

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DA  
NÃO-LINEARIDADE FÍSICA EM VIGAS DE  
CONCRETO ARMADO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Aline Alessandra Eduarda Farias da Silva**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2012**



# **CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DA NÃO-LINEARIDADE FÍSICA EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO**

**Aline Alessandra Eduarda Farias da Silva**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Área de Concentração em Construção Civil e Preservação Ambiental, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Engenharia Civil**.

**Orientador: Prof. Dr. Gerson Moacyr Sisniegas Alva**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2012**

Silva, Aline Alessandra Eduarda Farias da  
Contribuições ao estudo da não-linearidade física em  
vigas de concreto armado / Aline Alessandra Eduarda  
Farias da Silva.-2012.  
173 p.; 30cm

Orientador: Gerson Moacyr Sisniegas Alva  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Maria, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil, RS, 2012

1. Concreto armado 2. Análise não-linear 3. Não-  
linearidade física I. Alva, Gerson Moacyr Sisniegas II.  
Título.

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da  
Biblioteca Central da UFSM.

---

© 2012

Todos os direitos autorais reservados a Aline Alessandra Eduarda Farias da Silva. A  
reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita com autorização  
por escrito do autor.

Endereço: Rua Marechal Floriano Peixoto, n. 1109, ap. 13, Centro, Santa Maria, RS.  
CEP: 97015-371

E-mail: aledudas@gmail.com

---

**Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação de Mestrado

**CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DA NÃO-LINEARIDADE FÍSICA EM  
VIGAS DE CONCRETO ARMADO**

elaborada por  
**Aline Alessandra Eduarda Farias da Silva**

como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Mestre em Engenharia Civil**

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

**Gerson Moacyr Sisniegas Alva, Dr. (UFSM)**  
(Presidente/Orientador)

---

**João Kaminski Junior, Dr. (UFSM)**

---

**Vladimir Guilherme Haach, Dr. (EESC – USP)**

Santa Maria, 01 de março de 2012



*Dedico este trabalho aos meus pais,  
Fernando e Nelci, e a minha avó Lídia.*





## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) pela formação acadêmica e pela oportunidade de aprendizado.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental (PPGEC), especialmente à secretária Daisy Mendes e sua auxiliar Marília Goulart pela competência e eficiência nos serviços prestados a todos os alunos do mestrado.

Ao Núcleo de Estudos em Experimentação e Análise Numérica de Estruturas (NEst) pelo compartilhamento de informações e arquivos.

Ao professor Dr. Gerson Moacyr Sisniegas Alva pela frequente orientação no desenvolvimento deste trabalho, por compartilhar seu conhecimento e pela atenção dispensada a todos os seus alunos, estando sempre disposto a ajudar e esclarecer questionamentos.

Aos meus pais, Fernando e Nelci, e a minha avó Lídia pelo apoio incondicional e incentivo constante.

Às minhas irmãs Patrícia e Nathália pela amizade, companheirismo e conselhos oportunos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida.



## **RESUMO**

Dissertação de Mestrado  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental  
Universidade Federal de Santa Maria

### **CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DA NÃO-LINEARIDADE FÍSICA EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO**

AUTORA: ALINE ALESSANDRA EDUARDA FARIAS DA SILVA

ORIENTADOR: GERSON MOACYR SISNIEGAS ALVA

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 01 de março de 2012.

Este trabalho refere-se à consideração dos efeitos da não-linearidade física aplicados ao comportamento de vigas de concreto armado submetidas à flexão simples. É salientada a importância do tema, bem como os diversos trabalhos originados deste estudo. O comportamento marcadamente não-linear dos materiais aço e concreto é descrito juntamente com noções básicas sobre a manifestação da não-linearidade física. Os modelos constitutivos abordados e utilizados na análise estrutural são baseados em diagramas momento-curvatura. São abordados os tipos de análises e os métodos aproximados da norma brasileira NBR 6118 (ABNT, 2007) que visam a consideração da não-linearidade física na verificação dos Estados Limites (Último e de Serviço). Nos exemplos numéricos, a eficácia dos modelos constitutivos que empregam relações momento-curvatura é verificada mediante a comparação com resultados experimentais de vigas de concreto armado. Também são elaborados exemplos numéricos que mostram a aplicação dos métodos aproximados, cujos resultados são confrontados com os obtidos por análise não-linear. Dentre as conclusões da pesquisa, destacam-se os resultados satisfatórios fornecidos pelos métodos aproximados na estimativa de flechas imediatas de vigas em análises do Estado Limite de Serviço e, pelos métodos aproximados que consideram a quantidade de armaduras em análises do Estado Limite Último.

**Palavras-chave:** Concreto Armado. Análise Não-Linear. Não-Linearidade Física.



## **ABSTRACT**

Master's Dissertation  
Post-Graduate Program in Civil and Environmental Engineering  
Federal University of Santa Maria

### **CONTRIBUTIONS AT THE ESTUDY OF MATERIAL NONLINEARITY OF REINFORCED CONCRETE BEAMS**

AUTHOR: ALINE ALESSANDRA EDUARDA FARIAS DA SILVA

ADVISOR: GERSON MOACYR SISNIEGAS ALVA

Date and Place of Defense: Santa Maria, march 1<sup>st</sup>, 2012.

This work refers to consideration of the effects of material nonlinearity applied to the behavior of reinforced concrete beams subjected to simple bending. The importance of the topic is highlighted, as well as several works stemming from this study. The nonlinear behavior of steel and concrete are described along with understanding the manifestation of material nonlinearity. The constitutive models discussed and used in structural analysis are based on moment-curvature diagrams. The types of analysis and the approximate methods of the Brazilian standard NBR 6118 (ABNT, 2007) for the consideration of material nonlinearity in the verification of limit states (Ultimate and Service) are discussed. In numerical examples, the efficiency of constitutive models that employ moment-curvature relationship is verified by comparing with experimental results of reinforced concrete beams. The results of approximate methods are compared with those obtained by nonlinear analysis. The conclusions provided good results for immediate deflections calculated by approximate methods in service situations, as well for approximate methods that consider reinforcement in ultimate limit state.

**Keywords:** Reinforced Concrete. Nonlinear Analysis. Material Nonlinearity.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Edifício A Noite, Rio de Janeiro (RJ) .....	31
Figura 2.2 – Cristo Redentor .....	32
Figura 2.3 – Museu de Arte de São Paulo .....	33
Figura 2.4 – Centro Empresarial Nações Unidas (CENU) .....	33
Figura 3.1 – Corpo de prova submetido à carga uniaxial .....	44
Figura 3.2 – Comportamento elástico-linear .....	45
Figura 3.3 – Comportamento tensão-deformação .....	45
Figura 3.4 – Comportamento plástico de alguns tipos de solos .....	46
Figura 3.5 – Comportamento tensão-deformação de um material dúctil e frágil .	47
Figura 3.6 – Aços estruturais laminados a quente (CA 25 e CA 50) .....	48
Figura 3.7 – Aços estruturais formados a frio .....	49
Figura 3.8 – Modelos idealizados para o aço .....	50
Figura 3.9 – Comportamento uniaxial típico de concretos .....	50
Figura 3.10 – Modelo idealizado para o concreto armado .....	51
Figura 3.11 – Comportamento não-linear em vigas .....	51
Figura 3.12 – Diagrama momento-curvatura de seção submetida à flexão simples .....	52
Figura 3.13 – Distribuição das tensões do concreto em seções retangulares no Estádio III conforme NBR 6118 (ABNT, 2007) .....	54
Figura 4.1 – Elemento de viga .....	55
Figura 4.2 – Raio de uma seção transversal .....	56
Figura 4.3 – Diagrama momento-curvatura linear .....	57
Figura 4.4 – Diagrama momento-curvatura não-linear .....	57
Figura 4.5 – Exemplo de distribuição das fissuras em uma viga .....	58
Figura 5.1 – Redistribuição de esforços em uma viga .....	66
Figura 5.2 – Viga biengastada com seções e materiais conhecidos .....	68
Figura 5.3 – Mecanismo cinematicamente admissível .....	70
Figura 5.4 – DMF estaticamente admissível .....	70
Figura 5.5 – Trechos considerados no cálculo da rigidez equivalente proposta pelo IBRACON (2007) .....	74
Figura 6.1 – Carregamento e geometria das vigas ensaiadas por Álvares (1993) .....	75
Figura 6.2 – Armação das vigas ensaiadas por Álvares (1993) .....	76
Figura 6.3 – Diagrama momento- curvatura da seção de cada viga com emprego da expressão de Branson (1965) .....	77
Figura 6.4 – Seção da viga .....	78
Figura 6.5 – Diagrama de tensões e deformações no concreto .....	81
Figura 6.6 – Discretização dos elementos de viga .....	83
Figura 6.7 – Viga biapoiada (DMF) .....	84
Figura 6.8 – Momentos atuantes na viga (em kN.cm) para $P = 10,39$ kN .....	85
Figura 6.9 – Integração dupla do diagrama de curvaturas .....	87
Figura 6.10 – Diagrama momento-curvatura da seção de cada viga com emprego do modelo de Ghali e Favre (1986) .....	89
Figura 6.11 – Diagrama momento-curvatura da seção de cada viga com emprego da formulação da NBR 6118 (ABNT, 2007) .....	91
Figura 6.12 – Flechas para a viga com $3 \Phi 10$ mm .....	95

Figura 6.13 – Flechas para a viga com 5 $\Phi$ 10 mm .....	95
Figura 6.14 – Flechas para a viga com 7 $\Phi$ 10 mm .....	96
Figura 6.15 – Diagrama momento-curvatura para a viga com 3 $\Phi$ 10 mm .....	97
Figura 6.16 – Diagrama momento-curvatura para a viga com 5 $\Phi$ 10 mm .....	97
Figura 6.17 – Diagrama momento-curvatura para a viga com 7 $\Phi$ 10 mm .....	98
Figura 6.18 – Armação e geometria da viga biapoiada – Bresler e Scordelis (1963) .....	99
Figura 6.19 – Flechas para a viga biapoiada – Bresler e Scordelis (1963) .....	102
Figura 6.20 – Viga biengastada .....	103
Figura 6.21 – Lançamento da estrutura no programa Ftool (Martha , 2008) .....	104
Figura 6.22 – Diagrama de Momento Fletor (DMF) .....	105
Figura 6.23 – Diagrama de Esforço Cortante (DEC) .....	105
Figura 6.24 – Correção de momentos positivos e esforços cortantes (redistribuição de esforços) .....	108
Figura 6.25 – DMF após a redistribuição de esforços .....	109
Figura 6.26 – Armaduras finais: Análise linear sem e com redistribuição de esforços .....	109
Figura 6.27 – Armaduras definidas a partir da análise linear com redistribuição .....	110
Figura 6.28 – Mecanismo cinematicamente admissível .....	111
Figura 6.29 – DMF estaticamente admissível .....	112
Figura 6.30 – Capacidade de rotação de rótulas plásticas .....	112
Figura 6.31 – Carga aplicada <i>versus</i> deslocamento na metade do vão .....	114
Figura 6.32 – Viga biengastada do exemplo 4 .....	115
Figura 6.33 – Seção longitudinal da viga do exemplo 4 .....	116
Figura 6.34 – Flechas no centro da viga ao longo da carga aplicada – ELU .....	119
Figura 6.35 – Deformada da viga para a carga última – ELU .....	120
Figura 6.36 – Flechas imediatas com diferentes análises – ELS .....	122
Figura 6.37 – Deformada da viga para a carga da combinação quase-permanente – ELS .....	123
Figura 6.38 – Planta estrutural do edifício .....	124
Figura 6.39 – Pórtico plano escolhido .....	125
Figura 6.40 – Combinações de ações para o dimensionamento das armaduras – ELU .....	127
Figura 6.41 – Seções transversais armadas .....	128
Figura 6.42 – Combinação quase-permanente de ações – ELS .....	129
Figura 6.43 – Discretização do pórtico plano .....	132
Figura 6.44 – Momentos fletores finais (kN.cm) obtidos com a simplificação da NBR 6118 (ABNT, 2007) ( $\gamma_z = 1,11$ ) .....	133
Figura 6.45 – Numeração dos pilares .....	134
Figura 6.46 – Trechos das vigas por tramos .....	134
Figura 6.47 – Momentos fletores finais (kN.cm) obtidos a partir do método aproximado de Khuntia e Ghosh (2004) ( $\gamma_z = 1,14$ ) .....	137
Figura 6.48 – Definição da rigidez secante a partir da relação momento-curvatura .....	138
Figura 6.49 – Relação momento-curvatura para as seções de extremidade da viga V5 .....	139
Figura 6.50 – Momentos fletores finais (kN.cm) obtidos a partir da rigidez secante via relação momento-curvatura ( $\gamma_z = 1,18$ ) .....	141
Figura 6.51 – Deslocamentos horizontais no pórtico plano .....	142



Figura 6.52 – Identificação de vigas e pilares e respectivos DMF – ELU .....	143
Figura 6.53 – Aviso do programa NLVP .....	146
Figura 6.54 – Contribuição da NLF das vigas para o deslocamento horizontal ...	147
Figura 6.55 – Momentos fletores (kN.cm) obtidos a partir de análise linear: ELS	150
Figura 6.56 – Momentos fletores (kN.cm) obtidos a partir de análise linear com rigidez equivalente da NBR 6118 (ABNT, 2007) – ELS .....	151
Figura 6.57 – Momentos fletores (kN.cm) obtidos a partir de análise linear com rigidez equivalente proposta pelo IBRACON (2007) – ELS .....	152



## LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Parâmetros mecânicos dos materiais (exemplo 1) .....	76
Tabela 6.2 – Valores da carga P para a viga com 3 $\Phi$ 10mm .....	84
Tabela 6.3 – Viga com 3 $\Phi$ 10mm $\rightarrow$ P = 10,39 kN .....	88
Tabela 6.4 – Flechas para a viga com 3 $\Phi$ 10mm (Branson) .....	88
Tabela 6.5 – Flechas para a viga com 3 $\Phi$ 10mm (Ghali e Favre) .....	90
Tabela 6.6 – Viga com 3 $\Phi$ 10mm $\rightarrow$ Valores de inércia equivalente .....	92
Tabela 6.7 – Flechas para a viga com 3 $\Phi$ 10mm (NBR 6118) .....	92
Tabela 6.8 – Flechas para a viga com 3 $\Phi$ 10mm ( $I_{m\u00e9dio}$ ) .....	94
Tabela 6.9 – Parâmetros mecânicos dos materiais (exemplo 2) .....	99
Tabela 6.10 – Flechas para a viga biapoiada – Modelo de Branson .....	100
Tabela 6.11 – Flechas para a viga biapoiada – Modelo de Ghali e Favre .....	101
Tabela 6.12 – Dados do exemplo 3 .....	103
Tabela 6.13 – Parâmetros mecânicas dos materiais (exemplo 4) .....	117
Tabela 6.14 – Região de momentos negativos (apoios) .....	117
Tabela 6.15 – Região de momentos positivos (seção central) .....	118
Tabela 6.16 – Inércias para cada passo de carga .....	121
Tabela 6.17 – Parâmetros para as seções de extremidade (vigas) – ELU .....	130
Tabela 6.18 – Parâmetros para as seções de máximo momento positivo (vigas) – ELU .....	130
Tabela 6.19 – Parâmetros para as seções do apoio central (vigas) – ELU .....	131
Tabela 6.20 – Parâmetros mecânicos dos materiais – ELU (exemplo 5) .....	131
Tabela 6.21 – Inércias secantes para os tramos esquerdo e direito da viga V5 .	135
Tabela 6.22 – Momentos de inércia equivalentes para os pilares .....	136
Tabela 6.23 – Relação entre momentos de inércia .....	137
Tabela 6.24 – Rigidez secante via diagrama momento-curvatura – tramo esquerdo .....	139
Tabela 6.25 – Rigidez secante via diagrama momento-curvatura – tramo direito .....	140
Tabela 6.26 – Rigidez secante dos pilares via diagrama momento-curvatura ....	140
Tabela 6.27 – Relação entre momentos de inércia .....	141
Tabela 6.28 – Momentos M1 para os tramos esquerdo e direito .....	143
Tabela 6.29 – Momentos Mv para os tramos esquerdo e direito .....	144
Tabela 6.30 – Momentos M2 para os tramos esquerdo e direito .....	144
Tabela 6.31 – Momentos no topo dos pilares .....	144
Tabela 6.32 – Momentos na base dos pilares .....	145
Tabela 6.33 – Parâmetros para as seções de extremidade (vigas) – ELS .....	148
Tabela 6.34 – Parâmetros para as seções de máximo momento positivo (vigas) – ELS .....	149
Tabela 6.35 – Parâmetros para as seções do apoio central (vigas) – ELS .....	149
Tabela 6.36 – Parâmetros mecânicos dos materiais – ELS (exemplo 5) .....	149
Tabela 6.37 – Flechas verticais para o ELS .....	153
Tabela 6.38 – Momentos M1 para o tramo esquerdo da viga .....	153
Tabela 6.39 – Momentos Mv para o tramo esquerdo da viga .....	153
Tabela 6.40 – Momentos M2 para o tramo esquerdo da viga .....	154



## LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	American Concrete Institute
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEB	Comité Euro-International du Béton
DEC	Diagrama de Esforço Cortante
DMF	Diagrama de Momento Fletor
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
IBRACON	Instituto Brasileiro do Concreto
NBR	Norma Brasileira
NEst	Núcleo de Estudos em Experimentação e Análise Numérica de Estruturas
NLF	Não-Linearidade Física
NLG	Não-Linearidade Geométrica
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental
UFMS	Universidade Federal de Santa Maria
USP	Universidade de São Paulo



## LISTA DE SÍMBOLOS

$E_{ci}$	Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto
$E_{cs}$	Módulo de elasticidade secante do concreto
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço
$f_{ct}$	Resistência do concreto à tração direta
$f_c$	Resistência à compressão do concreto
$f_{ck}$	Resistência à compressão característica do concreto
$f_{cd}$	Resistência à compressão de projeto do concreto
$f_y$	Resistência ao escoamento do aço
$f_{yd}$	Resistência ao escoamento de projeto do aço
$\alpha_e$	Coefficiente de homogeneização da seção
$A_s'$	Área da seção da armadura longitudinal de compressão
$A_s$	Área da seção da armadura longitudinal de tração
$h$	Altura da seção transversal da viga
$b_w$	Largura da seção transversal da viga
$d$	Altura útil
$L$	Vão da viga
$x_I$	Profundidade da linha neutra no Estádio I
$x_{II}$	Profundidade da linha neutra no Estádio II
$I_I$	Momento de inércia no Estádio I
$I_{II}$	Momento de inércia no Estádio II
$I_c$	Momento de inércia da seção bruta de concreto
$I_{eq}$	Momento de inércia equivalente
$I_{eq,pond}$	Momento de inércia equivalente ponderado
$I_{médio}$	Momento de inércia médio
$y_t$	Distância da linha neutra elástica (Estádio I) à fibra mais tracionada da seção
$M_r$	Momento de fissuração
$M_y$	Momento de início da plastificação
$M_u$	Momento último
$(1/r)_r$	Curvatura de fissuração

$(1/r)_y$	Curvatura de início da plastificação
$(1/r)_u$	Curvatura última
$(1/r)_I$	Curvatura da seção para o Estádio I
$(1/r)_{II}$	Curvatura da seção para o Estádio II
$\zeta$	Coeficiente de interpolação entre os Estádios I e II
$R_s$	Resultante na armadura tracionada
$R_s'$	Resultante na armadura comprimida
$R_{cc}$	Resultante no concreto comprimido
$\sigma_s'$	Tensão na armadura comprimida
$\epsilon_s'$	Deformação na armadura comprimida
$\epsilon_{cc}$	Deformação na fibra mais comprimida do concreto
$\epsilon_y$	Deformação de escoamento do aço
$\delta$	Flecha em vigas
$P$	Carga concentrada
$q$	Carga distribuída
$M_a$	Momento fletor atuante em uma seção
$M_{sd}$	Momento de projeto de uma seção
$g_k$	Ações permanentes características
$q_k$	Ações variáveis características
$\gamma_g$	Coeficiente de ponderação das ações permanentes
$\gamma_q$	Coeficiente de ponderação das ações variáveis
$\gamma_c$	Coeficiente de ponderação da resistência do concreto
$\gamma_s$	Coeficiente de ponderação da resistência do aço
$z$	Braço de alavanca
$\theta$	Rotação de uma seção
$\gamma_z$	Coeficiente de majoração dos esforços globais finais de 1ª ordem para obtenção dos finais de 2ª ordem



## LISTA DE ANEXOS

Anexo A – Programa NLVP .....	167
-------------------------------	-----



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	27
1.1 Objetivo .....	28
1.2 Justificativa .....	28
1.3 Metodologia .....	29
1.4 Resumo dos capítulos .....	30
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	31
<b>3 A NÃO-LINEARIDADE FÍSICA NOS MATERIAIS E NAS ESTRUTURAS</b> .....	43
<b>3.1 Comportamento mecânico dos materiais</b> .....	43
3.1.1 Linearidade e elasticidade .....	44
3.1.2 Plasticidade .....	46
3.1.3 Ductilidade .....	46
3.1.4 Deformação lenta (Fluência) .....	47
<b>3.2 Comportamento uniaxial do aço para o concreto armado</b> .....	47
<b>3.3 Comportamento uniaxial do concreto simples</b> .....	50
<b>3.4 Comportamento de vigas de concreto armado submetidas à flexão simples</b> .....	51
<b>4 MODELOS CONSTITUTIVOS NÃO-LINEARES EM ELEMENTOS FLETIDOS</b> .....	55
4.1 Diagramas momento-curvatura de elementos lineares .....	55
4.2 Modelo de Branson (1965) .....	58
4.3 Modelo de Ghali e Favre (1986) .....	60
4.4 Método aproximado proposto por Khuntia e Ghosh (2004) .....	61
<b>5 PRESCRIÇÕES NORMATIVAS PARA A CONSIDERAÇÃO DA NÃO-LINEARIDADE FÍSICA</b> .....	63
<b>5.1 Análise não-linear</b> .....	63
<b>5.2 Simplificações permitidas pela NBR 6118 (ABNT, 2007) para análises em Estado Limite Último</b> .....	64
5.2.1 Análise linear .....	64
5.2.1.1 Reduções de inércia à flexão para análises globais .....	65
5.2.2 Análise linear com redistribuição de esforços .....	65
5.2.3 Análise plástica .....	67
5.2.3.1 Teorema do limite superior (Teorema cinemático) .....	69
5.2.3.2 Teorema do limite inferior (Teorema estático) .....	70
5.2.3.3 Teorema da unicidade .....	71
5.2.3.4 Observações sobre a análise plástica em estruturas reticuladas de concreto armado .....	71
<b>5.3 Simplificações permitidas para análises em Estado Limite de Serviço</b> .....	73
5.3.1 Rigidez equivalente proposta pela NBR 6118 (ABNT, 2007) .....	73
5.3.2 Rigidez equivalente ponderada proposta pelo IBRACON (2007) .....	73
<b>6 EXEMPLOS NUMÉRICOS</b> .....	75
<b>6.1 Exemplo 1</b> .....	75
6.1.1 Integração das curvaturas e emprego do modelo de Branson (1965) .....	77
6.1.2 Integração das curvaturas e emprego do modelo de Ghali e Favre (1986) .....	89

6.1.3 Rigidez equivalente proposta pela NBR 6118 (ABNT, 2007) .....	91
6.1.4 Momento de inércia médio .....	93
6.1.5 Comparações .....	94
<b>6.2 Exemplo 2</b> .....	<b>98</b>
6.2.1 Integração das curvaturas e emprego dos modelos de Branson (1965) e Ghali e Favre (1986) .....	99
6.2.2 Comparações .....	101
<b>6.3 Exemplo 3</b> .....	<b>102</b>
6.3.1 Análise linear sem redistribuição de esforços .....	105
6.3.2 Análise linear com redistribuição de esforços .....	107
6.3.3 Comparações .....	109
6.3.4 Análise plástica .....	110
6.3.4.1 Análise plástica aplicada ao item 6.3.2 .....	110
6.3.5 Comparações .....	114
<b>6.4 Exemplo 4</b> .....	<b>115</b>
6.4.1 Estado Limite Último (ELU) .....	118
6.4.1.1 Comparações .....	119
6.4.2 Estado Limite de Serviço (ELS) .....	120
6.4.2.1 Comparações .....	122
<b>6.5 Exemplo 5</b> .....	<b>124</b>
6.5.1 Estado Limite Último (ELU) .....	129
6.5.1.1 Análise não-linear .....	130
6.5.1.2 Redução global de inércia da NBR 6118 (ABNT, 2007) .....	133
6.5.1.3 Método aproximado proposto por Khuntia e Ghosh (2004) .....	134
6.5.1.4 Rigidez secante obtida a partir de diagramas momento-curvatura .....	138
6.5.1.5 Comparações .....	142
6.5.2 Estado Limite de Serviço (ELS) .....	147
6.5.2.1 Análise não-linear .....	148
6.5.2.2 Análise linear .....	150
6.5.2.3 Rigidez equivalente proposta pela NBR 6118 (ABNT, 2007) .....	150
6.5.2.4 Rigidez equivalente ponderada proposta pelo IBRACON (2007) .....	151
6.5.2.5 Comparações .....	152
<b>7 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>155</b>
7.1 Conclusões .....	155
7.2 Sugestões para pesquisas futuras .....	157
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>159</b>
<b>ANEXO A – PROGRAMA NLVP</b> .....	<b>167</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Por um longo período na história, desde o surgimento do concreto armado, a única opção disponível para a análise de uma estrutura desse material era aquela que considerava modelos elástico-lineares para a representação do seu comportamento. Em consequência dessa limitação de cálculo, as seções transversais de vigas, muitas vezes, apresentavam tamanha robustez que a preocupação com deformações e deslocamentos excessivos não era relevante.

Esse quadro não se faz mais presente na atualidade. A melhoria na qualidade da produção do aço e do concreto, com o passar dos anos, propiciou um aumento extremamente significativo nas resistências desses materiais. Como resultado, construções cada vez mais altas, esbeltas e com seções transversais cada vez menores tornaram-se dominantes nos projetos estruturais. Em contrapartida, esse aumento da esbeltez acompanha um aumento da fissuração dos elementos estruturais e conseqüente perda de rigidez dos mesmos.

Paralelamente à evolução dos materiais, o avanço tecnológico das ferramentas de cálculo existentes, principalmente as de caráter computacional, permite o desenvolvimento de análises mais rigorosas e realistas e, os modelos que passam a considerar a perda de rigidez dos elementos estruturais (não-linearidade física – NLF), começam a ser viabilizados. Entretanto, tais modelos, ainda hoje, exigem complexas formulações e requerem longos tempos de processamento das estruturas sendo, por esse motivo, muitas vezes, preteridos na elaboração de projetos.

Porém, a desconsideração da NLF não é uma opção viável, pois nesse caso, a segurança da estrutura estaria comprometida. A incorporação da mesma pode ser realizada mediante a utilização de métodos simplificados ou aproximados sugeridos pelas normas brasileiras em vez do cálculo de uma análise não-linear rigorosa.

## 1.1 Objetivo

A pesquisa tem por objetivo apresentar, comparar e discorrer sobre os principais modelos constitutivos fisicamente não-lineares utilizados em elementos de vigas de concreto armado, dando-se ênfase aos modelos que empregam relações momento-curvatura. A pesquisa também tem como objetivo apresentar e discorrer sobre tipos de análise e métodos aproximados recomendados pela Associação Brasileira de Normas Técnicas, Norma Brasileira 6118: projeto de estruturas de concreto – procedimento (NBR 6118 (ABNT, 2007)) para a consideração simplificada da NLF de vigas na verificação dos Estados Limites (Último e de Serviço).

## 1.2 Justificativa

Apesar da facilidade fornecida pelos modelos puramente lineares, esses são bastante limitados, dependendo da análise a ser realizada. Tanto o aço quanto o concreto apresentam respostas não-lineares facilmente evidenciadas, por exemplo, em relações momento fletor-curvatura de seções transversais e através de diagramas tensão-deformação desses materiais. Assim, faz-se necessária a consideração, ainda que de forma simplificada ou aproximada, da perda de rigidez sofrida por esses elementos.

Nesse contexto, salienta-se a importância da consideração da NLF nas rotinas de cálculo para o dimensionamento de elementos de concreto armado, principalmente em se tratando da obtenção de flechas e esforços em vigas submetidas à flexão simples, seja com a utilização de modelos constitutivos marcadamente não-lineares, ou com a inclusão de simplificações permitidas e, na maioria dos casos, já obrigatórias, sugeridas pelas normas brasileiras.

Uma vez que a análise não-linear permite uma representação mais precisa e fidedigna do comportamento estrutural, essa é a referência para comparações com análises simplificadas e aproximadas. Dessa maneira, o complexo comportamento

do concreto armado pode, aos poucos, ser incorporado nas análises estruturais com maior veracidade.

### **1.3 Metodologia**

A pesquisa é fundamentada em uma ampla revisão bibliográfica sobre a NLF, em particular sobre modelos e métodos aproximados aplicáveis a elementos submetidos à flexão simples, tais como os recomendados pela NBR 6118 (ABNT, 2007).

São realizadas simulações numéricas em elementos de vigas e também em pórtico plano. As mesmas têm como objetivo mostrar a influência da NLF no comportamento de vigas, avaliar e comparar os resultados fornecidos pelos modelos constitutivos não-lineares empregados e pelas simplificações abordadas neste trabalho. Os vãos, os carregamentos e os materiais escolhidos nos exemplos procuram representar vigas de estruturas usuais de concreto armado.

Para a realização das simulações numéricas, utilizam-se três programas computacionais. São estes:

Ftool (Martha, 2008);

CAD/TQS (TQS Informática, 2008);

NLVP (NEst, 2011).

Os programas citados auxiliam nas resoluções dos exemplos e a utilização de cada um é definida com maiores detalhes no capítulo de exemplos numéricos, entretanto, informações específicas sobre o programa NLVP (NEst, 2011) são descritas no anexo A deste trabalho.

Todos os resultados obtidos através dos procedimentos numéricos são comparados e analisados criticamente.

## 1.4 Resumo dos capítulos

O primeiro capítulo deste trabalho é o capítulo introdutório. São apresentados os objetivos da pesquisa, a justificativa do tema, a metodologia e o resumo dos capítulos.

O segundo capítulo apresenta a revisão bibliográfica sobre o tema proposto. É abordada a importância da consideração da NLF no comportamento das estruturas de concreto armado e comentados os diversos trabalhos nacionais e internacionais relacionados com o tema.

No terceiro capítulo apresentam-se conceitos básicos sobre a manifestação dos efeitos da NLF nos materiais (aço e concreto) e nas estruturas.

O quarto capítulo trata dos modelos constitutivos não-lineares empregados em elementos fletidos. São expostos os modelos propostos por Branson (1965) e Ghali e Favre (1986) para a consideração da contribuição do concreto tracionado íntegro entre fissuras (*tension stiffening*). Também são apresentadas expressões simplificadas para a avaliação da rigidez equivalente de vigas, as quais consideram o efeito da fissuração.

O quinto capítulo é relativo às prescrições normativas de projeto para a consideração do efeito da NLF de vigas para procedimentos em Estados Limites Último e de Serviço. Nesse capítulo, destacam-se as simplificações permitidas pela NBR 6118 (ABNT, 2007) e as sugestões da Prática Recomendada do Instituto Brasileiro do Concreto – Comentários Técnicos NBR 6118 (IBRACON (2007)).

No sexto capítulo é verificada a eficácia de todos os modelos, simplificações e sugestões apresentados ao longo do trabalho para a consideração da NLF. São elaborados cinco exemplos numéricos de vigas de concreto armado, sendo quatro delas isoladas e uma em estrutura de pórtico plano.

No sétimo capítulo são apresentadas as principais conclusões da pesquisa e algumas sugestões para trabalhos futuros.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A evolução do concreto armado, desde a sua descoberta até os dias atuais, sempre esteve sujeita ao grau de informações disseminadas pelos seus precursores. Em nosso país, o engenheiro civil Emilio Baumgart, considerado o “pai do concreto armado no Brasil”, foi a personalidade proeminente a partir do ano de 1923 até seu falecimento em 1943. Projetou diversas obras entre edifícios, pontes, conjuntos industriais e obras de pequeno porte, das quais muitas atingiram recordes mundiais e apresentaram técnicas construtivas até então desconhecidas. Destacou-se pelo arrojo de suas estruturas e soluções inovadoras que, por vezes, contestavam as normas técnicas em vigor na época. (Isaia, 2011).

Dentre as obras de Emilio Baumgart, consideradas marcos históricos, pode-se citar o edifício A Noite, calculado em 1928, situado na Praça Mauá na cidade do Rio de Janeiro (RJ), cujo projeto arquitetônico foi assinado por Joseph Gire, arquiteto francês. Construído por Gusmão, Dourado e Baldassini, o prédio (Figura 2.1) foi o mais alto do mundo em concreto armado, na época, com 103 metros de altura dispostos em 24 pavimentos. (Vasconcelos, A., 1992).



Figura 2.1 – Edifício A Noite, Rio de Janeiro (RJ).  
Fonte: <http://ibrrio.blogspot.com/2010/11/edificio-noite.html>

Assim como Emílio vieram outros engenheiros, projetistas e construtores com espíritos empreendedores, inovadores, audaciosos e dotados de uma genialidade que levou o Brasil a uma posição de destaque no contexto mundial em relação às construções de concreto armado e posteriormente protendido. Foram diversas as estruturas brasileiras a alcançarem recordes mundiais. Segundo Vasconcelos, A. (1992) as que merecem distinção são enumeradas a seguir:

1) 1926 – Jockey Clube, Rio de Janeiro (RJ): marquise da tribuna dos sócios com balanço de 22,4 metros;

2) 1926 – Ponte Presidente Sodré, Cabo Frio (RJ): vˆo livre de 67 metros em arco engastado;

3) 1929 – Prédio Martinelli, Sˆo Paulo (SP): primeiro “arranha-céu” de Sˆo Paulo;

4) 1930 – Ponte Emilio Baumgart, Rio do Peixe (SC): execu o pelo método de balanços sucessivos e vˆo de 68 metros;

5) 1930 – Elevador Lacerda, Salvador (BA): 72,5 metros de altura;

6) 1930 – Cristo Redentor, Rio de Janeiro (RJ): 38 metros de altura em concreto armado pré-moldado (figura 2.2):



Figura 2.2 – Cristo Redentor.

Fonte: <http://www.fotosimagens.net/cristo-redentor.html>

7) 1943 – Cúpula do hotel Quitandinha, Petrópolis (RJ): cúpula do salão de jogos (salão social) com 47 metros de diâmetro;

8) 1949 – Ponte do Galeão, Rio de Janeiro (RJ): 368,4 metros em concreto protendido;

9) 1968 – Museu de Arte, São Paulo (SP): 70 metros de vão em viga reta protendida simplesmente apoiada e  $f_{ck}$  de 45 MPa (figura 2.3):



Figura 2.3 – Museu de Arte de São Paulo.

Fonte: <http://www.saopaulo.com.br/entretenimento/pontos-turisticos>

10) 1982 – Barragem de Itaipú, Foz do Iguaçu (PR): 190 metros de altura.

Isaia (2011) também destaca algumas construções mais recentes em concreto armado. São estas:

1) 2000 – Centro Empresarial Nações Unidas, São Paulo (SP): área de 278.000 m<sup>2</sup> e 158 metros de altura (figura 2.4):



Figura 2.4 – Centro Empresarial Nações Unidas (CENU).

Fonte: <http://www.spcorporate.com.br/upload/fotos/T7.jpg>

2) 2003 – Edifício e-Tower, São Paulo (SP): 150 metros de altura e  $f_{ck}$  médio em torno de 150 MPa;

3) 2008 – Ponte Octávio Frias Filho, São Paulo (SP): ponte estaiada com duas pistas curvas ligadas a um mesmo pilar em formato de “X”. Única no mundo. Possui 138 metros de altura.

Juntamente com o desenvolvimento de construções cada vez mais ousadas, a preocupação com a qualidade do concreto produzido cresceu enormemente, a fim de proporcionar maior segurança aos projetos mais desafiadores. Entretanto, o aprimoramento das técnicas de produção do concreto para gerar um produto final mais trabalhável, coeso, durável, resistente, entre outras características fundamentais, levou a um avanço natural no campo de pesquisa desse material.

O projeto estrutural passou a considerar métodos e modelos cujos equacionamentos representassem com maior veracidade o complexo comportamento do concreto. Os modelos puramente lineares não eram mais suficientes para tais considerações. Com o desenvolvimento de modelos não-lineares para o cálculo de estruturas em concreto armado, as não-linearidades física e geométrica começaram a ganhar importância.

A não-linearidade geométrica (NLG) é uma característica relacionada à configuração deformada da estrutura, ou ainda, à sua estabilidade global, enquanto que a não-linearidade física (NLF) é uma propriedade intrínseca dos materiais que provoca a perda de rigidez dos elementos estruturais.

O número de trabalhos que discorrem sobre a NLF em elementos de concreto armado (vigas, pilares e lajes), seja em uma abordagem geral ou mais específica, tem tido um crescimento apreciável. Isso coloca em evidência a importância do tema no que diz respeito ao desenvolvimento de modelos e métodos consideravelmente mais precisos na representação do comportamento desses elementos para o dimensionamento de estruturas.

Para avaliar a contribuição da rigidez à flexão do concreto tracionado íntegro existente entre duas fissuras (*tension stiffening*), Branson (1965) propôs, com base em experimentação de vigas, uma das fórmulas semi-empíricas mais difundidas no meio técnico. A expressão permite o cálculo da rigidez à flexão equivalente (para uma seção transversal ou para um tramo de viga) a partir de um valor intermediário entre as rigidezes dos Estádios I e II do concreto armado.

A fim de realizar uma análise elasto-plástica de pórticos planos retangulares, Ballarotti (1982), desenvolveu dois programas computacionais para a consideração da NLF. O primeiro avaliou-a sozinha e o segundo, em conjunto com a NLG. Foram realizadas comparações com exemplos da literatura e com resultados teóricos e experimentais.

Ghali e Favre (1986) propuseram um valor equivalente, em termos de curvatura da seção transversal, interpolado entre os valores dos Estádios I e II para a consideração dos efeitos da fissuração. Embora as expressões de Branson (1965) e de Ghali e Favre (1986) tenham considerações de parâmetros distintos (rigidez à flexão e curvatura) ambas se propõem a considerar a contribuição do concreto tracionado entre fissuras.

Ao mesmo tempo em que realizou uma análise crítica, Proença (1988) também fez contribuições a respeito do estudo de modelos matemáticos que representassem o comportamento não-linear do concreto armado. Foram apresentados e discutidos os principais modelos de NLF estudados na época. Enfocou-se a associação da análise computacional de estruturas com os modelos constitutivos desenvolvidos para o concreto armado.

Com base na Mecânica do Dano, Álvares (1993), estudou e aplicou um modelo constitutivo não-linear para analisar elementos estruturais de concreto. Os resultados numéricos, obtidos pelo modelo matemático proposto, foram comparados com os experimentais. O autor ensaiou três grupos de vigas - duas vigas para cada grupo – as quais diferiram entre si pelo posicionamento e pelas taxas de armadura tracionada de flexão. Os resultados fornecidos por Álvares (1993) são de grande confiabilidade na comunidade científica, sendo utilizados por diversos autores, incluindo o presente trabalho.

A fim de considerar a não-linearidade do concreto decorrente da fissuração por flexão e torção, Carvalho (1994) analisou pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha. Os resultados obtidos, das análises de esforços e deslocamentos, são comparados com aqueles resultantes da decomposição do pavimento em vigas e lajes, bem como com os fornecidos em análise linear e também com os gerados pelo método dos elementos finitos.

Com o objetivo de desenvolver um procedimento simples e facilmente compreendido para a determinação dos esforços solicitantes, das reações de apoio, dos deslocamentos e da carga crítica de pórticos espaciais em concreto armado,

Soler (1995) apresentou uma teoria de barras retas no espaço para a avaliação em análise não-linear.

Com o intuito de analisar os efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado, Carmo (1995) avaliou métodos aproximados e rigorosos para a consideração das não-linearidades física e geométrica.

A pesquisa de Silva, R. (1996) abordou a formulação de uma teoria consistente para a consideração da NLF e NLG em pórticos planos de concreto armado. O trabalho fundamentou-se na teoria de Euler-Bernoulli-Navier e no Princípio dos Trabalhos Virtuais. As seções transversais dos elementos estruturais foram discretizadas em fatias para a introdução da NLF. O acompanhamento do comportamento não-linear foi realizado mediante o processo iterativo de Newton-Raphson. A formulação proposta foi verificada numericamente com a implementação de um programa computacional.

Pinto (1997) avaliou o nível de confiabilidade dos processos simplificados adotados para a consideração das não-linearidades física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado. Foram elaborados modelos de elementos finitos para a análise da NLF e foi realizado um estudo detalhado para a verificação da NLG, destacando vantagens e limitações dos procedimentos aproximados.

Para melhor representar o comportamento do material concreto armado, Oliveira, Richard, (1997) propôs um modelo de cálculo elasto-plástico com a finalidade de considerar a NLF, incorporando-a em um sistema computacional de elementos finitos não-estratificados. Empregaram-se modelos de relativa simplicidade na representação de vigas e lajes para avaliar o fenômeno elasto-plástico nesses elementos. O software resultante desse trabalho proporcionou uma análise mais realista, econômica e otimizada para o dimensionamento de pavimentos de edifícios. Dessa maneira, auxiliou os projetistas no aperfeiçoamento das hipóteses de cálculo para um processamento mais ágil das estruturas usuais de concreto.

Métodos próprios para o concreto armado, considerando-se a diminuição de rigidez dos elementos, foi o alvo do estudo de Sanches Jr. (1998), que apresentou uma contribuição à análise estrutural de pavimentos de concreto armado por meio da utilização dos modelos não-lineares de Debernardi (1983) e Ghali e Favre (1986). O autor desenvolveu um algoritmo computacional que permitiu a análise tanto para o instante de aplicação das cargas quanto para cargas aplicadas em tempos

quaisquer. Fez-se ainda uma abordagem do fenômeno da fluência do concreto, traçando-se um comparativo entre os modelos.

Aprimorando sua pesquisa anterior, Álvares (1999) enfocou a utilização de modelos mais simplificados para a aplicação em estruturas de concreto armado. Modificou parâmetros no modelo de dano inicialmente proposto, viabilizando o seu emprego em vigas com distribuição assimétrica de armaduras de tração e compressão.

Como a NLF é comumente definida por relações momento fletor-força normal-curvatura em projetos estruturais, Oliveira, Rogério, (2000) sugeriu formulações e ábacos para o cálculo de uma rigidez secante em vigas de concreto armado para uso prático de relações do tipo momento fletor-força normal-rigidez secante. A eficácia dos métodos propostos foi verificada por meio de um exemplo numérico, realizado via análise não-linear, empregando a rigidez secante resultante dos ábacos construídos.

A quantificação da influência da NLF na rigidez à flexão e na capacidade de rotação plástica de elementos de concreto armado foi objeto de estudo de Buchaim (2001). Os resultados gerados por definições teóricas foram comparados com valores experimentais para melhor avaliação do assunto.

Oliveira, Richard, (2001), dando continuidade ao seu trabalho de mestrado, aprimorou sua ferramenta computacional acrescentando complexidade nas representações dos elementos de vigas e lajes, trabalhando com a inclusão de pilares e elementos estratificados. Sua pesquisa objetivou prover a escassez da aplicação de rotinas de cálculo não-lineares seguras e confiáveis para o dimensionamento estrutural.

Através do método dos elementos finitos, Silva, P. (2002) apresentou resultados da avaliação de duas implementações do modelo de microplanos para a análise não-linear de estruturas de concreto. Foi realizado um estudo abordando os elementos essenciais de uma análise fisicamente não-linear. A eficiência dos modelos propostos foi avaliada por meio de simulações de ensaios de compressão axial, tração axial e cisalhamento.

Branco (2002) avaliou a NLF e NLG considerando os efeitos do cisalhamento na obtenção de esforços e deslocamentos em pórticos planos. Foi desenvolvido um algoritmo com a correspondente implementação de um código computacional. A formulação proposta apresentou resultados com boa aplicabilidade prática perante

aos modelos teóricos, entretanto a comparação com valores experimentais não foi possível.

Em sua pesquisa, Crespo (2002) estudou a incorporação da NLF na análise de efeitos de segunda ordem em edifícios de concreto armado, através da consideração de uma rigidez equivalente calculada para tramos de vigas. Os resultados obtidos foram confrontados com os de outros pesquisadores e com os sugeridos pelo projeto de revisão da NB1, NBR 6118 (ABNT, 2000).

A não-linearidade física e geométrica das estruturas de contraventamento em concreto armado foi o foco do estudo de Pinto (2002). Foi desenvolvida uma ferramenta rigorosa para análise estrutural de pórticos planos de maneira consistente e elaborada. A partir da avaliação das reduções de inércias resultantes, foram sugeridas simplificações para a consideração das não-linearidades física e geométrica para o uso na prática em projetos.

Com intuito de representar as fissuras em peças de concreto armado com maior precisão e fidelidade, D'Avila (2003) fez a utilização de modelos não-lineares para os materiais concreto e aço. O primeiro foi representado por um modelo elástico não-linear tridimensional e o segundo por um modelo elasto-plástico com endurecimento.

A preocupação decorrente das flechas excessivas em vigas de concreto armado motiva o trabalho de Lima, P., Fontes e Lima, J., (2003) que, para impedir essa condição propuseram um método que envolve uma análise não-linear do problema. Foi incorporado ao cálculo fatores que influenciam os deslocamentos verticais, tais como retração, fluência, espécie de carregamento e porcentagem de armadura. O método evidenciou a ausência de preceitos normativos brasileiros suficientes para que a ocorrência de patologias, ocasionadas pela deflexão excessiva das vigas, pudesse ser evitada.

Khuntia e Ghosh (2004) apresentaram uma abordagem analítica na obtenção de momentos de inércia de vigas e pilares de concreto armado para a consideração da NLF desses elementos. Os autores sugeriram formulações específicas para as reduções de inércia dos elementos estruturais que consideram parâmetros importantes como taxas de armaduras e esforços solicitantes. Os resultados analíticos mostraram que as expressões do código ACI 318 (2002) são extremamente conservadoras.



Um modelo para a tensão de enrijecimento de elementos fletidos fissurados de concreto armado foi proposto por Torres, López-Almansa e Bozzo (2004). Essa tensão é resultado da capacidade resistiva do concreto tracionado íntegro entre fissuras. Foram analisados os principais parâmetros que influenciam nos efeitos dessa tensão para um melhor entendimento do comportamento global da estrutura.

A elaboração de um processo aproximado para a consideração da NLF em pilares de concreto armado foi o objetivo de Oliveira, P., (2004). Foram utilizadas relações momento-normal-rigidez secante para as análises não-lineares e construíram-se ábacos com valores de rigidez secante adimensionais para o dimensionamento e verificação de pilares. A aplicabilidade desses ábacos pôde ser comprovada através de exemplos numéricos.

Fontes (2005) trouxe uma explanação sobre a análise estrutural de elementos lineares de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2003) em sua pesquisa. Foram abordados os principais modelos permitidos pela norma, bem como a importância da consideração das não-linearidades física e geométrica.

Mediante a utilização de modelos minuciosos, Guarda (2005) sugeriu alturas mínimas para vigas e lajes de concreto armado por meio do estudo de seus deslocamentos, a fim de assegurar que os elementos não apresentassem deformações excessivas. Os deslocamentos foram obtidos em análise não-linear visando abranger a influência das seguintes variáveis pertinentes ao cálculo: fissuração, retração, fluência e colaboração do concreto tracionado íntegro entre fissuras para o enrijecimento da seção (tension stiffening).

Bischoff (2005) reavaliou as expressões para a previsão de flechas em vigas de concreto reforçadas com aço e fibra reforçada com barras de polímero (FRP). A expressão proposta por Branson (1965), altamente dependente da relação entre a seção bruta de concreto e a seção fissurada ( $I_o/I_{II}$ ), subestima a previsão do valor das flechas para ambos os casos, porém em menor escala, para as vigas reforçadas com aço. Foram sugeridas modificações na fórmula, utilizando uma abordagem racional que incorpora o modelo europeu, a fim de tornar a mesma independente da taxa  $I_o/I_{II}$ . A nova expressão funcionou igualmente bem tanto para concretos reforçados com aço como com FRP.

O desenvolvimento de um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado foi objeto de pesquisa de Nogueira (2005).

O modelo gerado permitiu a incorporação da NLF tanto para o concreto quanto para o aço, além de considerar os efeitos não-lineares geométricos.

Vasconcelos, G. (2005) discutiu a segurança de elementos estruturais de concreto armado, em termos de dimensionamento e verificação, levando-se em conta a não-linearidade dos materiais. Foi proposta a verificação simultânea dos estados limites Último e de Serviço, com enfoque na consideração da NLF por meio do método dos elementos finitos. A validação da proposta foi efetivada através da realização de diversas análises.

Com o intuito de realizar a análise estática linear e não-linear física do comportamento de vigas de concreto armado, Faglioni (2006) utilizou um elemento finito prismático regular linear para representar o concreto e um elemento finito de barra para simulação do aço. Para a consideração da NLF foi empregado o critério de Mohr-Coulomb que avalia a perda de rigidez dos elementos estruturais em função da ruptura do material. Através de exemplos comparados com resultados numéricos e experimentais de diversos pesquisadores, o modelo adotado na pesquisa pôde ser validado.

Nogueira e Venturini (2006) apresentaram um modelo desenvolvido para a análise não-linear física e geométrica de estruturas de barras de concreto armado implementado em ferramenta computacional, o qual se mostrou satisfatório frente aos resultados experimentais conhecidos na literatura.

O desenvolvimento de um programa livre para realizar a análise não-linear física e geométrica de estruturas foi o objetivo de Cotta (2007). Foram analisadas estruturas tridimensionais reticuladas, cuja união dos elementos se deu por ligações monolíticas ou semi-rígidas. A validação do programa se concretizou por meio da resolução de vários exemplos numéricos e comparação com outros programas previamente validados.

Através da elaboração de variados modelos de elementos finitos, Stramandinoli (2007) visou à aplicabilidade dos mesmos para a análise não-linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado. Todos os modelos propostos foram incorporados em um programa computacional, o qual se apresentou muito eficaz quando comparado com os resultados experimentais.

Oliveira, D., (2007) trouxe uma análise crítica e comparativa em sua pesquisa referente aos procedimentos sugeridos pela NBR 6118 (ABNT, 2003) para a consideração aproximada das não-linearidades geométrica e física na análise global

das estruturas de concreto armado. A autora apresentou a eficácia e as limitações de cada modelo proposto, evidenciando-os através do dimensionamento de pórticos planos e edifícios de porte médio com o auxílio do programa ANSYS.

Araújo (2007) apresentou uma formulação para a análise não-linear de estruturas reticuladas planas de concreto armado, com base no conceito simplificado de localização dos processos físicos irreversíveis. O modelo implementado foi confrontado com resultados experimentais conhecidos na literatura.

A NLF foi considerada por Martins (2008), na análise de vigas de concreto armado, com a utilização do procedimento refinado recomendado pelo IBRACON (2007). O procedimento, que é análogo ao de Ghali e Favre (1986), foi incorporado à uma ferramenta computacional e, comparativamente com exemplos numéricos, apresentou bons resultados.

O desenvolvimento de um modelo numérico, capaz de representar o comportamento do concreto armado frente a diferentes tipos de carregamentos e estados multiaxiais de tensões, foi o resultado da pesquisa de Bono (2008). Com a utilização do método dos elementos finitos, o modelo permitiu uma análise tridimensional das estruturas através de teorias não-lineares para os materiais aço e concreto. Na comparação com diversas simulações numéricas e resultados experimentais conhecidos na literatura, as previsões do modelo mostraram-se bastante satisfatórias em representar o comportamento mais próximo da realidade dos materiais.

Pereira (2009) desenvolveu um programa computacional, baseado em diagramas momento-curvatura, para automatizar os processos iterativos envolvidos na análise não-linear de materiais. O modelo não-linear de viga foi aplicado para a obtenção de esforços solicitantes, em serviço, de lajes de barragem de enrocamento com face de concreto armado.

Objetivando contribuir com a análise da estabilidade global de estruturas em concreto pré-moldado de múltiplos pavimentos, Marin (2009) considerou os efeitos das não-linearidades física e geométrica em seu estudo. A NLF foi avaliada através de diagramas momento- força normal-curvatura, nos quais foi possível inserir, de forma consistente, o efeito da força normal, da armadura passiva e da ativa.

Para a análise global tridimensional de edifícios altos de concreto armado com a presença de paredes estruturais, Bernardi (2010) fez considerações

aproximadas da NLF permitidas pela NBR 6118 (ABNT, 2007) no desenvolvimento de um modelo computacional.

Corelhano (2010) aborda as características intrínsecas à análise não-linear física e geométrica em núcleos rígidos que compõem estruturas de contraventamento de edifícios altos em concreto armado. Os efeitos da NLF são definidos de forma simplificada para a utilização prática em projetos.

Kalkan (2010) avaliou a previsão de flechas em vigas de concreto armado através de diferentes expressões para o momento de inércia efetivo. Foram examinadas as fórmulas propostas por Branson (1965) e Bischoff (2005). Através da comparação da estimativa de flechas fornecidas por ambos os métodos, pôde-se mensurar o valor das flechas para vigas com altas taxas de armadura ( $0.024 < \rho < 0.034$ ).

Na análise global de edifícios com estrutura em concreto armado, Moncayo (2011) realizou um estudo generalizado da NLF, apontando reduções de rigidez simplificadas para a obtenção de resultados de segunda ordem.

Percebeu-se assim que a consideração da NLF recebeu importância em todos os trabalhos que se propuseram a incorporar com maior realismo o comportamento do concreto armado. A abordagem pode ser tratada com maior aprofundamento e rigor matemático ou ainda com a utilização de expressões simplificadas ou aproximadas, no entanto, esteve sempre presente em todas as pesquisas, direta ou indiretamente.

### **3 A NÃO-LINEARIDADE FÍSICA NOS MATERIAIS E NAS ESTRUTURAS**

A NLF é decorrente do comportamento não-linear dos materiais. O concreto, por ser um aglomerado de constituintes (agregados, cimento, água, aditivos, etc.), possui naturalmente um comportamento bastante singular e heterogêneo que, juntamente com o aço, torna-se altamente complexo em virtude da interação entre esses materiais.

Nos elementos estruturais de concreto armado, a NLF está relacionada à perda de rigidez dos mesmos e suas principais causas são a fissuração do concreto, o deslizamento das armaduras, a plastificação dos materiais (aço e concreto) e a deformação lenta (fluência) do concreto.

Para entender tais fenômenos é necessário diferenciar os modelos que definem o comportamento dos materiais. Neste capítulo, apresentam-se no item 3.1 algumas propriedades mecânicas importantes dos materiais, especialmente as relacionadas com o tema deste trabalho.

#### **3.1 Comportamento mecânico dos materiais**

Um dos principais parâmetros que caracteriza um material quanto a sua deformabilidade é o módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ), cujo valor pode ser obtido por meio de ensaios experimentais de carga e descarga de corpos de prova. Observando o traçado dos diagramas tensão-deformação, fornecidos em tais ensaios, é possível diferenciar as principais propriedades que regem o comportamento dos materiais.

Quando um corpo de prova (C. P.) genérico é submetido a um carregamento uniaxial de tração ou compressão (figura 3.1), a tensão ( $\sigma$ ) que surge nesse material e a deformação ( $\epsilon$ ) resultante são definidas, respectivamente, pelas equações 3.1 e 3.2:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_i} \quad (3.2)$$

Em que:

F é a força aplicada;

A é a área da seção transversal do C. P. antes da aplicação da força;

$\Delta L$  é a deformação longitudinal resultante da aplicação da força;

$L_i$  é o comprimento inicial do C. P.;

$L_f$  é comprimento final do C. P.

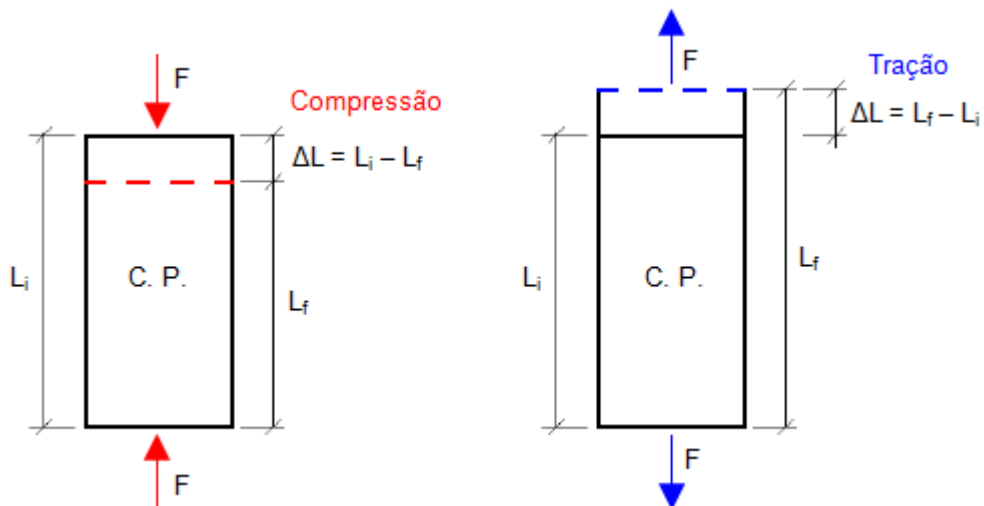


Figura 3.1 – Corpo de prova submetido à carga uniaxial.

### 3.1.1 Linearidade e elasticidade

Um material apresenta comportamento linear quando o traçado do diagrama tensão-deformação ( $\sigma \times \varepsilon$ ) assume a forma de uma reta. Por sua vez, o comportamento é dito elástico quando, no descarregamento, retorna a posição inicial, ou seja, quando retirada a tensão aplicada, a deformação cessa sem deixar nenhum valor residual (figura 3.2).

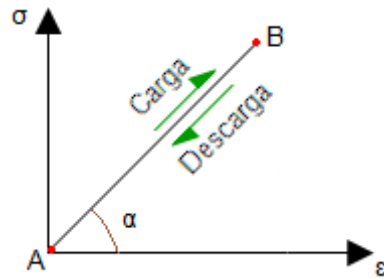


Figura 3.2 – Comportamento elástico-linear.

A lei que expressa a proporcionalidade entre as tensões aplicadas e as deformações resultantes é dada pela equação 3.3, conhecida como a Lei de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.3)$$

Em que:

$\sigma$  é tensão do material estudado;

$E = \operatorname{tg} \alpha$  (figura 3.2) é o módulo de elasticidade longitudinal do material;

$\varepsilon$  é a deformação sofrida pelo material.

Na maioria dos materiais, para baixos níveis de solicitações, percebe-se comportamento elástico-linear, ou pelo menos, a hipótese de assumir tal comportamento é bastante satisfatória. Entretanto, as propriedades de linearidade e elasticidade nem sempre ocorrem juntas, como pode ser ilustrado na figura 3.3:

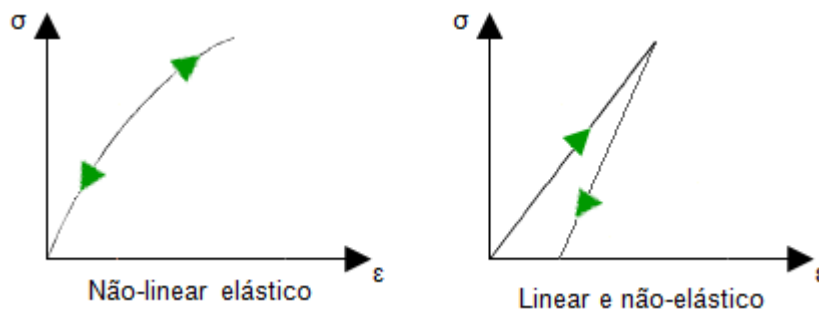


Figura 3.3 – Comportamento tensão-deformação.

Na figura 3.3 pode-se perceber um comportamento elástico, porém não-linear e um comportamento linear, entretanto não-elástico.

### 3.1.2 Plasticidade

Quando os materiais são solicitados por níveis mais intensos de carregamento, inevitavelmente surgirão deformações irreversíveis em sua estrutura, especialmente para tensões próximas da capacidade resistiva do material. Essa deformação é dita deformação plástica (residual,  $\epsilon_p$ ), ou seja, mesmo que sejam cessadas as solicitações, as deformações não mais desaparecem (figura 3.4).

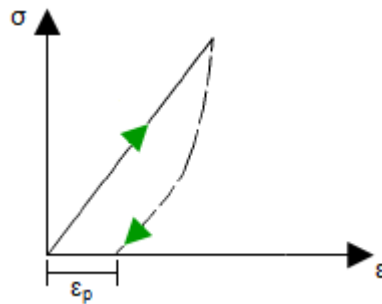


Figura 3.4 – Comportamento plástico de alguns tipos de solos.

### 3.1.3 Ductilidade

Materiais ditos dúcteis são aqueles que sofrem grandes deformações plásticas antes da ruptura, ou seja, eles “avisam” quando o colapso é iminente. Esta é uma propriedade desejável dos materiais (e também das estruturas) da construção civil. Por outro lado, um material é dito frágil quando não apresenta ductilidade (figura 3.5).

O aço para construção civil é um material dúctil, especialmente quando comparado ao concreto, que é considerado um material quase-frágil.



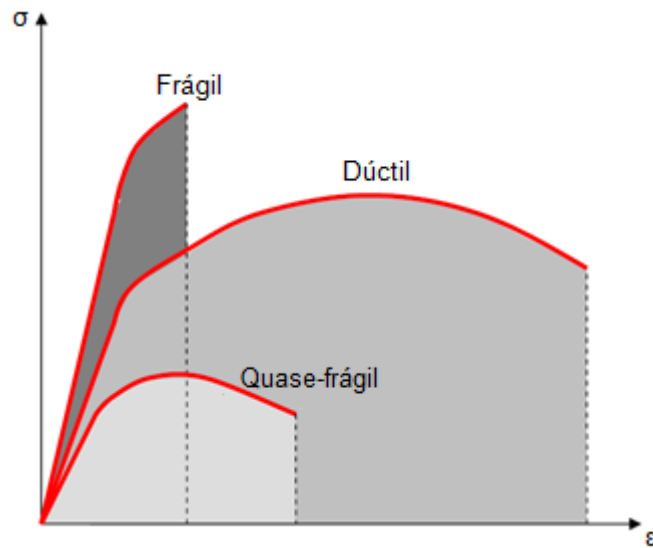


Figura 3.5: Comportamento tensão-deformação de um material dúctil e frágil.  
 Fonte: Adaptado de Andrade (2010).

#### 3.1.4 Deformação lenta (Fluência)

A deformação lenta está associada ao comportamento viscoso do material, no qual se observa que as deformações continuam a ocorrer ao longo do tempo (meses, anos) mesmo com carregamentos constantes.

A deformação lenta (fluência) do concreto exerce influência na deformabilidade de estruturas de concreto armado, pois se soma à deformação imediata ocorrida no instante da aplicação das tensões. Por esse motivo, a fluência deve ser considerada nas verificações de flechas verticais nos projetos estruturais.

### 3.2 Comportamento uniaxial do aço para o concreto armado

Os aços estruturais utilizados na construção civil possuem comportamento dúctil; entretanto podem apresentar ou não patamar de escoamento. Os aços podem ser caracterizados em ensaios normalizados de tração, dos quais se obtêm

diagramas tensão-deformação dos corpos de prova (barras) submetidos à carga axial.

No diagrama típico dos aços laminados a quente (figura 3.6) é possível destacar algumas fases importantes durante o processo de carregamento da barra de aço ensaiada.

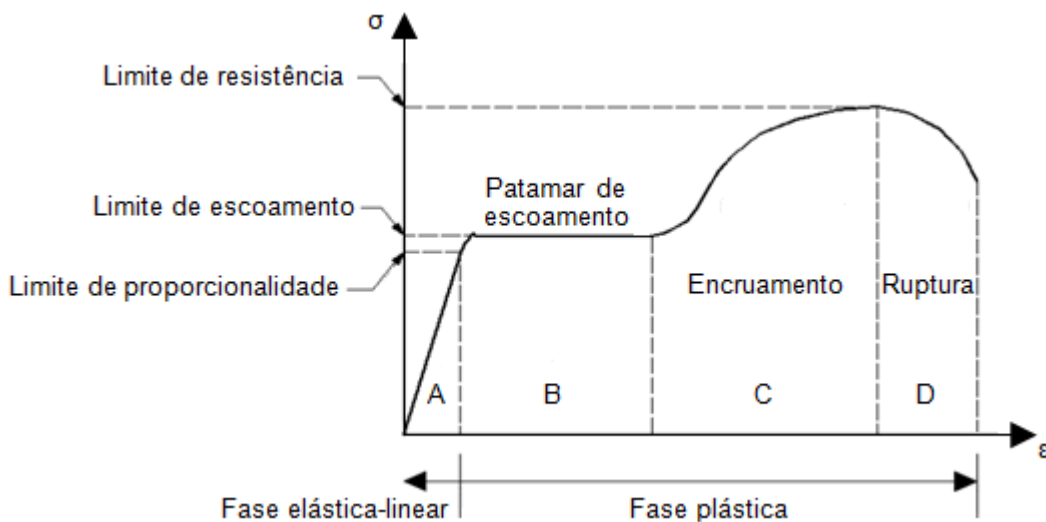


Figura 3.6 – Aços estruturais laminados a quente (CA 25 e CA 50).

A barra é tracionada com cargas crescentes e, até um limite, dentro do regime elástico-linear, existe proporcionalidade entre tensões e deformações, sendo válida a lei de Hooke. Esse limite é dito limite de proporcionalidade. Após esse valor, tem início o regime plástico, no qual aparecem deformações irreversíveis na estrutura do aço, observando-se uma relação não-linear entre tensão e deformação até que seja atingido o limite de escoamento. Neste último ocorrem grandes deformações sem que haja alteração significativa de tensões, caracterizando assim, o patamar de escoamento.

A próxima fase é o encruamento, em que as partículas se rearranjam conferindo maior dureza ao aço. Observa-se novamente o aumento da deformação com o aumento de tensão em uma relação não-linear. Posteriormente verifica-se o fenômeno da diminuição do diâmetro da seção transversal, conhecido como estrição, que ocorre no ponto de tensão máxima (limite de resistência). Em

seguida, uma tensão inferior a máxima (ou última) é suficiente para proporcionar deformações no corpo de prova até sua ruptura (tensão de ruptura).

Aços estruturais formados a frio (figura 3.7) não apresentam patamar de escoamento. A fase elástica termina e imediatamente inicia-se a fase plástica. Nesse caso, para a determinação da tensão de escoamento, adota-se um valor convencional. Esse é obtido traçando-se uma paralela a reta inicial do diagrama tensão-deformação no ponto de abscissa correspondente à deformação de 0,002. A intersecção da paralela com o gráfico define o valor da tensão de escoamento convencional.

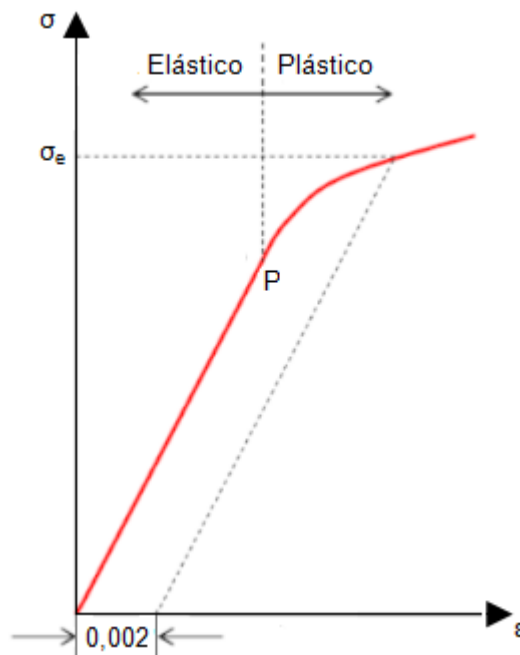


Figura 3.7 – Aços estruturais formados a frio.  
Fonte: Adaptado de Callister Jr (2002).

Os comportamentos dos aços, anteriormente descritos, são os que realmente acontecem nos ensaios de tração. Entretanto modelos matemáticos idealizados são convenientes para facilitar a representação (simulação) do comportamento dos materiais. Na figura 3.8 são ilustrados modelos constitutivos tanto para o aço embutido no concreto armado quanto no protendido:

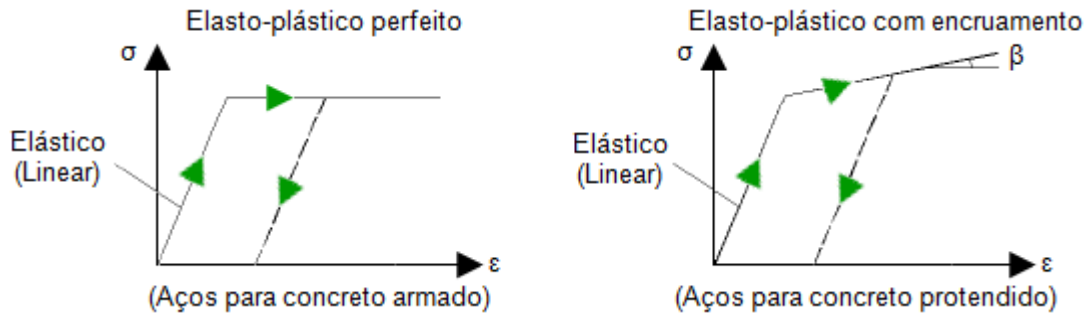


Figura 3.8 – Modelos idealizados para o aço.

### 3.3 Comportamento uniaxial do concreto simples

Antes mesmo da aplicação de alguma carga, o concreto simples já apresenta microfissuração em toda a sua estrutura interna no processo de cura (secagem do concreto), especialmente, devido ao fenômeno da retração (redução de volume). Durante o procedimento de carregamento, nos ensaios de tração ou compressão, a propagação das microfissuras iniciais, associada à perda de rigidez estrutural no concreto, tornam-se as principais responsáveis pelo comportamento não-linear observado nos diagramas tensão-deformação desse material (figura 3.9).

O concreto, quando submetido a cargas axiais de compressão apresenta boa resistência. Porém, quando tracionado, resiste apenas em torno de 10% de sua resistência à compressão. Esse quadro justifica a utilização do aço em locais onde o concreto está submetido a tensões de tração.

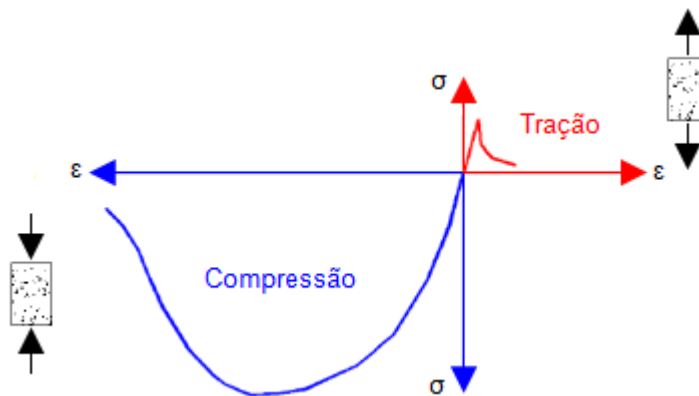


Figura 3.9 – Comportamento uniaxial típico de concretos.

O comportamento idealizado do concreto é definido através de um modelo de diagrama tensão-deformação parábola-retângulo, cujos valores são adotados em função das análises que se pretendem estudar. A NBR 6118 (ABNT, 2007) utiliza o diagrama tensão-deformação da figura 3.10 para compressão uniaxial do concreto:

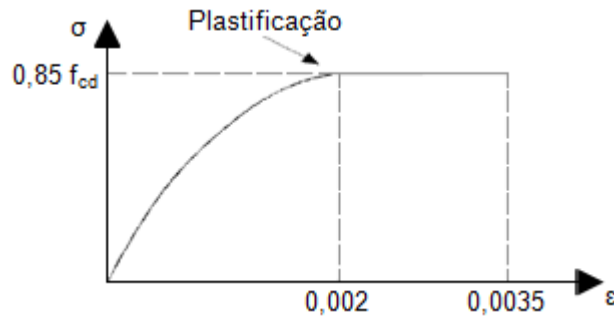


Figura 3.10 – Modelo idealizado para o concreto armado.

### 3.4 Comportamento de vigas de concreto armado submetidas à flexão simples

Um das causas do comportamento não-linear das estruturas (figura 3.11) evidentemente é a NLF dos materiais.

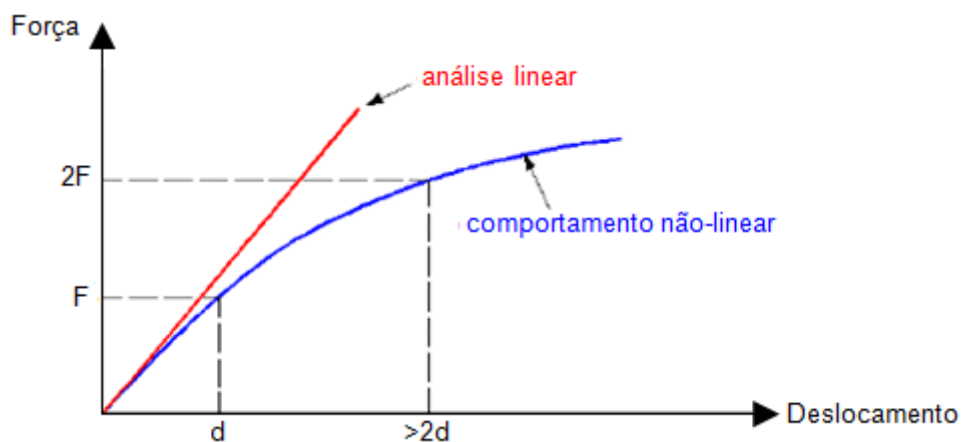


Figura 3.11 – Comportamento não-linear em vigas.

Nas vigas de concreto armado, a NLF pode se manifestar pela formação, abertura e propagação de fissuras, bem como por deformações excessivas. O comportamento não-linear das mesmas pode ser identificado em curvas força-deslocamento experimentais, facilmente encontradas em diversos trabalhos da bibliografia especializada.

O comportamento não-linear do concreto armado também pode ser comprovado em diagramas momento-curvatura de seções transversais de vigas. O desenvolvimento da fissuração do concreto e da plastificação dos materiais com a intensidade das solicitações pode ser observado na figura 3.12, na qual se apresenta um típico diagrama momento-curvatura de uma seção armada quando a mesma está submetida à flexão simples.

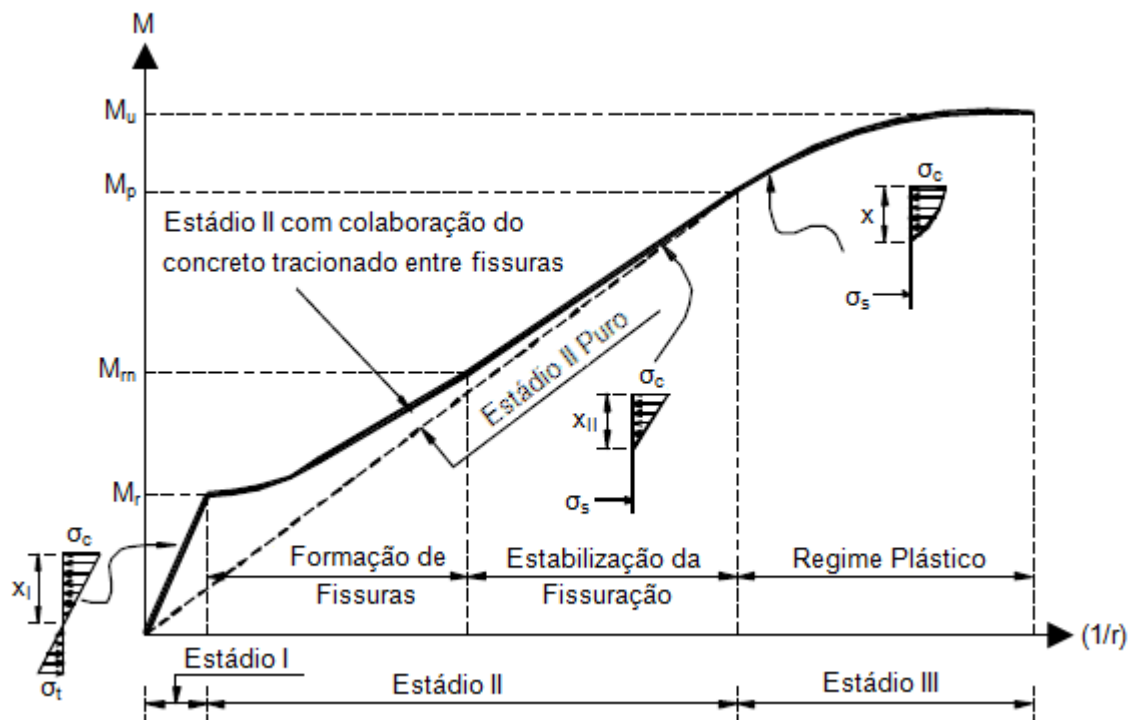


Figura 3.12 – Diagrama momento-curvatura de seção submetida à flexão simples.

Fonte: Adaptado de Guarda (2005).

Em que:

$M_r$  é valor do momento de fissuração;

$M_m$  é o valor do momento a partir do qual não há formação de novas fissuras;

$M_p$  é o valor do momento de plastificação;

$M_u$  é o valor do momento último;

$\sigma_c$  é o valor da tensão de compressão no concreto;

$\sigma_t$  é o valor da tensão de tração no concreto;

$\sigma_s$  é o valor da tensão na armadura tracionada;

$x_I$  é a distância da linha neutra da seção transversal da peça à fibra mais comprimida do concreto no Estádio I;

$x_{II}$  é a distância da linha neutra da seção transversal da peça à fibra mais comprimida do concreto no Estádio II;

$x$  é a distância da linha neutra da seção transversal da peça à fibra mais comprimida do concreto no Estádio III.

Dessa maneira, ficam caracterizados três estágios básicos para a representação comportamental de uma seção fletida de concreto, a saber: Estádio I, Estádio II e Estádio III.

No Estádio I a seção trabalha em regime elástico linear, existindo proporcionalidade entre as tensões atuantes e as deformações, não havendo ocorrência de fissuras visíveis (macro fissuras). A lei de Hooke é válida para esse estágio devido aos baixos níveis de tensões.

No Estádio II puro (seção fissurada), somente o aço é considerado para resistir aos esforços solicitantes de tração. A tensão de compressão no concreto é admitida, como simplificação, linear ao longo da altura da seção. Em um primeiro momento, as fissuras apenas começam a se formar e, posteriormente, essas se estabilizam, ou seja, não ocorre o surgimento de novas fissuras, porém as já existentes iniciam o processo de abertura. Nessa situação as fissuras na face tracionada do concreto já são visíveis.

No Estádio III, (regime de ruptura), as tensões de compressão do concreto não são lineares ao longo da altura da seção, estando quase todas as fibras do concreto comprimido com a sua tensão máxima (resistente). A ruína ocorre por esmagamento. Nos projetos estruturais, segundo a NBR 6118 (ABNT, 2007), o diagrama de tensões do concreto comprimido ao longo da altura da seção é idealizado como uma parábola-retângulo, podendo ser substituído por um diagrama retangular equivalente (figura 3.13).

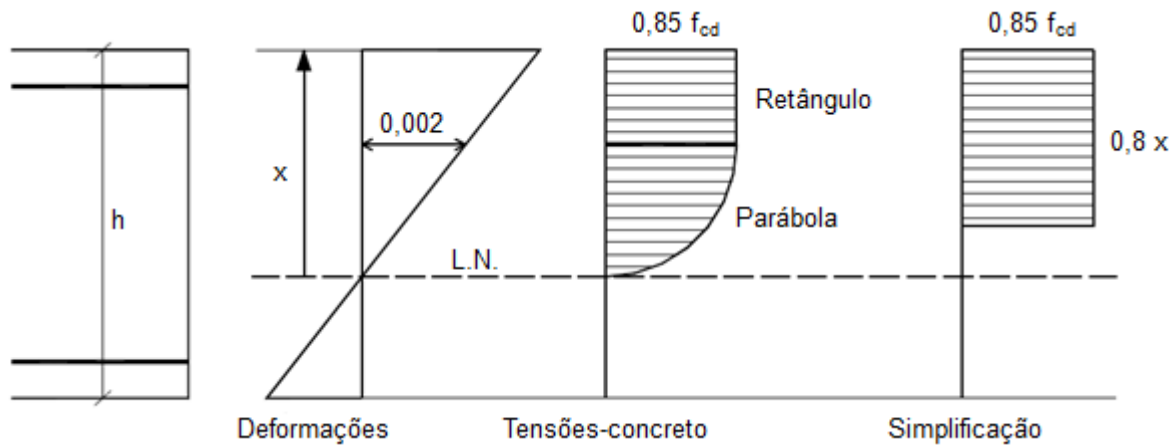


Figura 3.13: Distribuição das tensões do concreto em seções retangulares no Estádio III conforme NBR 6118 (ABNT, 2007).

Quando a viga ingressa no Estádio II, percebe-se que, ao se desprezar totalmente o concreto tracionado (Estádio II puro), faz-se uma consideração conservadora, pois entre duas fissuras consecutivas existe concreto íntegro que ainda apresenta capacidade resistiva frente às solicitações de tração. Esse, por sua vez, contribui consideravelmente para o aumento da rigidez da peça nessas regiões comparativamente à sua desconsideração.

Surgem, assim, diversos modelos constitutivos para que o enrijecimento da seção devido ao concreto tracionado entre fissuras (*tension stiffening*) possa ser considerado na análise estrutural. Alguns desses modelos são abordados no próximo capítulo.



## 4 MODELOS CONSTITUTIVOS NÃO-LINEARES EM ELEMENTOS FLETIDOS

Para o estudo da NLF em estruturas de concreto armado é necessária a adoção de modelos constitutivos que representem adequadamente o comportamento não-linear dos materiais. Assim, em qualquer modelagem, é necessário escolher modelos constitutivos para o concreto (estado uniaxial ou multiaxial de tensões; tração e compressão), para o aço das armaduras e para o comportamento aderência-deslizamento das armaduras na interface aço-concreto.

Para as análises em estruturas reticuladas formadas por vigas e pilares, a NLF é comumente considerada com a utilização de um modelo constitutivo único que emprega relações momento-curvatura de seções transversais. Em projetos estruturais, a escolha de modelos constitutivos baseados em diagramas momentos-curvatura é atrativa pela simplicidade e eficiência.

### 4.1 Diagramas momento-curvatura de elementos lineares

A rigidez à flexão ( $EI$ ) de um elemento linear de concreto armado pode ser obtida através de sua curvatura. A figura 4.1 apresenta uma viga simplesmente apoiada, de comprimento  $L$ , submetida a um carregamento distribuído qualquer. O eixo das abscissas ( $s$ ) é representado pelas seções transversais ao longo da viga e o eixo das ordenadas ( $v$ ) equivale aos deslocamentos verticais correspondentes a cada uma das seções:

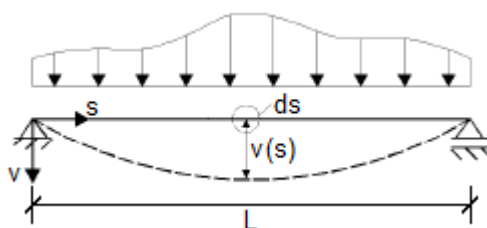


Figura 4.1 – Elemento de viga.

A figura 4.2 ilustra um elemento infinitesimal de viga de comprimento ( $ds$ ):

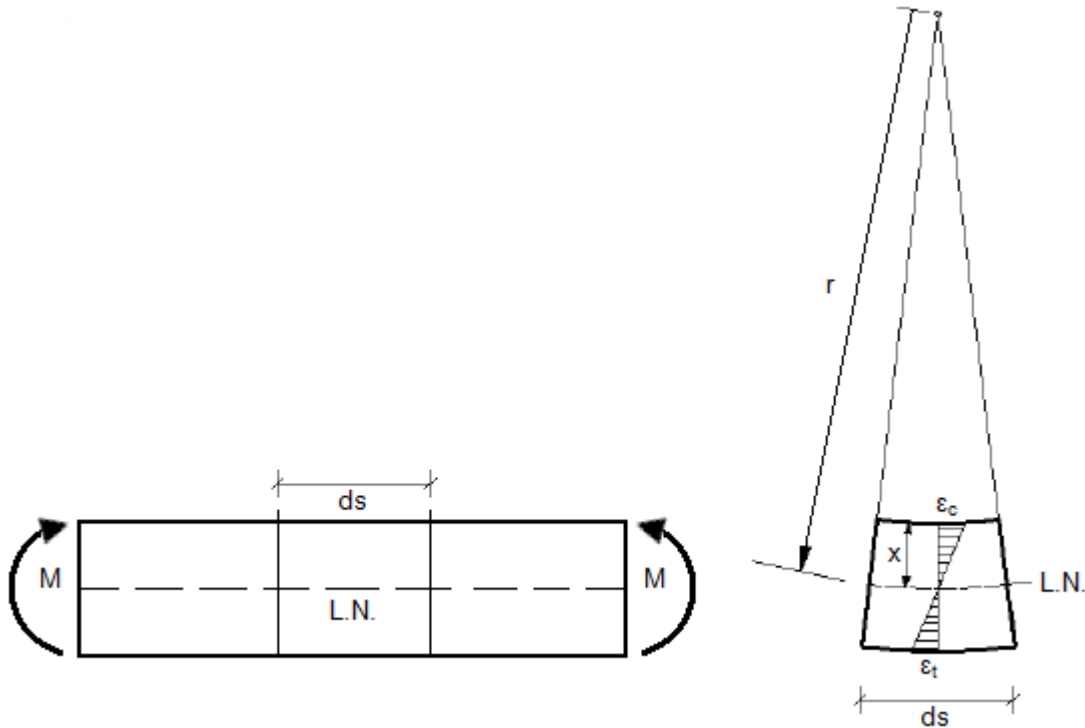


Figura 4.2 – Raio de uma seção transversal.

Em que:

$r$  é raio de curvatura;

L.N. é a posição da linha neutra;

$x$  é a distância da fibra mais comprimida da seção à L.N. (ou profundidade da L.N.);

$\epsilon_c$  é a deformação do concreto na fibra mais comprimida;

$\epsilon_t$  é a deformação do concreto na fibra mais tracionada.

Conhecido o raio de curvatura  $r$  e o momento fletor atuante uma seção genérica  $s$  da peça, é possível estabelecer a relação aproximada descrita pela equação 4.1:

$$v'' = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = \frac{\epsilon_c}{x} \quad (4.1)$$

Em que:

$v''$  é a derivada segunda da função que descreve o campo de deslocamentos verticais;

$1/r$  é a curvatura da seção transversal;

$M$  é o momento fletor atuante na seção transversal;

$EI$  é a rigidez à flexão da seção transversal.

Os deslocamentos ( $v$ ) da viga considerada podem então, ser obtidos por meio da integração dupla do diagrama das curvaturas das seções ao longo do comprimento. Para baixos níveis de tensões o diagrama momento-curvatura é linear e a rigidez ( $EI$ ) é obtida facilmente pela tangente do ângulo  $\alpha$  (figura 4.3):

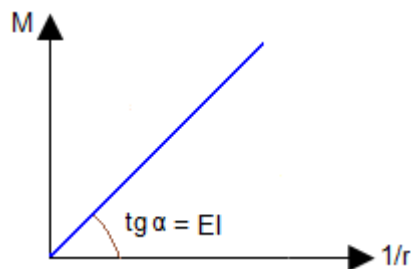


Figura 4.3 – Diagrama momento-curvatura linear.

Entretanto, a linearidade mantém-se somente até o estágio I. Posteriormente com o aumento do carregamento atuante, o diagrama momento-curvatura assume o aspecto não-linear da figura 4.4, no qual se torna visível a variação da rigidez à flexão ( $EI$ ) no trecho AB (Estádio II):

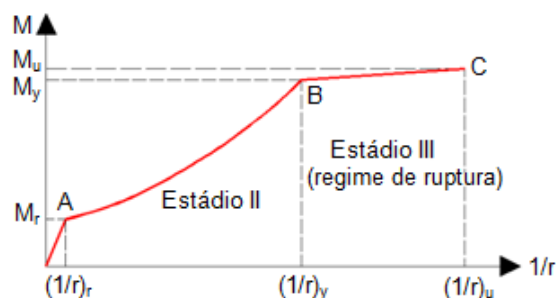


Figura 4.4 – Diagrama momento-curvatura não-linear.

Vale observar que, entre o início do Estádio II e a ruptura no Estádio III, a profundidade da linha neutra ( $x$ ) também varia à medida que a intensidade dos carregamentos aplicados aumenta.

Para chegar-se às curvaturas ( $1/r$ ) e à rigidez à flexão ( $EI$ ) é necessária a obtenção do valor de  $x$ , a qual deve ser feita por meio do equilíbrio de forças e momentos e integração das tensões do concreto na seção – em especial no Estádio III.

Alternativamente, métodos analíticos para o cálculo dos valores de rigidez ( $EI$ ) foram propostos na bibliografia especializada, especialmente no Estádio II.

#### 4.2 Modelo de Branson (1965)

De uma forma geral, um elemento de concreto armado apresenta valores distintos de rigidez à flexão em cada seção, dependendo da intensidade das solicitações e da fissuração em que se encontra. Na figura 4.5 esse fenômeno fica perceptível, pois seções consideradas em regiões onde não existem fissuras possuem rigidez maior em relação àquelas posicionadas sobre uma fissura.

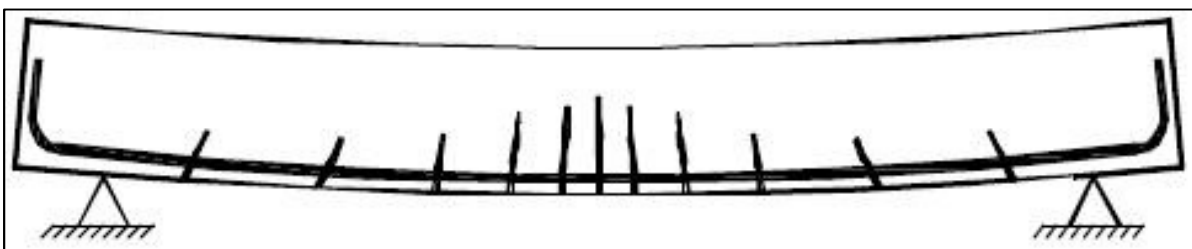


Figura 4.5 – Exemplo de distribuição das fissuras em uma viga.  
Fonte: Guarda (2005).

Rigidezes diferentes acarretam valores para os momentos de inércia também diferentes para cada seção. Assim sendo, Branson (1965) propôs uma formulação semi-empírica, resultante de estudos experimentais, para a consideração de um momento de inércia efetivo (equivalente), ou seja, um valor médio interpolado entre

os momentos de inércia da seção não fissurada (Estádio I) e da seção fissurada (Estádio II puro).

Ambas as seções são consideradas no cálculo de forma homogeneizada, que nada mais é do que a transformação das áreas de aço por áreas equivalentes de concreto através de um coeficiente multiplicador (razão entre o módulo de elasticidade longitudinal entre os dois materiais). Dessa forma, os momentos de inércia para os Estádios I e II englobam toda a área da seção transversal representando uma única área de concreto.

O momento de inércia efetivo (equivalente) proposto por Branson (1965) é dado pela equação 4.2:

$$I_{eq} = \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^m \cdot I_I + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^m \right] \cdot I_{II} \quad (4.2)$$

Em que:

$M_r$  é o momento de fissuração;

$m$  é a potência que define se o cálculo é feito considerando todo o vão, nesse caso  $m = 3$  ou seções individuais do mesmo (discretização), em que  $m = 4$ ;

$M_a$  é o momento fletor atuante em cada seção transversal ou o momento máximo positivo atuante em todo o vão;

$I_I$  é o momento de inércia da seção homogeneizada no Estádio I;

$I_{II}$  é momento de inércia da seção homogeneizada no Estádio II;

As normas de projeto nacionais e internacionais costumam adotar uma simplificação para a equação proposta por Branson (1965), sugerindo a substituição do momento de inércia da seção homogeneizada no Estádio I pelo momento de inércia da seção bruta de concreto (equação 4.3):

$$I_{eq} = \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^m \cdot I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^m \right] \cdot I_{II} \quad (4.3)$$

$I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto.

Entretanto, tal simplificação é muito conservadora para vigas super armadas, ou seja, com elevadas taxas de armadura ( $>1,5\%$ ), devendo-se optar, nesses casos, pela formulação de Branson (1965).

### 4.3 Modelo de Ghali e Favre (1986)

Uma expressão para o cálculo de uma curvatura média (ou equivalente), cujo valor é uma ponderação entre os valores das curvaturas dos Estádios I e II puro, foi desenvolvida por Ghali e Favre (1986). A formulação é dada pela equação 4.4:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_m = (1 - \zeta) \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_I + \zeta \left(\frac{1}{r}\right)_{II} \quad (4.4)$$

Em que:

$\left(\frac{1}{r}\right)_I = \frac{M_a}{E_{cs} \cdot I_I}$  é a curvatura da seção para o Estádio I;

$\left(\frac{1}{r}\right)_{II} = \frac{M_a}{E_{cs} \cdot I_{II}}$  é a curvatura da seção para o Estádio II;

$I_I$  é o momento de inércia da seção homogeneizada no Estádio I;

$I_{II}$  é momento de inércia da seção homogeneizada no Estádio II;

$M_a$  é o momento fletor atuante;

$E_{cs}$  é o módulo de elasticidade secante do concreto;

$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^2$  é o coeficiente de interpolação entre os Estádios I e II;

$\beta_1 = 1,0$  para barras de alta aderência (com nervuras);

$\beta_1 = 0,5$  para barras lisas;

$\beta_2 = 1,0$  para o primeiro carregamento; cargas pouco repetitivas, não permanentes ;

$\beta_2 = 0,5$  para cargas permanentes ou com grande número de ciclos;

$M_r$  é o momento de fissuração;

A fórmula proposta por Ghali e Favre (1986) é utilizada no CEB-FIP Model Code (1990) e também é apresentada nos comentários técnicos do IBRACON (2007).

Os modelos analíticos apresentados nos itens 4.2 e 4.3 são bastante utilizados em vigas e lajes de concreto armado.

#### 4.4 Método aproximado proposto por Khuntia e Ghosh (2004)

Baseando-se em um estudo paramétrico, Khuntia e Ghosh (2004) recomendaram simples formulações para o cálculo do momento de inércia de vigas e pilares, tanto para os níveis de carregamento em serviço quanto para as cargas últimas.

Para as vigas é proposto um momento de inércia secante, ou seja, independente de esforços solicitantes, apenas a taxa de armadura longitudinal é considerada. A formulação é dada pela equação 4.5:

$$I_{\text{sec}} = I_c \cdot (0,1 + 25 \cdot \rho) \cdot \left( 1,2 - 0,2 \cdot \frac{b_w}{d} \right) \leq 0,6 \cdot I_c \quad (4.5)$$

Em que:

$I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto da viga;

$\rho = A_{st}/(b_w \cdot d)$  é a taxa geométrica de armadura longitudinal;

$A_{st}$  é a área de armadura tracionada;

$b_w$  é a largura da viga;

$d$  é a altura útil da viga.

Para os pilares é sugerido um momento de inércia equivalente (equação 4.6), no qual está presente a influência das armaduras e também dos esforços solicitantes:

$$I_{\text{sec}} \leq I_{\text{eq}} = I_c \cdot (0,8 + 25 \cdot \rho) \cdot \left( 1 - \frac{e}{h} - 0,5 \cdot \frac{N_{sd}}{N_{rd0}} \right) \leq I_c \quad (4.6)$$

Em que:

$I_{sec}$  é o momento de inércia secante adaptado para a seção transversal do pilar (equação 4.7);

$I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto do pilar;

$\rho = A_s/A_c$  é a taxa geométrica de armadura longitudinal;

$A_s$  é a área total de armadura do pilar;

$A_c$  é a área da seção bruta de concreto do pilar;

$h$  é a altura da seção do pilar;

$e = M_{sd}/N_{sd}$  é a excentricidade do pilar;

$N_{sd}$  é o esforço normal solicitante de cálculo;

$M_{sd}$  é máximo momento atuante no tramo analisado;

$N_{rd0} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot A_c \cdot (1 - \rho) + A_s \cdot \sigma_s$  é o esforço normal resistente supondo carga centrada ( $M_{sd} = 0$ );

$f_{cd}$  é a resistência à compressão do concreto;

$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$  é a tensão nas armaduras comprimidas do pilar;

$E_s$  é o módulo de elasticidade do aço;

$\varepsilon_s = 0,002$  é a deformação na armadura comprimida com carga centrada.

Quando o pilar possui grande excentricidade, a equação 4.6 assume um valor muito baixo, devendo-se nesse caso prevalecer o limite inferior da equação, ou seja,  $I_{sec}$ . Adaptando a equação 4.5 a seção transversal do pilar, chega-se a equação 4.7:

$$I_{sec} = I_c \cdot (0,1 + 25 \cdot \rho) \cdot \left( 1,2 - 0,2 \cdot \frac{b_w}{h} \right) \leq 0,6 \cdot I_c \quad (4.7)$$

Em que:

$I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto do pilar;

$\rho = A_{st}/(b_w \cdot d)$  é a taxa geométrica de armadura longitudinal do pilar;

$A_{st} = A_s/2$  é a área de armadura tracionada do pilar;

$A_s$  é a área total de armadura do pilar

$b_w$  é a largura da seção transversal do pilar;

$h$  é altura da seção transversal do pilar.



## **5 PRESCRIÇÕES NORMATIVAS PARA A CONSIDERAÇÃO DA NÃO-LINEARIDADE FÍSICA**

Em seu item 14.5 a norma aborda os tipos de análises estruturais permitidas para as estruturas de concreto armado, porém, deixa claro que, a utilização de quaisquer dos modelos propostos está intimamente ligada com o comportamento definido para os materiais constituintes da estrutura e as limitações impostas para cada modelo.

### **5.1 Análise não-linear**

O comportamento real dos materiais aço e concreto, como visto no capítulo 3, é marcadamente não-linear. Para dimensionar uma estrutura levando-se em consideração esse comportamento é necessário realizar uma análise não-linear do problema. Entretanto, para que isso seja possível, é fundamental o conhecimento de toda a geometria e armadura da estrutura, bem como devem ser verificadas as condições de equilíbrio, compatibilidade e de ductilidade da mesma.

Uma análise não-linear completa requer extrema complexidade no seu desenvolvimento para que possa contemplar todos os parâmetros que envolvem as não-linearidades física e geométrica dos elementos estruturais. A sua realização, dependendo da geometria da estrutura, torna-se praticamente inviável sem uma ferramenta computacional eficiente. Porém, representa com bastante fidelidade o comportamento estrutural e pode ser utilizada tanto para considerações no Estado Limite Último (ELU) quanto para verificações em Estado Limite de Serviço (ELS), além de servir como análise de referência para métodos simplificados e aproximados.

Como alternativa para a execução de uma análise não-linear, existem prescrições normativas que sugerem simplificações e aproximações que facilitam o trabalho do projetista e produzem bons resultados para a consideração da não-

linearidade dos materiais. Nos itens 5.2 e 5.3 algumas dessas alternativas são expostas.

## **5.2 Simplificações permitidas pela NBR 6118 (ABNT, 2007) para análises em Estado Limite Último**

### **5.2.1 Análise linear**

A análise linear admite os materiais como elástico-lineares e relações lineares entre tensões e deformações, sendo válida a Lei de Hooke. A importância da análise linear está ligada à possibilidade de superposição de efeitos e de uma primeira estimativa e aproximação para a análise não-linear. Além disso, é importante ressaltar que muitos processos não-lineares baseiam-se em procedimentos iterativos que empregam análises lineares. Essa análise é também a mais fácil e simples de ser processada, permitindo ajustes ou correções para que a NLF possa ser considerada, ainda que de forma simplificada.

A análise linear geralmente é empregada em estruturas relativamente simples e para verificações em ELS. Para que os resultados possam ser utilizados para o ELU é preciso garantir as condições de ductilidade dos elementos estruturais.

Para que a ductilidade na região dos apoios em vigas ou ainda em ligações com outros elementos possa ser garantida e melhorada, a norma estipula que a posição da linha neutra no ELU deva satisfazer os seguintes valores limites:

$$x/d \leq 0,50 \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa};$$

$$x/d \leq 0,40 \text{ para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa}.$$

### 5.2.1.1 Reduções de inércia à flexão para análises globais:

A NBR 6118 (ABNT, 2007) permite uma consideração simplificada da NLF para emprego em análises lineares, cujos resultados são corrigidos com a introdução de valores reduzidos de rigidez à flexão dos elementos.

Os valores indicados para a redução da rigidez de elementos estruturais são restringidos para o caso de uma análise de esforços globais de 2ª ordem e em estruturas reticuladas com no mínimo quatro andares. São estes:

Para lajes:  $(EI)_{sec} = 0,3 E_{ci} \cdot I_c$ ;

Para vigas:  $(EI)_{sec} = 0,4 E_{ci} \cdot I_c$  ( $A_s' \neq A_s$ ) e  $(EI)_{sec} = 0,5 E_{ci} \cdot I_c$  ( $A_s' = A_s$ );

Para pilares:  $(EI)_{sec} = 0,8 E_{ci} \cdot I_c$ ;

Para vigas e pilares:  $(EI)_{sec} = 0,7 E_{ci} \cdot I_c$  (estruturas de contraventamento formadas somente por vigas e pilares e  $\gamma_z < 1,3$ ).

Em que:

$E_{ci}$  é o módulo de elasticidade tangente inicial do concreto;

$I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto (incluindo, quando necessário, as mesas colaborantes);

$\gamma_z$  é o coeficiente de avaliação da instabilidade e majoração dos esforços globais finais de 1ª ordem para obtenção dos finais de 2ª ordem.

### 5.2.2 Análise linear com redistribuição de esforços

De acordo com Fontes (2005, p.24) “uma vez realizada a análise linear de uma estrutura, pode-se proceder a uma redistribuição dos esforços calculados, decorrente da variação de rigidez dos elementos estruturais.” Esse novo processamento é denominado de análise linear com redistribuição de esforços. A análise linear com redistribuição de esforços somente pode ser aplicada em procedimentos de Estado Limite Último.

A principal causa da redistribuição de esforços em vigas de concreto armado deve-se a perda de rigidez à flexão das seções (em especial nos apoios) causada

pela fissuração do concreto – que se inicia geralmente no Estádio II e se acentua no Estádio III – e pela plastificação dos materiais, especialmente quando as armaduras começam a escoar (domínios 2 e 3). Como consequência dessa redistribuição, os momentos fletores negativos nos apoios são reduzidos enquanto aumentam os momentos positivos ao longo do vão (figura 5.1).

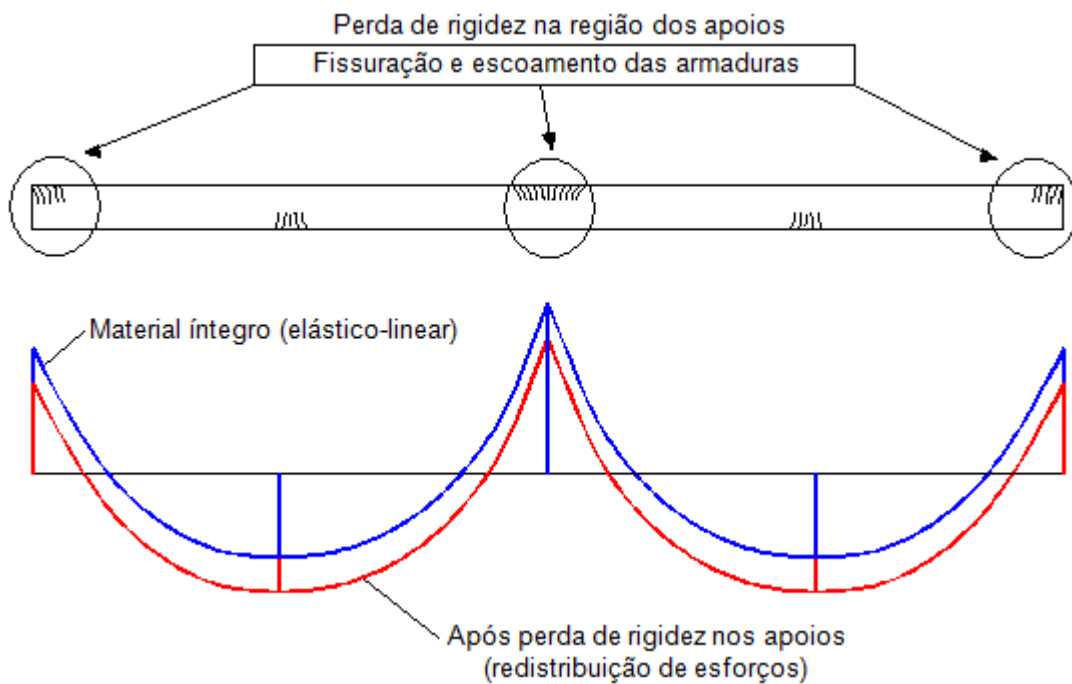


Figura 5.1 – Redistribuição de esforços em uma viga.

A redistribuição é realizada mediante redução dos momentos nos apoios através do coeficiente de redistribuição ( $\delta$ ). Esse por sua vez, é escolhido pelo projetista, acarretando uma modificação no comportamento da estrutura em função do valor de ( $\delta$ ) adotado.

Quando efetuada uma redistribuição de momentos, deve-se verificar que o coeficiente de redistribuição atenda aos seguintes limites:

$$\delta \geq 0,44 + 1,25 \cdot \frac{x}{d} \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 35\text{MPa} \quad \text{ou};$$

$$\delta \geq 0,56 + 1,25 \cdot \frac{x}{d} \quad \text{para concretos com } f_{ck} > 35\text{MPa}.$$

A NBR 6118 (ABNT, 2007) também limita o coeficiente de redistribuição aos seguintes valores:

$\delta \geq 0,90$  para estruturas de nós móveis;

$\delta \geq 0,75$  em qualquer outro caso.

Segundo a norma, valores de coeficiente de redistribuição fora desses limites estabelecidos podem ser aplicados, desde que a estrutura seja calculada com o emprego de análise não-linear ou de análise plástica, com verificação explícita da capacidade de rotação plástica.

A condição de ductilidade nos apoios, que expressa limites para a profundidade da linha neutra, também deve ser satisfeita nas análises lineares com redistribuição de esforços.

Após a redistribuição de momentos fletores, todos os esforços internos devem ser recalculados de modo a garantir o equilíbrio do(s) elemento(s) que compõem a estrutura.

### 5.2.3 Análise plástica

Na análise plástica admite-se, como idealização, comportamento plástico (rígido-plástico ou elasto-plástico) no ELU.

A análise plástica considera a reserva de resistência dos materiais após o início de plastificação das seções. Um dos principais objetivos da análise plástica é prever qual o valor da carga que produz o colapso da estrutura, levando a um dimensionamento que proporcione um melhor aproveitamento dos materiais, com o intuito de explorar ao máximo os seus limites de resistência.

Para a aplicação de uma análise plástica em estruturas reticuladas, as seguintes condições devem ser satisfeitas no colapso (ELU):

1) Equações de equilíbrio: as três equações fundamentais da mecânica geral precisam ser verificadas, equações 5.1, 5.2 e 5.3:

$$\sum F_v = 0 \quad (5.1)$$

$$\sum F_H = 0 \quad (5.2)$$

$$\sum M = 0 \quad (5.3)$$

Em que:

$F_V$  são as forças verticais;

$F_H$  são as forças horizontais;

$M$  são os momentos fletores.

2) Critério de resistência: em nenhum ponto da estrutura as tensões (ou momentos fletores no caso de vigas) devem ultrapassar as tensões correspondentes à plastificação total (ou momento de plastificação –  $M_p$ )

3) Formação de mecanismo: o colapso é alcançado com a formação de um mecanismo (cadeia cinemática ou sistema hipostático). O número de rótulas plásticas desenvolvidas deve ser suficiente para a formação de um mecanismo.

As rótulas plásticas surgem quando as seções críticas de momento máximo atingem o momento de plastificação (total) ou o momento resistente. Dependendo do grau de hiperestaticidade da estrutura, a formação da primeira rótula plástica não significa o colapso da estrutura, podendo a mesma continuar a resistir carregamentos adicionais até que haja um número de rótulas suficientes para torná-la hipostática.

Para se chegar à carga de colapso de uma estrutura devem ser aplicados os teoremas fundamentais da análise plástica. Os conceitos envolvidos em tais teoremas são descritos a seguir e aplicados em um exemplo de uma viga biengastada submetida a um carregamento linearmente distribuído, conforme figura 5.2:

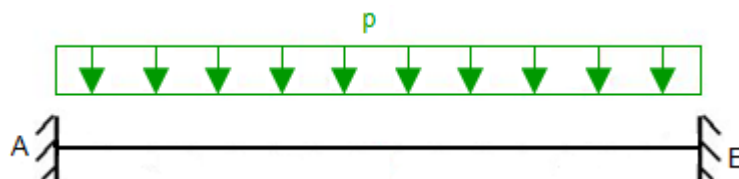


Figura 5.2 – Viga biengastada com seções e materiais conhecidos.

### 5.2.3.1 Teorema do limite superior (Teorema cinemático)

Qualquer configuração de rótulas plásticas (mecanismo) cinematicamente admissível fornece um valor de carga maior ou igual à carga de colapso. Dentre todos os possíveis mecanismos (cinematicamente admissíveis), o correspondente ao colapso é o que fornece o menor valor de carga.

Para a obtenção da carga correspondente a cada mecanismo é necessário a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais (PTV): O trabalho das forças externas é igual ao trabalho desenvolvido na formação das rótulas plásticas (ou energia dissipada).

Adotando o mecanismo da figura 5.3 para a viga proposta da figura 5.2, chega-se à um limite superior para a carga de colapso  $p$ , conforme as equações 5.4 à 5.8:

$$T_{\text{ext}} = \sum M_p \cdot \theta \quad (\text{PTV}) \quad (5.4)$$

$$T_{\text{ext}} = p \cdot \left( \delta \cdot \frac{L}{2} \right) = \frac{p \delta L}{2} \quad (5.5)$$

$$\sum M_p \cdot \theta = 4 \cdot M_p \cdot \theta = \frac{8M_p \delta}{L} \quad (5.6)$$

$$\theta = \frac{\delta}{L/2} = \frac{2\delta}{L} \quad (5.7)$$

$$\frac{p \delta L}{2} = \frac{8M_p \delta}{L} \Rightarrow p = \frac{16M_p}{L^2} \quad (5.8)$$

Em que:

$T_{\text{ext}}$  é o trabalho das forças externas;

$M_p$  é o momento de plastificação;

$\theta$  é a rotação da extremidade das barras na posição das rótulas plásticas;

$\delta$  é o deslocamento vertical no meio do vão.

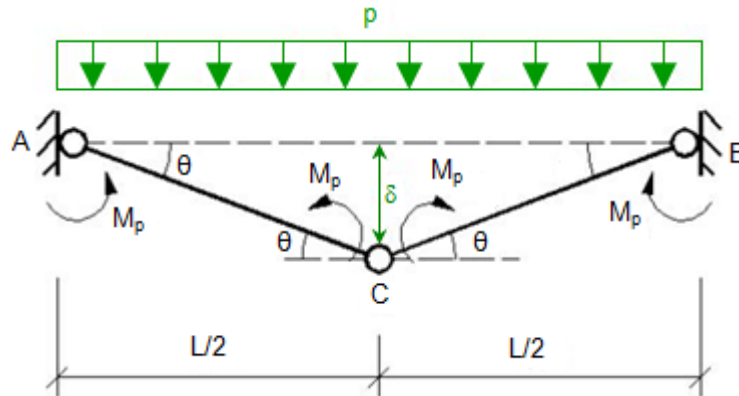


Figura 5.3 – Mecanismo cinematicamente admissível.

### 5.2.3.2 Teorema do limite inferior (Teorema estático)

Qualquer diagrama de momentos fletores (DMF) que seja estaticamente admissível (compatível com o carregamento aplicado) e seguro (critério de resistência não é violado) fornece um valor de carga menor ou igual à carga de colapso. Dentre todos os possíveis DMF estaticamente admissíveis e seguros, o que corresponde ao colapso é o que fornece o maior valor de carga. Este valor de carga consiste num limite inferior para a carga de colapso.

A figura 5.4 apresenta um DMF estaticamente admissível e seguro para o exemplo da viga biengastada em questão:

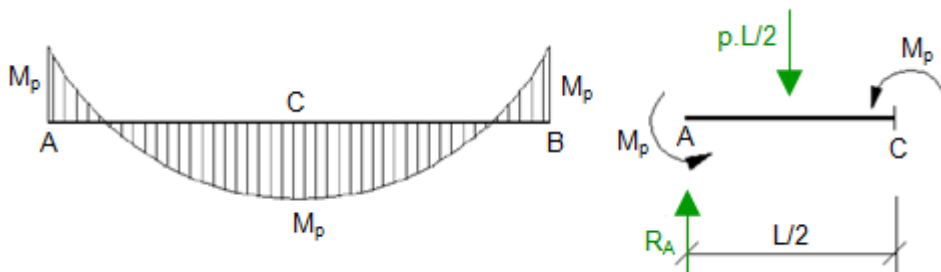


Figura 5.4 – DMF estaticamente admissível.



De acordo com a figura 5.4, realizando o equilíbrio da viga, chega-se a um limite inferior para carga de colapso (equações 5.9 e 5.10):

$$\sum M_A = 0 \quad (5.9)$$

$$M_p + M_p - \frac{pL}{2} \cdot \frac{L}{4} = 0 \Rightarrow p = \frac{16M_p}{L^2} \quad (5.10)$$

### 5.2.3.3 Teorema da unicidade

Se em uma estrutura submetida a uma carga  $p$  (ou conjunto de cargas) forem verificadas as condições anteriores (Teoremas Estático e Cinemático), então  $p$  corresponde à carga de colapso. Portanto, no exemplo da viga biengastada, conclui-se que a carga de colapso ( $p_u$ ) é fornecida pela equação 5.11:

$$p_u = \frac{16M_p}{L^2} \quad (5.11)$$

Nota-se que, em uma análise elástica, o resultado de  $p_u$  para a mesma viga é dado pela equação 5.12:

$$p_u = \frac{12M_p}{L^2} \quad (5.12)$$

Portanto, nesse caso, o valor de  $p_u$  resultante da análise plástica é 33,3% maior do que aquele obtido via análise elástica.

### 5.2.3.4 Observações sobre a análise plástica em estruturas reticuladas de concreto

O cálculo da carga de colapso em vigas utilizando os teoremas da análise plástica exige o conhecimento do momento de plastificação. O termo plastificação

nas análises plásticas refere-se ao esgotamento da capacidade resistente da seção e não ao início de plastificação da seção. Em vigas de concreto armado, a plastificação da seção deve ocorrer preferencialmente com o escoamento das armaduras de flexão, em função da ductilidade requerida para este tipo de análise. Em projetos estruturais, o momento de plastificação ou momento resistente de vigas pode ser obtido a partir das hipóteses usuais do ELU, devendo-se conhecer previamente a armadura a ser utilizada. No capítulo 6, apresenta-se um exemplo numérico do cálculo do momento de plastificação em uma viga de concreto armado.

Para que possa ocorrer o mecanismo de colapso da estrutura é preciso ainda fazer a verificação da rotação plástica necessária ( $\theta$ ) para a formação do mecanismo. Essa deve ser inferior ou igual à capacidade de rotação plástica das seções envolvidas nos mecanismos. A NBR 6118 (ABNT, 2007) apresenta em seu item 14.6.5 o cálculo simplificado da capacidade de rotação plástica em vigas, devendo-se conhecer a profundidade da linha neutra e o tipo de aço empregado. No capítulo 6 apresenta-se um exemplo de cálculo numérico tanto da rotação plástica necessária quanto da capacidade de rotação plástica.

De fato, as principais vantagens da análise plástica são o conhecimento da carga de colapso (ou intervalo superior ou inferior) e do mecanismo de colapso, bem como a consideração de toda a capacidade resistente das seções. Entretanto essa análise é utilizada apenas em projetos no ELU. Além disso, é restrita a estruturas com relativa simplicidade, sendo quase inviável em pórticos espaciais.

A análise plástica ainda apresenta restrições quanto a sua aplicação. A mesma não pode ser adotada quando se consideram os efeitos globais de segunda ordem e também quando não houver ductilidade suficiente para que os mecanismos de colapso sejam formados.

### 5.3 Simplificações permitidas para análises em Estado Limite de Serviço

#### 5.3.1 Rigidez equivalente proposta pela NBR 6118 (ABNT, 2007)

Nas verificações de ELS, para a avaliação aproximada da flecha imediata de vigas, a norma propõe a formulação de rigidez equivalente segundo a equação 5.13:

$$EI_{eq} = E_{cs} \cdot \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} \cdot I_c \quad (5.13)$$

Em que:

$M_r$  é o momento de fissuração;

$M_a$  é o momento fletor atuante na seção crítica;

$I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

$I_{II}$  é momento de inércia da seção homogeneizada no Estádio II;

$E_{cs}$  é o módulo de elasticidade secante do concreto.

Vale notar que a equação 5.13, cuja fórmula é uma adaptação da de Branson (1965), fornece o valor de rigidez à flexão a ser utilizado em todo o elemento, sem necessidade de discretização do mesmo, e leva em conta apenas a presença da armadura positiva no caso de vigas contínuas. A norma utiliza o momento de inércia da seção bruta ( $I_c$ ) como simplificação, ao invés de empregar o momento de inércia da seção homogeneizada no Estádio I ( $I_I$ ).

#### 5.3.2 Rigidez equivalente ponderada proposta pelo IBRACON (2007)

O IBRACON (2007) sugere para vãos de vigas contínuas, quando for necessária maior precisão, a adoção de um valor ponderado para a rigidez equivalente conforme critério estabelecido na figura 5.5:

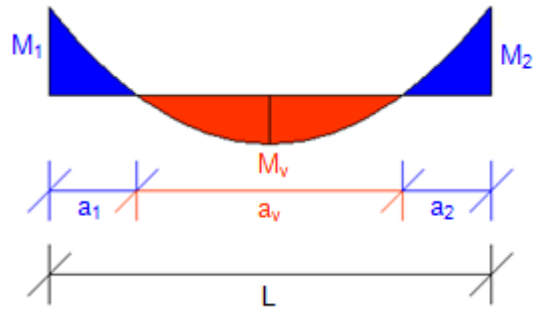


Figura 5.5 – Trechos considerados no cálculo da rigidez equivalente proposta pelo IBRACON (2007).

Em que:

$M_1$  e  $M_2$  são os valores dos máximos momentos negativos nos apoios e  $M_v$  é o valor do máximo momento positivo ao longo do vão;

$L$  é o vão da viga considerada;

$a_1$  e  $a_2$  correspondem aos comprimentos dos trechos de momento negativo.

Os valores  $a_1/L$  e  $a_2/L$  podem ser adotados aproximadamente iguais a 0,15.

Sendo assim, a rigidez equivalente (ponderada) passa a ser calculada de acordo com a equação 5.14:

$$EI_{eq,pond} = \frac{1}{L} \left[ EI_{eq,1} \cdot a_1 + EI_{eq,v} \cdot a_v + EI_{eq,2} \cdot a_2 \right] \quad (5.14)$$

Em que:

$EI_{eq,1}$  é dada pela equação 5.13 para o trecho 1 ( $a_1$ ) da figura 5.5;

$EI_{eq,v}$  é dada pela equação 5.13 para o trecho de momentos positivos ( $a_v$ ) da figura 5.5;

$EI_{eq,2}$  é dada pela equação 5.13 para o trecho 2 ( $a_2$ ) da figura 5.5.

Em cada trecho, a expressão de rigidez equivalente, obtida através da equação 5.13, deve ser calculada com  $I_{II}$  (momento de inércia da seção fissurada de concreto no Estádio II), considerando as armaduras existentes e com  $M_a$  (momento fletor atuante) igual a  $M_1$ ,  $M_v$  e  $M_2$  respectivamente.

De forma similar à equação 5.13, a equação 5.14 fornece a rigidez à flexão a ser utilizada para todo o elemento, sem necessidade de discretização. Entretanto, a equação 5.13 acaba considerando também a influência das armaduras negativas.

## 6 EXEMPLOS NÚMERICOS

Os exemplos demonstrados neste capítulo visam apresentar, comparar e analisar criticamente os procedimentos, até então expostos no decorrer deste trabalho, para a consideração dos efeitos da NLF em vigas de concreto armado submetidas à flexão simples. Com a finalidade de evitar repetições desnecessárias, os símbolos são identificados apenas na primeira vez que aparecem nas equações.

### 6.1 Exemplo 1

Neste exemplo é apresentado o cálculo detalhado para a obtenção das flechas teóricas de um elemento estrutural de viga biapoiada, cujos resultados experimentais foram obtidos por Álvares (1993). As características das vigas são ilustradas nas figuras 6.1 e 6.2:

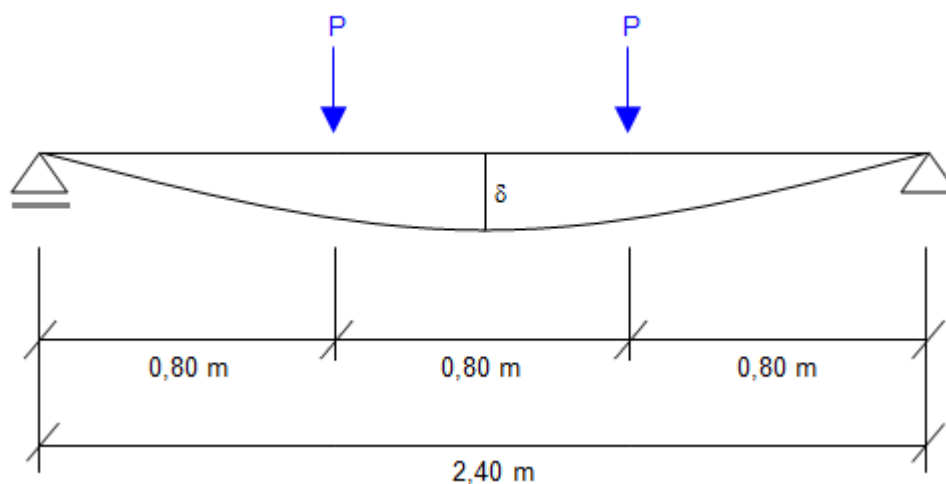


Figura 6.1– Carregamento e geometria das vigas ensaiadas por Álvares (1993).

O elemento foi dimensionado para três taxas distintas de armadura e, para cada taxa, duas vigas foram ensaiadas.

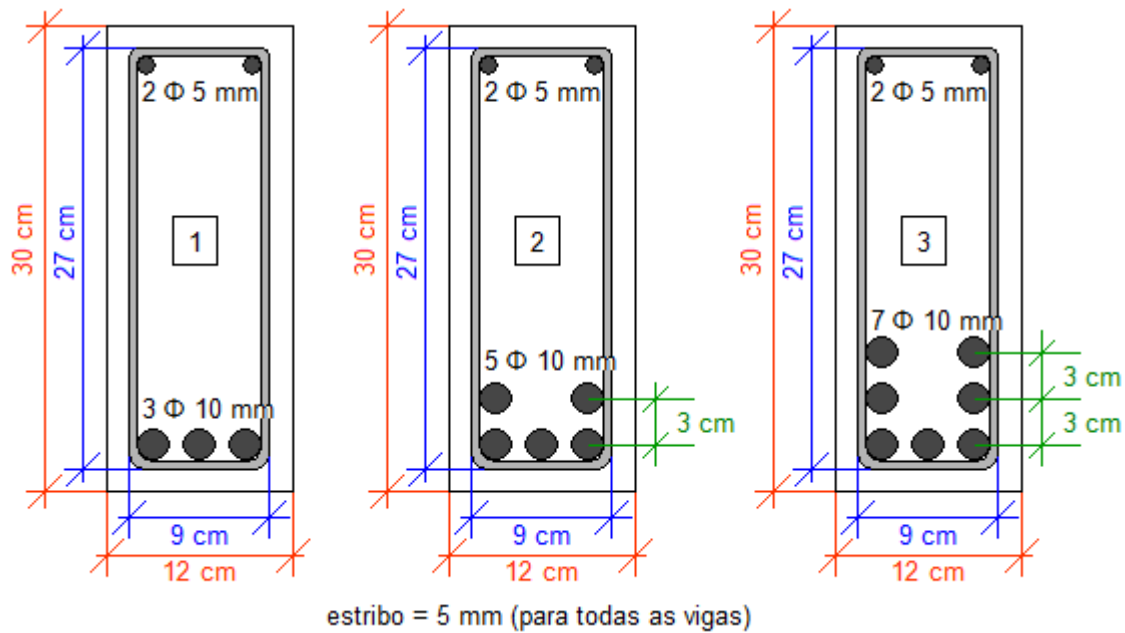


Figura 6.2– Armadura das vigas ensaiadas por Álvares (1993).

Os parâmetros mecânicos experimentais do concreto e do aço utilizados foram fornecidos por Oliveira (2001) e estão organizados na tabela 6.1:

Tabela 6.1– Parâmetros mecânicos dos materiais (exemplo 1)

Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto	$E_{ci} = 2920 \text{ kN/cm}^2$
Módulo de elasticidade do aço	$E_s = 19600 \text{ kN/cm}^2$
Resistência do concreto à tração direta	$f_{ct} = 0,204 \text{ kN/cm}^2$
Resistência à compressão do concreto	$f_c = 2,55 \text{ kN/cm}^2$
Resistência ao escoamento do aço	$f_y = 50 \text{ kN/cm}^2$

De posse de todas as informações necessárias, são descritas as etapas para o cálculo das flechas das vigas, nas quais a consideração da NLF é realizada mediante a utilização de modelos não-lineares, métodos aproximados sugeridos pelas normas e modelos abordados neste exemplo.

### 6.1.1 Integração das curvaturas e emprego do modelo de Branson (1965)

A análise não-linear das vigas ensaiadas é realizada com o emprego de relações momento-curvatura de seções transversais e discretização do elemento ao longo do vão. Para cada seção, calcula-se a rigidez à flexão ( $EI$ ), e os deslocamentos são obtidos mediante a integração das curvaturas ao longo de todo o elemento. Para o Estádio II, utiliza-se o modelo de Branson (1965). No Estádio III, como simplificação, assume-se um trecho reto entre o início da plastificação e o momento último, conforme ilustra a figura 6.3:

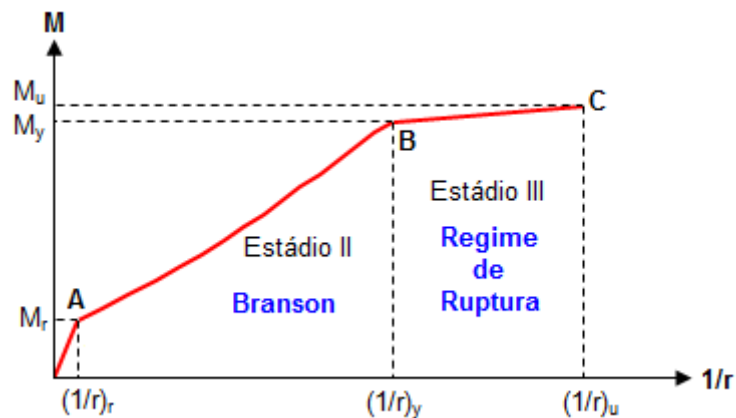


Figura 6.3 – Diagrama momento-curvatura da seção de cada viga com emprego da expressão de Branson (1965).

A seguir são detalhadas as etapas para a obtenção das flechas.

Calculam-se inicialmente as propriedades do Estádio I da seção (não fissurada), ou seja, considera-se o concreto tracionado. Também é necessário realizar a homogeneização da seção, que nada mais é do que a transformação das áreas de aço em áreas equivalentes de concreto. Tal transformação é feita por meio do coeficiente de homogeneização, que consiste na razão entre o módulo de elasticidade longitudinal do aço e do concreto.

Apresenta-se o cálculo para a viga com armadura longitudinal composta por 3 barras de 10 mm de diâmetro ( $3 \Phi 10$  mm). As demais vigas seguem cálculos análogos.

O coeficiente de homogeneização da seção ( $\alpha_e$ ) é dado pela equação 6.1:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} = 7,897 \quad (6.1)$$

$E_s = 19600 \text{ kN/cm}^2$  é o módulo de elasticidade do aço;

$E_{cs} = 0,85 \cdot E_{ci} = 2482 \text{ kN/cm}^2$  é o módulo de elasticidade secante do concreto;

$E_{ci} = 2920 \text{ kN/cm}^2$  é o módulo de elasticidade tangente inicial do concreto.

Sabendo que o momento estático em relação à linha neutra elástica (L.N.E – vide figura 6.4) deve ser igual a zero, obtém-se o valor da profundidade da linha neutra no Estádio I ( $x=x_l$ ), conforme a equação 6.2:

$$b_w \cdot x_l \cdot \left(\frac{x_l}{2}\right) + \alpha_e \cdot A_s' \cdot (x_l - d') - b_w \cdot (h - x_l) \cdot \left(\frac{h - x_l}{2}\right) - \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_l) = 0 \quad (6.2)$$

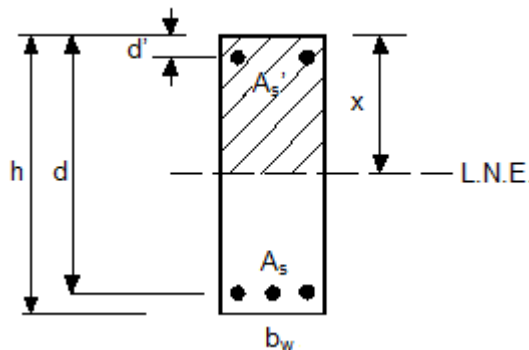


Figura 6.4 – Seção da viga.

Das figuras 6.2 e 6.4 conclui-se que os parâmetros da equação 6.2 assumem os valores de:

$A_s' = 0,393 \text{ cm}^2$  (área da seção da armadura longitudinal de compressão);

$A_s = 2,356 \text{ cm}^2$  (área da seção da armadura longitudinal de tração);

$h = 30 \text{ cm}$  (altura da seção transversal da viga);

$b_w = 12 \text{ cm}$  (largura da seção transversal da viga);

$d = 27,5 \text{ cm}$  (altura útil);

$d' = 2,25 \text{ cm}$ .



Da resolução da equação 6.2, verifica-se que  $x_I = 15,51$  cm. Com o valor de  $x_I$ , calcula-se o momento de inércia no Estádio I ( $I_I$ ), com homogeneização da seção, de acordo com a equação 6.3:

$$I_I = \frac{b_w \cdot h^3}{12} + b_w \cdot h \cdot \left(x_I - \frac{h}{2}\right)^2 + \alpha_e \cdot A'_s \cdot (x_I - d')^2 + \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_I)^2 \quad (6.3)$$

Substituindo os valores numéricos na equação 6.3, obtém-se  $I_I = 30314$  cm<sup>4</sup>.

Para calcular o ponto A do diagrama momento-curvatura da figura 6.3, devem ser obtidos o momento de fissuração ( $M_r$ ) e a respectiva curvatura  $(1/r)_r$ . O momento de fissuração ( $M_r$ ) é avaliado a partir de equação 6.4, similar à apresentada pela NBR 6118 (ABNT, 2007):

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_I}{y_t} \quad (6.4)$$

Em que:

$\alpha$  é o fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta do concreto e, para seções retangulares, vale 1,5;

$y_t = 14,49$  cm é a distância da linha neutra elástica (Estádio I) à fibra mais tracionada da seção;

Substituindo-se os valores na equação 6.4, obtém-se  $M_r = 641$  kN.cm.

A curvatura de fissuração  $(1/r)_r$  é dada pela equação 6.5:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_r = \frac{M_r}{E_{cs} \cdot I_I} \quad (6.5)$$

Substituindo valores, tem-se  $(1/r)_r = 8,523 \cdot 10^{-6}$  cm<sup>-1</sup>.

Para chegar-se ao ponto B do diagrama momento-curvatura, calculam-se as propriedades do Estádio II. Sabendo que o momento estático em relação à linha neutra elástica (figura 6.4) deve ser igual a zero e que deve ser desprezada a área de concreto tracionado (Equação 6.6), obtém-se o valor da profundidade da linha neutra no Estádio II:  $x_{II} = 7,66$  cm.

$$b_w \cdot x_{II} \cdot \left(\frac{x_{II}}{2}\right) + \alpha_e \cdot A'_s \cdot (x_{II} - d') - \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_{II}) = 0 \quad (6.6)$$

Com  $x_{II}$  conhecido, calcula-se o momento de inércia no Estádio II ( $I_{II}$ ) através da equação 6.7:

$$I_{II} = \frac{b_w \cdot h^3}{12} + b_w \cdot x_{II} \cdot \left(\frac{x_{II}}{2}\right)^2 + \alpha_e \cdot A'_s \cdot (x_{II} - d')^2 + \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_{II})^2 \quad (6.7)$$

Da equação 6.7, chega-se a  $I_{II} = 9213 \text{ cm}^4$ .

Admitindo, como simplificação, que a proporcionalidade entre tensões e a distância à linha neutra ainda seja válida no Estádio II, o momento de plastificação das armaduras ( $M_y$ ) pode ser obtido pela equação 6.8.

$$M_y = \frac{f_y \cdot I_{II}}{\alpha_e \cdot (d - x_{II})} \quad (6.8)$$

Por sua vez, a curvatura de início da plastificação  $(1/r)_y$  pode ser obtida pela equação 6.9:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_y = \frac{M_y}{E_{cs} \cdot I_{II}} \quad (6.9)$$

Das equações 6.8 e 6.9, tem-se  $M_y = 2940 \text{ kN.cm}$  e  $(1/r)_y = 1,280 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$ .

Para o cálculo do ponto C deve-se fazer uma análise da seção totalmente plastificada com o emprego da maioria das hipóteses usuais do ELU. Por equilíbrio (figura 6.5), a resultante na armadura tracionada ( $R_s$ ) deve ser igual às resultantes no concreto comprimido ( $R_{cc}$ ) e a da armadura comprimida ( $R'_s$ ), conforme as equações 6.10 e 6.11:

$$R_s = R_{cc} + R'_s \quad (6.10)$$

$$A_s (f_y) = b_w \cdot \beta \cdot x \cdot (\alpha \cdot f_c) + A'_s (\sigma'_s) \quad (6.11)$$

Em que:

$\sigma'_s$  é a tensão na armadura comprimida.

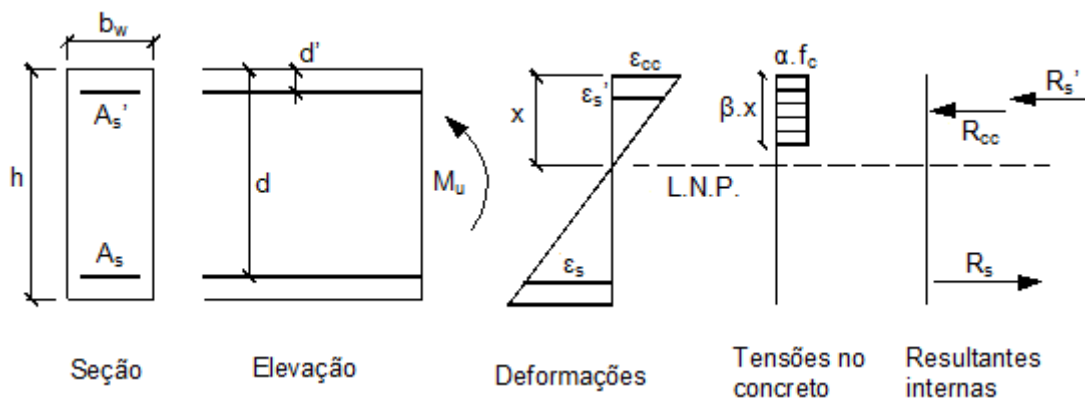


Figura 6.5 – Diagrama de tensões e deformações no concreto.

Em projetos estruturais, o valor de  $\alpha$  (na equação 6.11), é um coeficiente multiplicador da resistência à compressão do concreto resultante do produto dos seguintes fatores:

- 1º fator = 0,95. Refere-se à diferença entre a resistência do concreto do corpo de prova e a do concreto da estrutura real;
- 2º fator = 0,75. Refere-se à aplicação das cargas na estrutura real que é feita de forma lenta, ou seja, meses e anos (*Efeito Rüschi*);
- 3º fator = 1,20. Refere-se ao acréscimo de resistência do concreto após os 28 dias (até o final da vida útil da estrutura real).

Em experimentações de laboratório, as vigas recebem as cargas de forma muito rápida, nos ensaios, normalmente em minutos. Assim, o mais coerente é empregar o valor 1,0 para o 2º fator. Além disso, os corpos de prova de concreto costumam ser rompidos no mesmo dia do ensaio da estrutura (viga). Ou seja, não há correções a serem feitas com respeito à idade do concreto (3º fator = 1,0).

Dessa maneira, o único fator a ser considerado é o que se refere à diferença existente entre a resistência do concreto dos corpos de prova e a do concreto da estrutura (vigas), ou seja, o coeficiente  $\alpha$  assume o valor de 0,95.

O coeficiente  $\beta$  da equação 6.11 está relacionado com a altura do diagrama de tensões no concreto comprimido e, para seções retangulares, a NBR 6118 (ABNT, 2007) recomenda o valor de 0,8.

Com os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  conhecidos e supondo que a armadura tracionada atinja o escoamento, chega-se à equação 6.12:

$$A_s(f_y) = 0,76 \cdot b_w \cdot x \cdot f_c + A'_s(\sigma'_s) \quad (6.12)$$

Para encontrar a incógnita  $x$  da equação 6.12, é necessária a adoção e verificação de uma hipótese específica:

Hipótese: a armadura comprimida ( $A'_s$ ) atinge o escoamento:  $\sigma'_s = f_y$ .

Neste caso, o valor de  $x$  é obtido por meio da equação 6.13:

$$x = \frac{A_s(f_y) - A'_s(f_y)}{0,76 \cdot b_w \cdot f_c} \quad (6.13)$$

Com o valor de  $x$ , deve-se calcular a deformação na armadura comprimida ( $\epsilon'_s$ ) para verificar a validade da hipótese proposta. O concreto atinge a ruptura, na flexão simples, com deformação igual a 0,0035 ( $\epsilon_{cc} = 0,0035$ ). Pela compatibilidade de deformações da figura 6.5 (semelhança de triângulos), chega-se a equação 6.14:

$$\frac{\epsilon'_s}{x - d'} = \frac{\epsilon_{cc}}{x} \Rightarrow \epsilon'_s = \left( \frac{x - d'}{x} \right) \cdot \epsilon_{cc} \quad (6.14)$$

A hipótese está correta se  $\epsilon'_s > \epsilon_y = f_y/E_s$  (deformação de escoamento do aço). No caso de  $\epsilon'_s < \epsilon_y$ , a armadura comprimida não está escoando e a Lei de Hooke deve ser aplicada para o cálculo da tensão na mesma segundo a equação 6.15:

$$\sigma'_s = E_s \cdot \epsilon'_s = E_s \cdot \left( \frac{x - d'}{x} \right) \cdot \epsilon_{cc} \quad (6.15)$$

Reescreve-se a equação 6.12 com a tensão na armadura comprimida de acordo com a equação 6.16:

$$A_s(f_y) = 0,76 \cdot b_w \cdot x \cdot f_c + A'_s \cdot E_s \cdot \left( \frac{x - d'}{x} \right) \cdot \epsilon_{cc} \quad (6.16)$$

Com o valor numérico de  $x$ , obtido a partir da resolução da equação 6.16, calcula-se o valor de  $\sigma'_s$  (equação 6.15).

Com o valor de  $\sigma'_s$  conhecido, é possível calcular o momento último ( $M_u$ ) e a curvatura última ( $1/r_u$ ) do diagrama momento-curvatura da figura 6.3, ou seja, o ponto C.

O momento último ( $M_u$ ) é obtido a partir do momento das resultantes internas (em relação ao eixo da armadura tracionada) segundo a equação 6.17:

$$M_u = 0,76 \cdot b_w \cdot x \cdot f_c (d - 0,4 \cdot x) + A_s' \sigma_s' (d - d') \quad (6.17)$$

A curvatura última  $(1/r)_u$  é calculada através da equação 6.18:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_u = \frac{\varepsilon_{cc}}{x} \quad (6.18)$$

Com o emprego das equações propostas até então, obtém-se os resultados para a viga com 3 barras de 10 mm de armadura longitudinal. São estes:

$x = 4,22$  cm (equação 6.13);

$\varepsilon_s' = 0,0016$ ;

$\varepsilon_y = 0,0026$ .

Como  $\varepsilon_s' < \varepsilon_y$ , a armadura comprimida não está escoando. Logo:

$x = 4,49$  cm (equação 6.16);

$\sigma_s' = 34,21$  kN/cm<sup>2</sup> (equação 6.15);

$M_u = 3022$  kN.cm;

$(1/r)_u = 7,798 \cdot 10^{-4}$  cm<sup>-1</sup>.

A próxima etapa para o cálculo das flechas das vigas ensaiadas consiste na construção da curva teórica carga aplicada ( $P$ ) *versus* flecha até a ruptura ( $\delta$ ). Para tal efetua-se a discretização dos elementos de viga conforme a figura 6.6:

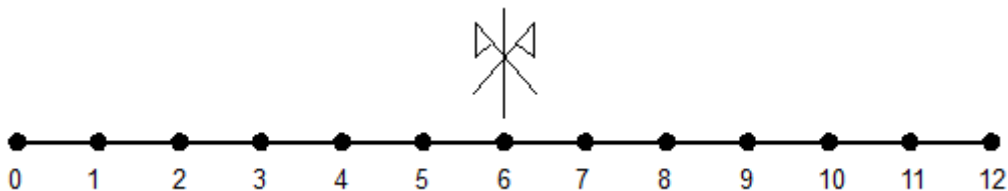


Figura 6.6 – Discretização dos elementos de viga.

Primeiramente atribui-se valores para a carga  $P$  de 0 kN até a carga que conduz ao momento último ( $M_u$ ), ou seja, à ruptura. Quando a viga atinge  $M_u$

(momento último),  $M_y$  (momento de plastificação) e  $M_r$  (momento de fissuração), a carga  $P$  assume os valores de  $P_u$ ,  $P_y$  e  $P_r$  respectivamente. Conhecidos os momentos, calculam-se os valores da carga  $P$  de acordo com a equação 6.19, obtida por equilíbrio da viga (figura 6.7):

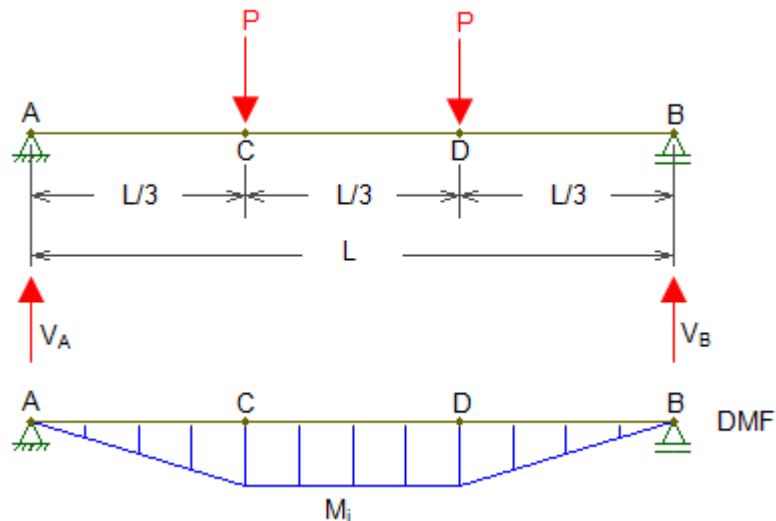


Figura 6.7 – Viga biapoiada (DMF).

$$P_i = \frac{3 \cdot M_i}{L} \quad (6.19)$$

Em que:

$P_i$  é o valor da carga  $P$  assumido dentre  $i$  valores;

$M_i$  é o valor do momento assumido dentre  $i$  valores;

$L = 240$  cm é o vão da viga.

Com a sugestão de dez valores entre  $P = P_r$  e  $P = P_y$  chega-se à tabela 6.2:

Tabela 6.2 – Valores da carga  $P$  para a viga com 3  $\Phi$  10 mm

(continua)

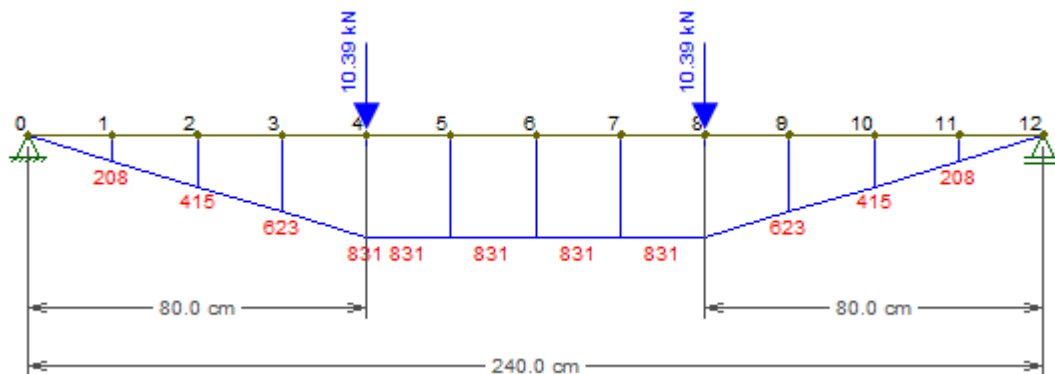
$M_i =$	0	kN.cm	$P =$	0,00	kN
$M_r =$	641	kN.cm	$P_r =$	8,01	kN

Tabela 6.2 – Valores da carga P para a viga com 3  $\Phi$  10 mm

(conclusão)

$M_i =$	831	kN.cm	$P =$	10,39	kN
$M_i =$	1042	kN.cm	$P =$	13,03	kN
$M_i =$	1253	kN.cm	$P =$	15,66	kN
$M_i =$	1464	kN.cm	$P =$	18,30	kN
$M_i =$	1675	kN.cm	$P =$	20,94	kN
$M_i =$	1886	kN.cm	$P =$	23,58	kN
$M_i =$	2097	kN.cm	$P =$	26,21	kN
$M_i =$	2308	kN.cm	$P =$	28,85	kN
$M_i =$	2519	kN.cm	$P =$	31,49	kN
$M_i =$	2729	kN.cm	$P =$	34,11	kN
$M_y =$	2940	kN.cm	$P_y =$	36,75	kN
$M_u =$	3022	kN.cm	$P_u =$	37,78	kN

Para cada valor de P atribuído, é calculado o momento atuante ( $M_a$ ) de cada seção da viga (figura 6.8).

Figura 6.8 – Momentos atuantes na viga (em kN.cm) para  $P = 10,39$  kN.

A partir do momento atuante em cada seção ( $M_a$ ), calcula-se a respectiva curvatura ( $1/r$ ), conforme os seguintes critérios de cálculo:

Se  $M_a \leq M_r$  então deve ser aplicada a equação 6.20 para o Estádio I:

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{M_a}{E_{cs} \cdot I_I} \quad (6.20)$$

Se  $M_r < M_a \leq M_y$  então deve ser aplicada a equação 6.21 para o Estádio II:

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{M_a}{E_{cs} \cdot I_{eq}} \quad (6.21)$$

Em que  $I_{eq}$  é o momento de inércia equivalente obtido pelo modelo de Branson (1965) segundo a equação 6.22:

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^4 \cdot I_I + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^4\right] \cdot I_{II} \quad (6.22)$$

Se  $M_y < M_a \leq M_u$  então a seção encontra-se no estágio III. Admitindo-se a simplificação de trecho reto no diagrama momento-curvatura entre o ponto de início de plastificação e o ponto de momento último (trecho BC da figura 6.3), obtém-se a curvatura por meio da equação 6.23:

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)_y + \left[\frac{(1/r)_u - (1/r)_y}{M_u - M_y}\right] \cdot (M_a - M_y) \quad (6.23)$$

Com a integração dupla (numérica) do diagrama de curvaturas ao longo da viga (figura 6.9), chegam-se aos deslocamentos verticais procurados ( $v$ ) em cada seção.

Para cada valor de carga  $P$ , integra-se inicialmente o diagrama de curvaturas e obtém-se o diagrama de rotações ( $\theta$ ), seguindo a condição inicial de que  $\theta_0 = 0$  (equação 6.24). Em seguida, integra-se o diagrama de rotações para finalmente obter o diagrama dos deslocamentos verticais, com condição inicial de que  $v_0 = 0$  (equação 6.25).

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \text{área} \left(\frac{1}{r}\right)_i^{i+1} \quad (6.24)$$

$$v_{i+1} = v_i + \text{área} (\theta)_i^{i+1} \quad (6.25)$$



Em que:

$\theta_i$  é o valor da rotação no nó  $i$ ;

área  $(1/r)_i^{i+1}$  é a área do diagrama de curvaturas compreendida entre o nó  $i+1$  e o nó  $i$ ;

$v_i$  é o valor do deslocamento vertical do nó  $i$ ;

área  $(\theta)_i^{i+1}$  é a área do diagrama de rotações compreendida entre o nó  $i+1$  e o nó  $i$ .

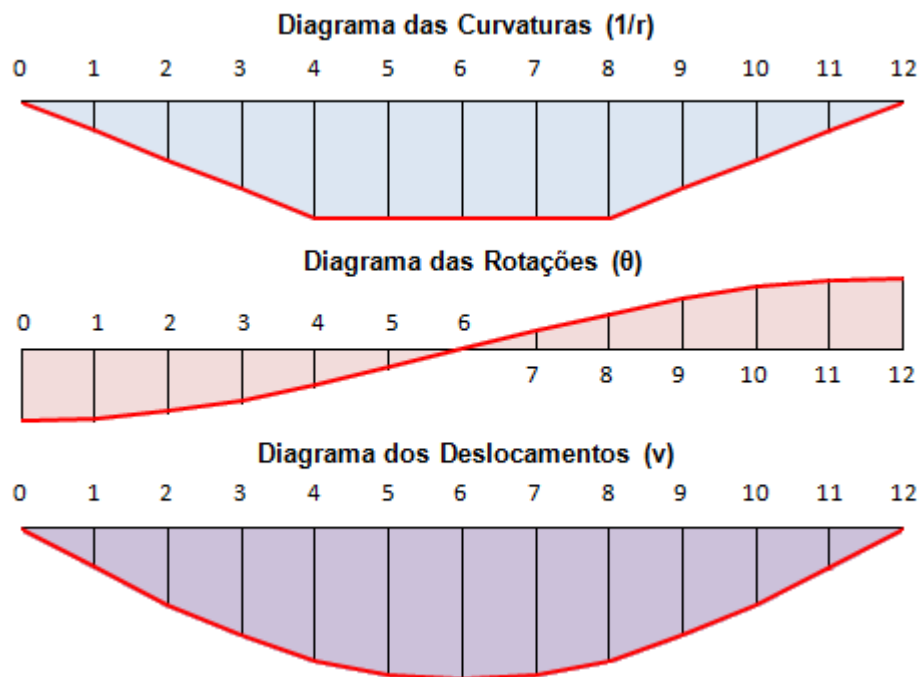


Figura 6.9 – Integração dupla do diagrama de curvaturas.

Utiliza-se a regra do Trapézio para a obtenção numérica das áreas envolvidas. Devido a simetria do problema, apenas as seções da viga entre os nós 0 e 6 da figura 6.6 são necessárias para o cálculo das flechas finais ( $\delta$ ).

Para melhor organização dos cálculos, elabora-se uma tabela idêntica à tabela 6.3 para cada carga  $P$  atribuída:

Tabela 6.3 – Viga com 3  $\Phi$  10 mm  $\rightarrow$  P = 10,39 kN

<b>Carga P = 10,39 kN</b>				
Nós	$M_a$ (Ftool)	$(1/r)$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\theta$ (rad)	v (cm)
0	0 kN.cm	0,00	$1,32 \cdot 10^{-3}$	0,0000
1	208 kN.cm	$2,76 \cdot 10^{-6}$	$1,29 \cdot 10^{-3}$	0,0261
2	415 kN.cm	$5,52 \cdot 10^{-6}$	$1,21 \cdot 10^{-3}$	0,0511
3	623 kN.cm	$7,63 \cdot 10^{-6}$	$1,08 \cdot 10^{-3}$	0,0740
4	831 kN.cm	$2,00 \cdot 10^{-5}$	$8,01 \cdot 10^{-4}$	0,0928
5	831 kN.cm	$2,00 \cdot 10^{-5}$	$4,01 \cdot 10^{-4}$	0,1048
6	831 kN.cm	$2,00 \cdot 10^{-5}$	0,00	<b><math>\delta = 0,1088</math></b>

Finalmente, depois de efetuados todos os procedimentos numéricos descritos até então, chegam-se as flechas para cada carga P, conforme tabela 6.4:

Tabela 6.4 – Flechas para a viga com 3  $\Phi$  10 mm (Branson)

P = 0,00 kN	$\delta = 0,00$ mm
<b>P = 8,01 kN</b>	<b><math>\delta r = 0,50</math> mm</b>
P = 10,39 kN	$\delta = 1,09$ mm
P = 13,03 kN	$\delta = 1,88$ mm
P = 15,66 kN	$\delta = 2,63$ mm
P = 18,30 kN	$\delta = 3,36$ mm
P = 20,94 kN	$\delta = 4,04$ mm
P = 23,58 kN	$\delta = 4,68$ mm
P = 26,21 kN	$\delta = 5,31$ mm
P = 28,85 kN	$\delta = 5,91$ mm
P = 31,49 kN	$\delta = 6,50$ mm
P = 34,11 kN	$\delta = 7,10$ mm
<b>Py = 36,75 kN</b>	<b><math>\delta y = 7,68</math> mm</b>
<b>Pu = 37,78 kN</b>	<b><math>\delta u = 38,38</math> mm</b>

### 6.1.2 Integração das curvaturas e emprego do modelo de Ghali e Favre (1986)

Para a análise não-linear das vigas ensaiadas adota-se exatamente as mesmas etapas descritas no modelo anterior. A exceção reside apenas no modelo utilizado para o estágio II (figura 6.10), que passa a ser o modelo proposto por Ghali e Favre (1986):

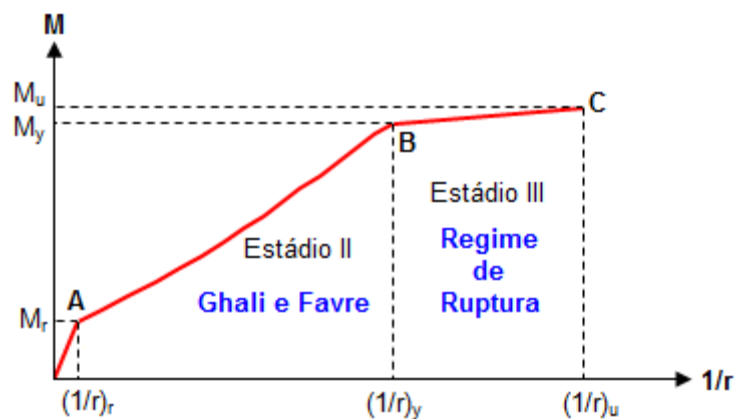


Figura 6.10 – Diagrama momento-curvatura da seção de cada viga com emprego do modelo de Ghali e Favre (1986)

No modelo de Ghali e Favre (1986), calcula-se uma curvatura média (equação 6.26), cujo valor é uma ponderação entre a curvatura da seção não fissurada (Estádio I) e a da seção totalmente fissurada (Estádio II).

$$\left(\frac{1}{r}\right)_m = (1-\zeta) \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_I + \zeta \left(\frac{1}{r}\right)_{II} \quad (6.26)$$

Em que:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_I = \frac{M_a}{E_{cs} \cdot I_I} \text{ é a curvatura da seção para o Estádio I;}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{II} = \frac{M_a}{E_{cs} \cdot I_{II}} \text{ é a curvatura da seção para o Estádio II;}$$

$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^2$  é o coeficiente de interpolação entre os Estádios I e II;

$\beta_1 = 1,0$  para barras de alta aderência (com nervuras);

$\beta_1 = 0,5$  para barras lisas;

$\beta_2 = 1,0$  para o primeiro carregamento; cargas pouco repetitivas, não permanentes ;

$\beta_2 = 0,5$  para cargas permanentes ou com grande número de ciclos.

As demais etapas exibem cálculos idênticos aos do modelo anterior. Dessa maneira apresenta-se a tabela 6.5 com as flechas obtidas para cada carga P atribuída.

Tabela 6.5 – Flechas para a viga com 3  $\Phi$  10 mm (Ghali e Favre)

P = 0,00 kN	$\delta = 0,00$ mm
<b>Pr = 8,01 kN</b>	<b><math>\delta_r = 0,50</math> mm</b>
P = 10,39 kN	$\delta = 1,14$ mm
P = 13,03 kN	$\delta = 1,86$ mm
P = 15,66 kN	$\delta = 2,51$ mm
P = 18,30 kN	$\delta = 3,18$ mm
P = 20,94 kN	$\delta = 3,83$ mm
P = 23,58 kN	$\delta = 4,45$ mm
P = 26,21 kN	$\delta = 5,06$ mm
P = 28,85 kN	$\delta = 5,66$ mm
P = 31,49 kN	$\delta = 6,25$ mm
P = 34,11 kN	$\delta = 6,85$ mm
<b>Py = 36,75 kN</b>	<b><math>\delta_y = 7,44</math> mm</b>
<b>Pu = 37,78 kN</b>	<b><math>\delta_u = 38,30</math> mm</b>

### 6.1.3 Rigidez equivalente proposta pela NBR 6118 (ABNT, 2007)

A formulação apresentada pela NBR 6118 (ABNT, 2007) para avaliação de flechas imediatas aplica-se apenas para o ELS, ou seja, até o estágio II (figura 6.11).

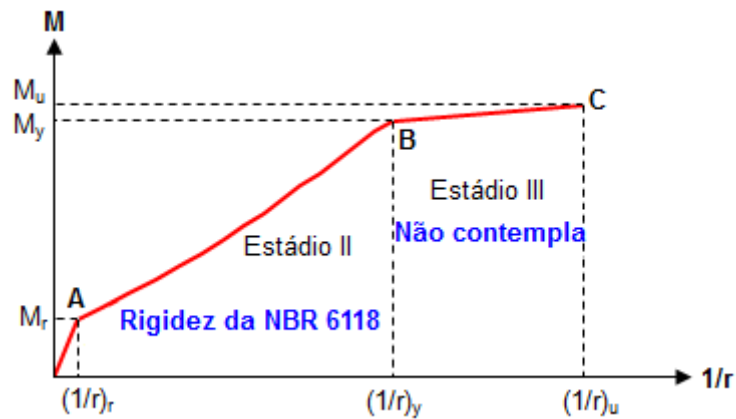


Figura 6.11 – Diagrama momento-curvatura da seção de cada viga com emprego da formulação da NBR 6118 (ABNT 2007).

Com os valores de momentos obtidos para cada carga  $P$  atribuída, obtém-se o momento de inércia equivalente (para todo o elemento de viga) de acordo com a equação 6.27:

$$I_{eq} = \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \quad (6.27)$$

Em que:

$I_c = 27000 \text{ cm}^4$  é momento de inércia da seção bruta de concreto.

A tabela 6.6 contém os valores de inércia equivalente para cada carga  $P$  aplicada.

Tabela 6.6 – Viga com 3  $\Phi$  10 mm  $\rightarrow$  Valores de inércia equivalente

$M =$	0 kN.cm	$P =$	0,00 kN	$I_{eq} =$	0 cm <sup>4</sup>
$M_r =$	641 kN.cm	$P_r =$	8,01 kN	$I_{eq,r} =$	30314 cm <sup>4</sup>
$M =$	831 kN.cm	$P =$	10,39 kN	$I_{eq} =$	17397 cm <sup>4</sup>
$M =$	1042 kN.cm	$P =$	13,03 kN	$I_{eq} =$	13363 cm <sup>4</sup>
$M =$	1253 kN.cm	$P =$	15,66 kN	$I_{eq} =$	11599 cm <sup>4</sup>
$M =$	1464 kN.cm	$P =$	18,30 kN	$I_{eq} =$	10709 cm <sup>4</sup>
$M =$	1675 kN.cm	$P =$	20,94 kN	$I_{eq} =$	10211 cm <sup>4</sup>
$M =$	1886 kN.cm	$P =$	23,58 kN	$I_{eq} =$	9912 cm <sup>4</sup>
$M =$	2097 kN.cm	$P =$	26,21 kN	$I_{eq} =$	9722 cm <sup>4</sup>
$M =$	2308 kN.cm	$P =$	28,85 kN	$I_{eq} =$	9594 cm <sup>4</sup>
$M =$	2519 kN.cm	$P =$	31,49 kN	$I_{eq} =$	9506 cm <sup>4</sup>
$M =$	2729 kN.cm	$P =$	34,11 kN	$I_{eq} =$	9443 cm <sup>4</sup>
$M_y =$	2940 kN.cm	$P_y =$	36,75 kN	$I_{eq,y} =$	9397 cm <sup>4</sup>

Com o auxílio do programa Ftool (Martha, 2008), são obtidos os valores das flechas ( $\delta$ ), conforme a tabela 6.7:

Tabela 6.7 – Flechas para a viga com 3  $\Phi$  10 mm (NBR 6118)

(continua)

$P =$	0,00 kN	$\delta =$	0,00 mm
$P_r =$	8,01 kN	$\delta_r =$	0,51 mm
$P =$	10,39 kN	$\delta =$	1,24 mm
$P =$	13,03 kN	$\delta =$	1,99 mm
$P =$	15,66 kN	$\delta =$	2,72 mm
$P =$	18,30 kN	$\delta =$	3,42 mm
$P =$	20,94 kN	$\delta =$	4,09 mm
$P =$	23,58 kN	$\delta =$	4,73 mm
$P =$	26,21 kN	$\delta =$	5,36 mm
$P =$	28,85 kN	$\delta =$	5,97 mm

Tabela 6.7 – Flechas para a viga com 3  $\Phi$  10mm (NBR 6118)

(conclusão)

$P = 31,49$ kN	$\delta = 6,57$ mm
$P = 34,11$ kN	$\delta = 7,16$ mm
$P_y = 36,75$ kN	$\delta_y = 7,75$ mm

#### 6.1.4 Momento de inércia médio

Neste exemplo, ao invés de realizar a integração das curvaturas conforme descrito em 6.1.1 e 6.1.2, utiliza-se um valor médio de momento de inércia para cada elemento finito da viga discretizada.

Para cada valor de  $P$  atribuído, calcula-se o momento atuante ( $M_a$ ) de cada seção (nó) da viga e, conseqüentemente, o momento de inércia equivalente de acordo com a expressão de Branson (1965).

A partir dos momentos de inércia dos nós inicial e final, calcula-se o momento de inércia médio ( $I_{\text{médio}}$ ) para o elemento finito segundo a equação 6.28:

$$I_{\text{médio}} = \frac{I_i + I_{i+1}}{2} \quad (6.28)$$

Em que:

$I_i$  é o momento de inércia equivalente do nó  $i$  (inicial);

$I_{i+1}$  é o momento de inércia equivalente do nó  $i+1$  (final).

Com os valores de  $I_{\text{médio}}$  obtidos para cada elemento finito e com o auxílio do programa Ftool (Martha, 2008), obtém-se a flecha ( $\delta$ ) na metade do vão (nó 6). Esse processo é repetido para cada valor de carga  $P$  atribuído.

A tabela 6.8 contém os valores das flechas ( $\delta$ ) para cada carga  $P$  imposta referente à viga com 3 barras de 10mm de armadura longitudinal:

Tabela 6.8 – Flechas para a viga com 3  $\Phi$  10 mm ( $I_{\text{médio}}$ )

P =	0,00 kN	$\delta$ =	0,00 mm
<b>Pr =</b>	8,01 kN	<b><math>\delta_r</math> =</b>	0,51 mm
P =	10,39 kN	$\delta$ =	1,13 mm
P =	13,03 kN	$\delta$ =	1,92 mm
P =	15,66 kN	$\delta$ =	2,65 mm
P =	18,30 kN	$\delta$ =	3,38 mm
P =	20,94 kN	$\delta$ =	4,05 mm
P =	23,58 kN	$\delta$ =	4,69 mm
P =	26,21 kN	$\delta$ =	5,31 mm
P =	28,85 kN	$\delta$ =	5,90 mm
P =	31,49 kN	$\delta$ =	6,49 mm
P =	34,11 kN	$\delta$ =	7,10 mm
<b>Py =</b>	36,75 kN	<b><math>\delta_y</math> =</b>	7,70 mm
<b>Pu =</b>	37,78 kN	<b><math>\delta_u</math> =</b>	35,00 mm

### 6.1.5 Comparações

As flechas teóricas das vigas obtidas com os quatro modelos que consideram a NLF (itens 6.1.1 a 6.1.4) são confrontadas com as flechas experimentais dos ensaios realizados por Álvares (1993).

Apenas para fins elucidativos, são lançadas as flechas obtidas por meio de análise linear (deslocamentos proporcionais às cargas aplicadas).

As figuras 6.12, 6.13 e 6.14 ilustram as comparações para cada taxa de armadura:



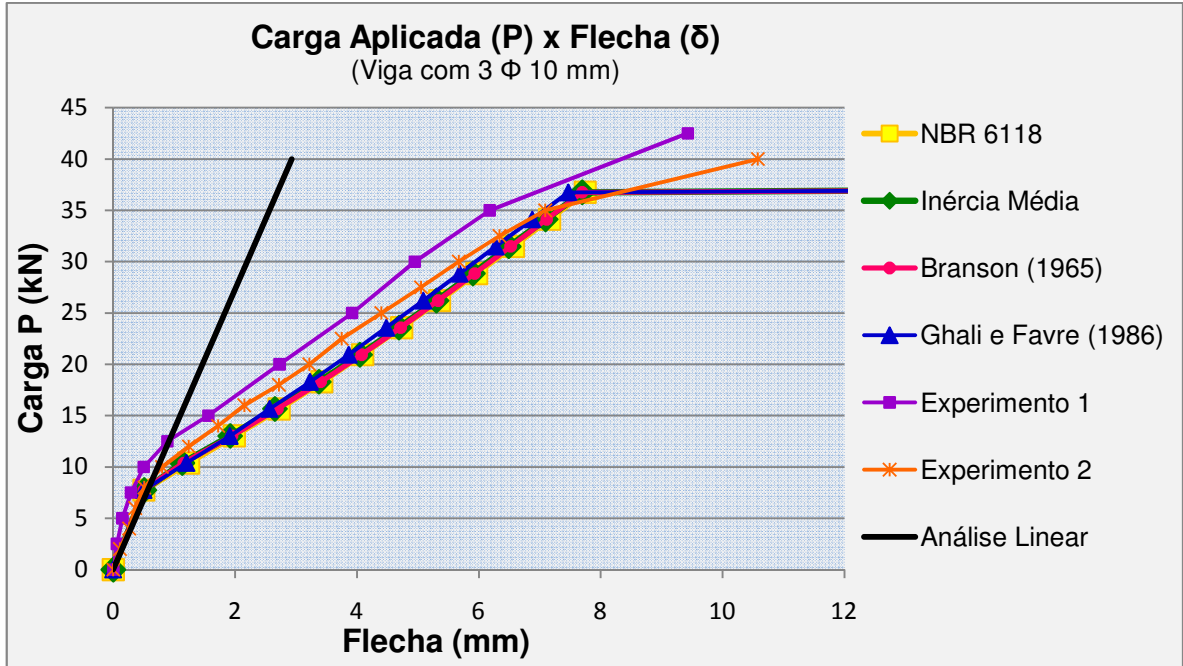


Figura 6.12 – Flechas para a viga com 3  $\Phi$  10 mm.

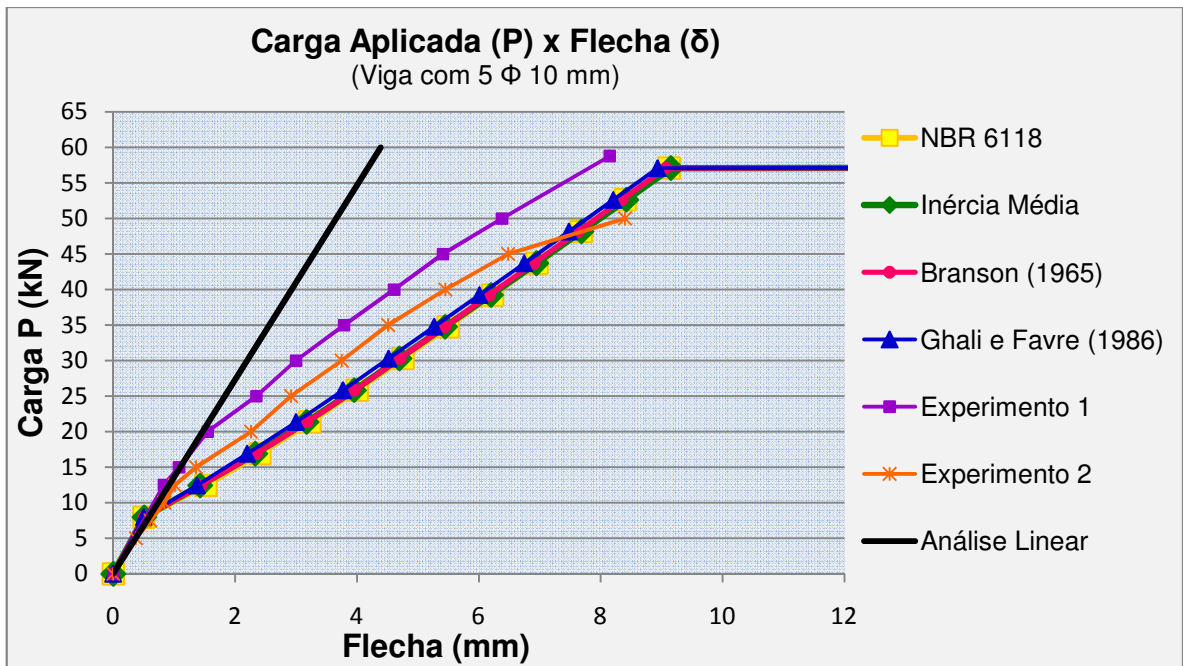


Figura 6.13 – Flechas para a viga com 5  $\Phi$  10 mm.

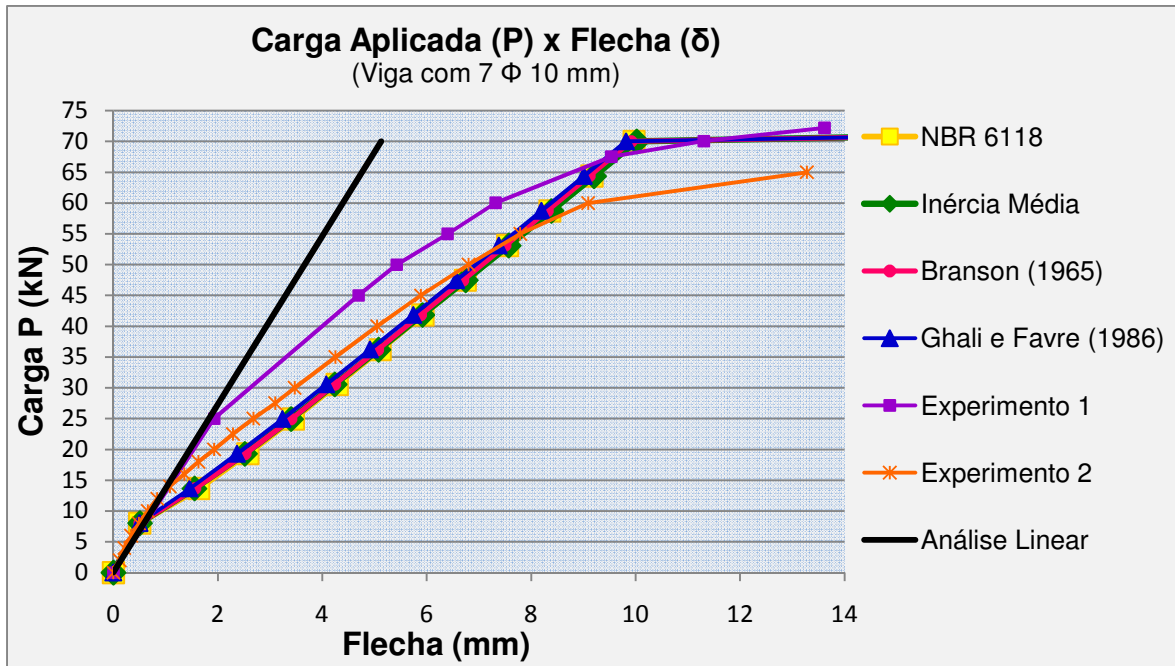


Figura 6.14 – Flechas para a viga com 7  $\Phi$  10 mm.

Da análise dos gráficos percebe-se que os modelos teóricos resultam em flechas com valores muito semelhantes entre si, os quais também fornecem uma boa aproximação perante os valores experimentais.

Nesse caso, o emprego de um modelo simplificado, como o sugerido pela NBR 6118 (ABNT, 2007), torna-se bastante conveniente em vez da utilização de modelos não-lineares mais complexos. Entretanto esses últimos, por representarem mais fielmente o comportamento dos materiais aço e concreto, têm sua importância como fonte de referência para quaisquer outras análises.

A reta correspondente a análise puramente linear comprova a limitação da utilização desse tipo de análise, que não deve ser empregada para a estimativa de flechas em vigas.

Os diagramas momento-curvatura fornecidos pelas análises que empregam os modelos de Branson (1965) e Ghali e Favre (1986) podem ser comparados pelas figuras 6.15, 6.16 e 6.17:

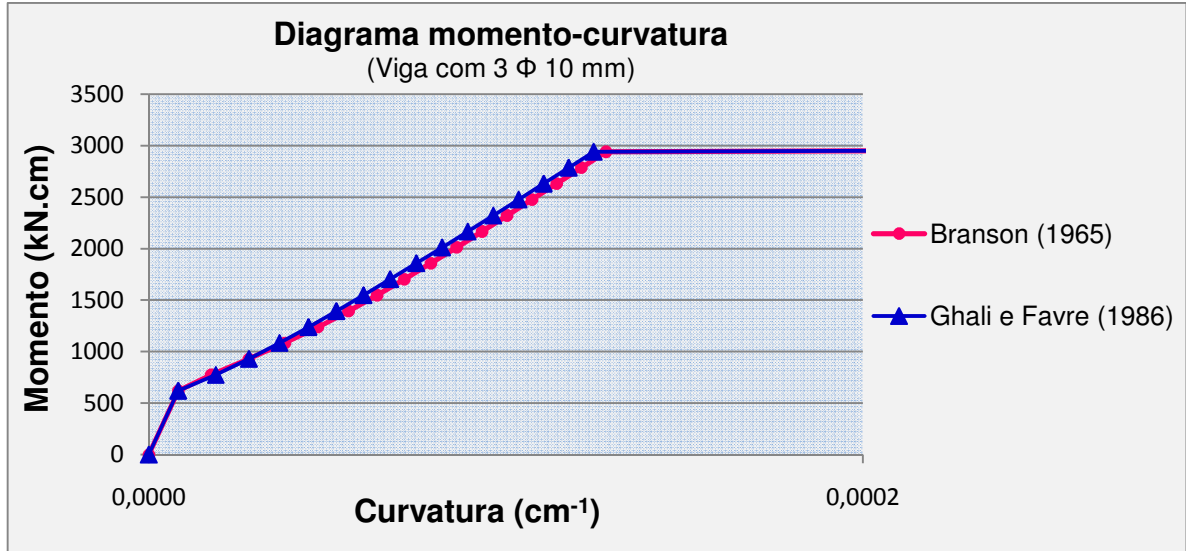


Figura 6.15 – Diagrama momento-curvatura para viga com 3  $\Phi$  10 mm.

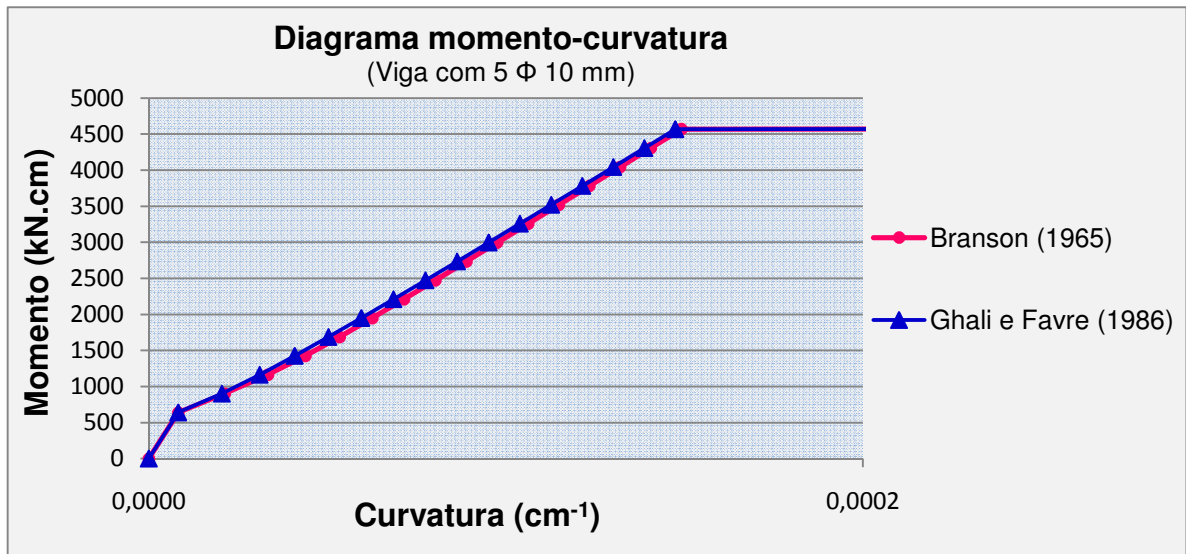


Figura 6.16 – Diagrama momento-curvatura para viga com 5  $\Phi$  10 mm.

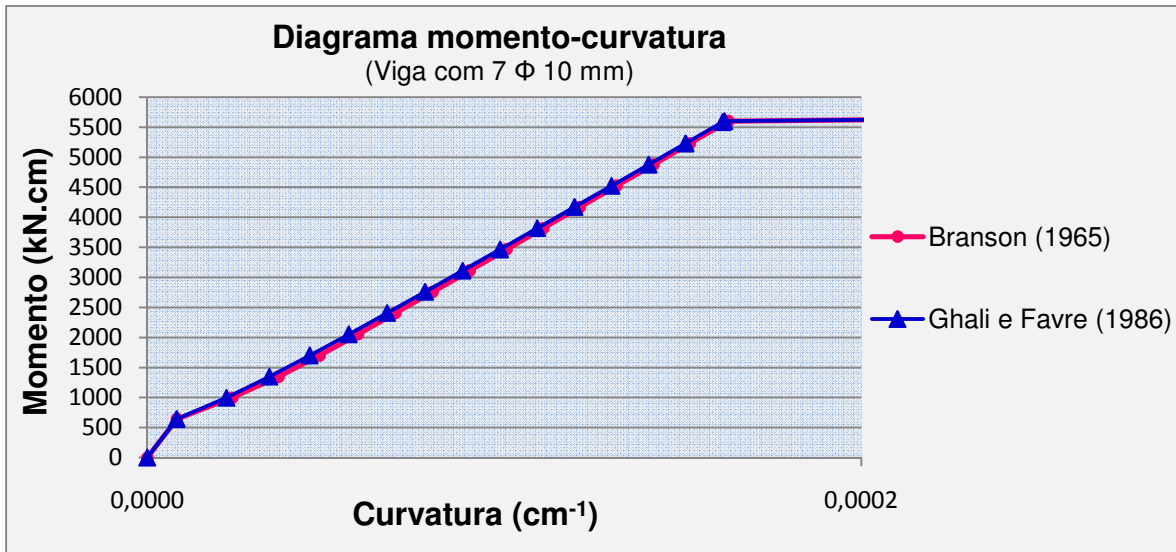


Figura 6.17 – Diagrama momento-curvatura para viga com 7 Φ 10 mm.

Nota-se pelos gráficos que, a utilização de um ou outro modelo, mesmo com a variação da taxa de armadura, resulta em valores praticamente iguais. Dessa maneira, a opção por um ou outro método em verificações de flechas no ELS (Estádio II), fica a cargo do usuário.

## 6.2 Exemplo 2

As flechas experimentais, obtidas do ensaio de uma viga biapoiada realizado por Bresler e Scordelis (1963), são empregadas para as comparações neste exemplo. Tais resultados, bastante confiáveis, são de grande apreciação pela comunidade científica visto que diversos autores utilizam-se dos mesmos em seus trabalhos.

Todas as informações relevantes, para o cálculo das flechas teóricas da viga, foram apresentadas por Oliveira (1997) e estão organizadas na tabela 6.9 e na figura 6.18. As unidades do trabalho original de Bresler e Scordelis (1963) são convertidas para as unidades usuais utilizadas no Brasil. Os parâmetros mecânicos, obtidos experimentalmente, são apresentados com a nomenclatura correspondente nas normas brasileiras.

Tabela 6.9– Parâmetros mecânicos dos materiais (exemplo 2)

Módulo de elasticidade secante do concreto	$E_{cs} = 2320 \text{ kN/cm}^2$
Módulo de elasticidade do aço de armadura passiva	$E_s = 19546 \text{ kN/cm}^2$
Resistência do concreto à tração direta	$f_{ct} = 0,234 \text{ kN/cm}^2$
Resistência à compressão do concreto	$f_c = 2,22 \text{ kN/cm}^2$
Resistência ao escoamento do aço de armadura passiva	$f_y = 42 \text{ kN/cm}^2$

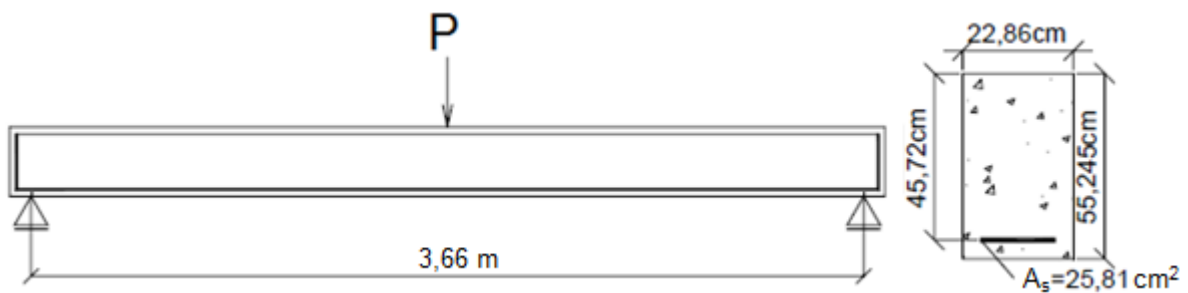


Figura 6.18 – Armadura e geometria da viga biapoiada - Bresler e Scordelis (1963).

Fonte: Adaptado de Oliveira (1997).

As flechas teóricas são obtidas por meio de análise não-linear com o emprego de dois dos modelos apresentados no exemplo anterior. São estes: modelo não-linear de Branson (1965) e modelo não-linear de Ghali e Favre (1986). Os demais modelos não são expostos, pois apresentam respostas bastante semelhantes aos dois sugeridos para este exemplo. Novamente a reta que representa a análise puramente linear é lançada para fins demonstrativos.

### 6.2.1 Integração das curvaturas e emprego dos modelos de Branson (1965) e Ghali e Favre (1986)

As etapas para obtenção das flechas da viga, utilizando os modelos de Branson e de Ghali e Favre são detalhadas no exemplo 1. Apresentam-se diretamente os resultados dos procedimentos numéricos descritos e, elucidam-se

apenas passos não contemplados anteriormente. As análises são limitadas até o início da plastificação da seção. Neste caso, pelo fato de a viga apresentar uma elevada taxa de armadura de tração, o início da plastificação ocorre pelo concreto, que atinge a deformação de 0,002 antes do início do escoamento das armaduras longitudinais.

Depois de realizadas as etapas de cálculo, chegam-se aos seguintes resultados:

$$\alpha_e = 8,424;$$

$$A_s = 25,81 \text{ cm}^2;$$

$$h = 55,25 \text{ cm};$$

$$b_w = 22,86 \text{ cm};$$

$$d = 45,72 \text{ cm};$$

$$x_l = 30,28 \text{ cm};$$

$$I_l = 381944 \text{ cm}^4;$$

$$\text{Ponto A } [(1/r)_r, M_r]: (1/r)_r = 6,063 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}, M_r = 5373 \text{ kN.cm};$$

$$y_t = 24,96 \text{ cm};$$

$$x_{II} = 21,47 \text{ cm};$$

$$I_{II} = 203258 \text{ cm}^4;$$

$$\text{Ponto B } [(1/r)_y, M_y]: (1/r)_y = 8,900 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}, M_y = 26694 \text{ kN.cm};$$

$$\beta_1 = 1 \text{ para barras de alta aderência (com nervuras);}$$

$\beta_2 = 1$ . para o primeiro carregamento; cargas pouco repetitivas, não permanentes ;

Os valores das cargas P e as respectivas flechas obtidas com o modelo de Branson e de Ghali e Favre estão indicados nas tabelas 6.10 e 6.11:

Tabela 6.10 – Flechas para a viga biapoiada – Modelo de Branson

(continua)

P =	0 kN	$\delta =$	0,00 mm
<b>Pr =</b>	<b>59 kN</b>	<b><math>\delta_r =</math></b>	<b>0,61 mm</b>
P=	85 kN	$\delta =$	1,21 mm
P =	117 kN	$\delta =$	2,04 mm

Tabela 6.10 – Flechas para a viga biapoiada – Modelo de Branson

(conclusão)

$P =$ 149 kN	$\delta =$ 2,86 mm
$P =$ 181 kN	$\delta =$ 3,62 mm
$P =$ 213 kN	$\delta =$ 4,37 mm
$P =$ 245 kN	$\delta =$ 5,10 mm
$P =$ 277 kN	$\delta =$ 5,82 mm
$P_y =$ 292 kN	$\delta_y =$ 6,18 mm

Tabela 6.11 – Flechas para a viga biapoiada – Modelo de Ghali e Favre

$P =$ 0 kN	$\delta =$ 0,00 mm
$P_r =$ 59 kN	$\delta_r =$ 0,61 mm
$P =$ 85 kN	$\delta =$ 1,17 mm
$P =$ 117 kN	$\delta =$ 1,92 mm
$P =$ 149 kN	$\delta =$ 2,69 mm
$P =$ 181 kN	$\delta =$ 3,43 mm
$P =$ 213 kN	$\delta =$ 4,17 mm
$P =$ 245 kN	$\delta =$ 4,90 mm
$P =$ 277 kN	$\delta =$ 5,62 mm
$P_y =$ 292 kN	$\delta_y =$ 6,01 mm

### 6.2.2 Comparações

As flechas dos modelos teóricos propostos são comparadas com as flechas experimentais obtidas por Bresler e Scordelis (1963), como indicado pela figura 6.19:

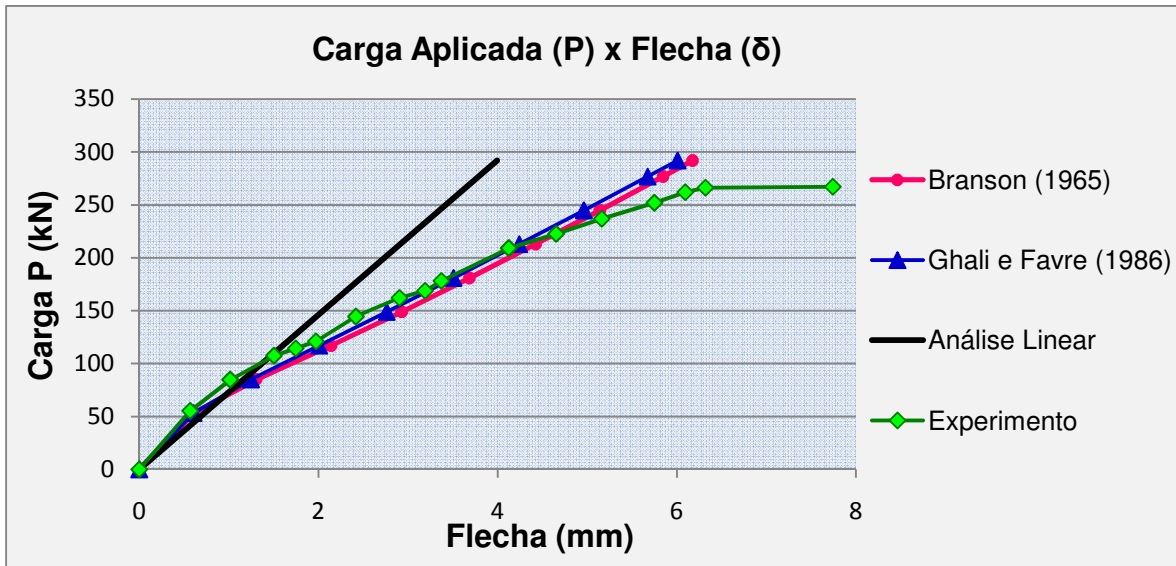


Figura 6.19 – Flechas para a viga biapoiada - Bresler e Scordelis (1963).

Pelo gráfico, percebe-se que os modelos de Branson (1965) e Ghali Favre (1986) representam de forma bastante satisfatória o comportamento da viga, apresentando resultados muito próximos dos valores experimentais, especialmente no Estádio II, confirmando os resultados obtidos no exemplo 1.

A análise puramente linear mostra-se, mais uma vez, ineficaz em estimar as flechas em vigas.

### 6.3 Exemplo 3

Neste exemplo é apresentado o dimensionamento das armaduras de uma viga biengastada hipotética (figura 6.20) com a utilização de três métodos de cálculo: análise linear sem redistribuição de esforços, análise linear com redistribuição de esforços e análise plástica. A intenção é mostrar como a NLF pode ser considerada em procedimentos de projeto associados ao ELU.



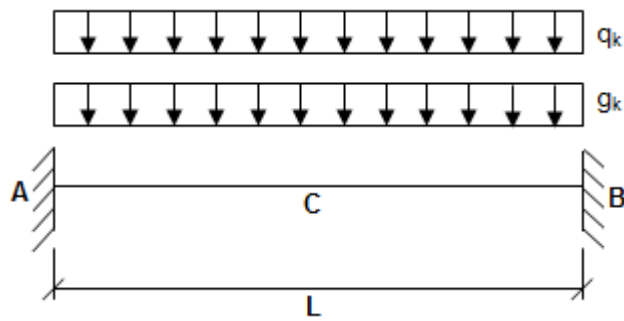


Figura 6.20 – Viga biengastada.

A seguir são detalhadas as etapas para o dimensionamento das armaduras longitudinais das seções de momento negativo máximo (seções A e B) e da seção de momento positivo máximo (seção C) no ELU. Os dados necessários ao cálculo da viga estão organizados na tabela 6.12:

Tabela 6.12– Dados do exemplo 3

Vão da viga	$L = 600 \text{ cm}$
Ações permanentes características	$g_k = 0,25 \text{ kN/cm}$
Ações variáveis características	$q_k = 0,08 \text{ kN/cm}$
Largura da viga	$b_w = 25 \text{ cm}$
Altura da viga	$h = 50 \text{ cm}$
Coefficiente de ponderação das ações permanentes	$\gamma_g = 1,4$
Coefficiente de ponderação das ações variáveis	$\gamma_q = 1,4$
Resistência característica do concreto	$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
Coefficiente de ponderação da resistência do concreto	$\gamma_c = 1,4$
Coefficiente de ponderação da resistência do aço	$\gamma_s = 1,15$
Resistência ao escoamento do aço	$f_y = 50 \text{ kN/cm}^2$
Distância das faces da seção aos eixos das armaduras	$5 \text{ cm}$
Momento de inércia da seção bruta de concreto	$I_c = 260417 \text{ cm}^4$
Módulo de elasticidade do aço	$E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$

Admite-se apenas uma camada de armadura tracionada, dimensionando-se a viga com armadura simples.

Primeiramente calcula-se o módulo de elasticidade secante do concreto segundo a equação 6.29:

$$E_{cs} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (6.29)$$

Chega-se então a  $E_{cs} = 23800 \text{ MPa} = 2380 \text{ kN/cm}^2$ .

Aplicam-se os coeficientes de ponderações das ações, correspondentes a cada uma das ações atuantes na viga, segundo as equações 6.30 e 6.31, respectivamente, para as ações permanentes e variáveis:

$$1,4 \cdot g_k = 1,4 \cdot 0,25 = 0,35 \text{ kN/cm} \quad (6.30)$$

$$1,4 \cdot q_k = 1,4 \cdot 0,08 = 0,112 \text{ kN/cm} \quad (6.31)$$

O carregamento total atuante na viga, igual a  $0,462 \text{ kN/cm}$ , é obtido da soma das ações resultantes.

A estrutura é resolvida no programa Ftool (Martha, 2008), utilizando a inércia bruta da seção ( $I_c$ ) e o módulo de elasticidade secante ( $E_{cs}$ ) do concreto como parâmetros de entrada. Os resultados são indicados nas figuras 6.21, 6.22 e 6.23:

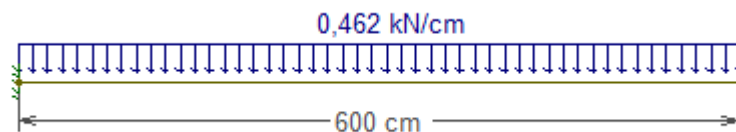


Figura 6.21 – Lançamento da estrutura no programa Ftool (Martha, 2008).

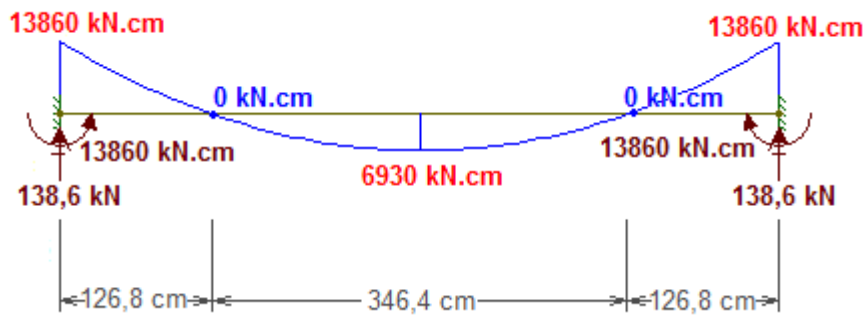


Figura 6.22 – Diagrama de Momento Fletor (DMF).

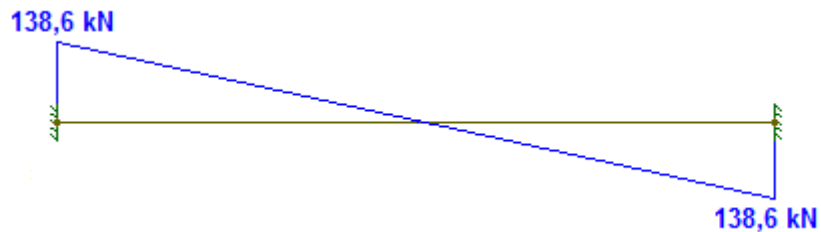


Figura 6.23 – Diagrama de Esforço Cortante (DEC).

Posteriormente procede-se o dimensionamento da viga por cada um dos métodos propostos.

### 6.3.1 Análise linear sem redistribuição de esforços

A partir dos dados da tabela 6.12 obtêm-se a resistência de projeto do concreto ( $f_{cd}$ ), a resistência de projeto do aço ( $f_{yd}$ ) e a altura útil da viga ( $d$ ), respectivamente, conforme as equações 6.32, 6.33 e 6.34:

$$f_{cd} = \frac{2,5}{1,4} = 1,786 \text{ kN/cm}^2 \quad (6.32)$$

$$f_{yd} = \frac{50}{1,15} = 43,48 \text{ kN/cm}^2 \quad (6.33)$$

$$d = 50 - 5 = 45 \text{ cm} \quad (6.34)$$

Com o valor da distância útil é possível encontrar os limites dos domínios de deformação do ELU por solicitações normais. O limite entre os domínios 2 e 3 é dado pela equação 6.35 e o limite entre os domínios 3 e 4 (aço CA-50) é dado pela equação 6.36:

$$x_{2/3} = 0,259d = 0,259 \cdot 45 = 11,66 \text{ cm} \quad (6.35)$$

$$x_{3/4} = 0,628d = 0,628 \cdot 45 = 28,26 \text{ cm} \quad (6.36)$$

O momento de cálculo ( $M_{sd}$ ) para os apoios de extremidade é igual a 13860 kN.cm. Com esse valor descobre-se em qual domínio de deformação se encontra a seção. Para tal é utilizada a equação 6.37, em que os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ , definidos anteriormente no exemplo 1, assumem os valores de 0,85 e 0,80 respectivamente.

$$M_{sd} = \alpha \cdot \beta \cdot f_{cd} \cdot (b_w \cdot x) \cdot (d - 0,4x) \quad (6.37)$$

Substituindo-se valores, chega-se a  $x=11,28$  cm, ou seja, a peça encontra-se no domínio 2.

Em seguida, é necessária a verificação da condição de ductilidade dos apoios, impondo a condição de que, para concretos com  $f_{ck}$  menores ou iguais a 35 MPa, o valor de  $x/d$  deve ser menor ou igual a 0,5:

$$\frac{x}{d} = \frac{11,28}{45} = 0,251 < 0,5$$

Logo, a condição é satisfeita.

É calculada então a área de armadura negativa através da equação 6.38:

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z \cdot \sigma_s} = \frac{13860}{40,49 \cdot 43,48} = 7,873 \text{ cm}^2 \quad (6.38)$$

Em que:

$z = d - 0,4 \cdot x = 45 - 0,4 (11,28) = 40,49$  cm é o braço de avalançada;

$\sigma_s = f_{yd}$  é a tensão na armadura tracionada.

Para a seção de máximo momento positivo procede-se da mesma maneira:

$$M_{sd} = 6930 \text{ kN.cm};$$

$$M_{sd} = 0,68 \cdot f_{cd} \cdot (b_w \cdot x) \cdot (d - 0,4 \cdot x):$$

$$6930 = 0,68 \cdot 1,786 \cdot (25 \cdot x) \cdot (45 - 0,4 \cdot x) \rightarrow x = 5,33 \text{ cm (domínio 2)};$$

$$z = d - 0,4 \cdot x = 45 - 0,4 \cdot (5,33) = 42,87 \text{ cm}$$

$$A_s = M_{sd} / (z \cdot \sigma_s) = 6930 / (42,87 \cdot 43,48) = 3,718 \text{ cm}^2.$$

### 6.3.2 Análise linear com redistribuição de esforços

Para a análise linear com redistribuição de esforços, o coeficiente de redistribuição ( $\delta$ ) adotado vale 0,75 (valor mínimo permitido pela NBR 6118 (ABNT, 2007) para este caso). Conhecido esse valor, efetua-se a redução dos momentos de extremidade da viga proposta e chega-se na área de armadura necessária. São utilizadas novamente as equações do item anterior:

$$M_{sd} = 0,75 \cdot 13860 = 10395 \text{ kN.cm};$$

$$M_{sd} = 0,68 \cdot f_{cd} \cdot (b_w \cdot x) \cdot (d - 0,4 \cdot x) :$$

$$10395 = 0,68 \cdot 1,786 \cdot (25 \cdot x) \cdot (45 - 0,4 \cdot x) \rightarrow x = 8,21 \text{ cm (domínio 2)};$$

$$z = d - 0,4 \cdot x = 45 - 0,4 \cdot (8,21) = 41,72 \text{ cm}$$

$$A_s = M_{sd} / (z \cdot \sigma_s) = 10395 / (41,72 \cdot 43,48) = 5,731 \text{ cm}^2.$$

É necessária a verificação da restrição imposta pela NBR 6118 (ABNT, 2007) sobre os valores de  $\delta$  para concretos com  $f_{ck}$  menores ou iguais a 35 MPa:

$$\delta \geq 0,44 + 1,25 \left( \frac{x}{d} \right) = 0,44 + 1,25 \left( \frac{8,21}{45} \right) = 0,668$$

Logo, a restrição é satisfeita, pois  $\delta = 0,75$ .

A redução dos momentos nos apoios exige a correção dos valores dos esforços cortantes e dos momentos fletores positivos. Tal correção pode ser feita por equilíbrio (figura 6.24):

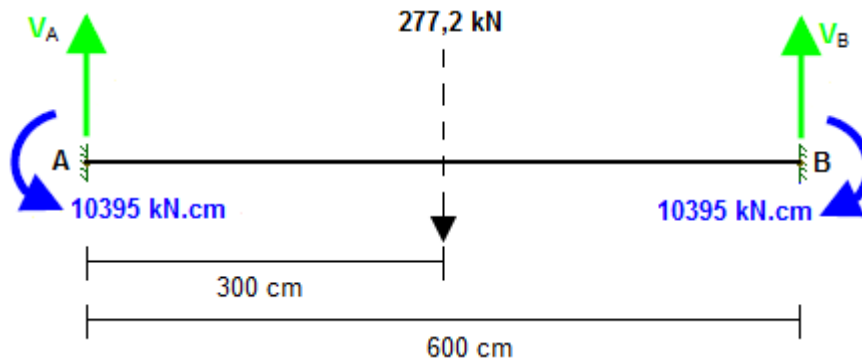


Figura 6.24 – Correção de momentos positivos e esforços cortantes (redistribuição de esforços).

Por equilíbrio de forças e momentos, os esforços cortantes  $V_A$  e  $V_B$  são obtidos com as equações 6.39 e 6.40:

$$\sum M_A = 10395 - (277,2 \cdot 300) + (V_B \cdot 600) - 10395 = 0 \rightarrow V_B = 138,6 \text{ kN} \quad (6.39)$$

$$\sum F_V = V_A + V_B - 277,2 = 0 \rightarrow V_A + 138,6 - 277,2 = 0 \rightarrow V_A = 138,6 \text{ kN} \quad (6.40)$$

Por tratar-se de um problema simples (viga biengastada com carga uniformemente distribuída), os esforços cortantes não sofreram alterações em relação à análise linear sem redistribuição. Entretanto, em casos mais gerais de vigas com maior número de tramos e carregamentos diferentes, podem ocorrer alterações nos diagramas de esforços cortantes após a redistribuição de momentos.

Para obter o máximo momento positivo, procede-se ao equilíbrio da seção no ponto de esforço cortante nulo (equação 6.41):

$$M_{sd} = -10395 + 138,6 - (0,462 \cdot 300 \cdot 150) = 10395 \text{ kN.cm} \quad (6.41)$$

A figura 6.25 ilustra o diagrama de momentos fletores após a redistribuição de esforços:

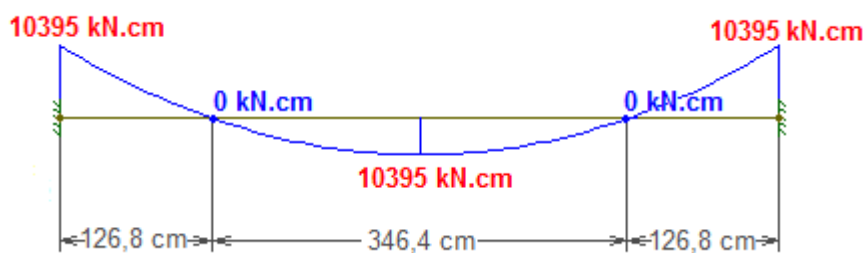


Figura 6.25 – DMF após a redistribuição de esforços.

Conhecido o valor do máximo momento positivo é calculada a área de armadura para a seção do mesmo:

$$A_s = 5,731 \text{ cm}^2.$$

### 6.3.3 Comparações

A figura 6.26 apresenta as taxas de armaduras finais para os dois métodos de análise propostos:

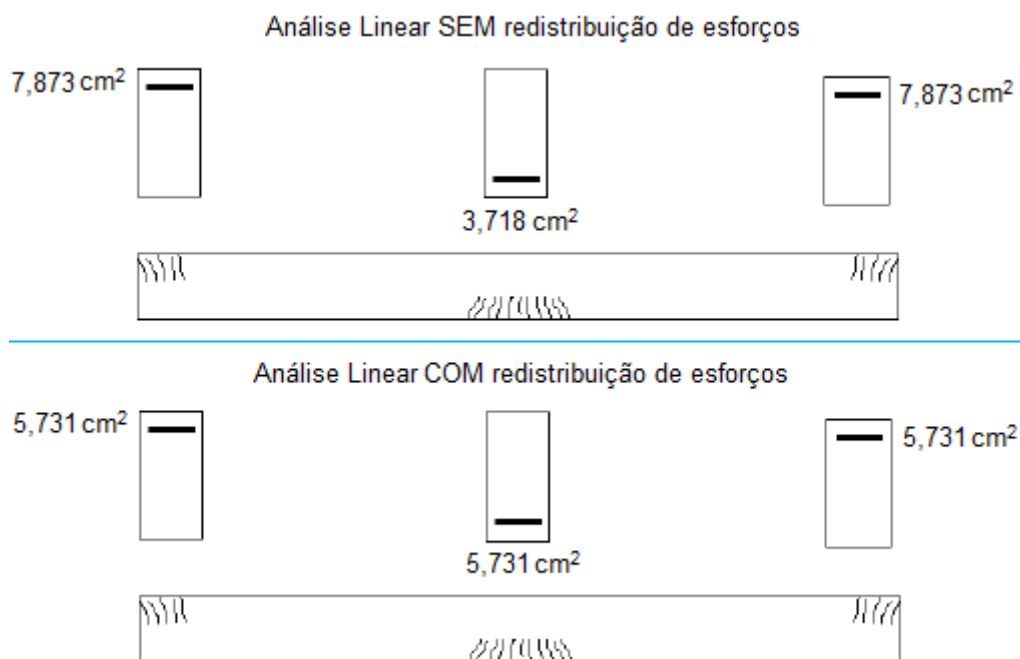


Figura 6.26 – Armaduras finais: Análise linear sem e com redistribuição de esforços.

Nota-se que a análise com redistribuição de esforços produz uma tendência de uniformização das armaduras ao longo da viga. Soma-se a isso o fato de que a redução das armaduras negativas evita o congestionamento de barras na região dos apoios e possibilita a redução dos diâmetros das mesmas, favorecendo as condições de ancoragem.

#### 6.3.4 Análise plástica

##### 6.3.4.1 Análise plástica aplicada ao item 6.3.2

Com o intuito de avaliar a reserva de resistência da viga com as armaduras obtidas a partir da análise linear com redistribuição, empregam-se as mesmas áreas de aço obtidas no item 6.3.2, conforme a figura 6.27:

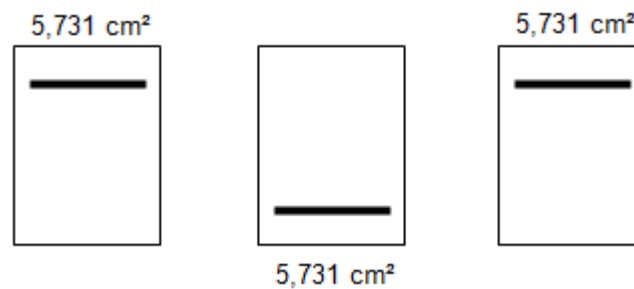


Figura 6.27 – Armaduras definidas a partir da análise linear com redistribuição.

Em seguida calcula-se o momento de plastificação das armaduras. Em geral, as vigas são projetadas para que a plastificação total da seção ocorra com o escoamento das armaduras tracionadas. Logo, a resultante da armadura é calculada pela equação 6.42:

$$R_s = A_s \cdot f_{yd} \quad (6.42)$$



Por sua vez, a resultante de compressão no concreto é obtida pela equação 6.43:

$$R_{cc} = 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x \quad (6.43)$$

Para haver equilíbrio na seção, igualam-se ambas as resultantes, obtendo-se o valor de  $x$ , de acordo com a equação 6.44:

$$R_s = R_{cc} \rightarrow A_s \cdot f_{yd} = 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x \rightarrow x = 8,21 \rightarrow \text{Domínio 2} \quad (6.44)$$

O braço de alavanca vale  $z = d - 0,4 \cdot x = 45 - 0,4 \cdot (8,21) = 41,72$  cm.

O momento de plastificação é finalmente calculado pela equação 6.45:

$$M_p = R_{cc} \cdot z = R_{cc} \cdot (d - 0,4 \cdot x) = 0,68 \cdot f_c \cdot b_w \cdot x \cdot (d - 0,4 \cdot x) = 10395 \text{ kN.cm} \quad (6.45)$$

Para obter o limite superior da carga de colapso, aplica-se o teorema cinemático (equação 6.46). Definindo-se um mecanismo cinematicamente admissível (figura 6.28) e sabendo-se que o trabalho das forças externas é igual ao trabalho desenvolvido na formação das rótulas plásticas:

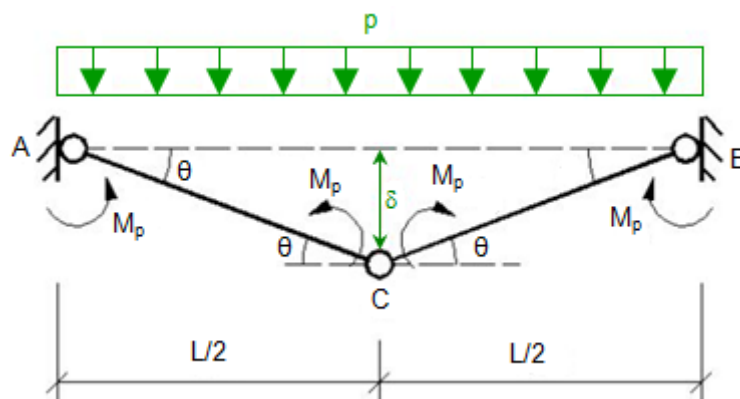


Figura 6.28 – Mecanismo cinematicamente admissível.

$$p = \frac{16M_p}{L^2} = \frac{16 \cdot 10395}{600^2} = 0,462 \text{ kN/cm} \quad (6.46)$$

Para obter o limite inferior da carga de colapso, aplica-se o teorema estático (equação 6.47) definindo-se um diagrama de momento fletor estaticamente admissível conforme figura 6.29:

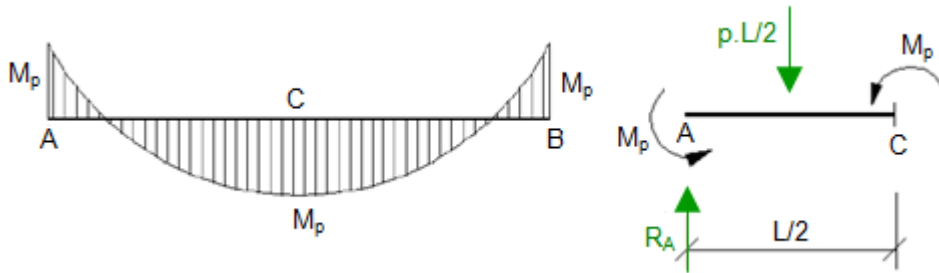


Figura 6.29 – DMF estaticamente admissível.

$$p = \frac{16M_p}{L^2} = \frac{16 \cdot 10395}{600^2} = 0,462 \text{ kN/cm} \quad (6.47)$$

A carga de colapso ( $p_u$ ) é obtida pelo teorema da unicidade (equação 6.48):

$$p_u = 0,462 \text{ kN/cm} \quad (6.48)$$

Para que a viga atinja a carga de colapso calculada conforme o mecanismo previsto na figura 6.28, é necessária a verificação da capacidade de rotação plástica ( $\theta_{pl}$ ) dos apoios da viga, conforme critérios estabelecidos na figura 6.30:

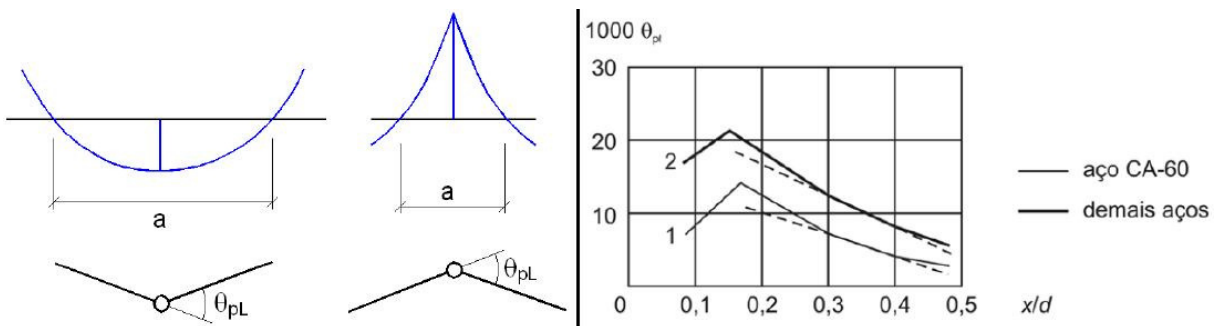


Figura 6.30 – Capacidade de rotação de rótulas plásticas.

Fonte: Adaptado da NBR 6118 (ABNT, 2007).

Em que:

Curva 1: para  $x \geq 0,17d \rightarrow \theta_{pl} = (0,002 \cdot d)/x$

Curva 2: para  $x \geq 0,15d \rightarrow \theta_{pl} = (0,0035 \cdot d)/x$

Para  $a/d \neq 6 \rightarrow \theta_{pl} \cdot ((a/d)/6)^{1/2}$

Para apoio de extremidade  $\rightarrow (\theta_{pl} \cdot ((a/d)/6)^{1/2})/2$

O valor de  $a$ , conforme figura 6.22, vale  $126,8 \cdot 2 = 253,6$  cm. Dessa maneira:

$$\frac{a}{d} = \frac{253,6}{45} = 5,64 \neq 6$$

Dessa forma, a capacidade de rotação plástica é dada pela equação 6.49 (curva 2 da figura 6.30), visto que o aço adotado é de classe 50 (CA-50).

$$\theta_{pl} = \frac{\left( \frac{0,0035d}{x} \right) \cdot \sqrt{\frac{a/d}{6}}}{2} \quad (6.49)$$

Substituindo valores, chega-se a  $\theta_{pl} = 9,298 \cdot 10^{-3}$  rad.

A capacidade de rotação plástica deve ser maior ou igual que a rotação plástica necessária para a formação do mecanismo da figura 6.29. Sabendo que, imediatamente antes da formação da terceira rótula plástica (metade do vão), a viga se comporta como uma viga birotulada, pode-se deduzir que a rotação  $\theta$  assume o valor dado pela equação 6.50:

$$\theta = \frac{5 \cdot M_p \cdot L}{48 \cdot EI} \quad (6.50)$$

Em que:

$M_p = 10395$  kN.cm;

$L = 600$  cm;

$EI = E_{cs} \cdot I_{II}$ ;

$E_{cs} = 2380$  kN/cm<sup>2</sup>;

$I_{II} = (b_w \cdot x_{II}^3)/12 + b_w \cdot x_{II} \cdot (x_{II}/2)^2 + \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_{II})^2 = 69419$  cm<sup>4</sup>;

$b_w \cdot x_{II} \cdot (x_{II}/2) + \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_{II}) = 0 \rightarrow x_{II} = 11,62$  cm;

$b_w = 25$  cm;

$$\alpha_e = E_s/E_{cs} = (21000 \text{ kN/cm}^2)/(2380 \text{ kN/cm}^2) = 8,824;$$

$$A_s = 5,731 \text{ cm}^2.$$

A rotação plástica necessária para a formação do mecanismo assume o valor de  $\theta = 3,932 \cdot 10^{-3}$  rad. Logo a condição de que  $\theta_{pl} \geq \theta$  está satisfeita.

Na figura 6.31 observa-se o gráfico da carga aplicada *versus* deslocamento na metade do vão:

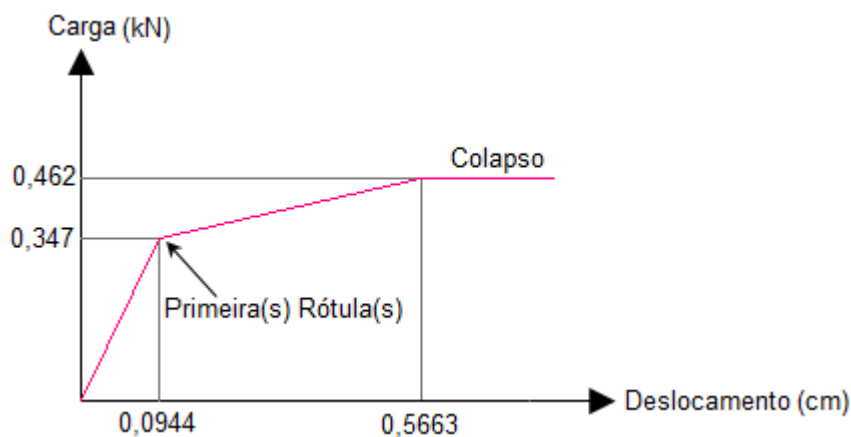


Figura 6.31 – Carga aplicada *versus* deslocamento na metade do vão.

### 6.3.5 Comparações

A análise plástica conduz, para a viga projetada a partir de análise linear com redistribuição ( $\delta=0,75$ ), a uma carga de colapso no valor de 0,462 kN/cm, valor esse igual à ação de cálculo da combinação última.

Analisando esse quadro, percebe-se que a disposição e a quantidade das armaduras obtidas com a análise sem redistribuição não promovem o aproveitamento de toda a capacidade resistente dos materiais aço e concreto, pois nesse caso a estrutura ainda teria condições de suportar mais carga além da qual realmente está submetida (existe uma reserva de resistência).

A análise com redistribuição de esforços conduz a uma distribuição de armaduras que contribui para um melhor aproveitamento da resistência dos materiais.

De uma maneira geral, a análise plástica permite a consideração de toda a capacidade resistente das seções, o conhecimento da carga de colapso e também do mecanismo de colapso. Entretanto, ainda é uma simplificação de uma análise não-linear e sua aplicação se restringe a estruturas relativamente simples, tais como vigas e pórticos de um andar.

#### 6.4 Exemplo 4

Este exemplo trata da mesma viga abordada no exemplo 3 (mesmo vão, mesmas vinculações, carregamentos e materiais estruturais), cujas principais informações estão resumidas na figura 6.32:

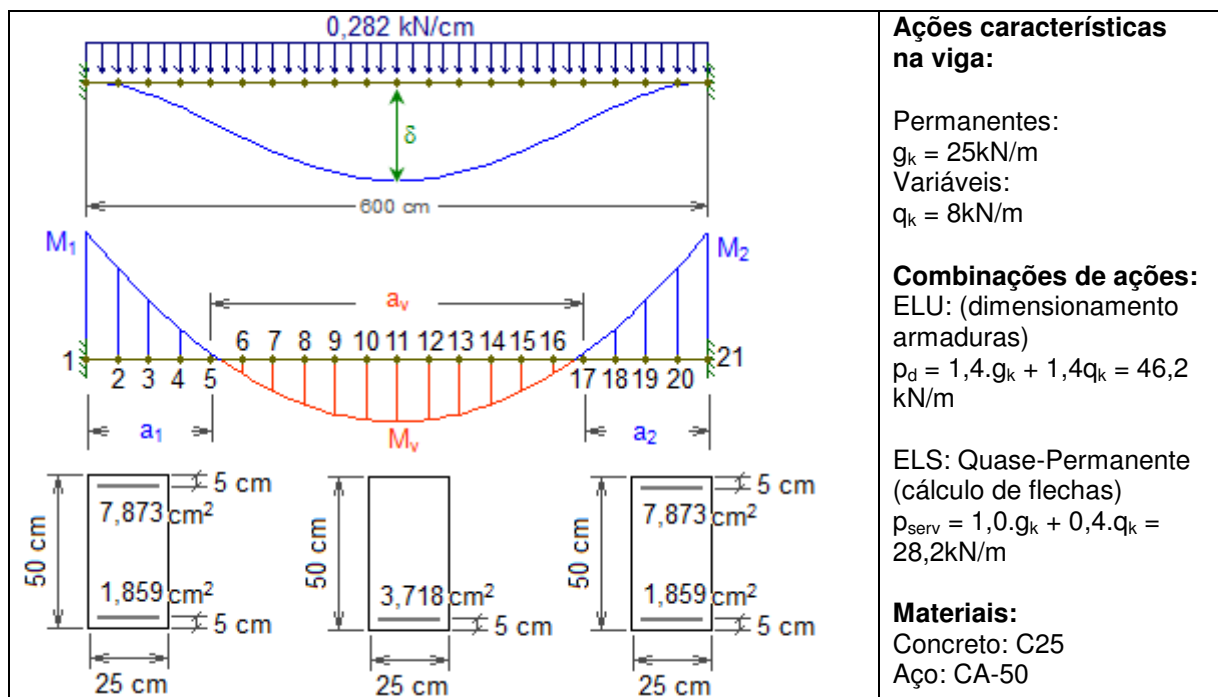


Figura 6.32 – Viga biengastada do exemplo 4.

As armaduras longitudinais são definidas a partir da análise linear sem redistribuição realizada no item 6.3.1. As armaduras longitudinais inferiores das seções dos apoios são obtidas a partir da obrigatoriedade imposta pela NBR 6118 (ABNT, 2007) de se estender uma fração das armaduras tracionadas da seção de máximo momento positivo para os apoios. As seções com armadura dupla estendem-se em 120 cm para cada extremidade da viga, enquanto a seção com armadura simples estende-se nos restantes 360 cm do trecho central da viga (figura 6.33).

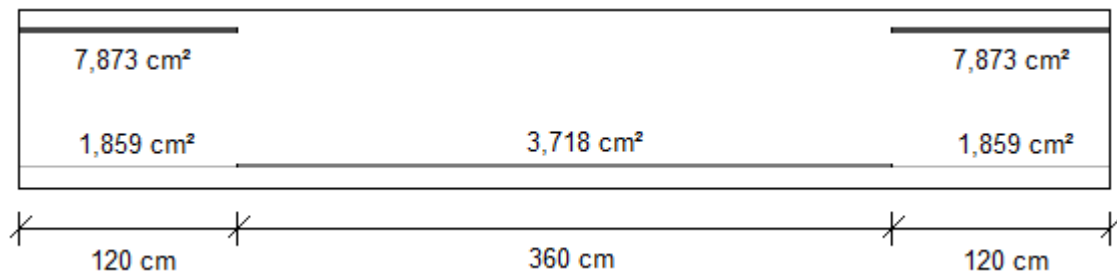


Figura 6.33 – Seção longitudinal da viga do exemplo 4.

O objetivo principal deste exemplo é a comparação das flechas imediatas fornecidas pelos métodos aproximados propostos pela NBR 6118 (ABNT, 2007) e pelo IBRACON (2007) com as flechas fornecidas por uma análise não-linear (referência). Também é objetivo deste exemplo avaliar quantitativamente as diferenças obtidas entre a análise puramente linear e as demais análises (não-lineares ou lineares corrigidas para levar em conta a NLF), tanto em ELU quanto em ELS. Para a análise de flechas no ELS, escolhe-se a combinação quase-permanente.

Os coeficientes de ponderação da resistência dos materiais no ELS são: aço:  $\gamma_s = 1,0$ ; concreto:  $\gamma_c = 1,0$ . Para o ELU,  $\gamma_s = 1,15$  e  $\gamma_c = 1,4$ . Tais coeficientes são utilizados para a obtenção dos parâmetros de resistência dos materiais descritos na tabela 6.13. Os valores do módulo de elasticidade secante do concreto ( $E_{cs}$ ) e da resistência à tração direta ( $f_{ct}$ ) do concreto são avaliados a partir de correlações com a resistência à compressão característica ( $f_{ck}$ ), apresentadas pela NBR 6118 (ABNT, 2007).

Tabela 6.13 – Parâmetros mecânicos dos materiais (exemplo 4)

Módulo de elasticidade secante do concreto	$E_{cs} = 2380 \text{ kN/cm}^2$
Módulo de elasticidade do aço de armadura passiva	$E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$
Resistência do concreto à tração direta (ELS)	$f_{ct} = 0,1795 \text{ kN/cm}^2$
Resistência à compressão do concreto (ELS)	$f_c = 2,5 \text{ kN/cm}^2$
Resistência ao escoamento do aço (ELS)	$f_y = 50 \text{ kN/cm}^2$
Resistência do concreto à tração direta (ELU)	$f_{ct} = 0,1282 \text{ kN/cm}^2$
Resistência à compressão do concreto (ELU)	$f_c = 1,79 \text{ kN/cm}^2$
Resistência ao escoamento do aço (ELU)	$f_y = 43,48 \text{ kN/cm}^2$

Os parâmetros que definem as relações momento-curvatura são indicados nas tabelas 6.14 e 6.15, respectivamente, para as seções dos apoios e seção central da viga.

Tabela 6.14 – Região de momentos negativos (apoios)

(continua)

Momento de inércia do estádio I	$I_I = 293922 \text{ cm}^4$
Profundidade da linha neutra no estádio I	$x_I = 25,79 \text{ cm}$
Momento de inércia do estádio II	$I_{II} = 90492 \text{ cm}^4$
Profundidade da linha neutra no estádio II	$x_{II} = 12,95 \text{ cm}$
Momento de fissuração (ELS)	$M_r = 3270 \text{ kN.cm}$
Curvatura de fissuração (ELS)	$(1/r)_r = 4,675 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$
Momento de plastificação (ELS)	$M_y = 15999 \text{ kN.cm}$
Curvatura de plastificação (ELS)	$(1/r)_y = 7,429 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$
Momento último (ELS)	$M_u = 16355 \text{ kN.cm}$
Curvatura última (ELS)	$(1/r)_u = 4,350 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$
Momento de fissuração (ELU)	$M_r = 2336 \text{ kN.cm}$
Curvatura de fissuração (ELU)	$(1/r)_r = 3,339 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$
Momento de plastificação (ELU)	$M_y = 13912 \text{ kN.cm}$
Curvatura de plastificação (ELU)	$(1/r)_y = 6,460 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$

Tabela 6.14 – Região de momentos negativos (apoios)

(conclusão)

Momento último (ELU)	$M_u = 14060 \text{ kN.cm}$
Curvatura última (ELU)	$(1/r)_u = 3,797 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$

Tabela 6.15 – Região de momentos positivos (seção central)

Momento de inércia do estádio I	$I_I = 273203 \text{ cm}^4$
Profundidade da linha neutra no estádio I	$x_I = 25,51 \text{ cm}$
Momento de inércia do estádio II	$I_{II} = 48484 \text{ cm}^4$
Profundidade da linha neutra no estádio II	$x_{II} = 9,63 \text{ cm}$
Momento de fissuração (ELS)	$M_r = 3005 \text{ kN.cm}$
Curvatura de fissuração (ELS)	$(1/r)_r = 4,621 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$
Momento de plastificação (ELS)	$M_y = 7769 \text{ kN.cm}$
Curvatura de plastificação (ELS)	$(1/r)_y = 6,732 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$
Momento último (ELS)	$M_u = 8040 \text{ kN.cm}$
Curvatura última (ELS)	$(1/r)_u = 8,002 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$
Momento de fissuração (ELU)	$M_r = 2146 \text{ kN.cm}$
Curvatura de fissuração (ELU)	$(1/r)_r = 3,301 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$
Momento de plastificação (ELU)	$M_y = 6755 \text{ kN.cm}$
Curvatura de plastificação (ELU)	$(1/r)_y = 5,854 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$
Momento último (ELU)	$M_u = 6930 \text{ kN.cm}$
Curvatura última (ELU)	$(1/r)_u = 6,573 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$

#### 6.4.1 Estado Limite Último (ELU)

Para o ELU, a viga é calculada através de análise linear e não-linear. A análise não-linear é realizada com o emprego do programa computacional NLVP – desenvolvido em linguagem Fortran, pelo orientador deste trabalho, para a análise não-linear de pórticos planos de concreto armado. Para elementos submetidos à



flexão simples, o programa também emprega o diagrama momento-curvatura da figura 6.3, utilizado no exemplo 1. O carregamento é aplicado em 20 incrementos iguais de carga. Para a solução do sistema não-linear de equações, utiliza-se o método de Newton-Raphson modificado, com tolerância de 1% para a convergência em forças e em deslocamentos.

A análise linear é resolvida com o auxílio do programa Ftool (Martha, 2008) e os parâmetros de entrada indicados são o módulo de elasticidade secante do concreto ( $E_{cs} = 2380 \text{ kN/cm}^2$ ) e o momento de inércia da seção bruta de concreto ( $I_c = 260417 \text{ cm}^4$ ).

#### 6.4.1.1 Comparações

Os resultados obtidos são comparados de acordo com as figuras 6.34 e 6.35:

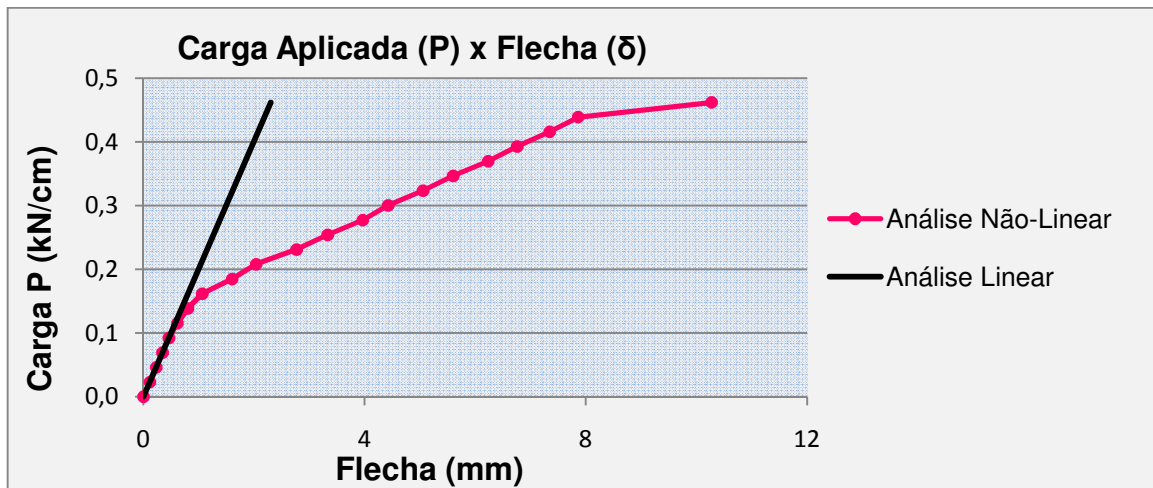


Figura 6.34 – Flechas no centro da viga ao longo da carga aplicada – ELU.

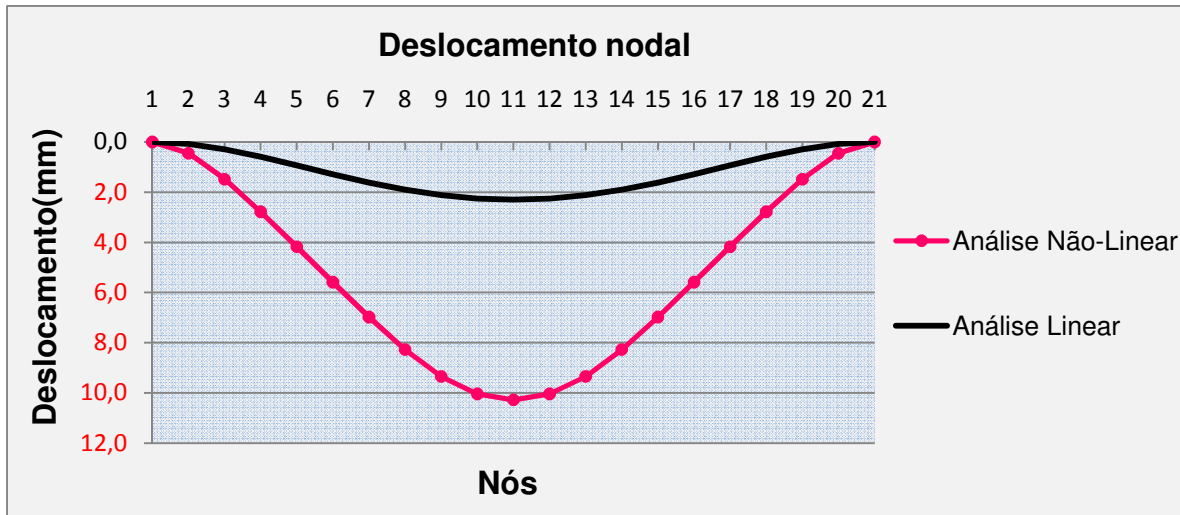


Figura 6.35 – Deformada da viga para a carga última – ELU.

Os resultados dos gráficos mencionados confirmam a ineficiência da análise linear, também constatada nos exemplos anteriores, na simulação da resposta estrutural de vigas de concreto em termos de deslocamentos.

#### 6.4.2 Estado Limite de Serviço (ELS)

Para o ELS, são utilizados quatro métodos para as comparações. São estes: análise linear, não-linear (empregando o programa NLVP), o método da rigidez equivalente proposta pela NBR 6118 (ABNT, 2007) (apresentado no exemplo 1) e o método da rigidez equivalente ponderada proposto pelo IBRACON (2007). Esses dois últimos são analisados também com o auxílio do programa Ftool (Martha, 2008).

A viga é discretizada em 20 elementos de mesmo comprimento (figura 6.32) e o carregamento é aplicado em 20 incrementos de carga. Como estimativa inicial, emprega-se a inércia da seção bruta ( $I_c = 260417 \text{ cm}^4$ ) para todo o vão da viga. Com os valores dos momentos atuantes nos apoios e na seção central (para cada valor de carga aplicada), procede-se o cálculo das inércias equivalentes da NBR 6118 (ABNT, 2007) ( $I_{eq}$ ) e das inércias equivalentes ponderadas ( $I_{eq,pond}$ ), segundo as equações 6.27 (apresentada no exemplo 1) e 6.51 respectivamente:

$$I_{eq,pond} = \frac{1}{L} [I_{eq,1} \cdot a_1 + I_{eq,v} \cdot a_v + I_{eq,2} \cdot a_2] \quad (6.51)$$

Em que

$I_{eq,1}$  é dada pela equação 6.27 para o trecho 1 ( $a_1$ ) da figura 6.32;

$I_{eq,v}$  é dada pela equação 6.27 para o trecho de momentos positivos ( $a_v$ ) da figura 6.32;

$I_{eq,2}$  é dada pela equação 6.27 para o trecho 2 ( $a_2$ ) da figura 6.32.

Os valores de  $a_1$ ,  $a_v$  e  $a_2$  são obtidos a partir da estimativa inicial (gerados pelo programa Ftool (Martha, 2008)) e valem respectivamente 126,8 cm; 346,4 cm e 126,8 cm. A tabela 6.16 contém os valores das inércias calculadas com as equações 6.27 e 6.51:

Tabela 6.16 – Inércias para cada passo de carga

(continua)

	Carga (kN/cm)	$M_1 = M_2$ (kN.cm)	$I_{eq,1} = I_{eq,2}$ (cm <sup>4</sup> )	$M_v$ (kN.cm)	$I_{eq,v}$ (cm <sup>4</sup> )	$I_{eq,pond}$ (cm <sup>4</sup> )	$I_{eq}$ (cm <sup>4</sup> )
1	0,014	423	293922	212	273203	281960	273203
2	0,028	846	293922	423	273203	281960	273203
3	0,042	1269	293922	635	273203	281960	273203
4	0,056	1692	293922	846	273203	281960	273203
5	0,071	2115	293922	1058	273203	281960	273203
6	0,085	2538	293922	1269	273203	281960	273203
7	0,099	2961	293922	1481	273203	281960	273203
8	0,113	3384	243858	1692	273203	260800	273203
9	0,127	3807	198206	1904	273203	241506	273203
10	0,141	4230	169015	2115	273203	229168	273203
11	0,155	4653	149488	2327	273203	220915	273203
12	0,169	5076	135934	2538	273203	215186	273203
13	0,183	5499	126233	2750	273203	211086	273203
14	0,197	5922	119108	2961	273203	208075	273203
15	0,212	6345	113758	3173	228526	180020	228526
16	0,226	6768	109663	3384	196834	159991	196834

Tabela 6.16 – Inércias para cada passo de carga

(conclusão)

Carga (kN/cm)	M1 = M2 (kN.cm)	leq,1 = leq,2 (cm <sup>4</sup> )	Mv (kN.cm)	leq,v (cm <sup>4</sup> )	leq,pond (cm <sup>4</sup> )	leq (cm <sup>4</sup> )
17	0,240	7191	106475	3596	172165	144401
18	0,254	7614	103956	3807	152675	132084
19	0,268	8037	101940	4019	137074	122225
20	0,282	8460	100307	4230	124439	114240

Os valores das inércias dos elementos ao longo do vão (tabela 6.16) são processados novamente no programa FTOOL (MARTHA, 2008) para a obtenção dos deslocamentos verticais.

#### 6.4.2.1 Comparações

As flechas (no centro da viga) imediatas obtidas a partir de análise linear, não-linear e com os métodos aproximados são indicadas nas figuras 6.36 e 6.37:

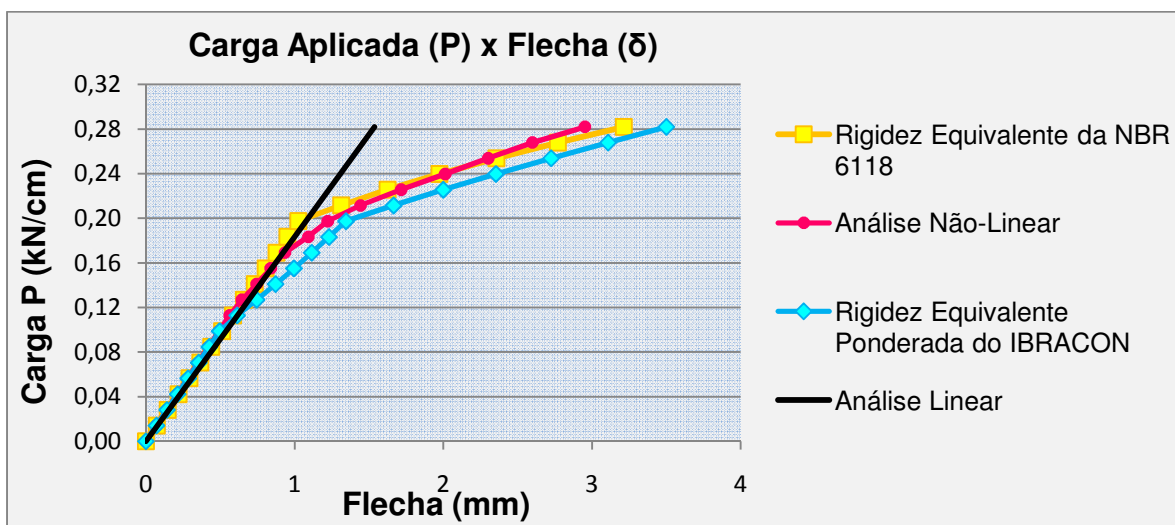


Figura 6.36 – Flechas imediatas com diferentes análises – ELS.

Da análise do gráfico, pode-se perceber um afastamento maior entre os valores de flechas fornecidos pelos métodos aproximados no trecho correspondente ao carregamento de 0,14 kN/cm até 0,20 kN/cm. Esta peculiaridade se deve ao fato de que o método da NBR 6118 (ABNT, 2007) considera apenas a rigidez do trecho de momentos positivos, enquanto que o método do IBRACON (2007) leva em conta a influência das armaduras negativas. Apesar disso, no geral, tais métodos fornecem resultados bastante satisfatórios quando comparados aos da análise não-linear.

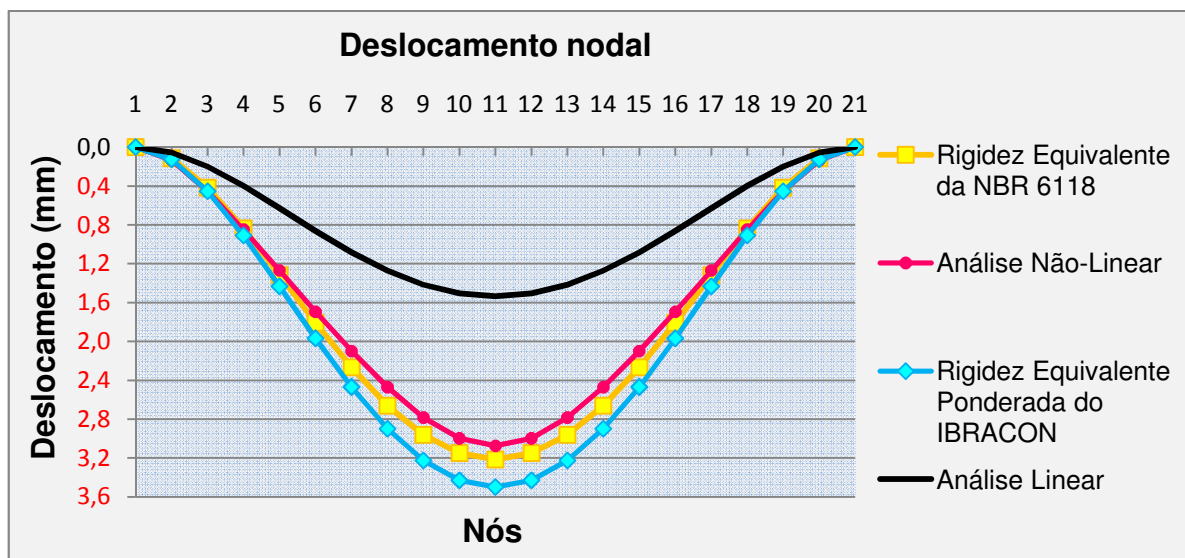


Figura 6.37 – Deformada da viga para a carga da combinação quase-permanente – ELS.

No deslocamento nó a nó da viga (deformada), o método da NBR 6118 (ABNT, 2007) está mais próximo daquele obtido por meio de análise não-linear (que é o modelo de referência). Entretanto, os resultados do modelo proposto pelo IBRACON (2007) não se afastam muito do modelo de referência (flecha superestimada em apenas 14%), estando a favor da segurança.

## 6.5 Exemplo 5

Este exemplo trata-se de um pórtico plano de concreto armado hipotético, de um edifício comercial de 4 pavimentos (figura 6.38 e 6.39). O principal objetivo deste exemplo é a avaliação de resultados fornecidos por métodos aproximados que visam à consideração da NLF em análises lineares corrigidas, tanto para procedimentos de ELU quanto para ELS.

As armaduras são definidas a partir de uma análise linear, com a consideração simplificada da NLF e da NLG. Para a NLF, adota-se os valores recomendados pela NBR 6118 (ABNT, 2007): momento de inércia das vigas igual a  $0,4.I_c$  e, para os pilares, igual a  $0,8.I_c$ . A NLG (efeitos globais de segunda ordem) é considerada através do coeficiente  $\gamma_z$ .

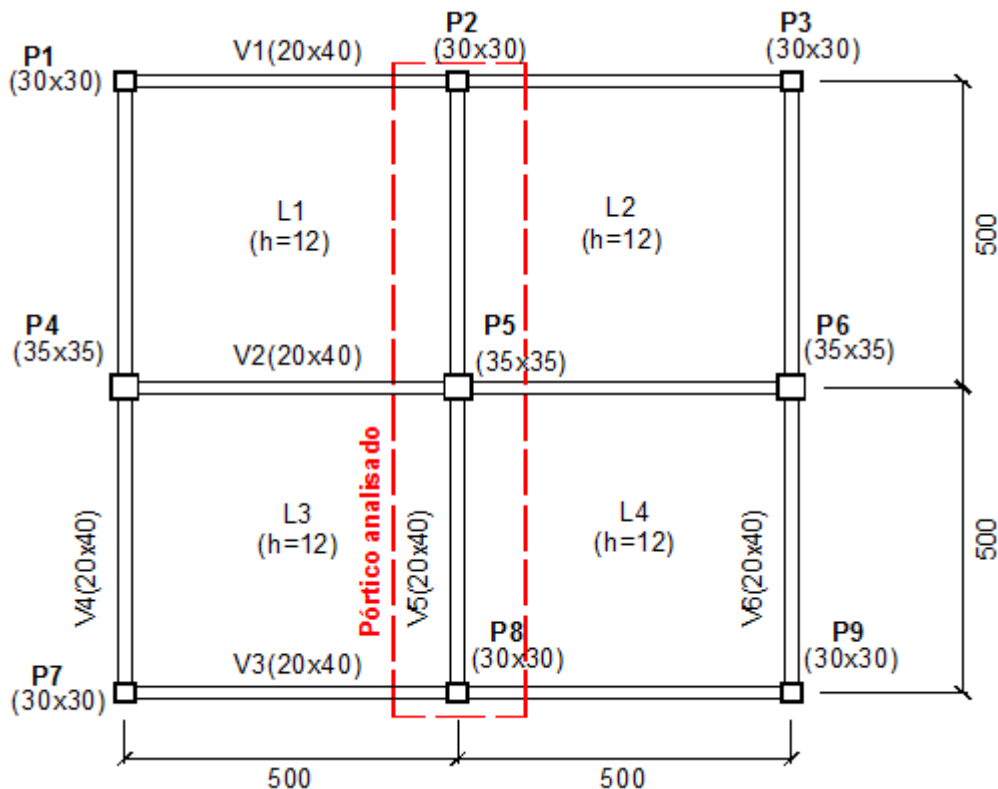


Figura 6.38 – Planta estrutural do edifício.

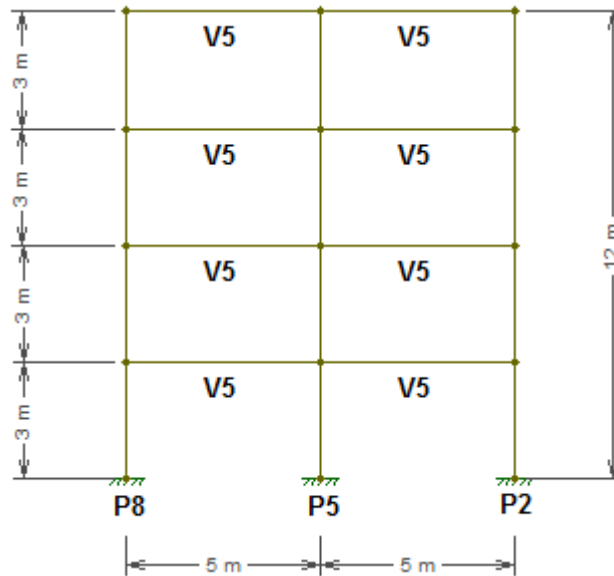


Figura 6.39 – Pórtico plano escolhido.

A seguir, são relacionados todos os dados pertinentes utilizados na análise estrutural do pórtico:

a) Dados para a definição das ações verticais:

Lajes:

Peso específico do concreto armado:  $25 \text{ kN/m}^3$ ;

Peso próprio de revestimentos e pisos:  $1,0 \text{ kN/m}^2$ ;

Sobrecarga:  $2,0 \text{ kN/m}^2$ .

Vigas:

Peso específico do concreto armado:  $25 \text{ kN/m}^3$ ;

Paredes:  $2,5 \text{ kN/m}^2$  de alvenaria.

Pilares:

Cargas concentradas:

P8: cargas correspondentes à V3: 100 kN;

P5: cargas correspondentes à V2: 200 kN;

P2: cargas correspondentes à V1: 100 kN.

b) Dados para a definição das ações horizontais:

Velocidade básica do vento:  $V_0 = 40 \text{ m/s}$

Topografia do terreno: Terreno plano com poucas ondulações ( $S_1 = 1$ );

Rugosidade do terreno: Terreno localizado em zona urbana, coberto por diversos obstáculos. Cota média dos obstáculos estimada em 10 m. (Categoria IV);

Classe de edificação: classe A;

Fator Estatístico:  $S_3 = 1$ ;

Coeficiente de arrasto ( $C_a$ ): 1,16 (vento não turbulento);

Altura entre pisos: 3 m;

Largura de influência (pórtico isolado): 5 m.

c) Dados sobre os materiais estruturais escolhidos:

Concreto: C25;

Aço das armaduras longitudinais de vigas e pilares: CA-50;

d) Dados sobre as ações consideradas:

Ações permanentes ( $\gamma_g = 1,4$ ):

$F_g \rightarrow$  ações permanentes de peso próprio.

Ações variáveis ( $\gamma_q = 1,4$ ):

$F_{q,sob} \rightarrow$  ações variáveis de sobrecarga ( $\psi_0 = 0,7 / \psi_2 = 0,4$ );

$F_{q, vento} \rightarrow$  ações variáveis de vento ( $\psi_0 = 0,6 / \psi_2 = 0,0$ ).

Em que:

$\psi_0$  e  $\psi_2$  são os coeficientes de ponderação das ações referentes aos fatores de combinação e de redução, respectivamente, para a consideração da simultaneidade das ações;

$\gamma_g$  e  $\gamma_q$  são os coeficientes de ponderação das ações referentes à consideração da variabilidade das ações e aproximações feitas em projeto.

e) Combinações utilizadas para a definição das armaduras (ELU):

Combinação 1  $\rightarrow 1,4 \cdot F_g + 1,4 F_{q,sob} + 0,84 \cdot F_{q, vento}$ ;

Combinação 2  $\rightarrow 1,4 \cdot F_g + 0,98 \cdot F_{q,sob} + 1,4 \cdot F_{q, vento}$ ;

Combinação 3  $\rightarrow 1,4 \cdot F_g + 1,4 F_{q,sob}$ .

Os carregamentos de cada combinação de ação estão indicados na figura

6.40:





(V5) 20x40 cm.

Pilares:

Extremidades (P8 e P2): 30x30 cm;

Centrais (P5): 35x35 cm.

g) Dados sobre as áreas de armaduras definidas:

Vigas (V5):

Seção de extremidade:  $A_s = 7,5 \text{ cm}^2 / A_s' = 2,5 \text{ cm}^2$ ;

Seção de máximo momento positivo:  $A_s = 4,5 \text{ cm}^2 / A_s' = 1,0 \text{ cm}^2$ ;

Seção do apoio central:  $A_s = 9,0 \text{ cm}^2 / A_s' = 2,5 \text{ cm}^2$ .

Pilares:

Extremidades (P8 e P2): 6  $\Phi$  16 mm.

Centrais (P5):

Pavimento térreo: 8  $\Phi$  16 mm;

Pavimento 1 ao 3: 8  $\Phi$  12,5 mm.

As seções transversais armadas dos elementos estruturais podem ser visualizadas na figura 6.41:

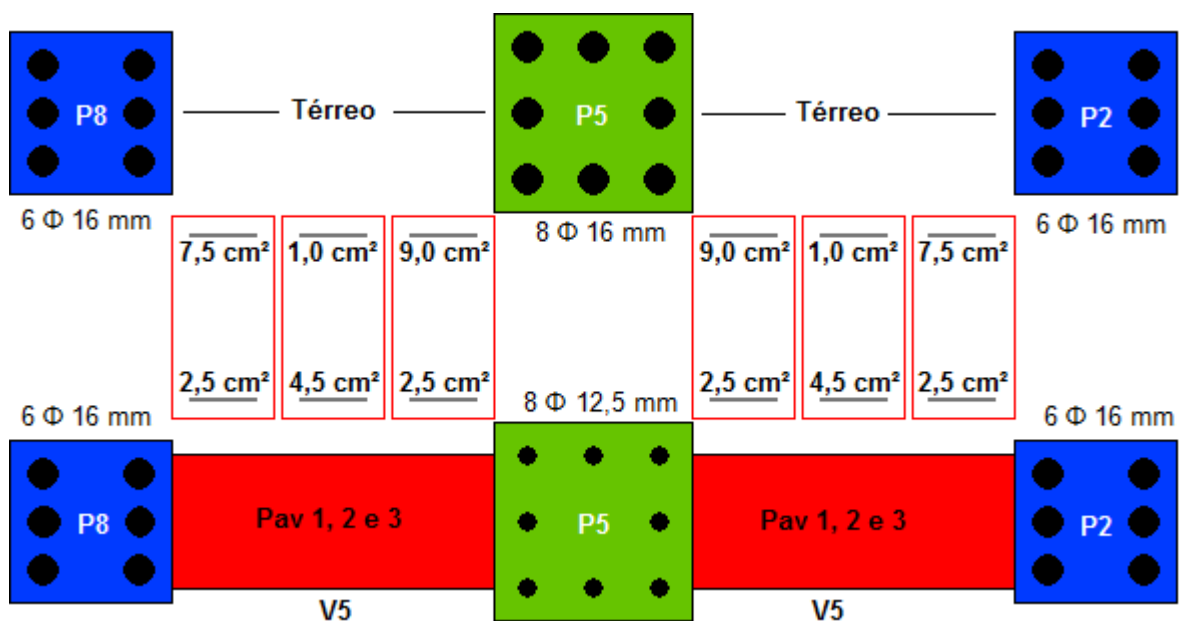


Figura 6.41 – Seções transversais armadas.

Dentre as combinações para a definição das armaduras, escolhe-se a combinação 2 do ELU para as análises e comparações.

Para o ELS, a combinação escolhida para as análises e comparações é a quase-permanente: combinação 4  $\rightarrow 1,0 \cdot F_g + 0,4 F_{q,sob}$  (Figura 6.42).

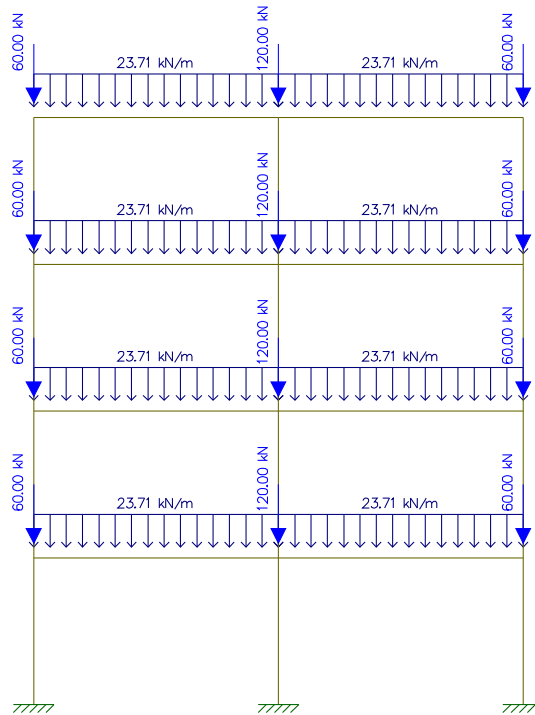


Figura 6.42 – Combinação quase-permanente de ações – ELS.

As análises não-lineares foram realizadas com o emprego do programa NLVP (NEst, 2011) e as lineares, com o auxílio do programa Ftool (Martha, 2008).

### 6.5.1 Estado Limite Último (ELU)

A análise estrutural do pórtico plano é realizada mediante a aplicação de quatro métodos de cálculo. São estes: i) análise não-linear (via programa NLVP (NEst, 2011)); ii) redução global de inércia da NBR 6118 (ABNT, 2007); iii) método aproximado proposto por Khuntia e Ghosh (2004); iv) rigidez secante obtida a partir

de diagramas momento-curvatura. Os três últimos métodos empregam análises lineares corrigidas a fim de se considerar a NLF dos elementos.

#### 6.5.1.1 Análise não-linear

Para as vigas, a NLF é considerada por meio de diagramas momento-curvatura, com o emprego da expressão de Branson (1965) no Estádio II e trecho reto no Estádio III. Os principais parâmetros das vigas para a definição de tais diagramas estão organizados nas tabelas 6.17, 6.18 e 6.19:

Tabela 6.17 – Parâmetros para as seções de extremidade (vigas) – ELU

Momento de fissuração	$M_r = 1026 \text{ kN.cm}$
Momento de plastificação	$M_y = 9829 \text{ kN.cm}$
Momento último	$M_u = 10273 \text{ kN.cm}$
Momento de inércia no estágio II	$I_{II} = 43422 \text{ cm}^4$
Curvatura de plastificação	$(1/r)_y = 1,024 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$
Curvatura última	$(1/r)_u = 3,700 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$

Tabela 6.18 – Parâmetros para as seções de máximo momento positivo (vigas) – ELU

Momento de fissuração	$M_r = 1026 \text{ kN.cm}$
Momento de plastificação	$M_y = 6067 \text{ kN.cm}$
Momento último	$M_u = 6355 \text{ kN.cm}$
Momento de inércia no estágio II	$I_{II} = 28701 \text{ cm}^4$
Curvatura de plastificação	$(1/r)_y = 9,086 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$
Curvatura última	$(1/r)_u = 3,506 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$

Tabela 6.19 – Parâmetros para as seções do apoio central (vigas) – ELU

Momento de fissuração	$M_r = 1026 \text{ kN.cm}$
Momento de plastificação	$M_y = 11598 \text{ kN.cm}$
Momento último	$M_u = 12087 \text{ kN.cm}$
Momento de inércia no estágio II	$I_{II} = 49851 \text{ cm}^4$
Curvatura de plastificação	$(1/r)_y = 1,098 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$
Curvatura última	$(1/r)_u = 3,008 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$

Para os pilares, a NLF também foi considerada por meio de diagramas momento-curvatura. Entretanto, em elementos flexo-comprimidos, a obtenção da curvatura e da rigidez à flexão no programa NLVP (NEst, 2011) é feita a partir das equações de equilíbrio e da integração das tensões normais de cada seção. Foge do escopo deste exemplo apresentar a formulação envolvida na determinação das relações momento-curvatura em seções submetidas à flexão composta. Tal formulação pode ser encontrada na bibliografia especializada – França (1984), Santos (1991) ou Buchaim (2001).

Os parâmetros mecânicos dos materiais empregados nas análises das combinações do ELU estão contidos na tabela 6.20:

Tabela 6.20 – Parâmetros mecânicos dos materiais – ELU (exemplo 5)

Módulo de elasticidade tangente do concreto (vigas e pilares)	$E_{ci} = 2800 \text{ kN/cm}^2$
Módulo de elasticidade do aço	$E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$
Resistência do concreto à tração direta	$f_{ct} = 0,128 \text{ kN/cm}^2$
Resistência à compressão do concreto	$f_c = 1,786 \text{ kN/cm}^2$
Resistência ao escoamento do aço	$f_y = 43,48 \text{ kN/cm}^2$

O carregamento é aplicado em 50 (cinquenta) incrementos iguais de carga e o pórtico é discretizado conforme a figura 6.43:



### 6.5.1.2 Redução global de inércia da NBR 6118 (ABNT, 2007)

A NBR 6118 (ABNT, 2007) recomenda, para a abordagem simplificada da NLF, os seguintes valores para a redução de inércia de vigas e pilares:

Para vigas:  $(EI)_{sec} = 0,4 E_{ci} \cdot I_c$ ;

Para pilares:  $(EI)_{sec} = 0,8 E_{ci} \cdot I_c$ .

Vale ressaltar que tais valores reduzidos de inércia são empregados para todo o tramo do elemento e independente da quantidade de armadura longitudinal.

Após a obtenção dos deslocamentos horizontais, chega-se ao valor de 1,11 para o coeficiente  $\gamma_z$ . A figura 6.44 contém o diagrama de momentos fletores finais após a amplificação das ações horizontais pelo coeficiente  $\gamma_z$ .

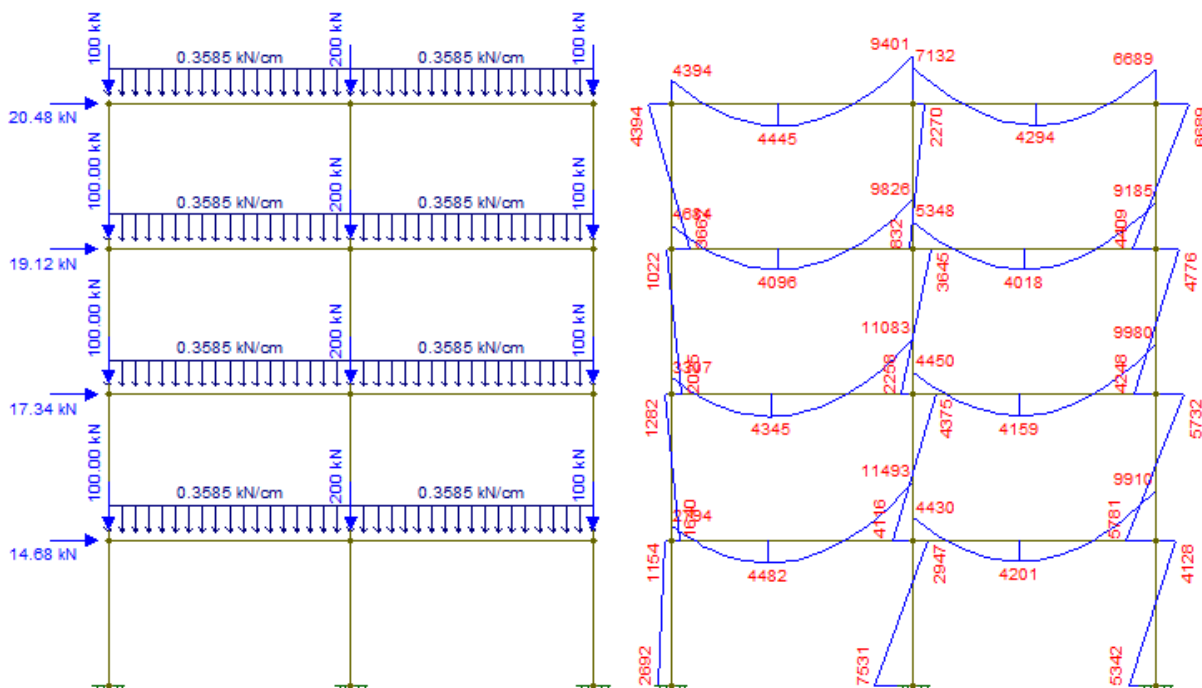


Figura 6.44 – Momentos fletores finais (kN.cm) obtidos com a simplificação da NBR 6118 (ABNT, 2007) ( $\gamma_z = 1,11$ ).

### 6.5.1.3 Método aproximado proposto por Khuntia e Ghosh (2004)

O método aproximado proposto por Khuntia e Ghosh (2004) consiste em calcular um momento de inércia secante para as vigas e um momento de inércia equivalente para os pilares, conforme as equações 4.5 e 4.6 do capítulo 4. No caso das vigas, o momento de inércia secante considera as dimensões da seção e a taxa de armadura longitudinal e independe dos esforços solicitantes. No caso dos pilares, o momento de inércia equivalente considera tanto a quantidade de armadura longitudinal quanto a magnitude dos esforços solicitantes.

Para facilitar os cálculos dos momentos de inércia, as vigas e os pilares são identificados de acordo com as figuras 6.45 e 6.46:



Figura 6.45 – Numeração dos pilares.

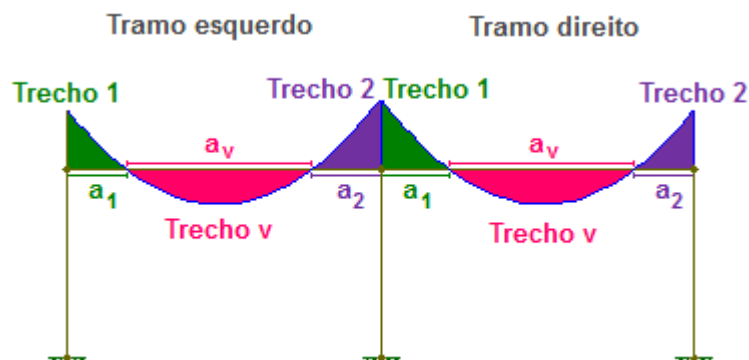


Figura 6.46 – Trechos das vigas por tramos.



Inicialmente, calculam-se os momentos de inércia secante para cada trecho da viga. O valor final inserido no programa Ftool (Martha, 2008) é uma ponderação dos mesmos, conforme equação 6.52, semelhante aquela sugerida pelo IBRACON (2007):

$$I_{\text{sec,pond}} = \frac{1}{L} [I_{\text{sec},1} \cdot a_1 + I_{\text{sec},v} \cdot a_v + I_{\text{sec},2} \cdot a_2] \quad (6.52)$$

Em que:

L = 5 m é o comprimento de um tramo da viga V5;

$a_1$ ,  $a_v$  e  $a_2$  são os comprimentos dos trechos explicitados na figura 6.46 e obtidos da combinação de ações 2 indicada na figura 6.40.

A tabela 6.21 apresenta os valores finais dos momentos de inércia das vigas para cada pavimento:

Tabela 6.21 – Inércias secantes para os tramos esquerdo e direito da viga V5

		Tramo esquerdo								
Viga V5	Trecho 1			Trecho v			Trecho 2			$I_{\text{sec}}$ pond ( $\text{cm}^4$ )
	$A_{\text{st}}$	$I_{\text{sec } 1}$	$a_1$	$A_{\text{st}}$	$I_{\text{sec } v}$	$a_v$	$A_{\text{st}}$	$I_{\text{sec } 2}$	$a_2$	
	( $\text{cm}^2$ )	( $\text{cm}^4$ )	(cm)	( $\text{cm}^2$ )	( $\text{cm}^4$ )	(cm)	( $\text{cm}^2$ )	( $\text{cm}^4$ )	(cm)	
4º Pav	7,5	42227	65	4,5	29975	315	9,0	48353	120	<b>35979</b>
3º Pav	7,5	42227	70	4,5	29975	302	9,0	48353	128	<b>36395</b>
2º Pav	7,5	42227	51	4,5	29975	311	9,0	48353	138	<b>36297</b>
1º Pav	7,5	42227	43	4,5	29975	317	9,0	48353	140	<b>36175</b>
		Tramo direito								
Viga V5	Trecho 1			Trecho v			Trecho 2			$I_{\text{sec}}$ pond ( $\text{cm}^4$ )
	$A_{\text{st}}$	$I_{\text{sec } 1}$	$a_1$	$A_{\text{st}}$	$I_{\text{sec } v}$	$a_v$	$A_{\text{st}}$	$I_{\text{sec } 2}$	$a_2$	
	( $\text{cm}^2$ )	( $\text{cm}^4$ )	(cm)	( $\text{cm}^2$ )	( $\text{cm}^4$ )	(cm)	( $\text{cm}^2$ )	( $\text{cm}^4$ )	(cm)	
4º Pav	9,0	48353	98	4,5	29975	309	7,5	42227	93	<b>35856</b>
3º Pav	9,0	48353	79	4,5	29975	299	7,5	42227	122	<b>35868</b>
2º Pav	9,0	48353	67	4,5	29975	304	7,5	42227	129	<b>35599</b>
1º Pav	9,0	48353	66	4,5	29975	307	7,5	42227	127	<b>35513</b>

Os momentos de inércia equivalentes calculados para os pilares estão organizados na tabela 6.22:

Tabela 6.22 – Momentos de inércia equivalentes para os pilares

Pilar	$A_s$	$A_c$	$\rho$	$M_{sd}$	$N_{sd}$	$e$	$h$	$N_{Rdo}$	$I_c$	$I_{eq}$
	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> )		(kN.cm)	(kN)	(cm)	(cm)	(kN)	(cm <sup>4</sup> )	(cm <sup>4</sup> )
1	12,06	900	0,013	4394	180	24,41	30	1854	67500	18060
2	12,06	900	0,013	2025	359	5,64	30	1854	67500	54797
3	12,06	900	0,013	1640	533	3,08	30	1854	67500	57750
4	12,06	900	0,013	2692	705	3,82	30	1854	67500	52303
5	9,82	1225	0,008	2270	390	5,82	35	2257	125052	93484
6	9,82	1225	0,008	3645	772	4,72	35	2257	125052	86825
7	9,82	1225	0,008	4375	1156	3,78	35	2257	125052	79531
8	16,08	1225	0,013	7531	1541	4,89	35	2511	125052	78089
9	12,06	900	0,013	6689	189	35,39	30	1854	67500	18060
10	12,06	900	0,013	4776	386	12,37	30	1854	67500	37045
11	12,06	900	0,013	5781	587	9,85	30	1854	67500	39340
12	12,06	900	0,013	5342	787	6,79	30	1854	67500	43025

Os pilares 1 e 9, por apresentarem uma alta excentricidade, são calculados como viga, ou seja, o momento de inércia equivalente do pilar passa a ser igual ao momento de inércia secante de uma viga de mesma seção e armadura do pilar considerado.

Todos os valores dos momentos de inércia obtidos para as vigas e os pilares são substituídos na combinação de ações 2 (figura 6.40) para a realização da análise linear (corrigida). A partir desta análise, chega-se ao valor do coeficiente  $\gamma_z$  (1,14) e aos esforços e deslocamentos finais do pórtico (figura 6.47).

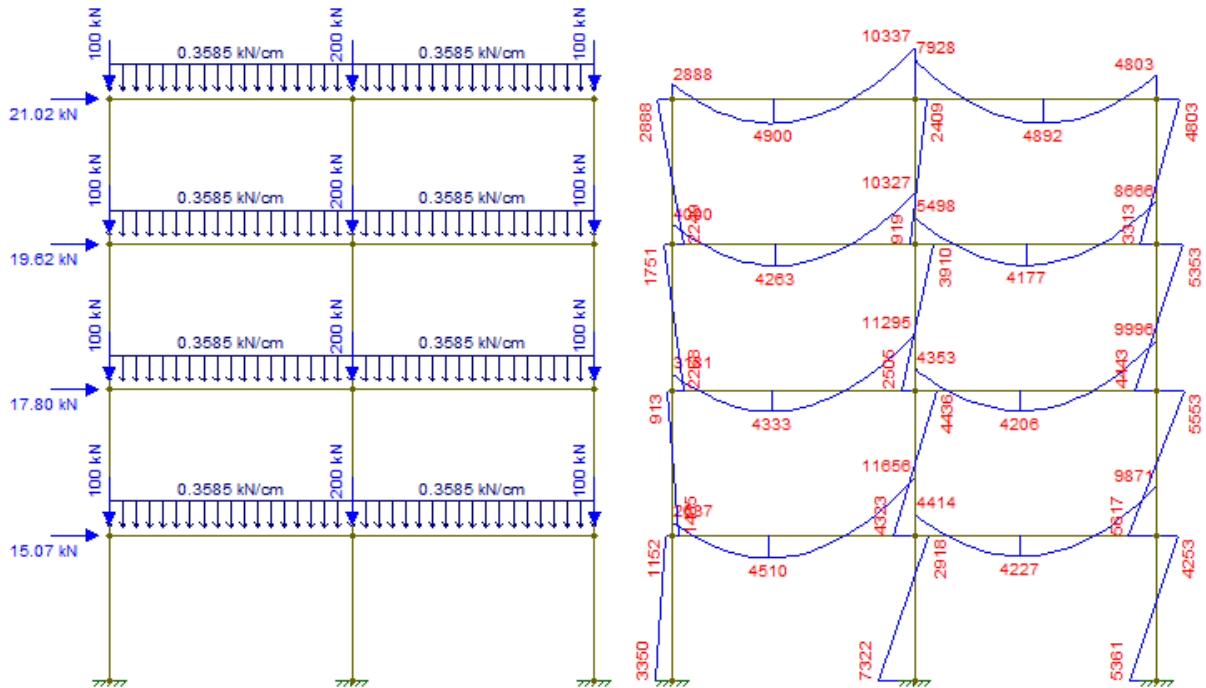


Figura 6.47 – Momentos fletores finais (kN.cm) obtidos a partir do método aproximado de Khuntia e Ghosh (2004) ( $\gamma_z = 1,14$ ).

A relação entre os valores dos momentos de inércia obtidos com o modelo proposto por Khuntia e Ghosh (2004), tanto para os pilares quanto para vigas, e os seus respectivos momentos de inércia brutos estão organizados na tabela 6.23:

Tabela 6.23 – Relação entre momentos de inércia

Pilares	$I_{eq}/I_c$	Pilares	$I_{eq}/I_c$	Viga V5	
				Tramo esquerdo	Tramo direito
1	0,268	7	0,636	Pav	$I_{sec}/I_c$
2	0,812	8	0,624	4º Pav	0,337
3	0,856	9	0,268	3º Pav	0,341
4	0,775	10	0,549	2º Pav	0,340
5	0,748	11	0,583	1º Pav	0,339
6	0,694	12	0,637		

#### 6.5.1.4 Rigidez secante obtida a partir de diagramas momento-curvatura

Com o conhecimento da armadura e da força normal atuante nos pilares e nas vigas, pode-se construir a relação momento-curvatura de cada seção analisada, obtendo-se a rigidez secante ( $EI_{sec}$ ) definida no item 15.3 da NBR 6118 (ABNT, 2007) para elementos submetidos à flexão composta. Essa relação pode ser visualizada na figura 6.48.

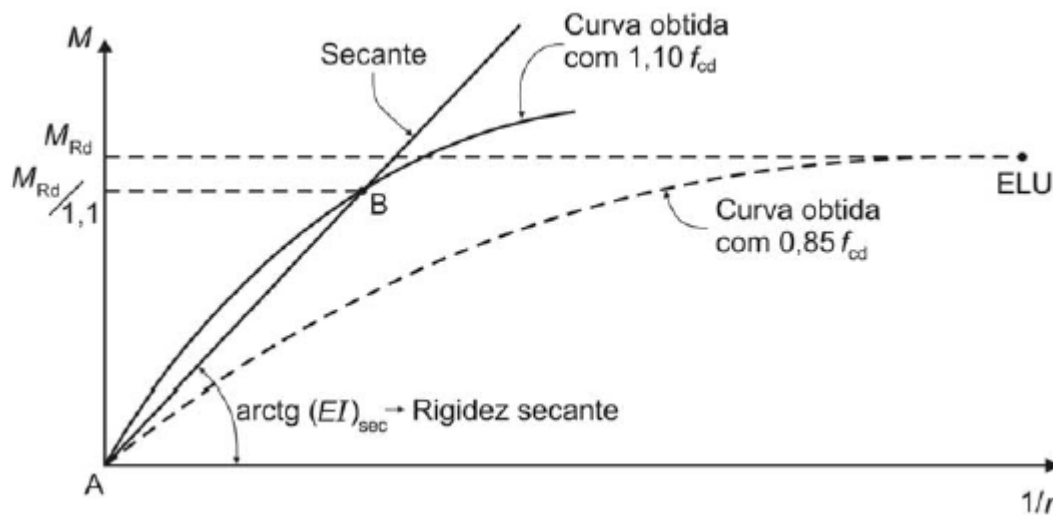


Figura 6.48 – Definição da rigidez secante a partir da relação momento-curvatura.

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2007).

As figuras 6.45 e 6.46, do item anterior, continuam válidas para esse método. Novamente, para considerar os trechos com armaduras diferentes, é realizada uma ponderação entre os valores dos momentos de inércia secante das vigas utilizando a equação 6.52. Os valores dos esforços normais e os valores de  $a_1$ ,  $a_v$  e  $a_2$  necessários ao cálculo da rigidez secante de cada trecho são os obtidos da combinação de ações 2 indicada na figura 6.40.

A rigidez secante, para cada seção das vigas e dos pilares, é fornecida com o auxílio da calculadora de seções do programa CAD/TQS (TQS Informática, 2008), conforme ilustrado na figura 6.49. A figura traz o exemplo para as seções de

extremidade da viga V5, ou seja, aquelas dimensionadas com 7,5 cm<sup>2</sup> de área de armadura tracionada (vide figura 6.41).

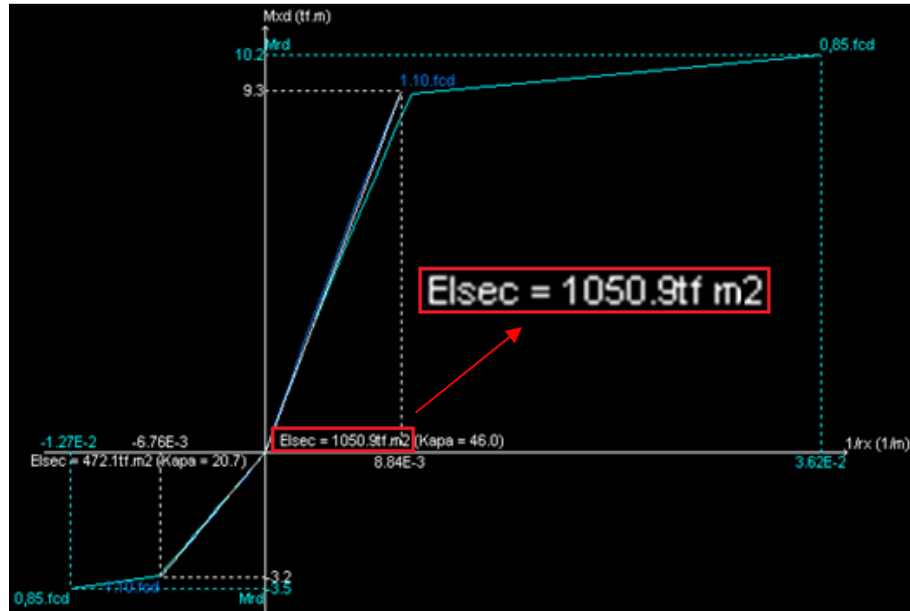


Figura 6.49 – Relação momento-curvatura para seções de extremidade da viga V5.

Os valores de rigidez secante obtidos são divididos pelo módulo de elasticidade  $E_{ci}$  para chegar-se aos valores de momentos de inércia secante das vigas (tabelas 6.24 e 6.25) e dos pilares (tabela 6.26):

Tabela 6.24 – Rigidez secante via diagrama momento-curvatura – tramo esquerdo

Viga V5	Tramo esquerdo									$I_{sec}$ pond (cm <sup>4</sup> )
	Trecho 1			Trecho v			Trecho 2			
	$EI_{sec}$ (tf.m <sup>2</sup> )	$I_1$ (cm <sup>4</sup> )	$a_1$ (cm)	$EI_{sec}$ (tf.m <sup>2</sup> )	$I_v$ (cm <sup>4</sup> )	$a_v$ (cm)	$EI_{sec}$ (tf.m <sup>2</sup> )	$I_2$ (cm <sup>4</sup> )	$a_2$ (cm)	
4º Pav	1051	37532	65	718	25654	315	1174	41925	120	<b>31103</b>
3º Pav	1051	37532	70	718	25654	302	1174	41925	128	<b>31482</b>
2º Pav	1051	37532	51	718	25654	311	1174	41925	138	<b>31356</b>
1º Pav	1051	37532	43	718	25654	317	1174	41925	140	<b>31231</b>

Tabela 6.25 – Rigidez secante via diagrama momento-curvatura – tramo direito

Tramo direito										
Viga V5	Trecho 1			Trecho v			Trecho 2			$I_{sec}$
	$EI_{sec}$	$I_1$	$a_1$	$EI_{sec}$	$I_v$	$a_v$	$EI_{sec}$	$I_2$	$a_2$	pond
	(tf.m <sup>2</sup> )	(cm <sup>4</sup> )	(cm)	(tf.m <sup>2</sup> )	(cm <sup>4</sup> )	(cm)	(tf.m <sup>2</sup> )	(cm <sup>4</sup> )	(cm)	(cm <sup>4</sup> )
4º Pav	1174	41925	98	718	25654	309	1051	37532	93	<b>31052</b>
3º Pav	1174	41925	79	718	25654	299	1051	37532	122	<b>31123</b>
2º Pav	1174	41925	67	718	25654	304	1051	37532	129	<b>30899</b>
1º Pav	1174	41925	66	718	25654	307	1051	37532	127	<b>30819</b>

Tabela 6.26 – Rigidez secante dos pilares via diagrama momento-curvatura

Pilar	$EI_{sec}$	$I_{sec}$	Pilar	$EI_{sec}$	$I_{sec}$
	(tf.m <sup>2</sup> )	(cm <sup>4</sup> )		(tf.m <sup>2</sup> )	(cm <sup>4</sup> )
1	554	<b>19786</b>	7	1589	<b>56750</b>
2	599	<b>21389</b>	8	1940	<b>69282</b>
3	636	<b>22704</b>	9	558	<b>19943</b>
4	729	<b>26025</b>	10	603	<b>21543</b>
5	647	<b>23104</b>	11	657	<b>23475</b>
6	1046	<b>37346</b>	12	800	<b>28571</b>

Após a análise linear corrigida com os valores dos momentos de inércia secante, foram obtidos os valores do coeficiente  $\gamma_z$  (1,18) e os diagramas de momentos fletores finais nos elementos, conforme figura 6.50:

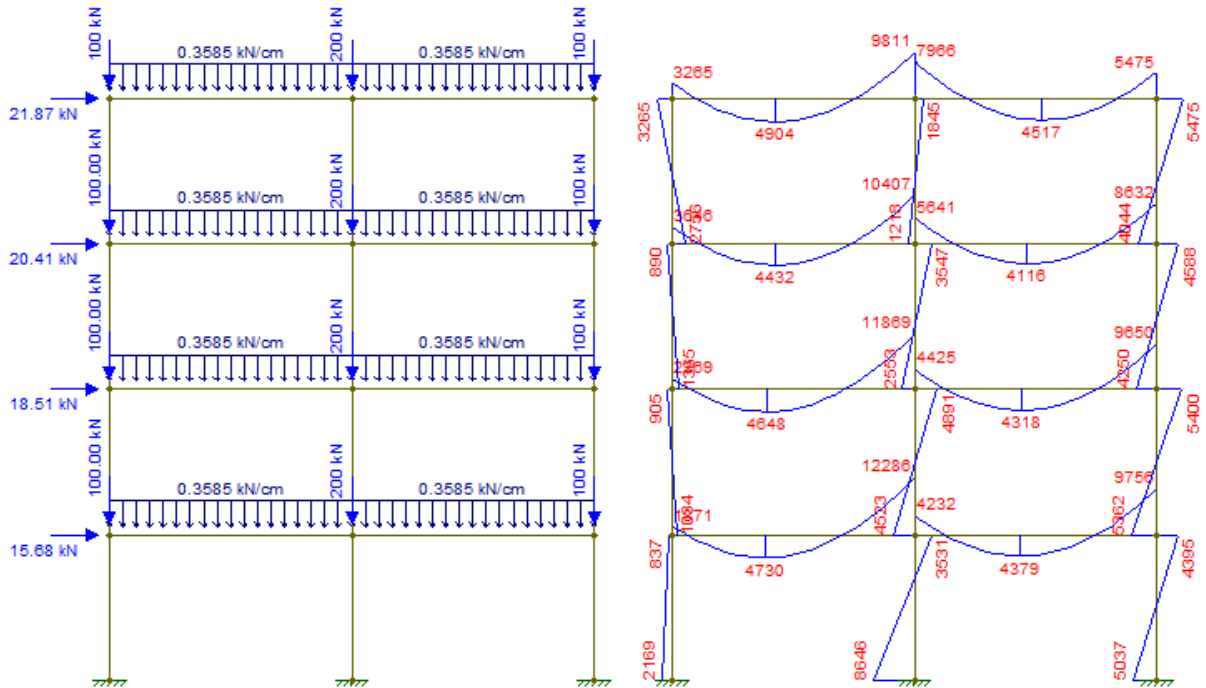


Figura 6.50 – Momentos fletores finais (kN.cm) obtidos a partir da rigidez secante via relação momento-curvatura ( $\gamma_z = 1,18$ ).

A relação entre os valores dos momentos de inércia obtidos a partir da rigidez secante via relação momento-curvatura, tanto para os pilares quanto para vigas, e os seus respectivos momentos de inércia brutos estão organizados na tabela 6.27:

Tabela 6.27 – Relação entre momentos de inércia

Pilares	$I_{eq}/I_c$	Pilares	$I_{eq}/I_c$	Viga V5	
				Tramo esquerdo	Tramo direito
1	0,293	7	0,454	Pav	$I_{sec}/I_c$
2	0,317	8	0,554	4º Pav	0,292
3	0,336	9	0,295	3º Pav	0,295
4	0,386	10	0,319	2º Pav	0,294
5	0,185	11	0,348	1º Pav	0,293
6	0,299	12	0,423		

## 6.5.1.5 Comparações

Os deslocamentos horizontais dos pavimentos, para cada método empregado, podem ser visualizados na figura 6.51:

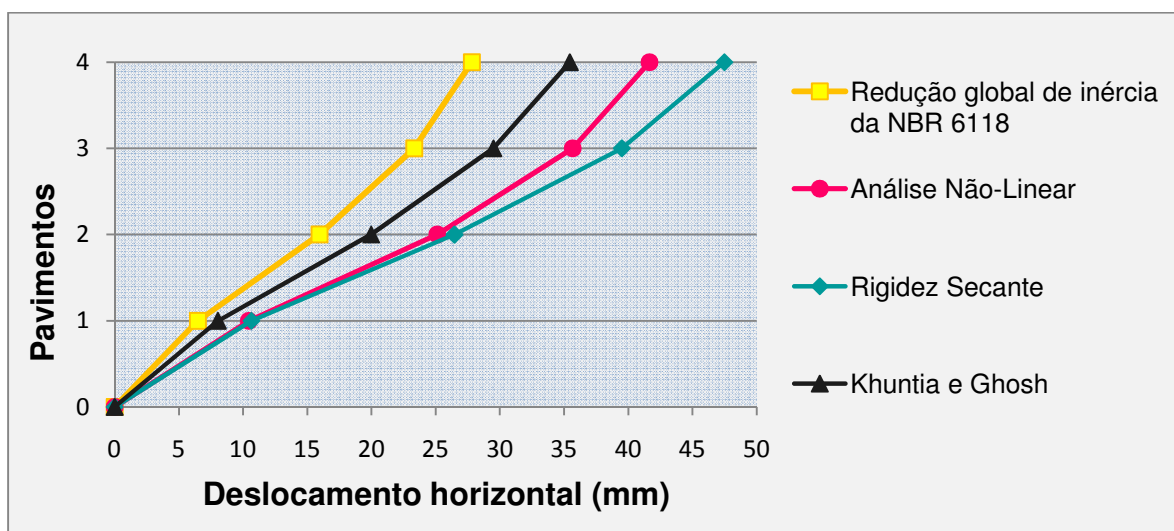


Figura 6.51 – Deslocamentos horizontais no pórtico plano.

Do gráfico dos deslocamentos horizontais percebe-se que, apesar de superestimar um pouco o deslocamento máximo no topo do edifício (menos do que 14%, porém a favor da segurança), o método que mais se aproxima dos valores da análise não-linear é o da rigidez secante via diagrama momento curvatura. O método proposto por Khuntia e Ghosh (2004) aproxima-se do valor de referência (análise não-linear), porém fornece deslocamento no topo cerca de 15 % menor que o mesmo. A redução global de inércia da NBR 6118 (ABNT, 2007) é o método que mais se afasta, para este caso específico, do valor de referência (aproximadamente 33% menor).

Os resultados fornecidos pelos quatro métodos abordados, em termos de momentos fletores, são apresentados de acordo com a identificação indicada na figura 6.52:



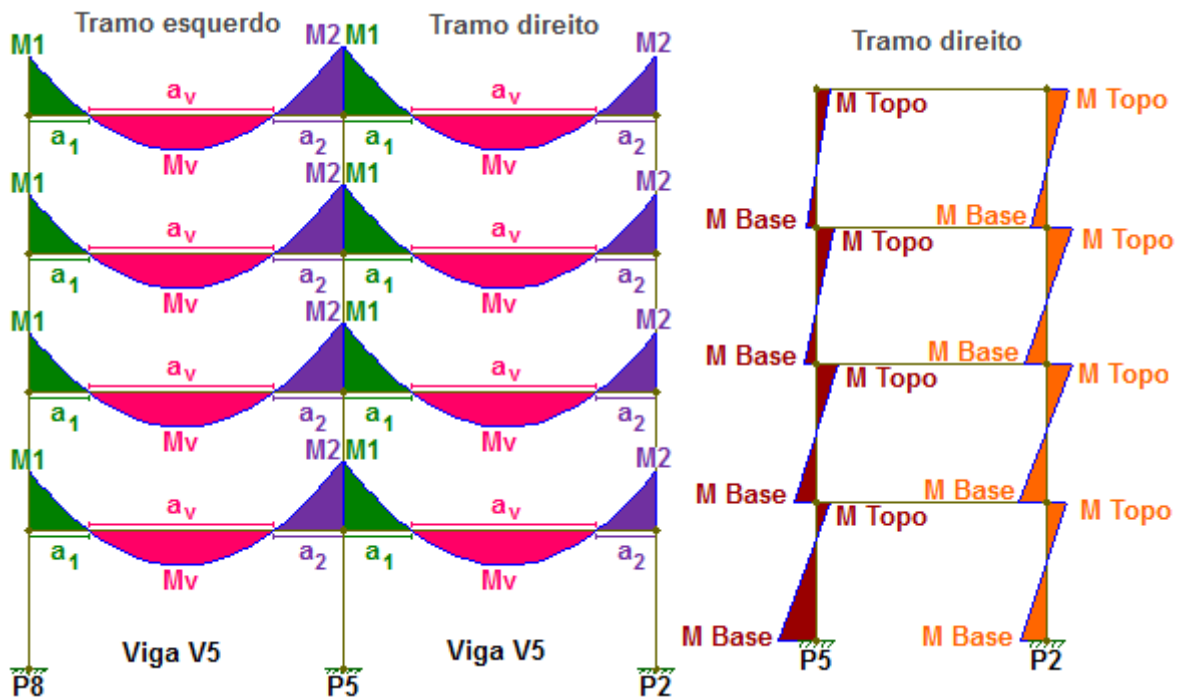


Figura 6.52 – Identificação de vigas e pilares e respectivos DMF – ELU.

Os métodos são identificados nas tabelas 6.28 a 6.32, para todas as comparações, pelas seguintes siglas:

Análise não-linear: ANL;

Redução global de inércia da NBR 6118 (ABNT, 2007): NBR;

Método aproximado proposto por Khuntia e Ghosh (2004): KeG;

Rigidez secante via diagrama momento-curvatura:  $EI_{sec}$ ;

Tabela 6.28 – Momentos M1 para os tramos esquerdo e direito

Viga V5	Tramo esquerdo				Tramo direito			
	M1 (kN.cm)				M1 (kN.cm)			
Pav	ANL	NBR	$EI_{sec}$	KeG	ANL	NBR	$EI_{sec}$	KeG
4º Pav	3833	4394	3265	2888	8796	7132	7966	7928
3º Pav	4354	4684	3646	4000	5951	5348	5641	5498
2º Pav	3303	3307	2269	3181	4943	4450	4425	4353
1º Pav	2977	2794	1871	2637	4700	4430	4232	4414

Tabela 6.29 – Momentos Mv para os tramos esquerdo e direito

Viga V5	Tramo esquerdo				Tramo direito			
	Mv (kN.cm)				Mv (kN.cm)			
Pav	ANL	NBR	El <sub>sec</sub>	KeG	ANL	NBR	El <sub>sec</sub>	KeG
4º Pav	3980	4445	4904	4900	4102	4294	4517	4892
3º Pav	3594	4096	4432	4263	3672	4018	4116	4177
2º Pav	3939	4345	4648	4333	3965	4159	4318	4206
1º Pav	3931	4482	4730	4510	3927	4201	4379	4227

Tabela 6.30 – Momentos M2 para os tramos esquerdo e direito

Viga V5	Tramo esquerdo				Tramo direito			
	M2 (kN.cm)				M2 (kN.cm)			
Pav	ANL	NBR	El <sub>sec</sub>	KeG	ANL	NBR	El <sub>sec</sub>	KeG
4º Pav	11222	9401	9811	10337	5525	6689	5475	4803
3º Pav	11421	9826	10407	10327	9232	9185	8632	8666
2º Pav	12085	11083	11869	11295	9795	9980	9650	9996
1º Pav	12600	11493	12286	11656	10188	9910	9756	9871

Tabela 6.31 – Momentos no topo dos pilares

Pilar P2		Momento no Topo (kN.cm)				Pilar P5		Momento na Topo (kN.cm)			
Pav		ANL	NBR	El <sub>sec</sub>	KeG	Pav		ANL	NBR	El <sub>sec</sub>	KeG
3º Pav		5525	6689	5475	4803	3º Pav		2426	2270	1845	2409
2º Pav		5111	4776	4588	5353	2º Pav		4108	3645	3547	3910
1º Pav		5694	5732	5400	5553	1º Pav		4665	4375	4891	4436
Térreo		4429	4128	4395	4253	Térreo		3446	2947	3531	2918

Tabela 6.32 – Momentos na base dos pilares

Pilar P2		Momento na Base (kN.cm)				Pilar P5		Momento na Base (kN.cm)			
Pav	ANL	NBR	$EI_{sec}$	KeG	Pav	ANL	NBR	$EI_{sec}$	KeG		
3º Pav	4120	4409	4044	3313	3º Pav	1363	832	1218	919		
2º Pav	4101	4248	4250	4443	2º Pav	2476	2258	2553	2505		
1º Pav	<b>5759</b>	<b>5781</b>	5362	5617	1º Pav	4454	4116	4523	4323		
Térreo	5651	5342	5037	5361	Térreo	<b>6881</b>	7531	8646	<b>7322</b>		

Os momentos devem receber uma atenção especial. A variabilidade de valores resultantes da aplicação dos modelos é grande, entretanto como o valor de referência (valores destacados na cor vermelha nas tabelas) é aquele fornecido pela análise não-linear rigorosa, atém-se a ele.

Com a análise das tabelas 6.28 a 6.32 percebe-se que, quando são avaliados os maiores momentos fletores (valores destacados em negrito nas tabelas), ou seja, aqueles que levam ao dimensionamento das armaduras dos pilares e dos trechos das vigas, tanto o método simplificado sugerido pela NBR 6118 (ABNT, 2007) quanto o método da rigidez secante via diagrama momento-curvatura são os que apresentam os resultados mais próximos da análise não-linear rigorosa. Em uma análise geral, o método proposto por Khuntia e Ghosh (2004) apresenta o melhor resultado apenas em uma situação (tabela 6.32) em relação aos valores da análise de referência.

Cabe salientar a importância da resolução do pórtico pela análise não-linear, pois ela permite capturar e corrigir problemas localizados no dimensionamento do pórtico com métodos aproximados que fazem uso de análises lineares.

Neste exemplo específico, o programa NLVP (NEst, 2011) informa que no passo de carga 49 (figura 6.53), ou seja, quando 98% do carregamento total da combinação de ações 2 (vide figura 6.40) é aplicado ao pórtico, ocorre um estado limite último. A barra 82 (figura 6.43) atinge a sua resistência (momento resistente).

Os métodos aproximados baseados em análises lineares em geral são incapazes de fornecer esse tipo de informação, pois não capturam a redistribuição

de esforços provocada pela gradual perda de rigidez e pela plastificação dos elementos ao longo do carregamento aplicado.

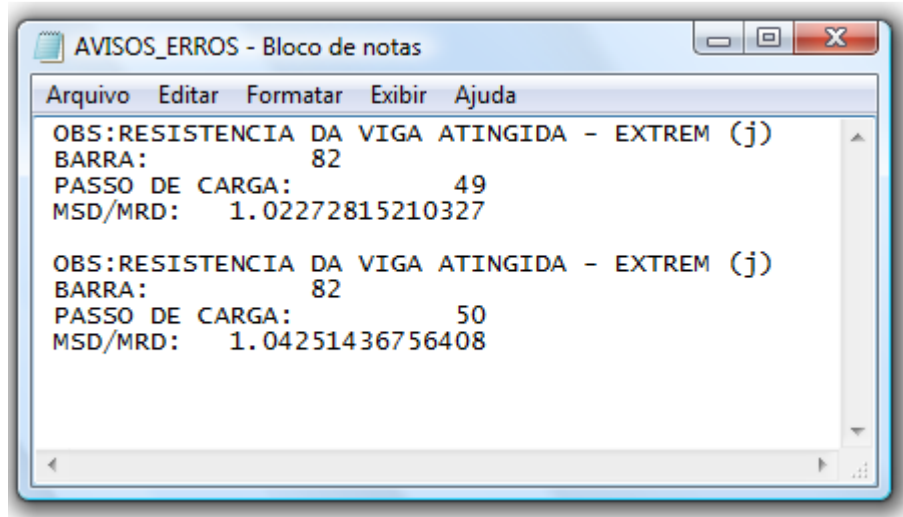


Figura 6.53 – Aviso do programa NLVP.

Chega-se então a conclusão de que, na verdade, com as armaduras para as quais foi projetado, o pórtico resiste a 96% do carregamento total (Combinação 2 – ELU), um passo de carga anterior ao colapso da barra 82. Com o conhecimento dessa situação, o projetista estrutural pode decidir, por exemplo, se executa o reparo localizado apenas na barra 82, reforçando as armaduras nessa região, ou ainda se redimensiona toda a estrutura. Qualquer que seja a solução adotada, a sua realização só é alcançada mediante a análise não-linear da estrutura.

Também através da análise-não linear é possível destacar a influência da perda de rigidez das vigas (NLF) no comportamento global da estrutura, como por exemplo, nos deslocamentos horizontais do pórtico. A figura 6.54 apresenta o gráfico de três situações analisadas com o auxílio do programa NVLP (NEst, 2011). A NLG, considerada de forma simplificada pelo coeficiente  $\gamma_z$ , é ativada em todos os casos. São estes:

1<sup>a</sup>) NLF + NLG (vigas): ativa-se no programa apenas a NLF dos elementos de vigas;

2ª) NLF + NLG (vigas e pilares): ativa-se a NLF tanto para os elementos de viga quanto para os elementos de pilares;

3ª) NLG: desativa-se a NLF de vigas e pilares.

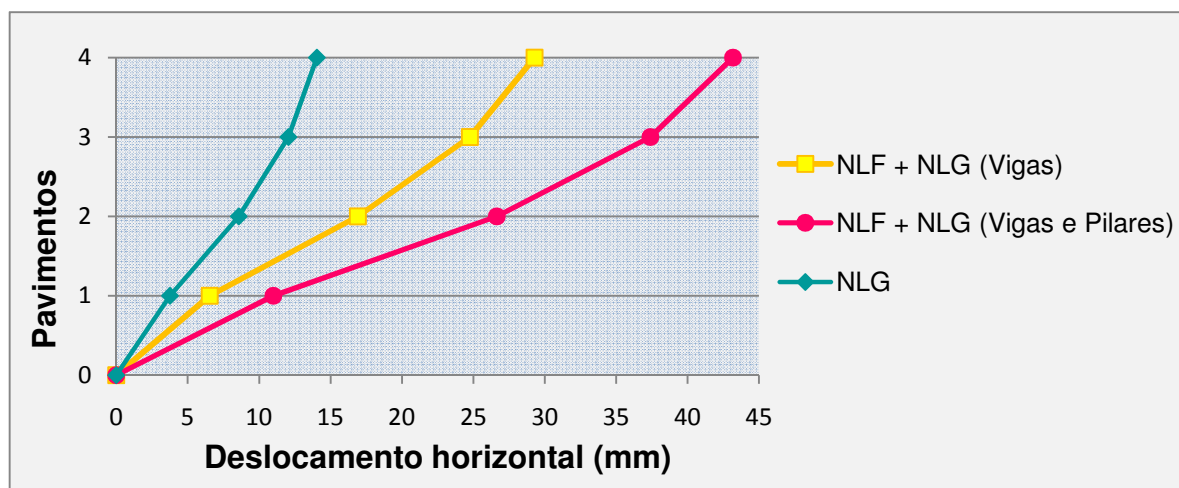


Figura 6.54 – Contribuição da NLF das vigas para o deslocamento horizontal.

Nota-se que a contribuição da rigidez das vigas para os deslocamentos horizontais da estrutura é extremamente relevante. Dessa maneira é fundamental a utilização de métodos de cálculo que considerem a NLF desses elementos estruturais, inclusive em procedimentos de projeto nos quais os deslocamentos horizontais são utilizados para a avaliação dos efeitos globais de segunda ordem do edifício.

### 6.5.2 Estado Limite de Serviço (ELS)

A combinação a ser analisada no ELS, apresentada no início desse exemplo, é a quase-permanente (figura 6.42). Para o ELS são analisados os deslocamentos verticais e os momentos das vigas do pórtico. O objetivo principal neste item é avaliar os efeitos da NLF das vigas na análise estrutural do pórtico e avaliar os resultados fornecidos por métodos aproximados.

Com esse objetivo, fixa-se o momento de inércia dos pilares, considerando-se a NLF dos mesmos de forma simplificada, por meio de uma redução global da rigidez à flexão desses elementos. Após algumas simulações numéricas com o auxílio do programa NLVP (NEst, 2011), define-se como momento de inércia para todos os pilares o valor de  $0,9.I_c$ , exceto para os pilares de extremidade do 4º pavimento, para os quais é definido o valor de  $0,6.I_c$ .

São quatro os métodos de cálculo aplicados ao ELS: análise não-linear (via programa NLVP (NEst, 2011)), análise linear, rigidez equivalente proposta pela NBR 6118 (ABNT, 2007) e o método da rigidez equivalente ponderada proposto pelo IBRACON (2007).

#### 6.5.2.1 Análise não-linear

Os parâmetros das vigas calculados para inserção no programa NLVP (NEst, 2011) estão organizados na tabela 6.33, 6.34 e 6.35 e os parâmetros mecânicos dos materiais, na tabela 6.36. Vale ressaltar que esses valores agora contemplam os coeficientes de ponderação da resistência aplicáveis ao ELS, ou seja,  $\gamma_c = \gamma_s = 1,0$ .

Tabela 6.33 – Parâmetros para as seções de extremidade (vigas) – ELS

Momento de fissuração	$M_f = 1436 \text{ kN.cm}$
Momento de plastificação	$M_y = 11810 \text{ kN.cm}$
Momento último	$M_u = 11944 \text{ kN.cm}$
Momento de inércia no estágio II	$I_{II} = 49299 \text{ cm}^4$
Curvatura de plastificação	$(1/r)_y = 1,007 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$
Curvatura última	$(1/r)_u = 3,702 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$

Tabela 6.34 – Parâmetros para as seções de máximo momento positivo (vigas) – ELS

Momento de fissuração	$M_r = 1436 \text{ kN.cm}$
Momento de plastificação	$M_y = 7236 \text{ kN.cm}$
Momento último	$M_u = 7403 \text{ kN.cm}$
Momento de inércia no estágio II	$I_{II} = 32747 \text{ cm}^4$
Curvatura de plastificação	$(1/r)_y = 9,284 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$
Curvatura última	$(1/r)_u = 3,397 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$

Tabela 6.35 – Parâmetros para as seções do apoio central (vigas) – ELS

Momento de fissuração	$M_r = 1436 \text{ kN.cm}$
Momento de plastificação	$M_y = 14052 \text{ kN.cm}$
Momento último	$M_u = 14094 \text{ kN.cm}$
Momento de inércia no estágio II	$I_{II} = 56420 \text{ cm}^4$
Curvatura de plastificação	$(1/r)_y = 1,046 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$
Curvatura última	$(1/r)_u = 3,427 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$

Tabela 6.36– Parâmetros mecânicos dos materiais – ELS (exemplo 5)

Módulo de elasticidade secante do concreto (vigas)	$E_{cs} = 2380 \text{ kN/cm}^2$
Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto (pilares)	$E_{ci} = 2800 \text{ kN/cm}^2$
Módulo de elasticidade do aço de armadura passiva	$E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$
Resistência do concreto à tração direta	$f_{ct} = 0,180 \text{ kN/cm}^2$
Resistência à compressão do concreto	$f_c = 2,50 \text{ kN/cm}^2$
Resistência ao escoamento do aço de armadura passiva	$f_y = 50 \text{ kN/cm}^2$

O carregamento é aplicado em 40 incrementos de carga e a discretização do pórtico é a mesma do item 6.5.1.1 (figura 6.43).





Novos esforços solicitantes são obtidos da análise estrutural e, conseqüentemente, novos momentos de inércia equivalente devem ser calculados, devendo ser a estrutura reprocessada. Assim procede-se iterativamente até que os deslocamentos verticais (flechas) ou momentos fletores não sofram alterações de valores (estabilização). Os resultados finais em termos de momentos fletores, depois de três iterações, estão indicados na figura 6.56:

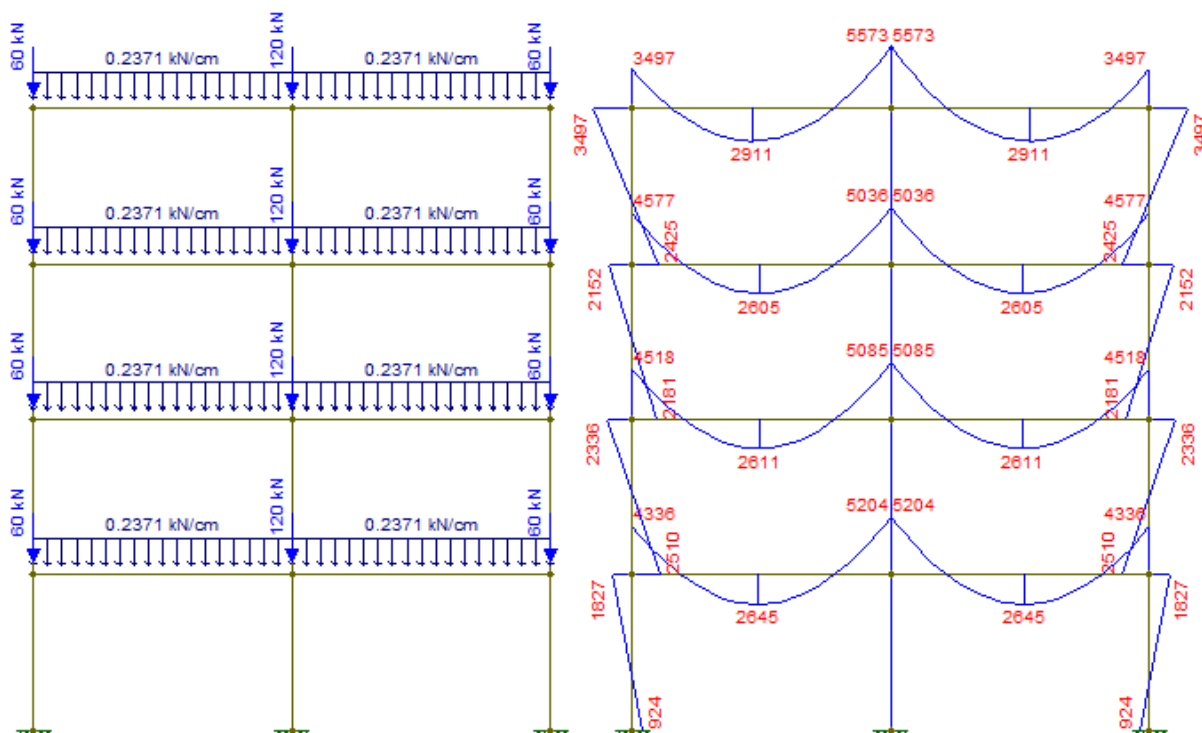


Figura 6.56 – Momentos fletores (kN.cm) obtidos a partir de análise linear com rigidez equivalente da NBR 6118 (ABNT, 2007) – ELS.

#### 6.5.2.4 Rigidez equivalente ponderada proposta pelo IBRACON (2007)

O momento de inércia equivalente ponderado das vigas é calculado conforme equação 6.51, apresentado no exemplo 4.

Após as iterações finalizadas (duas iterações) chegam-se aos resultados da figura 6.57:

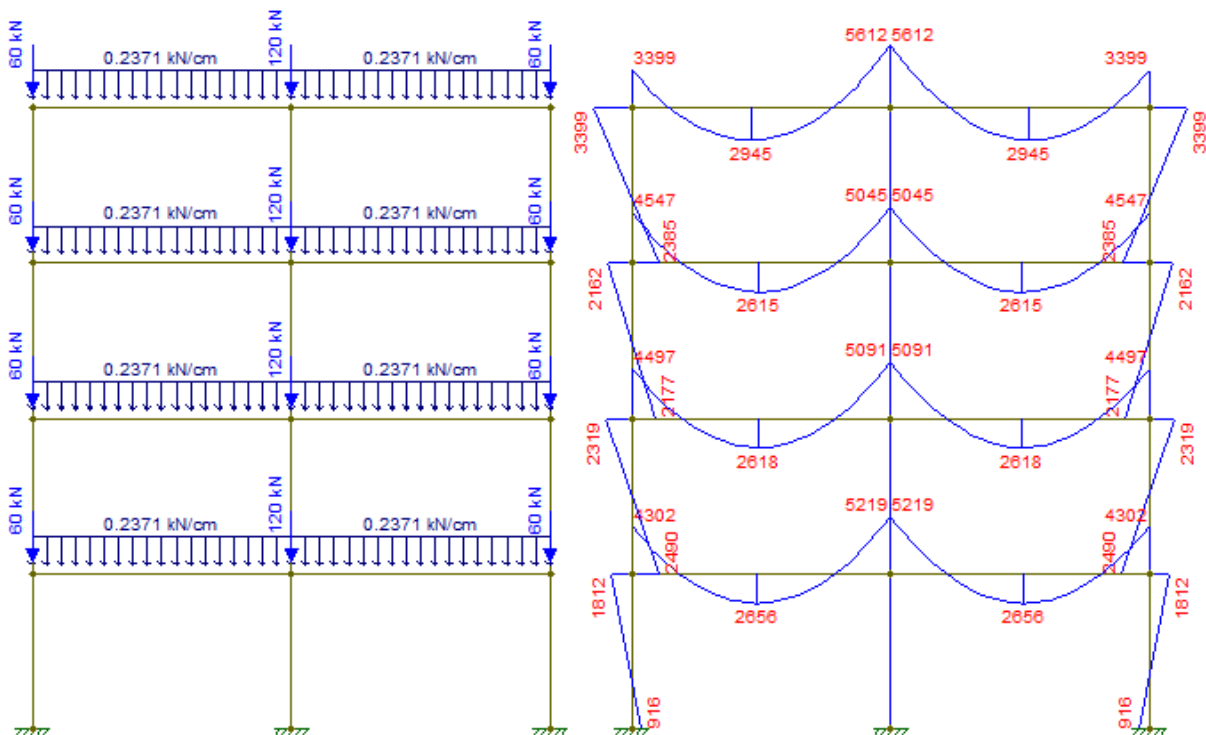


Figura 6.57 – Momentos fletores (kN.cm) obtidos a partir de análise linear com rigidez equivalente proposta pelo IBRACON (2007) – ELS.

### 6.5.2.5 Comparações

Em termos de momentos fletores, os resultados obtidos são comparados seguindo a identificação dos elementos da figura 6.52 apresentada anteriormente. Entretanto, devido à simetria do problema, apresentam-se somente as vigas do tramo esquerdo do pórtico. Para todas as comparações, os métodos são identificados nas tabelas 6.37 a 6.40 pelas seguintes siglas:

Análise não-linear: ANL;

Análise linear: AL;

Rigidez equivalente da NBR 6118 (ABNT, 2007):  $EI_{eq}$ ;

Rigidez equivalente ponderada do IBRACON (2007):  $EI_{eq,pond}$ .

As flechas verticais das vigas estão organizadas na tabela 6.37, em que o valor em cor vermelha é o de referência e o valor em negrito é o que mais se aproxima desse:

Tabela 6.37 – Flechas verticais para o ELS

<b>Viga V5</b>	<b>Flechas (mm)</b>			
Pav	<b>ANL</b>	<b>AL</b>	<b>EI<sub>eq</sub></b>	<b>EI<sub>eq,pond</sub></b>
4º Pav	<b>4,26</b>	2,19	5,18	<b>4,71</b>
3º Pav	3,27	1,82	3,98	3,71
2º Pav	3,28	1,86	4,00	3,72
1º Pav	3,37	1,91	4,14	3,84

Os valores dos momentos fletores, obtidos com a aplicação dos quatro métodos podem ser comparados através da tabela 6.38, 6.39 e 6.40.

Tabela 6.38 – Momentos M1 para o tramo esquerdo da viga

<b>Viga V5</b>	<b>M1 (kN.cm)</b>			
Pav	<b>ANL</b>	<b>AL</b>	<b>EI<sub>eq</sub></b>	<b>EI<sub>eq,pond</sub></b>
4º Pav	3422	3221	3497	3399
3º Pav	<b>4535</b>	4383	4577	<b>4547</b>
2º Pav	4487	4147	4518	4497
1º Pav	4325	3847	4336	4302

Tabela 6.39 – Momentos Mv para o tramo esquerdo da viga

<b>Viga V5</b>	<b>Mv (kN.cm)</b>			
Pav	<b>ANL</b>	<b>AL</b>	<b>EI<sub>eq</sub></b>	<b>EI<sub>eq,pond</sub></b>
4º Pav	<b>2766</b>	3061	<b>2911</b>	2945
3º Pav	2536	2715	2605	2615
2º Pav	2534	2757	2611	2618
1º Pav	2548	2809	2645	2656

Tabela 6.40 – Momentos M2 para o tramo esquerdo da viga

Viga V5	M2 (kN.cm)			
	ANL	AL	El <sub>eq</sub>	El <sub>eq,pond</sub>
4º Pav	<b>5974</b>	5569	5573	<b>5612</b>
3º Pav	5219	5013	5036	5045
2º Pav	5274	5177	5085	5091
1º Pav	5418	5395	5204	5219

No ELS os momentos fletores não são utilizados para o dimensionamento, entretanto, apresentam-se os valores dos mesmos, pois esses são utilizados nas iterações mencionadas nos itens 6.5.2.3 e 6.5.2.4. Os valores destacados em cor vermelha são os de referência enquanto os destacados em negrito são os que mais se aproximam desses.

Percebe-se que o método que mais se aproxima dos valores na análise não-linear é o sugerido pelo IBRACON (2007). O método da NBR 6118 (ABNT, 2007) superestima um pouco mais a flecha imediata.

Em uma análise geral, tanto o método da NBR 6118 (ABNT, 2007) quanto o sugerido pelo IBRACON (2007), apresentam boas aproximações. Entretanto, esse último, por considerar a influência das armaduras negativas no comportamento das vigas, é o método mais indicado.

Os resultados da análise linear servem apenas para fins de avaliação inicial dos esforços e para fins comparativos dos efeitos da fissuração do concreto sobre as flechas imediatas.

## 7 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 7.1 Conclusões

Este trabalho apresentou modelos constitutivos e procedimentos relacionados com a consideração da não-linearidade física (NLF) de vigas de concreto armado. Em projetos de estruturas reticuladas, a NLF pode ser incorporada por meio da utilização de modelos que empregam relações momento-curvatura e por meio de métodos aproximados e simplificações propostas pela NBR 6118 (ABNT, 2007). Outras formulações aproximadas para a consideração da NLF também foram abordadas e avaliadas, tais como as associadas às expressões contidas nos comentários técnicos do IBRACON (2007) e às propostas por Khuntia e Ghosh (2004).

A utilização de diagramas momento-curvatura mostrou-se bastante eficiente em representar a resposta não-linear do comportamento das vigas estudadas, tanto as teóricas quanto as experimentais. Somou-se a isso a facilidade na modelagem de estruturas planas, as quais exigem uma discretização simples dos elementos. Esse tipo de análise é também a que o projetista estrutural está mais familiarizado na prática em escritórios de cálculo. Para a sua aplicação, importantes parâmetros precisam ser determinados, entre os quais se destacaram a resistência à tração do concreto, o momento de fissuração ( $M_f$ ), o momento de início de plastificação ( $M_p$ ), o momento último ( $M_u$ ) e as respectivas curvaturas destes dois últimos parâmetros.

Os modelos não-lineares de Branson (1965) e de Ghali e Favre (1986), os quais consideram a contribuição do concreto tracionado íntegro entre fissuras (*tension stiffening*), representaram satisfatoriamente o comportamento de vigas no Estádio II. A aplicação de um ou outro modelo não mostrou diferenças relevantes no resultado final para a avaliação de flechas imediatas em vigas.

Para solicitações em serviço (Estádio II), tanto o método aproximado da NBR 6118 (ABNT, 2007) quanto o método sugerido pelo IBRACON (2007) apresentaram bons resultados quando confrontados com estudos experimentais e de modelos não-lineares. O método sugerido pelo IBRACON (2007) mostrou-se mais apropriado para

a utilização em vigas contínuas por considerar a influência das armaduras dos momentos negativos.

Para o dimensionamento no Estado Limite Último (ELU), a análise puramente linear foi importante como primeira aproximação para os métodos aproximados e simplificados, entretanto sua aplicação para obtenção de flechas e deslocamentos foi comprovadamente ineficaz perante a análise não-linear.

A análise linear com redistribuição de esforços promoveu uma tendência de uniformização das armaduras e redução das armaduras negativas, favorecendo as condições de ancoragem. A análise plástica aplicada ao caso anterior conduziu a um melhor aproveitamento da resistência dos materiais aço e concreto, permitindo a consideração de toda a capacidade resistente das seções. Porém ainda é uma simplificação da análise não-linear e sua aplicabilidade se limita a estruturas simples.

No último exemplo numérico, para a avaliação de deslocamentos horizontais, constatou-se que a redução global de inércia sugerida pela NBR 6118 (ABNT, 2007) foi a que mais se afastou dos resultados de referência (análise não-linear). Contudo, essa redução serviu de aproximação preliminar para os métodos aproximados. O método da rigidez secante via diagrama momento-curvatura foi o que apresentou melhores resultados nesse caso. Em termos de esforços (momentos fletores), a variabilidade de resultados obtidos pela aplicação dos modelos propostos tornou difícil a avaliação da eficiência dos mesmos. Entretanto, em uma análise geral, a redução global de inércia e o método da rigidez secante via diagrama momento-curvatura foram os que apresentaram resultados mais satisfatórios em relação à análise não-linear.

Vale salientar que as diferenças de valores entre os métodos aproximados que se propõem a considerar a NLF, tanto para os deslocamentos quanto para os esforços no ELU, foram constatadas especificamente para as estruturas apresentadas nesse trabalho (vigas e pórticos planos com geometria simples).

Em um aspecto geral, os modelos não-lineares que empregam relações momento curvatura e os métodos aproximados abordados na pesquisa mostraram-se satisfatórios na consideração da NLF de vigas de concreto armado. Por outro lado, constatou-se que a desconsideração da NLF pode conduzir a resultados contrários à segurança, sendo assim desaconselhada.

## 7.2 Sugestões para pesquisas futuras

O estudo realizado nesse trabalho pode ser complementado com contribuições em relação à NLF de pilares de concreto armado em análises globais de estruturas aporticadas. Uma vez que a NBR 6118 (ABNT, 2007) apresenta reduções globais de inércia somente aplicáveis para edifícios com no mínimo 4 andares, é interessante um estudo para análise de edifícios baixos até 3 pavimentos.

O emprego do método da rigidez secante via diagrama momento-curvatura, que apresentou resultados satisfatórios no último exemplo numérico deste trabalho, pode ser mais explorado. Existem poucos trabalhos a respeito. Sugerem-se mais simulações numéricas nesse sentido, em particular em análises globais para edifícios com menos de 20 andares.





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁLVARES, M. da S. **Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado**. 1999. 150f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

ÁLVARES, M. da S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos**. 1993. 150f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

ANDRADE, J.J.O. Propriedades Físicas e Mecânicas dos materiais. In: ISAIA, G. (Ed.). **Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia dos Materiais**. São Paulo: IBRACON, 2010. p. 207-240.

ARAÚJO, F. A. de. **Formulação de um modelo de dissipação concentrada para a análise não-linear de estruturas reticuladas planas em concreto armado**. 2007. 262f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI Committee 318**: building code requirements for structural concrete (ACI 318-02) and commentary (ACI 318R- 02). Farmington Hills, Mich, 443p. 2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de revisão da **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2000.

BALLAROTTI, C. **Análise elasto-plástica de pórticos planos retangulares**. 1982. 185f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1982.

BERNARDI, D. F. **Um modelo computacional para a análise global tridimensional da estrutura de edifícios altos de concreto armado com a presença de paredes estruturais.** 2010. 137f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

BISCHOFF, P. H. **Reevaluation of deflection prediction for concrete beams reinforced with steel and fiber reinforced polymer bars.** ASCE. Journal of Structural Engineering. p. 752-767, may. 2005

BONO, G. F. F. **Modelos constitutivos para análise tridimensional de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos.** 2008. 208f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

BRANCO, A. L. L. V. **Análise não-linear de pórticos planos, considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo de esforços e deslocamentos.** 2002. 107f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

BRANSON, D. E. **Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams.** HPR Publication, Alabama Highway Department, U. S. Bureau of Publis Roads, n. 7, part 1, p. 1-78, aug. 1965.

BUCHAIM, R. **A influência da não-linearidade física do concreto armado na rigidez à flexão e na capacidade de rotação plástica.** 2001. 260f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

CALLISTER JR., W.D. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução.** Rio de Janeiro: LTC, 2002. 589p.

CARMO, R. M. dos S. **Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado.** 1995. 135f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

CARVALHO, R. C. **Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha.** 1994. 218f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994.

COMITÉ EURO INTERNACIONAL DU BÉTON. **CEB-FIB Model Code 1990**. London: Thomas Telford, 1993.

CORELHANO, A. G. B. **Análise não linear geométrica e física de núcleos rígidos de edifícios altos em concreto armado**. 2010. 171f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

COTTA, I. F. S. **Desenvolvimento de programa livre para análise de pórticos tridimensionais considerando-se a não linearidade geométrica, fissuração do concreto e ligações semi-rígidas**. 2007. 264f. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2007.

CRESPO, S. L. F. **Estudo de valores da rigidez equivalente de tramos de vigas de concreto armado para análises não-lineares**. 2002. 126f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

D'AVILA, V. M. R. **Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos**. 2003. 287f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

DEBERNARDI, P. G. **La deformazione differita in C. A. sogette a fessurazione: considerazione sui metodi approssimati di calcolo**. L'Industria Italiana del Cremento. Roma. v. 7/8, p. 499-510. 1983.

FAGLIONI, A. F. **Análise não-linear física de vigas de concreto armado utilizando o elemento finito prismático regular linear associado ao de barra**. 2006. 123f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

FONTES, F. F. **Análise estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003**. 2005. 137f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

FRANÇA, R. L. S. **Relações momento-curvatura em peças de concreto armado submetidas à flexão composta**. 1984. 158f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1984.

GHALI, A.; FAVRE, R. **Concrete structures: stresses and deformations**. 1 ed. London. E & FN Spon, Chapman and Hall, 1986. 372 p.

GUARDA, M. C. C. da. **Cálculo de deslocamentos em pavimentos de edifícios de concreto armado**. 2005. 266f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

INSTITUTO BRASILEIRO DO CONCRETO. **Comentários técnicos e exemplos de aplicação da NB-1**. IBRACON, São Paulo, 2007.

ISAIA; G. C. (Ed.). **Concreto: ciência e tecnologia**. 1 ed. São Paulo. IBRACON, 2011. 1v. 931p.

KALKAN, I. **Deflection prediction for reinforced concrete beams through different effective moment of inertia expressions**. Int. Eng. Research e Developmente, n. 1, v. 2, p.72-80, january 2010.

KHUNTIA, M.; GHOSH, S. K. **Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: analytical approach**. ACI Structural Journal. Title n. 101-S36. p. 350-363, may./june. 2004.

LIMA, P. R. L.; FONTES, C. M. A.; LIMA, J. M. F. **Análise não-linear da deflexão de vigas de concreto armado**. Sitientibus, Feira de Santana, n. 28, p. 91-108, jan./jun. 2003.

MARIN, M. C. **Contribuição à análise da estabilidade global de estruturas em concreto pré-moldado de múltiplos pavimentos**. 2009. 213f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

MARTHA, L. F. **Ftool – Two-Dimensional Frame Analysis Tool**. Rio de Janeiro, 2008. Versão Educacional 2.12. Sistema Operacional Windows.

MARTINS, C. H. **Consideração da não-linearidade física para as vigas de concreto armado, pelo procedimento refinado da NB1**. Acta Sci. Technol. Maringá, v. 30, n. 1, p. 15-18, 2008.

MONCAYO, W. J. Z. **Análise de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado**. 2011. 221f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

NOGUEIRA, C. G.; VENTURINI, W. S. **Análise não-linear de estruturas de barras de concreto armado**. ENDOSSET 2006, Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 8, n. 32, p. 125-128, 2006.

NOGUEIRA, C. G. **Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado**. 2005. 166f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

OLIVEIRA, D. M. de. **Estudo dos processos aproximados utilizados para a consideração das não-linearidades física e geométrica na análise global das estruturas de concreto armado**. 2007. 327f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

OLIVEIRA, P. H. de A. S. **Processo aproximado para consideração da não-linearidade física de pilares em concreto armado**. 2004. 139f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

OLIVEIRA, ROGÉRIO. M. **Contribuição ao estudo da rigidez de vigas de concreto armado em análises de 2ª ordem**. 2000. 159f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

OLIVEIRA, RICHARD. S. **Análise de pavimentos de edifícios de concreto armado com a consideração da não-linearidade física - modelagem e metodologia de aplicação a projetos**. 2001. 216f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

OLIVEIRA, RICHARD. S. **Análise de pavimentos de edifícios de concreto armado com a consideração da não-linearidade física**. 1997. 147f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

PEREIRA, J. da S. **Modelo não linear de viga para a obtenção de esforços em serviço aplicado a lajes de barragem de enrocamento com face de concreto.** 2009. 133f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

PINTO, R. da S. **Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado.** 2002. 204f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

PINTO, R. da S. **Análise não-linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado.** 1997. 128f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

PROENÇA, S. P. B. **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições.** 1988. 330f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

SANCHES JR, F. **Cálculo de esforços e deslocamentos em pavimentos de edifícios considerando-se modelos próprios para o concreto armado.** 1998. 180f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

SANTOS, L. M. **Analysis of section 6.6 of the CEB-FIP Model Code 1990.** Colloquium on the CEB-FIP MC90, p. 289-306. UFRJ, RJ. 1991.

SILVA, P. P. R. **Implementação de modelos de microplanos para análise não-linear de estruturas de concreto, uma abordagem orientada a objetos.** 2002. 134f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2002.

SILVA, R. M. da. **Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado: modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados.** 1996. 290f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

SOLER, J. G. M. **Análise não-linear de pórticos espaciais de concreto armado.** 1995. 99f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado**. 2007. 238f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

TORRES, L. I.; LÓPEZ-ALMANSA F.; BOZZO, L. M. **Tension-stiffening model for cracked flexural concrete members**. ASCE. Journal of Structural Engineering. p. 1242-1251, august. 2004

VASCONCELOS, A. C. de. **O concreto no Brasil: recordes, realizações, história**. 2.ed. São Paulo. Pini, 1992.

VASCONCELOS, G. M. A. de. **Verificação simultânea dos estados limites últimos e de serviço em análises não-lineares de peças de concreto armado submetidas à flexão pura**. 2005. 134f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.





## **ANEXO A - PROGRAMA NLVP**

### **A.1. Generalidades**

O programa NLVP foi desenvolvido em linguagem FORTRAN pelo orientador deste trabalho, como parte das atividades do grupo de pesquisa NEST (Núcleo de Estudos em Experimentação e Análise Numérica de Estruturas) da Universidade Federal de Santa Maria. O programa permite a análise não-linear física e geométrica de pórticos planos de concreto armado e utiliza o processo dos deslocamentos com as técnicas clássicas do cálculo matricial de estruturas reticuladas.

Para a consideração da não-linearidade física (NLF), o programa emprega modelos consagrados baseados em relações momento-curvatura, tanto para a flexão simples (vigas) quanto para a flexão normal composta (pilares). Para a realização da análise não-linear física com os modelos constitutivos mencionados é necessária a discretização adequada dos elementos (vigas e pilares) ao longo do vão.

Para a consideração da NLG (NLG), o programa emprega o conceito de matriz tangente e utiliza uma matriz de rigidez geométrica que fornece resultados satisfatórios para análises globais em edifícios de múltiplos andares.

Para a resolução do problema não-linear, o programa utiliza o procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson Padrão, com critério de convergência baseado na norma do resíduo de forças (resíduos) quanto na norma dos deslocamentos relativos, à escolha do usuário.

O programa NLVP fornece como resultados, para cada incremento de carga, os deslocamentos nodais, os esforços solicitantes nas extremidades das barras e as informações associadas à perda de rigidez à flexão dos elementos vigas e pilares de concreto armado.

Apresentam-se no item A.2 deste anexo os modelos constitutivos empregado pelo programa NLVP para elementos submetidos à flexão simples (tipo vigas) e para elementos submetidos à flexão normal composta (tipo pilares).

## A.2. Modelos constitutivos utilizados para a não-linearidade física

### A.2.1 Elementos submetidos à flexão simples (vigas)

Para os elementos vigas, a curvatura ( $1/r$ ) e a rigidez à flexão  $EI$  de uma seção são obtidos a partir de diagramas momento-curvatura conforme a figura A.1. Os valores de ( $1/r$ ) e  $EI$  são obtidos analiticamente em função do momento solicitante, sem a necessidade de realizar a integração das tensões normais ao longo da altura da seção.

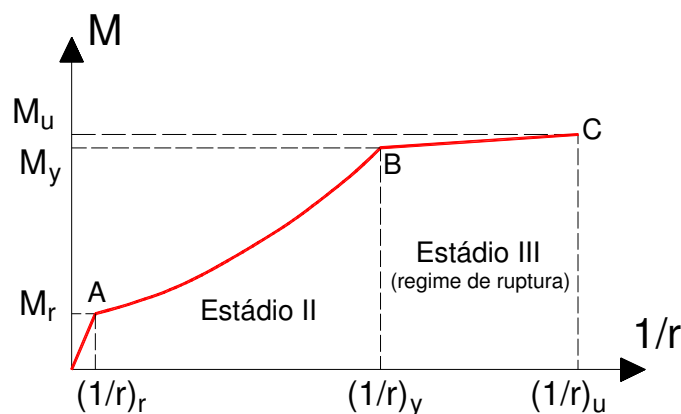


Figura A.1–Curva momento-curvatura empregada para os elementos submetidos à flexão simples.

Na figura A.1:

$M$  é o momento atuante na seção;

$M_r$  = momento de fissuração;

$(1/r)_r$  = curvatura de fissuração;

$M_y$  = momento de início de plastificação;

$(1/r)_y$  = curvatura de início de plastificação;

$M_u$  = momento último;

$(1/r)_u$  = curvatura última.

Para a consideração da contribuição do concreto tracionado intacto entre fissuras (tension stiffening) no Estádio II, o programa emprega o modelo empírico de Branson (1965) para a determinação do momento de inércia equivalente da seção:

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M}\right)^m \cdot I_I + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^m\right] \cdot I_{II} \quad (A.1)$$

Em que:

III é o momento de inércia no Estádio II puro (seção fissurada);

II é o momento de inércia no Estádio I (seção não fissurada);

$m = 4$  (seções individuais).

Dessa forma, calcula-se a rigidez à flexão das seções que ingressam no Estádio II por:

$$EI = E \cdot I_{eq}$$

Em que E é o módulo de deformação longitudinal do material do elemento.

No estágio III (regime de ruptura), o programa admite, como simplificação, um trecho reto no diagrama momento curvatura entre o ponto de início de plastificação e o ponto de momento último (trecho BC da figura A.1). Desse modo, calcula-se a curvatura no trecho BC por:

$$(1/r) = (1/r)_y + \left[ \frac{(1/r)_u - (1/r)_y}{M_u - M_y} \right] \cdot (M - M_y) \quad (A.2)$$

Assim, no trecho BC, a rigidez à flexão EI das seções que ingressam no Estádio III é obtida por:

$$EI = M / (1/r)$$

#### A.2.2 Elementos submetidos à flexão normal composta (pilares)

Para os elementos pilares, a obtenção da curvatura (1/r) e da rigidez à flexão EI de uma seção é feita a partir das equações de equilíbrio da seção e da integração

das tensões normais da mesma. Logo, é necessário fazer a análise da seção. A figura A.2 ilustra uma seção genérica submetida a solicitações normais.

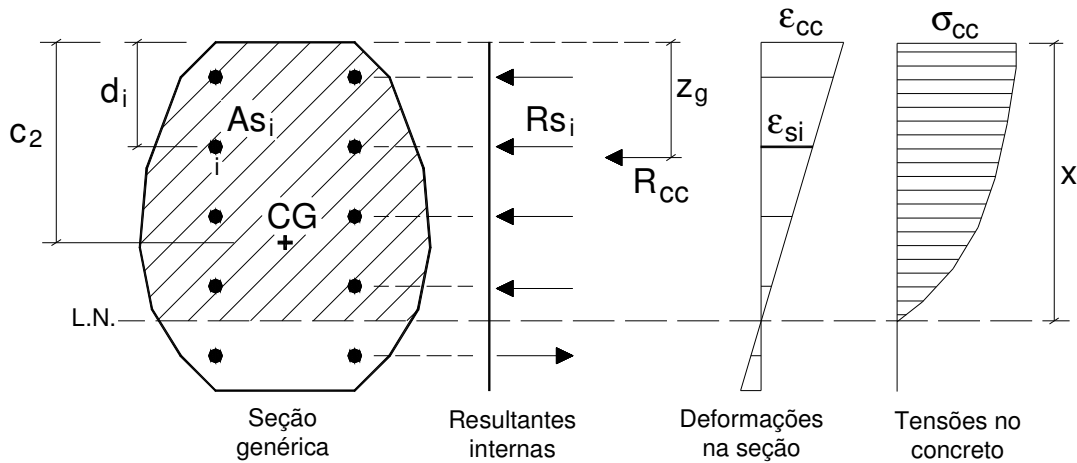


Figura A.2–Seção genérica submetida a solicitações normais.

Na figura A.2:

$R_{cc}$  é a resultante das tensões normais de compressão do concreto;

$z_g$  é a distância da fibra mais comprimida da seção à resultante  $R_{cc}$ ;

$\epsilon_{cc}$  é a deformação do concreto na fibra mais comprimida da seção;

$\sigma_{cc}$  é a tensão de compressão do concreto na fibra mais comprimida da seção;

$R_{si}$  é a resultante da armadura da camada  $i$ ;

$d_i$  é a distância da fibra mais comprimida ao eixo da armadura da camada  $i$ ;

$A_{si}$  é a área de armadura da camada  $i$ ;

$\epsilon_{si}$  é a deformação da armadura da camada  $i$ ;

$c_2$  é a distância da fibra mais comprimida ao centro de gravidade da seção;

$x$  é a profundidade da linha neutra, medida em relação à fibra mais comprimida da seção.

Por equilíbrio, as resultantes internas devem ser iguais aos esforços solicitantes (força normal  $N$  e momento fletor  $M$ ):

$$N = R_{cc} + \sum A_{si} \sigma_{si} \quad (\text{A.3})$$

$$M = R_{cc} \cdot (c_2 - z_g) + \sum A_{si} \sigma_{si} (c_2 - d_i) \quad (A.4)$$

Por compatibilidade de deformações:

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_{cc}}{x} = \frac{\epsilon_{si}}{x - d_i} \quad (A.5)$$

Nas equações A.3, A.4 e A.5, tensões e deformações de compressão possuem sinal positivo.

O programa emprega as hipóteses usuais do Estado Limite Último por solicitações normais, conforme a NBR 6118 (ABNT, 2007). Logo:

- Para as tensões do concreto comprimido, emprega-se diagrama parabólico-retangular;
- Admite-se que a ruína ocorra segundo os domínios de deformações.

A incógnita chave do problema é a profundidade da linha neutra ( $x$ ). Para obtê-la, é necessário recorrer a procedimento iterativo, atualizando o valor da curvatura ( $1/r$ ) e o valor da deformação no CG da seção até a convergência.

Existem 4 casos possíveis para a obtenção do valor e da posição da resultante do concreto ( $R_{cc}$ ), conforme ilustrado na figura A.3:

Caso A:  $x < h$  e  $\epsilon_{cc} < 0,002$

Caso B:  $x < h$  e  $\epsilon_{cc} \geq 0,002$

Caso C:  $x \geq h$  e  $\epsilon_{cc} < 0,002$

Caso D:  $x \geq h$  e  $\epsilon_{cc} \geq 0,002$

Para cada caso, é possível deduzir as expressões de ( $R_{cc}$ ) e ( $z_g$ ) a partir da integração das tensões do concreto ao longo da altura da seção. Tais expressões podem ser encontradas na bibliografia especializada.

No caso A, a resultante das tensões de tração do concreto são incluídas na equação (4) sempre que as mesmas não superem a resistência à tração do concreto na flexão.

A atual versão do programa é aplicável somente para seções retangulares simétricas submetidas à flexo-compressão (ou seja, apenas forças normais de compressão).

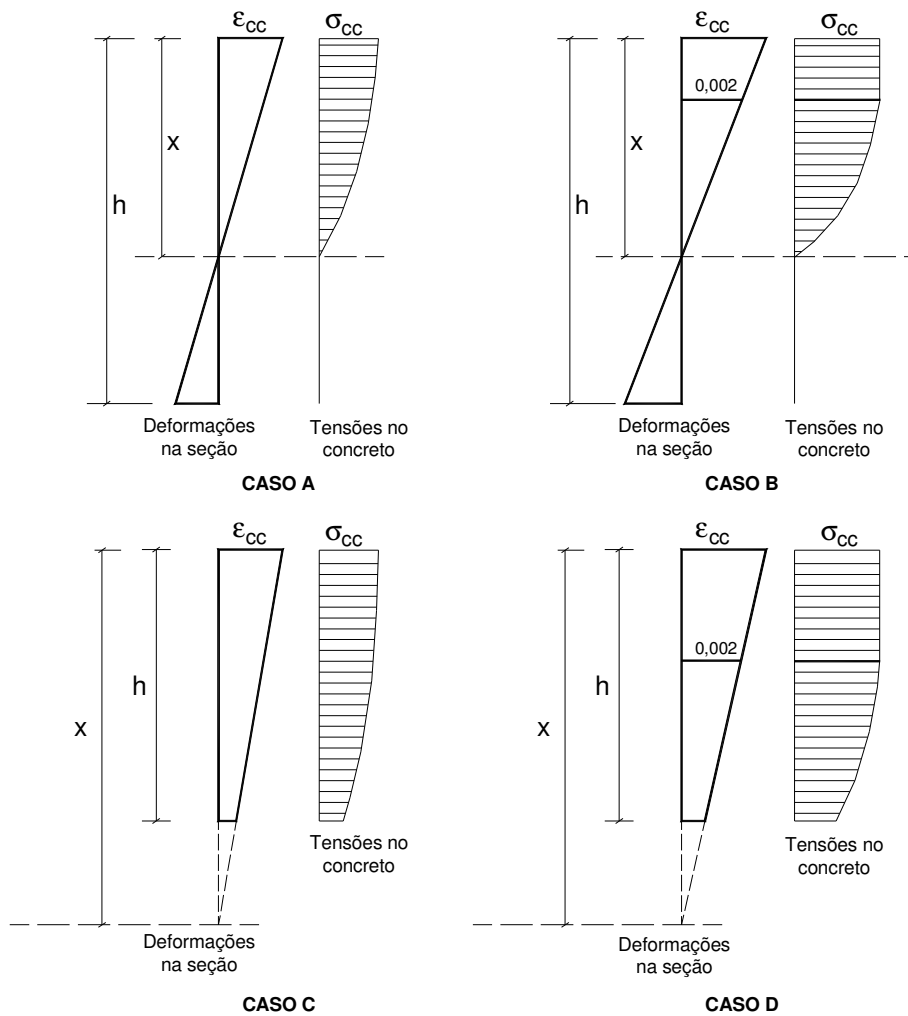


Figura A.3–Casos possíveis para a integração das tensões do concreto.

O programa emprega o seguinte algoritmo para a obtenção da curvatura e da rigidez à flexão da seção de pilares, a partir dos esforços solicitantes  $M$  e  $N$  de cada iteração do procedimento incremental:

(1) Com os esforços solicitantes  $M$  e  $N$ , estimam-se os valores da curvatura ( $1/r$ ), da deformação no centro de gravidade ( $\epsilon_0$ );

Processo iterativo

(2) Com a curvatura ( $1/r$ ) e a deformação no centro de gravidade ( $\epsilon_0$ ), calcula-se o valor de  $x$ , identificando o caso (A,B,C ou D);

(3) Com base nos domínios de deformação do ELU para solicitações normais, verifica-se se a seção atingiu a ruína. Em caso negativo, prossegue-se com o processo iterativo.

(4) Por meio da integração das tensões do concreto ao longo da altura da seção, calculam-se a resultante de compressão do concreto ( $R_{cc}$ ) e a distância dessa resultante em relação à fibra mais comprimida da seção ( $z_g$ )

(5) Por meio da compatibilidade de deformações, calculam-se as deformações ( $\epsilon_{si}$ ), as tensões ( $\sigma_{si}$ ) e as resultantes nas armaduras ( $A_{si}$ .  $\sigma_{si}$ )

(6) Calculam-se a força normal ( $N_R$ ) e o momento fletor ( $M_R$ ) das resultantes internas.

(7) Enquanto o erro relativo  $(N-N_R)/N$  e  $(M-M_R)/M$  for maior que a tolerância, calculam-se novos incrementos de curvatura ( $\Delta 1/r$ ) e da deformação no centro de gravidade ( $\Delta \epsilon_0$ ). Com os novos valores para a curvatura ( $1/r$ ) e a deformação no centro de gravidade ( $\epsilon_0$ ), retorna-se ao passo (2). Quando o erro relativo for menor que a tolerância, finaliza-se processo iterativo.

*Fim do processo iterativo*

(8) Com o valor de  $M$  e  $(1/r)$ , calcula-se a rigidez à flexão seção:  $EI=M/(1/r)$

### A.2.3 Cálculo da rigidez à flexão média do elemento finito

Para a rigidez à flexão do elemento finito, o programa emprega a média dos valores obtidos para a seção do nó inicial e a seção do nó final, com modelos constitutivos apresentados em A.2.1 e A.2.2. Dessa forma, o momento de inércia à flexão do elemento finito é obtido por:

$$I_{eqm} = \frac{I_{eq,i} + I_{eq,j}}{2} \quad (A.6)$$

$I_{eq,i}$  é o momento de inércia à flexão associado à seção do nó inicial;

$I_{eq,j}$  é o momento de inércia à flexão associado à seção do nó final.

O momento de inércia calculado com a equação (A.6) é o valor utilizado nas matrizes de rigidez dos elementos finitos que compõem a estrutura (vigas e pilares).