

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES NERVURADAS POR
MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Christian Donin

Santa Maria, RS, Brasil

2007

ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES NERVURADAS POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

por

Christian Donin

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Área de Concentração em Construção Civil, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Engenharia Civil**

Orientador: Eduardo Rizzatti
Co-orientador: Herbert Martins Gomes

Santa Maria, RS, Brasil

2007

© 2007

Todos os direitos autorais reservados a Christian Donin. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita com autorização por escrito do autor.

Endereço: Rua Floriano Peixoto, n.40, Bairro Ipiranga, Frederico Westphalen, RS, 98400-000
Fone (0xx)55 37441612; End. Eletr: cdonin@yahoo.com.br

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES NERVURADAS POR MEIO DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

elaborada por
Christian Donin

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Engenharia Civil

COMISSÃO EXAMINADORA:

Eduardo Rizzatti, Dr.
(Presidente/Orientador)

Emil de Souza Sánchez Filho, Dr. (UFF)

Herbert Martins Gomes, Dr. (UFRGS)
(Co-orientador)

Santa Maria, 23 de março de 2007.

“Nec plus ultra”

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo à minha Mãe Elecy, minha Irmã Vivian e meu Sobrinho e afiliado Luiz Henrique, pela compreensão que tiveram nos momentos em que estive ausente, e principalmente pelo incentivo que me dedicaram durante toda minha vida. A vocês dedico minhas conquistas, pois foi pensando em vocês que sempre encontrei forças para enfrentar todas as dificuldades.

Sou eternamente grato à minha Mãe, pela sua dedicação na construção de minhas virtudes e meus princípios, e pelo esforço dedicado para que minha formação acadêmica fosse possível. Agradeço ainda, ao meu Pai que embora se encontre em outra dimensão, sempre serviu como modelo para minha vida.

Agradeço ao meu amigo e orientador, Professor Eduardo Rizzatti, pelos sábios ensinamentos transmitidos e pelo incentivo, que muito contribuíram na elaboração deste trabalho.

Ao meu amigo e co-orientador, Professor Herbert Martins Gomes, que mesmo distante, muito contribuiu para a elaboração deste trabalho e acima de tudo para minha formação.

Agradeço ao meu grande amigo e colega Clairson Dutra, pelo apoio e incentivo na elaboração desta dissertação, mas principalmente pelo conhecimento e pelas horas de discussão que podemos compartilhar, pois são estas discussões que nos fazem evoluir.

A todos meus familiares e amigos, sou grato pelo carinho e pelo apoio que sempre me dedicaram. Sou grato ao meu primo José Ricardo pelo apoio e incentivo na elaboração desta dissertação, assim como ao meu primo Neuri que sempre me incentivou.

Agradeço aos amigos que fiz no Centro de Tecnologia da UFSM. Em nome do Gilberto do DECC, do Nei do GAP e do Eliomar do PPGEC agradeço a todos pela amizade, pela convivência e pelo incentivo que todos sempre dedicaram.

“O mecanismo do descobrimento não é lógico e intelectual – é uma iluminação sub-tânea, quase um êxtase. Em seguida, é certo, a inteligência analisa e a experiência confirma a intuição. Além disso, há uma conexão com a imaginação.”

Albert Einstein

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal de Santa Maria

ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES NERVURADAS POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

AUTOR: CHRISTIAN DONIN

ORIENTADOR: EDUARDO RIZZATTI

CO-ORIENTADOR: HERBERT MARTINS GOMES

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 23 de março de 2007.

A análise de lajes nervuradas tem sido tema de várias pesquisas, visto a dificuldade de determinação de solicitações e deslocamentos que este sistema estrutural apresenta, assim como, as discrepâncias que o modelo de cálculo sugerido pela NBR 6118:2003 tem demonstrado. A utilização de métodos exatos no cálculo de lajes nervuradas torna-se inviável pelo fato das geometrias geradas nas estruturas de edificações serem de extrema complexidade. Desta forma, o Método dos Elementos Finitos tem se mostrado uma ferramenta para análise de estruturas com enorme potencial para resolver problemas elevada complexidade.

Portanto, neste trabalho são propostos modelos de cálculo utilizando o Método dos Elementos Finitos, por meio da modelagem tridimensional de estruturas de lajes nervuradas e cogumelo nervuradas.

São verificados ainda, parâmetros envolvidos no cálculo deste tipo de estrutura, como o módulo de deformação longitudinal, e métodos para a determinação de uma seção equivalente para simplificar a seção nervurada, com objetivo de utilizar tal parâmetro no cálculo de estrutura via Método dos Elementos Finitos, através de elementos finitos planos.

Após as análises são comparados os resultados do modelo proposto, e cada parâmetro verificado, com resultados experimentais disponíveis na bibliografia, chegando-se assim, às conclusões deste estudo.

Palavras-chave: Lajes nervuradas; método dos elementos finitos; estruturas de concreto

ABSTRACT

Master Thesis
Postgraduate Program in Civil Engineering
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brazil

ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES NERVURADAS POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (NUMERICAL ANALYSIS OF WAFFLES SLABS THROUGH FI- NITE ELEMENT METHOD)

AUTHOR: CHRISTIAN DONIN

ADVISOR: EDUARDO RIZZATTI

ADVISOR: HERBERT MARTINS GOMES

Date and Local of Defense: Santa Maria, March 23, 2007.

The analysis of waffles slabs has been theme of several researches, seen the difficulty of determination of strength and displacements that this structural system presents, as well as, the discrepancies that the calculation model suggested by NBR 6118:2003 have been demonstrated. The use of exact methods in the calculation of waffles slabs becomes unsuitable for the fact that the geometries of some in the structures of constructions is of extreme complexity. This way, the Finite Element Method has shown a tool for analysis of structures with potential to solve problems with high complexity.

Therefore, in this work it is proposed models for design using the Finite Element Method, through the three-dimensional modeling of structures of waffles slabs and ribbing flat slabs.

The involved parameters are verified in the calculation of this structure type like, the modulus of elasticity, and the methods for determination of the equivalent section, witch simplify the ribbing section, with the objective of using these parameters in the calculation through the Finite Element Method by finite elements of plane.

After the analysis, have been compared the results of the proposed model and each parameter is compared with experimental results in the bibliography.

Keywords: Waffles slabs; finite element method; concrete structures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Laje retangular com carregamento aplicado.....	7
Figura 2.2 – Laje nervurada, conforme GUERRIN (2002).	9
Figura 2.3 – Laje cogumelo com capitel aparente.	11
Figura 2.4 – Laje cogumelo com capitel invertido.	12
Figura 2.5 – Laje cogumelo sem capitel.	12
Figura 2.6 – Perspectiva de uma laje cogumelo nervurada.	15
Figura 2.7 – Vista em planta da laje cogumelo nervurada.....	15
Figura 2.8 – Vista inferior da laje cogumelo nervurada.	16
Figura 2.9 – Corte AA' da laje cogumelo nervurada.....	16
Figura 2.10 – Corte BB' da laje cogumelo nervurada.	16
Figura 2.11 – Superfície de ruptura à punção.....	17
Figura 2.12 – Perímetro crítico em pilares internos conforme a NBR 6118:2003.	22
Figura 2.13 – Perímetro crítico em pilares de borda, conforme a NBR 6118:2003.	24
Figura 2.14 – Perímetro crítico em pilares de canto, conforme a NBR 6118:2003.....	26
Figura 2.15 – Perímetro crítico no caso de o contorno C apresentar reentrância, conforme a NBR 6118:2003.....	26
Figura 2.16 – Perímetro crítico junto à abertura na laje, conforme a NBR 6118:2003.	27
Figura 2.17 – Concretagem da capa de concreto da laje de SILVA FILHO (2002).....	28
Figura 2.18 – Laje próxima da ruptura, nos ensaios de SILVA FILHO (2002).	28
Figura 2.19 – Nervuras de uma laje ensaiada em escala reduzida por DUTRA (2005).	30
Figura 3.1 – Equilíbrio da força cortante em um elemento de placa.	32
Figura 3.2 – Equilíbrio de momentos fletores e torçores num elemento de placa.	33
Figura 3.3 – Placa retangular com carregamento uniformemente distribuído em sua superfície.	37
Figura 3.4 – Malha de elementos finitos tridimensionais.	42
Figura 3.5 – Convergência à medida que se refina a malha, SORIANO (2003).	49
Figura 3.6 – Representação esquemática dos modelos mecânicos 1, 2, 3 e 4 de DIAS (2003).	53
Figura 3.7 – Representação esquemática dos modelos mecânicos 5, 6 e 7 de DIAS (2003).	54
Figura 3.8 – Definição dos pórticos analisados por NOBREGA <i>et al</i> (2003).	56
Figura 3.9 – Deslocabilidades para uma barra de grelha.	61
Figura 3.10 – Faixas da laje para distribuição de solicitações nos pórticos múltiplos.....	63
Figura 4.1 – Diagrama tensão-deformação específica para o concreto, segundo ARAÚJO (2003)....	64
Figura 4.2 – Seção transversal da laje nervurada.....	70

Figura 4.3 – Sistema de referência e disposição das nervuras de ARAÚJO (2006).....	71
Figura 4.4 – Seção equivalente.....	72
Figura 5.1 – Vista em planta da geometria da laje S1.....	76
Figura 5.2 – Seção transversal da geometria da laje S1.....	76
Figura 5.3 – Vista em planta da geometria da laje S2.....	77
Figura 5.4 – Seção transversal da geometria da laje S2.....	77
Figura 5.5 – Vista em planta da geometria da laje S3.....	78
Figura 5.6 – Seção transversal da geometria da laje S3.....	78
Figura 5.7 – Vista em planta da geometria da laje S4.....	79
Figura 5.8 – Seção transversal da geometria da laje S4.....	79
Figura 5.9 – Geometria e malha de elementos finitos das lajes simuladas em elementos finitos bidimensionais.....	81
Figura 5.10 – Deslocamentos de acordo com a dimensão de elemento empregada.....	82
Figura 5.11 – Geometria e malha de elementos finitos para o caso da laje S4, simulada em elementos finitos tridimensionais.....	83
Figura 5.12 – Resultados de deslocamento vertical (flechas) da laje S4 para o modelo MEF-2D-A.....	85
Figura 5.13 – Resultados de deslocamento vertical (flechas) da laje S4 para o modelo MEF-3D.....	85
Figura 5.14 – Vista em planta da laje (unidades em metros).....	87
Figura 5.15 – Seção transversal da laje (unidades em centímetros).....	87
Figura 5.16 – Elemento de placa bidimensional utilizado na simulação da laje.....	88
Figura 5.17 – Elemento tridimensional SOLID45, (a) – disposição dos oito nós (I,J,L,M,N,O,P,K), sistema de coordenadas (X, Y, Z). (b) – direção das tensões (SX, SY, SZ).....	89
Figura 5.18 – Discriminação das áreas com diferentes espessuras para o MEF-01.....	90
Figura 5.19 – Malha de elementos finitos discretizada da laje para o modelo MEF-01.....	91
Figura 5.20 – Detalhe dos deslocamentos impedidos na direção “z” (UZ) para os nós dos da base pilares.....	91
Figura 5.21 – Vista inferior da geometria das lajes geradas em volumes, para os modelos MEF-04 e MEF-05.....	95
Figura 5.22 – Gráfico de deslocamentos de acordo com a dimensão de elemento empregada.....	97
Figura 5.23 – Gráfico de tensões normais na direção “z” (SZ) de acordo com a dimensão de elemento empregada.....	97
Figura 5.24 – Vista superior da malha de elementos finitos discretizada para os modelos MEF-04 e MEF-05.....	98
Figura 5.25 – Vista inferior da malha de elementos finitos discretizada para os modelos MEF-04 e MEF-05.....	99
Figura 5.26 – Vista inferior da geometria e da malha de elementos finitos na região do pilar central para os modelos MEF-04 e MEF-05.....	99

Figura 5.27 – Vista inferior da geometria e da malha de elementos finitos para um pilar de canto nos modelos MEF-04 e MEF-05.	100
Figura 5.28 – Detalhe dos deslocamentos verticais impedidos (direção “y” - UY) para os nós dos da base dos pilares.	101
Figura 6.1 – Posição dos <i>strain gauges</i> na face superior da laje.	104
Figura 6.2 – Posição dos <i>strain gauges</i> na face inferior da laje.	104
Figura 6.3 – Posição dos Defletômetros na laje.....	105
Figura 6.4 – Linhas e pontos de leituras na laje em planta.	106
Figura 6.5 – Vista em perspectiva dos deslocamentos na direção “z” (UZ) para o modelo MEF-01.	109
Figura 6.6 – Vista superior dos deslocamentos na direção “z” (UZ) para o modelo MEF-01.	110
Figura 6.7 – Vista superior dos deslocamentos na direção “z” (UZ) para o modelo MEF-02.	110
Figura 6.8 – Vista superior dos deslocamentos na direção “z” (UZ) para o modelo MEF-03.	111
Figura 6.9 – Vista superior dos deslocamentos na direção “y” (UY) para o modelo MEF-04.....	112
Figura 6.10 – Vista em perspectiva da face superior para os deslocamentos na direção “y” (UY) segundo o modelo MEF-04.	112
Figura 6.11 – Vista em perspectiva da face inferior para os deslocamentos na direção “y” (UY) segundo o modelo MEF-04.	113
Figura 6.12 – Vista superior dos deslocamentos na direção “y” (UY) para o modelo MEF-05.....	113
Figura 6.13 – Vista superior das tensões normais na direção “y” (SY) para o modelo MEF-01.	115
Figura 6.14 – Vista superior das tensões normais na direção “y” (SY) para o modelo MEF-03.	115
Figura 6.15 – Vista superior das tensões normais na direção “z” (SZ) para o modelo MEF-04.	117
Figura 6.16 – Vista em perspectiva da face superior para as tensões normais na direção “z” (SZ) do modelo MEF-04.	117
Figura 6.17 – Vista em perspectiva da face inferior para as tensões normais na direção “z” (SZ) do modelo MEF-04.	118
Figura 7.1 – Gráfico com a relação entre resultados dos deslocamentos teóricos divididos pelos experimentais.	120
Figura 7.2 – Gráfico com a relação entre resultados dos momentos fletores teóricos divididos pelos experimentais.	123
Figura 10.1 – Detalhe das tensões normais na direção “z” (SZ), para o pilar central do modelo MEF-04.....	138
Figura 10.2 – Corte na linha B, indicando as tensões normais na direção “z” (SZ), para o pilar central do modelo MEF-04.	138

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores e K	23
Tabela 3.1 – Distribuição dos momentos nas faixas centrais e de pilares, de acordo com ACI 318-95 e NBR 6118:1978.	56
Tabela 5.1 – Valores de modulo de elasticidade de acordo com a resistência média do concreto.	75
Tabela 5.2 – Parâmetros para determinação da altura equivalente e seu valor de acordo com o método de cálculo.	80
Tabela 5.3 – Deslocamento experimental e numérico para as diversas dimensões de elementos finitos no caso da Laje S4.	82
Tabela 5.4 – Resultados experimentais para cada método de cálculo proposto, de deslocamentos verticais (flechas) das lajes no centro das lajes.	84
Tabela 5.5 – Tensão normal na direção “z” (SZ) e deslocamento (UY) para as diversas dimensões de elementos finitos.	96
Tabela 6.1 – Resultados experimentais de deslocamentos verticais.	106
Tabela 6.2 – Resultados experimentais das deformações específicas, tensões normais e momentos fletores resultantes.	107
Tabela 6.3 – Resultados de momentos fletores obtidos segundo o método dos Pórticos Equivalentes da NBR 6118:2003.....	108
Tabela 6.4 – Deslocamento verticais (direção “z”) para os modelos com elementos bidimensionais e tridimensionais.	109
Tabela 6.5 – Deslocamento verticais (direção “y”) para os modelos com elementos tridimensionais.	111
Tabela 6.6 – Tensões normais (direção “y”) e os momentos fletores resultantes para os modelos MEF-01 e MEF-03.....	114
Tabela 6.7 – Tensões normais (direção “z”) e os momentos fletores resultantes para o modelo MEF-04.....	116
Tabela 7.1 – Resultados experimentais e numéricos de deslocamentos	119
Tabela 7.2 – Relação entre resultados de deslocamentos teóricos e experimentais.....	119
Tabela 7.3 – Resultados experimentais e numéricos para os momentos fletores.	122
Tabela 7.4 – Relação entre resultados dos momentos fletores teóricos e experimentais.....	122

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas minúsculas

a e b	dimensões da placa
a_l	distância entre eixos de nervuras
b_x, b_y	espaçamentos axiais das nervuras, paralelos aos eixos x e y
b_x, b_y, b_z	forças por unidade de volume
b_w	largura da nervura
b_2	distância entre as nervuras
b_f, b_{fx}, b_{fy}	espaçamento entre as nervuras
d	altura útil da laje ao longo do contorno crítico
d_l	é o comprimento infinitesimal no perímetro crítico u
e	distância de d_l ao eixo que passa pelo centro do pilar
f_c	resistência à compressão simples
f_{cm}	resistência média do concreto
f_{ck}	resistência característica do concreto
h	altura ou espessura da placa ou laje
h_{eq}	altura ou espessura equivalente da laje
l_x, l_y	vãos nas direções x e y
m e n	número de retângulos em que se divide a placa
m_x, m_y	momentos fletores
m_{xy}, m_{yx}	momentos torçores
p	carga distribuída
\bar{p}	carga uniformemente distribuída
p_{mn}	valor máximo da ação no centro de cada retângulo
t_x, t_y, t_z	forças por unidade de área

q_x, q_y	forças cortantes
u^*	perímetro crítico reduzido
u	comprimento do perímetro de controle
\mathbf{u}	campo de deslocamentos
w	flecha da placa em um dado ponto
x	coordenada global x
y	coordenada global y
z	coordenada global z

Letras romanas maiúsculas

A_e	área de contorno do elemento
B	matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos nodais
B_x, B_y	rigidez a flexão das nervuras paralelas aos eixos x e y
C_x, C_y	rigidez a torção das nervuras paralelas aos eixos x e y
C	contorno da área de aplicação de carga
C'	contorno crítico, externo e distante $2d$ do contorno C , no plano da laje
C_1	dimensão do pilar paralela à excentricidade da força
C_2	dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força
D	rigidez à flexão da placa
D_1	rigidez da laje na região das nervuras
D_2	rigidez na região da mesa
D_e	rigidez equivalente da laje
D_p	diâmetro do pilar
E_c	módulo de elasticidade ou módulo de deformação longitudinal do concreto
E_{cs}	módulo de elasticidade secante ou módulo de deformação longitudinal secante do concreto
EPS	poliestireno expandido
F_e	vetor de forças
F_{sd}	força ou reação de punção de cálculo

I	momento de inércia
I_e	inércia equivalente
K	coeficiente que fornece a parcela de M_{Sd} transmitida ao pilar
K_e	matriz de rigidez do elemento
L	operador diferencial linear
N	matriz com funções de interpolação
M_x, M_y	momentos fletores
M_{xy}, M_{yx}	momentos torçores
M_{Sd}^*	momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido u^* em relação ao centro do pilar
M_{Sd}	momento de cálculo transmitido pela laje ao pilar de borda
M_{Sd1}	momento de cálculo transmitido pela laje ao pilar de borda, no plano perpendicular a borda livre
M_{Sd2}	momento de cálculo transmitido pela laje ao pilar de borda, no plano paralelo à borda livre
N_x, N_y, N_{xy}	forças de membrana
P_e	vetor de forças, as quais aplicadas diretamente sobre os nós
Q	carga total
Q_x, Q_y	forças cortantes
SX	tensão normal na direção x, no Ansys
SY	tensão normal na direção y, no Ansys
SZ	tensão normal na direção z, no Ansys
U	energia de deformação
U_e	vetor com os deslocamentos nodais do elemento
UX	Deslocamento linear na direção x, no Ansys
UY	Deslocamento linear na direção y, no Ansys
UZ	Deslocamento linear na direção z, no Ansys
V_e	volume do elemento
W_{int}	trabalho virtual interno

W_{ext}	trabalho virtual externo
W_{exp}	flecha obtida experimentalmente
W_l	flecha calculada para laje maciça de concreto de espessura equivalente
W_p	módulo de resistência plástica do perímetro crítico
W_{p1}	módulo de resistência plástica do perímetro crítico, na direção perpendicular à borda livre
W_{p2}	módulo de resistência plástica do perímetro crítico, na direção paralela à borda livre

Letras gregas minúsculas

ε	vetor de deformações
ε_c	deformação do concreto
σ	tensor de tensões
σ_c	tensão do concreto
τ_{wd}	tensão tangencial de cálculo ou tensão de cisalhamento de cálculo
τ_{sd}	tensão de cisalhamento solicitante de cálculo
ν	coeficiente de Poisson do material

Letras gregas maiúsculas

∇	operador laplaciano
θ	ângulo de inclinação

Símbolos especiais

\int	integral
∂	derivada parcial
\sum	somatório
$<$	menor que
$>$	maior que

SUMÁRIO

RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos Gerais	1
1.2 Objetivos Específicos	2
1.3 Justificativa	3
1.4 Estrutura do trabalho	4
2 LAJES NERVURADAS	6
2.1 Lajes de Concreto	6
2.1.1 Introdução	6
2.1.2 Classificação	7
2.1.2.1 Quanto à forma	8
2.1.2.2 Quanto à natureza	8
2.1.2.3 Quanto ao tipo de apoio	11
2.1.2.4 Quanto ao tipo de armação	12
2.2 Lajes Cogumelo Nervuradas	13
2.2.1 Introdução	13
2.2.2 Definições	14
2.2.3 Considerações e Revisão Sobre a Punção	16
2.2.4 Prescrições da NBR 6118:2003	20
2.2.4.1 Espessuras	20
2.2.4.2 Nervuras	21
2.2.4.3 Pilares	21
2.2.4.4 Punção	22
2.2.4.4.1 Dimensionamento de lajes à punção	22
2.3 Estudos Realizados na UFSM	27
3 MÉTODOS DE CÁLCULO	31
3.1 Considerações Iniciais	31
3.2 Teoria de Placas	31
3.2.1 Introdução	31
3.2.2 Teoria Clássica de Placas Delgadas	32
3.2.3 Soluções por Meio de Séries	36
3.2.4 Teoria de Placas para Lajes Nervuradas	38
3.3 Método dos Elementos Finitos	40
3.3.1 Introdução	40
3.3.2 Fundamentos Teóricos do Método dos Elementos Finitos	41

3.3.3	Avaliação da Convergência do Método dos Elementos Finitos.....	48
3.3.4	Trabalhos Utilizando o Método dos Elementos Finitos.....	49
3.4	Método da Analogia de Grelhas.....	59
3.4.1	Introdução.....	59
3.4.2	Cálculo de Grelhas pela Análise Matricial de Estruturas.....	61
3.5	Método dos Pórticos Equivalentes.....	63
3.5.1	Considerações da NBR 6118:2003.....	63
4	PARÂMETROS DE CÁLCULO.....	64
4.1	Módulo de Deformação Longitudinal do Concreto.....	64
4.1.1	Introdução.....	64
4.1.2	Fórmulas da NBR 6118:2003.....	65
4.1.3	Fórmulas do CEB-FIP 90.....	65
4.1.4	Fórmulas do ACI 318-95.....	66
4.1.5	Considerações Gerais.....	66
4.2	Determinação da Seção Equivalente.....	67
4.2.1	Introdução.....	67
4.2.2	Equivalência da Energia de Deformação da Laje.....	68
4.2.3	Equivalência de Momento de Inércia.....	71
4.2.4	Método da Rigidez Média.....	72
5	ANÁLISE NUMÉRICA.....	74
5.1	Apresentação.....	74
5.2	Aplicação 01 – Estruturas de ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000).....	74
5.2.1	Características das Lajes.....	74
5.2.2	Modelo em Elementos Finitos Bidimensionais.....	80
5.2.3	Modelo em Elementos Finitos Tridimensionais.....	81
5.2.3.1	Definição da Malha de Elementos Finitos.....	81
5.2.4	Resultados e Conclusões.....	83
5.3	Aplicação 02 – Estrutura de DUTRA (2005).....	86
5.4	Modelos Propostos em Elementos Finitos Bidimensionais e Tridimensionais.....	88
5.4.1	Geometria da Laje.....	89
5.4.2	Definição da Malha de Elementos Finitos.....	90
5.4.3	Condições de Contorno da Estrutura.....	91
5.4.4	Carga Aplicada à Laje.....	92
5.4.5	Modelo Proposto MEF-01.....	92
5.4.5.1	Propriedades dos Materiais.....	92
5.4.5.2	Espessura Equivalente para as Regiões Nervuradas.....	92
5.4.6	Modelo Proposto MEF-02.....	93
5.4.6.1	Propriedades dos Materiais.....	93
5.4.6.2	Espessura Equivalente para as Regiões Nervuradas.....	93
5.4.7	Modelo Proposto MEF-03.....	94
5.4.7.1	Propriedades dos Materiais.....	94
5.4.7.2	Espessura Equivalente para as Regiões Nervuradas.....	94
5.5	Modelos Propostos em Elementos Finitos Tridimensionais.....	94
5.5.1	Geometria da Laje.....	95
5.5.2	Definição da Malha de Elementos Finitos.....	95
5.5.3	Condições de Contorno da Estrutura.....	100
5.5.4	Força Aplicada à Laje.....	101
5.5.5	Modelo Proposto MEF-04.....	101

5.5.6	Modelo Proposto MEF-05	102
6	RESULTADOS	103
6.1	Apresentação	103
6.2	Resultados Experimentais	103
6.3	Resultados dos Deslocamentos para os Modelos em Elementos Finitos	108
6.3.1	Resultados para os Modelos com Elementos Bidimensionais e Tridimensionais...	108
6.3.2	Resultados para os Modelos com Elementos Finitos Tridimensionais	111
6.4	Resultados de Momentos Fletores para os Modelos em Elementos Finitos.....	114
6.4.1	Resultados para os Modelos com Elementos Bidimensionais e Tridimensionais...	114
6.4.2	Resultados para os Modelo com Elementos Finitos Tridimensionais.....	116
6.5	Demais Possibilidades de Análise dos Modelos Tridimensionais.	118
7	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	119
7.1	Deslocamentos	119
7.2	Momentos Fletores.....	122
8	CONCLUSÕES	126
8.1	Conclusões	126
8.2	Demais Conclusões	127
8.3	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	127
9	BIBLIOGRAFIA.....	129
10	ANEXOS.....	138

1 INTRODUÇÃO

É cada vez mais crescente a busca por edificações com maior liberdade de espaços, vãos livres mais ousados, muitas vezes sem vigas e com pilares cada vez mais espaçados. Esta tendência tem levado à busca constante por técnicas que viabilizem essa liberdade.

Desta forma, as lajes nervuradas, assim como, as lajes cogumelo nervuradas apresentam uma vantagem significativa em relação aos sistemas convencionais que utilizam, lajes, vigas e pilares, que é o fato de ocuparem um menor volume nos ambientes construídos, os quais possibilitam uma maior liberdade ao projetista arquitetônico, e o melhor aproveitamento da edificação por parte do usuário.

O desenvolvimento de novas tecnologias e o aperfeiçoamento das técnicas construtivas faz com que, além de aumentar os vãos, se tenha elementos estruturais mais esbeltos. Com base nesses princípios as lajes nervuradas e as lajes cogumelo nervuradas têm demonstrado serem alternativas com enorme potencial nesse tipo de construção.

Porém, as lajes nervuradas e cogumelo nervuradas tem sido tema de estudos para inúmeros pesquisadores. Nestas pesquisas tem-se buscado aperfeiçoar os métodos empregados no cálculo deste tipo de estrutura, no que se refere à determinação das solicitações, assim como, contribuir para o desenvolvimento deste sistema estrutural.

Desta forma, é cada vez mais importante o estudo das lajes nervuradas e cogumelo nervuradas, visto que se trata de uma técnica bastante difundida, com expressivas vantagens e que muito tem a evoluir do ponto de vista técnico e científico.

1.1 Objetivos Gerais

Este trabalho visa o aprimoramento dos métodos de cálculo de lajes nervuradas, assim como, de lajes cogumelo nervuradas, de forma a contribuir com o avanço

tecnológico e com a consolidação deste sistema estrutural. Por meio de métodos de cálculo mais confiáveis, que reproduzam com mais precisão o comportamento real da estrutura, é possível obter estruturas menos onerosas e mais seguras.

1.2 Objetivos Específicos

Este trabalho tem como objetivos específicos:

- Implementar a análise numérica lajes cogumelo nervuradas por meio de elementos finitos bidimensionais, como de placas e cascas.
- Verificar a partir dos modelos em elementos finitos bidimensionais, os parâmetros empregados no cálculo, como no caso do módulo de elasticidade do concreto e das metodologias que propõe uma seção maciça equivalente para simplificar a seção nervurada.
- Analisar os métodos de cálculo de lajes cogumelo nervuradas por meio de uma revisão preliminar nos métodos analíticos clássicos, e em seguida, com o estudo dos métodos numéricos computacionais, como é o caso do Método dos Elementos Finitos.
- Analisar os métodos de cálculo, no que se refere à determinação das solicitações (momentos fletores) e deslocamentos necessários para o dimensionamento das lajes cogumelo nervuradas, confrontando os resultados teóricos com resultados experimentais, apresentados na bibliografia e provenientes de pesquisas desenvolvidas na UFSM.
- Propor uma metodologia de análise estrutural para as lajes cogumelo nervuradas, utilizando-se o Método dos Elementos Finitos, fazendo-se simulações com elementos finitos tridimensionais que possam reproduzir exatamente a geometria da laje e melhor representar suas solicitações e seus deslocamentos.
- Verificar o desempenho da metodologia proposta, utilizando-se elementos finitos tridimensionais, e identificando-se suas vantagens e desvantagens em relação aos outros métodos.

1.3 Justificativa

Inúmeras pesquisas têm sido realizadas com o objetivo de otimizar os processos de cálculo de lajes cogumelo nervuradas, de modo a eliminar algumas desvantagens quanto às técnicas de cálculo dos deslocamentos, assim como, de determinação das solicitações.

Grande parte dos pesquisadores que utilizam o Método dos Elementos Finitos tem utilizado elementos de barra de modo a simplificar o cálculo usando analogias como a de vigas, grelhas e pórticos. Porém, em várias pesquisas é destacada a necessidade da modelagem de toda a estrutura da edificação considerando-se as interações que ocorrem entre pilares e lajes.

As simplificações incorporadas nos modelos de cálculo das estruturas resultam na redução da confiabilidade dos sistemas estruturais. Com isso há a tendência de aumentar os coeficientes de ponderação que são incorporados nos cálculos para a determinação da segurança de uma estrutura, resultando diretamente no aumento do custo das edificações.

Esta pesquisa justifica-se pelo objetivo de empregar elementos finitos tridimensionais para a simulação de todo o conjunto estrutural, de modo a reproduzir exatamente a geometria da laje e dos pilares. Com isso, é possível otimizar o processo de obtenção das solicitações e deslocamentos, pois se trata de modelo estrutural mais realista.

É importante destacar que não se verificou estudo semelhante na bibliografia existente, tratando-se, portanto, de um estudo inédito.

Esta tentativa não seria possível a alguns anos devido à capacidade de processamento dos computadores usuais. Entretanto, os avanços tecnológicos da engenharia de computação permitem que sejam melhor implementadas algumas teorias e inovações na engenharia de estruturas.

Por fim, a viabilidade deste estudo contribuiu com o avanço tecnológico e com a consolidação deste sistema estrutural.

1.4 Estrutura do trabalho

No Capítulo 1 é apresentada uma introdução sobre esta dissertação, são definidos os objetivos gerais e específicos, assim como, a justificativa e a estrutura deste trabalho.

No Capítulo 2 são revisados os fundamentos das lajes, suas características e classificações. Nesse capítulo é dada atenção especial às lajes cogumelo nervuradas, realizando-se um estudo mais detalhado sobre esse tipo de laje, por meio de suas definições, e algumas considerações sobre o fenômeno da punção que ocorre neste tipo de laje. São apresentados alguns estudos recentes realizados na UFSM sobre o tema lajes.

No Capítulo 3 é revisada a teoria clássica de placas, sua solução aproximada por meios de séries, sua formulação para o caso de lajes nervuradas, assim como os demais métodos ressaltando-se o Método dos Elementos Finitos, para o qual será apresentada uma revisão quanto à sua utilização no cálculo de lajes nervuradas. São feitas algumas considerações sobre o método da analogia por grelhas, e por último sobre o método dos pórticos equivalente proposto pela NBR 6118:2003.

O Capítulo 4 apresenta um estudo sobre os parâmetros empregados no cálculo, como o módulo de elasticidade do concreto e as metodologias que propõe uma seção maciça equivalente para simplificar a seção nervurada.

No Capítulo 5 são propostos modelos de cálculo para a análise de estruturas de lajes cogumelo nervuradas, utilizando-se o Método dos Elementos Finitos, por meio de simulações com elementos finitos bidimensionais e elementos finitos tridimensionais. Neste capítulo são realizadas duas aplicações, duas estruturas diferentes as são conhecidos os resultados experimentais.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados oriundos dos modelos numéricos definidos no capítulo anterior, e os resultados experimentais utilizados como referência nesta pesquisa.

O Capítulo 7 apresenta uma análise dos resultados apresentados no Capítulo 6.

O Capítulo 8 contém as conclusões obtidas nesta pesquisa além de algumas sugestões para trabalhos futuros.

No Capítulo 9 são apresentadas as referências bibliográficas que embasaram esta dissertação e no Capítulo 10 alguns anexos que a complementam.

2 LAJES NERVURADAS

2.1 Lajes de Concreto

2.1.1 Introdução

Segundo BAYKOV e SIGALOV (1986), o concreto é muito mais resistente à compressão do que à tração, com isto, quando sujeito à flexão, resulta em uma baixa capacidade de resistir solicitações, devido a sua pouca resistência à tração. Admite-se normalmente que seja desprezada a parcela de resistência à tração do concreto. Entretanto, a utilização de armadura na zona tracionada assegura uma capacidade resistente consideravelmente mais elevada. Para o caso de uma viga, por exemplo, a resistência à flexão de uma seção armada pode ser 20 vezes maior do que a mesma seção em concreto simples.

Esta observação mostra que um adequado arranjo estrutural pode resultar em estruturas mais eficientes e econômicas. Desta forma, para que se tenha uma concepção estrutural coerente, é de extrema importância que sejam conhecidos os mecanismos que ocorrem nos sistemas estruturais.

As lajes de concreto são elementos estruturais de superfície plana que estão sujeitas a ações em seu plano, conforme especifica a NBR 6118:2003.

ARAÚJO (2003), assim como SILVA e SOUTO (2002), definem que a principal finalidade das lajes de concreto é a de transmitir as cargas de utilização aplicadas diretamente nos pisos, para as vigas e/ou pilares que as suportam, além disto, as lajes de concreto apresentam outras funções importantes, como no contraventamento das estruturas, funcionando como diafragmas, visto que são elementos infinitamente rígidos no seu plano, que distribuem as cargas horizontais atuantes entre as estruturas de contraventamento. SILVA e SOUTO (2002) definem ainda que outra função importante das lajes é a de quando construídas ligadas monoliticamente com as vigas, contribuem no seu enrijecimento, funcionando assim como mesas de compressão da seção T. De acordo com estes autores as lajes de concreto estão presentes em vários tipos de construção, tais como edificações residenciais e comerciais, galpões indus-

triais, pontes, reservatórios, estruturas de contenção de terras, pistas de rodovias e aeroportos, entre muitas outras obras de engenharia. Com a notória utilidade das lajes de concreto, foram sendo desenvolvidas variações de forma e de composição com o objetivo de melhorar o seu desempenho estrutural para determinadas aplicações. A escolha mais adequada do tipo de laje para determinado projeto depende muito da experiência profissional do projetista, de forma que a estrutura satisfaça plenamente todos requisitos arquitetônicos, econômicos e de segurança. As lajes de concreto ainda se prestam como isolantes térmicos e acústicos.

Para LEONHARDT e MÖNNIG (1977) as lajes são os elementos planos que separam os andares e recebem as cargas dos revestimentos dos pisos e cargas acidentais que possam surgir sobre elas.

Para SOUZA e CUNHA (1998) as lajes são componentes básicos das estruturas, sendo as lajes de concreto armado as mais comumente utilizadas. São elementos estruturais planos bidirecionais, geralmente retangulares e monolíticos, onde a espessura h é muito menor que as outras dimensões, com carregamento predominantemente transversal. A Figura 2.1 mostra o esquema estrutural de uma laje retangular de espessura h com carregamento aplicado.

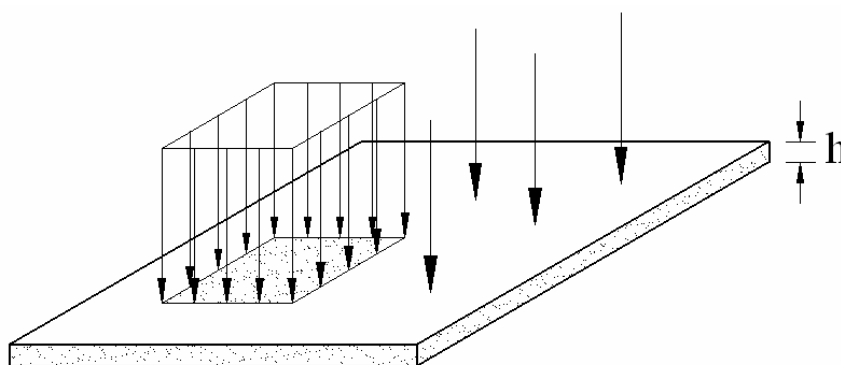


Figura 2.1 – Laje retangular com carregamento aplicado.

2.1.2 Classificação

Segundo SUSSEKIND (1984), RESINOR (1988), SOUZA e CUNHA (1998), ARAÚJO (2003), e DUTRA (2005), existem diferentes critérios para classificar as lajes de concreto armado ou protendido: quanto à forma, tipo de apoio, tipo de arma-

ção e quanto à natureza. Sendo que LEONHARDT e MÖNNIG (1977) define ainda que cada tipo possui suas características próprias quanto à construção e desempenho.

Para ARAÚJO (2003) o termo “laje” é empregado para designar as “placas” de concreto armado.

A partir destas definições são apresentadas neste item as classificações das lajes de concreto.

2.1.2.1 Quanto à forma

Todo projeto tem características próprias e peculiaridades, muitas vezes são exigências que conduzem a elementos estruturais que devem satisfazer essas formas.

Portanto, quanto à forma as lajes podem ser:

- a) lajes poligonais: retangulares, quadradas, triangulares octogonais, em T, L, Z, entre outras;
- b) lajes elípticas: lajes circulares ou anelares.

2.1.2.2 Quanto à natureza

As lajes podem ser diferenciadas quanto à natureza, através da maneira de execução e dos tipos de materiais utilizados em sua confecção, classificando-se em:

- a) lajes maciças: são lajes constituídas por placas monolíticas de concreto armado ou de concreto protendido, com espessura uniforme, construídas sobre uma forma de madeira ou metálica que é removida após a cura do concreto. São as lajes mais utilizadas em edificações e obras de arte, mas não pode vencer grandes vãos devido ao seu peso próprio;
- b) lajes nervuradas: são lajes compostas por nervuras na zona de tração e uma mesa maciça de concreto na zona de compressão. As nervuras são configuradas por um determinado espaçamento entre si, regulamentado pela NBR 6118:2003, nesse caso as nervuras ficam aparentes, ou então, são obtidas com o emprego de algum material inerte de baixo peso específico, como blocos cerâmicos ou EPS. O peso próprio da laje é reduzido, uma vez que se elimina uma parte do concreto que ficaria na

zona tracionada, caso fosse adotada a solução em laje maciça. Nas nervuras é onde estão concentradas as armaduras longitudinais de tração. Este tipo de laje é utilizado para vencer grandes vãos ou em casos de carregamentos especiais. A Figura 2.2 ilustra um corte transversal de uma laje nervurada de concreto, de acordo com GUERRIN (2002);

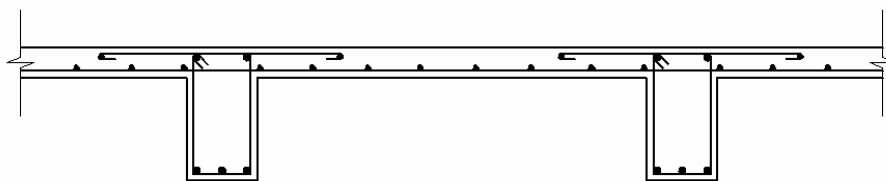


Figura 2.2 – Laje nervurada, conforme GUERRIN (2002).

- c) lajes mistas: são semelhantes as lajes nervuradas, porém, têm o espaço entre as nervuras preenchidos com material cerâmico, o qual participa com uma parcela de resistência mecânica na laje, contribuindo na resistência à flexão da região comprimida. Outra característica marcante é que ao contrário da laje nervurada, na laje mista não existe a obrigatoriedade da utilização da mesa de concreto na região comprimida, devendo o bloco cerâmico ser de boa qualidade. O revestimento é assentado diretamente sobre as nervuras ortogonais de concreto e sobre a face superior dos blocos cerâmicos;
- d) lajes em grelhas: as lajes em grelha constituem um caso particular das lajes nervuradas, onde as nervuras são mais altas e o espaçamento entre elas é superior a 1 m. Além disso, não se utiliza material inerte como o EPS ou outro qualquer, as vigas são aparentes, exceto se colocado forro falso. O dimensionamento da capa de concreto deve ser de tal forma que se considere a possibilidade de punção de uma sobrecarga pontual. O cálculo é normalmente feito como o de lajes maciças contínuas, sendo o vigaamento calculado como grelha. Geralmente são utilizadas em edificações industriais e/ou comerciais;

- e) lajes duplas: as lajes duplas podem ser entendidas como um caso particular das lajes nervuradas ou das lajes em grelhas, e ainda, em alguns casos, como lajes maciças. Elas apresentam duas capas de concreto, sendo uma superior que trabalha a compressão e outra inferior, entre estas duas capas ficam as vigas ou nervuras de concreto. Geralmente são utilizadas em pilotis ou pavimentos de transição de edifício. Atualmente estas lajes estão praticamente em desuso, exceto em situações particulares;
- f) lajes pré-fabricadas: as lajes pré-fabricadas são formadas por um conjunto de vigotas, ou seja, nervuras de concreto armado ou protendido, e blocos cerâmicos ou de concreto, também conhecidos por tabelas, solidarizados por uma capa de concreto que trabalha à compressão. As lajes pré-fabricadas podem ser unidirecionais, constituídas por nervuras principais longitudinais dispostas em uma única direção, ou bidirecionais, na qual são executadas nervuras transversais às pré-lajes, resultando em uma laje acabada bidirecional. As lajes pré-fabricadas unidirecionais são regulamentadas pela NBR 14859-1:2002 e NBR 14860-1:2002, e as lajes pré-fabricadas bidirecionais regulamentadas pela NBR 14859-2:2002 e NBR 14860-2:2002. As nervuras de concreto podem ser convencionais dando origem às lajes pré-fabricadas convencionais, ou nervuras treliçadas, dando origem as chamadas lajes treliçadas. As vantagens deste tipo de laje são relativas à rapidez de execução e à economia de formas e de escoramento. Além dessas duas variações, enquadra-se na classificação de laje pré-fabricada, a laje formada por painéis pré-fabricados, que compõem os entre pisos apenas pela justaposição das placas, utilizadas especialmente em obras industriais.
- g) Lajes cogumelo: as lajes cogumelo são lajes apoiadas diretamente sobre os pilares, sem a utilização de vigas, podendo ter capitéis sobre os pilares.
- h) Lajes lisas: as lajes lisas pertencem ao grupo das lajes cogumelo, as quais se apóiam diretamente sobre os pilares, sem o uso de vigas, es-

tando a eles rigidamente ligadas. O termo ‘lisa’ refere-se à ausência de capitéis, ou engrossamento de pilares.

2.1.2.3 Quanto ao tipo de apoio

Dependendo das condições de apoio, ou seja, do caminho percorrido pelas cargas até determinados pontos da estrutura, as lajes de concreto podem ser discriminadas como:

- a) apoio contínuo: ocorre quando a laje está apoiada sobre uma linha contínua, formada por alvenarias, paredes de concreto, vigas de sustentação de concreto armado ou protendido, metálicas ou de madeira. Podendo estar todos os bordos apoiados ou eventualmente um ou mais bordos livres;
- b) apoio discreto: ocorre quando a laje está apoiada diretamente sobre os pilares, também chamada de laje cogumelo ou laje plana. Pode ser de três tipos, dependendo da presença ou não de reforço ou capitel, e de sua localização no encontro do pilar com a laje, ou seja, laje cogumelo com capitel aparente, com capitel invertido, e sem capitel, conforme pode ser visto na Figura 2.3, Figura 2.4, e Figura 2.5.

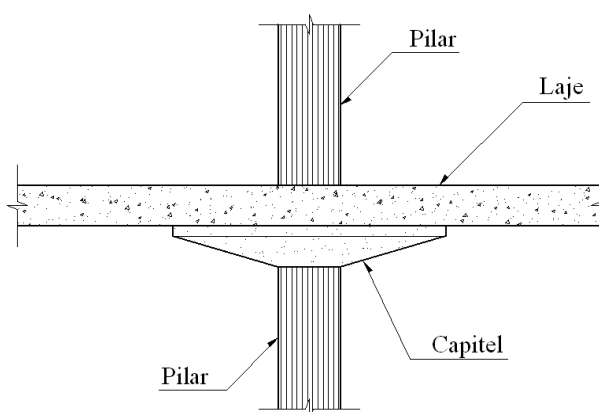


Figura 2.3 – Laje cogumelo com capitel aparente.

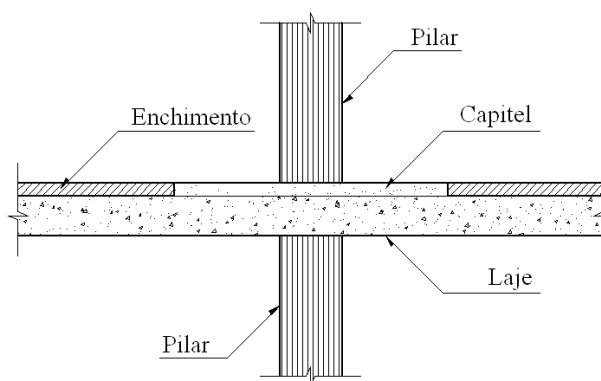


Figura 2.4 – Laje cogumelo com capitel invertido.

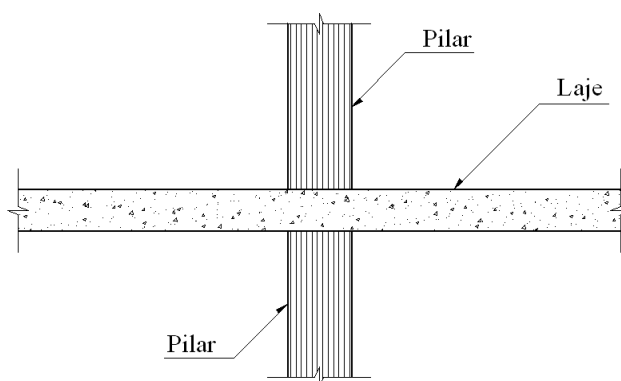


Figura 2.5 – Laje cogumelo sem capitel.

2.1.2.4 Quanto ao tipo de armação

A classificação das lajes quanto à armação se restringe apenas a lajes retangulares, visto que as lajes com outras formas têm variações de armadura conforme os apoios e particularidades da forma e do projeto. Portanto, as lajes retangulares podem ser classificadas como:

- a) armadas em uma só direção: são lajes que apresentam solicitações importantes de momentos fletores e forças cortantes apenas em uma direção, isso ocorre quando a relação entre o maior e o menor vão é superior a 2, e a maior parte do carregamento passa então a ser suportada pelos apoios da menor direção;
- b) armadas em duas direções, ou armadas em cruz: são lajes que estão sujeitas a solicitações importantes nas duas direções, ou seja, quando a relação entre o maior e o menor vão é menor do que 2.

2.2 Lajes Cogumelo Nervuradas

2.2.1 Introdução

Sem dúvida a tendência atual em construção civil é a de aumentar os vãos livres entre pilares. Essa tendência está baseada principalmente no desenvolvimento de novos materiais, como por exemplo, na melhoria das propriedades mecânicas do aço e do concreto. Além dos materiais, o desenvolvimento de novas tecnologias e o aperfeiçoamento das técnicas construtivas, como é o caso da protensão, faz com que, além de se aumentar os vãos, se tenha elementos estruturais mais esbeltos impondo menores limitações arquitetônicas.

Associado a este fenômeno é notório o surgimento e a potencialização de alternativas de construção, como é o caso das lajes nervuradas e das lajes cogumelos, com e sem protensão.

Segundo BAYKOV e SIGALOV (1986), a essência das estruturas de piso monolítico nervuradas consiste em que o concreto, por motivos econômicos, é eliminado das zonas tracionadas das seções, conservando-se somente as almas em que se encontram as armaduras tracionadas. PINHEIRO e RAZENTE (2003) complementam ainda que além do concreto eliminado propiciar economia de materiais, de mão-de-obra e de formas, aumenta a viabilidade do sistema construtivo, pois o emprego de lajes nervuradas simplifica a execução e permite sua industrialização, reduzindo perdas, aumentando a produtividade e racionalizando a construção.

Como mostrado, as lajes nervuradas têm duas partes principais, a mesa, que consiste de uma pequena camada de concreto comprimida, e as nervuras, que são as regiões tracionadas onde estão localizadas as armaduras de tração.

Para as regiões onde se tem momentos fletores negativos, como nas superfícies próximas às ligações com os pilares, em que a nervura passaria a ser comprimida, é comum a utilização de capitéis, ou trechos em laje lisa maciça. Este procedimento assegurar à capacidade resistente aos momentos fletores negativos, pois a face inferior da laje, que está sendo comprimida tem um maciço de concreto. Outro fator de grande importância que a utilização de capitéis, ou trechos em laje lisa maciça garante, é a resistência à punção das lajes, que para os casos de edifícios sem vigas é fundamental.

2.2.2 Definições

PINHEIRO e RAZENTE (2003) definem uma laje nervurada, como sendo constituída por um conjunto de vigas que se cruzam, as quais são solidarizadas pela mesa. Desta forma, este elemento estrutural terá comportamento intermediário entre o de laje maciça e o de grelha.

Segundo PINHEIRO e RAZENTE (2003) as evoluções arquitetônicas induzem ao aumento dos vãos, sendo que o alto custo das formas tornaram as lajes maciças desfavoráveis economicamente, para a maioria dos casos. Desta forma, as lajes nervuradas apresentam a vantagem da eliminação do concreto abaixo da linha neutra, propiciando a redução do peso próprio e um melhor aproveitamento do aço e do concreto.

Para CABRAL (1998) a busca do aperfeiçoamento das técnicas construtivas possibilitou a associação dos vários tipos de lajes de concreto, onde a fusão da laje cogumelo com a laje nervurada deu origem à laje cogumelo nervurada, um tipo de estrutura que apresenta uma série de vantagens em relação ao sistema construtivo tradicional de laje, viga e pilar.

De acordo com a NBR 6118:2003 as lajes-cogumelo são lajes apoiadas em pilares com capitéis, uma vez que lajes lisas são apoiadas diretamente em pilares sem capitéis. Nas lajes nervuradas a zona de tração para momentos positivos localiza-se nas nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte.

Usualmente é comum substituir parte do concreto tracionado por material inerte mais leve, como blocos cerâmicos, tijolos furados, tabelas e EPS. Atualmente, tem-se desenvolvido formas de materiais plásticos de fácil utilização e remoção e que possibilitam moldar os espaços vazios de maneira mais eficiente.

A Figura 2.6 mostra um exemplo de laje cogumelo nervurada em perspectiva, onde estão destacadas as regiões maciças dos capitéis, assim como as nervuras que a compõem.

As Figuras 2.7 a 2.10, mostram todas as particularidades de uma laje cogumelo nervurada, em planta, vistas e cortes, respectivamente.

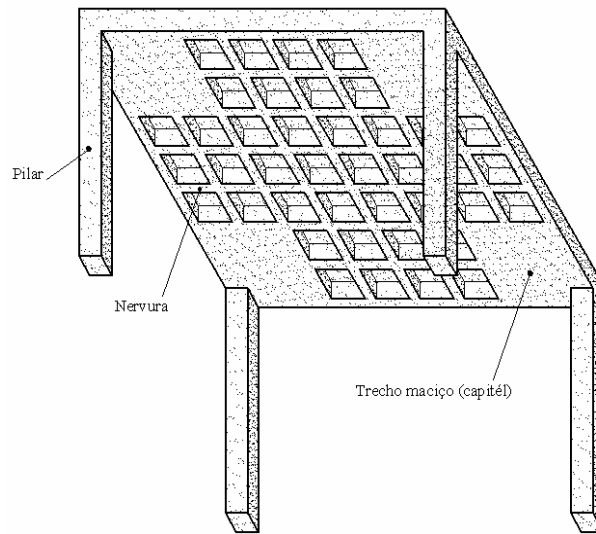


Figura 2.6 – Perspectiva de uma laje cogumelo nervurada.

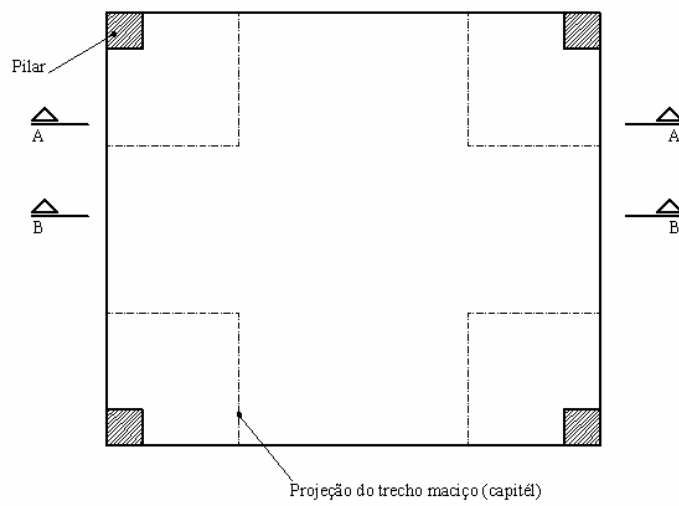


Figura 2.7 – Vista em planta da laje cogumelo nervurada.

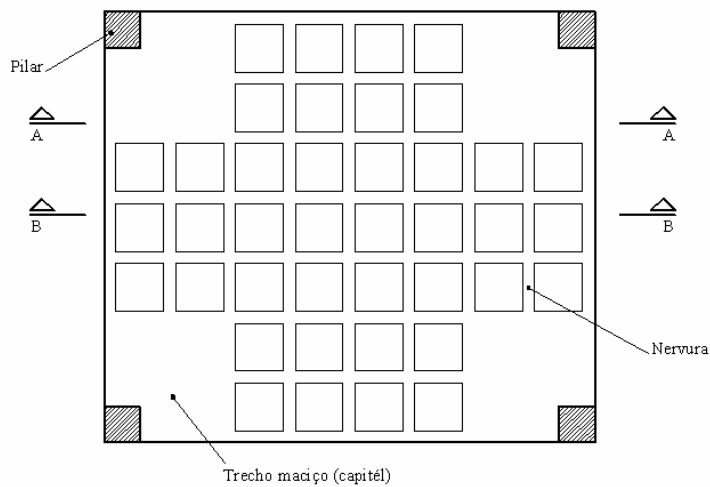


Figura 2.8 – Vista inferior da laje cogumelo nervurada.

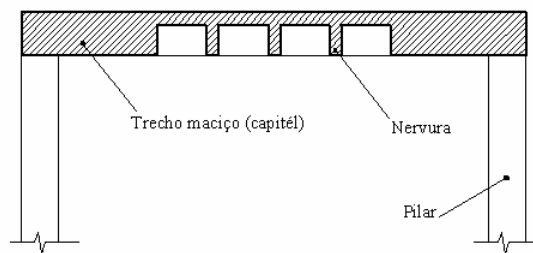


Figura 2.9 – Corte AA' da laje cogumelo nervurada.

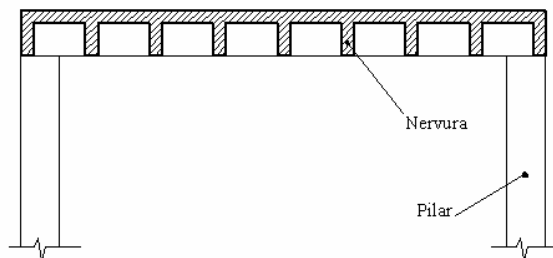


Figura 2.10 – Corte BB' da laje cogumelo nervurada.

2.2.3 Considerações e Revisão Sobre a Punção

A punção é um fenômeno caracterizado pelo rompimento frágil de uma determinada área da laje, geralmente nas seções em torno dos pilares ou nos apoios, devido à alta concentração de cargas. Este tipo de solicitação é característico em lajes lisas, onde as mesmas estão diretamente apoiadas sobre os pilares. A fim de se evitar este

tipo de ruptura, o dimensionamento dessas lajes deve ser em função da resistência à punção nas ligações com os pilares.

A punção pode ocorrer quando uma força concentrada atua sobre uma área de elemento estrutural plano (laje ou elemento de fundação), provocando altas tensões de cisalhamento.

De acordo com a NBR 6118:2003, punção é o Estado Limite Último no entorno de forças concentradas.

A ligação laje-pilar é uma região crítica em termos de resistência, pois é onde atuam forças cortantes de alta intensidade, que podem ocasionar uma ruína por punção, de forma brusca, abrupta, não fornecendo qualquer aviso prévio, antes mesmo da armadura de flexão atingir sua tensão de escoamento. Esse problema é agravado quando ocorre a transferência de momentos não equilibrados da laje para o pilar, como nos casos de pilares de borda e de canto, onde o momento não equilibrado é o máximo e a seção em torno do pilar em contato com a laje é menor.

Segundo ACCETTI e PINHEIRO (1999) a redistribuição de momentos em combinação com tensões de membrana, garante as lajes cogumelo uma considerável reserva de capacidade à flexão. Por isso a capacidade resistente dessas lajes é geralmente ditada pelo cisalhamento, e não pela flexão.

A ruína por punção caracteriza-se pela formação de uma superfície troncônica ou tronco-piramidal, cujas arestas têm inclinação θ entre 25 a 30° em relação ao plano médio da placa, conforme mostra a Figura 2.11. Esta superfície pode ser alterada em função da posição do pilar e da presença de armaduras de cisalhamento.

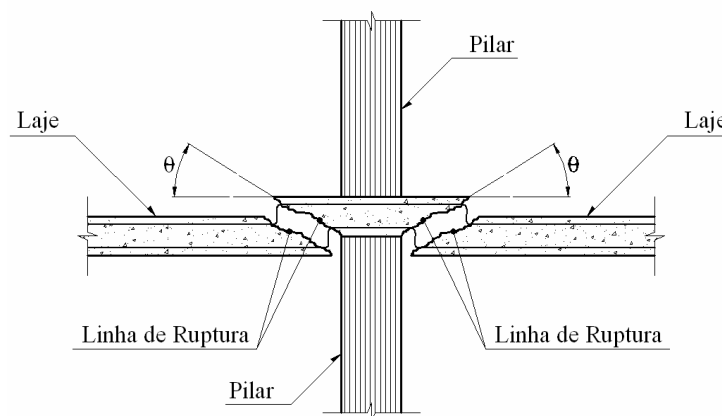


Figura 2.11 – Superfície de ruptura à punção.

Além das forças cortantes e momentos fletores, existem outros fatores que também exercem influência na ruptura por punção, tais como, resistência característica do concreto, espessura da laje, taxa de armadura à flexão, existência de armadura de cisalhamento, ancoragem adequada nos níveis superior e inferior da armadura de punção, e as dimensões, formas e posição dos pilares, entre outros.

Segundo ACCETTI e PINHEIRO (1999), também é possível aumentar a resistência à punção das lajes de concreto utilizando-se de fibras de aço, as quais proporcionam maior ductilidade à ligação.

AZEVEDO e HANAI (1999) estudaram a resistência e ductilidade das ligações laje-pilar em lajes-cogumelo de concreto de alta resistência armado com fibras de aço e armadura transversal de pinos, e constataram que o emprego de concreto de alta resistência, juntamente com armadura transversal, aumenta substancialmente a resistência da ligação laje-pilar. Quando combinado com fibras de aço garante uma considerável ductilidade, tornando possível a redistribuição de solicitações na estrutura, influenciando inclusive na formação da superfície de ruptura, possibilitando assim, um tempo para a tomada de providências antes da ruína total.

ANDRADE e GOMES (1999) estudaram a resistência à punção de lajes cogumelo de concreto armado com armadura de cisalhamento posicionada ao redor da coluna e internamente às armaduras de flexão dos bordos superior e inferior, visando verificar a possibilidade do uso e as restrições quanto ao posicionamento da armadura de cisalhamento. De acordo com esses autores, as armaduras de cisalhamento para o combate a punção nas lajes cogumelo (*studs*, estribos), são de fácil confecção, mas apresentam certa dificuldade de fixação no canteiro de obras devido ao seu posicionamento na laje. O posicionamento adequado das armaduras de cisalhamento nas lajes cogumelo requer que a mesma envolva a armadura de flexão para que se tenha uma boa ancoragem, o que aumenta o tempo e a mão-de-obra envolvidos no serviço. Porém, o posicionamento executado com a armadura de cisalhamento ancorada interiormente à armadura de flexão, mesmo não sendo o mais recomendado, é de fácil execução, servindo como espaçador de armadura e contribuindo na colocação da armadura de flexão.

Esses estudos revelam que posicionando-se a armadura de cisalhamento dessa maneira, é possível que o recobrimento da armadura não seja diminuído, não havendo a necessidade de se aumentar a altura da laje para manutenção de sua altura útil efetiva. Os resultados obtidos revelaram que quando utilizada armadura de cisalhamento envolvendo-se a armadura de flexão pelo menos pela face inferior, pode-se obter uma superfície de ruptura externa a região de punção e uma força de ruptura próxima da força de ruptura esperada para uma laje com a armadura de cisalhamento armada da forma convencional; e que o uso de uma armadura de cisalhamento que não envolva a armadura de flexão pode aumentar significativamente a força de ruptura à punção em lajes cogumelo. Justificam o uso deste tipo de posicionamento, pela grande facilidade de fixação da armadura de cisalhamento, e posteriormente da armadura de flexão. Destacam que a maior limitação no uso deste tipo de posicionamento de armadura está na necessidade de ajuste dos métodos de cálculo, e da realização de um maior número de ensaios para análise dos modos de ruptura, de maneira a comprovar a sua potencialidade.

COELHO e MELO (1999) estudaram o comportamento de lajes cogumelo de concreto armado com estribos inclinados resistindo ao puncionamento. Constataram que os estribos inclinados apresentaram desempenho superior ao dos estribos verticais, ao contrário do esperado, de acordo com algumas normas internacionais que não recomendam a utilização de armadura de cisalhamento inclinada. Ao ensaiarem as lajes obtiveram uma força de ruptura 49% maior com a utilização de estribos inclinados abertos, e uma força de ruptura 18% maior com a utilização de estribos verticais retangulares fechados, ambos em comparação com a força de ruptura das lajes sem armadura de cisalhamento. Relatam ainda que os estribos inclinados abertos são de fácil instalação e podem ser posicionados após a colocação da armadura de flexão.

HOLANDA (2002) analisou os mecanismos resistentes e as similaridades de efeitos da adição de fibras de aço na resistência e na ductilidade à punção de lajes-cogumelo e ao cisalhamento de vigas de concreto. Segundo esse autor a ruína por puncionamento da ligação laje-pilar pode ser evitada, proporcionando-se às lajes melhores condições para o desenvolvimento de mecanismos de escoamento das armaduras e de ruína por flexão, antes da ocorrência da ruína por cisalhamento, com a

introdução de fibras de aço nos elementos de concreto submetidos a solicitações tangenciais proporcionando assim, um melhor desempenho, seja pelo aumento da capacidade resistente, ou pela alteração da forma de ruína.

Esse autor analisou as similaridades dos efeitos da adição de fibras de aço na resistência e na ductilidade de lajes-cogumelo à punção, com as características observadas no cisalhamento de vigas prismáticas análogas. Abordou os casos de ligações laje-pilar interno sem armadura de punção, variando a resistência do concreto, a taxa e o tipo de fibra utilizado. A partir dos resultados experimentais verificou a existência de uma similaridade de comportamento estrutural entre esses dois elementos e concluiu que é possível utilizar ensaios de cisalhamento em vigas prismáticas para se obter indicadores para os ensaios de punção de lajes. Estabeleceu critérios quantitativos para a avaliação da resistência e da ductilidade das ligações laje-pilar, por meio da análise de modelos teóricos existentes sobre cisalhamento em vigas e punção em lajes, considerando o efeito da adição de fibras de aço ao concreto.

NGO (2001) estudou a resistência à punção de lajes de concreto armado de alta resistência. Segundo esse autor o uso de concreto de alta resistência em lajes de concreto armado na Austrália e em outros países está se tornando cada vez mais popular. Porém, as atuais especificações de projeto do AS3600: Concrete Structures Standard, Standards Association of Australia, 1994, e das principais normas internacionais estão baseadas em relações empíricas, desenvolvidas por meio de testes em lajes de concreto de baixa-resistência. Esse autor utilizou os resultados experimentais de quatro pesquisas para revisar as recomendações existentes nos códigos de projeto AS3600 e CEB-FIP 90, para o caso de ruína por puncionamento de lajes de concreto armado.

2.2.4 Prescrições da NBR 6118:2003

2.2.4.1 Espessuras

De acordo com a NBR 6118:2003, as espessuras mínimas para lajes cogumelo, devem obedecer aos seguintes critérios:

- a) 12 cm para lajes de cobertura não em balanço.

- b) 15 cm para lajes de piso e lajes em balanço.
- c) 15 cm para lajes destinadas à passagem de veículos.

2.2.4.2 Nervuras

Para a determinação das dimensões das nervuras, segundo a NBR 6118:2003, deve-se respeitar os seguintes parâmetros:

- a) a distância livre entre as nervuras não deve ultrapassar a 100 cm;
- b) a espessura das nervuras não deve ser inferior a 4 cm e da mesa não deve ser menor que 4 cm nem menor que $1/15$ da distância livre entre as nervuras;
- c) nas lajes armadas numa só direção, são necessárias nervuras transversais sempre que haja cargas concentradas a distribuir ou quando o vão teórico for superior a 4 m, exigindo-se duas nervuras no mínimo se esse vão ultrapassar 6 m;
- d) o apoio das lajes deve ser feito ao longo de uma nervura;
- e) nas nervuras com espessura inferior a 8 cm não é permitido colocar armadura de compressão no lado oposto à mesa.

2.2.4.3 Pilares

Quanto aos pilares que recebem as cargas de lajes cogumelo, a NBR 6118:2003 recomenda que a menor dimensão dos pilares não cintados não deve ser inferior a 20 cm, nem a $1/25$ da sua altura livre. O diâmetro do núcleo dos pilares cintados não deve ser inferior a 20 cm, nem a $1/10$ de sua altura livre.

Para o caso dos pilares suportarem lajes cogumelo, esses limites passam a ser 30 cm e $1/15$ para os não cintados, e 30 cm e $1/10$ para os cintados, devendo ainda a espessura em cada direção não ser inferior a $1/20$ da distância entre eixos dos pilares nessa direção.

2.2.4.4 Punção

2.2.4.4.1 Dimensionamento de lajes à punção

De acordo com a NBR 6118:2003 o modelo de cálculo para o dimensionamento de lajes à punção, corresponde à verificação de duas ou mais superfícies críticas definidas no entorno de forças concentradas (Figura 2.12).

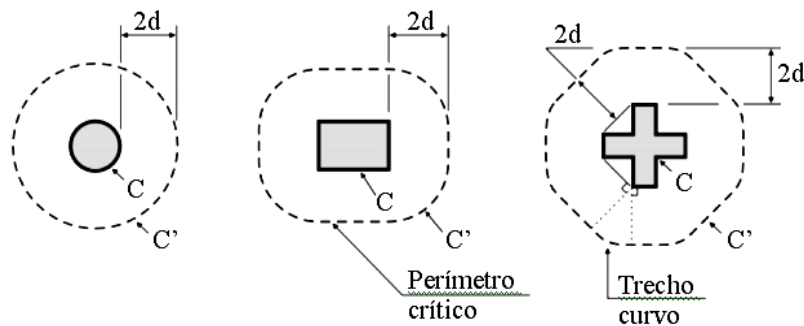


Figura 2.12 – Perímetro crítico em pilares internos conforme a NBR 6118:2003.

Na primeira superfície crítica (contorno C) do pilar ou da força concentrada, a tensão de compressão diagonal do concreto é verificada indiretamente, por meio da tensão de cisalhamento. Na segunda superfície crítica (contorno C'), afastada 2d do pilar ou força concentrada, verifica-se a capacidade da ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal. Essa verificação também pode ser feita usando-se uma tensão de cisalhamento no contorno C'. Caso haja necessidade a ligação deve ser reforçada por armadura transversal. A terceira superfície crítica (contorno C''), apenas é verificada quando for necessária a utilização de armadura transversal.

A definição da tensão solicitante nas superfícies críticas C e C' (Figura 2.12) para o caso de um pilar interno onde o efeito do carregamento pode ser considerado simétrico, é dado pela expressão:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u d} \quad (1)$$

$$d = \frac{(d_x + d_y)}{2} \quad (2)$$

onde

d – é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico C' , externo ao contorno C da área de aplicação da força e distante $2d$ no plano da laje;

d_x e d_y – são as alturas úteis nas duas direções ortogonais;

u – é o perímetro do contorno crítico C' ;

$u \cdot d$ – é a área da superfície crítica;

F_{sd} – é a força de punção ou a reação concentrada de cálculo.

Para pilares internos nos quais, além da força vertical, existe transferência de momento da laje para o pilar, o efeito de assimetria deve ser considerado, de acordo com a expressão:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u d} + \frac{K M_{Sd}}{W_p d} \quad (3)$$

onde K é o coeficiente que fornece a parcela de M_{Sd} transmitida ao pilar por cisalhamento, sendo dependente da relação C_1/C_2 ;

De acordo com a NBR 6118:2003, o coeficiente K assume os valores indicados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Valores e K .

C_1/C_2	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80

onde

C_1 é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força;

C_2 é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.

Os valores de W_p para pilar retangular e pilar circular, devem ser calculados pelas expressões (4) e (5), respectivamente:

$$W_p = \frac{C_1^2}{2} + C_1 C_2 + 4 C_2 d + 16 d^2 + 2\pi d C_1 \quad (4)$$

$$W_p = (D_p + 4d)^2 \quad (5)$$

onde D_p é o diâmetro do pilar.

Desprezando-se a curvatura dos cantos do perímetro crítico, pode-se calcular W_p por meio da expressão:

$$W_p = \int_0^u |e| dl \quad (6)$$

onde

dl – é o comprimento infinitesimal no perímetro crítico u ;

e – é a distância de dl ao eixo que passa pelo centro do pilar e sobre o qual atua o momento fletor M_{Sd} .

Para o caso de pilares de borda a NBR 6118:2003 apresenta duas considerações. Quando agir ou não momento no plano paralelo à borda livre (Figura 2.13) as quais são apresentadas a seguir.

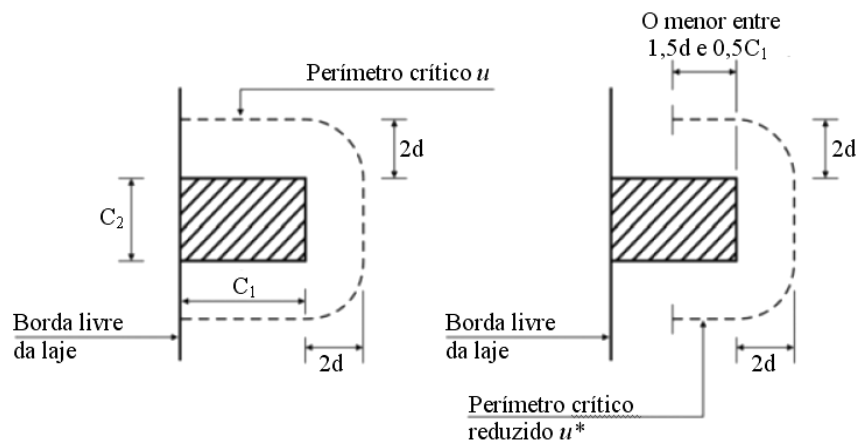


Figura 2.13 – Perímetro crítico em pilares de borda, conforme a NBR 6118:2003.

a) Quando não agir momento no plano paralelo à borda livre:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u^* \cdot d} + \frac{K_1 M_{Sd1}}{W_{p1} d} \quad (7)$$

$$M_{Sd1} = (M_{Sd} - M_{Sd}^*) \geq 0 \quad (8)$$

onde

F_{Sd} – é a reação de apoio;

u^* – é o perímetro crítico reduzido;

M_{Sd} – é o momento de cálculo no plano perpendicular à borda livre;

M_{Sd}^* – é o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido u^* em relação ao centro do pilar;

W_{p1} – é o módulo de resistência plástica perpendicular à borda livre, calculado para o perímetro u .

O coeficiente K_1 assume os valores estabelecidos para K na Tabela 2.1, e os parâmetros C_1 e C_2 são mostrados na Figura 2.13.

b) Quando agir momento no plano paralelo à borda livre:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u^* \cdot d} + \frac{K_1 M_{Sd1}}{W_{p1} d} + \frac{K_2 M_{Sd2}}{W_{p2} d} \quad (9)$$

onde

M_{Sd2} – é o momento de cálculo no plano paralelo à borda livre;

W_{p2} – é o módulo de resistência plástica na direção paralela à borda livre, calculado pelo perímetro u .

O coeficiente K_2 assume os valores estabelecidos para K na Tabela 2.1, substituindo-se C_1/C_2 por $C_2/2C_1$, sendo C_1 e C_2 mostrados na Figura 2.13.

Para o caso de pilares de canto quando não age momento no plano paralelo à borda, aplica-se o disposto para pilar de borda.

Como o pilar de canto apresenta duas bordas livres, a verificação deve ser feita separadamente para cada uma delas, considerando-se o momento fletor cujo plano é perpendicular à borda livre adotada. Para esse caso o coeficiente K deve ser calculado em função da proporção C_1/C_2 , sendo C_1 e C_2 , respectivamente, os lados do pilar perpendicular e paralelo à borda livre adotada, conforme Tabela 2.1 e Figura 2.14.

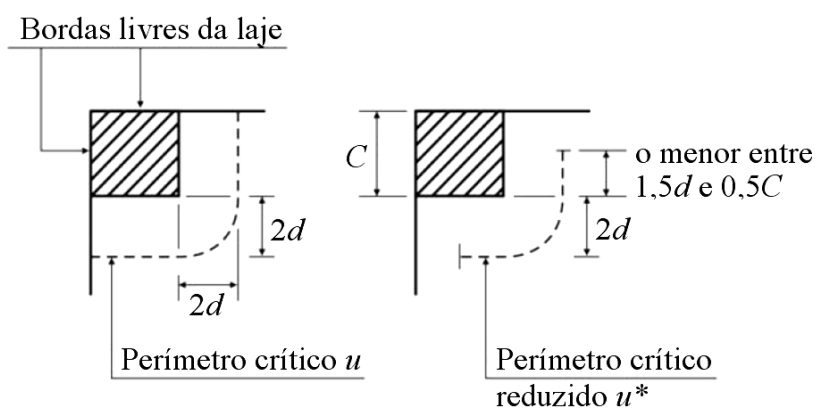


Figura 2.14 – Perímetro crítico em pilares de canto, conforme a NBR 6118:2003.

A NBR 6118:2003 indica ainda alguns casos especiais, onde é necessária a definição de um contorno crítico. Como ilustrado na Figura 2.15, se o contorno C apresentar reentrâncias, o contorno C' deve ser paralelo ao polígono circunscrito ao contorno C .

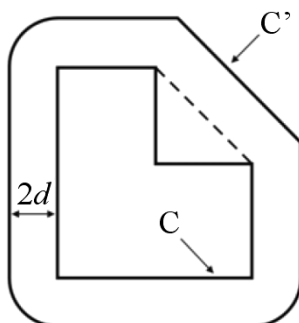


Figura 2.15 – Perímetro crítico no caso de o contorno C apresentar reentrância, conforme a NBR 6118:2003.

Caso exista abertura na laje situada a menos de $8d$ do contorno C , o trecho do contorno crítico C' entre as duas retas que passam pelo centro de gravidade da área de aplicação da força e que tangenciam o contorno da abertura não deve ser considerado (Figura 2.16).

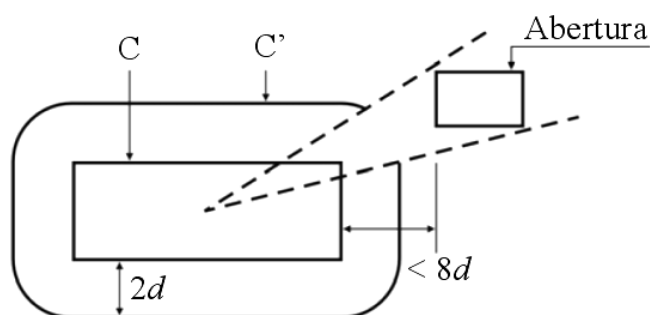


Figura 2.16 – Perímetro crítico junto à abertura na laje, conforme a NBR 6118:2003.

2.3 Estudos Realizados na UFSM

Neste item são revisados e apresentados alguns trabalhos recentes desenvolvidos na Universidade Federal de Santa Maria, relacionados ao tema lajes, sendo que os três estudos apresentados referem-se à lajes do tipo nervuradas.

SILVA FILHO (2002) realizou a análise experimental de lajes pré-moldadas, compostas de vigotas de concreto armado e tabelas cerâmicas. A realização desse trabalho envolveu desde o acompanhamento de todo o processo de fabricação das vigotas, com controle da dosagem do concreto e moldagem de corpos-de-prova, até a montagem e concretagem das lajes (Figura 2.17) na qual empregou mão-de-obra (pedreiros e serventes de obra) típica da região, a fim de avaliar o comportamento das lajes executadas sob estas circunstâncias, sendo também moldados corpos-de-prova desse concreto.



Figura 2.17 – Concretagem da capa de concreto da laje de SILVA FILHO (2002).

Para a realização dos ensaios construíram-se “piscinas”, cujos fundos eram as próprias lajes a serem ensaiadas, e as laterais compostas por painéis com estrutura de madeira, revestidas internamente por uma película de PVC.

Os carregamentos foram distribuídos uniformemente e aplicados em estágios, controlando-se a altura de lâmina de água sobre as lajes. As deformações foram medidas usando-se defletômetros e réguas graduadas posicionadas na face inferior das lajes. A Figura 2.18 mostra o momento anterior à ruptura e o exato momento da ruptura de uma das lajes ensaiadas.



Figura 2.18 – Laje próxima da ruptura, nos ensaios de SILVA FILHO (2002).

Os resultados experimentais mostraram que as lajes resistiram ao carregamento mínimo previsto, porém apresentaram deformações superiores às previstas pela NBR 6118:1978. Segundo esse autor a comparação entre o modelo de cálculo utilizado para dimensionamento e previsão de força de ruptura apresentou grande diferença quando comparado com os resultados experimentais.

Na análise dos resultados de força máxima de serviço determinada em função da deformação máxima estipulada pela NBR 6118:1978, verificou que as cargas máximas permitidas são baixas quando comparadas à capacidade de força final de cada laje. Com esse fator concluiu que a utilização da laje pré-moldada fica dependente da deformação máxima permitida.

BOROWISKI (2005) faz uma adaptação do fluxograma proposto por SARKIS (2001) para a aplicação em seções transversais com forma de “T”. Neste estudo é aplicado o princípio do material homogêneo equivalente na determinação de flechas em lajes nervuradas. Nas análises é empregado o elemento finito “Poutre” do programa CASTEM 2000. São empregados os resultados de SILVA FILHO (2002) para a análise de lajes nervuradas unidirecionais e de SELISTRE (2000) para a análise de lajes bidirecionais. O cálculo das lajes unidirecionais foi realizado por meio da simplificação em vigas de seção “T”, utilizando-se elemento finito de barra denominado Poutre, além da discretização da seção “T” e com elemento tridimensional, sendo utilizado o elemento Cu20, sendo que ambos os elementos compõem a biblioteca do CASTEM 2000. Já as lajes bidirecionais foram simuladas utilizando-se elementos finitos lineares discretização da laje por meio de uma grelha.

DUTRA (2005) estudou as solicitações e deslocamentos nas lajes cogumelo nervuradas. Nesse estudo comprova-se que nos casos de carregamento e de geometria não previstos pela NBR 6118:2003, o método simplificado recomendado apresenta discrepâncias com os resultados previstos para lajes de formas diversas utilizadas na prática.

Nesta pesquisa foram confeccionados e instrumentados três modelos iguais deste tipo de laje, em escala reduzida, com vistas a se obter dados comparativos que validem ou não a aplicação dos métodos simplificados para a análise desse tipo estrutural recomendados pela Norma brasileira (Figura 2.19).

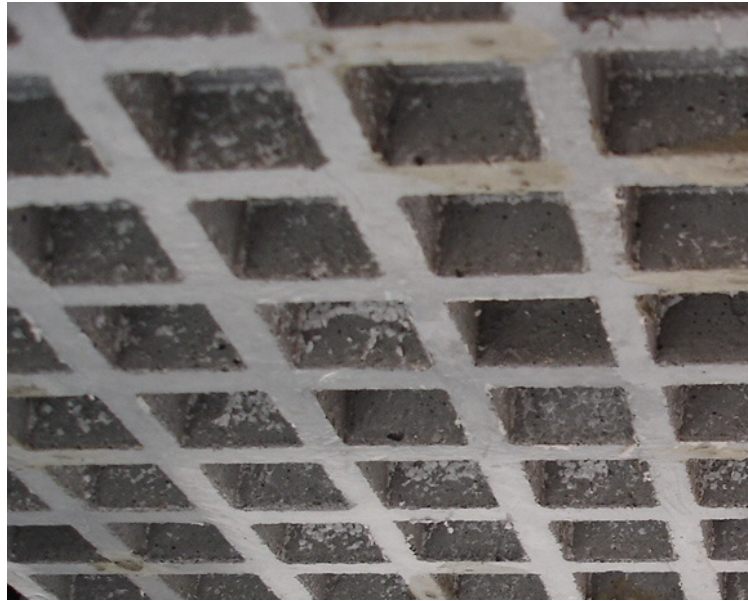


Figura 2.19 – Nervuras de uma laje ensaiada em escala reduzida por DUTRA (2005).

Para fins comparativos foi utilizado um modelo numérico por elementos finitos, simulando-se as características das lajes ensaiadas, com a aplicação dos softwares ANSYS e CYPECAD.

3 MÉTODOS DE CÁLCULO

3.1 Considerações Iniciais

Inúmeros são os métodos de cálculo que podem ser empregados na solução, tanto analítica quanto numérica de lajes lisas, nervuradas e cogumelo nervuradas. Neste capítulo serão estudados alguns destes métodos, porém, será dada maior atenção ao Método dos Elementos Finitos e às teorias e métodos clássicos que fundamentam esse método numérico, visto que o mesmo é utilizado como base para esta pesquisa.

De maneira específica será revisada a teoria clássica de placas, sua solução aproximada por meios de séries, sua formulação para o caso de lajes nervuradas, e o Método dos Elementos Finitos, para o qual será apresentada uma breve revisão quanto à sua utilização no cálculo de lajes nervuradas. Serão feitas algumas considerações sobre o método da analogia por grelhas, e sobre o método dos pórticos equivalentes proposto pela NBR 6118:2003.

3.2 Teoria de Placas

3.2.1 Introdução

Neste item são apresentadas as hipóteses fundamentais consideradas na teoria clássica de placas, e o seu desenvolvimento teórico. Da teoria de placas decorre inúmeros métodos simplificados para o dimensionamento de lajes, principalmente por meio de planilhas e ábacos.

É fundamental revisar a Teoria Geral de Placas Delgadas, que é de difícil aplicação na solução de problemas mais complexos, mas é a base para aplicações numéricas, tanto utilizando-se sua solução aproximada por meio de séries de Fourier, como por meio do Método dos Elementos Finitos.

3.2.2 Teoria Clássica de Placas Delgadas

Para um elemento de placa de dimensões dx e dy , submetido a uma carga distribuída p , pode-se estabelecer o equilíbrio de forças e momentos, conforme desenvolvido a seguir, e mostrado na Figura 3.1.

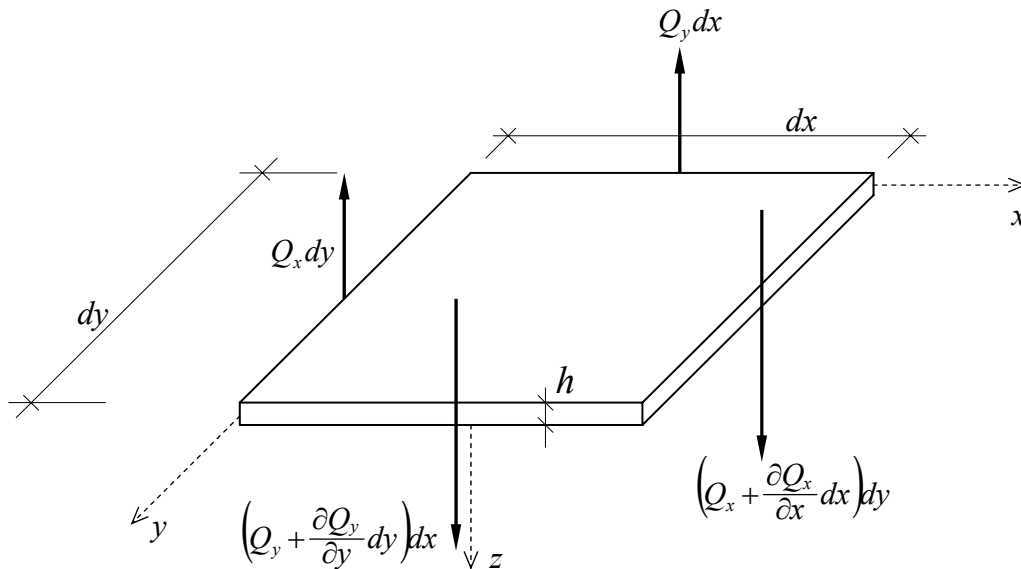


Figura 3.1 – Equilíbrio da força cortante em um elemento de placa.

Considerando-se a força total Q resultante da carga distribuída p aplicada na área $dx \cdot dy$ do referido elemento, tem-se que:

$$Q = p dx dy \quad (10)$$

e seguindo-se para o equilíbrio das forças (Figura 3.1):

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_x dy - Q_y dx + p dx dy = 0 \quad (11)$$

então

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (12)$$

Como ilustrado na Figura 3.2, por meio do equilíbrio dos momentos em torno do eixo x , tem-se:

$$\left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx\right) dy - m_{xy} dy - \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy\right) dx - m_y dx - Q_y dx dy = 0 \quad (13)$$

que simplificada fica:

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (14)$$

Da mesma forma é possível definir o equilíbrio dos momentos em torno do eixo y :

$$\left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - m_{yx} dx + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx\right) dy - m_x dy - Q_x dy dx = 0 \quad (15)$$

que simplificada fica:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = Q_x \quad (16)$$

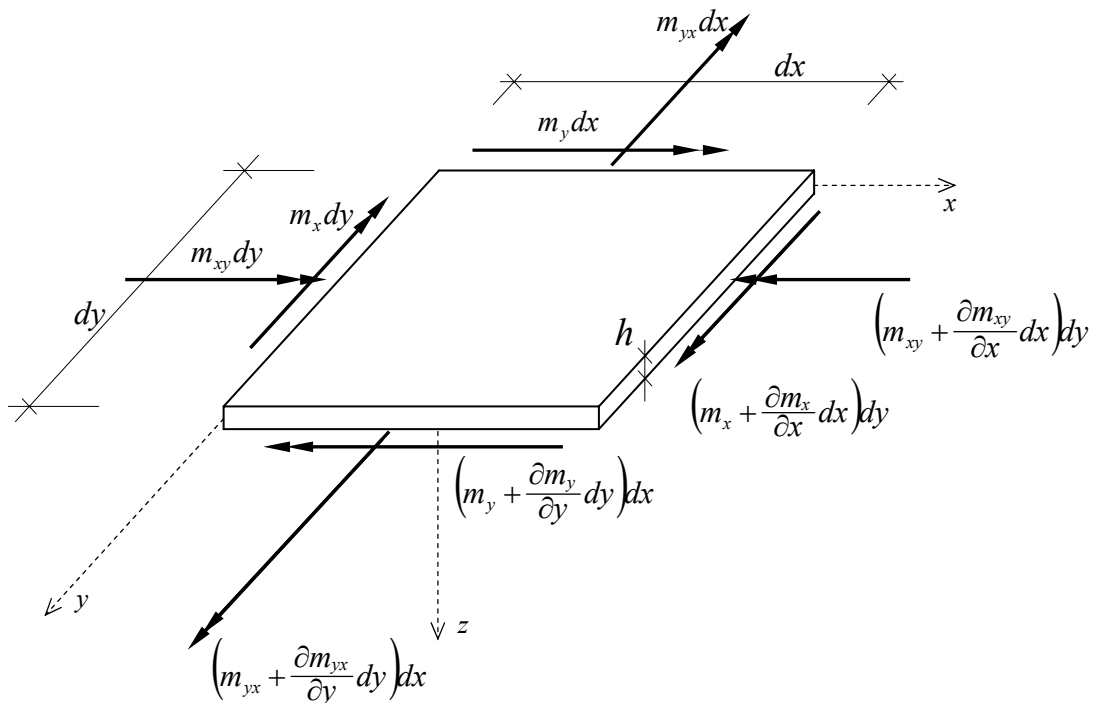


Figura 3.2 – Equilíbrio de momentos fletores e torçores num elemento de placa.

Considerando-se que $m_{xy} = -m_{yx}$ resulta:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (17)$$

Assim, substituindo-se as expressões (14) e (17) na expressão (12), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) = -p \quad (18)$$

que pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -p \quad (19)$$

Simplificando-se segue para a equação geral de placas:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -p \quad (20)$$

Sendo possível relacionar também deslocamentos com a sollicitação, seguindo-se as expressões que relacionam os momentos com as curvaturas da placa:

$$m_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (21)$$

$$m_y = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (22)$$

$$m_{xy} = D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (23)$$

onde w é a flecha da placa num dado ponto da placa, e D é a rigidez à flexão da placa dada pela expressão

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (24)$$

em que:

E = módulo de deformação longitudinal do material;

h = espessura da placa;

ν = coeficiente de Poisson do material.

As expressões que relacionam as forças cortantes com as curvaturas da placa, são:

$$q_x = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (25)$$

$$q_y = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (26)$$

Substituindo-se as expressões (21), (22) e (23) na expressão (20), tem-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{p}{D} \quad (27)$$

Essa expressão é a equação diferencial de placas, conhecida como equação de Lagrange, que pode ser escrita como:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (28)$$

sendo ∇^2 o operador laplaciano dado por

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \quad (29)$$

3.2.3 Soluções por Meio de Séries

TIMOSHENKO e WOINOSWSKY-KRIGER (1959) relatam que Navier apresentou em 1820 na Academia Francesa de Ciências a solução da equação de placas, num trabalho contendo a solução por séries duplas trigonométricas de uma placa retangular simplesmente apoiada. Esta solução permite calcular placas retangulares simplesmente apoiadas com qualquer tipo de carregamento $p(x,y)$, onde esse carregamento pode ser representado aproximadamente por séries duplas de Fourier.

A equação de Lagrange apresenta poucas soluções exatas, restringindo-se a casos de geometrias e carregamentos comuns.

Para o caso de uma placa retangular com carregamento bisenoidal distribuído sobre a superfície da placa, a solução pode ser dada por uma série de Fourier dupla trigonométrica, onde esse carregamento pode ser representado pela expressão:

$$p = p(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (30)$$

em que

a e b = dimensões da placa;

m e n = número de retângulos em que se divide a placa, cada um com lados a/m e b/n ;

p_{mn} = valor máximo da ação no centro de cada retângulo.

A linha elástica $w(x,y)$ é dada por uma série dupla obtida a partir das derivadas da equação fundamental e das condições de contorno para a placa apoiada ao longo das bordas e com rotação livre, resultando:

$$w = \frac{p_{mn}}{\pi^4 \cdot D \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (31)$$

em que os valores de p_{mn} são dados por

$$p_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \cdot \int_0^a \int_0^b p(x, y) \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \cdot dx \cdot dy \quad (32)$$

O caso de uma placa retangular com carregamento uniformemente distribuído na superfície, como ilustrado na Figura 3.3.

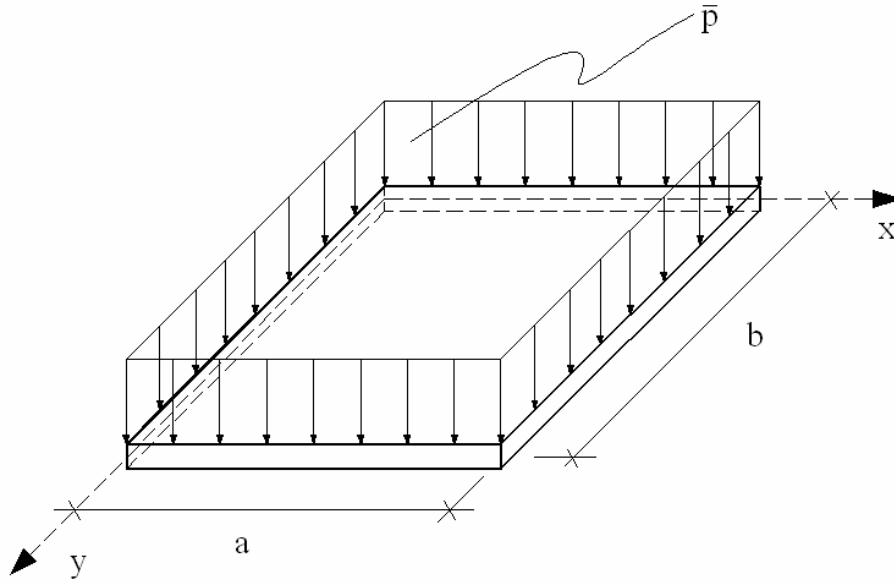


Figura 3.3 – Placa retangular com carregamento uniformemente distribuído em sua superfície.

Considerando-se a ação uniformemente distribuída $\bar{p} = p(x, y)$, tem-se p_{mn} dado pela expressão:

$$p_{mn} = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^2 \cdot m \cdot n} \quad (33)$$

Em que m e n são números ímpares (1,3,5, ...), pois ao serem pares tem-se $p_{mn} = 0$.

Superpondo-se os efeitos e colocando-se p_{mn} da equação (33) na equação da linha elástica, tem-se a função $w(x,y)$, que descreve a flecha de uma placa retangular, para o carregamento uniformemente distribuído em sua superfície:

$$w = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^6 \cdot D} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}}{m \cdot n \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (34)$$

Obtém-se os momentos fletores m_x e m_y por faixa de comprimento unitário, nas direções x e y , a partir das derivadas da superfície elástica $w(x,y)$, conforme as expressões (21) e (22), resultando nas expressões:

$$m_x = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^4} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \cdot \frac{n^2}{b^2} \right)}{m \cdot n \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (35)$$

$$m_y = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^4} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \cdot \frac{m^2}{a^2} \right)}{m \cdot n \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (36)$$

As expressões para m_x e m_y dependem somente as dimensões a e b , da placa e de seu carregamento \bar{p} .

Cabe observar que a precisão dos resultados dependerá de quantos valores de m e n serão adotados.

3.2.4 Teoria de Placas para Lajes Nervuradas

Segundo SHTAERMAN e IVIANSKI (1960) a análise de lajes cogumelo por métodos de cálculo exatos é impossível, considerando-se as lajes como placas maciças apoiadas a pontos de pouca superfície.

Segundo AJDUKIEWICZ e STAROSOLSKI (1990) a análise estrutural de lajes nervuradas pode ser feita pela analogia à grelhas e pela analogia a lajes maciças isotrópicas com rigidez equivalente.

No entanto, a utilização do modelo de laje ortótropa leva a melhores resultados, podendo ser empregados modelos elásticos e rígidos-plásticos aproximados ou exatos. Desse modo é possível escrever a equação de Lagrange na forma:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2H_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = p \quad (37)$$

onde

$$E_x = E_y = E \quad (38)$$

$$\nu_x = \nu_y = \nu \quad (39)$$

$$G_{xy} = G \quad (40)$$

$$D_x = D_y = D \quad (41)$$

$$H_1 = \left(E \frac{\nu}{1-\nu^2} + 2G \right) \frac{h^3}{12} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (42)$$

Pode-se adaptar a solução de lajes ortótropas para lajes nervuradas considerando-se os seguintes fatores na expressão (37):

$$D_x = \frac{B_x}{B_y} \quad (43)$$

$$D_y = \frac{B_y}{B_x} \quad (44)$$

$$D_1 = \nu \sqrt{D_x D_y} \cong 0 \quad (45)$$

$$D_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{C_x}{B_y} + \frac{C_y}{B_x} \right) \quad (46)$$

onde

B_x – é a rigidez à flexão das nervuras paralelas ao eixo x;

B_y – é a rigidez à flexão das nervuras paralelas ao eixo y;

b_x, b_y – são os espaçamentos axiais das nervuras paralelos aos eixos x e y;

C_x – é a rigidez à torção das nervuras paralelas ao eixo x;

C_y – é a rigidez à torção das nervuras paralelas ao eixo y;

dos quais obtém-se a equação para lajes nervuradas

$$\frac{B_x}{B_y} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{B_y}{B_x} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \left(\frac{C_x}{b_y} + \frac{C_y}{b_x} \right) \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (47)$$

3.3 Método dos Elementos Finitos

3.3.1 Introdução

Segundo PILKEY (1997) a utilização de computadores revolucionou o estudo de concentrações de tensão. Atualmente a análise de estruturas com a ajuda de métodos computacionais é cada vez mais comum, sendo desenvolvidos algoritmos poderosos, principalmente os baseados no Método de Elemento Finito, o qual é o método computacional mais flexível para análise estrutural. PILKEY (1997) explica que atualmente são disponíveis, para a solução de problemas de elasticidade, programas de elementos finitos de alta qualidade. A análise estática linear em dois e três dimensões que são necessárias para a análise de tensões é função básica em todos esses programas, destacando-se programas como NASTRAN - 1994, ANSYS - 1992, e ABAQUS - 1995.

SORIANO (2003) relata que “o método dos elementos finitos é apenas uma ferramenta para a análise de modelos matemáticos de problemas de meio contínuo,

cabendo ao engenheiro a tarefa de engenhar o sistema físico, estabelecer o modelo matemático pertinente, usar adequadamente aquele método, interpretar e utilizar os seus resultados.”

Segundo ARAÚJO (2003) o Método dos Elementos Finitos tem um grande atrativo que é a generalidade da formulação, permitindo que um conjunto de rotinas de cálculo possa ser utilizado para resolver problemas diferentes.

3.3.2 Fundamentos Teóricos do Método dos Elementos Finitos

HUEBNER (1975) define o Método dos Elementos Finitos como sendo um método numérico de análise utilizado na solução aproximada de problemas de engenharia. Para MEEK (1971), VENÂNCIO FILHO (1975), BREBBIA e FERRANTE (1975) e ASSAN (1999), trata-se de um método aproximado, pois sub-divide o domínio em regiões discretas pequenas conhecidas como elementos finitos. Estes elementos são compostos por nós em suas arestas, onde são expressos os deslocamentos e tensões, por meio de funções de interpolação, que são a base da aproximação do método. Segundo GOMES e DONIN (2002), são escritas equações que governam o problema para cada elemento, e esses elementos são montados (*assembling*) numa matriz global. Solicitações e vinculações são aplicadas, e a solução do sistema de equações a que se chega é então avaliada.

Segundo BREBBIA e FERRANTE (1975), com o refinando da malha, reduzindo-se os elementos a dimensões elementares, a solução do problema converge para o valor exato. Esses autores definem ainda que o Método dos Elementos Finitos pode seguir quatro modelos, de acordo com o princípio empregado:

- a) modelo compatível, dos deslocamentos ou da rigidez: os deslocamentos são descritos por funções aproximadoras e o princípio da mínima energia potencial é empregado. As incógnitas são os deslocamentos nodais;
- b) modelo do equilíbrio, das forças ou da flexibilidade: as funções aproximadoras descrevem as tensões ou solicitações internas e o princípio utilizado é o da mínima energia complementar;
- c) modelos híbridos;

d) modelos mistos.

Apresenta-se neste capítulo a formulação segundo o método dos deslocamentos, a qual, é base teórica para as simulações realizadas nesta pesquisa. Tal formulação segue teorias definidas por ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000), VENÂNCIO FILHO (1975), BREBBIA e FERRANTE (1975), ASSAN (1999), ARAÚJO (2003), e SORIANO (2003).

A formulação do Método dos Elementos Finitos em deslocamentos tem sido preferida devido à facilidade de implementação computacional, sendo utilizada quase que exclusivamente na análise estrutural, como destaca ARAUJO(2003).

Na Figura 3.4 tem-se um corpo tridimensional discretizado em elementos de oito nós, submetido à forças t_x , t_y e t_z por unidade de área e às forças b_x , b_y e b_z por unidade de volume.

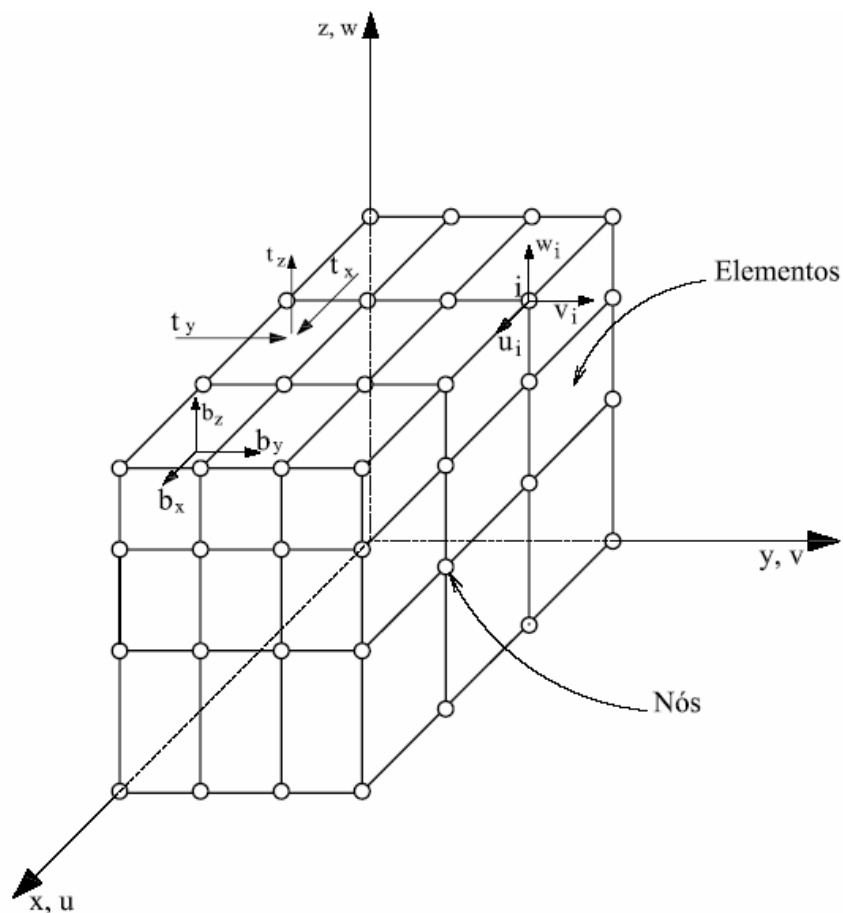


Figura 3.4 – Malha de elementos finitos tridimensionais.

Considerando-se em cada ponto nodal i os deslocamentos u_i , v_i e w_i , é possível obter os deslocamentos de um ponto genérico dentro de um elemento finito por meio da expressão:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^p N_i I \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_i \quad (48)$$

onde

p – é o número total de pontos nodais;

I – é a matriz identidade de 3×3 ;

N_i – representa as funções de interpolação do elemento.

Sendo que u , v e w são as componentes do deslocamento nas direções x , y e z , respectivamente.

Para cada elemento assume-se um campo de deslocamentos (usualmente polinomial) por interpolação de seus deslocamentos nodais, como mostra a equação (48), a qual pode ser escrita:

$$\mathbf{u} = N \cdot U_e \quad (49)$$

N – é uma matriz com as funções de interpolação;

U_e – é o vetor com os deslocamentos nodais do elemento.

As componentes de deformação específica em termos de deslocamentos nodais podem ser obtidas por diferenciação desses deslocamentos, dados pela expressão:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = L \cdot \mathbf{u} \quad (50)$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações específicas, dados pela expressão

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

e L é o operador diferencial linear dado pela expressão

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (52)$$

A expressão (50) pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (53)$$

Substituindo-se a expressão (49) na expressão (50) chega-se a:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = L \cdot N \cdot U_e \quad (54)$$

Considerando-se B como a matriz que relaciona as deformações específicas aos deslocamentos nodais, dada por $B = L \cdot N$ tem-se:

$$\varepsilon = B \cdot U_e \quad (55)$$

Pela lei de Hooke generalizada tem-se o tensor de tensões σ :

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (56)$$

que é dado por

$$\sigma = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ & sim. & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (57)$$

em que a matriz de constantes elásticas D é dada por

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ & sim. & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Essa relação constitutiva pode ser escrita na forma:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \quad (59)$$

De acordo com ARAÚJO (2003), a equação (59) pode ser expandida para incluir os estados de deformações e de tensões iniciais no corpo.

Introduzindo-se um deslocamento virtual $\delta \cdot U_e$ nos nós do elemento, resultam os deslocamentos e as deformações virtuais, e a partir das equações (49) e (55) tem-se:

$$\delta u = N \delta U_e ; \quad \delta \varepsilon = B \delta U_e \quad (60)$$

Sendo o trabalho virtual interno $\delta \cdot W_{\text{int}}$ dado por:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_e} \delta \varepsilon^T \sigma dv \quad (61)$$

onde a integração é efetuada sobre o volume V_e do elemento e o superíndice T indica transposição de vetor ou de matriz.

Considerando-se as relações dadas pelas expressões (55), (59) e (60) chega-se a:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta U_e^T K_e U_e \quad (62)$$

em que K_e é a matriz de rigidez do elemento é dada por

$$K_e = \int_{V_e} B^T D B dv \quad (63)$$

O elemento está submetido às forças por unidade de volume:

$$b = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (64)$$

e às forças por unidade de área

$$t = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} \quad (65)$$

Com os nós do elemento estarem sujeitos à forças concentradas, as quais podem ser agrupadas no vetor F_e .

Para o trabalho virtual externo δW_{ext} dado por:

$$\delta W_{ext} = \delta U_e^T F_e + \int_{V_e} \delta u^T b dv + \int_{A_e} \delta u^T t dA \quad (66)$$

em que a integração é realizada sobre a área A_e do contorno do elemento.

Assim, da equação (60) tem-se:

$$\delta u^T = \delta U_e^T N^T \quad (67)$$

e substituindo-se na expressão (66) chega-se a

$$\delta W_{ext} = \delta U_e^T P_e \quad (68)$$

para

$$P_e = F_e + \int_{V_e} N^T b dv + \int_{A_e} N^T t dA \quad (69)$$

As parcelas de P_e representam as forças aplicadas diretamente sobre os nós, as ações nodais equivalentes às forças de volume e as ações nodais equivalentes às forças de superfície.

A partir da condição de equilíbrio do Princípio dos Trabalhos Virtuais, dado pela expressão:

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} \quad (70)$$

e a partir das expressões (62) e (68) tem-se

$$P_e = K_e U_e \quad (71)$$

que é o sistema de equações que representa o equilíbrio do elemento, sendo o número de equações igual ao número de graus de liberdade.

As equações contidas na expressão (71) devem ser acopladas sob a forma:

$$P = KU \quad (72)$$

em que cada um de seus termos representam

$$P = \sum_{e=1}^n P_e ; K = \sum_{e=1}^n K_e ; U = \sum_{e=1}^n U_e \quad (73)$$

para um número n de elementos compondo a malha de elementos finitos, conforme mostrado na Figura 3.4.

3.3.3 Avaliação da Convergência do Método dos Elementos Finitos

Segundo GOMES e DONIN (2002) ao se utilizar o Método dos Elementos Finitos sempre surge a dúvida de quão pequenos precisam ser os elementos para que se possa aceitar uma solução. Em geral não há nenhum consenso firme sobre isto. Será sempre necessário fazer testes de convergência. Por isto se deve começar com uma discretização de malha e então se observar e guardar a solução. Deve-se então repetir o problema com uma malha mais refinada, isto é, com um número maior de elementos, e então comparar os resultados com o teste anterior. Se os resultados forem quase iguais, então a primeira malha provavelmente é suficiente para descrever as equações do problema para aquela geometria em particular, carregamento e vinculação. Se os resultados diferirem bastante, será necessário testar uma malha mais refinada.

As malhas mais refinadas têm o inconveniente de requererem maior tempo de processamento para calculá-las, e de requererem uma quantidade de memória maior para resolver o problema, tanto de memória de disco quanto de RAM. Busca-se encontrar um meio-termo para o número mínimo de elementos que forneça uma solução aceitável e as tolerâncias exigidas.

Para SORIANO (2003) é de fundamental importância verificar se o campo de deslocamentos adotado num determinado elemento empregado numa análise, a medida que seja refinada a malha, o resultado tenda a convergir para a solução exata.

Essa convergência pode ser estabelecida de duas maneiras, pelo refinamento por meio da redução do tamanho dos elementos, ou pelo refinamento com aumento da ordem do campo de deslocamentos dos elementos.

Para GOMES e DONIN (2002), em problemas de mecânica dos sólidos para atingir a convergência dos resultados, se pode criar vários modelos com tamanhos de malha diferentes e comparar as flechas e tensões resultantes para os mesmos pontos nos modelos. Em geral, à medida que se aumenta a discretização, as tensões convergirão mais lentamente que o deslocamento, assim não é suficiente apenas examinar a convergência dos deslocamentos, mas principalmente a das tensões.

Na Figura 3.5 pode-se ver as tendências de convergência, a medida que se refina a malha de elementos finitos para o caso de deslocamentos, segundo SORIANO (2003).

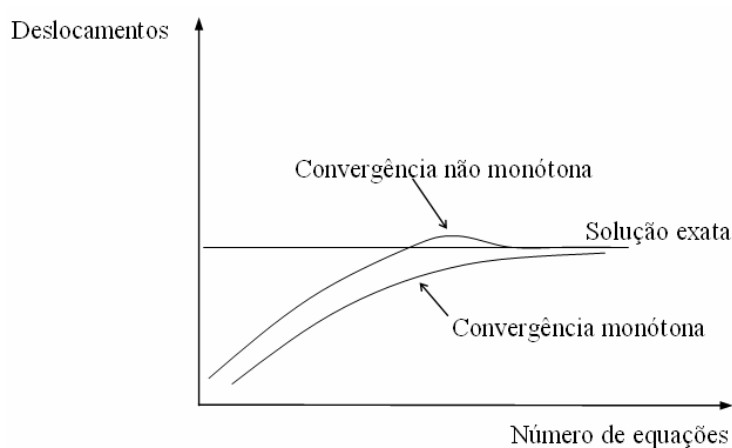


Figura 3.5 – Convergência à medida que se refina a malha, SORIANO (2003).

3.3.4 Trabalhos Utilizando o Método dos Elementos Finitos

CORTIVO *et al* (1999), realizou uma comparação entre métodos de dimensionamento de lajes cogumelo de concreto armado para um pavimento de edifício de laje regular e simétrico, sem cargas horizontais, no qual empregou o método do pórtico equivalente da NBR 6118:1978 e do ACI 318-95, o método dos elementos finitos, a teoria de grelhas e o método da viga contínua proposto pelo Professor Aderson Moreira da Rocha. Segundo esse autor, quando consideradas as recomendações de

dimensionamento do ACI 318-95, o pórtico apresentou resultados bons e conservadores, quando comparados aos resultados fornecidos pelo Método dos Elementos Finitos. No entanto é importante destacar que na pesquisa realizada por CORTIVO *et al* (1999), a variação dos vãos era muito pequena, ou seja, as faixas que resultavam nos pórticos equivalentes eram bastante semelhantes.

GOMES (1994) fez um estudo comparativo entre resoluções via Método dos Elementos Finitos e o processo de resolução simplificado dos pórticos equivalentes da NBR 6118:1978. Desta forma, avaliou várias relações entre vãos e propôs correções para o método simplificado da Norma NBR 6118:1980. Analisou experimentalmente as flechas e curvaturas usando os resultados de um ensaio em modelo reduzido de uma placa de aço, confirmando algumas hipóteses quanto à imprecisão do modelo simplificado da norma brasileira.

CABRAL (1998) realizou ensaios e simulações numéricas numa laje cogumelo nervurada simétrica de 9,10 m x 12,10 m em escala reduzida em micro-concreto (1,21 m x 1,61 m), com nove pilares ortogonais (30 cm x 30 cm), e com relações entre vãos de $L_x/L_y=1$ e $L_x/L_y=2$.

SELISTRE (2000) realizou simulações por elementos finitos numa laje nervurada retangular com seis pilares, utilizando o SAP 90. A discretização da laje foi feita em elementos de placa com quatro nós, sendo que os elementos foram discretizados em duas espessuras, ou seja, os elementos da zona nervurada foram discretizados com a espessura equivalente da laje e os elementos da zona maciça, discretizados com a espessura da zona maciça da laje.

DIAS (2003) estudou a consideração numérica da excentricidade entre os eixos das nervuras e o plano médio da capa em lajes nervuradas, e os efeitos nas solicitações dos enrijecedores, utilizando para análise o software ANSYS 5.5. Adotando diferentes modelos mecânicos considerou a excentricidade de diversas maneiras: por meio da utilização de elemento finito de viga tridimensional (discretizando as nervuras); por meio de modelagem tridimensional, onde discretizou tanto a placa quanto as nervuras com elementos finitos de casca; por meio de modelo simplificado utilizando a Teoria de Placa Ortótropa Equivalente, onde a laje nervurada foi substituída por uma laje maciça com equivalência em inércia e flexão; e por meio de modelo simpli-

ficado de grelha considerando as nervuras concêntricas, porém com seção “T” equivalente. Nessa pesquisa DIAS (2003) utilizou sete modelos de cálculo, com as seguintes características:

Modelo 1 – As nervuras foram discretizadas por elemento finito de viga elástica de dois nós, com seis graus de liberdade por nó, chamado de BEAM4. A placa foi modelada utilizando-se elemento finito de casca elástica de quatro nós, com seis graus de liberdade por nó, chamada de SHELL63.

Modelo 2 – A excentricidade é aplicada tomando-se a altura da viga até a face superior da placa. A modelagem da placa e das nervuras é feita por elemento finito de casca elástica SHELL63.

Modelo 3 – A excentricidade é aplicada tomando-se a altura da viga até a face inferior da placa. A modelagem da placa e das nervuras é feita por elemento finito de casca elástica SHELL63.

Modelo 4 – Neste modelo nenhuma simplificação é feita quanto ao comportamento da seção depois de fletida. A modelagem da placa e das nervuras é feita por elemento finito de casca elástica SHELL63.

Modelo 5 – As nervuras foram discretizadas pelo elemento BEAM4 com seção tipo “T”, considerando-se a colaboração da laje na rigidez das vigas, aplicado de forma concêntrica ao plano médio da placa. A laje foi discretizada pelo elemento de casca SHELL63, elemento plano com seis graus de liberdade trabalhando à flexão e tensão.

Modelo 6 – A placa e os enrijecedores que compõe a laje são representados pela grelha das nervuras, sendo estas discretizadas pelo modelo BEAM4 com seção transversal do tipo “T”, considerando a colaboração da laje na rigidez das vigas.

Modelo 7 – Emprega laje maciça equivalente utilizando os conceitos da teoria da placa ortótropa equivalente, onde a laje nervurada é transformada numa laje maciça com espessura constante em inércia à flexão. A laje maciça equivalente é discretizada pelo elemento de

casca SHELL63, elemento plano com seis graus de liberdade trabalhando à flexão e tensão.

Modelo 8 – Semelhante ao modelo 7, porém com uma redução de 20% na espessura da laje com inércia equivalente, proposta por ABDULWAHAB e KHALIL (2000).

A representação dos modelos utilizados por DIAS (2003), é mostrada nas Figuras 3.6 e 3.7.

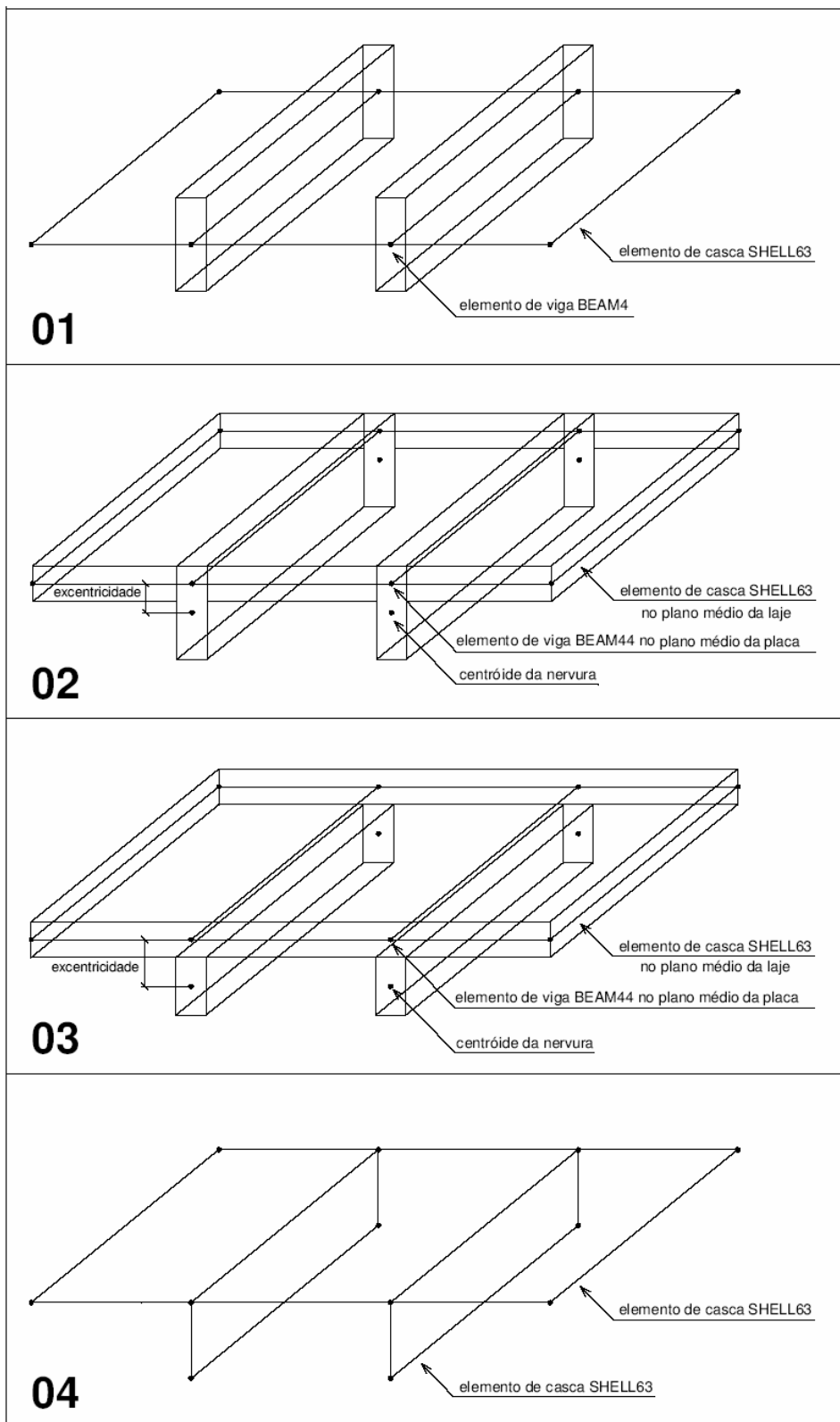


Figura 3.6 –Representação esquemática dos modelos mecânicos 1, 2, 3 e 4 de DIAS (2003).

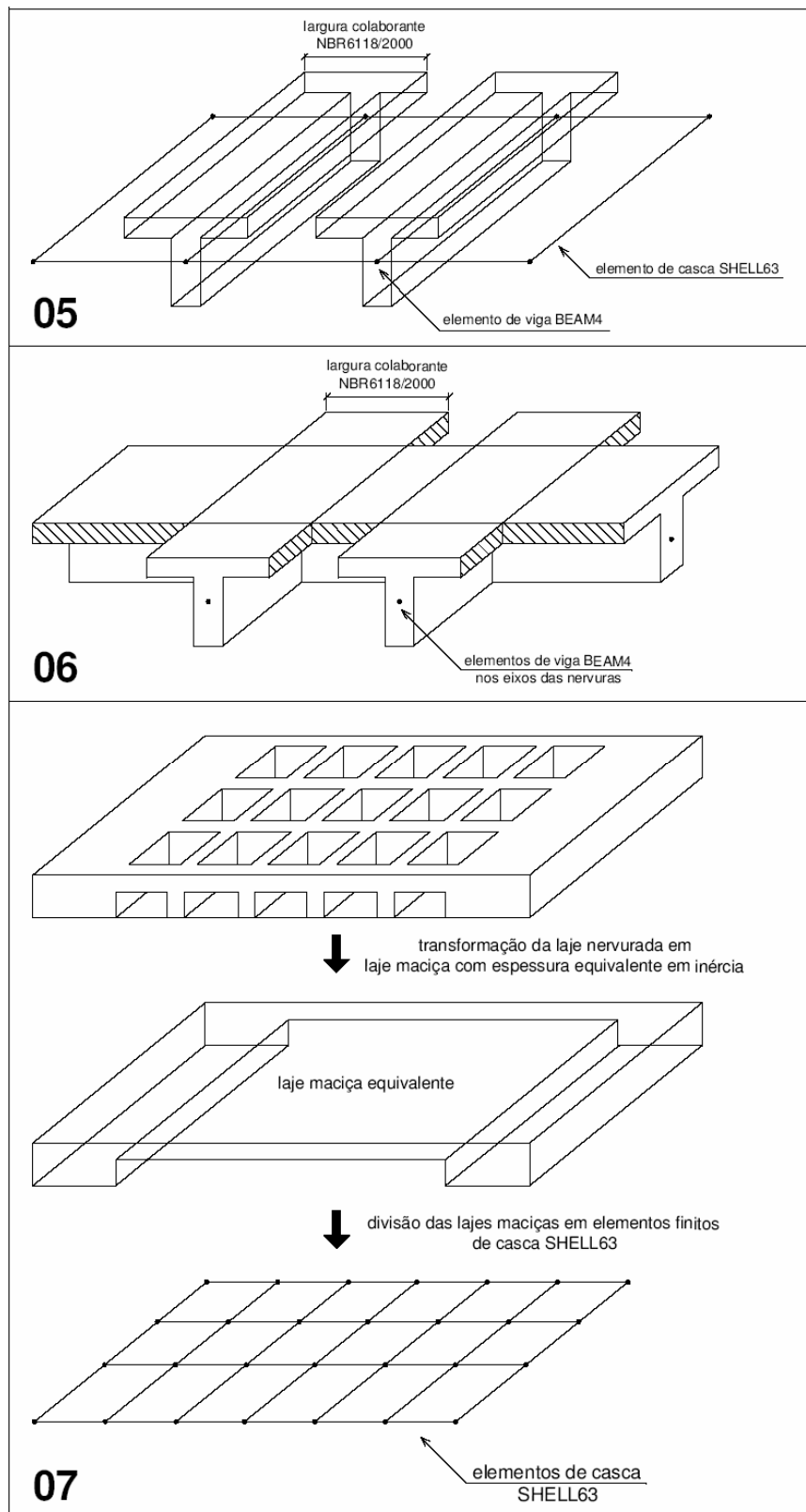


Figura 3.7 –Representação esquemática dos modelos mecânicos 5, 6 e 7 de DIAS (2003).

Segundo DIAS (2003) as tensões normais apresentadas pelas nervuras em modelagens concêntricas, foram muito maiores que aquelas apresentadas pelos enrijecedores excêntricos, seja em modelos simplificados ou realistas, o que leva a um superdimensionamento da seção. Para os modelos tridimensionais em MEF com elementos concêntricos que incorporam a excentricidade de maneira simplificada pela consideração de seções “T”, esse autor recomenda a verificação e o dimensionamento das seções das nervuras à flexo-compressão, pois os momentos fletores apresentados pelo MEF foram mais elevados que os realistas, e as nervuras também ficaram comprimidas, por estarem concêntricas à capa comprimida. Para os modelos tridimensionais com elementos finitos excêntricos mais realistas, as nervuras apresentaram momentos fletores mais baixos que os modelos simplificados, e tiveram elevados valores de forças normais de tração, já que estavam afastadas pela excentricidade em relação aos seus eixos da capa comprimida, participando da flexão do sistema na região tracionada, sendo necessárias verificações e dimensionamento à flexo-tração. Nesta pesquisa realizada por DIAS (2003) fica evidente a necessidade de se considerar a excentricidade com modelos tridimensionais mais realistas.

NOBREGA *et al* (2003), realizou um estudo comparativo entre os métodos de dimensionamento de lajes cogumelo considerando a atuação de cargas horizontais e verticais, e variações de vãos de até 50%, para um edifício quadrado em planta e simétrico, conforme mostra a Figura 3.8. Para isso utilizou o Método do Pórtico Equivalente do ACI 318-95, o Método dos Pórticos Múltiplos da NBR 6118:1978, o Método das Grelhas (MG) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), com dois tipos de elementos utilizados para os pilares, o FRAME e o SOLID, disponíveis no programa SAP 2000N, enquanto para as lajes foi utilizado o elemento SHELL.

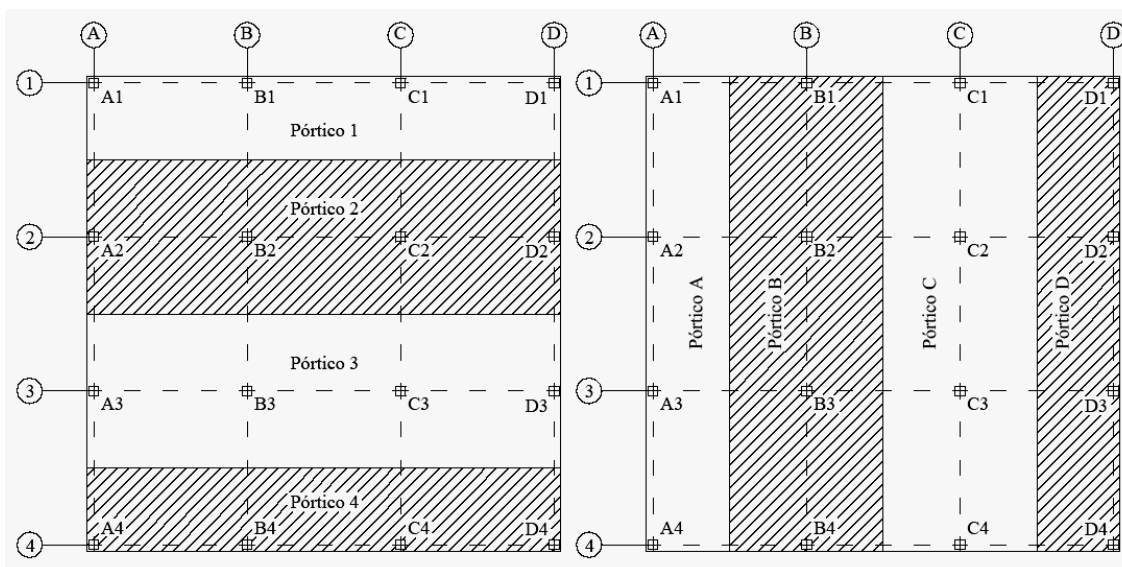


Figura 3.8 – Definição dos pórticos analisados por NOBREGA *et al* (2003).

No método do Pórtico Equivalente do ACI 318-95 e no Método dos Pórticos Múltiplos da NBR 6118:1978, os momentos são distribuídos entre as faixas centrais e de pilares, de acordo com os coeficientes recomendados por cada método, apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Distribuição dos momentos nas faixas centrais e de pilares, de acordo com ACI 318-95 e NBR 6118:1978.

	Faixas	NBR 6118:1978	ACI 318-95
Pilar externo	Central	25%	0%
	Dos pilares	75%	100%
Vão externo	Central	45%	40%
	Dos pilares	55%	60%
Pilar interno	Central	25%	25%
	Dos pilares	75%	75%

Para o carregamento horizontal e com lajes de vãos iguais, esse autor observou que para os pilares externos o ACI 318-95 e a NBR 6118:1978 apresentaram resultados mais conservadores que os do MEF, na quase totalidade dos casos, enquanto que para os pilares internos esses dois métodos são conservadores para cerca de 40% dos casos. Com uma variação máxima de 50% nos vãos das lajes, observou que o método da NBR 6118:1978 é quase sempre menos conservador do que o método do ACI

318-95, especialmente para os momentos nos pilares. O Método das Grelhas (MG) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) apresentaram resultados quase sempre mais conservadores do que o Método do ACI 318-95, principalmente quando comparados os momentos máximos sobre os pilares. Com relação ao Método dos Elementos Finitos constatou praticamente o mesmo tipo de comportamento para as duas análises realizadas, com elementos tipo FRAME e do tipo SOLID.

DIAS *et al* (2003) procedeu às análises numéricas de laje nervurada sem vigas, por meio de diferentes modelos mecânicos, e por meio do Método dos Elementos Finitos, considerando diferentes modelos teóricos submetidos às mesmas condições de vinculação e carregamento. Os modelos adotados foram: os de grelha com as próprias nervuras da laje nervurada, realizando-se a discretização das nervuras, e dos capitéis em elementos de barra de grelha, considerando a inércia da seção “T” para as nervuras, onde a alma e a mesa trabalham juntas, num sistema linear de grelha; laje maciça equivalente, onde a discretização da laje maciça equivalente foi feita com elementos de placa, com espessura equivalente nas regiões de nervuras e espessura real nas regiões dos capitéis; grelha considerando-se os capitéis como elementos de placa, discretizando-se as nervuras em elementos de grelha, considerando-se a inércia da seção “T”, e dos capitéis em elementos de placa, com espessura real.

Segundo esse autor, os resultados numéricos indicaram uma variabilidade de acordo com o modelo adotado, em termos das solicitações e deslocamentos. A confrontação dos valores numéricos com os experimentais para o máximo deslocamento em cada etapa de carregamento, indicou a necessidade de incluir a não-linearidade física do concreto armado nas análises numéricas. Além disso mostrou a influência da consideração do módulo de deformação transversal integral e reduzido no cálculo dos deslocamentos iniciais.

Cabe destacar que as simulações seguiram até um nível de carga em que as lajes já apresentavam comportamento não-linear, pois o modelo experimental utilizado por DIAS *et al* (2003) consistia em microconcreto armado, apresentando, portanto, comportamento não-linear.

Os resultados numéricos fornecidos pelo modelo de grelha, foram os que mais se aproximaram dos experimentais, ou seja, neste modelo a estrutura comportou-se

com maior flexibilidade. Já o modelo em laje maciça equivalente, mostrou maior rigidez, apresentando as maiores diferenças. Nos modelos analisados onde foram reduzidos a inércia à torção das peças e o módulo de deformação transversal G , obtiveram-se resultados de deslocamentos maiores, porém, distantes dos resultados experimentais. Segundo esse autor, entre o modelo de grelha e o modelo de grelha considerando-se os capitéis como elementos de placa, houve uma diferença de 5,65% sem redução de G e 2,83% com G reduzido.

MELO *et al* (2000) procedeu à análise estrutural de lajes planas sob a ação de carregamento vertical, comparando modelos numéricos com dois modelos reduzidos, um de laje lisa e outro de laje nervurada, utilizando-se o Método da Analogia de Grelhas e dos Elementos Finitos. Reduzindo gradativamente a inércia da laje numa certa região próxima ao pilar, simulou a perda de rigidez. Na discretização da laje utilizou um modelo com elementos de placa com inércia equivalente, e outro modelo com elementos de barra representando as nervuras, e para o capeamento utilizou um modelo de placa.

Segundo esses autores, no exemplo de laje nervurada, a melhor representação obtida para os momentos foi a de Elementos Finitos, no qual as nervuras foram representadas por elementos de barra, enquanto que o capeamento, as faixas sólidas e os ábacos foram representados por elementos de placa, e a região dos pilares foi composta por placas de grande rigidez. Para esse modelo ocorreram concentrações de momentos negativos nas faixas de pilar, enquanto que nas faixas de vão os valores de momentos negativos foram demasiadamente baixos, cerca de 50% dos valores experimentais.

No modelo de Elementos Finitos com placas de espessura equivalente representando as nervuras, os resultados de modo geral, principalmente nas faixas de pilar, foram menos satisfatórios que os do modelo anterior. Os modelos que desprezaram as placas rígidas conduziram a uma grande concentração de momentos nas regiões próximas aos pilares. O modelo de Analogia de Grelha apresentou bons resultados em regiões de nervuras, contudo, em regiões de capitéis e faixas sólidas seus resultados de momentos não foram satisfatórios. O modelo de Pórticos Equivalentes concentrou um pouco os momentos nas faixas de pilar.

Em relação aos deslocamentos observou que todos os modelos com redução da inércia a 50% de seu valor original, apresentaram uma boa convergência para os valores experimentais. Verificou que o modelo de Elementos Finitos com apoio pontual apresentou valores maiores de deslocamentos em relação ao modelo com placas rígidas, em torno de 10% na média dos deslocamentos. Constatou que tanto o modelo em Analogia de Grelha quanto o modelo em Elementos Finitos representou bem o campo de deslocamentos.

MARTINS *et al* (2003), estudou o colapso progressivo em edifícios com laje cogumelo de concreto armado, por meio da análise do comportamento global pós-puncionamento, diante de uma ruptura local numa ligação laje/pilar interna, verificando a resposta das demais ligações diante da perda total ou parcial de resistência da ligação vizinha. As verificações à punção foram realizadas segundo as normas: NBR 6118:1978, Projeto de Revisão da NBR 6118:1978, CEB-FIP 90, ACI 318-95, e as recomendações de armadura de cisalhamento de prevenção ao colapso progressivo a partir do Projeto de Revisão da NBR 6118:1978, CEB-FIP 90, CAN-A23.3/94, e o cálculo proposto por MELO (1990). Na verificação do comportamento pós-puncionamento admitiu a ruptura por punção em algumas ligações laje/pilar internas, sem a presença de viga, procedendo à análise pelo Método dos Elementos Finitos com o programa SAP2000, Método das Grelhas, com o programa TQS e uma verificação pelo Método das Linhas de Ruptura. Conclui que as estruturas são suscetíveis à ocorrência de colapso progressivo, uma vez que não apresentariam resistência satisfatória para as novas configurações de solicitações, propagando-se a ruptura por punção para as ligações com os pilares vizinhos e verticalidade.

3.4 Método da Analogia de Grelhas

3.4.1 Introdução

Segundo TIMOSHENKO (1959) o cálculo de placas por analogia de grelha foi utilizado inicialmente por Marcus em 1832 no cálculo das solicitações de placas com bordas indeslocáveis verticalmente.

O processo consiste em substituir as lajes nervuradas por elementos de barra localizados nos eixos das nervuras, formando assim uma grelha equivalente.

As características geométricas das seções transversais das barras que representam as nervuras, para o estádio I, ou seja, na fase elástica-linear do concreto, sem considerar a influência das armaduras, são dados em função do momento de inércia à flexão e momento de inércia à torção.

Com esse processo pode-se obter a solução para praticamente qualquer tipo de geometria definida, pois possibilita a análise integrada do pavimento, considerando-se a influência da flexibilidade dos apoios e da rigidez à torção dos elementos, podendo-se incluir na análise a não linearidade física do concreto armado.

De acordo com a área de influência de cada elemento (barra), considera-se a divisão das ações atuantes na laje entre os elementos da grelha equivalente, que podem ser consideradas uniformemente distribuídas ao longo das barras ou concentradas nos nós.

A rigidez à flexão e a rigidez à torção são tratadas como concentradas nos elementos da grelha equivalente. A definição das rigidezes de forma apropriada e a utilização de malhas com espaçamentos adequados, possibilitam a obtenção de valores razoáveis para as solicitações e deslocamentos transversais dos elementos que compõem o pavimento, uma vez que a rigidez das barras da grelha equivalente devem ser tais que, ao carregar a estrutura real e a da grelha equivalente, se obtenha o mesmo estado de deformação e as mesmas solicitações nas duas estruturas.

Como destacam CORTIVO *et al* (1999), NÓBREGA *et al* (2003) e MELO *et al* (2000), por meio do processo de analogia de grelha é possível efetuar a análise de edifícios com grandes dimensões em planta, sendo inclusive utilizado em muitos programas de análise de estruturas. As características geométricas consideradas para as barras da grelha equivalente consistem normalmente de dois tipos, barras com seção em forma de “T” para representar as nervuras, e barras com seção retangular para representar as vigas do pavimento, quando necessário.

O cálculo para a determinação das solicitações e deslocamentos de estruturas tipo grelha pode ser feito por meio de formulação matricial, ou por meio do método dos elementos finitos.

3.4.2 Cálculo de Grelhas pela Análise Matricial de Estruturas

A formulação por meio da Análise Matricial de Estruturas pode ser baseada no método da flexibilidade (ou método das forças) ou no método da rigidez (ou método dos deslocamentos), segundo os princípios da análise estrutural pode utilizar programas de específicos para grelhas como programas de pórtico espacial, os quais possibilitam a análise conjunta com os pilares, ou seja, de todo o edifício.

Essa formulação matricial é bastante empregada na aplicação computacional, sendo que na maioria das vezes é utilizado como base teórica o método da rigidez.

Uma estrutura tipo grelha apresenta três deslocamentos possíveis por nó, sendo duas rotações (uma no eixo da barra e outra perpendicular) e uma translação (Figura 3.9).

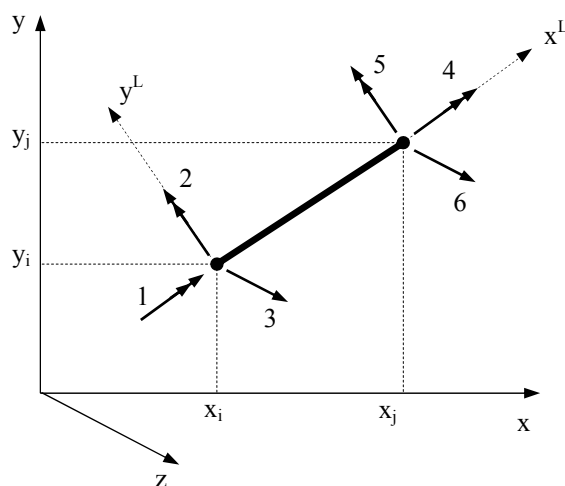


Figura 3.9 – Deslocabilidades para uma barra de grelha.

Uma barra situada no plano x-y global, com deslocamentos verticais perpendiculares a esse plano, e que tem dois nós, tem um total de seis deslocamentos possíveis, resultando numa matriz de rigidez da barra de grelha de dimensão 6x6, ou seja, com 36 elementos.

Pode-se obter a matriz de rigidez local de uma barra de grelha aplicando deslocamentos unitários, um por vez, em cada uma das deslocabilidades existentes na barra restringida (onde todos os possíveis deslocamentos ou rotações foram devidamente impedidos), em seu sistema de referência local. Com a aplicação desses desloca-

mentos unitários, as reações que aparecem nas deslocabilidades restringidas são por definição os coeficientes de rigidez da matriz de rigidez da barra de grelha.

Aplicando-se deslocamentos unitários, um por vez, à barra de grelha na estrutura restringida, em seu sistema de referência local, as reações que aparecem nos deslocamentos restringidos são por definição os coeficientes de rigidez da matriz da barra de grelha.

Desta forma, obtém-se a matriz de rigidez de uma barra de grelha no sistema de coordenadas local, dada por:

$$KM^L_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} GI_x / L & 0 & 0 & -GI_x / L & 0 & 0 \\ 0 & 4EI_y / L & 6EI_y / L^2 & 0 & 2EI_y / L & 6EI_y / L^2 \\ 0 & -6EI_y / L^2 & 12EI_y / L^3 & 0 & -6EI_y / L^2 & -12EI_y / L^3 \\ -GI_x / L & 0 & 0 & GI_x / L & 0 & 0 \\ 0 & 2EI_y / L & -6EI_y / L^2 & 0 & 4EI_y / L & 6EI_y / L^2 \\ 0 & 6EI_y / L^2 & -12EI_y / L^3 & 0 & 6EI_y / L^2 & 12EI_y / L^3 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Usando-se a matriz de rotação

$$R = \begin{bmatrix} r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r \end{bmatrix} \quad (75)$$

onde r é a matriz de rotação nodal, assim definida:

$$r_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (76)$$

O sistema matricial de equação que determina a matriz de rigidez no sistema de coordenadas globais é dado por:

$$KM = R^T KM^L R \quad (77)$$

A partir da soma das matrizes de rigidez de cada barra KM é possível obter-se a matriz de rigidez global da estrutura K .

Da mesma forma como foi definido para o Método dos Elementos Finitos, é possível encontrar a solução para este tipo de estrutura a partir da expressão (72).

O cálculo de estruturas tipo grelha pode ser realizado utilizando-se Método dos Elementos Finitos, sendo que esta aplicação é simples, bastando discretizar a estrutura em elementos de barra.

3.5 Método dos Pórticos Equivalentes

Neste item será dada atenção especial às considerações da NBR 6118:2003 no que se refere à determinação das solicitações que ocorrem nas estruturas que utilizam o sistema de lajes cogumelo nervuradas.

3.5.1 Considerações da NBR 6118:2003

De acordo com a NRB 6118:2003 para os casos de pilares dispostos em linhas ortogonais, é permitido que as solicitações sejam calculadas pelo processo dos pórticos múltiplos em cada direção. Para isso considera-se que cada laje esteja dividida em duas séries ortogonais de vigas, e que para cada pórtico assim formado seja adotada a carga total.

Para a determinação das inércias consideram-se as larguras da faixa limitadas pela metade da distância entre duas linhas de pilares (Figura 3.1).

Desse modo os momentos calculados deverão ser distribuídos da seguinte maneira:

- 45% dos momentos positivos para as duas faixas internas;
- 27,5% dos momentos positivos para cada uma das faixas externas;
- 25% dos momentos negativos para as duas faixas internas;
- 37,5% dos momentos negativos para cada uma das faixas externas.

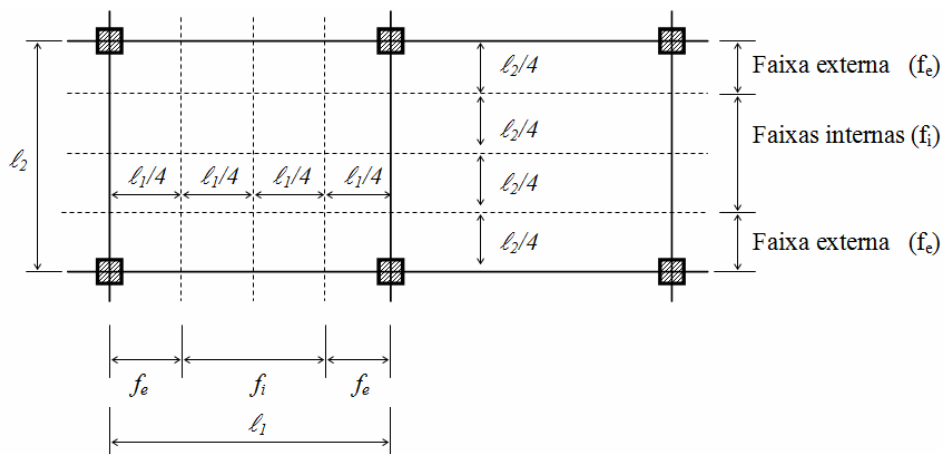


Figura 3.10 – Faixas da laje para distribuição de solicitações nos pórticos múltiplos.

4 PARÂMETROS DE CÁLCULO

4.1 Módulo de Deformação Longitudinal do Concreto

4.1.1 Introdução

A partir do diagrama tensão-deformação específica $\sigma_c \times \varepsilon_c$, tem-se o módulo de deformação longitudinal do concreto, o qual é obtido por meio de ensaios de corpos-de-prova submetidos à compressão centrada. O diagrama tensão-deformação específica pode ser observado na Figura 4.1

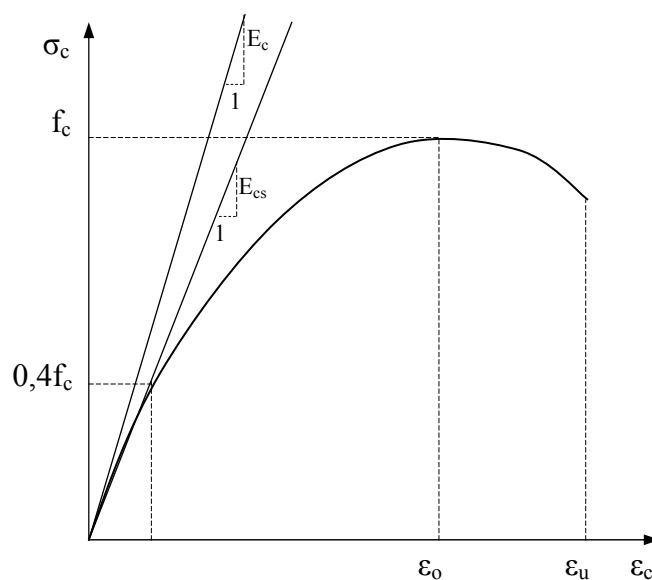


Figura 4.1 – Diagrama tensão-deformação específica para o concreto, segundo ARAÚJO (2003).

O módulo de deformação longitudinal tangente E_C representa a inclinação da reta tangente à curva na origem do diagrama.

O módulo secante E_{CS} representa a inclinação da reta que passa pela origem e corta o diagrama no ponto correspondente a uma tensão da ordem de $0,4f_c$, sendo f_c a resistência à compressão simples.

Usualmente o módulo de deformação longitudinal depende do valor da resistência à compressão do concreto. Algumas normas estabelecem a relação em função

da resistência média f_{cm} , como é o caso do CEB-FIP 90, e outras como a NBR 6118:2003 e o ACI 318-95, em função da resistência característica f_{ck} .

4.1.2 Fórmulas da NBR 6118:2003

De acordo com a NBR 6118:2003 o módulo de deformação longitudinal, ou módulo da elasticidade do concreto, deve ser obtido segundo ensaio descrito na NBR 8522:1984, podendo ser estimado pela expressão:

$$E_C = 5600 \sqrt{f_{ck}}, \text{ MPa} \quad (78)$$

Sendo que na análise elástica de projeto, especialmente para a determinações de solicitações e verificação de estados limites de serviço, deve-se utilizar o módulo de elasticidade secante, dado pela expressão:

$$E_{CS} = 0,85 \cdot E_C \quad (79)$$

Essa norma recomenda que para avaliar o comportamento de um elemento estrutural ou seção transversal pode ser adotado o mesmo módulo da elasticidade, tanto na compressão como na tração, igual ao módulo de elasticidade secante E_{CS} .

4.1.3 Fórmulas do CEB-FIP 90

Como já observado, o CEB-FIP 90 obtém o módulo de deformação longitudinal por meio da resistência média f_{cm} do concreto. O módulo tangente é dado pela expressão:

$$E_C = 21500 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3}, \text{ MPa} \quad (80)$$

Podendo-se obter a resistência média f_{cm} a partir da resistência característica f_{ck} , considerando-se $f_{cm} = f_{ck} + 8$ MPa.

O módulo secante é dado por:

$$E_{CS} = 0,85E_C \quad (81)$$

A expressão (80) é válida para concretos com agregados de quartzo, como granito e gnaisse.

Para outros tipos de agregado se deve multiplicar a expressão (80) pelos seguintes coeficientes:

- 1,2 para agregados de basalto;
- 0,9 para agregados de calcário;
- 0,7 para agregados de arenito.

4.1.4 Fórmulas do ACI 318-95

O ACI 318-95 determina o módulo secante E_{CS} dado pela expressão:

$$E_{CS} = 4730\sqrt{f_{ck}}, \text{ MPa} \quad (82)$$

O módulo secante é definido como a inclinação da reta que passa pela origem do diagrama tensão-deformação específica e pelo ponto correspondente a uma tensão igual a 45 % do f_{ck} , ou seja $0,45f_{ck}$.

Sendo o módulo tangente dado pela expressão:

$$E_C = 5565\sqrt{f_{ck}}, \text{ MPa} \quad (83)$$

Observa-se que esses são parâmetros praticamente idênticos aos da NBR 6118:2003.

4.1.5 Considerações Gerais

ARAÚJO (2000), mostra que o módulo de deformação longitudinal do concreto é função de sua resistência média f_{cm} e não da resistência característica f_{ck} e que f_{cm} pode ser estimado por meio do f_{ck} , como faz o CEB-FIP 90 pela expressão $f_{cm} = f_{ck} + 8$ MPa. Para corrigir tal incoerência de formulação é permitido o uso do

módulo tangente E_c para a análise global de uma estrutura, sendo que para estas análises é coerente avaliar a resistência a partir de f_{cm} . Nesse estudo se verificou que a expressão dada pelo CEB-FIP 90 se ajusta melhor aos resultados experimentais do que a expressão da NBR 6118:2003, e a expressão dada pelo ACI 318-95 que é praticamente idêntica.

4.2 Determinação da Seção Equivalente

4.2.1 Introdução

Com o objetivo de simplificar o cálculo das lajes nervuradas usa-se o artifício de transformar a seção nervurada numa seção maciça de espessura equivalente, e assim, conduzir o cálculo pela teoria das placas.

Para isso transforma-se a seção “T” da laje nervurada numa seção retangular maciça equivalente, para a qual é determinada uma altura equivalente, a ser considerada para esta seção retangular.

A seção retangular equivalente pode ser calculada como uma viga utilizando-se o processo de pórticos múltiplos, permitido pela NBR 6118:2003, assim como por meio da analogia de grelhas. Pode-se ainda utilizar tal seção como parâmetro de cálculo utilizando-se as formulações clássicas baseadas na teoria da elasticidade, quando a geometria e as condições de contorno forem viáveis, assim como no cálculo via método dos elementos finitos por meio de elementos de placa, como fazem SELISTER (2000), DUTRA (2005) e BOROWSKI (2005).

Para ARAÚJO (2005) a espessura equivalente h_{eq} pode ser obtida a partir de resultados experimentais, considerando-se a flecha obtida experimentalmente W_{exp} para uma laje nervurada submetida à um dado carregamento, e a flecha calculada para uma laje maciça de espessura equivalente W_1 . Assim, a espessura equivalente é dada pela expressão:

$$h_{eq} = \left(\frac{W_1}{W_{exp}} \right)^{1/3} \quad (84)$$

Essa expressão é válida somente para o estágio I.

Face à dificuldade de obtenção de resultados experimentais, principalmente para casos específicos que visem auxiliar na fase de projeto de uma determinada estrutura, tem-se buscado métodos matemáticos, com inúmeras considerações quanto à equivalência de seção. Pode-se destacar o método da equivalência da energia de deformação da laje, o método da equivalência do momento de inércia à flexão e o método que considera a rigidez média da laje.

4.2.2 Equivalência da Energia de Deformação da Laje

O conceito de homogeneização tem sido aplicado para resolver diversos problemas estruturais, onde a geometria da estrutura varia periodicamente, como no caso das lajes nervuradas. Dessa forma é possível empregar a técnica de homogeneização para determinar sua rigidez equivalente. Essa homogeneização pode ser feita igualando-se a energia de deformação da estrutura real com a energia de deformação da estrutura equivalente.

ARAÚJO (2006) relata que para uma laje retangular de vãos l_x e l_y , segundo as direções x e y , respectivamente, sujeita a uma carga $p(x, y)$, perpendicular ao seu plano, considerando-se um elemento dessa laje submetido aos momentos fletores M_x e M_y , ao momento torçor, M_{xy} , e às forças de membrana N_x , N_y e N_{xy} , ambos por unidade de comprimento, tem-se que a principal contribuição para a energia de deformação da laje decorre dos momentos M_x , M_y e M_{xy} .

Assim, estando a laje livre para se deslocar no plano horizontal, as forças de membrana serão nulas, podendo ser desprezadas no cálculo da energia de deformação dessa laje.

Com as curvaturas definidas por:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (85)$$

onde $w(x, y)$ representa os deslocamentos transversais do plano médio da laje.

Os momentos podem ser relacionados com as curvaturas por:

$$M_x = -D(x, y)(\kappa_x + \nu\kappa_y) \quad (86)$$

$$M_y = -D(x, y)(\kappa_y + \nu\kappa_x) \quad (87)$$

$$M_{xy} = -D(x, y)(1 - \nu)\kappa_{xy} \quad (88)$$

onde $D(x, y)$ é a rigidez da laje num ponto de coordenadas (x, y) .

De acordo com SZILARD (1974) *apud* ARAÚJO (2006), a energia de deformação U é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} D(x, y) \psi(x, y) dx dy \quad (89)$$

onde

$$\psi(x, y) = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1 - \nu)\kappa_{xy}^2 \quad (90)$$

Assim, considerando-se que a laje maciça equivalente tem uma rigidez constante D_e , sua energia de deformação pode ser determinada por:

$$U = \frac{1}{2} D_e \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \psi(x, y) dx dy \quad (91)$$

Seguindo-se para a rigidez equivalente da laje nervurada:

$$D_e = \frac{\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} D(x, y) \psi(x, y) dx dy}{\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \psi(x, y) dx dy} \quad (92)$$

A rigidez equivalente pode ser escrita como:

$$D_e = E_{CS} I_e \quad (93)$$

onde

E_{CS} é o módulo secante do concreto;

I_e é a inércia equivalente, em que $I_e = D_e$ quando $E_{CS} = 1$.

Em termos da espessura equivalente $h_{e,cal}$, tem-se

$$D_e = \frac{E_{CS} h_{e,cal}^3}{12(1-\nu^2)} \quad (94)$$

então

$$h_{e,cal} = [12(1-\nu^2)I_e]^{1/3} \quad (95)$$

Porém, a solução da equação (92) requer que seja conhecida a função $\psi(x, y)$, e para isso é necessária a realização de integração numérica. Desta forma, é necessário conhecer a expressão de $w(x, y)$ em cada caso particular. Esse cálculo pode ser feito mediante a expansão de séries de Fourier, conforme mostrado no item 3.2.3.

Assim, considerando-se a rigidez da laje na região das nervuras, D_1 , e a rigidez na região da mesa, D_2 , dadas por:

$$D_1 = \frac{E_{CS} h^3}{12(1-\nu^2)} ; D_2 = \frac{E_{CS} h_f^3}{12(1-\nu^2)} \quad (96)$$

Tem-se que a rigidez $D(x, y)$ da laje nervurada pode ser definida como $D_2 \leq D(x, y) \leq D_1$.

Admitindo-se que as nervuras das duas direções têm a mesma altura h , e que a largura b_w e o espaçamento $b_f = b_2 + b_w$ entre os eixos das nervuras podem variar de uma direção para a outra, conforme mostram as Figuras 4.2 e 4.3.

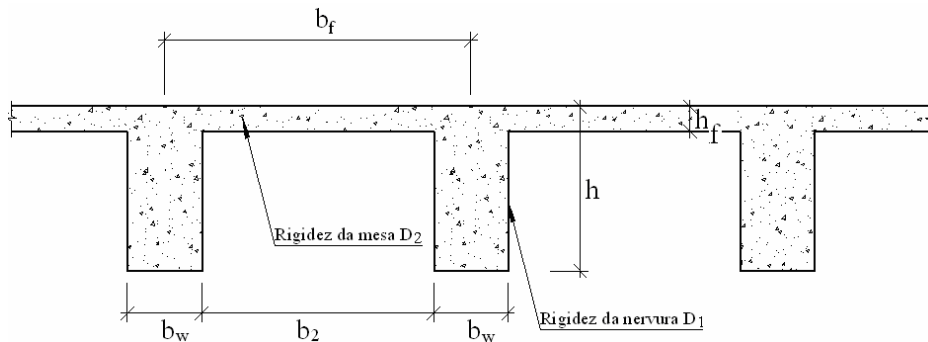


Figura 4.2 – Seção transversal da laje nervurada.

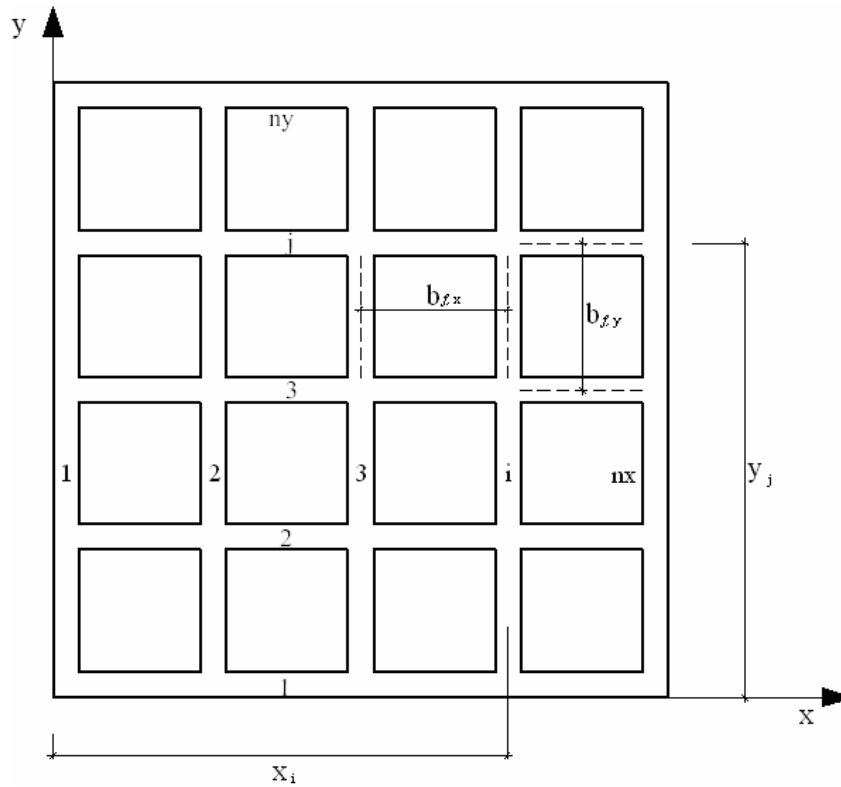


Figura 4.3 – Sistema de referência e disposição das nervuras de ARAÚJO (2006).

Discretizando-se as nervuras segundo as direções x e y (Figura 4.3) como mostrado por ARAÚJO (2006), com o objetivo de obter a solução numérica da expressão (92), é possível chegar à seguinte expressão para a rigidez equivalente:

$$D_e = \frac{\int_{i=1}^{ndx} \int_{j=1}^{ndy} D(x,y) \psi(x,y)}{\sum_{i=1}^{ndx} \sum_{j=1}^{ndy} \psi(x,y)} \quad (97)$$

onde ndx e ndy são os números de divisões da laje segundo as direções x e y .

Trata-se de um método bastante complexo, e por requerer a realização de integração numérica esse método passa a ser pouco prático para ser utilizado na fase de projeto.

4.2.3 Equivalência de Momento de Inércia

A seção equivalente pode ser determinada a partir de uma seção com o mesmo momento de inércia. Para isto atribui-se à seção retangular, o momento de inércia da

seção “T”, mantendo-se o mesmo valor da largura da mesa da nervura b_f , como largura da seção retangular para então se obter o valor da altura equivalente.

Nesse método a altura equivalente h_{eq} é determinada pela expressão:

$$h_{eq} = \left(\frac{12I}{b_f} \right)^{1/3} \quad (98)$$

onde

I é o momento de inércia em relação ao centróide da seção T de cada nervura, conforme Figura 4.4.

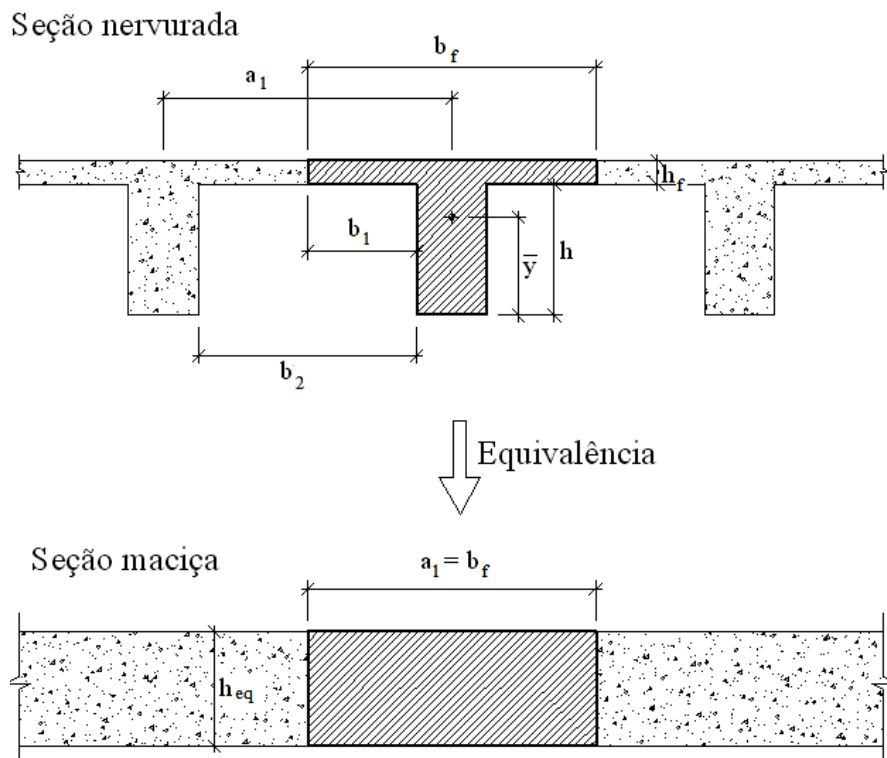


Figura 4.4 – Seção equivalente.

4.2.4 Método da Rigidez Média

Considerando-se que a laje se encontra submetida a uma curvatura constante, a função $\psi(x,y)$ será constante como verificado na expressão (90), assim a expressão (92) toma a forma:

$$D_e = \frac{\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} D(x, y) dx dy}{l_x l_y} \quad (99)$$

A rigidez equivalente será igual à rigidez média da laje, e resolvendo a expressão anterior tem-se:

$$D_e = (1 - \xi)D_1 + \xi D_2 \quad (100)$$

onde

$$\xi = \frac{(b_{f,x} - b_{w,x})(b_{f,y} - b_{w,y})}{b_{f,x} b_{f,y}} \quad (101)$$

que para lajes com nervuras com a mesma dimensão e espaçamento nas duas direções, ou seja, para, $b_{f,x} = b_{f,y} = b_f$ e $b_{w,x} = b_{w,y} = b_w$, pode-se escrever a expressão (101) como

$$\xi = \frac{(b_f - b_w)^2}{b_f^2} \quad (102)$$

Assim, tem-se para a altura equivalente:

$$h_{eq} = \left[(1 - \xi)h^3 + \xi h_f^3 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (103)$$

5 ANÁLISE NUMÉRICA

5.1 Apresentação

Neste capítulo são propostos modelos de cálculo para a análise de estruturas de lajes cogumelo nervuradas, utilizando-se o Método dos Elementos Finitos, por meio de simulações com elementos finitos bidimensionais e elementos finitos tridimensionais.

São realizadas análises numéricas computacionais de estruturas ensaiadas por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000) e por DUTRA (2005), de modo a confrontar os resultados obtidos no modelo de análise estrutural proposto com os resultados experimentais obtidos por esses pesquisadores.

A Aplicação 01 que trata das estruturas ensaiadas por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000), servirá como análise preliminar de verificação e validação para o modelo proposto.

Posteriormente na Aplicação 02, com o modelo previamente definido e avaliado, serão realizadas verificações desse modelo, porém, por meio da comparação dos resultados numéricos com os resultados experimentais de DUTRA (2005). Esses resultados tratam de uma laje cogumelo nervurada de maior complexidade, com características mais próximas da realidade das edificações.

5.2 Aplicação 01 – Estruturas de ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000)

As lajes ensaiadas por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000), serão simuladas de modo a verificar e validar inicialmente os modelos de cálculo propostos em elementos finitos.

5.2.1 Características das Lajes

ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000) ensaiaram oito modelos de lajes de concreto, sendo dois de lajes maciças e seis de nervuradas. Dessas seis, somente serão

adotadas as quatro primeiras lajes, para a realização das análises numéricas com os modelo de cálculo propostos.

Estas lajes serão denominadas S1, S2, S3 e S4, sendo todas quadradas com lados 1,50 m x 1,50 m, com detalhes de acordo com as Figuras 5.1 a 5.8.

As lajes foram submetidas a uma força concentrada (kN) aplicada no seu centro, porém, essa força foi distribuída numa área de 15 cm x 15 cm, por meio de uma placa de aço colocada sob a força.

Nas análises adotou-se a força $P=10$ kN, mas os ensaios foram até níveis superiores a esse de carregamento, pois para essa força as lajes encontravam-se no estágio I, ou seja, na fase elástica-linear. Esse procedimento foi adotado pois todas as análises propostas nesta pesquisa são do tipo elásticas-lineares, conforme permite a NBR 6118:2003.

Quanto às condições de contorno todas as lajes foram consideradas simplesmente apoiadas, conforme os procedimentos dos ensaios.

O módulo de elasticidade adotado foi o módulo de deformação longitudinal secante E_{cs} , calculado de acordo com o CEB-FIP 90, o qual é determinado em função da resistência média f_{cm} do concreto.

Esse procedimento foi possível pois nos estudos desenvolvidos por ABDULWAHAB e KHALIL (2000) são apresentados os resultados da resistência média f_{cm} decorrente dos ensaios realizados. Tais valores encontram-se relacionados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Valores de modulo de elasticidade de acordo com a resistência média do concreto.

Laje	f_{cm} (MPa)	E_{cs} (MPa)
S1	31,3	26732
S2	32	26930
S3	31,4	26760
S4	28,9	26030

O Coeficiente de Poisson adotado para o concreto segue as prescrições da NBR 6118:2003: $\nu = 0,20$.

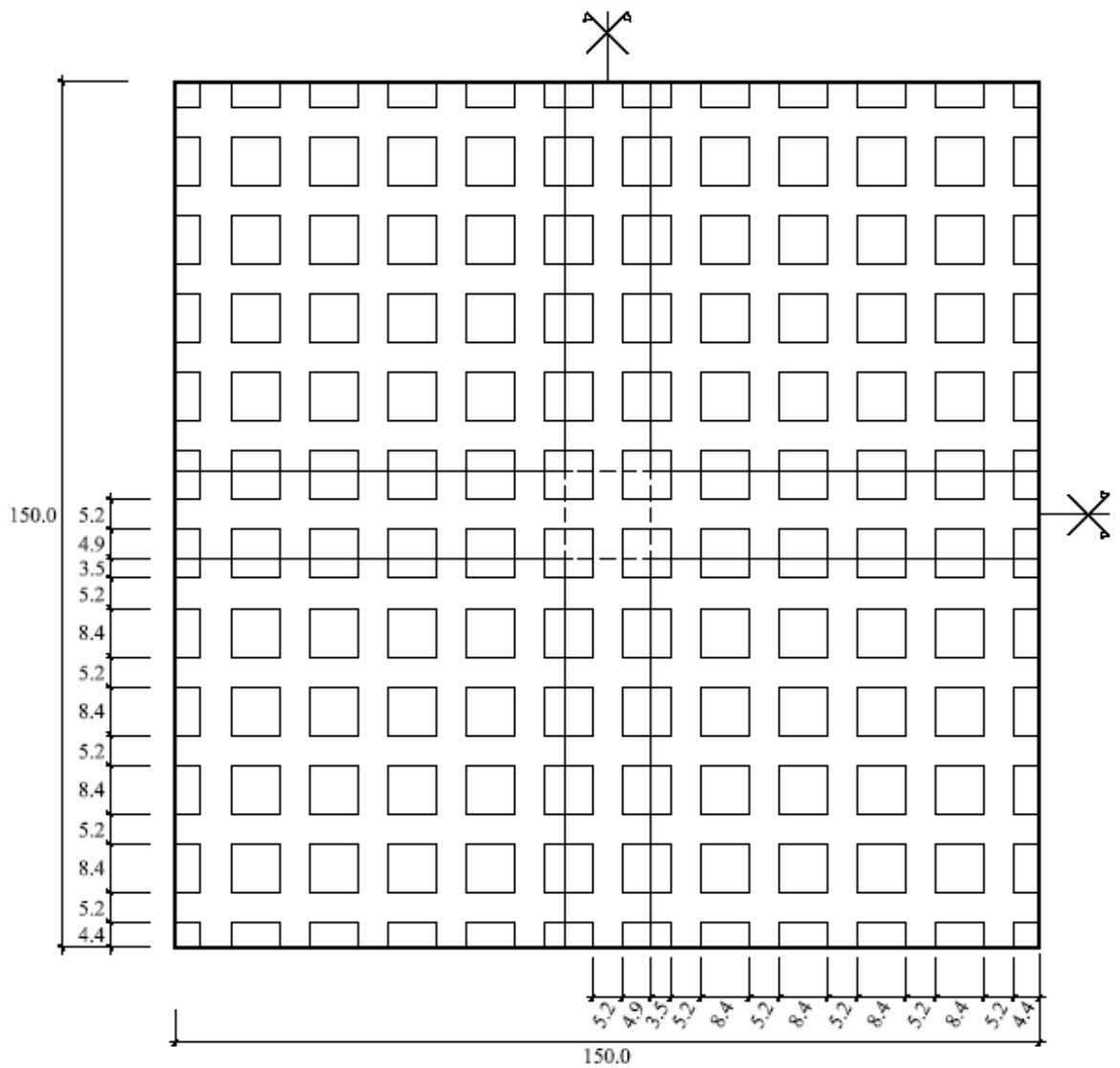


Figura 5.1 – Vista em planta da geometria da laje S1.

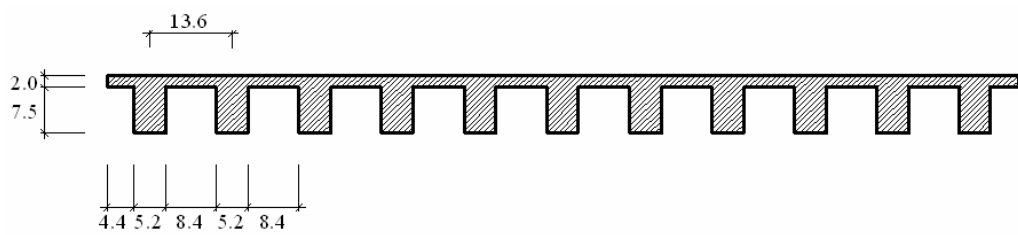


Figura 5.2 – Seção transversal da geometria da laje S1.

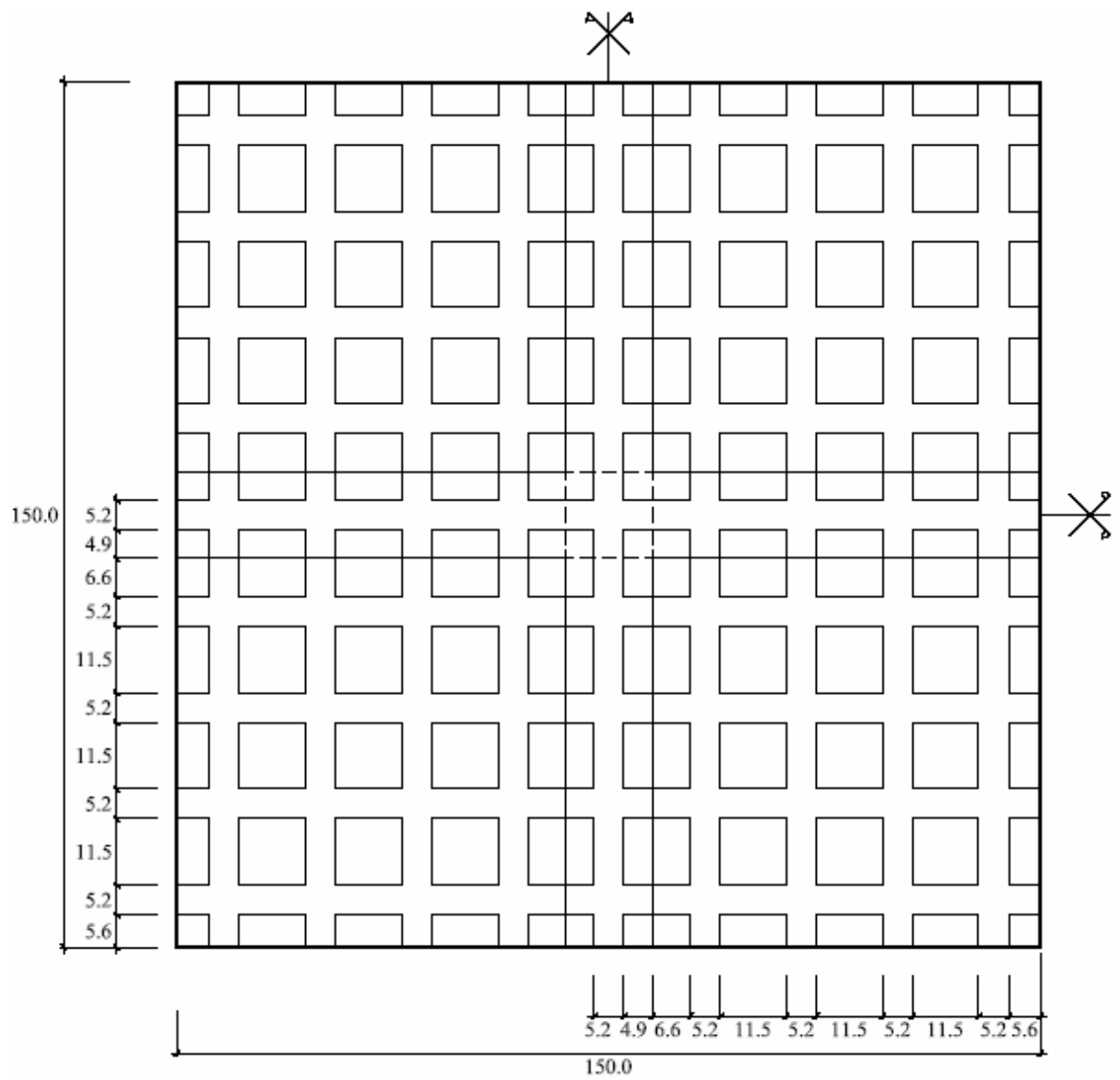


Figura 5.3 – Vista em planta da geometria da laje S2.

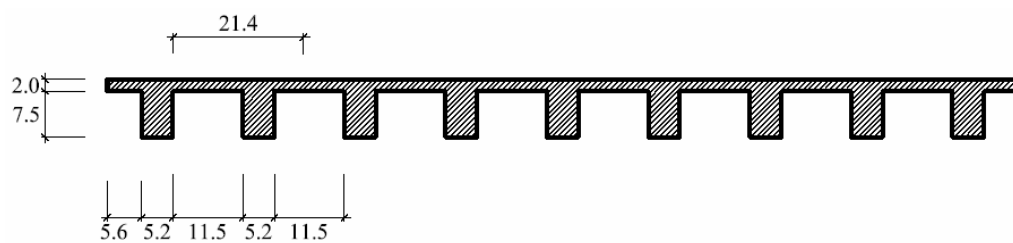


Figura 5.4 – Seção transversal da geometria da laje S2.

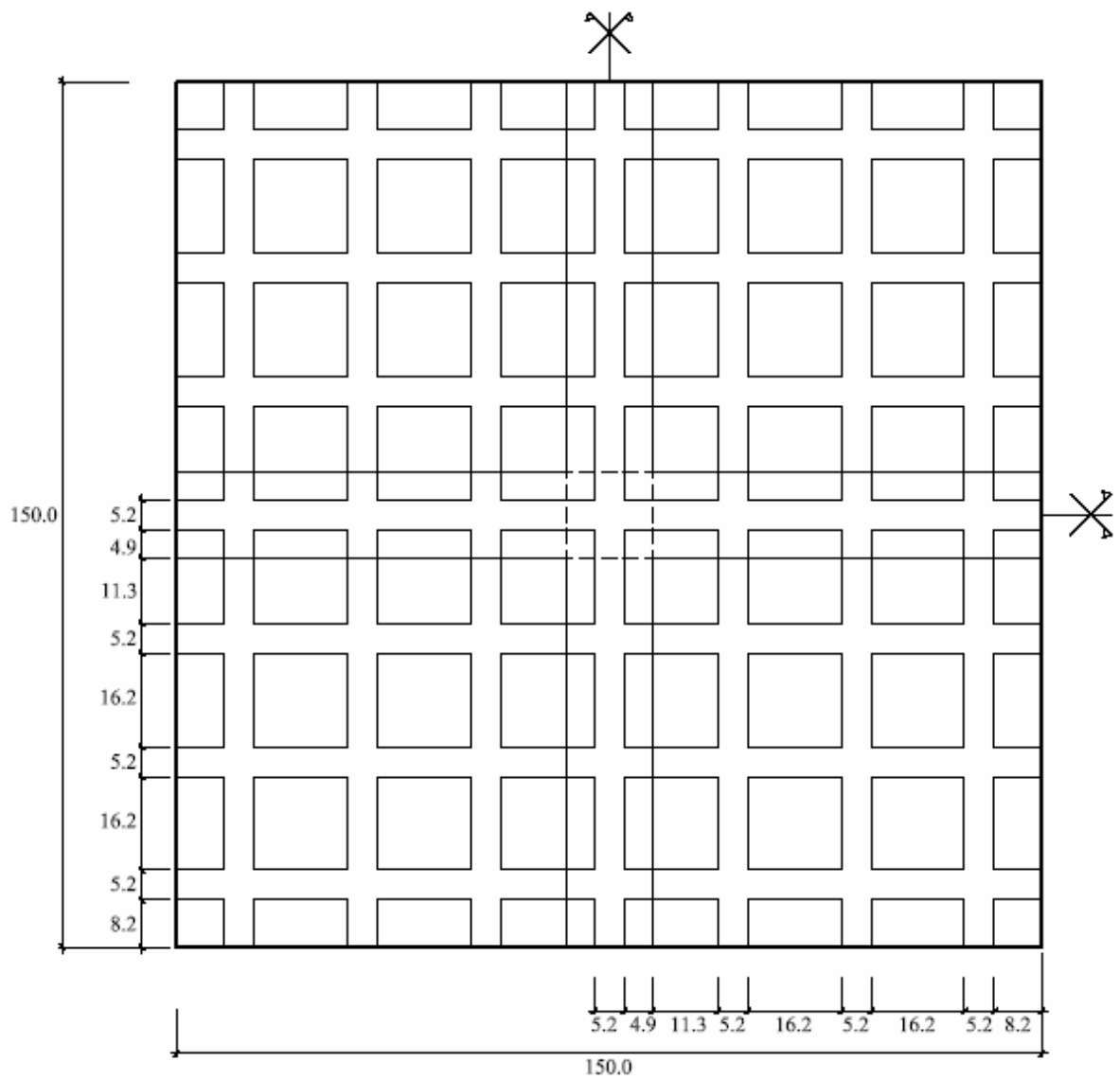


Figura 5.5 – Vista em planta da geometria da laje S3.

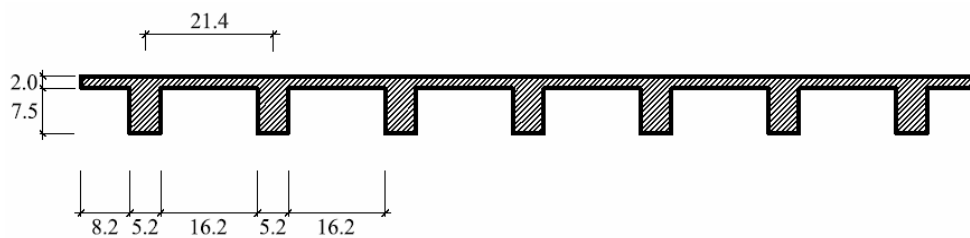


Figura 5.6 – Seção transversal da geometria da laje S3.

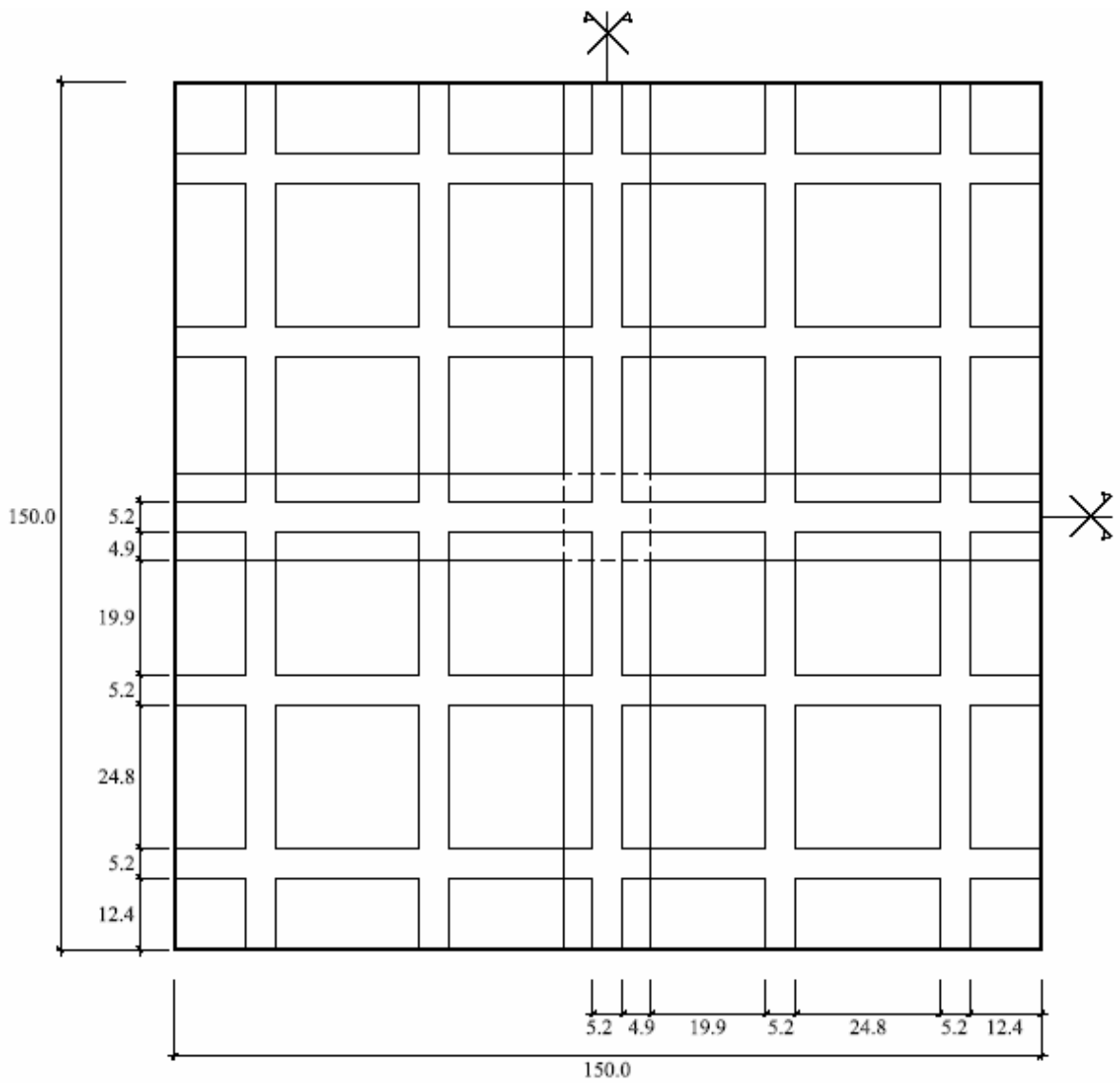


Figura 5.7 – Vista em planta da geometria da laje S4.

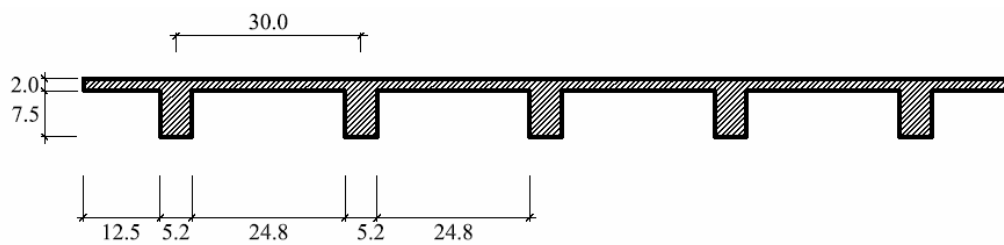


Figura 5.8 – Seção transversal da geometria da laje S4.

5.2.2 Modelo em Elementos Finitos Bidimensionais

Nas simulações utilizando elementos finitos bidimensionais são propostos dois modelos de análise. A diferença entre esses modelos encontra-se na forma de calcular a espessura equivalente da seção nervurada de cada laje. Para o primeiro modelo, denominado MEF 2D-A, é utilizado o método de cálculo da altura equivalente em função da equivalência de momento de inércia, já o segundo modelo, denominado MEF-2D-B, utiliza o método de cálculo da altura equivalente em função da rigidez média da laje. Esses dois métodos de cálculo da altura equivalente da laje foram definidos no Capítulo 4 deste trabalho.

As simulações realizadas são elásticas-lineares, e utilizaram o software de elementos finitos ANSYS.

Utilizou-se o elemento bidimensional de casca SHELL63 - *Elastic Shell*, o qual será melhor definido na Aplicação 02 desta pesquisa, no item 5.3.

Os parâmetros para o cálculo da altura equivalente, assim como os valores de altura equivalente para cada uma das lajes, em função do método da rigidez média e do método de equivalência de momento de inércia, são mostrados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Parâmetros para determinação da altura equivalente e seu valor de acordo com o método de cálculo.

Laje	Rigidez Média modelo MEF-2D-B		Equivalência de Inércia à Flexão modelo MEF-2D-A		
	ξ	$h_{eq} (cm)$	$y(cm)$	$I (cm^4)$	$h_{eq} (cm)$
S1	0,38149	8,1097	5,7017	553,4245	7,874692
S2	0,4742	7,6891	5,9413	599,8839	7,554006
S3	0,57306	7,1831	6,2353	657,4866	7,170533
S4	0,68338	6,5181	6,6288	736,108	6,652739

Na malha de elementos finitos adotada utilizou-se elementos com dimensão global máxima de 2,5 cm, por se entender que devido a simplicidade da geometria resultante nos modelos de cálculo com elementos finitos bidimensionais, tal dimensão resulta numa malha bastante confiável. A malha e a geometria resultante nesses modelos são mostradas na Figura 5.9.

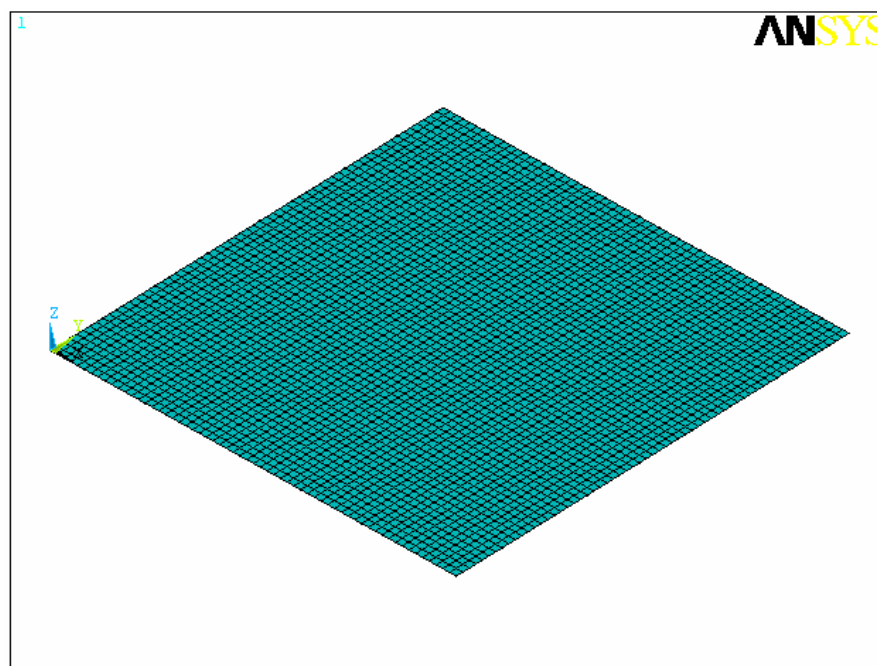


Figura 5.9 – Geometria e malha de elementos finitos das lajes simuladas em elementos finitos bidimensionais.

5.2.3 Modelo em Elementos Finitos Tridimensionais

O modelo proposto, utilizando elementos finitos tridimensionais, emprega o elemento SOLID45 – *3D Structural Solid*, o qual será melhor definido na Aplicação 02 desta pesquisa, no item 5.3.

A simulação em elementos finitos tridimensionais permite a reprodução exata das características geométricas da estrutura ensaiada. Desse modo, no modelo proposto, denominado MEF-3D, serão seguidas rigorosamente as dimensões definidas anteriormente para cada uma das lajes.

5.2.3.1 Definição da Malha de Elementos Finitos

Por se tratar de uma modelo bastante complexo, para a definição da malha de elementos finitos, foram realizadas diversas análises variando as dimensões dos elementos. A partir do número de elementos e dos resultados que cada uma destas discretizações determinam, foi possível verificar em que nível de discretização os resultados convergem para um mesmo valor.

A verificação da convergência dos resultados foi realizada considerando o ponto central da laje. Foram definidos no software as dimensões máximas dos elementos, e a partir dessas dimensões a malha era gerada automaticamente, respeitando as divisões de volumes definidas na criação da geometria.

Na avaliação da convergência foram utilizados os resultados das análises referentes aos deslocamentos verticais, ou seja, na direção “z” (UZ), considerando como modelo a laje S4. Na Tabela 5.3 e nos gráficos da Figura 5.10, pode-se visualizar a tendência de convergência dos resultados que levaram a se adotar como dimensão global máxima do elementos o valor de 3 cm.

Tabela 5.3 – Deslocamento experimental e numérico para as diversas dimensões de elementos finitos no caso da Laje S4.

Dimensão do elemento (cm)	Número de elementos	Deslocamento UZ através MEF (mm)	Deslocamento Experimental (mm)
15,00	504	0,3965	0,45
8,00	952	0,41764	0,45
5,20	1720	0,43706	0,45
3,00	6196	0,45498	0,45
2,60	6900	0,45534	0,45

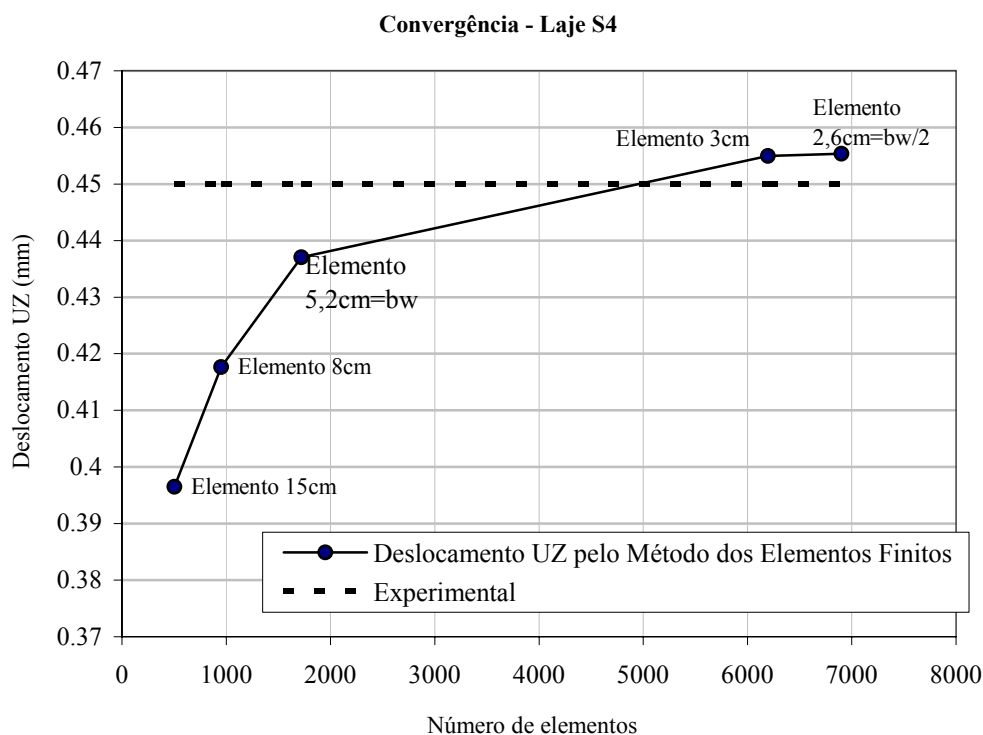


Figura 5.10 – Deslocamentos de acordo com a dimensão de elemento empregada.

A partir da definição da dimensão dos elementos construir a malha de elementos finitos é executada, como mostra o exemplo da laje S4, ilustrada na Figura 5.11.

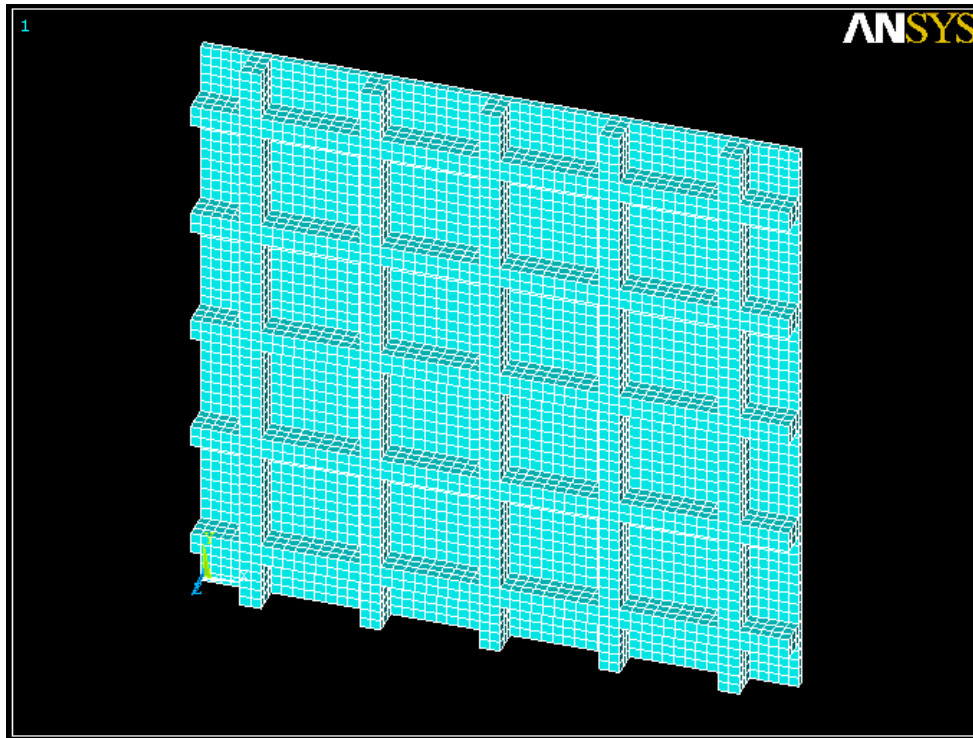


Figura 5.11 – Geometria e malha de elementos finitos para o caso da laje S4, simulada em elementos finitos tridimensionais.

5.2.4 Resultados e Conclusões

Pelos resultados de deslocamentos (Tabela 5.4), é possível verificar que todos os modelos apresentam coerência de resultados o modelo que utiliza elementos finitos tridimensionais apresentou melhores resultados para as lajes S2 e S4 que os demais, ao tomar como referência os resultados experimentais. Para as demais lajes todos os modelos apresentaram resultados semelhantes, e mesmo considerando modelo tridimensional não tenha fornecido os melhores resultados, esse modelo apresentou valores coerentes em relação aos demais métodos e em relação aos resultados experimentais.

Tabela 5.4 – Resultados experimentais para cada método de cálculo proposto, de deslocamentos verticais (flechas) das lajes no centro das lajes.

Deslocamentos (flecha) no centro das lajes (mm)				
Laje	Experimental	MEF-3D	MEF-2D-A	MEF-2D-B
S1	0,1300	0,21966	0,225635	0,20658
S2	0,2900	0,26181	0,25373	0,24059
S3	0,2900	0,33063	0,29854	0,29697
S4	0,4500	0,45912	0,3843	0,4086

Conclui-se de maneira preliminar que o modelo de elementos finitos tridimensionais apresenta enorme potencial para ser empregado no cálculo de lajes nervuradas, conduzindo a resultados mais confiáveis do que métodos já consolidados, como o caso da modelagem de lajes nervuradas por meio de seção equivalente e por elementos de placa.

Na comparação entre os dois modelos bidimensionais é possível verificar que o método da rigidez média para o cálculo da altura equivalente da lajes apresentou resultados mais próximos do experimentais, para as lajes S1, S3, e para a laje S4 apresentou resultado praticamente igual ao do modelo que utilizou a altura equivalente por meio da equivalência de momento de inércia à flexão da laje. Quanto à laje S2, é possível verificar que os resultados dos dois métodos apresentaram valores bastante próximos, o modelo MEF-2D-B não apresentou o melhor resultado, mas mostrou-se bastante coerente.

Por meio da análise dessas quatro lajes, conclui-se que é válida a utilização do método da rigidez média no cálculo de lajes nervuradas. Este método, o modelo de simulação tridimensional devem ser melhor analisados e verificados em estruturas mais complexas.

Nas Figuras 5.11 e 5.12 estão ilustrados os resultados do deslocamento no centro da laje S4, para os modelos MEF-2D-A e MEF-3D, respectivamente.

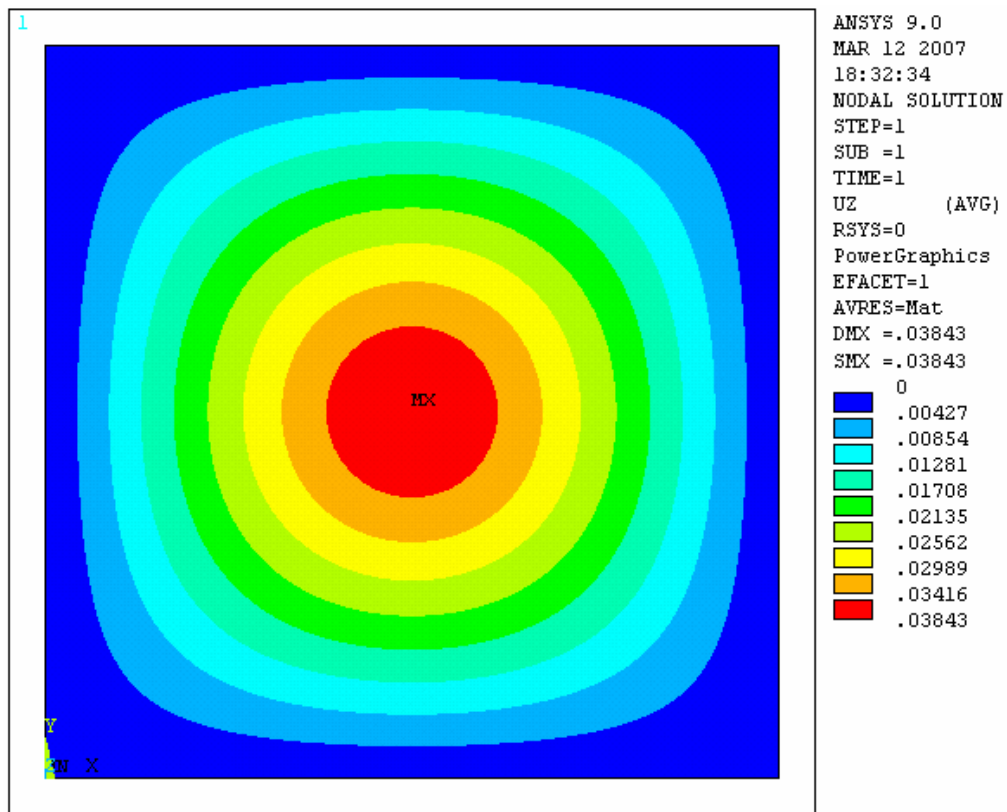


Figura 5.12 – Resultados de deslocamento vertical (flechas) da laje S4 para o modelo MEF-2D-A.

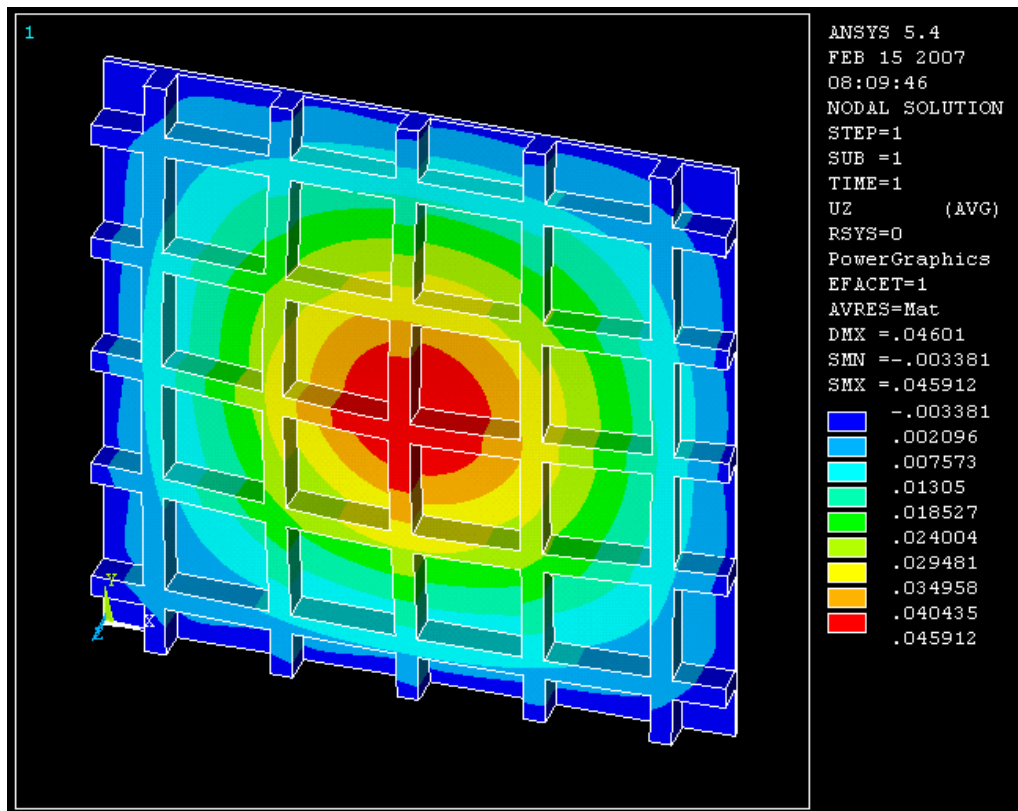


Figura 5.13 – Resultados de deslocamento vertical (flechas) da laje S4 para o modelo MEF-3D

5.3 Aplicação 02 – Estrutura de DUTRA (2005)

As lajes experimentadas por DUTRA (2005) são do tipo cogumelo nervuradas e foram confeccionadas e ensaiadas em três exemplares, construídos em escala reduzida e em micro-concreto armado.

Neste capítulo são definidas as características destas lajes, as quais são de extrema importância para que a simulação numérica possa reproduzir com a maior fidelidade possível o comportamento da estrutura real ensaiada.

São definidos os parâmetros necessários para a análise, ou seja, altura equivalente da laje, método de cálculo e determinação do módulo de elasticidade longitudinal do concreto.

O cálculo da altura equivalente da laje é fundamental nas simulações em elementos finitos de casca (com função de placa), pois permite simplificar a seção nervurada numa seção maciça equivalente. Para o módulo de elasticidade longitudinal do concreto são definidos os valores empregados em cada modelo de cálculo proposto, de acordo com algumas considerações normativas. A comparação entre esses parâmetros de cálculo permite verificar as vantagens e desvantagens de cada um desses métodos.

Nesta pesquisa são propostos quatro modelos de cálculo, os quais são apresentados neste capítulo.

De modo geral a geometria da laje empregada nas simulações numéricas seguem a geometria da laje real ensaiada por DUTRA (2005). Cabe destacar que as dimensões dessas lajes seguem as prescrições da NBR 6118:2003.

Essa geometria, e todas as características empregadas neste trabalho já estão multiplicadas pela escala dimensional, estando assim corrigidas para o protótipo, devido ao fato da laje ter sido ensaiada em escala reduzida. Tal geometria pode ser observada nas Figuras 5.14 e 5.15.

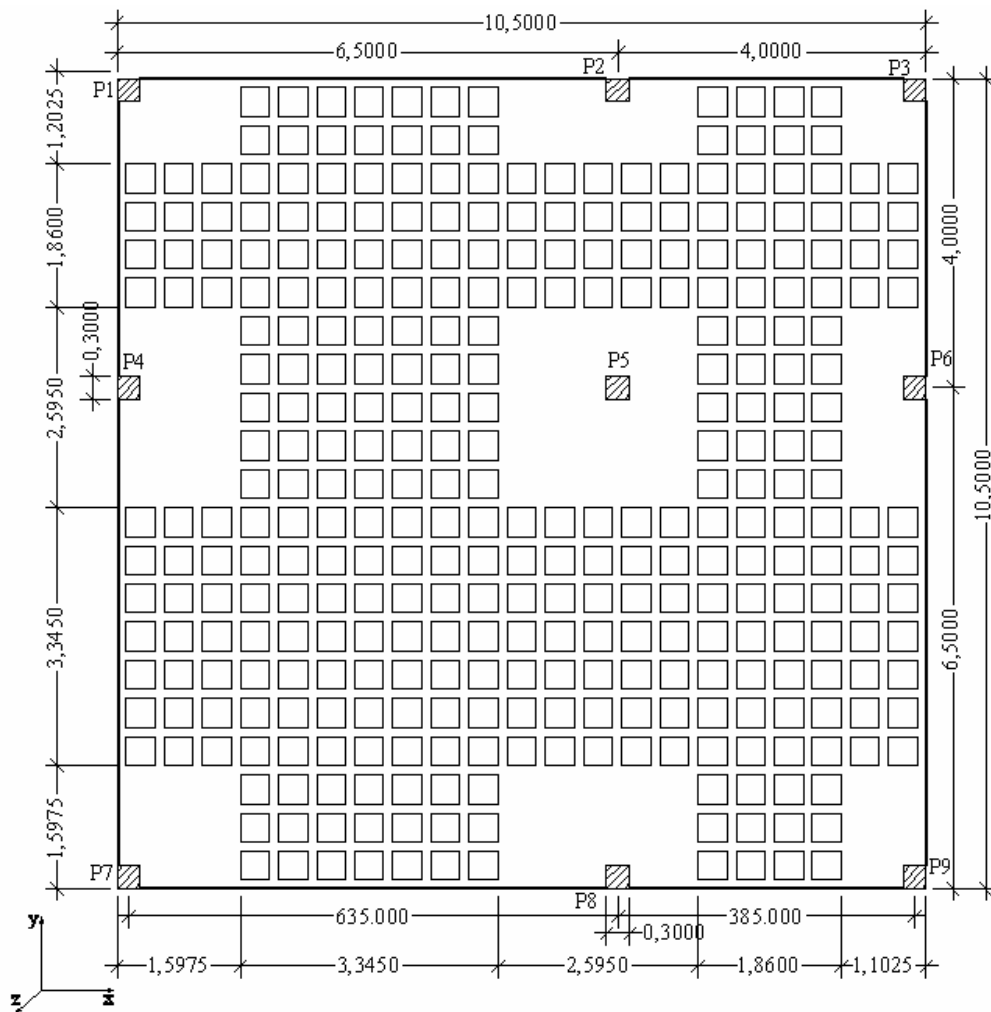


Figura 5.14 – Vista em planta da laje (unidades em metros).

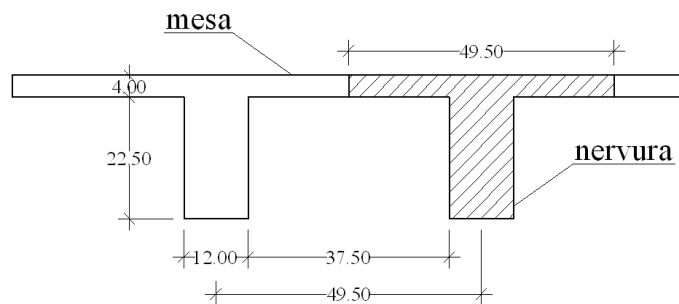


Figura 5.15 – Seção transversal da laje (unidades em centímetros).

Assim é possível definir e listar os seguintes parâmetros:

Altura útil: $d=26,50$ cm;

Altura da nervura: $h=22,50$ cm;

Altura da capa: $h_f=4,00$ cm;

Largura da nervura: $b_w=12,00$ cm;

Distância entre as nervuras: $b_2=37,50$ cm;

Distância entre eixos de nervuras: $a_1=49,50$ cm;

Na análise numérica por meio do Método dos Elementos Finitos, procura-se reproduzir com a máxima precisão os modelos experimentais adotados como referência, porém, levando-se em consideração algumas limitações impostas pelo método quanto à distribuição da malha de elementos finitos, às dimensões desses elementos, e demais limitações decorrentes dos modelos de cálculo propostos.

5.4 Modelos Propostos em Elementos Finitos Bidimensionais e Tridimensionais

São propostos três modelos utilizando elementos finitos bidimensionais e tridimensionais. Para esses modelos são realizadas simulações em regime elástico-linear utilizando o software de elementos finitos ANSYS.

Utilizou-se o elemento bidimensional de casca SHELL63 - *Elastic Shell* (Figura 5.16) para a discretização das regiões das nervuras e trechos maciços da laje (capitel).

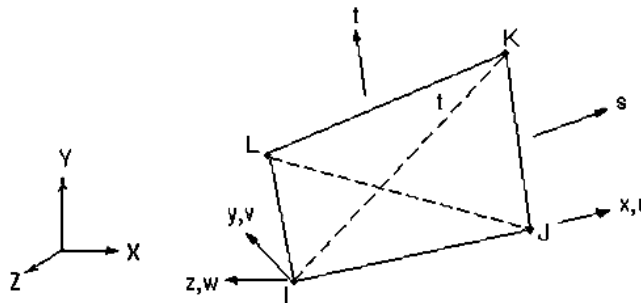


Figura 5.16 – Elemento de placa bidimensional utilizado na simulação da laje.

Os pilares foram discretizados com elementos tridimensionais tipo SOLID45 – *3D Structural Solid*. Esse elemento é definido por oito nós, com três graus de liberdade em cada nó, translações nodais nas direções x , y e z (UX, UY e UZ) conforme mostra a Figura 5.17.

Esses pilares foram discretizados com a mesma altura dos pilares do modelo experimental.

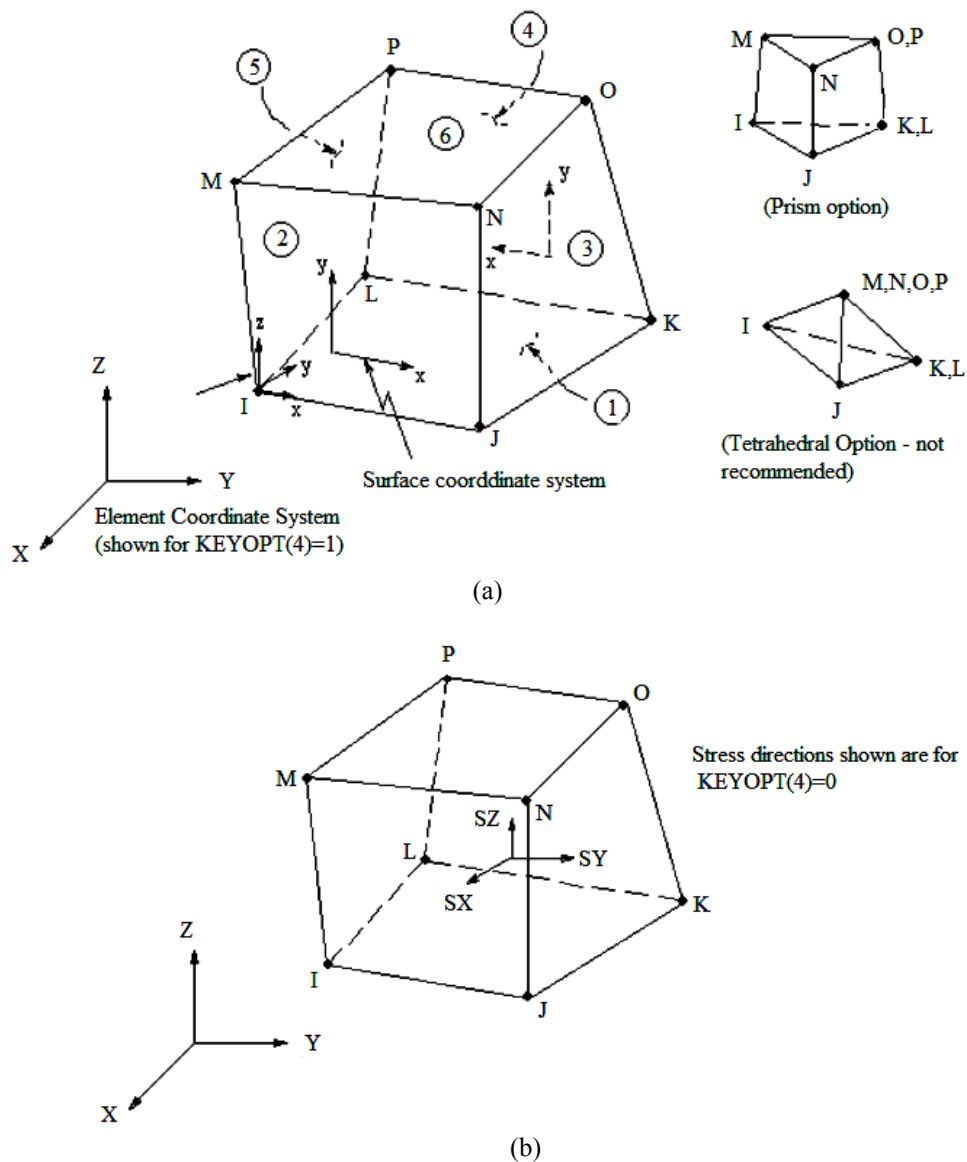


Figura 5.17 – Elemento tridimensional SOLID45, (a) – disposição dos oito nós (I,J,L,M,N,O,P,K), sistema de coordenadas (X, Y, Z). (b) – direção das tensões (SX, SY, SZ).

5.4.1 Geometria da Laje

Os parâmetros geométricos utilizados nesses modelos apresentam algumas simplificações em relação à geometria das lajes reais, pois tratam-se de modelos que utilizam elementos de casca (com função de placa).

A altura útil da laje utilizada para a região maciça, ou região denominada capitel, é de 26,50 cm, sendo essa dimensão igual a dimensão real do protótipo. As áreas com essa altura estão indicadas como A1 na Figura 5.18.

Nas regiões nervuradas indicadas como A2 na Figura 5.18, adotou-se uma seção equivalente maciça para simplificar a seção nervurada. Em cada um dos três modelos propostos inicialmente foi adotado um método de cálculo de altura equivalente, conforme será descrito nas características particulares de cada modelo.

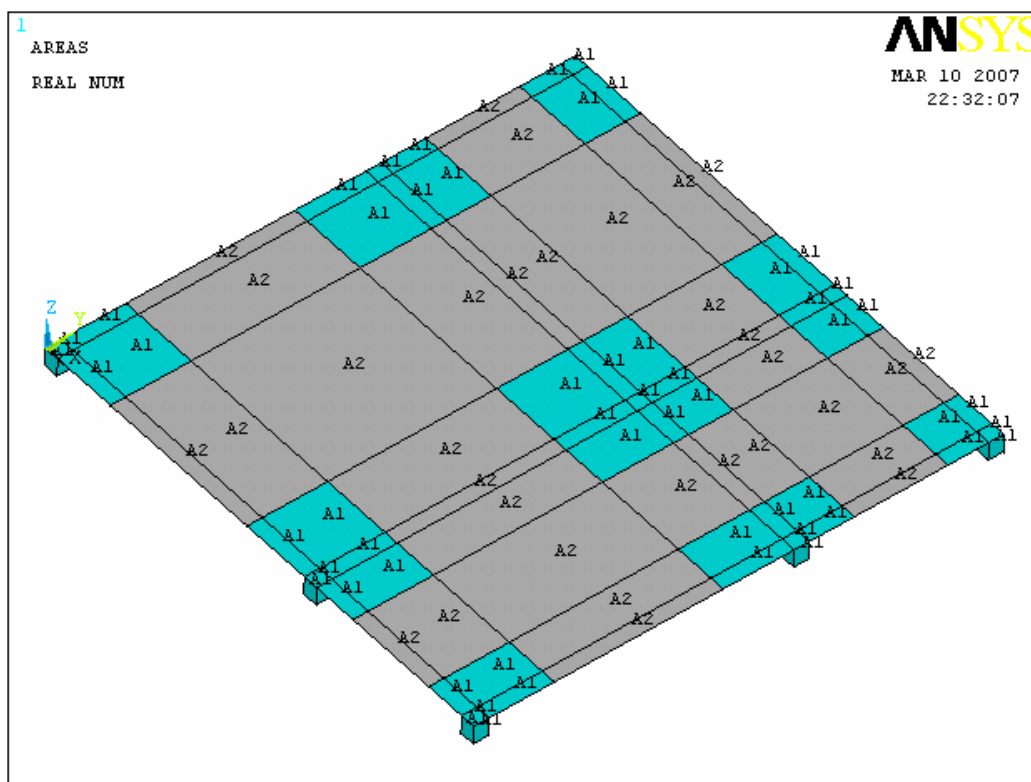


Figura 5.18 – Discriminação das áreas com diferentes espessuras para o MEF-01.

5.4.2 Definição da Malha de Elementos Finitos

Foram as mesmas dimensões utilizadas nas análises realizadas por DUTRA (2005), no modelo proposto por este autor, que utiliza elementos bidimensionais e tridimensionais.

Foi adotada a dimensão global máxima de 30 cm para os elementos finitos na discretização da laje, tanto para os elementos bidimensionais como para os elementos tridimensionais (Figura 5.19).

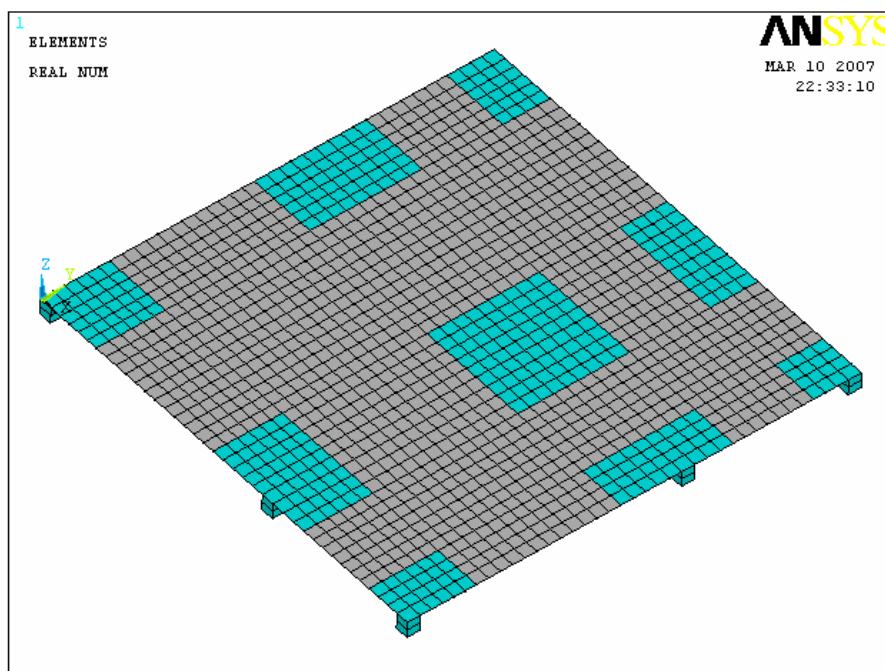


Figura 5.19 – Malha de elementos finitos discretizada da laje para o modelo MEF-01.

5.4.3 Condições de Contorno da Estrutura

Para o modelo MEF-01 foram aplicadas restrições de deslocamentos verticais para os pilares. Devido ao sistema de coordenadas adotado essa restrição refere-se à direção “z” (UZ), como mostra a Figura 5.20.

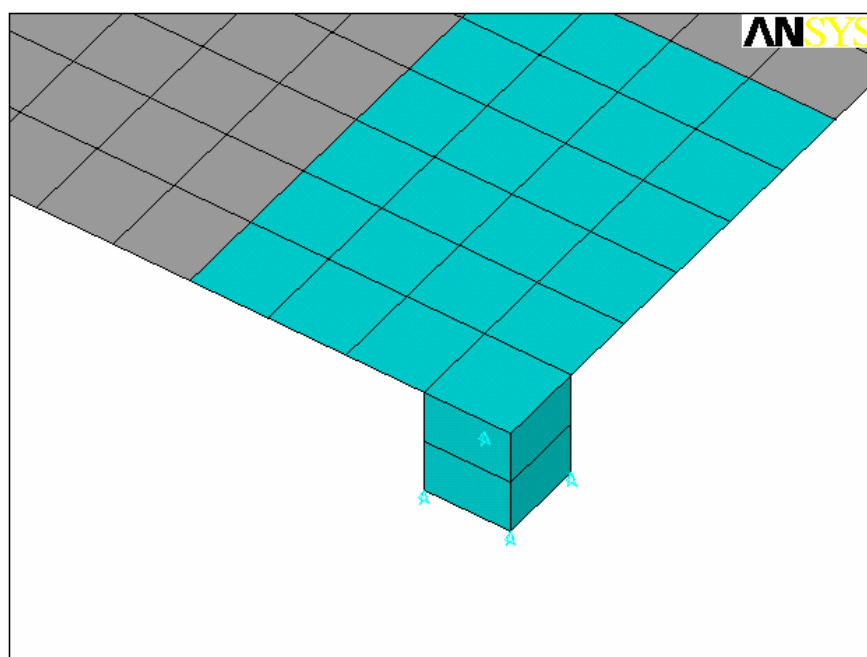


Figura 5.20 – Detalhe dos deslocamentos impedidos na direção “z” (UZ) para os nós dos da base pilares.

5.4.4 Carga Aplicada à Laje

Nos resultados experimentais o comportamento apresentado pela laje foi linear para todos os pontos de medição, até uma carga de 5 kN/m^2 , tanto para as deformações como para os deslocamentos. Como para esse carregamento a laje não apresentou qualquer fissura, foi possível considerar que nessas condições a laje apresentava comportamento elástico linear.

Como as análises numéricas realizadas nesta pesquisa são do tipo elástico-linear, ou seja, considerando o concreto no estágio I, adotou-se a carga de 5 kN/m^2 , distribuída em toda a superfície da laje, como carregamento padrão, possibilitando a comparação dos resultados numéricos com os experimentais.

5.4.5 Modelo Proposto MEF-01

As características gerais desse modelo, como geometria, malha de elementos finitos, condições de contorno e força aplicada, são as mesmas para os três modelos utilizando elementos finitos bidimensionais e tridimensionais, variando-se apenas o módulo de elasticidade longitudinal do concreto e o método de cálculo da altura equivalente para as regiões nervuradas.

5.4.5.1 Propriedades dos Materiais

Nesse modelo utilizou-se o módulo de deformação longitudinal do concreto, obtido nos ensaios do micro-concreto utilizado nas lajes experimentais: $E_c=33690 \text{ MPa}$.

O Coeficiente de Poisson do concreto, segue as prescrições da NBR 6118:2003, sendo $\nu=0,20$.

5.4.5.2 Espessura Equivalente para as Regiões Nervuradas

Devido ao fato de que nesse modelo a região nervurada foi simulada em elementos finitos de casca, adotou-se para essa região uma altura equivalente h_{eq} , a qual foi calculada pelo o método de equivalência de inércia à flexão, dado pela expressão (98), resultando numa altura da seção retangular equivalente $h_{eq}=19,735 \text{ cm}$.

5.4.6 Modelo Proposto MEF-02

Assim como no modelo anterior, a geometria, a malha de elementos finitos, as condições de contorno e força aplicada, são as mesmas dos modelos utilizando elementos finitos bidimensionais e tridimensionais.

Nesse modelo é variado apenas o módulo de elasticidade longitudinal do concreto, mantendo-se o método de cálculo da altura equivalente para as regiões nervuradas.

5.4.6.1 Propriedades dos Materiais

Nesse modelo utilizou-se nas simulações como valor de módulo de elasticidade o módulo de deformação longitudinal secante E_{cs} , calculado de acordo com o CEB-FIP 90, o qual é determinado em função da resistência média f_{cm} do concreto.

Esse procedimento foi possível pois nos estudos desenvolvidos por DUTRA (2005) são apresentados os resultados da resistência média f_{cm} decorrente de ensaios realizados.

Nos referidos estudos são apresentados ainda dados de módulo de deformação longitudinal decorrentes de ensaios, porém, referentes ao módulo tangente, e como revisado anteriormente, o módulo de deformação longitudinal secante E_{cs} , definido pelo CEB-FIP 90 tende a se ajustar melhor em relação aos resultados experimentais.

Portanto, o módulo de elasticidade empregado no modelo MEF-02 é $E = E_{CS,CEB} = 27993,041$ MPa.

O Coeficiente de Poisson adotado para o concreto segue as prescrições da NBR 6118:2003: $\nu=0,20$.

5.4.6.2 Espessura Equivalente para as Regiões Nervuradas

Como no modelo anterior (MEF-01) adotou-se para a região nervurada uma altura equivalente h_{eq} , calculada pelo o método de equivalência de inércia à flexão, então $h_{eq}=19,735$ cm;

5.4.7 Modelo Proposto MEF-03

Nesse modelo a geometria, a malha de elementos finitos, as condições de contorno e a força aplicada são as mesmas dos modelos utilizando elementos finitos bidimensionais e tridimensionais.

São variados o módulo de elasticidade longitudinal do concreto e o método de cálculo da altura equivalente para as regiões nervuradas.

5.4.7.1 Propriedades dos Materiais

Adotou-se o módulo de deformação longitudinal secante E_{CS} calculado de acordo com o CEB-FIP 90. O módulo de elasticidade empregado no modelo MEF-03 é $E = E_{CS,CEB} = 27993,041$ MPa.

O coeficiente de Poisson do adotado para o concreto segue as prescrições da NBR 6118:2003: $\nu = 0,20$.

5.4.7.2 Espessura Equivalente para as Regiões Nervuradas

Adotou-se para essa região nervurada uma altura equivalente h_{eq} , a qual foi calculada pelo o método da rigidez média da laje, conforme definido na expressão (102) e expressão (103), resultando em uma altura da seção retangular equivalente $h_{eq} = 19,972$ cm;

5.5 Modelos Propostos em Elementos Finitos Tridimensionais

São propostos dois modelos utilizando elementos finitos tridimensionais. Para esses modelos são realizadas simulações em regime elástico-linear, utilizando-se o software de elementos finitos ANSYS. Foram discretizados todo o conjunto estrutural, as regiões maciças, as regiões nervuradas e os pilares, em elementos finitos tridimensionais tipo SOLID45 – *3D Structural Solid* (Figura 5.17).

5.5.1 Geometria da Laje

A simulação de todo o conjunto estrutural em elementos finitos tridimensionais permite a reprodução exata das características geométricas da estrutura ensaiada. Nos modelos propostos MEF-04 e MEF-05 que utilizam este tipo de discretização, foram adotadas as dimensões iguais as do modelo ensaiado, devidamente corrigidas pelo fator dimensional (Figura 5.21).

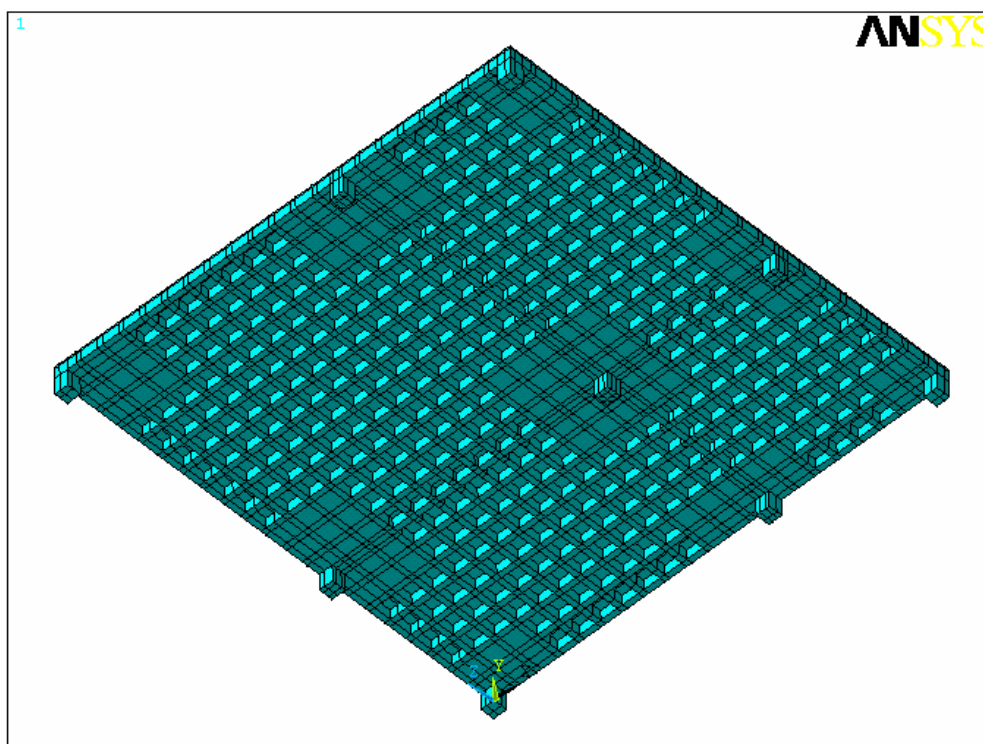


Figura 5.21 – Vista inferior da geometria das lajes geradas em volumes, para os modelos MEF-04 e MEF-05.

5.5.2 Definição da Malha de Elementos Finitos

Para a definição da malha de elementos finitos, foram realizadas diversas análises variando a dimensão dos elementos. De acordo com a dimensão e distribuição dos elementos, tem-se um número de elementos e uma malha de elementos finitos.

A partir do número de elementos e dos resultados que cada uma dessas discretizações determinam, é possível verificar em que nível de discretização os resultados convergem para um mesmo valor.

Esse procedimento, como recomendam GOMES e DONIN (2002), deve ser executado tanto para os deslocamentos como para as tensões, pois a convergência é mais lenta para o caso das tensões.

A verificação da convergência dos resultados foi realizada para o ponto C1 da laje (Figura 6.4), sendo consideradas inicialmente cinco dimensões de elementos. Nesses casos foram fornecidos ao software as dimensões máximas dos elementos, e a partir dessas dimensões a malha era gerada automaticamente, respeitando-se as divisões de volumes definidas na criação da geometria.

Posteriormente, adotou-se a discretização dos elementos a partir determinação do número de divisões que cada aresta de volume gerado deveria ter.

Os resultados das análises, de acordo com as dimensões e conseqüentemente do número de elementos finitos, para as tensões normais na direção “z” (SZ) e deslocamentos verticais, ou seja, na direção “y” (UY), necessários para a verificação da convergência, podem ser analisados por meio dos dados da Tabela 5.5 , e dos gráficos da Figura 5.22 e da Figura 5.23.

Tabela 5.5 – Tensão normal na direção “z” (SZ) e deslocamento (UY) para as diversas dimensões de elementos finitos.

Dimensão do elemento	Número de elementos	Deslocamento UY através MEF (mm)	Tensão normal na direção z (SZ), em kgf/cm²
50,00 cm	4038	3,39885	14,939
30,00 cm	6926	3,54185	21,94650
25,00 cm	7358	3,55370	21,99550
20,00 cm	10262	3,57280	22,59100
15,00 cm	13209	3,62580	23,065425
Duas divisões por aresta de volume	32304	3,61972	21,7433

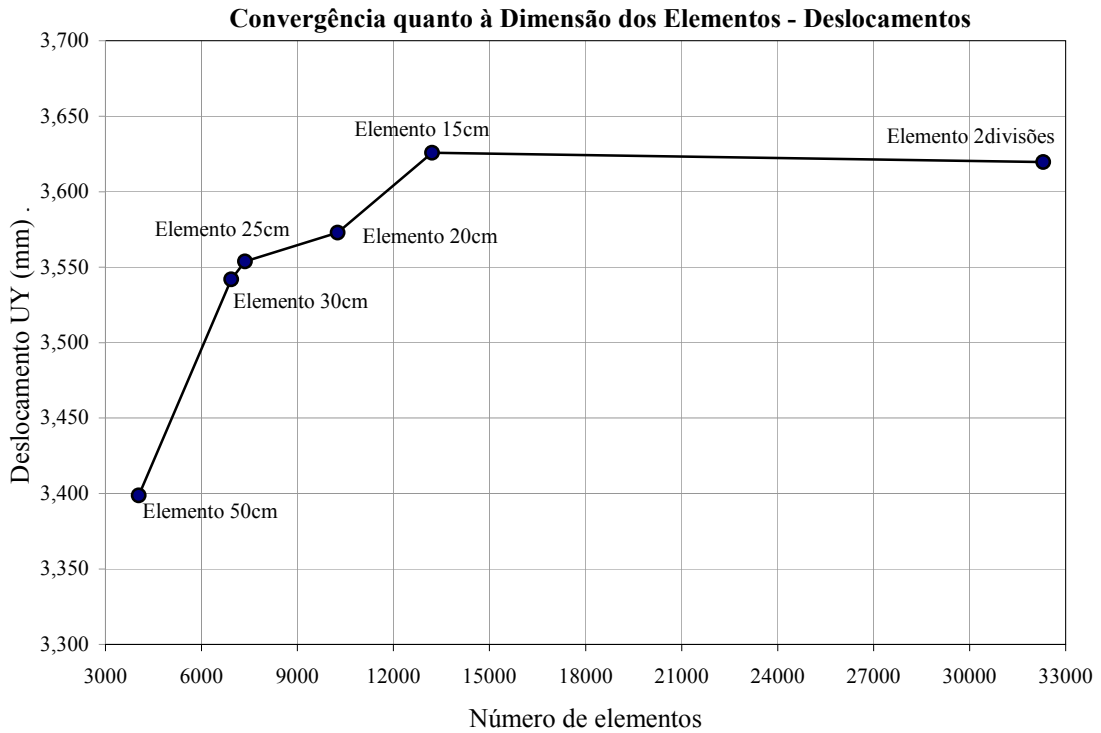


Figura 5.22 – Gráfico de deslocamentos de acordo com a dimensão de elemento empregada.

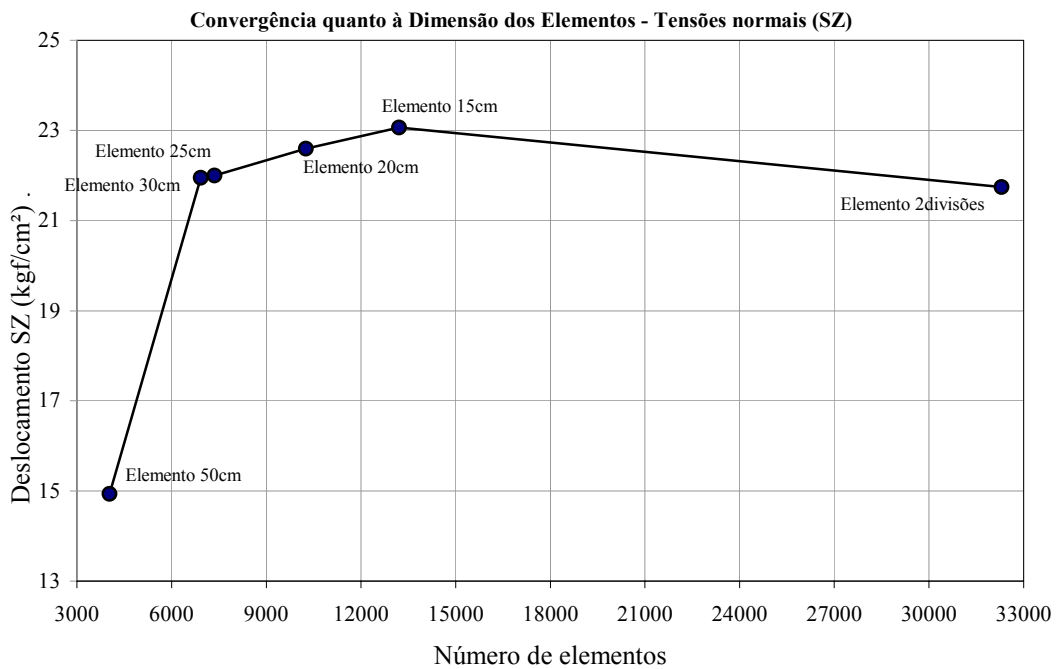


Figura 5.23 – Gráfico de tensões normais na direção “z” (SZ) de acordo com a dimensão de elemento empregada.

Com base nesses resultados optou-se por empregar uma malha de elementos definidos a partir de duas divisões em cada aresta de volume. Essa escolha foi feita

por se entender que essa divisão é mais eficiente, pois gera um maior número de elementos nas regiões com mais detalhes de geometria e conseqüentemente geradas num maior número de volumes.

Além da vantagem de distribuição da malha, a discretização em duas divisões em cada aresta de volume apresentou convergência satisfatória, tanto para as tensões quanto para os deslocamentos.

A malha de elementos finitos utilizada adotada na comparação dos modelos MEF-01 e MEF-02 com os resultados experimentais e os demais modelos numéricos propostos, pode ser vista na Figura 5.24 e 5.25 de modo geral, e em detalhes nas Figuras 5.26 e 5.27.

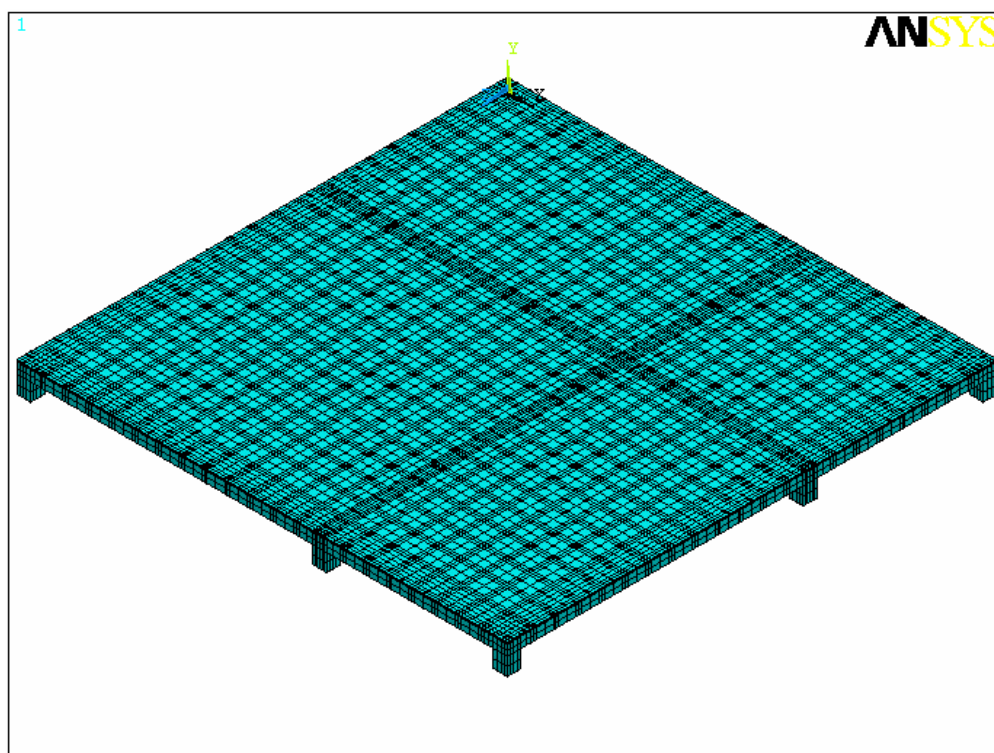


Figura 5.24 – Vista superior da malha de elementos finitos discretizada para os modelos MEF-04 e MEF-05.

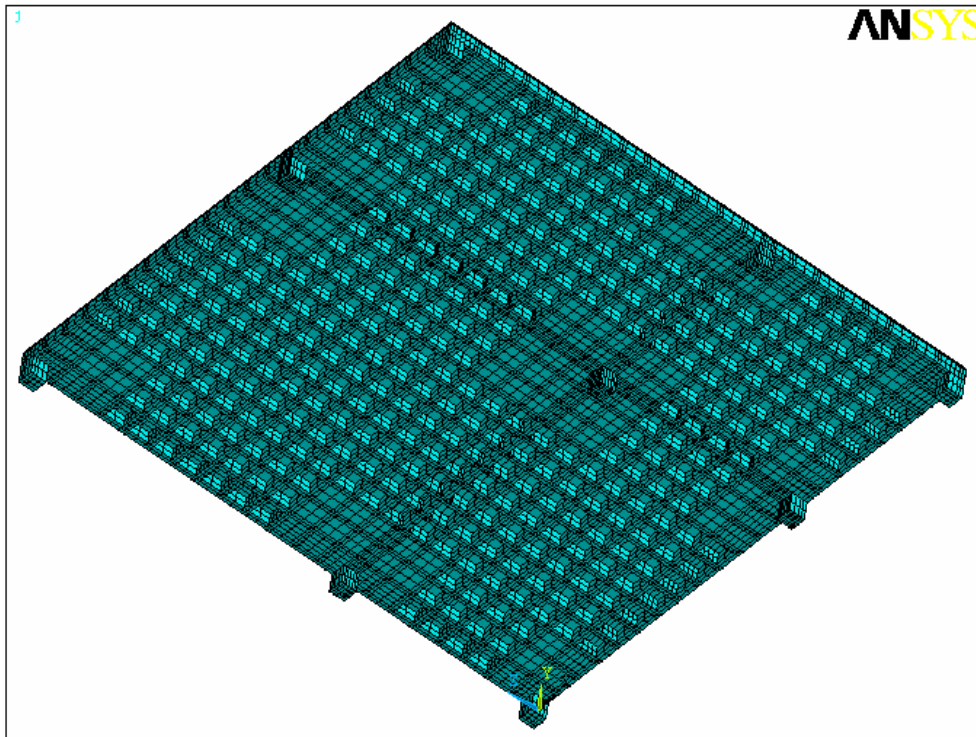


Figura 5.25 – Vista inferior da malha de elementos finitos discretizada para os modelos MEF-04 e MEF-05.

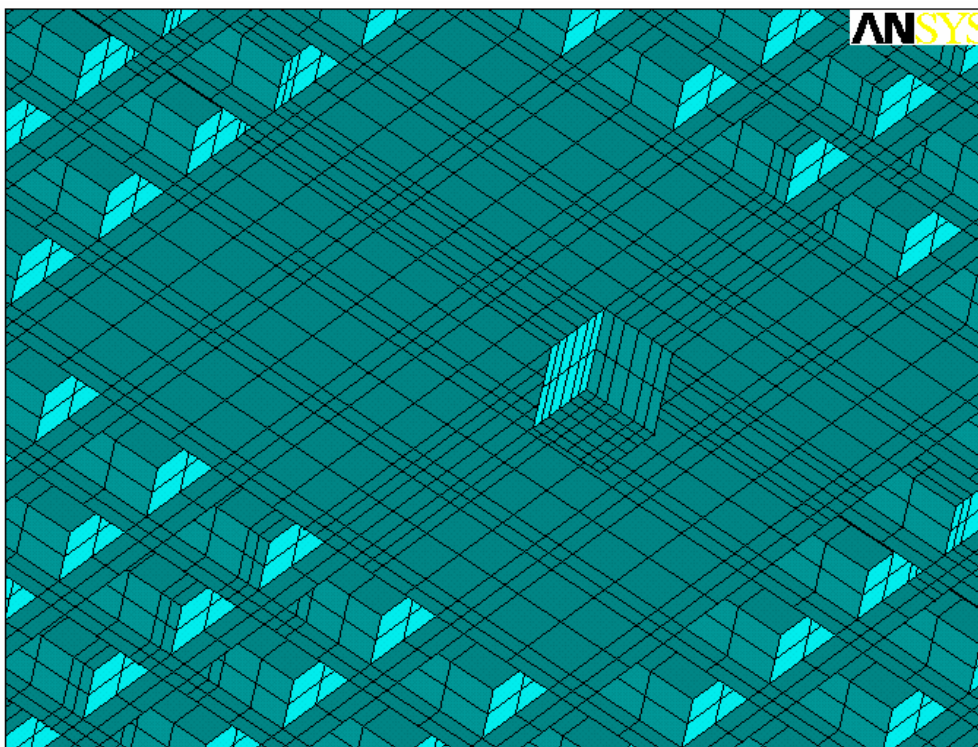


Figura 5.26 – Vista inferior da geometria e da malha de elementos finitos na região do pilar central para os modelos MEF-04 e MEF-05.

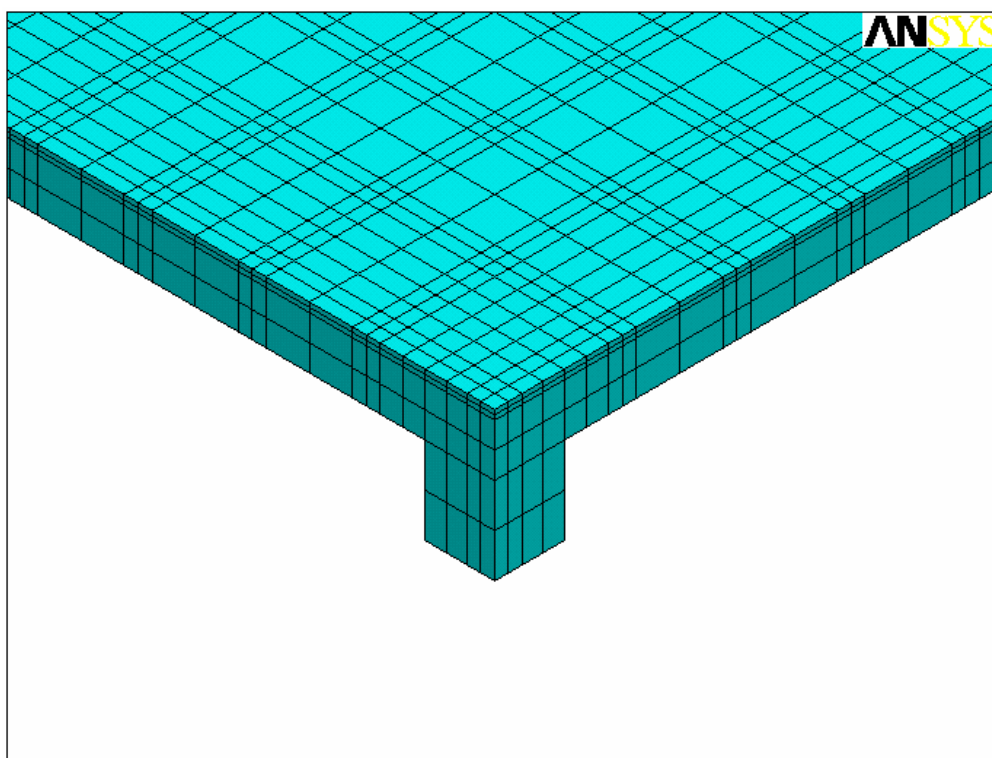


Figura 5.27 – Vista inferior da geometria e da malha de elementos finitos para um pilar de canto nos modelos MEF-04 e MEF-05.

5.5.3 Condições de Contorno da Estrutura

Para simular as condições de apoio nos modelos em elementos finitos tridimensionais foram aplicadas restrições de deslocamentos verticais na base dos pilares. Assim, devido ao sistema de coordenadas adotado essa restrição refere-se à direção “y” (UY), como mostra a Figura 5.28.

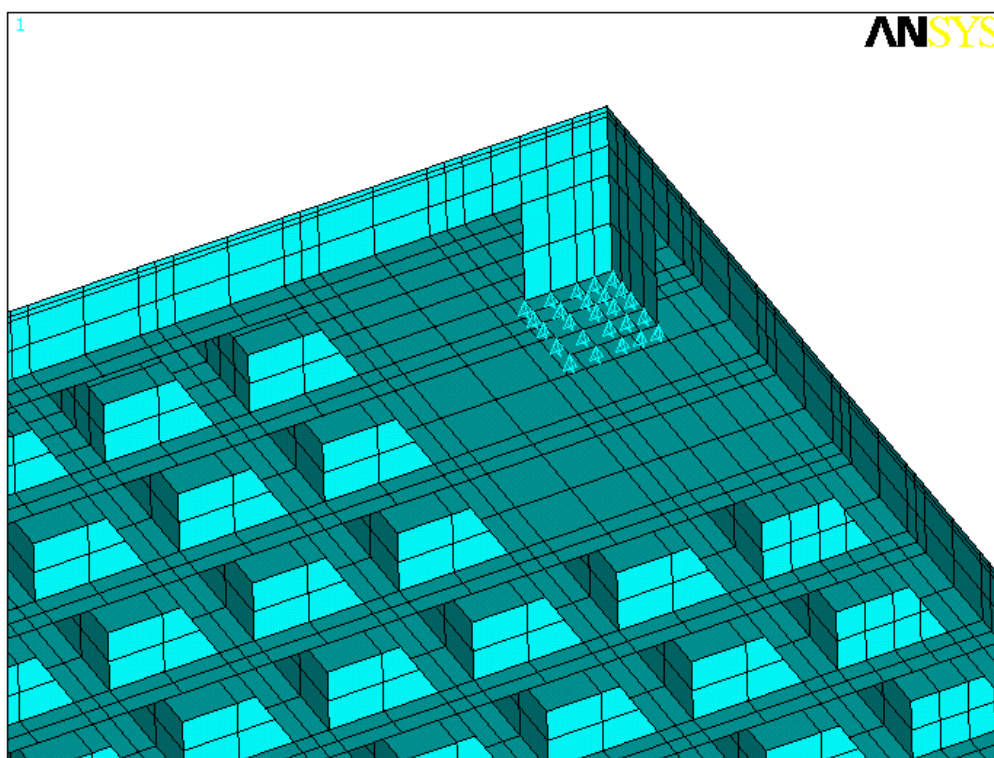


Figura 5.28 – Detalhe dos deslocamentos verticais impedidos (direção “y” - UY) para os nós dos da base dos pilares.

5.5.4 Força Aplicada à Laje

Do mesmo modo que nos casos anteriores adotou-se a carga de 5 kN/m^2 distribuída em toda a superfície da laje como carregamento padrão, possibilitando a comparação dos resultados numéricos com os experimentais.

5.5.5 Modelo Proposto MEF-04

As características gerais desse modelo, como a geometria, a malha de elementos finitos, as condições de contorno e a carga aplicada, são as mesmas para os dois modelos utilizando elementos finitos tridimensionais, variando-se apenas o módulo de elasticidade longitudinal do concreto.

Nesse modelo utilizou-se o módulo de deformação longitudinal do concreto, obtido nos ensaios do micro-concreto utilizado nas lajes experimentais: $E_c=33690,00 \text{ MPa}$.

O coeficiente de Poisson empregado para o concreto segue as prescrições da NBR 6118:2003 sendo $\nu=0,20$.

5.5.6 Modelo Proposto MEF-05

Como no modelo anterior (MEF-04), a geometria, a malha de elementos finitos, as condições de contorno e a carga aplicada são as mesmas definidas inicialmente para os modelos utilizando elementos finitos tridimensionais.

Porém, nesse modelo é adotado para o concreto o módulo de deformação longitudinal secante E_{CS} , calculado de acordo com o CEB-FIP 90. Portanto, o módulo de elasticidade empregado no modelo MEF-05 é $E=E_{CS,CEB} = 27993,041$ MPa.

O coeficiente de Poisson segue as prescrições da NBR 6118:2003, sendo $\nu=0,20$.

6 RESULTADOS

6.1 Apresentação

Neste capítulo são apresentados os resultados de deslocamentos e momentos fletores oriundos da Aplicação 02, definida no capítulo 5, os quais se referem ao modelo estrutural de laje cogumelo nervurada ensaiado por DUTRA (2005).

A análise desses resultados numéricos computacionais, comparados com os resultados experimentais da estrutura adotada como referência, e comparados aos resultados obtidos no cálculo pelo método dos Pórticos Equivalentes segundo a NBR 6118:2003, permite verificar as características, as vantagens e as desvantagens de cada modelo de cálculo.

São apresentados a seguir os resultados dos deslocamentos e momentos fletores, obtidos por meio do cálculo segundo os cinco modelos numéricos definidos no capítulo anterior, assim como os resultados obtidos experimentalmente e por meio do modelo de pórtico equivalente definido na NBR 6118:2003.

6.2 Resultados Experimentais

Como definido anteriormente os resultados experimentais adotados como referência nesta pesquisa, foram tirados de DUTRA (2005), que trata de um modelo de laje cogumelo nervurada confeccionado e ensaiado em três exemplares, construídos em micro-concreto armado.

Para a aquisição eletrônica dos dados dos ensaios foram escolhidos 15 pontos para leitura das deformações específicas, por meio de extensômetros de resistência elétrica (*strain gauges*), em cada uma das três lajes. Foram utilizados mais seis pontos para leitura dos deslocamentos verticais, por meio de defletômetros mecânicos.

Na Figura 6.1 tem-se o posicionamento dos *strain gauges* instalados na face superior de cada laje, assim como, na Figura 6.2 mostra o posicionamento dos *strain*

gauges instalados na face inferior, nas nervuras de cada laje. Na Figura 6.3 tem-se ainda o posicionamento dos defletômetros.

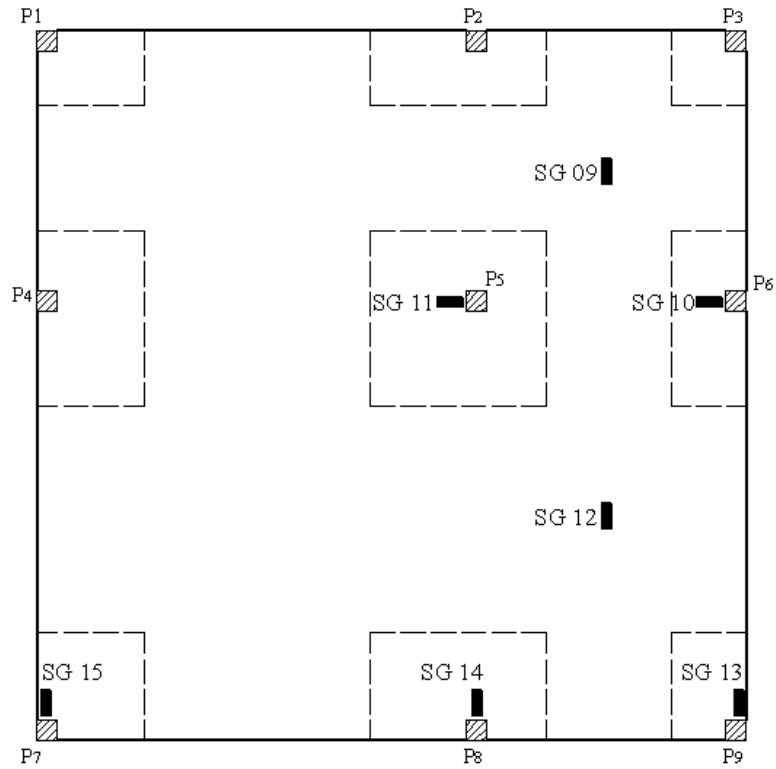


Figura 6.1 – Posição dos *strain gauges* na face superior da laje.

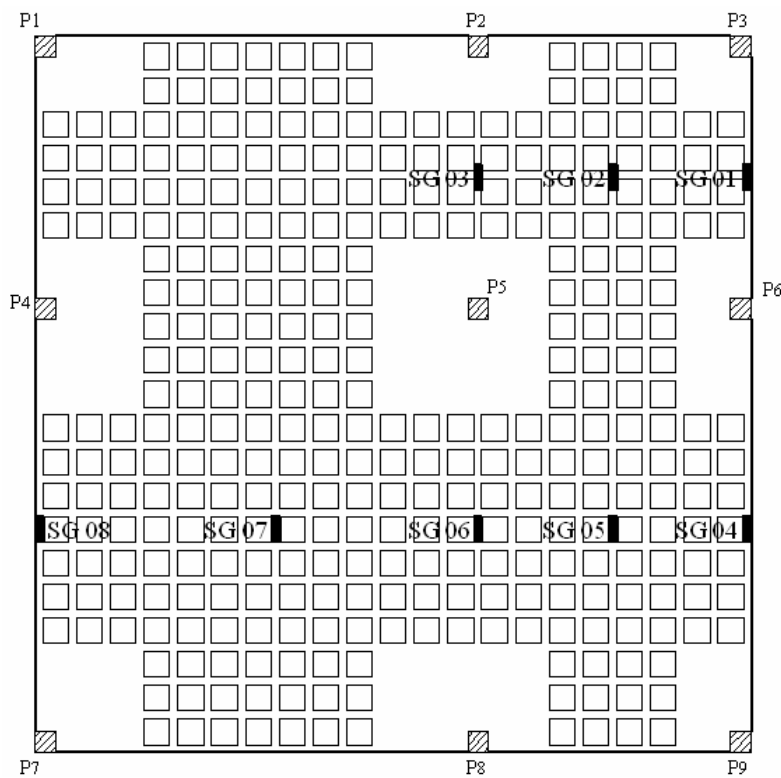


Figura 6.2 – Posição dos *strain gauges* na face inferior da laje.

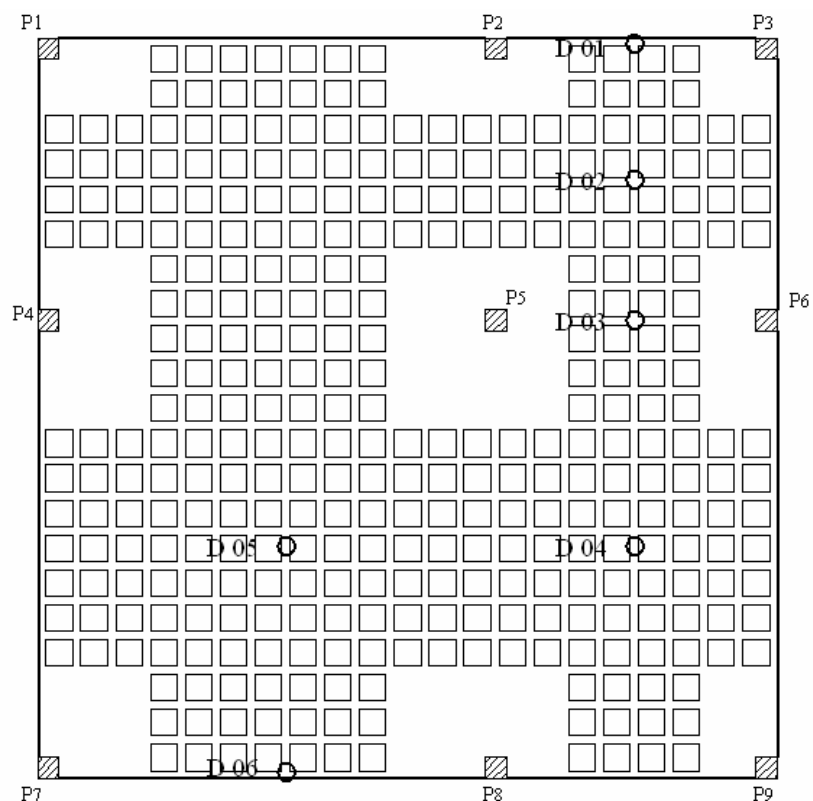


Figura 6.3 – Posição dos Defletômetros na laje.

A partir desses pontos, foram definidas três linhas, “A”, “B” e “C”, as quais contém os principais pontos de aquisição, escolhidas por conter o maior número de pontos representativos de leitura no experimento. Essas linhas são mostradas na Figura 6.4.

Os valores desses dados experimentais serão usados na comparação com os resultados numéricos, decorrentes dos modelos de cálculo propostos.

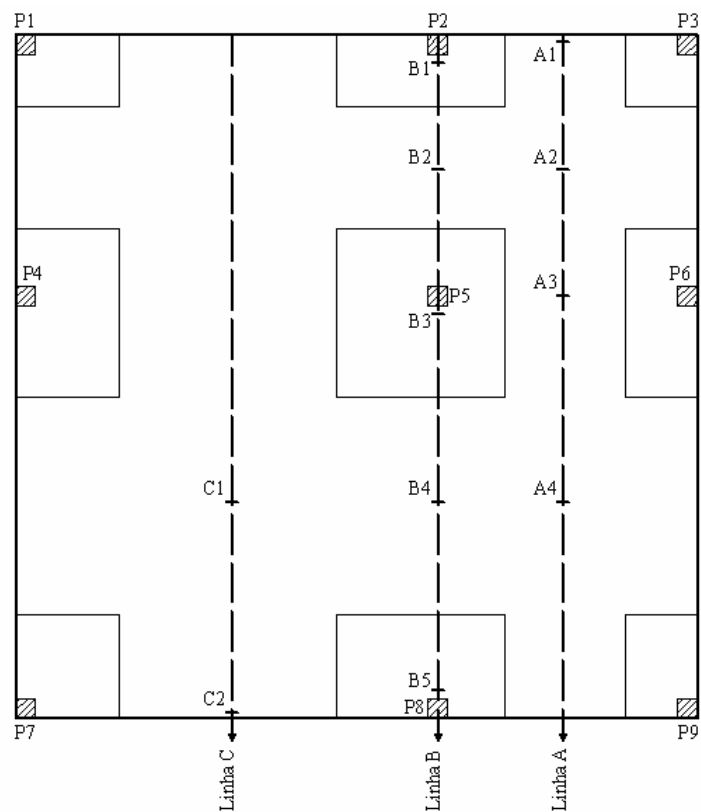


Figura 6.4 – Linhas e pontos de leituras na laje em planta.

Os resultados experimentais oriundos das leituras realizadas nos defletômetros são mostrados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Resultados experimentais de deslocamentos verticais.

Linha	Pontos	Experimental (mm)
A	A1	-0,0380
	A2	-0,0380
	A3	1,8750
	A4	2,3250
C	C1	2,7750
	C2	2,4000

Para a obtenção dos resultados experimentais dos momentos fletores, foi realizada a leitura das deformações específicas ϵ por meio dos *strain gauges* e utilizando os valores do módulo de elasticidade longitudinal do concreto e as características

geométricas da seção transversal de cada ponto onde foi medida a deformação específica. A partir destes dados empregou-se as relações fundamentais da mecânica das estruturas, dadas nas expressões (104) e (105) que resultaram nos valores de momentos fletores mostrados na Tabela 6.2.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (104)$$

$$M = \frac{\sigma \cdot I}{y} \quad (105)$$

onde

σ – é a tensão normal;

I – é o momento de inércia da seção transversal de uma nervura;

y – distância da linha neutra (baricentro da seção transversal da nervura) até a fibra na qual se deseja calcular a tensão.

Tabela 6.2 – Resultados experimentais das deformações específicas, tensões normais e momentos fletores resultantes.

Linha	Ponto	Strain gauge	ε (m/m)	σ (kgf/cm ²)	M (kN.m)/m
A	A2	SG-02 (face inferior)	-1,36E-05	-4,5700485	-1,7368229
	A2	SG-09 (face superior)	6,72E-06	2,2655177	-1,5048450
	A4	SG-05 (face inferior)	9,32E-05	31,4048073	11,9352316
	A4	SG-12 (face superior)	-4,97E-05	-16,7422455	11,1208508
B	B1	SG-10(face superior)	8,52E-06	2,8709607	-3,3602203
	B2	SG-03(face inferior)	1,99E-05	6,7184598	2,5533153
	B3	SG-11(face superior)	2,46E-05	8,2810020	-9,6922228
	B4	SG-06(face inferior)	1,08E-04	36,3515100	13,8151999
	B5	SG-14(face superior)	2,06E-05	6,9529422	-8,1378394
C	C1	SG-07(face inferior)	1,18E-04	39,6093330	15,0533184

Além dos resultados experimentais de DUTRA (2005) são utilizados os resultados de cálculo obtidos segundo o método dos Pórticos Equivalentes definido pela NBR 6118:2003. Os procedimentos que conduzem à estes resultados, estão definidos no item 3.5.1, sendo que tais resultados estão apresentados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Resultados de momentos fletores obtidos segundo o método dos Pórticos Equivalentes da NBR 6118:2003.

Linhas	Pontos	Momentos Fletores (kN.m)/m Pórtico Equiv. NBR 6118:2003
A	A2	3,7400
	A4	10,8470
B	B1	-8,6490
	B2	4,5710
	B3	-33,6620
	B4	13,2570
	B5	-30,3900
C	C1	6,5760

6.3 Resultados dos Deslocamentos para os Modelos em Elementos Finitos

Para todos os modelos em elementos finitos foram adquiridos os resultados dos deslocamentos por meio da listagem dos mesmos na direção desejada, levando-se em conta o sistema de coordenadas adotado em cada modelo. Essa listagem de deslocamentos era gerada em função dos deslocamentos nodais, referentes aos nós dos elementos que discretizavam cada modelo estrutural.

Desta forma, eram extraídos os deslocamentos dos nós referentes aos pontos onde foram adquiridos os resultados experimentais, para com isso possibilitar a comparação entre os resultados dos modelos numéricos com o modelo experimental.

6.3.1 Resultados para os Modelos com Elementos Bidimensionais e Tridimensionais

Os resultados dos deslocamento verticais (direção “z”) para os modelos com elementos bidimensionais e tridimensionais são mostrados na Tabela 6.4.

São mostrados nas Figuras 6.5 a 6.8 os deslocamentos verticais para os três modelos que utilizam elementos finitos bidimensionais e tridimensionais.

Tabela 6.4 – Deslocamento verticais (direção “z”) para os modelos com elementos bidimensionais e tridimensionais.

Linha	Pontos	Deslocamentos Verticais (mm)		
		MEF-01	MEF-02	MEF-03
A	A1	-0,012560	-0,015116	-0,013398
	A2	-0,066194	-0,069087	-0,063721
	A3	0,060136	0,072381	0,076820
	A4	1,519680	1,828950	1,796750
C	C1	3,176810	3,823300	3,743500
	C2	1,705550	2,052700	2,017500

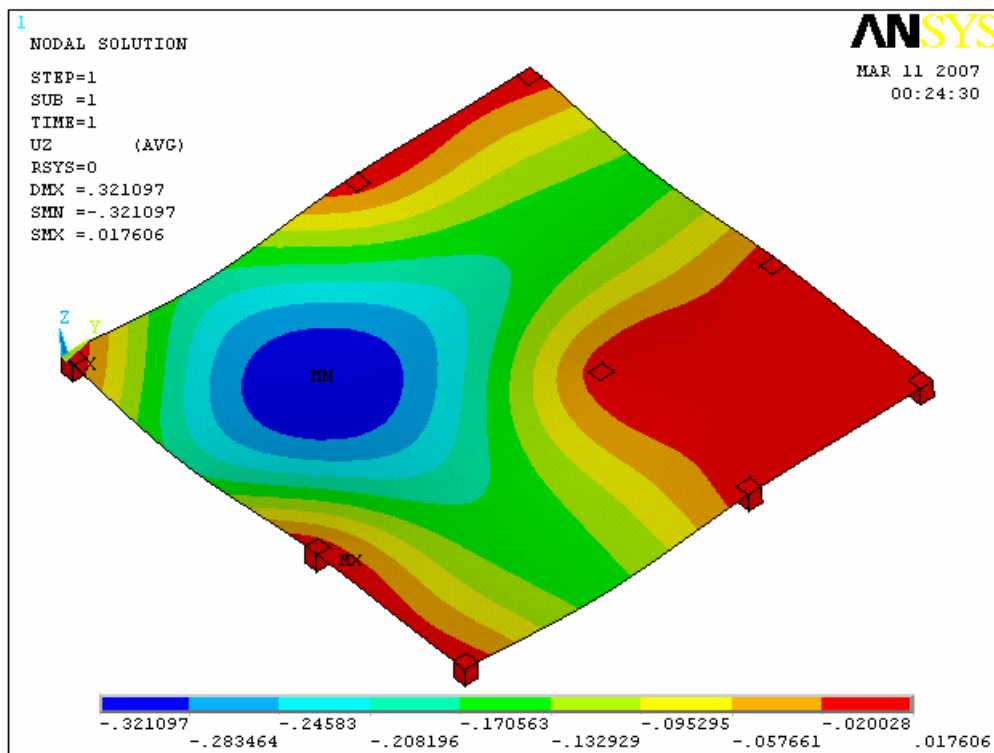


Figura 6.5 – Vista em perspectiva dos deslocamentos na direção “z” (UZ) para o modelo MEF-01.

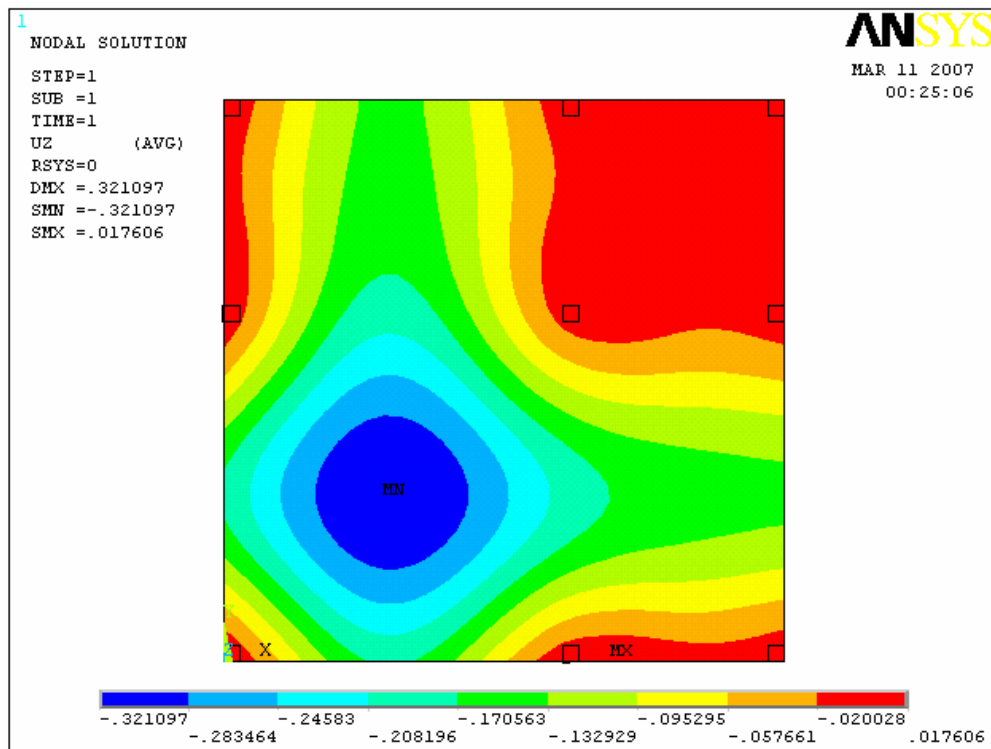


Figura 6.6 – Vista superior dos deslocamentos na direção “z” (UZ) para o modelo MEF-01.

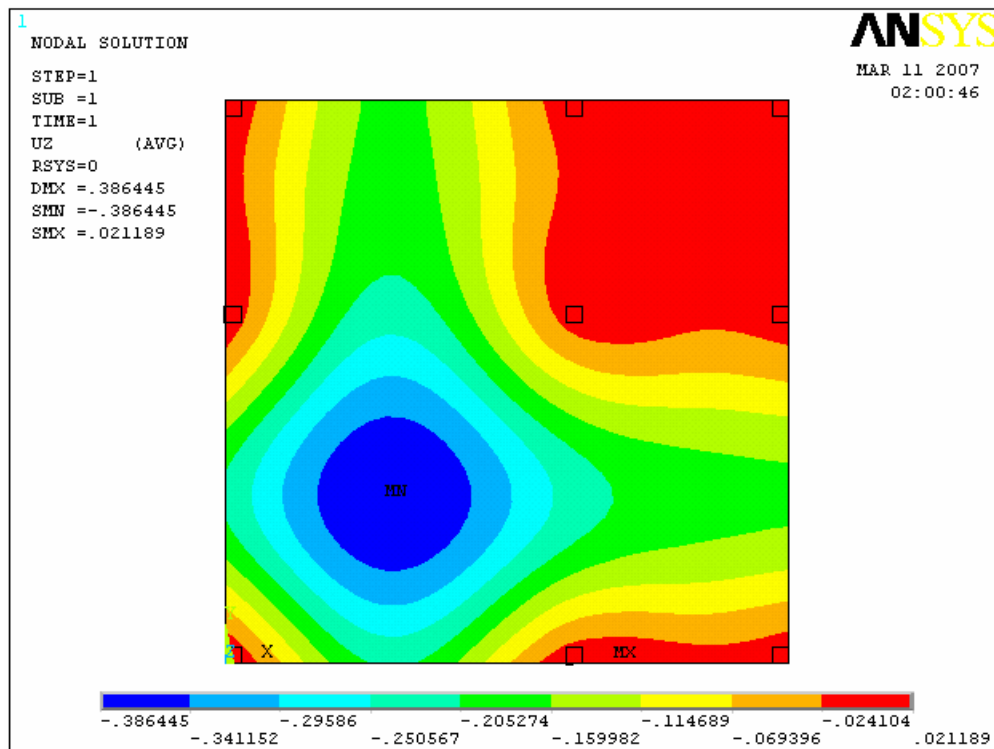


Figura 6.7 – Vista superior dos deslocamentos na direção “z” (UZ) para o modelo MEF-02.

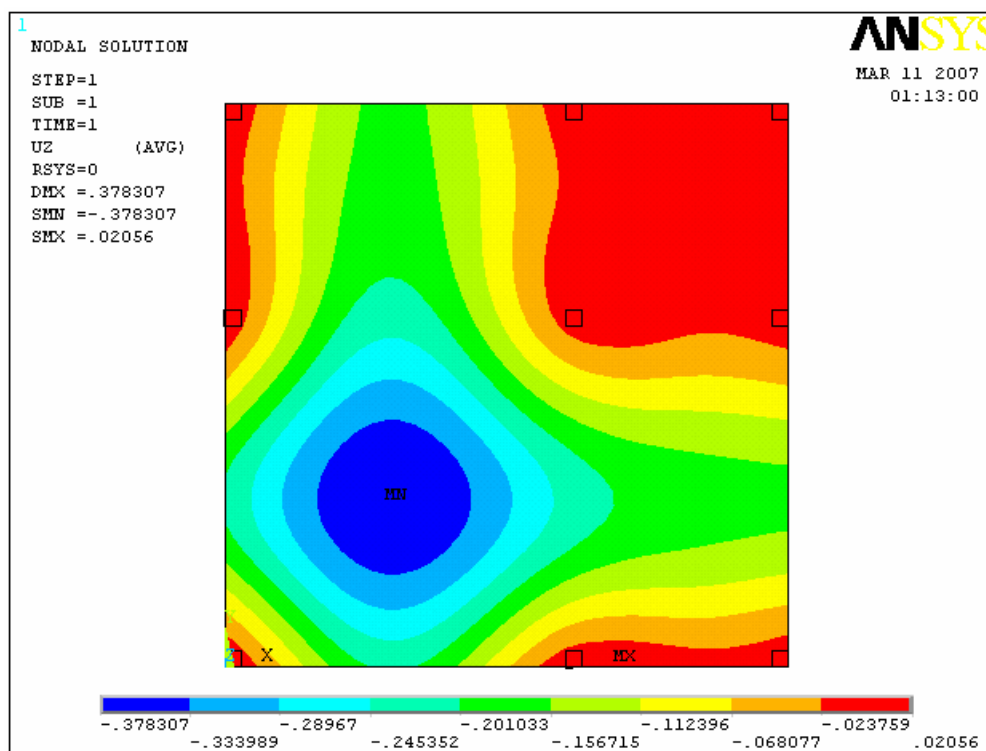


Figura 6.8 – Vista superior dos deslocamentos na direção “z” (UZ) para o modelo MEF-03.

6.3.2 Resultados para os Modelos com Elementos Finitos Tridimensionais

Os resultados dos deslocamento verticais (direção “y” de acordo com o sistema de coordenadas empregado) para os modelos com elementos bidimensionais e tridimensionais encontram-se listados na Tabela 6.5.

São mostrados nas Figuras 6.5 a 6.8 os deslocamentos verticais para os três modelos que utilizam elementos finitos bidimensionais e tridimensionais.

Tabela 6.5 – Deslocamento verticais (direção “y”) para os modelos com elementos tridimensionais.

Linha	Pontos	Deslocamentos Verticais (mm)	
		<i>MEF-04</i>	<i>MEF-05</i>
A	A1	-0,012431	-0,014961
	A2	-0,059601	-0,071731
	A3	0,063514	0,076440
	A4	1,435400	1,727500
C	C1	3,007600	3,619720
	C2	1,622600	1,952870

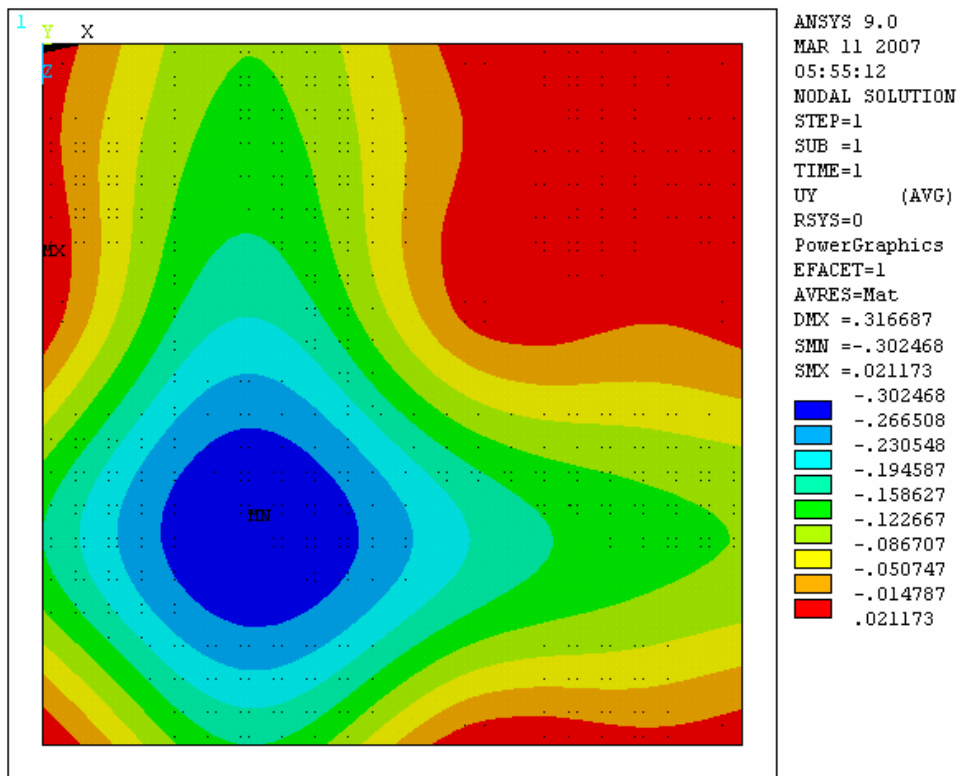


Figura 6.9 – Vista superior dos deslocamentos na direção “y” (UY) para o modelo MEF-04.

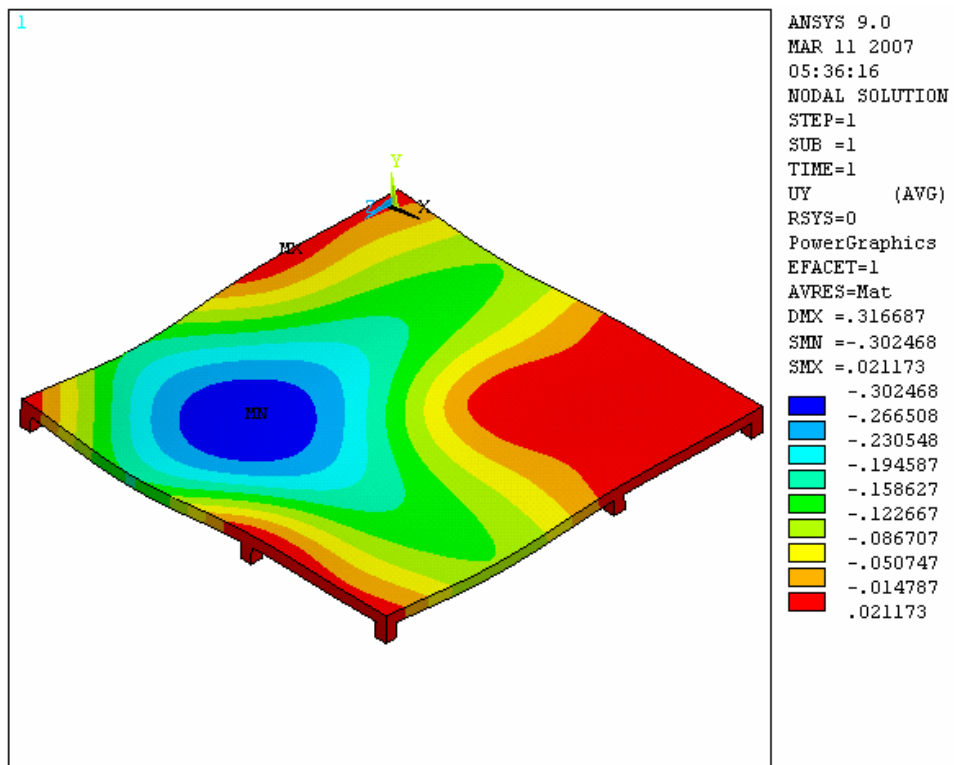


Figura 6.10 – Vista em perspectiva da face superior para os deslocamentos na direção “y” (UY) segundo o modelo MEF-04.

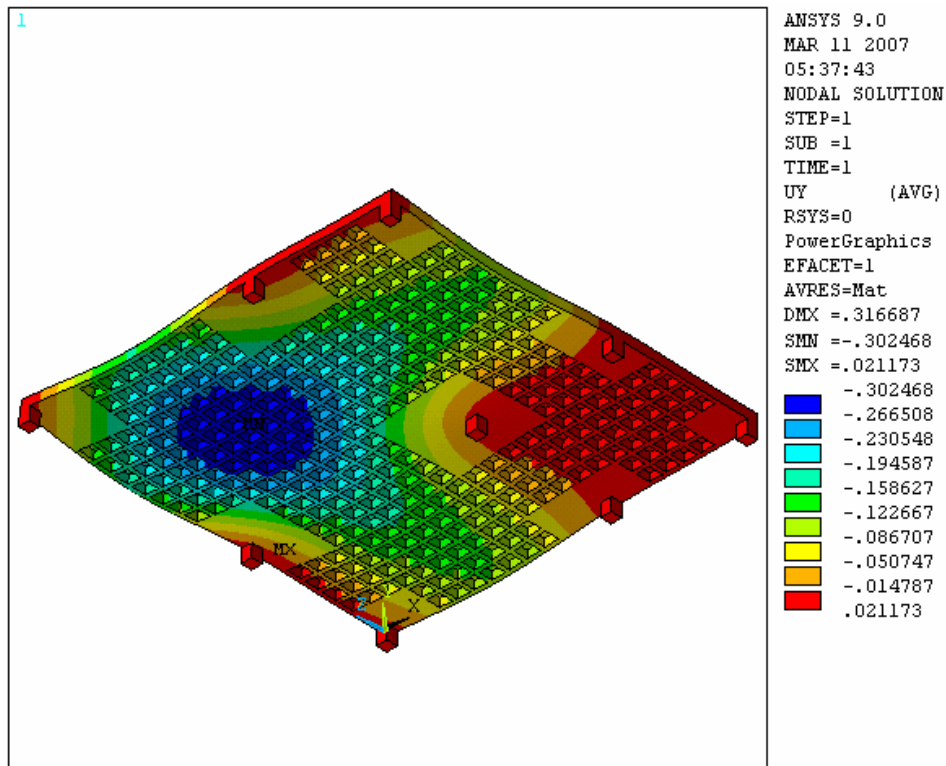


Figura 6.11 – Vista em perspectiva da face inferior para os deslocamentos na direção “y” (UY) segundo o modelo MEF-04.

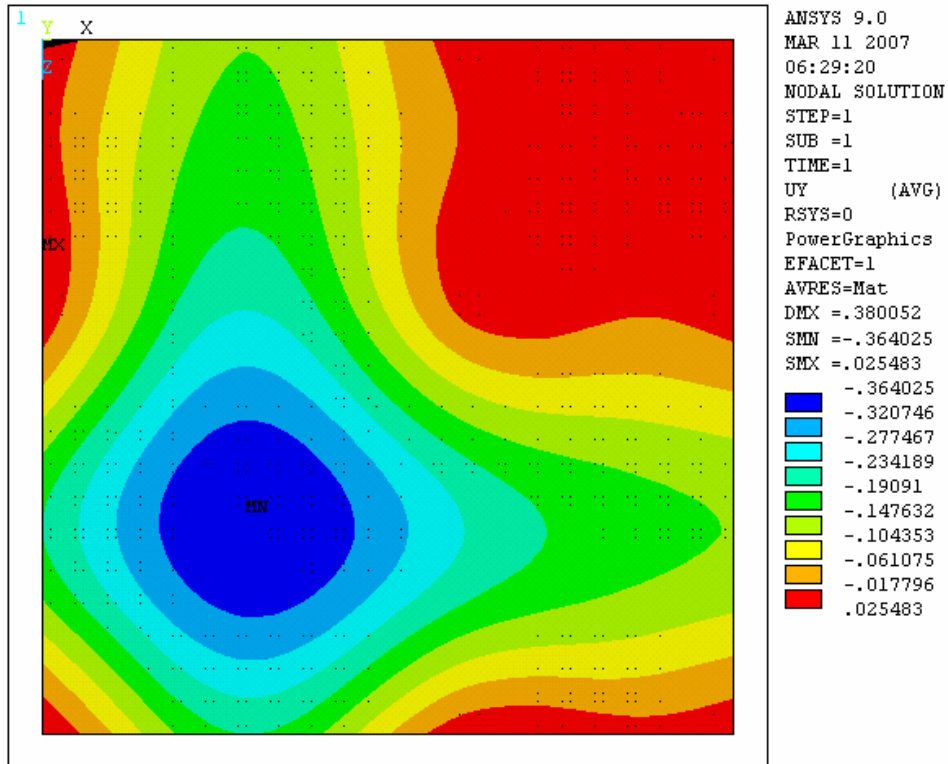


Figura 6.12 – Vista superior dos deslocamentos na direção “y” (UY) para o modelo MEF-05.

6.4 Resultados de Momentos Fletores para os Modelos em Elementos Finitos

De maneira semelhante aos deslocamentos foram adquiridos os resultados de tensões por meio da listagem das tensões nodais referentes aos nós dos elementos que discretizavam cada modelo estrutural.

Foram obtidos os valores de momentos fletores usando a expressão (105), possibilitando a comparação entre os resultados dos modelos de cálculo com o modelo experimental.

6.4.1 Resultados para os Modelos com Elementos Bidimensionais e Tridimensionais

Os resultados das tensões normais na direção “y” e seus momentos fletores resultantes, para os modelos com elementos bidimensionais e tridimensionais, encontram-se listados na Tabela 6.6.

Nas Figuras 6.13 e 6.14, são mostrados os resultados das tensões normais na direção “y”, para os modelos com elementos bidimensionais e tridimensionais.

Tabela 6.6 – Tensões normais (direção “y”) e os momentos fletores resultantes para os modelos MEF-01 e MEF-03.

Linha	Pontos	MEF-01		MEF-03	
		σ (kgf/cm ²)	M (kN.m)/m	σ (kgf/cm ²)	M (kN.m)/m
A	A2	-0,67323	-0,43706	-0,65281	-0,42380
	A4	16,01500	10,39684	15,82550	10,27382
B	B1	1,59021	0,76881	1,56686	0,75752
	B2	1,31738	0,85523	1,40717	0,91352
	B3	-21,81400	-10,54632	-21,54350	-10,41554
	B4	19,14900	12,43141	18,92450	12,28567
	B5	-8,82805	-4,26806	-8,59120	-4,15355
C	C1	16,40400	10,64938	16,16000	10,49097

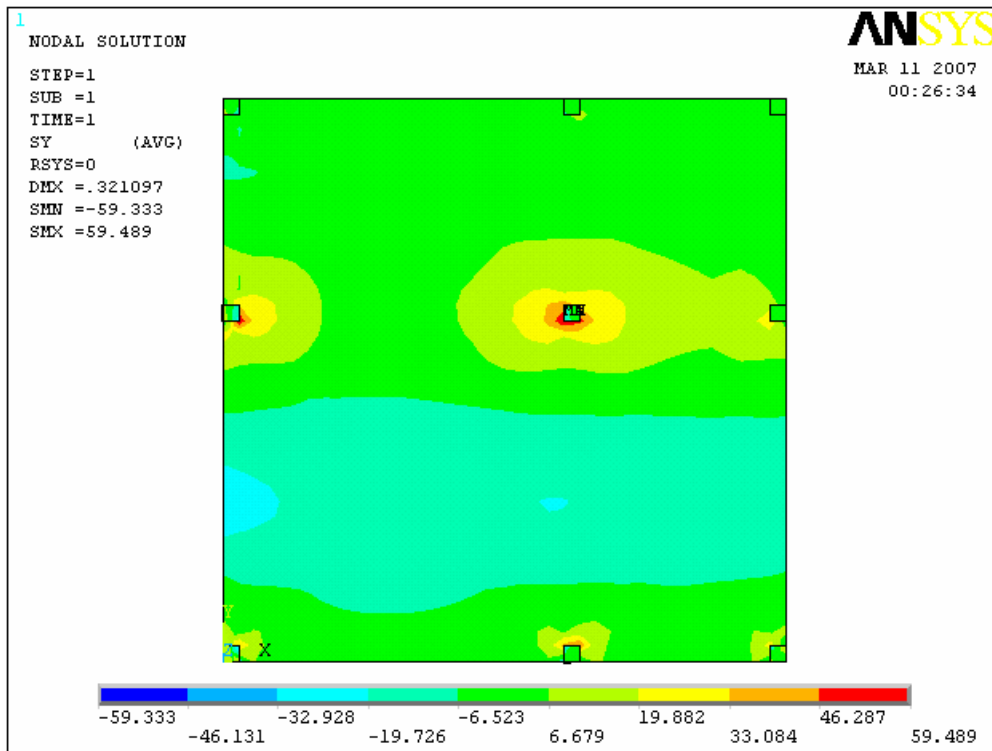


Figura 6.13 – Vista superior das tensões normais na direção “y” (SY) para o modelo MEF-01.

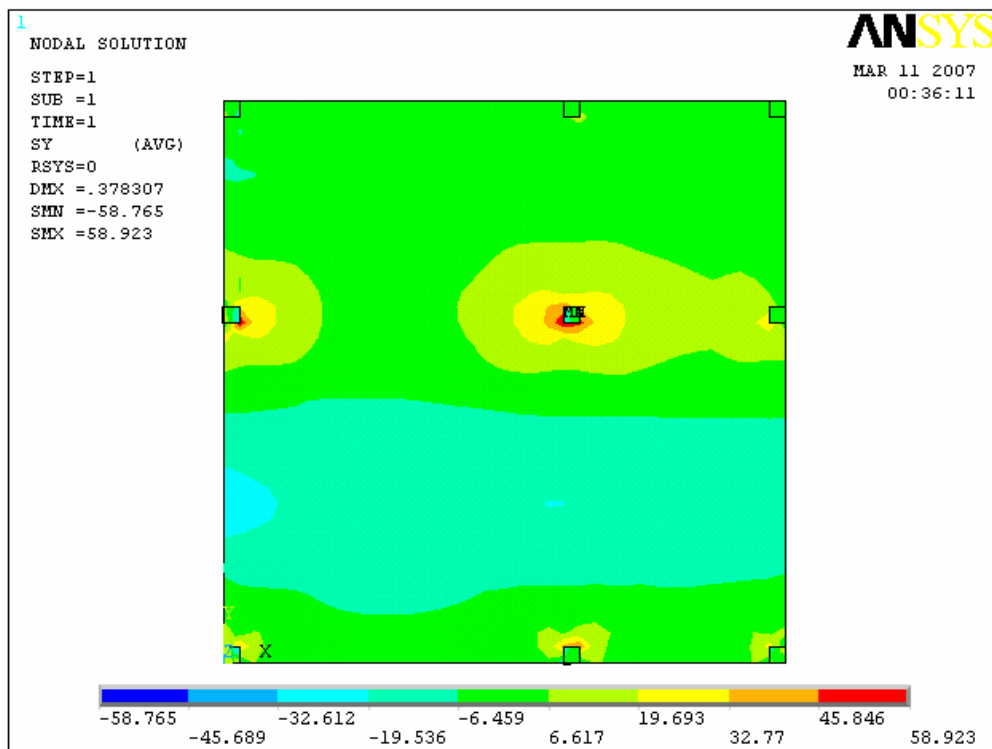


Figura 6.14 – Vista superior das tensões normais na direção “y” (SY) para o modelo MEF-03.

6.4.2 Resultados para os Modelo com Elementos Finitos Tridimensionais

Os resultados das tensões normais na direção “z” (de acordo com o sistema de coordenadas adotado para esse modelo, assim como, seus momentos fletores resultantes, para o modelo com elementos tridimensionais encontram-se listados na Tabela 6.7.

Nas Figuras 6.15 a 6.17 são mostrados os resultados das tensões normais na direção “z” para o modelo com elementos tridimensionais.

Tabela 6.7 – Tensões normais (direção “z”) e os momentos fletores resultantes para o modelo MEF-04.

Linha	Ponto	Face medida a tensão	σ (kgf/cm²)	M (kN.m)/m
A	A2	Inferior	0,0112471	0,0042744
	A2	Superior	0,1547660	-0,1028016
	A4	Inferior	25,1055000	9,5412130
	A4	Superior	-15,4688000	10,2749788
B	B1	Superior	2,4261100	-2,8395596
	B2	Inferior	6,2969900	2,3931379
	B3	Superior	21,7689000	-25,4786834
	B4	Inferior	34,1499000	12,9784896
	B5	Superior	7,3040600	-8,5487936
C	C1	Inferior	21,7433000	8,2634266

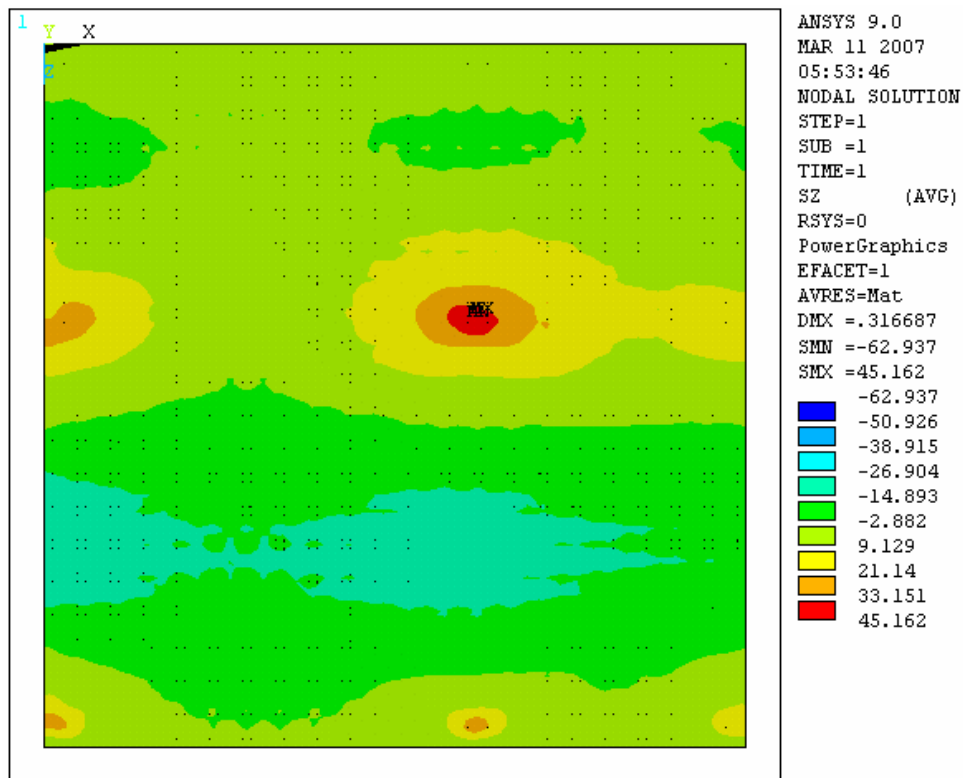


Figura 6.15 – Vista superior das tensões normais na direção “z” (SZ) para o modelo MEF-04.

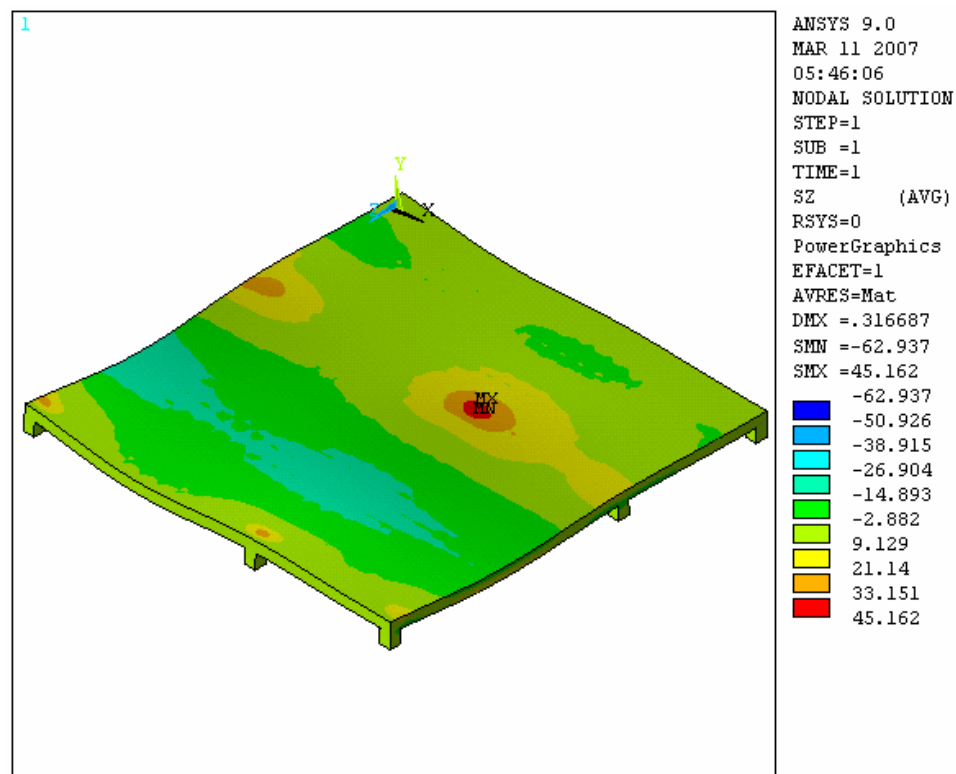


Figura 6.16 – Vista em perspectiva da face superior para as tensões normais na direção “z” (SZ) do modelo MEF-04.

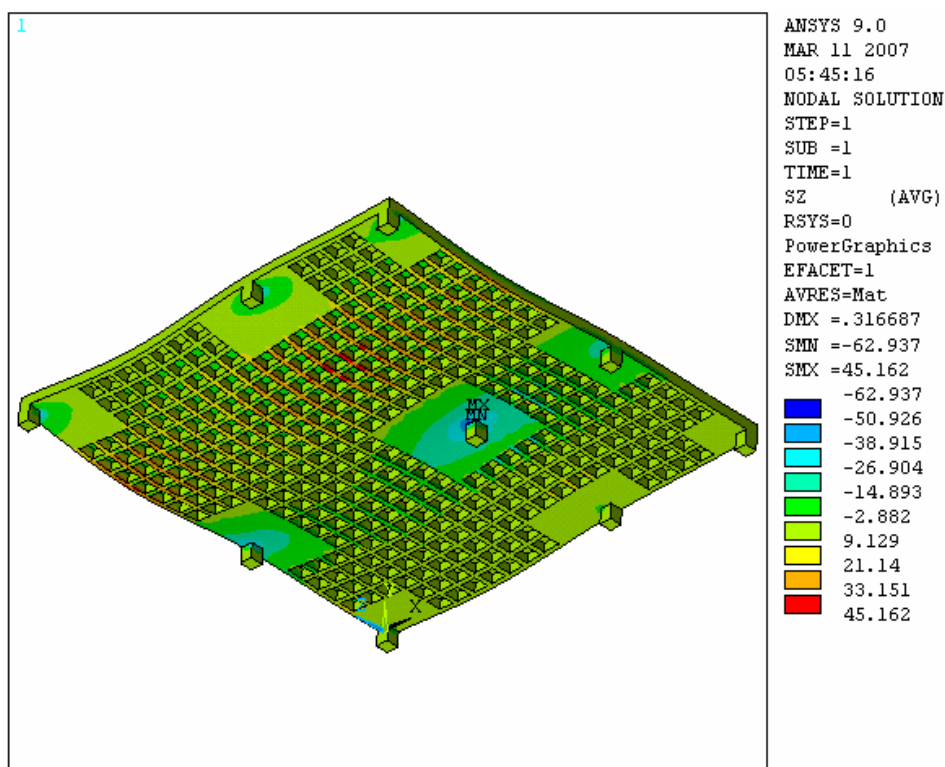


Figura 6.17 – Vista em perspectiva da face inferior para as tensões normais na direção “z” (SZ) do modelo MEF-04.

6.5 Demais Possibilidades de Análise dos Modelos Tridimensionais.

É importante destacar o potencial demonstrado pelo modelo em elementos finitos tridimensional na análise lajes cogumelo nervuradas. Como mostrado nas Figuras 10.1 e 10.2, esse tipo de simulação permite a análise de tensões mais detalhadas de modo a auxiliar em inúmeros outros problemas referentes ao dimensionamento desse tipo de laje.

O caso da punção, por exemplo, que como visto na revisão deste trabalho é tema que preocupa muitos pesquisadores por não haver consenso entre os modelos de cálculo. Para esse e outros casos a análise tridimensional pode representar uma ferramenta mais confiável a ser aplicada na fase de projeto.

7 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo são analisados os resultados apresentados no capítulo 6, de modo a gerar subsídios para as conclusões desta pesquisa.

7.1 Deslocamentos

Para possibilitar a comparação entre os deslocamentos obtidos experimentalmente, e os deslocamentos obtidos por meio dos cinco modelos de cálculo utilizados, todos estes dados foram sintetizados na Tabela 7.1. Na Tabela 7.2 e na Figura 7.1 são apresentados valores de deslocamentos teóricos divididos pelos experimentais de modo a possibilitar a análise do desempenho dos modelos propostos, ou seja, de quão próximo do experimental é cada modelo teórico.

Tabela 7.1 – Resultados experimentais e numéricos de deslocamentos

Linhas	Pontos	Deslocamentos Verticais (mm)					
		Experimental	MEF-01	MEF-02	MEF-03	MEF-04	MEF-05
A	A1	-0,0380	-0,012560	-0,015116	-0,013398	-0,012431	-0,014961
	A2	-0,0380	-0,066194	-0,069087	-0,063721	-0,059601	-0,071731
	A3	1,8750	0,060136	0,072381	0,076820	0,063514	0,076440
	A4	2,3250	1,519680	1,828950	1,796750	1,435400	1,727500
C	C1	2,7750	3,176810	3,823300	3,743500	3,007600	3,619720
	C2	2,4000	1,705550	2,052700	2,017500	1,622600	1,952870

Tabela 7.2 – Relação entre resultados de deslocamentos teóricos e experimentais.

		Teórico/Experimental				
Método		MEF-01	MEF-02	MEF-03	MEF-04	MEF-05
Pontos	A1	0,3305	0,3978	0,3526	0,3271	0,3937
	A2	1,7419	1,8181	1,6769	1,5684	1,8877
	A3	0,0321	0,0386	0,041	0,0339	0,0408
	A4	0,6536	0,7866	0,7728	0,6174	0,743
	C1	1,1448	1,3778	1,349	1,0838	1,3044
	C2	0,7106	0,8553	0,8406	0,6761	0,8137
Média		0,7689	0,879	0,8388	0,7178	0,8639
Desvio Padrão		0,6066	0,6446	0,6066	0,5459	0,6569

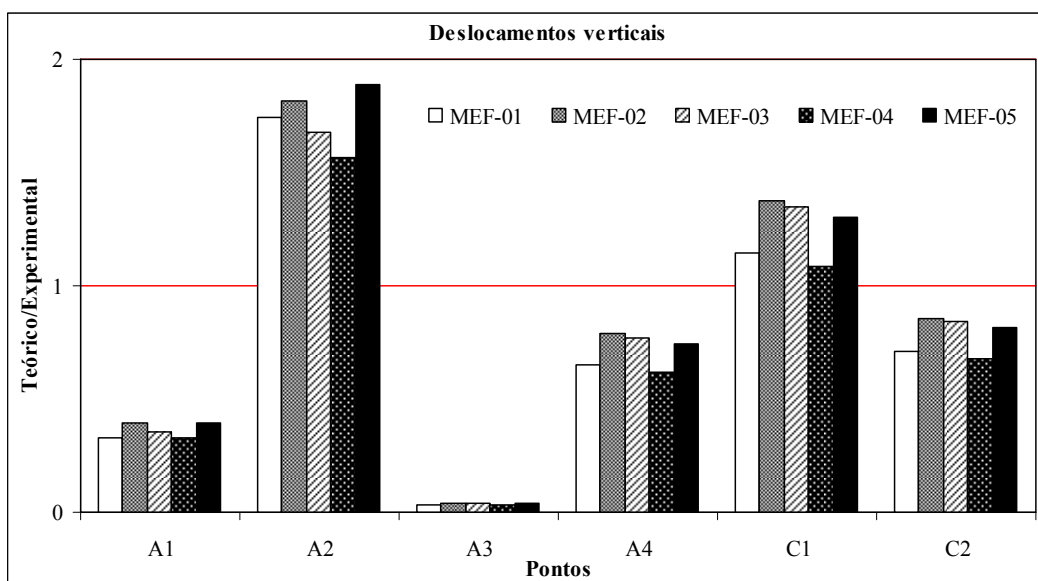


Figura 7.1 – Gráfico com a relação entre resultados dos deslocamentos teóricos divididos pelos experimentais.

O modelo MEF-04 apresenta resultados mais próximos dos experimentais para os pontos A2 e C1 em relação aos demais modelos. Entretanto, mesmo nos pontos A4 e C2 em que os modelos MEF-01, MEF-02 e MEF-03 apresentaram resultados melhores, esses resultados foram muito próximos dos resultados dos outros modelos (MEF-04 e MEF-05). Nos demais pontos, A1 e A3, os resultados dos modelos MEF-01, MEF-02 e MEF-03, comparados aos resultados dos modelos MEF-04 e MEF-05, apresentaram valores muito próximos, evidenciados pelo fato de serem valores pouco representativos.

Desta forma, é possível verificar que, embora o modelo MEF-04 em elementos finitos tridimensionais tenha apresentado resultados muito próximos dos experimentais em pontos importantes como A2 e C1, os quais definem o máximo deslocamento negativo e o máximo deslocamento positivo, respectivamente, de acordo com o experimento, a utilização deste modelo não apresenta ganhos significativos no cálculo de deslocamentos para a estrutura analisada. Tal constatação fica ainda mais evidente para o modelo MEF-05, como demonstram os resultados.

Pelos resultados apresentados, o modelo MEF-02 que utiliza o módulo de deformação longitudinal secante do concreto segundo o CEB-FIP 90, apresenta melhor nos resultados em relação ao modelo MEF-01, que utiliza o módulo de deformação longitudinal do concreto obtido experimentalmente para os pontos A1, A3, A4 e

C2. Para todos os pontos os deslocamentos resultantes do modelo MEF-02 apresentaram valores superiores aos do modelo MEF-01.

As tendências verificadas na comparação dos modelos MEF-01 e MEF-02 se mantêm na comparação entre os modelos MEF-04 e MEF-05, os quais apresentam a mesma variação de módulo de deformação longitudinal empregado nos cálculos. Do mesmo modo, é possível verificar que para os pontos A1, A3, A4 e C2 os deslocamentos do modelo MEF-05 são mais próximos dos experimentais que no modelo MEF-04, assim como, todos os deslocamentos do modelo MEF-05 apresentam valores maiores que os do modelo MEF-04.

Tais constatações indicam que a utilização do módulo de deformação longitudinal secante do concreto de acordo com o CEB-FIP 90, na análise de deslocamentos, apresenta resultados mais próximos dos experimentais do que os resultados utilizando o módulo de deformação longitudinal experimental do concreto.

De modo geral é possível verificar que para a maioria dos pontos de comparação, tanto os modelos que utilizam elementos finitos bidimensionais nas simulações, como os modelos que utilizam somente elementos finitos tridimensionais, apresentaram melhora nos resultados ao utilizar como módulo de elasticidade, o módulo de deformação longitudinal secante do concreto calculado segundo o CEB-FIP 90. É importante destacar que tal consideração resultou em deslocamentos de maior magnitude.

Pelos deslocamentos apresentados, é possível comparar os resultados do modelo MEF-02, que utiliza elementos finitos planos com altura equivalente calculada pela equivalência de momento de inércia à flexão, com os resultados do modelo MEF-03, que utiliza altura equivalente segundo o método da rigidez média. Essa comparação indica que não houve melhora significativa no cálculo de deslocamentos, ao utilizar o método da rigidez média. É importante destacar que os dois métodos mostraram ser de aplicação bastante simples.

Por fim, de acordo com as análises realizadas, é possível verificar que para a maioria dos pontos, A1, A2, A4, C1 e C2, exceto para o ponto A3, os resultados foram superiores no modelo MEF-02. Isso indica que a utilização do método da equi-

valência de momento de inércia à flexão no cálculo da altura equivalente da seção conduz a resultados de deslocamentos mais conservadores.

7.2 Momentos Fletores

Na Tabela 7.3 encontram-se sintetizados os resultados de momentos fletores, experimentais e numéricos, obtidos por meio dos modelos propostos utilizando o Método dos Elementos Finitos. Foram incluídos ainda, com o objetivo de enriquecer esta análise, os momentos fletores obtidos utilizando o Método dos Pórticos Equivalentes proposto pela NBR 6118:2003 para o cálculo da lajes cogumelo nervuradas, oriundos da pesquisa de DUTRA (2005), da qual foram obtidos os resultados experimentais usados como referência neste trabalho. Na Tabela 7.4 e no gráfico da Figura 7.2 são apresentados valores de momentos fletores teóricos divididos pelos experimentais de modo a possibilitar a análise do desempenho dos modelos propostos, ou seja, de quão próximo do experimental é cada modelo teórico.

Tabela 7.3 – Resultados experimentais e numéricos para os momentos fletores.

Linhas	Pontos	Momentos Fletores (kN.m)/m				
		Experimental	Pórtico Equiv.	MEF-01	MEF-03	MEF-04
A	A2	-1,620834	3,7400	-0,437057	-0,423797	-0,049264
	A4	11,528041	10,8470	10,396839	10,273817	9,908096
B	B1	-3,360220	-8,6490	0,768810	0,757521	-2,839560
	B2	2,553315	4,5710	0,855233	0,913524	2,393138
	B3	-9,692223	-33,6620	-10,546320	-10,415542	-25,478683
	B4	13,815200	13,2570	12,431412	12,285668	12,978490
	B5	-8,137839	-30,3900	-4,268059	-4,153550	-8,548794
C	C1	15,053318	6,5760	10,649375	10,490972	8,263427

Tabela 7.4 – Relação entre resultados dos momentos fletores teóricos e experimentais.

		Teórico/Experimental			
Método		Pórtico Equiv.	MEF-01	MEF-03	MEF-04
Pontos	A2	-2,3075	0,2696	0,2615	0,0304
	A4	0,9409	0,9019	0,8912	0,8595
	B1	2,5739	-0,2288	-0,2254	0,8451
	B2	1,7902	0,3350	0,3578	0,9373
	B3	3,4731	1,0881	1,0746	2,6288
	B4	0,9596	0,8998	0,8893	0,9394
	B5	3,7344	0,5245	0,5104	1,0505
	C1	0,4368	0,7074	0,6969	0,5489
Média		1,4502	0,5622	0,5570	0,9800
Desvio Padrão		1,9396	0,4295	0,4228	0,7414

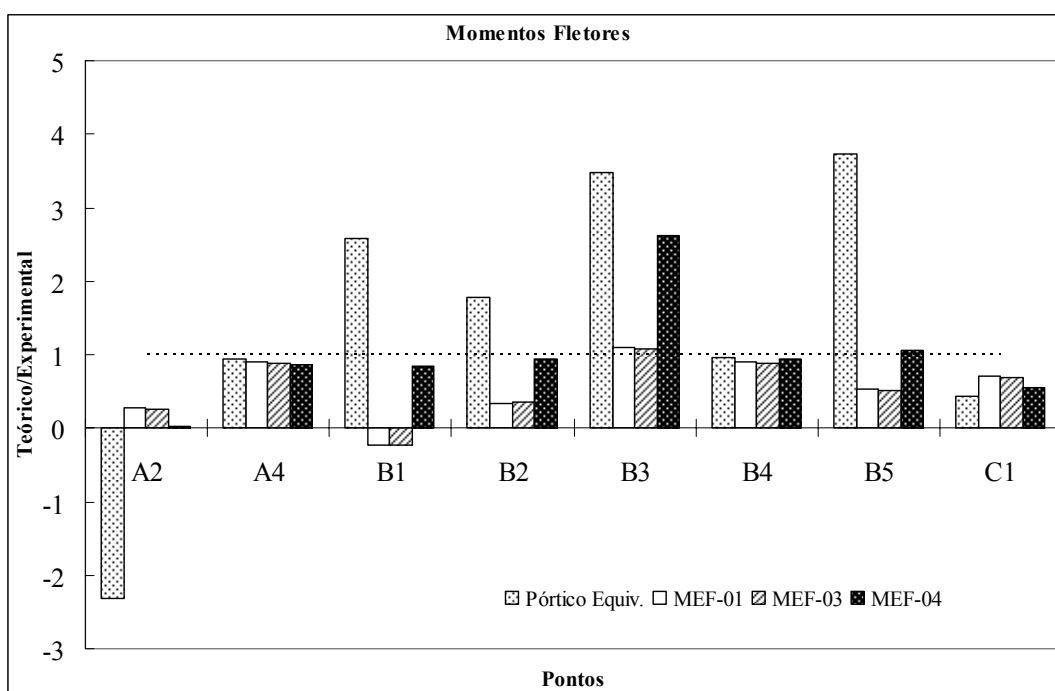


Figura 7.2 – Gráfico com a relação entre resultados dos momentos fletores teóricos divididos pelos experimentais.

A partir da comparação entre o modelo MEF-01 que utiliza elemento finito plano com altura equivalente calculada pela equivalência de momento de inércia à flexão, e o modelo MEF-03 que utiliza altura equivalente segundo o método da rigidez média, se pode verificar que o modelo MEF-01 apresenta melhora nos resultados de momento fletor para a maioria dos pontos, A2, A4, B1, B4, B5 e C1, tomando como referência os valores dos resultados experimentais de momento fletor.

Adotando-se como referência os resultados do modelo de Pórtico Equivalente proposto pela NBR 6118:2003, ambos os métodos, MEF-01 e MEF-03 apresentaram melhoras significativas em seus resultados.

Verifica-se, portanto, para a estrutura analisada, que o método de cálculo da altura equivalente por meio da equivalência de momento de inércia à flexão apresenta melhor desempenho na determinação de momentos fletores para esse tipo de estrutura, do que o método da rigidez média.

O modelo de cálculo MEF-04 que utiliza a modelagem tridimensional da estrutura, apresentou melhoras bastante relevantes para os pontos B1, B2, B4 e B5, com valores de momento fletor muito próximos dos experimentais. Para esses pontos as

discrepâncias apresentadas pelos demais métodos são extremamente significativas, gerando-se dúvidas na confiabilidade dos mesmos.

Para os demais pontos, A2, A4 e C1, embora o modelo MEF-04 não tenha apresentado melhor desempenho quando comparado aos modelos que utilizam elementos de finitos bidimensionais (MEF-01 e MEF-03), se comparado aos resultados do modelo de Pórtico Equivalente estabelecido pela NBR 6118:2003, apresenta valores bem mais coerentes, justificando sua utilização na análise desse tipo de estrutura.

Embora o modelo MEF-04 não tenha apresentado valores mais próximos dos experimentais do que os demais métodos de cálculo para o ponto A4, é possível verificar que os valores dos momentos fletores para todos os métodos são muito próximos dos experimentais, com pouca variação entre os métodos, ou seja, se pode considerar satisfatório o resultado do modelo MEF-04 em relação à esse ponto.

Nesta análise se pode verificar que o modelo MEF-04 apresentou resultado incoerente somente para o ponto B3. Nesse ponto o valor do momento fletor apresentado foi da ordem de uma vez e meia maior do que o momento fletor obtido experimentalmente. Entretanto, como já foi destacado, mesmo para esse ponto o resultado do modelo MEF-04 foi mais coerente que o modelo de Pórtico Equivalente.

Quanto ao ponto B3, por se tratar de um ponto localizado na região do pilar central da laje, em que a medida experimental foi realizada na face superior da laje, muito próxima do pilar, o resultado numérico pode estar identificando certa concentração de tensões, que de acordo com o princípio de Saint-Venant pode estar distorcendo os resultados. A verificação dessa hipótese poderia ser feita por meio de estudos mais aprofundados para as regiões de ligação dos pilares com a laje, propondo metodologia como, por exemplo, para o refinamento de malha nestas regiões, possibilitando resolver tais problemas, assim como, contribuir para outros estudos quanto à punção.

É importante observar que o modelo de Pórtico Equivalente apresenta discrepâncias bastante significativas em relação aos resultados experimentais, principalmente para os pontos A2, B1, B2, B3, B5 e C1, o que mostra ser esse um método extremamente incoerente. Situação semelhante ocorre com os métodos MEF-01 e

MEF-03, que embora apresentem desempenho muito superior ao método dos Pórticos Equivalentes, para os pontos B1, B2, B5 e C1, apresentam certas incoerências.

Por fim, é importante destacar que o modelo que utiliza elementos finitos tridimensionais (MEF-04) apresenta evidente melhora nos resultados de momentos fletores em relação aos modelos com elementos finitos bidimensionais (MEF-01 e MEF-03), tomando-se como parâmetros os resultados experimentais.

8 CONCLUSÕES

8.1 Conclusões

Com base nos objetivos propostos e por meio das inúmeras análises realizadas, é possível concluir que:

- a) Os modelos de cálculo em elementos finitos tridimensionais propostos para a análise de lajes cogumelo nervuradas apresentaram ganhos pouco significativos na determinação dos deslocamentos.
- b) Os modelos de cálculo em elementos finitos tridimensionais propostos apresentaram melhoras bastante significativas no cálculo de momentos fletores, mostrando-se muito superiores aos modelos com elementos finitos bidimensionais e principalmente em relação ao modelo de pórticos equivalentes da NBR 6118:2003.
- c) A utilização do módulo de deformação longitudinal secante do concreto de acordo com o CEB-FIP 90 para o cálculo de deslocamentos, apresenta resultados mais próximos dos experimentais do que os resultados de cálculo utilizando o módulo de deformação longitudinal experimental do concreto.
- d) O método da rigidez média da laje comparado ao método da equivalência de momento de inércia à flexão, para o cálculo da altura equivalente da seção, não apresenta melhora significativa no cálculo de deslocamentos das lajes cogumelo nervuradas.
- e) O método da equivalência de momento de inércia à flexão resulta em deslocamentos maiores do que o método da rigidez média da laje, ocasionando um dimensionamento mais conservador.
- f) O método de cálculo da altura equivalente por meio da equivalência de momento de inércia à flexão apresenta melhores resultados no cálculo de momentos fletores do que o método da rigidez média da laje.

- g) Os modelos de cálculo em elementos finitos bidimensionais implementados, apresentam desempenho satisfatório no cálculo de deslocamentos, e mesmo inferiores aos modelos tridimensionais no cálculo de momentos fletores, apresentam melhores resultados que o modelo de pórtico equivalente definido pela NBR 6118:2003.

8.2 Demais Conclusões

- a) Os modelos de cálculo em elementos finitos tridimensionais propostos para a análise de lajes cogumelo nervuradas demonstraram um grande potencial na análise de tensões em lajes cogumelo nervuradas, podendo trazer enorme contribuição para outros casos, como na análise da punção nas lajes, e na análise da torção nas nervuras.
- b) Dentre os métodos de cálculo analisados, o Método dos Elementos Finitos é o que apresenta melhor potencial na análise de lajes cogumelo nervuradas.
- c) Ao utilizar o Método nos Elementos Finitos se deve sempre realizar a análise de convergência de resultados, principalmente para o campo das tensões, que apresentou convergência mais lenta que para os deslocamentos.
- d) O modelos em elementos finitos tridimensionais que discretizam em detalhes à estrutura, possibilitam a análise das tensões na capa de concreto entre as nervuras, fornecendo automaticamente subsídios para seu dimensionamento.

8.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

- a) Realizar análise não-linear de lajes cogumelo nervuradas, por meio da modelagem tridimensional, via Método dos Elementos Finitos.
- b) Estudar a influência da laje no conjunto estrutural de edifícios.
- c) Estudar os modelos em elementos finitos tridimensional propostos para a análise da punção.

- d) Estudar os modelos em elementos finitos tridimensional propostos para a análise da torção nas nervuras.

9 BIBLIOGRAFIA

ABDUL-WAHAB, H. M. S., KHALIL, M. H. - **Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs**. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126, n. 2, p.219-227, 2000.

ACCETTI, K. M.; PINHEIRO, L.M. **Verificação da Punção em Lajes Conforme a Revisão da NB-1/99**. In: 41º Congresso Brasileiro do Concreto, Salvador, BA. 1999. 49p.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-95)**. Detroit, 1995.

ALBUQUERQUE, A. T.; PINHEIRO, L. M. **Análise de alternativas estruturais para edifícios**. In: 40º Congresso Brasileiro do Concreto, 1998, Rio de Janeiro. Anais... 13p.

ALMEIDA, F.P.A. **Análise Comparativa de Resultados de Diferentes Discretizações para as Lajes de Pavimentos Utilizando os Elementos Finitos DKT e P15N**. São Carlos: Universidade de São Paulo, 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia) Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, 1999.

ANDRADE, M. A. S. **Punção em Lajes Cogumelo – Estudo do Posicionamento da Armadura de Cisalhamento em Relação à Armadura de Flexão**. Goiânia, Dissertação (Mestrado em engenharia) – Escola de Engenharia Civil / UFG.1999.

ANDRADE, M.A.S.; GOMES, R.B. **Lajes Cogumelo – Influência do Posicionamento da Armadura de Cisalhamento em relação à Armadura de Flexão**. In: 41º Congresso Brasileiro do Concreto, Salvador, BA. 1999.

ANSYS User's Manual (Version 9.0), Swanson Analysis Systems Inc., Houston, 2005.

ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**. Volumes 1 a 4. 2ª.edição, Ed. Dunas, Rio Grande, 2003.

ARAÚJO, J. M. **O Módulo de Deformação Longitudinal do Concreto**. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.1, p.9-16, 2000.

ARAÚJO, J. M. **Avaliação dos procedimentos de projeto das lajes nervuradas de concreto armado**. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.3, p.15-25, 2003. p. 31-42.

ARAÚJO, J. M. **Análise não-linear de lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado.** Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n.52, p.43-52, Lisboa, 2003.

ARAÚJO, J. M. **Considerações sobre a rigidez à torção das lajes nervuradas de concreto armado.** Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.7, p.1-8, 2005.

ARAÚJO, J. M. **A rigidez equivalente das lajes nervuradas de concreto armado.** Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.8, p.1-9, 2006.

ARAÚJO, J. M. **Modelo bilinear para análise de lajes de concreto armado.** Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.8, p.11-19, 2006.

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos.** Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 1999.

ASSAN, A. E. **Métodos Energéticos e Análise Estrutural.** Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 1996.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto:** NBR 6118:2003. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto e execução de obras de concreto armado:** NBR 6118:1978. Rio de Janeiro, 1978.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Cargas para o cálculo de estruturas de edificações:** NBR 6120:1980. Rio de Janeiro, 1980.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Concreto - Determinação do módulo de deformação estática e diagrama – Tensão de deformação – Método de ensaio:** NBR 8522:1984. Rio de Janeiro, 1984.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Laje pré-fabricada – Requisitos – Parte 1: Lajes unidirecionais:** NBR 14859-1:2002. Rio de Janeiro, 2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Laje pré-fabricada – Pré-laje - Requisitos – Parte 1: Lajes unidirecionais:** NBR 14860-1:2002. Rio de Janeiro, 2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Laje pré-fabricada – Requisitos – Parte 2: Lajes bidirecionais:** NBR 14859-2:2002. Rio de Janeiro, 2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Laje pré-fabricada – Pré-laje - Requisitos – Parte 2: Lajes bidirecionais**: NBR 14860-2:2002. Rio de Janeiro, 2002.

AZEVEDO, A. P.; HANAI, J. B. **Resistência e ductilidade das ligações laje-pilar em lajes-cogumelo de concreto de alta resistência armado com fibras de aço e armadura transversal de pinos**. In: 41º Congresso Brasileiro do Concreto, 1999, Salvador. Anais... 16p.

BAYKOV, V.N.; SIGALOV, E.E. **Estructuras de Hormigon Armado**. Moscou, 2ª Edición, Editorial Mir, 1986, 686p.

BOROWSKI, G.C. **Cálculo de Deslocamentos em Lajes Nervuradas**. In: Proceedings of the Congresso de Pontes e Estruturas – ABPE. Rio de Janeiro, 2005.

BOROWSKI, G.C. **Cálculo de Deslocamentos em Lajes Nervuradas**. Santa Maria: UFSM, 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de Santa Maria, 2005.

BREBBIA, C. A.; FERRANTE, A. J. **Computational Methods for the solution of engineering problems**. New York, Crane Russak, 1978, 353p.

BREBBIA, C. A.; FERRANTE, A. J. **The Finite Element Technique**. Editora da ufrgs, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 1975, 410p.

BUCHANAN, G. R. **Finite Element Analysis**. Department of Civil Engineering. Tennessee Technological University. Cookeville, Tennessee. McGraw-Hill, 1995.

CABRAL, S. V. S.; NETO, A. T. L.; BOTH, A. A., KLEIN, D. L. et al. **Análise numérico-experimental de uma laje cogumelo nervurada submetida a um carregamento uniformemente distribuído**. Relatório de pesquisa. Porto Alegre: UFRGS, 1998. 113p.

CARVALHO, B.A.; VASCONCELOS FILHO, A. **Modelo para Análise Estrutural Evolutiva de Edifícios de Andares Múltiplos com Lajes Lisas**. In: XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto, 2003.

CARVALHO, R.C.; FIGUEIREDO FILHO, J.R. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado – Segundo a NBR 6118:2003**. 2.ª Edição, Ed. UFSCar, São Carlos, 2004.

CARVALHO, C.R.; FIGUEIREDO FILHO, J.R.; FURLAN JR, S.; MESQUITA, V.V. **Escolha da Altura de Lajes com Nervuras Pré-Moldadas para Pavimentos de Edificações Considerando as Verificações do Estado Limite Último e de De-**

formação Excessiva. In: XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, 2000.

CEB-FIP 90 **Comité Internacional du Béton – Model Code 1990:** Final Draft, Bulletin D' information, Lausanne.

CHANA, P. S. **Purching Shear in Concrete Slabs.** The Structural Engineer, London, v.69, n.15, p.282-285, 1991.

COELHO, A. E. G.; MELO, G. S. S. A. **Comportamento de lajes cogumelo de concreto armado com estribos inclinados ao puncionamento.** In: 41° Congresso Brasileiro do Concreto, Salvador. 1999.

CORTIVO, N.D.; MELO, G.S.; MELLO, E.L. **Uma Comparação entre Métodos de Dimensionamento de Lajes Cogumelo de Concreto Armado.** In: Computational Methods in Engineering, 1999.

DIAS, R.H. **Análise Numérica de Pavimentos de Edifícios em Lajes Nervuradas.** Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de São Carlos, 2003.

DIAS, R.H.; PAIVA, J.B.; GIONGO, J.S. **A Consideração Numérica da Excentricidade entre os Eixos das Nervuras e o Plano Médio da Capa em Lajes Nervuradas e os Efeitos nos Esforços dos Enrijecedores.** In: XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto, 2003.

DIAS, R.H.; GIONGO J.S.; PAIVA, J.B. **Análises Numéricas de Laje Nervurada sem Vigas considerando Diferentes Modelos Mecânicos.** In: 43° Congresso Brasileiro do Concreto, 2001.

DONIN, C; RIZZATTI, E.; DUTRA, C.; GOMES, H.M.; PISONI, M. **Simulação Computacional de Lajes Cogumelo Nervuradas.** In: Proceedings of the Congresso de Pontes e Estruturas – ABPE. Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, Rio de Janeiro, 2005.

DUARTE, H. **Aspectos da Análise Estrutural das Lajes de Edifícios de Concreto Armado.** São Carlos: Universidade de São Paulo, 1998, 83p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1998.

DUTRA, C. **Análise Teórica e Experimental de Lajes Cogumelo Nervuradas em escala reduzida.** Santa Maria: UFSM, 2005. 194p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de Santa Maria, 2005.

EUROCODE N° 2. **Design of Concrete Structures: EC2.** 1990.

FERREIRA, A.M. **Análise da Punção e Flechas em Lajes Maciças sem Vigas de Concreto Armado de Acordo com as Prescrições da NBR 6118:2003**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de São Carlos, 182p., 2005.

FIGUEIREDO F^o, J. R.; CARVALHO, R. C.; FURLAN JR., S. **Punção nas lajes sem vigas: a proposta da revisão da norma brasileira e resultados experimentais**. In: Congresso Técnico-Científico de Engenharia Civil, 1996, Florianópolis. Anais... V. 5, p. 830-839.

GERE, J.; WEAVER Jr., W. **Análise de Estruturas reticuladas**. Ed. Guanabara, Rio de Janeiro, Van Nostrand Reinhold, 1987. 443p.

GHAVAMI, K.; KHEDMATI M.R. **Collapse behaviour of stiffened plates in compression: experimental investigations versus finite element simulations**. In: Proceedings of the Congresso de Pontes e Estruturas – ABPE. Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, Rio de Janeiro, 2005.

GOMES, H. M. **Estudo teórico-experimental de lajes cogumelo**. Relatório de pesquisa. Paraíba: UFPB, 1994. 52p.

GOMES, H. M.; DONIN, C. **Curso de Introdução ao uso de Software de Elementos Finitos para Análise Estrutural Elástica Linear**. Apostila, Departamento de Estruturas e Construção Civil, CT, UFSM, Santa Maria, 2002.

GUERRIN, A.; LAVAU R.C. **Tratado de Concreto Armado**. Hemus S.A., 2002, 398p.

HENNRICHS, C.A. **Estudos sobre a Modelagem de Lajes Planas de Concreto Armado**. Florianópolis: UFSC, 2003. 201p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

HOLANDA, K.M.A. **Análise dos Mecanismos Resistentes e das Similaridades de Efeitos da Adição de Fibras de Aço na Resistência e na Ductilidade à Punção de Lajes-Cogumelo e ao Cisalhamento de Vigas de Concreto**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 278p., 2002.

HUEBNER, K.H. **The Finite Element Method for Engineers**. John Wiley & Sons, New York, 1975.

LEET, K. M.; UANG, C-M., **Fundamentals of Structural Analysis**. McGraw-Hill Companies, 2002.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Construções de concreto**. Rio de Janeiro: Interciência, 1977. V. 3, 305p.

- MASSARO JR., M. **Manual de concreto armado**. São Paulo, 1979. 278p.
- MARTIN, H. C. **Introduction to matrix methods of structural analysis**. Tokyo, Kogakusha; New York, McGraw-Hill Kogakusha, 1971. 481p.
- MARTINS, P.A.; MELO, G.S.; MELLO, E.L. **Colapso Progressivo em Edifícios em Laje Cogumelo de Concreto Armado**. In: XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto, 2003.
- Mc MINN, S. J. **Matrices for structural analysis**. New York, John Wiley and Sons, 1962. 215p.
- MEEK, J. L. **Matrix structural analysis**. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1971, 481p.
- MELGES, J. L. P.; PINHEIRO, L. M. **Verificação da Punção em Lajes segundo o CEB/95**. São Paulo: IBRACON, 1998. 11p.
- MELO, F.A.P.; FONTE, A.O.C.; HOROWITZ, B. **Análise estrutural de lajes planas sob a ação de carregamento vertical, comparando modelos numéricos com experimentais**. In: XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, 2000.
- MERCE, R.N.; OLIVEIRA, J.C.A. **Concepções de Sistemas Estruturais para Lajes de Edifício**. In: 43º Congresso Brasileiro do Concreto, 2001.
- MOAVENI, S. **Finite Element Analysis – Theory and Application with ANSYS**. Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall, 1999.
- MONTOYA, J. P.; MESEGUER, G. A.; MORÁN, C. F. **Hormigon Armado**. Design of Concrete Structures: McGraw-Hill, 11th edition, New York, 1991.
- MONTOYA, P.J.; MESEGUER, A.G.; CABRE, F.M. **Hormigon Armado**. Editorial Gustavo Gili S.A., 13edición, Barcelona, 1991.
- MORETTO, O. **Curso de Hormigon Armado**. 2.ed. Buenos Aires: El Ateneo, 1970. 1074p.
- NGO, D.T. **Punching Shear Resistance of High-Strength Concrete Slabs**. In: Electronic Journal of Structural Engineering, 2001.
- NOBREGA, L.O.; MELO, G.S.; MELLO, E.L. **Comparação entre Métodos de Dimensionamento de Lajes Cogumelo Considerando Variação de Vãos e Carregamento de Vento**. In: XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto, 2003.

PARK, R.; GAMBLE, W.L. **Reinforced Concrete Slabs**. New York, John Wiley & Sons, Inc, 2nd ed., 2007.

PILKEY, W.D. **Peterson's Stress Concentration Factors**. New York, John Wiley & Sons, Inc, 2nd ed., 1997.

PINHEIRO, L.M. & RAZENTE, J.A. **Estruturas de Concreto - Apostila**. Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2003.

PFLÜGER, A. **Estática Elemental de las Cáscaras**. Buenos Aires: EUDEBA Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1974.

REGAN, P. E. **Shear Combs, Reinforcement against punching**. The Structural Engineer, London, v. 63B, n.4, 1985.

RESINOR S. A. **Estudo Comparativo entre a Laje Convencional e Lajes com Blocos de EPS nas Modernas Construções de Concreto Armado**. Mauá, SP, 1988.

ROCHA, A. M. **Novo curso prático de concreto armado**. Rio de Janeiro: Ed. Científica, 1975. V. 4, 331p.

SÁNCHEZ FILHO, E.S. **Nova Normalização Brasileira para o concreto estrutural**. Rio de Janeiro, Ed. Interciência , 1999, 331p.

SELISTRE, S. L. C. **Análise teórico-experimental de uma laje nervurada de microconcreto armado submetida a um carregamento uniformemente distribuído**. Porto Alegre: UFRGS, 2000. 114p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

SHEHATA, I. A. E. M.; SHEHATA, L. C. D.; DIAS, D. P. **Reforço ao Puncionamento em Lajes-cogumelo**. In: Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, 28, 1997, São Carlos. 1997.

SHTAERMAN, M. I.; IVIANSKI, A. M. **Entrepisos sin Vigas**. Montevideo, Interciência, 1960.

SILVA FILHO, J.J.H., LOPES, M.I.P.; SOARES, J.M.D. **Análise experimental de lajes pré-moldadas**. V Congresso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2002.

SILVA, M.A.F. **Projeto e Construção de Lajes Nervuradas de Concreto Armado**. São Carlos: UFSCar, 2005. 239p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de São Carlos, 2005.

SIMÃO, W.I.S.; PITANGUEIRA, R.L.S. **Modelos de Elementos Finitos para Análise de Estruturas de Concreto Armado**. In: XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto, 2003.

SOUZA, V. C. M.; CUNHA, A. J. P. **Lajes em concreto armado e protendido**. Niterói: EDUFF, 1998. 580p.

SORIANO, H.L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 2003. 578p.

SUSSEKIND, J. C. **Curso de concreto**. Rio de Janeiro, Ed. Globo, vol. 1, 1984.

TAKEYA, T. **Estudo Experimental da Ruína de Ligações Laje-pilar em Bordas de Lajes Cogumelo**. Dissertação (Mestrado em engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 1981.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. McGraw - Hill, 1959.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**. Ed. Guanabara Dois, 3ª ed., Rio de Janeiro, 1980.

TORROJA, E. **Lecciones Elementares de Elasticidad**. Madrid, Editorial Dossat S.A., 2ª ed., 1951.

TRAUTWEIN, L. M. **Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado com Armadura de Cisalhamento do Tipo “Stud” Interno e Tipo Estribo Inclinado**. Dissertação (Mestrado em engenharia) – Universidade de Brasília. Brasília, 2001.

VANDERBUILD, M. D. **Matrix structural analysis**. Quantum, 397p. 1974.

VENANCIO Fº, F. **Análise Matricial de Estruturas**. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Rio de Janeiro, 1975.

WANG, P.C. **Numerical and matrix methods in structural mechanics**. New York, John Wiley and Sons, 1966. 426p.

WANG, C.T. **Applied Elasticity**. New York, McGraw-Hill, 1953.

WEAVER Jr., W. **Computer programs for structural analysis**. Princeton, D. Van Nostrand, 300p., 1967.

ZAMBRANA VARGAS, E. N. **Punção em Lajes Cogumelo de Concreto de Alta Resistência Reforçado com Fibras de Aço**. Dissertação (Mestrado em engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1997.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, **Finite Element Method**: Volume 1,2 e 3, Solid Mechanics, Ed. Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2000.

10 ANEXOS

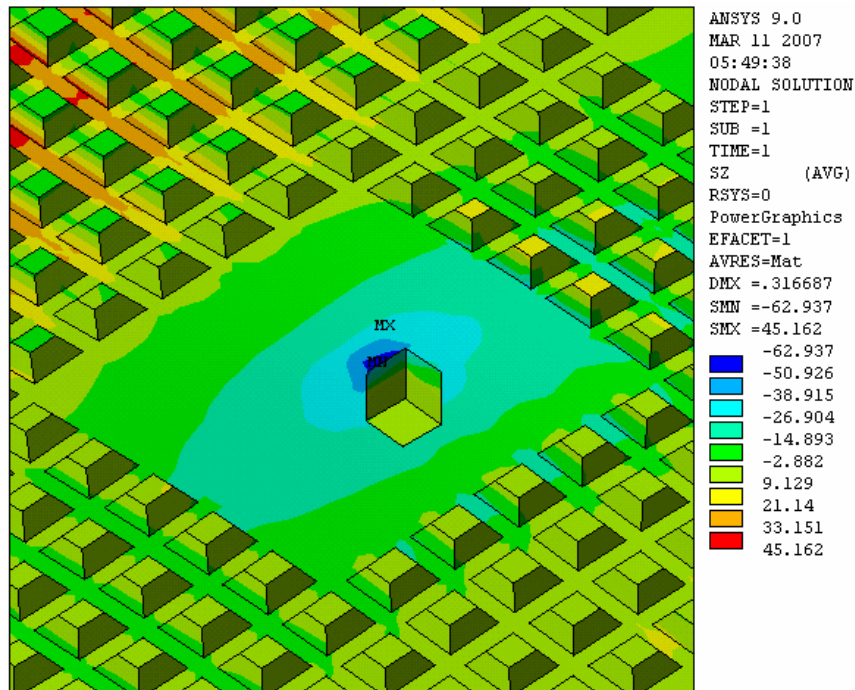


Figura 10.1 – Detalhe das tensões normais na direção “z” (SZ), para o pilar central do modelo MEF-04.

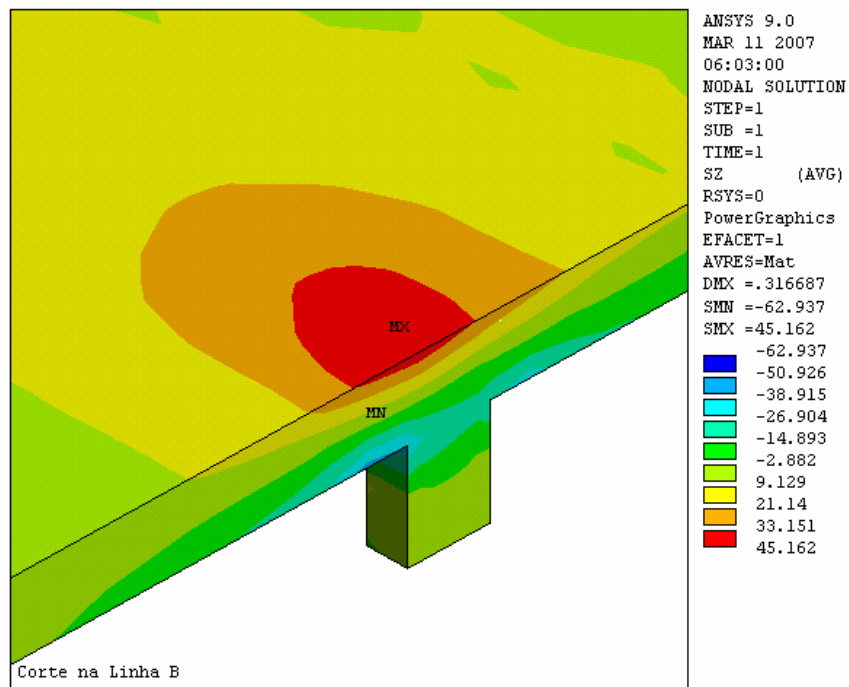


Figura 10.2 – Corte na linha B, indicando as tensões normais na direção “z” (SZ), para o pilar central do modelo MEF-04.