

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**SEGMENTAÇÃO DE GRÃOS DE HEMATITA
EM AMOSTRAS DE MINÉRIO DE FERRO POR
ANÁLISE DE IMAGENS DE LUZ POLARIZADA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Marlise Rosa

**Santa Maria, RS, Brasil
2008**

**SEGMENTAÇÃO DE GRÃOS DE HEMATITA
EM AMOSTRAS DE MINÉRIO DE FERRO POR
ANÁLISE DE IMAGENS DE LUZ POLARIZADA**

por

Marlise Rosa

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Produção da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito
parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Engenharia de Produção

Orientador: Prof. Dr. José Antônio Trindade Borges da Costa

Santa Maria, RS, Brasil

2008

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a
Dissertação

**SEGMENTAÇÃO DE GRÃOS DE HEMATITA
EM AMOSTRAS DE MINÉRIO DE FERRO POR
ANÁLISE DE IMAGENS DE LUZ POLARIZADA**

elaborada por
Marlise Rosa

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Engenharia de Produção

Comissão Examinadora

Prof. Dr. José Antônio Trindade Borges da Costa
(Presidente/Orientador)

Prof. Dr. Farid Chemale

Prof. Dr. Luiz Fernando Schelp

Santa Maria, 19 de fevereiro de 2008.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção
Universidade Federal de Santa Maria

SEGMENTAÇÃO DE GRÃOS DE HEMATITA EM AMOSTRAS DE MINÉRIO DE FERRO POR ANÁLISE DE IMAGENS DE LUZ POLARIZADA

Autora: Marlise Rosa

Orientador: Prof. Dr. José Antônio Trindade Borges da Costa

Local e data da defesa: Santa Maria, 19 de fevereiro de 2008.

O objetivo do presente trabalho é classificar pixels co-registrados de pilhas de imagens de luz polarizada de minério de ferro nos seus respectivos grãos cristalinos ou poros, produzindo assim imagens segmentadas por grãos que podem ser analisados quanto às suas distribuições de tamanho, forma e orientação, bem como sua porosidade, tamanho e forma dos poros. Seções polidas de amostras de minério de ferro rico em hematita foram imageadas difratamente em um microscópio com polarizador giratório em ângulos variados de polarização. Uma pilha de imagens foi produzida para cada campo na qual cada imagem corresponde a uma orientação do polarizador. Cada ponto na amostra foi registrado nas mesmas coordenadas em todas as imagens da pilha. O conjunto resultante de intensidades de cada pixel está diretamente relacionado com a orientação do cristal amostrado na posição correspondente. A análise multivariada dos conjuntos de intensidades leva à classificação dos pixels nos seus respectivos grãos cristalinos. Grãos individuais de hematita do minério de ferro, bem como os seus poros foram segmentados. Os resultados foram comparados com aqueles obtidos pelo método de contagem dos pontos, ou seja, por inspeção visual.

Palavras-chave: segmentação de imagens; microscopia de luz polarizada, reconhecimento de padrões, análise multivariada, minério de ferro, hematita

ABSTRACT

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção
Universidade Federal de Santa Maria

HEMATITE GRAIN SEGMENTATION OF IRON ORE SAMPLES BY POLARIZED LIGHT IMAGE ANALYSIS

Author: Marlise Rosa

Advisor: Prof. Dr. José Antônio Trindade Borges da Costa

The aim of the present work is to classify co-registered pixels of stacks of polarized light images of iron ore into their respective crystalline grains or pores, thus producing grain segmented images that can be analyzed by their size, shape and orientation distributions, as well as their porosity and the size and morphology of the pores. Polished sections of samples of hematite-rich ore are digitally imaged in a rotating polarizer microscope at varying plane-polarization angles. An image stack is produced for every field of view, where each image corresponds to a polarizer position. Any point in the sample is registered to the same pixel coordinates at all images in the stack. The resulting set of intensities for each pixel is directly related to the orientation of the crystal sampled at the corresponding position. Multivariate analysis of the sets of intensities leads to the classification of the pixels into their respective crystalline grains. Individual hematite grains of iron ore, as well as their pores, are segmented. The results are compared to those obtained by visual point counting methods.

Keywords: image segmentation; polarized light microscopy, pattern recognition, multivariate analysis, iron ore, hematite.

AGRADECIMENTOS

Ao longo destes dois anos de pesquisa no mestrado em engenharia de produção da UFSM, tenho muito a quem agradecer.

Primeiramente a Deus, pela vida.

A CAPES pelo investimento feito em mim, durante o período na qual fui bolsista de mestrado.

A todos os colegas do LaCA que conviveram e trabalharam durante este tempo, em especial ao meu colega Márcio André Dell'Aglio Frick e Gabriela Carla Bauermann.

Ao meu amigo e orientador Professor Dr. José Antônio Trindade Borges da Costa, pela dedicação e auxílio durante as atividades de pesquisa.

À Lucy Takehara, aqui presente, na preparação das amostras e na aquisição das imagens.

Ao Professor Dr. Marcos Cordeiro d'Ornellas que, como Cordenador do Grupo, proveu os meios para a realização do trabalho, além de contribuir com críticas e sugestões importantes.

Em especial aos meus pais Jorge e Marli pelo apoio e compreensão ao longo do curso, incentivando-me sempre em todos os momentos.

Enfim, agradeço a todos os demais que deram a sua contribuição para minha formação profissional.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Estrutura cristalina dos minerais de ferro.....	14
Figura 1.2 - Esquema de formação de uma imagem em um microscópio ótico.....	20
Figura 1.3 - Microscópio de luz transmitida e microscópio de luz refletida.....	22
Figura 1.4 - Microscópio de luz transmitida e luz refletida.....	23
Figura 1.5 - Variação do contraste entre os grãos cristalinos.....	24
Figura 1.6 – Onda linearmente polarizada emergindo de um polarizador.....	25
Figura 1.7 –Efeito causado por dois polaróides cruzados.....	26
Figura 1.8 – Fonte de luz polarizada vista através de um polarizador.....	27
Figura 1.9 – Ilustração do fenômeno de polarização por reflexão e refração.....	27
Figura 1.10 – Ilustração do fenômeno de polarização por birrefringência.....	28
Figura 1.11 – Tipos de abordagens em reconhecimento estatístico de padrões.....	36
Figura 1.12 – Distribuições gaussiana e mistura de gaussianas.....	37
Figura 1.13 – Etapas de um processo de identificação automática de classes.....	38
Figura 1.14 – Trajetórias percorridas por uma hiperesfera.....	41
Figura 2.1 – Conjunto de imagens de um mesmo campo.....	43
Figura 2.2 - Regiões de contato regular entre grãos de hematita.....	44
Figura 2.3 – Imagens de luz polarizada de uma amostra de minério de ferro.....	45
Figura 2.4 – Imagem de referência para correção da iluminação irregular.....	46
Figura 2.5 – Arraste produzido pela variação do ângulo de polarização.....	47
Figura 2.6 – Falsos objetos criados pela reflexão da luz no interior dos poros.....	48
Figura 2.7 – Imagem de contraste entre os poros e a estrutura de grãos.....	48
Figura 2.8 – Imagens do mesmo campo com ângulos de polarização diferentes.....	49

Figura 2.9 – Segmentação de grãos por agrupamento de padrões.....	50
Figura 3.1 – Composição em pseudo-cores RGB.....	51
Figura 3.2 – Aglomerados de padrões em um espaço de características	52
Figura 3.3 – Imagem segmentada pela aplicação do algoritmo <i>mean shift</i>	52

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
1.1 Minério de ferro	13
1.2 Importância da caracterização do minério de ferro	16
1.3 Precusores do método de caracterização proposto	18
1.4 Microscopia com luz polarizada	20
1.4.1 Microscopia ótica.....	20
1.4.2 A luz polarizada	24
1.4.2.1 Polarização por absorção.....	25
1.4.2.2 Polarização por reflexão e refração.....	27
1.4.2.4 Polarização por birrefringência.....	28
1.5 Processamento de imagens	29
1.5.1 Imagens digitais.....	30
1.5.2 Segmentação.....	31
1.5.3 Reconhecimento de padrões.....	32
1.5.3.1 Conceitos básicos	33
1.5.3.2 Identificação não paramétrica de classes.....	37
1.5.3.3 <i>Mean shift</i>	39
2 MATERIAIS E MÉTODOS	43
2.1 Preparação e inspeção das amostras.....	44
2.2 Aquisição de imagens.....	44
2.3 Pré-processamento.....	46
2.4 Análise de imagens.....	49
3 RESULTADOS	51
4 CONCLUSÕES	55
BIBLIOGRAFIA	56
APÊNDICE - A identidade de Fukunaga	59

INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é apresentar um procedimento de aquisição, processamento e análise de imagens de microscopia óptica para segmentar os poros e os grãos cristalinos de hematita em amostras de minério de ferro ricas neste mineral. Entende-se por *segmentação* o processo de *divisão de uma imagem em suas partes ou objetos constituintes*, sendo uma das tarefas mais difíceis no processamento de imagens. Uma vez segmentados, os poros e os grãos podem ser medidos, e as amostras de minério de ferro podem ser caracterizadas quanto a porosidade, o tamanho e a morfologia dos poros, e especialmente as distribuições de tamanho, forma e orientação dos grãos cristalinos.

A análise de *imagens adquiridas em diferentes regiões do espectro eletromagnético (imagens multiespectrais)*, de longa tradição na área de sensoriamento remoto, foi introduzida recentemente por Pirard (PIRARD, 2004) para caracterizar minério de ferro através de imagens adquiridas em um microscópio ótico equipado com um conjunto de filtros de interferência de banda estreita (10nm). Uma vez que os minerais apresentam refletâncias diferentes em diferentes comprimentos de onda, a informação complementar contida em imagens multiespectrais permite a separação das classes minerais no espaço multidimensional cujas coordenadas são as refletâncias espectrais. Esta técnica pode ser, em princípio, estendida para outros minerais pela escolha apropriada dos filtros de interferência, isto é, aqueles que produzem o maior contraste entre todos os pares de minerais.

A possibilidade de utilizar a informação complementar contida em *imagens de uma mesma amostra adquiridas com filtros de polarização em diferentes direções (imagens multiradiais)* para identificar automaticamente grãos cristalinos, emulando o procedimento de um especialista humano, foi explorada por (LUMBRERAS, 1996) para realizar a segmentação de grãos cristalinos em amostras de mármore.

Em trabalhos mais recentes, Pirard (PIRARD, 2007) fez *uso combinado de imagens multiespectrais e multiradiais*¹ para identificar óxidos de ferro e realizar a análise textural das partículas. A segmentação dos cristais de hematita foi realizada com o uso de *mapas de intensidade de birefletância*, obtidos pela *diferença local entre as intensidades refletidas máxima e mínima para ângulos de polarização variáveis* em comprimentos de onda fixos. A textura das partículas de minério foi analisada pelo método dos comprimentos médios dos

interceptos ($MIL = Mean Intercept Length$), os quais foram determinados a partir de imagens de gradiente das imagens de birefletância. Tanto a técnica de segmentação dos grãos, quanto o método de análise adotados por Pirard utilizam apenas parte da informação contida na pilha de imagens multi-modais. Apenas a maior e a menor intensidades refletidas nos diversos ângulos de polarização da luz são utilizados e os grãos não são caracterizados individualmente.

No presente trabalho aplicamos uma técnica alternativa para a análise de imagens multiradiais adquiridas em um microscópio óptico de luz refletida com polarizador giratório, a qual utiliza toda a informação contida na pilha de imagens para segmentar os grãos cristalinos de hematita em amostras de minério de ferro. Trata-se de uma técnica multivariada, conhecida como *mean shift*, proposta originalmente por Fukunaga (FUKUNAGA, 1975) e mais recentemente tratada por Cheng (CHENG, 1995) que reconhece classes de objetos por suas características sem a supervisão do usuário. Esta técnica foi aplicada pela primeira vez à segmentação de imagens coloridas por Comaniciu e Meer (COMANICIU, 1997), tratando os pixels como os objetos a serem classificados e as suas componentes de cor como as características usadas no processo de classificação. Assim, as classes identificadas são conjuntos de pixels com as mesmas cores, os quais se espera que estejam associados espacialmente formando as áreas a serem segmentadas na imagem.

No caso de imagens multiespectrais, as características espectrais usadas para identificar as áreas a serem segmentadas podem envolver mais de três bandas na região visível do espectro além de bandas nas regiões do infravermelho e do ultravioleta. De fato, a composição de imagens usando estas últimas bandas produz cores que não correspondem àquelas que são observadas a olho nu quando a mesma área é iluminada com luz branca, assumindo um caráter meramente ilustrativo, isto é, servindo como *rótulo* para identificar a respectiva área. No caso das imagens multiradiais de que se trata neste trabalho, substituí-se as *características espectrais (intensidades por faixa de comprimento de onda)* por *características radiais (intensidades por ângulo de polarização)*. Como a intensidade luz refletida pelos cristais de hematita depende da sua orientação em relação ao plano de polarização da luz incidente, os pixels (objetos) pertencentes a um mesmo grão (classe) terão componentes radiais (características) próximas em todos os ângulos de polarização e podem,

¹ Imagens de um mesmo campo obtidas por diferentes modos de aquisição, ou variando múltiplos parâmetros de aquisição são também chamadas de *imagens multimodais*.

em princípio, ser identificados, ou reconhecidos, por estas características como pertencentes àquele grão.

A escolha do algoritmo *mean shift* para classificar os pixels em seus respectivos grãos, produzindo uma imagem segmentada na qual as *pseudo-cores* desempenham o papel de *rótulos de classe* (*índices que identificam o grão ao qual cada pixel pertence*), é motivada pelo fato de que o número de grãos e suas respectivas orientações (com as correspondentes componentes radiais) variam de amostra para amostra. Portanto, a fim de automatizar o processo de análise das amostras de minério de ferro, é necessário utilizar um algoritmo de reconhecimento de padrões que determine, sem a supervisão do usuário, o número de classes (grãos) e as características que identificam os objetos (pixels) a elas pertencentes. Os poros são tratados como uma classe especial de grão, para a qual a refletância é baixa em todos os ângulos de polarização. A segmentação de grãos e poros permite a sua caracterização individual, a qual deverá ser realizada em trabalho subsequente.

Por se tratar de um trabalho de natureza interdisciplinar, que envolve conhecimentos de diferentes áreas, esta dissertação foi redigida de modo a possibilitar a sua leitura tanto por geólogos e engenheiros interessados na solução proposta para a caracterização do minério de ferro como por físicos, matemáticos e cientistas de computação interessados na aplicação de métodos de microscopia, processamento de imagens e reconhecimento de padrões. Por isso, alguns tópicos de conhecimento comum em cada uma destas áreas foram introduzidos no Capítulo 1 a fim de permitir a compreensão e contextualização do trabalho sem a necessidade de recorrer a outras fontes. O leitor que sentir necessidade ou tiver interesse de aprofundar estes tópicos é remetido à bibliografia indicada nesta revisão.

No Capítulo 2, são descritos todas as etapas de aplicação do método proposto, desde a seleção e preparação das amostras até a análise das imagens, passando pela aquisição de imagens de microscopia ótica de luz polarizada. No Capítulo 3 são apresentados e discutidos os resultados obtidos e no Capítulo 4 são apresentadas as conclusões.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 Minério de ferro

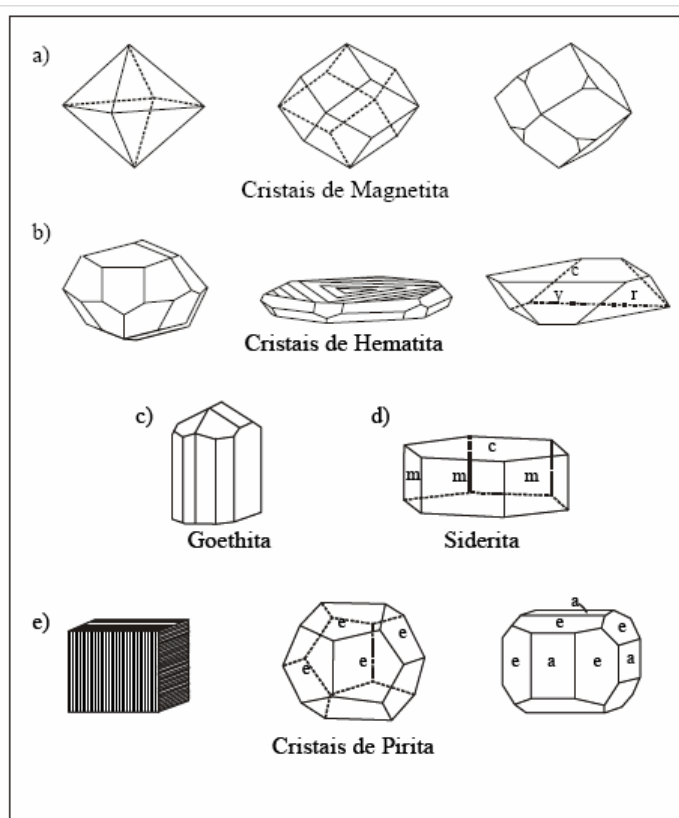
O aço é um componente fundamental no processo de industrialização de qualquer país, visto que está presente na fabricação de máquinas e equipamentos, na construção civil e na indústria de bens de consumo. As ligas metálicas que recebem este nome, são formadas basicamente de ferro e carbono, além de impurezas naturais e outros elementos adicionados para modificar as suas propriedades. O ferro é encontrado em diversos minerais, mas apenas alguns são economicamente viáveis como fontes deste elemento, sendo os óxidos os mais importantes. Os principais minerais de ferro estão listados na **Tabela 1.1** (TAKEHARA, 2004), e as suas estruturas cristalinas são representadas na **Figura 1.1** (DANA & HULBURT, 1984; apud TAKEHARA, 2004). Os principais tipos de texturas de óxidos e hidróxidos de ferro e suas características são apresentadas no **Quadro 1.1** (CVRD, 1998).

Os maiores depósitos de minério de ferro são formações geológicas compostas por itabiritos, ricas em hematita, com altos teores de ferro. O Brasil se destaca no mercado mundial, sendo o maior produtor e segundo maior exportador, seguido da Austrália. Os depósitos brasileiros e australianos são importantes, tanto pelo seu volume, quanto pelos teores médios de seus minérios, que são superiores a 62 % de ferro, contra os 51,6 % verificados pela média mundial (BDMG, 2002, apud TAKEHARA, 2004). As vantagens das abundantes reservas brasileiras devem-se às suas características naturais, cujas jazidas são de ótima qualidade, de fácil extração, produzindo grandes volumes a baixos custos.

A hematita é o mais importante mineral de ferro, devido a sua larga ocorrência em vários tipos de rochas e suas origens diversas. Este mineral apresenta composição química de Fe_2O_3 , correspondendo a 69,94 % em massa de ferro e 30,06 % em massa de oxigênio; é de cor cinza azulado a vermelho, brilhante a fosca, podendo ser terrosa, compacta ou cristalina, com densidade específica de 5,26. Além disso, ocorre como mineral primário associado a depósitos de veios, rochas ígneas, metamórficas e sedimentares e também como produto de alteração da magnetita (DERR et al., 1994; DANA & HULBURT, 1984; www.webmineral.com, apud TAKEHARA, 2004). A hematita pode ser encontrada em diferentes formas, a saber, microcristalina, granular ou lamelar, relacionada a uma condição de cristalização diferenciada, que poderá ter influência no seu processamento.

Tabela 1.1 – Principais minerais de ferro e suas classes (TAKEHARA, 2004).

Classes	Nomes mineralógicos	Composição química do Mineral Puro	Teor Fe (%)	Designação Comum
ÓXIDOS	Magnetita	Fe_3O_4	72,4	Óxido ferroso-férrico
	Hematita	Fe_2O_3	69,9	Óxido férrico
		HFeO ₂ -Goethita	62,8	Hidróxido de ferro
		FeO(OH)-Lepidocrocita	62,85	
CARBONATO	Siderita	FeCO_3	48,2	Carboanto de Ferro
SULFETOS	Pirita	FeS_2	46,5	
	Pirrotita		63,6	
SILICATOS	Fayalita	$\text{Fe}^{2+}_2(\text{SiO}_4)$	54,81	Grupo da Olivina
	Laihunita	$\text{Fe}^{2+}\text{Fe}^{3+}_2(\text{SiO}_4)_2$	47,64	Grupo da Olivina
	Greenalita	$\text{Fe}^{2+}_2\text{Fe}^{3+}_{0,5}\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_{3,3}$	44,14	Grupo da Serpentina
	Grunerita	$\text{Fe}^{2+}_7(\text{Si}_8\text{O}_{22})(\text{OH})_2$	39,03	Grupo dos Anfibólios
	Fé-antofilita	$\text{Fe}^{2+}_7(\text{Si}_8\text{O}_{22})(\text{OH})_2$	39,03	Grupo dos Anfibólios

**Figura 1.1** – Estrutura cristalina dos minerais de ferro. (a) Magnetita; (b) Hematita; (c) Goethita; (d) Siderita e (e) Pirita (DANA & HULBURT, 1984; apud TAKEHARA, 2004)

TIPO	CARACTERÍSTICAS	FORMA/TEXTURA
HEMATITA CRIOCRISTALINA	<ul style="list-style-type: none"> - Cristais muito pequeno < 0.01 mm; - Textura porosa; - Contatos pouco desenvolvidos. 	
MAGNETITA	<ul style="list-style-type: none"> - Cristais euédricos, isolados ou em agregados; - Cristais compactos. 	
MARTITA	<ul style="list-style-type: none"> - Hematita com hábito de magnetita; - Oxidação segundo os planos cristalográficos da magnetita; - Geralmente porosa. 	
HEMATITA RECRISTALIZADA	<ul style="list-style-type: none"> - Formatos irregulares inequidimensionais; - Contatos irregulares geralmente imbricados. 	
HEMATITA GRANULAR	<ul style="list-style-type: none"> - Formatos regulares equidimensionais; - Contatos retilíneos e junções triplíceis; - Cristais compactos. 	
HEMATITA LAMELAR	<ul style="list-style-type: none"> - Cristais inequidimensionais, hábito tabular; - Contatos retilíneos; - Cristais compactos. 	
HIDRÓXIDOS DE FERRO (Goethita-Limonita)	<ul style="list-style-type: none"> - Material amorfo e/ou criocristalino; - Estrutura colóide, hábito botrioidal; - Textura porosa. 	

Quadro 1.1 –Tipos de texturas de óxido e hidróxido de ferro e suas características principais (Modificado de CVRD, 1998, apud TAKEHARA, 2004).

Os diferentes minérios de ferro brasileiros, explorados comercialmente, são considerados hematíticos e apresentam teores de ferro elevados e quantidades pequenas de elementos deletérios (ROSIÈRE, 1997, apud VIEIRA, 2003). Assim, ainda que os outros minerais também sejam importantes, influenciando no processo siderúrgico, e sendo portanto necessário o seu reconhecimento e a caracterização das suas formas de associação, o presente trabalho está restrito a segmentação de grãos hematíticos. Além da abundância relativa deste mineral nos minérios brasileiros, a razão para esta restrição é principalmente metodológica. Os minérios de ferro podem ter uma estrutura muito complexa, com a associação de diferentes minerais e texturas, de tal modo que é muito difícil imaginar que um único modo de

imageamento ou um único algoritmo de análise de imagens seja capaz de identificar todos os minerais e caracterizar a estrutura dos minérios de ferro. Assim, o problema deve ser dividido em partes, com a identificação e caracterização de cada mineral feito por uma técnica específica.

1.2 Importância da caracterização do minério de ferro

A produtividade do processo siderúrgico, medida pelo seu rendimento, consumo de insumos e de energia depende em grande parte da qualidade do minério de ferro. Esta, por sua vez, é determinada pelas suas características geológicas, metalúrgicas e morfológicas.

O aproveitamento de grande parte do minério para uso em alto forno só é viável após beneficiamento. Assim, por exemplo, *partículas de minério muito pequenas*, ou *finos*, não são adequadas para serem usadas diretamente como carga em fornos de redução, pois tendem a se compactar não permitindo a circulação do ar. Os finos são então aglomerados com cal e coque formando partículas maiores chamadas de *sinter*. Já o minério com baixo teor de ferro é moído, parte das impurezas é removida e o pó restante, rico em ferro, é aglomerado em pelotas de tamanho adequado. Em vista disto, o minério bruto é fracionado para ser aproveitado de acordo com as suas características, sendo cada fração identificada conforme o seu destino. Daí surgem as denominações *sinter-feed* e *pellet-feed* usadas para identificar as frações usadas respectivamente nos processos de sinterização e pelotização. Devido ao grande interesse econômico, a caracterização de cada uma destas frações isoladamente, bem como o seu desempenho durante o processamento, adquire importância (VIEIRA et al., 2000).

Na maior parte das usinas siderúrgica brasileiras, o *sínter* é produzido a partir de uma mistura composta por vários minérios. Isso pode gerar a necessidade de uma adequação do processo de tratamento do minério, a qual deve se basear em uma caracterização mais detalhada; associada e correlacionada com as características metalúrgicas do minério.

As características metalúrgicas utilizadas atualmente na escolha dos minérios de ferro, têm se mostrado insuficientes para obtenção de *sínter* com a qualidade adequada para uso em altos-fornos. Isto se conclui a partir da constatação de que, em algumas siderúrgicas, minérios, com características metalúrgicas e processo de sinterização iguais, produzem *sínteres* de qualidades diferentes (CVRD, 1998).

Em vista disto, tem sido proposto nos últimos anos que também podem influenciar na qualidade do sinter produzido as características mineralógicas, macroestruturais e texturais do minério. De fato, os minérios brasileiros apresentam estruturas internas muito variadas, com diferentes constituintes mineralógicos, trama, forma e superfície das partículas, porosidade, tamanho e morfologia dos poros. Sabe-se, por exemplo, que diferentes valores de porosidade e de diâmetro dos poros (micro, meso e macro) têm forte influência nas etapas de aglomeração a frio e quente de finos de minério de ferro (VIEIRA, 2003).

O estudo de caracterização geometalúrgica da fração *sinter feed*, dos principais minérios de ferro brasileiros, revelam comportamentos diferenciados nos processos de microaglomeração e sinterização e nos testes de qualidade dos sínteres gerados, quando utilizados, separadamente, como partículas primárias: nucleantes, intermediárias e aderentes, nas misturas a sinterizar (TAKEHARA, 2004).

Uma grande variação desses minérios ocorre nos tipos e formas dos cristais de hematita, resultante das diferentes condições para sua formação. Em estudos recentes muitos autores têm sugerido que as características texturais têm uma importância relevante para o entendimento do comportamento das partículas de minério de ferro em processos siderúrgicos (VIEIRA et al. 2003).

A textura tem duplo significado na caracterização de partículas minerais, pois é amplamente conhecida tanto como a distribuição espacial dos diferentes minerais, como de diferentes grãos cristalinos de um mesmo mineral em uma partícula. Porém muitos autores reservam a palavra *texture* para designar o primeiro tipo de distribuição e usam a palavra *fabric* descrever a orientação cristalina de populações minerais (PIRARD, 2007). A respeito do primeiro significado, King e Schneider (KING, 1998) demonstraram que a textura mineralógica dos cristais tem uma influência decisiva na distribuição de liberação. Por outro lado, o tamanho, forma, e distribuição espacial dos cristais e poros influenciam na redução do sinter. (GOLDRING AND FRAY, 1989).

Portanto, o prognóstico adequado do comportamento das partículas minerais em processos industriais exige uma caracterização de populações dessas partículas em termos da sua composição química, textura, morfologia e liberação.

1.3 Precursores do método de caracterização proposto

Uma variedade de técnicas tem sido utilizadas em diferentes combinações para classificar amostras de minério de ferro com base nas características das partículas individuais. Estas incluem classificação por tamanho, densidade, análise química, difração de raios X, análise por microsonda, microscopia e análise de imagens (DONSKOI, 2007). A vantagem do uso de microscopia eletrônica para este propósito está na possibilidade de combinar os resultados desta técnica com aqueles obtidos na análise por microsonda. Entretanto, para obter-se a distinção entre hidróxidos e óxidos esta combinação de técnicas torna-se economicamente inviável pelo aumento do tempo exigido. Além disso, a determinação dos poros e microporosidades das partículas pode não ser possível se a resina utilizada na preparação da amostra não tiver penetrado nos poros.

A análise de imagens de microscopia ótica é uma ferramenta adequada, uma vez que permite obter dados sobre a porosidade, associações minerais, liberação mineral, forma das partículas, distribuição por tamanho e textura. Além disto, esta técnica facilita a diferenciação entre os vários minerais que compõe um determinado minério de ferro com base nas diferenças de refletividade apresentadas pelos diferentes óxidos e hidróxidos de ferro.

Recentemente, Pirard (PIRARD, 2004) aplicou a técnica de imageamento multiespectral de minerais em microscopia ótica, usando um conjunto de filtros de interferência de banda estreita (10nm), a fim de produzir a separação das fases minerais em um espaço de cores, tendo sido precedido por Bonifazi (BONIFAZI, 1995) e Marshclinger (MARSCHALLINGER, 1997). Estes autores, no entanto, usaram respectivamente uma câmera digital e um scanner coloridos para adquirir as imagens, ambos sistemas de detecção com bandas espectrais mais largas (RGB).

O desenvolvimento de um software de análise de imagens útil para a caracterização rotineira das partículas demanda uma segmentação automática, ou quase automática, de grãos e poros.

A segmentação dos grãos em imagens microscópicas que não utilizam luz polarizada é um problema difícil de ser resolvido. Por outro lado, quando um grão cristalino é iluminado com luz polarizada este apresenta uma resposta diferente dos seus vizinhos pois, em geral, as suas direções preferenciais são diferentes. Assim, quando o ângulo entre o polarizador e analisador é variado no microscópio petrográfico cada grão exibe um padrão característico de

variação de intensidade da luz transmitida. Depois que uma seqüência de imagens de uma mesma amostra é observada, o observador estabelece os limites entre os grãos.

Lumbreras (LUMBRERAS, 1996) apresentou um método de análise de imagens digitais que tenta emular o procedimento de um especialista humano que examina seções finas de mármore ao microscópio de luz polarizada, considerando as variações de intensidade à medida que o ângulo relativo entre polarizador e a amostra enquanto o analisador é mantido fixo. Depois que uma seqüência de imagens de uma mesma amostra é obtida com luz polarizada, dois parâmetros para cada região são calculados, os quais dependem da direção preferencial de cada grão, a saber, amplitude e fase da variação senoidal da intensidade exibida por cada grão em função do ângulo entre o polarizador e o analisador. Os valores destes parâmetros são usados para classificar os pixels como pertencentes a cada um dos grãos.

Um sistema de aquisição automática de imagens que pode ser usado para este tipo de análise foi desenvolvido por Fueten (FUETEN, 1997), que usou uma platina rotativa controlada por computador em um microscópio petrográfico. O problema com o arranjo de Fueten é que as imagens adquiridas precisam ser digitalmente giradas no sentido inverso da platina a fim de que as coordenadas dos pixels em todas as imagens correspondam aos mesmos pontos sobre a amostra. A rotação de imagens por ângulos que não sejam múltiplos de 90° envolve o uso de algoritmos de interpolação ou outros métodos que recalculam os valores dos pixels, alterando a informação contida na imagem original.

A possibilidade de analisar automaticamente imagens multiradiais para realizar a segmentação dos grãos cristalinos também foi explorada por Pirard em trabalho mais recente (PIRARD, 2007). No arranjo usado por Pirard para a aquisição das imagens, a amostra permanece fixa e o polarizador é girado, evitando a necessidade de girar as imagens adquiridas. A segmentação dos grãos de hematita foi feita pela aplicação do operador gradiente sobre a imagem de intensidade de birefletância

Tanto (LUMBRERAS, 1996) como (PIRARD, 2007) empregaram métodos de análise que usam apenas parte da informação contida nos padrões de variação da intensidade da luz polarizada, deixando espaço para a exploração de outras alternativas, como a proposta no presente trabalho.

1.4 Microscopia com luz polarizada

1.4.1 Microscopia ótica

A observação das estruturas encontradas na natureza utilizando microscopia ótica, como uma extensão natural da observação a olho nu, desempenhou desde o princípio um papel importante nas áreas da biologia, medicina, geologia, física, metalurgia, engenharia e ciência dos materiais. Um microscópio é utilizado sempre que é necessário observar objetos muito pequenos, com aumento maior do que o fornecido pelas lupas.

Atualmente os microscópios são aparelhos complexos mas que, simplificada, podem ser considerados como constituídos de dois sistemas de lentes que funcionam com duas lentes convergentes, conforme é ilustrado na **Figura 1.2**. A lente que fica mais próxima do objeto é denominada objetiva e aquela através da qual a pessoa observa a imagem ampliada é denominada de ocular (MAXIMO, 2000).

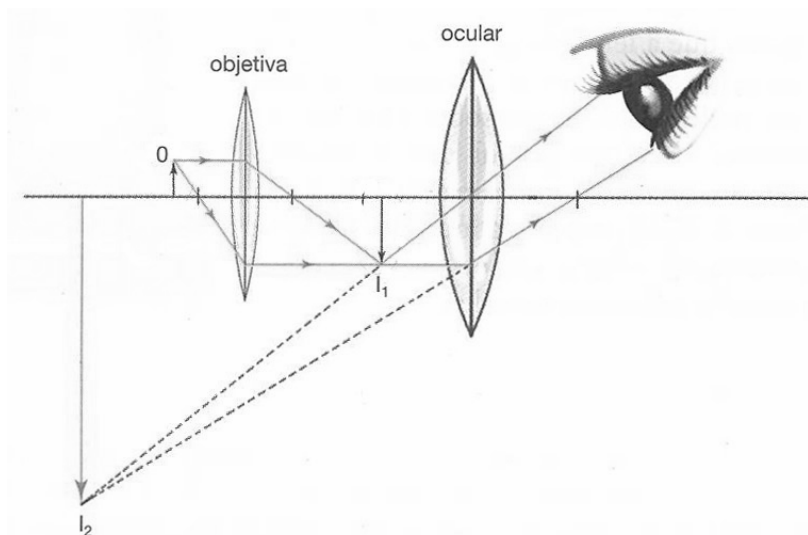


Figura 1.2 - Esquema de formação de uma imagem em um microscópio ótico. (MAXIMO, 2000).

Conforme está ilustrado nesta figura, o objeto O é colocado próximo ao foco da objetiva, que forma uma primeira imagem, I₁, real e ampliada. Esta imagem I₁ forma-se entre a ocular e o seu foco e funciona como um objeto para esta lente. A ocular atua como uma

lupa, ampliando a imagem fornecida pela objetiva, que já está ampliada em relação ao objeto. Portanto, se, por exemplo a objetiva amplia 50 vezes o objeto e a ocular provoca um aumento de 10 vezes, a ampliação total fornecida pelo microscópio será de 500 vezes.

Sobre este esquema básico são acrescentados diversos recursos óticos, mecânicos e eletrônicos que visam facilitar o uso do microscópio, produzir contrastes, melhorar a qualidade e registrar as imagens. As diferentes configurações produzidas por estes acréscimos dão nome aos diferentes tipos de microscopia ótica disponíveis atualmente, entre as quais citamos as microscopias de contraste de fase, de interferência e de polarização, entre outras (DAVIDSON, 2000).

Uma grande divisão que costuma ser feita tem por base a natureza dos objetos examinados e o tipo correspondente de iluminação utilizado. Quando objetos semi-transparentes (usualmente cortes finos dos objetos de interesse) são examinados, são as diferenças no modo como a luz é transmitida através das diversas partes das amostras que produzem os contrastes que permitem identificar as estruturas de interesse. Neste caso, as amostras são colocadas entre a fonte de luz e as objetivas, de modo que a imagem é formada pela luz transmitida através da amostra. O uso deste arranjo recebe o nome de microscopia de luz transmitida.

Se os objetos examinados ao microscópio são opacos, são as diferenças no modo como a luz é refletida pelas diversas partes das amostras que produzem os contrastes desejados. Neste caso, a iluminação é feita sobre a superfície observada e o uso deste arranjo é conhecido como microscopia de luz refletida.

A **Figura 1.3** representa esquematicamente **(a)** um microscópio de luz transmitida e **(b)** um microscópio de luz refletida. Neste último, a iluminação é feita através da objetiva com o auxílio de um espelho semitransparente que, ao mesmo tempo que dirige a luz da fonte de iluminação para a amostra, permite que a luz refletida pela amostra chegue até as oculares. No esquema da **Figura 1.3 (b)** também estão representadas as posições dos filtros polarizador e analisador usados na microscopia de luz polarizada.

A adaptação de câmeras fotográficas para o registro das imagens pode ser feita diretamente na posição das oculares ou dividindo o feixe incidente sobre as oculares com um espelho semi-transparente e dirigindo-o para um tubo destinado a receber as câmeras. Este tipo de dispositivo é conhecido como *tubo trinocular*.

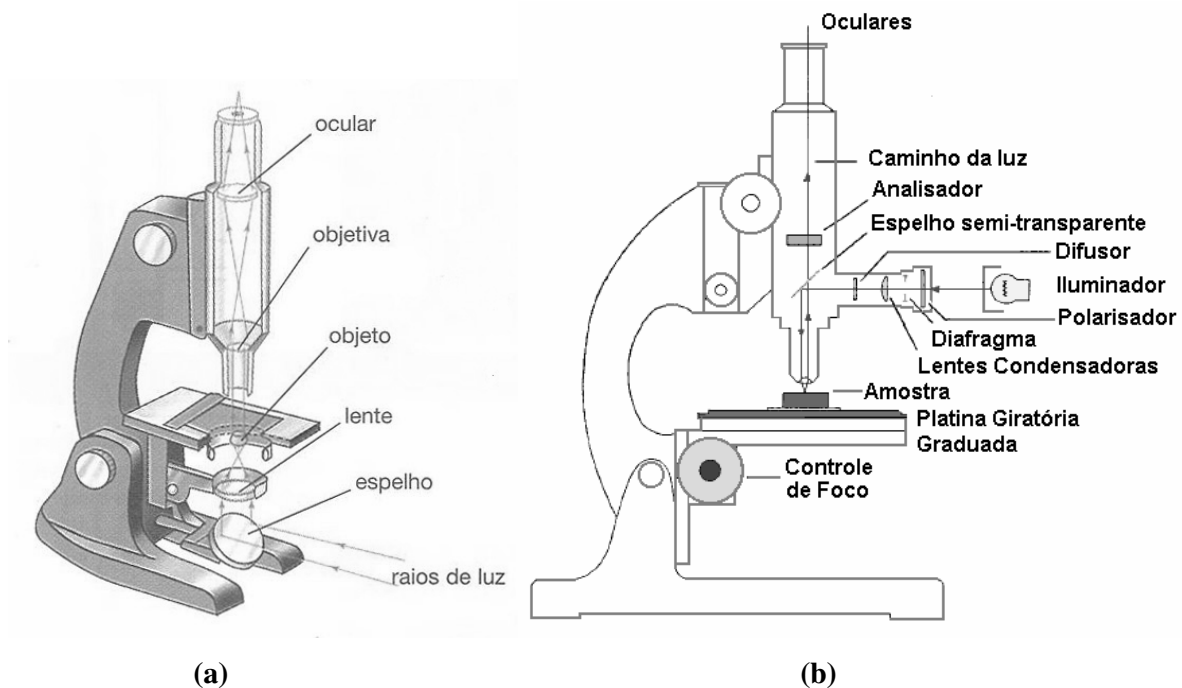


Figura 1.3 – (a) Microscópio de luz transmitida (MAXIMO, 2000) e (b) microscópio de luz refletida (GOLDENSTEIN, 2007).

A microscopia de luz refletida é frequentemente referenciada como a microscopia de luz incidente ou a microscopia metalúrgica. Esta técnica é escolhida para realizar o imageamento de materiais quando os mesmos permanecem opacos em espessuras de até cerca de 30 microns, como é o caso da maioria dos metais, minerais, cerâmicas, muitos polímeros, semicondutores, carvão, plástico, papel, madeira, couro, vidro e muitos outros. Este arranjo também é usado para analisar a capacidade de uma substância de emitir luz quando exposta a outras radiações diferentes da luz visível (radiação ultravioleta, raios X ou raios catódicos) sendo este fenômeno conhecido como fluorescência.

Muitos modelos de microscópios permitem que o usuário alterne de luz transmitida para luz refletida ou até mesmo que as utilize simultaneamente. Na **Figura 1.4** é mostrado o esquema de um microscópio que permite o uso de ambos os tipos de iluminação. A possibilidade de uso de um tubo trinocular, que divide o feixe de luz proveniente da amostra de modo a possibilitar o acoplamento de uma câmera fotográfica ou de vídeo, é indicada neste Figura.

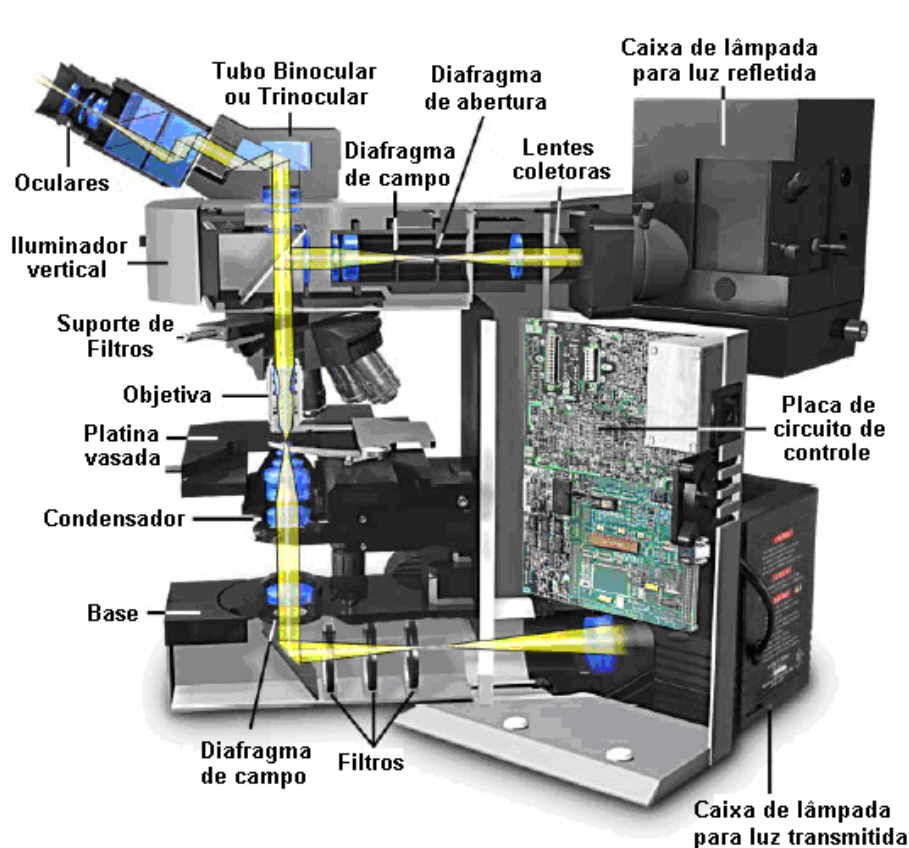


Figura 1.4 – Microscópio de luz transmitida e luz refletida (DAVIDSON, 2002)

A luz usada em ambos os arranjos é escolhida de modo a salientar os contrastes entre os objetos ou estruturas que se deseja visualizar. A luz polarizada é usada em microscópios petrográficos para identificar e analisar minerais. De fato, o comportamento dos diversos minerais quando observados sob luz natural é diferente daquele observado sob luz polarizada. É de particular importância para o presente trabalho o fato de que este tipo de iluminação produz contraste entre grãos cristalinos com diferentes orientações no espaço. Isto possibilita a visualização de bandas de deformação e orientações preferenciais (texturas), geralmente impossíveis de serem vistas com iluminação convencional. A **Figura 1.5** é uma representação de parte de um microscópio petrográfico e de duas imagens de uma mesma região de uma amostra policristalina quando observada através de um filtro analisador, mantido fixo, variando a orientação do polarizador. O contraste entre os grãos cristalinos varia conforme ângulo de polarização da luz incidente é mudado

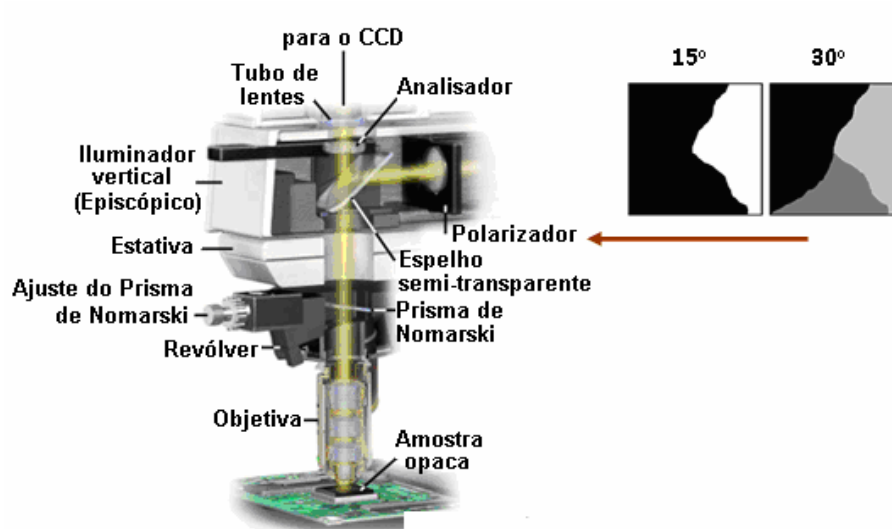


Figura 1.5 – Variação do contraste entre os grãos cristalinos conforme o ângulo de polarização da luz incidente é mudado.

Devido ao papel central desempenhado por este processo de formação de contraste no método de segmentação de grãos proposto neste trabalho, apresenta-se a seguir uma breve revisão sobre luz polarizada.

1.4.2 A luz polarizada

Uma onda transversal é definida como aquela em que a direção da perturbação (nos meios materiais ou nos campos) é perpendicular à direção de propagação. Assim, por exemplo, quando uma corda é sacudida, o movimento vibratório que se propaga na corda é perpendicular, ou transversal, ao comprimento da corda, em cuja direção esta perturbação se propaga. Analogamente, numa onda luminosa, os campos elétrico e magnético oscilam em direções perpendiculares à direção de propagação.

Se a vibração da onda transversal permanecer paralela a uma direção fixa no espaço, a onda é dita linearmente polarizada. A **Figura 1.6** mostra uma onda linearmente polarizada emergindo de um polarizador.

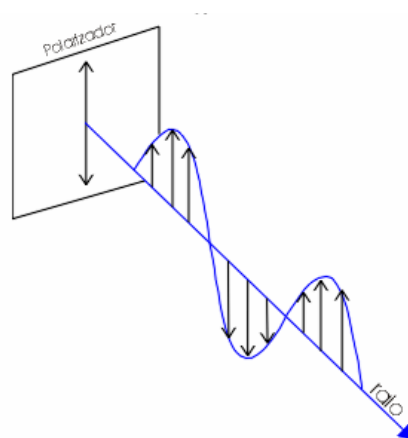


Figura 1.6 – Onda linearmente polarizada emergindo de um polarizador (TIPLER, 1995).

Uma fonte luminosa comum, tal como uma lâmpada incandescente ou uma lâmpada fluorescente, emite luz não-polarizada, isto é, os campos elétrico e magnético oscilam em todas as direções perpendiculares à direção de propagação. Para se obter luz linearmente polarizada é preciso selecionar a parte da radiação que oscila na direção desejada. O dispositivo que realiza esta seleção é conhecido como polarizador.

São quatro os fenômenos que produzem luz polarizada a partir de luz não polarizada, a saber: absorção, espalhamento, reflexão e birrefringência, cuja descrição é feita em livros texto de física básica (TIPLER, 1995).

1.4.2.1 Polarização por absorção:

De particular importância em microscopia ótica e em sistemas fotográficos, são os filtros polarizadores que funcionam por absorção. Estes podem ser feitos usando alguns minerais convenientemente cortados ou uma película de polaróide, composto por grandes moléculas alinhadas e que só permitem a passagem dos raios de luz cujos campos elétricos oscilem paralelamente às cadeias de macromoléculas (HEWITT, 2002).

Na **Figura 1.7**, a linha amarela representa a direção de propagação do feixe luminoso, que incide da esquerda para a direita, as setas em laranja representam a direção de oscilação do campo elétrico, \mathbf{E} , e os retângulos hachurados representam polarizadores, cuja direção de polarização, ou eixo de transmissão, é indicada pelas hachuras. Nesta Figura está ilustrado o que ocorre quando dois polarizadores são colocados em série, situação na qual o segundo deles é chamado de analisador (HEWITT, 2002). Em **(a)**, os eixos de transmissão dos dois

polarizadores são paralelos. Neste caso, como a luz incidente sobre o analisador tem a mesma direção do seu eixo de transmissão, ela será totalmente transmitida. Em **(b)** os eixos de transmissão têm orientação perpendicular entre si. Assim, a luz polarizada pelo primeiro polarizador é totalmente absorvida pelo analisador. Diz-se então que a luz polarizada foi extinta.

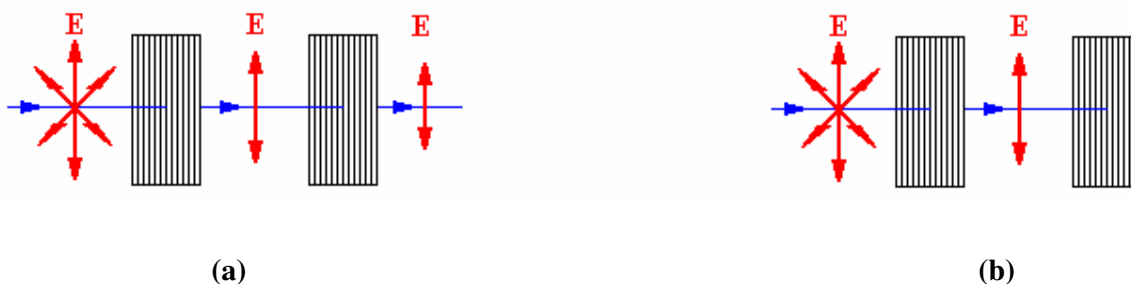


Figura 1.7 –Efeito causado por dois polaróides cruzados. Em **(a)** a componente vertical do campo elétrico passa pelo primeiro polarizador e pelo analisador. Em **(b)** a componente vertical não passa pelo analisador (DUARTE, 2007).

Em uma situação intermediária entre as duas representadas na **Figura 1.8**, quando o eixo de transmissão do analisador forma ângulos entre 0° e 90° com o eixo de transmissão do polarizador, apenas a componente do campo elétrico ao longo do eixo do analisador é transmitida. Uma vez que a intensidade da luz é proporcional a $|\mathbf{E}|^2$, a intensidade da luz transmitida pelo analisador será dada pela lei de Malus,

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad , \quad (1.1)$$

onde I_0 é a intensidade da luz proveniente do polarizador, I a intensidade da luz transmitida pelo analisador e θ o ângulo formado entre os eixos do polarizador e do analisador.

Portanto, se uma luz não-polarizada é vista através de um filtro polaróide, pode-se girar o filtro em qualquer direção que a luz permanecerá inalterada. Mas se a luz for polarizada, então quando o filtro é girado pode-se ir gradualmente absorvendo cada vez mais a luz, até que ela seja totalmente extinta. Este efeito é mostrado na **Figura 1.8**, onde uma fonte de luz polarizada é observada através de um filtro polarizador. As duas situações extremas, de máxima claridade e máxima escuridão (máxima absorção de luz), mostram as situações em que a direção de transmissão do filtro está, respectivamente, paralela e ortogonal à direção de polarização da luz vinda da fonte. Nos estágios intermediários, a quantidade de luz diminui gradativamente à medida que o polarizador gira desde 0° até 90° .

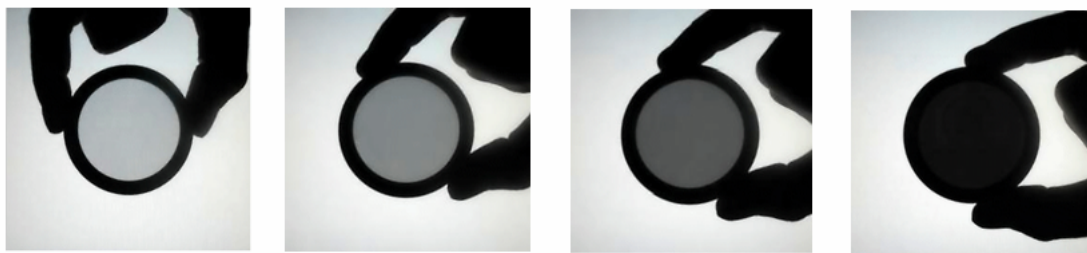


Figura 1.8 – Fonte de luz polarizada vista através de um polarizador em diferentes posições.

1.4.2.2 Polarização por reflexão e refração:

Outro fenômeno de importância no presente trabalho é a polarização da luz por reflexão. A luz incidente em uma superfície plana e polida é parcialmente refletida e parcialmente transmitida. A fração refletida será polarizada perpendicularmente ao plano de incidência, enquanto que a fração refratada será polarizada paralelamente ao plano de incidência. O grau de polarização será função de vários fatores, como qualidade e índice de refração da superfície refletora e, principalmente, do ângulo de incidência do feixe de luz, que será máximo quando os raios incidente e refratado forem complementares, ou seja, segundo a notação mostrada na **Figura 1.9** quando $\sin \theta_p = \cos \theta_2$.

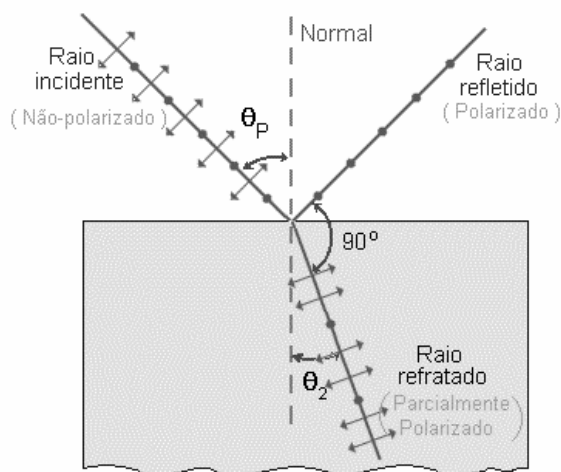


Figura 1.9 – Ilustração do fenômeno de polarização por reflexão e refração mostrando as diferentes orientações da direção de polarização em cada caso.

1.4.2.4 Polarização por birrefringência

Também conhecido como dupla refração é fenômeno complexo que ocorre na calcita e em outros cristais que não pertencem ao sistema cúbico, e também em plásticos sob tensão, como o celofane. Os cristais são classificados como sendo isotrópicos ou anisotrópicos dependendo do seu comportamento ótico. Diz-se que um cristal é isotrópico quando a velocidade da luz no seu interior é a mesma em qualquer que seja a direção de propagação e anisotrópico, quando a velocidade da luz depende da direção de propagação através do cristal. Em virtude da estrutura atômica os cristais birrefringentes são anisotrópicos. Quando um raio de luz incide sobre um cristal deste tipo, ele é separado em dois raios, o raio ordinário e o raio extraordinário. Estes raios estão polarizados em direções mutuamente perpendiculares, e têm velocidades de propagações diferentes. Dependendo da orientação relativa entre o material birrefringente e a luz incidente, os raios podem também ter diferentes direções de propagação.

Em um material birrefringente, na direção do eixo ótico, os dois raios se propagam com a mesma velocidade e nada de incomum acontece. Porém, quando a luz incide sob um ângulo diferente de zero em relação ao eixo ótico, como representa a **Figura 1.10**, os raios se propagam em direções diferentes e emergem separados no espaço.

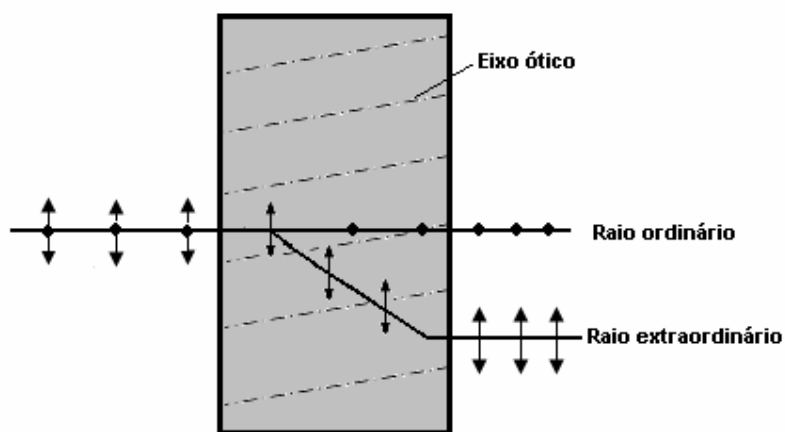


Figura 1.10 – Ilustração do fenômeno de polarização por birrefringência (TIPLER, 1995).

Embora este fenômeno remeta imediatamente à microscopia de luz transmitida, ele também ocorre na microscopia de luz refletida, quando os raios refratados pelo cristal sofrem reflexão interna.

1.5 Processamento de imagens

O interesse em métodos de processamento de imagens digitais decorre de duas áreas principais de aplicação: melhoria da informação visual para a interpretação humana e o processamento de dados contidos na imagem para percepção automática através de máquinas ou avaliações quantitativas, as quais envolvem contagens e medidas de objetos de interesse (GONZALEZ, 2002).

Nas últimas décadas, a área de processamento de imagens vem crescendo vigorosamente. Técnicas de processamento de imagens digitais são atualmente utilizadas para resolver uma variedade de problemas. Embora frequentemente não relacionados, esses problemas têm em comum a necessidade de métodos capazes de melhorar a informação visual para a análise e interpretação humana. Em medicina, por exemplo procedimentos computacionais melhoram o contraste ou codificam os níveis de intensidade em cores, de modo a facilitar a interpretação das imagens de raios X e outras imagens biomédicas. Geógrafos usam técnicas idênticas ou similares para estudar padrões de poluição em imagens aéreas ou de satélites. Em arqueologia, métodos de processamento de imagens têm restaurado com sucesso figuras fotográficas borradas, que eram os únicos registros disponíveis de artefatos raros perdidos ou danificados. Do mesmo modo, aplicações de processamento de imagens podem ser encontrados em astronomia, biologia, medicina nuclear e aplicações industriais.

No que se refere à solução de problemas relacionados à percepção por máquina, ou seja, problemas relacionados com reconhecimento de padrões, o interesse concentra-se em procedimentos para extrair da imagem informação adequada para o processamento computacional. Frequentemente esta informação apresenta pouca semelhança com as características utilizadas pelo homem na interpretação do conteúdo de uma imagem.

Embora o sistema visual humano seja excelente para reconhecer padrões em seus aspectos qualitativos, identificando e interpretando até mesmo pequenas divergências da normalidade os humanos não são tão bons em interpretações quantitativas. Mesmo uma tarefa simples de contar o número de objetos presentes em uma imagem digital torna-se rapidamente tediosa e difícil na medida que o número de objetos se torna muito grande. Estimar a forma, tamanho e textura quantitativamente é outra tarefa difícil e usualmente impregnada de uma certa subjetividade. Por isso, desde o início da era digital muitos esforços têm sido feitos para a aplicação dos computadores em tarefas de análise quantitativa de imagens, uma vez que,

diferentemente dos humanos, as máquinas são excelentes para a contagem e medição de objetos (RODENACKER, 2002).

1.5.1 Imagens Digitais

Uma *imagem* é um *representação da forma de um objeto, que é obtida pelo mapeamento de uma de suas propriedades físicas*. As imagens dos objetos ao nosso redor, adquiridas por câmeras fotográficas comuns, são mapas de refletância espectral. Mas é possível formar imagens extraindo outras propriedades físicas dos objetos como, por exemplo, a transmitância dos raios X, usada nos exames radiológicos comuns, ou a absorbância na faixa de radiofrequência, como é o caso das imagens de ressonância magnética. Em princípio, tanto as coordenadas espaciais como os valores das intensidades dos sinais observados podem variar continuamente, assumindo quaisquer valores reais. Em uma *imagem digital*, ao contrário, *tanto as coordenadas espaciais como as intensidades dos sinais são transformadas em variáveis discretas*, isto é, valores inteiros são atribuídos a estas grandezas conforme estejam dentro de faixas pré-definidas de valores reais. Como conseqüência, uma imagem digital é *uma grade de pontos aos quais estão associados valores discretos dos sinais mapeados*. Cada um dos elementos desta grade é conhecido como *pixel* (abreviatura para *picture element*, ou elemento de imagem). O espaço da grade é conhecido como *domínio espacial*, enquanto a informação valores de intensidade, para o presente estudo é representada pelo *domínio de intensidades*.

Se o sinal mapeado é uma grandeza escalar, basta apenas uma variável inteira para especificar o seu valor. Por outro lado, se o sinal mapeado é multivariado, como a composição espectral da luz, é necessário especificar o valor de cada uma de suas componentes, o que se faz através de um vetor. Uma imagem *cujo sinal mapeado é escalar* é usualmente chamada *monocromática*. Imagens formadas com os *três componentes espectrais responsáveis pela sensação de cor dos humanos*, nas faixas do vermelho (*Red*), verde (*Green*) e azul (*Blue*) são chamadas de imagens coloridas ou *RGB*. Dependendo da aplicação, a composição das cores pode ser representada em outros sistemas, como o *CYM* (*Cyan, Yellow, Magenta*), *HSB* (*Hue, Saturation, Brightnes*) ou o *LUV* (*Luminance, UV = chrominance components*). Se *outras componentes espectrais* são incluídas ou se a imagem é formada por componentes espectrais *fora da faixa visível*, a imagem é chamada de *multiespectral*.

As estruturas de dados e os programas usados para processar imagens multiespectrais podem ser usados para tratar *imagens multimodais*, isto é, *imagens compostas por diferentes tipos de sinais ou cujas componentes foram adquiridas sob diferentes condições*. Assim, por exemplo, na análise de um minério, é possível combinar a informação fornecida por uma imagem de elétrons retroespalhados, com a dos mapas de raios X característicos de diferentes elementos para examinar a distribuição de minerais. Esta *pilha de imagens monocromáticas* adquiridas de um mesmo campo pelo mapeamento de sinais diversos tem a mesma estrutura de dados que uma imagem multiespectral e pode em princípio ser abordada pelas mesmas ferramentas de análise.

1.5.2 Segmentação

Uma das tarefas mais difíceis no processamento de imagens é a *divisão de uma imagem em suas partes ou objetos constituintes*, conhecida como *segmentação*. Do ponto de vista da estrutura de dados de uma imagem digital, a segmentação pode ser entendida como a *classificação dos pixels como pertencentes aos diferentes objetos representados na imagem*. Assim, os *objetos imageados* passam a ser considerados como *classes* de pixels. Ao final da segmentação, todos os pixels da imagem são rotulados como pertencentes a uma destas classes. O valor atribuído ao rótulo de cada pixel pode ser usado para formar uma imagem temática que permite uma visualização do resultado da segmentação. A *conversão do valor do rótulo para uma escala de cores* é feita através de uma *LUT (Look Up Table)* e a imagem resultante é dita de *pseudo-cores*.

A classificação de pixels tem sido usualmente realizada com a assistência ativa do usuário, que ajusta parâmetros, tais como limiares de intensidade em uma escala de níveis de cinza, ou seleciona regiões representativas dos objetos de interesse. Estes métodos podem ser automatizados com eficiência quando as condições de aquisição das imagens podem ser fixadas e os objetos imageados apresentarem as mesmas características em todas as imagens. Porém isto é muito difícil de se conseguir na identificação de minerais, onde propriedades óticas como birefletância e pleocroísmo não permitem estabelecer uma correspondência biunívoca entre cor ou brilho e a mineralogia ou a orientação dos grãos. A identificação automática de objetos com aparência variável demanda métodos adaptáveis às variações esperadas, cuja escolha exige algum conhecimento a respeito dos objetos imageados e das condições de imageamento.

1.5.3 Reconhecimento de padrões

Reconhecer é “tomar conhecimento de novo ou em outra situação”, “distinguir os traços característicos de; caracterizar, identificar”, “distinguir (alguém ou algo) por certos caracteres” (HOUAIS, 2002). O reconhecimento pode se dar por identidade ou por semelhança. No reconhecimento por identidade um objeto em particular já conhecido é identificado (ex. “Esta é a minha turmalina”). Quando um objeto é identificado como membro de uma classe de objetos (ex. “Isto é uma turmalina”) o reconhecimento é feito por semelhança de traços característicos. Neste caso, o reconhecimento pode ser visto como um processo de classificação (ex. “Pelas suas características, isto pertence ao conjunto de objetos conhecidos como turmalina”).

A descrição, classificação e agrupamento automático de objetos são problemas importantes nas mais variadas áreas da engenharia, biologia, psicologia, medicina, geologia e sensoriamento remoto.

As técnicas de reconhecimento de padrões são usadas para classificar objetos através de um conjunto de propriedades ou características comuns a cada classe de objetos, as quais constituem um padrão. O reconhecimento de padrões por máquinas é parte importante da inteligência artificial. Um humano pode recorrer a sistemas de reconhecimento de padrões de forma interativa, para restringir a sua atenção a um conjunto de casos selecionados pelo sistema, ou para automatizar completamente o processo de tomada de decisão, sem necessidade de intervenção.

O rápido crescimento e disponibilidade da força computacional, enquanto torna mais rápido o processamento de grandes conjuntos de dados também tem facilitado o uso de métodos elaborados e variados para análise e classificação de dados. Ao mesmo tempo, a necessidade de sistemas de reconhecimento automático de padrões tem aumentado em decorrência do aumento da quantidade de dados a serem processados e da demanda por melhoria do desempenho tanto em velocidade, como exatidão e custo.

Problemas de percepção por máquina que têm aplicado técnicas de processamento de imagens rotineiramente, incluem o reconhecimento de caracteres, a inspeção e montagem de produtos, o reconhecimento militar, a identificação de impressões digitais, a recuperação de imagens por conteúdo, entre outros (JAIN et. al., 2000).

Alguns problemas típicos de reconhecimento de padrões estão listados na **Tabela 1.2**.

Tabela 1.2 – Exemplos de aplicações de reconhecimento de padrões (JAIN, 1999).

Problema	Entradas	Saidas
Reconhecimento de voz	sinais de voz	Palavras, identidade do locutor
Testes não invasivos / destrutivos	Ultra-sons, emissão de ondas acústicas, imagem	Presença / ausência de anomalia
Detecção / diagnóstico de doenças	ECG, EEG, ultra-sons	Tipos de condições cardíacas, classes de estados cerebrais, patologias
Identificação de recursos naturais	Imagens multi-espectrais	Formas de terrenos, vegetação
Reconhecimento aéreo	Infravermelhos, imagens de radar	Tanques, campos de cultivo, estradas, tráfego
Reconhecimento de caracteres (leitores de página, códigos de barras, matrículas)	Imagens de varrimento óptico	Caracteres alfanuméricos
Identificação e contagem de células	Slides de amostras de sangue, micro-seccionamento de tecidos	Tipos de células
Detecção de falhas (placas de PC, circuitos integrados, texturas)	Imagens	Aceitação / rejeição
Robótica	Imagens de interiores ou exteriores em 3D, luz estruturada, laser, imagem estéreo	Identificação de objectos, tarefas industriais

Entre os trabalhos precursores do método apresentado neste trabalho, citados na Seção 1.3, o de Bonifazi (BONIFAZI, 1995) aplica técnicas de reconhecimento de padrões, em particular de análise de clusters para a identificação de minerais a partir das suas componentes de cor.

1.5.1.1 Conceitos básicos

Um *padrão* pode ser descrito por *um vetor cujas componentes são características numéricas dos objetos de interesse*, as quais são obtidas por meio de um conjunto de observações (JAIN, 1999). O problema de *reconhecimento* é colocado como *uma tarefa de classificação* ou categorização dos padrões. As *classes* são definidas como *um conjunto de padrões semelhantes* entre si. Assim, é preciso estabelecer um critério ou medida de

semelhança entre os padrões ou entre padrões e classes. Os critérios propostos baseiam-se na proximidade dos valores das componentes dos vetores de características. Como estas componentes definem pontos no espaço dos vetores de características, esta *proximidade* é traduzida em termos de uma certa *medida de “distância”*.

As *classes* podem ser identificadas como *regiões do espaço de características onde é mais provável encontrar pontos representativos dos objetos*. Isto significa que quando são extraídas as características de um conjunto de objetos pertencentes à mesma classe, os pontos representativos destes objetos no espaço de características agrupam-se mantendo entre si distâncias menores do que aquelas que se medem em relação a objetos pertencentes a outras classes, isto é, formando *agrupamentos, aglomerados ou clusters*.

Os sistemas de classificação são divididos conforme a participação ou não do usuário em supervisionados ou não supervisionados (JAIN et. al., 2000). Os *sistemas de classificação supervisionados*, são aqueles em que o *usuário define as classes* rotulando objetos que lhe são apresentados. Neste caso, as classes são *conhecidas* ou previamente determinadas pelo usuário do sistema de classificação. Um *conjunto de objetos previamente rotulados pelo usuário, usado para estabelecer os critérios de classificação* com base em suas características, é conhecido como *conjunto de treinamento*. Os *sistemas de classificação não supervisionados*, são aqueles em que *a semelhança entre os padrões é estabelecida pelo sistema que identifica quantas e quais são as classes*. Este tipo de sistema é usado quando as classes são *desconhecidas*.

O projeto de sistemas de reconhecimento de padrões envolve essencialmente três etapas: aquisição de dados e pré-processamento, representação dos dados e tomada de decisões. Assim, o desafio encontra-se na escolha de técnicas para executar essas três etapas.

Em geral, acredita-se que um problema de reconhecimento de padrões bem definido e restrito (com pequenas variações intra-classe e grandes variações inter-classes) permitirá uma representação compacta dos padrões (com agrupamentos de pontos no espaço de características bem delineados) e uma estratégia de decisão simples. Mas nem sempre os padrões a serem reconhecidos possuem essas características. Nesse fato reside a importância de algoritmos de extração e seleção de características. O objetivo é escolher características tais que no espaço multidimensional gerado os vetores de padrões pertencentes a categorias diferentes fiquem dispostos de maneira que o processo de classificação seja simplificado, isto é, que os vetores ocupem regiões compactas e disjuntas deste espaço. A efetividade do espaço de características é determinada pelo quanto os padrões de classes diferentes podem ser

separados. O *mecanismo de tomada de decisão* sobre a classe a que pertence um padrão em função de suas características é conhecido como *classificador*.

Segundo Jain (JAIN et. al.,2000), as quatro abordagens mais bem estabelecidas de reconhecimento de padrões são: *coincidência com modelo (template matching)*, *abordagem estatística*, *abordagem sintática* e *redes neurais*. No **Quadro 1.3** estão resumidas estas abordagens.

Abordagem	Representação	Função de Reconhecimento	Critério Típico
Coincidência com modelo	Amostras, pixels, curvas	Correlação, Distância	Erro de classificação
Estatística	Características	Função discriminante	Erro de classificação
Sintática ou estrutural	Primitivas	Regras, gramática	Erro de aceitação
Redes neuronais	Amostras, pixels, curvas	Função de rede	Erro quadrático médio

Quadro 1.3 – Modelos de reconhecimento de padrões (JAIN, 2000).

A abordagem estatística tem sido utilizada com sucesso na construção de alguns sistemas de reconhecimento de padrões para segmentação. No reconhecimento estatístico de padrões, assume-se que cada padrão é uma observação obtida aleatoriamente com uma certa probabilidade de pertencer a uma determinada classe. O objetivo é estabelecer fronteiras de decisão no espaço de características que separem os padrões de classes diferentes.

Na **Figura 1.11** está representada uma classificação dos tipos de abordagens em reconhecimento estatístico de padrões conforme Jain (JAIN, 2000). Quando as classes são previamente conhecidas o problema de classificação pode ser resolvido pela aplicação da teoria de decisão de Bayes. Quando as classes não são previamente conhecidas, a fronteira de decisão pode ser especificada pelo usuário (*aprendizagem supervisionada*) ou estabelecida pelo sistema (*aprendizagem não-supervisionada*).

As técnicas de reconhecimento estatístico de padrões assistidas pelo usuário também podem ser agrupadas pelo modo como são estabelecidos os limites de decisão, se diretamente (*abordagens geométricas*) ou indiretamente (*abordagens baseadas em densidades de probabilidade*), conforme mostram as linhas tracejadas.

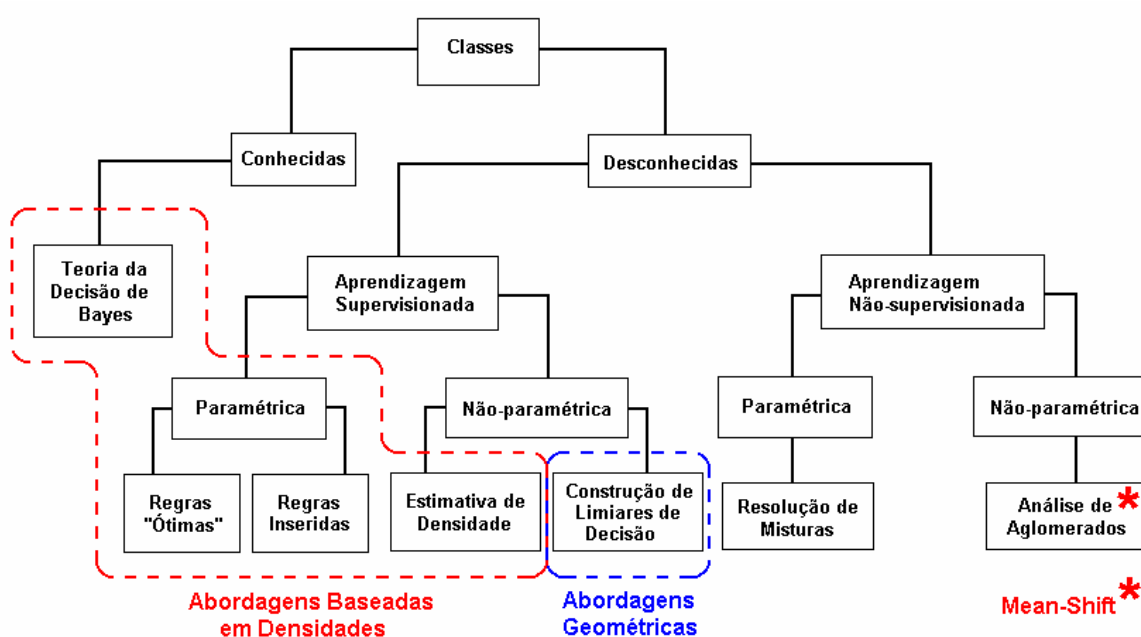


Figura 1.11 – Tipos de abordagens em reconhecimento estatístico de padrões (JAIN, 2000).

No caso em que as classes não são conhecidas previamente, e devem ser aprendidas pelo sistema de forma não supervisionada, há duas possibilidades: ou a forma da densidade de probabilidade das classes é conhecida (ex., uma gaussiana multivariada), devendo ser determinados alguns dos seus parâmetros (ex., matrizes de covariância), ou a forma desta função não é conhecida. As abordagens para tratar do primeiro caso são ditas *paramétricas* e aquelas para tratar do segundo são *não paramétricas*.

Uma hipótese usada muito frequentemente é a de que os aglomerados de pontos individuais obedecem a distribuições normais, isto é, o espaço de características pode ser modelado como um mistura de gaussianas. A **Figura 1.12** mostra uma distribuição normal (gaussiana) de duas variáveis **(a)** e uma mistura de gaussianas **(b)**. Em ambos os gráficos, as coordenadas são características e a ordenada é a densidade de pontos no espaço bidimensional. Uma *mistura de gaussianas* é uma *combinação linear de gaussianas*. Os coeficientes lineares (parâmetros da mistura) são estimados pela minimização de um critério de erro, que compara a distribuição dos pontos representativos dos padrões que compõem a amostra examinada com a distribuição teórica. A *resolução de misturas* consiste em

determinar os parâmetros que caracterizam as gaussianas individuais e os parâmetros de mistura.

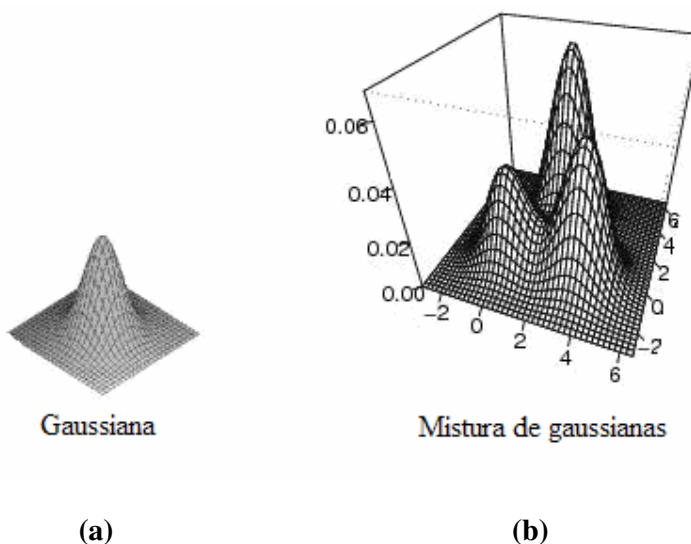


Figura 1.12 – Distribuições (a) gaussiana e (b) mistura de gaussianas. As coordenadas são características e a ordenada é a densidade de pontos no espaço bidimensional

Apesar do sucesso deste método em alguns problemas, não há evidências teóricas de que um *cluster* normal corresponda necessariamente a uma característica significativa da imagem, pois um falso *cluster* pode aparecer quando algumas características estão mapeadas em regiões de sobreposição de características.

No problema atacado neste trabalho, as classes são desconhecidas, uma vez que as componentes do padrão, isto é, as variações de intensidade de cada grão com o ângulo de polarização, variam de amostra para amostra, cada uma apresentando número de grãos e orientações diferentes. Além disso, para que a segmentação dos grãos seja automatizada, é necessário dispensar a intervenção do usuário.

1.5.3.2 Identificação não paramétrica de classes

O sistema que implementa uma técnica deste tipo reconhece automaticamente a ocorrência de classes, isto é de conjuntos de padrões com características semelhantes entre si e diferentes das de outros padrões, sem que seja necessário conhecer previamente o número de classes ou fazer hipóteses sobre as funções densidade que descrevem estas classes.

Conforme a seção anterior, a semelhança entre padrões que constituem uma classe é estabelecida pela proximidade dos valores de suas características. Assim, em um espaço onde as características dos padrões são as coordenadas, as classes podem ser identificadas como aglomerados de pontos representativos destes padrões. Portanto, uma das maneiras de identificar classes é varrer o espaço de características em busca de regiões de maior densidade de pontos. Os métodos que adotam esta abordagem são conhecidos como *métodos de agrupamento* ou *análise de clusters* (JAIN et al., 1999).

A análise de *clusters*, portanto, envolve a organização de um conjunto de padrões em *clusters*, ou aglomerados. À medida que os clusters são identificados, os padrões que os constituem já estão classificados. A sua implementação inicia-se com a representação dos padrões pelas características selecionadas, a definição de uma medida de similaridade apropriada ao domínio da aplicação, e o agrupamento propriamente dito, conforme ilustra a **Figura 1.13**. Conforme os resultados apresentados, podem ter que ser definidas novas medidas de similiaridade ou selecionadas novas características.

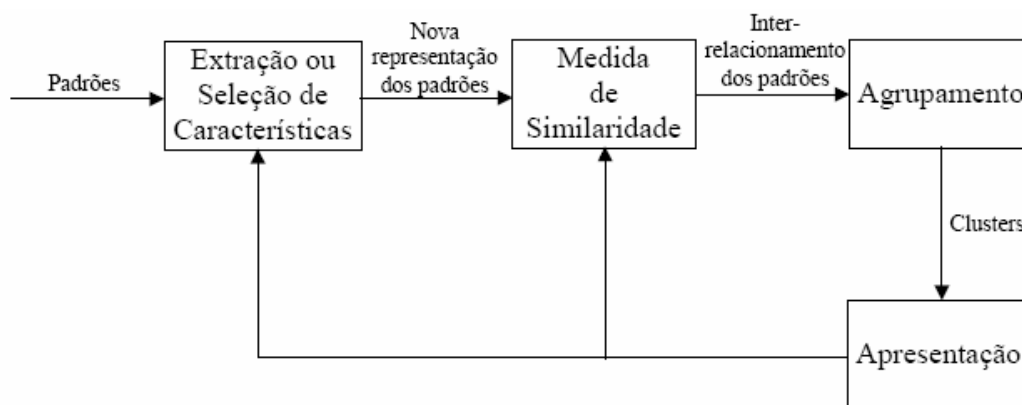


Figura 1.13 – Etapas de um processo de identificação automática de classes por agrupamento (análise de *clusters*).

Conforme mencionado anteriormente, a medida de similaridade é usualmente traduzida como uma distância entre pares de padrões, que pode ser uma simples distância, euclidiana ou outras propostas na literatura (JAIN et al., 1999). Considerando esta distância, a análise de *clusters* pode ser realizada por agrupamento hierárquico, associação ao vizinho mais próximo, entre outros.

Uma alternativa às medidas simples de distância é considerar a variação local da densidade de pontos no espaço de características, isto é, o gradiente da densidade. De acordo com este tipo de critério, um padrão é agrupado àqueles da sua vizinhança que se encontram mais próximos entre si. Na próxima Seção, apresentamos uma abordagem deste tipo que foi adotada no presente trabalho.

1.5.3.3 *Mean shift*

Entre os métodos de classificação não supervisionados encontrados na literatura, o método *mean-shift* desenvolvido por Fukunaga (FUKUNAGA, 1975) e recentemente reintroduzido por Cheng (CHENG, 1995) tem um forte potencial de aplicação em microscopia quantitativa, e em particular à solução do problema atacado neste trabalho. Trata-se de um método não supervisionado e não paramétrico para encontrar classes em um conjunto de dados multivariados, o qual foi aplicado pela primeira vez à segmentação de imagens coloridas por Comaniciu e Meer (COMANICIU, 1997).

Conforme a Seção 1.5.2, a segmentação pode ser realizada tratando os pixels como objetos a serem classificados, as suas componentes de cor como as características usadas no processo de classificação, e os objetos a serem segmentados como classes de pixels. A segmentação não supervisionada é vista, desta forma, como um processo de identificação automática destas classes de pixels, que formam aglomerados ou *clusters* no espaço de cores.

Neste trabalho, as componentes dos pixels são as intensidades da luz refletida em função do ângulo de polarização da luz incidente e os *clusters* são identificados com os grãos cristalinos ou poros da amostra.

Os *clusters* são regiões do espaço de características onde a densidade f de pontos \mathbf{x} representativos dos pixels é mais alta. Se a função densidade $f(\mathbf{x})$ fosse conhecida, os clusters poderiam ser identificados como regiões em torno dos máximos locais de $f(\mathbf{x})$. Como esta função não é conhecida, pode-se tentar estimá-la a partir das amostras. Os máximos da função densidade estimada, $\hat{f}(\mathbf{x})$, podem ser encontrados por métodos de gradiente. Em resumo, a busca dos clusters pode ser feita pelo cálculo do gradiente da densidade estimada, $\nabla \hat{f}(\mathbf{x})$.

Para buscar o máximo da densidade estimada, toma-se $\nabla \hat{f}(\mathbf{x})$ como a estimativa do gradiente da densidade, $\hat{\nabla}f(\mathbf{x})$, isto é,

$$\hat{\nabla}f(\mathbf{x}) = \nabla \hat{f}(\mathbf{x}) \quad . \quad (1.2)$$

A utilidade deste último conceito é que, para certas estimativas de densidade, a estimativa do gradiente pode ser calculada sem o conhecimento de $f(\mathbf{x})$, como é o caso do problema atacado neste trabalho. Para isto, basta calcular o vetor de *mean shift*,

$$M_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{n_{\mathbf{x}}} \sum_{\mathbf{x}_i \in S_h(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i - \mathbf{x} \quad , \quad (1.3)$$

o qual está relacionado à estimativa do gradiente normalizado da densidade por

$$M_h(\mathbf{x}) = \frac{h^2}{d+2} \frac{\hat{\nabla}f(\mathbf{x})}{\hat{f}(\mathbf{x})} \quad . \quad (1.4)$$

O termo $\frac{1}{n_{\mathbf{x}}} \sum_{\mathbf{x}_i \in S_h(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i$ na Equação (1.3) é a média dos pontos amostrados dentro de uma hipersfera $S_h(\mathbf{x})$, de raio h centrada em \mathbf{x} . Esta média corresponde ao centro de massa da esfera. O *mean shift* é a diferença entre esta média da amostra e o ponto \mathbf{x} em torno da qual é estimado o gradiente da função densidade, isto é, um vetor cuja direção é do ponto em que o gradiente da densidade está sendo estimado até o centro de massa da região considerada nesta estimativa.

A Equação (1.4), que fundamenta o algoritmo de análise de *clusters* conhecido como algoritmo de *mean shift*, foi obtida pela primeira vez por Fukunaga (FUKUNAGA, 1975). As hipóteses que levam a esta identidade são detalhados no Apêndice.

O algoritmo de *mean shift* implementa o cálculo recursivo do vetor $M_h(\mathbf{x})$, atualizando o valor de \mathbf{x} como o centro de massa calculado no passo anterior. A condição de parada é que o *mean shift* seja nulo (ou aproximadamente zero). Assim, partindo de um ponto arbitrário \mathbf{x} , a hipersfera $S_h(\mathbf{x})$, percorre o espaço de características até que o seu centro coincida com o centro de massa de um *cluster*. Como cada *cluster* é identificado com uma classe, o ponto de partida será rotulado como pertencente a esta classe.

A convergência deste procedimento é demonstrada na literatura (COMANICIU, 1999), garantindo que o processo não entre em loop.

A Figura 1.14 representa duas trajetórias percorridas por uma hipersfera no espaço de características à medida que o seu centro é atualizado pelo cálculo do seu centro de massa.

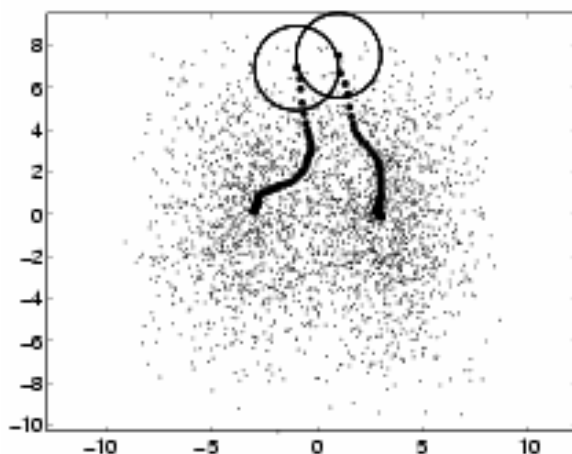


Figura 1.14 – Trajetórias percorridas por uma hipersfera no espaço de características à medida que o seu centro é atualizado pelo cálculo do seu centro de massa.

No problema de segmentação de imagens coloridas RGB ou LUV, toma-se cada pixel como o ponto de partida do centro de uma esfera que percorrerá o espaço de cores até encontrar um cluster, que corresponde a um objeto, ao qual o pixel inicial será associado. No problema de segmentação dos grãos de hematita em imagens multirradiais, toma-se cada pixel como o ponto de partida do centro de uma hipersfera que percorrerá o espaço de intensidades de luz polarizada até encontrar um cluster, que corresponde a um grão, ao qual o pixel inicial será associado.

O parâmetro h (raio da hipersfera) deve ser ajustado pelo usuário. Dependendo desta escolha, a imagem pode ser subsegmentada (h muito grande) ou supersegmentada (h muito pequeno). Uma boa implementação deste método deve facilitar a “sintonia” deste parâmetro. Uma solução genérica é o uso de uma hipersfera de raio ajustável (COMANICIU,2001).

Conforme descrito acima, o algoritmo de *mean shift* aplica-se ao domínio de intensidades (ver Seção 1.5.1). Isto significa que a localização e correlação espacial dos pixels não é considerada. No problema atacado neste trabalho, isto significa que dois pixels correspondentes a grãos diferentes com a mesma orientação espacial serão rotulados como pertencentes a um mesmo grão. Obviamente, a introdução das coordenadas de posição dos

pixels no espaço de características produzirá uma separação dos clusters correspondentes a grãos diferentes. Entretanto, este procedimento introduz algumas dificuldades relativas à métrica do espaço de características². Por outro lado, é bastante simples resolver este tipo de problema na etapa de pós-processamento, quando se realiza a indexação dos grãos para a sua posterior análise.

² Quando coordenadas com dimensões físicas diferentes são utilizadas, o espaço de características deixa de ser isotrópico e a métrica euclidiana não é mais adequada. Neste caso, a métrica de Mahalanobis deve ser utilizada.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

A fim de aplicar o método proposto na Introdução deste trabalho para realizar a segmentação dos grãos de hematita e poros em amostras de minério de ferro, seções polidas de amostras de minério foram fotografadas digitalmente em um microscópio com polarizador giratório em ângulos variáveis de polarização, conforme descrito na Seção 1.4.1 (ver **Figura 1.5**). Uma pilha de imagens monocromáticas foi assim produzida para cada campo observado, onde cada imagem corresponde a uma posição do polarizador. Qualquer ponto na amostra é registrado em um pixel de mesmas coordenadas em todas as imagens da pilha, conforme é ilustrado na **Figura 2.1**.

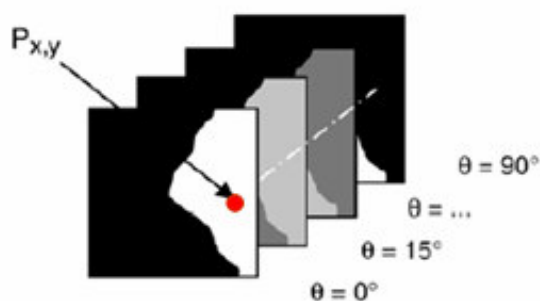


Figura 2.1 – Conjunto de imagens de um mesmo campo adquiridas com diferentes orientações do eixo de polarização da luz incidente sobre a amostra.

O conjunto resultante de intensidades correspondentes a cada coordenada está diretamente relacionado à orientação do cristal amostrado na posição correspondente. Esta pilha de imagens monocromáticas de pixels co-registrados forma uma imagem multiradial (ver Seção 1.5.1) na qual cada pixel é caracterizado pelo conjunto de intensidades medidas em todos os ângulos de polarização. Esta imagem multiradial será analisada pelo algoritmo de *mean shift* descrito na Seção 1.5.3.3.

2.1 Preparação e inspeção das amostras

As amostras de minério escolhidas para o presente estudo são compostas unicamente por partículas de hematita e poros. Esta escolha foi feita por razões metodológicas, conforme mencionado na Seção 1.1.

A preparação das amostras foi feita por Takehara seguindo os procedimentos descritos em trabalho anterior (TAKEHARA, 2004). As amostras foram embutidas em resina e lixadas com lixas de granulação decrescente desde 320 até 4000. Depois disso foram polidas com pastas de diamante de 9 μm , 6 μm , 3 μm e 1/4 μm . Finalmente as amostras foram lavadas em banho ultrasônico para a remoção de resíduos.

A inspeção visual das amostras sob luz polarizada revela que a hematita presente é um mineral secundário gerado com alto grau de metamorfismo e deformação, que deu origem a cristais de hematita de granulometria grossa, com regiões de contato regulares e triplas, conforme é mostrado na **Figura 2.2**.

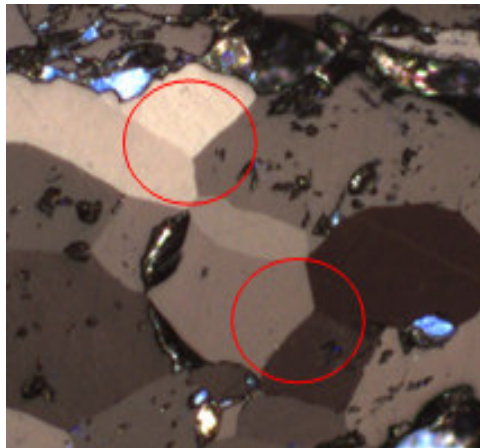


Figura 2.2 Regiões de contato regular entre grãos de hematita, envolvendo três grãos.

2.2 Aquisição de imagens

A aquisição de imagens foi feita com uma câmera colorida de vídeo 3CCD SONY-Exwave HADTM, controlada pelo programa Leica IM50, acoplada ao microscópio LEICA DM150 com polarizador giratório. Séries de imagens foram adquiridas de cada campo

sob diferentes ângulos de polarização, com variação de $2,5^\circ$ entre uma imagem e outra, desde 0° até 15° em relação ao analisador. Todas as imagens foram adquiridas com uma lente objetiva de 10X e uma grade de 1300×1300 pixels. Com o auxílio de uma escala foi determinada a resolução correspondente de 1478 pixels/mm.

Uma vez que a câmera de vídeo utilizada captura simultaneamente os três canais de cor R, G e B através de um filtro de Bayer, e sendo redundante a informação contida nestes canais para este tipo de amostra, apenas um canal de cor de cada imagem foi separado para compor as imagens multirradiais. O canal verde (G) foi escolhido porque a sua resolução espacial é mais alta do que a dos canais vermelho (R) e azul (B).

Na **Figura 2.3** são mostradas quatro imagens adquiridas através deste canal com luz polarizada em orientações θ variadas do polarizador, após ser refletida pela amostra e passar pelo analisador. São bem visíveis as mudanças de contraste entre os grãos à medida que o ângulo de polarização é variado. Estas imagens são representadas pelos mapas de intensidade $I^0(x,y)$, $I^{7,5}(x,y)$, $I^{10}(x,y)$ e $I^{12,5}(x,y)$, onde o superíndice indica o ângulo de polarização em relação ao analisador.

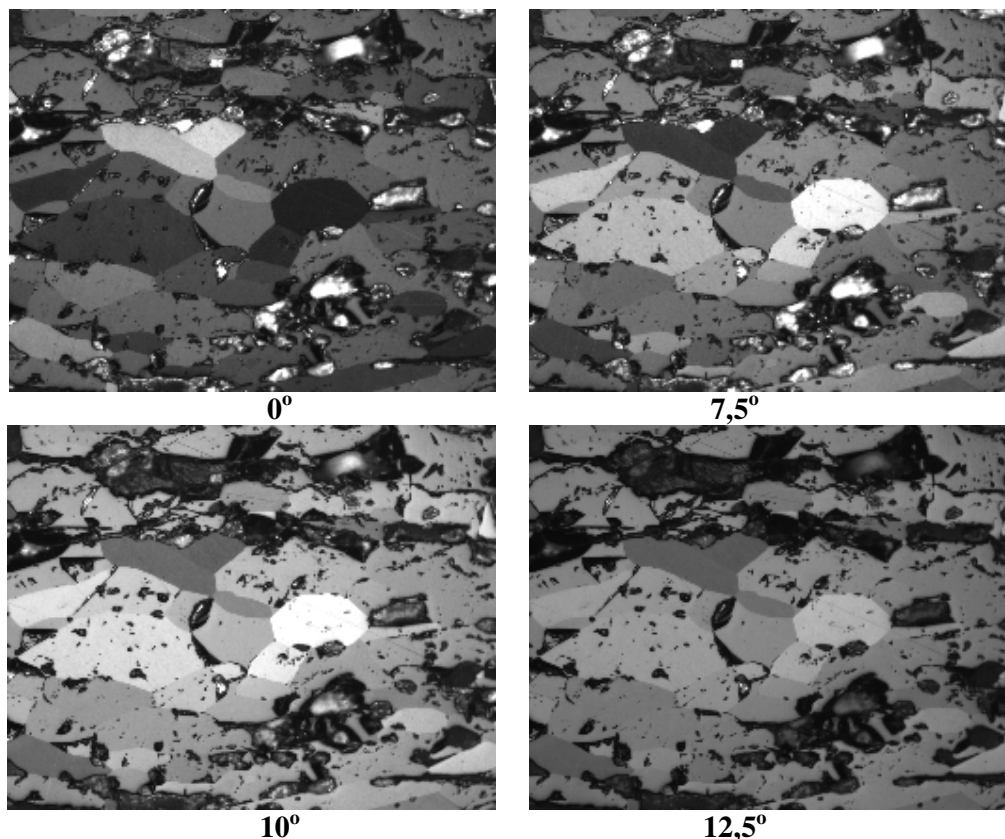


Figura 2.3 – Imagens de luz polarizada de uma amostra de minério de ferro rico em hematita.

O conjunto $\{I^\theta(x, y)\}$ de intensidades na posição (x, y) é o conteúdo do pixel, $P(x, y)$, da imagem multirradial,

$$P(x, y) = \{I^\theta(x, y)\} \quad (2.1)$$

As imagens multirradiais conforme adquiridas não podem ser processadas diretamente, devido a alguns artefatos de aquisição cuja origem e correção é descrita na próxima Seção.

2.3 Pré-processamento

Como o método de segmentação usado neste trabalho baseia-se nas intensidades de luz refletida, é essencial que estas não sejam alteradas por uma iluminação irregular ou por *vignetting* sempre presentes nos microscópios óticos (BERNI, 2007). Para corrigir a iluminação, adquirem-se imagens de uma lâmina limpa e homogênea para compor um padrão de iluminação a ser descontado de todas as imagens adquiridas sob as mesmas condições de iluminação. Na **Figura 2.4 (a)** uma destas imagens é mostrada. As imperfeições da lâmina podem ser removidas fazendo a média de várias imagens da mesma lâmina em posições e orientações diferentes e depois aplicando filtros de suavização. Na **Figura 2.4 (b)** é mostrado o resultado da aplicação de uma operação de *threshold* sobre o canal verde da imagem da **Figura 2.4 (a)**, evidenciando a região em que a iluminação é mais intensa.

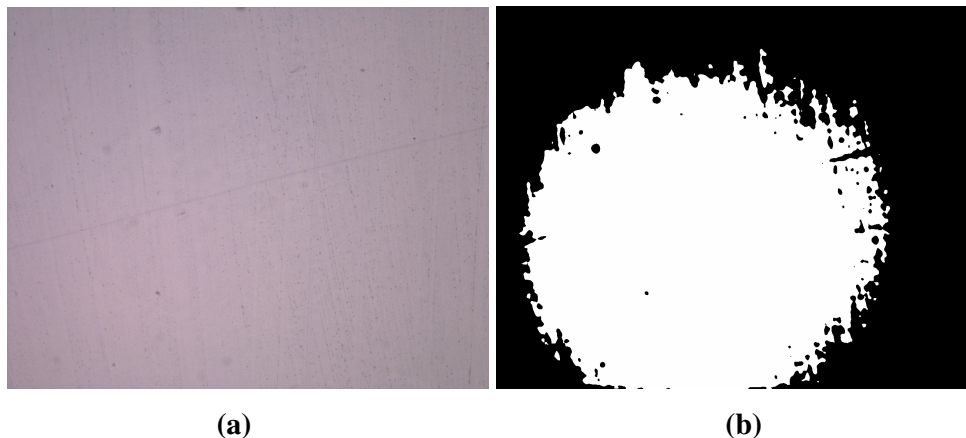


Figura 2.4 – Imagem de referência para correção da iluminação irregular (a) e a região de iluminação mais intensa, conforme é revelada pela aplicação de uma operação de *threshold*.

Outro defeito de aquisição detectado é o arraste relativo das imagens obtidas com diferentes ângulos de polarização da luz incidente. Para evidenciar este defeito, as fronteiras de alguns grãos foram detectadas em duas imagens de uma mesma pilha e as imagens destas fronteiras, marcadas em cores diferentes sobre o fundo preto, foram somadas. A **Figura 2.5** mostra um detalhe do resultado desta operação. A imagem foi editada para eliminar bordas incompletas. Este tipo de defeito também foi reportado por Pirard (PIRARD, 2004), embora associado à diferenças de comprimento de onda ao invés de diferenças de ângulo de polarização como encontramos neste trabalho.

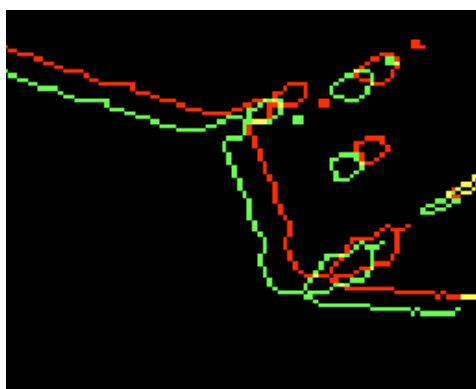


Figura 2.5 – Arraste produzido pela variação do ângulo de polarização.

O arraste ilustrado na **Figura 2.5** faz com que, na imagem multiradial adquirida, os pixels situados na região entre as duas bordas tenham componentes de intensidade de dois grãos diferentes. Cada mistura de componentes dos pixels de duas regiões diferentes é interpretada pelo algoritmo de *mean shift* como um novo grão. O resultado é uma imagem supersegmentada, isto é, com mais grãos do que o número exato. Quando o tamanho destas regiões de superposição produzidas por arraste é muito menor do que o tamanho dos grãos verdadeiros, os artefatos podem ser eliminados por operações morfológicas simples sem perda apreciável de exatidão na medida das características dos verdadeiros grãos segmentados.

A correção do arraste é realizada tomando os contornos de grão como referência para produzir o “casamento” destas imagens. Feita esta correção, finalmente se consegue com que os mesmos pontos na amostra sejam registrados em pixels de mesmas coordenadas em todas as imagens da pilha.

Finalmente, mas não menos importante, temos os artefatos produzidos por reflexão no interior dos poros, os quais estão assinalados na **Figura 2.6**.

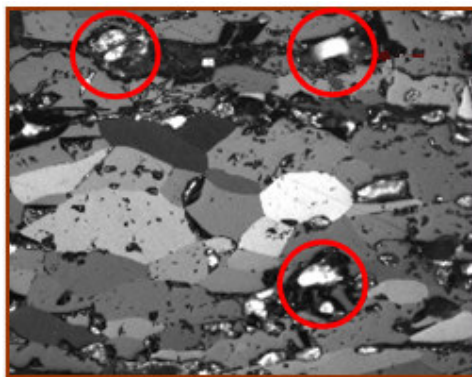


Figura 2.6 – Falsos objetos criados pela reflexão da luz no interior dos poros (estruturas brilhantes dentro das circunferências vermelhas).

Estes artefatos também são detectados como falsos grãos pelo algoritmo de *mean shift*, mas no entanto eles não são nem pequenos e nem sempre podem ser eliminados diretamente por operações morfológicas simples. A solução adotada para este problema foi segmentar os poros separadamente, antes da aplicação do algoritmo de *mean shift*, por *threshold* simples na imagem da pilha que apresenta o maior contraste entre os poros e a estrutura de grãos, seguida da aplicação de filtros morfológicos. A imagem binária dos poros obtida desta forma foi usada como máscara para filtrar todas as imagens do mesmo campo eliminando os artefatos no interior dos poros. Na **Figura 2.7 (a)** é apresentada a imagem de uma pilha que apresentava o maior contraste entre os poros e a estrutura de grãos. Na **Figura 2.7 (b)** é apresentada a respectiva imagem da máscara de poros.

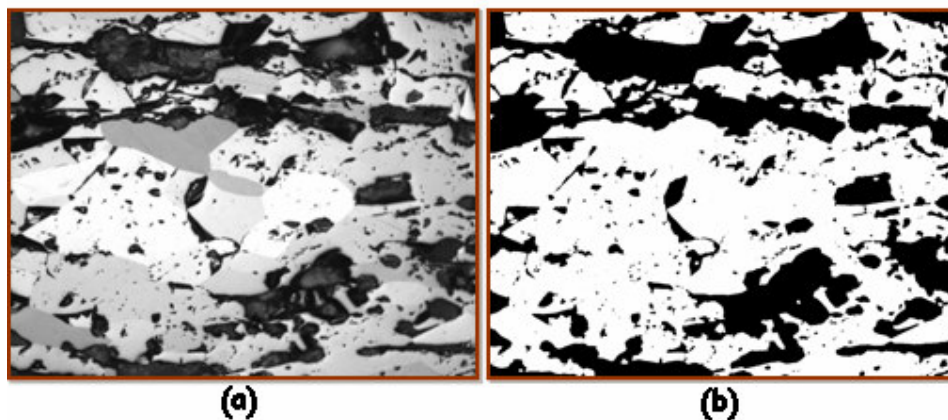


Figura 2.7 – (a) Imagem de contraste entre os poros e a estrutura de grãos (b) Imagem da máscara de poros.

2.4 Análise de imagens

Depois que as imagens foram pré-processadas para eliminar os defeitos de aquisição, cada pixel das imagens multiradiais foi representado no espaço de intensidades por um vetor $\mathbf{x}_i = [I^0, I^{2.5}, \dots, I^{15}]$. A dimensão deste espaço de características é igual ao número de ângulos de polarização usados.

Na **Figura 2.8** estão representadas esquematicamente imagens de um mesmo campo obtidas sob ângulos de polarização diferentes, adquiridas com dois bits, isto é, em uma escala de intensidade de 0 a 3. A estrutura de grãos é revelada. O pixel marcado em vermelho pertencente ao grão da direita, apresenta a seqüência de intensidades 3, 2, 1 e 0 à medida que o ângulo de polarização varia, enquanto o pixel marcado em azul, pertencente ao grão de baixo, apresenta uma seqüência de intensidades diferente, a saber, 0, 1, 2 e 3, para a mesma seqüência de ângulos de polarização. Estes dois pixels seriam representados respectivamente por $\mathbf{x} = [3,2,1,0]$ e $\mathbf{x} = [0,1,2,3]$.

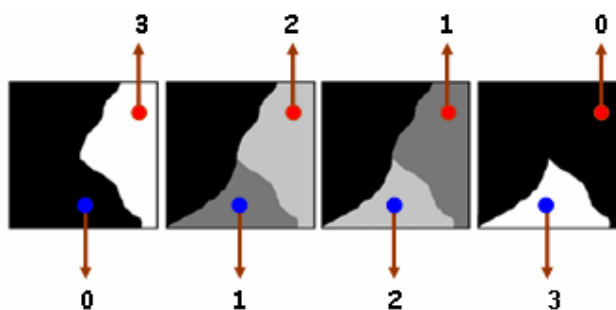


Figura 2.8 – Imagens de um mesmo campo adquiridas com ângulos de polarização diferentes revelando a estrutura de grãos.

Uma vez que os poros segmentados e os grãos são objetos homogêneos, isto é, todos os seus pixels têm conjuntos de intensidades refletidas aproximadamente iguais entre si em todos ângulos de polarização, eles tendem a agrupar-se no espaço de intensidades, formando *clusters*. Na **Figura 2.9** são mostrados conjuntos de pixels amostrados em cada um dos três grãos da **Figura 2.8** e suas respectivas representações no espaço de intensidades, evidenciando a formação dos *clusters*. Embora a representação do espaço de intensidades esteja limitada a apenas três componentes, a idéia de aglomeração é facilmente generalizada para mais dimensões.

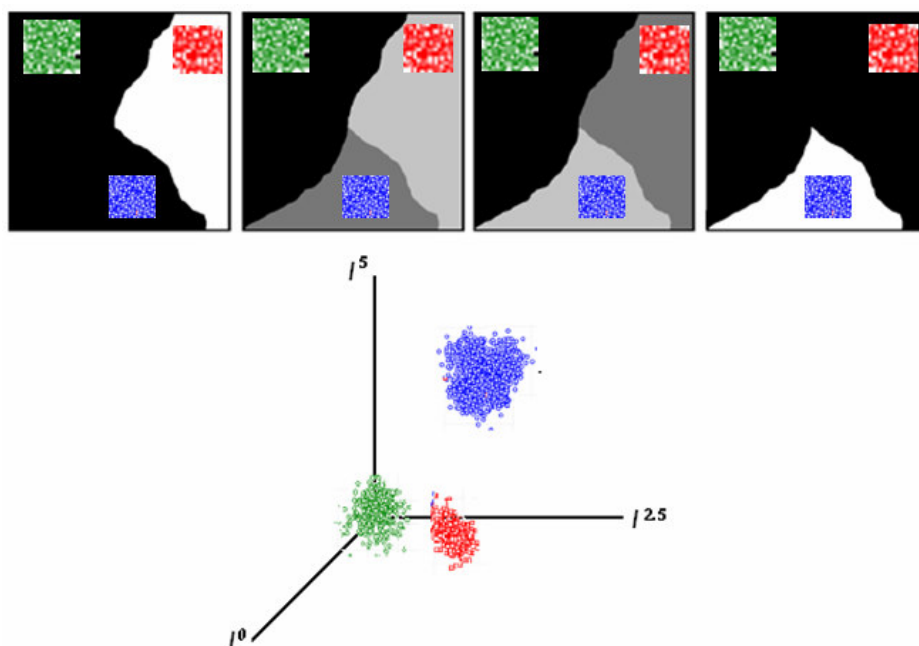


Figura 2.9 – Segmentação de grãos por agrupamento de padrões no espaço de intensidades de luz polarizada.

A análise de clusters no espaço de características para a identificação das classes que correspondem aos grãos foi feita utilizando uma versão modificada do programa Edge Detection and Image Segmentation (EDISON) System v1.1, de autoria de Georgescu e Christoudias (GEORGESCU, 2002), que implementa o algoritmo de *mean shift*, conforme ele é descrito por Comaniciu e Meer (COMANICIU, 2002).

A modificação feita no programa EDISON elimina a transformação das coordenadas de entrada (assumidas como sendo RGB) para LUV, uma vez que os canais de intensidade de luz polarizada usados neste trabalho não tem qualquer correspondência com nenhuma sensação e cor

A sintonia do raio h da hipersfera usada para varrer o espaço de características foi feita por tentativa e erro, comparando os resultados obtidos pela aplicação do método com aqueles obtidos por inspeção visual.

3 RESULTADOS

As intensidades das imagens corrigidas foram tomadas como componentes dos vetores de características dos pixels de cada pilha. Para facilitar a visualização da informação multirradial a imagem da **Figura 2.3** foi composta em falsa-cor atribuindo aos canais R, G e B as imagens de $7,5^\circ$, 0° , $12,5^\circ$ respectivamente. O resultado é mostrado na **Figura 3.1**.

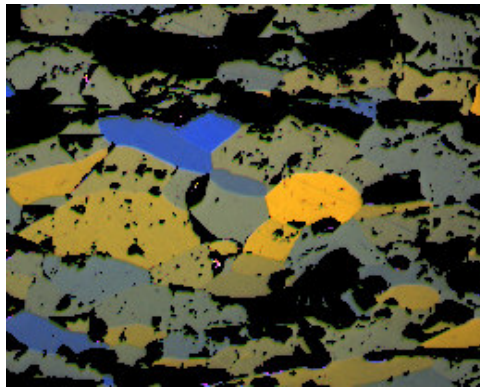


Figura 3.1 – Composição em pseudo-cores RGB do conjunto de imagens da **Figura 2.3** ($7,5^\circ$, 0° , $12,5^\circ$).

Na **Figura 3.2**, um corte do espaço de características formado pelas intensidades de luz polarizada refletida pela amostra é representado em três dimensões usando as pseudo-cores da **Figura 3.1**. A **Figura 3.2**, foi produzida pelo software COLOR SPACE 1.1 (COLANTONI, 2005)

A aplicação do algoritmo de *mean shift* sobre uma imagem multirradial resulta em uma imagem temática. Todos os pixels que, tomados como ponto de partida para a trajetória de busca de um *cluster* no espaço de características, convergirem para um mesmo ponto, receberão como novas componentes de intensidade as componentes deste ponto de convergência, que passa a desempenhar o papel de rótulo de classe, identificando um grão.

Na **Figura 3.3** é mostrada a imagem temática obtida pela aplicação do algoritmo de *mean shift* sobre a imagem multiespectral representada na **Figura 3.1**. Do mesmo modo, aqui também as intensidades são atribuídas aos canais de cor, produzindo uma imagem em pseudo-cor.

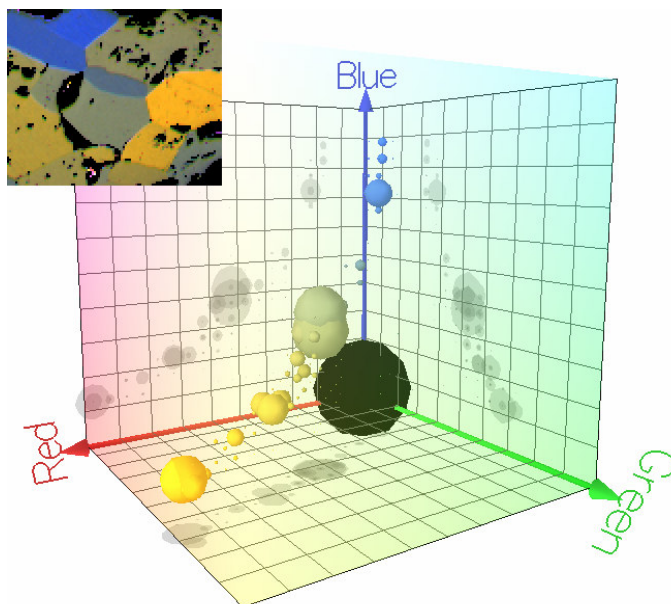


Figura 3.2 – Aglomerados de padrões em um espaço de características correspondendo aos grãos e poros da região de interesse da imagem da **Figura 3.1**.

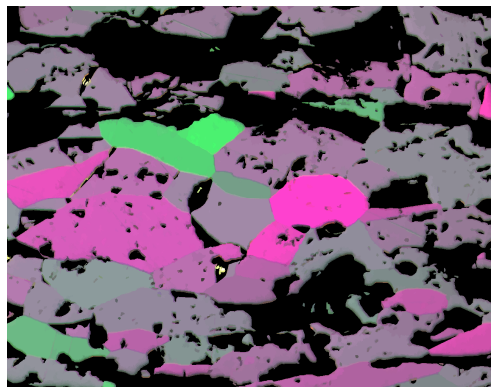


Figura 3.3 –Imagem segmentada pela aplicação do algoritmo *mean shift*.

Embora na representação da **Figura 3.3** tenham sido usados apenas três canais de intensidade para compor a imagem em falsa-cor, o rótulo de classe tem mais componentes que permitem a distinção de outros grãos que podem aparecer fundidos nesta imagem.

É importante notar que, devido ao processo de filtragem dos poros através de uma máscara binária (ver Seção 2.3, **Figura 2.7**) todos os pixels dos poros têm todos os seus componentes de intensidade zerados, e portanto formam um único cluster pontual no espaço

de características, recebendo todos o mesmo rótulo do algoritmo do *mean shift*. Em resumo, todos os pixels de poros são identificados como pertencentes a um único grande poro. Entretanto, a identificação dos poros individuais pode ser facilmente obtida durante o pós processamento.

Após a aplicação do método *mean shift* na imagem da **Figura 3.1**, a cada pixel de um mesmo cluster atribuiu-se uma falsa cor, resultando em uma imagem segmentada em grãos e poros. Os cristais segmentados são então classificados de acordo com sua relação de aspecto em granular ou lamelar. As frações de áreas dos grãos e poros obtidos a partir da segmentação da imagem com o método *mean shift* estão comparadas com as frações de áreas obtidas usando o método tradicional de contagem de pontos na **Tabela 3.1**.

Tabela 3.1 – Comparação das frações de áreas de grãos e poros obtidos da segmentação da imagem usando o método *mean shift* e pela quantificação da imagem usando o método tradicional de contagem.

Minerais	Contagem	<i>Mean shift</i>
Hematita Granular	30,00	29,47
Hematita Lamelar	37,22	35,39
Poros	32,64	35,14
Total	99,86	100,00

Antes de serem analisadas grão a grão por um programa, as imagens temáticas de saída do *mean shift* podem ter que ser processadas para eliminar os artefatos produzidos pela aplicação deste algoritmo. Já mencionamos que alguns artefatos de aquisição podem ser identificados como falsos pequenos grãos. Se depois de realizadas todas as correções no pré-processamento alguns destes artefatos ainda persistirem em número significativo, estes podem ser eliminados pela aplicação de filtros morfológicos. Isto implica que serão eliminados da análise grãos menores do que o tamanho dos artefatos eliminados.

Para facilitar a manipulação dos rótulos de classe nos programas de análise da estrutura de grãos, eles devem ser indexados por um número inteiro. Durante este processo, é avaliada a conexão espacial entre os pixels. Assim, os poros individuais são identificados como conjuntos de pixels que têm componentes de intensidade todas nulas e que estão conectados entre si. Cada região conexa é um poro individual e recebe um índice diferente dos demais. Este procedimento também produz a distinção entre grãos que, por terem orientação muito próxima, tenham recebido o mesmo rótulo de classe.

Assim, ao levar em conta a conexão espacial entre os pixels, uma reclassificação é realizada, resultando no refinamento do processo de segmentação.

As imagens reclassificadas e com os grãos indexados estão prontas para a análise individual de poros e grãos.

5 CONCLUSÕES

No presente trabalho testamos o método de análise de clusters conhecido como *mean shift* para segmentar imagens multiradiais de amostras de minério de ferro nos seus grãos de hematita e poros.

Os resultados obtidos são bastante promissores, dada a concordância com os que se obtém por inspeção visual. Entretanto, para que este método possa ser testado sistematicamente e eventualmente ser utilizado em análises de rotina, é preciso automatizar as etapas de pré-processamento.

A correção de iluminação é de fácil solução e, de fato, já contamos com uma implementação que realiza este procedimento em lotes de imagens (BERNI, 2008). Já a correção automática de arraste exige procedimentos mais sofisticados. Uma alternativa que vem sendo estudada é a detecção de fragmentos das fronteiras de grãos em cada uma das imagens monocromáticas da pilha que forma a imagem multiradial. A coincidência entre fragmentos de bordas pode ser usada para garantir o “casamento” das imagens, isto é, a coincidência entre as coordenadas dos pixels correspondentes ao mesmo ponto da superfície da amostra. Para verificar esta coincidência, o programa deve realizar uma simples subtração entre as imagens, à medida que uma imagem da pilha é deslocada em relação a outra, tomada como referência. O programa deverá então considerar as imagens casadas quando esta diferença for mínima.

Os testes feitos neste trabalho usaram uma versão modificada do programa EDISON (GEORGESCU, 2002), que eliminou a transformação não linear das intensidades nos três canais para o sistema LUV. Entretanto, esta versão modificada do programa continuou operando em espaços de características tri-dimensionais. Portanto, as intensidades obtidas em apenas três ângulos de polarização foram consideradas. Assim, é preciso estender este programa para trabalhar com um número maior, de preferência variável, de canais de intensidade.

Uma vez automatizadas estas duas etapas, o método pode ser testado sistematicamente sobre um conjunto de imagens adquiridas especialmente para este fim. Aí então poderão ser avaliadas estatisticamente a sua exatidão e precisão, bem como o seu desempenho e facilidade de uso.

BIBLIOGRAFIA

BERNI, J.C. Desenvolvimento e implementação de métodos de correção de iluminação para imagens digitais, Trabalho de Graduação, Orientador: BORGES DA COSTA, J.A.T. Curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Santa Maria, 2007.

BONIFAZI, G. Digital Multispectral techniques and automated imagem analysis procedures for industrial ore modeling. **Mineral Engineering**, v. 8, n 7, p. 779-794, 1995.

CHENG, Y. Mean shift, mode seeking and clustering. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, Rutgers University, Piscataway, NJ, USA, v. 17, p. 790-799, 1995.

COLANTONI, P. Color Space, V. 1.1, 2005 (disponível em www.caip.rutgers.edu/riul, Acesso em: 27 dez. 2007).

COMANICIU, D.; MEER, P. Mean shift analysis and applications. **7th International Conference on Computer Vision**. Kerkyra, Greece, p. 1197-1203, 1999.

COMANICIU, D.; MEER, P. Mean shift approach toward feature space analysis. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**. Rutgers University, Piscataway, NJ, USA, v 24, p. 603-619, 2002.

COMANICIU, D.I. **Nonparametric robust methods for computer vision**, New Brunswick, NJ. 2000. Doctor of Philosophy Graduate Program in Electrical and Computer Engineering- New Brunswick Rutgers, The State University of New Jersey, New Jersey, 2000.

COMANICIU, D.; MEER, P. Robust analysis of feature spaces: color image segmentation. **IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition**. San Juan, Puerto Rico, p. 750-755. 1997.

COMANICIU, D.; MEER, P. The variable bandwidth mean shift and data-driven scale selection. **8th International Conference on Computer Vision**. Vancouver, BC, Canada, v. 1, p. 438-445, 2001.

DAVIDSON M. W.; ABRAMOWITZ M. Optical microscopy, **Encyclopedia of Imaging Science and Technology**, v.2, p. 1106-1141, 2002.

DONSKOI, E. et al. Utilization of optical image analysis and automatic texture classification for iron ore particule characterization. **Minerals Engineering**, v. 20, p. 461-471, 2007.

DUARTE, E.L., Microscopia Ótica de Luz Polarizada, (<http://fap01.if.usp.br/~elduarte/MOLP.htm>, Acesso em: 27 dez. 2007).

FORTEY, N.J. Image analysis in mineralogy and petrology:Mineral. **Mineral Mag.**, v. 59, p. 117-178, 1995.

FUETEN, F. A computer-controlled rotating polarizer stage for the petrographic microscope. **Computers & Geosciences**, v.23, p. 203-208, 1997.

FUKUNAGA, K.; HOSTETLER, L.D. The estimation of the gradient of a density function, with applications in pattern recognition, **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.21, p. 32-40, 1975.

GEORGESCU, B. and CHRISTOUDIAS, C.M. Edge Detection and Image SegmentatiON (EDISON) System V1.1`, Freeware, Robust Image Understanding Laboratory, Rutgers University,2002.

GEORGESCU, B.; SHIMSHONI, I.; MEER, P. Mean Shift based clustering in high dimensions: a texture classification example. **9th International Conference on Computer Vision** , Nice, France, p 456-463, 2003.

GOLDENSTEIN, H. Apostila da disciplina de Caracterização de Materiais, Escola Politécnica,USP, São Paulo, 2007
(http://www.angelfire.com/crazy3/qfl2308/1_multipart_xF8FF_6_Microscopia_otica.pdf),
Acesso em: 14 nov. 2007.

GOLDRING, D.C.; FRAY, T.A.T The characterization of iron ores for production of high quality sinter. **Ironmaking and Steelmaking**, v.16, n. 2 p. 83-89, 1989.

GONZALEZ, R.C.; WOODS, R.E. **Digital Image Processing**, 2nd. Ed., Prentice Hall, New Jersey, 2002. 567 p.

HALLIDAY D.; RESNICK R.; WALKER J. **Fundamentos de Física, Vol. 4 - Ótica e Física Moderna**. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1995. 30 p.

HEWITT, P. **Física conceitual**. São Paulo: Bookman, 2002. 504 p.

HOUAIS, **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**, Versão 1.05a , Editora Objetiva, 2002.

JAIN, A.K.; DUIN R.P.W.; MAO J. Statistical pattern Recognition: a review, **IEEE Transactions on Pattern analysis and Machine Intelligence**, v. 22, n. 1, jan. 2000.

JAIN, A.K.; MURTY, M.N.; FLYNN, P. J. Data Clustering: a review, **ACM Computing Surveys**, v. 31, n. 3, set. 1999.

KING, R.P.; SCHNEIDER, C.L. Stereological correction of linear grade distributions for mineral liberation., **Powder Technology**, v.98, p. 21-37, 1998.

LUMBRERAS, F.; SERRAT, J. Segmentation of petrographical images of marbles, **Computers & Geosciences**, v.22, p. 547-558, 1996.

LUMBRERAS, F.; SERRAT, J. Wavelet filtering for the segmentation of marble images, **Computer Vision Center(CVC) Tech.Rep.** 005 January, 1996.

MARSCHALLINGER, R. Automated mineral classification in the macroscopic scale, **Computers & Geosciences**, Univ. Salzburg, Salzburg, Austria, v 23, p. 119-126, 1997.

MAXIMO, A.; ALVARENGA, B. **Curso de física-volume 2**. São Paulo: Scipione, 2000. 281p.

PILLER, H. Color measurements in ore-microscopy. **Mineralium Deposita**, v. 1, p. 175-192, 1996.

PIRARD, E. ; LEBICHOT, S. Automated identification of iron oxides under the optical microscope, **Mineral Georesources and Geo-Imaging Group, GeomaC Department**, Université de Liège, Liège, Belgium.2006.

PIRARD, E. Multispectral imaging of ore minerals in optical microscopy, **Mineralogical Magazine**, Université de Liège, Liège, Belgium, v.68(2), p.323 –333, April 2004.

PIRARD, E.; LEBICHOT, S.; KRIER, W. Particle texture analysis using polarized light imaging and grey level intercepts. **Mineral Georesources and Geo-Imaging Group, GeomaC Department**, Université de Liège, Liège, Belgium.2007.

RODENACKER, K.; BENGTTSSON, E. A feature set for cytometry on digitized microscopic images. **Analytical Cellular Pathology**, v. 25, p. 1-36, 2003.

SÁ, K.G.; COSTA, G.M.; VIEIRA, C.B. Efeito da composição mineralógica na resistência à compressão de pelotas de minério de ferro. **Tecnologia em Metalurgia e Materiais**, v. 1, n. 2, p.18-22jan. 2004.

TAKEHARA, L. **Caracterização geometalúrgica dos principais minérios de ferro brasileiros – fração sinter feed**. 2004. 419f. Tese (Doutorado em Geociências) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

TIPLER, P.A. **Física para cientistas e engenheiros – volume 4 - Ótica e física moderna**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1995. 46p.

VIEIRA, E. et al. **Avaliação técnica de minérios de ferro para sinterização nas siderúrgicas e minerações brasileiras: uma análise crítica**.REM: R. Esc. Minas, Ouro Preto, v. 20, p. 97-102, 2003.

APÊNDICE

A Identidade de Fukunaga

As estimativas de densidade consideradas por Fukunaga têm a forma

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right) . \quad (\text{A.1})$$

onde \mathbf{x}_i são pontos que representam os pixels no espaço de características adotado. A soma estende-se em princípio sobre todo o conjunto de n pixels da imagem, embora o *kernel* (núcleo ou filtro), $K(\mathbf{x})$, adotado no presente trabalho limite os pixels a serem considerados como aqueles pertencentes a uma certa região em torno do ponto \mathbf{x} no qual a densidade está sendo estimada. O tamanho desta região é medido por h , e d é a dimensão do espaço de características, que é igual ao número de componentes de intensidade dos pixels.

Assim, de acordo com a Equação (1.3) a estimativa da densidade em um certo ponto soma todos os pontos \mathbf{x}_i em uma região em torno deste ponto \mathbf{x} , com um certo peso que depende da diferença entre \mathbf{x} e \mathbf{x}_i , e divide pelo volume desta região. Para um espaço de características isotrópico, como é o caso do espaço formado pelas intensidades de luz polarizada, este filtro deve depender apenas do módulo desta diferença, isto é, da distância³ entre os pontos \mathbf{x} e \mathbf{x}_i ,

$$K(\xi) = c_d k\left(\|\xi\|^2\right) , \quad (\text{A.2})$$

onde onde $\xi = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}$, c_d é uma constante de normalização, que faz a integral de $K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ ser igual a 1, e que corresponde ao volume do kernel com $h = 1$, e a função k é conhecida como perfil do *kernel*.

O filtro que produz a menor diferença quadrática integrada entre a densidade e a sua estimativa é o filtro de Epanechnikov, dado por

$$K_E(\xi) = \frac{1}{2} c_d^{-1} (d+2) \left(1 - \|\xi\|^2\right) , \quad \|\xi\| \leq 1 \quad (\text{A.3})$$

e que se anula para os valores de $\|\xi\|$ fora desta faixa.

A condição $\|\xi\| \leq 1$, corresponde a $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq h$. Em um espaço bidimensional esta condição corresponde a tomar os pontos \mathbf{x}_i no interior de um círculo de raio h , em um espaço tridimensional a tomar apenas os pontos dentro de uma esfera de raio h , e em um espaço d dimensional a tomar os pontos dentro de uma hipersfera $S_h(\mathbf{x})$ de raio h , centrada em \mathbf{x} . Estes pontos contribuem para a soma na Equação (1.3), através do *kernel*, com peso maior conforme estejam mais próximos do ponto \mathbf{x} em que a densidade é estimada.

Usando o *kernel* de Epanechnikov, a estimativa do gradiente da densidade torna-se

$$\hat{\nabla}f(\mathbf{x}) = \frac{n_{\mathbf{x}}}{n(h^d c_d)} \frac{d+2}{h^2} \left(\frac{1}{n_{\mathbf{x}}} \sum_{\mathbf{x}_i \in S_h(\mathbf{x})} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}| \right), \quad (\text{A.4})$$

onde $h^d c_d$ é o volume de uma hipersfera $S_h(\mathbf{x})$ de raio h . A quantidade $\frac{n_{\mathbf{x}}}{n(h^d c_d)}$ é a estimativa da função densidade, $\hat{f}(\mathbf{x})$, dentro desta hipersfera. O termo entre parêntesis na Equação (1.6),

$$M_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{n_{\mathbf{x}}} \sum_{\mathbf{x}_i \in S_h(\mathbf{x})} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}| = \frac{1}{n_{\mathbf{x}}} \sum_{\mathbf{x}_i \in S_h(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i - \mathbf{x} \quad (\text{A.5})$$

é um vetor chamado de *sample mean shift* (arraste da média da amostra), ou simplesmente *mean shift*. De fato, ponto calculado por $\frac{1}{n_{\mathbf{x}}} \sum_{\mathbf{x}_i \in S_h(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i$ é a média dos pontos amostrados dentro da hipersfera $S_h(\mathbf{x})$ e o *mean shift* é a diferença entre esta média da amostra e o ponto \mathbf{x} em torno da qual é estimado o gradiente da função densidade.

Em termos de $\hat{f}(\mathbf{x})$, e de $M_h(\mathbf{x})$, a Equação (1.6) é escrita como

$$\hat{\nabla}f(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x}) \frac{d+2}{h^2} M_h(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{A.6})$$

Portanto,

$$M_h(\mathbf{x}) = \frac{h^2}{d+2} \frac{\hat{\nabla}f(\mathbf{x})}{\hat{f}(\mathbf{x})} \quad . \quad (\text{A.7})$$

De acordo com a Equação (1.9) o *mean shift* é uma estimativa do gradiente da densidade normalizado.

³ Em um espaço euclidiano, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + \dots}$, onde x, y, \dots e x_i, y_i, \dots são as coordenadas dos pontos \mathbf{x} e \mathbf{x}_i , respectivamente.