UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
E ENSINO DE FÍSICA

A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO E SUAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO GRAFEQ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Fabrício Fernando Halberstadt

Santa Maria, RS, Brasil

2015

A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO E SUAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO GRAFEQ

Fabrício Fernando Halberstadt

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de Concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação Matemática**.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Leandra Anversa Fioreze

Santa Maria, RS, Brasil

2015

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a dissertação de Mestrado

A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO E SUAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO GRAFEQ

elaborada por
Fabrício Fernando Halberstadt

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Educação Matemática

Comissão examinadora:

Leandra Anversa Fioreze, Dr.ª
(Presidente/Orientadora)

Marcia Rodrigues Notare, Dr.ª (UFRGS)

Rita de Cássia Pistóia Mariani, Dr.ª (UFSM)

Santa Maria, 07 de agosto de 2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me conceder saúde e disposição e também por ter encontrado pessoas que me apoiaram durante esse momento tão importante para a minha vida profissional.

À professora Leandra Anversa Fioreze, minha orientadora, um agradecimento muito especial, pela confiança, pelo profissionalismo, pela atenção e carinho. Um exemplo de profissional que conduz suas atividades com muito esmero.

A minha esposa, Eliciane Brüning de Salles, companheira e amiga. Obrigado pela paciência, apoio e conselhos nesta etapa da minha vida profissional.

A minha família pelos valores com os quais fundamentaram a minha educação. Agradeço pelo carinho e pelo apoio na minha vida acadêmica, profissional e pessoal.

Aos meus amigos, em especial à Helga de Mattos Pasinato e Antonio Carlos Lyrio Bidel, pelas oportunas manifestações de companheirismo e pelos tantos momentos que compartilhamos.

Aos meus colegas e amigos, André Ventorini, Vanessa Züge, Paula Assumpção e Marinela da Silveira, pela troca de experiências, pelo apoio e incentivo.

A equipe diretiva, professores e alunos do Colégio Estadual Manoel Ribas que fizeram parte desta jornada.

Aos professores do PPGEM&EF que contribuíram com seus ensinamentos.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro para a realização do mestrado.

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.

(Paulo Freire)

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática & Ensino de Física
Universidade Federal de Santa Maria

A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO E SUAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO GRAFEQ

AUTOR: FABRÍCIO FERNANDO HALBERSTADT
ORIENTADORA: LEANDRA ANVERSA FIOREZE
Data e Local de Defesa: Santa Maria, 7 de agosto de 2015.

Esta dissertação apresenta o delineamento de uma pesquisa de mestrado envolvendo alunos do terceiro ano do Ensino Médio, a qual tem por objetivo estudar a compreensão de conceitos e propriedades da Geometria Analítica do Ensino Médio com o uso do *software* GrafEq. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo cuja metodologia de ensino e pesquisa adotada é a Engenharia Didática, que possibilita sistematizar a realização da pesquisa nos âmbitos teórico e experimental. As atividades elaboradas versam sobre os objetos reta, circunferência e parábola e foram dinamizadas junto a uma turma de alunos de uma escola da cidade de Santa Maria/RS. Como aporte teórico adota-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval devido ao papel importante das representações na compreensão dos conceitos matemáticos. Com o intuito de propiciar a coordenação entre os registros de representação gráfico e algébrico da Geometria Analítica, as atividades que compõem a sequência didática foram planejadas com o uso do *software* GrafEq, permitindo que o aluno realize diversas experimentações envolvendo esses registros. Em algumas atividades faz-se uso do *software* GeoGebra a fim de formalizar propriedades e resultados matemáticos. Os resultados apontam para a consolidação do reconhecimento dos objetos abordados nos seus diferentes registros de representação semiótica, condição prioritária para a sua compreensão. As atividades da sequência contribuíram para o reconhecimento e compreensão das variáveis visuais pertinentes dos registros algébricos dos objetos abordados. Verifica-se que, de modo geral, houve um desenvolvimento dos alunos ao longo da dinamização da sequência didática, isto é, uma melhora na compreensão dos objetos matemáticos abordados. Destaca-se, também, o engajamento por parte dos alunos na resolução das atividades.

Palavras-chave: Geometria Analítica. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Engenharia Didática. GrafEq.

ABSTRACT

Master Course Dissertation
Post-Graduation Program in Mathematics Education and Fisics Teaching
Federal University of Santa Maria

ANALYTIC GEOMETRY LEARNING IN HIGH SCHOOL AND ITS SEMIOTICS REPRESENTATION IN GRAFEQ

AUTHOR: FABRÍCIO FERNANDO HALBERSTADT
ADVISER: LEANDRA ANVERSA FIOREZE
Defense place and date: Santa Maria-RS, August, 7th, 2015.

This thesis presents the design of a master's research involving students of the third year of high school, which has as its objective understanding the concepts and properties of Analytic Geometry using GrafEq software in high school. It is a qualitative research, and the methodology adopted for teaching and research is the Didactic Engineering, which allows the systemization research in theoretical and experimental fields. The activities deal with the straight, circumference and parabola objects, and were made with a group of students from a school in the city of Santa Maria / RS. As a theoretical framework, the Theory of Semiotics Representation Registers from Raymond Duval has been adopted due to the important role of representations in the understanding of mathematical concepts. Aiming to facilitate the coordination between the graphic and algebraic representation registers of Analytic Geometry, activities in the teaching sequence were designed using the GrafEq software, allowing the student to perform many activities involving these records. In some activities, GeoGebra software was used in order to formalize properties and mathematical results. The main results emphasize the recognition of the covered objects in their different registers of semiotic representation, considered a priority condition for their understanding. The activities in the sequence contributed for the recognition and understanding of relevant visual variables of algebraic records objects. It has been found that, in general, the development of students beem found along the dynamics of the didactic sequence, it means an improvement in the mathematical objets' understanding approach. The engagement of students in solving activities has been emphasized along the activities.

Key-words: Analytic Geometry. Theory of Semiotics Representation Registers. Didactic Engineering. GrafEq.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE APÊNDICES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde quando cursei as séries iniciais, especialmente a partir dos anos finais do Ensino Fundamental, interessei-me em estudar os conteúdos propostos na disciplina Matemática. Como conseguia compreender conceitos e resultados desta disciplina, auxiliava alguns colegas que demonstravam dificuldades em realizar as tarefas propostas. Acredito que foi a partir dessas experiências que optei em realizar o Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) – RS.

Durante o curso de graduação realizei atividades extracurriculares enquanto bolsista do Programa de Educação Tutorial – PET Matemática da UFSM – durante três anos. No primeiro semestre de participação no grupo, integrei uma atividade de ensino denominada *Oficinas sobre Softwares Livres Winplot e Wingeom para os professores da rede de ensino da cidade de Santa Maria e acadêmicos do Curso de Matemática*[1]. Esta atividade visava o planejamento, elaboração e dinamização de um minicurso sobre as potencialidades dos *Softwares Winplot* e *Wingeom* pelos bolsistas do PET Matemática da UFSM. Considero que este foi o meu primeiro contato, de fato, com uma atividade que buscava o uso da Informática no processo ensino e aprendizagem da matemática. Porém, apesar da boa avaliação por parte dos participantes, ao término da ministração das oficinas avaliamos que havíamos atingido em parte nossos objetivos, pois não contamos com a participação de professores, apenas licenciandos, e a maioria das atividades não discutiu possibilidades de uso daqueles *softwares* em aula de matemática, apenas instrumentalizavam os participantes a utilizar aquela tecnologia.

A partir desse primeiro contato, que me interessei em estudar sobre as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), tendo realizado mais alguns projetos de pesquisa, ensino e extensão na minha formação inicial. Participei do planejamento, elaboração e dinamização de dois minicursos. Em 2010 do minicurso intitulado *Noções básicas de Cálculo Diferencial e Álgebra Linear com o Maple* e em 2011 do minicursos denominado *Noções básicas sobre o Editor de Textos*

[1] O planejamento e o relatório da atividade estão disponibilizados, respectivamente, em:
http://petmatematica.weebly.com/uploads/2/2/2/2/22229894/planejamento_2009.pdf
http://petmatematica.weebly.com/uploads/2/2/2/2/22229894/relatorio_2009.pdf

Matemáticos LaTeX. Ambos os cursos tinham como público-alvo os acadêmicos dos cursos de Matemática da UFSM (licenciatura e bacharelado) e como principal objetivo instrumentalizar os organizadores e os participantes para o uso dos principais recursos desses softwares, bem como propor um espaço de discussão sobre o seu uso em sala de aula de matemática. Além disso, realizei uma atividade denominada *Construções Geométricas com o WinGeom* que consistia em uma pesquisa sobre construções geométricas com o *software* WinGeom por meio de seus recursos tecnológicos. Acredito que essas atividades foram essenciais para o meu interesse sobre a temática do uso das TIC em sala de aula de matemática.

Na disciplina Estágio Curricular no Ensino Médio utilizei sequências de atividades a partir do *software* Winplot com uma turma de alunos do primeiro ano. Posteriormente, enquanto fui professor temporário do Departamento de Matemática/UFSM, preocupei-me com a temática das TIC em sala de aula. Identifiquei diversas dificuldades apresentadas pelos alunos referentes à compreensão de conceitos e propriedades de diversos temas, tais como o cálculo diferencial e integral, a matemática financeira e a geometria analítica. Com isso em mente, buscava alternativas que pudessem auxiliar os alunos na compreensão de tais conteúdos, em especial no que se refere à manipulação de objetos matemáticos que dispunham de uma representação gráfica. Para tanto, propus atividades utilizando os *softwares* Winplot e Maple. Concomitante a essa experiência, também realizei o curso de pós-graduação *lato sensu* denominado TIC Aplicadas à Educação[2], o que contribuiu ainda mais para as reflexões em torno dessa temática.

Ao lecionar conteúdos sobre Cálculo Vetorial, observei que os alunos apresentam dificuldade em compreender e manipular objetos da geometria analítica (tais como retas, circunferências, elipses). A dificuldade acentuava-se quando necessitavam estabelecer relações entre suas representações gráfica e algébrica, e vice-versa.

A dificuldade encontrada pelos alunos na compreensão de conceitos e propriedades matemáticas vem sendo retratada por avaliações sistêmicas[3] e pelos estudos de vários educadores matemáticos[4]. Com isso em mente, definiu-se como tema de investigação da pesquisa de mestrado a compreensão de conceitos e

[2] Universidade Aberta do Brasil - Universidade Federal de Santa Maria.
[3] Como: SAEB, Avaliação de PISA e ENEM.
[4] Cita-se: Ubiratan D`Ambrósio (1996), Raymond Duval (2003), Maria Alice Gravina (2013) e Olev Skovsmose (2007).

propriedades da geometria analítica do Ensino Médio.

Durante a disciplina de Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática, a qual cursei no primeiro semestre letivo do mestrado em Educação Matemática, conheci e realizei algumas atividades com o *software* GrafEq. A partir das atividades desenvolvidas, pude visualizar novas possibilidades de trabalho para o conteúdo da geometria analítica escolar.

A partir disso, realizei um levantamento bibliográfico a respeito do uso do GrafEq. Constatei que existem poucos trabalhos acadêmicos que apresentam abordagens metodológicas para o ensino da matemática com esse *software.* Dentre os trabalhos encontrados, destaco os mencionados a seguir. O primeiro e o segundo correspondem a trabalhos de conclusão de curso e os outros dois são dissertações de mestrado. Todos os trabalhos são oriundos da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

- *GrafEq no processo de ensino e aprendizagem de funções afins* (GAUTO, 2012)
- *GrafEq no ensino e aprendizagem de inequações: uma pesquisa baseada na negociação de significados* (KÖFENDER, 2014).
- *Tecnologias digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos da geometria* (SANTOS, 2008).
- *O estudo da equação* $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ *utilizando o software GrafEq – Uma proposta para o Ensino Médio* (GOULART, 2009).

Quanto a estes trabalhos, apresentarei no segundo capítulo da presente dissertação seus objetivos, a metodologia utilizada, os principais referenciais teóricos adotados e os resultados alcançados.

A maioria das atividades elaboradas para a sequência didática desta pesquisa propõe a utilização do GrafEq, o qual apresento e escrevo sobre o seu potencial no segundo capítulo. Ao elaborar a sequência didática, constatei que seria interessante utilizar ainda outras duas ferramentas tecnológicas, a saber: o vídeo e o *software* GeoGebra. Utilizo o vídeo como forma de mostrar e sensibilizar os alunos sobre a arquitetura de alguns prédios históricos da cidade de Santa Maria/RS, temática da sequência didática que elaborei. A utilização do GeoGebra se deu devido à necessidade de utilizar o controle deslizante, característico da Geometria Dinâmica. Descrevo a utilização desses dois recursos no sexto capítulo, ao apresentar a sequência elaborada.

A presente dissertação estrutura-se em sete capítulos. Inicialmente, no primeiro capítulo realizo uma breve descrição de alguns fatos na minha vida acadêmica que contribuíram para a definição do tema da pesquisa. Também apresento a estrutura do presente trabalho.

No segundo capítulo realizo uma revisão sobre as bases teóricas que fundamentam o trabalho. São realizadas reflexões sobre a importância das representações semióticas na aprendizagem da matemática, em especial para os conceitos da geometria analítica. A articulação das representações semióticas é condição fundamental para a compreensão de um conceito matemático. Também são apresentadas algumas reflexões sobre a inserção das TIC no ensino da matemática. Penso nessa inserção de modo que possa proporcionar ao aluno diversas experimentações que, em geral, não seriam possíveis nas práticas tradicionais de ensino. Com isso, o uso do *software* GrafEq no ensino da geometria analítica pode consistir em uma interessante alternativa pedagógica, pois apresenta um bom potencial semiótico ao permitir a manipulação simultânea dos seus registros algébrico e gráfico.

Em seguida, no terceiro capítulo, apresento as questões metodológicas da pesquisa: trata-se de uma pesquisa qualitativa que utiliza a metodologia da engenharia didática. A problemática da pesquisa refere-se à aprendizagem da geometria analítica por meio de uma sequência didática com o uso de TIC. Por fim, faço uma breve análise do local de pesquisa.

No quarto capítulo, apresento a descrição das dimensões epistemológica, didática e cognitiva que compõem a primeira fase da Engenharia Didática, as análises preliminares. Na dimensão epistemológica apresento uma visão nas perspectivas onto e filogenética do desenvolvimento da geometria analítica. Na dimensão didática são apresentadas algumas características do ensino da geometria analítica do terceiro ano do Ensino Médio a partir da análise de alguns livros didáticos. Na dimensão cognitiva é apresentado o questionário elaborado para a avaliação das concepções prévias dos alunos sujeitos da pesquisa sobre o conteúdo geometria analítica, bem como a análise dos resultados encontrados no questionário.

No quinto capítulo apresento a concepção e análise *à priori*, no qual são apresentados aspectos globais (mais amplos) e locais, que podem contribuir para uma melhora no processo ensino e aprendizagem da geometria analítica. Além disso, são apresentadas as hipóteses que permeiam a elaboração da sequência didática e auxiliarão na sua validação.

No sexto capítulo, apresento a sequência didática elaborada que trata sobre os tópicos reta, circunferência e parábola. Consiste em uma abordagem que tem como tema principal a construção de representações de imagens de prédios históricos da cidade de Santa Maria/RS no *software* GrafEq. Nesse sentido, as atividades elaboradas visam abordar aspectos históricos e sociais dessa temática, inclusive propondo uma integração entre as disciplinas Matemática e Artes Plásticas. Além do recurso computacional GrafEq, também é utilizado o *software* GeoGebra e a mídia vídeo.

No sétimo capítulo é realizada a análise *a posteriori* e a validação da sequência didática. Destacam-se aspectos considerados relevantes para a análise dos resultados no que se refere à aprendizagem por parte dos alunos à luz da teoria de Duval. A análise realizada aponta para o desenvolvimento dos alunos ao longo da dinamização das atividades, ou seja, a sequência contribuiu para a compreensão dos objetos matemáticos abordados.

No oitavo e último capítulo apresentam-se as conclusões do presente trabalho. Realizam-se reflexões sobre os resultados da pesquisa e, também, são mencionados alguns possíveis temas de interesse para pesquisas futuras advindas da presente experiência. Por fim, apresentam-se os trabalhos referentes à produção científica oriunda da presente dissertação.

2 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A educação brasileira vem sendo constantemente discutida e avaliada. Há tempo que se tem constatado o baixo desempenho dos alunos na disciplina Matemática. Nesse sentido, pergunta-se o que é necessário para que um aluno se aproprie de um conceito matemático? Quais os sistemas cognitivos que deve estabelecer para compreender um determinado conceito matemático? Qual o papel das TIC no processo ensino e aprendizagem da matemática?

2.1 Teoria dos Registros de Representações Semióticas

Os estudos de Raymond Duval alertam para a importância das representações semióticas na aprendizagem da matemática. Na verdade não só na matemática, mas também em outras áreas do conhecimento. Neste trabalho, estaremos interessados nas representações da geometria analítica do Ensino Médio, mais especificamente no estudo dos processos que são necessários para a compreensão de alguns de seus conceitos e propriedades. Nesse sentido, uma pergunta vem à tona: será esta uma questão de apenas identificar a melhor forma de representação semiótica? Ou seja, identificar qual representação possui as melhores características capazes de conduzir à compreensão desses conceitos e propriedades?

Adiantar-se-á a resposta para essa questão: não. Para Duval (2003) a compreensão ocorre a partir da coordenação das diversas representações semióticas de um mesmo objeto matemático. Moretti (2002) refere-se a essa coordenação com a palavra “trânsito” e afirma que muito depende da noção de congruência semântica que se discutirá adiante.

Ao analisar as dificuldades que os alunos geralmente encontram na compreensão de conceitos e resultados da matemática, Duval (2003) escreve que é necessária uma abordagem cognitiva para esse problema. Argumenta que o objetivo dessa disciplina na formação inicial do aluno é “contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização” (DUVAL, 2003, p.11).

Segundo Duval (2009) é um equívoco creditar às representações semióticas o efeito de exteriorizar as representações mentais. Dessa forma, as representações semióticas assumiriam apenas as funções de comunicação. Assumir tal pressuposto implicaria que

> Se chamamos de *semiósis* a apreensão e produção de uma representação semiótica, e *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência, pareceria então evidente admitir que a *noésis* é independente da *semiósis* ou, ao menos, a dirige. (DUVAL, 2009, p. 15).

Essa hipótese, porém, é totalmente falha quando se observa o desenvolvimento histórico da matemática. As representações semióticas “são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática” (DUVAL, 2009, p. 15). A exemplo disso pode-se verificar no desenvolvimento histórico da geometria analítica que dependendo do tipo de representação escolhido, a compreensão dos seus objetos pode ter diferentes graus de complexidade. Segundo Garbi (1997), dois matemáticos brilhantes e contemporâneos que muito contribuíram para o estabelecimento da geometria analítica como a conhecemos nos dias de hoje, Pierre de Fermat (1601 a 1665) e René Descartes(1596 a 1650)[5], desenvolveram diferentes técnicas algébricas para o traçado de tangentes a curvas. O sistema desenvolvido por Descartes, porém, era mais complicado e trabalhoso que o de Fermat.

> Isto gerou certa rivalidade entre ambos, evidentemente não provocada pelo pacífico Fermat mas sim pelo temperamento vaidoso de Descartes que, não satisfeito em ser o gênio que era, parecia não aceitar que outros também o fossem. Durante certo tempo Descartes insistiu em afirmar que sua técnica era melhor mas teve que render-se às evidências. (GARBI, 1997, p. 71).

Não é só na matemática que esse fenômeno ocorre, para Duval (2009) o pensamento científico é inseparável do desenvolvimento de simbolismos que representam os objetos de estudo das ciências. No caso da matemática, esse fato é ainda mais evidente, afinal são muitas as formas de se representar um mesmo

---

[5] As contribuições desses dois importantes matemáticos serão retomadas no quarto capítulo.

objeto matemático. Nesse sentido, uma primeira conclusão consiste no fato de que não se pode construir um mesmo modelo de funcionamento cognitivo humano para todas as áreas do conhecimento. Existem, portanto, especificidades a serem consideradas no ensino da Matemática em relação a, por exemplo, o ensino da Língua Portuguesa ou da História.

Uma das especificidades da matemática refere-se à expressiva diversidade de formas de representar um determinado objeto, em especial no que se refere aos simbolismos que a caracterizam. Para Duval (2013), até a década de setenta as teorias cognitivistas, influenciadas pelo estruturalismo e pela teoria piagetiana, apresentavam a linguagem reduzida a códigos e codificações. É a partir desse cenário que Duval apresenta uma nova visão sobre este problema: não se pode tomar a linguagem como sendo apenas um sistema de códigos que sintetizam informações, ou seja, sua função não se limita a formalizar conceitos matemáticos. Segundo Duval (2013), a compreensão de um conceito ou determinada relação matemática depende da articulação da linguagem. Noutras palavras, o seu desenvolvimento em termos da linguagem contribui para a aprendizagem matemática.

A partir das ideias de Lev Vygotsky (1896 a 1934), Jean Piaget (1896 a 1980) e Michel Denis, Duval (2009, p. 17) suprassume que "não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e exercício da *noésis*". Isto quer dizer que "O desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas da mesma maneira que as imagens mentais são uma interiorização das percepções" (DUVAL, 2009, p.17). Entende-se que Duval (2009) descreve o processo de compreensão de um conceito matemático a partir do movimento recíproco entre as representações semióticas e as representações mentais. No caso da geometria analítica, os tratamentos matemáticos não podem ser realizados apenas pelas representações mentais, sem um sistema semiótico de representação.

Segundo Duval (2003, p.13), há duas peculiaridades no processo de compreensão dos conceitos matemáticos em relação aos conhecimentos das demais áreas do conhecimento, a saber:

- Importância primordial das representações semióticas: ao se observar a história do desenvolvimento da matemática, verifica-se que está intimamente ligado às representações semióticas escolhidas. Nesse sentido, é preciso observar as características dos sistemas de representação semiótica, pois apesar de poder apresentar mais informações sobre determinado conceito matemático sua compreensão pode não ser simples. Além disso, os objetos, números, conceitos e resultados da matemática não são diretamente perceptíveis, passam a existir por meio de se suas representações semióticas.

- A grande variedade de representações utilizadas em matemática: existem diferentes tipos de registros de representações na matemática como, por exemplo, os números, a escrita algébrica, os desenhos geométricos, os gráficos, a linguagem natural (que é diferente da linguagem corrente).

Devido à existência de diferentes representações semióticas para um mesmo objeto, é necessário estabelecer de que forma se dá a coordenação de dois ou mais tipos. Essa é, na verdade, a questão fundamental do trabalho de Duval.

2.1.1 Transformações de registros de representações semióticas

Para diferenciar os sistemas semióticos utilizados em matemática dos outros sistemas semióticos utilizados para se comunicar, Duval estabelece a palavra “registros” para se referir exclusivamente às representações matemáticas.

> Em primeiro lugar, esta é a palavra que Descartes utiliza nas primeiras páginas de sua *Geometria*. Em segundo, esta palavra também se refere à extensão dos recursos disponíveis em domínios como a voz, os instrumentos musicais, os modos de se expressar: falamos, por exemplo, de “registros” para designar o comando de cada um dos jogos de um órgão. (DUVAL, 2013, p. 8).

Além disso, conforme Duval (2013) é essa diferenciação que permite estabelecer os dois tipos de transformações de representações semióticas – os tratamentos e as conversões. O tratamento refere-se à transformação que permanece num mesmo sistema de representação como, por exemplo, ao resolver a equação $2x - 8 = 4$ adotar apenas procedimentos algébricos, conforme ilustrado abaixo.

$$2x - 8 = 4 \quad (1)$$

$$2x = 4 + 8 \quad (2)$$

$$2x = 12 \quad (3)$$

$$x = \frac{12}{2} \quad (4)$$

$$x = 6 \quad (5)$$

Na conversão há a passagem de um registro de representação para outro, mas conservando o mesmo objeto matemático. Pode ser observada, por exemplo, no trânsito entre a representação gráfica de uma equação do primeiro grau para a sua representação algébrica ou vice-versa.

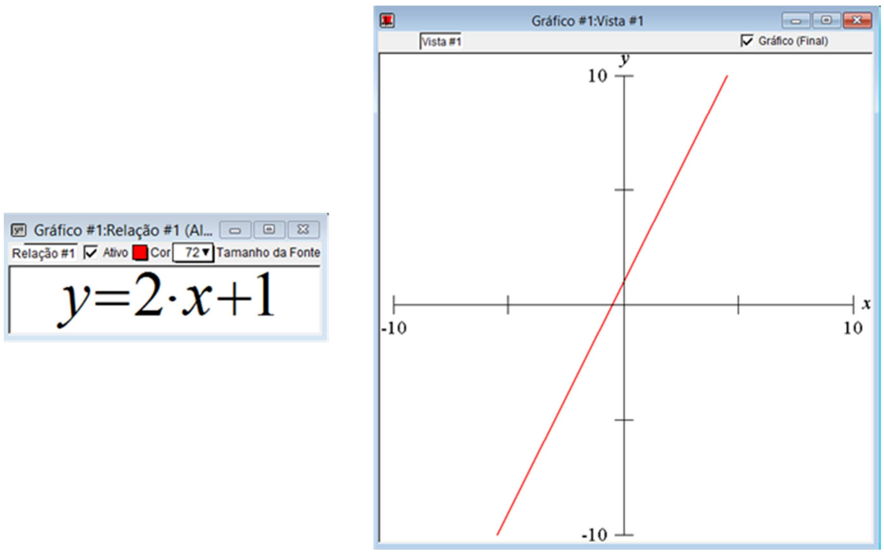


Figura 1 – Conversão dos registros algébrico e gráfico de uma equação do 1º grau

Do ponto de vista da matemática do matemático, o processo de conversão de dois ou mais registros de representações não possui grande importância, pois não tem validade em uma prova ou demonstração. Para o matemático, um segundo registro de representação (em geral gráfico) serve somente de suporte aos tratamentos realizados por meio da linguagem discursiva. Porém, do ponto de vista dos processos cognitivos referentes à compreensão, a conversão não deve ser tomada como uma simples tradução de um sistema em outro. No caso das representações semióticas de um conceito da geometria analítica, é necessária uma abordagem que permita realizar experimentos com os gráficos para compreender as relações algébricas e vice-versa.

> Há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos registros de representação. A conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento. (DUVAL 2003, p. 17).

Nessa perspectiva, Duval (2003) afirma que o sucesso dos alunos em matemática, muitas vezes restringe-se apenas aos monorregistros, ou seja, quando adotam apenas transformações de tratamento aos objetos matemáticos. Com isso em mente, afirma-se que “É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja o “enclausuramento” de cada registro” (DUVAL, 2003, p. 22).

Segundo Duval (2009) são três os principais motivos pelos quais o processo de conversão muitas vezes é deixado de lado ou quase não é abordado no ensino de matemática:

1) A primeira causa refere-se à inexistência de regras ou o alcance reduzido na maioria das conversões. Diferentemente do que acontece nos tratamentos, em poucas conversões há uma técnica para realizá-las, ou seja, as conversões têm características próprias. No caso de uma função afim, por exemplo, para realizar a conversão do registro algébrico para o registro gráfico é possível estabelecer uma regra que consiste basicamente em determinar pelo menos dois pontos que satisfazem a equação e, sobre eles, traçar no plano cartesiano a sua representação gráfica, conforme a figura a seguir.

$y = 2x - 3$

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
-1	$y = 2.(-1) - 3 = -5$	$(-1, -5)$
2	$y = 2(2) - 3 = 1$	$(2, 1)$

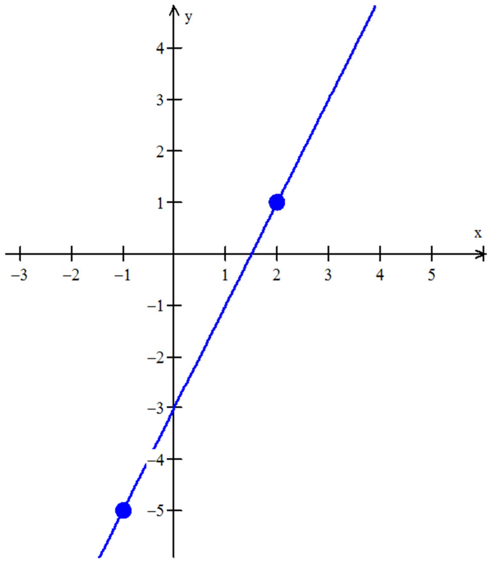


Figura 2 – Técnica para conversão do registro algébrico para o registro gráfico da função afim

Porém, se pensarmos em uma função mais complexa, esse procedimento pode não consistir em uma boa técnica para determinar o seu gráfico. Por exemplo, ao considerar a função $y = \frac{-x-2}{x^2-1}$, com $x \in \mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$, por meio de seu gráfico a seguir, pode-se verificar que, seria necessário encontrar um grande número de valores pertencentes ao conjunto imagem dessa função em determinados intervalos do domínio, para poder esboçar o seu gráfico.

$$y = \frac{-x-2}{x^2-1}$$

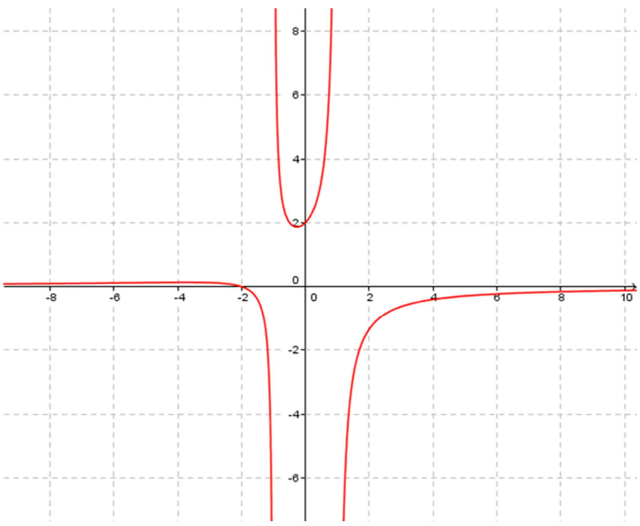


Figura 3 – Registros algébrico e gráfico da função $y = \frac{-x-2}{x^2-1}$

Nesse caso, o gráfico dessa função poderia ser esboçado a partir da compreensão de tópicos como: assíntotas verticais e horizontais, raízes da função, máximos e mínimos locais, concavidade e pontos de inflexão. Dessa forma, permitindo uma compreensão mais global do comportamento da função.

Há diversos casos em que não é possível estabelecer uma técnica para representar graficamente uma função, ou esse processo se torna extremamente enfadonho como, por exemplo, ao se tentar estabelecer, sem a utilização de um recurso tecnológico, o gráfico da função $y = xsen(1/x)$ com $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$y = xsen(1/x)$$

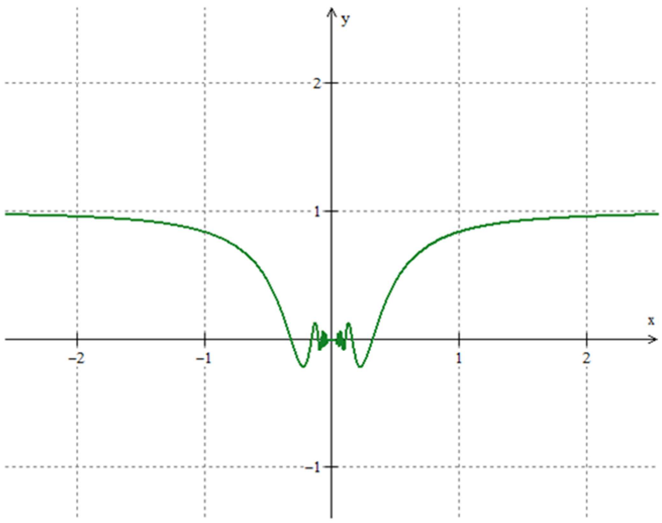


Figura 4 – Registros algébrico e gráfico da função $y = xsen(1/x)$

No caso do gráfico dessa função, a dificuldade consiste em estabelecer a representação correta para as imagens de valores próximos de $x = 0$.

Assim, pode-se verificar que no caso de funções mais complexas, é inviável utilizar uma regra como a do processo de obtenção da representação gráfica da função afim. Na verdade, em muitos casos esse processo se torna extremamente difícil sem o auxílio de um recurso tecnológico.

2) A segunda corresponde aos fins de simplicidade que as conversões assumem. Por vezes, realiza-se a conversão em busca da simplicidade nos tratamentos do registro de chegada e, assim, esquece-se das propriedades do registro de partida.

Como exemplo desse tipo de situação, tem-se a conversão do registro gráfico de uma função quadrática para o seu registro algébrico. Muitas vezes, após a realização desse processo não se discute quais as propriedades gráficas que os coeficientes algébricos determinam ao gráfico dessa função. Por exemplo, podemos pensar na função $y = 2x^2 + 2x - 4$, definida no conjunto dos números reais.

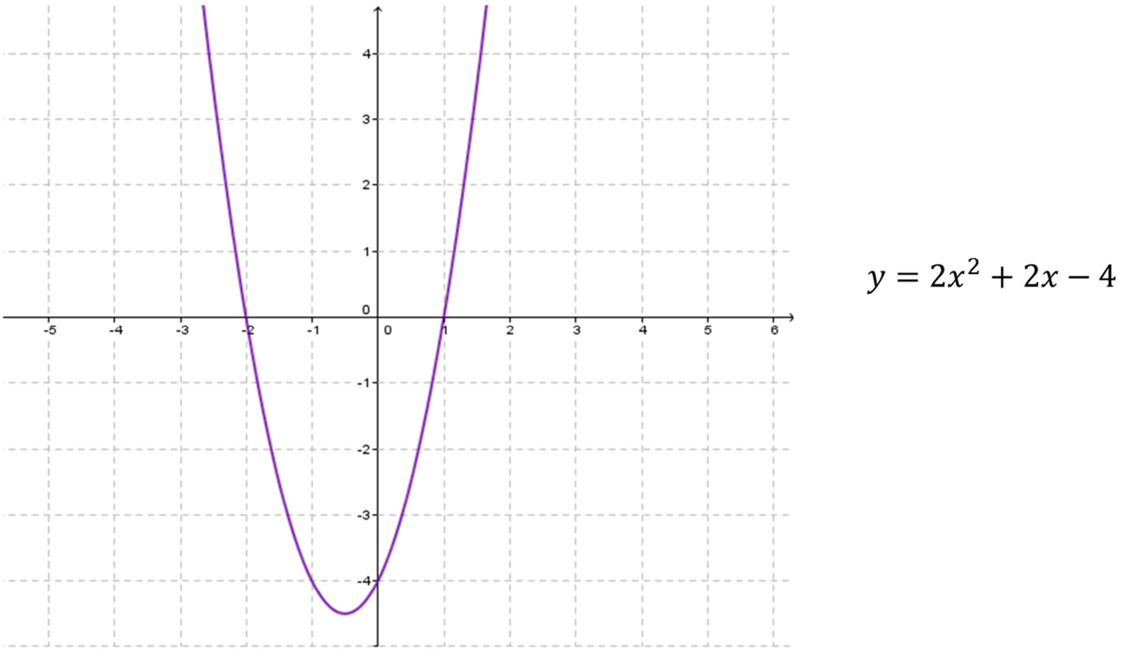


Figura 5 – Registro gráfico e algébrico da função $y = 2x^2 + 2x - 4$

Propor ao aluno a realização dessa atividade pode se limitar apenas a memorização da técnica utilizada. Não que isto não seja importante em certo momento para a compreensão do objeto envolvido, pois, conforme Duval (2009), a memória é essencial para a aprendizagem. Porém, é possível abordar vários resultados matemáticos com esta atividade por meio da correspondência entre os dois registros como, por exemplo, as implicações gráficas dos valores dos coeficientes algébricos, os zeros da função, o vértice da parábola, o eixo de simetria da parábola, entre outros. Além disso, por uma questão de simplicidade dos tratamentos no registro de chegada, por vezes realiza-se diversos tratamentos algébricos, porém não se relaciona essa ação com a sua representação gráfica. Um exemplo simples dessa situação acontece quando é apresentado o gráfico da função anterior e propõe-se encontrar o valor da abscissa tal que $y = 2$. O aluno até pode saber resolvê-la algebricamente, mas não necessariamente porque compreende o problema proposto, afinal pode ter observado vários exemplos como este e lembrar-se dos procedimentos para solucioná-lo. Porém, é essencial que também se discuta o que representa graficamente neste caso o registro de chegada.

3) Outra causa refere-se a considerar a conversão como um processo imediato e trivial. Pelo contrário, segundo Duval (2009), a conversão consiste na atividade cognitiva menos espontânea e considerada difícil pela maioria dos alunos e, portanto, deve-se ter uma preocupação em buscar explorar esse tipo de transformação no ensino da matemática.

Por exemplo, pode-se citar o caso da conversão da língua natural para o registro algébrico de uma equação. Um
té pode resolver algebricamente com certa eficiência a equação $2x - 6 = 3$, porém ao solicitar-lhe que encontre o número cujo dobro subtraído de seis unidades é igual a três unidades, esta atividade pode não lhe ser óbvia nem imediata. Nesse caso, o aluno não reconhece o mesmo objeto matemático nas suas diferentes representações semióticas, o que o impede de transitar entre elas de modo a solucionar o problema enunciado.

Nesse sentido, salienta-se a importância que se deve dar ao processo de conversão no ensino da matemática. Para a compreensão de um objeto matemático é necessário que o aluno reconheça-o nas suas representações semióticas, afinal elas contém conteúdos diferentes.

2.1.2 Congruência ou não congruência de uma conversão

Ao se comparar o registro de saída e o de chegada (terminal) da conversão há duas possibilidades que podem ocorrer. Se a representação terminal transparecer na de saída, segundo Duval (2003), a conversão está próxima de uma codificação e, diz-se então, que é um caso de congruência. Se a representação de chegada não transparece totalmente na de partida, diz-se que há uma não congruência. Duval (2003) apresenta um quadro esquemático com a tomada de três fatores que permitem determinar o grau de congruência ou não congruência em uma conversão da linguagem natural para uma representação algébrica o qual é reproduzido a seguir.

	Correspondência semântica das unidades de significado	A unidade semântica terminal	Conservação da ordem das unidades
O conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa y>x	Sim	Sim	Sim
O conjunto dos pontos que tem a abscissa positiva x>0	Não “Maior que zero” é uma perífrase (um só significado para várias palavras)	Sim	Sim
O conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o mesmo sinal xy>0 O produto da abscissa e da ordenada é maior que zero	Não	Não	Não Globalização descritiva (dois casos)

Quadro 1 – Exemplos de congruência ou não congruência
Fonte: Duval (2003, p. 19).

A correspondência semântica das unidades de significado corresponde à associação a cada unidade significante simples de uma representação a uma unidade significante elementar da outra representação. Para (DUVAL, 2009, p. 68) uma unidade significante é “toda unidade que se destaca do “léxico” de um registro”. Por exemplo, no primeiro caso há a seguinte correspondência de unidades significantes: ordenada e y, superior e $>$, abscissa e x. Na segunda afirmação, apesar de abscissa corresponder a x, positiva não corresponde diretamente à > 0 (maior que zero).

O segundo critério refere-se à univocidade semântica terminal, ou seja, deve-se verificar se a cada unidade significante da representação de partida corresponde uma e, apenas uma, unidade significante da representação de chegada. No primeiro exemplo, observa-se que a interpretação para o enunciado na língua natural é única para cada unidade significante. Em contrapartida, no terceiro caso a expressão “têm o mesmo sinal” não é imediata a sua transposição para a representação algébrica, também poderia ser algo do tipo $(x, y) \cup (-x, -y)$, ou seja, pode ser descrita por mais de uma forma.

O terceiro critério corresponde à ordem em que são apresentadas as unidades significantes, isto é, se a ordem em que as unidades significantes da representação de partida é a mesma ordem da apresentação das unidades significantes correspondente. No segundo caso, por exemplo, esse critério é satisfeito, pois a ordem no registro de partida é “abscissa” e “positiva” que correspondem à ordem das unidades significantes da representação algébrica “x” e “> 0”. O que não acontece no terceiro caso, por exemplo, pois na língua natural a unidade produto é a primeira e na representação algébrica ela é relacionada pela justaposição das incógnitas.

Em muitos casos, a conversão não é um processo simples. Com isso, Duval (2003, p. 20) diz que “Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido”. Nesse caso, opta-se pela conversão de maior congruência, porém esse procedimento não leva à compreensão dos conceitos matemáticos, o aluno não reconhece o mesmo objeto matemático nas suas diferentes representações semióticas.

2.1.3 O problema da compreensão em matemática

Encontra-se em Duval (2003) evidências de que o fracasso ou bloqueios de alunos de diferentes níveis de ensino aumentam à medida que necessitam movimentar simultaneamente mais de um registro de representação ou mudar de um para outro. Em se tratando de conversões menos congruentes essas dificuldades aparentam aumentar. Esse cenário, muitas vezes limita o sucesso dos alunos aos “monorregistros”, ou seja, quando as transformações que os alunos necessitam realizar são apenas de tratamento.

Não se pode confundir um objeto com as suas representações e, portanto, a mudança de registro é necessária para a sua compreensão. A única forma de acessar os objetos matemáticos é por meio de suas representações semióticas. Não se pode, por exemplo, visualizar uma reta ou circunferência no microscópio ou quaisquer outros aparelhos. Esses são, na verdade conceitos abstratos, os quais acessamos unicamente por meio de suas representações (gráfico, algébrico, língua natural).

> As variações de congruência, assim como a não equivalência dos sentidos de conversão, mostram que a conversão não resulta de uma compreensão conceitual, pois, se assim fosse, as variações consideráveis de sucesso e de fracasso em tarefas elementares de conversão não estariam fortemente correlacionadas com as variações de não congruência ou com aquelas do sentido da conversão. Constata-se, além disso, que a não congruência pode levar os alunos a verdadeiros bloqueios que eles não superam verdadeiramente. (DUVAL, 2003, p. 22).

Os objetos matemáticos apenas existem devido às suas representações. Nessa perspectiva, o sucesso do aluno em realizar atividades matemáticas que compreendam uma ou mais conversões não dependem da compreensão conceitual prévia do objeto matemático. Entende-se que a conversão é que é um processo necessário para a apropriação desses conceitos. A diferenciação entre representante e representado (forma e conteúdo)

> [...] é geralmente associada à compreensão do que uma representação representa e, então, à possibilidade de associar a ela outras representações e de integrá-la nos procedimentos de tratamento. Porém, tal diferenciação jamais é logo adquirida, qualquer que seja o registro de representação e qualquer que seja o estágio de desenvolvimento. (DUVAL, 2009, p.38).

A partir disso, Duval (2003) pergunta como é possível não confundir um objeto matemático com sua representação se somente temos acesso a ele por meio de suas representações?

> O conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que o objeto representado. Porque passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. (DUVAL, 2003, p. 22).

Nesse sentido, a conversão de dois registros de representação não se limita a dois tipos de tratamento: um para o registro de saída e outro para o registro terminal. Cada registro apresenta propriedades distintas do objeto representado. Por exemplo, no registro algébrico da circunferência $(x+3)^2+(y-4)^2=9$, pode-se facilmente concluir que está centrada no ponto $(-3,4)$ e que possui raio igual a 3. Em compensação, a partir do seu registro gráfico é mais fácil observar que tangencia o eixo das ordenadas e que fica compreendida no segundo quadrante do plano cartesiano.

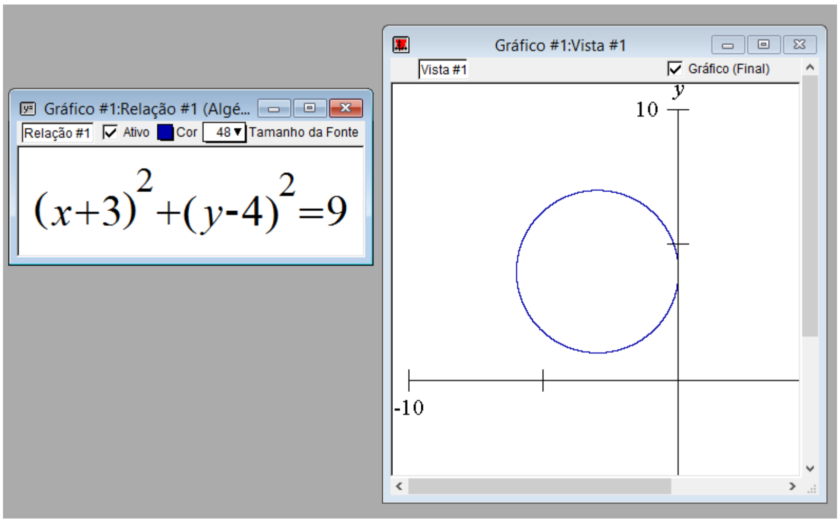


Figura 6 – Registros algébrico e gráfico de uma circunferência

Nessa perspectiva, Duval (2003, 2009, 2013) apresenta a noção de variáveis visuais, que são aquelas presentes em um registro de representação e possibilitam identificar características do mesmo objeto quando representado em outro registro. Por exemplo, ao analisar a teoria de Duval, Mariani (2006, p. 7) lembra que “uma expressão algébrica é composta por variáveis visuais que são os símbolos de: relações ($<$, $>$, $=$, ...) de operação ou sinais ($+$, $-$, ...), de variáveis, de expoentes, de coeficientes e constantes”.

Para Duval (2003, 2009) a explicitação de variáveis visuais tem um papel importante na aprendizagem das representações gráficas.

> [...] a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, interseção com os eixos etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1 etc. (DUVAL, 2003, p. 17).

A conversão não se esgota em mudar de registro de representação semiótica. Diferentes registros de um objeto matemático podem evidenciar propriedades ou aspectos desse mesmo objeto, ou seja, as representações semióticas de um mesmo objeto não possuem o mesmo conteúdo. Daí a necessidade de haver a coordenação de ao menos dois tipos de registros de representações semióticas para que os objetos matemáticos não se confundam com as próprias representações.

Segundo Duval (2013) é necessário considerar as especificidades da matemática para compreender o processo de compreensão na aprendizagem da matemática. Nesse sentido, define duas interfaces que essa ciência apresenta: exposta e oculta.

A face exposta refere-se aos objetos matemáticos, suas propriedades, fórmulas, algoritmos e demonstrações. O ensino se faz por meio de conteúdos organizados cronologicamente ao longo dos anos letivos e previstos em uma organização curricular.

A face oculta corresponde aos “gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico específicos da matemática” (DUVAL, 2013, p. 9). Noutras palavras, pode-se dizer que se refere àquilo que não se pode observar diretamente do trabalho em sala de aula. Manifesta-se indiretamente por meio de bloqueios ou erros recorrentes a partir da solicitação da resolução de problemas.

> [...] não é suficiente justapor diferentes representações de um mesmo objeto, de modo que os alunos aprendam a reconhecê-las. A teoria dos registros de representação semiótica diz respeito à face oculta da atividade matemática. Ela visa à modelagem do funcionamento semio-cognitivo que está subjacente ao pensamento matemático. Sem o desenvolvimento deste não podemos nem compreender e nem conduzir uma atividade matemática. (DUVAL, 2013, p.10).

Assim, o não reconhecimento de um mesmo objeto em duas escritas diferentes não pode ser considerado apenas um erro conceitual. Na verdade, segundo Duval (2013) a consciência desses gestos intelectuais é a condição necessária para a compreensão dos conceitos matemáticos.

2.2 TIC e Educação Matemática

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) vêm crescendo no âmbito de sua aplicação à Educação. Vivemos em um mundo altamente tecnológico, em especial no que se refere ao uso do computador e da rede mundial de computadores – Internet. Com o desenvolvimento das TIC nas últimas décadas, intensificaram-se os estudos do seu uso na Educação.

Fiorentini e Lorenzato (2007) estabelecem sete tendências de investigação em Educação Matemática, entre elas “utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no ensino e aprendizagem da matemática”. Os mesmos autores ainda afirmam que, apesar das recentes produções e avanços, pouco se conhece sobre o uso das TIC em sala de aula, no que se refere às crenças, às habilidades, às concepções, e às reações de professores, alunos, pais e ao próprio processo de ensino. Porém, não se pode tomar a pesquisa sobre o uso das TIC no ensino e aprendizagem da matemática como uma linha de pesquisa específica que não se relaciona com as demais. Pelo contrário, esse processo é amplo e complexo, no qual não é possível isolar variáveis, ao tomar por base um olhar global, qualitativo.

Com isso em mente, algumas questões se estabelecem ao considerar a realidade educacional atual. Qual o papel que as TIC podem desempenhar na compreensão de objetos matemáticos? Por que usar TIC nas aulas de matemática? Quais suas possíveis contribuições?

2.2.1 As TIC na sala de aula de matemática

A escola e os grandes avanços tecnológicos parecem caminhar para uma dicotomia cada vez mais visível. Enquanto vivencia-se grandes feitos tecnológicos da humanidade, especialmente nas últimas décadas com a invenção e difusão da Informática, Valente (1999) já constatava que o ensino ainda é muito semelhante ao do que ocorria na Idade Média. As atividades escolares que são propostas aos alunos estão muito longe das suas expectativas e do mundo que vivem fora desse contexto. Esse é, muitas vezes, um dos motivos pelo seu desinteresse pela matemática.

Os alunos muitas vezes enxergam a matemática (ou boa parte de seus conteúdos) como ultrapassada e sem utilidade prática (D'AMBRÓSIO, 1996). Evidentemente que não se está, com isso, reduzindo essa ciência a um mero "aplicacionismo", ou seja, não se defende a ideia de apenas abordar os conteúdos com maior relação ao cotidiano dos alunos. Acredita-se que o estudo dos conteúdos matemáticos pode se tornar mais interessante para o aluno à medida que este se envolve com a sua própria aprendizagem.

> Na disciplina de matemática como em qualquer outra disciplina escolar o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2006, p. 23).

As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica afirmam que o conhecimento científico e as novas tecnologias vêm se constituindo como condições para a formação de um indivíduo que saiba se posicionar perante processos e inovações que o afetam.

> Não se pode, pois, ignorar que se vive: o avanço do uso da energia nuclear; da nanotecnologia; a conquista da produção de alimentos geneticamente modificados; a clonagem biológica. Nesse contexto, tanto o docente quanto o estudante e o gestor requerem uma escola em que a cultura, a arte, a ciência e a tecnologia estejam presentes no cotidiano escolar, desde o início da Educação Básica. (BRASIL, 2013, p 26).

Nesse sentido, acredita-se que as TIC, em especial o computador, devem permear toda a Educação Básica, afinal é preciso considerar o nível tecnológico no qual se desenvolve a ciência moderna (BASSO, 1999).

Nessa perspectiva, não se pode limitar o uso do computador como reprodutor das práticas educacionais tradicionais sugeridas nos livros didáticos ou convencionadas durante a história da educação. Em outras palavras, não se pode reduzir o seu uso a apenas realizar aquilo que já se faz com as ferramentas tradicionais (lápis, papel, quadro de giz). Para Pretto e Pinto (2006), o computador pode contribuir para a educação à medida que possibilita o pensar, o criar e o memorizar. É necessário avaliar as novas possibilidades geradas pelo ensino assistido por computador que favoreçam a aprendizagem dos alunos.

> A tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis. E isso vem mostrando interessantes reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente naquelas que têm foco nos imbricados processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo nos quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes. (GRAVINA, BASSO, 2010, p. 13).

O uso do computador deve privilegiar as experimentações e o pensar do aluno, a construção do seu conhecimento, ou seja, o computador pode contribuir para a mobilização do aluno em busca da compreensão dos conceitos matemáticos. Essa nova postura, muito depende do professor, pois é dele a responsabilidade do método de ensino. Sobre a prática pedagógica, (GRAVINA, BASSO, 2010, p. 12) pontuam que as “rotinas de sala de aula também deveriam incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas também influem nas nossas formas de pensar, de aprender, de produzir”.

Concorda-se com a visão de Kenski (2013) de que é necessário rever as práticas pedagógicas que possuem as suas raízes calcadas no modelo de aprendizagem por meio da transmissão de conhecimento. Não se trata de utilizar as TIC para continuar fazendo o mesmo. É necessário rever as práticas e os hábitos docentes e, sobretudo, a aprender a trabalhar os conteúdos matemáticos de forma dinâmica e desafiadora utilizando *softwares*, ambientes virtuais e programas especiais.

> É necessário repensar a questão da dimensão do espaço e do tempo da escola. A sala de aula deve deixar de ser o lugar das carteiras enfileiradas para se tornar um local em que professor e alunos podem realizar um trabalho diversificado em relação ao conhecimento. (VALENTE, 1999, p. 8).

Acredita-se que para realizar um trabalho diferenciado não basta a inserção do computador por si só. Para se estabelecer um ambiente propício à construção do conhecimento é necessário que o aluno se envolva de forma mais ativa nesse processo. Além disso, considera-se a escolha dos recursos computacionais, a infraestrutura disponível e o processo de mediação e interação do professor com os alunos para que se alcance os resultados esperados.

No caso do presente trabalho, espera-se com a sequência didática proporcionar aos alunos diferentes experimentos que visam à aprendizagem de conceitos e propriedades da geometria analítica. Professor e computador não consistem em simples fontes de repasse de informações aos alunos. Na verdade, espera-se que os alunos compreendam esses conceitos a partir das experimentações que são convidados a realizar e com a intervenção do professor pesquisador.

2.2.2 O *software* GrafEq

O GrafEq[6] é um programa computacional que pode ser instalado gratuitamente, porém mostra automaticamente uma janela gráfica referente à compra de sua licença total. Isto não é um problema para a sua utilização, pois basta clicar em “continuar” para que a mensagem despareça e há um bom período de tempo entre uma aparição e outra. Foi desenvolvido pela empresa canadense *Pedagoguery Software Inc.*, com os direitos registrados em nome de Greg Kochaniak. Na presente pesquisa, utilizou-se a versão mais recente do *software* (versão 2.13).

O GrafEq possibilita plotar funções, equações e inequações. Sua interface é bastante intuitiva, não possui uma grande variedade de recursos, isso, porém, não limita o trabalho que se pretende desenvolver. Um dos motivos que justifica a sua

[6] O download do GrafEq pode ser feito partir do site http://www.peda.com/grafeq/.

escolha é a possibilidade de plotar inequações ou famílias delas delimitando uma determinada região e, além disso, existe o interessante atrativo visual de preencher de cores diversas essas regiões. Outra característica do *software* para o presente trabalho é a simultaneidade de experimentações que se pode fazer entre os registros algébrico e gráfico dos objetos matemáticos plotados, pois permanecem na janela principal do programa tanto as janelas com o registro algébrico (1) como a janela com o registro gráfico (2).

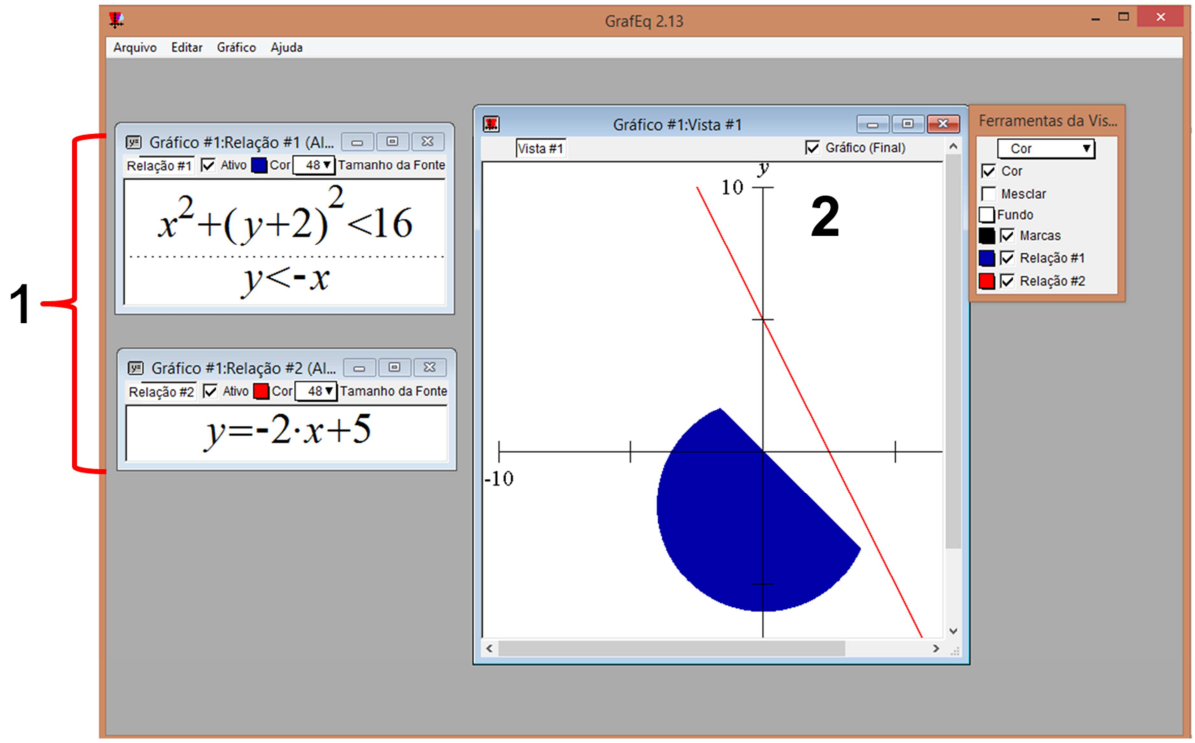


Figura 7 – Janelas algébrica e gráfica do GrafEq

Notare e Gravina (2013) destacam três aspectos do GrafEq que consideram interessantes para o seu uso no ensino da matemática. O primeiro aspecto corresponde ao fato do software possibilitar que diferentes registros algébricos convertam-se em representações gráficas, em uma única janela de registro gráfico, como ilustra a figura a seguir.

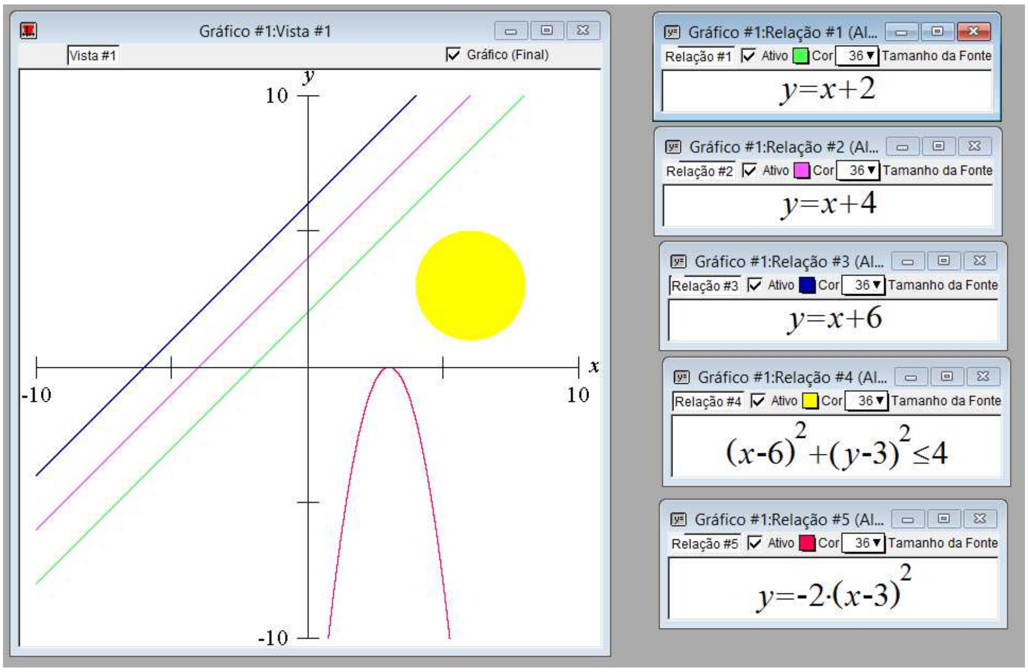


Figura 8 – Múltiplas relações representadas em apenas uma única janela gráfica

Neste caso, têm-se cinco relações algébricas na coluna à direita representadas em uma única janela à esquerda contendo os seus respectivos registros gráficos. Essa é uma característica importante para o trabalho de construção de imagens que contenham diversos elementos gráficos.

A segunda característica evidenciada corresponde ao nível de elaboração dos raciocínios algébricos possíveis para as construções gráficas, conforme ilustra a figura (9).

Para construir a representação gráfica da figura (9), é possível sobrepor o círculo branco ao quadrado azul por meio da definição de duas relações de inequações distintas, conforme a construção (a). Porém, também é possível realizar essa construção a partir de um raciocínio mais elaborado, por meio da construção da região externa ao círculo e interna à região quadrangular, sem a sobreposição de imagens conforme a relação (b).

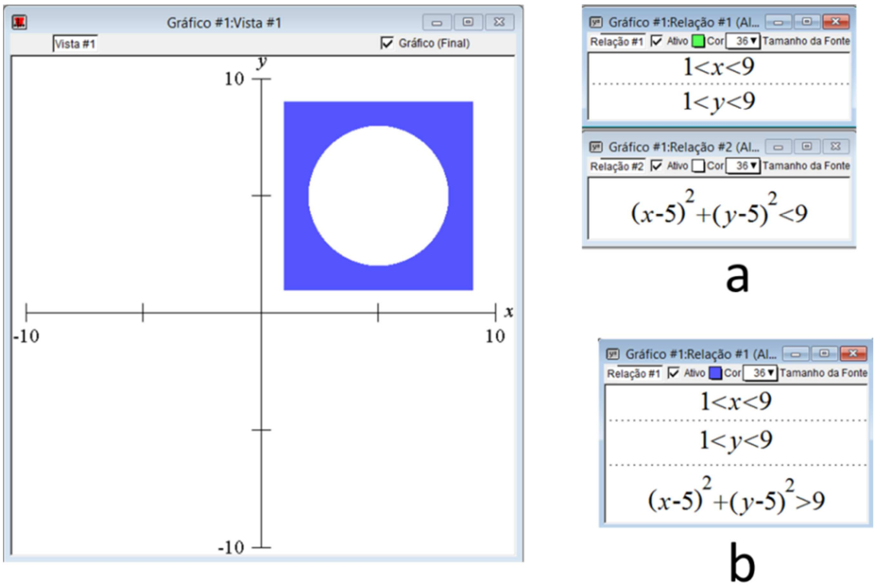


Figura 9 – Níveis de elaboração de representações de regiões no GrafEq

O terceiro recurso apontado refere-se à possibilidade de representar graficamente equações que contenham parâmetros.

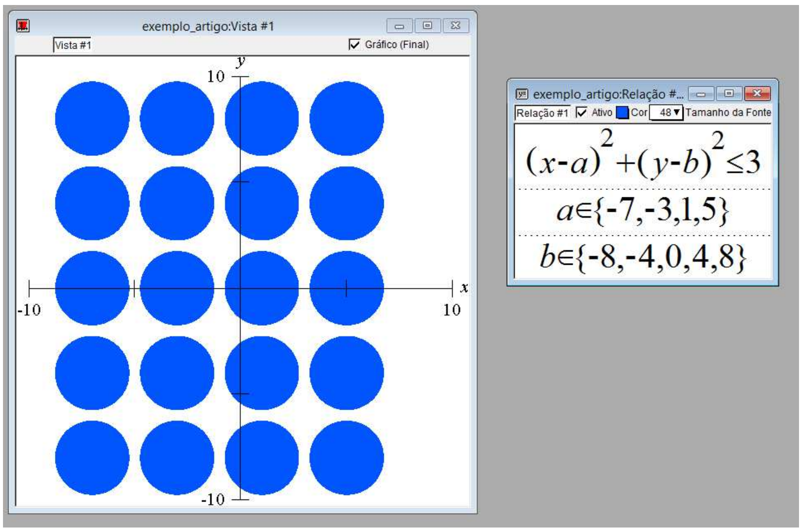


Figura 10 – Uso de parâmetros algébricos no GrafEq

Para determinar os registros gráficos dos círculos da figura anterior, ao invés de se plotar cada região circular individualmente, definiu-se a relação algébrica por meio de um raciocínio generalizador (NOTARE, GRAVINA, 2013). Esse é um interessante recurso do GrafEq à medida que se pode elaborar atividades com diferentes graus de dificuldade. Além disso, possibilita uma abordagem pouco usual em sala de aula, mas que é importante para um entendimento mais amplo dos objetos matemáticos envolvidos.

É importante ressaltar a possibilidade de o aluno conjecturar, testar, analisar e avaliar as suas construções no GrafEq. Gravina e Basso (2010) esclarecem sobre a importância desse processo.

> Ao controlar os efeitos de desenho a partir de manipulações algébricas, os alunos podem apreender sobre movimentos de gráficos. Desta forma, as expressões algébricas associadas ficam impregnadas de significado geométrico e isso é resultado das explorações feitas no sistema de representação que com seu dinamismo, de imediato, relaciona duas diferentes representações de um objeto – a analítica e a geométrica. (GRAVINA, BASSO, 2010, p 14).

Ainda, com relações às manipulações algébricas, pode-se trabalhar no GrafEq transformações como translações, reflexões, dilatações e contrações. Na imagem a seguir tem-se um exemplo de semicírculos transladados horizontalmente.

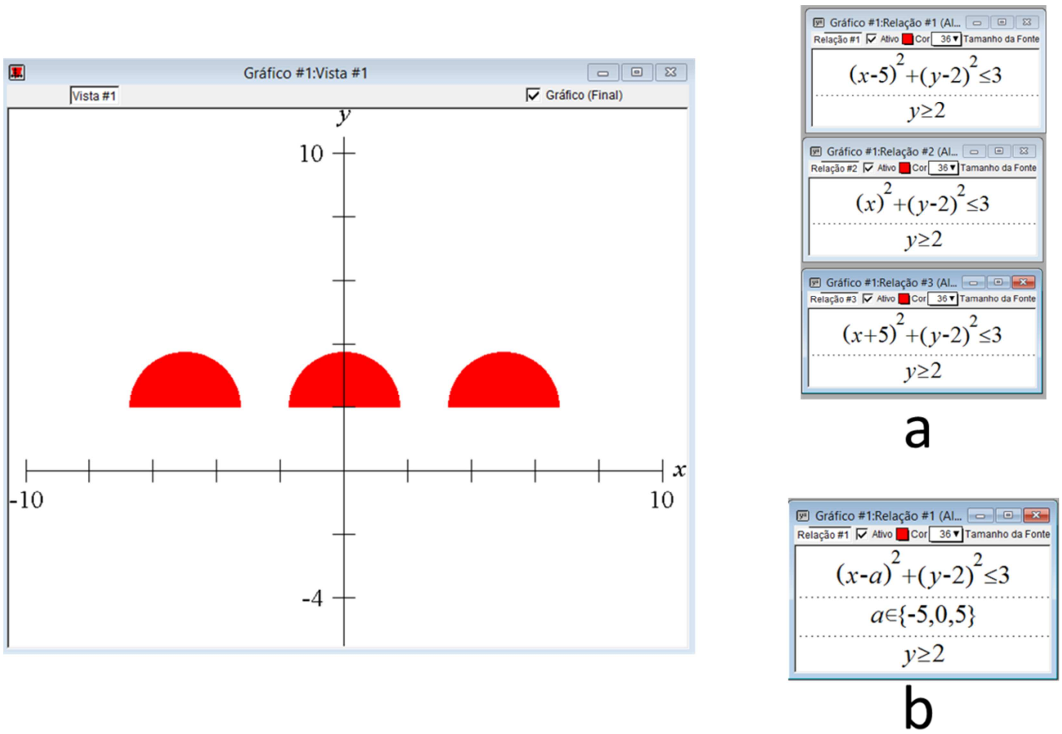


Figura 11 – Semicírculos horizontalmente transladados no GrafEq

A construção dos semicírculos pode ser realizada separadamente como indicado na relação (a) ou de forma mais complexa como na relação (b). Independentemente da forma como é realizada, pode-se observar que esse tipo de situação potencializa ao aluno discriminar as unidades significantes do registro algébrico (DUVAL, 2009), haja vista que graficamente evidencia que os semicírculos apresentam o mesmo raio e as origens dos semicírculos transladados horizontalmente apresentam a mesma ordenada.

Essas são algumas das características do *software* que nos conduzem a acreditar que a utilização dessa ferramenta tecnológica pode possibilitar situações diferentes das habituais e propícias para o processo de ensino e aprendizagem da geometria analítica. Sobre as potencialidades dos *softwares*, Gravina e Basso (2010) analisam a expressão *experimentos para o pensamento* quando afirmam que tais ferramentais suportam a exteriorização, a diversificação e a ampliação de pensamentos.

À luz dessas reflexões teóricas, o que se quer na sequência didática é estabelecer diferentes experimentos para o pensamento com o intuito de que os alunos possam coordenar representações semióticas de elementos da geometria analítica do Ensino Médio auxiliando na compreensão de seus conceitos e propriedades.

2.2.3 Levantamento bibliográfico sobre trabalhos envolvendo o GrafEq

Realizou-se um levantamento bibliográfico a respeito do uso do GrafEq no qual selecionou-se trabalhos finais de graduações e dissertações em meio digital[7]. Verificou-se que existem poucos trabalhos acadêmicos que apresentam abordagens metodológicas para o ensino da matemática com esse *software*. Dentre os trabalhos encontrados, destacam-se os mencionados a seguir. O primeiro e o segundo correspondem a trabalhos de conclusão de curso e os outros dois são dissertações

[7] Pesquisou-se nos repositórios: Portal de Periódicos da CAPES (www.periodicos.capes.gov.br); Repositório Digital da UFRGS (www.lume.ufrgs.br); Scientific Electronic Library Online (www.scielo.org); Google Acadêmico (https://scholar.google.com.br/).

de mestrado. Todos os trabalhos são oriundos da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

• *GrafEq no processo de ensino e aprendizagem de funções afins* (GAUTO, 2012). A autora desenvolve esta pesquisa com o objetivo de avaliar e validar uma sequência didática organizada segundo a metodologia da Engenharia Didática com o uso do GrafEq e elaborada segundo a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. A autora destaca que a teoria busca estabelecer uma forma de ensino não mais calcada na transmissão do conhecimento, mas sim em situações de ensino criadas pelo professor, nas quais os alunos possam testar conjecturas, formular hipóteses, construir modelos, realizar comparações e estabelecer as suas teorias, participando ativamente do processo de ensino. As situações didáticas são:

- ✓ Ação: de caráter experimental, refere-se quando o aluno busca responder uma questão proposta, utilizando os seus saberes.
- ✓ Formulação: Quando o aluno tem de transformar um conhecimento implícito em explícito, devendo comunicar uma informação.
- ✓ Validação: É quando o aluno, além de comunicar uma informação, deve saber dizer se é verdadeira, argumentando sobre o porquê disso.
- ✓ Institucionalização: Nesta etapa o professor tem um papel mais ativo, devendo auxiliar os alunos na unificação do que foi construído nas situações anteriores, como forma de socializar o conhecimento produzido.

Apesar da classificação em quatro tipos de situações, é ressaltado que a separação entre elas não é nítida, na verdade estão interligadas.

A pesquisa busca responder ao seguinte problema: O uso do *software* GrafEq pode ajudar os alunos a compreenderem melhor a representação gráfica das funções afins?

Trata-se de uma experiência ocorrida com alunos do primeiro ano do Ensino Médio e que aborda o conteúdo das funções afins. Para as construções no GrafEq são sugeridas figuras diversas e uma imagem de uma ilusão de ótica. A autora acredita que a situação de institucionalização do conhecimento não foi plenamente atingida, pois para esta etapa havia planejado que os alunos expressassem na forma escrita as estratégias por eles utilizadas na construção de algumas imagens no GrafEq, o que não conseguiram realizar plenamente. Nesse sentido, a autora conclui que acredita que uma atividade diferente deveria ter sido elaborada para contemplar essa situação.

A autora também aponta que a sequência deveria ter abordado mais situações nas quais os alunos construíssem retas no GrafEq que não fossem paralelas a um dos eixos do plano cartesiano, explorando de forma mais ampla o tópico dos coeficientes da reta. Por fim, conclui pela validação da sequência didática, pois contribuiu para uma melhoria da visualização gráfica da função afim por parte dos alunos.

• *GrafEq no ensino e aprendizagem de inequações: uma pesquisa baseada na negociação de significados* (KÖFENDER, 2014). O autor objetiva por meio deste trabalho refletir sobre o ensino de inequações, domínio, imagem e translações no gráfico de funções, bem como desenvolver e analisar uma sequência de atividades com o uso do GrafEq envolvendo esses conteúdos.

O problema da pesquisa é: Se e como o uso do *software* GrafEq em sala de aula pode auxiliar no estudo de Inequações e na significação dos conceitos de domínio, imagem, translação horizontal e vertical de funções? Para tanto utiliza como referencial a Teoria da Negociação de Significados, utilizando como principais referenciais os pesquisadores Dario Fiorentini e Maria Ângela Miorim. Essa teoria tem como cerne o estudo das trocas de significados presentes nos diálogos em sala de aula entre os alunos e professor-alunos. O principal objetivo das atividades em sala de aula foi a ressignificação dos conceitos que os alunos já trazem consigo. Nesta teoria, o professor deixa de ser o centro do ensino e aprendizagem, sendo mediador nesse processo e o aluno passa a ter mais autonomia na construção do seu conhecimento.

O autor afirma que o GrafEq possui interface intuitiva e de fácil entendimento. Além disso, com base em Brasil (2006), classifica-o como um programa de expressão à medida que possibilita aos alunos realizar experimentos, testar hipóteses, esboçar conjecturas e elaborar estratégias para resolver problemas.

Sobre o ensino dos conteúdos abordados na sua pesquisa, o autor lembra a possibilidade do professor fazer conexões entre os conteúdos matemáticos como, por exemplo, no caso do estudo do sinal de uma função e de inequações. Além disso, recorda que o ensino de inequações geralmente restringe-se aos aspectos algébricos, isto é, poucas vezes são abordadas as regiões por elas delimitadas.

Outro ponto abordado pelo autor refere-se à importância do significado da representação gráfica das funções quando são alterados os seus coeficientes.

Trata-se de uma pesquisa empírica que utiliza a metodologia do estudo de caso. O autor realizou as atividades planejadas com uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública de Porto Alegre/RS. Como tema das construções realizadas na sequência de atividades foram escolhidos os Minions – personagens do filme "Meu malvado favorito" e que atualmente tem destaque na rede social Facebook.

Na análise da experiência, o autor lembra as dificuldades iniciais apresentadas pelos alunos com o conteúdo de inequações, mas que foram amenizadas durante a dinamização da sequência. Além disso, encontrou dificuldades no funcionamento do GrafEq, pois alguns computadores do laboratório de informática utilizado operavam com o sistema Linux.

O autor avalia que a negociação de significados influenciou de forma positiva o desenvolvimento das atividades à medida que possibilitou aos alunos questionar e dialogar sobre aspectos e conceitos que eles produziram e consideravam importantes, estabelecendo significados matemáticos comuns a toda turma. Por fim, o autor argumenta que o GrafEq foi fundamental nesse processo, porque permitiu aos alunos trabalhar na elaboração de estratégias de resolução de problemas.

- *Tecnologias digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos da geometria analítica: manipulações no software GrafEq* (SANTOS, 2008). Neste trabalho, o autor visa investigar o alcance da inserção do GrafEq no ensino da geometria analítica. Mais especificamente, aborda o seguinte problema de pesquisa: A manipulação de desigualdades no GrafEq, verificando suas representações no plano cartesiano, ajudará aos estudantes na apropriação da linguagem algébrica representativa de situações no plano?

Para responder esse problema, o autor elabora e dinamiza uma sequência de atividades com duas turmas de alunos do segundo ano do Ensino Médio. Trata-se de um estudo de caso que se fundamenta na teoria sobre a introdução das tecnologias digitais na Educação Matemática de James J. Kaput, o qual defende que o computador deve servir como ferramenta de produção/construção.

A teoria afirma que a organização da experiência pelo homem tem como origem a interação entre dois meios: o mundo físico (com operações observáveis) e o mundo mental (com operações hipotéticas). Dessa forma, para organizar e avaliar essas interações no âmbito da Educação Matemática a teoria apresenta a noção de sistema de notação, definido como conjunto de regras para: identificar ou criar caracteres; operá-los entre eles; determinar relações com outros sistemas de notação.

O autor aponta que, de acordo com o nível cognitivo do indivíduo, a tradução de um sistema em outro pode ser mais ou menos direta, como no caso da transferência da equação de uma função para o seu gráfico equivalente, ou vice versa. A teoria de Kaput estabelece que são necessários meios dinâmicos que facilitem a projeção de alguma variação que permita o aluno ler e interpretar os conteúdos matemáticos representados. Nesse sentido, o GrafEq permite fazer equivalências entre sistemas de notação à medida que se manipula as informações algébricas de um objeto e o *software* retorna as equivalências geométricas. Segundo o autor, essas atividades não teriam o mesmo potencial na aprendizagem do aluno se fossem utilizadas mídias estáticas como o lápis, papel e o quadro.

Sobre o GrafEq, aponta que seu uso pode potencializar as relações entre os sistemas algébrico e geométrico da geometria analítica, visto que o usuário pode manipular as relações algébricas e verificar as transformações gráficas ocorridas.

Na sequência didática são propostas construções de polígonos e figuras diversas. Para a análise da experimentação realizada, o autor do trabalho, além de realizar uma avaliação geral dos resultados encontrados, analisa individualmente as produções de doze alunos, isto é, descreve os procedimentos que cada aluno (sujeito da pesquisa) utiliza para resolver cada atividade proposta e, com isso, observa o seu desenvolvimento ao longo da experimentação.

Por fim, apresenta algumas conclusões, entre as quais se destaca que os estudantes ampliaram suas capacidades de exploração por meio do uso do GrafEq, com o qual pôde-se realizar uma abordagem diferente da tradicional que aproximou a álgebra e a geometria (áreas que compõem a geometria analítica). Além disso, aponta que, para trabalhos futuros, seria interessante integrar os softwares GrafEq e GeoGebra. Essa sugestão, segundo o autor, dá-se em virtude de que no GeoGebra, ao contrário do GrafEq, os alunos realizam construções geométricas e obtém as suas equivalências algébricas. Ou seja, no GeoGebra o usuário constrói os objetos geométricos (pontos, retas, circunferências, etc.) e o *software* retorna os devidos respectivos registros algébricos (coordenadas, equações, etc.).

• *O estudo da equação* $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ *utilizando o software GrafEq – Uma proposta para o Ensino Médio* (GOULART, 2009). Este trabalho propõe uma nova abordagem da geometria analítica do Ensino Médio com o uso do GrafEq a partir do estudo de alguns dos seus elementos (retas, circunferências, elipses e parábolas) enquanto formas da equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. A autora trata sobre o problema: Como explorar conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio utilizando o ambiente informatizado, em particular o *software* GrafEq?

A sequência didática elaborada apresenta como temática a representação de obras de arte no GrafEq. Essa pesquisa apoia-se na teoria construtivista de Jean Piaget e busca com o uso do *software* problematizar situações nas quais sejam favorecidos os processos de assimilação e acomodação. Ao final do trabalho, a pesquisadora enfatiza dois principais aspectos. Um diz respeito à evolução dos alunos ao longo da experimentação das atividades uma vez que passaram de observadores dos efeitos produzidos na representação gráfica devido às alterações algébricas realizadas, para posteriormente explicar as causas desses fenômenos. O outro se refere à importância da intervenção do professor nesse processo, descrita como um mediador para colocar o aluno em novos patamares de conhecimento.

Pode-se observar que esses trabalhos assim como o que se desenvolve na presente pesquisa apresentam uma característica em comum: propor uma nova abordagem para o ensino e aprendizagem de determinados conteúdos com o uso do GrafEq. Acredita-se que o referencial teórico adotado para subsidiar as fases da Engenharia Didática – a Teoria dos Registros de Representação Semiótica – possa evidenciar novos aspectos sobre o processo de compreensão de conceitos da geometria analítica. Mais especificamente, espera-se elaborar uma proposta de ensino que leva em conta a natureza semiótica da geometria analítica. Acredita-se que o GrafEq pode potencializar a aprendizagem desse conteúdo à medida que possibilita explorar as conversões entre os registros algébrico e gráfico de conceitos como reta, circunferência e parábola. Além disso, é interessante mencionar que o tema escolhido para as construções no *software* são imagens de obras arquitetônicas da cidade de Santa Maria/RS, como forma de valorizar o patrimônio cultural local.

3 CAMINHOS METODOLÓGICOS

Considerando-se as possibilidades pedagógicas oportunizadas e favorecidas pelas TIC no ensino de matemática, nesse trabalho espera-se oportunizar ao aluno uma abordagem diferenciada, em especial no que se refere à visualização de formas geométricas no seu cotidiano. Nesse sentido, procura-se uma abordagem na qual o aluno possa compreender conceitos e algumas de suas propriedades gráfico-algébricas.

Tomando os pressupostos e resultados da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, pergunta-se:

Uma sequência didática planejada com o uso do GrafEq contribui para a aprendizagem de conceitos da geometria analítica do Ensino Médio? De que modo isto acontece?

Portanto, o que se quer com essa pesquisa é propor uma sequência de atividades com a qual os alunos possam ser levados a se apropriar dos conceitos e algumas propriedades da geometria analítica por meio da coordenação de suas representações semióticas com o auxílio do *software GrafEq* e compreender esse processo. Mais especificamente, abordaram-se os conceitos de reta, circunferência e parábola. No que se refere às propriedades desses conceitos, foram abordados os tópicos: equação da reta, posições relativas entre retas, coeficientes angular e linear, equação de uma circunferência, translação de circunferências, equação de uma parábola, translação de parábolas, posições relativas entre retas, circunferências e parábolas. Salienta-se que essa abordagem procurou favorecer os processos de transformação dos registros de representação semiótica (tratamento e conversão) dos conceitos abordados.

Esta pesquisa tem, portanto, como principal objetivo estudar a compreensão de conceitos na aprendizagem da geometria analítica do Ensino Médio a partir de uma sequência didática planejada com o auxílio do *software* GrafEq. Mais especificamente analisar a compreensão das representações algébrica e gráfica de conceitos da geometria analítica do Ensino Médio construídas pelos alunos de uma turma do terceiro (3°) ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Santa Maria/RS. Almejou-se propor uma abordagem da geometria analítica do Ensino Médio por meio de representações no GrafEq de obras arquitetônicas dessa cidade.

3.1 Pesquisa qualitativa

Esteve-se interessado em estudar os significados que os alunos atribuem para as diferentes representações semióticas de objetos da geometria analítica do Ensino Médio. Considerando as diferentes possibilidades de interação no espaço de uma sala de aula, pretendeu-se expor e explicar esses significados.

Segundo Moreira (2003) a principal característica da pesquisa qualitativa é a interpretação do pesquisador sobre os dados e informações coletadas, tanto que alguns autores preferem chamá-la de interpretativa.

> O investigador interpretativo observa participativamente, de dentro do ambiente estudado, imerso no fenômeno de interesse, anotando cuidadosamente tudo o que acontece nesse ambiente, registrando eventos – talvez através de audioteipes ou de videoteipes -- coletando documentos tais como trabalhos de alunos, materiais distribuídos pelo professor, ocupa-se não de uma amostra no sentido quantitativo, mas de grupos ou indivíduos em particular, de casos específicos, procurando escrutinar exaustivamente determinada instância tentando descobrir o que há de único nela e o que pode ser generalizado a situações similares. (MOREIRA, 2003, p. 24).

A fase de experimentação do presente estudo corresponde à dinamização de uma sequência didática junto a uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da cidade de Santa Maria. Tanto a elaboração da sequência quanto a intervenção junto à turma de alunos foi feita pelo pesquisador, ou seja, esteve imerso no ambiente de pesquisa. Pode-se dizer que o objetivo central do pesquisador foi buscar indícios do quê e como os alunos pensam, por mais que jamais consiga decifrar completamente aquilo que se passa pela mente dos sujeitos investigados.

Nessa perspectiva, torna-se essencial ter bem definido quais serão seus instrumentos de coleta de dados, a saber: diário de bordo e a produção dos alunos.

O diário de bordo consiste do instrumento no qual o pesquisador anotou algumas falas dos alunos, as suas observações sobre as situações (previstas ou não) que surgiram durante as aulas e que considerou importantes para compreender a problemática dessa pesquisa, bem como os encaminhamentos dados. As produções dos alunos correspondem às respostas dadas por eles a questionamentos propostos na sequência didática e os arquivos com as construções que realizaram no GrafEq. Também foram realizadas algumas fotografias do ambiente de trabalho escolar, ou seja, sem expor diretamente os alunos, como forma de ilustrar o trabalho desenvolvido.

A presente pesquisa apresenta características descritivas e interpretativas. Ao final da experimentação, caberá ao pesquisador narrar os resultados encontrados a partir da sua interpretação. Parafraseando Moreira (2003, p. 25), trata-se de atribuição de significados, significados dados pelo próprio pesquisador e pelos sujeitos da pesquisa. A interpretação do pesquisador gerará asserções de conhecimento que só serão validadas pelo leitor do seu trabalho se estiverem fundamentadas e em consonância com uma teoria.

3.2 Engenharia Didática

A pesquisa está estruturada de acordo com as etapas da Engenharia Didática que visa sistematizar a realização da pesquisa nos âmbitos teórico e experimental. Dessa forma, possibilita ao professor refletir sobre sua própria prática a partir do estabelecimento do seu espaço de atuação como seu próprio campo de pesquisa.

Foi criada por Michèle Artigue na década de 80 e provém de bases das teorias cognitivistas. O nome é uma alusão ao trabalho do engenheiro na realização de um projeto arquitetônico, isto é, “o educador também depende de um conjunto de conhecimentos sobre os quais ele exerce o seu domínio profissional” (PAIS, 2008, p. 100). O mesmo autor ainda esclarece que ela não é suficiente para garantir os resultados almejados haja vista a complexidade do objeto educacional. Pode-se dizer, portanto, que a Engenharia Didática exige sólido conhecimento científico, básico, essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia, porém necessitam ser solucionados.

> A Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) a questão das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) a questão do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. É uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. (CARNEIRO, 2005, p. 3).

Conforme Pais (2008), a Engenharia Didática se constitui em uma forma de sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa didática, porém é possível ampliar o sentido de aplicação do referencial metodológico.

3.2.1 As fases da Engenharia Didática

A Engenharia Didática compreende quatro (4) fases consecutivas: análises preliminares; concepção e análise a *priori*; aplicação de uma sequência didática (experimentação), análise *a posteriori* e avaliação (validação).

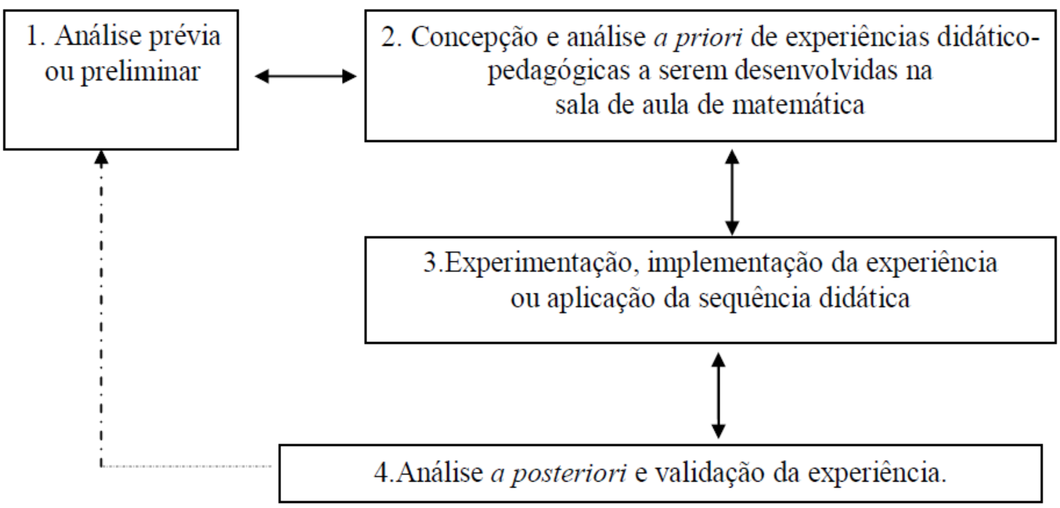


Figura 12 – As fases da Engenharia Didática
Fonte: Fioreze (2010, p. 92).

O diagrama apresentado por Fioreze (2010, p. 92) representa as fases da Engenharia Didática. As setas indicam a possibilidade de replanejamento ou readequação durante todo o processo, desde a análise prévia até a análise *a posteriori*. O tracejado representa o confronto entre a análise prévia e a análise *a posteriori.*

Nas análises preliminares são realizadas algumas inferências prévias que podem advir de constatações empíricas, concepções dos sujeitos envolvidos e condições da realidade na qual a pesquisa estará inserida (PAIS, 2008). Para tanto, é feita uma análise sobre como é realizado o ensino habitual com o propósito de elaborar uma intervenção que modifique para melhor a sala de aula. Com o intuito de organizar esta fase, pode-se proceder a uma descrição das dimensões do fenômeno relacionado com o ensino da matemática – epistemológica, didática e cognitiva.

Na dimensão epistemológica procedeu-se a análise das características do conteúdo em estudo – a geometria analítica. A dimensão didática refere-se às características do funcionamento do sistema de ensino, mais especificamente à forma como o conteúdo é trabalhado em sala de aula. A dimensão cognitiva compreende uma análise das resistências e dificuldades dos alunos na compreensão do conteúdo.

Na concepção e análise *a priori* são definidas variáveis do sistema de ensino que podem interferir no fenômeno em estudo (PAIS, 2008). Esta fase corresponde às decisões didáticas para enfrentar os problemas detectados na análise preliminar. Segundo Artigue (1996, apud PAIS, 2008) deve-se realizar uma distinção entre variáveis globais e locais. As variáveis globais referem-se ao problema geral (do ponto de vista amplo, global) e as variáveis locais correspondem ao planejamento específico de cada uma das etapas que compõem a sequência didática.

> É sobre o conjunto dessas variáveis que se inicia a análise *a priori*, cujo objetivo é determinar quais são as variáveis escolhidas sobre as quais se torna possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão dos conceitos em questão. (PAIS, 2008, p. 102).

A fase seguinte é a aplicação da sequência didática – a experimentação. Consiste na dinamização das aulas planejadas, como apresentam um caráter voltado à pesquisa também são chamadas de sessões. Nesse sentido, não são aulas comuns, pois o pesquisador necessita coletar o máximo de informações possíveis que possam contribuir para explicar o fenômeno de interesse. Os instrumentos da pesquisa são, dessa forma, dependentes das variáveis as quais se quer analisar. No caso da presente pesquisa, como se está interessado em observar a compreensão dos conceitos da geometria analítica à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, opta-se pela análise das soluções propostas pelos alunos (tanto no material impresso entregue a eles quanto nos arquivos produzidos no GrafEq) e o diário de bordo.

Na última fase, a análise *a posteriori* e validação, ocorre a análise dos resultados encontrados na experimentação. Segundo (PAIS, 2008, p. 103), “o importante é que essa análise atinja a realidade da produção dos alunos, quando possível, desvelando seus procedimentos de raciocínio”. A validação concerne à confrontação entre os dados obtidos nas análises *a priori* e *a posteriori.* Para Fioreze (2010) e Pais (2008) essa confrontação constitui a Engenharia Didática como sendo um estudo de caso.

> Do ponto de vista metodológico, a validação é uma etapa onde a vigilância deve ser ampliada, pois se trata de garantir a essência do caráter científico. Dessa maneira, enquanto procedimento metodológico, a engenharia didática se fundamenta em registros de estudos de casos, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada. (PAIS, 2008, p. 103).

Nas palavras de Carneiro (2005), esse confronto é o momento de discutir as ideias iniciais da análise preliminar e que, na prática, sofreram distorções, deixando de serem válidas.

3.3 Breve caracterização do local de pesquisa

Para a realização da pesquisa escolheu-se o Colégio Estadual Manoel Ribas, localizado na região central de Santa Maria. Trata-se da escola com maior número de alunos da cidade. No ano de 2014, o colégio possuía aproximadamente mil e oitocentos alunos matriculados e distribuídos nos turnos manhã (segundo e terceiro anos do Ensino Médio), tarde (primeiro ano do Ensino Médio) e noite (modalidade de Educação de Jovens e Adultos – EJA). Por estar localizado na região central de Santa Maria, seus alunos são oriundos das mais diferentes regiões da cidade.

Sua infraestrutura vem sendo melhorada nos últimos anos. Trata-se, inclusive, de um prédio histórico da cidade, fundado no ano de 1913 (COLÉGIO MANOEL RIBAS, 2012). Possui dois laboratórios de informática e duas salas com recursos multimídia. Um dos laboratórios é equipado com vinte e dois (22) computadores, dos quais quatro (4) operam com o sistema Windows e o restante com o sistema Linux Educacional. Com isso, escolheu-se o outro laboratório, pois dispõe de vinte (20) computadores que operam com o sistema Windows, haja vista que é necessário para a instalação e funcionamento do GrafEq. As salas multimídia são espaços equipados com *datashow*, lousa branca, microfone e caixas de som.

Para a utilização dos laboratórios de informática e das salas multimídia o professor da disciplina deve realizar o seu agendamento prévio com a equipe gestora da escola. Essa infraestrutura é pouca para uma escola da dimensão do Colégio Estadual Manoel Ribas ao se considerar que possui em torno de vinte e duas (22) turmas por turno. Isso, inclusive, dificultou em alguns momentos a realização da presente pesquisa, pois, por mais que se tenha agendado previamente os horários da experimentação, ocorreram remanejamentos na distribuição da grade semanal de disciplinas.

Segundo a equipe gestora, a maioria das atividades realizadas nos laboratórios de informática referem-se à coleta de informações na Internet propostas pelos professores das disciplinas. Quanto à disciplina de Matemática, a professora titular da turma realizou durante o ano de 2014 uma atividade de pesquisa na Internet sobre o conteúdo de geometria espacial (mais especificamente, sobre as figuras geométricas pirâmide e cone). Além disso, promoveu uma discussão a respeito dessa pesquisa por meio do *chat* eletrônico da rede social Facebook. Durante a experimentação da sequência didática elaborada para a presente pesquisa, os alunos afirmaram que conheciam o *software* GeoGebra, pois haviam trabalhado com ele em um ano anterior, o qual não souberam especificar nem descrever a atividade que realizaram.

A escolha da escola para a realização da pesquisa deveu-se pelo fato do autor deste trabalho, à época da experimentação da sequência, ter sido professor lotado junto a essa instituição, atuando em primeiros anos do Ensino Médio. Além disso, acrescenta-se a infraestrutura disponível e o interesse da equipe gestora da escola e dos alunos em participar da pesquisa. A definição da turma que participaria do estudo foi realizada junto à supervisão escolar da escola e posterior contato com a professora titular da disciplina Matemática.

A turma escolhida possuía vinte e cinco alunos frequentes durante o ano letivo. Sete deles ausentaram-se em algumas aulas, tanto antes quanto durante o período da experimentação da sequência didática. Assim, optar-se-á em analisar os resultados da sequência didática para os dezoito alunos que frequentaram de forma mais regular as aulas. Consiste em uma turma do Ensino Médio regular, cuja maioria dos alunos possuía de dezessete a dezenove anos. Em algumas aulas, fez-se necessário que fossem formadas algumas duplas devido ao número maior de alunos do que computadores disponíveis.

Foram trabalhadas junto aos alunos no laboratório de informática vinte e cinco horas-aula de quarenta e cinco minutos cada. A carga horária semanal para a disciplina matemática é de quatro horas-aula semanais. Antes disso, o pesquisador observou uma aula da professora titular na qual também esclareceu os alunos sobre a pesquisa e o respectivo Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A).

Na página seguinte, apresenta-se um quadro contendo a distribuição das atividades realizadas ao longo dos encontros, bem como o respectivo número de horas-aula, os dias em que foram dinamizadas e os conteúdos abordados em cada.

ATIVIDADE	NÚMERO DE HORAS/AULA DISPENDIDAS	DATA (2014)	CONTEÚDOS
Atividade 1	1 h/a	20/10	Figuras Geométricas Planas.
Atividade 2	2 h/a	22/10	Reta; Inequações; Sistemas de Inequações.
Atividade 3	2 h/a	27/10 e 29/10	Reta; Inequações; Sistemas de Inequações; Paralelismo de retas.
Atividade 4	5 h/a	30/10 (1 h/a), 4/11 (2 h/a) e 7/11 (2 h/a)	Reta; Inequações; Sistemas de Inequações; Interseção entre retas.
Atividade 5	1 h/a	12/11	Reta; Paralelismo de retas; Coeficientes da equação da reta; Gráfico de uma reta.
Atividade 6	1 h/a	12/11	Equação da circunferência.
Atividade 7	3 h/a	14/11 (1 h/a) e 17/11 (2 h/a)	Circunferência; Círculo; Inequações; Sistemas de inequações.
Atividade 8	3 h/a	19/11 (1 h/a) e 21/11 (2 h/a)	Circunferência; Círculo; Inequações; Sistemas de inequações; Translação de Circunferências e Círculos.
Atividade 9	1 h/a	24/11	Equação e gráfico de uma circunferência; Translação de Circunferências.
Atividade 10	1 h/a	26/11	Equação de uma parábola; Função quadrática.
Atividade 11	2 h/a	28/11	Reta; Circunferência; Parábola.
Atividade 12	1 h/a	1º/12	Equação de uma parábola; Gráfico de uma parábola.
Atividade 13 (apresentação)	2 h/a	4/12	Reta; Circunferência; Parábola.

Quadro 2 – Atividades realizadas ao longo dos encontros

4 O ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA E AS ANÁLISES PRELIMINARES

A geometria analítica é tema indicado pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Este documento caracteriza-a sob dois olhares:

- A álgebra sob o olhar da geometria: refere-se ao estudo dos pares ordenados (x, y) que são solução de uma equação;
- A geometria sob o olhar da álgebra: por meio das propriedades das figuras geométricas.

> Uma vez definido o sistema de coordenadas cartesiano, é importante trabalhar com os alunos o significado de uma equação. Por exemplo: fazê-los entender que a equação $x = 3$ corresponde a uma reta paralela ao eixo y ou que qualquer ponto que tenha segunda coordenada negativa não pode estar na curva $y = x^2$. O entendimento do significado de uma equação e de seu conjunto de soluções não é imediato, e isso é natural, pois esse significado não é explícito quando simplesmente se escreve uma equação. (BRASIL, 2006, p. 77).

O documento esclarece que a abordagem do professor deve conter as duas vias, ou seja, deve procurar pelo entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. Nesse sentido, pode-se observar que o documento dá ênfase a duas representações matemáticas que devem ser abordadas de forma articulada, a algébrica e a gráfica.

O mesmo documento ainda realiza algumas análises no que se refere a possíveis ações no estudo desse conteúdo matemático. Menciona que é “importante trabalhar com os alunos o significado de uma equação” (BRASIL, 2006, p. 77). Assim, por exemplo, é necessário discutir o que representam as equações $y = 2$ e $x = -4$, retas paralelas aos eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente. Também salienta que as equações da reta e da circunferência devem ser deduzidas e não simplesmente apresentadas aos alunos, haja vista que por meio da sua dedução é possível dar sentido geométrico aos seus parâmetros.

Além disso, é importante retomar o papel da língua natural no processo de ensino e aprendizagem. Os textos e situações que se propõem ao aluno solucionar são, em geral, escritos na língua natural, com ou sem signos específicos da matemática. Em muitos casos, provavelmente na maioria deles, cabe-lhe transcrever esses problemas em outro (s) registro (s) de representação, ou seja, trata-se de uma conversão.

Por exemplo, o problema “Determine os valores de *m* para que o ponto *P(2, m)* seja externo à circunferência $\alpha: (x-3)^2+(y+7)^2=17$” (SOUZA, 2010, p. 194), apesar de apresentar um registro algébrico para o ponto *P* e para a circunferência, traz em língua natural uma informação importantíssima para a sua solução, a característica do ponto ser exterior à essa circunferência. Nesse sentido, o aluno, muito provavelmente, necessitará realizar uma conversão dessas informações para o registro gráfico, para então realizar os procedimentos algébricos para encontrar os intervalos reais que solucionam o problema, ou seja, outra conversão partindo do registro gráfico para o algébrico.

Nesse sentido, desenvolve-se nesse trabalho uma abordagem com o uso do *softwares* GrafEq e GeoGebra, de modo a possibilitar ao aluno uma forma de coordenar simultaneamente as representações gráfica e algébrica de conceitos da geometria analítica do Ensino Médio. Também é fundamental observar o papel decisivo da língua natural nesse processo. As atividades visam que o aluno experimente e investigue diferentes situações propostas de modo a compreender o seu conceito.

A partir dessas reflexões iniciais, proceder-se-á à análise das dimensões que compõem a primeira fase da Engenharia Didática (análises preliminares), a saber: a dimensão epistemológica, a dimensão didática e a dimensão cognitiva.

4.1 Dimensão epistemológica – reflexões nas perspectivas filo e ontogenética do desenvolvimento da geometria analítica

Ao mesmo tempo em que se considera importante conhecer os obstáculos e dificuldades encontrados no desenvolvimento da matemática ao longo da história da humanidade, é necessário analisar as dificuldades na construção do conceito para o indivíduo. Não necessariamente os obstáculos encontrados na história da matemática são os mesmos que no desenvolvimento cognitivo do aluno.

Para Eves (1995), a geometria analítica é um método da geometria.

> A essência da ideia, quando aplicada ao plano, lembre-se, consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis, de maneira tal que para cada curva do plano está associada uma equação bem definida $f(x, y) = 0$ e para cada equação dessas está associada uma curva (ou conjunto de pontos) bem definida do plano. (EVES, 1995, p. 382).

Nesse sentido, podemos dizer que há uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas das equações de figuras geométricas e as propriedades geométricas das curvas associadas.

Segundo Eves (1995), os gregos utilizavam a geometria analítica na confecção de mapas, egípcios e romanos na agrimensura. Garbi (1997) afirma que a ideia de utilizar coordenadas para definir posições de pontos no plano já era conhecida no séc. III a.C. por Apolônio, de Perga (262 a.C. – 194 a.C), geômetra que já se dedicava ao estudo de secções cônicas. Este mesmo autor menciona que em torno do séc. X se confeccionava gráficos para ilustrar o relacionamento entre grandezas variáveis, principalmente em estudos da Física e da Astronomia. As contribuições de René Descartes e Pierre de Fermat no séc. $XVII$ foram decisivas para o estabelecimento desse campo da matemática e, só assim, é que a geometria analítica tomou a forma que conhecemos hoje.

Pierre de Fermat muito contribuiu para o desenvolvimento da geometria analítica. Fermat era jurista por formação acadêmica e magistrado por profissão e, de forma autônoma realizou diversos estudos e descobertas matemáticas, mesmo sem qualquer formação oficial na área das ciências exatas. Em torno de 1636, Fermat já havia encontrado a equação geral da reta e da circunferência e conjecturava sobre hipérboles, elipses e parábolas. Em um trabalho datado de 1637, porém apenas divulgado após sua morte, Fermat definiu de modo analítico várias curvas, representadas por equações algébricas que posteriormente levariam o seu nome.

> Com os instrumentos de sua Geometria Analítica, Fermat incursionou no território das funções, encontrando métodos rigorosos de se traçar tangentes a curvas e de se determinar máximos e mínimos, exatamente os temas do Cálculo Diferencial, inventado algumas décadas depois por Newton e Leibnitz. (GARBI, 1997, p. 69).

Descartes escreveu um tratado filosófico com o título de Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar Verdade nas Ciências, publicado em 1637. Um dos seus três apêndices – *La géométrie* – a única publicação matemática de Descartes, aborda problemas da geometria analítica. Em nenhum momento Descartes define eixos coordenados, abscissas ou ordenadas. Como já se descreveu anteriormente, Descartes também descobriu uma técnica algébrica para traçar tangentes a curvas, mas utilizando um sistema mais trabalhoso e complicado que o de Fermat.

Eves (1995, p. 389) compara os caminhos metodológicos de Descartes e Fermat: "Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava a sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da geometria analítica".

Uma importante observação realizada por Garbi (1997) sobre as equações da geometria analítica é que elas contêm duas variáveis, x e y. Nesse sentido, Garbi (1997, p. 73) afirma que "isto significa uma diferença fundamental: as equações com uma incógnita têm apenas um número finito de soluções, em contraste com as equações com duas variáveis, as quais são satisfeitas por um número infinito de pares (x e y)". Assim, a partir dos trabalhos de Descartes e Fermat, evidencia-se a consolidação histórica de um novo tipo de situação de resolução de equações algébricas: ao invés de se tratar de equações com uma incógnita as quais possuem uma única solução, abordam-se equações que envolvem duas incógnitas e que possuem como solução uma curva e são, portanto, chamados de problemas dos lugares geométricos. Ainda, se se estender esse raciocínio para problemas com três incógnitas, ter-se-á uma superfície como solução.

Essa é uma observação que também é válida no que se refere ao ensino da matemática no Ensino Médio. Afinal, para o aluno não é imediato o processo de compreensão de curvas enquanto soluções gráficas de funções ou equações da geometria analítica, e vice-versa. Este é um aspecto que deve ser levado em conta no ensino desses conteúdos.

No que se refere ao ensino da geometria analítica, uma possível dificuldade epistemológica na construção de seus conceitos por parte dos alunos corresponde ao seu caráter bidirecional. Nessa perspectiva, a sua aprendizagem depende de conhecimentos prévios de dois campos específicos da matemática – a álgebra e a geometria – e, ainda, que articule resultados. Além disso, é necessário considerar a língua natural, afinal as atividades realizadas em sala de aula em geral partem de instruções específicas, verbalizadas nos livros, apostilas, sequências didáticas ou oralizadas pelo professor. A partir disso, o aluno necessitará converter essas informações em outros registros, isto é, trata-se de uma transformação de registros de representação semiótica do tipo conversão.

Outra possível dificuldade encontrada por um aluno corresponde à compreensão de seus conceitos e propriedades haja vista o seu caráter abstrato. Os conceitos matemáticos apenas o são acessíveis por meio de seus registros de representação. Por exemplo, um aluno do Ensino Médio deve reconhecer a representação gráfica de uma circunferência, pois é abordada em estudos anteriores, porém, em nada se parece com a sua equação geral.

4.2 Dimensão didática

Quanto à dimensão didática, analisaram-se quatro livros didáticos[8] do terceiro ano do Ensino Médio. Esses livros são indicados pelo Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático. Ribeiro (2010) e Souza (2010) são livros indicados pelo guia referente ao triênio de 2012 a 2014, o segundo inclusive é o livro adotado pela escola, todos os alunos possuíam o seu exemplar. Dante (2013) e Paiva (2013) são livros indicados para o triênio de 2015 a 2017, sendo que o primeiro destes foi o escolhido para o recebimento por parte dos alunos do colégio. Optou-se por essas escolhas tendo em vista dois principais critérios, a saber: primeiramente por serem obras indicadas pelo Guia de Livros Didáticos do PNLD, duas versões atualmente em uso nas escolas brasileiras e duas que serão utilizadas nos próximos três anos; os livros analisados estão disponíveis na biblioteca da escola.

Para Fioreze (2010) o livro didático é, por vezes, o principal meio de orientação das atividades do professor, quando não é o único. Assim, a qualidade do ensino ministrado passa a ser dependente das atividades sugeridas nos livros

[8] DANTE, L. R. **Matemática**: Contexto e Aplicações – Volume 3. São Paulo: Ática, 2013. cap. 3-5, p. 69-140.
PAIVA, M. **Matemática:** Volume 3. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013, cap. 2-6, p. 36-140.
RIBEIRO, J. **Matemática**: Volume 3. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010, cap. 5-7, p. 169-276.
SOUZA, J. **Matemática**: Volume 3. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010, cap. 3, p. 148-227.

didáticos.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática, alguns dos conceitos da geometria analítica costumam ser abordados anteriormente ao terceiro ano do Ensino Médio. Ao se analisar o Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2014) pode-se ter uma ideia de como isso acontece. O plano cartesiano na perspectiva da localização de pontos, por exemplo, geralmente é abordado pela primeira vez no sétimo ano do Ensino Fundamental. Posteriormente, é amplamente utilizado para a representação gráfica de funções no nono ano e no primeiro ano do Ensino Médio. Outro exemplo é o registro de representação gráfica de uma reta. Em geral, aparece primeiramente no oitavo ano do Ensino Fundamental com enfoque à resolução de sistemas de equações com duas variáveis, depois no primeiro ano do Ensino Médio está associada às funções afins. Ainda, no segundo ano do Ensino Médio, há uma abordagem matricial para a resolução de sistemas de equações com duas variáveis.

Todos os livros analisados ao apresentar a geometria analítica, retomam os tópicos: plano cartesiano, inclinação de uma reta e intersecção de retas. Além disso, verifica-se em Dante (2013) uma tentativa de contextualizar a geometria analítica com algumas situações cotidianas baseadas nesse conceito como, por exemplo, o sistema GPS (*Global Positioning System* – Sistema de Posicionamento Global).

Em termos de associar e proporcionar uma visão integrada dos conceitos matemáticos verifica-se que ainda não há uma preocupação nesse sentido. Por exemplo, dos livros consultados, apenas Ribeiro (2010) associa os conteúdos de função afim e a reta na perspectiva da geometria analítica. No que se refere a associar a parábola na perspectiva da geometria analítica com uma função quadrática, nenhum dos autores apresenta essa abordagem.

Observa-se a fragmentação do conteúdo em diversos tópicos e, assim, o desenvolvimento do conteúdo geometria analítica é linear. Poucas vezes são retomados conceitos ou propriedades estudados anteriormente, exceto nos casos de posições relativas entre figuras geométricas.

Outra característica comum a todos os livros analisados é que os exercícios propostos, em sua maioria, requerem unicamente procedimentos algébricos para a sua resolução. Quando articulam os registros de representação gráfico e algébrico, quase sempre o registro inicial é o algébrico. Em poucos casos é necessária uma conversão na qual parte-se de um registro gráfico e chega-se no seu registro algébrico. A figura a seguir refere-se às atividades apresentadas por Souza (2010, p. 169) no tópico “equação geral da reta”.

ATIVIDADES Anote as respostas no caderno

62 Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos indicados.

a) $A(-8, 3)$ e $B(0, 4)$ c) $M(1, 4)$ e $N(-4, 3)$

b) $C(5, 2)$ e $D(-1, -6)$ d) $P(0, -7)$ e $Q(2, -5)$

63 Desafio

Escreva a equação geral das retas que passam pelos vértices opostos de um quadrado localizado acima do eixo das abscissas e cujos pontos $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$ são vértices consecutivos.

64 Considerando a reta *r*, cuja equação geral é $2y-6x+3=0$, determine:

a) o coeficiente angular de *r*

b) o coeficiente linear de *r*

c) três pontos que pertencem a *r*

d) dois pontos que não pertencem a *r*

65 Sabendo que a reta *r* corresponde ao gráfico da função $f(x)=ax+1$ e que $f(2)=-3$, resolva.

a) Qual é o coeficiente linear de *r*? E o coeficiente angular?

b) A função *f* é crescente ou decrescente?

c) Determine as coordenadas dos pontos em que *r* intercepta os eixos cartesianos.

d) Escreva a equação geral de *r*.

66 Certo móvel desloca-se em velocidade constante, tendo a relação entre sua posição (*y*) e o tempo (*x*) representada por uma reta *r*. Sabendo que nos instantes 2s e 5s o móvel encontrava-se, respectivamente, nas posições 24 m e 60 m, resolva:

a) Qual é a equação geral da reta *r*?

b) O ponto $A(9, 110)$ pertence a *r*?

c) No instante 8s, qual era a posição do móvel?

d) Em que instante o móvel ocupava a posição 156 m?

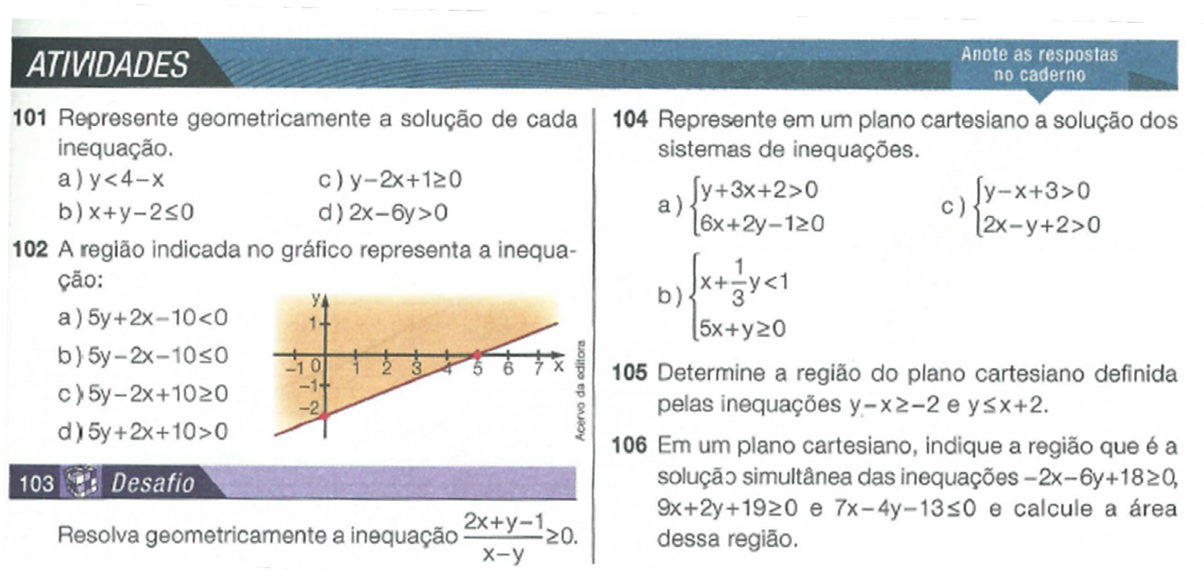
Figura 13 – Atividades sobre o tópico equação geral da reta
Fonte: Souza (2010, p. 169).

Pode-se constatar que as quatro atividades sugeridas podem ser executadas apenas mediante tratamentos algébricos. Evidentemente, que uma abordagem envolvendo o registro gráfico dos objetos tratados pode ser realizada, mas necessitará dos devidos encaminhamentos por parte do professor.

Outro ponto a destacar, são as raras aplicações da geometria analítica apresentadas nos livros. Formas geométricas como retas, circunferências, elipses e hipérboles raramente são identificadas em elementos ou objetos do cotidiano dos alunos (por exemplo artes, arquitetura, formas da natureza). Pode-se verificar que Paiva (2013) é o único dos livros analisados que busca, pontualmente, realizar essas associações por meio de imagens como, por exemplo, a fachada da Igreja da Pampulha (Belo Horizonte/MG), a qual é composta por parábolas.

As aplicações que tratam os livros são textos acabados, ou seja, o aluno não precisa pesquisar nenhuma informação adicional, cabe a ele fazer a leitura e responder alguns exercícios que exigem operações algébricas ou respostas pontuais as quais podem ser encontradas no próprio texto. Além disso, esses textos são em geral apresentados ao final de cada tópico. Apenas Dante (2013) e Paiva (2013) introduzem os tópicos buscando associar o conteúdo matemático que será tratado com alguma aplicação. Por exemplo, Paiva (2013, p. 88) introduz o objeto circunferência por meio de uma situação que trata sobre a detecção de *tsunamis*. Os outros dois livros analisados introduzem o conteúdo de cada objeto abordado mencionando alguns fatos históricos relativos às descobertas matemáticas sobre o objeto ou à geometria analítica.

Outro fato constatado refere-se ao estudo das inequações. Dos livros analisados, Paiva (2013) e Souza (2010) abordam o estudo de inequações envolvendo o objeto reta. A imagem a seguir apresenta exercícios propostos por Souza (2010, p. 183).



ATIVIDADES — Anote as respostas no caderno

101 Represente geometricamente a solução de cada inequação.

a) $y<4-x$ c) $y-2x+1\geq 0$

b) $x+y-2\leq 0$ d) $2x-6y>0$

102 A região indicada no gráfico representa a inequação:

a) $5y+2x-10<0$

b) $5y-2x-10\leq 0$

c) $5y-2x+10\geq 0$

d) $5y+2x+10>0$

103 Desafio

Resolva geometricamente a inequação $\frac{2x+y-1}{x-y}\geq 0$.

104 Represente em um plano cartesiano a solução dos sistemas de inequações.

a) $\begin{cases} y+3x+2>0 \\ 6x+2y-1\geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y-x+3>0 \\ 2x-y+2>0 \end{cases}$

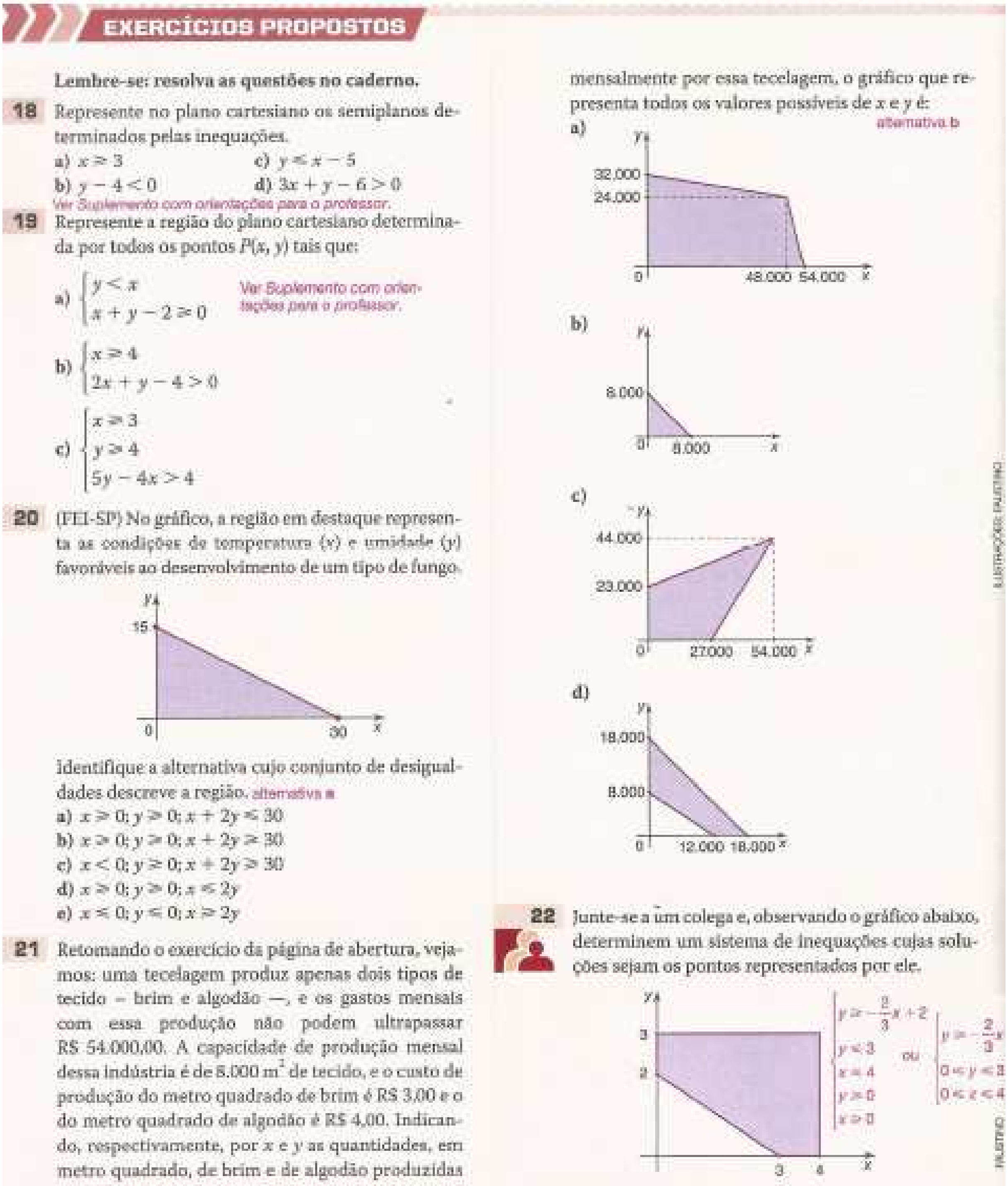
b) $\begin{cases} x+\frac{1}{3}y<1 \\ 5x+y\geq 0 \end{cases}$

105 Determine a região do plano cartesiano definida pelas inequações $y-x\geq -2$ e $y\leq x+2$.

106 Em um plano cartesiano, indique a região que é a solução simultânea das inequações $-2x-6y+18\geq 0$, $9x+2y+19\geq 0$ e $7x-4y-13\leq 0$ e calcule a área dessa região.

Figura 14 – Atividades sobre inequações envolvendo o objeto reta
Fonte: Souza (2010, p. 183).

Pode-se observar que as atividades propostas em Souza (2010, p. 183) privilegiam a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, afinal apenas a atividade de número (102) busca a conversão de sentido contrário. Já em Paiva (2013, p. 84), pode-se observar um equilíbrio no que tange ao sentido dessas conversões, conforme figura abaixo.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Lembre-se: resolva as questões no caderno.

18 Represente no plano cartesiano os semiplanos determinados pelas inequações.

a) $x \geq 3$ c) $y \leq x - 5$
b) $y - 4 < 0$ d) $3x + y - 6 > 0$

Ver Suplemento com orientações para o professor.

19 Represente a região do plano cartesiano determinada por todos os pontos $P(x, y)$ tais que:

a) $\begin{cases} y < x \\ x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$ Ver Suplemento com orientações para o professor.

b) $\begin{cases} x \geq 4 \\ 2x + y - 4 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 4 \\ 5y - 4x > 4 \end{cases}$

20 (FEI-SP) No gráfico, a região em destaque representa as condições de temperatura (x) e umidade (y) favoráveis ao desenvolvimento de um tipo de fungo.

Identifique a alternativa cujo conjunto de desigualdades descreve a região. alternativa a

a) $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + 2y \leq 30$
b) $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + 2y \geq 30$
c) $x < 0$; $y \geq 0$; $x + 2y \geq 30$
d) $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \leq 2y$
e) $x \leq 0$; $y \leq 0$; $x \geq 2y$

21 Retomando o exercício da página de abertura, vejamos: uma tecelagem produz apenas dois tipos de tecido – brim e algodão –, e os gastos mensais com essa produção não podem ultrapassar R$ 54.000,00. A capacidade de produção mensal dessa indústria é de 8.000 m² de tecido, e o custo de produção do metro quadrado de brim é R$ 3,00 e o do metro quadrado de algodão é R$ 4,00. Indicando, respectivamente, por x e y as quantidades, em metro quadrado, de brim e de algodão produzidas mensalmente por essa tecelagem, o gráfico que representa todos os valores possíveis de x e y é: alternativa b

a)
b)
c)
d)

22 Junte-se a um colega e, observando o gráfico abaixo, determinem um sistema de inequações cujas soluções sejam os pontos representados por ele.

$\begin{cases} y \geq -\frac{2}{3}x + 2 \\ y \leq 3 \\ x \leq 4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y \geq -\frac{2}{3}x \ldots \\ 0 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Figura 15 – Exercícios sobre inequações envolvendo o objeto reta
Fonte: Paiva (2013, p. 84).

Apesar de abordarem o tópico inequação no caso do objeto reta, os livros não mencionam a possibilidade do trabalho com o GrafEq. Na verdade, há de se ressaltar que os livros analisados não mencionam a utilização do computador no estudo da geometria analítica, tampouco apresentam possíveis atividades com o uso de *softwares* como GrafEq, Winplot, Geogebra, entre outros.

O *software* GeoGebra, por exemplo, apresenta o interessante recurso de construir controles deslizantes com parâmetros dinâmicos. Dessa forma, podem-se construir os parâmetros *a* e *b* da equação da reta $y = ax + b$ delimitados a um determinado intervalo real. Ao movimentar o parâmetro a, uma das características que se pode observar a respeito das retas é que este parâmetro está relacionado com a sua inclinação. Ao movimentar o parâmetro *b* uma das conclusões pode se referir ao fato de que retas paralelas possuem o mesmo coeficiente de inclinação. Ou seja, o GeoGebra possui bom potencial semiótico à medida que possibilita realizar modificações no registro algébrico e apresenta, de forma simultânea, os respectivos registros gráficos.

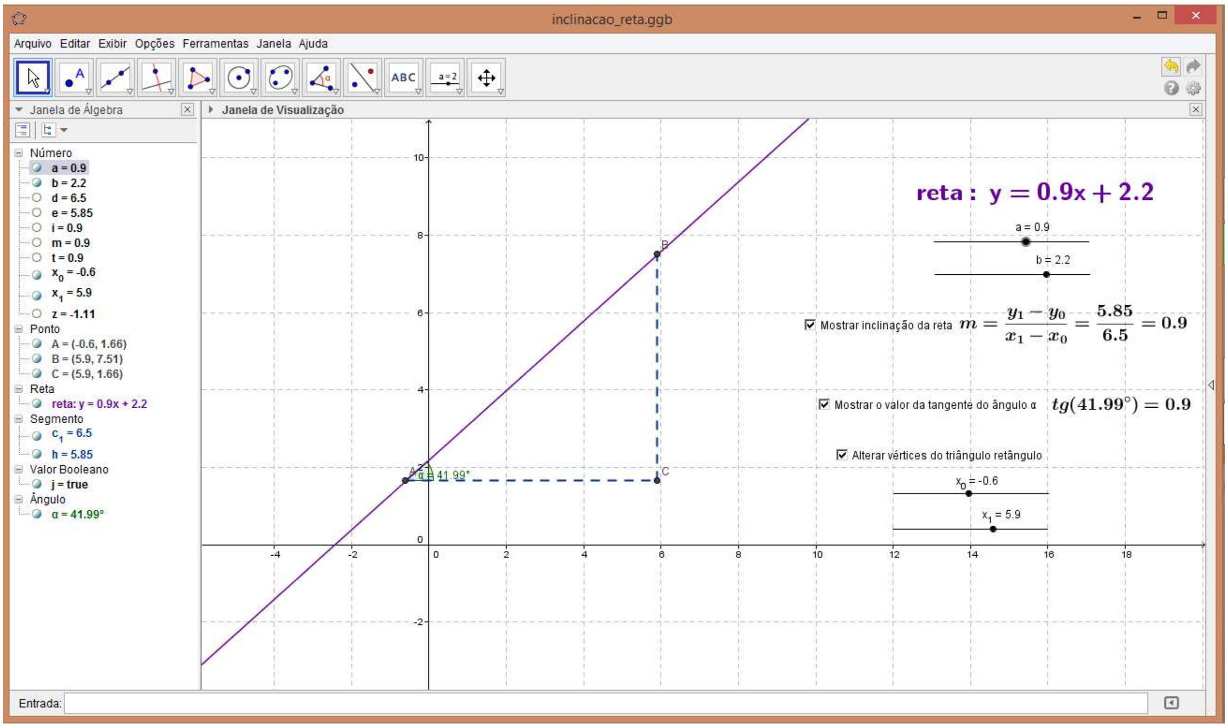


Figura 16 – O uso de parâmetros no GeoGebra

Com base nessas características observadas, destacam-se algumas ações articuladas que a sequência didática poderá abordar para que aconteça uma melhoria no ensino e aprendizagem da geometria analítica:

1. Abordagem articulada entre os conceitos e propriedades da geometria analítica;
2. Utilização de TIC, especialmente o *software* GrafEq na promoção da experimentação como forma de chegar a uma sistematização do conhecimento, a mídia vídeo para a sensibilização ao introduzir um conteúdo e o GeoGebra como *software* dinâmico;
3. Identificação das figuras da geometria analítica em algumas obras arquitetônicas da cidade de Santa Maria/RS;
4. Proposição de atividades nas quais os alunos pesquisem informações, especialmente no que diz respeito à história das obras arquitetônicas indicadas.

Sobre a primeira ação, está justificada ao longo do texto nas reflexões realizadas a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. No que se refere à segunda ação, falta delinear a presença do vídeo que, em nosso trabalho, surge como alternativa pedagógica para a sensibilização dos alunos na introdução de alguns tópicos da geometria analítica (MORAN, 1995). Os vídeos que serão apresentados referem-se a reportagens jornalísticas disponíveis na Internet sobre as características dos prédios históricos escolhidos para o trabalho no GrafEq.

A segunda e a terceira ações surgem da intenção de criar situações novas, desafiadoras aos alunos. O uso do GrafEq é um diferencial, haja vista que a possibilidade de produzir/criar versões coloridas pode entusiasmar os alunos. A seguir, apresenta-se a construção de uma representação realizada pelo pesquisador para a imagem do Planetário da UFSM.

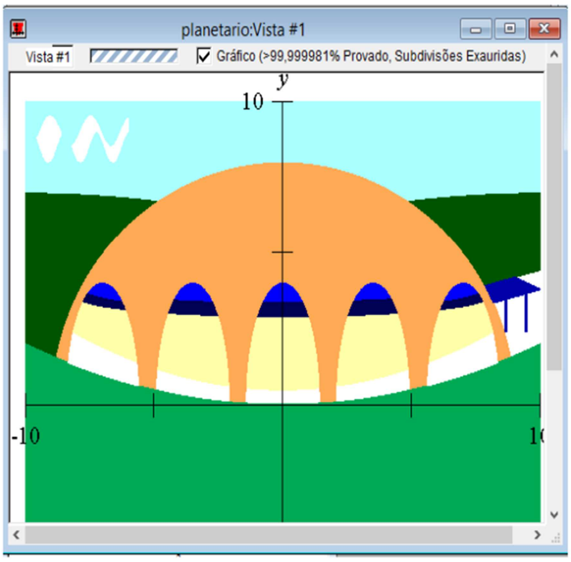


Figura 17 – Planetário da UFSM e uma versão no GrafEq
Fonte: http://coral.ufsm.br/planeta/.

O aluno poderá criar a sua representação do planetário por meio do GrafEq ao delimitar regiões geométricas que o compõem como, por exemplo, retas, circunferências e parábolas. Além disso, opta-se por obras arquitetônicas existentes na cidade de Santa Maria, pois essa proposta visa valorizar o patrimônio arquitetônico da cidade, além de construir com os alunos um novo olhar sobre a cidade, valorizando-a.

4.3 Dimensão cognitiva

No que se refere à dimensão cognitiva, uma reflexão inicial aponta para a necessidade de se partir em busca do desenvolvimento cognitivo dos alunos em troca da transmissão de conhecimentos, característica principal do ensino tradicional. O que se anseia com esse trabalho é mobilizar o aluno a realizar diversos experimentos de modo a conduzi-lo a compreender conceitos e propriedades da geometria analítica.

Conforme já foi dito, acredita-se que o computador pode contribuir para essa questão. A utilização da tecnologia na aprendizagem da matemática possibilita diversos experimentos, isto é, o aluno pode testar, experimentar e investigar sobre aquilo que conjectura para a resolução de uma determinada situação. Com base nos resultados dos experimentos pode-se confirmar a conjectura, refutá-la ou reelaborá-la. Nesse sentido, o que se espera é colaborar para a constituição ou aprimoramento da autonomia do aluno.

Essa forma de pensar a educação escolar objetiva a substituição do aluno passivo, receptor de informações, uma tábula rasa que é preenchida, por um aluno ativo, que busca aprender, responsável e engajado pelo seu desenvolvimento cognitivo.

4.3.1 Análise das concepções prévias

O primeiro contato com os alunos aconteceu em uma aula ministrada pela professora titular no qual esta apresentou o professor pesquisador aos alunos. Foi discutido com os alunos os objetivos da pesquisa e a metodologia que seria utilizada. Além disso, após a leitura do termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice A) esclareceu-se algumas dúvidas sobre este documento. Nas aulas seguintes, todos os alunos devolveram o documento devidamente preenchido e assinado.

Antes de iniciar a intervenção junto aos alunos, buscou-se saber o que esses alunos sabem sobre alguns objetos da geometria analítica. Para isso, elaborou-se um questionário visando analisar as concepções prévias tendo como base as análises preliminares. Para a sua dinamização foram necessárias duas horas-aula.

A primeira atividade refere-se à associação entre os registros algébrico e gráfico do objeto reta.

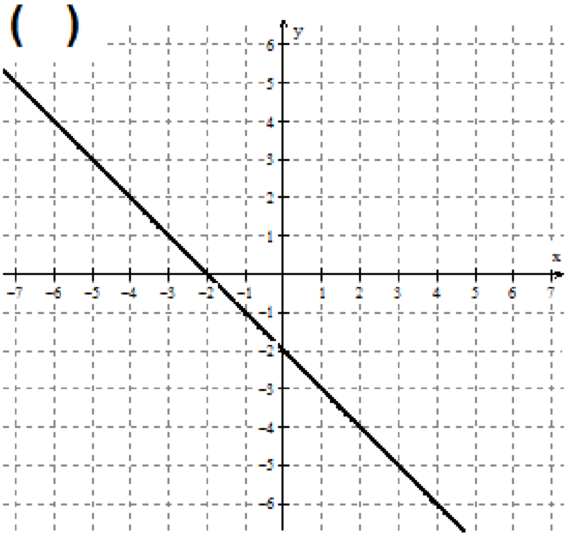
ATIVIDADE 1)

a) Relacione cada equação ao seu gráfico:

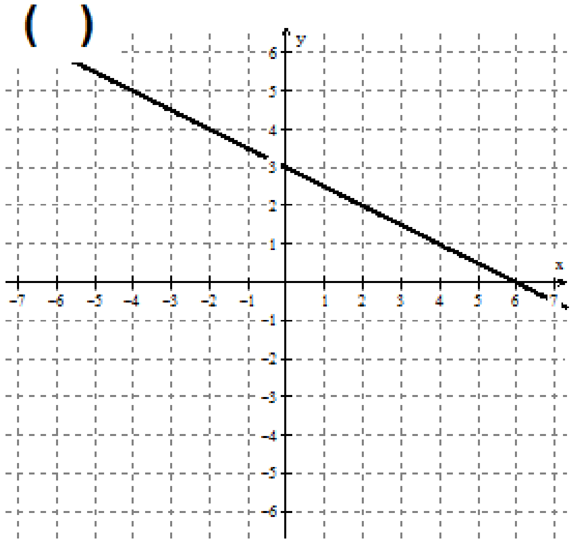
(i) $y = -5x + 5$ (ii) $y = 4x - 3$ (iii) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ (iv) $y = -4$

(v) $y = 2x - 2$ (vi) $y = -5x + 1$ (vii) $x = -4$ (viii) $y = -x - 2$

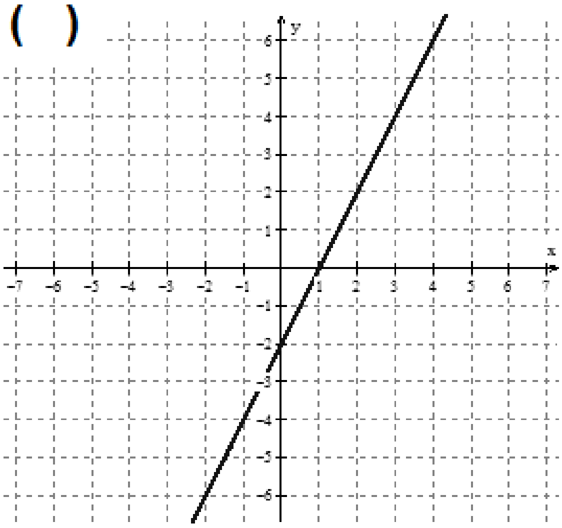
( )



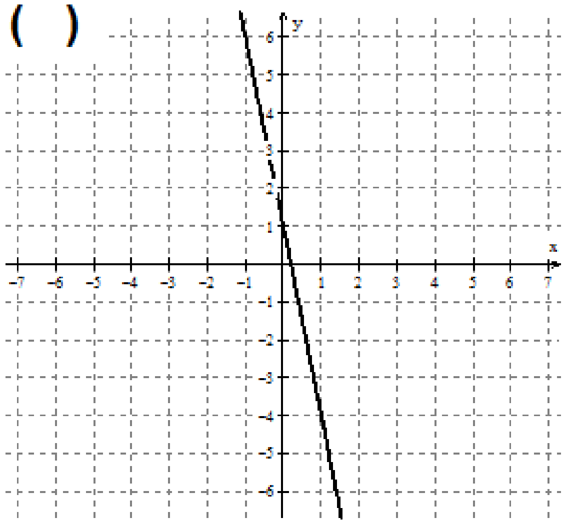
( )



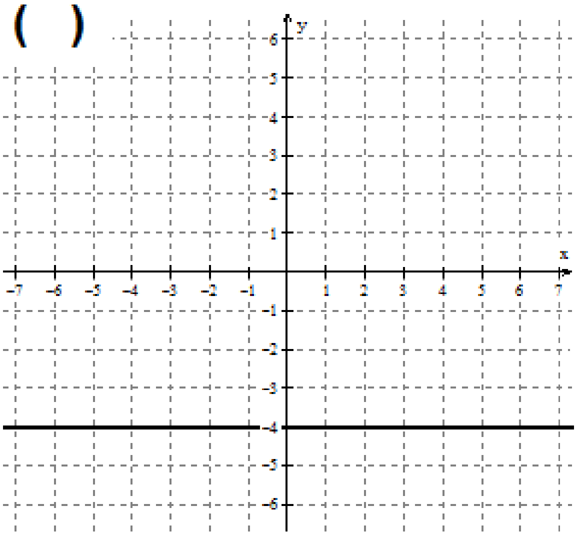
( )



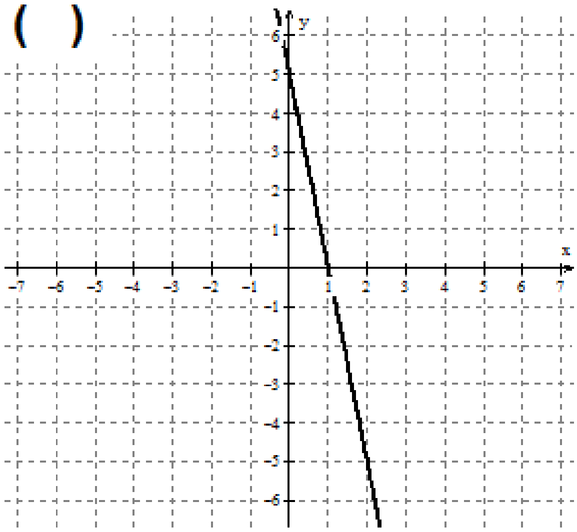
( )



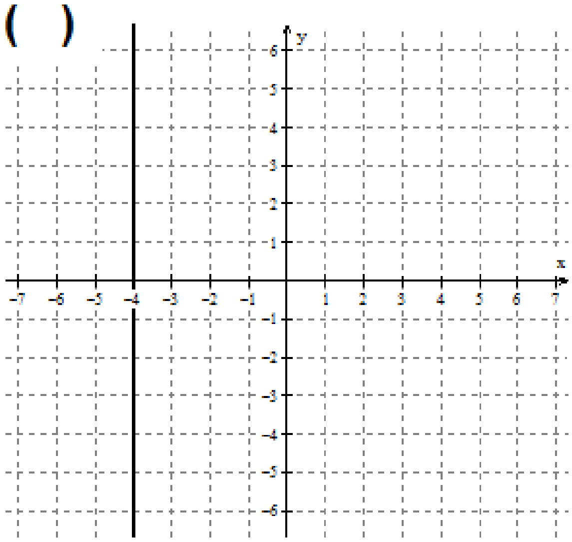
( )



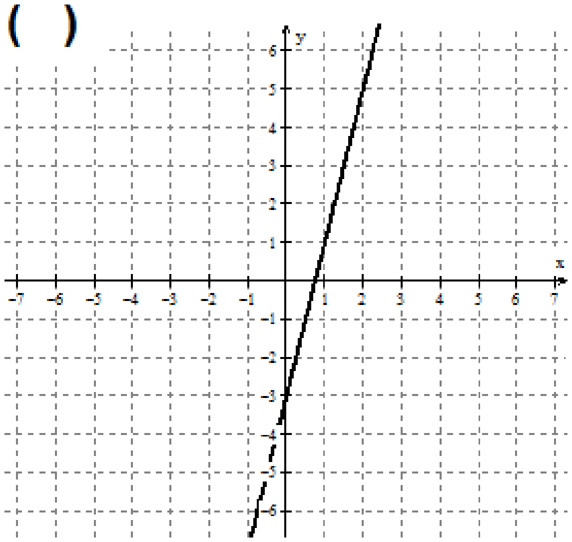
( )



( )



( )



b) Indique as retas que são (entre si):

Paralelas:

____
____

Concorrentes:

____
____

Perpendiculares:

____
____

c) Quais as retas que possuem entre si o mesmo ponto de intersecção com o eixo y?

____
____

Essa atividade foi realizada na primeira hora-aula, na qual estavam presentes 16 alunos. Para melhor compreender qual a estratégia utilizada pelos alunos para realizar a associação no item (a), o professor pesquisador solicitou durante a aula que estes descrevessem o raciocínio utilizado para resolver a questão.

A seguir, apresenta-se o quadro com a categorização das respostas dos alunos no item (1a).

Situação observada	Número de alunos
Realizaram todas as associações corretas	4
Equivocaram-se apenas nos registros (v) e (viii)	4
Apresentaram dificuldades em realizar a atividade (máximo de quatro associações corretas)	8

Quadro 3 – Categorização das respostas para a questão (1a)

É importante salientar que os alunos sujeitos da pesquisa já haviam estudado o objeto reta anteriormente durante o ano letivo na perspectiva das geometrias plana e espacial. E quanto à geometria analítica, a professora titular já havia trabalhado com eles a determinação da equação de uma reta. Contudo, pode-se dizer que muitos dos alunos ainda não compreendem de forma ampla algumas características desse objeto como, por exemplo, as posições relativas entre duas retas.

Observa-se nos alunos que realizaram a atividade de forma correta uma diversidade nas estratégias utilizadas. Um dos alunos, por exemplo, determinou as equações das retas a partir de dois pontos do gráfico de cada.

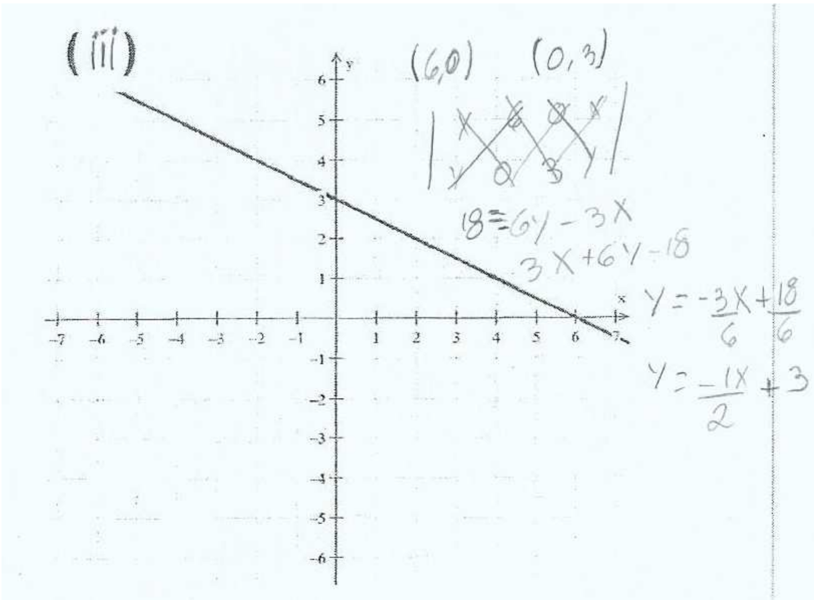


Figura 18 – A determinação da equação da reta
Fonte: Produção do aluno A.

Os outros três alunos utilizaram o fato do coeficiente b da equação da reta $y = ax + b$ ser a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo Oy e o coeficiente a determinar se a reta é crescente ou decrescente.

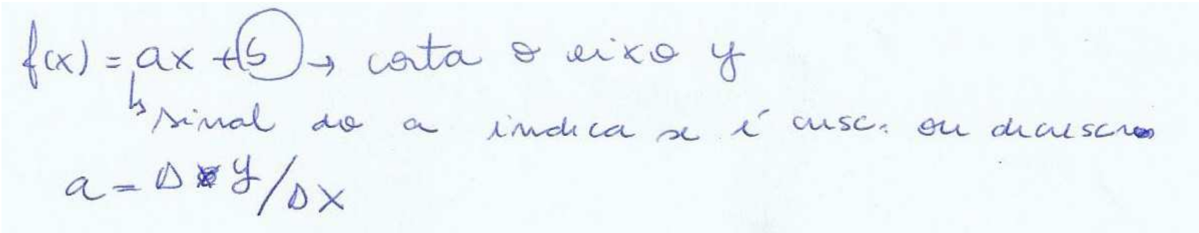


Figura 19 – Os coeficientes como estratégia
Fonte: Produção do aluno B.

Quatro alunos associaram as retas (v) e (viii) de forma incorreta, trocando os seus registros gráficos. Isto ocorreu, pois adotaram apenas a análise do coeficiente b da equação da reta. Pode-se inferir, nesse caso, que esses alunos não analisaram de forma ampla a representação gráfica, afinal ao se confrontar com duas retas que possuíam o mesmo coeficiente linear, necessitariam ter utilizado mais algum resultado ou propriedade matemática de modo que pudessem realizar a atividade corretamente.

Os demais (oito alunos) apresentaram dificuldades em realizar a atividade, sendo que desses o maior número de associações corretas foi quatro (dois alunos). Um aluno, inclusive, não estabeleceu nenhuma associação correta. Como a maioria desses alunos não escreveu qual a estratégia que utilizou para tentar resolver a atividade é provável que não lembrassem nenhuma propriedade ou operação que pudesse auxiliar nesse processo. Além disso, há o fato de que alguns desses alunos comentaram com o professor pesquisador que não sabiam realizar a atividade.

É interessante observar que apenas dois alunos confundiram os registros das retas $y = -4$ e $x = -4$. Ou seja, a grande maioria compreende como representar retas paralelas ao eixo das abscissas ou ao eixo da ordenadas, respectivamente.

No item (b) da primeira atividade observa-se uma dificuldade em reconhecer as retas paralelas.

Situação observada	Número de alunos
Responderam corretamente	3
Indicaram retas cujos registros gráficos se assemelham a retas paralelas	3
Indicaram como paralelas aquelas que na verdade são perpendiculares	5
Não responderam	5

Quadro 4 – Categorização das respostas para as retas paralelas

É importante salientar que a professora titular de matemática, apesar de ter abordado o conteúdo coeficiente angular da reta, não havia trabalhado com a turma os conteúdos paralelismo e perpendicularismo entre retas na perspectiva da geometria analítica. Dessa forma, pode-se perceber que a análise dos alunos nesse item ficou restrita aos registros gráficos das retas apresentadas.

Dos treze alunos que não responderam corretamente esta questão, pode-se classificá-los em três grupos, a saber:

- Cinco alunos classificaram as retas perpendiculares $x = -4$ e $y = -4$ como sendo paralelas. Assim, percebe-se nesse caso um erro conceitual no registro gráfico.
- Três alunos responderam que os dois primeiros gráficos apresentam retas paralelas (retas $y = -x - 2$ e $y = -\frac{1}{2}x + 3$). Nesse caso, tem-se um indício de que estes alunos não realizaram uma avaliação precisa dos gráficos.
- Cinco alunos não responderam esse item. Como também foram muitas as perguntas feitas ao professor pesquisador sobre o que são retas paralelas, temos um indício que estes alunos não compreendem o que duas retas paralelas representam graficamente.

No que se refere à identificação das retas concorrentes, tem-se a distribuição a seguir.

Situação observada	Número de alunos
Identificaram todos os pares de retas concorrentes	1
Identificaram ao menos um par de retas concorrentes	8
Não responderam o item	7

Quadro 5 – Categorização das respostas para as retas concorrentes

É importante mencionar que durante a dinamização muitos alunos perguntaram o que são retas concorrentes. Esses conceitos já foram abordados no tópico de geometria plana, pela professora titular e retomados na sequência didática.

No item correspondente às retas perpendiculares pode-se realizar a classificação a seguir.

Situação observada	Número de alunos
Identificaram corretamente as retas (iv) e (vii) como perpendiculares	10
Identificaram equivocadamente um par de retas	1
Citaram apenas a reta (vii)	3
Não responderam o item	2

Quadro 6 – Categorização das respostas para as retas perpendiculares

Uma das causas prováveis para o fato da menção da reta (vii) como sendo perpendicular é que esses alunos não tenham compreendido o enunciado da questão no que se refere a duas retas que deveriam ser perpendiculares entre si e, dessa forma, tenham assinalado apenas a reta (vii), pois é perpendicular ao eixo das abscissas. Nenhum aluno identificou o par de retas (iii) e (v) como sendo perpendiculares. Acredita-se que, como a avaliação dos alunos estava restrita apenas ao registro gráfico[9], tenham apresentado dificuldade em visualizar essa propriedade. Afinal, é difícil identificar esse ângulo sem ajuda de um transferidor ou

[9] Ainda não havia sido abordado o teorema matemático o qual enuncia que o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é igual a -1.

sem conhecer a respectiva propriedade algébrica (o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é -1).

No item (1c), constata-se que poucos alunos compreendem como resolver a atividade.

Situação observada	Número de alunos
Responderam corretamente	4
Responderam de forma de forma incorreta	6
Não responderam o item	6

Quadro 7 – Categorização das respostas da questão (1c)

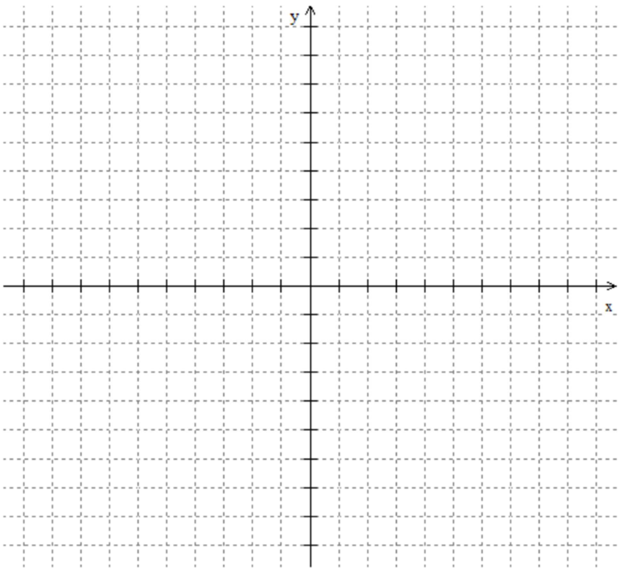
Acredita-se que o pequeno número de respostas corretas está associado ao processo de conversão do enunciado (língua natural) para o registro gráfico ou registro algébrico. Durante a realização da aula, muitos alunos disseram que não haviam compreendido o enunciado desse item. Este é, portanto, um indício de que a questão, da forma como foi enunciada, implicou em um processo de conversão não congruente.

Após a análise dos resultados da primeira atividade, avalia-se que esta pode ser reformulada optando-se em colocar os gráficos das retas em único plano cartesiano. Nesse sentido, é provável que os resultados nos itens (1b) e (1c) poderiam ser melhores. Afinal, da forma como se elaborou a atividade, os alunos realizaram um esforço maior na medida em que necessitaram sobrepor mentalmente os gráficos. Não que a atividade da forma como foi proposta, não possa ser realizada, porém supõe-se que esta outra forma poderia facilitar a percepção dessas questões.

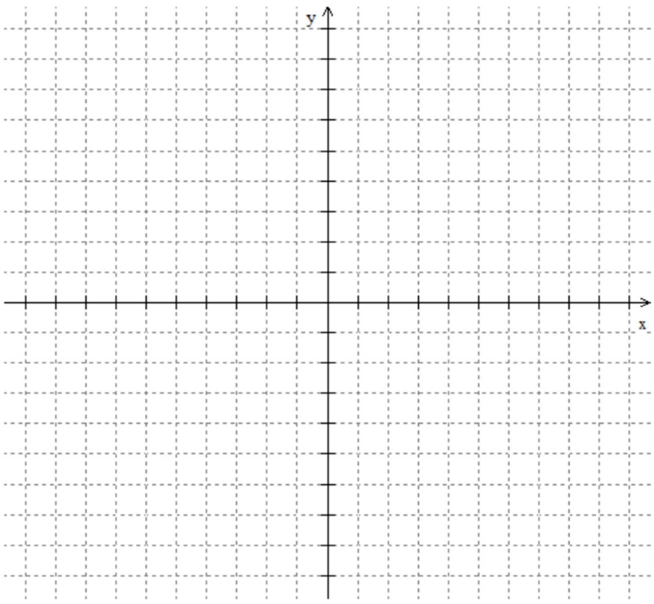
Na segunda e na terceira atividades, busca-se verificar se os alunos compreendem o raciocínio característico utilizado no GrafEq para determinar regiões geométricas. A partir desse momento, na segunda hora aula, contou-se com a presença de dezenove alunos.

ATIVIDADE 2) Pinte cada região definida pelos sistemas de inequações e explique-as com as suas palavras.

a) $\begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ -4 \leq y \leq 1 \end{cases}$

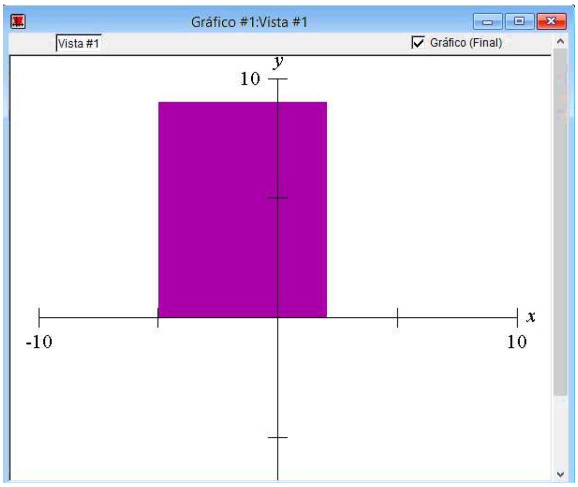


b) $\begin{cases} y > x - 4 \\ y > -x - 4 \\ y < 5 \end{cases}$

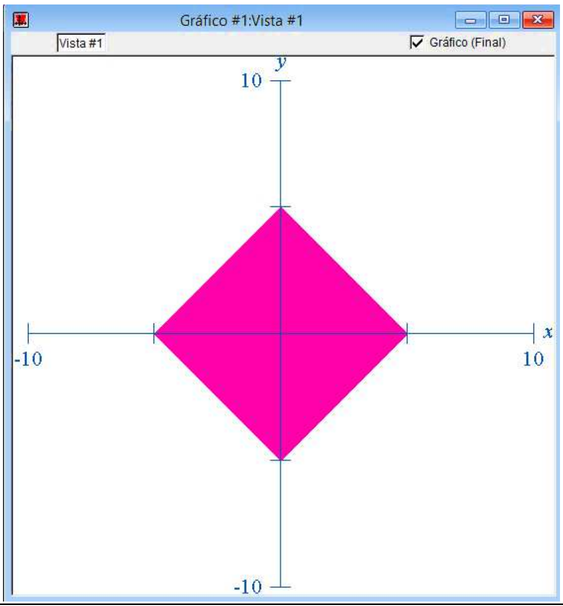


ATIVIDADE 3) Qual o sistema de inequações que define cada construção abaixo?

a)



b)



À exceção de um, todos os alunos conseguiram realizar o item (a) da atividade dois. O resultado do item (a) da atividade três também foi satisfatório: apenas três alunos informaram uma relação incorreta que pode estar associada a dificuldades na notação das desigualdades. É interessante salientar que muitos alunos compararam essas duas atividades. Noutras palavras, pode-se dizer que transitaram entre os registros algébrico e gráfico desse tipo de relação matemática.

Em contrapartida, verifica-se no item (2b) que houve uma dificuldade na compreensão das relações matemáticas apresentadas.

Situação observada	Número de alunos
Responderam corretamente o item (2b)	6
Responderam de forma incorreta	3
Não responderam	10

Quadro 8 – Categorização das respostas da questão (2b)

Dentre os alunos que realizaram a construção da região triangular na questão (2b), observa-se que quatro deles não evidenciaram qual a estratégia que utilizaram para representar graficamente a região estabelecida pela relação algébrica indicada. Como se tratam de equações de retas particulares à medida que são paralelas às bissetrizes $y = x$ e $y = -x$, é provável que esses alunos tenham utilizado esse resultado e ou o zero da função e ou o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas. Os outros dois alunos que responderam corretamente o item evidenciaram os raciocínios utilizados os quais foram os mesmos. A seguir está a resolução dada pelo aluno D.

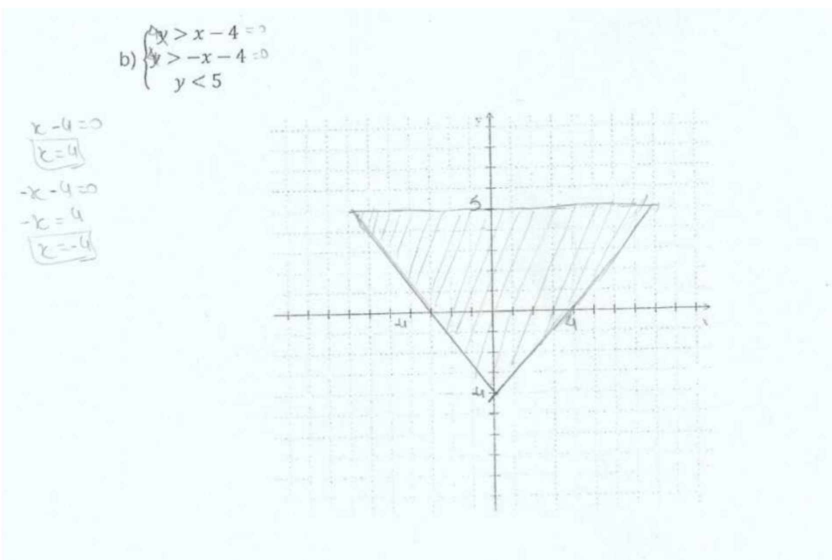


Figura 20 – Item (2b) da avaliação prévia
Fonte: Produção do aluno D.

Para definir as retas que delimitam a região triangular, o aluno D determinou o ponto de intersecção de ambas retas com o eixo das abscissas por meio de tratamentos algébricos simples. Ou seja, relacionou a raiz de uma equação com o ponto de intersecção do eixo das abscissas. Há de se mencionar que o aluno equivocou-se ao traçar no gráfico um dos segmentos de reta, pois identificou o valor $x = -3$ como sendo a sua intersecção com o eixo das abscissas. Além disso, infere-se que o aluno também tenha se valido do fato do coeficiente linear da reta representar o valor da ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas. De todo modo, pode-se observar que para esse aluno, traçar retas consiste em uma atividade simples, ou seja, possui uma compreensão de propriedades e resultados matemáticos sobre esse tipo de construção.

No item (3b) a dificuldade em transitar do registro gráfico para o algébrico foi maior.

Situação observada	Número de alunos
Responderam corretamente o item (3b)	2
Indicaram apenas os limites numéricos da figura nos eixos cartesianos	6
Responderam de forma incorreta	1
Não responderam	10

Quadro 9 – Categorização das respostas da questão (3b)

A seguir apresenta-se a construção realizada por um dos alunos que identificaram as retas que delimitam a região quadrangular.

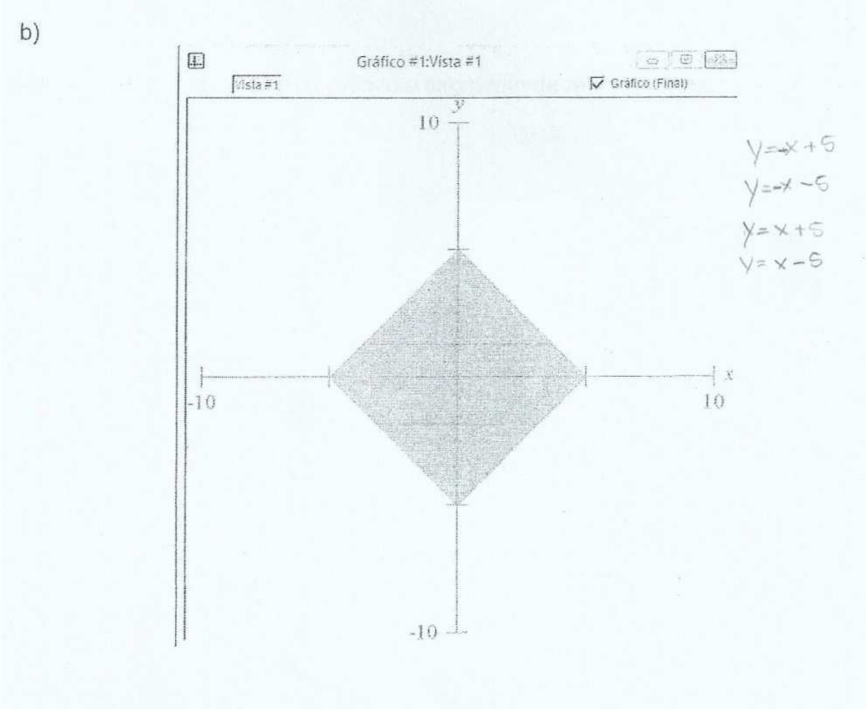
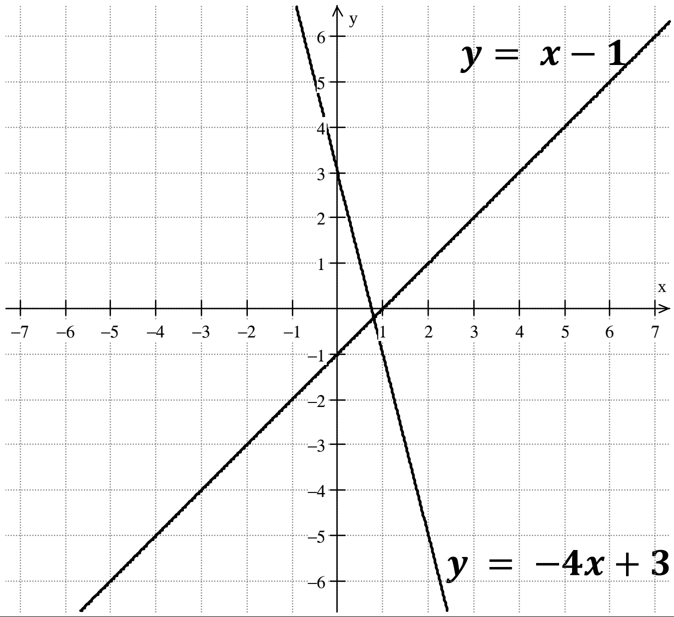


Figura 21 – Item (3b) da avaliação prévia
Fonte: Produção do aluno E.

Os dois alunos apenas definiram quais são essas retas, ou seja, não determinaram qual a relação de inequações que corresponde à região quadrangular. Acredita-se que os alunos apresentaram dificuldades nessa tarefa, pois abordagens com inequações não são comuns no ensino da matemática. Além disso, na maioria das vezes as atividades realizadas priorizam o processo de conversão que tem como registro de partida o algébrico e como chegada o registro gráfico, e não o inverso como é o caso da atividade (3b). Assim, verifica-se a necessidade em oportunizar na sequência didática momentos de construções de imagens delimitadas por retas e também outras figuras geométricas no GrafEq.

A quarta atividade proposta propunha determinar o ponto de intersecção de duas retas.

ATIVIDADE 4) Quais são as coordenadas do ponto de intersecção das retas representadas no gráfico a seguir:



Essa atividade foi panejada tendo em vista verificar o trânsito que os alunos supostamente realizariam a partir da língua natural (enunciado da atividade) e do registro gráfico para o registro algébrico correspondente, bem como o tratamento algébrico que realizariam. Observou-se a distribuição seguinte.

Situação observada	Número de alunos
Encontraram corretamente o ponto de intersecção	4
Informaram um valor aproximado para as coordenadas do ponto de intersecção	2
Encontraram um resultado incorreto	3
Não responderam o item	10

Quadro 10 – Categorização das respostas da questão (4)

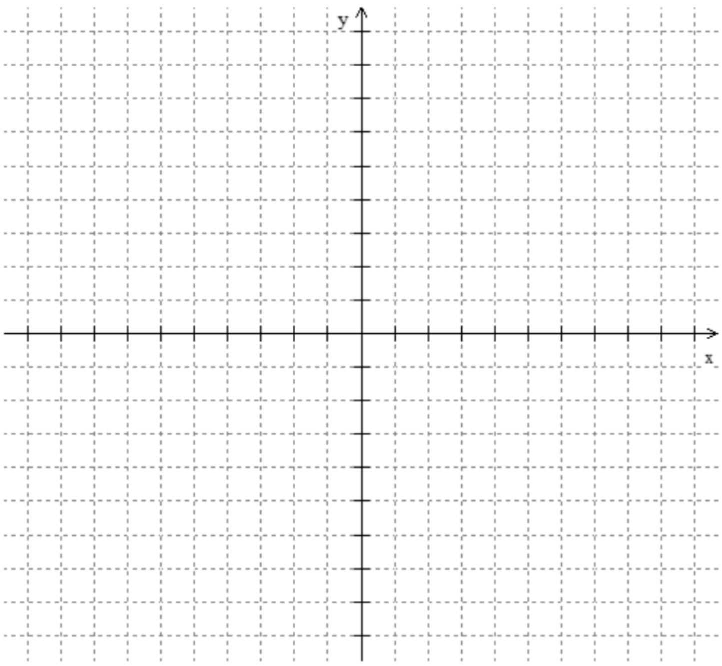
Neste problema, ao propor que o aluno determine o ponto de intersecção das duas retas há de se considerar que há três variáveis visuais correspondentes, a saber: a expressão “ponto de intersecção” (registro da língua natural), o ponto no plano cartesiano (registro gráfico) e as igualdades “=” que estão implícitas na resolução da equação $x - 1 = y = -4x + 3$ (registro algébrico).

Acredita-se que o motivo principal da dificuldade dos alunos na atividade residia em realizar a conversão das informações apresentadas nos registros da língua natural (especialmente no que se refere à expressão ponto de intersecção) e gráfico (o ponto de intersecção dos gráficos das duas retas) para o registro algébrico de modo a realizar os devidos tratamentos para encontrar as coordenadas do ponto de intersecção. A partir disso, é que os alunos poderiam ter constatado que o ponto de intersecção das retas pertence a ambas as retas e, assim, tem-se que $x - 1 = y = -4x + 3$, donde segue que, $x - 1 = -4x + 3$.

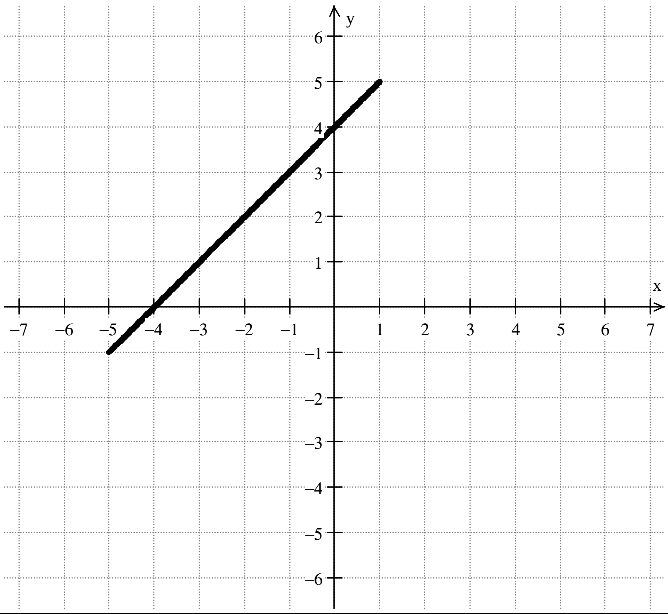
Os quatro alunos que encontraram o ponto de intersecção igualaram as duas equações. Os alunos que informaram valores aproximados para as coordenadas do ponto restringiram-se à visualização da sua localização no plano cartesiano.

Na quinta e na sexta atividades aborda-se a noção de segmento de reta.

ATIVIDADE 5) Represente no gráfico o segmento de reta dada pela relação $y = 2x + 1$ com $x \in [-3, 4]$.



ATIVIDADE 6) Qual a relação que representa o segmento de reta a seguir:



O desempenho da turma na atividade (5) foi insatisfatório.

Situação observada	Número de alunos
Responderam corretamente	1
Traçaram um segmento da reta indicada, mas não o correto	1
Responderam de forma incorreta	6
Não responderam	11

Quadro 11 – Categorização das respostas da questão (5)

A grande maioria dos alunos também apresentou dificuldades na sexta atividade.

Situação observada	Número de alunos
Responderam corretamente	2
Responderam de forma incorreta	5
Não responderam	12

Quadro 12 – Categorização das respostas da questão (6)

Assim, verifica-se uma dificuldade em compreender a representação de um segmento de reta de acordo com a notação utilizada. Nesse caso, portanto, mesmo dispondo de exercícios que propunham os dois caminhos possíveis entre os registros simbólicos, algébricos e gráficos, os alunos não conseguiram realizar o processo de conversão.

Na última atividade buscou-se abordar o objeto matemático circunferência.

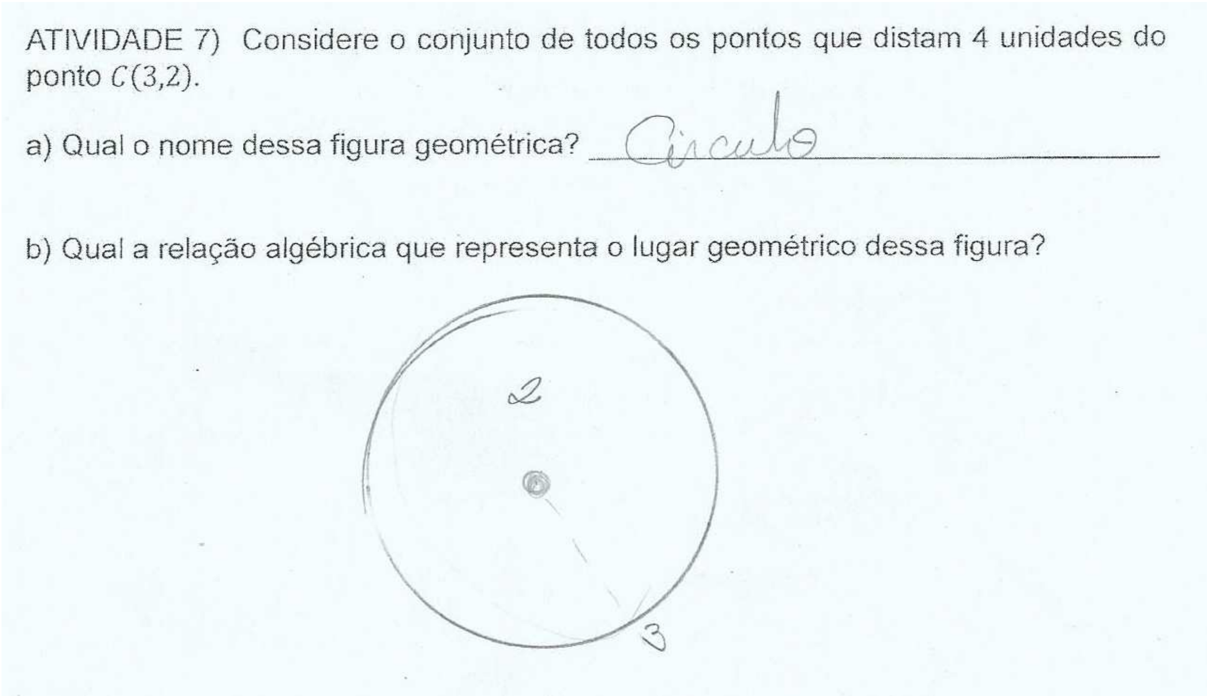
ATIVIDADE 7) Considere o conjunto de todos os pontos que distam 4 unidades do ponto $C(3,2)$. a) Qual o nome dessa figura geométrica? ________________________________ b) Qual a relação algébrica que representa o lugar geométrico dessa figura?

Obteve-se o resultado a seguir.

Situação observada	Número de alunos
Responderam no item (7a) que se trata de um círculo	6
Responderam de forma incorreta (afirmaram ser um triângulo ou um quadrado)	5
Não responderam o item (7a)	8

Quadro 13 – Categorização das respostas da questão (1c)

Há de se salientar que ao responder tratar-se de um círculo e não de uma circunferência, tem-se um indício que os alunos não diferenciam tais objetos. Verificou-se também que os alunos apresentaram dificuldades em entender o enunciado, e consequentemente, no trânsito da língua natural para uma representação gráfica.


ATIVIDADE 7) Considere o conjunto de todos os pontos que distam 4 unidades do ponto $C(3,2)$.

a) Qual o nome dessa figura geométrica? Circulo

b) Qual a relação algébrica que representa o lugar geométrico dessa figura?

Figura 22 – Resposta do aluno F
Fonte: Produção do aluno F.

Observa-se que o aluno F apenas representou uma circunferência não contida em um plano cartesiano. Dessa forma, não representou corretamente as coordenadas do centro da circunferência.

No item (b) nenhum aluno realizou alguma construção em direção a encontrar a equação da circunferência. Quatro alunos lembraram a fórmula da área do círculo ($A = \pi r^2$). Avalia-se que essa atividade apresentou um elevado grau de dificuldade para os alunos, pois a sua resolução requereria um maior grau de desenvolvimento matemático, levando-se em conta que esse conteúdo ainda não foi trabalhado com esses alunos.

4.3.2 Implicações dos resultados das concepções prévias para a sequência didática

A partir da análise realizada, pode-se observar que muitos alunos ainda não compreendiam de uma forma ampla os registros de representação do objeto reta. Verificou-se que para estes alunos, reconhecer uma reta nos seus diferentes registros de representação semiótica ainda não era um processo natural. Mesmo os poucos que realizaram o processo de conversão do registro gráfico para um tratamento algébrico, ao realizarem esse processo, relataram dificuldades e incertezas sobre o que estavam fazendo. Observou-se que, de forma geral, os alunos não compreendem o papel dos parâmetros da equação da reta no que se refere às suas propriedades gráficas correspondentes. Ou seja, mesmo que tenham realizado algumas conversões de forma correta, não necessariamente compreendiam o porquê de determinadas propriedades e processos. Nesse sentido, pode-se concluir que a sequência didática a ser elaborada deverá retomar esse conteúdo, especialmente no que diz respeito aos tópicos equação da reta e seus coeficientes.

Pôde-se verificar que os alunos apresentaram dificuldades nas atividades que envolveram desigualdades. Este é um conteúdo que comumente não é abordado no ensino da matemática. Além disso, é necessário considerar os registros de representação semiótica envolvidos e as respectivas conversões. Nesse sentido, acredita-se que o uso do GrafEq pode contribuir para o estudo desse conteúdo, afinal proporciona realizar diversos experimentos entre os registros gráfico e algébrico. Assim, a sequência didática bem como a intervenção do professor, deverá considerar que o trabalho com as inequações, muito provavelmente, constituirá certo grau de dificuldade aos alunos, principalmente no seu início.

Há de considerar, também, que como Duval (2003, 2009, 2013) afirma e foi constatado nas análises das concepções prévias, na conversão entre os registros gráfico e algébrico, as maiores dificuldades dos alunos se concentraram nesse sentido (do gráfico para o algébrico). Em uma primeira visão, poder-se-ia acreditar que o GrafEq favorece o trânsito desses registros no sentido contrário, ou seja, no qual o registro de partida é o algébrico e o de chegada é o gráfico. Porém, cabe ao professor pesquisador, portanto, esclarecer aos alunos que devem sempre procurar, a partir do resultado gráfico obtido, reavaliar as relações algébricas adotadas. Ou seja, estabelecer as conversões nos dois sentidos nos registros algébrico e gráfico dos objetos da geometria analítica que a sequência didática abordará por meio das construções no GrafEq.

Os alunos que resolveram corretamente as atividades propostas utilizaram uma diversidade de estratégias e pensamentos. Com isso, verifica-se a necessidade do professor estabelecer em sala de aula uma discussão sobre as diferentes formas de se resolver uma determinada situação, isto é, valorizar os diferentes raciocínios utilizados. A partir disso, considera-se importante durante as aulas de experimentação estabelecer ao final das atividades um momento no qual os alunos possam expressar as suas ideias, expor o seu trabalho. Dessa forma, espera-se também contribuir para que esses alunos consigam converter os outros registros de representação semiótica para a língua natural. Além disso, conforme já se disse, esse é um importante momento de observação para o pesquisador, à medida que se pretende investigar qual o raciocínio utilizado pelo aluno.

Cabe também realizar uma autocrítica em relação ao questionário elaborado para a análise das concepções prévias dos alunos. A maioria das atividades elaboradas versa sobre o objeto reta. Apenas a última atividade aborda o objeto circunferência. Dessa forma, a análise dos resultados das atividades elaboradas na sequência didática sobre o objeto parábola não poderão ser comparados com as concepções prévias. Essa análise será feita considerando os avanços dos alunos durante a própria experimentação.

5 CONCEPÇÃO E ANÁLISE *À PRIORI*

Nas análises preliminares buscou-se compreender o ensino da geometria analítica do Ensino Médio por meio das dimensões epistemológica, didática e cognitiva. A concepção e análise à priori correspondem à fase da Engenharia Didática em que se descrevem as escolhas que serão realizadas nos âmbitos global e local para que haja uma melhora no processo de ensino e aprendizagem.

Uma das principais características detectadas, do ponto de vista didático, refere-se ao fato de que as atividades propostas para esse conteúdo supervalorizam a conversão no qual o registro de partida é o algébrico e o de chegada é o gráfico. Ou seja, são poucas as vezes em que é apresentada ao aluno uma situação representada graficamente a qual terá de converter para um procedimento algébrico. Dessa forma, acredita-se que se deve, também, valorizar o caminho inverso e, para isso, a construção de versões de imagens (ou parte delas) de prédios históricos no GrafEq pode ser uma interessante atividade. Além disso, espera-se com uso dos demais recursos tecnológicos tornar a sequência mais relavante para o aluno, aproximando-o ao seu cotidiano no caso do vídeo, e fornecendo novas possibilidades de visualizar propriedades e conceitos matemáticos a partir da noção de movimento no caso do GeoGebra.

Acredita-se que a partir desse conjunto de ações, os alunos poderão aprender mais sobre os conteúdos abordados à medida que possibilitarão um envolvimento maior por parte dos discentes.

Com base nessas reflexões, aponta-se a seguir algumas características globais, isto é, aspectos mais gerais e amplos, que deverão ser consideradas na sequência didática.

- O uso de TIC como forma de proporcionar situações pontencializadoras de ensino e aprendizagem da matemática. Utilizar *softwares* gratuitos e de fácil manuseio.

A escolha do GrafEq leva em conta, como já se mencionou antes, o seu potencial semiótico, especialmente no que se refere à possibilidade de transitar entre as janelas algébricas e gráficas. O vídeo é tomado como forma de sensibilização para aspectos que ampliam o contexto da matemática, não apenas restrita à matemática, mas também se podendo apresentar aspectos artísticos, arquitetônicos e histórico-culturais da cidade de Santa Maria. Além disso, também foi utilizado o *software* GeoGebra, o qual permite o efeito de movimentar na tela do computador objetos previamente definidos preservando as suas características iniciais. A utilização do GeoGebra será descrita no capítulo seguinte.

- O envolvimento do aluno nas atividades pode ser mais ativo, o professor não é um mero fornecedor de respostas, e sim orienta o aluno a desenvolver o seu raciocínio. Nessa perspectiva, é fundamental promover as interações entre aluno-professor, aluno-aluno, aluno-computador. Estabelecendo-se, portanto, um ambiente investigativo, no qual o aluno busca construir o seu conhecimento por meio de diversas experimentações que lhe são propostas.
- Analisar o trabalho do aluno, em especial no que se refere à diversidade de possibilidades de resolução de um mesmo problema. Verificando de que modos ele transita entre os registros de representação semiótica dos objetos matemáticos abordados.
- Valorizar a discussão e a socialização das ideias dos alunos, as estratégias utilizadas e o raciocínio dispendido ao longo das atividades.

É necessário que os alunos desenvolvam argumentos matemáticos para as decisões que tomam ao longo do desenvolvimento da resolução dos problemas, ou seja, que se apropriem da linguagem matemática (registros algébrico, gráfico e a língua natural). Há de se considerar a heterogeneidade da sala de aula, detectar em que níveis de conhecimento matemático cada aluno se situa e, assim, contribuir para a sua aprendizagem. Além disso, o aluno deve se sentir valorizado pela sua contribuição no ambiente da sala de aula.

A partir dessas variáveis globais foi organizado um conjunto de ações, num total de treze atividades, o qual também leva em conta os aspectos locais.

5.1 Hipóteses

Tendo em vista o processo de validação da sequência didática é necessário esclarecer quais as hipóteses iniciais que permeiam a elaboração das atividades que constituem a intervenção junto aos alunos. Essas hipóteses serão arguidas durante o processo de experimentação e constituirão a principal referência para ao final do trabalho responder a questões como: o plano de ações necessita modificações? Quais? Por quê?

Segundo Carneiro (2005) e Fioreze (2010), as hipóteses não podem ser muito amplas, pois caso contrário estar-se-ia colocando em risco a premissa de que a aprendizagem é um processo gradual e que se constitui ao longo do tempo.

Nesta pesquisa, as hipóteses assumidas foram as seguintes:

- A nível cognitivo as atividades são planejadas de forma a contribuir para o trânsito entre os registros de representação semiótica e, assim, contribuir para a aprendizagem de propriedades e conceitos da geometria analítica.
- A utilização dos recursos computacionais amplia o domínio de compreensão do conteúdo matemático abordado por parte dos alunos. O computador constitui-se como uma ferramenta que viabiliza distintas situações de aprendizagem, as quais não seriam possíveis ou demandariam um elevado número de procedimentos se realizadas somente com as ferramentas tradicionais.
- O foco das atividades não se encontra na aprendizagem dos *softwares*, e sim na compreensão dos conteúdos matemáticos abordados. O trabalho com os *softwares* escolhidos não será um empecilho à medida que apresentam interfaces intuitivas.

6 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PLANEJADA

A partir desse momento, far-se-á a discussão das atividades que compõem a sequência. Para tanto, com o intuito de organizar a estrutura dessa descrição, para cada atividade (ou bloco delas) serão realizadas considerações sobre aquilo que se esperava alcançar com elas.

6.1 Atividades 1 e 2

As duas atividades iniciais consistem no reconhecimento dos registros algébrico e gráfico de uma reta.

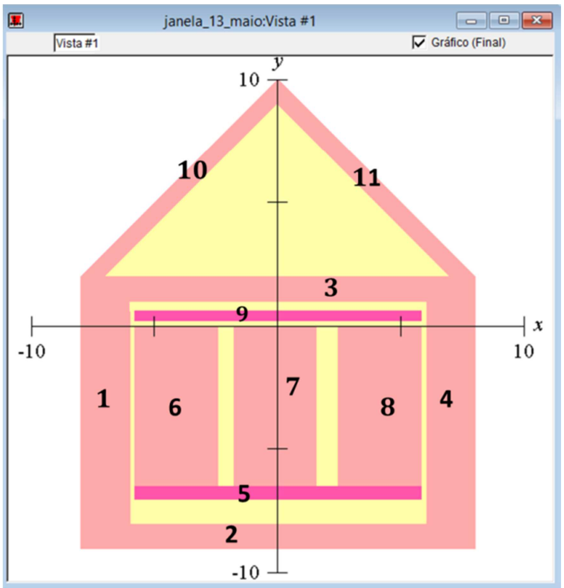
ATIVIDADE 1

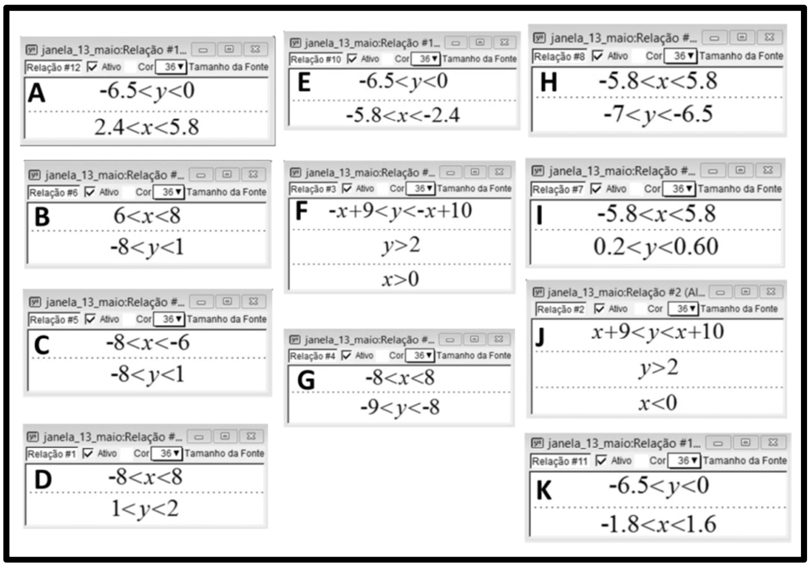
Você conhece o Theatro Treze de Maio?

Vamos assistir ao vídeo disponível em:
https://www.youtube.com/watch?v=4BDsEWOa9mw
Observe o detalhe destacado na imagem: Quais figuras geométricas estão presentes?

ATIVIDADE 2

A figura a seguir apresenta uma nova versão desse recorte. Ela foi construída a partir das retas que compõem essa figura geométrica. Você deverá associar cada relação algébrica com a sua respectiva representação geométrica.





Pretendeu-se utilizar o vídeo como uma forma de sensibilizar os alunos para a temática abordada. Nesse sentido, a sua utilização na sequência está embasada nas ideias de Moran (1995) e Arroio e Giordan (2006). De forma geral, pode-se dizer que se buscou, por meio do recurso audiovisual, oportunizar aos alunos o reconhecimento do patrimônio arquitetônico da cidade de Santa Maria. Os vídeos escolhidos apresentam uma linguagem a qual se considera adequada ao público-alvo, que por meio do conteúdo visual e sensorial, buscam com que o aluno perceba características, informações e detalhes sobre os prédios que provavelmente não tem conhecimento.

Além da compreensão do conteúdo matemático, a qual é o foco deste trabalho, acredita-se que a aula de matemática também pode ser um espaço em que haja uma discussão e valorização de aspectos histórico-culturais do meio em que vive o aluno. Evidentemente que, durante a experimentação, não se realizará um aprofundamento no estudo desses aspectos, mas acredita-se que esse tipo de iniciativa pode colaborar para que a aula seja mais interessante para o aluno, além de contribuir para a sua formação cultural.

Em seguida, quando se propõe aos alunos que indiquem quais figuras geométricas estão presentes na região destacada na imagem, objetiva-se contribuir para o reconhecimento dessas figuras no que se refere ao seu registro geométrico. Na segunda atividade, propõe-se um reconhecimento do conceito de reta no que se refere aos seus registros algébrico e gráfico. O conteúdo de retas foi o último tópico abordado pela professora titular da turma de alunos pesquisada. A segunda atividade também se trata de um reconhecimento dos registros algébricos de regiões gráficas delimitadas por retas. Prevê-se essa atividade, também com o intuito de familiarizar o aluno com a sintaxe do GrafEq. Nesse sentido, pensando-se naquilo que os alunos já compreendem elaborou-se essas atividades de reconhecimento, pois:

> Ainda que a atividade de pesquisa e a resolução de problemas sejam importantes tanto do ponto de vista cognitivo quanto do didático, não se deve por isso subestimar um outro tipo de atividade fundamental: o reconhecimento, isto é, a identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais. (DUVAL, 2003, p. 28).

No presente caso, o principal objetivo da segunda atividade é buscar identificar formas pelas quais os alunos farão (ou não) as associações entre as relações de inequações e as suas respectivas regiões gráficas. Além disso, uma vez que o estudo de inequações na perspectiva do presente trabalho é rara no ensino da matemática, esta atividade provavelmente consistirá aos alunos como a primeira proposta com essas características durante a sua caminhada escolar.

Não se espera por parte dos alunos uma compreensão plena daquilo que lhes será apresentado e, assim, objetiva-se por meio de suas falas, ações e associações, buscar uma visão da contribuição dessa atividade para um primeiro entendimento deste tipo de estudo. Ou seja, ao invés dos alunos próprios realizarem uma construção no GrafEq, opta-se inicialmente por essa atividade de reconhecimento, pois, caso contrário, poder-se-ia necessitar de extenso tempo para que os alunos conseguissem realizar a atividade, causando o seu desinteresse pela sequência desenvolvida. Noutras palavras, trata-se de uma atividade inicial, um primeiro contato com este conteúdo matemático.

6.2 Atividade 3

A partir da terceira atividade é que os alunos, de fato, começarão as suas versões de recortes de imagens de obras arquitetônicas da cidade de Santa Maria/RS.

ATIVIDADE 3

Construa a sua versão no GrafEq da região destacada na imagem do Colégio Manoel Ribas, nesse primeiro momento apenas as partes delimitadas por retas.

Na atividade três, os alunos devem realizar a construção dos elementos geométricos da região destacada e que são delimitados por retas. Pode-se observar que a porta corresponde a uma região retangular, bem como o seu contorno lateral. Há quadriláteros formados pelas colunas laterais e também acima delas.

Essa atividade pode aparentar não possuir um alto grau de dificuldade. Porém, ao se considerar a necessidade de encontrar as equações das retas, as inequações de modo a determinar as relações e também a coordenação entre os registros algébrico e gráfico do objeto reta, esta atividade não se torna imediata aos alunos.

Sobre as colunas laterais, pode-se realizar uma interessante discussão: são elas paralelas?

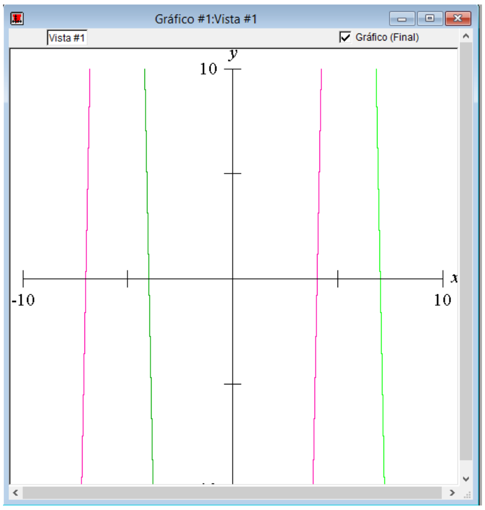


Figura 23 – Retas que delimitam as colunas

Pode-se observar que as retas que delimitam cada coluna não são paralelas entre si. Porém, podemos aceitar como paralelas entre si as retas de cor rosa e as de cor verde.

Nesta atividade, pretende-se observar como os alunos procederão para definir as regiões que compõem a figura e buscar descrever as formas pelas quais determinarão as equações das retas que delimitam essas regiões. Afinal, mesmo que já tenham realizado anteriormente um estudo prévio sobre este tópico com a professora titular, não necessariamente compreenderão como proceder nessa tarefa. Como exemplo, pode-se citar o fato de que um dos exercícios tradicionais é encontrar a equação da reta dados dois pontos. Nessa atividade, porém, necessitarão não apenas do tratamento algébrico que resolve essa questão. Ao se deparar com o registro gráfico de uma reta poderão eles mesmos determinar quais são dois pontos dessa reta e, então, realizar os devidos procedimentos algébricos.

6.3 Atividades 4 e 5

Uma das dificuldades encontradas na elaboração da sequência didática foi encontrar uma figura geométrica na arquitetura de Santa Maria que fosse delimitada por retas que não se apresentam na vertical ou na horizontal, isto é, que possuam uma inclinação e que seja diferente de zero. Nesse sentido, escolheu-se para a próxima atividade uma estrela que faz parte da decoração do teto da Catedral Diocesana de Santa Maria.

ATIVIDADE 4

Agora é a sua vez de criar sua versão no GrafEq da estrela moldada no teto da Catedral Diocesana de Santa Maria/RS. Inicialmente assistiremos a um vídeo sobre a Catedral disponível em https://www.youtube.com/watch?v=Bm04GR3e0Zw.

Essa atividade apresenta um grau de dificuldade maior que a anterior, afinal para construir a estrela, os alunos, além de terem de encontrar um número maior de retas e relações de inequações, necessitarão estabelecer estratégias para dispor os lados da estrela bem como para estabelecer os pontos de interseção entre duas retas.

Em seguida, apresenta-se a quinta atividade. Esta surge da necessidade de formalizar alguns resultados junto aos alunos.

ATIVIDADE 5

Agora, vamos analisar algumas propriedades sobre as retas por meio do *applet* disponível em: http://www.geogebratube.org/student/m144002

i) Ao movimentar o parâmetro a, o que acontece com o gráfico da função?

ii) Ao movimentar o parâmetro b, o que acontece com o gráfico da função?

iii) Pode-se concluir algo sobre paralelismo de retas? Em caso afirmativo, o que você concluiu?

Agora selecione as duas primeiras caixas de entradas:

iv) Qual a relação entre a inclinação e a equação de uma reta dada por $y = ax + b$?

Espera-se com esta atividade contribuir para a compreensão do aluno em relação a alguns resultados importantes como, por exemplo, o paralelismo entre duas retas. Nesse sentido, optou-se por utilizar o GeoGebra, pois trata-se de um *software* geométrico dinâmico. Para Gravina (1996) a geometria dinâmica é constituída por ferramentas de construção que podem ser desenhos de objetos e configurações geométricas e feitos a partir das propriedades que os definem.

> Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínseca ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento. (GRAVINA, 1996, p. 6).

É importante salientar que o GrafEq limitaria essa atividade, afinal não possui à disposição a utilização do recurso controle deslizante que produzo efeito de movimento. A figura a seguir apresenta a imagem do *applet* produzido para esta atividade.

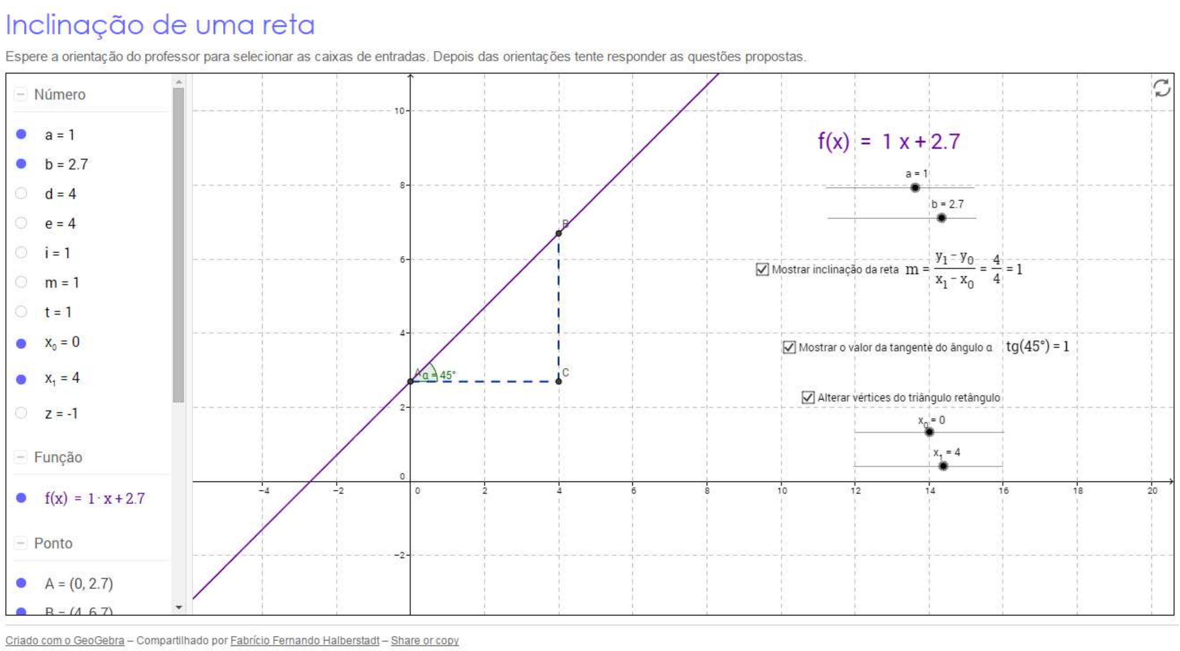


Figura 24 – Imagem do *applet* desenvolvido sobre o objeto reta

A principal expectativa com essa atividade é que o potencial semiótico do GeoGebra contribua para a compreensão de propriedades referentes à inclinação e ao paralelismo entre retas. Esta atividade busca mobilizar os registros algébrico, gráfico e a língua natural. O aluno ao modificar os valores dos parâmetros algébricos visualiza as alterações gráficas decorrentes e a própria equação produzida. Por fim, espera-se que registre as suas observações e conclusões na forma escrita a fim de valorizar o registro da língua natural.

6.4 Atividades 6, 7, 8 e 9

O próximo bloco de atividades refere-se ao estudo da circunferência.

ATIVIDADE 6
Vamos encontrar a equação de uma circunferência.

O terceiro ano do Ensino Médio, em geral, é o momento do primeiro contato dos alunos com o estudo da circunferência do ponto de vista da geometria analítica, diferentemente do que acontece com o objeto reta cuja equação já é abordada em momentos anteriores. Nesse sentido, propõe-se na atividade (6) que o professor pesquisador estabeleça com os alunos a equação de uma circunferência particular e, posteriormente, a equação geral de uma circunferência.

Para tanto, pode-se inicialmente realizar a construção da equação de uma circunferência particular como, por exemplo, a circunferência centrada no ponto C$(3,2)$ e de raio 5. Inicialmente é interessante lembrar a definição dessa circunferência: o lugar geométrico dos pontos que equidistam cinco unidades do seu centro.

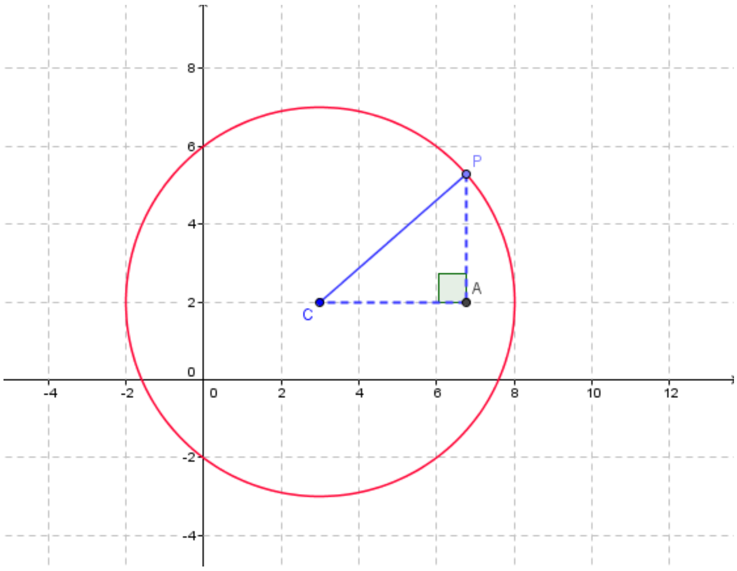


Figura 25 – Representação gráfica da circunferência

A partir da definição em língua natural e da visualização da circunferência no plano cartesiano, pode-se definir o ponto $P(x, y)$ pertencente à circunferência. Sabe-se que a distância do ponto P ao centro da circunferência corresponde ao raio da circunferência, ou seja, igual a 5. Porém, essa distância também pode ser calculada na perspectiva da distância e, para tanto, é necessário definir o segmento de reta $\overline{CA}$ paralelo ao eixo das abscissas e perpendicular a $\overline{PA}$. Dessa forma, o triângulo CAP é retângulo em A. Pode-se observar que com essa construção o ponto A tem coordenadas $(x, 2)$.

Com isso as medidas dos lados do triângulo CAP são: $CA = x - 3$; $PA = y - 2$; $CP = 5$.

Pelo Teorema de Pitágoras segue a relação:

$$(y - 2)^2 + (x - 3)^2 = 5^2 \qquad (6)$$

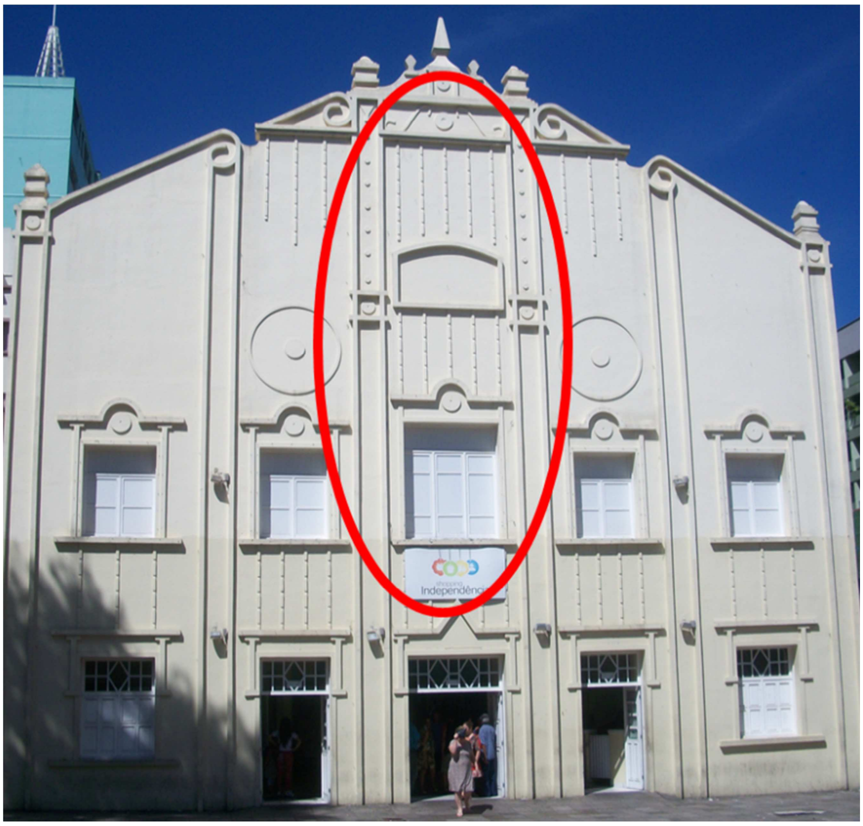
É importante salientar que como esse procedimento foi realizado para um ponto $P(x, y)$ genérico, a relação encontrada define todos os pontos que equidistam cinco unidades do ponto $(2,3)$, ou seja, trata-se da equação dessa circunferência. Em seguida, com um raciocínio análogo chega-se à conclusão que a equação da circunferência com centro em (x_0, y_0) e raio igual a r é $(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2$.

ATIVIDADE 7

Retome a atividade (3) e finalize a sua versão da imagem destacada.

ATIVIDADE 8

Você já deve ter visitado o prédio onde atualmente funciona o *Shopping* Independência de Santa Maria. Ele foi construído no ano de 1922 e inicialmente abrigava sessões de cinema e teatro. Construa a sua versão no GrafEq de uma das regiões destacadas.



A atividade sete visa retomar a construção da imagem proposta na terceira atividade. Objetiva-se realizar com os alunos uma discussão inicial sobre como deverão proceder para representar um círculo e regiões compreendidas entre circunferências, isto é, as inequações que definem estas regiões. E na sequência, propor que finalizem a representação iniciada anteriormente.

Para a oitava atividade optou-se pela imagem frontal do Shopping Independência (prédio histórico de Santa Maria), pois apresenta várias formas circulares. Esse fato foi determinante para a sua escolha, afinal acredita-se que essa atividade pode promover uma interessante discussão sobre a translação dessas formas circulares, no que se refere ao registro gráfico e suas implicações algébricas, e vice-versa. Como já se falou anteriormente, esse tipo de situação potencializa ao aluno discriminar as unidades significantes do registro algébrico (DUVAL, 2009).

Analogamente ao que se elaborou para o objeto reta, por fim apresenta-se uma proposta de formalização do objeto circunferência por meio de uma atividade com o GeoGebra.

ATIVIDADE 9

Vamos analisar algumas propriedades sobre as circunferências por meio do *applet* disponível em: http://www.geogebratube.org/student/m146182.

i) Como você descreveria o que é uma circunferência?

ii) Ao movimentar o ponto O, o que acontece com a equação algébrica da circunferência?

iii) Ao movimentar o parâmetro r, o que acontece com o gráfico da circunferência? E com a equação algébrica da circunferência?

iv) Com base nos itens anteriores, qual é a equação de uma circunferência centrada no ponto (a, b) e que possui raio igual a r?

Agora selecione a caixa de entrada:

v) Movimente o ponto B e, observando sobre os triângulos retângulos mostrados, procure justificar a equação da circunferência determinada no item anterior.

A figura a seguir apresenta o *applet* construído com o GeoGebra e utilizado nessa atividade.

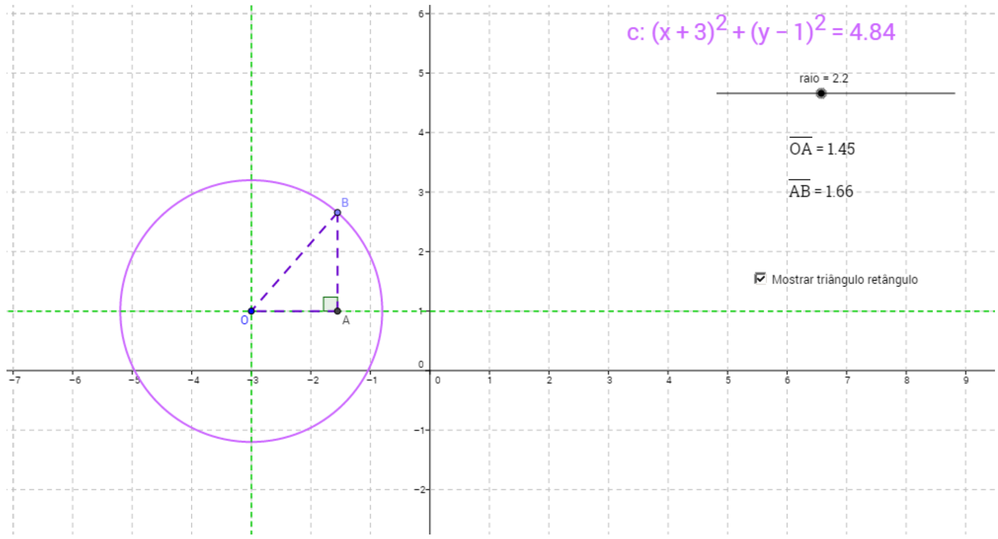


Figura 26 – Imagem do *applet* desenvolvido sobre o objeto circunferência

O objetivo dessa atividade é verificar se o aluno realizou corretamente os registros língua natural, algébrico e gráfico de uma circunferência e se compreendeu as relações existentes entre eles. Com isso, espera-se investigar se os alunos conseguiram estruturar um raciocínio que explique a equação da circunferência.

6.5 Atividades 10, 11 e 12

Posteriormente, trata-se sobre o estudo da parábola.

ATIVIDADE 10
Vamos rever o que é uma parábola.
ATIVIDADE 11
Vamos retornar ao Theatro Treze de Maio. Construa a sua versão no GrafEq da região destacada na figura.

ATIVIDADE 12

Vamos analisar algumas propriedades sobre as parábolas por meio do *applet* disponível em: http://www.geogebratube.org/student/m149642.

i) Ao movimentar o parâmetro a, qual o efeito geométrico produzido na parábola?

ii) Ao movimentar o parâmetro m, qual o efeito geométrico produzido na parábola?

iii) Ao movimentar o parâmetro n, qual o efeito geométrico produzido na parábola?

O bloco de atividades destinadas ao objeto parábola é semelhante no que se refere aos objetivos do bloco anterior sobre a circunferência. O objetivo dessa atividade não é trabalhar com elementos como foco e diretriz da parábola, pois caso contrário estar-se-ia correndo o risco de tornar a sequência demasiadamente longa e, além disso, para as construções das imagens não é necessário que o aluno realize construções geométricas com esses elementos.

É importante observar que os alunos já tiveram contato com o estudo de funções quadráticas. Porém, em geral, poucas são as vezes em que é explorado na perspectiva da equação $y = a(x - m)^2 + n$. Nesse sentido, a atividade (10) visa retomar alguns tópicos estudados pelos alunos como as raízes e os coeficientes de uma função quadrática (no que se refere à função $f(x) = ax^2 + bx + c$) e, também, analisar os parâmetros a, m e n da equação $y = a(x - m)^2 + n$.

A atividade (11) propõe a representação da porta frontal do Theatro Treze de Maio. A repetição desse prédio, nessa atividade, se dá em virtude da dificuldade de encontrar elementos arquitetônicos que fossem delimitados por parábolas em outros prédios históricos da cidade de Santa Maria. Há de se ressaltar que a posição gráfica em que estão localizadas as regiões delimitadas por parábolas na imagem proposta nessa atividade pode permitir a exploração o deslocamento vertical e horizontal de parábolas e, assim, contribuindo para estudo da parábola na perspectiva da equação $y = a(x - m)^2 + n$.

A atividade (12) planejada com o GeoGebra propõe formalizar alguns resultados sobre a equação $y = a(x - m)^2 + n$, mais especificamente no que se refere aos parâmetros a, m e n. Ao movimentar os controles deslizantes construídos o aluno poderá visualizar qual o efeito provocado no gráfico. E, a partir disso, descrever em língua natural qual foi esse efeito. A figura a seguir apresenta o *applet* disponibilizado aos alunos.

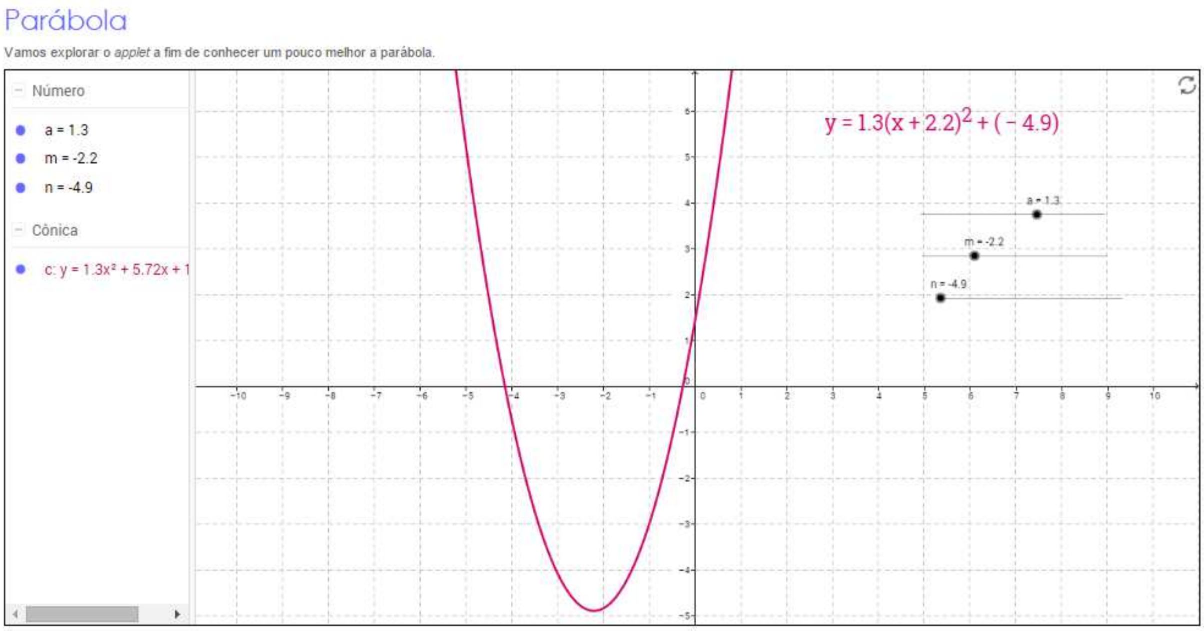


Figura 27 – Imagem do *applet* desenvolvido sobre o objeto parábola

Há de se observar a dificuldade encontrada em definir essa equação nesse *software*. Afinal, ao disponibilizar esse texto, para o coeficiente n, o *software* não realizava a correspondência de sinais. Assim, foi necessário o uso de parênteses originando, por exemplo, a seguinte equação $y = 2(x - 3{,}1)^2 + (-2{,}5)$. Dessa forma, essa equação apresenta-se visualmente poluída. Nesse sentido, caberá ao pesquisador proceder a uma explicação minuciosa sobre este detalhe.

6.6 Atividade 13

Por fim, propõem-se uma atividade em conjunto com a disciplina de Artes Plásticas.

ATIVIDADE 13
Agora está na hora de construir no GrafEq uma imagem de algum prédio de grande relevância histórica na cidade de Santa Maria. Em duplas, vocês poderão utilizar uma imagem da Internet ou fotografar o prédio histórico. Posteriormente, deverão elaborar uma apresentação no formato *.pptx* com a imagem original e a versão construída no GrafEq e também alguns dados como: Ano de construção (ou inauguração) da obra; Principais fatos históricos referentes a essa obra arquitetônica; Tipo de arquitetura característica do prédio; Outros aspectos que considerar interessantes (use a sua criatividade).

Além do conhecimento matemático, buscou-se integrar à sequência aspectos históricos e culturais da cidade de Santa Maria. Acredita-se que por meio dessa abordagem, possa-se favorecer o interesse dos alunos na realização das atividades e também contribuir para que estes tenham um novo olhar para com a cidade na qual residem, passando a valorizar mais o seu patrimônio arquitetônico. Nesse sentido, a última atividade integrará as disciplinas de Matemática e Artes Plásticas.

Nessa atividade o professor pesquisador trabalhou em conjunto com a professora titular da disciplina de Artes Plásticas. Para isso, foram ocupadas horas-aula dessa disciplina. Em suma, pode-se dizer que coube ao professor pesquisador orientar os alunos nos aspectos referentes ao conteúdo matemático relativo à representação dos prédios escolhidos por cada dupla de alunos. A professora da disciplina de Artes Plásticas foi responsável em orientar os alunos no que se refere aos aspectos artísticos dessas obras arquitetônicas, buscando estabelecer o tipo de arquitetura presente e os fatos históricos relevantes que envolvem esses prédios.

Para melhor orientar individualmente os alunos nas construções das imagens no GrafEq, o professor pesquisador disponibilizou um horário no contra turno de aula desses alunos. Ao fim da atividade, foi promovida a socialização dos trabalhos realizados.

7 ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A partir desse momento, far-se-á a discussão dos resultados obtidos na experimentação. Para tanto, organiza-se o texto de forma a analisar os resultados de cada atividade (ou bloco delas). São apresentadas situações observadas pelo pesquisador durante a dinamização dessas atividades, reflexões sobre esse processo e sobre as produções dos alunos. As situações analisadas foram selecionadas de modo a buscar explicitar e descrever momentos ou episódios que evidenciam fatos considerados relevantes e que se referem ao ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos abordados. Por vezes, apresentar-se-á uma categorização sobre as suas produções visando analisar se o aluno identificou determinadas características gráficas presentes nas imagens propostas e como procedeu para construí-las no GrafEq. Essa abordagem permite uma descrição geral sobre as variáveis visuais identificadas pelos alunos, bem como os encaminhamentos dados por eles.

7.1 Atividades 1 e 2

No primeiro dia de experimentação, reafirmou-se o convite para que os alunos realizassem as atividades propostas com empenho e dedicação e esclareceram-se mais algumas dúvidas sobre esse processo. Após uma falha técnica inicial do *datashow*, assistiu-se ao vídeo proposto na primeira atividade. A percepção resultante dessa experiência foi que aquilo que se propunha com o vídeo foi alcançado: sensibilizar e contextualizar o trabalho a ser realizado. Tanto que, na atividade final, na qual os alunos realizaram uma pesquisa sobre algum prédio da cidade de Santa Maria, muitos abordaram questões como dados sobre a fundação, tipo de arquitetura presente, e outros dados históricos, os quais também eram mencionados no referido vídeo.

Os alunos dispenderam sua atenção no vídeo e realizaram comentários afirmando que em nenhuma das oportunidades nas quais haviam transitado perto do prédio (ou até mesmo nele adentrado) observaram os detalhes presentes na sua decoração interna e ou externa. Assim, a utilização do vídeo cumpriu o propósito de ser o ponto de partida do trabalho, afinal introduziu a temática do trabalho que viria a ser desenvolvido.

Em seguida, propôs-se o reconhecimento dos elementos geométricos presentes na imagem destacada. É importante mencionar que durante a experimentação foi esclarecido aos alunos que deveriam identificar as regiões geométricas bem como os elementos geométricos que as delimitam. Antes de tudo, cabe lembrar que neste trabalho são analisados os trabalhos dos dezoito alunos que frequentaram regularmente as aulas referentes à sequência didática. Quinze alunos realizaram esta atividade.

Inicialmente propôs-se que os alunos respondessem essa questão de forma individual para, então, realizar-se uma discussão sobre os resultados encontrados. Os quinze alunos evidenciaram de forma correta a presença de figuras que visualmente lembram retângulos e triângulos.

É importante observar que doze referiram haver quadrados na imagem. Destes, cinco afirmaram tratar-se do polígono destacado (de cor vermelha) na figura a seguir.

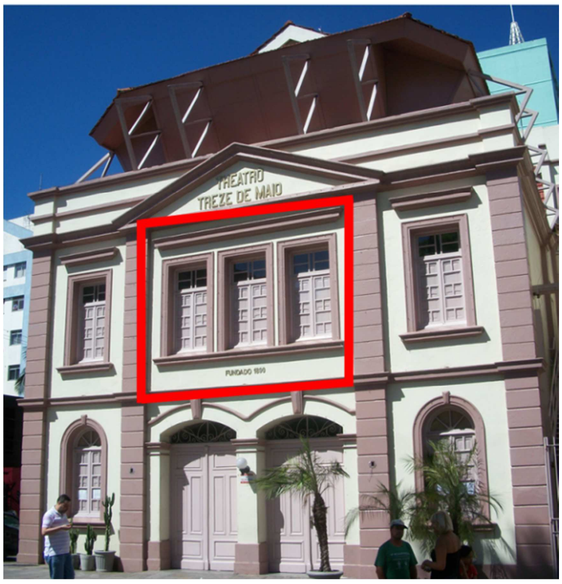


Figura 28 – Imagem do Theatro Treze de Maio
Fonte: Fotografia realizada pelo autor.

Estes alunos informaram que acreditavam que essa região seria quadrangular devido a sua avaliação visual do registro gráfico. Alguns disseram que realizaram medições com uma régua e que encontraram valores iguais para os lados dessa figura. Os demais alunos (sete) que indicaram a presença de quadrados na imagem, na verdade haviam localizado regiões retangulares. Com isso, essa discussão proporcionou um momento de retomada dos conceitos de retângulo e quadrado, haja vista que alguns deles ainda não conseguiam realizar uma distinção clara entre esses dois conceitos. É importante mencionar que, também, discutiu-se com os alunos o fato da imagem não ter sido tomada a partir da frente do prédio e, portanto, as conclusões as quais se chegou a partir da sua análise não necessariamente coincidem com as medições da estrutura física do prédio.

Outro ponto discutido foi se realmente pode-se afirmar que o triângulo na imagem seria isósceles (destacado na cor vermelha na figura a seguir), considerando que dois alunos assim haviam escrito. Além disso, também se convidou o aluno que havia apontado a existência de um pentágono a explicitar onde está localizado na imagem, no caso o polígono delimitado pelas laterais da imagem destacada na cor azul na figura a seguir.

Figura 29 – Pentágono apontado pelo aluno na imagem do Theatro
Fonte: Fotografia realizada pelo autor.

Quatro alunos indicaram a existência de retas na imagem e dois indicaram a presença de segmentos de retas. Assim, verifica-se que estes quatro alunos não distinguiram reta de segmento de reta. De forma geral, os alunos afirmaram que visualizaram apenas “pedaços” das retas que delimitam as regiões, porém não transportaram essa observação na forma exata para a língua natural.

Acredita-se que a discussão realizada contribuiu para o “amadurecimento” da compreensão desses alunos em relação aos tópicos discutidos. Considera-se que esta atividade tenha sido válida, pois oportunizou um momento de retomada sobre alguns objetos os quais seriam abordados nas atividades posteriores com a construção de polígonos como retângulos, quadrados e triângulos ou as regiões por eles definidas, bem como dos conceitos de retas e segmentos de retas.

A segunda atividade requereu o tempo de uma hora-aula para a sua realização. Serão analisadas as produções de quinze alunos.

Ao fim da realização da atividade constatou-se que onze alunos realizaram todas as associações de forma correta. Porém, cabe descrever o processo da experimentação dessa atividade, afinal os alunos apresentaram várias dificuldades durante as aulas. Inicialmente, os alunos, ao se depararem com a atividade, consideraram-na de elevado grau de dificuldade. Em geral, a maior parte dos alunos que tiveram dificuldades na sua resolução perguntou ao professor pesquisador de que forma deveriam estabelecer as relações. Pôde-se observar que ainda não visualizavam a figura geométrica nem a sua relação algébrica correspondente como uma região delimitada por retas. Por exemplo, para a região (9) esses alunos apenas identificavam quais eram os valores numéricos que delimitavam as suas laterais, isto é, somente identificavam que o valor da abscissa teria que estar compreendida entre -8 e 8 e o valor das ordenadas entre 1 e 2.

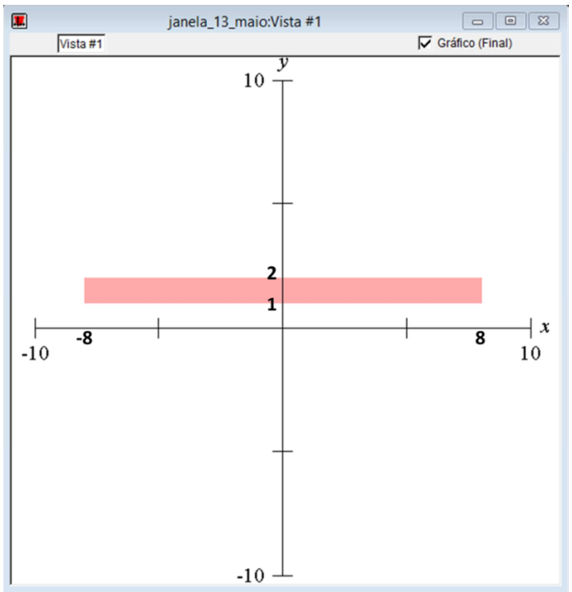


Figura 30 – Representação dos valores numéricos limítrofes da região 9

A partir desse cenário, explicou-se uma das várias possibilidades de determinar a relação algébrica correspondente. Para tanto, o professor pesquisador desenhou na lousa da sala de aula uma região retangular em um plano cartesiano e tracejou as retas que a delimitam. Na figura a seguir, o aluno F reproduz a estratégia utilizada pelo pesquisador para três regiões da construção proposta na atividade.

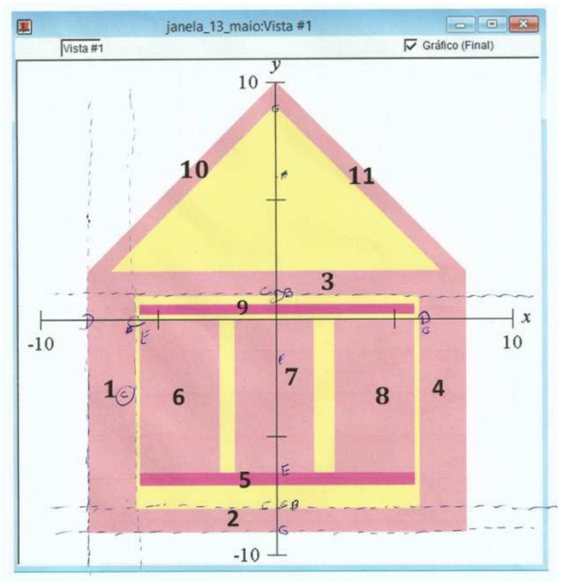


Figura 31 – Estratégia de delimitação das regiões – aluno F

Com isso, pode-se observar a importância de se realizar essa construção no registro gráfico, pois foi somente a partir dela que os alunos realizaram a sua conversão para o registro algébrico. Ainda no que diz respeito ao aluno F, observou-se durante a aula que após tracejar graficamente as retas que delimitavam algumas regiões da figura, passou a não mais necessitar realizar esse procedimento, realizando-o apenas mentalmente.

Três (3) alunos confundiram-se entre os registros gráficos 10 e 11 (itens J e F, respectivamente) conforme figura anterior. Provavelmente porque ainda não compreendiam como representar retas não paralelas ao eixo das abscissas ou das ordenadas. Os demais alunos realizaram a associação entre estes dois registros por meio de um processo de exclusão, afinal identificaram que as retas que delimitam essas duas regiões gráficas apresentam registros gráficos distintos das demais regiões delimitadas por retas paralelas a um dos eixos do plano cartesiano. E, a partir disso, chegaram à resposta correta, pois observaram que a região (10) é delimitada por retas crescentes e assim o seu registro algébrico deveria apresentar um coeficiente angular positivo e, como as retas que delimitam a região (11) são decrescentes, os coeficientes angulares destas retas deveriam ser menores que zero. O aluno H não indicou quais seriam as associações para estas duas regiões gráficas, pois não teve tempo. As demais associações ele realizou corretamente. Este aluno apresentou algumas dificuldades nas primeiras atividades, porém teve um interessante desenvolvimento na sua aprendizagem, o que será evidenciado durante a descrição dos resultados das próximas atividades.

Outro fato que chamou atenção ao final da atividade foi que a maioria dos alunos, espontaneamente, realizou a conferência das suas associações no GrafEq, pois o *software* já estava instalado nos computadores do laboratório de informática (ambiente no qual foram realizadas todas as atividades), sem que o professor pesquisador tenha solicitado. Assim, convidaram-se os demais que também realizassem essa verificação.

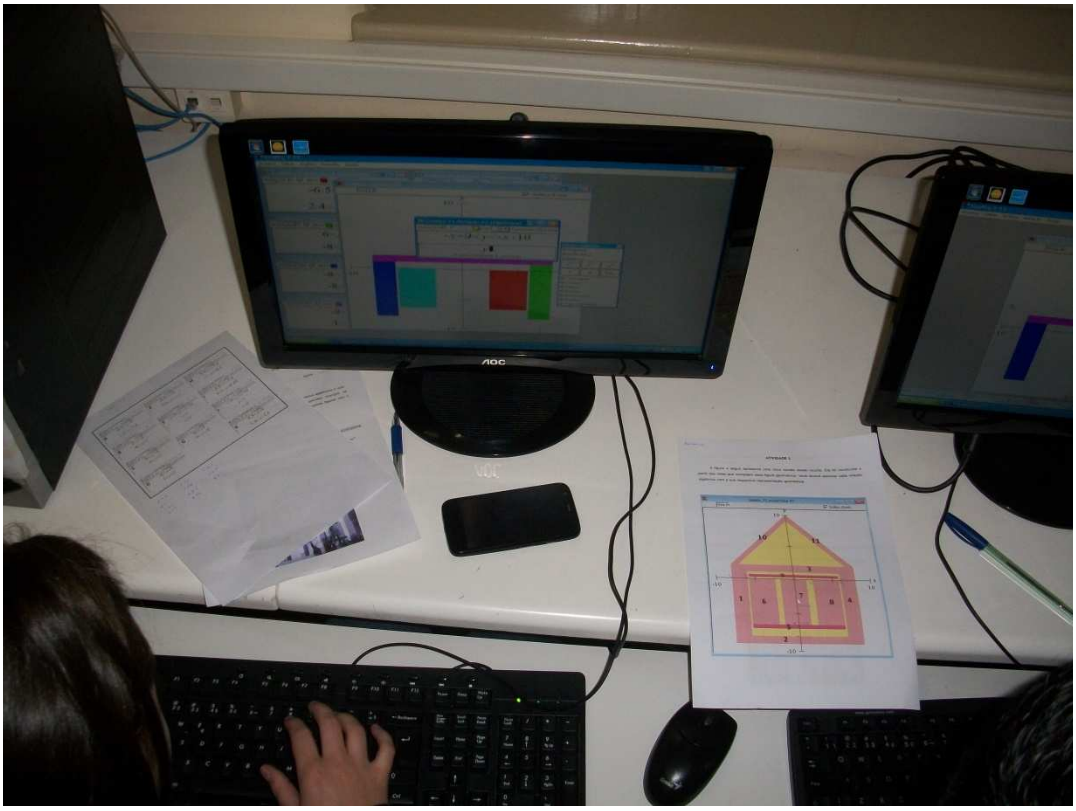


Figura 32 – Imagem dos alunos verificando suas associações no GrafEq
Fonte: Fotografia realizada pelo autor.

Com isso, pode-se afirmar que estes alunos se envolveram com a aprendizagem dessa atividade, afinal demonstraram interesse e entusiasmo em verificar se as suas resoluções eram corretas. Corrobora para esta afirmação, o fato de que muitos desses alunos questionaram o professor pesquisador sobre suas dúvidas durante esse processo de averiguação.

7.2 Atividade 3

Primeiramente, após uma breve introdução oral do professor pesquisador sobre o que consistia essa atividade, dedicou-se um momento de exploração e planejamento por parte dos alunos, ou seja, estes realizaram algumas tentativas prévias de construir as retas que delimitam as colunas da figura. Conforme se discutiu no capítulo anterior, as retas que delimitam as colunas não são paralelas ao eixo das ordenadas. Cabe salientar que a professora titular de Matemática já havia trabalhado com a turma os conteúdos de equação da reta e, também, mais especificamente sobre o tópico coeficientes da equação da reta. Assim, lembrou-se qual a relação gráfica que cada coeficiente algébrico determina para então realizar a seguinte pergunta: existe alguma relação entre o coeficiente angular de duas retas paralelas? Após um silêncio inicial, pediu-se aos alunos que representassem graficamente em um papel duas retas paralelas contidas em um plano cartesiano. Com isso a maioria dos alunos conseguiu concluir que essas duas retas paralelas possuem coeficientes angulares de mesmo valor.

A seguir, realiza-se uma análise das regiões delimitadas por retas, conforme se propôs na sequência didática. São catorze os alunos que finalizaram a atividade.

Situação observada	Número de alunos
Construíram as regiões definindo as colunas com retas NÃO paralelas ao eixo y, mas paralelas entre si.	11
Construíram as regiões definindo as colunas com retas paralelas ao eixo y.	3
Não estavam presentes na aula e ou não realizaram a atividade.	4

Inicialmente o professor pesquisador realizou uma construção no GrafEq de um retângulo a qual foi projetada por meio de um *datashow*. Nessa construção orientou-se aos alunos que utilizassem como estratégia, antes de estabelecer a relação de inequações, definir separadamente as equações das retas que delimitam as regiões e seus respectivos registros gráficos.

Figura 33 – Imagem de alguns alunos realizando as representações no GrafEq
Fonte: Fotografia realizada pelo autor.

Como já se esperava, os alunos tiveram mais dificuldade em estabelecer as relações com as inequações correspondentes às colunas, principalmente quando identificaram que eram limitadas por retas não paralelas ao eixo y. Para estabelecer as primeiras equações dessas retas os alunos testaram os seus coeficientes. A seguir apresenta-se a imagem com a construção final realizada pelo aluno D.

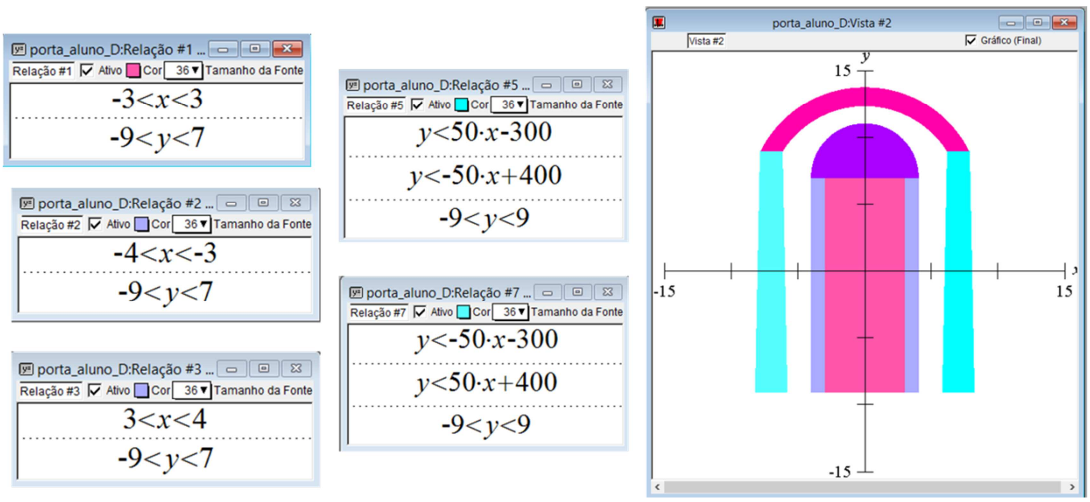


Figura 34 – Representação da porta do Colégio Manoel Ribas no GrafEq
Fonte: Produção do aluno D.

Para determinar os valores dos coeficientes angulares das retas, o aluno D realizou experimentações, isto é, ora aumentava os seus valores ora diminuía, até que encontrou a representação gráfica desejada. Outra característica observada nos trabalhos, e que está presente na construção do aluno D, corresponde à simetria horizontal das regiões estabelecidas. É interessante observar a seguinte fala do aluno D:

Aluno D: *Ah, se essa reta (*$y = 50x - 300$*) é assim, então para achar a do outro lado é só trocar o sinal.*

O aluno havia conjecturado que se plotasse a reta $y = -50x + 300$ obteria a representação gráfica de uma reta paralela à anterior. A partir disso, solicitou-se que o aluno fizesse esse teste, conforme havia pensado. Ao plotar essa equação o aluno observou que o resultado gráfico não foi o esperado, pois não se tratavam de retas paralelas como pretendia representar. Assim, questionou-se o porquê desse fato, obtendo-se a seguinte resposta:

Aluno D: Acho que eu só preciso trocar um dos números (o sinal deles), vou ver qual deles que é.

Em seguida, o aluno testou e verificou que necessitava manter o mesmo coeficiente angular, pois assim geraria uma reta paralela à anterior. O passo final foi modificar o valor do coeficiente linear (nesse momento o aluno definiu a reta $y = 50x + 400$) de modo que as colunas representadas no gráfico fossem simétricas em relação ao eixo das ordenadas.

Conforme Duval (2009) é necessário que o aluno reconheça um objeto matemático nos seus diferentes registros de representação. Do ponto de vista cognitivo, para Duval (2013), compreender é:

> [...] primeiro reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações semióticas que podem ser feitas a partir dele, cujos conteúdos não têm nada em comum. E isso significa pensar de forma espontânea, *e por si só*, em substituir uma dada representação semiótica por outra representação semiótica útil para um tratamento. Este aspecto é crucial para resolver qualquer problema. (DUVAL, 2013, p. 20).

No caso anterior, pôde-se observar que o aluno D e os seus colegas, reconheciam parcialmente os coeficientes da equação de uma reta enquanto variáveis visuais do registro algébrico, porém ainda não diferenciavam o que representam graficamente. Nesse sentido, afirma-se que para esses alunos o reconhecimento desse objeto nos seus registros está em processo. Acredita-se que, por meio das explorações proporcionadas, esta atividade colaborou para a consolidação e aprendizagem dessas propriedades à medida que os alunos realizaram experimentos no GrafEq para validar ou refutar suposições feitas por eles.

Além disso, essas passagens evidenciam que o aluno realizou experimentos no GrafEq para validar suposições feitas por ele com base em propriedades matemáticas sobre as quais já possuía uma compreensão inicial, porém não consolidada. O papel do professor pesquisador nesse caso, não foi dizer se a hipótese do aluno estava correta ou não, o aluno pôde verificar a sua conjectura por meio de sua ação com o uso do *software.* A intervenção principal do professor pesquisador se deu em seguida, quando questionou o aluno sobre as conclusões que ele poderia inferir sobre a relação existente entre os coeficientes da equação da reta e o seu respectivo registro gráfico.

No que tange aos alunos que realizaram representações definindo as colunas por meio de retas paralelas ao eixo das ordenadas, estes afirmaram que, apesar de terem realizado algumas tentativas, não haviam compreendido como definir algebricamente retas não paralelas aos eixos coordenados. Na figura a seguir, apresenta-se a representação do aluno O.

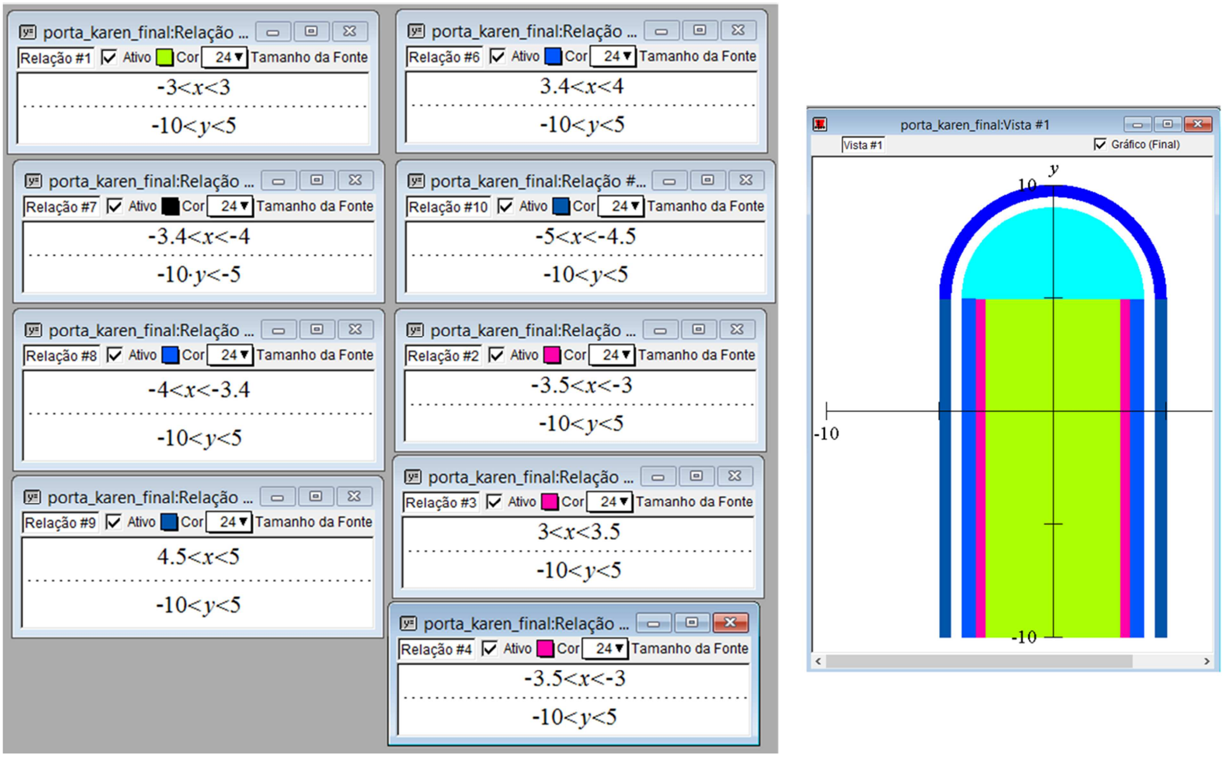


Figura 35 – Registro algébrico e gráfico da representação da porta no GrafEq
Fonte: Produção do aluno O.

Por meio das relações definidas pelo aluno O, verifica-se que ele realmente apenas plotou regiões delimitadas por retas paralelas aos eixos coordenados. Nesse sentido, pôde-se observar que ele não compreendia suficientemente o objeto reta, mais especificamente no que se refere a converter os seus registros gráfico e algébrico.

Um fato constatado durante a realização dessa atividade (e também em atividades seguintes da sequência dinamizada) foi a não compreensão das desigualdades por parte de alguns alunos. Inclusive, alguns não sabiam diferenciar os signos maior (>) e menor (<). O que pode ser constatado quando necessitavam, por exemplo, estabelecer a relação algébrica que correspondia aos números (reais) maiores que dois, isto é, não conseguiam diferenciar as expressões $x > 2$ e $x < 2$. Outro fato que corrobora para essa afirmação consiste em observar nos arquivos finais das construções de alguns alunos que estes não adotam um padrão para registrar algebricamente uma região compreendida entre dois valores, conforme a figura a seguir.

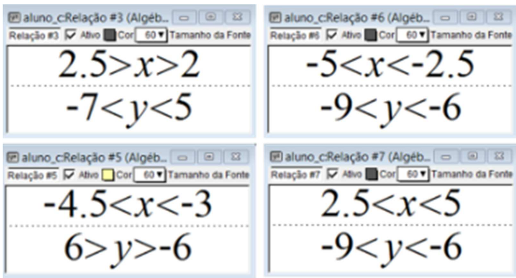


Figura 36 – Relações de inequações utilizadas pelo aluno C

Pode-se observar que em cada uma das relações da primeira coluna o aluno C utilizou uma relação do tipo $a < z < b$ e outra do tipo $c > w > d$. Esse aluno questionou o professor pesquisador durante a aula sobre algumas de suas tentativas de plotar relações algébricas que não haviam gerado os registros gráficos que desejava. Pôde-se constatar que, nesse caso, o aluno não compreendia as relações algébricas e o que elas representavam graficamente. Na atividade seguinte, o aluno C passou a definir todas as relações na forma $a < z < b$. Nessa perspectiva, pôde-se verificar que a atividade contribuiu para que o aluno reconhecesse essas desigualdades múltiplas enquanto regiões delimitadas por segmentos de retas.

Outros alunos também apresentaram essa dificuldade ao longo da experimentação da sequência didática, o que já era esperado, pois abordagens sobre desigualdades são poucos usuais no ensino da matemática, principalmente quando considerada a representação gráfica correspondente de cada relação de inequações. Sobre o trabalho com desigualdades no GrafEq, Notare e Gravina (2013, p. 7) afirmam que “em experiências com alunos, muitas vezes, detectamos conflitos cognitivos frente à aparente não resposta do *software* ao desenho de forma resultante de intersecções de conjuntos”. No presente caso, observa-se que esses alunos não entendiam prontamente que a intersecção resultante da relação de inequações plotada é um conjunto vazio. Na experiência desenvolvida, esses conflitos cognitivos foram sendo amenizados à medida que testavam suas conjecturas iniciais, avaliando os resultados das experimentações realizadas e interagiam com o professor e os próprios colegas.

7.3 Atividade 4

A partir da análise da produção dos alunos, apresenta-se a categorização a seguir.

Situação observada	Número de alunos
Realizaram a construção evidenciando detalhes da imagem, realizando os necessários tratamentos no registro algébrico de modo a encontrar as equações das retas que delimitam as regiões que compõem a estrela.	7
Realizaram a construção evidenciando detalhes da imagem, encontrando as equações das retas que delimitam as regiões que compõem a estrela por meio de tentativas, sem realizar os devidos tratamentos no registro algébrico.	3
Realizaram a construção de forma satisfatória, porém sem evidenciar detalhes da imagem, realizando os necessários tratamentos no registro algébrico de modo a encontrar as equações das retas que delimitam as regiões que compõem a estrela.	5
Apenas definiram algumas equações das retas que delimitam as regiões que compõem a estrela, apresentando dificuldades na definição das relações compostas por inequações.	3

Esta atividade demandou um período de cinco horas-aula para que fosse completamente concluída. Os alunos apresentaram duas principais dificuldades, a saber: a definição das retas que delimitassem as regiões que compõem a imagem e estabelecer as inequações que compunham as relações algébricas no GrafEq.

Durante as primeiras duas horas-aula, todos os alunos buscaram encontrar as equações das retas que delimitassem os lados da estrela por meio de sucessivas tentativas. Ou seja, buscavam ora aumentavam ou diminuíam o valor do coeficiente angular e ora alteravam o valor do coeficiente linear da reta a qual objetivavam estabelecer. Ao final dessas primeiras horas-aula, constatou-se que dois alunos haviam encaminhado a representação de todos os lados da estrela por meio da exploração dos valores dos coeficientes da equação da reta a partir da observação dos movimentos provocados no registro gráfico, restando definir as relações com as regiões gráficas. A seguir apresenta-se a representação final do aluno A (as cores dos lados da estrela foram modificadas pelo autor do presente trabalho para melhor analisar o trabalho do aluno).

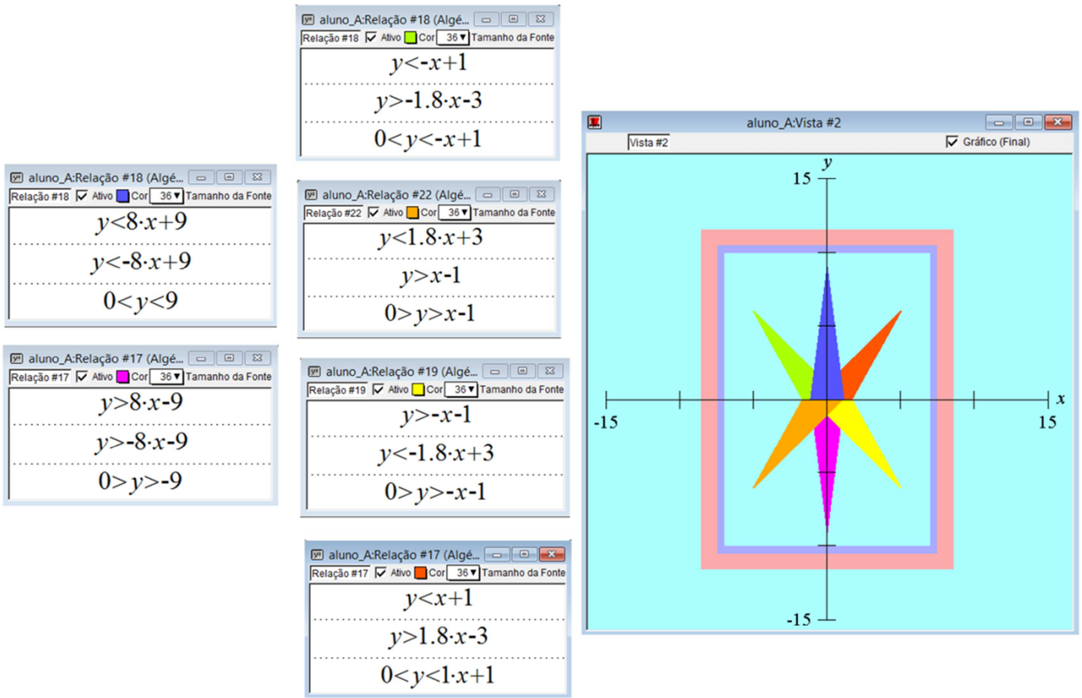


Figura 37 – Registro algébrico e gráfico da representação estrela no GrafEq
Fonte: Produção do aluno A.

O aluno A relatou ao professor pesquisador que para definir as equações das retas que delimitam os lados da estrela, verificou os valores em que os gráficos das retas interceptam o eixo das ordenadas, ou seja, o valor do coeficiente linear. E, logo após, verificava o valor do coeficiente angular até encontrar o resultado gráfico desejado.

No encontro seguinte (também de duas horas/aula), verificou-se que a grande maioria dos alunos não havia compreendido como definir as equações das retas que não interceptavam os eixos coordenados por meio da exploração dos seus coeficientes. Ou seja, também realizaram tentativas para encontrar as equações das retas e, de uma forma geral, obtinham algum êxito em definir os lados da estrela os quais interceptavam um dos eixos coordenados do plano cartesiano.

Ao serem questionados sobre como poderiam encontrar a equação de uma reta dado o seu gráfico, as suas respostas em nenhum momento indicaram convergiram para a utilização da equação geral da reta. Dessa forma, pôde-se observar que, mesmo que tenham realizado um estudo preliminar sobre este tópico, estes alunos não associavam aquilo que haviam estudado com a situação colocada, ou seja, que se pode obter a equação de uma reta por meio da fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde (x_0, y_0), (x_1, y_1) são pontos da reta e $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Assim, entende-se que os alunos ainda não compreendiam, de fato, o que representa uma reta nos seus diversos registros de representação (DUVAL, 2013).

Em seguida, o professor pesquisador optou em realizar na lousa em conjunto com os alunos o estudo de um exemplo de determinação da equação de uma reta cujo gráfico foi fornecido no GrafEq e escolhidos dois pontos a ele pertencentes. Essa resolução conjunta ajudou-os a determinar as equações das retas que compõem a estrela. A figura a seguir apresenta os tratamentos algébricos realizados pelo aluno E depois de definir os pontos $A(5; 0)$ e $B(10{,}5; -9{,}35)$ observados no plano cartesiano.

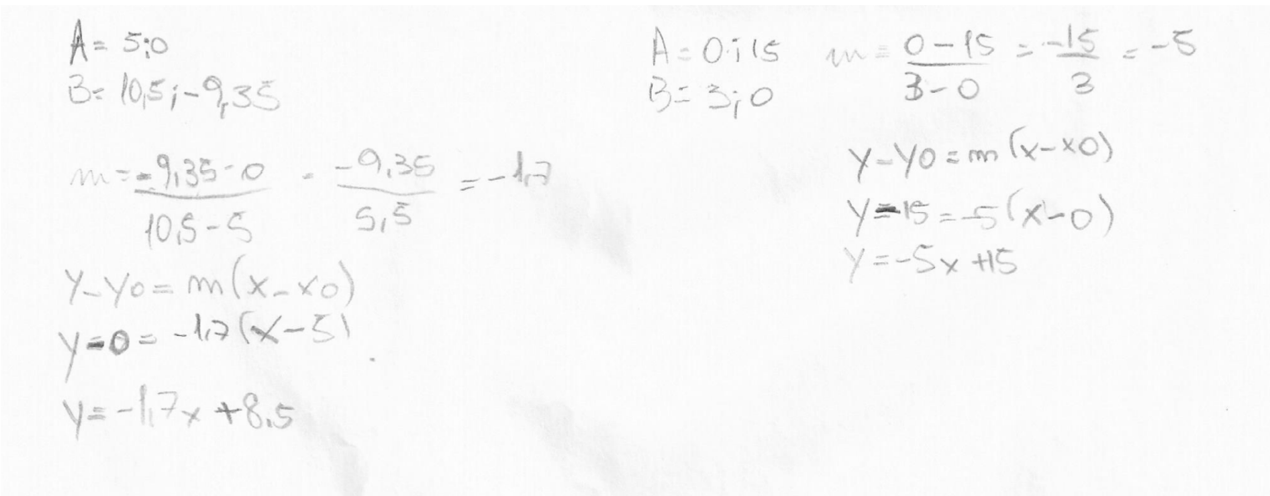


Figura 38 – Tratamentos algébricos realizados pelo aluno E
Fonte: Produção do aluno E.

Dessa forma, pôde-se observar que mesmo os alunos, que haviam durante as aulas anteriores, resolvido problemas enunciados no livro didático ou propostos pela professora titular em que necessitavam estabelecer a equação de uma reta, não conseguiram transpor esse conhecimento para uma situação semelhante. Pois, conforme já se afirmou, segundo Duval (2009, 2013), os alunos ainda não pensavam de forma instantânea, ou seja, não substituíam a representação gráfica pela sua representação algébrica correspondente de modo que pudessem realizar os necessários tratamentos algébricos para encontrar as equações das retas e, consequentemente, as relações de inequações que definem as regiões gráficas.

A partir desta intervenção os alunos passaram a realizar sistematicamente o processo de identificar dois pontos pertencentes ao gráfico de uma reta e, em seguida, realizar os devidos tratamentos algébricos para encontrar a equação dessa reta. Evidentemente que, com isso, o foco dessa resolução não correspondia mais às variáveis visuais pertinentes do registro algébrico do objeto reta abordadas na sequência (coeficientes angular e linear). Nesse sentido, acredita-se que, ao mesmo tempo em que esse encaminhamento possa ter contribuído para esclarecer os alunos sobre os tratamentos algébricos, incorreu-se no risco desta resolução ter-se tornado uma decodificação, ou seja, um processo mecânico. Dessa forma, acredita-se que o professor pesquisador poderia ter realizado uma intervenção no sentido de esclarecer os alunos sobre possíveis experimentações com os coeficientes de modo a convergir para encontrar os registros gráficos desejados, o que poderia ter contribuído para uma compreensão mais ampla (global) do objeto reta, mais especificamente no que tange à alteração dos coeficientes do registro algébrico e os respectivos movimentos produzidos no registro gráfico.

Podem-se observar nos trabalhos realizados pelos alunos que todos inicialmente encontraram e plotaram individualmente cada reta para, então, definir quais seriam as relações de inequações que determinariam as regiões compreendidas por essas retas.

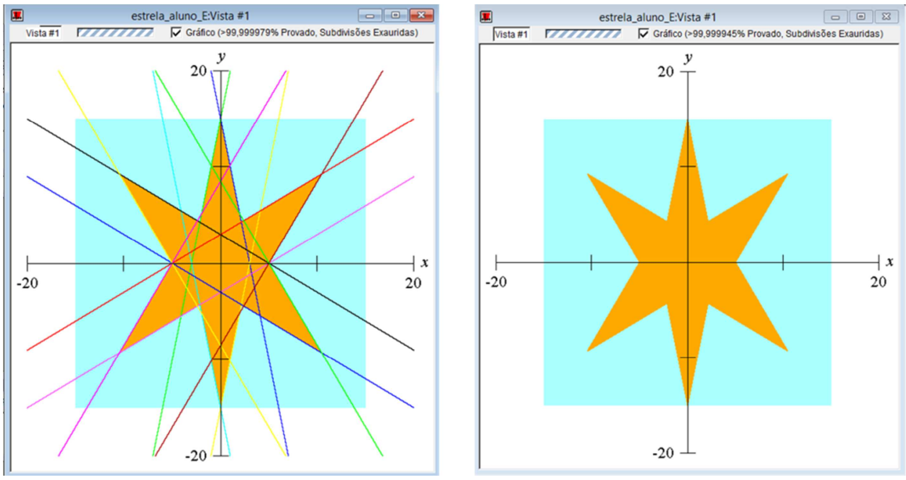


Figura 39 – Construção do aluno E
Fonte: Produção do aluno E.

Esse fato pode ser observado na construção do aluno E que, inicialmente, estabeleceu todas as retas individualmente e depois as omitiu por meio da lista de relações gerada pelo GrafEq, ou seja, não foi necessário que as excluísse, apenas não as deixasse visíveis.

Na figura seguinte, encontram-se nas duas colunas à esquerda as relações destinadas à construção de cada reta e nas duas colunas à direita àquelas destinadas a representação das regiões gráficas.

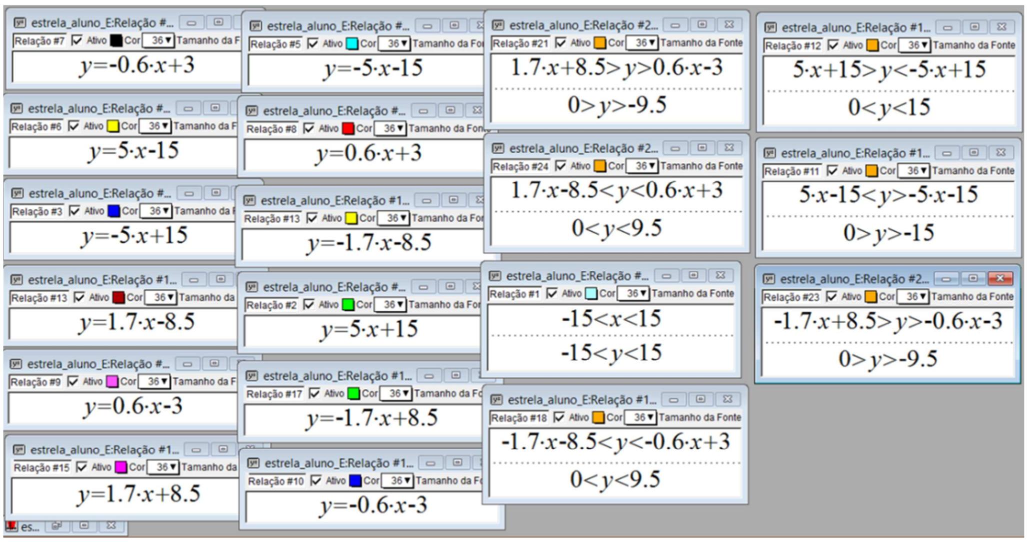


Figura 40 – Relações utilizadas na construção do aluno E
Fonte: Produção do aluno E.

Outro ponto a se destacar nessa atividade corresponde à sobreposição dos lados da estrela. Por exemplo, para construir lado da estrela indicado pela seta na figura 41 (a), o aluno G sobrepôs parte deste lado ao centro da estrela o qual já havia delimitado. Esse fato pode ser facilmente verificado quando se muda a cor dessa região e altera-se a ordem na qual é plotada essa relação como na figura 41 (b).

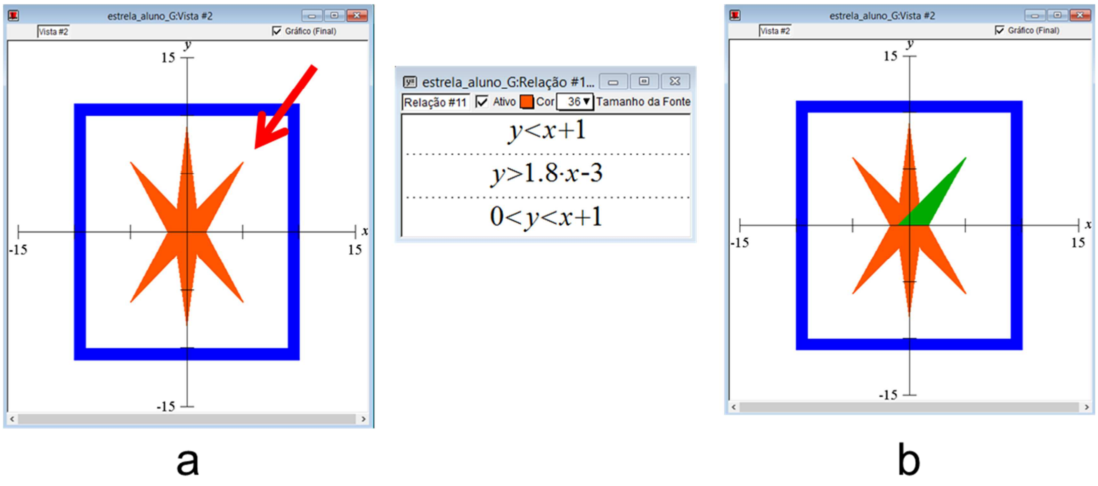


Figura 41 – Sobreposição de imagens na construção do aluno G

Como os alunos em geral optaram em definir de uma mesma cor todas as partes plotadas da estrela, em uma primeira análise, tal fato pode passar despercebido. Essa é uma situação que é característica do trabalho com o GrafEq. Nesse sentido, orientaram-se os alunos que buscassem nessa atividade não sobrepor as regiões que compunham a estrela, pois assim a atividade apresenta um potencial matemático maior à medida que, dessa forma, necessitam estabelecer um raciocínio mais amplo, que pode levar o aluno a entender melhor esta questão. Por outro lado, foi-se verificando que a atividade estava demandando um grande tempo para que fosse concluída e, assim, temendo-se o desinteresse por parte dos alunos em concluí-la, a partir de certo momento, indicou-se que poderiam finalizá-la mesmo havendo algumas sobreposições. A partir da análise das construções realizadas verifica-se que seis alunos não utilizaram nenhum tipo de sobreposição nas suas construções, enquanto que os demais utilizaram pelo menos alguma sobreposição.

Durante a realização dessa atividade, constatou-se que alguns alunos apresentavam uma dificuldade maior em construir a região proposta. Assim, o professor pesquisador convidou esses alunos que comparecessem na escola no período do contra turno para que pudesse lhes auxiliar de forma individual e disponibilizando um maior período de tempo para isso. Dois alunos (D e H) compareceram nesse encontro adicional, outros afirmaram que gostariam de se fazer presentes, porém não poderiam, pois possuíam atividades de estágio ou emprego nesse período.

Durante esse encontro, o professor pesquisador observou que, de forma semelhante aos demais, as dificuldades desses dois alunos residiam em não compreender como determinar a equação algébrica de uma reta cujo registro gráfico por eles era projetado mentalmente no plano cartesiano visualizado no GrafEq. Nesse sentido, o professor pesquisador resolveu com esses alunos alguns exemplos e a dedução formal dessa equação. À medida que realizavam as suas construções, os alunos necessitavam cada vez menos da intervenção do professor pesquisador.

Assim, reafirma-se o quanto é importante ouvir os alunos e buscar identificar quais as suas dúvidas e dificuldades e, a partir disso, promover situações que possam amenizar essas dúvidas. Ao fim do encontro, apesar de transcorrido o tempo previsto para a sua realização, os dois alunos optaram em permanecer no local para finalizar as suas construções. É interessante mencionar que estes dois alunos, no encontro seguinte (última hora/aula destinada para a realização dessa atividade com a turma) auxiliaram o professor pesquisador a atender e sanar as dúvidas dos demais alunos. Ou seja, com isso houve uma promoção da interação entre os próprios alunos e que se tornou característica também das atividades seguintes, o que favoreceu o desenvolvimento da realização das atividades e a compreensão do conteúdo matemático abordado.

7.4 Atividade 5

Na quinta atividade, inicialmente ocorreu um problema operacional: os alunos não conseguiam acessar o *applet* desenvolvido (localizado no repositório digital do GeoGebra), pois os computadores do laboratório de informática não possuíam uma versão atualizada da tecnologia Java, que é necessária para este site. Assim, depois da tentativa frustrada de instalar esse *software* nos computadores, optou-se por o professor pesquisador realizar as experimentações no seu computador cuja imagem foi projetada com um datashow. Com isso, verificou-se que os alunos se empenharam em resolver esta atividade de forma mais discreta, não com tanto interesse como nas demais.

São treze os alunos que responderam as questões propostas nessa atividade. Os demais alunos cujos trabalhos são considerados na presente análise, não estavam presentes nesta aula.

No item (i) doze alunos constataram que a modificação do valor do coeficiente angular da equação de uma reta produz uma alteração gráfica na inclinação da reta. Além disso, apontaram corretamente que quando este é um valor positivo então se trata de uma reta crescente, e no caso de um valor negativo então a reta é decrescente. Dentre estes alunos, dois ainda apontaram a existência de retas paralelas ao eixo das abscissas (quando o coeficiente angular é zero). Posteriormente, foi realizada uma discussão a respeito das conclusões que os alunos haviam apontadas.

No item (ii), cinco alunos responderam afirmando que a alteração dos valores do coeficiente linear altera a posição da reta ao longo do eixo das ordenadas. Cinco alunos verificaram que o valor do coeficiente b da equação $f(x) = ax + b$ corresponde à ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas. A figura a seguir corresponde à resposta do aluno J, a qual se refere à conversão do registro gráfico ao registro da língua natural.

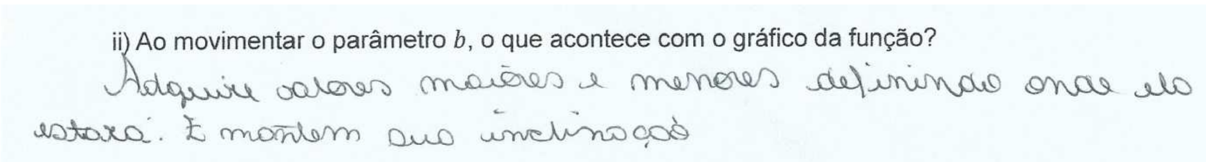
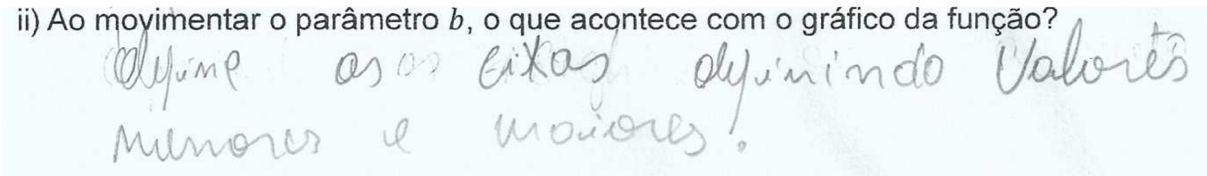


Figura 42 – Resposta do aluno J na questão 5 (ii)
Fonte: Produção do aluno J.

Pode-se observar que a resposta desse aluno evidencia as transformações gráficas ocorridas no gráfico de uma reta quando são alterados os valores do coeficiente linear. Além disso, devido ao aluno afirmar que as retas obtidas mantinham a sua inclinação, acredita-se que o aluno, ao menos, já intuía que se pode concluir que retas paralelas possuem a mesma inclinação (coeficientes angulares iguais). Na atividade seguinte o aluno concluiu corretamente essa condição.

Três alunos apresentaram dificuldades nessa questão, como a resposta do aluno P na figura a seguir.


ii) Ao movimentar o parâmetro b, o que acontece com o gráfico da função?

Aumine os os eixos diminindo Valores menores e maiores!

Figura 43 – Resposta do aluno P na questão 5 (ii)
Fonte: Produção do aluno P.

Acredita-se que ao alterar os valores do coeficiente linear da equação da reta, o aluno P visualizou que o ponto de intersecção do gráfico da reta com o eixo das ordenadas era alterado. Dessa forma, pode-se verificar que esse aluno apresentou dificuldade em converter aquilo que observava graficamente na tela do computador para o registro da língua natural. Nesse sentido, vale ressaltar que, como já se projetava essa dificuldade ao longo da sequência, sempre que possível, ao fim de cada atividade, realizou-se um momento de discussão em torno dos resultados encontrados pelos alunos. Assim, acredita-se que se contribuiu para uma reflexão dos alunos em torno daquilo que haviam escrito em cada item.

No item (iii) verificou-se como os alunos concluíram em relação aos coeficientes angulares de retas paralelas. Oito alunos responderam que para duas retas serem paralelas estas devem possuir coeficientes angulares iguais. Três alunos responderam que para duas retas serem paralelas é necessário que “os valores de a sejam iguais e os valores de b sejam diferentes”, com $y = ax + b$. Assim, realizou-se posteriormente a discussão sobre retas coincidentes.

É interessante observar a resposta do aluno L.

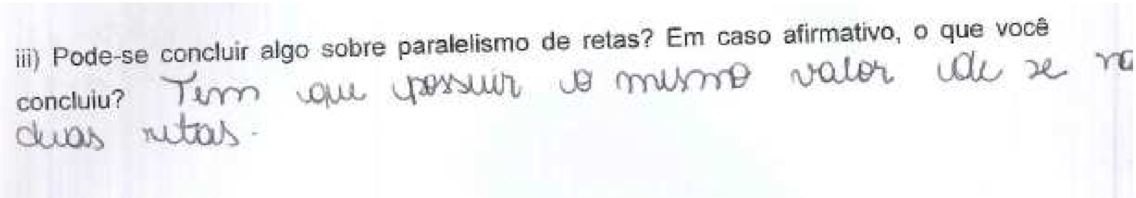

iii) Pode-se concluir algo sobre paralelismo de retas? Em caso afirmativo, o que você concluiu? Tem que possuir o mesmo valor de x na duas retas.

Figura 44 – Resposta do aluno L na questão 5 (iii)
Fonte: Produção do aluno L.

Pode-se observar que o aluno L ainda não distinguia a variável visual “a” e a variável da função “x” da equação da reta $y = ax + b$.

Um aluno não respondeu ao item e um aluno apresentou uma resposta incorreta.

No quarto item, os alunos inicialmente apresentaram dificuldade em compreender o que representava o quociente $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Na verdade, não recordavam do conceito de tangente. Nesse sentido, foi necessária a intervenção do professor recordando sobre este resultado matemático. Nessa intervenção o professor pesquisador não resolveu a questão proposta, e sim recordou as relações seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo de uma forma geral. Além disso, esclareceu que (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_1, y_0) eram as coordenadas dos pontos A, B e C, respectivamente. A partir disso, que os alunos começaram a relacionar o quociente como sendo o valor da tangente do ângulo formado pela reta com o eixo das abscissas.

Analisando a produção escrita dos alunos nesta atividade, verifica-se que onze alunos responderam no sentido de que o coeficiente angular corresponde à inclinação da reta (tangente do ângulo formado pela reta e o eixo das abscissas), como na figura a seguir com a conclusão do aluno Q.

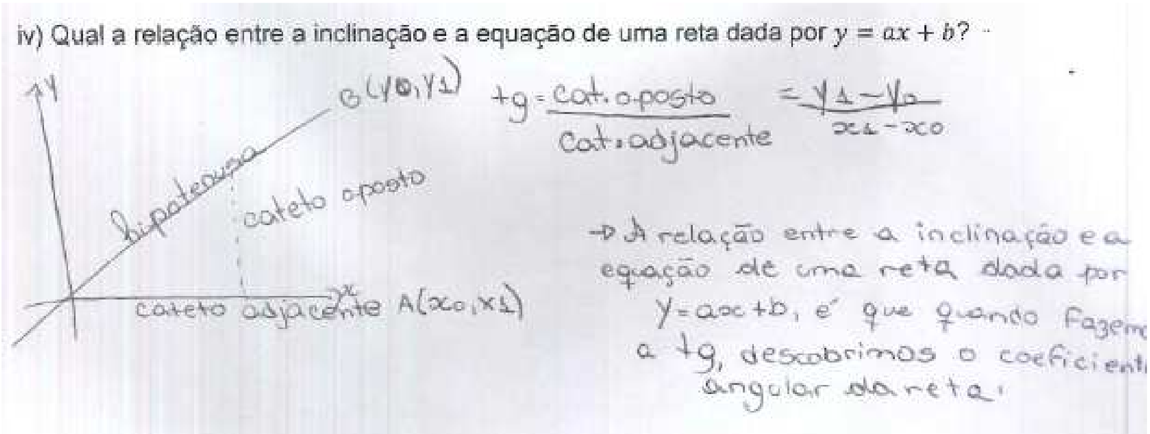


Figura 45 – Resposta do aluno Q na questão 5 (iv)
Fonte: Produção do aluno Q.

Duval (2011) esclarece que a aprendizagem matemática suscita dois tipos de problemas de compreensão de domínios diferentes. Há dificuldades locais que geralmente aparecem de forma pontual, na introdução de um conteúdo, em uma aula específica. Por outro lado, existem as dificuldades globais relacionadas a um período maior de duração (um ou mais anos letivos ou ciclos de formação).

Dois alunos não responderam o item (iv) da quinta questão e, além disso, verificou-se que também tiveram dificuldades em responder aos itens anteriores. Com base nessa análise, acredita-se que esta dificuldade se dê em virtude destes dois alunos terem demonstrado dificuldades globais nos conteúdos matemáticos abordados. Ou seja, dificuldades não relacionadas à introdução de um novo conteúdo ou especificamente à sequência didática, mas sim recorrentes e associadas a um ciclo ou de transferência do que se supõe adquirido (DUVAL, 2011). Afinal, afirmaram que desde o Ensino Fundamental possuíam dificuldades em compreender os conteúdos estudados na disciplina de Matemática. Por fim, vale ressaltar que, apesar dessas dificuldades, esse alunos apresentaram uma evolução na compreensão do objeto reta ao longo da sequência à medida que representaram no GrafEq as demais imagens propostas, as quais também apresentam regiões delimitadas por retas.

Vale ressaltar que, ao fim da resolução da atividade, discutiu-se com os alunos qual a conclusão que se poderia chegar ao marcar a terceira caixa de seleção e, então, movimentar os vértices do triângulo retângulo. A maioria dos alunos conseguiu concluir que os valores da tangente, ou seja, do coeficiente angular, não se alteravam. Assim, pôde-se concluir com os alunos que este resultado não era apenas de um caso particular, isto é, independentemente do triângulo retângulo a equação daquela reta não era alterada. A figura a seguir evidencia o *applet* com dois triângulos retângulos distintos.

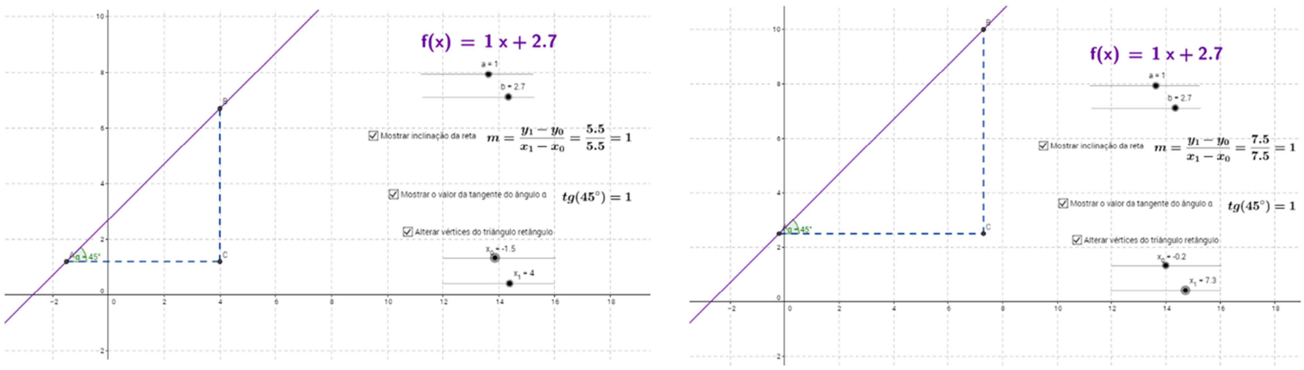


Figura 46 – *Applet* desenvolvido para a atividade 5

Avalia-se que a atividade (5) cumpriu com o seu objetivo geral, que era de sintetizar e validar a discussão dos coeficientes da equação da reta, em especial no que se refere ao paralelismo de retas. Ou seja, esta atividade oportunizou aos alunos formalizar o que já se havia discutido nas atividades anteriores sobre o objeto reta.

7.5 Atividades 6, 7, 8 e 9

Na sexta atividade, conforme já se descreveu anteriormente, o professor pesquisador estabeleceu com os alunos a equação de uma circunferência particular e, posteriormente, a equação geral desse objeto matemático. Na verdade, este foi um momento da sequência didática que não teve uma participação muito ativa por parte dos alunos. Coube ao professor pesquisador explicar, demonstrar e informar aos alunos sobre este conteúdo utilizando como principal ferramenta a lousa.

Evidentemente que se buscou realizar esse processo de modo a convidar os alunos a apresentarem suas ideias e dúvidas sobre esta atividade.

Os alunos se mostraram interessados em descobrir uma equação para o objeto circunferência. Acredita-se que o fato de ter-se encontrado primeiramente a equação de uma circunferência específica, colaborou para que os alunos compreendessem as variáveis visuais da equação geral de uma circunferência. Por exemplo, na circunferência $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ identificar, entre outros, que está centrada no ponto $(2,-3)$ e que possui raio igual a dois.

Na sétima atividade, os alunos retomaram a representação da porta do Colégio Manoel Ribas que foi proposta na terceira atividade, mais especificamente as regiões delimitadas por circunferências que a compõem. Inicialmente, o professor pesquisador não forneceu nenhuma informação no que se refere ao uso de inequações para a resolução dessa atividade, ou seja, disponibilizou-se um espaço inicial no qual os alunos deveriam testar as suas próprias conjecturas. A maioria dos alunos não teve dificuldades em estabelecê-las a partir o uso das desigualdades ($<$ e $>$). Apesar disso, quando questionados, não convertiam essa propriedade para o registro da língua natural.

Com isso, o professor pesquisador interveio no sentido de explicar à turma, por exemplo, o que a inequação $(x-2)^2+(y+3)^2>4$ representa, isto é, a região formada pelos pontos exteriores à circunferência $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ (pontos que distam a mais de quatro unidades de comprimento do centro da circunferência). Acredita-se que essa intervenção tenha sido importante no sentido de buscar-se a compreensão das principais variáveis visuais destacadas por essa atividade: o centro da circunferência e o seu raio.

Quanto à análise posterior das construções, verifica-se que catorze alunos realizaram a atividade. Os demais não estavam presentes nesta aula. A seguir apresenta-se a representação realizada pelo aluno I com as respectivas relações que determinam as regiões compreendidas entre circunferências.

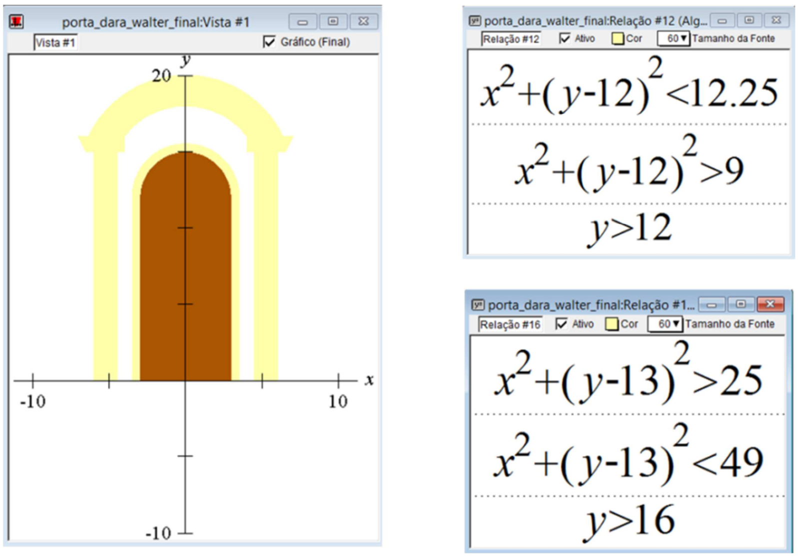


Figura 47 – Representação do aluno I da porta do Colégio Manoel Ribas
Fonte: Produção do aluno I.

É interessante observar a fala do aluno I sobre como procedeu para representar as inequações:

Aluno *I*: *Para construir essas daí* (inequações das regiões das relações) *eu precisei só colocar o mesmo centro no eixo y e o raio de uma maior que o da outra.*

A partir disso, infere-se que realmente a atividade contribuiu para uma compreensão do objeto circunferência para o aluno I à medida que converteu para o registro algébrico o que graficamente representam circunferências concêntricas. De uma forma geral, pôde-se observar que os demais alunos também desenvolveram raciocínios semelhantes.

Para a oitava atividade todos os alunos optaram por realizar a representação da região destacada na primeira imagem do *Shopping* Independência. Acredita-se que essa escolha se deva ao fato desta imagem ser aparentemente mais simples de representar no GrafEq, pois possui uma quantidade menor de elementos gráficos.

Analisando as produções dos alunos verifica-se que doze alunos realizaram a representação de toda a imagem destacada e, além disso, evidenciaram detalhes presentes na mesma, tais como as regiões compreendidas entre circunferências nas colunas laterais e as retas ou regiões retangulares no centro da imagem. Seis alunos realizaram apenas a representação dos elementos gráficos mais evidentes.

Um fato que se observa nas representações realizadas pelos alunos nessa atividade é que alguns novamente sobrepuseram algumas regiões. Avalia-se que este poderia ter sido um aspecto que a sequência didática deveria ter previsto e ter-se planejado momentos específicos nos quais esta questão fosse abordada. Evidentemente, que com a própria intervenção do professor pesquisador, alguns alunos preocuparam-se em realizar as suas representações sem sobrepor regiões. Como exemplo, cita-se o aluno D, que durante a realização da atividade, primeiramente havia realizado algumas sobreposições, mas substituiu as relações necessárias de modo a não mais sobrepô-las. Para evidenciar algumas regiões construídas, na figura a seguir apresenta-se a representação do aluno D, porém modificando-se a cor dessas regiões.

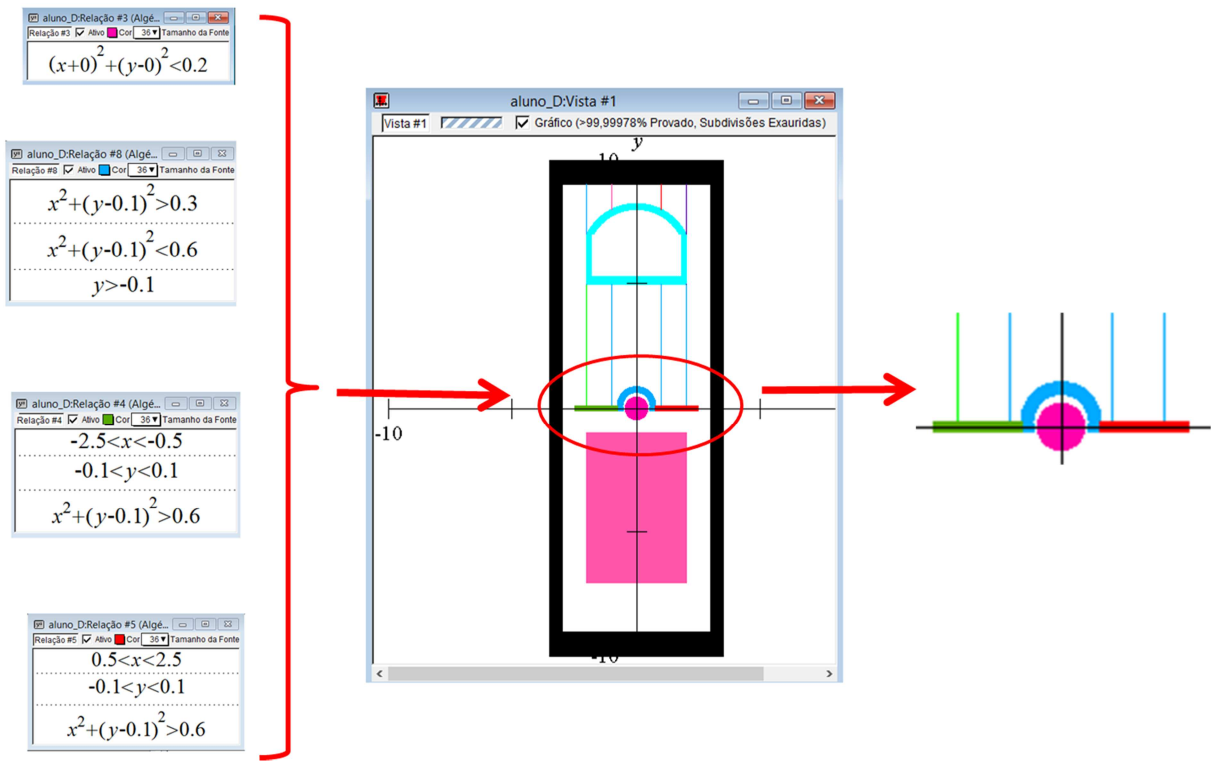


Figura 48 – A não sobreposição de imagens na representação do aluno D

Na figura anterior, a coluna de relações à esquerda corresponde à representação do círculo central de cor rosa, da região azul compreendida entre duas circunferências e das regiões adjacentes de cores verde e vermelho. Observa-se que, para não sobrepor estas últimas regiões, o aluno delimitou-as como exteriores à circunferência de maior raio, isto é, adicionando em cada relação a inequação $x^2 + (y - 0{,}1)^2 > 0{,}6$. Nessa perspectiva, pôde-se observar o desenvolvimento individual do aluno D ao longo desta atividade e da sequência didática. Na verdade, não só desse aluno, mas também dos demais.

Na figura a seguir estão as três relações envolvendo o objeto circunferência utilizadas pelo aluno A.

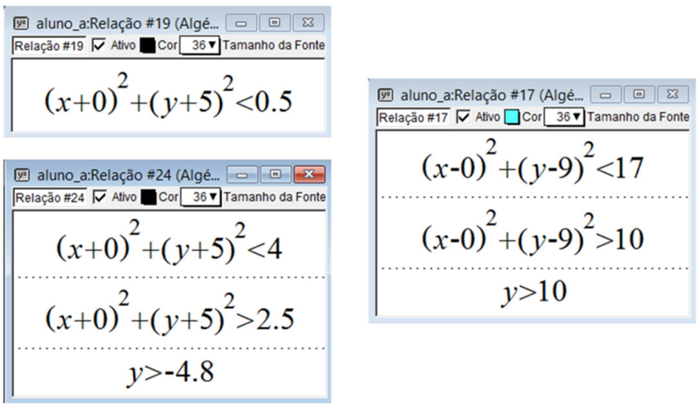


Figura 49 – Relações utilizadas pelo auno A na atividade 8
Fonte: Produção do aluno A.

Concomitantemente, é interessante analisar a fala do aluno A sobre as relações que definiu:

Aluno A: *Como eu queria colocar os círculos todos em linha reta para cima, eu usei os pontos dos centros com o mesmo valor do x [...] Para essas duas circunferências* (concêntricas) *eu copiei a primeira e só troquei o raio por um valor maior, porque tinham que ter o mesmo centro.*

Para (DUVAL, 2009, p. 81) “[...] a mudança de registro constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática: ela facilita consideravelmente a aprendizagem ou ela oferece procedimentos de interpretação”. Nessa perspectiva, acredita-se que, com base nas relações utilizadas pelo aluno A e pela transcrição da sua fala, este identificou as variáveis visuais referentes às posições relativas entre duas circunferências concêntricas tanto no registro gráfico como no algébrico.

Uma característica importante observada durante a experimentação da sequência didática e que pode ser verificada nas relações algébricas das duas figuras anteriores, corresponde a como alguns alunos representaram relações de inequações que definem regiões gráficas delimitadas por circunferências. Por exemplo, na figura anterior o aluno A representa o círculo com centro em $(0,-5)$ e raio igual a 2 como sendo $(x+0)^2+(y+5)^2<4$. Nesse sentido, coloca-se a seguinte questão: por que esse aluno escreve “$x+0$" e não simplesmente o resultado dessa adição que é x? Acredita-se que isso se devia pelo fato do aluno não possuir uma compreensão global do registro algébrico da circunferência, afinal apenas identificava as variáveis visuais referentes às coordenadas do seu centro. No momento de discussão dessa atividade, o professor pesquisador interveio no sentido de explicar que era possível realizar esse tratamento algébrico (a adição) e o que isto representava graficamente.

Por fim, pode-se dizer que esta atividade mobilizou os alunos a refletir sobre as propriedades das circunferências transladas presentes na imagem proposta. Evidentemente, que se tivessem escolhido a outra região destacada, essa característica teria sido ainda mais explorada. Entretanto, pôde-se observar que, de forma geral, os alunos identificaram as variáveis visuais pertinentes que correspondem a essas características.

Na nona atividade os alunos realizaram experimentos com o *applet* construído com o GeoGebra e que versa sobre a equação de uma circunferência. Diferentemente da quinta atividade, nesta não ocorreu nenhum tipo de problema operacional, pois o professor pesquisador havia instalado o aplicativo necessário nos computadores do laboratório de informática, antes do começo da aula. De forma semelhante à atividade anterior, incialmente os alunos responderam as questões propostas com base nas suas observações e, em seguida, realizou-se uma discussão em relação aos resultados encontrados. Treze dos alunos cujas respostas estão sendo analisadas realizaram esta atividade. Há de se esclarecer que neste dia alguns alunos não estavam presentes, pois estavam participando de um processo de seleção em uma instituição de Ensino Superior.

No primeiro item, no que diz respeito a como o aluno descreve o que é uma circunferência, verifica-se que oito alunos responderam mencionando a origem de uma circunferência e ou seu raio (ou diâmetro). Na figura a seguir apresenta-se a resposta do aluno H.

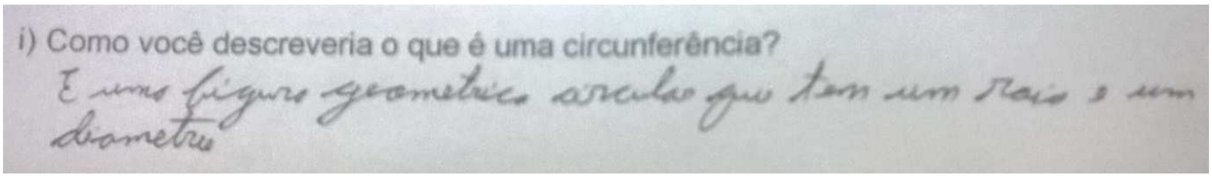


Figura 50 – Resposta do aluno H na questão 9 (i)
Fonte: Produção do aluno H.

Pode-se observar na resposta desse aluno que ele reconhece sua forma (circular) e alguns de seus elementos (raio e diâmetro). Porém, infere-se que não necessariamente o aluno compreendia que a circunferência corresponde ao conjunto de pontos equidistantes do seu centro.

Quatro alunos descreveram o que é uma circunferência de uma forma mais próxima a sua definição. Por exemplo, a figura a seguir ilustra a descrição do aluno E.

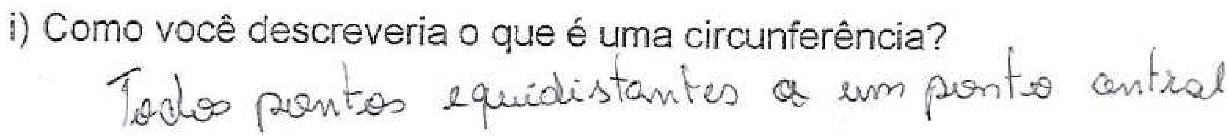
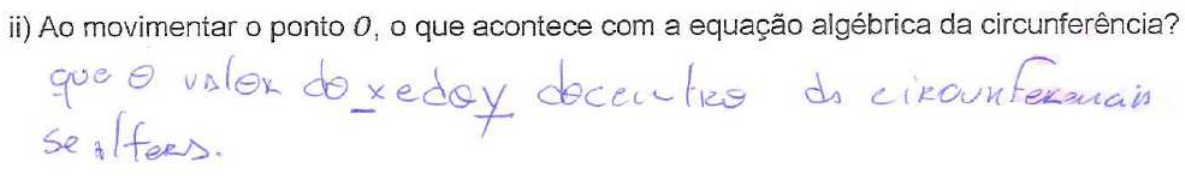


Figura 51 – Resposta do aluno E na questão 9 (i)
Fonte: Produção do aluno E.

Um aluno respondeu de forma equivocada que uma circunferência corresponderia à área de um círculo, ou seja, na verdade havia trocado a definição dos dois objetos.

No item (ii) todos os alunos responderam de forma correta que ao movimentar o ponto O (centro da circunferência), alteravam-se os valores das coordenadas na sua equação. Por exemplo, a figura a seguir apresenta a resposta do aluno F.

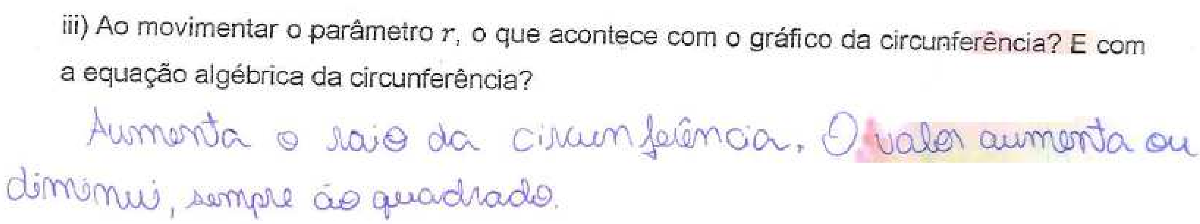

ii) Ao movimentar o ponto O, o que acontece com a equação algébrica da circunferência?

que o valor do x e do y do centro da circunferencia se altera.

Figura 52 – Resposta do aluno F na questão 9 (ii)
Fonte: Produção do aluno F.

Pode-se observar que o aluno F movimenta no GeoGebra o centro da circunferência e reconhece as suas coordenadas no registro algébrico.

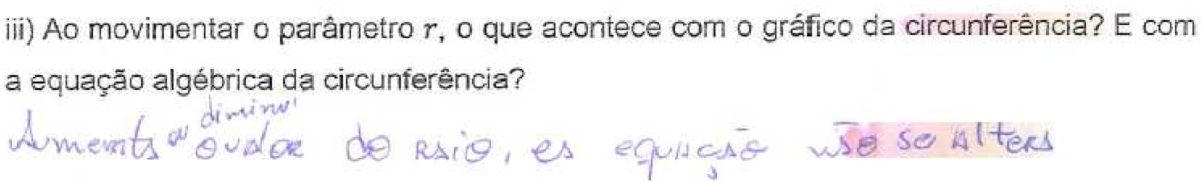
A terceira questão propunha que os alunos movimentassem o controle deslizante “raio” e verificassem quais alterações que essa ação provocaria nos registros gráfico e algébrico da circunferência. Sete alunos responderam de forma a evidenciar as alterações em ambos os registros, ou seja, que o raio é alterado (a circunferência é expandida ou contraída) e o valor do raio na equação algébrica também é alterado (desses alunos, quatro evidenciaram que o valor do raio deve ser elevado ao quadrado). A figura a seguir apresenta a resposta do aluno C.


iii) Ao movimentar o parâmetro r, o que acontece com o gráfico da circunferência? E com a equação algébrica da circunferência?

Aumenta o raio da circunferência. O valor aumenta ou diminui, sempre ao quadrado.

Figura 53 – Resposta do aluno C na questão 9 (iii)
Fonte: Produção do aluno C.

As respostas de quatro alunos apresentam apenas a análise do registro gráfico. Dois alunos mencionaram que o registro algébrico não é alterado quando o valor do raio é alterado. Na imagem a seguir, está a resposta do aluno F.


iii) Ao movimentar o parâmetro r, o que acontece com o gráfico da circunferência? E com a equação algébrica da circunferência?

Aumenta ou diminui o valor do raio, a equação não se altera

Figura 54 – Resposta do aluno F na questão 9 (iii)
Fonte: Produção do aluno F.

Na discussão realizada posteriormente, o aluno comentou que não havia prestado atenção no termo à direita da igualdade na equação da circunferência.

No quarto item perguntou-se aos alunos qual é a equação de uma circunferência centrada no ponto (a, b) e que possui raio igual a r. Onze (11) alunos responderam corretamente se tratar da equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Assim, acredita-se que as atividades realizadas por esses alunos contribuíram para que reconhecessem esse objeto no seu registro algébrico. Em contrapartida, dois alunos equivocaram-se quando responderam que se trata da equação $(x + a)^2 + (y + b)^2 = r$. Justamente, esses dois alunos não haviam realizado a representação da imagem proposta na atividade anterior (oitava atividade), a vista frontal do Shopping Independência. E, assim, acredita-se que estes alunos não reconheceram o registro algébrico do objeto circunferência pela falta de experimentações realizadas com ele.

No último item propunha-se aos alunos que justificassem a equação da circunferência de acordo com os triângulos retângulos formados ao movimentar o ponto B sobre a circunferência depois de marcar a caixa de entrada do *applet* disponibilizado nessa atividade. A seguir, apresenta-se a imagem com a visão inicial do *applet* (imagem à esquerda) e depois de alterado o centro da circunferência (imagem à direita).

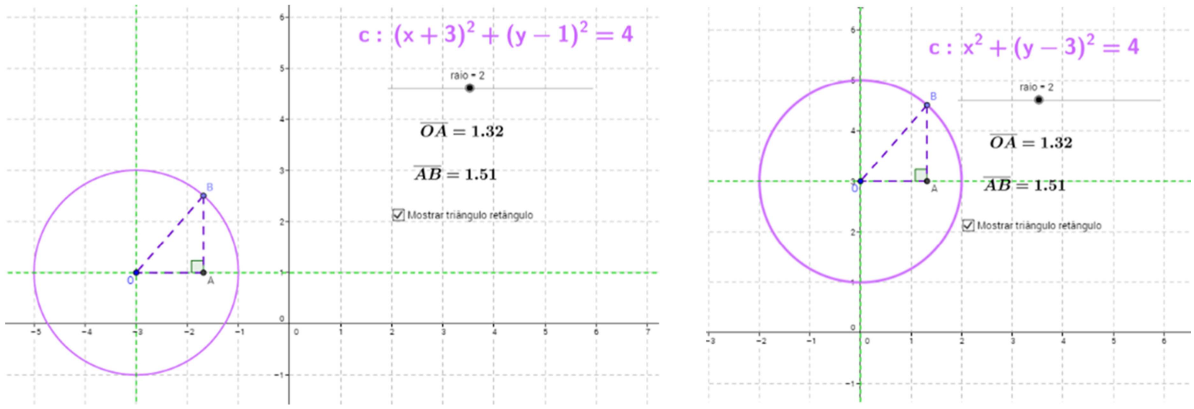


Figura 55 – *Applet* desenvolvido para a questão 9

O objetivo dessa atividade não era que os alunos realizassem uma construção formal (do ponto de vista matemático), e sim que argumentassem o porquê daquela construção (dedução da fórmula) com base, principalmente, nos estudos realizados na sequência didática.

Sete alunos justificaram a equação da circunferência no sentido de resultar da aplicação do Teorema de Pitágoras, porém não apresentaram um detalhamento do porquê disso. Dois alunos não apresentaram uma justificativa correta e outros dois não responderam a questão. Acredita-se que essa dificuldade em discutir sobre o porquê da equação da circunferência resida no fato de que esse tipo de atividade é pouco usual no ensino de matemática na Educação Básica. Dois alunos buscaram argumentar sobre a utilização do Teorema de Pitágoras. A imagem a seguir, apresenta as considerações do aluno O.

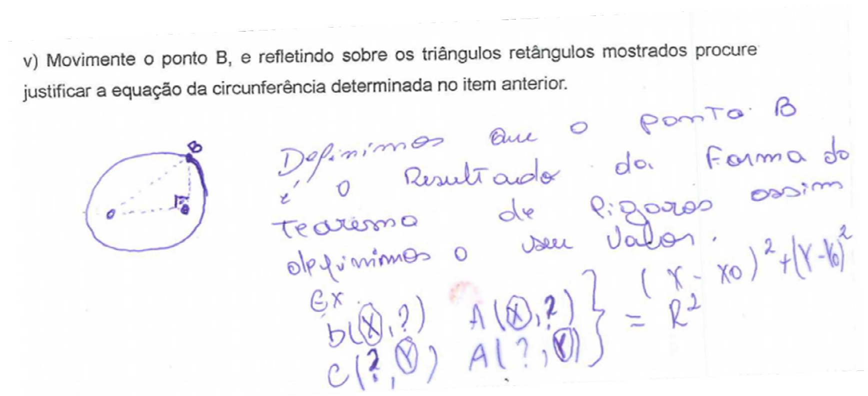


Figura 56 – Resposta do aluno O na questão 9 (v)
Fonte: Produção do aluno O.

Verifica-se na figura anterior que o aluno O apresentou dificuldades relacionadas ao registro simbólico ao tentar descrever que o ponto B podia ser qualquer ponto da circunferência. Além disso, pode-se observar que ao tentar estabelecer as coordenadas dos pontos A, B e C, o aluno não distinguiu as suas coordenadas, isto é, de acordo com a equação apresentada, por exemplo, os pontos B deveria possuir coordenadas (x, y_0).

Os resultados encontrados no último item não foram os desejados, haja vista que a maioria dos alunos não apresentou argumentos claros para justificar a equação de uma circunferência. Entretanto, a partir da análise da atividade como um todo, acredita-se que tenha contribuído para que os alunos pudessem identificar as principais variáveis visuais da equação da circunferência (coordenadas do centro e o raio). Nesse sentido, é que se acredita que esta atividade tenha cumprido, em grande parte, o seu objetivo principal de formalizar os resultados estudados nas atividades anteriores que versaram sobre o objeto circunferência.

7.6 Atividades 10, 11 e 12

A décima atividade consistia em uma retomada do estudo da equação da parábola. Inicialmente, o professor pesquisador buscou realizar uma revisão sobre algumas propriedades e resultados desse objeto matemático, principalmente no que se refere aos tópicos gráfico da função quadrática, vértice da parábola, raízes de uma equação do segundo grau. Também, verificou-se que nenhum dos alunos havia estudado esse objeto na perspectiva da equação $y = a(x - m)^2 + n$. A partir disso, optou-se em propor aos alunos que realizassem alguns experimentos no GrafEq como, por exemplo, plotar em uma mesma janela gráfica as equações $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = 4x^2$, $y = 0{,}5x^2$, $y = 0{,}3x^2$ e $y = 0{,}1x^2$ e, a partir dos resultados encontrados, que descrevessem qual a transformação gráfica decorrente da variação do parâmetro a na equação $y = ax^2$ em relação à função $y = x^2$. Em seguida, de forma semelhante procedeu-se a análise das transformações gráficas ocorridas quando da variação dos parâmetros m e n.

Na décima primeira atividade propunha-se que os alunos representassem as portas frontais do Theatro Treze de Maio. Doze dos alunos cujos trabalhos estão sendo considerados na análise realizaram essa atividade que demandou duas horas-aula. Inicialmente, alguns desses alunos tentaram realizar as construções envolvendo as regiões delimitadas por parábolas a partir de equações na forma $y = ax^2 + bx + c$. Porém, devido às dificuldades que encontravam em determinar os valores dos coeficientes a, b e c, convenciam-se de utilizar a equação da parábola na forma $y = a(x - m)^2 + n$.

Nos trabalhos realizados por dez desses alunos, pode-se observar uma característica importante no que se refere à exploração do objeto parábola, a saber: a simetria utilizada na figura. O aluno I, por exemplo, utilizou o eixo das ordenadas como eixo de simetria na construção da imagem, conforme a figura a seguir.

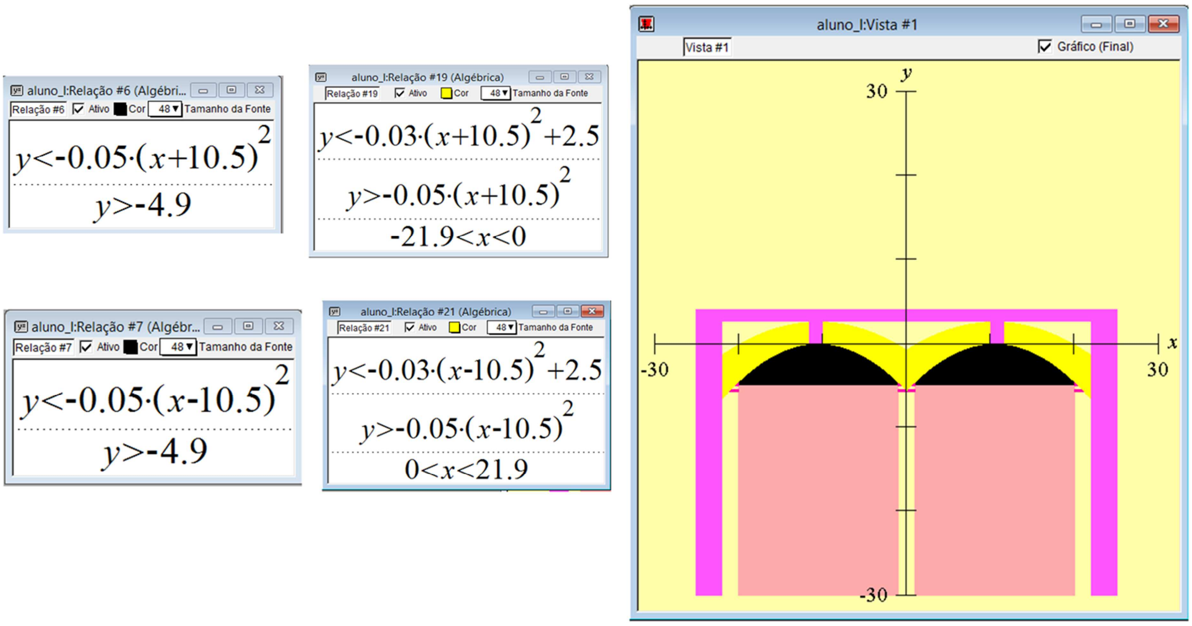


Figura 57 – Representação da porta do Theatro realizada pelo aluno I

O foco da discussão aqui se refere às implicações algébricas resultantes dessa escolha. Pode-se observar na construção do aluno I que as relações utilizadas possibilitam discutir sobre o efeito gráfico resultante das alterações dos parâmetros a, m e n na equação $y = a(x - m)^2 + n$. Ao analisar a construção do aluno pode-se observar que, apesar de apresentar apenas quatro regiões delimitadas por parábolas (duas pretas e duas amarelas), essa construção possibilitou ao aluno explorar os coeficientes dessa equação, o que é ratificado pelas falas descritas a seguir:

Aluno I: *O* a *eu tive que colocar bem pequeno para que a parábola ficasse mais aberta. Primeiro coloquei uns valores bem altos, mas depois fui baixando:* $0{,}5$, $0{,}3$, $0{,}1$. *Até que achei que com* $0{,}05$ *e* $0{,}03$ *ficou parecido com a foto.*

Em outro momento, pediu-se ao aluno I que explicasse como definiu os valores do parâmetro m.

Aluno I: *Primeiro eu fiz a parte do lado direito. Esse eu primeiro achei que tinha que ser positivo para estar para a direita, só que não deu certo. Eu vi que aí era o contrário. Aí eu coloquei* $-10{,}5$ *e* $10{,}5$ *positivo, para que ficassem iguais em relação ao centro* (eixo das ordenadas).

Por último, indagou-se o aluno I sobre os valores definidos para n.

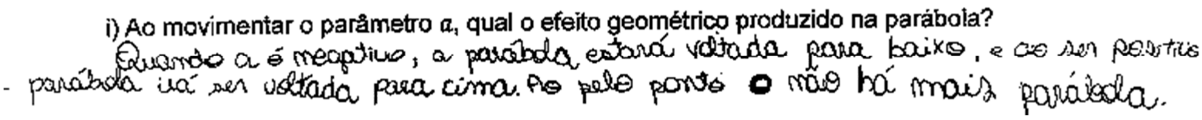
Aluno I: *Esse foi fácil, porque é só colocar um número positivo que a parábola sobe, ou baixar ela com um número negativo.*

Assim, acredita-se que, apesar de apresentar poucas regiões delimitadas por parábolas, esta atividade proporcionou aos alunos realizarem experimentos sobre os registros gráfico e algébrico desse objeto. Além da translação vertical e horizontal presentes na imagem, esses alunos ainda exploraram a questão da simetria das parábolas em relação a um eixo e, assim, necessitaram avaliar a distância das regiões compreendidas por parábolas em relação ao eixo de simetria.

De uma forma geral, durante a realização dessa atividade, pôde-se perceber um “amadurecimento” em relação à representação das formas geométricas constantes na imagem. No que se refere às regiões delimitadas por parábolas, os alunos tiveram a iniciativa de conduzir seus experimentos de modo a encontrar os valores dos parâmetros que necessitavam. Além disso, a definição das relações correspondentes às regiões gráficas delimitadas por retas já não consistia mais em uma dificuldade como ocorreu nas atividades iniciais da sequência didática. Ou seja, pôde-se observar um desenvolvimento do desempenho desses alunos.

A décima segunda atividade abordou um *applet* desenvolvido sobre o objeto parábola. Treze dos alunos cujos trabalhos estão sendo analisados estavam presentes nessa aula.

No primeiro item perguntou-se sobre o efeito gráfico produzido à medida que o parâmetro a da equação $y = a(x - m)^2 + n$ era movimentado. Onze alunos responderam no sentido de informar sobre a concavidade da parábola: voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo quando $a < 0$. Dentre esses onze alunos, oito lembraram-se do caso em que $a = 0$, o gráfico será, portanto, uma reta paralela ao eixo das abscissas. A figura a seguir apresenta a resposta do aluno C.



i) Ao movimentar o parâmetro a, qual o efeito geométrico produzido na parábola?

Quando a é negativo, a parábola estará voltada para baixo, e ao ser positivo a parábola vai ser voltada para cima. Ao pelo ponto 0 não há mais parábola.

Figura 58 – Resposta do aluno C na questão 12 (i)
Fonte: Produção do aluno C.

Dois alunos afirmaram que a variação desse parâmetro altera os valores da parábola nos quais ela é crescente ou decrescente. Na verdade, acredita-se que estes alunos confundiram a propriedade da concavidade de uma parábola com os valores nos quais ela é crescente ou decrescente, pois haviam indicado que ela seria crescente se $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$. Essa foi uma das questões abordadas na discussão realizada posteriormente.

No segundo item, foi perguntado sobre a transformação gráfica decorrente da alteração nos valores do parâmetro m na equação $y = a(x - m)^2 + n$. Sete alunos responderam no sentido de que quando o valor assumido por m é negativo, a parábola desloca-se horizontalmente à direita e quando se trata de um valor positivo, o deslocamento é à esquerda. A figura a seguir, apresenta a resposta do aluno K.

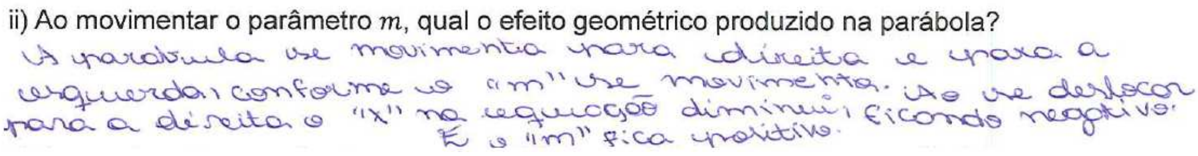

ii) Ao movimentar o parâmetro m, qual o efeito geométrico produzido na parábola?
A parábola se movimenta para direita e para a esquerda, conforme o "m" se movimenta. Ao se deslocar para a direita o "x" na equação diminui, ficando negativo. E o "m" fica positivo.

Figura 59 – Resposta do aluno K na questão 12 (ii)
Fonte: Produção do aluno K.

Dois alunos responderam que ao movimentar o parâmetro m são alterados os pontos em que a parábola intersecciona o eixo das abscissas. A seguir, como exemplo, apresenta-se a resposta do aluno D.

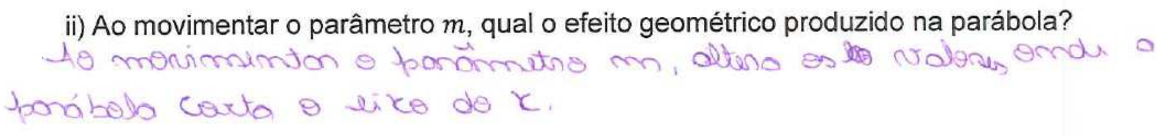

ii) Ao movimentar o parâmetro m, qual o efeito geométrico produzido na parábola?
Ao movimentar o parâmetro m, altera os valores onde a parábola corta o eixo do x.

Figura 60 – Resposta do aluno D na questão 12 (ii)
Fonte: Produção do aluno D.

Pode-se observar que a avaliação realizada pelo aluno D não está completa, pois a sua conclusão apenas é válida para os casos em que a parábola de fato intersecciona o eixo das abscissas.

Quatro alunos mencionaram que, ao movimentar o parâmetro m, o vértice da parábola é alterado horizontalmente. A figura a seguir apresenta a resposta do aluno I.


ii) Ao movimentar o parâmetro m, qual o efeito geométrico produzido na parábola?
A parábola mantem a inclinação, e altera horizontalmente o vertice da parábola.

Figura 61 – Resposta do aluno I na questão 12 (ii)
Fonte: Produção do aluno I.

Pôde-se verificar que esses alunos visualizaram uma característica gráfica importante que decorre da alteração do parâmetro m, a saber: o valor da abscissa do vértice da parábola é igual ao valor de m.

O terceiro item propõe averiguar o efeito gráfico decorrente da alteração do parâmetro n na equação $y = a(x - m)^2 + n$. Dez alunos responderam corretamente que a parábola é deslocada verticalmente para cima se o valor do parâmetro é aumentado e para baixo quando seu valor é diminuído. Dentre esses dez alunos, quatro lembraram que o valor em que a parábola corta o eixo das ordenadas também é alterado. Três alunos responderam que o vértice da parábola é alterado verticalmente, ou seja, a ordenada desse ponto é alterada.

É importante salientar que, como as respostas dos alunos nos três itens dessa questão indicaram apenas o efeito gráfico que visualizavam e não o porquê disso, buscou-se retomar essa questão na discussão realizada posteriormente. Nesse sentido, acredita-se que a atividade contribuiu para que, além de identificar o efeito gráfico produzido pela alteração dos parâmetros abordados, compreendessem o motivo pelo qual isso acontecia. Por exemplo, no caso do parâmetro n, quando este é alterado, lembrou-se que, do ponto de vista da função quadrática, os valores das imagens são alteradas.

Por fim, é importante colocar que se avalia que esta atividade poderia ter sido realizada para introduzir o estudo sobre o objeto parábola. Na verdade, as experimentações propostas com o GrafEq na décima atividade foram muito semelhantes às realizadas nesta atividade, com exceção do recurso dos controles deslizantes somente disponíveis no *software* GeoGebra. Essa avaliação decorre do fato de que a função quadrática raramente é trabalhada na perspectiva da equação $y = a(x - m)^2 + n$, a qual era necessária para melhor desenvolver o trabalho de representação de imagens no GrafEq.

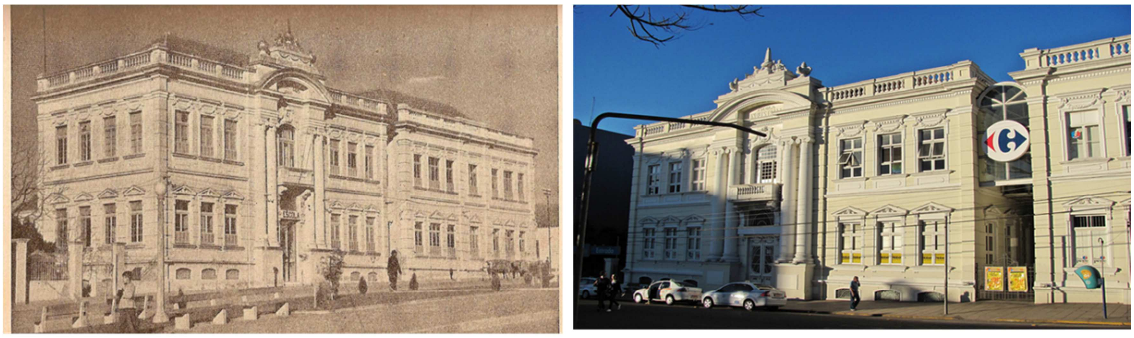
7.7 Atividade 13

Nesta atividade, os alunos divididos em duplas ou trios realizaram a representação de uma imagem de um prédio no GrafEq. Inicialmente, em uma aula da disciplina de Artes Plásticas, os alunos definiram qual seria o prédio que representariam no GrafEq. Para tanto, o professor pesquisador havia solicitado na semana anterior que os alunos trouxessem fotografias (que poderiam ser feitas com os seus aparelhos celulares) dos prédios que gostariam representar. Nessa aula, a definição foi realizada com o auxílio do professor pesquisador de modo a privilegiar uma maior riqueza nas relações matemáticas que os alunos teriam que definir em suas construções e, também, com a avaliação da professora da disciplina de Artes Plásticas, de modo a favorecer aspectos artísticos e históricos relevantes de Santa Maria.

Dos alunos cujos trabalhos estão sendo analisados, catorze realizaram a atividade, distribuídos em quatro duplas e dois trios. Os alunos realizaram as representações das imagens escolhidas no GrafEq fora do ambiente escolar. Adotou-se essa metodologia porque realizar as construções em períodos de aula tornaria a dinamização da sequência bastante extensa. Posteriormente, nas duas últimas duas horas-aula da sequência didática, realizou-se a apresentação dos alunos sobre as representações realizadas e os aspectos históricos relevantes sobre os prédios por eles escolhidos. Cada grupo de alunos realizou a apresentação para os demais colegas, para o professor pesquisador e para a professora da disciplina de Artes Plásticas.

Assim, a análise a seguir limita-se aos arquivos contendo as construções dos alunos e às suas apresentações. Como essa atividade foi realizada em duplas ou trios, a análise não será individual, ou seja, não é possível apontar entre os integrantes os raciocínios individuais verificados nas construções. Também, seria enfadonho apresentar com detalhes as seis produções resultantes dessa atividade. Desse modo, opta-se por priorizar algumas que se consideram mais relevantes do ponto de vista matemático (relações algébricas utilizadas) e considerações sobre a história e aspectos artísticos.

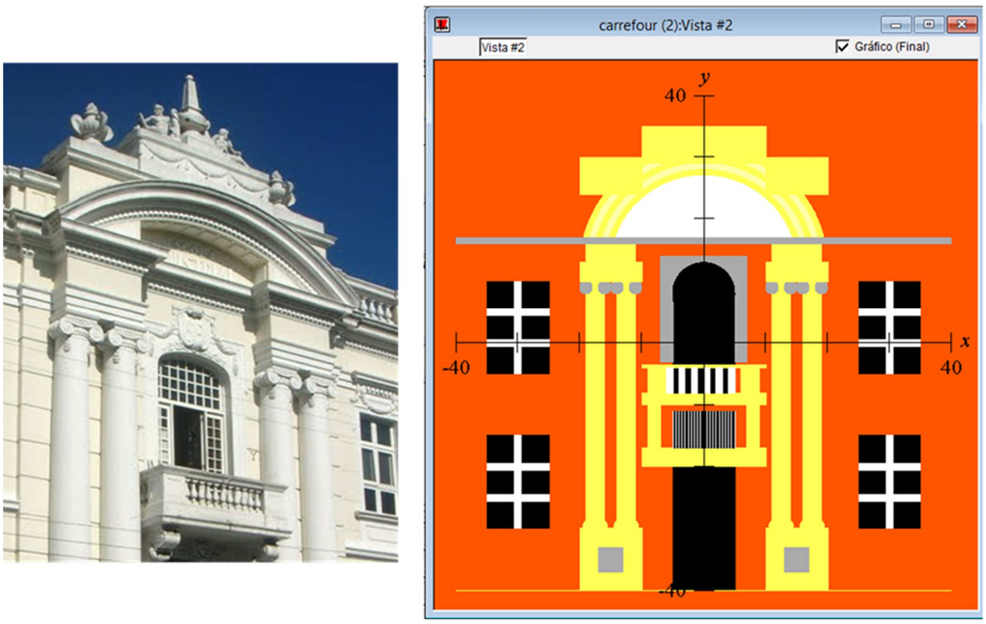
O trio formado pelos alunos A, C e K optou em representar o prédio da antiga Escola Industrial Hugo Taylor e que hoje abriga um supermercado. A figura a seguir destaca imagens apresentadas pelos alunos integrantes do grupo.



a b

Figura 62 – Fotografia antiga[10] (a) e recente (b) do prédio da antiga Escola Hugo Taylor

Como realizar a representação do todo o prédio demandaria um número muito grande de relações, orientaram-se os alunos de modo que representassem no GrafEq apenas uma das janelas do prédio. A figura a seguir, apresenta a janela em destaque e a sua respectiva representação gráfica no *software*.



a b

Figura 63 – Recorte da imagem do prédio (a) e sua representação no GrafEq (b)

[10] Disponível em: http://santamariafoto.blogspot.com.br/2014/06/escola-industrial-huo-taylor.html

Pode-se verificar que os alunos buscaram evidenciar um grande número de detalhes presentes na janela do prédio destacada na imagem anterior. Para tanto, utilizaram setenta e duas relações de inequações que definem regiões delimitadas unicamente por retas e dezenove relações com inequações que definem regiões delimitadas por retas e circunferências. Evidentemente que, esse elevado número de relações não é uma evidência que possa levar a uma conclusão direta sobre a compreensão dos conteúdos matemáticos. Entretanto, pôde-se observar o interesse e o engajamento dos alunos em realizar a atividade, especialmente no que se refere em evidenciar detalhes do prédio escolhido. Além disso, os alunos afirmaram que não tiveram nenhuma dificuldade expressiva em realizar a atividade, pois devido aos estudos realizados anteriormente na sequência didática, definir as relações tornou-se algo fácil, natural.

Outro fato importante a ser considerado, refere-se à sobreposição de regiões na representação realizada pelo grupo. Esses alunos apesar de terem realizado algumas representações sem sobrepor regiões em atividades anteriores da sequência, sobrepuseram as regiões da construção apresentada anteriormente. Nesse sentido, acredita-se que, se se dispusesse de mais tempo, teria sido interessante definir com os alunos, já nas primeiras atividades da sequência, que não se poderia sobrepor regiões em todos as atividades relacionadas à representação de imagens no GrafEq.

É interessante mencionar alguns fatos referentes ao prédio da antiga Escola Industrial Hugo Taylor evidenciados na apresentação dos alunos[11]:

Atualmente a antiga Escola Hugo Taylor abriga aproximadamente 28 mil itens espalhados pelas prateleiras e sua tradicional capela onde eram celebradas missas, foi restaurada e se transformou em uma cafeteria. Mas as mudanças feitas na estrutura para receber a multinacional não apagaram a história do prédio de mais de 85 anos. O terreno comprado seria destinado á construção do teatro municipal. O projeto não saiu do papel porque a cidade já tinha o Teatro Treze de Maio, e em

[11] As informações apresentadas pelos alunos foram obtidas, em sua maioria, nos seguintes sites:
http://templo-de-isis.blogspot.com.br/2007/03/escola-de-artes-e-ofcios-saga.html
http://laribari.blogspot.com.br/2007/11/carrefour-santa-maria.html
https://www.facebook.com/chronosmaquetes/posts/799714333397983
http://santamariafoto.blogspot.com.br/2014/06/escola-industrial-huo-taylor.html

1911 foi inaugurado o Teatro Coliseu. Devido a isso, o terreno foi colocado à venda e a Cooperativa de Consumo dos Empregados Da Viação Férrea (Coopfer) se tornou dona do local, erguendo o prédio que é símbolo do passado ferroviário.

Construído em 1922, o edifício que mescla os estilos neoclássico, barroco, e art-noveau, abrigou, primeiro a Escola de Artes e Ofícios, com 124 alunos. Em 1929, o colégio comprou o terreno da esquina da Rua dos Andradas, para erguer o internato. Em 1943 o colégio mudou de nome, passando a se chamar Escola Industrial Hugo Taylor. Em 1954 um incêndio destruiu o internato. Mais tarde em 1960, as salas foram reformadas com a ajuda do governo. Mas os problemas prosseguiram e o internato acabou fechando, e na década de 70 a Coopfer se obrigou a fechar a Hugo Taylor. De lá pra cá o prédio já abrigou cursinho pré-vestibular, shopping e boate. Nos anos 90, a estrutura resistiu a um segundo incêndio. Em janeiro de 2007 uma rede de supermercados alugou o edifício e após alguns meses de obra, abriu as portas, em 31 de outubro.

A partir das informações apresentadas pelo grupo e com o auxílio da professora de Artes Plásticas, foi possível discutir um pouco sobre a importância da Viação Férrea no desenvolvimento socioeconômico ao longo da história da cidade de Santa Maria, bem como sobre os estilos arquitetônicos presentes na fachada do prédio. Um fato curioso apresentado pelo aluno C foi que ele descobriu que seus pais haviam estudado na Escola Industrial Hugo Taylor, e que este fora, inclusive, o local em que se viram pela primeira vez.

A dupla formada pelos alunos H e Q representou no GrafEq o Planetário da UFSM, pois acreditavam que este prédio tem grande importância para o desenvolvimento desta instituição. Além disso, afirmaram terem ficado impressionados com a sua estrutura e ambientes quando o visitaram em uma oportunidade anterior.

Figura 64 – Planetário da UFSM
Fonte: Fotografia realizada pelos alunos.

Os alunos integrantes desse grupo procuraram o professor pesquisador no contra turno de aula para solicitar seu auxílio para plotar as regiões do Planetário delimitadas por elipses. Em suma, o trabalho do professor pesquisador nesse caso foi auxiliar os alunos a entender a equação de uma elipse, centrada na origem e, posteriormente, informar sobre a equação de uma elipse transladada horizontalmente e com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas $\left(\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1\right)$, de modo a atender as exigências gráficas na imagem contendo o Planetário. Salienta-se que o papel do professor pesquisador foi de auxiliar os alunos a compreender o que representavam os parâmetros reais a, b, h e k. Assim, optou-se em mediar a exploração desses parâmetros por meio de uma construção no GeoGebra como a destacada na figura a seguir[12].

[12] Disponível em: http://tube.geogebra.org/m/1397245

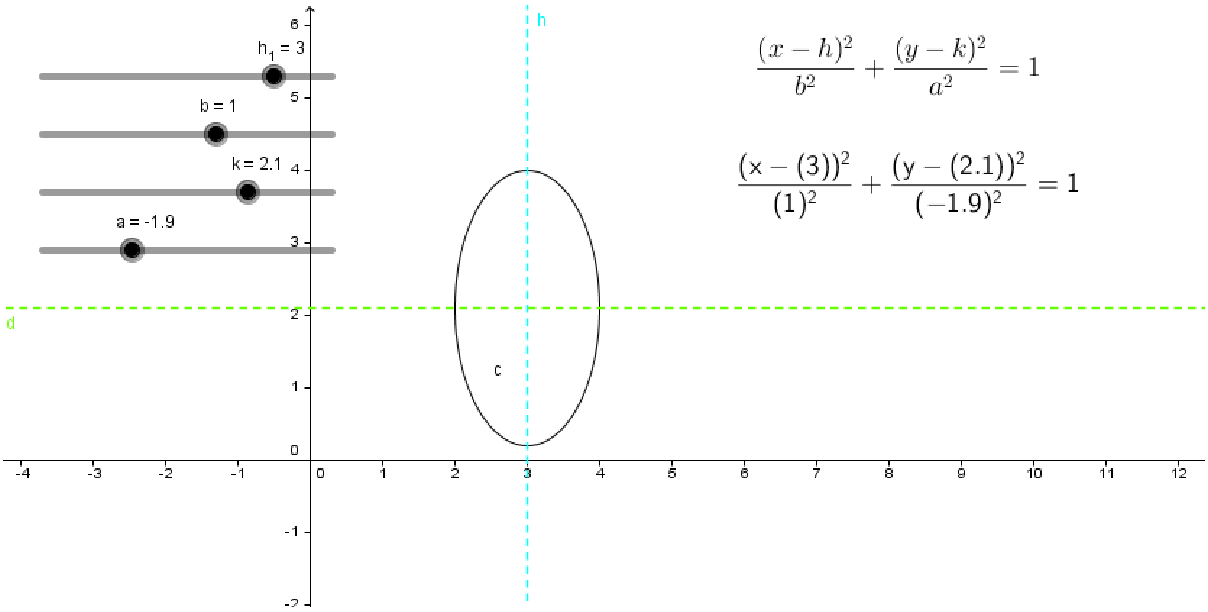


Figura 65 – *Applet* desenvolvido sobre o objeto elipse

Essa foi uma abordagem interessante à medida que possibilitou aos alunos realizar suas próprias conclusões sobre o efeito gráfico que decorre sobre a alteração dos parâmetros.

A figura a seguir apresenta a construção final dos alunos e as relações de inequações referentes às regiões delimitadas por elipses e o semicírculo.

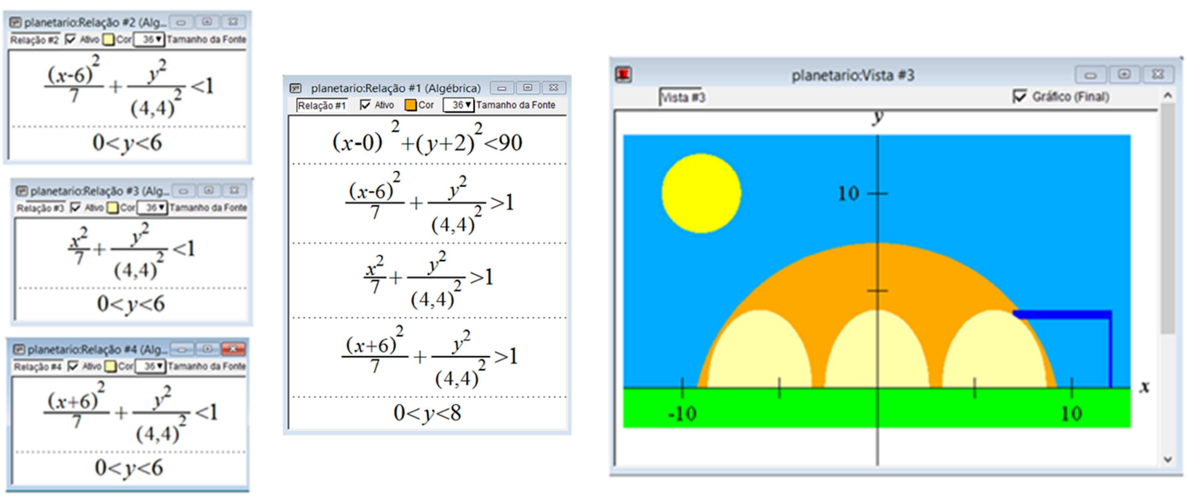


Figura 66 – Representação do Planetário e algumas relações utilizadas
.

É interessante observar na construção que os alunos buscaram não sobrepor as regiões delimitadas por elipses ao semicírculo, o que implicou em grau de dificuldade maior para estabelecer a relação correspondente à região interna ao semicírculo e externa às elipses. Há de se lembrar de que os dois alunos apresentavam muitas dificuldades do ponto de vista do conhecimento matemático no início da experimentação da sequência didática, em especial o aluno H como já mencionado anteriormente. Para Duval, é fundamental analisar o desempenho do aluno como um todo, e não apenas pontualmente.

> Muitos tratamentos estatísticos se baseiam em sucesso nos itens considerados separadamente e não em sucesso em toda uma sequência de itens; no entanto, este último é o único que possui um significado do ponto de vista de uma análise cognitiva. (DUVAL, 2003, p.27).

Assim, considerando os resultados apresentados ao longo da sequência e, em especial a última atividade, pôde-se observar um desenvolvimento significativo desses alunos ao longo desse processo, inclusive no que se refere a como encaravam as atividades que eram convidados a realizar. Na verdade, esse desenvolvimento não foi exclusivo a essa dupla de alunos. De uma forma geral, pôde-se observar essa característica também nos demais alunos. Em tempo, é importante mencionar que na apresentação sobre a representação do Planetário no GrafEq aos demais colegas e professor pesquisador, a dupla de alunos buscou explicar o que seria a elipse dos pontos de vista gráfico e algébrico.

A dupla de alunos também apresentou alguns fatos históricos relacionados ao Planetário[13], os quais são dispostos a seguir.

** O idealizador da UFSM, Prof José Mariano da Rocha Filho, havia realizado viagens para planejar um modelo próximo ao ideal, para a futura universidade de Santa Maria. Em 1960, Mariano conseguiu um primeiro esboço do que viria a ser o Planetário com o arquiteto Oscar Niemayer, este esboço foi desenhado em uma folha de guardanapo de restaurante e entregue para Mariano em Goiânia (GO), Niemayer ali tinha prestado uma pequena contribuição, pois o mesmo não tinha*

[13] Informações apresentadas pelos alunos com base no site do Planetário da UFSM: http://coral.ufsm.br/planeta/

disponibilidade para fazer o projeto de alguns prédios da UFSM como havia sido solicitado.

** O Planetário foi fundado em 14 de dezembro de 1971, foi o quarto Planetário Brasileiro, o oitavo na América Latina, o primeiro no Rio Grande do Sul e o Primeiro em uma cidade do interior no Brasil.*

** Possui capacidade para 120 pessoas, sendo dotado de um projetor Zeiss Spacemaster com projetores de vídeo auxiliares.*

** O museu interativo, localizado no segundo piso do planetário, foi fundado em 1998 e conta com uma área de 370 metros quadrados e dez estações que tratam da história de astronomia, através de dispositivos interativos.*

A partir deste momento, apresentar-se-ão os demais trabalhos realizados pelos alunos, mas que não serão objetos de uma análise mais detalhada. A figura a seguir apresenta uma imagem do prédio da Biblioteca Pública Municipal de Santa Maria e sua representação no GrafEq realizada pelos alunos J e M.

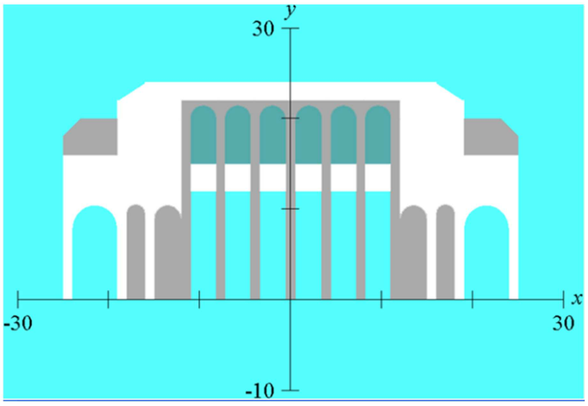


Figura 67 – Biblioteca Pública Municipal e sua representação no GrafEq
Fonte: Produção dos alunos J e M.

A figura a seguir apresenta o prédio da Estação Ferroviária da Gare de Santa Maria e sua representação no GrafEq realizada pelos alunos H e P.

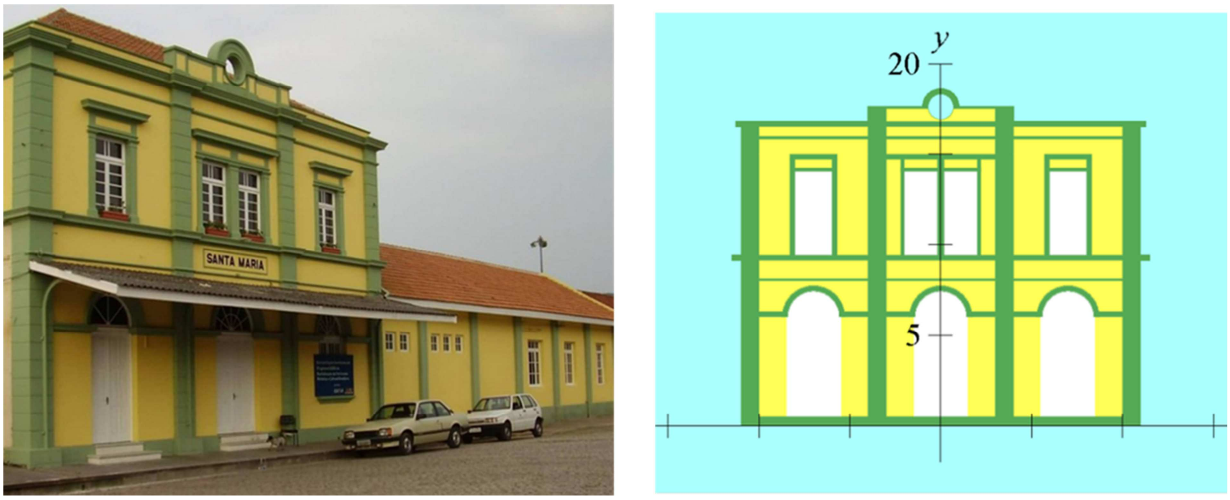


Figura 68 – Estação Ferroviária da Gare e sua representação no GrafEq
Fonte: Produção dos alunos H e P.

Os alunos E e I representaram no GrafEq o prédio da União Universitária da UFSM, conforme a figura abaixo.

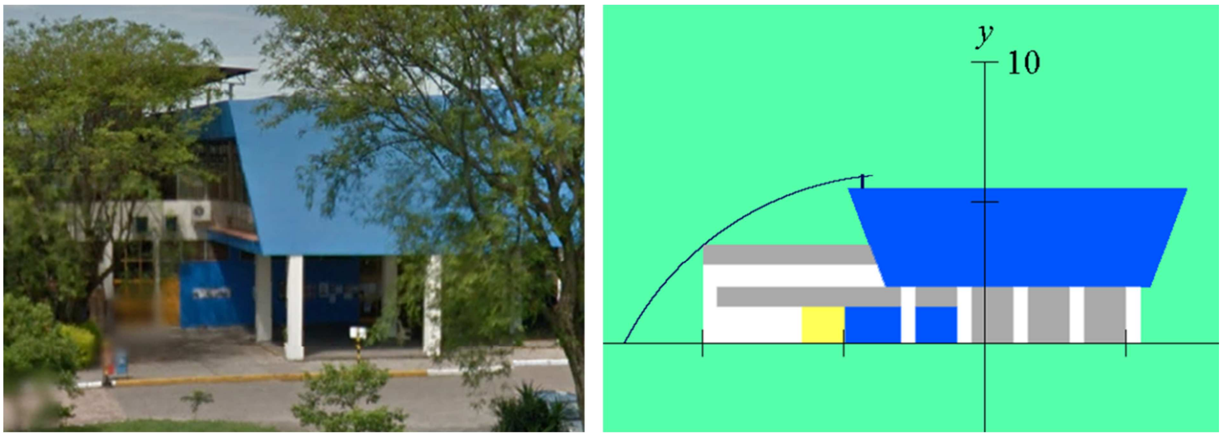


Figura 69 – União Universitária da UFSM e sua representação no GrafEq
Fonte: Produção dos alunos E e I.

A figura a seguir apresenta a imagem do prédio do Espaço Multiuso da UFSM e sua representação no GrafEq realizada pelos alunos B e L.

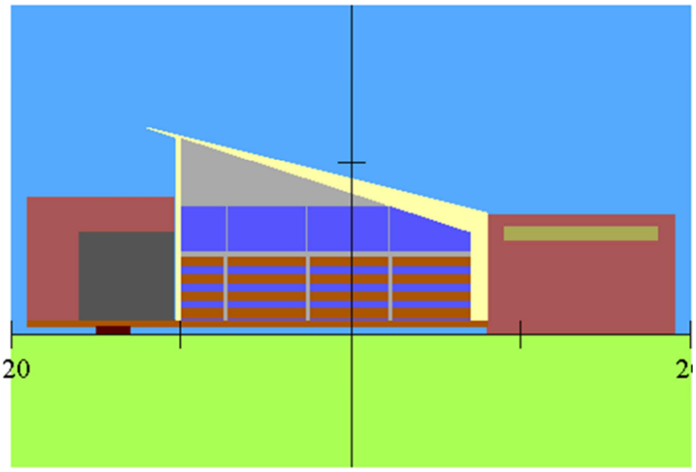


Figura 70 – Espaço Multiuso da UFSM e sua representação no GrafEq
Fonte: Produção dos alunos B e L.

É necessário mencionar que se encontraram algumas dificuldades no que se refere à dinamização das últimas atividades da sequência didática em virtude de ser final de ano letivo. Alguns alunos estavam preocupados com processos seletivos referentes ao ingresso em instituições de Ensino Superior e, assim, optavam por se dedicar prioritariamente a essas outras questões, o que implicou em uma frequência menos regular na realização das atividades 10, 11, 12 e 13. Porém, mesmo assim, pôde-se verificar um bom desempenho dos alunos que realizaram as atividades.

7.8 Apreciação da sequência didática pelos alunos sujeitos da pesquisa

Com o intuito de verificar a opinião dos alunos sobre a sequência didática, no último encontro com a turma solicitou-se que descrevessem aspectos positivos e aspectos que deveriam ser melhorados na sequência didática desenvolvida. Participaram desta ação todos os alunos presentes, tantos os que frequentaram as aulas de forma mais assídua quanto os menos frequentes.

Quanto aos aspectos que poderiam ser melhorados, alguns alunos mencionaram o tempo de duração da sequência didática. Esses alunos afirmaram que as atividades de representação de imagens tornaram-se repetitivas e ou cansativas ao longo da sequência. A figura a seguir apresenta o comentário do aluno K sobre esta questão.

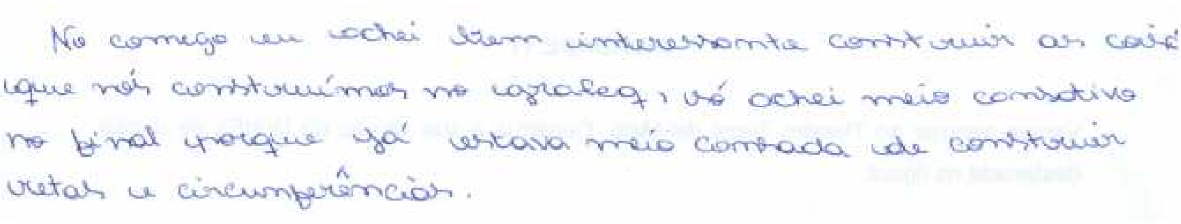

No começo eu achei bem interessante construir as coisas que nós construímos no geogebra, só achei meio cansativo no final porque já estava meio cansada de construir retas e circunferências.

Figura 71 – Avaliação do aluno K sobre a duração da sequência
Fonte: Produção do aluno K.

Conforme descrito anteriormente, as primeiras atividades da sequência requereram um tempo maior para a sua dinamização devido às dificuldades iniciais que os alunos apresentaram em coordenar os registros algébrico e gráfico do objeto reta. Além disso, com base no desenvolvimento do aluno K ao longo da sequência didática, pode-se supor que este tenha compreendido como representar retas e circunferências (primeiros objetos abordados pela sequência) e, por isso, as atividades seguintes tornaram-se repetitivas para ele. Acredita-se que, se esse tipo de abordagem fosse mais usual em sala de aula de matemática, essas dificuldades poderiam ser ao menos em parte superadas, o que reduziria o tempo necessário para as atividades panejadas.

No que tange aos aspectos positivos, destaca-se a presença das afirmações “achei muito interessante”, “achei legal e gostei”, “achei bem legal a dinâmica e a forma de trabalho do professor”, “as aulas foram interessantes e divertidas”, “foi essencial para a minha aprendizagem, para o meu conhecimento”. A partir dessas avaliações dos alunos, acredita-se que se tenha proporcionado um ambiente convidativo para a aprendizagem dos alunos. Além disso, pode-se verificar que houve uma avaliação positiva dos alunos em relação ao uso do computador em sala de aula, o que reforça a premissa assumida nesse trabalho de que o uso das TIC em sala de aula pode constituir-se como uma interessante alternativa para o aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem.

Alguns alunos mencionaram que a sequência possibilitou retomar conteúdos estudados no primeiro ano do Ensino Médio. A figura a seguir apresenta parte da descrição do aluno C.

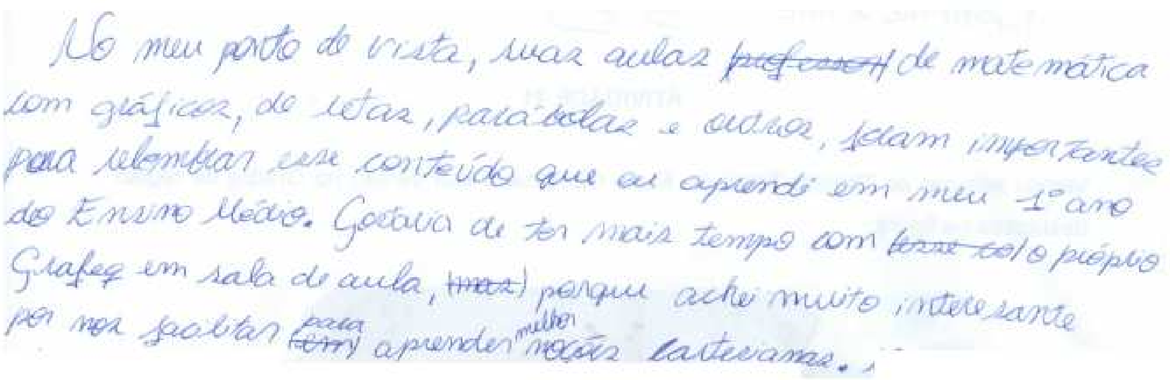

No meu ponto de vista, suas aulas ~~professor~~ de matemática com gráficos, de retas, parábolas e círculos, foram importantes para relembrar esse conteúdo que eu aprendi em meu 1º ano do Ensino Médio. Gostaria de ter mais tempo com ~~...~~ o próprio Grafeq em sala de aula, ~~...~~ porque achei muito interessante por nos facilitar para ~~em~~ aprender melhor noções cartesianas.

Figura 72 – Parte da avaliação do aluno C sobre a sequência
Fonte: Produção do aluno C.

Acredita-se que a sequência oportunizou aos alunos uma visão mais global dos objetos abordados. No caso do aluno C, quando menciona as “noções cartesianas” infere-se que se refira a coordenar os registros algébrico e gráfico dos objetos da geometria analítica abordados, o que só foi possível por meio da identificação das variáveis visuais pertinentes em cada registro (DUVAL, 2003, 2009, 2013).

Por fim, cabe salientar que alguns alunos mencionaram que acharam interessante a abordagem envolvendo a arquitetura de Santa Maria como, por exemplo, na descrição do aluno M na figura a seguir.

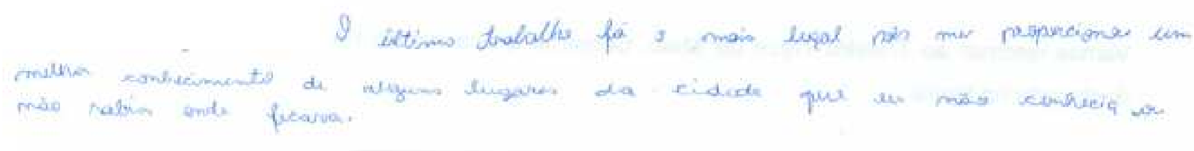

O último trabalho foi o mais legal por me proporcionar um melhor conhecimento de alguns lugares da cidade que eu não conhecia ou não sabia onde ficava.

Figura 73 – Parte da avaliação do aluno M sobre a sequência
Fonte: Produção do aluno M.

Dessa forma, acredita-se que a atividade colaborou para valorizar e proporcionar uma visão diferente sobre o patrimônio cultural de Santa Maria.

7.9 Validação da experiência

Para a validação da experiência é necessário retomar as hipóteses da pesquisa estabelecidas na segunda fase da Engenharia Didática – concepção e análise *a priori*.

A nível cognitivo acredita-se ser válida a hipótese de que as atividades contribuem para o trânsito entre os registros gráfico, algébrico e da língua natural, dos objetos da geometria analítica abordados. Para Duval (2011), o estabelecimento de tal condição requer isolar as unidades de sentido pertinentes em dada representação por meio dos procedimentos a seguir.

> Primeiro, converter essa representação para outro registro. Depois, gerar todas as modificações possíveis dessa representação para convertê-las para esse outro registro. Podemos, então, observar se as variações feitas no primeiro registro produzem, ou não produzem, covariações no segundo. Dessa maneira, o segundo registro serve como revelador das unidades de sentido matematicamente pertinentes nas representações do registro de partida. (DUVAL, 2011, p. 104).

Nessa perspectiva, ao longo da experimentação da sequência didática pôde-se observar que as atividades e a forma com que foram dinamizadas propiciaram aos alunos que realizassem testes para verificar as conjecturas que realizavam com os objetos abordados. Nas representações de imagens no GrafEq, por exemplo, quando necessitavam plotar determinada região, inseriam relações algébricas no GrafEq que acreditavam corresponder à essas regiões. Se o resultado não era o esperado, buscavam compreender quais eram as relações ou partes delas que resultavam no gráfico plotado e, assim sucessivamente, até que obtinham a região gráfica pretendida. Nas atividades desenvolvidas com o GeoGebra, ora os alunos movimentavam o registro gráfico e observavam o efeito produzido no registro algébrico, ora alteravam um parâmetro algébrico e observavam o efeito gráfico decorrente. Além disso, ainda convertiam as suas informações para o registro da língua natural.

A segunda hipótese trata sobre a utilização dos recursos computacionais. Previa-se que o computador constitui-se como uma ferramenta que viabiliza distintas situações de aprendizagem, as quais não seriam possíveis ou demandariam um elevado número de procedimentos se realizadas somente com as ferramentas tradicionais. Acredita-se que o uso planejado dos recursos computacionais na sequência didática possibilitou aos alunos ampliarem o domínio de compreensão do conteúdo matemático abordado. A possibilidade de representação simultânea potencializou aos alunos discriminarem as unidades significantes do registro algébrico (DUVAL, 2009), o que não seria possível ou demandaria um elevado número de procedimentos se realizadas somente com as ferramentas tradicionais (lápis, papel, régua, quadro, giz, etc.).

Ainda em relação à hipótese anterior, pôde-se constatar que os alunos tornaram-se mais ativos na busca da construção do seu conhecimento. Ao longo da sequência didática, mostraram-se mais interessados e empenhados a cada nova atividade que lhes era proposta. Além disso, verificou-se que, de uma forma geral, houve um desenvolvimento no que tange à investigação em sala de aula, principalmente no que se refere a busca em entender o porquê dos resultados matemáticos que encontravam. Com isso em mente, acredita-se na validade da segunda hipótese.

Com relação à hipótese que trata sobre a compreensão dos conteúdos matemáticos abordados como sendo o foco das atividades e não a aprendizagem dos *softwares*, também se acredita ser válida. Os alunos não tiveram dificuldades em utilizar o *software* GrafEq e os *applets* construídos com o GeoGebra, bem como não tiveram dificuldades no que se refere às suas interfaces.

8 REFLEXÕES PROVISÓRIAS

Esta pesquisa apresenta resultados sobre a compreensão de objetos da geometria analítica por meio de atividades planejadas com o uso de TIC, mais especificamente os *softwares* GrafEq e GeoGebra, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Trata-se de uma experiência realizada com uma turma de alunos de terceiro ano do Ensino Médio. O planejamento e execução desta pesquisa ocorreram de acordo com os passos da Engenharia Didática.

A análise dos resultados apresentados na quarta fase da Engenharia Didática – análise *a posteriori* e validação – levam em conta o problema e os objetivos da pesquisa. Nesse sentido, são realizadas reflexões à luz da teoria de Duval, a qual se mostrou adequada para o planejamento, para a dinamização e avaliação dessa experiência.

Em suma, pôde-se constatar que as atividades planejadas com uso desses *softwares* proporcionaram aos alunos que realizassem conversões entre os registros gráfico e algébrico dos objetos matemáticos tratados. Com isso, os alunos puderam explorar as variações de uma representação num registro fazendo-os prever, observar as variações concomitantes de representação do outro registro (DUVAL, 2009). Verifica-se ao longo da análise dos resultados, que esse processo colaborou para a compreensão do conteúdo matemático abordado. Não se trata de dizer que os alunos compreendem esses objetos de uma forma plena. O que se tem são indícios que as atividades propostas com o uso do GrafEq e do GeoGebra contribuíram para o processo de reconhecimento desses objetos nos seus registros de representação semiótica.

Os *applets* desenvolvidos com o *software* GeoGebra são relativamente simples se considerados todos os recursos disponibilizados por esse *software*, porém desempenharam um papel importante para a compreensão dos objetos matemáticos abordados. Inicialmente, quando da definição da pesquisa, pensou-se em utilizar apenas o *software* GrafEq. Porém, verificou-se que era necessário ao final de cada bloco de atividades referentes a um objeto da geometria analítica, formalizar alguns resultados. Nesse sentido, ainda que a maioria das atividades dinamizadas foram planejadas com o uso do GrafEq, acredita-se que foi interessante usar o GeoGebra pois permitiu trabalhar com o conceito da geometria dinâmica por meio dos controles deslizantes.

Ao se analisar as atividades pôde-se verificar que estas proporcionaram aos alunos um estudo diferenciado em relação ao já realizado. Em um primeiro momento, os alunos apresentavam dificuldades relacionadas à coordenação dos registros de representação semiótica dos objetos matemáticos abordados. Porém, mostraram-se interessados e, sobretudo, engajados com a resolução das atividades. No que se refere às atividades envolvendo o GrafEq, por exemplo, quando não obtinham o resultado gráfico desejado após plotar uma relação algébrica, os alunos questionavam sobre o porquê desse resultado. Esse é um indício de que realmente essa ferramenta possibilitou aos alunos diferentes experimentações, haja vista que realizavam conjecturas, avaliavam-nas, testavam-nas, reavaliavam-nas ou refutavam-nas.

É importante mencionar que se encontrou certa dificuldade em analisar as produções dos alunos no GrafEq no que se refere ao fato de que o *software* fornece apenas a construção final do aluno. Ou seja, não é possível obter um histórico das relações que o aluno plotou, mas que apagou ou modificou, pois não eram as que definiriam a região gráfica que pretendia. Nesse sentido, essas observações ficaram unicamente a cargo do professor pesquisador e, considerando o quão dinâmica que é uma sala de aula, muitas vezes essa observação não foi possível. Nessa perspectiva, os momentos de discussão que foram realizados após cada atividade foram importantes para verificar e compreender as principais dificuldades que os alunos tiveram ao longo da sua realização. Dessa forma, contribuindo tanto para as questões metodológicas do presente trabalho, bem como para intervenções do professor pesquisador no que tange à aprendizagem dos alunos.

Além da utilização do computador na sequência, dois outros fatores contribuíram para a validade da mesma, a saber:

- A interação: no início da experimentação da sequência constatou-se que os alunos costumavam realizar as atividades de forma individual e que, em poucos momentos, compartilhavam suas dúvidas e descobertas com os seus colegas, nem com o professor pesquisador. Diante desse cenário, buscou-se incentivar a interação em sala de aula não só de aluno-computador, mas também entre aluno-professor e aluno-aluno. Isso contribuiu para que os alunos tivessem uma atuação mais ativa, que buscassem construir o seu conhecimento.

- A abordagem sobre os aspectos históricos e artísticos da arquitetura de Santa Maria: a escolha do tema da sequência didática como sendo a arquitetura presente em Santa Maria foi acertada à medida que contribuiu para o interesse dos alunos na realização das atividades propostas. A integração entre as disciplinas Matemática e Artes Plásticas na sequência didática leva a crer no grande potencial de um projeto interdisciplinar que se pode estabelecer entre essas áreas em trabalhos futuros.

Por tudo isso, ao fim desse trabalho, pode-se dizer que a experiência foi de grande valia tanto para os alunos sujeitos da pesquisa quanto para a formação do pesquisador. Acredita-se que a proposta apresentada possa servir como base para novas experiências em sala de aula, em especial, no ensino da geometria analítica.

8.1 Resultados e trabalhos futuros

Desde o início dessa pesquisa no ano de 2013, buscou-se discutir seus objetivos e resultados em espaços acadêmicos variados (APÊNDICE B). Com isso, decorrem a publicação e apresentação de dois trabalhos completos em eventos científicos (ambos em 2014) e um artigo aceito para publicação na revista científica RENOTE no segundo semestre de 2015. Além disso, publicou-se um artigo completo nos anais da *XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática*, realizada no ano de 2015, no qual se discute uma experiência de formação de professores em nível de pós-graduação no que tange ao pensamento generalizador possível em ilusões de ótica representadas no GrafEq. Nesta mesma linha de trabalho, no ano de 2014 realizou-se um minicurso na *IV Escola de Inverno de Educação Matemática*, proposto em um artigo publicado nos anais do evento.

Dessa pesquisa, entre outras, tem-se a convicção da existência de um terreno fértil para futuras pesquisas e trabalhos. Um tema que se destaca é o estudo do pensamento generalizador por meio de atividades que envolvam TIC, em especial o GrafEq por meio da representação de elementos ou imagens que contenham regiões formadas a partir de padrões como, por exemplo, algumas ilusões de ótica. Esse tema, inclusive, já vem sendo trabalhado pelo autor paralelamente à realização da presente dissertação, tendo como público-alvo professores de matemática. Essa situação proposta é desafiadora e interessante, se considerado como público-alvo alunos do Ensino Médio, haja vista os poucos trabalhos que se tem sobre o tema. Outra possibilidade de linha de trabalho refere-se ao estudo de outros objetos da geometria analítica, os quais não foram abordados na presente pesquisa como, por exemplo, a elipse e a hipérbole.

REFERÊNCIAS

ARROIO, A.; GIORDAN, M. **O vídeo educativo**: aspectos da organização do ensino. Educação em Química e Multimídia. 2006. Disponível em <http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc24/eqm1.pdf>. Acesso em 13 out. 2014.

BASSO, M.V. de A. et al. Educação tecnologia e/na educação matemática aplicações da matemática elementar na sala de aula ou “focinho de porco não é tomada”. **Informática na Educação: teoria & prática**, Porto Alegre, v. 2, n. 2, p. 23-37, 1999.

BRASIL. **DCNs (Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica)**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013.

BRASIL. PNLD (Guia de Livros Didáticos – PNLD 2015). **Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

BRASIL. PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais). **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

CARNEIRO, V.C.G. Engenharia Didática: Um Referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **ZETETIKÉ**, Campinas, v. 13, n. 23, p. 87-119, jan./jun., 2005.

COLÉGIO MANOEL RIBAS. **Memorial Manoel Ribas**. Santa Maria, 2012. Disponível em: <http://memorialmanoelribas.blogspot.com.br/>. Acesso em: 12 ago. 2014.

D’AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: Da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DANTE, L. R. **Matemática**: Contexto e Aplicações – Volume 3. São Paulo: Ática, 2013. cap. 3-5, p. 69-140.

DUVAL, R. Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Organização de Silvia Dias Alcântara Machado, p.11- 33. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003.

________. **Semiósis e Pensamento Humano**. Tradução: Lênio Fernandes Levy, Marisa Rônsani Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p.

________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma - entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representações semióticas. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011. 160 p.

________. **Raymond Duval:** depoimento [2013]. Entrevistadores: J.L.M. de Freitas e

V. Rezende. Campo Mourão: RPEM, 2013. Revista impressa. Entrevista concedida a Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 2, n. 3, jul-dez 2013.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 1995. 840 p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. São Paulo: Autores Associados, 2007.

FIOREZE, L. A. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade**: Uma análise a partir da teoria dos campos conceituais. 2010. 244 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação)–Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1997.

GAUTO, N. K. **GrafEq no processo de ensino e aprendizagem de funções afins**. 2012. 81 f. Trabalho Final de Curso (Licenciatura em Matemática)–Universidade Federal do Rio Grande Sul, Porto Alegre, 2012.

GOULART, J. B. **O estudo da equação $\mathbf{Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0}$ utilizando o *software* GrafEq:** Uma proposta para o Ensino Médio. 2009. 160 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)–Universidade Federal do Rio Grande Sul, Porto Alegra, 2009.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: VII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, **Anais eletrônicos do VII SBIE**. Belo Horizonte: 1996. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996-vii_sbie.pdf>. Acesso em: 21 set. 2014.

GRAVINA, M. A; BASSO, M. V. de A. Mídias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, M. A. et al. (Org.). **Matemática, Mídias Digitais e Didática** - tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, [2010]. p.13. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/livros/livro_matematica_midias_didatica_completo.pdf>. Acesso em: 5 dez. 2013.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e tempo docente**. Campinas: Papirus, 2013. 176 p.

KÖFENDER, M. **GrafEq no ensino e aprendizagem de inequações:** uma pesquisa baseada na negociação de significados. 2014. 76 f. Trabalho Final de Curso (Licenciatura em Matemática)–Universidade Federal do Rio Grande Sul, Porto Alegre, 2014.

MARIANI, R. de C. P.; SILVA, B. A. da**. As variáveis visuais na coordenação de registros de representação: um estudo sobre inequações a partir da**

comparação de funções. Anais da 29ª Reunião da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (29ª ANPED), 2006, Rio de Janeiro, RS, Brasil.

MORAN, J. M. **O vídeo na sala de aula**. 1995. Disponível em <http://www.eca.usp.br/prof/moran/vidsal.htm#apresenta??o>. Acesso em: 20 jul. 2014.

MOREIRA, M.A. **Pesquisa em ensino**: aspectos metodológicos. In: Instituto de Física - UFRGS. Burgos: Universidade de Burgos, 2003. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/pesquisaemensino.pdf>. Acesso em: 18 mai. 2014.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. **Contapontos**, Itajaí, n. 6, p. 423-437, 2002.

NOTARE, M. R.; GRAVINA, M. A. A formação continuada de professores de matemática e a inserção de mídias digitais na escola. In: **VI colóquio de história e tecnologia no ensino de matemática**, 10, 2013, São Carlos. Anais. 2013.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. 128 p.

PAIVA, M. **Matemática:** Volume 3. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013, cap. 2-6, p. 36-140.

PONTE, J. P; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 23.

PRETTO, N.; PINTO, C. da C. Tecnologias e novas educações. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 31, jan./abr., 2006.

RIBEIRO, J. **Matemática**: Volume 3. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010, cap. 5-7, p. 169-276.

SANTOS, R. de S. **Tecnologias digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos da geometria analítica:** manipulações no *software* GrafEq. 2008. 137 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)–Universidade Federal do Rio Grande Sul, Porto Alegra, 2008.

SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. Tradução: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

SOUZA, J. **Matemática**: Volume 3. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010, cap. 3, p. 148-227.

VALENTE, J. A. de. O Computador na Sociedade do Conhecimento. In: NÚCLEO de Informática Aplicada à Educação. Campinas: UNICAMP, 1999. Disponível em: <http://www.nied.unicamp.br/oea/pub/livro1/>. Acesso em: 19 jul. 2014.

APÊNDICES

Apêndice A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

COLÉGIO ESTADUAL MANOEL RIBAS
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do projeto: A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO E SUAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO GRAFEQ
Pesquisador responsável: Prof. Fabrício Fernando Halberstadt
Instituição/Departamento: Aluno do Mestrado em Educação Matemática (PPGEM&EF) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)
Telefone para contato: xxx- xxxxx-xxxx
Orientador do trabalho: Prof.ª Dr.ª Leandra Anversa Fioreze (UFSM – UFRGS)

A presente pesquisa tem por objetivo investigar a compreensão de alguns conceitos e propriedades da Geometria Analítica do Ensino Médio, tendo em vista à utilização do computador no ensino e aprendizagem da matemática.

Para a efetivação desse estudo, será dinamizada uma sequência didática pelo pesquisador junto aos alunos da turma B do 3º ano do Ensino Médio.

Na primeira fase que já se realizou, foi realizada no mês de setembro de 2014 uma avaliação prévia sobre o conhecimento dos alunos no que se refere aos conceitos e resultados que necessitarão para realizar as atividades que serão propostas.

Na segunda fase, a ser realizada no mês de outubro de 2014, será aplicada a sequência didática que considerará os resultados obtidos na primeira etapa. Os instrumentos de coleta de dados serão as produções dos alunos, as observações do professor e imagens do desenvolvimento das atividades.

O conteúdo das produções dos alunos será utilizado estritamente para fins de pesquisa acadêmica do pesquisador. Os participantes da pesquisa serão esclarecidos quanto a quaisquer dúvidas durante todo o desenvolvimento das atividades e terão acesso aos resultados obtidos.

Esta pesquisa tem finalidade acadêmica, e seus resultados podem contribuir para o ensino e aprendizagem da matemática, por meio de propostas que visam contribuir para uma melhoria desse processo.

Eu, ____, abaixo assinado, concordo em participar do estudo A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO E SUAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO GRAFEQ, como sujeito. Declaro ter sido informado sobre as finalidades deste projeto e que tenho ciência de que poderei me recusar a responder qualquer pergunta e que posso negar-me a participar do estudo.

Santa Maria, ___ de setembro de 2014.

________________________________	________________________________
Álvaro Barreto Lisboa Vice-diretor da escola	Prof. Fabrício F. Halberstadt
________________________________	________________________________
Aluno da Escola	Responsável legal pelo aluno

Apêndice B – Referências da produção científica oriunda da pesquisa

HALBERSTADT, F.F.; FIOREZE, L.A**. A aprendizagem da geometria analítica do ensino médio e suas representações semióticas no GrafEq**: algumas considerações iniciais. Anais da V Jornada Nacional de Educação Matemática (V JEM), 2014, Passo Fundo, RS, Brasil.

HALBERSTADT, F.F.; FIOREZE, L. A. O ensino e aprendizagem da geometria analítica: uma abordagem com o uso do software GrafEq. In: **IV Escola de Inverno de Educação Matemática**, 11, 2014, Santa Maria. Anais. 2014.

HALBERSTADT, F.F.; FIOREZE, L. A. A aprendizagem da geometria analítica do Ensino Médio: um olhar a partir das suas representações semióticas no GrafEq. In: **XVIII Encontro brasileiro de estudantes de Pós-Graduação de Educação Matemática**, 12, 2014, Recife. Anais. 2014.

HALBERSTADT, F.F.; FIOREZE, L. A. O ensino e aprendizagem dos objetos reta e desigualdades com o GrafEq: uma abordagem com vistas à Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 13, n. 1, 2015.

NOTARE, M. R.; FIOREZE, L. A. A; HALBERSTADT, F.F. O *software* GrafEq e os registros de representação semiótica: uma análise de trabalhos com ilusão de ótica. In: **XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática**, 12, 2015, Tuxtla Gutiérrez. Anais. 2015.