

Também, houve 3 alunos que responderam incorretamente. Sendo que, pelas suas respostas entende-se que não compreenderam o questionamento e relacionaram a medida dos lados com a medida da área, e não com o perímetro. Suas respostas foram: *"para ser mais rápido eu fiz o de cima ou o de baixo vezes o do lado"; "sim. O lado 1 vezes o lado 2 é o valor da área"; "lado 1 vezes lado 2 dá a área".*

Mais 2 casos diferentes ocorreram, um deles deixou em branco e o outro, construiu retângulos com áreas resultando somente em valores pares, concluindo o seguinte: " *Sim. Os dois são números pares".*

Na atividade 8 diminuiu o índice de acertos em relação a atividade anterior, apenas 12 alunos realizaram corretamente a primeira parte da atividade. Nesta também, alguns criaram quadrados considerando como diferentes retângulos com mesmas dimensões, porém, em posições diferentes. Ressalta-se que, entre esses, apenas um realizou dessa forma ambas as atividades.

Além disso, 4 alunos, em uma das escolhas fixadas para a área, construíram pelo menos um retângulo que não satisfazia esse valor. Mas calcularam corretamente os perímetros desses retângulos. Na figura 155 é ilustrado este caso.

.

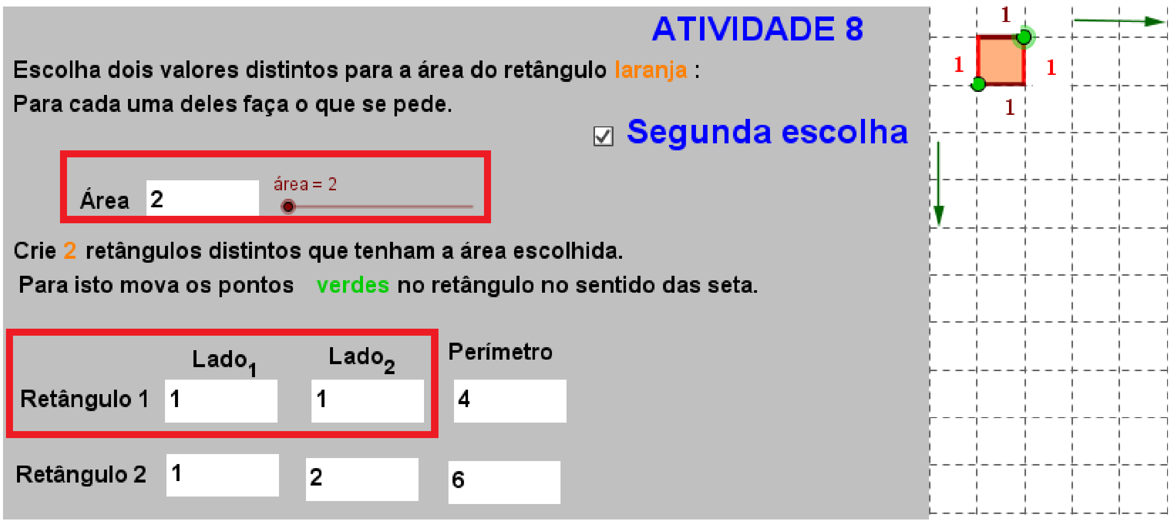


Figura 155- Solução encontrada por um aluno para atividade 8 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Também, verificou-se que, 5 alunos, determinaram o perímetro errado em uma das quatro construções. Sendo que, 2 confundiram os conceitos de perímetro e área e, outros 2 alunos, resolveram apenas uma parte da atividade.

Em relação ao questionamento proposto no final da atividade, novamente, apenas uma resposta atingiu o objetivo esperado. Salienta-se que, não foi o mesmo aluno que acertou a atividade anterior. A resposta dada foi: "*Não possui relação entre perímetro e área por que quando fixo a área encontro valores diferentes para o perímetro.*".

Acredita-se que o outro aluno também tenha entendido. Porém, não conseguiu realizar uma enunciação completa, pois escreveu: "*Não existe relação porque dá sempre valores diferentes.*".

Dos 25 alunos, 16 responderam que não observaram relação entre a área e o perímetro.

Ainda, 2 alunos responderam de forma incorreta, pois compararam a medida dos lados com a área. Ressalta-se que são os mesmos alunos que interpretaram dessa forma o questionamento da atividade anterior. Estes responderam: "*Sim, multiplicando o lado 1 com o lado 2 dá a área.*".

Nesta etapa, 2 casos chamaram atenção, pois suas respostas, de acordo com as escolhas e construções, resultaram em uma interpretação diferente do esperado, induzindo-os ao erro. Em um desses casos, o aluno construiu nas duas escolhas, retângulos com mesma dimensão, porém, em posições diferentes. O outro construiu, nas duas escolhas, retângulos com perímetros e áreas possuindo valores pares. Assim, responderam, respectivamente: "*Quando deixamos a mesma área o perímetro dá sempre o mesmo.*" e *"Os dois são pares".*

Novamente, o momento de socialização foi fundamental para sistematização dos assuntos envolvidos. Na ocasião foi salientada a distinção entre perímetro e área. Bem como, os procedimentos de cálculos para obtenção dessas grandezas. A partir da fala dos alunos foi observado que a maioria deles havia assimilado o processo de multiplicar a medida de dois lados consecutivos para obter o valor da área do polígono em questão. Em conjunto foi resolvida a atividade 7. Inicialmente, escolheu o valor 8 para o primeiro perímetro, montando-se 2 retângulos distintos e calculando-se o valor de suas áreas. Nesse momento, alguns alunos comentaram que, não era possível construir retângulos com perímetros ímpares. Então, foi escolhido na segunda construção, o valor 15 para o perímetro. Sendo perguntado aos alunos: "*Que medida devem ter os lados do retângulo para atender isso?*". Algumas respostas foram dadas e, ao realizar a atividade no recurso, utilizando-se a representação figural com base nestas respostas, estes puderam observar que não eram adequadas. Assim, puderam concluir que não poderiam, dentre as possibilidades disponíveis no recurso, escolher valores ímpares. Alguns deles disseram que já haviam verificado isso durante a atividade, outros se mostraram surpresos.

O próximo procedimento seria responder ao questionamento proposto no final da atividade. Mas como havia sido percebida a dificuldade em respondê-lo, o mesmo foi reformulado: "*Se dois ou mais retângulos possuem o mesmo perímetro, suas áreas terão a mesma medida?*".

Dessa forma, a maioria dos alunos respondeu que "*não*". Nesse momento foi lido o questionamento proposto na atividade. Alguns disseram que haviam percebido que não tinha relação entre o perímetro e a área. Mas que não souberam justificar por escrito, outros disseram que não tinham visto que precisava justificar. Isso reforça as colocações de Duval (2011), quanto a necessidade de reconhecer a língua natural como um registro. Ainda, proporcionar atividades em que os alunos façam o uso desse registro. Também, mostra na prática, o que Duval (2011) afirma sobre as operações discursivas, que elas estão relacionadas ao domínio da língua e a capacidade de designar muitas coisas com as palavras de que se dispõem. Assim, acredita-se que a maioria dos alunos compreendeu o questionamento proposto, porém, não souberam formular uma resposta por meio de uma frase completa. A socialização da atividade 8 foi realizada de forma semelhante a da atividade 7. Ressalta-se que, embora tenham sido observados, nas construções de alguns alunos, retângulos com mesmas dimensões, porém, em posições diferentes, nesse momento não foi mencionado nada a respeito, deixando-se para abordar esta questão na próxima atividade.

ATIVIDADE 9

Esta atividade visa a exploração de perímetro e área de figuras planas antes e após transformações isométricas (translação, rotação e reflexão).

Inicialmente, analisam-se as medidas encontradas pelos alunos para perímetro e área das duas figuras disponibilizadas na atividade.

Dos 28 alunos que realizaram a atividade, destes 13 responderam corretamente o valor do perímetro e da área das duas figuras, conforme ilustrado na figura 156.

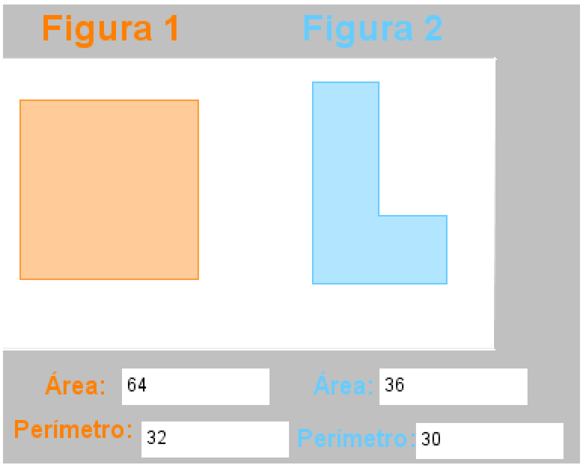


Figura 156- Solução encontrada por um aluno para a atividade 9 do bloco2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Os erros cometidos pelos alunos, atribuídos aos valores envolvendo perímetro e área estão descritos no quadro 25.

Descrição dos erros	Nº de alunos
Perímetro da "figura 1"	1
Perímetro da "figura 2"	5
Perímetro e área da "figura 2"	2
Área da "figura 1"	1
Área da "figura 1" e perímetros das "figuras 1 e 2"	2
Áreas das "figuras 1 e 2" e perímetro da "figura 2"	1
Área da "figura 1" e perímetro da "figura 2"	1
Perímetros das figuras "1 e 2"	1
Perímetro e área das duas figuras	1

Quadro 25- Considerações sobre as respostas dos alunos referentes a atividade 9 do bloco 2.

Um fato chamou atenção, embora ocorressem esses erros, todos os alunos encontraram os mesmos valores para o perímetro e área das figuras disponibilizadas, antes e depois das transformações isométricas. Também, durante a realização desta atividade, foi observado que a maioria deles determinou o perímetro e área, no primeiro momento da atividade, utilizando procedimentos de cálculos. Na exploração de translação, rotação e reflexão eles já concluíram que o perímetro e a área se manteriam inalterados.

Quanto às respostas dadas pelos alunos em relação ao questionamento: "*Após essa a exploração o que você pode concluir em relação ao perímetro e área das figuras?".*

A partir da análise de suas respostas, considerou-se que foi atingido o objetivo da atividade. O que diferiu nas respostas dos alunos foi que, alguns elaboraram frases mais detalhadas para suas respostas do que outros, isto é, utilizaram mais designações de objetos e terminologias envolvendo os conceitos geométricos presentes nesta atividade. Para ilustrar isso, foram escolhidas duas respostas em que foi possível verificar que eles haviam compreendido que os valores do perímetro e da área das figuras permanecem inalterados, após as transformações isométricas, porém, foram escritas de formas diferentes. Indica-se: *"A área e o perímetro permanecem com o mesmo valor."* e *"Mesmo que você mova ou gire as figuras elas ficarão com o mesmo resultado de perímetro e de área.".*

No momento da socialização foi resolvida a atividade. Após, foi retomada a atividade 7 lendo-se novamente o seu enunciado. Lembrando que nesta atividade era solicitado a construção de 2 retângulos diferentes, após ser fixado um valor para o perímetro. Então foram montados 2 retângulos com mesmas dimensões, dispostos em posições diferentes na tela do computador e questionando-os se esses retângulos eram diferentes. Alguns responderam que não, que eles apenas estavam em outra posição. Nesse instante um aluno disse que havia construído dessa forma sua atividade, e que somente agora tinha percebido isso. Entende-se como relevante o desenvolvimento da atividade 9 para o aprendizado dos alunos em relação a disposição das figuras no plano.

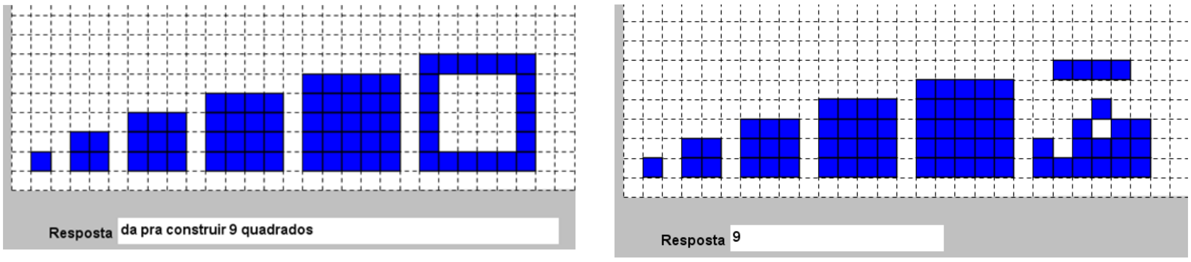
ATIVIDADE 5 E 10

Essas atividades procuram, a partir dos subsídios fornecidos nas atividades anteriores, realizar a conversão do registro língua natural para o figural. Paralelamente a isso, serem feitos tratamentos numéricos com a finalidade de se resolver situações-problemas propostas.

Inicialmente, os alunos realizaram uma leitura individual do enunciado da atividade 5. Entretanto, a maioria destes não conseguiu compreender o que estava sendo solicitado, havendo a necessidade de realizar a leitura em voz alta do enunciado da mesma. Além disso, foi necessário exemplificar uma situação de resolução. Dessa forma montaram-se alguns quadrados na área destinada e, ainda, foi chamada a atenção quanto as exigências colocadas no problema. Entre elas, a criação de diferentes quadrados e também a necessidade de serem montados o máximo possível de quadrados com 320 unidades quadradas.

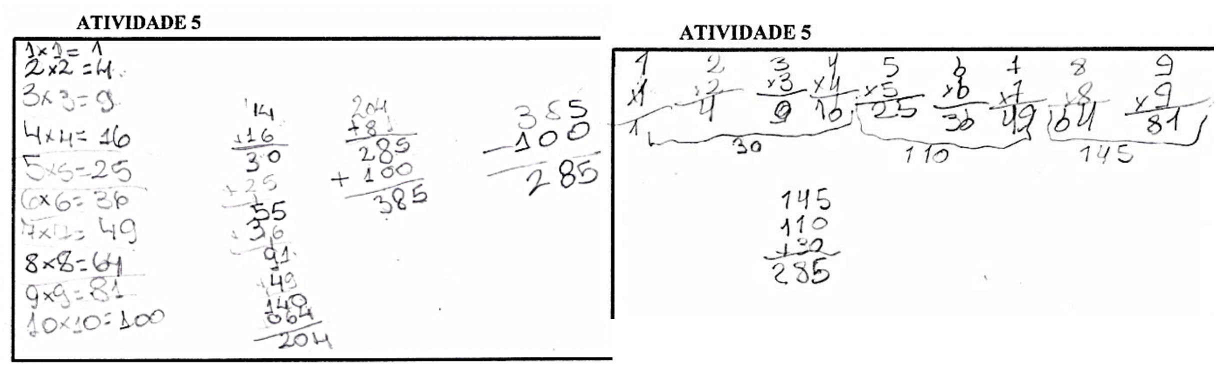
Mesmo assim, alguns alunos ainda não haviam compreendido o que era para fazer. Diante disso, foi solicitado que lessem novamente, com atenção, o enunciado e tentassem resolver. Mesmo assim, 3 alunos não conseguiram realizar a atividade, respondendo na ficha impressa que não haviam entendido.

Somente 8 alunos resolveram corretamente a atividade, realizando a conversão do registro língua natural para o registro figural e, também, os cálculos corretos para obtenção da solução do problema. Nesta descrição optou-se por apresentar as respostas obtidas por 2 desses alunos, sendo que as imagens da figura 157 correspondem as representações figurais elaboradas por cada um e na figura 158 são apresentados os registros numéricos que conduzira-os a obter a solução do problema.



(a) aluno A (b) aluno B

Figura 157- Representações figurais construídas por dois alunos referente a atividade 5 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.



(a) aluno A (b) aluno B

Figura 158- Registros numéricos elaborados por dois alunos referente a atividade 5 do bloco2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Dentre os alunos que realizaram a atividade, 6 destes responderam corretamente que, no máximo 9 quadrados poderiam ser montados com 320 unidades quadradas. Mas erraram parte dos cálculos que os conduziram a essa solução, pois embora tenham determinado corretamente a área de 9 quadrados (com lados medindo de 1 a 9 unidades de comprimento), ao adicioná-las erraram a soma. Uma situação que ocorreu é apresentada na figura 159.

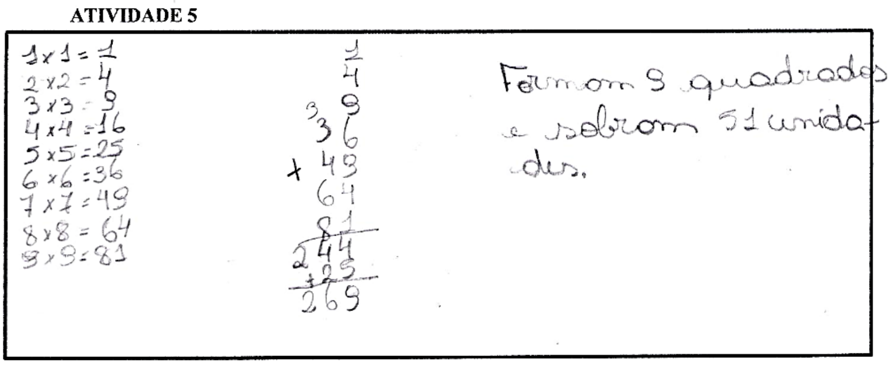


Figura 159- Registro numérico de um aluno referente a atividade 5 do bloco2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Também, houve um aluno que respondeu que eram 8 quadrados. Mesmo assim, acredita-se que ele tenha compreendido o procedimento numérico necessário para realizar a atividade, porém, se equivocou nos cálculos para obtenção da área de alguns dos quadrados construídos, como pode-se observar o seu registro escrito na figura 160. Por meio dos tratamentos numéricos realizados por ele é possível concluir que faltou o cálculo da área do quadrado de lado medindo 7 unidades de comprimento e, também, que cometeu um erro ao calcular a área do quadrado com 8 unidades de lado.

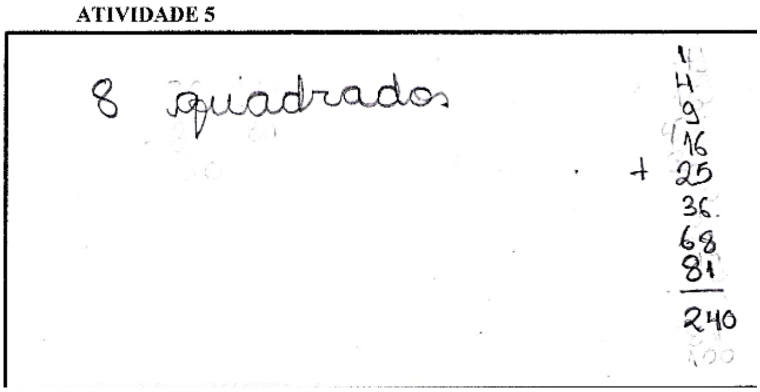
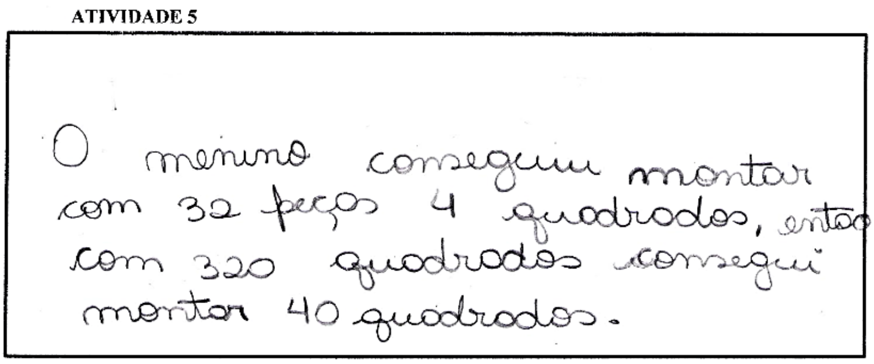
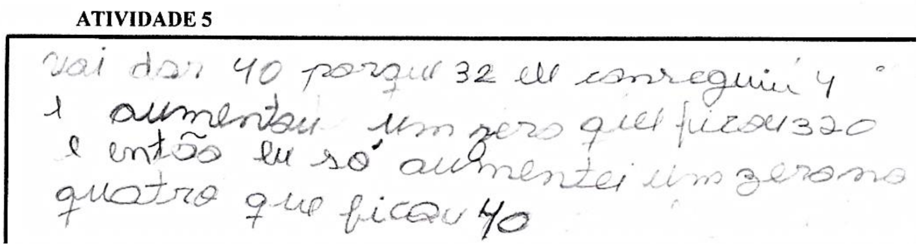


Figura 160- Registro numérico de um aluno referente a atividade 5do bloco2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Conforme já previsto na análise *a priori* desta atividade, alguns alunos, 5 no total, nem realizaram a representação figural, apenas justificaram suas respostas com base na falsa proporcionalidade existente entre os dados do problema. Na figura 161 são mostradas algumas destas respostas.



(a)



(b)

Figura 161- Registro escrito por um aluno referente a atividade 5 do bloco2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Para finalizar, outra resposta diferente das anteriores ocorreu, 2 alunos responderam que poderiam montar no máximo 10 quadrados diferentes utilizando 320 unidades quadradas. A figura 162 mostra o registro escrito de um desses alunos.

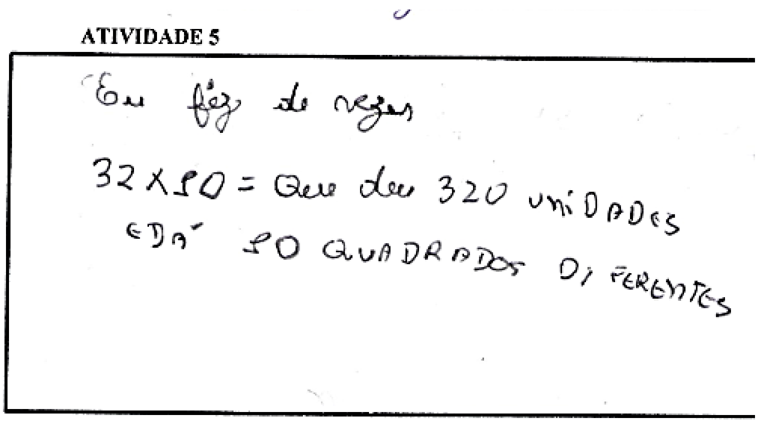
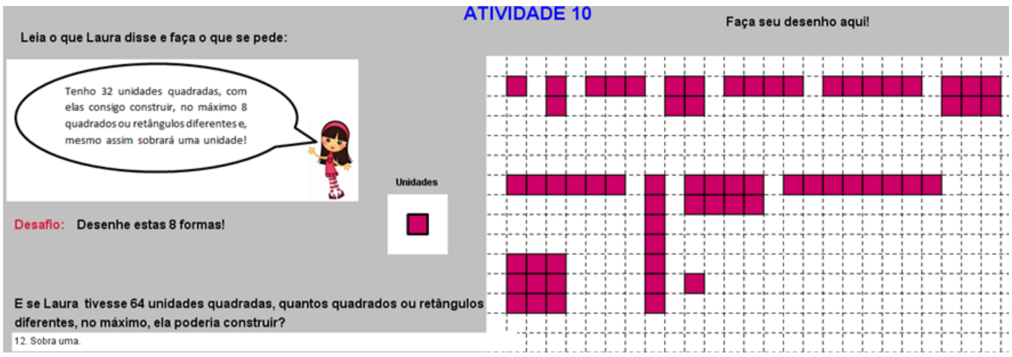
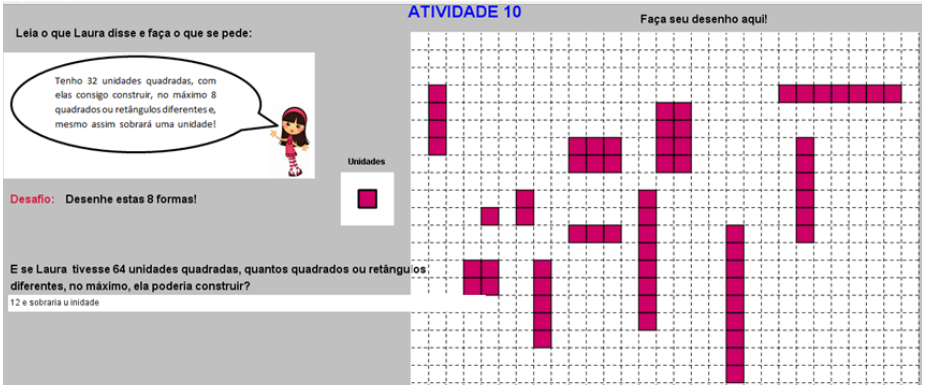


Figura 162- Registro escrito por um aluno referente a atividade 5 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

A atividade 10 também gerou, nos alunos, dificuldades de interpretação do enunciado, sendo que 3 destes não realizaram a atividade por não conseguir compreendê-la. Apenas 8 alunos dos 25 que a realizaram, fizeram corretamente o problema. Embora, tivessem a ficha impressa para resolverem os cálculos, caso sentissem necessidade, nenhum a utilizou. Acredita-se que isso tenha ocorrido pelo fato de que a situação proposta utilizava no máximo 64 unidades quadradas para compor a representação figural. Estas, ao contrário da atividade 5, estavam todas disponibilizadas na tela do computador. Assim, os alunos optaram por montar as figuras solicitadas e realizarem os procedimentos numéricos, na maioria dos casos, a partir da contagem uma a uma das unidades quadradas sem o uso do registro escrito fora do recurso computacional. Nas figuras 163 (a) e (b) apresentam-se algumas resoluções dos alunos que a responderam corretamente.



(a) Aluno F



(b) Aluno G

Figura 163- Soluções encontradas por dois alunos referente a atividade 10 do bloco 2.

Os demais alunos erraram ao resolver a atividade. Porém, foi difícil identificar os erros, pois não registraram nada na ficha impressa. Mas, ao observar diversas representações figurais construídas em seus arquivos, percebeu-se que um dos fatores que contribuiu para o erro está associado com a construção de retângulos e quadrados utilizando-se o mesmo número de unidades quadradas. Para ilustrar isso, na figura 164 é apresentada a resposta de um aluno que, quando o número de unidades adotado permite construir tanto um quadrado ou um retângulo, ele monta apenas um dos dois quadriláteros. A representação que está circulada foi salientada por ele para distinguir as peças que sobraram. Nesse caso, o aluno não construiu com o mesmo número de unidades quadradas os dois quadriláteros em questão.

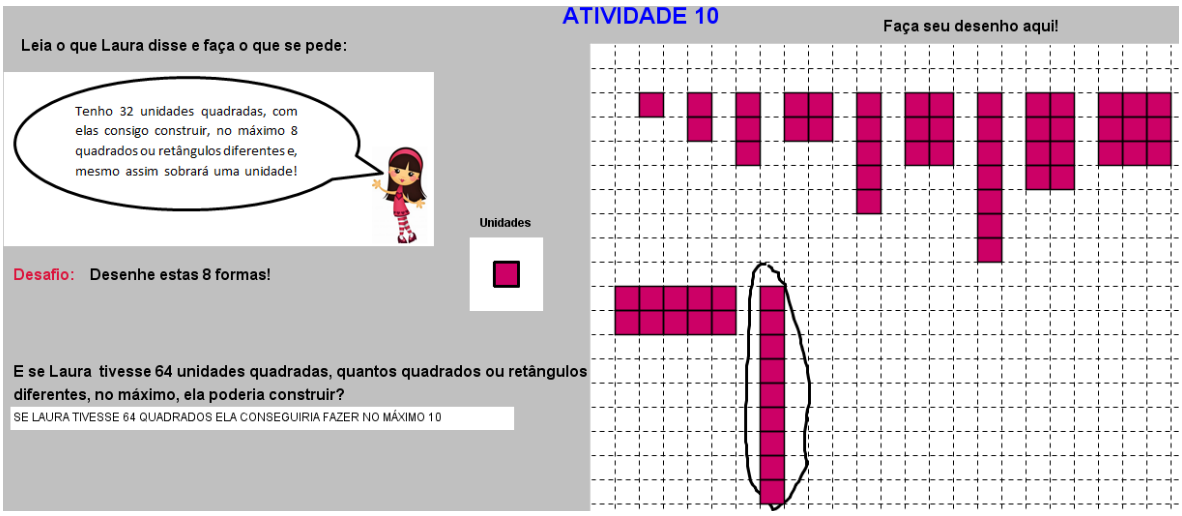


Figura 164- Solução encontrada de forma incorreta por um aluno referente a atividade 10 do bloco 2.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

Também ocorreram casos em que era possível montar dois retângulos com o mesmo número de unidades quadradas e, isso não foi percebido pelos alunos. Para ilustrar, na figura

165 é apresentada a representação figural de um aluno que não percebeu que poderia montar dois retângulos distintos utilizando 8 unidades quadradas.

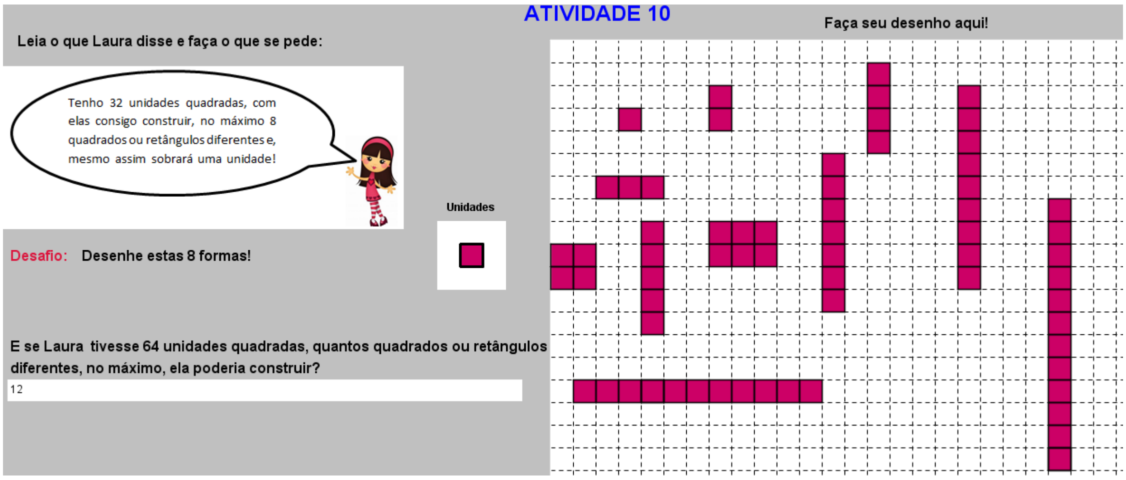


Figura 165- Solução encontrada de forma incorreta por um aluno referente a atividade 10 do bloco 2.

Como foi mencionado anteriormente, ambas as atividades foram de difícil compreensão para os alunos. Então, se buscou na teoria dos registros de representação semiótica explicações para tentar justificar isso. Segundo Duval (1986 apud JACOMELLI, 2006), existe um fator que deve ser considerado no processo de compreensão de textos, que consiste na distância existente entre a organização proposta ao conteúdo cognitivo do texto e a organização redacional. Sob essa ótica, o conteúdo cognitivo do texto nada mais é do que o conceito considerado pelo problema, o qual necessita do uso de uma representação e, é independente do que o texto mobiliza ou apresenta. A organização redacional relaciona-se com as variáveis redacionais. Estas são as que tornam o problema congruente ou não e, os problemas de não-congruência são os que apresentam maior dificuldade de compreensão.

Segundo Ferreira (2008) na teoria dos registros de representação semiótica, dois sistemas semióticos são considerados congruentes quando é preciso que haja uma correspondência semântica entre as unidades significantes, ou seja, é preciso que a representação terminal (representação de chegada) transpareça na representação de saída (representação de partida). Caso contrário, tem-se o fenômeno da não-congruência.

Assim, entende-se que os problemas propostos nas atividades 5 e 10 apresentem o fenômeno de não-congruência entre os registros utilizados. Uma vez que, apenas uma leitura superficial do enunciado não permitia que o aluno chegasse a solução dos problemas propostos, existindo a necessidade de tratamentos numéricos paralelos a conversão do registro língua natural para figural. Sendo que, esses tratamentos numéricos precisavam levar em consideração as propriedades dos quadriláteros presentes no enunciado da atividade.

Diante do exposto, ressalta-se a importância do momento de socialização dessas atividades, pois à medida que as atividades foram sendo retomadas e resolvidas no coletivo, vários alunos que não haviam compreendido o que as atividades solicitavam, foram identificando seus erros e acompanhando os procedimentos que os levariam a solução das mesmas. Ressalta-se também, que foram retomados alguns conceitos discutidos em atividades anteriores, entre eles, os procedimentos de cálculo de área de quadrados e retângulos.

4.3 Análise *a posteriori* das atividades do bloco 3

Antes dos alunos iniciarem as atividades do bloco 3 a professora mostrou uma animação elaborada por ela no GeoGebra, que reforçava o conceito de perímetro do quadrado e do retângulo. Isso se fez necessário, pois poucos alunos perceberam a relação existente entre a medida das dimensões do retângulo e do seu perímetro (atividade 7 do bloco 2). A descrição desta animação encontra-se detalhada no apêndice I.

ATIVIDADE 1 E 2

Optou-se por analisar em conjunto as resoluções dos alunos referentes a essas atividades, pois estas se complementam. Ambas exploram a área de figuras planas, sendo que na primeira atividade, através de uma situação problema, o aluno deveria determinar a área das figuras disponibilizadas através da contagem de unidades quadradas. Na segunda atividade, isso deveria ser realizado por meio da decomposição dessas figuras, seguidas da reconfiguração de suas partes elementares formando um retângulo. Sendo que, para o cálculo da área do retângulo se deve fazer uso do procedimento numérico explorado no bloco anterior.

Na atividade 1, todos os alunos determinaram corretamente a área das figuras da situação-problema proposta, isto é, indicando o valor numérico associado a mesma, 12. Os alunos apenas registraram o valor encontrado sem explicar o processo que os conduziu à solução, conforme ilustrada a resposta de um aluno na figura 166. No entanto, durante a resolução desta atividade foi observado que a maioria deles realizou a contagem uma a uma das unidades que cabiam em cada figura, chegando à resposta correta da área.

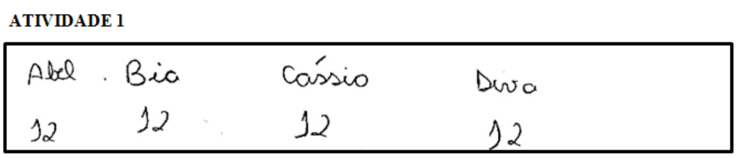


Figura 166- Resposta escrita por um aluno referente a atividade 1 do bloco 3.

Um fato interessante aconteceu no início desta atividade, um aluno indagou: "*Professora, não estou achando a caixa recortar?"* Então, foi dito a ele que, nesta atividade não havia essa opção. Mesmo assim, ele mostrou na tela do computador a decomposição que ele queria realizar, a fim de montar um retângulo para, após, calcular sua área. Nesse momento, foi perguntando a ele se conseguiria realizar esse processo mentalmente, e este afirmou que, sim. Diante disso, acredita-se que o mesmo tenha resolvido a atividade desta maneira.

Quanto ao registro língua natural, que deveria ser utilizado no final da atividade para responder ao questionamento: "*Você acha que Seu João distribuiu de forma justa os terrenos entre seus filhos? Justifique:",* 13 alunos conseguiram elaborar uma frase completa, ou seja, a função cognitiva apofântica, classificada por Duval (2011), foi mobilizada por eles. Salienta-se ainda que, utilizaram também a operação de designação do termo "área", embora o enunciado da atividade não o contemple. A seguir, mostram-se algumas das respostas dos alunos para este último questionamento: *"Seu João distribuiu de forma justa os terrenos para seus 4 filhos, pois a área é a mesma apenas a forma deles é diferente."; "Sim porque apesar da forma das figuras serem diferentes tem a mesma quantidade de área."* e *"Sim. Os terrenos só tem o formato diferente mas a área são todas iguais"; "Sim, pois todos tem a mesma área, não importa ter forma diferente."* e *"Sim porque deu 12 unidades de área em todos os terrenos.*

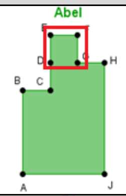
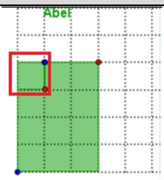
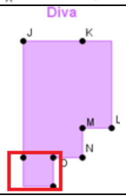
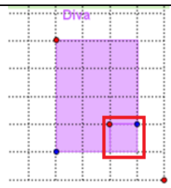
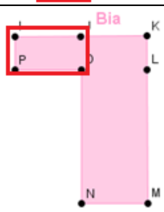
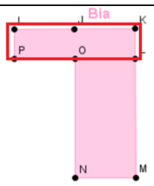
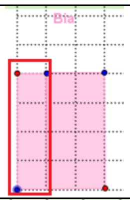
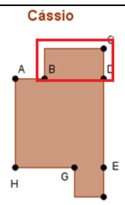
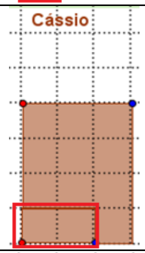
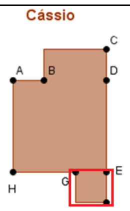
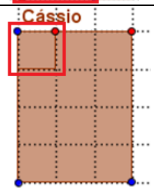
Outros 10 alunos, não utilizaram o termo "*área".* Em seu lugar, usaram as expressões *"mesmo tamanho"* ou "*mesma quantia"*, algumas frases elaboradas pelos alunos foram: "*Sim. Porque ele distribuiu os terrenos do mesmo tamanho para todos* e *"Sim, porque todos receberam a mesma quantia.".*

Os 5 alunos restantes, elaboraram respostas de forma incompleta, 3 deles responderam que "o *pai fez uma divisão justa.",* porém não justificaram e, outros 2, apenas colocaram o valor encontrado para área das figuras, ou seja, *12*.

Na atividade 2 era solicitado aos alunos recortarem cada figura disponibilizada, apenas uma vez e montarem um retângulo com partes elementares obtidas. Após isso, deveriam determinar suas áreas.

Analisam-se nessa atividade, as possibilidades de escolha para recortar as figuras que representam os terrenos dos filhos de seu João presente na situação-problema da atividade anterior. Sendo que, para as figuras que representam os terrenos de Abel e Diva existe somente uma forma de recortá-los, de acordo com as ferramentas criadas no recurso. Nessa etapa, todos os alunos realizaram com êxito o processo de divisão mereológica, seguido da reconfiguração das partes elementares obtidas, após o corte, em um retângulo, conforme quadro 26.

Quanto às figuras que representam os terrenos de Bia e Cássio, existiam em cada uma, duas possibilidades diferentes de recortá-las e realizar a reconfiguração que resultasse em um retângulo. Na realização dessa etapa ocorreu que, 23 alunos dos 28, fizeram tratamentos figurais utilizando uma dessas possibilidades e, 5 alunos, a outra.

Terreno	Figura de Partida	Reconfiguração obtida após a divisão mereológica
Abel		
Diva		
Bia		
		
Cássio		
		

Quadro 26- Reconfigurações obtidas pelos alunos após a divisão mereólogica das figuras disponibilizadas referente a atividade 2 do bloco 3.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

Quanto ao registro numérico, nenhum aluno registrou na ficha impressa o procedimento numérico utilizado para obter a área das figuras. No entanto, durante a realização da atividade foi observado que a maioria fez o produto da medida da base pela medida da altura do retângulo montado. Sendo que, alguns permaneceram com o processo de contagem uma a uma das unidades quadradas que compõem cada figura.

Em relação à resposta dos alunos referente ao questionamento "O que você observou entre as respostas desta atividade e da atividade anterior?", obteve-se um bom índice de acertos. Uma vez que, 21 alunos elaboraram frases alcançando o objetivo almejado através do uso da função apofântica no discurso língua natural. Algumas respostas dadas por eles foram:

- *"As áreas são iguais.";*
- *"Eu reparei que vai dar o mesmo resultado da área da atividade anterior.";*
- *"A mesma quantidade de terrenos para todos.";*
- *"Todos os terrenos tem a mesma área e mesmo cortando ficou igual.";*
- *"Que mesmo formando retângulo o tamanho dá área ficou igual.";*
- *"Não importa a forma, a área vai ser sempre a mesma";*
- *"Todos tem a mesma área só que os terrenos são diferentes.".*

Acredita-se também que, outros 5 alunos tenham percebido que nos dois processos explorados para obter a área das figuras, obtêm-se o mesmo valor. Mas, as frases elaboradas estão incompletas, pois não designam o termo "*área*" nem outra expressão para substituí-la. Além disso, colocaram o valor encontrado para a área das figuras, porém, não mencionaram a unidade de área. A seguir, apresentam-se duas respostas formuladas pelos alunos:

- *"Deram a resposta 12 nas duas atividades.";*
- *"Porque todos deram o mesmo resultado, ou seja, 12.".*

No questionamento feito, existiu apenas 1 aluno que deixou em branco e, outro, acredita-se que não tenha entendido o que era perguntado, pois respondeu: *"Formam um retângulo.".*

No momento de socialização, por meio da fala dos alunos, foi confirmado que estes haviam compreendido a atividade. Entendendo que, independente do processo escolhido para obtenção da área, seja a contagem das unidades quadradas, ou o produto das medidas da base pela altura da figura (retângulo), obtêm-se o mesmo valor.

ATIVIDADES 3 E 4

Essas atividades discutem o cálculo da área de figuras que não permitem uma contagem direta das unidades quadradas contidas nas mesmas. Há a necessidade de reconfiguração das figuras, por meio de sua decomposição e nova composição, resultando em figuras da forma quadrada ou retangular. O que as diferenciam é que na primeira atividade o aluno tinha a possibilidade de recortar, apenas uma vez, a figura e, na segunda atividade, a ferramenta “Recortar” não estava disponível, havendo a necessidade destes realizarem mentalmente esse processo decomposição e reconfiguração para obter a área das figuras. Além disso, é solicitado que marquem onde fariam o recorte nas figuras, caso existisse essa possibilidade.

Na atividade 3 com exceção de 3 alunos, os demais a resolveram corretamente. A figura 167 mostra a etapa final da atividade realizada por eles. Cabe relatar que, houve 2 alunos que ao resolverem a atividade disseram que não precisava recortar a “figura 1” para determinar sua área. Dessa forma, foi solicitado que registrassem na ficha impressa os procedimentos adotados para calcular a área. As respostas são mostradas nas figuras 168.

Com base, na análise das respostas dos alunos confirmou-se o que havia sido previsto na análise *a priori*, isto é, seguido das reconfigurações das figuras a partir de suas partes elementares, é possível obter o valor da área contando-se uma a uma as unidades quadradas, e juntando-se duas a duas as metades das unidades quadradas presentes na figura.

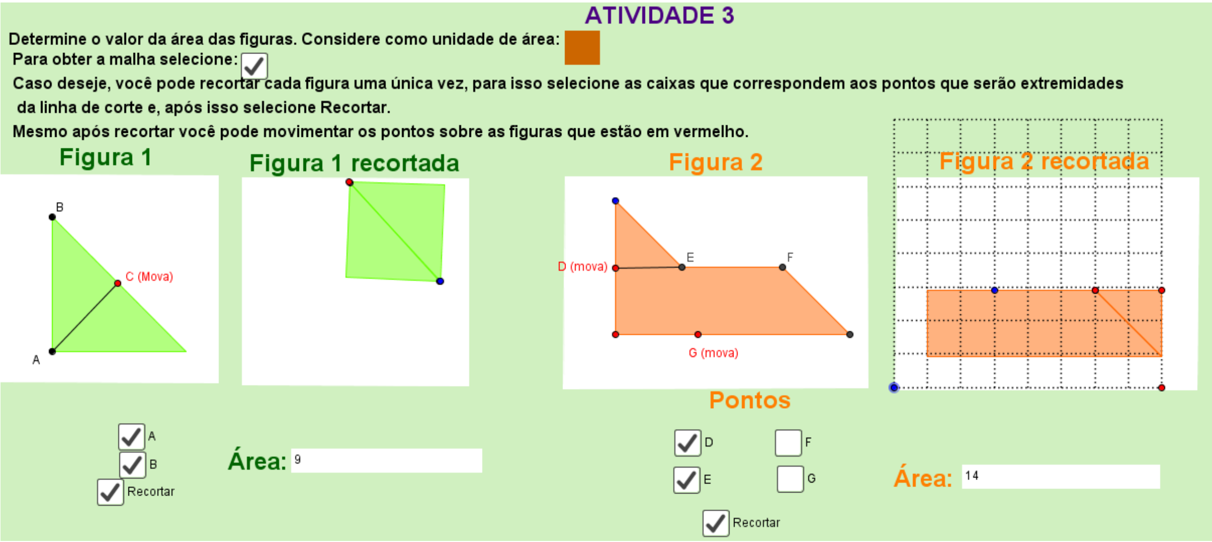
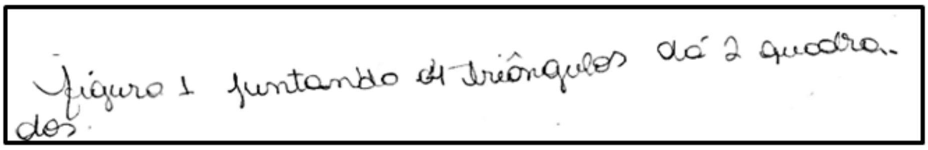


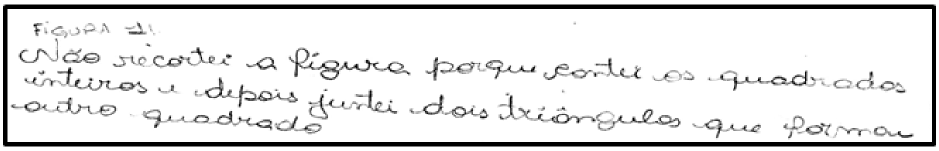
Figura 167- Solução encontrada por um aluno referente a atividade 3 do bloco 3.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

ATIVIDADE 3



(a)

ATIVIDADE 3



(b)

Figura 168- Respostas dadas por dois alunos, obtidas sem utilizar a opção “Recortar” disponível referente a atividade 3 do bloco 3.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Os 3 alunos, referidos anteriormente, acertaram a resolução de parte da atividade, isto é, chegaram somente a solução esperada para “figura 2”. No entanto, em relação a “figura 1”, 1 aluno deixou em branco e, outros 2 realizaram a decomposição e reconfiguração da figura de partida de forma correta, mas determinaram um valor diferente do esperado para a área desta figura. Para ambos os casos os alunos obtiveram 8 unidades quadradas. Acredita-se que tenham errado a contagem uma a uma as unidades quadradas da reconfiguração realizada.

Na atividade 4, 16 alunos determinaram corretamente as áreas das duas figuras disponibilizadas. Também marcaram na figura, com o apoio da ferramenta “caneta”, o traço ou, em alguns casos, a delimitação da parte da figura na qual entenderam que deveria ser realizado o corte. Para que, posteriormente, fosse realizada uma reconfiguração a fim de determinarem uma forma geométrica em que conheciam o procedimento para o cálculo da área. As figuras 169 e 170, mostram a tela final da atividade dos 2 alunos citados.

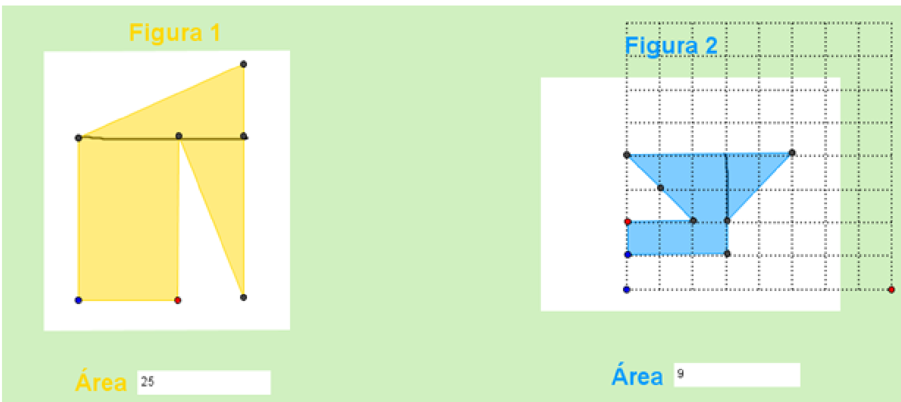


Figura 169- Tela final referente a atividade 4 do bloco 3, contendo a resolução feita pelo aluno A.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

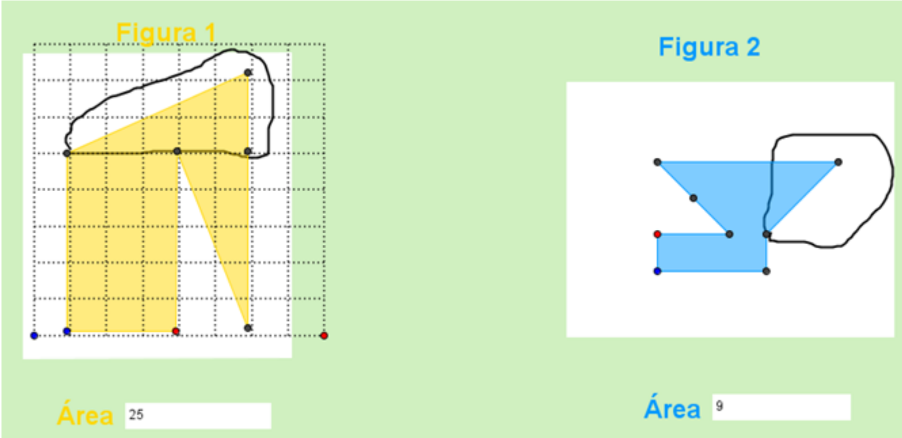


Figura 170- Tela final referente a atividade 4 do bloco 3, contendo a resolução feita pelo aluno B.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Em relação aos erros cometidos nesta atividade, observou-se que, 11 alunos acertaram a área e marcaram corretamente o traço onde fariam o recorte em uma das figuras disponibilizadas. No entanto, não conseguiram fazer isso na outra. Alguns escreveram no lugar destinado ao valor da área, a frase: *"não consegui."*. Também, tiveram outros que determinaram um valor errado para a área.

Por último, apenas 1 aluno errou os resultados para as áreas das 2 figuras disponibilizadas.

Destaca-se que, alguns alunos não registraram nada na ficha impressa, justificando que faziam as contas "de cabeça". Isso dificultou a análise *a posteriori* e validação dessas atividades para estes alunos, principalmente em relação aos erros cometidos nas operações presentes no registro numérico. Durante a socialização percebeu-se que os alunos já estavam familiarizados com o processo de decomposição e reconfiguração das partes elementares dessas figuras a fim de possibilitar o cálculo da área, assim como, do procedimento numérico utilizado. Dessa forma, foi possível observar na prática o que Duval (2011) afirma, quanto a importância do registro figural para o estudo de geometria. Pois, esse registro pode possibilitar de maneira mais direta e simples a solução de problemas do que em outros registros. Destacando entre as características do registro figural, que lhe confere um poder cognitivo particular, o valor intuitivo que as figuras podem apresentar. Em outras palavras, é aquilo que se vê por meio desse registro, ou ainda, o que a figura é capaz de mostrar por meio das apreensões figurais.

ATIVIDADES 5, 6 E 7

Ambas as atividades exploram a comparação da área entre o paralelogramo e o retângulo. Sendo que, na atividade 5, afim de determinar a área de um paralelogramo dado, o aluno deveria realizar a decomposição, seguida da reconfiguração das subfiguras obtidas, resultando em um retângulo, pois já deveria possuir conhecimentos suficientes para obter sua área. Na atividade 6, é possível comparar as medidas dos lados de um paralelogramo e de um retângulo. Por último, na atividade 7, por meio de uma animação elaborada no GeoGebra, quer se consolidar e possibilitar generalização do procedimento para a determinação da área de um paralelogramo qualquer, a partir da decomposição e reconfiguração deste paralelogramo em um retângulo.

Na atividade 5, somente 2 alunos não realizaram a decomposição e reconfiguração do paralelogramo em um retângulo, obtendo um valor errado para a área. Quanto à análise das escolhas, para os demais alunos, observou-se que apareceram as três possiblidades descritas na análise *a priori*, conforme mostra o quadro 27. Os alunos, independente da escolha, determinaram 40 unidades quadradas para a área do retângulo.

Pontos escolhidos para a linha de corte / reconfiguração obtida	Nº de alunos
	13
	9
	4

Quadro 27- Tipos diferentes de decomposição e reconfiguração do paralelogramo em um retângulo, construídos pelos alunos para a atividade 5 do bloco 3.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

Para surpresa, a maioria dos alunos, ao lerem o enunciado da atividade 6, disseram que não haviam entendido. Então foi necessário lê-lo em voz alta e orientá-los a compararem as medidas dos lados das duas figuras. Mesmo assim, 2 alunos deixaram em branco e, outros 2, escreveram: "N*ão entendi."* no espaço destinado a resposta.

Ainda, observou-se que 2 alunos compararam a área do retângulo e do paralelogramo, ao invés de compararem as dimensões dos lados como fora solicitado. Assim, responderam que: "*Observei que as figuras tem a mesma área apenas as formas são diferentes.".*

Também, relacionada a dificuldade de interpretação do enunciado, 1 aluno respondeu: "*As duas figuras tem o mesmo número de lados.".*

Observou-se, também, que 7 alunos haviam compreendido a atividade, porém, após realizarem a sobreposição (Figura 171) do paralelogramo no retângulo, concluíram que as figuras possuíam somente um lado com a mesma medida. As diferentes frases elaborados por eles foram: "*Possuem um lado igual."; "O lado de baixo é igual."* e *"Um lado é igual e os outros são diferentes.".*

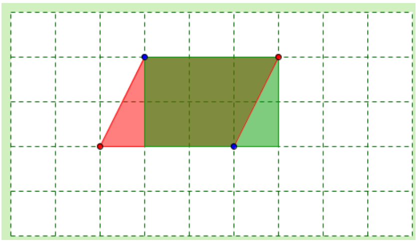
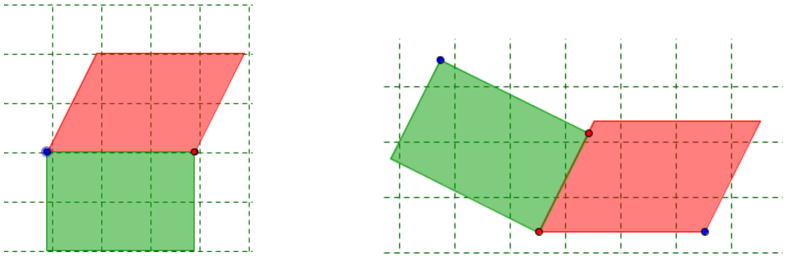


Figura 171- Sobreposição do retângulo no paralelogramo construída por um aluno referente a atividade 6 do bloco 3.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Outros 2 alunos, concluíram que as figuras possuem os lados iguais se comparados um a um, ou seja, acreditam que o lado menor do retângulo e do paralelogramo possuíam a mesma medida.

Os 12 alunos restantes responderam de acordo com o que se esperava para essa comparação Salienta-se que, a maioria deles chegou a solução com base em sucessivas justaposições entre retângulo e o paralelogramo (Figura 172). Como resposta estes alunos escreveram: *"Possuem dois lados iguais."* e *"Tem dois lados de mesmo tamanho."* E *"Observei um par de lados iguais.".*



(a) Justaposição 1 (b) Justaposição 2

Figura 172- Soluções encontradas por alguns alunos para comparar as regiões internas do retângulo e do paralelogramo por meio da justaposição entre eles referente a atividade 6 do bloco 3.
Fonte: Imagens do banco de dados da pesquisa.

Quanto a atividade 7, apenas 1 aluno respondeu que a figura formada era um quadrado, após o movimentar o recurso de “arraste”. Os demais responderam que era um retângulo. Também foi possível observar que os alunos moveram os vértices do paralelogramo em diferentes posições e realizaram repetidas vezes a reconfiguração proposta por meio do recurso de “arraste”.

Quanto as respostas referentes ao questionamento: “*A partir desta animação o que você conclui em relação as áreas do paralelogramo e do retângulo?”,* considerou-se de 23 alunos satisfatórias. Entende-se que, esses mobilizaram a função apofântica em relação ao registro língua natural, pois segundo Duval (2011), isso ocorre quando os alunos dizem algo dos objetos assim designados sob a forma de uma proposição ou frase. Apresentam-se as diferentes frases elaboradas:

- *“São iguais.”;*
- *“Os dois tem a mesma área.”;*
- *“A área do paralelogramo é a mesma do retângulo.”;*
- *“A área do paralelogramo sempre vai dar o número da área do retângulo.”;*
- *“Qualquer paralelogramo tem a mesma área do retângulo.”;*
- *“Sempre vão possuir a mesma área.”.*

Para os 5 alunos restantes, percebeu-se que embora tenham relacionado a decomposição do paralelogramo em um retângulo não utilizaram a designação do termo *“área”*. Para ilustrar, apresentam-se algumas dessas respostas:

- *“Conclui que se arrasta o triângulo amarelo o paralelogramo vira um retângulo.”;*
- *“Que sempre dá para formar um retângulo”.*

No momento de socialização destas atividades, usou-se a decomposição e reconfiguração solicitada na atividade 5 para discutir que, figuras que possuem a mesma área são chamadas de figuras com áreas equivalentes. Assim, concluindo que o paralelogramo dado e o retângulo obtido, após, a reconfiguração são exemplos disso. Também, realizaram-se diferentes formas de decomposição do paralelogramo e a posterior reconfiguração em um retângulo. Alguns alunos se mostraram surpresos por existir mais de uma maneira de fazer isso. Reforçando a estratégia de decomposição de uma figura a qual não se sabe o valor da área para a composição de outra, neste caso, um retângulo, que já se sabe como determinar sua área. Então, foram lembrados da atividade 8 do bloco 1, em que foi disponibilizado quebra-cabeças para compor um retângulo e um paralelogramo. Sendo que, um desses quebra-cabeças, o que continha 2 peças, era um exemplo de decomposição do paralelogramo que, com as peças obtidas se poderia construir um retângulo.

Durante a discussão coletiva da atividade 6 abordou-se a diferença entre o lado e a altura de um paralelogramo, pois é comum associar como altura o valor do lado do paralelogramo. Por fim, a discussão da atividade 7 sintetizou os conhecimentos disponibilizados nas duas atividades anteriores, fornecendo subsídios para o próximo ano letivo onde os alunos irão trabalhar nas deduções das fórmulas para o cálculo de área de figuras planas. Servindo, também, para a generalização de que uma região limitada por um paralelogramo qualquer pode ser reconfigurada em uma região retangular.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As considerações descritas aqui não tem a pretensão de serem entendidas como acabadas ou prontas. No entanto, podem ser vistas como resultado desta pesquisa partindo dos subsídios apresentados pela teoria dos registros de representação semiótica em conhecimentos relativos a perímetro e área de polígonos, quando desenvolvida a sequência de atividades com o apoio de um recurso computacional. Ressalta-se que, no processo de ensino e aprendizagem de qualquer conteúdo matemático envolvido, sempre existirão investigações e experiências que podem complementar e/ou aprimorar as pesquisas já realizadas. Justamente isso é que fortalece o saber, tornando-o cada vez mais sólido e abrangente.

Frente a isso, coloca-se como fundamental a necessidade de pesquisas ou estudos dos quais possam emergir práticas de ensino que favoreçam a aquisição de saberes relativos ao estudo de geometria, pois segundo diversas pesquisas, esta área do conhecimento matemático precisa estar mais presente nas aulas de matemática na educação básica. Particularmente, nesta pesquisa, isso foi efetivado a partir de uma experiência didática desenvolvida e aplicada junto a alunos do 7º ano do ensino fundamental, proporcionando-lhes por meio da exploração dos registros de representações semiótica, conhecimentos referentes a perímetro e área de polígonos.

Dessa forma, a sequência de atividades elaborada visou auxiliar e enriquecer o processo de desenvolvimento e aprendizagem dos alunos em relação a estes conteúdos, buscando-se durante a sua elaboração utilizar uma linguagem acessível e interessante aos alunos. Para isso, optou-se pela utilização de funcionalidades do *software* GeoGebra, uma vez que, foi possível perceber na maioria dos alunos, durante a etapa de realização das atividades, uma participação entusiasmada e engajada. Inclusive, cabe ressaltar que, alguns alunos que se mostravam, até então desmotivados durante as aulas mudaram sua postura, envolvendo-se ativamente na resolução das atividades propostas.

Ressalta-se também que, a partir dos resultados apresentados no capítulo 4, houve um aprimoramento dos processos visuais dos alunos em relação a exploração heurística das figuras geométricas, bem como, ao longo da resolução das atividades propostas, observou-se uma melhor desenvoltura na forma de interpretarem as representações geométricas.

O reflexo desse trabalho é percebido também neste ano letivo, pois permaneço como professora desses alunos, atualmente no 8º ano do ensino fundamental e os objetos de estudo desta pesquisa se fazem também presentes nos conteúdos programáticos do 8º ano, desta vez com outra abordagem, com ênfase no registro algébrico, por meio do uso de fórmulas para a determinação de áreas de polígonos. Nesse sentido, está sendo possível observar as conexões que os alunos têm estabelecido entre a abordagem dada na pesquisa e a que está sendo dada no atual conteúdo. Corroborando para isso, o fato de que o processo de reconfiguração de figuras planas por meio da decomposição e composição foi visto por eles de modo natural facilitando, neste momento, a dedução das fórmulas envolvendo o cálculo da área de algumas figuras planas.

Destaca-se a relevância profissional e acadêmica da pesquisa no que diz respeito aos conhecimentos técnicos e pedagógicos que puderam ser interligados no período de elaboração das atividades com o uso do *software* GeoGebra. Este tempo de pesquisa foi valioso, pois neste período, adquiriram-se novos conhecimentos referentes às potencialidades do recurso computacional quando integrado a uma prática docente, bem como, conhecimentos relativos à exploração de aspectos conceituais referentes ao objeto de pesquisa dentro de uma teoria de aprendizagem.

Reconheceu-se como fundamental para o desenvolvimento da pesquisa, as reflexões trazidas pela teoria dos registros de representação semiótica, a qual amparou teoricamente a metodologia da pesquisa baseada no desenvolvimento das etapas presentes na engenharia didática.

Através desta pesquisa foi possível verificar a possibilidade de articulação dessa teoria com o uso do *software* GeoGebra, pois as atividades elaboradas viabilizaram a coordenação de diferentes registros de representação semiótica. Também, salienta-se que durante a resolução e interpretação das atividades os alunos tiveram a possibilidade de explorar as características dos conceitos matemáticos perímetro e área de polígonos, associados a cada registro (língua natural, figural e numérico). Especificamente, esta pesquisa ao tratar do registro figural, considerou-se que o recurso desempenhou um papel importante no conjunto de atividades elaboradas, pois os alunos puderam conhecer várias possibilidades de representações figurais e investigá-las através do processo de visualização e tratamentos figurais. Ainda, de acordo com o objetivo de cada atividade, foi possível contemplar as diferentes apreensões e modo de ver as figuras, distinguidas por Duval (2005). Além disso, em algumas delas foi possível realizar uma integração dessas apreensões. Em relação a articulação desse registro com os outros, numérico e na língua natural, observou-se que o registro figural, representado no trabalho por meio dos recursos manipuláveis construídos no GeoGebra apoiou os processos cognitivos requeridos por esses.

A partir da análise dos resultados da aplicação da sequência de atividades constatou-se que foi viabilizado, aos alunos, conhecimentos relativos aos conceitos de perímetro e área de polígonos e suas medidas, com a utilização de um ambiente dinâmico sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica. Também, observou-se nos alunos uma autonomia crescente na realização das atividades, tanto relacionada ao conteúdo matemático, quanto ao uso do recurso computacional. Cabe destacar que, no primeiro bloco de atividades, foi desenvolvida uma abordagem de natureza geométrica para esses conteúdos favorecendo a atribuição de significados aos conceitos de perímetro e área de polígonos. Já, nos blocos posteriores, foi possível atribuir medidas numéricas a estas grandezas, uma vez fixadas as unidades de medida de cada uma e ainda, nesta etapa, também foi estendida a exploração de procedimentos numéricos para determinação da área de figuras poligonais do tipo quadrados e retângulos para que, a seguir fossem utilizadas para o cálculo da área de outros polígonos, por meio do processo de decomposição e reconfiguração de suas partes elementares em diferentes polígonos.

Esta pesquisa não tem nenhuma pretensão de esgotar as possibilidades de abordagem no ensino desse assunto. Mas sim, fundamenta-se em discutir uma possibilidade de exploração inicial aos conceitos de perímetro e área, com ênfase no registro figural, ou seja, no atributo geométrico presente nesses conceitos.

Como sugestões para futuras pesquisas, indica-se a possibilidade de estender esse estudo para exploração do registro algébrico, o qual pode descrever simbolicamente regularidades e resultados genéricos (fórmulas algébricas) para o cálculo das medidas numéricas da área de alguns polígonos.

Em termos de reflexão na própria prática docente, foi possível perceber a partir da análise *a posteriori* das atividades realizadas pelos alunos, resultados satisfatórios. Tanto em relação aos conteúdos matemáticos, quanto a fundamentação teórica adotada.

A elaboração da sequência de atividades constituída pelo planejamento e desenvolvimento de atividades, a fim de representarem estratégias de ensino, com objetivos previamente estabelecidos foi extremamente trabalhosa. No entanto, este trabalho foi recompensado, ao se observar em sala de aula os resultados. Por último, e não menos importante, ressalta-se a importância da formação continuada do professor, considerando que esta pode contribuir de forma significativa no crescimento profissional e, consequentemente, isso refletirá diretamente na sua prática pedagógica e na aprendizagem dos alunos.

Espera-se que este trabalho possa colaborar com a linha de pesquisa de tecnologias de informação e comunicação em educação matemática, auxiliando na determinação de novos horizontes na prática pedagógica de outros professores de matemática da educação básica no que tange ao efetivo ensino de geometria. Diante disso, pretende-se posteriormente divulgar os recursos elaborados no GeoGebra referente a todas as atividades desenvolvidas nesta pesquisa. Seja através de um e-book ou, tornando-os públicos no repositório do *GeoGebra Tube*, a fim de poderem ser acessados e se desejar utilizá-los em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, D. C. de. **Atividades lúdicas para o ensino e aprendizagem da geometria nos anos finais do ensino fundamental.** Chapecó, 2010. Disponível em: <http://www5.unochapeco.edu.br/pergamum/biblioteca/php/imagens/000067/000067BC.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2015.

ALMEIDA, V. L. M. C. de. **Pentaminós como uma ferramenta didática**. São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2005/artigos/.../pentaminos.pdf >. Acesso em: 28 jan. 2015.

ALMOULOUD, S. A. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática**. Campinas: Papirus, 2010. p. 125-147.

ARBACH, N. **O ensino de geometria plana: o saber do aluno e o saber escolar**. 2002. 96f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996. p.193-217.

BORBA, M. C. *Softwares* e internet na sala de aula de Matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais eletrônicos...** Salvador: SBEM, 2010. p. 1-11. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF>. Acesso em: 04 jun. 2015.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T.; BASSOI, T. S. **Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.16, n.2, 2014, p.479-509. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/19476/pdf>. Acesso 12 mai. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. **(3º e 4º ciclos do ensino fundamental)**. Brasília: MEC, 1998.

BURATTO, I. C. F. **Representação semiótica no ensino de geometria: Uma alternativa metodológica na formação de professores.** 2006. 143f. Dissertação (Mestrado em

Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

CENTENARO, G. F.C. **Perímetro e área: uma proposta didática para o ensino fundamental.** 2010.101f. Monografia (Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES. (2007). **Impact du logiciel apprenti géomètre sur certains apprentissages**. Nivelles, Belgique: CREM. Disponível em: <http://www.enseignement.be/index.php?page=25995>. Acesso em: 8 abr. 2015.

CRESCENTI, E. P. **Os professores de matemática e a geometria.** 2005. 252f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

DUVAL, R. Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Org. Silvia Dias Alcântara Machado. Campinas: Papirus, 2003. p.11- 33.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In: **Annales de didactique et sciences cognitives**, 2005. p. 5-53.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas.** Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência**. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1. Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012a. p.118-138. Disponível em <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em: 04 mai. 2015

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.2. Florianopólis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012b. p. 266-297.Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em: 04 mai. 2015.

DUVAL, R. [Entrevista disponibilizada em jul-dez. 2013, a Revista Paranaense de Educação Matemática, v.2, n.3]. 2013. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/rpem/documentos/v2n3/Entrevista.pdf>. Acesso em: 07 mar. 2015.

FACCO, S. R. **Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem**. 2003. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

FERREIRA, F. A. **Demonstrações em geometria euclidiana: o uso da Sequência didática como recurso metodológico em um curso de licenciatura de matemática.** 2008. 186f. Dissertação (Mestrado em ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2006.

FISCHER, D. S.O. **A riqueza da geometria: conceitos de área e perímetro**. 2011. 82f. Monografia (Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Sapiranga, 2011.

GRAVINA, M. A.; Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil, nov. 1996.

GRAVINA, M. A.; SOUZA, C. E. Geometria com animações interativas**.** In: **Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 7, n.1, jul. 2009.

GRAVINA, M. A.; BARRETO, M. M. Geometria através de hipertextos com animações interativas. In: **Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 8, n.2, jul. 2010.

GRAVINA, M. A.; CONTIERO, L. O. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? In: **Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v.9, n.1, jul. 2011.

GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. Mídias Digitais na Educação Matemática. In: Gravina, M.A., Basso, M.; Burigo, E.; Garcia, V. (Org.). **Matemática, mídias digitais e didática - Tripé para formação de professores de matemática.** 1ed. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2012, v. 1, p.11-36.

GIRALDO, V; CAETANO, P. MATTOS, F. **Recursos computacionais no ensino de matemática**. Rio de Janeiro: SBM; Coleção PROFMAT, v.06, 2012.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática: 6º ao 9º ano**. 2.ed. São Paulo: moderna, 2012.

JACOMELLI, K.Z. **A linguagem natural e a linguagem algébrica: nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental**. 2006.174f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

LEONARDO, F. M. de. Projeto **Araribá: matemática: 6º ao 9º ano**. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2010.

MATHEUS, E. M. et al. **Formação investigativa para as tic: novas perspectivas para ensinar e aprender matemática.** Anais. EnGEM- IV Encontro Goiano de Educação Matemática, Goiás, 2013. Disponível em: <http://www.sbem-go.com.br/anais%20engem_2013/Comunica%C3%A7%C3%A3o%20Cient%C3%ADfica/CC_02306126100.pdf >. Acesso em: 04 ja. 2015.

NOVO TELECURSO. **As coisas têm área, volume e forma**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=O2BJMhThRBw >. Acesso em: em 05 abr. 2015.

PARASKEVI, M. et al. Middle and high school students' operative apprehension of geometrical figures. In: **Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics**, Issue 11, 2011, p. 47-57. Disponível em: <http://www.ddm.fmph.uniba.sk/ADUC/files/Issue11/04%20Michael%20et%20al.pdf. Acesso em: 3 jul. 2015.

PARASKEVI, M. Geometrical figures in geometrical task solving: an obstacle or a heuristic tool? In: **Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics**, Issue 13, 2013, p. 17-32. Disponível em: <http://www.ddm.fmph.uniba.sk/ADUC/files/Issue13/02%20Michael_Gagatsis.pdf> Acesso em: 10 jul. 2015.

PAVANELLO, R. M. **O Abandono do ensino da geometria: uma visão histórica**. 1989. 2001f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas,Campinas, 1989.

PENTEADO, M. G. Possibilidades para a formação de professores de Matemática. In: PENTEADO, M. G; BORBA, M. C. (Orgs.). **A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão**. 1. ed. São Paulo: Olho Dágua, 2000. p. 23-34.

PEREIRA, M. R. de O. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino.** 2001. 84f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

PIROLA, D. L. **Aprendizagem em geometria nas séries iniciais: uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual.** 2012. 158f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica)- Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

RODRIGUES, S. V. de O. **Professores de matemática e uso do computador**. 2008. Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_silvia_vilela_oliveira_rodrigues.pdf > Acesso em: 12 mai. 2015.

SECCO, A. **Conceito de área: da composição e decomposição de figuras até as fórmulas.** 2007. 198f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SELLA, A. E. ; PEREIRA, P. S. **PDE: relatos de uma experiência em andamento**. Cascavel, n. 48, nov. 2008. Disponível em: < http://www.unioeste.br/cursos/cascavel/pedagogia/eventos/2008/1/Artigo%2048.pdf >. Acesso em: 12 jul. 2015.

SENA, R. ; Dorneles, B.V. **Ensino de geometria: rumos da pesquisa** (1991-2011) Teaching Geometry: Research Directions (1991-2011). Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 8, p. 138-155, 2013.

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G.. **O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa.** In: Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia - SINECT, 2009, Ponta Grossa - PR. Anais eletrônicos... Ponta Grossa, 2009. Disponível em:<http://www.sinect.com.br/anais2009/artigos/10%20Ensinodematematica/Ensinodematematica_artigo17.pdf >. Acesso em: 10 jun. 2015.

Apêndice A- Relação dos conteúdos, objetivos e descrição das atividades que compõem os blocos da sequência

Atividades	1	2	3	4	5	6	7	8
Conteúdos	Contornos fechados e reconhecimentos de formas.		Contornos fechados e região interna delimitada por eles.		Comparação de regiões internas de figuras planas.		Equivalência das regiões internas do paralelogramo e do retângulo.	
Objetivos	Propor uma análise visual de figuras geométricas compostas por contornos fechados.	Reconhecer as unidades figurais que formam a figura de partida e a realizar duas composições da mesma a partir de contornos fechados.	Identificar a diferença entre contorno e região interna de uma figura plana.	Construir figuras geométricas planas evidenciando seus contornos e região interna.	Utilizar sobreposição ou justaposição para comparar a área entre figuras geométricas planas.	Comparar a área de figuras planas com formas diferentes.	Mostrar que a equivalência das regiões internas do paralelogramo e do retângulo.	Verificar a equivalência da área do retângulo e paralelogramo a partir de peças de um quebra-cabeça.
Descrição	Disponibilizam-se duas figuras para realizar uma análise visual. Registra-se no aplicativo o número de contornos fechados visualizados e os desenham na folha impressa.	São dadas quatro figuras de partida. Os alunos deverãoconstruí-las de duas maneiras diferentes utilizando peças disponibilizadas. Essas peças podem ser arrastadas e rotacionadas na tela do computador.	Apresenta- se duas caixas, uma com contornos fechados e a outra com região interna delimitada por esses contornos. Analisa-se visualmente e descreve no GeoGebra as diferenças observadas.	Utilizam-se para construção de três figuras diferentes e a realização de preenchimento dessas, dois comandos do recurso. Para isso, a atividade coloca instruções e um espaço destinado a isso.	Fornece-se cinco grupos de figuras com mesma forma, sendo que deverão ser ordenadas, em cada grupo, as regiões internas, da maior para a menor. Existe a possibilidade de arrastar e/ou rotacionar essas figuras na tela do computador.	Apresentam-se quatro pares de figuras planas. Será realizada a comparação das regiões internas de cada par. Existe a possibilidade de recortar as figuras uma única vez, e realizar reconfigurações com as peças obtidas.	A partir da sobreposição e do recorte do retângulo e/ou do paralelogramo os alunos deverão comparar as áreas dessas figuras.	Possui três quebra-cabeças disponibilizados. Em cada um, os alunos deverão construir um retângulo e um paralelogramo. As peças do quebra-cabeça podem ser arrastadas e rotacionadas na tela do computador.

Quadro 28- Relação dos conteúdos, objetivos e descrição das atividades que compõem o primeiro bloco de atividades.

Atividades	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Conteúdos	Cálculo da medida do perímetro e da área de figuras planas.	Distinção entre perímetro e área.		Cálculo para obter a área de uma região quadrada.		Cálculo para obter a área de uma região retangular.	Distinção entre perímetro e área de retângulos.		Perímetro e área de figuras planas, após transformações isométricas.	Procedimentos de cálculo para determinar a área de figuras planas.
Objetivos	Medir o perímetro e a área de uma mesma figura; reconhecer que esta pode possuir medidas de perímetro e de área diferentes.	Verificar que as figuras podem possuir valor para a área equivalente. No entanto, tem valor de perímetro diferente.	Verificar que figuras de mesmo perímetro podem ter área de valor diferente.	Montar quadrados e determinar a medida do perímetro e da área deles.	Consolidar os conhecimentos adquiridos na atividade anterior.	Montar diferentes retângulos e determinar a medida do perímetro e da área dos mesmos.	Montar diferentes retângulos de mesmo valor para o perímetro, mas com valor de área diferente.	Montar diferentes retângulos de mesma valor para a área , mas com valor para o perímetro diferente.	Explorar os valores do perímetro e de área de polígonos, após transformações isométricas.	Consolidar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.
Descrição	Os alunos devem calcular o valor da medida do contorno (perímetro) do quadrado utilizando o controle deslizante correspondente a uma linha métrica. Já, para o cálculo da área, devem cobrir a região interna utilizando as peças disponíveis.	Os alunos deverão criar quatro figuras distintas, utilizando unidades quadradas móveis. Após, deverão encontrar os valores correspondentes para o perímetro e a área.	Dadas duas figuras, em que se podem alterar suas formas. Os alunos devem, inicialmente, fixar um valor para o perímetro. A partir disso, devem alterar as formas dessas figuras de dois modos distintos, de forma que o valor do perímetro destas seja igual ao valor fixado. Além disso, estas figuras deverão possuir valores de área diferente.	Utilizando o controle deslizante os alunos devem construir quatro quadrados com lados de medidas diferentes. Após, devem determinar os valores do perímetro e da área dos mesmos.	Os alunos devem utilizar unidades quadradas disponibilizadas para fazerem a composição de quadrados diferentes e, assim, resolverem o problema proposto.	Criam-se retângulos, movendo-se dois controles deslizantes correspondendo a medida da base e da altura dos retângulos. A seguir calculam-se os valores para o perímetro e a área desses.	Utilizam-se os mesmos recursos da atividade anterior. Porém, fixa-se, primeiramente, o valor do perímetro antes de montar os retângulos.	Utilizam-se os mesmos recursos das atividades 6 e 7. Entretanto, é fixado o valor para a área antes de montar os retângulos.	Dadas duas figuras e três ferramentas no recurso, correspondentes a isometrias: translação, rotação e reflexão. Com o auxílio de uma malha quadriculada móvel os alunos podem calcular o perímetro e a área das mesmas.	Os alunos utilizam unidades quadradas para fazer a composição de quadrados e retângulos com a finalidade resolver o problema proposto.

Quadro 29- Relação dos conteúdos, objetivos e descrição das atividades que compõem o segundo bloco de atividades.

Atividades	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Conteúdos	Cálculo da medida de área de figuras planas.	Cálculo da medida de área através da decomposição de figuras planas.			Cálculo da medida de área de uma região limitada por um paralelogramo.	Comparação de medidas de comprimento.	Equivalência da área de região limitada por um paralelogramo e de uma região retangular.
Objetivos	Determinar a área de figuras planas que representam uma situação-problema que pode se fazer presente ou associá-la ao cotidiano dos alunos.	Realizar a decomposição de figuras planas e fazer a reconfiguração de suas partes elementares. A fim de formar um retângulo. Após, deve ser determinada a medida de suas áreas.	Instigar a utilização do processo de reconfiguração de figuras planas. Isso deve ser feito por meio da sua decomposição e composição de modo que se obtenha como figura resultante um quadrado ou um retângulo.	Realizar a decomposição de figuras planas a fim de determinar a área das mesmas.	Decompor um paralelogramo em um retângulo e obter sua área.	Comparar as medidas dos lados do paralelogramo com os lados de um retângulo que possuam a mesma área e altura.	Generalizar a equivalência da área do retângulo e do paralelogramo a partir do processo de decomposição e composição de figuras.
Descrição	Nesta atividade são dadas quatro figuras planas, que podem ser arrastadas e/ou rotacionadas) e uma malha quadriculada móvel. Os alunos deverão calcular a área dessas figuras.	As mesmas figuras da atividade anterior serão recortadas e reconfiguradas em retângulos e, novamente, serão determinadas suas áreas.	A partir de duas figuras que podem ser recortadas uma única vez os alunos deverão realizar suas decomposições .Após, devem realizar a reconfiguração das peças obtidas de maneira que permita calcular sua área.	Calcular a medida das áreas de duas figuras planas. Para isso, tem-se uma malha quadriculada móvel, e sm a opção "recortar". Assim, os alunos terão que, mentalmente, realizar a reconfiguração, e marcar na figura, com o auxílio da ferramenta caneta, onde estaria localizada a linha de corte.	Possui a mesma descrição da atividade 3. Porém, nesta a figura disponibilizada é um paralelogramo.	Os alunos utilizam sobreposição ou justaposição entre o paralelogramo e o retângulo, comparando as medidas dos seus lados.	Disponibiliza-se um paralelogramo dinâmico, um controle deslizante que, ao ser movimentado mostra uma decomposição do paralelogramo e uma reconfiguração, obtendo-se o retângulo. Os alunos determinam a área de diferentes paralelogramos e as comparam com a área dos paralelogramos formados após a animação.

Quadro 30- Relação dos conteúdos, objetivos e descrição das atividades que compõem o terceiro bloco de atividades.

Apêndice B - Folhas de registros correspondentes a cada bloco de atividades

FICHA DE REGISTROS DO 1º BLOCO DE ATIVIDADES

Nome do aluno (a):____TURMA:______

ATIVIDADE 1

Desenhe nos quadros abaixo os contornos que você visualizou.

FIGURA 1	FIGURA 2

ATIVIDADE 5

Em cada grupo, classifique na ordem da maior região interna para a menor.

Grupo 1
Grupo 2
Grupo 3
Grupo 4
Grupo 5

ATIVIDADE 6

Compare as regiões internas entre as figuras e diga qual figura tem a maior região interna.

ATIVIDADE 6A
ATIVIDADE 6B
ATIVIDADE 6C
ATIVIDADE 6D

ATIVIDADE 7

Que conclusão você obteve? Justifique.

FICHA DE REGISTROS DO 2º BLOCO DE ATIVIDADES

Nome do aluno (a):____________________________________ TURMA:______

ATIVIDADE 1

ATIVIDADE 2

ATIVIDADE 3

ATIVIDADE 4

ATIVIDADE 5

ATIVIDADE 6

ATIVIDADE 7

ATIVIDADE 8

ATIVIDADE 9

ATIVIDADE 10

FICHA DE REGISTROS DO 3º BLOCO DE ATIVIDADES

Nome do aluno (a):________________________________ TURMA:______

ATIVIDADE 1

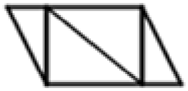
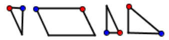
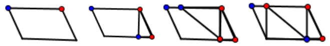
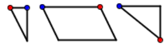
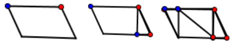
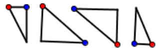
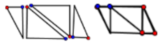
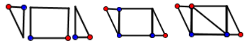
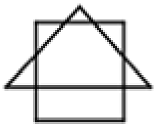
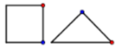
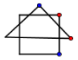
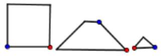
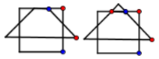
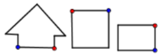
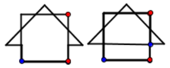
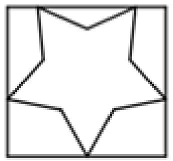
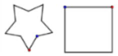
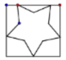
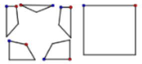
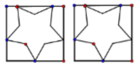
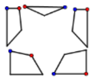
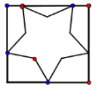
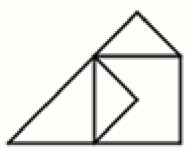
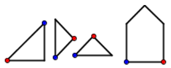
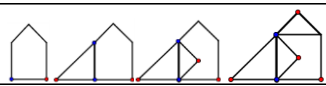
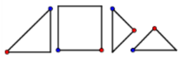
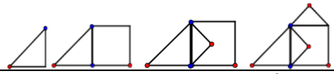
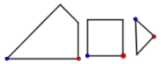
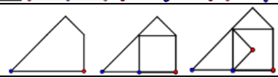
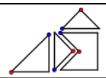
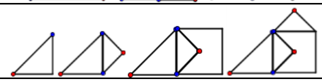
ATIVIDADE 2

ATIVIDADE 3

ATIVIDADE 4

ATIVIDADE 5

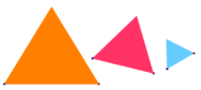
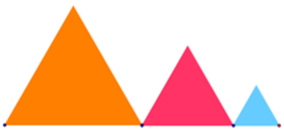
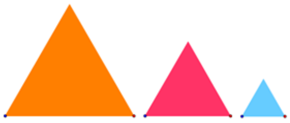
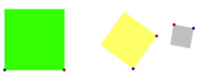
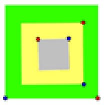
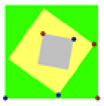
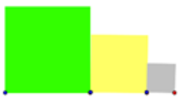
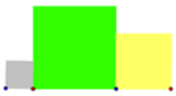
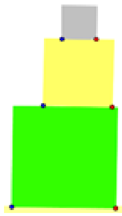
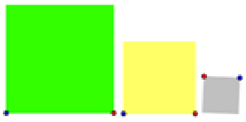
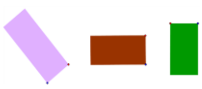
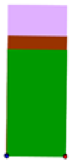
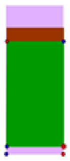
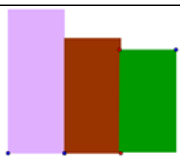
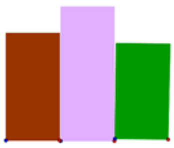
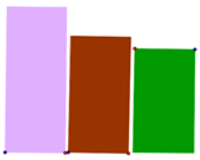
Apêndice C - Representações figurais construídas pelos alunos para a atividade 2 do bloco 1

Fig.	Figura de Partida	Construção	Contornos utilizados	Etapas da construção	Nº de alunos	Comentários
A		1ª			8	Dois alunos utilizaram a mesma combinação de peças nas duas construções solicitadas. As combinações mais utilizadas nas 1ª construção também foram frequentemente indicadas na 2ª construção.
					5	
					1	
		2ª			4	
B		1ª			22	Quatro alunos montaram a figura de partida da mesma forma nas duas construções. Seis alunos construíram figuras diferentes da figura de partida (Figura 127). Não foi identificada nenhuma construção utilizando somente justaposição de peças.
		2ª			4	
					5	
			Não conseguiram	Não conseguiram	6	
C		1ª			26	Três alunos construíram do mesmo modo as duas construções solicitadas. A maioria dos alunos que realizou a justaposição das peças teve necessidade de sobrepor a peça quadrada.
		2ª			19	
					4	
D		1ª e 2ª			6	Como previsto na análise *a priori*, um leque de modos distintos de combinação foram utilizados pelos alunos nas duas construções. Aqui, optou-se por detalhar quatro casos. Apenas um aluno montou a figura da mesma maneira nas duas construções.
					9	
					6	
					4	

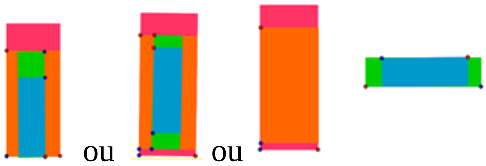
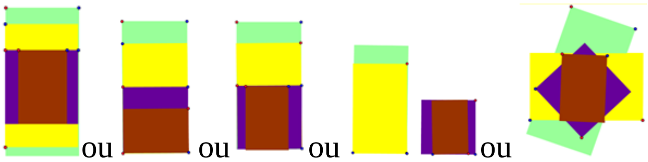
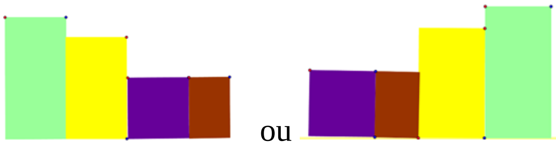
Quadro 31- Representações figurais construídas pelos alunos para a atividade 2 do bloco 1.

Apêndice D - Respostas obtidas pelos alunos para atividade 5 do bloco1 do bloco 1

(Continua)

Grupos	Figuras	Critério	Representação Figural	Nº de alunos
1		Sobreposição	 ou  ou 	12
		Justaposição		3
		Peças separadas, alinhadas horizontalmente	 ou 	9
2		Sobreposição	 ou 	14
		Justaposição	 ou  ou 	6
		Peças separadas, alinhadas horizontalmente		4
3		Sobreposição	 ou  ou 	10
		Justaposição	 ou 	7
		Peças separadas, alinhadas horizontalmente		7

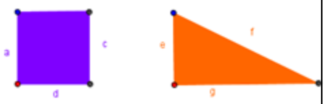
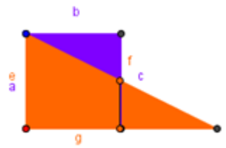
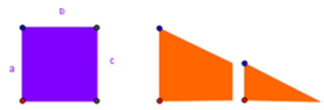
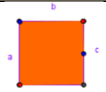
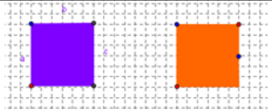
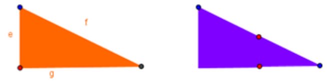
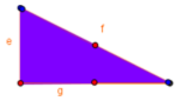
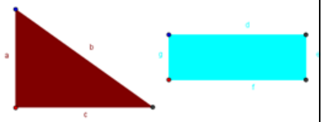
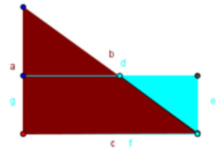
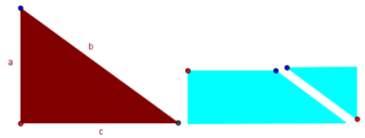
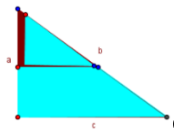
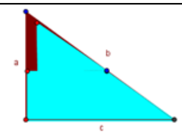
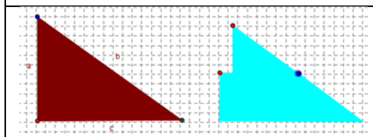
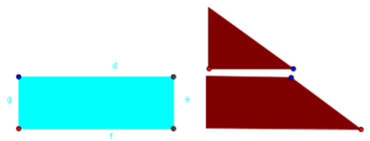
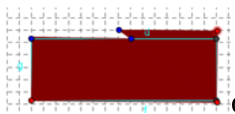
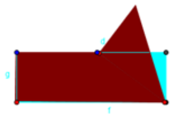
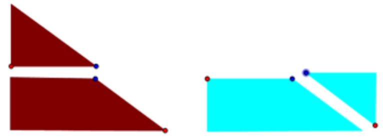
(Continuação)

Grupos	Figuras	Critério	Representação Figural	Nº de alunos
4		Sobreposição		13
		Justaposição		5
		Peças separadas, alinhadas horizontalmente		4
5		Sobreposição		15
		Justaposição		5
		Peças separadas, alinhadas horizontalmente		2

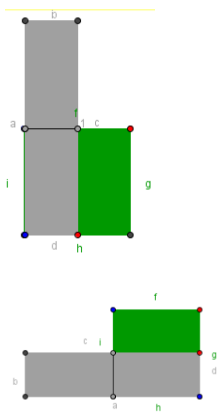
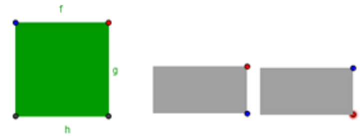
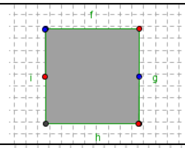
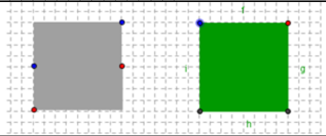
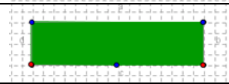
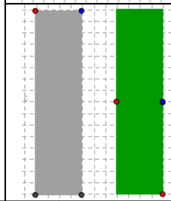
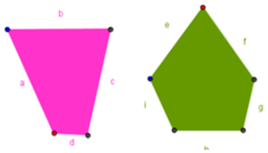
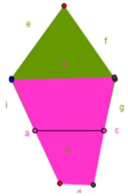
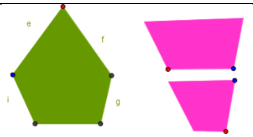
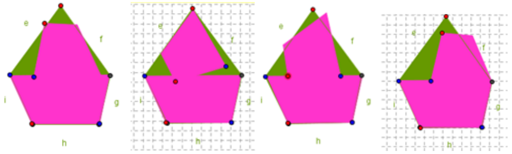
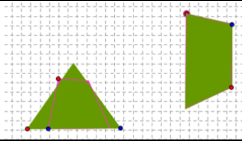
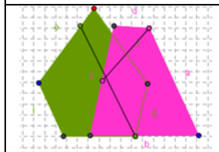
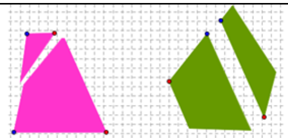
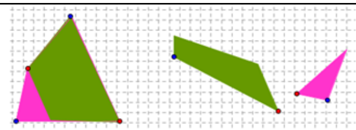
Quadro 32- Ilustrações das diferentes representações figurais obtidas pelos alunos para a atividade 5 do bloco 1.

Apêndice E - Representações figurais construídas pelos alunos para a atividade 6 do bloco 1

(continua)

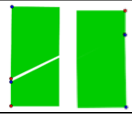
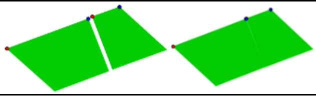
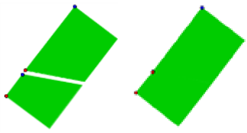
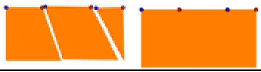
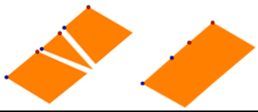
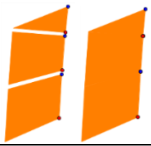
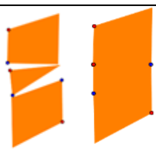
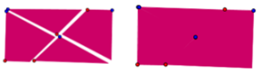
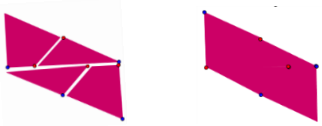
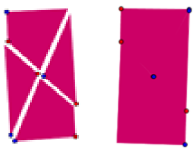
Figura	Par de figuras	Sobreposição	Peças obtidas após o recorte	Reconfigurações das figuras	Nº de alunos	Comentários
A					16	Ressalta-se que a opção de recortar ambas as figuras, uma das abordagens geométricas previstas na análise *a priori*, não apareceu nas respostas dos alunos.
					5	
					4	
					1	
B				 ou 	19	Com exceção de um aluno, os demais fizeram a reconfiguração das peças obtidas seguida da sobreposição desta na figura que não foi recortada. Este aluno comparou lado a lado as figuras (original e a reconfiguração construída)
					1	
				 ou 	5	
					1	

continuação

<table>
<tr><td rowspan="4">C</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2"></td><td></td><td>15</td><td rowspan="4">Ocorreu um caso em que o aluno embora tenha sobreposto as figuras não fez coincidir um par de vértices das mesmas. (Figura 140). Assim, ele não concluiu que as figuras possuem regiões internas equivalentes.</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">D</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td></td><td>18</td><td rowspan="4">Cinco alunos não conseguiram chegar a uma solução e registrando sendo assim registraram na folha impressa que não conseguiriam comparar.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
</table>

Quadro 33- Representações figurais construídas pelos alunos para a atividade 6 do bloco1.

Apêndice F - Representações figurais construídas pelos alunos para a atividade 8 do bloco 1

<table>
<tr><th>Quebra-cabeça</th><th>Figuras</th><th>Reconfiguração</th><th>Nº de alunos</th><th>Comentários</th></tr>
<tr><td rowspan="3">A</td><td>Retângulo</td><td></td><td>26</td><td rowspan="3">Somente três alunos fizeram a construção do retângulo numa posição oblíqua, os demais consideraram na sua construção um dos lados do retângulo disposto na horizontal.
Ressalta-se que quatro alunos construíram retângulo nos dois casos, sendo que o mesmo fora construído com lados na posição horizontal, já na segunda construção, o paralelogramo definido estava na posição oblíqua.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Paralelogramo</td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="7">B</td><td rowspan="2">Retângulo</td><td></td><td>19</td><td rowspan="7">As representações figurais que estão assinaladas por * apresentam casos em que os alunos construiram as figuras solicitadas, entretanto utilizaram a sobreposição das peças, isto é, não seguiram a exigência posta no enunciado da questão.
Também ocorreu de três alunos realizarem construírem nas duas composições, retângulos. Novamente, prevalecendo na segunda construção, a destinada a montagem do paralelogramo, retângulos em posições oblíquas.
Especificamente na construção do paralelogramo ocorreu três casos em que não conseguiram realizar a reconfiguração.</td></tr>
<tr><td> *</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Paralelogramo</td><td></td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td> *</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Não conseguiram</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="5">C</td><td rowspan="2">Retângulo</td><td></td><td>17</td><td rowspan="5">Observou-se que os alunos apresentaram dificuldades de realizarem as reconfigurações deste quebra-cabeça.
Além disso, oito alunos que construíram o paralelogramo de forma diferente do retângulo utilizaram somente uma das três formas distintas que haviam sido previstas para realizar isto.</td></tr>
<tr><td>Não conseguiram</td><td>9</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Paralelogramo</td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td>Não conseguiram</td><td>13</td></tr>
</table>

Quadro 34- Representações figurais construídas pelos alunos para atividade 8 do bloco 1.

Apêndice G - Resoluções feitas por alguns alunos à atividade 4 do bloco 2

1. Imagens da resolução feita pelo aluno A

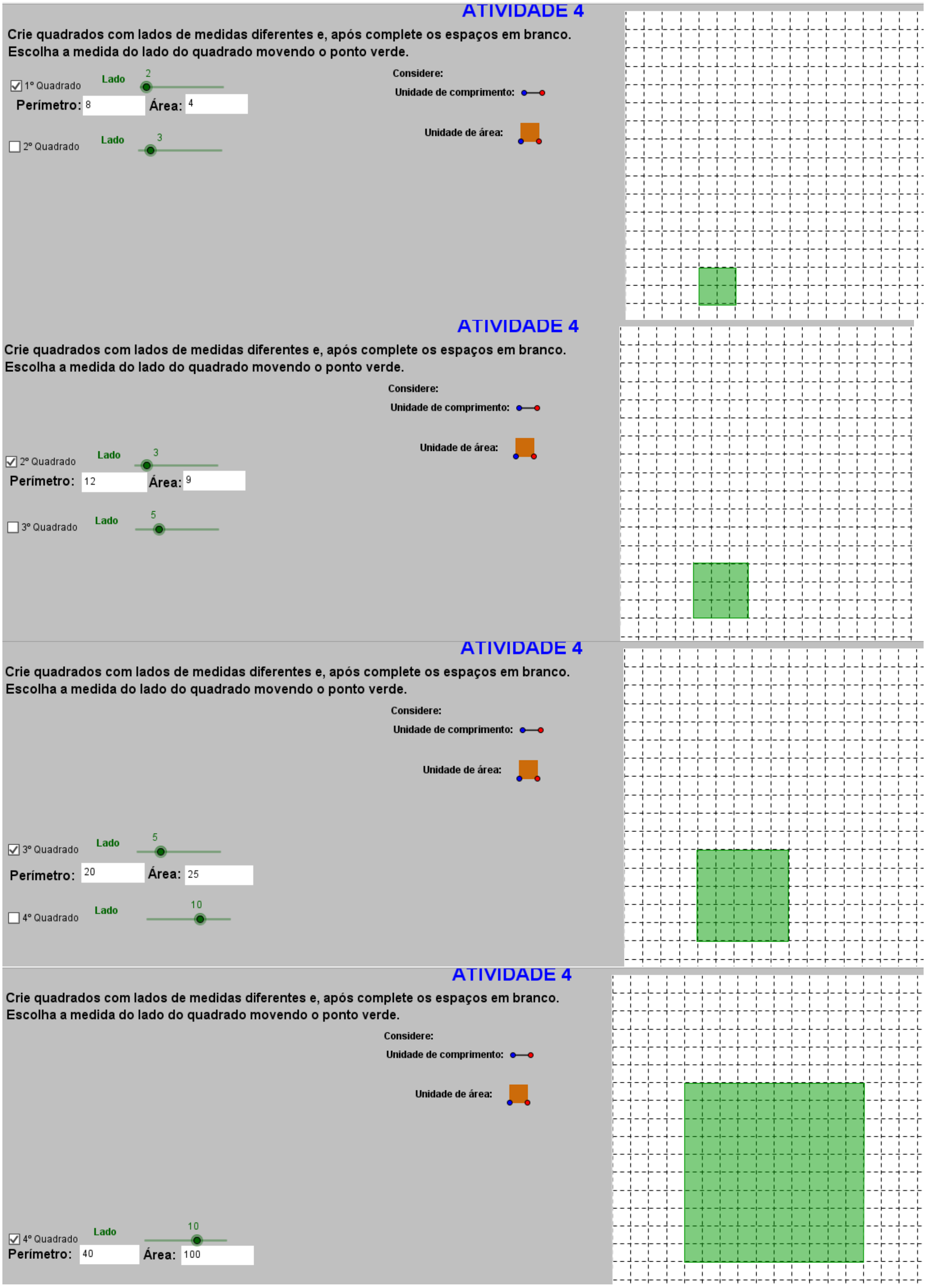


Figura 173- Solução encontrada pelo aluno A para a atividade 4 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

2. Resoluções que mostram erros cometidos por alguns à atividade 4 do bloco 2

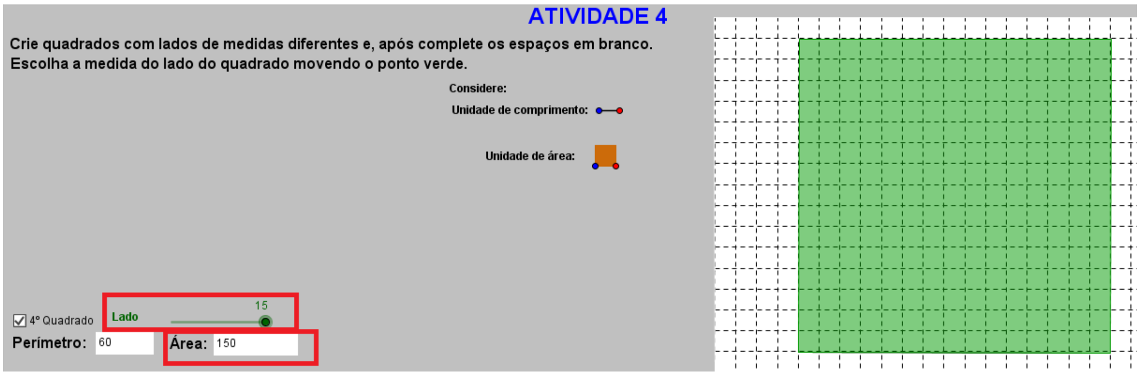


Figura 174- Solução feita pelo aluno B correspondente a atividade 2 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

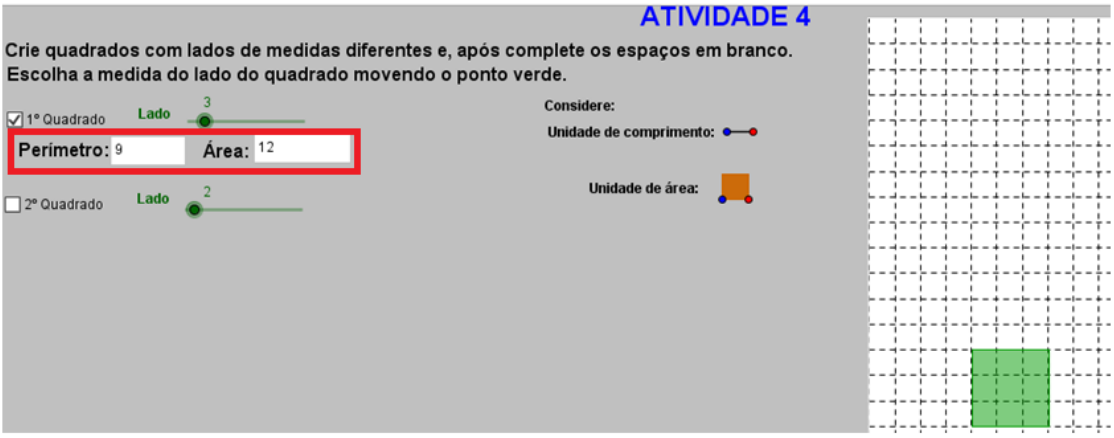


Figura 175- Solução feita pelo aluno C para a atividade 2 do bloco 2.
Fonte: Imagem do banco de dados da pesquisa.

Apêndice H - Registros escritos pelos alunos para atividade 6 do bloco 2

"Para o cálculo do perímetro você observou alguma relação entre as medidas dos lados e o valor obtido?"	
Nº de alunos que acertaram	Respostas mais frequentes
1	• *"fazendo o lado 1 vezes lado 2 e depois faz vezes 2 que vai dar a resposta do perímetro".*
Nº de alunos que erraram	Respostas mais frequentes
5	• *"Fiz o de baixo vezes o lado que deu o resultado";* •*"um lado vezes o outro vai dar um resultado e com outro lado junta que vai dar o resultado e somamos";* •*"um lado vezes o outro lado vai dar um resultado e o outro lado vezes o outro lado daí junta os dois resultados e soma;* •*"o lado 1 × o lado 2";* • *"todos eles são múltiplos de dois";*
Nº de alunos que não observaram nenhuma relação	Respostas mais frequentes
13	• *"não observei nenhuma relação;* • *não observei nenhuma relação.*
Nº de alunos que afirmaram não existir nenhuma relação	Respostas mais frequentes
2	• *"não tem".*
Nº de alunos deixaram em branco	
4	
"Para o cálculo da área você observou alguma relação entre as medidas dos lados e o valor obtido?"	
Nº de alunos que acertaram	Respostas mais frequentes
11	• *"fiz o lado 1 vezes o lado 2 e obtive o resultado da área";* • *"fazer × os lados dá área. Ex: 4 vezes 5 igual a 20";* • *"os valores dos lados multiplicados vai dar o valor da área";* • *"Lado 1 x lado 2 é igual a área";* • *"Sim, porque o lado1 vezes o lado2 é igual a área;* • *um lado vezes o outro lado vai dar o valor da área";* • *"Faz os lados de vezes e vai dar o resultado da área";* •*"a multiplicação do lado 1 com o 2 dá o resultado da área".*
Nº de alunos que acertaram, porém não designaram a terminologia "área".	Respostas mais frequentes
10	•*" Lado 1 vezes lado 2";* •*" Um lado vezes o outro dá o resultado";* •*" Multiplica o lado 1 e o lado 2";* • *"fazer o lado 1 vezes o lado 2;* • *"é fazer o número do lado 1 vezes o número do lado 2";* • *"Multiplicar o lado1 com o lado 2".*
Nº de alunos que erraram	Respostas mais frequentes
2	• *"Observei que os números são diferentes";* • *"o lado 1× o perímetro".*
Nº de alunos deixaram em branco	
2	

Quadro 35- Registros escritos feitos pelos alunos à atividade 6 do bloco 2.

Apêndice I - Animação elaborada no GeoGebra utilizada para reforçar o conceito de perímetro do quadrado e do retângulo

Essa animação contém o registro figural de um quadrado, sendo possível mover o controle deslizante “Lado”, alterando os valores da medida do seu lado. Também, possui outro controle deslizante, denominado “Arraste” que, ao movê-lo, vão sendo construídos segmentos que representam, na sua totalidade, a medida do perímetro do mesmo. Simultaneamente a isso, aparece na tela do computador o cálculo para a obtenção do perímetro. A figura 176 ilustra esta animação, quando é escolhida a medida do lado do quadrado como sendo igual a 3 unidades de comprimento.

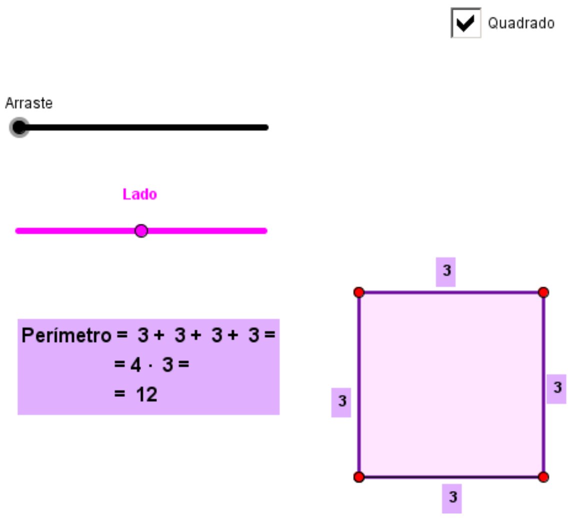


Figura 176- *Interface* da animação exibida aos alunos para analisar o perímetro do quadrado.

A sequência de imagens mostrada na figura 177 sugere o registro figural ao movimentar-se o controle deslizante, chamado “Arraste”.

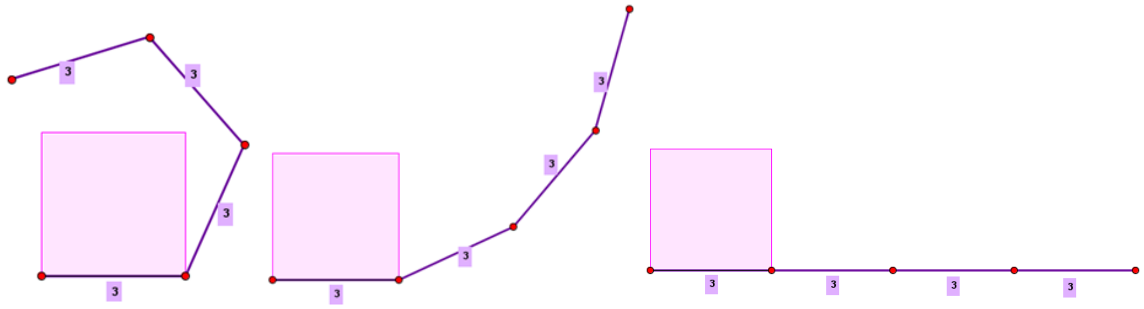


Figura 177- Imagem que sugere a movimentação do controle deslizante “Arraste”.

Analogamente, foi explorada a relação existente entre as dimensões do retângulo com o cálculo de seu perímetro, como sugere a figura 178.

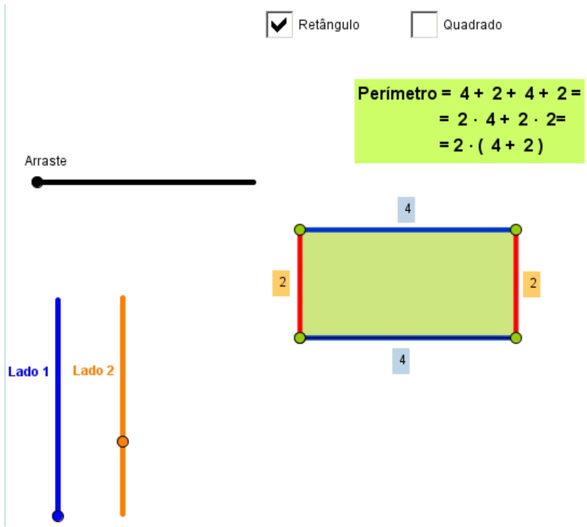


Figura 178- *Interface* da animação exibida aos alunos que analisa o valor do perímetro do retângulo.

Na figura 179 é ilustrada uma animação quando se movimenta o controle deslizante “Arraste”.

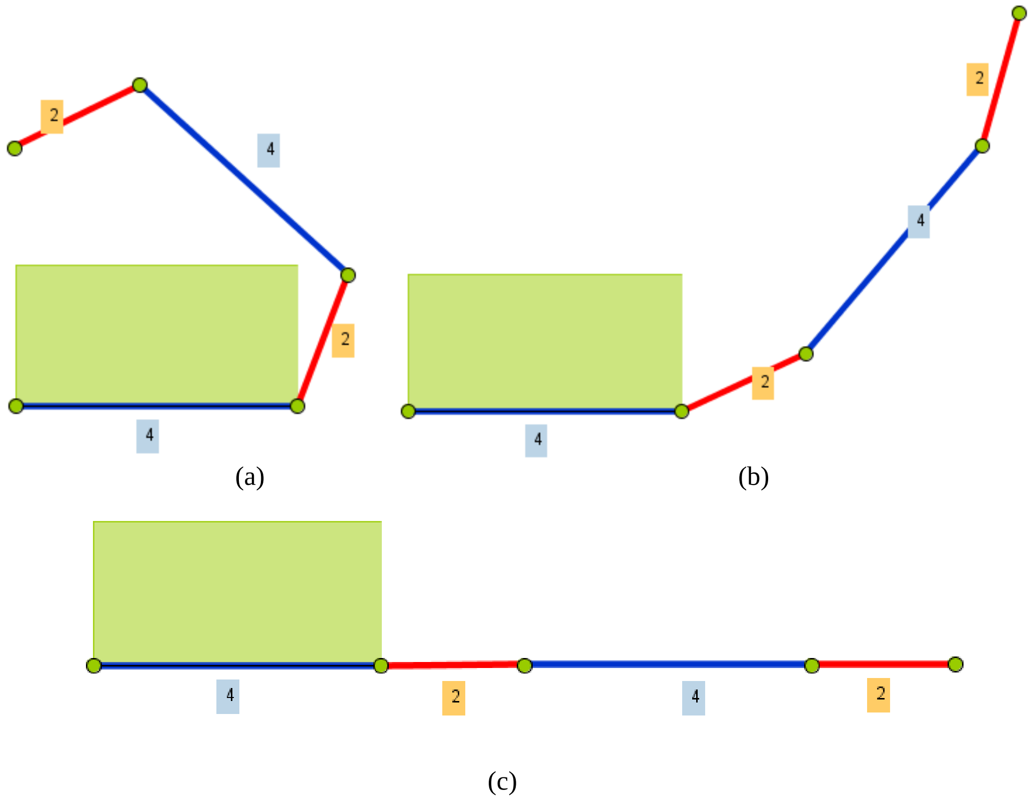


Figura 179- Imagem que sugere a movimentação do controle deslizante “Arraste”.

ANEXOS

ANEXO A - Modelo do termo de assentimento e consentimento dado aos sujeitos da pesquisa e seus responsáveis legais

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Consentimento da participação da pessoa como sujeito

Eu, ____, autorizo e concordo que meu(minha) filho(a) participe da pesquisa: *Um estudo de Geometria com a utilização de um ambiente dinâmico: uma experiência com alunos do ensino fundamental*, como sujeito. Fui suficientemente esclarecido(a) a respeito das informações que li ou que me foram lidas.

Ficaram claros quais são os propósitos da pesquisa, os procedimentos a serem realizados e seus possíveis desconfortos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes.

Eu, voluntariamente, autorizo meu(minha) filho(a) a participar desta pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Assentimento da participação da pessoa como sujeito

Eu ____________________________________ aceito participar da pesquisa: *Um estudo de Geometria com a utilização de um ambiente dinâmico: uma experiência com alunos do ensino fundamental*, como sujeito. Fui suficientemente esclarecido(a) a respeito das informações que li ou que me foram lidas.

Ficaram claros quais são os objetivos e os procedimentos a serem realizados durante essa pesquisa.

Entendi que posso dizer “sim” e participar, como também, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir e isso não me causará nenhum prejuízo. As pesquisadoras tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis.

Santa Maria ____, de _______________ de 2014.

_________________________________	_________________________________
Assinatura do responsável	Assentimento do aluno (Sujeito da pesquisa)