UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA

Wilian Schmidt

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: UMA META-ANÁLISE A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Santa Maria, RS
2016

Wilian Schmidt

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: UMA META-ANÁLISE A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rita de Cássia Pistóia Mariani

Santa Maria, RS
2016

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Schmidt, Wilian
Raciocínio combinatório: uma meta-análise a partir dos registros de representação semiótica / Wilian Schmidt.- 2016.
148 p.; 30 cm

Orientadora: Rita de Cássia Pistóia Mariani
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2016

1. Raciocínio combinatório 2. Registros de representação semiótica 3. Meta-análise I. de Cássia Pistóia Mariani, Rita II. Título.

Wilian Schmidt

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: UMA META-ANÁLISE A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Aprovado em 24 de agosto de 2016:

Rita de Cássia Pistóia Mariani, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Leandra Anversa Fioreze, Dra (UFRGS) - Videoconferência

Ricardo Fajardo, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2016

DEDICATÓRIA

A meus pais, Dalto e Iria, que sempre apoiaram com dedicação e amor minhas lutas, vitórias e conquistas.

AGRADECIMENTOS

A concretização deste trabalho ocorreu, principalmente, pelo auxílio, compreensão e dedicação de várias pessoas. Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste estudo e, de uma maneira especial, agradeço:

- ao PPGEM&EF por oportunizar a realização deste sonho tão almejado.

- a minha orientadora Rita de Cássia Pistóia Mariani por todo o incentivo, paciência, compreensão e suporte oferecido para a consolidação desta dissertação.

- aos professores da banca, Inês, Leandra e Ricardo por dedicar parte do seu tempo no exame deste trabalho e pelas contribuições para melhorá-lo.

- ao meu amigo e parceiro Rodrigo, pelo amor incondicional, a dedicação, o carinho, a compreensão e apoio diário que necessitei em todos os momentos dessa caminhada.

- aos meus pais e irmãos por todo o amor verdadeiro e por acreditarem na minha capacidade de me tornar melhor.

- aos amigos Adriana, Germano, Matheus, Vera e Viviane que souberam entender a minha ausência e sempre me deram incentivo.

- à colega de orientação Tiele pela troca de informações constante e incessantemente, pelos trabalhos realizados juntos e pelas conversas.

- aos colegas e professores do PPGEM&EF pelos debates, momentos de aprendizagem e de diversão.

- aos colegas professores do Colégio Tiradentes da Brigada Militar de Santa Maria e do Colégio Politécnico da Universidade Federal de Santa Maria pelo carinho, apoio e incentivo.

Enfim, a todos àqueles que fazem parte da minha história e que são essenciais nessa longa jornada de aventuras e descobertas da vida.

Quando o homem compreende a sua realidade, pode levantar hipóteses sobre o desafio dessa realidade e procurar soluções.
Assim pode transformá-la e o seu trabalho pode criar um mundo próprio, seu Eu e as sua circunstâncias.

(Paulo Freire)

RESUMO

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: UMA META-ANÁLISE A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

AUTOR: Wilian Schmidt
ORIENTADORA: Rita de Cassia Pistoia Mariani

O objetivo desta pesquisa é investigar se e como são empregados os registros de representação semiótica nas investigações *stricto sensu* produzidas por instituições brasileiras que abordam o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de atividades didáticas que tiveram a participação de alunos do ensino médio. O estudo está baseado na meta-análise qualitativa, que pode ser entendida como a realização de uma revisão sistemática de um conjunto de pesquisas com a intenção de culminar em uma síntese interpretativa por meio da análise e dos dados primários destas (BICUDO, 2014). Para tanto, adotamos os registros de representação semiótica de Duval (2003, 2009, 2011) como referencial teórico. A triagem se deu nos sites dos programas de pós-graduação de universidades brasileiras (grande área Multidisciplinar, área de Ensino de Matemática) e no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Nas buscas utilizou-se as palavras-chave “análise combinatória”, “combinatória” e “permutações”. Constatou-se que 43 pesquisas enfatizaram o raciocínio combinatório e 35 delas explicitaram em seu *corpus* documental atividades didáticas na educação básica, no ensino superior ou na formação de professores que ensinam Matemática. Dessas, 12 centraram-se no ensino médio, tanto no ensino regular quanto na modalidade de Educação de Jovens e Adultos. Para realizar a análise dos dados selecionou-se quatro dissertações que propõem e analisam atividades resolvidas por estudantes do ensino médio e que têm aporte teórico na resolução de problemas. Diante disso, por meio de descritores elaborados a partir das estratégias de resolução de atividades de cunho combinatório apresentadas por Batanero *et al* (1996, 1997, 2001 e 2003), buscou-se nestas atividades indícios que permitiram identificar os registros de representação mobilizados nas soluções apresentadas pelos participantes dos estudos selecionados. Das análises dos dados conclui-se que o emprego das fórmulas de arranjo, combinação e permutação não é a estratégia mais adotada pelos estudantes, mas sim, a regra do produto (produto cartesiano ou princípio multiplicativo). Esta regra mobiliza principalmente registros simbólicos e, sendo assim, suscita tratamentos nesse mesmo tipo de registro. De modo semelhante, quando as atividades são desenvolvidas por meio de fórmulas, ou seja, pela regra do produto, da soma ou do quociente, também foram empregados registros simbólicos e seus tratamentos. Além disso, nestas tarefas houve uma maior evidência das modificações do registro de partida, em língua natural, para o intermediário, registro simbólico. Nas demais estratégias como enumerar as configurações solicitadas, recursividade, subdividir o problema, fixar variáveis e tradução do problema a outro equivalente identificou-se uma diversidade maior de registros, a saber: língua natural, figural, tabular e em árvore e, por conseguinte, uma variedade maior nos tipos de mudanças entre eles. Por fim, observou-se que a mobilização dos registros de representação semiótica na resolução de atividades de cunho combinatório não visam somente à apreensão dos objetos matemáticos, mas, principalmente, um suporte para a resolução desse tipo de problemas.

Palavras-chave: Raciocínio combinatório; Meta-análise; Registros de representação.

ABSTRACT

COMBINATORIAL REASONING: A META-ANALYSIS FROM THE REGISTER OF SEMIOTIC REPRESENTATIONS

AUTHOR: Wilian Schmidt
ADVISOR: Rita de Cássia Pistóia Mariani

The aim of this research is to investigate whether and how the semiotic representation registers are employed in the strict sense research produced by Brazilian institutions that address the development of combinatory reasoning through educational activities that had the participation of high school students. The study is based on qualitative meta-analysis, which can be understood as the realization of a systematic review of a body of research intended to culminate in an interpretive synthesis through analysis and primary data from these (BICUDO, 2014). Therefore, we adopted the semiotic representation registers based on Duval (2003, 2009, 2011) as a theoretical framework. The screening took place on the websites of postgraduate programs of Brazilian universities (Multidisciplinary Teaching of Mathematics area) and the Bank of Theses and Dissertations of Higher Education Personnel Improvement Coordination (CAPES). In search it was used keywords "combinatorics", "combinatorial" and "permutations". It was found that 43 research emphasized the combinatorial reasoning; 35 made explicit in its documentary corpus educational activities in basic education, higher education or training of teachers who teach mathematics. From these, 12 focused on high school, both in regular schools and in the form of Youth and Adult Education. To accomplish the data analysis it was selected four dissertations that analyze and propose activities resolved by high school students and have theoretical support in solving problems. Thus, using descriptors drawn from solving strategies of combinatorial nature of activities presented by Batanero et al (1996, 1997, 2001 and 2003). It sought these evidence activities that have identified the representation registers mobilized in the solutions presented by the participants of the selected studies. The data analysis it was concluded that the use of array formulas, combination and permutation is not the strategy adopted by the students, but rather the product rule (Cartesian product or multiplicative principle). This rule mainly symbolic mobilizes records and, therefore, poses treatments in the same record type. However, when the activities are developed through formulas, that is, the product rule, the sum or quotient, were also employed symbolic records and their treatments. Additionally, these tasks were further evidence of the modification of the starting record in natural language to the intermediary, symbolic record. In other strategies such as enumerating the requested settings, recursion, subdividing the problem, set variables and translation problem the equivalent there was a greater diversity of records, namely: natural language, figural, tabular and tree. Therefore a variety in most types of conversion. Finally, it was also noted that the mobilization of semiotic representation registers in solving combinatorial nature of activities are not aimed at only the seizure of mathematical objects, but mainly a support for solving such problems.

Keywords: Combinatorial reasoning; Meta-analysis; Register of representation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEFET/RJ	Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
FUFSE	Fundação Universidade Federal de Sergipe
FUPF	Fundação Universidade de Passo Fundo
FURB	Universidade Regional de Blumenau
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência de Tecnologia do Ceará
IFES	Instituto Federal de Educação, Ciência de Tecnologia do Espírito Santo
IFG	Instituto Federal de Educação, Ciência de Tecnologia de Goiás
IFRJ	Instituto Federal de Educação, Ciência de Tecnologia do Rio de Janeiro
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência de Tecnologia de São Paulo
IFSul	Instituto Federal de Educação, Ciência de Tecnologia Sul-Rio-Grandense
MCI	Modelo Combinatório Implícito
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PROEJA	Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos
PUC/MG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC/RS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC/SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
RP	Resolução de Problemas
RRS	Registros de Representação Semiótica
UCS	Universidade de Caxias do Sul
UEA	Universidade do Estado do Amazonas
UECE	Universidade Estadual do Ceará
UEFS	Universidade Estadual de Feira de Santana
UEG	Universidade Estadual de Goiás
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UEM	Universidade Estadual de Maringá
UEMS	Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
UENF	Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UEPG	Universidade Estadual de Ponta Grossa
UERR	Universidade Estadual de Roraima
UESB	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
UFABC	Fundação Universidade Federal do ABC
UFAC	Universidade Federal do Acre
UFAL	Universidade Federal de Alagoas
UFAM	Universidade Federal do Amazonas
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFES	Universidade Federal do Espírito Santo
UFG	Universidade Federal de Goiás
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFMA	Universidade Federal do Maranhão
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso

UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFPEL	Universidade Federal de Pelotas
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRPE	Universidade Federal Rural de Pernambuco
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UFSCAR	Universidade Federal de São Carlos
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
ULBRA	Universidade Luterana do Brasil
UNB	Universidade de Brasília
UNEMAT	Universidade do Estado de Mato Grosso
UNESP/BAU	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho/Bauru
UNESP/MA	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho/Marilia
UNESP/RC	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho/Rio Claro
UNIAN/SP	Universidade Anhanguera de São Paulo
UNIBAN	Universidade Bandeirante de São Paulo
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UNICENTRO	Universidade Estadual do Centro-Oeste
UNICSUL	Universidade Cruzeiro do Sul
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá
UNIFRA	Centro Universitário Franciscano
UNIGRANRIO	Universidade do Grande Rio – Professor José de Souza Herdy
UNIJUI	Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul
UNIPAMPA	Fundação Universidade Federal do Pampa
UNISAL	Centro Universitário Salesiano de São Paulo
UNISUL	Universidade do Sul de Santa Catarina
UNIVATES	Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social
URI	Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
USP	Universidade de São Paulo
USS	Universidade Severino Sombra
USU	Universidade Santa Úrsula
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

Introdução

A Matemática é um campo de estudo que está em contínuo desenvolvimento. Essa Ciência pode se desenvolver por meio dela mesma, por meio de suas aplicações ou por meio das necessidades do cotidiano. A resolução de atividades que requerem o raciocínio combinatório é um exemplo disso.

Esta forma de pensar é considerada uma ferramenta importante para diversas áreas do conhecimento porque apresenta um grande número de aplicações. Na Química pode-se pensar na enumeração de moléculas, a busca de isômeros, a topologia da estrutura molecular como problemas de natureza combinatória, na Física o modelo das partições tem aplicações na mecânica, termodinâmica e estática. Já na Biologia, é possível citar a enumeração de tipos de organismos, o estudo da difusão de epidemias e na própria genética (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 23)[1].

Além disso, Guzmán, Batanero e Godino (2001, p. 34) apontam que o raciocínio combinatório é a "base da matemática discreta e, portanto, a raiz de muitos outros ramos da Matemática, como Teoria de Números e Teoria da Probabilidade, e de ciências como Biologia e Economia". Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p. 17) sua importância está no fato de que "esse modo de pensar está relacionado com quase todas as formas de conhecimentos úteis em que a mente humana pode se ocupar".

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – (PCN) o raciocínio combinatório é uma nova forma de pensar em Matemática que é desenvolvida através da contagem (BRASIL, 2002, p. 126). Tal fato é reiterado em Pessoa e Borba (2010) ao afirmarem que esse é um modo de raciocinar sobre situações que envolvem o levantamento de possibilidades e que atendem a determinadas condições, tais como se há repetição ou não de elementos, se a sua ordenação é importante, entre outras relações.

Os PCN ainda destacam que optar sobre a forma mais conveniente de organizar números ou informações para a contagem de casos em um evento "não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação" (BRASIL, 2002, p. 126). Isso significa que as expressões matemáticas usualmente empregadas para resolver tais questões devem ser compreendidas como consequência do desenvolvimento do raciocínio combinatório.

---

[1] Tradução nossa dessa citação extraída de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997); Guzmán, Batanero e Godino (2001); Guzmán, Batanero e Godino (2003); Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996).

Essas considerações nos levam a crer que esse modo de pensar deve ser trabalhado de modo diversificado e com ênfase no desenvolvimento de processos que explicam diferentes formas de realizar contagens. Isso significa que as fórmulas e expressões matemáticas não devem ser entendidas como o único ou principal meio de resolver atividades de cunho combinatório; o que é corroborado pelo fato de que o desenvolvimento do raciocínio combinatório deve estar alicerçado na resolução de problemas, no uso de diferentes representações, na identificação de regularidades e no emprego de modelos matemáticos (BRASIL, 2002, p. 127). Esse fato está relacionado a um dos objetivos do ensino e aprendizagem dos conceitos relativos aos métodos de contagem e a resolução de suas tarefas: os estudantes devem desenvolver a capacidade de resolver atividades de contagem e de enumeração utilizando diagramas, esquemas de árvores, gráficos, figuras, representações simbólicas, entre outras.

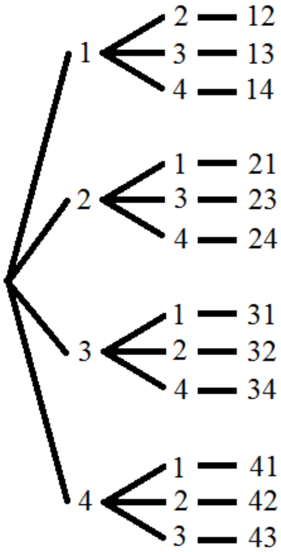
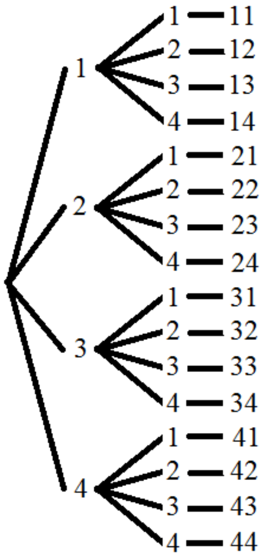
Foi através da minha prática pedagógica[2] que pude observar a importância do emprego de diferentes representações no desenvolvimento de procedimentos para a resolução de exercícios que demandam o raciocínio combinatório. Ao contrário das fórmulas, ao representar os dados por meio de tabelas, árvore de possibilidades, listagens ordenadas, ou outros esquemas, o aluno pode observar diferentes características presentes no enunciado da atividade e decidir qual é o melhor modo de resolvê-la.

Ao explorar os conceitos combinatórios com os alunos do segundo ano do ensino médio procurei observar suas atitudes quando estão resolvendo tarefas de contagem. No estudo por meio das representações ficou claro que os estudantes estabelecem diferenças, semelhanças e conexões entre características intrínsecas de uma questão, como relevância da ordem dos elementos agrupados ou se é possível ou não a repetição de cada elemento. Isso faz com que se torne secundário a identificação (ou classificação) dos exercícios em tipologias como arranjo, permutação ou combinação. Uma vez que, o principal objetivo é identificar propriedades que permitam desenvolver uma "linha de raciocínio" que dê conta de resolver a tarefa que está sendo proposta.

Por exemplo, em uma atividade que requeria a formação de um número de dois algarismos a partir do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, normalmente os estudantes elaboravam uma lista organizada por meio da árvore de possibilidades ou por meio de tabelas. Mesmo sem estar explícito no enunciado alguns formavam números com algarismos repetidos e outros sem repeti-los (Quadro 01).

[2] Desde novembro de 2012 atuo como professor de Matemática dos segundos e terceiros anos do ensino médio do Colégio Tiradentes da Brigada Militar do município de Santa Maria – RS.

Quadro 01 – Números de dois algarismos a partir do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

<table>
<tr><td></td><td>Sem repetição</td><td>Com repetição</td></tr>
<tr><td>Árvore de possibilidades</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Tabela</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>1</td><td>-</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr>
<tr><td>2</td><td>21</td><td>-</td><td>23</td><td>24</td></tr>
<tr><td>3</td><td>31</td><td>32</td><td>-</td><td>34</td></tr>
<tr><td>4</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>-</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>1</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr>
<tr><td>2</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr>
<tr><td>3</td><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td></tr>
<tr><td>4</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Fonte: Autor.

Ao comparar suas resoluções, tanto por meio da árvore quanto por meio da tabela, a primeira característica observada pelos alunos era a diferença na quantidade de números formados e que isso se devia a presença de algarismos repetidos ou não. Após discussões concluíam que esse é um fator preponderante na contagem dos agrupamentos e que, se não está explicitado no enunciado, ambas as soluções são aceitáveis. Também observavam que a ordem dos algarismos é importante, uma vez que o número 12 e 21 são diferentes apesar de serem formados pelos mesmos dígitos.

Assim, estabelecer relações entre essas características, e também, entre as formas de representar o objeto, é o que enriquece o *raciocínio combinatório*. Aliado a isso, uma possível conclusão que os estudantes podem chegar é que um ente matemático possui mais de uma maneira de ser representado e, cada uma delas, evidencia peculiaridades desse objeto.

Ao atuar desta maneira acredito que esteja colaborando para alcançar uma das finalidades da Matemática no ensino médio, que, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), é a de possibilitar ao aluno o reconhecimento de “representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações” (BRASIL, 1999, p. 42).

Podemos aproximar as representações matemáticas presentes nas orientações curriculares dos registros de representação semiótica proposto por Duval, ao se considerar que essas diferentes representações matemáticas são meios de acessar os objetos matemáticos e que esses “não são diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos” (DUVAL, 2003, p.13).

Duval (1999, apud ALMOULOUD, 2007, p. 71) assume que “um registro de representação é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente”. Isso significa que o sujeito não está no “modo automático” ao realizar determinada tarefa, ou seja, ele reflete sobre todos os passos e procedimentos para executá-la.

Além da finalidade de comunicação, segundo Duval (2003), as representações semióticas são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento. Assim, o funcionamento cognitivo do sujeito depende da distinção que ele faz entre o objeto e sua representação e o mesmo está intrinsecamente relacionado com a importância das representações semióticas na matemática e a variedade destas representações.

Para Duval (2009) é de grande validade a diversificação dos registros de representação semiótica para o funcionamento do sistema cognitivo. Isto porque a mobilização de mais de um registro permite analisar uma situação que seja cognitivamente mais complexa. Pois, às vezes, diante de um problema matemático um registro geométrico pode fornecer mais informações do que um registro algébrico.

Ilustramos esse fato no exemplo presente na Figura 01, em que o registro simbólico responde, especificamente, a questão quantitativa presente no enunciado. Enquanto isso, o registro tabular, além de auxiliar na obtenção da resposta, evidencia quais são as possíveis “escolhas” que podem ser feitas. Ou seja, nele estão enumeradas todas as configurações pertinentes à tarefa de formar possibilidades que satisfazem as condições propostas no exercício.

Figura 01 – Representação simbólica e tabular de uma atividade

Entre as cidades A e B há 2 (duas) estradas, e entre as cidades B e C há 3(três) estradas. Não há estrada ligando diretamente A e C. De quantas maneiras distintas é possível partir da cidade A e chegar à cidade C?

Representação simbólica:

$\underline{2} \times \underline{3} = 6$

Representação tabular:

Cidades A e B / Cidades B e C	Estr. 1	Estr. 2	Estr. 3
Estrada 1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
Estrada 2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)

Fonte: Autor.

Assim, podemos concluir que não basta perceber que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis, nem tampouco que os objetos possuem diferentes representações. Mas, principalmente, que as diferentes representações semióticas *não são* o objeto em si e que elas são um *meio* de acessá-lo. Por isso, acreditamos que para compreender as dificuldades dos alunos ao desenvolver o raciocínio combinatório é necessário levar em consideração a teoria dos registros de representação semiótica (RRS), visto que os estudantes necessitam das diferentes representações para expressar suas ideias matemáticas.

Considerando, então, a importância dos RRS no ensino e aprendizagem em Matemática, resolvemos averiguar quais temas matemáticos estão sendo abordados e analisados no âmbito dessa teoria. Para tal, fizemos um mapeamento das teses e dissertações realizadas no Brasil.

Elaboramos esse mapeamento no período de novembro de 2014 a fevereiro de 2016. A busca se deu nos *sites* dos programas de pós-graduação de universidades brasileiras (grande área Multidisciplinar, área de Ensino de Matemática) e no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Nas buscas utilizamos as palavras-chave “semiótica”, “registros de representação” e “Duval”.

Na investigação encontramos instituições de ensino que atendiam o critério de escolha dos programas nas cinco regiões do Brasil. Localizamos treze (13) teses e cento e cinquenta e uma (151) dissertações que possuem texto na íntegra disponível *online*. A seguir (Quadro 02) estão organizadas informações por região; Instituição de Ensino Superior (IES); programa; nível de cada pesquisa (Mestrado Acadêmico – A, Mestrado Profissional – F; Doutorado – D) e o número total (T) de pesquisas.

Quadro 02 – Resumo[3] do mapeamento de dissertações e teses com o referencial teórico dos registros de representação semiótica

Região	**IES**	**Programa**	**A**	**F**	**D**	**T**
Centro-Oeste	UFMS	Educação*	02	00	00	02
	UFMT	Educação*	02	00	00	02
Nordeste	UECE	Educação*	04	00	00	04
	UFPE	Educação Matemática e Tecnológica	03	00	00	03
Norte	UFPA	Educação em Ciências e Matemática	01	00	00	01
Sudeste	CEFET/RJ	Ensino de Ciências e Matemática	00	01	00	01
	UEPG	Educação*	02	00	00	02
	UENF	Cognição e Linguagem****	01	00	00	01
	PUC/MG	Ensino	00	02	00	02
	PUC/SP	Educação Matemática	43	39	09	92
		Educação*	01	00	00	
	UNIBAN	Educação Matemática	04	00	00	04
	UNICSUL	Ensino de Ciências e Matemática	00	04	00	04
	UNESP/MA	Educação*	00	00	01	01
	UNESP/RC	Educação Matemática	01	00	00	01
	UNIGRANRIO	Ensino das Ciências***	00	01	00	01
	UNICAMP	Educação*	02	00	00	02
	UFSCAR	Ensino de Ciências Exatas***	00	01	00	01
	UFRJ	Ensino de Matemática	06	00	00	06
	USP	Educação*	01	00	00	01
	USS	Educação Matemática***	00	01	00	01
Sul	UNIJUI	Educação nas Ciências*	02	00	00	02
	UNISUL	Ciências da Linguagem**	01	00	00	01
	PUC/RS	Educação em Ciências e Matemática	03	00	00	03
	UEL	Ensino de Ciências e Educação Matemática	04	00	00	04
	UFSC	Educação Cientifica e Tecnológica	11	00	03	14
	UFRGS	Ensino de Matemática	00	04	00	04
	ULBRA	Ensino de Ciências e Matemática	03	00	00	03
	FURB	Ensino de Ciências Naturais e Matemática***	00	01	00	01

Fonte: Autor.

Na realização do mapeamento de registros de representação semiótica consultamos os *sites* de 81 pós-graduações da área interdisciplinar de Ensino de Ciências e Matemática. Identificamos 148 pesquisas cadastradas em 65 instituições de ensino superior brasileiras. Além disso, ao consultar o banco de dissertações e teses da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), localizamos 16 trabalhos em pós-graduações das áreas de Educação*; Letras**; Ensino*** e Sociais e Humanidades****, totalizando, assim, 164 estudos sobre registros de representação semiótica em 76 instituições de ensino superior.

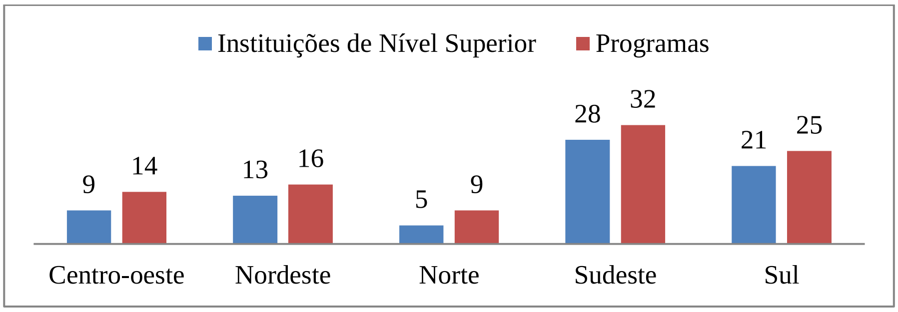
Dentre as dissertações e teses encontradas a mais antiga data de maio de 2000 e a mais recente de agosto de 2014. Isso ocorre porque as buscas nos *sites* foram realizadas no período

[3] No apêndice A encontra-se o quadro com as quantidades de pesquisas de livre acesso que foram identificadas em cada programa de pós-graduação da área de Ensino de Matemática que estão cadastrados pela CAPES.

de novembro de 2014 a agosto de 2015. Não foram identificadas pesquisas publicadas em 2015, pois, ou os arquivos digitais não haviam sido disponibilizados *online*, ou as pesquisas dos alunos de pós-graduação ingressantes em 2013 ainda não haviam sido defendidas até o momento.

Destacamos no Gráfico 01 o número de instituições e de programas por região. É possível observar que as regiões Centro-Oeste, Nordeste e Norte detêm juntas apenas 35,53% das instituições de nível superior e 40,62% dos programas de pós-graduação consultados.

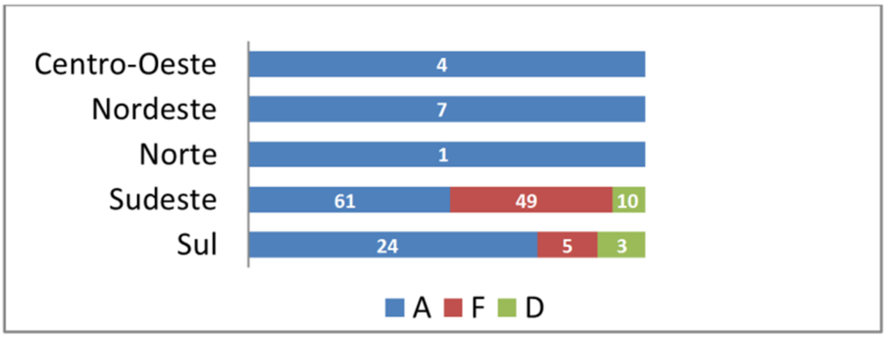
Gráfico 01 – Número de instituições e programas de pós-graduação por região do Brasil



Fonte: Autor.

Cabe observar que as regiões Centro-Oeste, Nordeste e Norte possuem um número de trabalhos bem inferior em relação às regiões Sudeste e Sul (Gráfico 02), apesar de uma grande quantidade de pós-graduações cadastradas na grande área Multidisciplinar (Gráfico 01). Além disso, a região Norte apesar de possuir 09 pós-graduações em cinco instituições diferentes tem apenas 01 estudo com referencial teórico nos RRS. Em contrapartida, as regiões Sudeste e Sul apresentam pesquisas nos níveis de mestrado acadêmico, mestrado profissional e doutorado.

Gráfico 02 – Número de pesquisas por região do Brasil



Fonte: Autor.

Por meio da análise (Gráfico 02) a região sudeste é a que possui o maior número de pesquisas que envolvem os registros de representação semiótica. Isso ocorre porque houve uma forte identificação dos pesquisadores da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) em relação à Didática da Matemática. Além disso, há uma forte influência dessa linha de pesquisa sobre a Universidade Bandeirantes de São Paulo (UNIBAN), uma vez que grande parte dos professores desta instituição se pós-graduaram na PUC-SP.

Para uma melhor compreensão de como a pesquisa sobre os registros de representação semiótica tem se desenvolvido buscamos identificar nas dissertações e teses alguns elementos essenciais de cada estudo. Inicialmente, observamos quais objetos matemáticos são privilegiados em cada ramo da Matemática (Quadro 03).

Quadro 03 – Objetos matemáticos identificados em cada ramo da Matemática[4]

(continua)

Nível	Área da Matemática	Objeto matemático	Total
Educação Básica	Números e Operações	Números racionais e/ou Fração	11
		Operações aritméticas	05
		Números inteiros	04
		Números naturais	03
		Números complexos	02
		Números reais	02
		Contagem	03
		Matemática financeira	01
	Álgebra e Funções	Funções	39
		Equações	07
		Inequações	07
		Sequências	03
		Trigonometria	02
		Produtos notáveis	01
		Lógica	01
		Expressões algébricas	01
	Geometria/ Grandezas e Medidas	Geometria analítica	15
		Geometria plana	14
		Geometria espacial	05
		Transformações geométricas	02
		Geometria esférica	01
	Estatística e Probabilidade	Estatística	09
		Interpretação de gráficos e tabelas	02
		Probabilidade	01

[4] As áreas no nível da educação básica estão divididas de acordo com a segunda versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2016).

(conclusão)

Ensino Superior	**Álgebra Linear**	Sistemas lineares	05
		Matrizes	02
		Independência e dependência linear	01
		Vetores	01
	Cálculo Diferencial e Integral	Derivada	08
		Limites	05
		Integral	03
		Teorema fundamental do Cálculo	02
		Máximos e mínimos de funções	01
		Funções de uma e duas variáveis reais	01
	Algoritmo e programação	Linguagem de programação	01

Fonte: Autor.

O número de pesquisas relacionadas (Quadro 03) é maior que o quantitativo de trabalhos identificados nas pós-graduações porque alguns deles possuem mais de um objeto matemático presente nas atividades e/ou análises. Por meio do Quadro 03 é possível observar que a maior incidência de trabalhos se dá na categoria álgebra e funções com sessenta e uma (61) publicações.

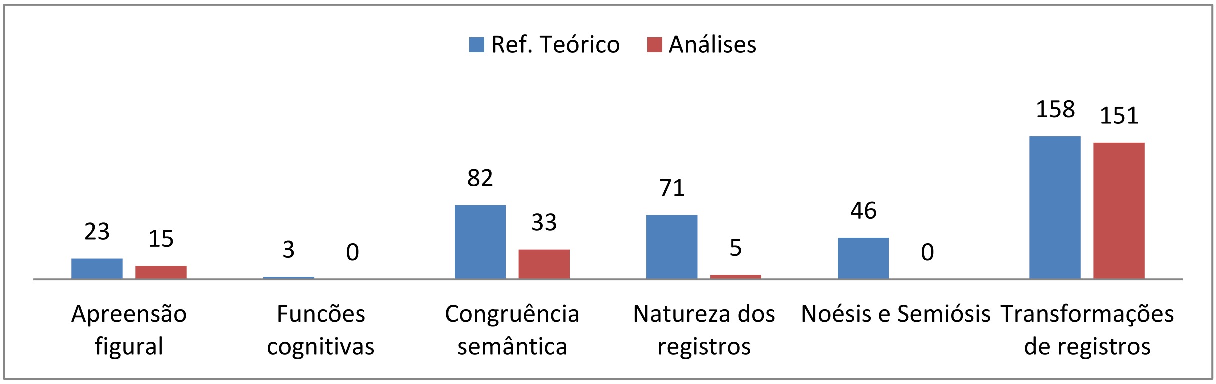
Enquanto isso, as áreas da álgebra linear e algoritmo e programação possuem poucos estudos, 09 e 01, respectivamente. De acordo com a segunda versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2016) os problemas de contagem estão inseridos na área de números e operações e, apesar desta apresentar um número expressivo de pesquisas (31), apenas 03 delas explora os problemas de contagem.

Também procuramos identificar os elementos da teoria dos registros de representação semiótica presentes em cada estudo. Os trabalhos que abordam a apreensão figural em seus elementos teóricos e na análise dos dados, o fazem a partir de aspectos relativos à ordem de construção de figuras geométricas (apreensão sequencial); à interpretação das formas de uma figura geométrica (apreensão perceptiva); à explicitação de propriedades matemáticas da figura (apreensão discursiva); e, também, em relação às modificações ou transformações que podem ser realizadas na figura inicial (apreensão operatória), como subdividir ou agrupar figuras, ampliação e redução, e, ainda, rotações e translações.

Em um menor número há os que abordam a congruência semântica (Gráfico 03), estes analisam se as conversões de registros são imediatas, ou seja, se é possível observar em ambos os sentidos da conversão uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes de partida e chegada. Em contrapartida, uma grande quantidade de pesquisas abordam as transformações de registros tanto no referencial teórico quanto nas análises de dados.

Ainda é possível observar que um número considerável de estudos abordam em seu referencial teórico a natureza dos registros, embora apenas cinco consideram em suas análises se os tratamentos dados aos registros podem ser traduzidos por algoritmos (monofuncionais) ou não (multifuncionais). Cabe salientar que, apesar de uma ampla abordagem teórica dos registros nas pesquisas, apenas uma parte dela é considerada nas análises dos dados (Gráfico 03).

Gráfico 03 – Elementos teóricos dos registros de representação semiótica presentes nas pesquisas versus elementos utilizados nas análises de dados



Fonte: Autor.

Alguns trabalhos trazem uma ampla discussão sobre RRS, ou seja, abordam em seu referencial teórico as noções de *noésis* e *semiósis*, a natureza dos registros (se são monofuncionais ou multifuncionais), transformações de registros (tratamentos e conversões) e congruência semântica. Por outro lado, alguns estudos têm um referencial teórico mais restrito, é o caso de algumas pesquisas sobre objetos geométricos que abordam as funções cognitivas e apreensão figural, por exemplo.

Ressaltamos, ainda, que as pesquisas direcionam o estudo das representações principalmente por meio das transformações de registros, quer sejam tratamentos ou conversões. Esse elemento teórico está presente no referencial de 96,34% dos estudos encontrados, sendo que apenas sete destes não o abordam em suas análises.

Apesar da abordagem teórica sobre RRS ser diversificada, notamos que alguns dos elementos supracitados não são destacados na análise dos dados das pesquisas. Podemos citar o caso das funções cognitivas (presente em 03 trabalhos) e de *noésis* e *semiósis* (que teve abordagem em 46 estudos). Além disso, chamamos atenção para o caso da natureza dos registros em que apenas 7% dos trabalhos que abordaram esse elemento em seu referencial teórico o exploraram na análise dos dados.

Cabe destacar a existência de cinco trabalhos que embora tenham explorado elementos da teoria dos RRS no seu referencial teórico não chegam a utilizá-los na análise dos dados. Três deles constituem-se em propostas didáticas e um relata atividades realizadas em sala de aula, nestes estudos as representações são mencionadas apenas na etapa do desenvolvimento das atividades, mas não nas análises e discussões das mesmas. A quinta pesquisa é de cunho teórico com uma análise histórica do objeto matemático e uma análise de livros didáticos em que não são explorados os registros de representação.

Também optamos por identificar o nível de abrangência de cada pesquisa, isto é, que nível da educação é priorizado em cada estudo. Além de considerarmos os níveis fundamental, médio e superior, incluímos a categoria formação de professores, no qual estão inclusos os trabalhos que têm foco nos saberes docentes. O Quadro 04 resume os resultados, estes não são compatíveis com o número de trabalhos (164), uma vez que algumas pesquisas tem ampla abrangência, por exemplo, do ensino fundamental ao ensino médio.

Quadro 04 – Nível de abrangência das pesquisas sobre registros de representação

<table>
<tr><td rowspan="2">Ensino Fundamental</td><td>Anos Iniciais</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Anos Finais</td><td>39</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ensino Médio</td><td>60</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ensino Superior</td><td>34</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formação de Professores</td><td>25</td></tr>
</table>

Fonte: Autor.

Assim, percebemos que 66,46% das pesquisas que constituem nosso mapeamento são voltadas para a educação básica, sendo que a maioria destas tem foco direcionado para o ensino médio. Apesar de acreditarmos na importância de compreendermos a influência das representações na aprendizagem da Matemática em um âmbito geral, não podemos ignorar o que os trabalhos existentes estão querendo nos mostrar: precisamos entender, por meio dos RRS, como se dá a apreensão dos objetos matemáticos pelos estudantes do ensino médio.

Por fim, procuramos os trabalhos que apresentam indícios do raciocínio combinatório e, dentre as 164 pesquisas identificadas apenas três abordam conceitos relativos à contagem, a saber: Esteves (2001), Filho (2008) e Lima (2011). A pesquisa de Esteves

(2001) foi realizada na PUC/SP, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, sob orientação da professora Sandra Maria Pinto Magina e se intitulou "Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do ensino fundamental".

A autora tinha por objetivo estudar a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de análise combinatória em estudantes de 14 anos que cursavam a última série do ensino fundamental. Para isso, baseada nas noções de transposição didática segundo Chevallard (1991), nos estudos de Vergnaud (1991 e 1998) e nos RRS construiu uma sequência de ensino com situações-problema de contagem direta. Trabalhou com grupo experimental e de referência. Com sua pesquisa ela concluiu que as principais dificuldades dos alunos são referentes à confusão sobre a importância da ordem, falta de enumeração sistemática e dúvida em relação à operação aritmética associada ao enunciado do problema.

De modo semelhante o estudo de Filho (2008) também foram realizados na PUC/SP, porém, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, sob orientação da professora Maria Inez Rodrigues Miguel e teve por título "Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental (7 e 8 anos)".

O autor objetivava investigar a aquisição e o desenvolvimento de noções introdutórias do raciocínio combinatório com crianças na faixa etária dos sete e oito anos de idade. Construiu uma sequência de atividades que partiam de situações concretas. Amparado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1993) seguiu os pressupostos da Engenharia Didática propostos por Artigue (1988). Dentre as conclusões, o pesquisador afirma que o uso de material manipulável associado ao trabalho em duplas favorece o interesse dos alunos pelo estudo proposto e também desenvolve ideias de organização, leitura, contagem e o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Em contrapartida, o trabalho de Lima (2011) foi desenvolvido na PUC/MG, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática e Ciências e contou com orientação do professor Dimas Felipe de Miranda. Tal estudo foi denominado "Ensinando e aprendendo análise combinatória através da leitura e resolução de problemas e da construção de enunciados".

A finalidade da pesquisa era desvendar as contribuições que um conjunto de atividades para o ensino da análise combinatória oferece ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e às habilidades dos alunos para a resolução de problemas. Amparada pelos RRS, conceitos de investigação matemática segundo Ponte (2003) e resolução de problemas de Polya (1944) a autora aplicou uma sequência de atividades junto a alunos do segundo ano do ensino médio. Pautada na análise dos dados conclui que o estudo da análise combinatória sem o uso abusivo de fórmulas contribui para o desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas. Além disso, os alunos tornaram-se mais seguros e autônomos e apresentaram diferentes caminhos nas soluções dos problemas.

As três dissertações supracitadas representam 1,83% em relação ao total de pesquisas elencadas no quadro 01, tal fato evidencia a necessidade de se buscar uma maior compreensão do desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de diferentes representações. A importância dos resultados apresentados nestes e nos demais trabalhos pautados em RRS já foi destacada por Colombo, Flores e Moretti:

> [...] o trabalho com registros de representação semiótica com alunos, ou mesmo com professores em processo de formação, possibilita uma melhor compreensão não apenas do objeto matemático em estudo por parte dos estudantes, como também da especificidade da aprendizagem matemática. (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008, p. 61).

Além disso, Curi, Ferreira e Santos (2013, p. 11) chamam atenção para o fato de que as pesquisas sobre RRS se preocupam em "determinar as dificuldades de aprendizagem dos alunos em torno de um tema específico e estabelecer significado de conceitos matemáticos". Confirmando, portanto, essa tendência já observada por Colombo, Flores e Moretti (2008, p. 59).

Não nos distanciando muito dessa tendência, procuramos observar como as representações semióticas são empregadas na resolução atividades que requerem o raciocínio combinatório e, para isso, adotamos a metodologia denominada meta-análise qualitativa porque ela permite analisar outros trabalhos pelo viés de um referencial teórico como o dos RRS. Também escolhemos esse método por entendermos que ele valoriza as pesquisas já realizadas sobre o tema que é foco da nossa investigação.

Diante desse contexto a nossa pesquisa foi realizada no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física (PPGEM&EF) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), na área de concentração em Educação Matemática (EM). O PPGEM&EF se propõe a realizar estudos e desenvolver pesquisas acerca dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática e da Física, preferencialmente nos níveis de ensino fundamental e médio.

À vista disso, sob a perspectiva da Educação Matemática, a pesquisa nessa área tem por objetivo a melhoria da aprendizagem matemática (SILVA; SANTOS-WAGNER, 1999, p.

11). Por consequência, o presente estudo nos permite adentrar no campo da pesquisa em EM, que, segundo Bicudo (1993, p.20) é importante por fornecer "informações à Educação sobre o compreender e o fazer matemáticos, possibilitando que estes sejam vistos à luz de outras compreensões e fazeres, científicos ou não".

Assim, nossa pesquisa visa investigar se e como são empregados os RRS nas investigações *stricto sensu* produzidas por instituições brasileiras que abordam o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de atividades didáticas que tiveram a participação de alunos do ensino médio.

Para que possamos alcançar tal objetivo organizamos este trabalho em três partes. No capítulo 1 destacam-se alguns aspectos sobre o raciocínio combinatório além do referencial teórico dos registros de representação semiótica.

Para aprofundarmos os conhecimentos referentes ao raciocínio combinatório buscamos apoio no Modelo Combinatório Implícito (MCI) proposto por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996). Esse modelo divide os problemas que envolvem o raciocínio combinatório em três categorias: seleção, distribuição e partição. Considerando o fato de que cada um destes modelos apresenta características específicas, explicitamos algumas estratégias que podem ser empregadas na resolução de atividades que envolvem esse tipo de raciocínio.

Ainda, na perspectiva do raciocínio combinatório exploramos a teoria dos RRS. Esta é uma teoria cognitiva de aprendizagem que tem seus fundamentos na mobilização de diversas representações matemáticas que são tratadas como registros de representação. Por esse motivo têm sido amplamente estudada e têm servido como base para um grande número de pesquisas em Educação Matemática.

No capítulo 2, descrevemos a metodologia utilizada. Para tanto, explicitamos o que é a meta-análise, apresentamos um mapeamento sobre o raciocínio combinatório a partir do Banco de Dissertações e Teses da CAPES e dos sites de programas de pós-graduação *stricto sensu* de universidades brasileiras, apontamos os critérios de seleção dos trabalhos, evidenciamos uma síntese destes e uma comparação dos objetivos das dissertações selecionadas.

Ainda neste capítulo, baseando-nos no referencial teórico elaboramos as categorias de análise dos dados. Tais categorias foram denominadas "descritores" e são em número de 10 (dez) e envolvem estratégias de resolução de atividades que requerem o raciocínio combinatório e a presença dos registros de representação semiótica em cada uma delas.

No capítulo 3 apresentamos e discutimos os resultados obtidos por meio da análise das atividades. Por fim, apresentamos as reflexões sobre a presente pesquisa.

1. RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

1.1. MODELO COMBINATÓRIO IMPLÍCITO NO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

As atividades que envolvem o raciocínio combinatório são classificadas por Pessoa e Borba (2010, p. 3) da seguinte forma: produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação. Essa classificação é a usualmente adotada e se dá de acordo com características dos objetos que são agrupados: se importa a ordem ou não, se o número de objetos a ser agrupado é igual ou menor do que o número total de objetos do conjunto, se os elementos a serem agrupados provêm de um ou dois conjuntos.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997, p. 239) esclarecem que o desenvolvimento do raciocínio combinatório requer muito mais do que simplesmente resolver problemas de permutação, arranjo e combinação. Isso, porque os alunos realizam "atividades de matematização (modelação, representação, formulação, abstração, validação, generalização, ...)" quando desenvolvem adequadamente esse modo de pensar. (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.14).

Além disso, a resolução de problemas de contagem, segundo Gerdenits (2014, p. 67), "capacita o aluno a agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizar esses agrupamentos e aperfeiçoar a maneira de contar esses agrupamentos desenvolvendo o raciocínio combinatório". É a partir dessa forma de pensamento que o estudante é capaz de desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar os desafios dos problemas de caráter aleatório que dependem de uma contagem sistematizada.

Reconhecemos que identificar a classe dos problemas (arranjo, permutação, combinação, produto cartesiano) pode facilitar a resolução dos mesmos, porém, esta não é uma tarefa tão evidente aos alunos. Por isso, Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996, p. 36) afirmam que as dificuldades referentes à resolução de problemas combinatórios podem estar ligadas a outras variáveis, por exemplo, o *modelo combinatório implícito*[5].

Dubois (1984, apud BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 31) propõe quatro configurações para os problemas de contagem simples que foram classificadas de acordo com os seguintes modelos: seleção, distribuição, partição e decomposição. O

[5] Adotaremos o modelo combinatório implícito no nosso trabalho não somente por se tratar de uma classificação diferente da usual. Mas, principalmente porque esse pode ser um fator preponderante na compreensão de como se desenvolve o raciocínio combinatório por meio de processos de ensino e aprendizagem. Além disso, há uma grande diversidade de problemas associado a esse modelo.

modelo de seleção requer a escolha de uma amostra a partir de um conjunto de objetos; o de distribuição implica a ordenação de objetos em caixas (células, urnas, etc); o de partição supõe a divisão de objetos de um conjunto em subconjuntos; o quarto caso é a decomposição de um número natural em somas.

Ao adotar essa classificação Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p. 31) explicam que a decomposição é um caso particular da partição reduzindo assim o número de configurações. Ademais, segundo os autores

> [...] estes modelos podem ser considerados como representações ou esquemas concretos inerentes aos enunciados dos problemas combinatórios. A distinção entre estes modelos é importante do ponto de vista matemático, já que o tipo de objetos e representações que intervêm em cada modelo é distinto (amostragem, correspondências, partições de conjuntos, etc.). Isso necessariamente influenciará nos procedimento de resolução e nas dificuldades dos alunos ante as distintas classes de problemas e técnicas de resolução. (BATANERO, GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.31).

Portanto, cada modelo apresenta características específicas, como o tipo de objetos agrupados e a forma como são reunidos. Além disso, por meio do enunciado do problema é possível associar ações a cada um dos modelos. Por conveniência, abordaremos brevemente tais características e ilustraremos por meio de exemplos.

De acordo com Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996, p. 28) os problemas de raciocínio combinatório que possuem palavras-chave como “escolher”, “selecionar”, “pegar”, “extrair”, “coletar”, etc. podem ser incluídos no modelo de *seleção*, que tem por característica geral a seleção de m objetos de um conjunto composto de n objetos (distintos em um maior número de casos).

Para ilustrar pode-se observar o seguinte exemplo: “deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?”. Aqui pode ser observado que *formar uma comissão de três membros* tem o mesmo significado que “selecionar” três pessoas de uma amostra de dez.

Em relação aos problemas de seleção ainda deve-se ter em consideração as seguintes condições: se o problema se trata de uma amostra ordenada ou não ordenada e, se é possível repetir os elementos da amostra ou não. A partir disso, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p. 32) identificam quatro operações combinatórias básicas nos problemas de seleção (Quadro 05).

Quadro 05 – Operações combinatórias básicas segundo o modelo de seleção

	Sem repetição	**Com repetição**
Amostra ordenada	Arranjo simples $A_{m,n}$	Arranjo com repetição $(AR)_{m,n}$
Amostra não ordenada	Combinação simples $C_{m,n}$	Combinação com repetição $(CR)_{m,n}$

Fonte: (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 32).

Aqui deve ser observado que Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p. 32) adotam as permutações como caso particular de arranjo e por isso elas não aparecem no Quadro 05. Esse fato reforça o posicionamento de Borba e Azevedo (2013, p. 116): "entende-se que numa perspectiva matemática, permutação é um caso particular do arranjo".

Diferentemente dos problemas de seleção, Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996, p. 29) esclarecem que as palavras-chave mais comuns no modelo de *distribuição* são: "colocar", "introduzir", "guardar", "atribuir", etc.. De forma geral esse modelo engloba os problemas que intencionam a distribuição de m objetos em n caixas (envelopes, urnas, células, etc.).

Para ilustrar esse modelo destacamos o seguinte problema extraído de Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996, p. 37): "dispomos de três cartas iguais. Desejamos colocá-las em quatro envelopes de diferentes cores: amarelo, branco, creme e dourado. Se cada envelope só pode conter, no máximo, uma carta, de quantas formas podemos colocar as três cartas nos quatro envelopes? ".

Apesar da solução desse problema ser $C_{4,\,3}$ há muitas possibilidades para esse modelo, que dependem de:

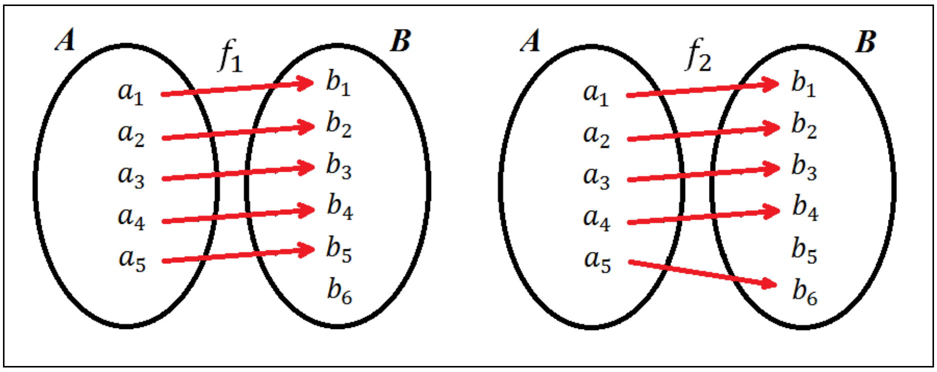
> [...] se os objetos a distribuir são idênticos ou não. Se as células são idênticas ou não. Se devemos ordenar os objetos distribuídos nas células. As condições que se assomam à distribuição, tais como o número máximo de objetos em cada célula, ou a possibilidade de haver células vazias, etc. (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996, p. 29).

Ao contrário dos problemas característicos do modelo de seleção, Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996, p. 29) afirmam que "não há uma operação combinatória distinta para cada diferente possível distribuição, e mais ainda, é possível obter a mesma operação combinatória com diferentes problemas de distribuição".

Além disso, Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996, p. 29) observam que dispor os m objetos em n células (ou caixas) tem o significado matemático de estabelecer uma aplicação desde o conjunto dos m objetos ao conjunto das n células (ou caixas). Dessa forma é possível que se tenha arranjos quando se tratar de uma aplicação injetiva ou permutações quando for uma aplicação bijetiva.

Por exemplo, tomando-se os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, é possível estabelecer uma aplicação f de A em B, tal que para cada elemento de A está associado um único elemento em B, ou seja, para todo $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, tem-se $f(a_1) \neq f(a_2)$. É possível observar que se $m < n$, então cada aplicação f distinta pode corresponder a um diferente arranjo de m elementos tomados n a n (Figura 02).

Figura 02 – Exemplos de correspondência de aplicações injetivas e arranjos

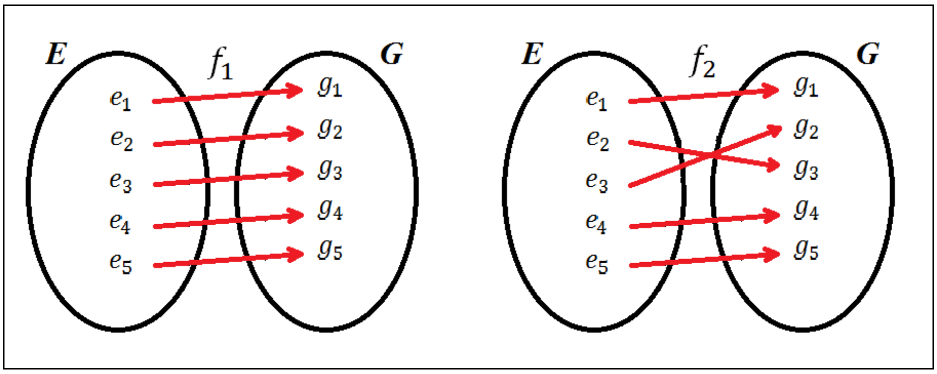


Fonte: Autor.

Por meio do exemplo da Figura 02 pode-se observar que $f_1 \neq f_2$. Ainda, cada aplicação f forma diferentes pares ordenados, resultando assim em arranjos diferentes, pois o par $(a_5, b_5) \in f_1$, mas não pertence a f_2, assim como o par $(a_5, b_6) \in f_2$ mas não está em f_1.

Da mesma forma, tomando-se os conjuntos $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ e $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, de modo que a aplicação f de E em G faça cada elemento de E corresponder um único elemento de G, e, vice-versa, então essa função é dita bijetiva. Deve ser observado que nesse caso $m = n$ e, portanto, f é passível de ser associada a uma permutação dos m elementos de E, pois, cada vez que um elemento de E corresponde a um elemento de G de forma distinta, tem-se diferentes aplicações f (Figura 03).

Figura 03 – Exemplos de correspondência de aplicações bijetivas e permutações



Fonte: Autor.

É possível observar na Figura 03 que as aplicações f_1 e f_2 são distintas, pois enquanto em f_1 há a formação dos pares (e_2, g_2) e (e_3, g_3), em f_2 os elementos e_2 e e_3 estão acompanhados, respectivamente, de g_3 e g_2. Portanto, fica evidente a "permuta" dos elementos g_2 e g_3 em relação a f_1 e f_2.

Por fim, Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996, p. 29) esclarecem que não há uma definição direta para as combinações simples usando a ideia de aplicação; e que, ao se considerar uma aplicação não injetiva poder-se-ia obter um problema para o qual a solução não é uma das operações combinatórias básicas.

O último modelo é denominado *partição* e Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996, p. 30) atribuem a ele as palavras-chave "dividir", "partir", "decompor", "separar", etc.. Esse tipo de problema supõe a divisão de um conjunto de n objetos em m subconjuntos. É possível ilustrar essa situação por meio da seguinte questão: "Maria e Carmen têm quatro figurinhas numeradas de 1 a 4. Decidem reparti-las entre as duas (duas figurinhas para cada uma). De quantas formas podem repartir as figurinhas?". (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, p. 38).

Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996, p. 30) asseveram que é possível "visualizar a *distribuição* de n objetos em m células como uma *partição* de um conjunto de n elementos em m subconjuntos" e que portanto "há uma correspondência bijetiva entre os modelos de partição e distribuição" conforme explícito no Quadro 06.

Quadro 06 – Correspondência entre o modelo de distribuição e de partição

Distribuição	**Seleção**
Ordenadas	Subconjuntos ordenados
Não ordenadas	Subconjuntos não ordenados
De objetos distintos	De objetos distintos
De objetos indiscerníveis	De objetos indiscerníveis
Em caixas distintas	Partições ordenadas
Em caixas indiscerníveis	Partições não ordenadas
Injetivas	Em subconjuntos vazios ou somente com uma unidade (elementares)
Sobrejetivas	Em subconjuntos não vazios
Bijetivas	Em conjunto com somente uma unidade (elementares)
Aplicação qualquer	Subconjuntos com mais de uma unidade e com subconjuntos vazios

Fonte: (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 41).

Essa bijeção pode ser compreendida por meio da seguinte propriedade dos números combinatórios: $\binom{n}{r} = \binom{n-r}{r}$. É possível reconhecer, mesmo que implicitamente, que selecionar r elementos de um conjunto de n tem o mesmo significado que realizar uma bipartição no conjunto de n elementos: os r selecionados e os $n-r$ restantes. Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p. 40) afirmam que "traduzindo este problema, a seleção de um elemento é interpretada em termos de pertinência ao grupo escolhido". Além disso, os parâmetros se intercambiam porque selecionar de forma não ordenada r objetos de n dados é equivalente a colocar r objetos iguais em n caixas distintas.

Com suas pesquisas, Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996, p. 30) concluem que essa bijeção entre os modelos de distribuição e partição não é evidente aos alunos. Além disso, "não é possível supor que os três tipos de problemas descritos (seleção, distribuição e partição) sejam equivalentes em dificuldade, visto que ainda podem corresponder à mesma operação combinatória".

Vale então ressaltar que o modelo combinatório implícito deve ser considerado como uma das variáveis no desenvolvimento do raciocínio combinatório, principalmente por apresentar um diversificado número de atividades de contagem. A partir dessa variabilidade pode-se presumir que existam diversas estratégias que possam ser empregadas para solucionar tais problemas.

Algumas técnicas e estratégias de resolução de problemas combinatórios serão exploradas na próxima seção. São abordadas as mais usuais, segundo Guzmán, Batanero e Godino (2003).

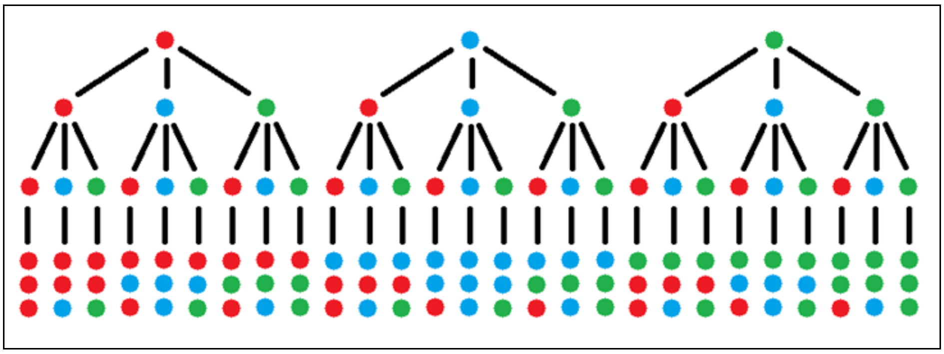
1.2. ESTRATÉGIAS EMPREGADAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE ENVOLVEM RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Conforme foi explicitado na seção anterior, os problemas de seleção, partição e distribuição possuem particularidades. Assim, os procedimentos de resolução dos problemas, cujo raciocínio combinatório é necessário, são diretamente influenciados pelas características pertinentes a cada modelo.

Uma das estratégias que pode ser adotada na resolução de tais problemas é o diagrama em árvore. Esse procedimento pode ser compreendido como um processo recursivo para a resolução de problemas combinatórios (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 65).

Consideremos a seguinte situação como exemplo: em uma urna há nove bolas, três vermelhas, três azuis e três verdes. Retirando-se três delas, uma de cada vez, pode-se formar vinte e sete agrupamentos em que alguns podem ser considerados iguais ou distintos a depender do contexto. Essa situação pode ser visualizada e compreendida por meio de um diagrama em árvore (Figura 04).

Figura 04 – Diagrama em árvore

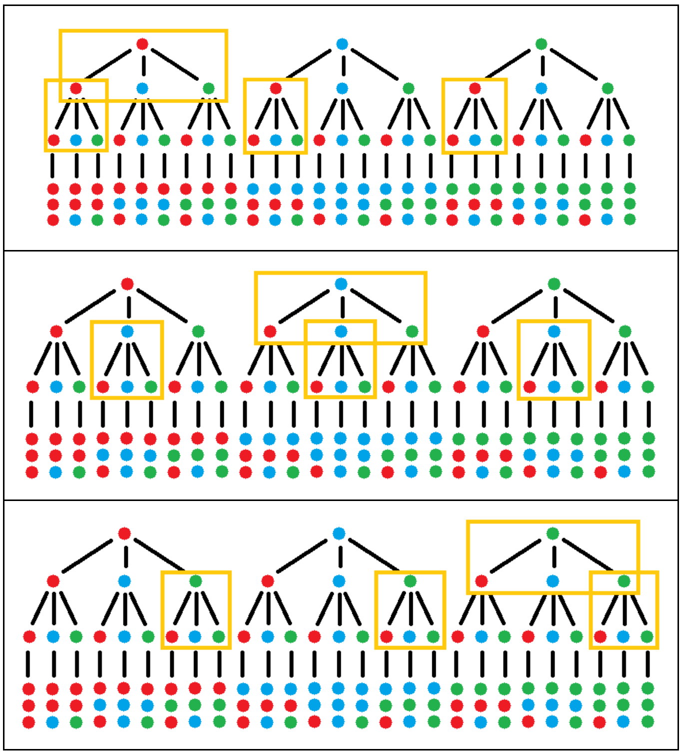


Fonte: Autor.

Um procedimento é recursivo quando "invoca um versão de si mesmo (em geral com algum câmbio estrutural) como um subprocedimento durante sua execução, ou quando a definição do procedimento contém uma versão de si mesmo como subprocedimento" (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 61). Ou seja, um objeto pode ser considerado como recursivo se alguma de suas partes puder ser considerada como cópia de si mesma.

Ao retomar a situação da urna com as nove bolas, podemos observar a formação de subprocedimentos na construção do diagrama em árvore. Estes aparecem repetidas vezes até que sejam formados todos os agrupamentos (Quadro 07).

Quadro 07 – Subprocedimentos presentes no diagrama em árvore



Fonte: Autor.

Assim, uma vez observada a recursividade presente nesse procedimento, o que se espera é a generalização do método e que, ao ser utilizado em atividade semelhante, a partir da construção do primeiro ramo do diagrama seja possível realizar a contagem dos agrupamentos por meio do princípio multiplicativo.

Nos problemas que tem um número finito e fixo de elementos, é possível identificar alguns aspectos como:

> [...] formação efetiva das configurações para valores pequenos. Descrição do processo construtivo de formação de todas as configurações. Demonstração lógica, mas menos formal, de que o processo seguido garante que não falta nenhuma das possíveis configurações. (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 61).

Cabe identificar em alguma dessas etapas a recursividade, já que a formação de uma configuração geralmente se efetua a partir de outra de menor tamanho. Os pesquisadores ainda complementam que como método de resolver um problema, a recursão “consiste em reduzir a solução do mesmo a obter uma versão mais simples do problema, refletir sobre o que foi feito e, finalmente expressar o processo de redução em forma de algoritmo ou expressão recorrente” (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.61).

Mas, ainda que essa seja uma boa estratégia, a recursividade não é a única que possa ser utilizada para resolver problemas combinatórios. No quadro 08 são apresentados alguns passos que auxiliam a resolução destes problemas e foi sintetizado a partir da obra de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p. 66).

Quadro 08 – Procedimentos para resolver problemas combinatórios

<table>
<tr><td colspan="3">É preciso identificar o modelo combinatório implícito no enunciado e as caraterísticas de cada um:</td></tr>
<tr><td>Seleção de amostra:</td><td>Distribuição de objetos em urnas:</td><td>Partição de conjuntos em subconjuntos:</td></tr>
<tr><td>- Se todos os objetos são diferentes, ou alguns são iguais;
- Se há repetição ou não de elementos;
- Se a ordem dos elementos intervém ou não.</td><td colspan="2">- Se os objetos são iguais ou distintos;
- Se as células (ou subconjuntos) são distinguíveis ou não;
- Se se deve considerar a ordem de distribuição dos objetos dentro das células ou subconjuntos;
- Se é permitido mais de um objeto por célula ou subconjunto;
- Se são permitidas células ou subconjuntos vazios.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Outras etapas podem ser necessárias:</td></tr>
<tr><td colspan="3">- Identificação dos valores pertinentes dos diferentes parâmetros: número de objetos, células, subconjuntos, o tamanho da população e amostra de acordo com os casos.
- Formação efetiva das configurações pedidas ou de contagem das mesmas. Em particular, neste passo estão implícitos os raciocínios recursivos e indutivos, geralmente associados com a estratégia de fixação de alguns valores para as variáveis intervenientes.</td></tr>
</table>

Fonte: (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996a, p. 66).

Como exemplo podemos tomar as permutações de quatro elementos, na qual é possível fixar o primeiro deles e enumerar todas as permutações de três elementos, aplicando a fórmula $P_4 = 4 \cdot P_3$; para as permutações de três elementos fixar um segundo elemento e enumerar as de dois e sucessivamente. Tais etapas descritas são aplicáveis a problemas combinatórios simples que englobam os modelos combinatórios implícitos.

Ainda podem ser observadas outras estratégias para a resolução de problemas combinatórios, tais como: tradução do problema a outro equivalente; fixação de variáveis; decomposição em subproblemas e estratégias aritméticas (regra da soma, produto e quociente). Cada uma desses procedimentos possuem “mecanismos” diferentes e enriquecem o raciocínio combinatório.

Para resolver um problema combinatório primeiro é necessário identificar a operação combinatória descrita no enunciado, que geralmente são amostras do tipo ordenada ou não ordenada, com ou sem repetição. Nos problemas de partição ou distribuição os estudantes devem “fazer uma tradução do problema e formulá-lo em termos de seleção” (GUZMÁN, BATANERO; GODINO, 2003, p. 11).

O aluno ainda pode comparar o problema com outro semelhante no qual conheça a resolução e, após, resolver o original através de analogia. Por exemplo, transformar o problema de distribuir três cartas iguais em quatro envelopes diferentes (modelo de distribuição) em outro semelhante que consiste em escolher três dos quatro envelopes para inserir as cartas neles (modelo de seleção).

A transformação de problemas de distribuição em outro semelhante de seleção é uma estratégia muito adotada pelos estudantes visto que eles aprenderam as definições das operações combinatórias com o modelo de seleção. Os pesquisadores ainda destacam que “a técnica de analisar o enunciado de um problema e formulá-lo em outros termos de modo que se conserve a estrutura deveria ser destacada no desenvolvimento do raciocínio combinatório e, em geral, na Matemática”. (GUZMÁN; BATANERO; GODINO, 2003, p. 12).

Uma das principais características dos problemas combinatórios é a necessidade de se *fixar uma ou mais variáveis* para a obtenção de um método coerente de enumeração. Segundo Guzmán, Batanero e Godino (2003, p. 12) “esse não é um método convencional e implica adicionar uma dificuldade a mais aos alunos, visto que eles estão acostumados a usar somente as hipóteses e dados expostos no enunciado do problema”.

Esse método consiste na conversão do problema inicial em outro do mesmo tipo, no qual os parâmetros iniciais são reduzidos a outros menores. A partir disso, resolve-se o problema mais simples, para após, resolver o inicial através da recursão.

Por exemplo, se um problema solicita que se combinem quatro pessoas em duplas, pode-se escolher primeiramente duas pessoas e, nesse caso, as outras duas ficam automaticamente determinadas, ou seja, escolhe-se duas das quatro pessoas (primeiro uma e depois a outra). Escolhendo-se uma das quatro (são quatro possibilidades), sobram três, seleciona-se uma dentre as três restantes (são três possibilidades); portanto, pelo princípio multiplicativo, são $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades.

Guzmán, Batanero e Godino, (2003, p. 13) salientam que os alunos inicialmente tentam resolver os problemas de forma direta e somente quando não o conseguem adotam a estratégia de fixar variáveis. Ainda assim, grande parte dos estudantes utiliza esta estratégia corretamente e por esse motivo ela deve ser estimulada na resolução desse tipo de problemas.

Outra estratégia consiste em dividir o problema dado em uma série de problemas menores, resolvê-los independentemente e combinar as soluções parciais para resolver o problema original. Essa forma de resolver problemas combinatórios é denominada *decomposição em subproblemas* e supõe:

> [...] a decomposição do problema em vários outros, de estrutura combinatória mais simples e parâmetros de menor tamanho, que cobre de maneira exaustiva todos os casos do problema inicial. Combinando adequadamente as soluções parciais, resolve o problema inicial. (GUZMÁN; BATANERO; GODINO, 2003, p. 13).

Como exemplo analisemos o problema extraído do mesmo artigo (Ibidem, p. 24): "dispomos de cinco cartas, cada uma delas tem gravada uma letra: A, B, C, C e C. De quantas maneiras distintas pode-se colocar na mesa as cinco cartas, uma do lado da outra, formando uma fila?".

Segundo os autores esse é um problema *composto* e pode ser resolvido considerando primeiro que as três cartas sejam CCC, e assim as possibilidades seriam CCCAB ou CCCBA. Então a maneira de *fixar* as três cartas com a letra C são combinações dos cinco lugares tomados 3 a 3, ou seja, $[(5!)/(3! \cdot 2!)] = 10$ possibilidades e como para cada uma delas há duas possibilidades de posicionar as cartas A e B então a solução é dada por $2 \cdot 10 = 20$ possibilidades.

Apesar da decomposição em subproblemas ser uma técnica interessante para resolver problemas compostos, de partição e distribuição, ela é pouco empregada pelos estudantes ao resolverem problemas combinatórios desse cunho. Quando os problemas têm parâmetros pequenos os alunos preferem resolvê-los diretamente mediante enumeração ou por tentativa e erro. (GUZMÁN; BATANERO; GODINO, 2003, p. 14).

Mesmo havendo essas estratégias para resolução de problemas combinatórios, pode ser que os estudantes não consigam identificar a operação combinatória definida no enunciado. Nesse caso é possível gerar um modelo combinatório mediante a enumeração e contagem e devem ser empregadas regras de caráter aritmético, tais como, a regra da *soma*, do *produto* e do *quociente*, que dependendo do tipo de problema podem ser utilizadas isoladamente ou combinadas entre si.

A regra da soma é adequada para os casos em que o sujeito, não se recordando das fórmulas, tenta gerar um modelo de contagem. Dessa forma, essa regra é utilizada quando "um conjunto de configurações combinatórias se determina como a união de um número de subconjuntos mutuamente exclusivos". (GUZMÁN; BATANERO; GODINO, 2003, p. 15).

Em Guzmán, Batanero e Godino (2003, p.22) é possível observar a seguinte situação que requer o uso dessa regra: um grupo de quatro amigos tem que realizar dois trabalhos diferentes, um de Matemática e outro de Línguas. Se vão realizar os trabalhos em duplas, de quantas formas é possível formar as duplas?

É possível resolver esse problema através da regra da soma, levando em conta que os amigos sejam A, B, C e D, consideram-se os casos em que: A faz o trabalho de Matemática, então há três possibilidades: AB, AC ou AD; A não faz o trabalho de Matemática, a dupla pode ser: AB, AC ou AD. Logo é possível formar 6 duplas para a execução das tarefas.

Apesar da regra da soma ser uma estratégia básica para a resolução de problemas combinatórios o uso incorreto da mesma prevalece sobre o correto. Guzmán, Batanero e Godino, (2003, p. 16) ressaltam que os estudantes frequentemente se equivocam ao fazer uso dessa regra.

A regra do produto é outro princípio combinatório de caráter aritmético, no qual são constituídos produtos cartesianos de conjunto de elementos. Seu uso está associado à resolução de problemas compostos e também na geração de um modelo de contagem, ao invés do uso de fórmulas.

Ilustramos a regra do produto através do problema encontrado em Guzmán, Batanero e Godino, (2003, p. 22): "uma criança tem doze cartas: nove delas são os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. As três restantes são as figuras: valete, cavalo e rei. De quantas maneiras pode-se alinhar quatro das doze cartas, com a condição de que sempre se tenha três figuras?".

Para resolver esse problema basta observar que as três figuras podem ser dispostas de $P_3 = 3!$ formas distintas e que para cada uma delas há quatro posições para cada uma das outras nove cartas. Logo, a solução do problema é dada por $3! \cdot 4 \cdot 9 = 216$ maneiras distintas.

Os pesquisadores ressaltam que grande parte dos estudantes apresenta dificuldade ao generalizar o número de configurações em um subconjunto de casos para obter os fatores na regra do produto. Além disso, eles não são capazes de relacionar a solução de um problema simples para resolver um problema composto. (GUZMÁN; BATANERO; GODINO, 2003, p. 18).

Para relacionar entre si combinações e arranjos ou permutações simples e permutações com repetições, é necessário o uso da regra do quociente. Segundo Guzmán, Batanero e Godino (2003, p. 18), "usar a regra do quociente implica estabelecer uma relação de equivalência dentro de um conjunto de configurações combinatórias".

Além de estabelecer a relação de equivalência dentro de um conjunto de configurações combinatórias é necessário identificar o número de elementos em cada classe de equivalência. Esse fato pode se percebido no exemplo: Em uma caixa há duas fichas azuis, uma branca e uma vermelha. As quatro fichas são retiradas da caixa ao acaso e sem reposição, anotando-se a cor a cada vez. De quantas maneiras diferentes é possível fazer a seleção das fichas? (GUZMÁN; BATANERO; GODINO, 2003, p. 21).

Para resolver esse problema é preciso observar que a ficha azul aparece duas vezes em cada agrupamento. Apesar disso, cada vez que são permutadas apenas as fichas azuis não há a formação de um agrupamento distinto. Assim, o problema pode ser resolvido utilizando a regra do quociente como segue: $P_4/2! = 12$ maneiras distintas.

Guzmán, Batanero e Godino, (2003, p. 19) concluem que o uso da regra do quociente está ligado a muitos processos de resolução de problemas combinatórios. Ainda assim, ela é pouquíssimo utilizada pelos estudantes. Não parece que essa seja uma regra intuitiva ou tenha contribuído em nada para a resolução de problemas combinatórios devido ao uso escasso da mesma.

De modo geral, segundo Guzmán, Batanero e Godino, (2003, p. 20), é possível observar que se manifestam inoperantes as regras da soma e quociente, ao contrário, a regra do produto se mostra uma ferramenta "popular" entre os estudantes na resolução de problemas combinatórios. Acreditamos que isso ocorra porque os problemas do tipo produto cartesiano, normalmente, são os primeiros a ser explorados no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

O emprego de estratégias para resolver atividades de contagem está atrelado a fatores como o modelo ao qual pertence o problema, a operação combinatória associada ao mesmo e ao tamanho dos parâmetros m e n. Cremos que adoção desses métodos favorece o desenvolvimento do raciocínio combinatório e reduz incompreensões causadas pelo uso exclusivo de fórmulas.

Assim, nas análises realizadas neste trabalho serão averiguadas as estratégias adotadas na resolução de problemas combinatórios. Buscaremos entender como essas estratégias são empregadas de acordo com a variabilidade das tarefas (seleção, partição e distribuição), bem como das operações combinatórias básicas (permutação, arranjo e combinação).

1.3. REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval desenvolveu no Instituto de pesquisa em Educação Matemática de Estrasburgo, na França, importantes estudos relativos à psicologia cognitiva. A obra *Sémiosis et pensée humaine* (1995) é uma marco na teoria dos registros de representações semióticas, e tem sido importante para as pesquisas que relacionam a aprendizagem de matemática.

Para Duval (2003, p.11), um dos principais objetivos da aprendizagem da matemática é contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização dos alunos. Pode parecer simples alcançar esse objetivo, mas deve-se levar em consideração que os objetos matemáticos se tratam essencialmente de conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, entre outros. Por isso os objetos de outras áreas do conhecimento são diferentes dos da Matemática.

Para acessar os entes matemáticos é necessário que os mesmos sejam evidenciados por meio de gráficos, figuras, tabelas, expressões, fórmulas, etc.. Essas formas de expressar os objetos são denominadas representações matemáticas.

Há uma grande variedade de representações que são utilizadas em matemática, dentre as quais se podem citar: os diferentes sistemas de numeração, as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural. Duval (2003) aponta restrições de se utilizar um único registro semiótico para representar um mesmo objeto matemático uma vez que "a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro". (DUVAL, 2003, p. 21).

Dessa forma ele defende que não se deve jamais confundir um objeto e sua representação, uma vez que operando em mais de um sistema de representação, é implícito e primordial o entendimento de que nenhum dos registros de representação "é" o objeto matemático, mas que apenas o "representa".

Por exemplo, pode-se pensar no registro em língua natural das "combinações de 3 elementos tomados 2 a 2", no registro simbólico $C_{3,2}$ ou $\binom{3}{2}$, no registro tabular (figura 05), entre outros registros. Essas são algumas "formas" de representar esse objeto matemático, o qual só é possível o seu acesso por meio dessas representações.

Figura 05 – Representação tabular das combinações de três elementos tomados 2 a 2

	A	**B**	**C**
A	-	AB	AC
B	-	-	BC
C	-	-	-

Fonte: Autor.

Segundo Duval (2011) existe uma linha cognitiva que divide as representações em semióticas e não semióticas. As semióticas apresentam a característica de serem transformadas em outras representações semióticas, ou seja, são produzidas intencionalmente pela mobilização de um sistema semiótico que quando transformado em outro pode apresentar modificações em relação ao conteúdo e a forma.

Já, as representações não semióticas, não apresentam essa possibilidade de transformação sem que se perca o sentido que elas carregam, como são os signos, que segundo Duval (2011, p. 37), não contém nenhuma interação com o objeto; mas sim, apenas uma relação de referência dependendo do sistema semiótico utilizado.

Muitas são as representações semióticas presentes na matemática, as quais serão tratadas por "registros" de representação, elas podem ser interpretadas como um sistema de signos e símbolos que representam de alguma forma algum objeto e, conforme dito anteriormente, pode ser transformado em outro sistema semiótico.

Segundo Duval (2003, p. 14), "a originalidade da matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação" e completa: "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas". Isso significa que a aprendizagem matemática pode estar vinculada a capacidade que um indivíduo tem de representar um mesmo objeto utilizando, no mínimo, dois sistemas distintos de signos e símbolos dos quais se possam inferir propriedades e características inerentes a este objeto.

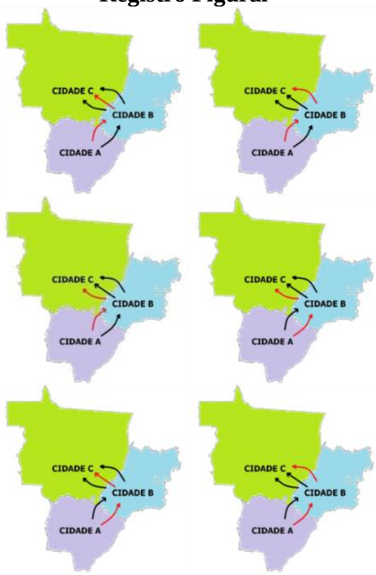
Portanto, Duval (2009) atribui a compreensão conceitual dos objetos matemáticos às representações semióticas, visto que são elas que evidenciam as características que diferenciam esses objetos dos demais, pois segundo ele "não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e exercício da *noésis*" (DUVAL, 2009, p. 17). Assim, enquanto a *noésis* representa os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, é a *semiósis* que garante apreensão e a produção de uma representação semiótica.

Dito de outro modo, a formação de representações num registro semiótico particular e a transformação de uma representação em outras que conservam todo o conteúdo da representação de partida, ou uma parte dele, são atividades inerentes à *semiósis*. Porém, segundo Duval (2009), a apreensão conceitual (*noésis*) depende de tais atividades cognitivas, no que se forma, assim, um elo de dependência entre *noésis* e *semiósis*.

Para designar os diferentes tipos de representações semióticas empregados em matemática Duval (2003, p. 14) adotou o termo registro e os classificou em quatro tipos: os registros multifuncionais discursivos e não discursivos e os registros monofuncionais também divididos em representações discursivas e não discursivas (Quadro 09).

Quadro 09 – Classificação dos Registros de Representação Semiótica a partir do objeto matemático desta pesquisa.

(continua)

	Representação Discursiva	**Representação Não Discursiva**
REGISTROS MULTIFUN-CIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	**Registro em Língua Natural** Entre as cidades A e B há 2 (duas) estradas, e entre as cidades B e C há 3(três) estradas. Não há estrada ligando diretamente A e C. De quantas maneiras distintas é possível partir da cidade A e chegar à cidade C?	**Registro Figural**[6] 

[6] Neste caso, o registro figural não possui propriedades geométricas, e, portanto, não pode ser caracterizado por meio dos pressupostos que Duval (2012a e 2012b) utiliza para analisar a aprendizagem em Geometria.

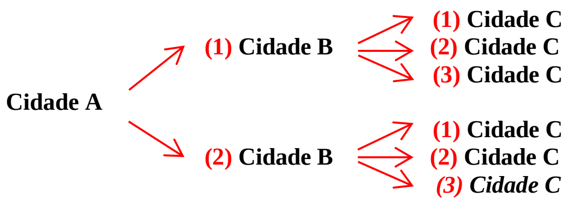
(conclusão)

REGISTROS MONO-FUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.

Registro Tabular

Cidades A e B / Cidades B e C	Estr. 1	Estr. 2	Estr. 3
Estrada 1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
Estrada 2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)

Registro na forma de Árvore de Possibilidades



Registro Simbólico

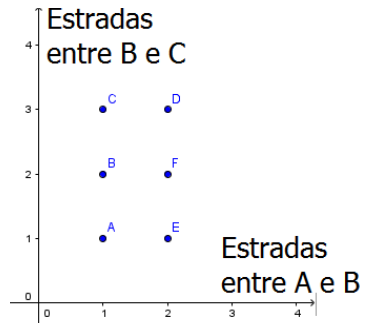
Resolução pelo Princípio Fundamental da Contagem

$\underline{2} \times \underline{3} = 6$

Resolução por Combinação

$C_{2,1} \times C_{3,1} = 6$

Registro Gráfico



Fonte: Adaptado pelo autor (DUVAL, 2003, p. 14).

Portanto, quando se quer analisar as atividades matemáticas sob a perspectiva da aprendizagem, é importante considerar todos os tipos de representações. É essencial analisar a mobilização dos diversos tipos de registros, e não de um só. Esta classificação proposta por Duval atende as transformações dos registros de representação de muitos objetos matemáticos.

A noção de RRS permite salientar a importância da mudança de registros e a necessidade de uma coordenação entre eles. Existem dois tipos de transformações de representações semióticas: os tratamentos e as conversões. (DUVAL, 2003, p. 15).

Segundo Duval (2009, p.39), o tratamento é a transformação de uma representação em outra representação de um mesmo registro, por isso é considerado como uma "modificação estritamente interna a um determinado registro". Os tratamentos são ligados mais à forma do que ao conteúdo, no sentido de que um mesmo objeto matemático pode ter mais de uma representação diferente. Neste caso, apresenta tratamentos também diferenciados com graus de dificuldade diversos.

No registro simbólico, por exemplo, é possível observar a transformação interna quando o problema é resolvido através da combinação: $C_{2,1} \cdot C_{3,1} = 6$. O tratamento, nesse caso, se efetua por meio da operação de multiplicação.

Figura 06 – Operações de tratamento no registro simbólico

$$C_{2,1} \cdot C_{3,1} = \frac{2!}{1!\,(2-1)!} \cdot \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{3!}{1!\,2!} = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Fonte: Autor

Enquanto isso, as conversões são transformações que ocorrem entre registros diferentes. A representação de um objeto em um registro específico é convertida em uma representação de outro registro, que conserva a referência, mas não conserva a explicitação das mesmas propriedades deste objeto. Assim, o sentido da representação do objeto em um registro de partida não será o mesmo do registro de chegada.

Tomamos como exemplo de conversão a transformação do registro em língua natural para o registro simbólico (Figura 07). Entendemos esta transformação de registros como uma conversão, pois não está explícito no enunciado que o problema se trata de uma combinação. Há a necessidade da identificação de características que permitam a "interpretação" da atividade como uma multiplicação de duas combinações, ou seja, a transformação do enunciado para as expressões que permitam o cálculo das combinações.

Figura 07 – Operação de conversão do registro em língua natural para o registro simbólico

Registro em Língua Natural

Entre as cidades A e B há 2 (duas) estradas, e entre as cidades B e C há 3(três) estradas. Não há estrada ligando diretamente A e C. De quantas maneiras distintas é possível partir da cidade A e chegar à cidade C?

Resolução por Combinação

$C_{2,1} \times C_{3,1} = 6$

Fonte: Autor.

Ainda é preciso destacar que a conversão é uma operação diferente e independente da operação de tratamento. Isso acontece porque, segundo Duval (2003), a conversão intervém na escolha do registro no qual os tratamentos realizados possam ser mais econômicos ou mais potentes, ou seja, cognitivamente mais complexos. Também, no sentido de obter um segundo registro que servirá de suporte ou orientação aos tratamentos que se efetuam em outro registro, não servindo, desta forma, aos processos matemáticos de justificação ou de prova.

Talvez, por isso, a conversão, como operação cognitiva ligada à *semiósis*, não seja privilegiada no ensino, visto que não chama tanto a atenção, "[...] como se se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à verdadeira atividade matemática". (DUVAL, 2003, p. 16).

2. CAMINHOS METODOLÓGICOS

2.1. FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Adotaremos neste trabalho a pesquisa qualitativa na perspectiva de Garnica (2004, p.86). Segundo o autor suas principais características são:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Tais características não devem ser vistas como regras, pois o próprio entendimento do que é pesquisa qualitativa possibilita abordagens diferentes nesse método. É necessário admitir a interferência subjetiva nos procedimentos descritivos, pois o conhecimento como compreensão é "negociável" e não é tido como verdade rígida. Dito em outras palavras, nessa concepção, "o que é considerado como verdadeiro é dinâmico e passível de ser modificado" (BORBA, 2004, p.2).

Olhar para a pesquisa qualitativa desta forma não significa lhe atribuir falta de rigor, pois tais estudos devem apresentar relevância científica e social. Além disso, devem ter

> um objeto bem definido, que os objetivos ou questões sejam claramente formulados, que a metodologia seja adequada aos objetivos e os procedimentos metodológicos suficientemente descritos e justificados. A análise deve ser densa, fundamentada trazendo evidências ou as provas das afirmações e conclusões. Consideramos que deve ficar evidente o avanço do conhecimento, ou seja, o que cada estudo acrescentou ao já conhecido ou sabido. (ANDRÉ, 2001, p. 59).

Considerando a caracterização descrita entendemos que os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os dados em valores numéricos. O objetivo da amostra é de produzir informações aprofundadas que devem produzir novas informações.

Além disso, utilizaremos dados quantitativos como suporte às análises qualitativas dos resultados da nossa pesquisa. Isso porque segundo Ribeiro, Echeveste e Danilevicz (2001) a etapa quantitativa permite que sejam realizadas análises numéricas dos dados levantados na etapa qualitativa.

Nesse contexto, escolhemos a meta-análise qualitativa como metodologia por se tratar de uma "revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica das mesmas e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos" (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 103).

Os propósitos desse método são: reunir resultados ou sínteses interpretativas de diferentes pesquisas com o intuito de alcançar um nível teórico mais elevado em relação ao que seria obtido com apenas um estudo; preencher os conceitos abstratos de um estudo com significados explicitados em sínteses de resultados de outros; e, atentar para o desenvolvimento teórico dos resultados analisados de um tema que é descritivo e compreensivo, logo, mais completo do que qualquer estudo sozinho (BICUDO, 2014, p. 11).

Portanto, a meta-análise tem características e propósitos bem definidos e, como método seus procedimentos podem se constituir em etapas: "formulação da pergunta, localização e seleção de estudos, avaliação crítica dos estudos, coletas dos dados, análise e apresentação dos dados, interpretação dos dados e aprimoramento e atualização da meta-análise" (IBIDEM, p. 11).

Entendemos que tais etapas não são "regras" e tampouco necessitam ser desenvolvidas na ordem supracitada. Além disso, a meta-análise procura identificar, através de determinadas categorias semelhanças e controvérsias numa quantidade de estudos da mesma área de pesquisa.

Como o objetivo do nosso trabalho é "investigar se e como são empregados os RRS nas investigações *stricto sensu* produzidas por instituições brasileiras que abordam o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de atividades didáticas que tiveram a participação de alunos do ensino médio" dividimos nossa pesquisa em etapas, nas quais os procedimentos adotados são: mapeamento de dissertações e teses que abordam raciocínio combinatório; definição dos critérios de seleção dos trabalhos que constituirão o *corpus* documental da meta-análise; comparação dos objetivos dos estudos selecionados; definição das categorias de análise, as quais denominamos de "descritores"; por fim, pautados nos descritores apresentaremos a análise dos dados obtidos a partir dos trabalhos selecionados.

O primeiro passo do nosso estudo tem por objetivo realizar um mapeamento de teses e dissertações brasileiras que abordam o raciocínio combinatório. Por meio das palavras-chave "análise combinatória", "combinatória" e "permutações" buscamos identificar, nos *sites* dos programas de pós-graduação de universidades brasileiras (grande área Multidisciplinar, área de Ensino de Ciências e Matemática) e no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), os trabalhos que investigam sobre o raciocínio combinatório.

O foco do mapeamento é a grande área Multidisciplinar, da qual faz parte a área de Ensino de Ciências e Matemática, porém, por meio do *site* da CAPES também foram identificados trabalhos em outras áreas. As demais áreas por não serem prioritárias foram consultadas apenas nas instituições e programas que possuíam tais trabalhos no rol de informações da CAPES.

O Quadro 10 resume as informações por região, Instituição de Ensino Superior (IES), programa, nível de cada pesquisa (Mestrado Acadêmico – A, Mestrado Profissional – F; Doutorado – D) e o número total (T) de pesquisas. No apêndice B, encontra-se o quadro elaborado a partir dos programas de pós-graduação da área de Ensino de Matemática cadastrados no *site* da CAPES.

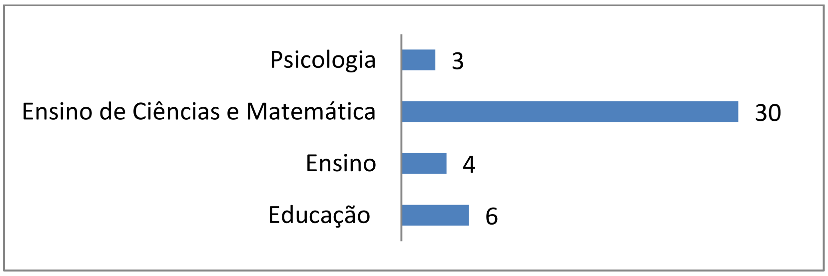
Quadro 10 – Resumo do mapeamento de teses e dissertações que abordam raciocínio combinatório

Região	**IES**	**Programa**	**A**	**F**	**D**	**T**
Nordeste	UFPB	Educação*	01	00	00	01
	UFPE	Educação Matemática e Tecnológica	09	00	00	14
		Educação*	01	00	01	
		Psicologia**	02	00	01	
	UFRPE	Ensino das Ciências	01	00	00	01
Norte	UEA	Educação*	01	00	00	01
	UFPA	Docência em Educação em Ciências e Matemáticas	01	00	00	01
Sudeste	PUC/SP	Educação Matemática	05	02	01	08
	UNIBAN	Educação Matemática	00	00	01	01
	UNICSUL	Ensino de Ciências e Matemática	03	00	00	03
	UNESP/RC	Educação Matemática	01	00	00	01
	UNICAMP	Educação*	01	00	00	01
	UFOP	Ensino de Ciências	00	00	00	01
		Educação Matemática***	00	01	00	
	UFSCAR	Ensino de Ciências Exatas***	03	00	00	03
	UFRJ	Ensino de Matemática	01	00	00	01
Sul	UNIVATES	Ensino de Ciências Exatas	00	01	00	01
	UFRGS	Ensino de Matemática	00	02	00	03
		Educação*	01	00	00	
	ULBRA	Ensino de Ciências e Matemática	02	00	00	02

Fonte: Autor.

Para esse mapeamento foram consultados 88 programas de pós-graduação que estão distribuídos nas seguintes áreas básicas (conforme CAPES): Ensino de Ciências e Matemática; Ensino***; Educação* e Psicologia**(Gráfico 04). Os três trabalhos da área de Psicologia são da UFPE e visavam verificar o desempenho de alunos de ensino fundamental diante de um conjunto de atividades matemáticas que requeriam o raciocínio combinatório para serem respondidas. A área de Ensino compreende os programas de Educação Matemática da UFOP e Ensino de Ciências Exatas da UFSCAR, sendo que tais estudos objetivavam identificar contribuições de uma proposta de ensino pautada em aulas expositivas e/ou análises das resoluções de atividades de contagem.

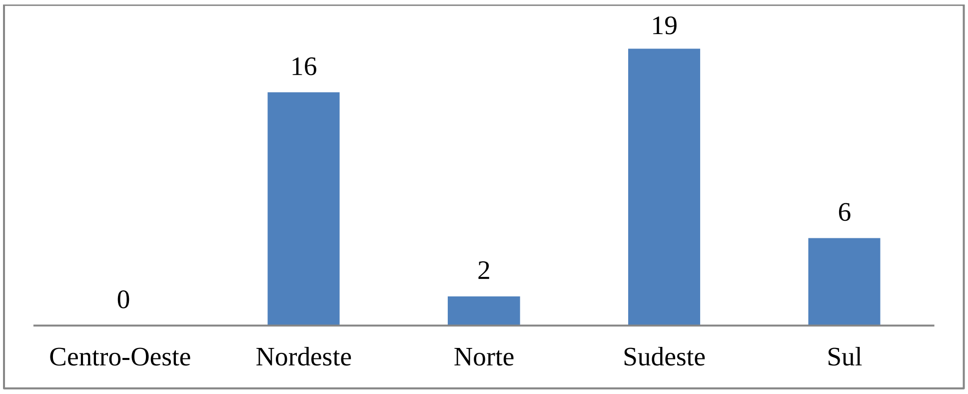
Gráfico 04 – Distribuição dos trabalhos por área básica de pesquisa



Fonte: Autor.

Ficamos surpresos ao identificar pesquisas sobre o raciocínio combinatório na área de Psicologia. Esses trabalhos são provenientes da região nordeste, que, como pode ser observado por meio do Gráfico 05, apresenta um número semelhante de estudos em relação à região sudeste. Em contrapartida, notamos que as regiões centro-oeste, norte e sul detêm apenas 18,6% das pesquisas referentes ao raciocínio combinatório.

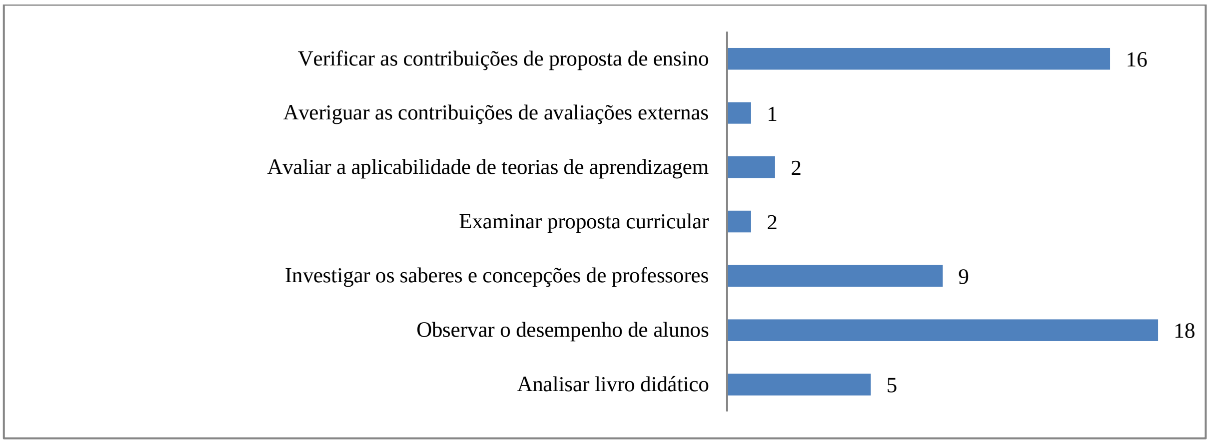
Gráfico 05 – Distribuição das pesquisas por região do Brasil



Fonte: Autor.

Para uma melhor compreensão de como a pesquisa sobre o raciocínio combinatório tem se desenvolvida buscamos identificar nas dissertações e teses alguns elementos essenciais de cada estudo. Inicialmente procuramos observar o foco de cada investigação, ou seja, o quê de fato cada uma delas se propõe a averiguar. Cabe salientar que algumas pesquisas possuem mais de um foco, de tal modo que os números apresentados no Gráfico 06 superam o total de trabalhos (43 pesquisas).

Gráfico 06 – Foco das pesquisas sobre raciocínio combinatório



Fonte: Autor.

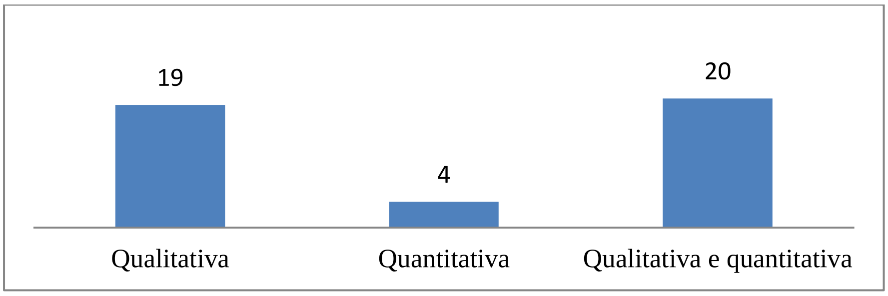
Por meio da análise dos trabalhos foi possível concluir que a pesquisa sobre raciocínio combinatório busca, principalmente, verificar as contribuições de propostas de ensino. Estas normalmente estão associadas à observação do desempenho dos alunos frente à resolução de atividades que envolvem contagem.

Ainda merece destaque a investigação dos saberes e concepções de professores sobre o raciocínio combinatório, que normalmente são verificados por meio de entrevistas e questionários. Os trabalhos assim constituídos estão embasados nos conhecimentos do professor (SHULMAN, 1986), saberes docentes (TARDIF, 2008), teoria antropológica da didática (CHEVALLARD, 1991) e teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1993).

Por fim, outro grupo de pesquisas centra-se na análise de livros didáticos que ocorre, normalmente, mediante um estudo sobre as atividades propostas nos mesmos, bem como estudos sobre como estão estruturados os conhecimentos referentes ao raciocínio combinatório (ordem dos conteúdos, exemplos e tipos de atividades). Além disso, apresentam um percurso histórico do livro didático no Brasil.

Outro elemento importante a ser considerado é a metodologia/tipo de pesquisa adotada em cada trabalho. No método qualitativo e quantitativo foram considerados os estudos que apresentam análises numéricas e análise qualitativa simultaneamente. No Gráfico 07 é possível observar os principais tipos de pesquisas adotados nas dissertações e teses.

Gráfico 07 – Tipo de pesquisa dos trabalhos



Fonte: Autor.

A metodologia de pesquisa abordada em cada tipo de estudo (qualitativo; quantitativo ou qualitativo e quantitativo) apresenta nuances e características ora distintas, ora comuns. A identificação da metodologia não constitui tarefa fácil e requereu releituras. O critério adotado em algumas pesquisas é o de identificar a metodologia em passos ou etapas e nesse caso consideramos não haver uma classificação em relação à metodologia de pesquisa (Quadro 11).

Quadro 11 – Tipos de pesquisas versus metodologias

	Pesquisa quantitativa	Pesquisa qualitativa	Pesquisa qualitativa e quantitativa
Estudo Bibliográfico	00	02	01
Pesquisa Exploratória	00	00	02
Design Experiments	00	00	01
Estudo de Caso	00	01	04
Engenharia Didática	00	03	01
Método Clínico	00	01	00
Análise de Conteúdo	00	01	00
Não define Metodologia	04	11	11

Fonte: Autor.

Como pode ser observado há um número grande de pesquisadores que preferem descrever sua metodologia em etapas ou passos, sem defini-la. Não significa mau logro na classificação metodológica, parece ser esse um recurso para evitar confusões acerca de discussões das características de cada método pelo meio acadêmico.

Outro aspecto marcante em cada pesquisa é o referencial teórico abordado no texto. Nem sempre a análise dos dados das pesquisas inclui totalmente a teoria explorada. A depender da metodologia, o referencial teórico assume apenas um teor de base para a elaboração de atividades didáticas. Apesar disso, como pode ser visto no Quadro 12, uma grande parte das pesquisas explora o referencial teórico em suas análises.

Quadro 12 – Referencial bibliográfico abordado versus bibliografia presente na análise dos dados

	Referencial bibliográfico	Análise dos dados
Anghileri, Spinillo (suportes de representação)	1	1
Ausubel (mapas conceituais/aprendizagem sigificativa)	3	3
Ball , Shulman, Thames e Phelps (conhecimentos docentes)	5	5
Bloom (taxonomia de Bloom)	1	1
Borba , Navarro-pelayo; Batanero e Godino (raciocínio combinatório)	6	4
Brousseau (contrato didático)	1	0
Brousseau (teoria das situações didáticas)	1	1
Brousseau, Chevallard (transposição didática)	2	1
Chevallard (teoria antropológica do didático)	2	2
Dante, Onuchic, Polya, Van de Valle (resolução de problemas)	7	6
Duval (registros de representação semiótica)	3	3
Fernandes, Fonseca (processo de aprendizagem na EJA)	1	1
Fini, Kramer (proposta curricular)	1	0
Gal e Garfield (educação estatística)	1	1
Gal e Garfield (resolução de problemas de combinatória e probabilidade)	1	1
Garnica e Souza, Reis (formação de professores)	1	0
Gimeno-Sacristán, Goodson (currículo)	1	0
Haydt, Rodrigues, Sacristán, Saul (avaliação educacional)	1	0
Johnson-Laird (teoria dos modelos mentais)	1	1
Martinho, Menezes (comunicação matemática)	1	1
Moura (atividades orientadoras de ensino)	1	1
Nacarato, Ponte (desenvolvimeno profissional do professor)	1	1
Navarro-Pelayo (variáveis de tarefas)	1	1
Novak e Gouin (mapas conceituais)	1	1
Piaget (teoria do desenvolvimento cognitivo)	4	2
Piaget, Vergnaud (registros de representação)	1	1
Romberg (sequência de atividades)	1	1
Shamos, Soares (letramento científico)	1	1
Simon (trajetória hipotética de aprendizagem)	1	1
Tardif (saberes docentes)	2	2
Vergnaud (teoria dos campos conceituais)	17	15

Fonte: autor

Relativo ao referencial teórico nossa pesquisa está estruturada de forma a contemplá-lo na análise dos dados, visto que as categorias de análise (descritores) foram elaboradas com base nos elementos teóricos (modelo combinatório implícito, estratégias de resolução de atividades que requerem raciocínio combinatório e RRS). Assim, acreditamos que o nosso trabalho apresenta potencial para gerar uma síntese interpretativa por meio dos dados primários e das análises presentes em outras pesquisas (objetivo da meta-análise), uma vez que pretendemos explorar as atividades nelas desenvolvidas, porém, pelo viés de nossos próprios elementos teóricos.

Também procuramos identificar o nível de abrangência de cada pesquisa e, assim como no mapeamento dos estudos sobre RRS ficou explícito a tendência destes se voltarem ao ensino médio, o mesmo pode ser observado em relação ao raciocínio combinatório. Esse fato torna a reforçar a importância de nos voltarmos para os estudos realizados com a participação de alunos do ensino médio. Os resultados apresentados no Quadro 13 não são compatíveis com o número de trabalhos (43) porque algumas pesquisas abrangem mais de um nível de ensino.

Quadro 13 – Nível de abrangência das pesquisas sobre raciocínio combinatório

<table>
<tr><td rowspan="2">Ensino Fundamental</td><td>Anos Iniciais</td><td>06</td></tr>
<tr><td>Anos Finais</td><td>07</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ensino Médio</td><td>20</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ensino Superior</td><td>02</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formação de Professores</td><td>09</td></tr>
</table>

Fonte: autor

Diante a quantidade de investigações em cada nível de ensino selecionamos os trabalhos que abordavam o raciocínio combinatório no ensino médio, tanto do ensino em idade regular quanto na modalidade de educação de jovens e adultos. Essa escolha se deu por dois motivos, primeiro porque atuo como professor de Matemática no ensino médio, segundo porque acreditamos que o desenvolvimento do raciocínio combinatório promove habilidades e competências relacionadas à resolução de problemas que são mais acuradas em estudantes do ensino médio.

Além disso, priorizamos as pesquisas que exploraram em seu referencial teórico a resolução de problemas (RP), pois acreditamos que ao resolver uma situação problema o estudante necessita se amparar em uma diversidade maior de registros de representação. Nesse momento não nos restringimos a um único entendimento de RP, visto que os autores das pesquisas também não o fazem e utilizam mais de um referencial: Dante (2002), Onuchic (2004), Polya (1962) e Van de Walle (2001).

Nesse contexto selecionamos quatro (04) pesquisas (quadro 14) que continham atividades envolvendo raciocínio combinatório. Vale ressaltar que os quatro trabalhos elencados atendem a outro critério, o fato do autor explicitar e analisar as atividades propostas no âmbito do raciocínio combinatório expondo no seu *corpus* documental soluções das atividades de alguns alunos.

Quadro 14 – Pesquisas selecionadas

	Nível	**Título**	**Instituição/Ano**	**Orientador**	**Autor**
1	Mestrado Acadêmico	Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas	UNESP/SP Rio Claro 2010	Lourdes de La Rosa Onuchic	Analucia Castro Pimenta de Souza
2	Mestrado Acadêmico	O Ensino de Análise Combinatória a partir de Situações-Problema	UEPA/PA 2008	Pedro Franco de Sá	Carlos Alberto de Miranda Pinheiro
3	Mestrado Profissional	Análise combinatória na educação de jovens e adultos: uma proposta de ensino a partir da resolução de problemas	UFRGS/RS 2012	Elisabete Zardo Búrigo	Jussara Aparecida da Fonseca
4	Mestrado Profissional	Uma investigação no ensino médio sobre o raciocínio combinatório e a divergência de resultados na resolução de problemas de contagem	UNIVATES/RS 2014	Claus Haetinger	Roberto Stenio Areias Carneiro de Albuquerque

Fonte: autor

As dissertações selecionadas apresentam metodologia e fundamentação teórica distintas. Os estudos de Souza (2010), Pinheiro (2008) e Albuquerque (2014) apresentam atividades didáticas que contaram com a colaboração de alunos do segundo ano do ensino médio. Enquanto isso, Fonseca (2012) realizou atividades junto a alunos da modalidade da educação de jovens e adultos (EJA).

Souza (2010) criou uma proposta de trabalho para abordar o raciocínio combinatório em sala de aula, utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas (Onuchic). Para realizar seu estudo utilizou uma sequência de atividades (Romberg) que estão divididas em três blocos: o primeiro bloco trata da identificação do problema (atividades 1, 2, 3 e 4); o segundo bloco apresenta uma proposta de resolução desse problema, no qual estratégias e procedimentos de trabalho são levantados e selecionados (atividades 5 e 6); e o terceiro e último bloco que, após o procedimento geral ser posto em ação, trata da análise das informações obtidas, buscando tudo o que ficou evidente diante da questão ou conjectura levantada (atividades 7, 8, 9 e 10). Por meio da análise da resolução dos problemas que exigiam raciocínio combinatório, verificou que houve envolvimento ativo dos participantes na construção de novos conceitos e conteúdos.

De outro modo, Pinheiro (2008) visava investigar a viabilidade da sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos do raciocínio combinatório, por meio de situações didáticas, utilizando a resolução de problemas como ponto de partida. Para tanto buscou apoio na Engenharia Didática proposta por Artigue (1988). O estudo está fundamentado sobre três eixos teóricos que são: resolução de problemas, teoria das situações didáticas e uso de jogos no ensino da Matemática. Por meio da análise dos dados o pesquisador concluiu que os objetivos de cada aula da sequência de ensino foram alcançados com a maioria dos alunos que participaram da pesquisa e que a resolução de problemas como ponto de partida viabiliza condições favoráveis para introduzir os conceitos básicos do raciocínio combinatório.

De maneira distinta, Fonseca (2012) buscou analisar se uma experiência de aprendizagem, tendo como ponto de partida a resolução de problemas, pode propiciar a aprendizagem da Análise Combinatória pelos alunos do PROEJA. Amparada no estudo de caso segundo Ponte (2006) fundamentou seu trabalho em três eixos teóricos: a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget, a teoria dos campos conceituais de Vergnaud e resolução de problemas. Constatou que sua pesquisa tem potencial para contribuir para o ensino e aprendizagem do raciocínio combinatório na EJA; as formulações (enunciados) de alguns problemas não ficaram claros ao entendimento dos alunos, mesmo fazendo referência a situações da vida real; observou que a metodologia baseada na resolução de problemas, sem abordagem prévia do conteúdo, proporcionou aos alunos a mobilização e reformulação de diferentes esquemas e teoremas-em-ação e propiciou o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Por fim, Albuquerque (2014) procurou investigar os principais fatores que podem influenciar o raciocínio combinatório. Para desenvolver seu estudo se ancorou nas ideias e argumentos para estudo de caso expostos por Stenhouse (1975), Sampiere, Collado e Lucio (2006). Fundamentou teoricamente sua pesquisa em três eixos: raciocínio e a resolução de problemas, teoria de modelos mentais de Johnson-Laird e resolução de problemas no ensino de Ciências e Matemática. A partir dos dados obtidos na pesquisa, deduziu-se uma notável resistência e dificuldades dos estudantes em construir adequadamente novos conhecimentos e raciocínios combinatórios formais, e também que um dos principais fatores responsáveis (em potencial) pela divergência de resultados em problemas de contagem (em relação a dado valor conceitual) é a construção de modelos mentais inadequados (obtidos por meio de conhecimentos prévios e de concepções alternativas).

A partir dessa breve apreciação passamos a realizar o fichamento das publicações selecionadas (Apêndice E), para tal buscamos destacar informações das dissertações como o título, autor, ano de defesa do trabalho, número de páginas, professor orientador, instituto de ensino superior no qual o estudo foi desenvolvido, programa de pós-graduação, palavras-chave, resumo, objetivo, fundamentação teórica, metodologia de pesquisa, capítulo no qual as atividades didáticas são analisadas, sujeitos da pesquisa e conclusões do autor.

Para compreender a natureza dos trabalhos e evidenciar similaridades entre eles realizamos a comparação dos objetivos de cada pesquisa. Para facilitar essa comparação algumas expressões estão "negritadas" (Quadro 15).

Quadro 15 – Objetivo das pesquisas selecionadas

Autor/Ano	**Objetivo**
Souza (2010, p. 13)	Criar uma **proposta de trabalho** para abordar Análise Combinatória em sala de aula, utilizando a **Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática** através da **Resolução de Problemas**.
Pinheiro (2008, p. 16)	Investigar a **viabilidade da sequência de ensino** para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória, por meio de **Situações Didáticas**, utilizando a **resolução de problemas como ponto de partida**.
Fonseca (2012, p. 18)	Analisar se uma **experiência de aprendizagem**, tendo como ponto de partida a **resolução de problemas**, pode **propiciar a aprendizagem da Análise Combinatória** pelos alunos do PROEJA.
Albuquerque (2014, p. 23)	Investigar – à luz da **Teoria dos Modelos Mentais** de Johnson-Laird (1983) – os principais **fatores que podem influenciar o raciocínio combinatório** e que, em razão disso, podem levar o pensamento dos estudantes de nível médio a resultados divergentes dos conceitualmente esperados na **resolução de problemas de contagem**.

Fonte: autor

Apesar de não ser o foco inicial da nossa categorização, pois ela privilegiou aquelas pesquisas que traziam atividades relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, conseguimos perceber que os quatro trabalhos selecionados têm uma vertente de EM muito forte. Isso por empregarem metodologias de ensino e, também, por verificar possíveis contribuições das teorias de aprendizagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Souza (2010) empregou a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas de Onuchic e afirma que esta metodologia propiciou um envolvimento dos participantes na construção de conhecimentos. Já, a metodologia adotada por Pinheiro (2008), fundamentou-se nos princípios da engenharia didática de Artigue (1996) e conclui que a sequência didática proporciona condições favoráveis à aprendizagem uma vez que os estudantes passam da ação à formalização dos conceitos matemáticos.

Por fim, Fonseca (2012) buscou aporte na teoria cognitiva de Piaget dando atenção ao desenvolvimento do pensamento formal e na teoria dos campos conceituais de Vergnaud destacando o campo das estruturas multiplicativas. Aponta o fato de que a metodologia baseada na resolução de problemas proporcionou aos alunos a mobilização de esquemas e teoremas em ação e, assim, o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Com base nas análises supracitadas organizamos uma síntese parcial dos objetivos (Quadro 16). Como pode ser visto Souza (2010) e Pinheiro (2008) se propuseram a elaborar uma sequência didática aliada a metodologias de ensino que visavam estimular o raciocínio combinatório nos participantes da pesquisa.

Quadro 16 – Síntese dos objetivos das dissertações selecionadas

	Souza (2010)	Pinheiro (2008)	Fonseca (2012)	Albuquerque (2014)
Elaborar uma sequência de atividades didáticas	X	X	X	X
Propor o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de metodologias de ensino	X	X		
Procurar indícios de contribuições de teorias da aprendizagem na constituição do raciocínio combinatório			X	

Fonte: autor

Portanto, os trabalhos selecionados assim estão constituídos: elaboram, executam e analisam uma sequência de atividades didáticas. Tais estudos estão ancorados na resolução de problemas sendo que dois deles – Souza (2010) e Pinheiro (2008) – propõem o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de metodologias de ensino e Fonseca (2012) investiga possíveis contribuições de teorias de aprendizagem na consolidação do raciocínio combinatório dos estudantes.

A partir dessa análise passamos a explorar as atividades propostas e desenvolvidas nesses trabalhos. Assim, na próxima seção deste capítulo passamos a detalhar como serão analisadas as atividades em questão.

2.2. PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE

Ao realizar a primeira leitura das dissertações selecionadas observamos que Souza (2010) e Pinheiro (2008) apresentam possíveis soluções que esperam obter dos participantes na resolução das atividades propostas em seus trabalhos. Além disso, Fonseca (2012) explora com os estudantes um jogo que aborda o raciocínio combinatório e Albuquerque (2014) apresenta em seus anexos uma série de atividades que foram desenvolvidas com os estudantes, mas não fizeram parte das análises.

Deste modo, optamos por analisar somente as atividades resolvidas pelos estudantes e que requeriam o raciocínio combinatório em sua solução. Assim, não analisamos as resoluções apresentadas pelos autores ou quaisquer outras atividades que não tenham caraterísticas de problemas combinatórios.

As atividades provenientes das dissertações foram analisadas em três etapas, sendo que a primeira delas consiste em classificar os problemas de acordo com o modelo combinatório implícito: problemas de seleção (escolha de uma amostra a partir de um conjunto de objetos), distribuição (ordenação de objetos em caixas, células, urnas, etc.) ou partição (divisão de objetos de um conjunto em subconjuntos).

A segunda etapa se caracterizou por identificar a presença das categorias de análise (descritores) em cada uma das resoluções das atividades. Por fim, realizamos a classificação dos tipos de registros presentes em cada uma delas, especificamente na partida (enunciado), intermediário (resolução) e chegada (resposta).

Adotamos nesta classificação as seguintes notações: registro em língua natural (RLN), registro tabular (RTb), registro em árvore (RAv), registro figural (RFg), registro simbólico (RSb) e registro gráfico (RGf). Utilizamos uma seta (→) para identificar a separação de dois tipos de registros diferentes, por exemplo, RSb→RTb representa a identificação tanto do registro simbólico quanto do tabular numa mesma resolução. Ainda, RLN→RSb constitui a mudança entre o registro em língua natural (enunciado) e o registro simbólico (resolução). Utilizamos, ainda, dois pontos (:) quando houve uma confirmação da resolução, por exemplo, se a resolução se dá por meio do registro simbólico e é confirmada pelo tabular, então expressamos esse fato por RSb:RTb.

Intencionamos com esta classificação sistemática a obtenção de uma caracterização de cada descritor de acordo com o tipo de atividade presente (modelo combinatório implícito), e, concomitantemente, de acordo com o tipo de representações presentes em cada um deles. A análise, assim descrita, nos ajudou a compreender como os estudantes reagem/agem diante de atividades que exige determinadas estratégias para a sua resolução, ou seja, que tipos de registros e suas transformações são mobilizados para a obtenção da solução.

Os dados das análises são apresentados por descritor. Para isso, listamos todas as atividades em que cada descritor está presente apontando exemplos e alguns comentários sobre a categorização. Para sintetizar as análises os dados foram apresentados por meio de tabelas que contém as seguintes informações: número da atividade; classificação segundo o MCI (seleção, distribuição, partição); tipos de representações presentes nos registros de partida, intermediários e de chegada.

Este procedimento foi adotado porque alguns grupos apresentaram o mesmo tipo de resolução, adotando exatamente os mesmos procedimentos e as mesmas representações para solucionar os problemas. Por esse mesmo motivo não apresentamos as resoluções das atividades de todos os grupos, bem como priorizamos as que continham resolução completa, ou seja, as que contemplavam os registros de partida, intermediários e de chegada.

Por fim, procedemos à contemplação dos dados por meio da discussão comparativa e da caracterização dos descritores quanto aos tipos de registros e modelo combinatório implícito. Novamente fizemos uso de um quadro para simplificar a apresentação dos dados, neste expomos todas as atividades com a classificação de acordo com o MCI e com os descritores presentes em cada atividade.

As atividades que foram analisadas estão numeradas de 01 a 40 (apêndice F), adotamos esse procedimento para fins de simplificação na apresentação dos resultados. Salientamos que nas dissertações das quais elas foram extraídas não apresentam o mesmo nome ou numeração para tais tarefas.

As questões numeradas de 01 a 07 estão presentes na dissertação de Souza (2010) e situam-se da página 235 a 278 do referido trabalho. Os problemas de 08 a 20 são provenientes da pesquisa de Pinheiro (2008) e estão compreendidos entre as páginas 86 a 128 de sua dissertação, merece destaque a questão 20 que numeramos com índices 20a e 20b, pois o autor solicitou que a mesma fosse refeita pelos estudantes.

As tarefas de 21 a 35 são oriundas do trabalho de Fonseca (2012), em seu texto estão situadas entre as páginas 87 a 155, algumas atividades possuem mais de um questionamento por meio de itens (a, b, c, ...), os quais receberam numeração diferente em nosso trabalho (por exemplo, os itens a, b e c correspondem as questões 35, 36 e 37, respectivamente).

Por fim, as atividades numeradas de 36 a 40 estão presentes na dissertação de Albuquerque (2014) situam-se entre as páginas 74 e 87, sendo que em nosso trabalho todas possuem índices a e b (36a, 36b, 37a,...) por que sua pesquisa é constituída de pré-teste e pós-teste, no qual foi aplicado um conjunto de problemas antes e a mesma sequência de problemas após uma série de aulas expositivas. Para efeitos de contagem as atividades marcadas com os índices a e b representam a mesma atividade.

Na próxima seção apresentamos como os descritores foram selecionados. Também explicamos como eles serão identificados e categorizados por meio das resoluções das atividades apresentadas pelos participantes de cada pesquisa.

2.3. DESCRITORES

Com o objetivo de aprofundamento da análise das atividades elaboramos descritores (Quadro 17) selecionando elementos que consideramos importantes no desenvolvimento do raciocínio combinatório e para isso nos baseamos no aporte teórico sobre estratégias de resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório desenvolvido na seção 1.2 do capítulo 1.

Esclarecemos que esta lista de descritores não tem caráter prescritivo, trata-se apenas de uma relação de elementos teóricos considerados importantes que usamos como base para as análises. Além disso, seria necessário um estudo mais aprofundado sobre quais deles seriam convenientes para ser explorado pelo professor em sala de aula. Por fim, relembramos que a nossa pesquisa intenciona identificar se e como os estudantes transitam entre os diferentes tipos de representações semióticas ao resolver os problemas combinatórios.

Dessa forma, esses descritores serviram para aprofundarmos as análises das atividades propostas e os comentários/conclusões do pesquisador sobre a resolução dos alunos, ou sobre intervenções do professor. Por fim apresentamos algumas reflexões sobre essas análises.

Quadro 17 – Descritores

01	Utilizar fórmula de permutação, arranjo ou combinação.
02	Ocupar a regra do produto.
03	Formar as configurações pedidas no enunciado do problema.
04	Recorrer à recursividade como ponto de apoio para desenvolver estratégias de solução.
05	Decompor o problema inicial em subproblemas.
06	Usar a regra da soma.
07	Fixar variáveis.
08	Traduzir o problema a outro equivalente.
09	Empregar a regra do quociente.
10	Enumerar não sistematicamente os agrupamentos.

Fonte: Autor.

Os descritores mencionados no Quadro 17 serão identificados de acordo com a resolução apresentada em cada atividade. Portanto, o número de descritores presentes no desenvolvimento da tarefa depende do tipo de estratégia empregada pelos participantes das pesquisas.

Quando a atividade for resolvida por meio de uma expressão matemática (fórmula) que é associada à permutação ($P_n = n!$), combinação ($C_n^k = \frac{k!}{n!(k-n)!}$) ou arranjo ($A_n^k = \frac{k!}{(n-k)!}$) consideraremos a existência do descritor 01. Chamamos atenção ao fato de que estamos considerando P_n como um registro simbólico e, que, quando são realizadas as operações de multiplicação para a obtenção da resposta, a representação P_n é transformada para $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ e nesse caso reconhecemos esta mudança como um tratamento no registro simbólico (também vale para os arranjos e combinações).

De outro modo, indicaremos a presença do descritor 02 quando a resolução se der por meio de multiplicações sucessivas, quer seja por meio do princípio multiplicativo, que preza pela identificação das etapas e multiplicação das possibilidades em cada uma delas, quer seja por meio das fórmulas presentes no descritor 01. Para ilustrar essa situação podemos pensar no seguinte caso: se possuo um livro de Matemática, um de Biologia, um de Português e um de História, de quantos modos posso empilhá-los sobre uma mesa?

Pelo princípio multiplicativo esse problema pode ser resolvido em etapas, em que na primeira delas eu posso escolher qualquer um dos quatro livros, após escolhido o primeiro, na segunda etapa posso escolher qualquer um dos três restantes e, assim, sucessivamente até empilhar todos os livros. A resposta a essa tarefa é a multiplicação do número de possibilidades em cada uma das etapas, assim, esse procedimento pode ser "traduzido" do seguinte modo: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Mas, esse problema também pode ser pensado em termos de permutação, uma vez que empilhados os livros em uma dada ordem, as outras possibilidades configuram-se apenas pela troca dos mesmos de lugar, então, a resposta seria dada pela expressão $P_4 = 24$. Nesta configuração, subjaz o princípio multiplicativo (assim como nos arranjos e combinações), mas o descritor 02 somente será considerado quando na resolução for explicitada a multiplicação, neste caso, se for escrita na forma $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

De qualquer modo, observamos que em ambos os modos de resolver a atividade há a presença do registro simbólico. Assim, como no caso do descritor 01, na regra do produto há a presença da transformação de tratamento dos registros simbólicos.

Resolver o problema listando os agrupamentos, por meio de tabelas, listas ou pelo diagrama em árvore nos indicará a existência do descritor 03. Diferentemente dos procedimentos anteriores, este é um procedimento de enumeração das configurações solicitadas no enunciado. Desta forma, esperamos encontrar a formação das possibilidades por meio dos registros tabulares, em língua natural ou em árvore, salientando que serão consideradas neste descritor somente as enumerações que se dão de forma sistemática.

Porém, o processo de recursão é observado quando ao construir um ramo (ou poucos ramos) do registro em forma de árvore, o estudante se dá por conta de que o procedimento é análogo para os demais. Assim, conclui que quantidade de configurações em cada um dos ramos é a mesma e, a partir disso resolve a situação por meio de multiplicações ou adições.

Quando houver a divisão de um problema em subproblemas e após houver a combinação das respostas dos problemas menores, seja pela regra do produto, seja pela regra da soma, iremos considerar a presença do descritor 05. Podemos retomar, aqui, o exemplo apresentado no descritor 02, que solicitava empilhar quatro livros diferentes sobre uma mesa. A regra do produto (princípio multiplicativo) empregada para resolver a atividade, pressupõe a estratégia de dividir o problema em partes menores, uma vez que contabilizamos as possibilidades para a primeira etapa, depois para a segunda e, sucessivamente para as demais. De modo semelhante, esse procedimento também está presente no processo de construção da árvore de possibilidades, uma vez que construímos ramo após ramo, como se fossem partes separadas, para depois contabilizar todas as configurações.

A regra da soma normalmente está associada a outros descritores, basicamente será considerado o descritor 06 quando houver um entendimento de que a operação de adição foi realizada na contagem dos agrupamentos. Esse descritor pode ser compreendido por meio do seguinte caso: Uma papelaria vende cadernos de 60 e 90 folhas, cada um com capas de três cores distintas. De quantos modos é possível escolher um caderno?

Observe que podemos dividir essa tarefa em outras duas, podemos escolher um caderno de 60 folhas de três formas distintas, bem como podemos escolher um caderno de 90 folhas, também, de três modos diferentes. Portanto, se vamos escolher um caderno ou de 60 ou de 90 folhas, o total de possibilidades é $3 + 3 = 6$. Assim, nessa questão foram utilizadas duas estratégias para a sua resolução, a divisão da tarefa em duas etapas (descritor 05) e a regra da adição (descritor 06). Ainda observamos que, por esta regra se tratar de adição, envolve registros simbólicos e, portanto, também esperamos encontrar a operação de tratamento neste descritor.

O descritor 07 supõe a fixação de variáveis. Para compreendermos este descritor voltemos ao seguinte exemplo: Como podemos combinar quatro pessoas em duplas? Nesse caso, ao invés de pensarmos na formação das duas duplas, podemos fixar apenas uma porque escolhendo uma das duplas a outra está automaticamente formada. Podemos ainda, fixar nesta dupla uma das pessoas e verificar que para esta seria possível formar três duplas. Assim, por recursividade, concluiríamos que para quatro pessoas teríamos $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades. Entretanto, ao fixarmos, por exemplo, a pessoa *um*, teríamos a dupla formada pelas pessoas *um e dois*, mas quando adotássemos o procedimento para a pessoa *dois* formaríamos a dupla *dois e um*, que na verdade é a mesma dupla do passo anterior. Assim, para cada pessoa as duplas repetiriam duas vezes e, portanto, a resposta adequada seria $\frac{12}{2} = 6$ possibilidades.

Assim como a recursividade (descritor 04), o método de fixar variáveis (descritor 07) é um procedimento complexo que envolve outras estratégias. Como pode ser observado, esse método supõe o uso adequado da regra do produto (descritor 02) bem como a regra do quociente (descritor 09), que consiste em "eliminar" as configurações repetidas por meio de uma divisão (último passo da resolução do exemplo anterior: $\frac{12}{2} = 6$). Enquanto no descritor 07 pode haver uma diversidade maior de registros de representação (figural, língua natural e registro em árvore) no descritor 09 esperamos observar apenas representações simbólicas.

O descritor 08 supõe a tradução de um problema a outro equivalente, em que resolvido este, conclui-se por analogia que a solução do problema inicial deve ser idêntica a encontrada. Nesse caso, esperamos identificar transformações do de problemas distribuição para problemas de seleção.

Por fim, o descritor 10 será considerado sempre que houver uma enumeração dos agrupamentos de modo não organizado. Nesta estratégia esperamos encontrar registros em língua natural ou figural.

Conforme o exposto nos procedimentos de análise e nos descritores, procederemos à apresentação dos dados analisados no próximo capítulo. Após apresentação dos dados apresentaremos uma breve discussão dos resultados e, por fim, as reflexões sobre a nossa pesquisa.

3. APRESENTAÇÃO DOS DADOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

3.1. APRESENTAÇÃO DOS DADOS

3.1.1. Descritor 01

O descritor 01 é identificado sempre que algum grupo ou participante de alguma pesquisa utiliza fórmulas pré-estabelecidas que determinam a solução de problemas de **permutação, arranjo ou combinação** para encontrar a sua solução. A síntese das análises está disposta no Quadro 18. Cabe salientar que todas as atividades categorizadas no descritor 01 partem do registro em língua natural e, por se tratar de uma estratégia de resolução de problemas que requer a utilização de modelos pré-determinados também constatamos a presença do registro simbólico em todas as resoluções.

Quadro 18 – Síntese das análises das atividades no descritor 01

Descritor 01													
Atividade	**MCI**			**Registro**									
				Partida		**Intermediário**					**Chegada**		
	D	**P**	**S**	**RLN**	**RFg**	**RLN**	**RTb**	**RAv**	**RFg**	**RSb**	**RLN**	**RTb**	**RSb**
11	X			X		X				X	X		
12	X			X						X	X		
13	X			X						X	X		
14			X	X						X	X		X
16			X	X						X	X		
17			X	X						X			X
19	X			X						X			X
20a			X	X						X			X
20b			X	X						X	X		X

Fonte: Autor.

Como, em um universo de 40 (quarenta) questões foram identificadas apenas 08 (oito) atividades no descritor 01 consideramos um dado significativo de nosso estudo. Pois, indica que os participantes que realizaram as atividades propostas nas pesquisas não adotaram tais expressões como principal método para a resolução dos problemas combinatórios.

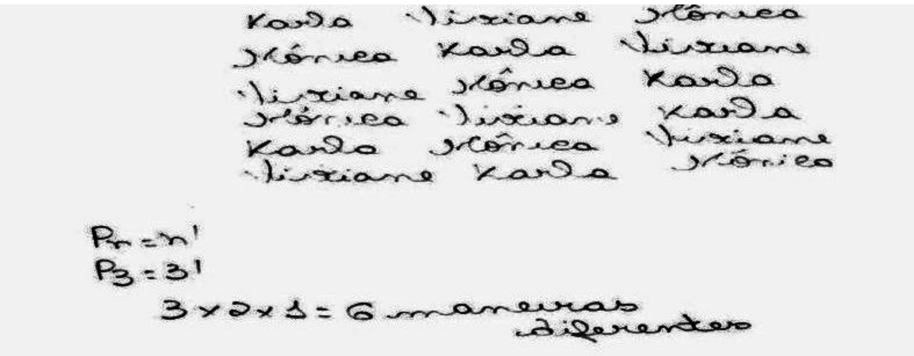
Em relação ao modelo combinatório implícito consideramos as atividades 12, 13 e 14 como problemas de distribuição, pois os mesmos apresentam conotação de distribuir elementos em objetos como caixas, urnas, entre outros. Enquanto isso a atividade 19 exige a distribuição de dois livros entre um grupo de quatro pessoas, o qual também foi considerado um problema de distribuição.

As demais atividades (14, 16, 17 e 20) foram classificadas como problemas de seleção, que supõem a escolha de um subconjunto de objetos em relação a um conjunto dado. Dentre elas, as atividades 14, 16 e 17 configuram amostras ordenadas, nas quais não são passiveis de repetição de elementos, portanto são atividades equivalentes a arranjos simples. Em contrapartida, a atividade 20 configura uma amostra não ordenada e sem repetição de objetos nos agrupamentos, portanto pode ser equiparada a uma combinação simples.

Já, no que diz respeito aos RRS observamos que a variação das representações são do registro de partida para o registro intermediário, sendo elas no sentido RLN→RSb. Por se tratar de resolução por meio de expressões ou fórmulas, as transformações do tipo tratamento se deram no registro simbólico (Figura 08). Além disso, encontramos duas verificações de resolução: RLN:RSb, em que o registro simbólico serviu para confirmar a resolução no registro em língua natural e RSb:RTb, em que o registro tabular confirmou a resolução no registro simbólico. O descritor 01 foi identificado somente nas atividades da pesquisa de Pinheiro (2008).

Figura 08 – Descritor 01 na atividade 11

De quantas maneiras diferentes Karla, Viviane e Mônica podem se sentar num banco com apenas 3 (três) lugares?



Fonte: (PINHEIRO, 2008, p. 93).

Na resolução da atividade 11 por um dos grupos foi identificado o descritor 01 porque apesar de, primeiramente, haver uma enumeração das configurações solicitadas no problema pode ser observado que existe uma confirmação da solução por meio do uso de uma fórmula pré-definida o que explicitamos pela codificação RLN:RSb, em que existe a solução em língua natural, mas houve uma confirmação por meio do registro simbólico.

Esta atividade tem registro de partida em língua natural, os registros intermediários são os registros em língua natural e simbólico e o registro de chegada é o registro em língua natural. Apresenta, ainda, tratamento no registro simbólico.

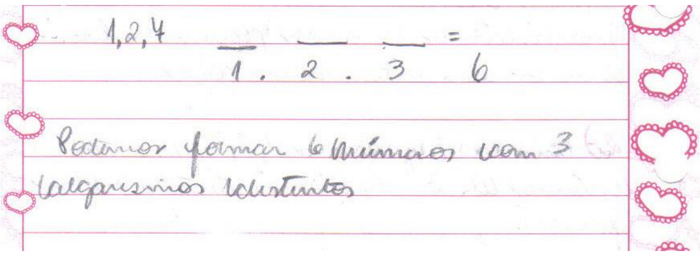
Por fim, observamos que parece haver um registro tabular na resolução da atividade, porém, não consideramos como tal. Entendemos que ao enumerar as configurações do enunciado os estudantes escreveram os trios de forma aleatória, não sistematizada. Deste modo, classificamos este registro como sendo em língua natural, em que após explicitar um agrupamento, muda-se a linha e escreve-se outro.

3.1.2. Descritor 02

O descritor 02 trata-se do **emprego da regra do produto** e foi identificado nas atividades em que os grupos utilizaram multiplicações sucessivas na resolução das atividades. Assim como no descritor 01, as atividades categorizadas neste descritor partem do registro em língua natural. Por se tratar de uma estratégia que envolve multiplicações a maior parte das resoluções apresenta o registro simbólico embasado no princípio multiplicativo como registro intermediário (Figura 09).

Figura 09 – Descritor 02 na atividade 04

Com os algarismos 1, 2 e 7, quantos números com 3 algarismos distintos podemos formar?



Fonte: (SOUZA, 2010, p. 261).

Esta atividade apresenta de forma simples o princípio básico da regra do produto. O enunciado é apresentado em língua natural, há uma passagem para o registro simbólico

(RLN→RSb), no qual se expressa a regra do produto, então a solução aparece em registro na língua natural.

A síntese das análises está disposta no Quadro 19. Observamos que algumas atividades (22, 25, 26 e 27) contam com registro figural em seu enunciado também. Cabe destacar, ainda, que neste descritor identificamos uma quantidade expressiva de problemas do tipo seleção (modelo combinatório implícito).

Quadro 19 – Síntese das análises das atividades no descritor 02

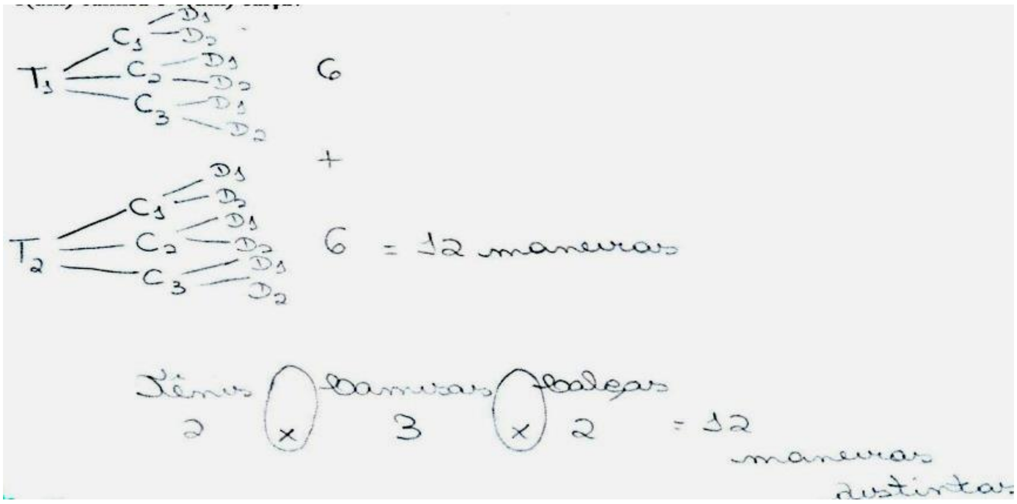
Descritor 02													
Atividade	**MCI**			**Registro**									
	D	**P**	**S**	**Partida**		**Intermediário**					**Chegada**		
				RLN	**RFg**	**RLN**	**RTb**	**RAv**	**RFg**	**RSb**	**RLN**	**RTb**	**RSb**
01			X	X			X			X	X		X
02		X		X			X			X			X
04			X	X						X	X		
05			X	X				X		X	X		
07		X		X		X	X			X	X		
08			X	X					X	X	X		
09			X	X				X	X	X	X		X
10			X	X			X			X	X		
11	X			X		X				X	X		
12	X			X						X	X		X
13	X			X						X	X		X
14			X	X			X			X	X		X
16			X	X					X	X	X		X
17			X	X					X	X			X
18			X	X					X	X	X		X
19	X			X			X			X	X		X
20a			X	X						X			X
20b			X	X						X	X		X
21			X	X		X				X	X		
22			X	X	X					X	X		
24			X	X						X	X		
25	X			X	X				X		X		
26			X	X	X			X		X	X		X
27			X	X	X				X	X	X		X
28			X	X			X		X	X			X
29			X	X			X		X	X			X
30			X	X			X			X			X
31			X	X						X			X
32			X	X						X	X		X
33			X	X						X			X
34			X	X						X			X
35			X	X						X			X
37a			X	X						X	X		
37b			X	X						X	X		

Fonte: Autor.

O descritor 02 foi observado em 32 (trinta e duas) atividades das 40 (quarenta), ou seja, em 80% das atividades analisadas. Uma das hipóteses para o emprego dessa estratégia pode estar embasado no fato de os participantes sentirem-se mais a vontade para utilizar tal método. Tal conclusão embasa-se no fato de que os grupos que não resolveram as atividades diretamente pelo registro simbólico partiram de outros registros como o tabular, em árvore e o figural, para, depois da conversão, resolver o problema por meio da regra da multiplicação (Figura 10).

Figura 10 – Descritor 02 na atividade 09

Juquinha dispõe de 2 (dois) pares de tênis, 3 (três) camisas e 2 (duas) calças distintas entre si. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir, usando 1 (um) par de tênis, 1 (uma) camisa e 1 (uma) calça?



Fonte: (PINHEIRO, 2008, p. 87).

Como pode ser visto na figura 10, o grupo resolveu a atividade construindo a árvore de possibilidades. Após parece haver uma verificação desta resolução por meio do registro simbólico, que se da pela regra do produto. Neste caso consideramos uma mudança no sentido RLN→RAv e a presença de uma verificação da resolução em árvore por uma simbólica (RAv:RSb), sendo que nesta há a presenta de tratamento no registro simbólico.

Referente aos RRS foi possível verificar que as representações estão separadas de dois modos: do enunciado para a resolução (RLN→RTb, RLN→RAv, RLN→RSb e RLN→RFg) e durante o desenvolvimento (RTb→RSb, RAv→RSb e RFg→RSb). Além disso, foi identificada outra confirmação de solução, na qual a principal se deu por meio da regra do produto e foi utilizado um registro tabular (com as configurações solicitadas pelo problema) para confirmação da resposta (RSb:RTb).

Por se tratar de um método que se utiliza de produtos (multiplicações) muitos tratamentos no registro simbólico foram identificados. Isso decorre do fato do registro simbólico ser característico desse método. Entretanto, com exceção do registro gráfico, todos os demais estiveram presentes nas atividades, mesmo que em menor quantidade (se comparado com o simbólico).

Em relação ao MCI concluímos que a maior parte dos problemas (27 das 32 atividades) em que a regra do produto foi identificada trata-se do tipo seleção, que de modo geral se caracteriza pela escolha de uma amostra de objetos de um grupo. Destas atividades, 13 são problemas combinatórios simples (a escolha de objetos é do mesmo tipo, por exemplo, de um grupo de quatro pessoas formar uma comissão com três delas), sendo a maior parte deles equivalentes a arranjos simples (nove atividades); três configuram arranjo com repetição e uma pode ser traduzida como combinação. As outras 14 atividades são compostas, ou seja, envolve escolha de objetos de conjuntos distintos e, deste modo não podem ser comparados a problemas de arranjo ou combinação.

Destacamos a presença de cinco questões do tipo distribuição, das quais três são caracterizadas como aplicação bijetiva, logo são equivalentes a problemas de permutação. Uma atividade pode ser compreendida como aplicação injetiva, podendo ser vista como um problema de arranjo e a outra é um problema composto, o qual não se enquadra nessa classificação. Por fim, foi observado duas questões do tipo partição, que compreendem a distribuição de objetos em partes iguais.

3.1.3. Descritor 03

O descritor 03 foi considerado nas atividades em que as resoluções se deram por meio da **enumeração das configurações solicitadas no enunciado**. A síntese da análise das atividades que contém o descritor 03 encontra-se no quadro 20.

Pode ser observado por meio desse quadro que há um equilíbrio entre o número de problemas do tipo distribuição e do tipo seleção. Todos os enunciados partem da língua natural e em quase todas as atividades há resposta (registro de chegada) em língua natural.

Quadro 20 – Síntese das análises das atividades no descritor 03

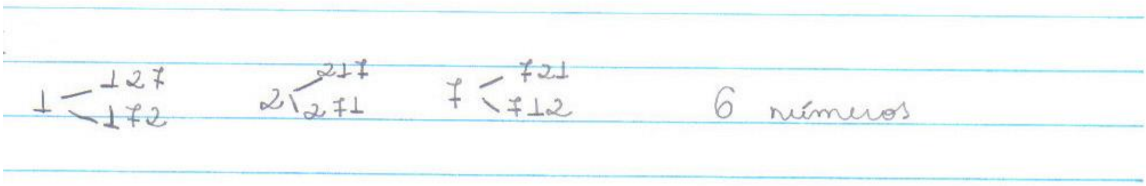
Descritor 03														
Atividade	**MCI**			**Registro**										
	D	**P**	**S**	**Partida**		**Intermediário**					**Chegada**			
				RLN	**RFg**	**RLN**	**RTb**	**RAv**	**RFg**	**RSb**	**RLN**	**RTb**	**RSb**	
02		X		X			X		X	X	X			
03		X		X					X		X			
04	X			X					X		X			
05			X	X			X	X		X	X			
06	X			X			X		X		X			
07		X		X		X	X							
11	X			X		X				X	X			
14			X	X			X			X	X		X	
15			X	X			X		X		X			
18			X	X				X		X	X			
19	X			X			X				X		X	
20a			X	X			X				X			
22			X	X	X		X		X		X			
23		X		X		X					X			
25	X			X	X		X		X					
26			X	X	X	X		X	X		X		X	
30			X	X			X		X				X	
36b			X	X					X		X			
38a			X	X		X			X		X			

Fonte: Autor.

Essa estratégia foi bastante utilizada nas resoluções das questões, considerando o fato de que está presente em 19 (dezenove) dos 40 (quarenta) problemas, isto é, em 47,5% deles. As atividades estudadas confirmam o fato de que esse método é empregado quando o número de agrupamentos a ser formado não é muito elevado (Figura 11) e, quando isso ocorre, normalmente quem está resolvendo o problema procura outro meio de confirmar a resposta.

Figura 11 – Descritor 03 na atividade 04

Com os algarismos 1, 2 e 7, quantos números com 3 algarismos distintos podemos formar?

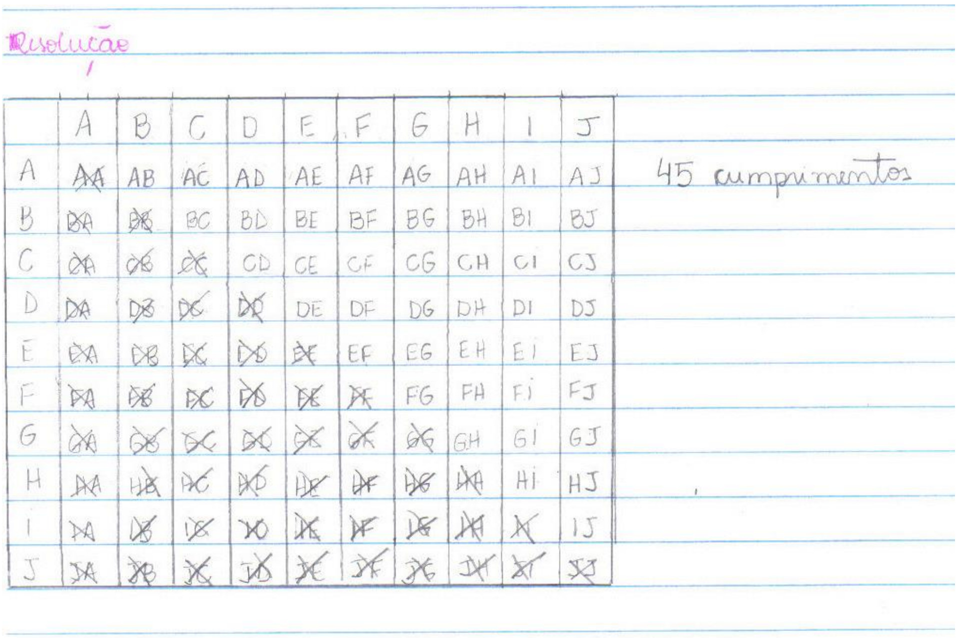


Fonte: (SOUZA, 2010, p. 261).

Os registros mais utilizados como intermediários na resolução das atividades foram o tabular e o figural, inclusive com tratamentos no registro figural (Figura 12). Todas as modificações deram-se do registro de partida para o registro intermediário (RLN→RFg, RLN→RTb, RLN→RAv). Há também confirmações de respostas do tipo RLN:RSb, RSb:RAv e RFg:RTb.

Figura 12 – Descritor 03 na atividade 02

Dez finalistas de diferentes estados foram convidados para uma confraternização. Antes de iniciar a festa, cada finalista cumprimentará, com as mãos, todos os outros finalistas. Quantos cumprimentos haverá ao todo?


Resolução

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	~~AA~~	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ
B	~~BA~~	~~BB~~	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI	BJ
C	~~CA~~	~~CB~~	~~CC~~	CD	CE	CF	CG	CH	CI	CJ
D	~~DA~~	~~DB~~	~~DC~~	~~DD~~	DE	DF	DG	DH	DI	DJ
E	~~EA~~	~~EB~~	~~EC~~	~~ED~~	~~EE~~	EF	EG	EH	EI	EJ
F	~~FA~~	~~FB~~	~~FC~~	~~FD~~	~~FE~~	~~FF~~	FG	FH	FI	FJ
G	~~GA~~	~~GB~~	~~GC~~	~~GD~~	~~GE~~	~~GF~~	~~GG~~	GH	GI	GJ
H	~~HA~~	~~HB~~	~~HC~~	~~HD~~	~~HE~~	~~HF~~	~~HG~~	~~HH~~	HI	HJ
I	~~IA~~	~~IB~~	~~IC~~	~~ID~~	~~IE~~	~~IF~~	~~IG~~	~~IH~~	~~II~~	IJ
J	~~JA~~	~~JB~~	~~JC~~	~~JD~~	~~JE~~	~~JF~~	~~JG~~	~~JH~~	~~JI~~	~~JJ~~

45 cumprimentos

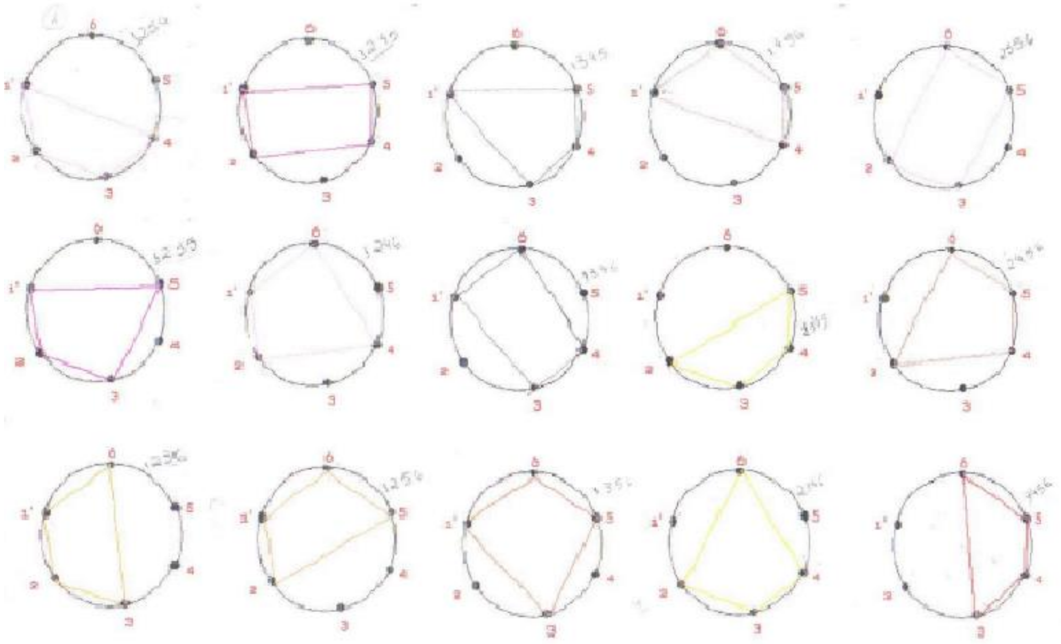
Fonte: (SOUZA, 2010, p. 248).

Nesta resolução pode ser visto que o grupo enumera todas as configurações solicitadas no enunciado por meio de uma tabela, e após, elimina os que se repetem para chegar à resposta em língua natural. Portanto, consideramos uma mudança no sentido RLN→RTb (registro de partida para o registro intermediário).

Destacaremos ainda uma atividade que foi resolvida por meio do registro figural. Nessa resolução além da mudança no sentido RLN→RFg há tratamentos no registro figural. Devemos observar que o enunciado solicitava a “quantidade” de quadriláteros que poderiam ser formados com quatro dos seis pontos. Portanto, com o grupo não apresentou a resposta à pergunta do enunciado, mas apenas as configurações solicitadas, consideramos que não há um registro de chegada nesta resolução (Figura 13)

.Figura 13 – Descritor 03 na atividade 03

Sobre uma circunferência marcam-se 6 pontos distintos. Determine quantos quadriláteros convexos podem ser formados com vértices nesses pontos.



Fonte: (SOUZA, 2010, p. 256).

Com relação ao MCI, 05 (cinco) das 19 (dezenove) atividades são do tipo distribuição. Destas, duas são equivalentes a problemas de arranjo; uma pode ser classificada como permutação e a outra é composta. Enquanto isso, 04 (quatro) são problemas do tipo partição e 10 (dez) podem ser classificadas como seleção. Nos problemas do tipo seleção concluímos que cinco podem ser resolvidos por meio de arranjo simples; um por arranjo com repetição; dois com a fórmula de combinação e dois são do tipo composto.

3.1.4. Descritor 04

Nos casos em que foi construído apenas um ramo (ou poucos ramos) do diagrama em árvore e a partir disso houve a conclusão que é possível utilizar a **recursividade para resolver o problema**, ou quando algum esquema semelhante a este foi adotado consideramos a presença do descritor 04. O Quadro 21 contém a síntese das análises das atividades que contém essa estratégia de resolução.

Quadro 21 – Síntese das análises das atividades no descritor 04

Descritor 04													
Atividade	**MCI**			**Registro**									
				Partida		**Intermediário**					**Chegada**		
	D	**P**	**S**	**RLN**	**RFg**	**RLN**	**RTb**	**RAv**	**RFg**	**RSb**	**RLN**	**RTb**	**RSb**
02		X		X				X		X	X		X
04			X	X					X		X		
05			X	X				X		X	X		
09			X	X				X		X	X		
18			X	X				X		X	X		
26			X	X	X			X	X	X	X		
27			X	X	X				X	X			X
30			X	X			X		X		X		

Fonte: Autor.

Pode ser observado por meio desse quadro que há uma quantidade maior de problemas do tipo seleção. O registro de partida é o da língua natural em todas as atividades, sendo eu duas (atividades 26 e 27) também possuem o registro figural. Os registros intermediários tem uma maior incidência nos tipo RAv, RFg e RSb, sendo que o processo de recursividade se dá nos registros em árvore e figural e o registro simbólico aparece como fecho da resolução. Todas as atividades tem registro de chegada na língua natural.

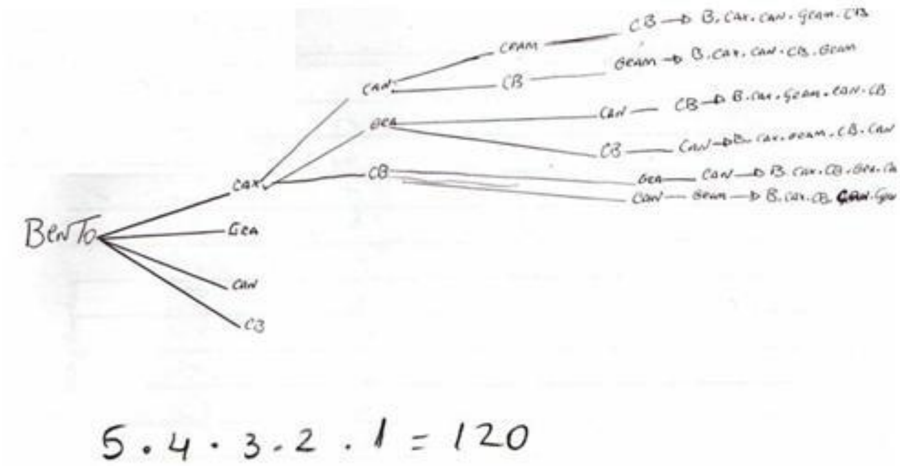
As representações se separam no sentido do registro de partida para o intermediário (RLN→RAv e RLN→RTb) e, também, durante a resolução do problema (RAv→RSb e RTb→RSb). As operações nos registros simbólicos são acompanhadas de tratamentos nestes registros.

A recursividade como método de resolução de problemas combinatórios foi identificada em poucas atividades, 03 na dissertação de Souza (2010), 02 na de Pinheiro (2008) e 03 na de Fonseca (2012). Essa é uma estratégia mais elaborada de resolver problemas combinatórios, pois, se o registro de partida está em língua natural exige de quem resolve dois tipos de conversão: do registro de partida para o intermediário e no registro intermediário, para após efetuar tratamento no registro simbólico para obtenção da resposta. Desta forma, é natural que os registros intermediários mais presentes nas resoluções das atividades tenham sido os registros em árvore, figural e simbólico. O descritor 04 foi contemplado em maior número nos problemas do tipo seleção.

Destacamos a atividade 26 por apesentar uma resolução que compreende o processo recursivo em todas as características dessa estratégia. Há a construção de um ramo da árvore, generalização do método para outros ramos e síntese por meio de registro simbólico (Figura 14). Essa é uma atividade que parte de um registro em língua natural (registro de partida), apresenta registros intermediários do tipo registro em árvore e registro simbólico, apresenta a solução do problema no registro em língua natural.

Figura 14 – Descritor 04 na atividade 26

Um grupo de pessoas está organizando uma excursão pela Serra Gaúcha. Eles irão visitar as cidades de Caxias do Sul, Canela, Gramado, Bento Gonçalves e Carlos Barbosa. O grupo está montando seu roteiro de viagem decidindo a ordem em que irão visitar as cidades. Quantas são as possibilidades de roteiro que o grupo pode formar?



Fonte: (FONSECA, 2012, p. 119).

A resolução deste problema pelo método da recursão envolve, além do domínio de alguns registros (RAv, RSb), duas mobilizações de representações que se dão nos sentidos: RLN→RAv, partindo do enunciado para a resolução; RAv→RSb, sendo que esta troca se dá no momento da resolução (evolvendo registros intermediários).

Referente ao MCI, o descritor 04 contempla uma atividade de partição e as outras sete são classificadas como seleção. Sendo que destas últimas, duas são problemas do tipo composto e as demais são do tipo simples (uma pode ser resolvida por arranjo com repetição e as outras quatro por meio de arranjo simples).

3.1.5. Descritor 05

O descritor 05 foi identificado nas atividades em que houve a **divisão do problema em subproblemas** seguido da combinação das respostas destes por meio da regra do produto ou da soma. O quadro 22 contém a síntese das análises das atividades que abordam esse método em sua resolução.

Quadro 22 – Síntese das análises das atividades no descritor 05

Descritor 05													
Atividade	**MCI**			**Registro**									
	D	**P**	**S**	**Partida**		**Intermediário**					**Chegada**		
				RLN	**RFg**	**RLN**	**RTb**	**RAv**	**RFg**	**RSb**	**RLN**	**RTb**	**RSb**
01			X	X			X		X	X	X		
02		X		X			X	X		X	X		
04			X	X					X		X		
05			X	X			X	X		X	X		
09			X	X				X		X	X		
10			X	X						X	X		
11	X			X					X				X
14			X	X			X		X		X		
18			X	X				X	X	X	X		X
21			X	X		X					X		
23		X		X		X					X		
25	X			X	X				X		X		
26			X	X	X	X		X	X	X	X		X
27			X	X	X				X				X
30			X	X			X		X				X
33			X	X						X			X
34			X	X						X			X
35			X	X						X			X
38a			X	X					X		X		

Fonte: Autor.

Referente ao MCI pode ser observado por meio desse quadro que há uma quantidade maior de problemas do tipo seleção (78,94%). A maioria dessas atividades é do tipo composta. As que são simples se dividem em arranjo com repetição (uma questão); arranjo simples (cinco problemas) e uma atividade de combinação. Ainda foi possível identificar dois exercícios de partição e dois de distribuição.

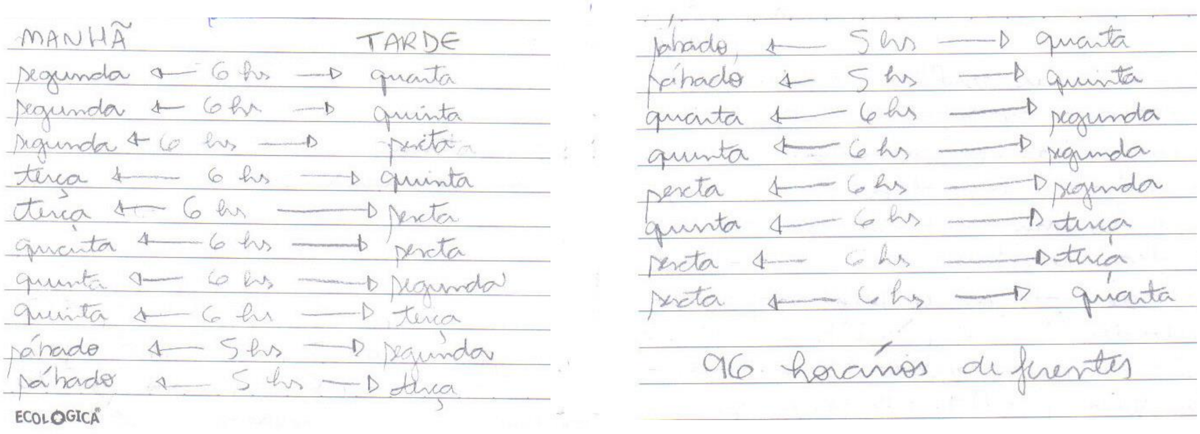
Em relação aos RRS o registro de partida é o da língua natural em todas as atividades, sendo que três delas (atividades 25, 26 e 27) também possuem o registro figural. Os registros intermediários tem uma maior incidência nos tipo RAv, RFg e RSb, mas há também a presença de registros em língua natural. Há atividades com registro de chegada em língua natural e registro simbólico.

As modificações de representações se dão nos sentidos RLN→RAv, RLN→RTb e RLN→RFg e, também, durante a resolução do problema (RAv→RSb e RTb→RSb). As operações nos registros simbólicos são acompanhadas de tratamentos nestes registros. Cabe destacar que em uma das atividades há a confirmação da resolução, foi apresentada uma resolução por meio do registro em árvore e, esta foi confirmada por meio do registro simbólico (RAv:RSb).

Como pode ser visto na figura 15, que é o registro intermediário do tipo figural, o grupo dividiu a situação em dois subproblemas ao resolver a atividade 01, ora quando começa escolhendo o primeiro dia da semana pela manhã, ora quando escolhe o dia da semana pela tarde. Assim há a presença do descritor 05 em tal resolução.

Figura 15 – Descritor 05 na atividade 01

Eliane quer escolher o seu horário para a natação. Ela quer ir a duas aulas por semana, uma de manhã e a outra de tarde, não sendo no mesmo dia nem em dias seguidos. De manhã, há aulas de natação de segunda-feira a sábado, às 9h, às 10h e às 11h e, de tarde, de segunda-feira a sexta-feira, às 17h e às 18h. De quantas maneiras distintas Eliane pode escolher seu horário?



Fonte: (SOUZA, 2010, p. 236).

Sendo o registro de partida em língua natural e o registro intermediário do tipo figural consideramos, portanto, a mobilização RLN→RFg. Após resolver o problema o grupo apresenta a solução em língua natural.

3.1.6. Descritor 06

Consideramos o descritor 6 quando houve um entendimento de que a **operação de adição** foi realizada na contagem dos agrupamentos. A estratégia de resolver problemas por meio desta regra se deu de duas formas, isoladamente, ou associado a outro descritor

(descritor 05). A síntese das análises das atividades que contém o descritor 06 está contemplada no quadro 23.

Quadro 23 – Síntese das análises das atividades no descritor 06

Descritor 06													
Atividade	**MCI**			**Registro**									
	D	**P**	**S**	**Partida**		**Intermediário**					**Chegada**		
				RLN	**RFg**	**RLN**	**RTb**	**RAv**	**RFg**	**RSb**	**RLN**	**RTb**	**RSb**
01			X	X			X		X	X	X		
02		X		X				X		X	X		
08			X	X							X		
09			X	X				X		X	X		
10			X	X							X		
18			X	X				X		X	X		
21			X	X		X					X		
22			X	X	X				X		X		
27			X	X	X	X				X	X		
36a			X	X						X	X		
37a			X	X						X	X		
38b			X	X						X	X		

Fonte: Autor.

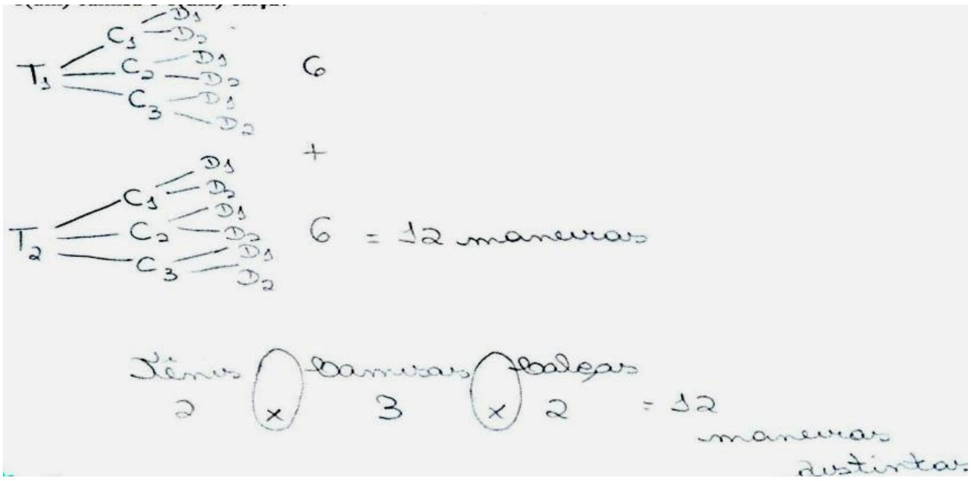
Em se tratando dos RRS o registro de partida é o da língua natural em todas as atividades categorizadas neste descritor, sendo que duas (atividades 22 e 27) também possuem o registro figural. O registro intermediário principal é o simbólico, mas há a presença de outros tipos de registros (RLN, RTb, RAv e RFg). Todas as atividades tem registro de chegada em língua natural.

As representações mobilizadas no registro de partida e no intermediário são: RLN→RAv, RLN→RTb, RLN→RFg e RLN→RSb e, também, durante a resolução do problema é possível identificar RAv→RSb e RTb→RSb. As operações nos registros simbólicos são acompanhadas de tratamentos nestes registros. Cabe destacar que em duas das atividades há a confirmação da resolução, foi apresentada uma resolução por meio do registro em árvore e, esta foi confirmada por meio do registro simbólico (RAv:RSb) e, em outra atividade a resolução é dada pelo registro simbólico e confirmada pelo registro em árvore (RSb:RAv).

Na atividade 09 após a construção da árvore de possibilidades, o grupo utiliza o registro simbólico para resolver o problema, esta resolução é expressa pela soma $6 + 6 = 12$ (Figura 16). Portanto, há a presença do descritor 06 na resolução da atividade pelo grupo. O registro de partida da atividade é em língua natural e os registros intermediários são em árvore e simbólico. Há nesta resolução mobilização do RLN→RAv e RAv→RSb, e além disso, há um tratamento no registro simbólico.

Figura 16 – Descritor 06 na atividade 09

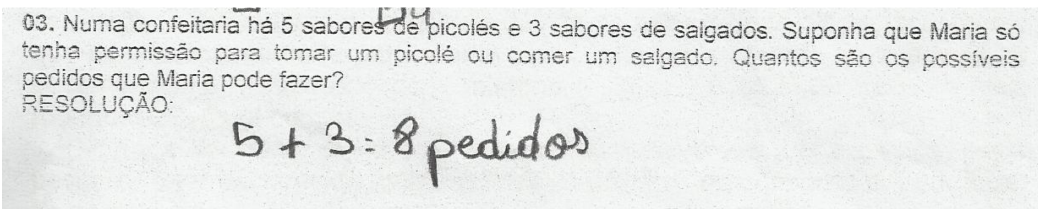
Juquinha dispõe de 2 (dois) pares de tênis, 3 (três) camisas e 2 (duas) calças distintas entre si. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir, usando 1 (um) par de tênis, 1 (uma) camisa e 1 (uma) calça?



Fonte: (PINHEIRO, 2008, p. 87).

Destacaremos a atividade 38b por apresentar uma soma em sua resolução (Figura 17). Há uma alteração de registros no sentido RLN→RSb, isto é, o enunciado é em língua natural e o problema foi resolvido por meio do registro simbólico (soma de dois números). Após o tratamento no registro simbólico ($5 + 3 = 8$) houve a inclusão da palavra "pedidos" ao lado do número 8 (oito). Portanto, consideramos o registro em língua natural como o de chegada, porém sem conversão no sentido RSb→RLN. Esta atividade também foi classificada como problema de seleção, porque "fazer um pedido" tem o mesmo significado de "escolher" um elemento de um conjunto dado.

Figura 17 – Descritor 06 na atividade 38a


03. Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?
RESOLUÇÃO:
5 + 3 = 8 pedidos

Fonte: (ALBUQUERQUE, 2014, p. 85).

Por fim observamos que, com exceção da atividade 02 que é de partição, as demais são todas classificadas como seleção. Nesta última categoria identificamos oito problemas compostos, ou seja, que não podem ser resolvidos com apenas uma fórmula de arranjo, permutação ou combinação. Além destes, há três simples (dois de arranjo e um de combinação).

3.1.7. Descritor 07

Este descritor consiste na utilização da **estratégia de fixar variáveis** para resolver um problema que exige o raciocínio combinatório. Esse método consiste na troca do problema inicial em outro do mesmo tipo, no qual os parâmetros iniciais são reduzidos a outros menores. A partir disso, resolve-se o problema mais simples para após resolver o inicial através da recursão.

Quadro 24 – Síntese das análises das atividades no descritor 07

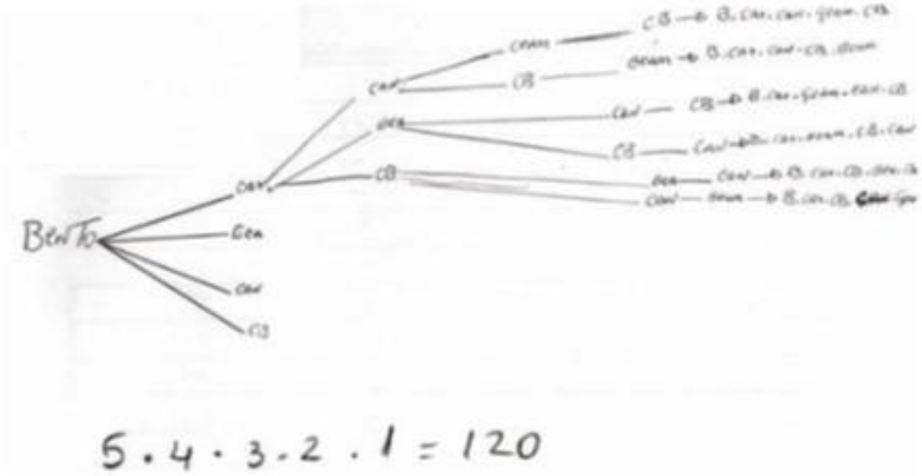
Descritor 07													
Atividade	**MCI**			**Registro**									
	D	**P**	**S**	**Partida**		**Intermediário**					**Chegada**		
				RLN	**RFg**	**RLN**	**RTb**	**RAv**	**RFg**	**RSb**	**RLN**	**RTb**	**RSb**
24			X	X		X			X		X		
26			X	X	X			X		X	X		
27			X	X	X				X	X			X

Fonte: Autor.

Podemos observar na Figura 18 que a atividade 26 foi resolvida adequadamente utilizando-se o método da fixação de variáveis, em que um dos grupos constrói apenas um dos ramos da árvore de possibilidades e por meio da recursividade resolve o problema por meio de registro simbólico. Assim, como o registro de partida é em língua natural e figural podemos concluir que houve a mudança no sentido RLN/RFg→RAv, também houve uma modificação no sentido RAv→RSb.

Figura 18 – Descritor 07 na atividade 26

Um grupo de pessoas está organizando uma excursão pela Serra Gaúcha. Eles irão visitar as cidades de Caxias do Sul, Canela, Gramado, Bento Gonçalves e Carlos Barbosa. O grupo está montando seu roteiro de viagem decidindo a ordem em que irão visitar as cidades. Quantas são as possibilidades de roteiro que o grupo pode formar?



Fonte: (FONSECA, 2012, p. 119).

O descritor 07 foi observado somente na dissertação de Fonseca (2012). As três atividades foram classificadas como problema de seleção porque exigiam a escolha de objetos de um conjunto. O registro de partida das atividades é em língua natural, sendo que as atividades 26 e 27 também apresentam o registro figural em seu enunciado. Foram mobilizados na resolução das atividades os registros em língua natural, em árvore, figural e simbólico. As respostas são dadas em registros em língua natural e/ou simbólico.

Identificamos os seguintes registros de partida e intermediários: RLN→RAv, RLN→RFg e, também, os seguintes registros na resolução dos problemas: RAv→RSb e RFg→RSb. As operações nos registros simbólicos são acompanhadas de tratamentos nestes registros. Em relação ao MCI as três atividades são do tipo seleção sendo que duas são equivalentes a problemas de arranjo simples e uma atividade é composta.

3.1.8. Descritor 8

O descritor 08 consiste na utilização da estratégia de **traduzir o problema inicial a outro equivalente**. Esse método consiste em comparar o problema com outro semelhante no qual a resolução seja conhecida para após resolver o original através de analogia. A síntese está apresentada no quadro 25.

Quadro 25 – Síntese das análises das atividades no descritor 08

Descritor 08													
Atividade	MCI			Registro									
				Partida		Intermediário					Chegada		
	D	P	S	RLN	RFg	RLN	RTb	RAv	RFg	RSb	RLN	RTb	RSb
06	X			X					X		X		

Fonte: Autor.

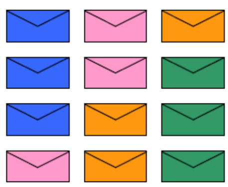
Este método foi identificado apenas na atividade 06 e, a transformação se deu de um problema do tipo distribuição para outro similar, porém, do tipo seleção. O problema exigia que se colocassem três cartas dentro de quatro envelopes (distribuição), ao invés disso, foram escolhidos três envelopes para formar os possíveis agrupamentos (seleção).

A resolução apresentada pelo grupo de professoras dos anos iniciais contou com confecção do material explorado no enunciado (envelopes coloridos). Segundo Souza (2010), as professoras mostraram-se preocupadas em como fariam para explicar tal situação a seus próprios alunos, mostrando assim, uma solução não abstrata para um problema que é de cunho abstrato.

Segundo a pesquisadora as professoras confeccionaram envelopes nas cores do enunciado e foram organizando as possibilidades conforme registro figural (Figura 19). Como o registro de partida é em língua natural e o registro intermediário é figural, consideramos haver mobilização no sentido RLN→RFg.

Figura 19 – Descritor 08 na atividade 06

Tenho três letras idênticas que desejo colocar dentro de quatro envelopes de cores diferentes, azul, rosa, laranja e verde. Posso colocar apenas uma letra em cada envelope. De quantos modos as três letras idênticas podem ser colocadas dentro dos quatro envelopes diferentes?



Fonte: (SOUZA, 2010, p. 274).

3.1.9. Descritor 9

O descritor 09 está relacionado à **regra do quociente**. Foi considerado o uso desta regra se na resolução houve uma divisão a fim de “eliminar” os agrupamentos repetidos, também foi identificado nas fórmulas de arranjo e combinação. O Quadro 26 contém a síntese das análises das atividades que foi identificado o descritor 09.

Quadro 26 – Síntese das análises das atividades no descritor 09

Descritor 09													
Atividade	**MCI**			**Registro**									
	D	**P**	**S**	**Partida**		**Intermediário**					**Chegada**		
				RLN	**RFg**	**RLN**	**RTb**	**RAv**	**RFg**	**RSb**	**RLN**	**RTb**	**RSb**
07		X		X		X	X			X	X		
14			X	X			X			X	X		
16			X	X						X	X		
17			X	X						X	X		
19	X			X			X			X	X		X
20a			X	X						X	X		X
20b			X	X						X	X		X

Fonte: Autor.

Em relação aos RRS o registro de partida é o da língua natural em todas as atividades. O registro intermediário principal é o simbólico, mas há a presença de outros tipos de registros (RLN, RTb). Todas as atividades tem registro de chegada em língua natural, três delas em registro simbólico também.

As modificações das representações se dão no sentido do registro de partida para o intermediário (RLN→RSb). Cabe destacar que em uma das atividades há a confirmação da resolução, foi apresentada uma resolução por meio do registro simbólico e, esta foi confirmada por meio do registro em árvore (RSb:RAv).

A regra do quociente (descritor 09) também foi pouco explorada na resolução das atividades. Foi identificada basicamente associada ao descritor 01 (uso de fórmula matemática) para fins de simplificação das expressões (Figura 20) e ao descritor 02 (Figura 21). Além disso, todas as atividades tiveram registro simbólico como intermediário, e poucas tiveram outros registros também, como o figural e em língua natural. Identificamos em maior número nas atividades classificadas como problemas de seleção (04 de arranjo e uma de combinação).

A atividade 17 foi resolvida por meio de expressão algébrica, nela há a presença da operação de divisão. Apresenta registro de partida na língua natural e o registro intermediário é o simbólico (RLN→RSb). Na resolução (registro intermediário) há tratamentos no registro simbólico. A atividade foi classificada como problema de seleção.

Figura 20 – Descritor 09 na atividade 17

Na final dos jogos estudantis, 6 (seis) escolas disputam os três primeiros lugares. Determine o número de maneiras diferentes de obtermos o resultado dos jogos.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_{6,3} = = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

Fonte: (PINHEIRO, 2008, p. 105).

Em contrapartida, na atividade 19 um grupo utiliza a regra do produto para em seguida resolver o problema por meio da regra do quociente (Figura 21). A atividade tem registro de partida em língua natural e o registro intermediário é o simbólico (RLN→RSb), há também tratamento no registro simbólico. Este problema consiste na distribuição de livros para alunos, portanto é classificado no MCI (modelo combinatório implícito) como problema de distribuição.

Figura 21 – Descritor 09 na atividade 19

O professor Miranda deseja sortear 2 (dois) livros idênticos de Matemática entre 4 (quatro) alunos da turma. Quantos são os possíveis resultados do sorteio?

$$\frac{4 \text{ alunos}}{1^{\circ} \text{ livro}} \cdot \frac{3 \text{ alunos}}{2^{\circ} \text{ livro}} = \frac{12}{2} \text{ resultados possíveis} = 6 \text{ resultados}$$

Fonte: (PINHEIRO, 2008, p. 119).

3.1.10. Descritor 10

Este descritor considera as **enumerações não sistemáticas**, ou seja, aquelas em que não há um padrão na formação das configurações solicitadas no enunciado. Enquadram-se neste descritor listas, tabelas, figuras e esquemas que não tenham uma organização metódica.

O Quadro 27 contém a síntese das análises das atividades que foi identificado o descritor 10. Pode ser observado por meio desse quadro que há dois problemas de distribuição e um de partição. As atividades do tipo seleção compreendem três exercícios do tipo composto e dois do tipo simples, sendo estes equivalentes a combinações.

Quadro 27 – Síntese das análises das atividades no descritor 10

Descritor 10													
Atividade	**MCI**			**Registro**									
	D	**P**	**S**	**Partida**		**Intermediário**					**Chegada**		
				RLN	**RFg**	**RLN**	**RTb**	**RAv**	**RFg**	**RSb**	**RLN**	**RTb**	**RSb**
01			X	X		X							
09			X	X					X		X		
10			X	X			X			X			X
11	X			X		X				X	X		
23		X		X		X	X						
25	X			X	X				X				
39a			X	X	X				X		X		
39b			X	X	X				X		X		
40a			X	X	X				X		X		
40b			X	X	X				X		X		

Fonte: Autor.

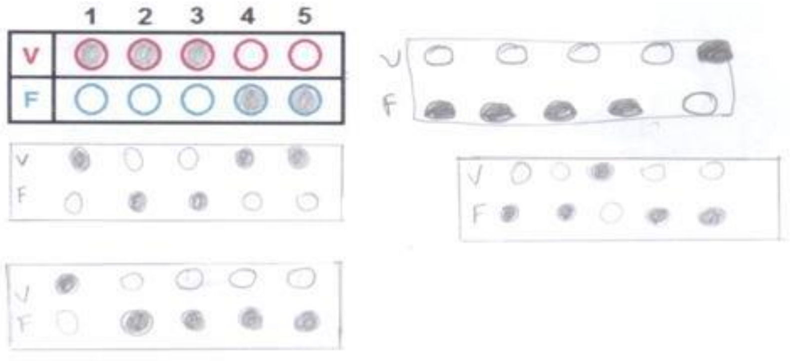
O registro de partida é o da língua natural em todas as atividades, sendo que nas atividades 25, 39 e 40 também apresentam registro figural no enunciado. Não há um registro intermediário principal, apenas o registro em árvore não foi contemplado neste descritor. Algumas atividades tem registro de chegada em língua natural, três delas não apresentam registro de chegada.

As modificações das representações se dão no sentido do registro de partida para o intermediário RLN→RTb em duas atividades e uma apresenta mudança no sentido RLN→RFg. Não foram consideradas transformações nas atividades que apresentam registro figural no enunciado e no registro intermediário.

Em poucas atividades este método foi empregado, o que significa que em raros momentos os participantes das pesquisas ficaram sem saber ou, em dúvida, sobre como resolver uma questão. Justamente esse é o décimo descritor por acreditarmos que seria utilizado em último caso, ou seja, quando os participantes não conseguissem utilizar qualquer outra estratégia para solucionar o problema (Figura 22).

Figura 22 – Descritor 10 na atividade 25

Uma prova é composta por 5 questões objetivas, para serem julgadas como V (verdadeiras) ou F (falsas). As respostas devem ser escritas em um gabarito conforme representação abaixo. De quantas maneiras diferentes o gabarito abaixo pode ser preenchido?



Fonte: (FONSECA, 2012, p. 107).

Foi constatada a presença do descritor 10 na atividade 25, na qual um dos grupos apresenta uma enumeração não sistemática por meio de uma figura. Consideramos, então, que, do fato da figura representada fazer parte do enunciado não há uma transformação de conversão entre registros, mas sim tratamentos no registro figural. Por fim, pode ser observado que o registro intermediário apresentado (figural) não responde a pergunta elaborada no enunciado.

3.2. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Na seção anterior apresentamos os dados obtidos por meio da análise das atividades presentes nas dissertações selecionadas. Realizaremos agora uma breve discussão sobre os descritores buscando caracterizá-los de acordo com os dados encontrados.

Em todas as atividades categorizadas foi identificado pelo menos um descritor, sendo que em muitas foram identificados três ou mais descritores. O descritor 02 foi observado com uma frequência de 80% na resolução das atividades, enquanto isso os descritores 03 e 05 com uma regularidade de 47,5%. A seguir apresentamos o quadro com a síntese geral dos descritores em cada atividade (Quadro 28).

Quadro 28 – Descritores em cada atividade

Dissertação	Atividade	MCI			Descritor									
		S	D	P	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Souza (2010)	01	X				X			X	X				X
	02			X		X	X	X	X	X				
	03			X			X							
	04	X				X	X	X	X					
	05	X				X	X	X	X					
	06		X				X					X		
	07			X		X	X						X	
Pinheiro (2008)	08	X				X				X				
	09	X				X		X	X	X				X
	10	X				X			X	X				X
	11		X		X	X	X		X					X
	12		X		X	X								
	13		X		X	X								
	14	X			X	X	X		X				X	
	15	X					X							
	16	X			X	X							X	
	17	X			X	X							X	
	18	X				X	X	X	X	X				
	19		X		X	X	X						X	
	20	X			X	X	X						X	
Fonseca (2012)	21	X				X			X	X				
	22	X				X	X			X				
	23			X			X		X					X
	24	X				X					X			
	25		X			X	X		X					X
	26	X				X		X	X		X			
	27	X				X	X	X	X	X	X			
	28	X				X								
	29	X				X								
	30	X				X	X	X	X					
	31	X				X								
	32	X				X								
	33	X				X			X					
	34	X				X			X					
	35	X				X			X					
Albuquerque (2014)	36	X					X			X				
	37	X				X				X				
	38	X					X		X	X				
	39	X												X
	40	X												X

Fonte: Autor.

Pode ser observado por meio do quadro 28 que o descritor 01 não foi identificado na dissertação de Souza (2010), ou seja, não foram utilizadas expressões pré-determinadas e/ou fórmulas pelos estudantes na resolução dos problemas propostos. Uma hipótese para que isso tenha ocorrido embasa-se no fato de que os estudantes resolveram as atividades antes das plenárias serem realizadas. A intenção era a de formalizar os conhecimentos de permutação, arranjo e combinação, e quando foi possível a discussão das resoluções presentadas pelos grupos, os mesmos eram indagados sobre a quantidade de elementos nos agrupamentos e a importância da ordem dos mesmos. Tais indagações visavam reflexões que tinham a intenção de estimular a formalização de conceitos combinatórios (arranjo, permutação e combinação).

Também, talvez pelo mesmo motivo, o descritor 07 não foi identificado na realização das atividades apresentadas pelos estudantes. Entretanto, a autora previu em seu projeto inicial que os participantes poderiam utilizar a estratégia de fixar variáveis como método de resolução para a atividade 02.

As análises das atividades da pesquisa de Souza (2010) apontam que os participantes do estudo utilizam com maior frequência a regra do produto e a formação de configurações solicitadas no enunciado para resolver problemas combinatórios. Frequentemente foram utilizados os registros do tipo tabular e figural na resolução das sete atividades propostas e, com menos regularidade os do tipo árvore e simbólico. Entretanto, as operações do tipo tratamento tiveram um maior destaque no registro simbólico. Como as atividades apresentam registro de partida em língua natural, foi possível observar nestes descritores os registros RLN→RTb, RLN→RSb, RLN→RAv, RLN→RFg. Além disso, a maior parte dos registros de chegada (respostas) são em língua natural.

Os descritores 04 e 05 também estão presentes nas resoluções das atividades propostas. Alguns participantes da pesquisa utilizaram a recursividade para resolver os problemas, neste método pudemos identificar explicitamente a mobilização do RLN→RAv e RLN→Rfg, sendo que os tratamentos foram executados no registro simbólico. Enquanto isso, alguns grupos utilizaram a estratégia da decomposição em subproblemas e para tal, uma diversidade maior de registros do tipo RTb, RAv, RFg e RSb.

Muito menos frequente foram identificados os descritores 06, 08, 09 e 10. Ou seja, o uso da regra da soma, tradução do problema a outro equivalente, uso da regra do produto e enumeração não sistemática não chegam a configurar um padrão de resolução de problemas nesta dissertação. Deste modo uma menor diversidade de registros foram identificados nestes descritores, podendo-se destacar RTb, RAv, RFg e RSb.

Por fim, cabe ressaltar que apenas na atividade 03 foi identificado um único descritor. As outras seis atividades apresentaram mais de um descritor nas resoluções propostas pelos estudantes; foram identificados isoladamente ou em associação, em que podemos citar o caso da recursividade, em que primeiro foram formadas algumas configurações do enunciado, para a partir da recursividade atingir, por meio da regra do produto ou soma, a resposta desejada.

A dissertação de Pinheiro (2008) propunha treze atividades das quais nove são do tipo seleção e quatro do tipo distribuição. Não houve a presença dos descritores 07 e 08 na resolução apresentada pelos participantes, respectivamente, fixar variáveis e tradução do problema a outro equivalente.

A primeira observação a ser feita é que somente nesta pesquisa foi identificada a presença de expressões algébricas e/ou fórmulas como meio de obtenção do resultado exigido no enunciado. Não nos surpreendemos ao observar que em todas as resoluções houve mudanças de registros no sentido RLN→RSb e, também, tratamentos no registro simbólico. As respostas foram dadas por meio de registro em língua natural e registro simbólico. Além disso, há neste, a presença conjunta do descritor 09.

Com exceção da atividade 15, em todas as demais foi identificada a regra do produto nas soluções apresentadas pelos participantes, ou seja, o descritor 02 esteve presente em quase todas as atividades. Foi possível identificar as modificações nos sentidos RLN→RFg, RLN→RTb, RLN→RAv e RLN→RSb, sendo estas na direção do registro de partida para o registro intermediário, mas também foram identificadas alterações nos registros intermediários no sentido RFg→RSb. Em todas as atividades há a presença do registro simbólico como intermediário, ora como principal ora como auxiliar.

O descritor 03 foi utilizado de maneiras diversas como estratégia de solução dos problemas. Alguns participantes formam as configurações solicitadas no enunciado para apoiar uma resolução por meio da regra do produto, outros como método principal de solução, e por fim, há aqueles que utilizaram este método para verificação da resolução por meio de outra estratégia. Mesmo assim, foram identificadas alterações das representações nos sentidos RLN→RTb e RLN→RSb, o que justifica uma presença maior dos registros do tipo RTb e RSb nos registros intermediários. Ainda observamos que todos os registros de chegada são em língua natural.

A recursividade foi utilizada como estratégia de resolução de problemas pelo mesmo grupo em duas atividades distintas, a atividade 09 e a atividade 18. Sendo que, na primeira foi utilizada como método principal e na segunda como confirmação da resolução produzida por meio da regra do produto. Portanto, na atividade 09 foi considerada a mudança no sentido RLN→RAv, enquanto na tarefa 18 não foi por se tratar apenas de uma confirmação. Assim, os registros intermediários identificados são do tipo árvore e simbólico.

Os descritores 05 e 06 são utilizados, de maneira geral, como apoio para outros métodos e como finalização da resolução. Isto é, a decomposição em subproblemas facilita a organização dos dados e a regra da soma é utilizada para a conclusão do resultado. Entretanto, alguns participantes também os utilizaram de forma isolada, gerando, desta forma, respostas incompletas ou equivocadas. Foi possível identificar modificações nos sentidos RLN→RAv e RLN→RFg. Há assim, uma predominância dos registros em árvore, figural e simbólico nestes descritores.

Assim, como na pesquisa de Souza (2010), o descritor 10 é pouco distinguível, fazendo-se presente por meio de registros tabulares, figurais ou em língua natural. Também é observável a associação de vários descritores em uma mesma atividade. Como é o caso do uso de expressões algébricas que envolve, em muitos casos, simultaneamente a regra do produto e quociente.

Um dos objetivos do trabalho de Fonseca (2012) era propor aos participantes a realização de atividades que não dependessem do conhecimento prévio de expressões algébricas para a sua resolução. Desse modo, não é de se estranhar que o descritor 01 não tenha sido identificado nas resoluções das atividades.

Com exceção da atividade 23 em todas as demais foi possível identificar o descritor 02, ou seja, em quase todas as atividades algum dos participantes resolveu o problema por meio da regra do produto. As alterações das representações identificadas se dão no sentido do registro de partida para o registro intermediário, sendo do tipo RLN→RSb, RLN→RAv e RLN→RTb. Por consequência também é possível identificar as mudanças nos sentidos RAv→RSb e RTb→RSb. Portanto, os registros que se destacam são os do tipo RSb, RAv e RTb, sendo que os tratamentos são essencialmente no registro simbólico. As atividades nas quais foi identificada a presença do descritor 02 são em sua grande maioria problemas do tipo seleção.

Os descritores 03, 04, 05 e 06 são mobilizados na mesma perspectiva em relação à dissertação de Pinheiro (2008). Com exceção do descritor 03, em que foi possível ser observado nos problemas do tipo seleção, distribuição e partição, os demais (descritores 04, 05 e 06) foram identificados essencialmente em atividades do tipo seleção. Em relação aos registros mobilizados, o descritor 06 por se tratar da regra da soma mobiliza basicamente o registro simbólico com tratamentos nos mesmos. Já os demais descritores apresentam uma diversidade maior de registros, sendo eles dos tipos RLN, RTb, RAv, RFg e RSb.

Enquanto isso o descritor 07 foi identificado apenas na dissertação de Fonseca (2012) e, apesar do seu uso não ter sido totalmente adequado, pois alguns grupos não utilizaram recorrência para concluir os resultados, foi possível observar mesmo em apenas três atividades, a presença dos registros de representação. Algumas modificações nas representações estão presentes em algumas resoluções, elas se dão no sentido RLN→RFg e RLN→RAv. Assim, os registros empregados são do tipo RLN, RFg, RAv e RSb, sendo que os tratamentos ocorreram no simbólico.

O descritor 10 esteve pouco presente nas resoluções apresentadas pelos participantes da pesquisa de Fonseca (2012). O mesmo foi identificado apenas nas atividades 23 e 25, sendo que na atividade 23 a enumeração não sistemática serviu como estratégia principal de resolução no registro figural e foi confirmado por meio de enumeração sistemática por meio de registro tabular. Enquanto isso na atividade 25 o procedimento não foi utilizado de modo adequado, sendo apresentado por meio do registro em língua natural.

As atividades propostas na pesquisa de Albuquerque (2014) se dividem entre problemas de seleção (atividades 36, 37 e 38) e problemas de partição (atividades 39 e 40). As atividades desta dissertação estão divididas em pré-teste e pós-teste, sendo em ambas as categorias os mesmos problemas. Por esse motivo incluímos os subíndices “a” e “b” na análise das atividades. Neste trabalho foi possível identificar cinco dos dez descritores, a saber: 02, 03, 05, 06 e 10. Isto quer dizer que foram identificados as estratégias de regra do produto, formar as configurações solicitadas, decompor o problema inicial em subproblemas, regra da soma e enumeração não sistemática. Tais estratégias foram utilizadas de modo semelhante em relação às demais dissertações. Entretanto, tais resoluções não apresentam uma diversidade no tipo de registros empregados, nem nos intermediários, nem nos de chegada. Os mais usuais foram RSb e RFg para os intermediários e RLN nos de chegada. Dessa forma as alternâncias dos registros são dos tipos RLN→RSb ou RLN→RFg. Concluímos que não houve uma modificação significativa dos registros empregados na resolução das atividades do pré-teste e nas apresentadas na resolução dos problemas do pós-teste.

Em relação ao MCI é possível concluir que 75% das atividades são problemas do tipo seleção, sendo que 10% destas foram identificadas na dissertação de Souza (2010), 30% na pesquisa de Pinheiro (2008), 43,3% no estudo de Fonseca (2012) e 16,7% no trabalho de Albuquerque (2014). Sobre estas questões do tipo seleção temos que: duas podem ser resolvidas por meio de arranjo com repetição; quatro com o auxílio de combinação; onze como se fosse arranjo e treze são do tipo composto (não podem ser resolvidas por meio de uma única fórmula).

Identificamos seis problemas do tipo distribuição, sendo que dois deles são compostos, um pode ser interpretado como uma aplicação injetiva (arranjo) e três podem ser concebidos como aplicação bijetora (permutação). Contabilizamos apenas quatro problemas como sendo do tipo partição.

Em relação aos descritores o mais apreciado foi o 02 que se refere ao uso da regra do produto. Ainda vale ressaltar que em 55% das atividades há a presença de três ou mais descritores, o que significa haver uma grande diversidade no emprego de estratégias de resolução de problemas combinatórios (regra do produto, enumeração das configurações, recursividade, decomposição em subproblemas e regra da soma).

Com a análise das atividades por meio dos descritores foi possível concluir que a resolução dos problemas por meio de fórmulas de permutação, arranjo e combinação, ao contrário do que imaginávamos, não configurou uma escolha óbvia pelos participantes das pesquisas, ou seja, essa estratégia não foi amplamente empregada. Quando utilizada esteve acompanhada da regra do quociente e/ou regra do produto. Sendo assim, o registro simbólico é privilegiado no descritor 01.

Pudemos confirmar a popularidade da regra do produto na resolução dos problemas combinatórios (GUZMÁN; BATANERO; GODINO, 2003), uma vez que o descritor 02 se fez presente nas resoluções de 32 (trinta e duas) das 40 (quarenta) atividades analisadas. Novamente, por se tratar de uma estratégia que envolve “produtos” numéricos, o registro de representação característico deste descritor é o simbólico. Em contrapartida, apesar do descritor 09 (regra do quociente) também ser caracterizado pelo registro simbólico, foi identificado nas resoluções de apenas seis atividades.

Enquanto isso, enumerar as configurações solicitadas (descritor 03), recursividade (descritor 04), decompor o problema inicial em subproblemas (descritor 05) e regra da soma (descritor 06) apareceram de forma isolada ou em conjunto na resolução das atividades. Estes descritores apresentaram uma diversidade grande em relação aos registros de representação semiótica.

Dentre as estratégias de resolução de problemas combinatórios as menos empregadas foram a de fixar variáveis (descritor 07) e a tradução do problema a outro equivalente (descritor 08). Em que vale destacar a presença dos registros em árvore, simbólico e figural no descritor 07 e o registro figural no descritor 08. Outra estratégia não muito empregada foi a de enumeração não sistemática (descritor 10), que na maioria das atividades configura um uso não bem sucedido, que atribuímos ao fato de que uma vez que não se conhece outra forma de resolver o problema, esta foi adotada. No descritor 10 os registros de representação privilegiados foram o simbólico, o tabular, o figural e em língua natural.

Para concluir, foi possível observar que se tratando dos registros de representação, as transformações destes, não são empregados com a intencionalidade original presente na teoria de Duval, em que os processos cognitivos são compreendidos por meio de tais mecanismos, ou seja, em que se cabe afirmar que o sujeito conhece um objeto quando transita entre suas diferentes representações, normalmente, por meio de conversões.

Mas sim, pudemos perceber que as representações e suas transformações[7] (tratamentos e conversões) adquirem uma característica de ferramenta de apoio para a resolução de problemas combinatórios. Isso ocorre porque os mecanismos de justificação e comprovação da solução exigem a mobilização das diferentes representações, porém, com a finalidade de obter uma resposta em língua natural para um problema que é (normalmente) enunciado neste mesmo tipo de registro.

Portanto, as diferentes representações semióticas (tabular, simbólica, gráfica, entre outras) mobilizadas para explorar um ente matemático podem adquirir o propósito de apreensão das características e comportamentos deste objeto. De outro modo, estes registros podem ser mobilizados devido à necessidade de justificação um procedimento adotado para resolver um problema que necessita, por exemplo, do emprego do raciocínio combinatório.

[7] Os extratos das atividades presentes nas dissertações que foram analisadas não permitem afirmar se as transformações eram ou não conversões e por isso nos limitamos a identificar os registros mobilizados.

4. REFLEXÕES

Ao iniciarmos as buscas por indícios que evidenciavam o emprego das representações na resolução de atividades que necessitam do raciocínio combinatório pairavam algumas dúvidas sobre nós: que critérios adotaríamos para a seleção das dissertações a serem estudadas? Será que conseguiríamos analisar todas as atividades? Elas apresentariam uma diversidade de registros? Como organizaríamos e apresentaríamos os dados? Creio que tais indagações, além de nos causar preocupações, tenham nos auxiliado a definir os caminhos de nossa pesquisa.

Com os critérios de seleção definidos conseguimos focar o nosso estudo em um número de atividades que fosse adequado para o nosso trabalho, tanto na questão do tempo quanto na confiabilidade dos resultados. Além disso, por meio desses critérios pudemos analisar duas dissertações produzidas no Rio Grande do Sul e duas fora do estado (uma de São Paulo e a outra do Pará).

Ao concluir esse estudo também consideramos que a escolha do referencial teórico sobre raciocínio combinatório foi imprescindível para o estabelecimento dos resultados, pois os artigos e trabalhos publicados por Batanero et al (1996, 1997, 2001 e 2003) nos deram suporte para compreender esse tipo de pensamento. Não somente como classificar as atividades que envolvem raciocínio combinatório, o modelo combinatório implícito nos mostrou quais estratégias poderíamos esperar encontrar na resolução de tais problemas. Assim, os descritores elaborados com base nessa teoria embasaram as análises das produções dos estudantes e permitiram identificar se e como os registros de representação semiótica foram mobilizados ao resolver atividades de contagem.

Esse foi o mote do nosso trabalho e procuramos fazer isso por meio de outras pesquisas, também com o intuito de valorizá-las. Porém, se fosse fazer algo diferente, além da análise das atividades presentes nestes estudos, teria aplicado algumas destas questões com estudantes locais, com o intuito de confirmar os resultados encontrados.

Por outro lado, vale ressaltar que nossa pesquisa se mostra importante por ampliar os mapeamentos de estudos que apresentam referencial teórico nos registros de representação semiótica, por exemplo, os encontrados em Colombo, Flores e Moretti (2008); Curi, Ferreira e Santos (2013) e Boemo, Mariani e Rosa (2014). Também por apresentarmos um mapeamento de pesquisas sobre o raciocínio combinatório. Por fim, por auxiliar na compreensão de como os alunos de ensino médio mobilizam registros de representação ao resolver atividades que necessitam esse tipo de raciocínio.

Ademais, uma contribuição importante da nossa pesquisa se dá em relação a minha prática profissional. Se antes olhava para os problemas de raciocínio combinatório como atividades que poderiam ser resolvidas por meio de fórmulas matemáticas, ou por meio do princípio multiplicativo, agora os vejo por outra perspectiva, a das muitas estratégias possíveis de ser empregadas para resolver tais atividades. Também, se antes acreditava que a mobilização dos registros de representação auxiliava apenas a estabelecer conexões e diferenças entre as características do enunciado, agora percebo que eles também podem ser empregados para que os alunos se apropriem das estratégias e mais do que isso, (por que não?) criem os seus próprios métodos de resolução de tais problemas.

Por fim, os resultados de nossa pesquisa poderiam ser complementados por outros estudos. Por exemplo, poderia ser pesquisado como os estudantes de ensino fundamental e/ou nível superior mobilizam os registros nesse mesmo tipo de atividades, ou seja, que envolvam contagem. Ainda, procurar indícios de conversões de registros em atividades mais detalhadas que permitam a identificação de tais transformações. Também poderia ser estudado como a compreensão que o estudante possui sobre as estratégias de resolução de problemas combinatórios afetam a mobilização dos registros de representação, quer dizer, será que os alunos prefeririam métodos que necessitam uma mobilização menor de tipos de registro em detrimentos às que necessitam de representações diferentes e transformações entre elas? Assim como estas, muitas outras pesquisas poderiam ser feitas com o intuito de ampliar a nossa e contribuir ainda mais para a evolução da Educação Matemática no Brasil.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, R. S. A. C**. Uma investigação no ensino médio sobre o raciocínio combinatório e a divergência de resultados na resolução de problemas de contagem**. 2014. p. 172. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas). Centro Universitário Univates, Lajeado, 2014.

ALMOULOUD, S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

ANDRÉ, M. Pesquisa qualitativa em Educação: buscando rigor e qualidade. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 113, p. 51-54, jul. 2001.

ARTIGUE, M. **Ingèniere didactique**. RDM, v. 9, n. 3, p. 231-308, 1988.

BATANERO, M. C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. **Razionamento Combinatorio.** Madrid: Síntesis, 1996.

BATANERO, M. C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. Combinatorial Reasoning and its assessment. In: Gal, I. & Garfield, J. B. (editors), **The Assessment Challenge in Statistics Education**. Amsterdam: International Statistical Institute & I.O.S. Press, 1997, p. 239-252. Disponível em: < https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbk/chapter18.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2016.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**. PROPOSIÇÕES. v. 4, n.1. São Paulo: UNICAMP, 1993, p. 18-23.

BICUDO, Maria A. V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis - SC, v. 9, Ed. Temática (junho), p. 07-20, 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/1981-1322.2014v9nespp7/27377>. Acesso em: 4 jan. 2016.

BOEMO, M. S. ,ROSA, C. W., E MARIANI, R. C. P. Os Registros de Representação Semiótica nas Pesquisas em Matemática: um olhar para os sistemas lineares e funções. In: ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2014, Santa Maria. **Anais eletrônicos...** Santa Maria, UFSM, 2014 Os Registros de Representação Semiótica nas Pesquisas em Matemática: Um olhar para os sistemas lineares e funções. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/CC/CC_Boemo_Marinela.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2016.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: 27ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 2004, Caxambu/MG. **Anais**... Caxambu/MG, 2004. p. 21-24.

BORBA, R. E. S. R.; AZEVEDO, J. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. v.6, n.2, junho 2013, pp. 113-140.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretária de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio, parte III, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Volume 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2ª versão revista, Brasília, 2016.

CHEVALLARD, Y; JOSHUA, M. A. **La Transposition Didactique:** du savoir suivant au savoir enseignée**.** Suivie de um exemple de la transposition didactique. Éditions la Pensée Sauvage, 1991.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de Representação Semiótica nas Pesquisas Brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **ZETETIKÉ** – Cempem, FE. Unicamp, v. 16, n. 29, jan./jun. 2008.

CURI, E.; FERREIRA, F. A.; SANTOS, C. A. B. Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica. **EM TEIA** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. v. 4, n. 2, 2013.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas**. 12. ed. São Paulo: Ática, 2002.

DUVAL, R. **Régistres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pense**. Anales de Didactique et de Sciences Cognitives, v. 5, p. 37-65, IREM de Strasbourg, 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine:** Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang, Berne, 1995.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara Aprendizagem Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e Ensinar a Matemática de Outra Forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**. Florianópolis, v.7, n.1, p.118-138, 2012a.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: MériclesThadeu Moretti. **REVEMAT**. Florianópolis, v.7, n.2, p.266-297, 2012b.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental**. 2001. 203 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

FILHO, C. P. **Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental**. 2008. 231 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 1ª ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

FONSECA, G. A. M. **Análise Combinatória na Educação de Jovens e Adultos:** uma proposta de ensino a partir da resolução de problemas. 2012. 178 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

FRANCHI, A. et al. **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. Org. Silvia Dias Alcântara Machado – 3 ed. Revisada, 2 reimpr. – São Paulo: EDUC, 2012.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GERDENITS, G. A. M. **Raciocínio combinatório: uma proposta para professores de matemática do ensino fundamental – anos finais**. 2014. 170 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2014.

GUZMÁN, R. R.; BATANERO, M. C.; GODINO, J. D. Difucultad de los problemas combinatorios en estudiantes con preparación matemática avanzada. **Números revista de didáctica de las matemáticas**, Espanha, v. 47, set. 2001, p. 33-47. Disponível em: <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/47/Articulo03.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2016.

GUZMÁN, R. R.; BATANERO, M. C.; GODINO, J. D. Estrategias generales y estrategias aritméticas em la resolución de problemas combinatorios . **Educación Matemática**, v. 15, n. 2, 2003, p. 05-26. Disponível em:
< http://www.redalyc.org/pdf/405/40515201.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2016.

JOHNSON-LAIRD, Philip, N. **Mental Models.** Cambridge, M. A.: Harvard University Press, 1983.

LIMA, T. R. C. **Ensinando e aprendendo análise combinatória através da leitura e resolução de problemas e da construção de enunciados**. 2011. 149 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, M. C.; GODINO, J. D.; Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. **Educación Matemática**, Espanha v. 8 (1), 1996, p. 26-39. Disponível em: <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/RAZON.pdf>.

Acesso em: 16 mar. 2016.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N.S.G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A.; BORBA, M. (orgs) **Educação Matemática – pesquisa em movimento**, São Paulo: Cortez, p.213-231, 2004.

PESSOA, C.; BORBA, R. O raciocínio combinatório do início do ensino fundamental ao término do ensino médio. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÂO MATEMÀTICA, 2010, Salvador/BA. **Anais**... Salvador/BA: Universidade Católica do Salvador, 2010. Disponível em: <http:// http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/>. Acesso em: 26 fev. 2016.

PINHEIRO, C. A. M. **O Ensino de Análise Combinatória a partir de Situações-Problema**. 2008. 166 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual do Pará, Belém, 2008.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1944.

POLYA, G. **Mathematical Discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving.** v.01, Jonh Wiley & Sons, 1962.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2003.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática**. Bolema**, nº 25, p. 105-132, 2006.

RIBEIRO, José Luis Duarte; ECHEVESTE, Márcia Elisa Soares; DANILEVICZ, Ângela de Moura Ferreira**. A utilização do QFD na otimização de produtos, processos e serviços**. Porto Alegre: FEEng / UFRGS, 2001.

SAMPIERE, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, P.B. **Metodologia de Pesquisa.** Trad. Fátima Conceição Murad; Melissa Kassner; Sheila Clara Dystyler Ladeira. 3 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

SHULMAN, L.S. **Those who understand:** knowledge growth in teaching. Educational Researcher. V.15. 1986.

SILVA, C. M. S; SANTOS-WAGNER, V. M. P. **O que um iniciante deve saber sobre a Pesquisa em Educação Matemática?** Caderno de Pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFES, Vitória: UFES, n. 10, p. 10-23, 1999.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas**. 2010. 344 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista – Campus de Rio Claro, Rio Claro, 2010.

STENHOUSE, L. **An introduction to curriculum research and development.** Londres: Heinemann, 1975.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** Ed. 9. Petrópolis: Vozes, 2008.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, 2001.

VERGNAUD, G. **El Niño, las Matemáticas y la Realidade: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primária**. Editorial Trillas. México, 1991.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for Mathematics Education. **JBM – Journal of Mathematical Behaviour**. v. 17, n. 2, p. 167-161, 1998.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: 1º SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1993, Rio de Janeiro/RJ. **Anais**... v. 1, p. 1-26, 1993.

APÊNDICE A – MAPEAMENTO DE DISSERTAÇÕES E TESES COM O REFERENCIAL TEÓRICO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

(continua)

Região	IES	Programa	A	F	D	T
CO	UFMS	Educação Matemática	00	00	00	02
		Ensino de Ciências	00	00	00	
		Educação*	02	00	00	
	IFG	Educação para Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UNB	Educação em Ciências	00	00	00	00
		Ensino de Ciências	00	00	00	
	UNEMAT	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UEG	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	UEMS	Educação Científica e Matemática	00	00	00	00
	UNICENTRO	Ensino de Ciências Naturais e Matemática	00	00	00	00
	UFG	Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFMT	Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	02
		Ensino de Ciências Naturais	00	00	00	
		Educação*	02	00	00	
NE	FUFSE	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	IFCE	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UECE	Educação*	04	00	00	04
	UEPB	Ensino de Ciências e Educação Matemática	00	00	00	00
		Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	
	UEFS	Ensino, Filosofia e História das Ciências	00	00	00	00
	UESB	Educação Científica e Formação de Professores	00	00	00	00
	UFBA	Ensino, Filosofia e História das Ciências	00	00	00	00
	UFAL	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFPE	Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	03
		Educação Matemática e Tecnológica	03	00	00	
	UFC	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFMA	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFRN	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
		Ensino de Ciências Naturais e Matemática	00	00	00	
	UFRPE	Ensino das Ciências	00	00	00	00
N	UEA	Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	00
		Educação em Ciências na Amazônia	00	00	00	
		Ensino de ciências na Amazônia	00	00	00	
	UERR	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	UFAC	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFAM	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFPA	Docência em Educação em Ciências e Matemáticas	00	00	00	01
		Educação em Ciências e Matemática	01	00	00	
		Educação em Ciências e Matemáticas	00	00	00	
SE	CEFET/RJ	Ciência Tecnologia e Educação	00	00	00	01
		Ensino de Ciências e Matemática	00	01	00	
	UNISAL	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	UFABC	Ensino, História e Filosofia das Ciências e Mat.	00	00	00	00
	UEPG	Educação*	02	00	00	02
	UENF	Cognição e Linguagem****	01	00	00	01
	IFSP	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	IFES	Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	00
	IFRJ	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	PUC/MG	Ensino	00	02	00	02
	PUC/SP	Educação Matemática	43	39	09	92
		Educação*	01	00	00	

(conclusão)

SE	UNIAN/SP	Educação Matemática	00	00	00	00
	UNIBAN	Educação Matemática	04	00	00	04
	UNICSUL	Ensino de Ciências e Matemática	00	04	00	04
	UNESP/BAU	Educação para a Ciência	00	00	00	00
	UNESP/MA	Educação*	00	00	01	01
	UNESP/RC	Educação Matemática	01	00	00	01
	UNIGRANRIO	Ensino das Ciências***	00	01	00	01
	UNICAMP	Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	02
		Educação*	02	00	00	
	UNIFEI	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	UFJF	Educação Matemática	00	00	00	00
	UFOP	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	UFSCAR	Ensino de Ciências Exatas***	00	01	00	01
	UFU	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFES	Ensino de Física	00	00	00	00
	UFRJ	Ensino de Física	00	00	00	06
		Ensino de Matemática	06	00	00	
	USP	Educação*	01	00	00	01
	USU	Educação Matemática	00	00	00	00
	USS	Educação Matemática***	00	01	00	01
S	UNIFRA	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UNIJUI	Educação nas Ciências*	02	00	00	02
	UNISUL	Ciências da Linguagem**	01	00	00	01
	FUPF	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UNIPAMPA	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	UNIVATES	Ensino de Ciências Exatas	00	00	00	00
	IFSul	Ciências e Tecnologias na Educação	00	00	00	00
	PUC/RS	Educação em Ciências e Matemática	03	00	00	03
	URI	Ensino Cientifico e Tecnológico	00	00	00	00
	UCS	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UEL	Ensino de Ciências e Educação Matemática	04	00	00	04
	UEM	Educação para a Ciência e a Matemática	00	00	00	00
		Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática	00	00	00	
	UESC	Educação Matemática	00	00	00	00
		Educação em Ciências	00	00	00	
	UFPEL	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFSC	Educação Cientifica e Tecnológica	11	00	03	14
	UFSM	Educação Matemática e Ensino de Física	00	00	00	00
	UFPR	Educação em Ciências e em Matemática	00	00	00	00
	UFRGS	Ensino de Física	00	00	00	04
		Ensino de Matemática	00	04	00	
	ULBRA	Ensino de Ciências e Matemática	03	00	00	03
	FURB	Ensino de Ciências Naturais e Matemática***	00	01	00	01
	UTFPR	Ensino de Matemática	00	00	00	00
		Formação Científica, Educacional e Tecnológica	00	00	00	

Fonte: Autor.

APÊNDICE B – MAPEAMENTO DE DISSERTAÇÕES E TESES COM REFERENCIAL TEÓRICO NO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

(continua)

Região	IES	Programa	A	F	D	T
CO	UFMS	Educação Matemática	00	00	00	00
		Ensino de Ciências	00	00	00	
	IFG	Educação para Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UNB	Educação em Ciências	00	00	00	00
		Ensino de Ciências	00	00	00	
	UNEMAT	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UEG	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	UEMS	Educação Científica e Matemática	00	00	00	00
	UNICENTRO	Ensino de Ciências Naturais e Matemática	00	00	00	00
	UFG	Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFMT	Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	00
		Ensino de Ciências Naturais	00	00	00	
NE	FUFSE	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	IFCE	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UEPB	Ensino de Ciências e Educação Matemática	00	00	00	00
		Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	
	UEFS	Ensino, Filosofia e História das Ciências	00	00	00	00
	UESB	Educação Científica e Formação de Professores	00	00	00	00
	UFBA	Ensino, Filosofia e História das Ciências	00	00	00	00
	UFAL	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFPB	Educação*	01	00	00	01
	UFPE	Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	14
		Educação Matemática e Tecnológica	09	00	00	
		Educação*	01	00	01	
		Psicologia**	02	00	01	
	UFC	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFMA	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFRN	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
		Ensino de Ciências Naturais e Matemática	00	00	00	
	UFRPE	Ensino das Ciências	01	00	00	01
N	UEA	Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	01
		Educação em Ciências na Amazônia	00	00	00	
		Ensino de ciências na Amazônia	00	00	00	
		Educação*	01	00	00	
	UERR	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	UFAC	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFAM	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFPA	Docência em Educação em Ciências e Matemáticas	01	00	00	01
		Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	
		Educação em Ciências e Matemáticas	00	00	00	
SE	CEFET/RJ	Ciência Tecnologia e Educação	00	00	00	00
		Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	
	UNISAL	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	UFABC	Ensino, História e Filosofia das Ciências e Mat.	00	00	00	00
	IFSP	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	IFES	Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	00
	IFRJ	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	PUC/SP	Educação Matemática	05	02	01	08
	UNIAN/SP	Educação Matemática	00	00	00	00
	UNIBAN	Educação Matemática	00	00	01	01
	UNICSUL	Ensino de Ciências e Matemática	03	00	00	03
	UNESP/BAU	Educação para a Ciência	00	00	00	00

(conclusão)

SE	UNESP/RC	Educação Matemática	01	00	00	01
	UNICAMP	Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	01
		Educação*	01	00	00	
	UNIFEI	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	UFJF	Educação Matemática	00	00	00	00
	UFOP	Ensino de Ciências	00	00	00	01
		Educação Matemática***	00	01	00	
	UFSCAR	Ensino de Ciências Exatas***	03	00	00	03
	UFU	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFES	Ensino de Física	00	00	00	00
	UFRJ	Ensino de Física	00	00	00	01
		Ensino de Matemática	01	00	00	
	USU	Educação Matemática	00	00	00	00
S	UNIFRA	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	FUPF	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UNIPAMPA	Ensino de Ciências	00	00	00	00
	UNIVATES	Ensino de Ciências Exatas	00	01	00	01
	IFSul	Ciências e Tecnologias na Educação	00	00	00	00
	PUC/RS	Educação em Ciências e Matemática	00	00	00	00
	URI	Ensino Cientifico e Tecnológico	00	00	00	00
	UCS	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UEL	Ensino de Ciências e Educação Matemática	00	00	00	00
	UEM	Educação para a Ciência e a Matemática	00	00	00	00
		Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática	00	00	00	
	UESC	Educação Matemática	00	00	00	00
		Educação em Ciências	00	00	00	
	UFPEL	Ensino de Ciências e Matemática	00	00	00	00
	UFSC	Educação Cientifica e Tecnológica	00	00	00	00
	UFSM	Educação Matemática e Ensino de Física	00	00	00	00
	UFPR	Educação em Ciências e em Matemática	00	00	00	00
	UFRGS	Ensino de Física	00	00	00	03
		Ensino de Matemática	00	02	00	
		Educação*	01	00	00	
	ULBRA	Ensino de Ciências e Matemática	02	00	00	02
	UTFPR	Ensino de Matemática	00	00	00	
		Formação Científica, Educacional e Tecnológica	00	00	00	

Fonte: Autor.

APÊNDICE C – MAPEAMENTO DE PESQUISAS EMBASADAS NOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

(continua)

Instituição	Programa	Autor	Título	Ano
CEFET/RJ	Ensino de Ciências e Matemática	André Luis dos Santos Menezes	Um novo olhar na resolução de problemas matemáticos através das representações semióticas	2005
FURB/SC	Ensino de Ciências e Matemática	Ilizete Gonçalves Lenartovicz	Aplicação da teoria dos registros de representação semiótica de Rayond Duval no estudo de funções polinomiais do 1º grau no curso de administração	2013
PUC/MG	Ensino de Ciências e Matemática	Jorge Henrique Gualandi	Investigações matemáticas com grafos para o ensino médio	2012
		Tereza Raquel Couto de Lima	Ensinando e aprendendo análise combinatória através da leitura e resolução de problemas e da construção de enunciados	2011
PUC/RS	Educação em Ciências e Matemática	Daniela Fouchard Severo	Números racionais e ensino médio: uma busca de significados	2009
		Elisabete Rambo Braga	A compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática no ensino fundamental com o recurso da planilha	2009
		Rafael Winícius da Silva Bueno	As múltiplas representações e a construção do conceito de função	2009
PUC/SP	Educação Matemática	Adriana Tiago Castro dos Santos	O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra	2011
		Ailton Martins dos Santos	Mensuração, algarismos significativos e notação científica: um estudo diagnóstico do processo ensino-aprendizagem, considerando o cálculo e a precisão de medidas	2002
		Alessandro Jacques Ribeiro	Equações e seus multissignificados no ensino da matemática: contribuições de um estudo epistemológico	2007
		Ana Maria Paias	Diagnóstico dos erros sobre a operação potenciação aplicado a alunos dos ensinos fundamental e médio	2009
		Anderson Barros Lucas	Equações e funções: descontinuidades conceituais	2009
		André Lúcio Grande	O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de álgebra linear	2006
		Armando Traldi Júnior	Sistema de inequações do 1º grau: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações	2002
		Camila Molina Palles	Um estudo do icosaedro a partir da visualização em geometria dinâmica	2013
		Carlos Antônio da Silva	A noção de integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica	2004
		Carlos Nely Clementino de Oliveira	Números complexos: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos	2010
		Carlos Roberto da Siva	Explorando equações cartesianas e paramétricas em um ambiente informático	2006

(continuação)

PUC/SP	Educação Matemática	Cintia Rosa da Silva	Signos peirceanos e registros de representação semiótica: qual semiótica para a matemática e seu ensino?	2013
		Cristiane Regina de Moura Ferreira	Os alunos do 1º ano do ensino médio e os padrões: observação, realização e compreensão	2009
		Cristina Berndt Penteado	Concepções do professor do ensino médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade	2004
		Custódio Thomaz Kerry Martins	Uma engenharia didática para explorar o aspecto de processo dinâmico presente nos algoritmos	2010
		Desiree Frasson Balielo Picone	Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo	2007
		Diana Maia	Função quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional	2007
		Edelweiss Benez Brandão Pelho	Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis	2003
		Edivaldo Pinto dos Santos	Função afim y=ax+b: a articulação entre os registros gráfico e algébrico com o auxílio de um software educativo	2002
		Eliana Maria Bauschert de Freitas	Relações entre mobilização dos registros de representação semiótica e os níveis de letramento estatístico com duas professoras	2010
		Gina Magali Horvath Miranda	Um sistema baseado em conhecimento com interface em língua natural para o ensino de transformações geométricas	2009
		Graziele Cristine Moraes da Silva	O ensino e a aprendizagem de expressões numéricas para 5ª série do ensino fundamental com a utilização do jogo contig 60	2009
		Irma Verri Bastian	O teorema de Pitágoras	2000
		Inês Esteves	Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do ensino fundamental	2001
		Jailma Ferreira Guimarães	As concepções da álgebra articuladas aos conteúdos de matemática no ensino fundamental	2013
		Jesus Victoria Flores Salazar	Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço	2009
		João Carlos Passoni	(Pré-)álgebra: introduzindo os números inteiros negativos	2002
		Jose Fernando Possani	Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular	2012
		José João de Melo	Docência de inequações no ensino fundamental da cidade de Indaiatuba	2007
		Leila Mondanez	Das sequências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico	2003
		Luciana Simoneti Ferreira Cardia	Integrando a geometria com a álgebra na construção de expressões algébricas	2007
		Luis Manuel Peliz Marques Bica	Funções em livros didáticos: relações entre aspectos visuais e textuais	2009
		Luiz Felipe Simões de Godoy	Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem	2004
		Marcelo de Melo	O ensino de desigualdades e inequações em um curso de licenciatura em matemática	2007

(continuação)

PUC/SP	Educação Matemática	Marcia Maioli	Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros	2002
		Márcia Vieira	Análise exploratória de dados: uma abordagem com alunos do ensino médio	2008
		Maria Bethânia Sardeiro dos Santos	Um olhar para o conceito de limite: constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu ensino e aprendizado	2013
		Maria Lúcia Torelli Doria de Andrade	Geometria esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no ensino básico	2011
		Michele Viana Debus de França	Conceitos fundamentais de álgebra linear: uma abordagem integrando geometria dinâmica	2007
		Monica Karrer	Articulação entre álgebra linear e geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica	2006
		Nancy Cury Andraus Haruna	Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem	2000
		Rita de Cássia Pistóia Mariani	Transição da educação básica para o ensino superior: a coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de cálculo	2006
		Roberto Seidi Imafuku	Sobre a passagem do estudo de uma função de uma variável real para o caso de duas variáveis	2008
		Rogério dos Santos Lobo	O tratamento dado por livros didáticos ao conceito de derivada	2012
		Rogério Fernando Pires	Função: concepções de professores e estudantes dos ensinos médio e superior	2014
		Ronaldo Pereira Campos	A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica	2007
		Samira Choukri de Castro	Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação	2001
		Sonia Regina Facco	Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem	2003
		Vera Helena Giusti de Souza	O uso de vários registros na resolução de inequações: uma abordagem funcional gráfica	2007
		Wagner Sanches Lopes	A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino	2003
		Yuk Wah Hsia	A utilização do livro didático pelo aluno ao estudar integral	2006
	Ensino de Matemática	Adinilson Marques Reis	Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino médio	2011
		Alexandre de Paula Silva	Conceito de função: atividades introdutórias propostas no material de matemática do ensino fundamental da rede pública estadual de São Paulo	2008
		Ana Lucia Infantozzi Jordão	Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do ensino médio	2011
		Carla dos Santos Moreno Battaglioli	Sistemas lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos	2008
		Celso Pedrosa Filho	Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental (7 e 8 anos)	2008

(continuação)

PUC/SP	Ensino de Matemática	Cláudia Pereira dos Santos	Função seno: um estudo com o uso do software Winplot com alunos do ensino médio	2013
		Cláudia Vicente de Souza	A função exponencial no caderno do professor de 2008 da secretaria do estado de São Paulo, análise de atividades realizadas por alunos da 2ª série do ensino médio	2010
		Cláudio Pousa Moraes Barros	Análise de atitudes de alunos na educação de jovens e adultos em situação de resolução de problemas	2008
		Diana Mazo Malheiro	Sugestões complementares para o ensino de números fracionários tendo por base a organização proposta pelo estado de São Paulo após a Nova Proposta Curricular	2011
		Edílson Paiva de Souza	As funções seno e cosseno: diagnóstico de dificuldades de aprendizagem através de sequências didáticas com diferentes mídias	2010
		Edson Eduardo Castro	Um estudo exploratório das relações funcionais e suas representações no terceiro ciclo do ensino fundamental	2011
		Edson Rodrigues da Silva	Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no ensino médio	2012
		Fabio Correa Scano	Função afim: uma sequência didática envolvendo atividades com o GeoGebra	2009
		Fábio Muniz do Amaral	Validação de sequência didática para (re)construção de conhecimentos estatísticos por professores do ensino fundamental	2010
		Fernando da Silva Conceição Junior	Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no ensino médio	2011
		Gilberto Pereira Paulo	Uma proposta para o ensino e aprendizagem dos conceitos de área de círculo de perímetro de circunferência	2012
		Helena Nishimoto	Contribuições de diferentes linguagens na habilidade de resolução de problemas: um estudo com alunos do ensino fundamental	2008
		Humberto Todesco	Um estudo com os números inteiros nas séries iniciais: reaplicação da pesquisa de Passoni	2006
		Jacinto Ordem	Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique	2010
		José Zucco	Funções monotônicas: alunos da 3ª série do ensino médio frente às Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas	2010
		Juliana de Lima Gregorutti	Construção dos critérios de divisibilidade com alunos de 5ª série do ensino fundamental por meio de situações de aprendizagem	2009
		Leandro Marques	Sobre a utilização do livro didático no estudo de derivadas parciais	2009
		Ligia Maria da Silva	O tratamento dado ao conceito de função em livros didáticos da educação básica	2010
		Marcelo Cardoso Ferraz	Prisma e pirâmide: um estudo didático de uma abordagem computacional	2010
		Marcelo Cordeiro da Silva	Reta graduada: um registro de representação dos números racionais	2008

(continuação)

PUC/SP	Ensino de Matemática	Marcelo Dugan Dell'orti	Representações gráficas: conhecimentos mobilizados por alunos do ensino médio na compreensão e análise de informações contidas em gráficos	2010
		Maria Adriana Pagan	A interdisciplinaridade como proposta pedagógica para o ensino de estatística na educação básica	2009
		Nilza Aparecida de Freitas	Sistemas de equações lineares: uma proposta de atividades com abordagem de diferentes registros de representação semiótica	2013
		Pedro Mateus	Cálculo diferencial e integral nos livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica	2006
		Raquel Santos Silva	Estudo da reta em geometria analítica: uma proposta de atividades para o ensino médio a partir de conversões de registros de representação semiótica com o uso do software geogebra	2014
		Renata Siano Gonçalves	Um estudo com os números inteiros usando o programa Aplusix com alunos da 6ª série do ensino fundamental	2007
		Ronaldo Dias Ferreira	Contribuições do GeoGebra para o estudo de funções afim e quadrática em um curso de licenciatura em matemática	2013
		Rosana Aparecida da Costa Vaz	SERESP/2005: uma análise de questões de matemática da 7ª série do ensino fundamental, sob a ótica dos níveis de mobilização de conhecimentos e dos registros de representação semiótica	2008
		Salete Rodrigues	Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com o auxílio do programa Aplusix	2008
		Sandra Regina Leme Foster	Ensino a distância: uma análise do design de um curso de Cálculo com o olhar no conteúdo de limites e continuidade de uma variável real	2007
		Sérgio Aparecido dos Santos	Ambiente informatizado: para o aprofundamento da função quadrática por alunos da 2ª série do ensino médio	2009
		Silvana Pereira	A leitura e interpretação de tabelas e gráficos para alunos do 6º ano do ensino fundamental: uma intervenção de ensino	2009
		Talita Carvalho Silva de Almeida	Sólidos arquimedianos e cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento	2010
		Umberto Almeida da Silva	Análise da abordagem de função adotada em livros didáticos de matemática da educação básica	2007
		Vagner Valeiro Ramos	Dificuldades e concepções de alunos de um curso de licenciatura em matemática, sobre derivada e suas aplicações	2009
	Educação	Edier Yorley Henao Henao	Compreensão de textos com conteúdos matemáticos por parte de aprendizes jovens e adultos/as	2006
USS/RJ	Educação Matemática	Jacqueline da Silva Gil	Uma abordagem lúdica para as diferentes representações do número racional positivo	2012
UECE/CE	Educação	Ana Cláudia Gouveia de Souza	Representações semióticas e formação docente para o trabalho com números e operações nos anos iniciais do ensino fundamental	2009

(continuação)

UECE/CE	Educação	Bárbara Pimenta de Oliveira	Reflexões à luz da teoria dos registros de representação semiótica acerca das práticas dos professores que ensinam matemática	2014
		Larissa Elfisia de Lima Santana	A formação inicial do pedagogo para o ensino de fração	2012
		Silvana Holanda da Silva	Conhecimento de professores polivalentes em geometria: contribuições da teoria dos registros de representação semiótica	2011
UEL/PR	Ensino de Ciências e Educação Matemática	Cristina Aparecida de Melo	Registros de representação semiótica e uso didático da história da matemática: um estudo sobre parábola	2009
		Karina Alessandra Pessôa da Silva	Modelagem matemática e semiótica: algumas relações	2008
		Nilton Cesar Garcia Salgueiro	Como estudantes do ensino médio lidam com registros de representação semiótica de funções	2011
		Paulo Sérgio de Camargo Filho	Dificuldades semióticas na construção de gráficos cartesianos em cinemática	2011
UENF/RJ	Cognição e Linguagem	Patrícia Maria dos Santos	Aplicação da modelagem matemática no ensino médio à luz da teoria dos registros de representação semiótica	2012
UEPG/PR	Educação	Fátima Aparecida Queiroz Dionizio	Conhecimentos docentes: uma análise dos discursos de professores que ensinam matemática	2013
		Gabriela Teixeira Kluppel	Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval	2012
UFMS/MS	Educação	Dejahyr Lopes Junior	Função do 1º grau: um estudo sobre seus registros de representação semiótica por alunos da 1ª série do ensino médio	2006
		José Roberto Damasceno da Silva	Um estudo de registros de representação semiótica na aprendizagem dos conceitos de máximos e mínimos de funções	2005
UFMT/MT	Educação	Edson Benedito Antunes Angelo da Silva	A introdução de conceitos algébricos em livros didáticos do 8º ano do ensino fundamental à luz dos registros de representação semiótica	2012
		Isabella Moreira de Paiva Corrêa	Como se fala matemática? Um estudo sobre a complementaridade entre representação e comunicação na educação matemática	2008
UFPA/PA	Educação em Ciências e Matemática	Rafael Silva Patrício	As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica	2011
UFPE/PE	Educação Matemática e Tecnológica	Amanda Barbosa da Silva	Triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica	2014
		Dayse Bivar da Silva	Analisando a transformação entre gráficos e tabelas por alunos do 3º e 5º ano do ensino fundamental	2012
		Wagner Rodrigues Costa	Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau	2010

(continuação)

UFRGS/RS	Ensino de Matemática	Larissa Weyh Monzon	Números complexos e funções de variável complexa no ensino médio - uma proposta didática com uso de objeto de aprendizagem	2012
		Margarete Farias Medeiros	Geometria dinâmica no ensino de transformações no plano - uma experiência com professores da educação básica	2012
		Mauricio Ramos Lutz	Uma sequência didática para o ensino de estatística a alunos do ensino médio na modalidade proeja	2012
		Rodrigo Sychocki da Silva	O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica	2012
UFRJ/RJ	Ensino de Matemática	Alexandre Machado Souto	Análise dos conceitos de número irracional e número real em livros didáticos da educação básica	2010
		André Seixas de Novais	Equações indeterminadas e lugares geométricos: uma proposta alternativa para o estudo de equações em R^2	2011
		Marli Duffles Donato Moreira	Revisitando Euclides para o ensino de áreas: uma proposta para as licenciaturas	2010
		Valéria Moura da Luz	Introdução ao cálculo: uma proposta associando pesquisa e intervenção	2011
		Vilmar Gomes da Fonseca	O uso de tecnologias no ensino médio: a integração de Mathlets no ensino da função afim	2011
		Wellerson Quintaneiro	Representações e definições formais em trigonometria no ensino médio	2010
UFSC/SC	Educação Científica e Tecnológica	Afrânio Austregésilo Thiel	Práticas matemáticas no plano cartesiano: um estudo da coordenação de registros de representação	2013
		Célia Finck Brandt	Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração	2005
		Daiani Lodete Pirola	Aprendizagem em geometria nas séries iniciais: uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual	2012
		Elizangela Gonçalves de Araujo	O tratamento da informação nas séries iniciais: uma proposta de formação de professores para o ensino de gráficos e tabelas	2008
		Ivone Catarina Freitas Buratto	Representação semiótica no ensino da geometria: uma alternativa metodológica na formação de professores	2006
		Janecler Aparecida Amorin Colombo	Representações semióticas no ensino: contribuições para reflexões acerca dos currículos de matemática escolar	2008
		José Roque Damaso Neto	Registros de representação semiótica e o geogebra: um ensaio para o ensino de funções trigonométricas	2010
		Karina Zolia Jacomelli	A linguagem natural e a linguagem algébrica: nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental	2006
		Madeline Odete Silva	Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica	2008

(continuação)

UFSC/SC	Educação Científica e Tecnológica	Nicélio José Jesser	Registros de representação semiótica e análise de dados em ambiente informático	2012
		Patrícia Lanzini Franco	Estudo de formas de negação no ensino da Matemática: ponto de encontro com os registros de representação semiótica	2008
		Roberta Schnorr Buehring	Análise de dados no início da escolaridade: uma realização de ensino por meio dos registros de representação semiótica	2006
		Selma Felisbino Hillesheim	Os números inteiros relativos em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais	2013
		Suelen Maggi Scheffer Vieira	Registros semióticos em porcentagem: análise da produção de alunos na resolução de problemas tri-particionados	2013
UFSCAR/ SP	Ensino de Ciências Exatas	Leila Canaveze	O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP	2013
ULBRA/ RS Canoas	Ensino de Ciências e Matemática	Jeane Gardênia Costa do Nascimento	Investigando a utilização de uma sequência didática para o ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus	2009
		Joseide Justin Dallemole	Registros de representação semiótica e geometria analítica: uma experiência com o ambiente virtual Siena	2010
		Luísa Silva Andrade	Registros de representação semiótica e a formação de professores em matemática	2008
UNESP/SP Marília	Educação	Raimundo Luna Neres	Aplicação dos registros de representação semiótica no ensino-aprendizagem da matemática: um estudo com alunos do sexto ano do ensino fundamental	2010
UNESP/SP Rio Claro	Educação Matemática	Maria Margarete do Rosário Farias	As representações matemáticas mediadas por softwares educativos em uma perspectiva semiótica: uma contribuição para o conhecimento do futuro professor de matemática	2007
UNIBAN/ SP	Educação Matemática	Alexsandro Soares Candido	O Ensino e a aprendizagem do produto de vetores na perspectiva dos registros de representação semiótica com auxílio do software cabri 3D	2010
		Ana Luisa de Castro	Tecnologias digitais da informação e comunicação no ensino de funções quadráticas: contribuições para compreensão das diferentes representações	2011
		Pedro Marques Correa Neto	Distribuição binomial: um experimento de ensino utilizando o software R com foco na exploração de registros de representação semiótica	2010
		Renato Mendes Mineiro	Atividades para o estudo de superfícies quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional	2011
UNICAMP /SP	Educação	Lenir Morgado da Silva	Estratégias de utilização de registros de representação semiótica na resolução de problemas matemáticos	2007
		Patrícia Maria Almeida Sader Azevedo	Um processo de ensino/aprendizagem de equações vivido por alunos jovens e adultos em sala de aula: transitando por registros de representação	2002

(conclusão)

UNICSUL/SP	Ensino de Ciências e Matemática	Adriana Domingues Freitas	A Utilização do Geogebra no Ensino de Matemática: Recurso para os Registros de Representação e Interação	2009
		Maria Jesus Martinez Viel	A Importância da Representação Simbólica no Ensino Aprendizagem da Noção Intuitiva de Números Racionais	2008
		Rogério Rodrigues de Faria	Uma abordagem didática em relação à aprendizagem das equações de reta no estudo de Geometria Analítica no Ensino Médio	2011
		Sirlene Neves de Andrade	Possibilidades de articulação entre as diferentes formas de conhecimento: a noção de função afim	2006
UNIGRANRIO/RJ	Ensino de Matemática	Carlos José Borges Delgado	O ensino da função afim a partir dos registros de representação semiótica	2010
UNIJUÍ/RS	Educação nas Ciências	Franciele Catelan Cardoso	O ensino da geometria analítica em um curso de licenciatura em matemática: uma análise da organização do processo educativo sob a ótica dos registros de representação semiótica	2014
		Maria Arlita da Silveira Soares	Os números racionais e os registros de representação semiótica: análise de planejamentos das séries finais do ensino fundamental	2007
UNISUL/SC	Ciências da Linguagem	Fernanda Medeiros Alves Besouchet Martins	O número como signo: relatos de uma experiência de ensino de frações a partir das teorias sócio-interacionista e dos registros de representação semiótica	2012
USP/SP	Educação	Robinson Nelson dos Santos	Semiótica e educação matemática: registros de representação aplicados à teoria das matrizes	2011

Fonte: Autor.

APÊNDICE D – MAPEAMENTO DE PESQUISAS EMBASADAS NOS RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

(continua)

Instituição	Programa	Autor	Título	Ano
PUC/SP	Educação Matemática	Carlos Alberto de Miranda Pinheiro	Análise Combinatória: organizações matemáticas e didáticas dos livros escolares brasileiros no período entre 1895 - 2009	2015
		Carlos Eduardo de Campos	Análise combinatória e proposta curricular paulista: um estudo dos problemas de contagem	2011
		Eliana Gomes de Oliveira	Raciocínio combinatório na resolução de problemas nos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo com professores	2014
		Claudinei Aparecido da Costa	As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental	2003
		Inês Esteves	Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do ensino fundamental	2001
		Ricardo Dezso Sabo	Saberes Docentes: a Análise Combinatória no Ensino Médio	2010
	Ensino de Matemática	Celso Pedrosa Filho	Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental (7 e 8 anos)	2008
		Luciane Mendonça	Trajetória hipotética de aprendizagem: análise combinatória	2011
UEC/SP	Educação	Wilton Sturm	As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa	1999
UEPA/PA	Educação	Carlos Alberto de Miranda Pinheiro	O Ensino de Análise Combinatória a partir de Situações-Problema	2008
UFOP/MG	Educação Matemática	Adriana Luziê de Almeida	Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo com o 2º ano do ensino médio	2010
UFPA/PA	Educação em Ciências e Matemática	Franisco Rodrigues Boga Neto	Uma proposta para ensinar os conceitos da análise combinatória e de probabilidade: uma aplicação do uso da história da matemática, como organizador prévio, e dos mapas conceituais	2005
UFPB/PB	Educação	Cristiane Carvalho Bezerra de Lima	Análise combinatória: uma aprendizagem significativa com mapas conceituais	2011
UFPE/PE	Educação Matemática e Tecnológica	Adryanne Maria Rodrigues Barreto de Assis	Conhecimentos de combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada: reflexões e prática de uma professora	2014
		Ana Paula Barbosa de Lima	Princípio fundamental da contagem: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias	2015
		Cristiane de Arimatéa Rocha	Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos	2011
		Danielle Avanço Vega	Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha: produto cartesiano, arranjo, combinação, ou permutação?	2014

(continuação)

UFPE/PE	Educação Matemática e Tecnológica	Ferndanda Lopes Sá Barreto	O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos	2012
		Juliana Azevedo	Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador?	2013
		Maria de Jesus Gomes da Cunha	Elaboração de problemas combinatórios por professores de Matemática do ensino médio	2015
		Pablo Egidio Lisbôa da Silva	Problemas combinatórios condicionais: um olhar para o livro didático do ensino médio	2015
		Rita de Cássia Gomes de Lima	O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o ensino médio	2010
	Educação	Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa	Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio	2009
		Glauce Vilela Martins	Livros didáticos de alfabetização de jovens e adultos: um estudo sobre as estruturas multiplicativas	2010
	Psicologia	Adriana Maria da Silva Barbosa Batista	A influência dos suportes de representação na resolução de problemas com estruturas multiplicativas	2002
		Giselda Magalhães Moreno Nóbrega	Investigando a ideia do possível em crianças	2015
		Juliana Ferreira Gomes da Silva	O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças	2010
UFRGS/RS	Educação	Mariana Lima Duro	Análise combinatória e construção de possibilidades o raciocínio formal do ensino médio	2012
	Ensino de Matemática	Jussara Aparecida da Fonseca	Análise combinatória na educação de jovens e adultos: uma proposta de ensino a partir da resolução de problemas	2012
		Ricardo Rodri-gues Chilela	O jogo de pôquer: uma situação real para dar sentido aos conceitos de combinatória	2013
UFRJ/RJ	Ensino de Matemática	Renato de Carvalho Alves	O ensino de análise combinatória na educação básica e a formação de professores	2012
UFRPE/PE	Ensino de Ciências	Augusto César Barbosa Dornelas	O princípio multiplicativo como recurso didático para a resolução de problemas de contagem	2004
UFSCAR/SP	Ensino de Ciências Exatas e Tecnologias	Cristiane Maria Roque Vazquez	O ensino de análise combinatória no ensino médio por meio de atividades orientadoras em uma escola estadual do interior paulista	2011
		Gisele Aparecida Massuela Gerdenits	Raciocínio combinatório: uma proposta para professores de matemática do ensino fundamental - anos finais	2014
		Rodrigo do Carmo Silva	O ensino de análise combinatória com aulas expositivas e fichas de aula em uma escola de ensino médio do interior paulista	2012

(conclusão)

ULBRA/RS Canoas	Ensino de Ciências e Matemática	Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa	E-learning com análise combinatória	2012
		Katia Aires Braga	O processo de ensino e aprendizagem da análise combinatória: uma visão dos professores Matemática de Floriano/PI	2009
UNESP/SP Rio Claro	Educação Matemática	Analucia Castro Pimenta de Souza	Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas	2010
UNIBAN/SP	Educação Matemática	Paulo Jorge Magalhães Teixeira	Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de problemas de contagem no ensino fundamental	2012
UNICSUL/SP	Ensino de Ciências e Matemática	Francisco Evangelista Sobrinho	O Raciocínio Combinatório e Probabilístico de Alunos do 6º ano do ensino fundamental	2010
		Luciana de Castro Lugli	A Análise de Dados e a Probabilidade nas Avaliações Externas para o Ensino Médio: ENEM e SARESP	2011
		Rafael Henrique dos Santos	Uma Abordagem do Ensino da Análise Combinatória sob a ótica da Resolução de Problemas	2011
UNIVATES/RS	Ensino de Ciências Exatas	Roberto Stenio Areias Carneiro de Albuquerque	Uma investigação no ensino médio sobre o raciocínio combinatório e a divergência de resultados na resolução de problemas de contagem	2014

Fonte: Autor.

APÊNDICE E – FICHAMENTO DAS DISSERTAÇÕES SELECIONADAS PARA A META-ANÁLISE

Quadro 29 - Fichamento da dissertação de Analucia Castro Pimenta de Souza

1	Título da Dissertação: Aprendizagem de Matemática Financeira no Ensino Médio: uma proposta de trabalho a partir de planilhas eletrônicas Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas
2	Autor: SOUZA, Analucia Castro Pimenta
3	Ano de defesa: 2010
4	Número de páginas: 344
5	Orientador: Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic
6	Instituto de Ensino Superior: Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
7	Programa: Educação Matemática
8	Palavras-chave: Resolução de Problemas. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Matemática Discreta. Análise Combinatória. Educação Matemática.
9	Resumo: Esta pesquisa tem como objetivo trabalhar a Análise Combinatória, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Abordamos, em nossa fundamentação teórica, a Análise Combinatória contida na Matemática Discreta, iniciando a pesquisa com uma introdução histórica da Análise Combinatória, seguida por uma análise de livros didáticos e pela busca de trabalhos de outros autores que se referiam ao ensino e à aprendizagem desse conteúdo. Criamos três projetos para trabalhar com a metodologia de ensino adotada por nós, em três cenários diferentes, onde a pesquisadora assumiu três posturas diferentes frente ao problema da pesquisa: como uma professora-pesquisadora, com seus próprios alunos, em sua sala de aula; como uma pesquisadora, ministrando uma oficina de trabalho, em um encontro de Educação Matemática, tendo como participantes, professores, educadores matemáticos e até alunos da Licenciatura em Matemática; e, como uma pesquisadora, em Encontros em Educação Matemática, divulgando sua pesquisa. Através da análise dos dados, obtidos nas aplicações dos três projetos, pudemos mostrar como os participantes desses projetos se envolveram ao fazer uso da metodologia de ensino adotada e relatamos as contribuições que trouxeram para nossa pesquisa. Verificamos que houve envolvimento ativo dos participantes na construção de novos conceitos e conteúdos, através da resolução dos problemas propostos, por meio de um trabalho investigativo, que proporcionou uma aprendizagem com compreensão e significado, com resultados importantes para a prática docente. Esta pesquisa foi desenvolvida seguindo a Metodologia de Pesquisa apresentada por Thomas A. Romberg (SOUZA, 2010, p.8).
10	Objetivo: Criar uma proposta de trabalho para abordar Análise Combinatória em sala de aula, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. (SOUZA, 2010, p. 13).
11	Fundamentação teórica: A pesquisa está fundamentada sobre dois eixos: Matemática Discreta: Abrantes (1994), Dossey (1991), Gardiner (1991), Veloso (1997) Resolução de Problemas: Dante (1989), Gazire (1988), Marineck (2001), Mendonça (1993), NCTM (1980), Onuchic (1999), Onuchic (2004), Polya (1962), Schroeder & Lester (1989), Vale e Pimentel (2004), Van de Walle (2001)
12	Metodologia: Segue a metodologia proposta por Thomas A. Romberg, composta por uma sequência de dez atividades que estão divididas em três blocos: o primeiro bloco trata da identificação do problema (atividades 1, 2, 3 e 4); o segundo bloco apresenta uma proposta de resolução desse problema, no qual estratégias e procedimentos de trabalho são levantados e selecionados (atividades 5 e 6); e o terceiro e último bloco que, após o procedimento geral ser posto em ação, trata da análise das informações obtidas, buscando tudo o que ficou evidente diante da questão ou conjectura levantada (atividades 7, 8, 9 e 10) (SOUZA, 2010, p. 13).
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre raciocínio combinatório: tais atividades são analisadas no capítulo 4.
14	Sujeitos da pesquisa: alunos do segundo ano do ensino médio
15	Conclusões: Através da análise dos dados, obtidos nas aplicações dos três projetos, foi possível mostrar como os participantes desses projetos se envolveram ao fazer uso da metodologia de ensino adotada. Verificamos que houve envolvimento ativo dos participantes na construção de novos conceitos e conteúdos, através da resolução dos problemas propostos, por meio de um trabalho investigativo, que proporcionou uma aprendizagem com compreensão e significado, com resultados importantes para a prática docente.

Quadro 30 - Fichamento da dissertação de Carlos Alberto de Miranda Pinheiro

1	Título da Dissertação: O Ensino de Análise Combinatória a partir de Situações-Problema
2	Autor: PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda
3	Ano de defesa: 2008
4	Número de páginas: 166
5	Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
6	Instituto de Ensino Superior: Universidade Estadual do Pará
7	Programa: Educação
8	Palavras-chave: Engenharia Didática, Ensino de Análise Combinatória, Formação Continuada de Professores de Matemática, Resolução de Problema como ponto de partida.
9	Resumo: Este trabalho apresenta os resultados de uma investigação sobre os conceitos básicos de Análise Combinatória. Para viabilizar esse estudo, foi aplicada uma sequência didática com ênfase na resolução de problemas como ponto de partida junto aos alunos da segunda série do ensino médio. A opção metodológica de pesquisa fundamentou-se nos Princípios da Engenharia Didática de Artigue (1996). Realizou-se um breve estudo sobre a resolução de problemas, o uso de jogos no Ensino da Matemática e das pesquisas acerca do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. No que se refere à fundamentação teórica, utilizou-se a resolução de problema como ponto de partida, extraída de Sá (2005), e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986). Por meio dela, o aluno pode caminhar da ação à formalização do conceito que se almeja ensinar. Foram utilizados um pré-teste, um pós-teste, os registros dos alunos e uma câmera de vídeo como instrumentos de coleta de dados. Participaram da pesquisa 15 alunos, da segunda série do Ensino Médio, de uma escola pública em Belém do Pará. Os resultados indicam que a seqüência didática proporciona condições favoráveis à aprendizagem com o intuito dos alunos desenvolverem as habilidades básicas da Análise Combinatória. (PINHEIRO, 208, p.6).
10	Objetivo: Investigar a viabilidade da sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória, por meio de Situações Didáticas, utilizando a resolução de problemas como ponto de partida. (PINHEIRO, 2008, p. 16).
11	Fundamentação teórica: A pesquisa está fundamentada sobre três eixos: Resolução de problemas: Brasil (2006), Dante (2002), Van de Walle (2001) Teoria das situações didáticas: Brousseau (1996), Gálvez (2001), Pais (2001) Uso de jogos no ensino de Matemática: Lara (2003)
12	Metodologia: Engenharia Didática segundo Artigue (PINHEIRO, 2008, p. 60).
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre raciocínio combinatório: tais atividades são analisadas no capítulo 5.
14	Sujeitos da pesquisa: Alunos do segundo ano do ensino médio
15	Conclusões: os objetivos de cada aula da sequência de ensino foram alcançados com a maioria dos alunos que participaram da pesquisa e que a resolução de problemas como ponto de partida viabiliza condições favoráveis para introduzir os conceitos básicos de Análise combinatória (PINHEIRO, 2008, p. 145).

Quadro 31 - Fichamento da dissertação de Jussara Aparecida da Fonseca

1	Título da Dissertação: Análise combinatória na educação de jovens e adultos: uma proposta de ensino a partir da resolução de problemas
2	Autor: FONSECA, Jussara Aparecida
3	Ano de defesa: 2012
4	Número de páginas: 178
5	Orientador: Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo
6	Instituto de Ensino Superior: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
7	Programa: Ensino de Matemática
8	Palavras-chave: Análise Combinatória, princípio multiplicativo, PROEJA, Pensamento Formal, Campos Conceituais.
9	Resumo: O presente trabalho teve como objetivo analisar se uma estratégia de ensino baseada em situações-problema contribui para a aprendizagem da Análise Combinatória pelos alunos da Educação de Jovens e Adultos. A sequência de ensino elaborada e implementada procurou abordar atividades que evocassem o cotidiano dos alunos e não dependessem de fórmulas previamente estudadas. A ordem em que as atividades foram propostas visou a formalização do princípio multiplicativo, como recurso a ser utilizado na resolução de problemas de contagem. A pesquisa foi desenvolvida sob a ótica de um estudo de caso, junto a uma turma de alunos dos cursos PROEJA Agroindústria e PROEJA Informática do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete, e teve como aportes teóricos a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget e a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, os quais nos forneceram subsídios para a compreensão do desenvolvimento do raciocínio combinatório e, das dificuldades apresentadas pelos alunos. O trabalho mostrou que é possível a aprendizagem de conteúdos de Análise Combinatória pelos alunos do PROEJA, através da implementação de uma sequência de ensino baseada na resolução de problemas, frente aos quais os alunos construíram diferentes estratégias de resolução que favoreceram o desenvolvimento do seu raciocínio combinatório (FONSECA, 2010, p. 5).
10	Objetivo: analisar se uma experiência de aprendizagem, tendo como ponto de partida a resolução de problemas, pode propiciar a aprendizagem da Análise Combinatória pelos alunos do PROEJA (FONSECA, 2010, p. 18).
11	Fundamentação teórica: A pesquisa está fundamentada sobre três eixos: Piaget e a teoria do desenvolvimento cognitivo: Duro (2012), Flavell (1996), Gómez-Granell (1998), Inhelder e Piaget (1976), Piaget (1999), Schliemann (1993) Vergnaud e a teoria dos campos conceituais: Franchi (2008), Moreira (2002), Vergnaud (1983, 1994, 1996, 2009) Resolução de problemas: Zuffi e Onuchic (2007), Vergnaud (1983)
12	Metodologia: Estudo de caso segundo Ponte (2006).
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre raciocínio combinatório: tais atividades são analisadas no capítulo 6.
14	Sujeitos da pesquisa: Alunos dos cursos PROEJA Agroindústria e PROEJA Informática do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete
15	Conclusões: constatamos que nossa pesquisa tem potencial para contribuir para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória na EJA. As formulações (enunciados) de alguns problemas não ficaram claros ao entendimento dos alunos, mesmo fazendo referência a situações da vida real. (FONSECA, 2010, p. 161). Observamos que a metodologia baseada na resolução de problemas, sem abordagem prévia do conteúdo, proporcionou aos alunos a mobilização e reformulação de diferentes esquemas e teoremas-em-ação, o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a aprendizagem de conteúdos da Análise Combinatória (FONSECA, 2010, p. 162).

Quadro 32 - Fichamento da dissertação de Roberto Stenio Areias Carneiro de Albuquerque

1	Título da Dissertação: Uma investigação no ensino médio sobre o raciocínio combinatório e a divergência de resultados na resolução de problemas de contagem
2	Autor: ALBUQUERQUE, Roberto Stenio Areias Carneiro
3	Ano de defesa: 2014
4	Número de páginas: 172
5	Orientador: Prof. Dr. Claus Haetinger
6	Instituto de Ensino Superior: Centro Universitário Univates
7	Programa: Ensino de Ciências Exatas
8	Palavras-chave: Raciocínio Combinatório. Divergência de Resultados. Resolução de Problemas de Contagem. Modelos Mentais. Ensino de Matemática.
9	Resumo: Este trabalho trata de uma investigação realizada no âmbito do Ensino Médio e cujo objetivo geral consistiu em investigar – à luz da Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1983) – os principais fatores que podem influenciar o raciocínio combinatório dos estudantes e que, em razão disso, podem levá-los a resultados divergentes dos conceitualmente esperados na resolução de problemas de contagem. A pesquisa é de natureza exploratória, quali-quantitativa, com predominância qualitativa, tendo sido executada no segundo semestre de 2012, em duas turmas de 2º ano da Escola Estadual de Ensino Médio Fazenda Vilanova/RS. Basicamente, foram coletados dados a partir de entrevistas com professores e testes de sondagem aplicados aos estudantes das turmas investigadas. Outras informações foram obtidas a partir de questionários e por intermédio de uma gincana matemática realizada em um blog (desenvolvido pelo autor para favorecer debates entre professores e estudantes sobre a resolução de problemas matemáticos, em especial, de contagem). No mais, realizou-se também uma seleção e análise das resoluções dos problemas de contagem que constam nos Anais das Olimpíadas Matemáticas da Univates/RS (provas de Ensino Médio da 10ª a 15ª edição), objetivando encontrar resoluções interessantes que contribuíssem para o lançamento de abordagens diferenciadas no ensino e na aprendizagem de heurísticas e estratégias particulares de resolução de problemas combinatórios. Dentro do contexto estabelecido, foi confirmada a hipótese de que a construção de modelos mentais inadequados é um dos principais fatores de influência que podem levar o pensamento combinatório dos estudantes para resultados divergentes dos conceitualmente esperados (ALBUQUERQUE, 2014, p. 8)
10	Objetivo: “[...] investigar – à luz da Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1983) – os principais fatores que podem influenciar o raciocínio combinatório e que, em razão disso, podem levar o pensamento dos estudantes de nível médio a resultados divergentes dos conceitualmente esperados na resolução de problemas de contagem” (ALBUQUERQUE, 2014, p. 23).
11	Fundamentação teórica: A pesquisa está fundamentada sobre três eixos: Sobre o Universo de Raciocínio e a Resolução de Problemas: Iezzi e Murakami (1985), Lima et tal. (2003) Alguns Pontos-Chave da Teoria de Modelos Mentais de Johnson-Laird: Einsenck e Keane (1990), Garcia (2000), Johnson-Laird (1983) A Resolução de Problemas no Ensino das Ciências e Matemática: não houve
12	Metodologia: Apoiou-se nas ideias e argumentos para estudo de caso expostos por Stenhouse (1975), Sampiere, Collado e Lucio (2006, p. 275), Chemin (2012, p. 57) (ALBUQUERQUE, 2014, p. 62).
13	Existência de atividades realizadas em sala de aula sobre matemática financeira: tais atividades são analisadas no capítulo 5.
14	Sujeitos da pesquisa: Alunos de segundo ano do ensino médio
15	Conclusões: De um modo geral, a partir dos dados obtidos na pesquisa, deduziu-se uma notável resistência e dificuldades dos estudantes em construir adequadamente – a partir dos modelos conceituais introduzidos na Escola – novos conhecimentos e raciocínios combinatórios formais (ALBUQUERQUE, 2014, p. 103). O uso de contraexemplos é uma dos recursos fundamentais de ensino e aprendizagem que devem ser empregados na Resolução de Problemas (em especial, de contagem) para mostrar quando não é possível empregar dado tipo de solução (ALBUQUERQUE, 2014, p. 104). No que tange o objetivo geral desta pesquisa (e principal resultado), ele foi atingido ao constatar no Ensino Médio (nas turmas de 2º Ano investigadas) que um dos principais fatores responsáveis (em potencial) pela divergência de resultados em problemas de contagem (em relação a dado valor conceitual) é a construção de modelos mentais inadequados (obtidos por meio de conhecimentos prévios e de concepções alternativas) (ALBUQUERQUE, 2014, p. 105).

APÊNDICE F – ATIVIDADES DAS DISSERTAÇÕES SELECIONADAS PARA A META-ANÁLISE

Dissertação 1: **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas**

Autor: Analucia Castro Pimenta de Souza
Orientadora: Lourdes de la Rosa Onuchic
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

ATIVIDADES DA DISSERTAÇÃO:

01. Eliane quer escolher o seu horário para a natação. Ela quer ir a duas aulas por semana, uma de manhã e a outra de tarde, não sendo no mesmo dia nem em dias seguidos. De manhã, há aulas de natação de segunda-feira a sábado, às 9h, às 10h e às 11h e, de tarde, de segunda-feira a sexta-feira, às 17h e às 18h. De quantas maneiras distintas Eliane pode escolher seu horário?

02. Dez finalistas de diferentes estados foram convidados para uma confraternização. Antes de iniciar a festa, cada finalista cumprimentará, com as mãos, todos os outros finalistas. Quantos cumprimentos haverá ao todo?

03. Sobre uma circunferência marcam-se 6 pontos distintos. Determine quantos quadriláteros convexos podem ser formados com vértices nesses pontos.

04. Com os algarismos 1, 2 e 7, quantos números com 3 algarismos distintos podemos formar?

05. Há quatro bolinhas de gude numeradas numa caixa; elas estão numeradas pelos números 2, 4, 7 e 9. Peguei uma das bolinhas e anotei seu número. Depois, coloquei a bolinha de volta na caixa. Repeti esse processo até formar um número de três dígitos. Quantos números diferentes de três dígitos posso ter formado?

06. Tenho três letras idênticas que desejo colocar dentro de quatro envelopes de cores diferentes, azul, rosa, laranja e verde. Posso colocar apenas uma letra em cada envelope. De quantos modos as três letras idênticas podem ser colocadas dentro dos quatro envelopes diferentes?

07. Suzie e Sam têm quatro adesivos numerados de 1 a 4. Eles decidiram repartir igualmente os adesivos, dois para cada um. De quantos modos eles podem dividir os quatro adesivos entre eles?

Dissertação 2: **O Ensino de Análise Combinatória a partir de Situações-Problema**

Autor: Carlos Alberto de Miranda Pinheiro
Orientador: Pedro Franco de Sá
Universidade Estadual do Pará

ATIVIDADES DE DISSERTAÇÃO:

08. Entre as cidades A e B, há 2 (duas) estradas, e entre as idades B e C, há 3(três) estradas. Não há estrada ligando diretamente A e C. De quantas maneiras diferentes uma pessoa poderá ir da cidade A até a cidade C?

09. Juquinha dispõe de 2 (dois) pares de tênis, 3 (três) camisas e 2 (duas) calças distintas entre si. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir, usando 1 (um) par de tênis, 1 (uma) camisa e 1 (uma) calça?

10. Uma senha de banco é formada por 2 (duas) vogais e 2 (dois) algarismos distintos, escolhidos de 0 a 9. De quantas maneiras diferentes um cliente poderá cadastrar sua senha?

11. De quantas maneiras diferentes Karla, Viviane e Mônica podem se sentar num banco com apenas 3 (três) lugares?

12. De quantos modos diferentes podemos posicionar 4 (quatro) alunos em fila para a distribuição da merenda escolar?

13. O professor Miranda comprou um CD de Brega, um de Pagode, um de Rock, um de Musica Popular Brasileira e um de Forró. De quantas maneiras diferentes ele poderá arrumar os CD S num lugar reservado da estante de forma que os discos fiquem sempre juntos?

14. Carlos, Karla, Viviane e Felipe concorrem num concurso que premia os dois primeiros lugares. Quantos são os resultados possíveis?

15. Um gerente deve formar uma comissão de dois funcionários, escolhendo entre Carlos, Karla, Viviane e Felipe. Quantas comissões diferentes são possíveis de serem formadas?

16. Uma escola tem 4 (quatro) professores, entre os quais serão escolhidos 2 (dois), que disputarão os cargos de diretor e vice-diretor . De quantas maneiras diferentes pode ser o resultado da eleição?

17. Na final dos jogos estudantis, 6 (seis) escolas disputam os três primeiros lugares. Determine o número de maneiras diferentes de obtermos o resultado dos jogos.

18. Quantos números de 3 (três) algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto E = { 1, 2, 3, 4,5}?

19. O professor Miranda deseja sortear 2 (dois) livros idênticos de Matemática entre 4(quatro) alunos da turma. Quantos são os possíveis resultados do sorteio?

20. Quantas comissões de 3 (três) pessoas podem ser formadas com 4 (quatro) alunos de uma escola?

Dissertação 3: **Análise combinatória na educação de jovens e adultos: uma proposta de ensino a partir da resolução de problemas**

Autor: Jussara Aparecida da Fonseca
Orientadora: Elisabete Zardo Búrigo
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

ATIVIDADES DA DISSERTAÇÃO:

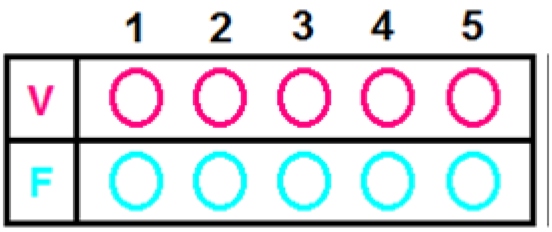
21. Vanessa irá comprar um telefone celular novo. Ela vai a uma loja fazer uma pesquisa de preço e a loja lhe oferece 5 modelos diferentes com duas opções de planos de tarifas (pré-pago e pós-pago). Quantas possibilidades diferentes Vanessa têm para comprar um telefone nessa loja?

22. Francisco vai viajar de Alegrete até Porto Alegre, porém precisa passar por Santa Maria. Sabemos que existem três estradas distintas ligando Alegrete a Santa Maria e duas estradas ligando Santa Maria a Porto Alegre, conforme representação abaixo. De quantas maneiras ele poderá realizar essa viagem?

23. Marcus irá fazer um saque de R$ 100,00 em um caixa eletrônico de seu banco. Chegando ao caixa ele percebe que o caixa oferece cédulas de R$ 50,00, R$ 20,00 e R$ 10,00. Quantas possibilidades diferentes Marcus tem de receber a quantia que irá sacar?

24. Para a copa do mundo de 2014 que será realizada no Brasil, alguns estádios estão sendo construídos e outros reformados. Consideremos um estádio que contará com 8 portões de entrada/saída. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar no estádio e sair por um portão diferente do que foi usado para entrar?

25. Uma prova é composta por 5 questões objetivas, para serem julgadas como V (verdadeiras) ou F (falsas). As respostas devem ser escritas em um gabarito conforme representação abaixo. De quantas maneiras diferentes o gabarito abaixo pode ser preenchido?



26. Um grupo de pessoas está organizando uma excursão pela Serra Gaúcha. Eles irão visitar as cidades de Caxias do Sul, Canela, Gramado, Bento Gonçalves e Carlos Barbosa. O grupo está montando seu roteiro de viagem decidindo a ordem em que irão visitar as cidades. Quantas são as possibilidades de roteiro que o grupo pode formar?

27.

(Bill Watterson. O Estado de S. Paulo, 20/11/199.)

De quantos modos Calvin pode escolher os dois dias do ano, um em novembro e um em março? (Considerando todos os dias do mês de março e de novembro.)

28(a)/29(b). A comunicação por meio virtual está cada vez mais difundida. Um dos meios mais utilizados é o email. Para termos um email devemos criar uma conta de acesso em um site especializado. No momento da criação desta conta além do endereço de email, criamos uma senha de acesso, que pode ser composta de algarismos, letras ou outros caracteres. A senha é imprescindível para garantir a segurança de nosso email e evitar que outras pessoas tenham acesso a nossa conta.

Considerando que ao criar um email, seja exigido uma senha de 6 algarismos:

a) Quantas são as possibilidades de senhas, se os 6 algarismos forem quaisquer?

b) Quantas são as possibilidades de senhas, se os 6 algarismos forem distintos?

30(a)/31(b). Utilizando cartões nas cores: azul, salmão, amarelo e verde. Responda:

a) Quantas sequências diferentes de cores podem ser formadas utilizando três cartões com cores distintas?

b) Quantas sequências de cores podem ser formadas utilizando três cartões quaisquer?

32. Você sabe como são gerados os números de telefone?

Os números de telefone são divididos em prefixo e número do assinante, o prefixo é o número que identifica de onde é o telefone (4 primeiros algarismos) e o número do assinante é o código de identificação do cliente (4 últimos algarismos). Quantos números de telefones de 8 dígitos podemos criar, sabendo que o primeiro não pode ser zero?

33(a)/34(b)/35(c). Para maior segurança a maioria dos bancos adota um sistema de senhas que consiste na utilização de algarismos e letras. Suponhamos que um determinado banco adote um sistema de senhas composto de 6 algarismos e 3 letras de nosso alfabeto, nessa ordem.
Nessas condições, responda:
a) Quantas são as possibilidades de senhas compostas de 6 algarismos quaisquer e 3 letras quaisquer?
b) Quantas são as possibilidades de senhas composta por 6 algarismos e 3 letras quaisquer, mas que não iniciem por zero?
c) Quantas são as possibilidades se todos os algarismos forem distintos e todas as letras forem distintas?

Dissertação 4: **Uma investigação no ensino médio sobre o raciocínio combinatório e a divergência de resultados na resolução de problemas de contagem**

Autor: Roberto Stenio Areias Carneiro de Albuquerque
Orientador: Claus Haetinger
Centro Universitário Univates

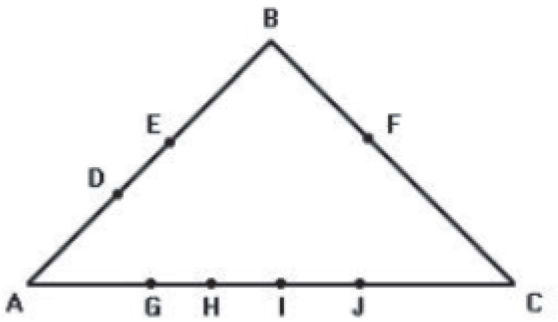
ATIVIDADES DA DISSERTAÇÃO:

36. Suponha que vamos planejar uma viagem e devamos escolher entre o transporte por ônibus ou por trem. Se existirem três rodovias e duas ferrovias, quantos caminhos disponíveis existirão para a viagem?

37. Um “Shopping Center” possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do “Shopping Center” pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?

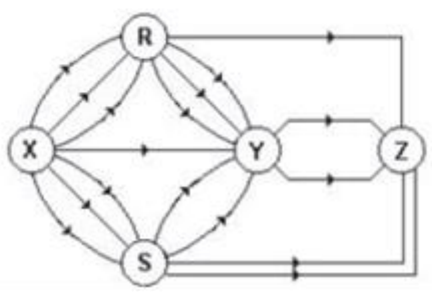
38. Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?

39. Observe a figura:



Nessa figura, o número de triângulos que se obtém com vértices nos pontos D, E, F, G, H, I, J é …

40. Observe o diagrama.



O número de ligações distintas entre X e Z é…