

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE NO DESENVOLVIMENTO  
DE TRATORES AGRÍCOLAS**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Paulo Eduardo Richter**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2006**

# **ANÁLISE DE CONFIABILIDADE NO DESENVOLVIMENTO DE TRATORES AGRÍCOLAS**

por

**Paulo Eduardo Richter**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Área de Concentração em Qualidade e Produtividade, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Engenharia de Produção.**

Orientador: Prof. Dr. Luis Felipe Dias Lopes

**Santa Maria, RS, Brasil**  
**2006**

Richter, Paulo Eduardo  
Análise de confiabilidade no desenvolvimento de tratores agrícolas/  
por Paulo Eduardo Richter – Santa Maria, 2006.  
76 f.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria, 2006.  
Orientação: Luis Felipe Dias Lopes

1. Confiabilidade. 2. Sistemas reparáveis. 3. Sistemas não  
reparáveis. I. Lopes, Luis Felipe Dias – orientador II. Título.

CDU

---

© 2006

Todos os direitos autorais reservados a Paulo Eduardo Richter. A reprodução de partes  
ou do todo deste trabalho só poderá ser feita com autorização por escrito do autor.

Endereço. R Cap. Pedro Werlang 267, 96825-020 Santa Cruz do Sul RS.

Fone: (0XX) 55 3537-4163; End. Eletr.: [RichterPaulo@JohnDeere.com](mailto:RichterPaulo@JohnDeere.com)

---

**Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Tecnologia  
Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação de Mestrado

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE NO  
DESENVOLVIMENTO DE TRATORES AGRÍCOLAS**

elaborada por  
**Paulo Eduardo Richter**

como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Mestre em Engenharia de Produção**

**COMISSÃO ORGANIZADORA**

---

**Luis Felipe Dias Lopes, Dr. (UFSM)  
(Presidente/Orientador)**

---

**Adriano Mendonça Souza, Dr. (UFSM)**

---

**João Hélivio Righi de Oliveira, Dr. (UFSM)**

Santa Maria, 30 de agosto de 2006.

## ***DEDICATÓRIA***

---

Dedico este trabalho à minha família pelo  
companheirismo e dedicação indispensáveis para a  
conclusão do mesmo.

## ***AGRADECIMENTOS***

---

Agradeço à minha família pelo apoio fundamental para a conclusão deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Luis Felipe Lopes pela contribuição para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao apoio dos professores do PPGEF – UFSM durante a realização deste curso.

À empresa John Deere Brasil Ltda. pelo incentivo e apoio para a realização deste curso.

## **RESUMO**

---

Dissertação de Mestrado  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção  
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

### **ANÁLISE DE CONFIABILIDADE NO DESENVOLVIMENTO DE TRATORES AGRÍCOLAS**

Autor: Paulo Eduardo Richter  
Orientador: Luis Felipe Dias Lopes, Dr

Data e local: Santa Maria, 30 de agosto de 2006.

A confiabilidade dos produtos tem desempenhado um papel muito importante para a competitividade das empresas. Principalmente na área de máquinas agrícolas onde a confiabilidade do maquinário terá uma influência direta nos custos de produção e, conseqüentemente, na rentabilidade da mesma. Tratores agrícolas são máquinas complexas com diversos sistemas e componentes interagindo entre si e estabelecendo uma relação de dependência entre seus desempenhos. Quando estas máquinas falham, são restauradas para recuperar sua capacidade de produção. Muitas técnicas de estudo da confiabilidade têm sido desenvolvidas, baseadas em estudos de confiabilidade de componentes, quando submetidos a condições bem determinadas de solicitações, em testes de bancadas que reproduzem determinados modos de falha. Distribuições estatísticas são usadas para representar o comportamento de falhas de diversos tipos de ensaio. A maioria destes estudos, entretanto, foram desenvolvidos para componentes que irão ser substituídos quando falharem. Por isso devem ser analisados através de técnicas adequadas para sistemas reparáveis. Muitas análises de sistemas reparáveis têm sido feitas considerando técnicas desenvolvidas para sistemas não reparáveis. Este trabalho propõe uma comparação das duas técnicas para a análise das diferenças e vantagens de cada uma das técnicas e sua adequação ao desenvolvimento de tratores agrícolas. No final conseguimos concluir e comprovar a importância do conhecimento do embasamento matemático das diferentes técnicas para evitar análises de confiabilidade enganosas. A fácil disponibilidade e utilização de *softwares*, permitem que engenheiros sem o devido embasamento teórico apresentado neste trabalho façam análises que levem a conclusões errôneas sobre a tendência da confiabilidade dos equipamentos analisados.

**Palavras-chave:** Confiabilidade, sistemas reparáveis, sistema não reparáveis.

## ***ABSTRACT***

---

Master's Degree Dissertation  
Pos-graduate Program in Production Engineering  
Federal University of Santa Maria, RS, Brazil

### **ANALYSIS OF RELIABILITY IN THE DEVELOPMENT OF AGRICULTURAL TRACTORS**

Author: Paulo Eduardo Richter  
Advisor: Luis Felipe Dias Lopes, Dr

Date and place of defence: Santa Maria, august, 30, 2006.

The reliability of products has played a very important role for the competitiveness of enterprises. Foremost on the agricultural machinery area, where the reliability of the machinery will impact directly the production costs and profitability of farms. Agricultural tractors are complex machines with diverse systems and components interacting among themselves and establishing a dependency relationship among their performances. When these machines fail, are restored to recover their production capability. Many different techniques for reliability study have been developed based on components reliability studies, when testes under well defined conditions of bench tests to replicate well-known failure modes. Statistical distributions are used to represent the failures behavior of different kind of tests. Most of these studies, though, were developed for components that will be replaced when failed. Therefore they have to be analyzed under techniques that are suited for repairable systems. Many repairable systems have been analyzed with techniques that are only suited for non-repairable systems. This work proposes a comparison between the two techniques to analyze the differences and advantages of each one, and its applicability to the development of agricultural tractors.

**Key-words:** Reliability, repairable systems, non-repairable systems.

## ***LISTA DE TABELAS***

---

TABELA 1 - Tempos até a falha do motor diesel (em horas) número 4 do USS Grampus .....	55
TABELA 2 - Tempo de operação do sistema .....	59
TABELA 3 - Resumo das falhas dos cinco protótipos .....	66

## **LISTA DE FIGURAS**

---

FIGURA 1 - Representação da variável aleatória .....	21
FIGURA 2 - Função densidade de falha hipotética. $Q(t)$ , probabilidade de falhas em $t$ . $R(t)$ probabilidade de sobrevivência além de $t$ .....	26
FIGURA 3 - Gráfico de uma f.d.p. de uma distribuição normal .....	31
FIGURA 4 - Função densidade de probabilidade exponencial para alguns valores de $\lambda$ .....	31
FIGURA 5 - Função densidade de probabilidade log-normal para $\mu = 1$ e alguns valores de $\sigma$ .....	33
FIGURA 6 - Influência de $\beta$ (aqui representado por $\delta$ ) na f.d.p. de uma distribuição de Weibull .....	35
FIGURA 7 - Função densidade de probabilidade Gamma para alguns valores de $\beta$ .....	36
FIGURA 8 - Representação de dados completos .....	43
FIGURA 9 - Representação de dados censurados à direita .....	44
FIGURA 10 - Representação de dados censurados no intervalo.....	45
FIGURA 11 - Representação de dados censurados à esquerda .....	45
FIGURA 12 - Tempos até a falha de peças colocadas em teste aleatoriamente .....	48
FIGURA 13 - Tempos até a falha de peças colocadas em teste simultaneamente .....	48
FIGURA 14 - Tempos até a falha das peças reordenadas.....	49
FIGURA 15 - Exemplo de processo estocástico pontual.....	50
FIGURA 16 - Gráfico de um sistema que está melhorando ao longo do tempo .....	54
FIGURA 17 - Modelo de Duane - MTBF acumulado versus tempo de teste acumulado.....	56
FIGURA 18 – Gráfico Weibull dos dados da tabela tempo de operação do sistema.....	60
FIGURA 19 - Análise gráfica da tendência do sistema .....	61

FIGURA 20 - Representação de um sistema equivalente composto por k unidades.....	65
FIGURA 21 - Gráfico dos dados da Tabela 3, conforme a distribuição Weibull .....	67
FIGURA 22 - Gráfico da taxa de falhas dos dados da Tabela 3, segundo uma distribuição Weibull .....	68
FIGURA 23 - Análise dos dados da Tabela 3, conforme um processo NHPP .....	69
FIGURA 24 - Taxa de falhas dos dados da Tabela 3.....	70
FIGURA 25 - Modelo para a análise de falhas de máquinas.....	73

## ***LISTA DE ACRÔNIMOS***

---

$B_x$  = “Bruchzeit” Instante do início da falha;

f.d.p. = função densidade de probabilidade;

FOM = *Force of Mortality*;

HPP = *Homogeneous Poisson Process*;

IID = Independente e Identicamente Distribuído;

MTBF = *Mean Time Between Failures*

MLE = *Maximum Likelihood Estimate*;

NHPP = *Non Homogeneous Poisson Process*;

ROCOF = *Rate of Occurrence of Failures*;

RSA = *Reliability Software Analysis*;

VAC = Variável Aleatória Contínua;

VAD = Variável Aleatória Discreta.

## **SUMÁRIO**

---

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>1.1 Justificativa</b> .....	14
<b>1.2 Objetivos</b> .....	15
1.2.1 Objetivo geral .....	15
1.2.2 Objetivos específicos .....	15
<b>1.3 Etapas do Trabalho</b> .....	15
<b>2 METODOLOGIA</b> .....	17
<b>2.1 Considerações sobre o método</b> .....	17
<b>2.2 Etapas do desenvolvimento</b> .....	18
<b>2.3 Coleta de Dados</b> .....	19
<b>2.4 Tratamento dos Dados e Conclusões</b> .....	20
<b>3 CONFIABILIDADE E FUNÇÕES DE CONFIABILIDADE</b> .....	21
<b>3.1 Conceitos em confiabilidade e estatística</b> .....	21
3.1.1 Variáveis aleatórias .....	21
3.1.2 Variáveis aleatórias discretas (VAD) .....	22
3.1.3 Variáveis aleatórias contínuas (VAC) .....	22
3.1.4 Função densidade de probabilidade e densidade acumulada .....	22
3.1.5 Esperança matemática .....	23
3.1.6 Variância e desvio padrão .....	24
3.1.7 Função de confiabilidade .....	24
3.1.8 Função taxa de falhas ( <i>failure rate</i> ) .....	26
3.1.9 Função vida média .....	29
3.1.10 Vida mediana .....	30

<b>3.2 Principais distribuições em confiabilidade.....</b>	<b>30</b>
3.2.1 Distribuição Normal.....	30
3.2.2 Distribuição Exponencial.....	31
3.2.3 Distribuição Lognormal .....	32
3.2.4 Distribuição Weibull .....	33
3.2.5 Distribuição Gamma .....	35
3.2.6 Distribuição Weibull Mista.....	36
<b>3.3 Estimativa dos Parâmetros .....</b>	<b>37</b>
3.3.1 Método de plotagem das probabilidades .....	37
3.3.2 Método dos mínimos quadrados (regressão linear).....	38
3.3.3 Método da Máxima verossimilhança.....	39
<b>3.4 Prova de exatidão para o ajuste da distribuição .....</b>	<b>41</b>
3.4.1 Método analítico de Qui-quadrado ( $\chi^2$ ) .....	41
3.4.2 Método de Kolmogorov-Smirnov .....	42
<b>3.5 Tipos de dados de vida .....</b>	<b>42</b>
3.5.1 Dados completos .....	42
3.5.2 Dados censurados à direita .....	43
3.5.3 Dados censurados no intervalo .....	44
3.5.4 Dados censurados à esquerda .....	45
3.5.5 Dados agrupados.....	46
3.5.6 Intervalos de confiança .....	46
<b>4 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE PARA SISTEMAS REPARÁVEIS E SISTEMAS NÃO REPARÁVEIS .....</b>	<b>47</b>
<b>4.1 Sistemas Não Reparáveis .....</b>	<b>47</b>
4.1.1 Análise estatística do tempo até a falha para peças ou componentes.....	47

4.1.2 Análise da taxa de falhas para sistemas não reparáveis ou partes (FOM) .....	49
<b>4.2 Análise de confiabilidade para sistemas reparáveis .....</b>	<b>50</b>
4.2.1 Processos estocásticos pontuais .....	50
4.2.2 Diferença entre FOM( $h(t)$ ), para peças e ROCOF ( $v(t)$ ), para sistemas reparáveis .....	52
4.2.3 Processo de Poisson homogêneo (HPP) .....	52
4.2.4 Processo de Poisson não-homogêneo (NHPP) ( <i>nonhomo-         geneous Poisson Process</i> ).....	53
<b>4.3 Análise de tendência para dados de falhas .....</b>	<b>54</b>
4.3.1 Análise gráfica .....	54
4.3.2 Postulado de Duane .....	56
4.3.3 Teste de tendência de Laplace.....	58
<b>5 ESTUDOS DE CASO PARA MÁQUINAS AGRÍCOLAS.....</b>	<b>59</b>
<b>5.1 Sistema reparável simples .....</b>	<b>59</b>
<b>5.2 Sistemas reparáveis múltiplos.....</b>	<b>65</b>
5.2.1 Estudo de casos .....	66
<b>6 CONCLUSÕES .....</b>	<b>71</b>
<b>6.1 Sugestões para trabalhos futuros .....</b>	<b>73</b>
<b>7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>74</b>

# **1 INTRODUÇÃO**

---

A confiabilidade do produto é um fator que tem assumido cada vez mais importância para se avaliar a qualidade do produto. Principalmente em cenários de alta concorrência, onde os custos de produção são um diferencial decisivo para a competitividade dos produtos. O custo total do produto engloba tanto os custos de produção como os custos decorrentes de pedidos de garantia. Para os clientes, o custo de manutenção é um fator decisório de compra e recompra, principalmente para bens de capital como no caso das máquinas agrícolas, onde os custos de manutenção se refletem diretamente nos custos de produção da safra.

## **1.1 Justificativa**

Num ambiente de alta competição, é importante que as empresas sejam capazes de determinar e controlar a confiabilidade dos seus produtos. A confiabilidade dos produtos pode ser definida como a capacidade que estes produtos terão de desempenhar suas atividades por certo período de tempo em determinadas condições de uso. Sabendo-se o nível de confiabilidade dos produtos, pode-se saber de antemão se as expectativas dos clientes quanto a este produto serão atingidas, bem como o nível de qualidade do mesmo. Também será possível determinarmos os custos para se atingir determinados níveis de qualidade e confiabilidade, os custos com retornos em garantia que as empresas terão que despende, bem como quanto os clientes irão gastar na manutenção do seu patrimônio ao longo de sua vida útil

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo geral

- Aplicar a metodologia de sistemas reparáveis para avaliação do nível de confiabilidade aplicável em tratores agrícolas ainda na fase de desenvolvimento dos produtos.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Demonstrar a confiabilidade de tratores agrícolas, na fase de desenvolvimento, utilizando bases de dados de falhas, demonstrando grandezas como probabilidade de falha ( $F(t)$ ), MTBF, vida BX, taxa de falhas e limites de confiança;

- Oferecer uma orientação econômica e administrativa para as empresas dimensionarem seus gastos em garantias e os estoques necessários para peças de reposição;

- Permitir que os departamentos de Qualidade possam melhor comparar a qualidade de dois fornecedores concorrentes;

- Possibilitar que as empresas possam melhor entender a redução de custo total decorrente de uma redução de custo de um componente.

## 1.3 Etapas do trabalho

Este trabalho está dividido em cinco capítulos:

No primeiro capítulo apresentam-se a justificativa, objetivos, importância e as etapas para o desenvolvimento deste trabalho.

No segundo capítulo inicia-se revisando alguns conceitos básicos em probabilidade e estatística. Posteriormente são revisadas as principais distribuições de probabilidade tanto para dados discretos como para dados contínuos. Neste capítulo também abordou-se técnicas para a estimação de parâmetros, provas de

exatidão para distribuições de probabilidades e tipos de dados de vida em confiabilidade.

No capítulo três foram estudados e definidos sistemas mecânicos reparáveis e não reparáveis, mostrando-se as diferenças entre os mesmos, e também análises de tendência para dados de vida.

No quarto capítulo foi demonstrado um estudo de um caso onde se obteve resultados distorcidos pela não aplicação da técnica mais adequada para o problema em questão e também um caso de dados reais obtidos de um teste de máquinas agrícolas, que foi analisado pelas duas técnicas comentadas e teve seus resultados comparados.

Fechando o trabalho, no capítulo cinco apresenta-se as conclusões do trabalho e um fluxograma para a aplicação das técnicas aqui apresentadas.

## **2 METODOLOGIA**

---

Este capítulo tem por objetivo descrever a metodologia usada no estudo que se propõe a seguir.

O trabalho será desenvolvido em duas etapas.

Na primeira etapa será desenvolvida uma fundamentação teórica buscando na literatura o embasamento matemático para as diversas distribuições de probabilidade existentes.

Numa segunda etapa, serão estudadas bases de dados de falhas e explorados diferentes modos de análise da confiabilidade.

A análise de confiabilidade será feita com o auxílio dos softwares Weibull++ de propriedade da Reliasoft, com licença corporativa da Deere & Company e do software RSA de propriedade da Deere & Company.

### **2.1 Considerações sobre o método**

Este trabalho visa determinar qual a melhor técnica para investigar a confiabilidade de máquinas agrícolas. Esta investigação deve ser desenvolvida considerando-se uma metodologia de pesquisa para uma adequada fundamentação teórica e uma demonstração prática.

Malhotra (2001) afirma que a aplicação de uma pesquisa exploratória tem como principal objetivo o fornecimento de critérios para a solução do problema enfrentado pelo pesquisador e sua compreensão, possibilitando o desenvolvimento de um processo de pesquisa flexível e não estruturado.

Cooper & Schindler (2003) colocam que estudos exploratórios podem ser úteis quando os pesquisadores não têm a mínima idéia do resultado e dos problemas que poderão enfrentar. Os autores ainda afirmam que a exploração pode também ter outros objetivos. Nesse caso, investigar determinada área pode ser tão novo ou vago para o pesquisador, necessitando fazer uma exploração a fim de saber alguma coisa sobre problema.

As pesquisas exploratórias, segundo Cooper & Schindler (2003), salientam que variáveis importantes podem não ser entendidas ou não estarem totalmente definidas, podendo ser necessárias várias hipóteses para a investigação.

Malhotra (2001) afirma que a pesquisa exploratória pode ser usada em qualquer um dos objetivos a seguir:

- i) formular um problema ou determiná-lo com maior precisão;
- ii) identificar os caminhos alternativos de ação;
- iii) produzir hipóteses;
- iv) separar variáveis e relações-chave para posterior exame;
- v) conseguir critérios para desenvolver uma abordagem do problema;
- vi) para pesquisas posteriores estabelecer prioridades;

Uma pesquisa exploratória fornece informações mais claras, no momento que apresenta a descoberta de dados e idéias, melhorando e contribuindo para um resultado confiável no final da pesquisa (Malhotra 2001; Cooper & Schindler, 2003).

## **2.2 Etapas do desenvolvimento**

O desenvolvimento do trabalho a que se propõe esta pesquisa iniciou-se por uma revisão dos conceitos básicos em probabilidade e estatística, cujo conhecimento básico é de fundamental importância a todos os engenheiros que deseja fazer análises de confiabilidade.

Após esta revisão básica, foram descritas as principais distribuições estatísticas as quais são usadas para descrever os dados de vidas de peças e

sistemas. Foram descritas tanto as distribuições para dados contínuos como para dados discretos bem como os métodos para estimativas dos parâmetros de cada distribuição.

Na seqüência foram definidos sistemas reparáveis e sistemas não reparáveis, os quais devem ser analisados sob embasamentos estatísticos distintos.

A parte final do trabalho descreve estudos de casos onde a análise de dados de sistemas reparáveis foram analisados conforme sistemas não reparáveis o que ocorre freqüentemente e pode levar a interpretações enganosas sobre a tendência dos dados analisados. Como tendência entende-se o sistema estar melhorando ou deteriorando.

O primeiro estudo de caso foi pesquisado na literatura disponível sobre o tema conforme descrito na bibliografia. Já o segundo estudo de caso foi feito com dados reais do monitoramento das falhas de máquinas agrícolas durante a sua fase de testes de desenvolvimento com uma frota de cinco protótipos. A descrição dos protótipos é preservada por razões óbvias de sigilo industrial.

Tanto o caso extraído da literatura como o caso estudado com dados coletados em campo comprovaram a o embasamento teórico que descreve que sistemas reparáveis não devem ser analisados sob as técnicas válidas para sistemas não reparáveis e que a tentativa de atribuir uma distribuição estatística nestes casos pode levar a interpretações errôneas.

### **2.3 Coleta de Dados**

A coleta dos dados para a pesquisa baseou-se em pesquisa de campo. Cinco unidades protótipos foram submetidas a testes de campo em situação real de uso destes maquinários por parte de seus usuários. As aplicações variaram num espectro de diferentes regiões implementos e aplicações de modo a dar uma maior cobertura possível às possibilidades de uso deste maquinário nas diferentes condições de uso.

Para o registro dos dados de falhas, foram destacados técnicos da fábrica que registravam todas as ocorrências de falhas e interagem para colocar as unidades

novamente em teste o mais rapidamente possível, para que houvesse o mínimo prejuízo possível no total de horas acumuladas em teste.

## 2.4 Tratamento dos Dados e Conclusões

Os dados coletados em campo pelos técnicos de manutenção eram analisados por engenheiros e técnicos da fábrica para a classificação dos eventos em falhas ou eventos meramente eventos informativos.

Basicamente para um evento ser considerado como falha quando gerar um pedido de garantia por parte do cliente ou ocasionar a parada ou deterioração do desempenho normal da máquina.

Os eventos considerados como falha segundo este critério foram submetidos a ações corretivas e computados como eventos a serem considerados nesta pesquisa.

De posse das falhas somente, os dados foram submetidos a dois critérios de análise. No primeiro tentou-se atribuir uma distribuição estatística que representasse os dados de falhas usando-se o software Weibul++ da empresa Reliasoft. Os parâmetros da distribuição resultante bem como os testes de aderência foram obtidos diretamente do software.

Na segunda etapa os mesmos dados foram analisados conforme um processo de Poisson não homogêneo, usado para análise de dados discretos. Aqui também a análise foi feita com o suporte de um *software* chamado *Reliability Software Analysis (RSA)* de propriedade da *Deere and Company*, que também gerou os respectivos testes de aderência dos dados e dos parâmetros estatísticos.

Este dois métodos diferentes foram comparados e mostraram interpretações distintas, comprovando-se o que se propunha nesta pesquisa que era demonstrar que tentar-se atribuir uma distribuição estatística para dados de falhas advindos de sistemas reparáveis pode conduzir a interpretações enganosas sobre a tendência da confiabilidade dos sistemas analisados.

## **3 CONFIABILIDADE E FUNÇÕES DE CONFIABILIDADE**

### **3.1 Conceitos em confiabilidade e estatística**

#### 3.1.1 Variáveis aleatórias

Ao descrever um espaço amostral ( $S$ ) associado a um experimento ( $\Omega$ ), especifica-se que um resultado individual necessariamente seja um número. Contudo, em muitas situações experimentais, estaremos interessados na mensuração de alguma coisa e no seu registro como um número.

Definição: Seja ( $\Omega$ ) um experimento aleatório e seja ( $S$ ) um espaço amostral associado ao experimento. Uma função de  $X$ , que associe a cada elemento  $s \in S$  um número real  $x(s)$ , é denominada variável aleatória.

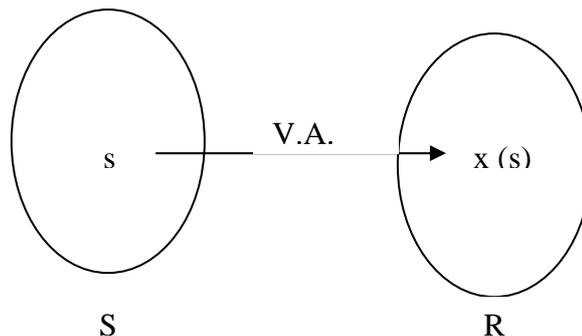


FIGURA 1 - Representação da variável aleatória

### 3.1.2 Variáveis aleatórias discretas (V.A.D.)

Uma variável  $X$  será discreta, se o número de valores de  $x(s)$  for finito. Nas aplicações industriais nos deparamos com diversas situações onde a variável que estamos analisando pode assumir somente dois valores: defeituoso (1) e não defeituoso (0). Da mesma forma, falhou ou não falhou. Então pode-se dizer que estas variáveis são discretas.

### 3.1.3 Variáveis aleatórias contínuas (V.A.C.)

Caso  $x(s)$  encontrar-se em forma de intervalo ou um conjunto de intervalos, ter-se-á uma variável aleatória contínua. Há casos em que a variável aleatória pode assumir valores de zero ao infinito, com o tempo até a falha de certo componente. Nesta situação, nossa variável aleatória  $X$  será uma variável aleatória contínua.

### 3.1.4 Função densidade de probabilidade e densidade acumulada

Quando uma variável é representada através da probabilidade de ocorrência, ela é definida como função densidade de probabilidade, o somatório das probabilidades de ocorrência da variável em questão é igual a unidade.

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1 . \quad (3.1)$$

Uma outra maneira de representar o mesmo conjunto de dados é usando a função densidade acumulada (ou probabilidade acumulada). Esta representação é obtida ordenando os valores da variável aleatória em ordem crescente ou decrescente e, começando pela probabilidade de ocorrência do primeiro valor, vai-se somando as probabilidades dos valores subseqüentes, isto é, acumulando as probabilidades.

O benefício deste tipo de representação é que a análise da mesma indica a probabilidade da variável ser menor ou igual a um valor pré-determinado.

$$F(x) = P(x < x_i) \quad (3.2)$$

No caso de uma variável aleatória discreta, a função de probabilidade acumulada (f.p.a.) é obtida pelo somatório das probabilidades individuais, em outras palavras pela integração numérica da função densidade de probabilidade (f.d.p.).

Similarmente, a função densidade de probabilidade  $f(x)$  pode ser obtida da diferenciação da função de probabilidade acumulada  $F(x)$ , de uma variável aleatória contínua.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (3.3)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (3.4)$$

As definições acima servirão de base para entender e implementar as técnicas de análise de confiabilidade. Normalmente variáveis aleatórias pode ser representadas por distribuições de confiabilidade existentes. Distribuições típicas para variáveis discretas são: distribuições Binomial e Poisson. Para variáveis contínuas, as distribuições mais típicas são normal, log-normal, exponencial, Weibull, e gamma.

### 3.1.5 Esperança Matemática

Uma forma bastante prática de descrever o comportamento aleatório de uma amostra, é a definição de um ou mais parâmetros, mais do que a tentativa de se atribuir uma distribuição aos dados.

Um dos parâmetros mais importantes das distribuições estatísticas é a definido como esperança matemática, também conhecida como média.

Pode-se definir a esperança matemática,  $E(x)$ , de uma variável aleatória discreta  $x$ , tendo  $n$  resultados  $x_i$ , cada um tendo uma probabilidade de ocorrência  $P_i$ .

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (3.5)$$

onde  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

No caso de uma variável aleatória contínua, a equação acima pode ser modificada de um somatório para uma integração.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.6)$$

### 3.1.6 Variância e desvio-padrão

Como foi visto, o parâmetro mais importante de uma distribuição em estudos de confiabilidade é a média ou esperança matemática. Entretanto faz-se necessário definir um segundo parâmetro para estabelecermos a forma da distribuição.

A medida da dispersão da distribuição em torno da sua média é conhecida como variância  $V(x)$ , e é definida por

$$V(x) = E(x)^2 - (E(x))^2 \quad (3.7)$$

onde  $E(x)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot P(x_i)$

a raiz quadrada positiva de  $V(x)$  é denominada o desvio-padrão de  $x$ , e denotado por  $\sigma_x$ .

### 3.1.7 Função de confiabilidade

A função densidade acumulada aumenta de zero até um, na medida em que a variável aleatória aumenta. Esta função aumenta descontinuamente no caso de

variáveis aleatórias discretas. Em confiabilidade, normalmente a variável aleatória é o tempo. Para  $t = 0$ , a probabilidade de falha é zero. Na medida em que  $t$  tendo ao infinito, a probabilidade de falha tende a unidade. Esta característica é equivalente a função densidade acumulada.

Em confiabilidade, a função densidade acumulada é conhecida como distribuição acumulada de falhas e normalmente designada por  $Q(t)$ .

Em muitos casos também é importante avaliar a probabilidade de sobrevivência, que é denotada por  $R(t)$ . A probabilidade de falha e de sobrevivência são complementares, de modo que:

$$R(t) = 1 - Q(t) \quad (3.8)$$

A derivada da função distribuição acumulada (f.d.a.) de uma variável aleatória contínua é a função densidade de probabilidade (f.d.p.). Em confiabilidade, a derivada da distribuição acumulada de falhas,  $Q(t)$ , resulta em uma função equivalente a função densidade de probabilidade, que é chamada de função densidade de falha,  $f(t)$ , onde

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \quad (3.9)$$

ou

$$Q(t) = \int_0^t f(t) \quad (3.10)$$

e

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t) dt \quad (3.11)$$

No caso de distribuições discretas, as integrais das equações acima são substituídas por somatórios.

É importante lembrar que a confiabilidade deve sempre estar associada ao tempo. Não se pode dizer que a confiabilidade de uma determinada peça é 85 por cento. Deve-se sempre mencionar que é 85 por cento em um tempo “x”. Quando possível, também é desejável mencionar os intervalos de confiança da análise (ver unidade 3.5.6).

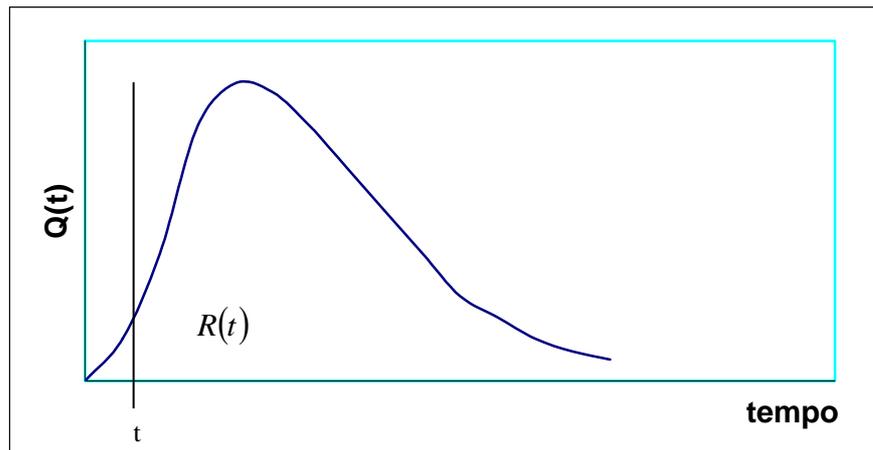


FIGURA 2 - Função densidade de falha hipotética.  $Q(t)$ , probabilidade de falhas em  $t$ .  $R(t)$  probabilidade de sobrevivência além de  $t$

### 3.1.8 Função taxa de falhas (*failure rate*)

Também conhecida por *transition rate*, *hazard rate*, *repair rate*, *force of mortality*. A taxa de falhas é a medida da taxa em que as falhas ocorrem. Entretanto, não é simplesmente o número de falhas que ocorrem em um determinado período de tempo. O número da amostra deve ser considerado, portanto

$$\lambda(t) = \frac{\text{número de falhas por unidade de tempo}}{\text{número de componentes expostos a falha}} \quad (3.12)$$

Seja  $N_0$  o número de componentes sob um determinado teste,  $N_s(t)$  o número de itens sobreviventes no tempo  $t$ , e  $N_f(t)$  o número de itens falhados no tempo  $t$ . Portanto

$$N_s(t) + N_f(t) = N_0$$

Em qualquer instante  $t$ , a função confiabilidade  $R(t)$ , pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \frac{N_s(t)}{N_0} \\
 &= \frac{N_0 - N_f(t)}{N_0} \\
 &= 1 - \frac{N_f(t)}{N_0}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Similarmente, a probabilidade de falha acumulada  $Q(t)$  pode ser descrita por

$$Q(t) = \frac{N_f(t)}{N_0} \tag{3.14}$$

Das equações (3.13) e (3.14), vem

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{-dQ(t)}{d(t)} = \frac{-1}{N_0} \frac{dN_f(t)}{dt} . \tag{3.15}$$

da relação (3.15), vem

$$f(t) = \frac{1}{N_0} \frac{dN_f(t)}{dt} \tag{3.16}$$

Considerando a equação (3.12), a equação acima fornece a taxa de falhas quando o número de componentes expostos à falha é  $N_0$ , ou seja,  $t=0$ . Somente neste instante a função densidade de falhas e taxa de falhas são iguais. Da equação (3.16), a taxa de falhas no tempo  $t$  pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}
 \lambda(t) &= \frac{1}{N_s(t)} \frac{dN_s(t)}{dt} \\
 &= \frac{N_0}{N_0} \frac{1}{N_s(t)} \frac{dN_f(t)}{dt} \\
 &= \frac{N_0}{N_s(t)} \frac{1}{N_0} \frac{dN_f(t)}{dt} \\
 &= \frac{1}{R(t)} f(t)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{f(t)}{R(t)} \quad (3.17)$$

da equação (3.17), tem-se:

$$\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \quad (3.18)$$

pela equação (3.18) confirma que  $\lambda(0) = f(0)$  já que em  $t=0$ ,  $R(0)=1$ .

Além disto, mostra-se a relação da taxa de falhas com a função densidade de falhas. Esta relação permite-se analisar a probabilidade de falhas a qualquer tempo  $t$  pela função densidade de falhas, enquanto a taxa de falhas permite-nos analisar a probabilidade de falha no instante  $t$ , dado que tenha sobrevivido até o instante  $t$ .

Assim,  $\lambda(t)$  é equivalente a  $f(t)$  em um ponto particular de interesse. Como a área neste ponto particular de interesse é menor que a unidade, a parte da função densidade de falha deve ser “trazida” de volta à unidade. Isto pode ser obtido pela divisão da função densidade de probabilidade pela área sob a função densidade de probabilidade para  $t' > t$  no ponto particular de interesse.

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f(t)}{\int_t^{\infty} f(t) dt}, \text{ para } 0 \leq t \leq \infty \\ &= \frac{f(t)}{R(t)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

que é o mesmo da equação (3.18)

Da equação (3.19), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_1^{R(t)} \frac{1}{R(t)} dR(t) &= \int_0^t -\lambda(t) dt \\ \ln R(t) &= \int_0^t -\lambda(t) dt \\ R(t) &= \exp \left[ -\int_0^t \lambda(t) dt \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para o caso especial em que  $\lambda$  é constante e independente do tempo, a equação acima fica,

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (3.21)$$

Este caso especial é conhecido como distribuição exponencial e será discutido em detalhes no item 3.2.4.

### 3.1.9 Função vida média

A função vida média é largamente usada em análises de confiabilidade. Ela representa a medida da média do tempo que uma população de equipamentos irá operar até a falha. É a expectativa de vida que um equipamento terá na média. Muitos autores referem-se a esta função como MTBF (*mean time between failures*), no caso de equipamentos que irão continuar operando após a falha e seu reparo; e MTTF (*mean time to failure*) para componentes ou peças que serão substituídas quando falharem.

Muitas vezes analisamos o MTBF para comparar a qualidade de uma peça proveniente de diferentes fornecedores. É importante termos em mente que o MTBF sozinho não é uma boa medida para tal. Ele deve sempre vir acompanhado da informação do percentil equivalente para uma análise adequada.

Sua função matemática é expressa por:

$$\bar{T} = m = \int_{0,\gamma}^{\alpha} t.f(t)dt \quad (3.22)$$

### 3.1.10 Função vida mediana

A mediana representa o percentil 50 de uma distribuição. A metade dos dados será maior que a mediana, e a outra metade serão menores que a mediana. É importante ressaltar que a mediana não coincide com a média para todas as distribuições. Para a distribuição normal estes valores coincidem, mas em distribuições assimétricas como a Weibull, seus valores serão diferentes.

## 3.2 Principais distribuições em confiabilidade

### 3.2.1 Distribuição Normal

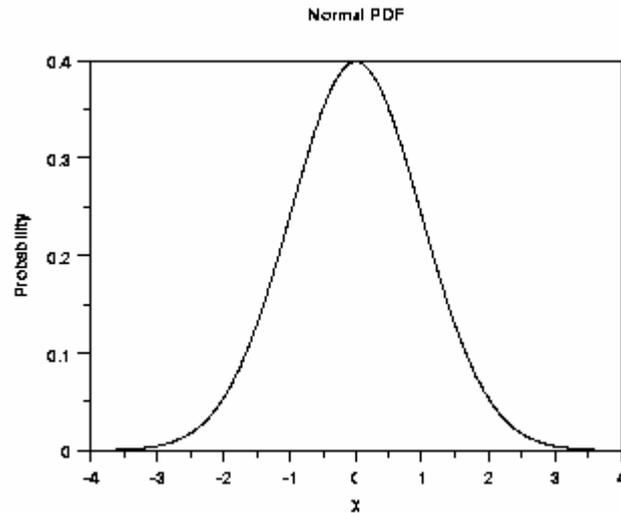
Billington & Allan (1983), descrevem a distribuição normal, muito comum na análise de diversos processos tanto fabris como de outros gêneros. Pode-se dizer que a distribuição normal ou gaussiana é que tem sua aplicação mais largamente usada nas mais diversas áreas para análises estatísticas na indústria, serviços, medicina e agricultura, entre outros.

A distribuição normal é largamente usada para descrever o comportamento dos mais variados processos industriais como cartas de controle de peças usinadas, estudos estatísticos de características populacionais e demográficas, cálculo de probabilidades de afecções de doenças nas áreas da medicina e produtividade agrícola de diferentes espécies de sementes de culturas agrícolas.

Seus principais parâmetros são a média e o desvio padrão e sua f.d.p. pode ser expressa por:

$$f(T) = \frac{1}{\sigma_T \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{T - \bar{T}}{\sigma_T} \right)^2} \quad (3.23)$$

O gráfico da função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma distribuição normal pode ser visualizado abaixo.



Fonte: *Engineering Statistic Handbook - Section 1.3.6.6.1 (web)*

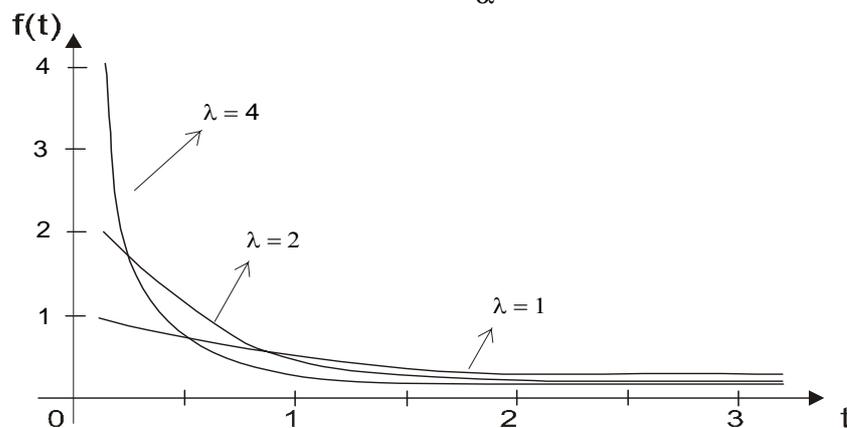
FIGURA 3 – Gráfico de uma f.d.p. de uma distribuição normal

### 3.2.2 Distribuição exponencial

É uma distribuição de probabilidade que se caracteriza por ter uma função de taxa de falha constante. A função de densidade para um tempo de falha T com distribuição exponencial é dada por, conforme descrito por Lopes (2001):

$$f(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}}, \quad (t \geq 0), \quad (3.24)$$

$\alpha \geq 0$  vem a ser o tempo médio de vida e  $\lambda = \frac{1}{\alpha}$  conforme FIGURA 4.



Fonte: LOPES (2001, p.32)

FIGURA 4 - Função densidade de probabilidade exponencial para alguns valores de  $\lambda$

a) Características da distribuição exponencial

- Esperança matemática da distribuição exponencial = MTTF

$$\text{MTTF} = E(x) = \frac{1}{\lambda} = \alpha \quad . \quad (3.25)$$

- Variância da distribuição exponencial

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^2} = \alpha^2 \quad . \quad (3.26)$$

- Função de confiabilidade

$$R(t) = e^{-t/\alpha} \quad . \quad (3.27)$$

### 3.2.3 Distribuição log-normal

A distribuição log-normal é muito utilizada para caracterizar tempo de vida de equipamentos ou componentes. A função de densidade para uma distribuição log-normal é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad (3.28)$$

onde  $\mu$  e  $\sigma$  seguem as mesmas condições de uma distribuição normal. Essa relação significa que dados provenientes de uma distribuição log-normal podem ser analisados segundo uma distribuição normal, trabalhando-se com o logaritmo dos dados ao invés dos valores originais, conforme Lopes (2001).

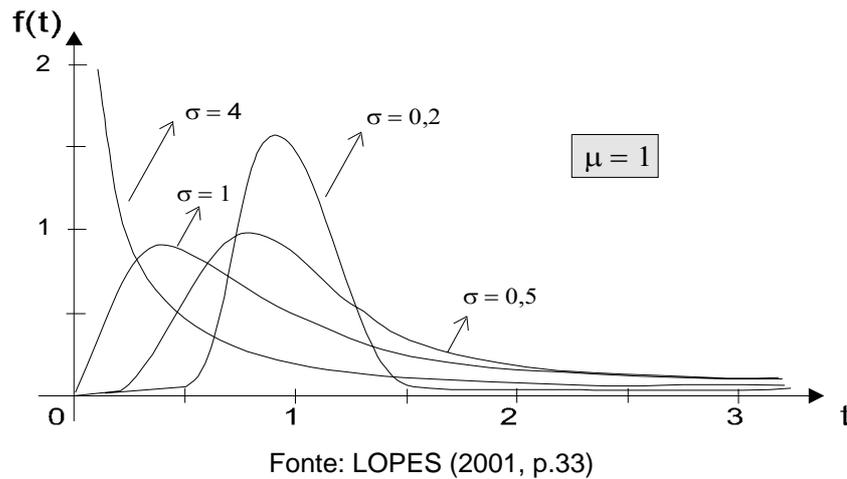


FIGURA 5 - Função densidade de probabilidade log-normal para  $\mu = 1$  e alguns valores de  $\sigma$

a) Características da distribuição log-normal

- Esperança matemática da distribuição log-normal = MTTF

$$\text{MTTF} = E(x) = e^{\frac{\mu + \sigma^2}{2}} \quad (3.29)$$

- Variância da distribuição log-normal

$$V(x) = e^{2\mu + 2\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (3.30)$$

- Função de confiabilidade

$$R(x) = \Phi \left\{ - \left[ \frac{\log(t) - \mu}{\sigma} \right] \right\}, \quad (3.31)$$

cujo  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição acumulada de uma normal padrão.

### 3.2.4 Distribuição de Weibull

A distribuição de Weibull foi proposta por WEIBULL (1954) em estudos relacionados ao tempo de falha devido à fadiga de metais. Ela é muito utilizada para descrever o tempo de falha para produtos industrializados, pois é um tipo de distribuição com uma grande variabilidade de formas. É uma distribuição

amplamente utilizada por ser muito flexível. Ela pode assumir diferentes formatos e aproximar-se de outras distribuições.

De fato, dependendo dos valores dos parâmetros nas suas funções de confiabilidade, pode ser adaptada a diferentes distribuições e diferentes dados experimentais, os quais não podem ser representados por outras distribuições que não Weibull.

Segundo Lopes (2001) a função densidade de probabilidade pode ser definida por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left( \frac{t}{\eta} \right)^\beta} \quad (3.32)$$

sendo a função confiabilidade definida por  $R(t) = \int_t^\infty f(t)dt$ , vem a ser:

$$R(t) = e^{-\left( \frac{t}{\alpha} \right)^\beta}, \quad (3.32)$$

e a função probabilidade de falha:

$$Q(t) = 1 - e^{-\left( \frac{t}{\alpha} \right)^\beta} \quad (3.33)$$

E a taxa de falhas  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$ , definida por

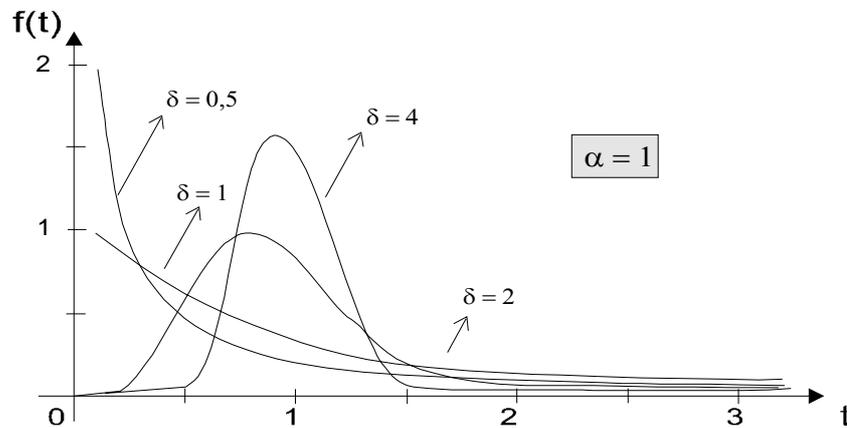
$$\chi(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \quad (3.34)$$

$\beta$  é definido como o parâmetro de forma da distribuição, enquanto  $\eta$  é definido como a vida características. Estes dois parâmetros definem a distribuição de Weibull.

Para  $\beta=1$  representa taxa de falhas constante, o que é característico de uma distribuição exponencial

Quando  $\beta > 1$  temos uma taxa de falhas crescente, o que é característico de períodos de desgaste dos equipamentos.

Já para um  $\beta < 1$ , temos uma taxa de falhas decrescente, típico das fases de mortalidade infantil e problemas de qualidade.



Fonte: LOPES (2001, p.33)

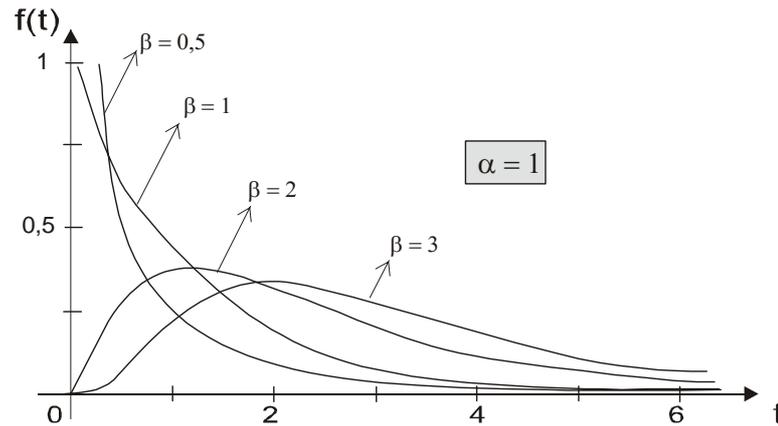
FIGURA 6 - Influência de  $\beta$  (aqui representado por  $\delta$ ) na f.d.p. de uma distribuição de Weibull

### 3.2.5 Distribuição Gamma

A função Gamma é descrita por Lopes (2001) como uma distribuição muito usada para descrever variáveis aleatórias limitadas à esquerda. Um sistema apresentará essa distribuição se a falha do mesmo associar-se a ocorrência de “n” sub-falhas a uma taxa exponencial constante  $\lambda$ . A função de densidade de probabilidade da distribuição gamma é dada por:

$$f(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\alpha^\beta \Gamma(\delta)} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)}, \quad t \geq 0 \text{ e } \alpha \text{ e } \beta > 0 \quad (3.35)$$

em que  $\Gamma(x)$  representa a função Gamma. A função Gamma é muito flexível, mudando sua forma de acordo com a variação de  $\beta$  (FIGURA 7).



Fonte: LOPES (2001, p.36)

FIGURA 7 - Função densidade de probabilidade Gamma para alguns valores de  $\beta$

Observa-se que a distribuição Qui-quadrado é um caso particular da distribuição Gamma, para  $\alpha = 2$  e  $\delta(\text{ou } \beta) = \nu/2$ , cujo  $\nu$  = graus de liberdade.-  
Esperança matemática da distribuição gamma = MTTF

$$\text{MTTF} = E(x) = \alpha\beta \quad (3.36)$$

- Variância da distribuição gamma

$$V(x) = \alpha^2 \beta \quad (3.37)$$

- Função de confiabilidade

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}} \sum_{j=0}^{\beta-1} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^j \frac{1}{j!} \quad (3.38)$$

### 3.2.6 Distribuição Weibull Mista

Na maioria das aplicações prática em confiabilidade, teremos mais de um modo de falhas acontecendo em um componente ou sistema que estiver sendo analisado. BILLINGTON, R.; ALLAN, R. N. (1983), descrevem esta distribuição pode ajustar-se para a análise do ciclo de vida completo do produto, desde sua fase de

início de operação até a fase de desgaste, passando pela fase de vida útil, ajustando uma distribuição de Weibull para cada fase. Sua p.d.f. pode ser descrita por,

$$f(T) = p_1 \cdot f_1(T) + p_2 \cdot f_2(T) + \dots + p_s \cdot f_s(T),$$

$$f(T) = \sum_{i=1}^s p_i \frac{\beta_i}{\eta_i} \left( \frac{T}{\eta_i} \right)^{\beta_i - 1} e^{-\left( \frac{T}{\eta_i} \right)^{\beta_i}}, \quad (3.39)$$

onde  $s$  representa o número de populações envolvidas,  $\beta$  e  $\eta$  os parâmetros de forma e vida característica, respectivamente.

### 3.3 Estimativa dos parâmetros

#### 3.3.1 Método de plotagem das probabilidades

Consiste na plotagem dos dados em papéis desenvolvidos em escalas adequadas às distribuições de probabilidades, como Weibull por exemplo, onde a função desconfiabilidade  $Q(t)$  (c.d.f) pode ser representada por,

$$F(T) = Q(T) = 1 - e^{-\left( \frac{T}{\eta} \right)^{\beta}}. \quad (3.40)$$

linearizando-se esta função tem-se,

$$\ln(1 - Q(T)) = \ln e^{-\left( \frac{T}{\eta} \right)^{\beta}},$$

$$\ln(-\ln(1 - Q(T))) = \beta \ln\left( \frac{T}{\eta} \right),$$

$$\ln\left( \ln\left( \frac{1}{1 - Q(T)} \right) \right) = \beta \ln(T) - \beta \ln(\eta),$$

se

$$y = \ln\left( \ln\left( \frac{1}{1 - Q(T)} \right) \right), \quad x = \ln(T),$$

então,

$$y = \beta x - \beta \ln(\eta). \quad (3.41)$$

Resultando em uma equação linear com uma inclinação  $\beta$  e uma intersecção  $\beta \ln(\eta)$ .

Com os parâmetros  $y = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-Q(T)}\right)\right)$  e  $x = \ln(T)$ , é possível plotar o gráfico das coordenadas  $x$  e  $y$ .

Os valores de  $x$  serão simplesmente os tempos até a falha, enquanto que a determinação de  $y$  feita será através da determinação das categorias medianas dos tempos das falhas. As categorias medianas podem ser determinadas através de tabelas como apresentadas em Weibull Analysis Handbook, Appendix B, ALBERNETHY(1983).

Outra maneira de obter-se as categorias medianas é através da fórmula de Bernard segundo ALBERNETHY (1983).

$$P_{0,50} = \frac{i-0,3}{N+0,4} \times 100\% \quad (3.42)$$

### 3.3.2 Método dos mínimos quadrados (regressão linear)

O método dos mínimos quadrados é um dos métodos mais aplicados para estimação de parâmetros de funções complexas, se adequando muito bem à funções que possam ser linearizadas. Se a regressão for em  $Y$ , será escolhido o alinhamento que minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os pontos e a reta na direção  $Y$ . Se a regressão for em  $X$ , será escolhido o alinhamento que minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os pontos e a reta na direção  $X$ .

Considerando-se o conjunto de dados  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ , a melhor adequação destes pontos a uma linha reta é dada pela função de estimação:

$$y = \hat{a} + \hat{b}x \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left( \hat{a} + \hat{b}x_i - y_i \right)^2 &= \min(a,b) \sum_{i=1}^N (a + bx_i - y_i)^2, \\ \sum_{i=1}^N \left( \hat{a} + \hat{b}y_i - x_i \right)^2 &= \min(a,b) \sum_{i=1}^N (a + by_i - x_i)^2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são as estimativas dos mínimos quadrados de  $a$  e  $b$ , e  $N$  é o número de pontos.

A adequação dos dados ao modelo linear pode ser medido pelo coeficiente de correlação  $\rho$ . Este coeficiente pode ser definido por,

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad (3.45)$$

onde,  $\sigma_{xy}$  = covariância de  $x$  e  $y$ ,  $\sigma_x$  = desvio padrão de  $x$ ,  $\sigma_y$  = desvio padrão de  $y$ .

### 3.3.3 Método da máxima verossimilhança

Um estimador de máxima verossimilhança tem por finalidade determinar quais são os parâmetros para a distribuição de probabilidade em estudo, que mais provavelmente se aplicariam a uma dada amostra. No caso da distribuição de Weibull, o estimador de máxima verossimilhança tem a finalidade de escolher qual o par de  $\beta$  e  $\eta$  que “melhor explica” a amostra observada.

Para representar o método de máxima verossimilhança, necessita-se de algumas definições:

A função de verossimilhança para um parâmetro genérico  $\theta$ , dados os valores de  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , é:

$$L(\theta / t_1, t_2, \dots, t_n) = L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta). \quad (3.46)$$

Para a função acima, tem-se a seguinte pergunta: “Qual o melhor valor para  $\theta$  que maximize a função  $L(\theta)$ ?” Busca-se, então, “quais são os parâmetros da

distribuição que melhor explicam a amostra em questão?” (HARTER & MOORE, 1969, apud LOPES ( 2001).

Como as observações não-censuradas são relacionadas à função de densidade de probabilidade e as censuradas não o são, essas observações somente informam que o tempo de falha é maior que o tempo de censura, observando, portanto, que a contribuição para  $L(\theta)$  é dada pela sua função de confiabilidade  $R(t)$ ; assim, segundo Lawless (1983), apud Lopes (2001), a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta) \prod_{i=r+1}^n R(t_i; \theta) , \quad (3.47)$$

em que as “r” primeiras observações são as não-censuradas e as “n – r” seguintes são as censuradas.

A expressão acima é equivalente à função abaixo:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n R(t_i; \theta) \prod_{i=1}^r Z(t_i; \theta) , \quad (3.48)$$

mas vale ressaltar que a expressão (3.47) serve para todos os tipos de mecanismos de censuras (Lopes, 2001) e que o mecanismo de censura é não-informativo.

É sempre conveniente trabalhar com o logaritmo da função de verossimilhança, em que os estimadores de  $\theta$  que maximizam  $L(\theta)$  são equivalentes aos que maximizam  $\log[L(\theta)]$ .

Os estimadores de máxima verossimilhança são encontrados, resolvendo-se o sistema de equações a seguir:

$$U(\theta) = \frac{\partial \log [L(\theta)]}{\partial \theta} = 0 . \quad (3.49)$$

O método de máxima verossimilhança só poderá ser utilizado após ter sido definido um modelo probabilístico adequado para os dados. Uma vez determinado o modelo probabilístico, substitui-se a sua p.d.f. no lugar da função acima para a estimação de seus parâmetros.

### 3.4 Prova de exatidão para o ajuste da distribuição

Na escolha de um determinado modelo para ajustar dados relativos a tempo de vida; é imprescindível o uso de métodos gráficos ou analíticos para verificar a hipótese de que os dados seguem determinada distribuição. Uma vez obtidas as provas de ajuste e verificado que a distribuição é rejeitada, deve ser feito um novo ajuste com outro modelo mais adequado. Os principais métodos de adequação de ajuste são: Teste analítico de Qui-quadrado ( $\chi^2$ ), Método analítico de Kolmogorov-Smirnov (K-S) e o Método gráfico comparativo da distribuição teste com o método não-paramétrico de Kaplan-Meier.

#### 3.4.1 Método analítico de Qui-quadrado ( $\chi^2$ )

Esta prova baseia-se na comparação das freqüências observadas e esperadas (ou cálculos usando a distribuição do ajuste). Para isso é necessário agrupar as observações em intervalos, obtendo-se  $x_{ii}$  e  $x_{is}$  como limite inferior e superior do intervalo  $i$ . Para cada intervalo determina-se:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(fo_i - fe_i)^2}{fe_i} \quad (3.50)$$

cujo  $fo_i$  vem a ser a freqüência observada no intervalo “i” e  $fe_i$  a freqüência esperada no mesmo intervalo “i”. O valor  $fe_i$  é determinado através da função de probabilidade acumulada, obtida da seguinte forma:

$$fe_i = [F(x_{ii}) - F(x_{is})]n, \quad (3.51)$$

e  $k$  é o número de intervalos. O qui-quadrado calculado é comparado com o qui-quadrado tabelado e, logo após, conclui-se quanto ao ajuste ou não do modelo aos dados. A prova do  $\chi^2$  deve ser usada quando o número de observações for grande, acima de 30 observações. É comum usá-la em amostras pequenas, porém aconselha-se muita cautela ao fazê-lo.

### 3.4.2 Método analítico de Kolmogorov-Smirnov (K-S)

Esta prova consiste na comparação das freqüências acumuladas observadas com as estimativas pela distribuição do ajuste. A comparação é feita usando-se as freqüências acumuladas de  $X$ , e não as freqüências agrupadas que se usam na prova de qui-quadrado.

Para cada índice  $i: 1 \rightarrow n$ , determina-se:

- a freqüência acumulada observada para o valor ordenado  $x_j$ , a qual é dada por

$$S_n(x_i) = \frac{i}{n} \cdot 100 ;$$

- a freqüência acumulada teórica, usando a  $F(x_i)$  da distribuição teórica;

- o máximo das distâncias entre  $S_n(x_i)$  e  $F(x_i)$ , isto é:

$$DM = \text{Max} \{S_n(x_i) - F(x_i)\} . \quad (23.52)$$

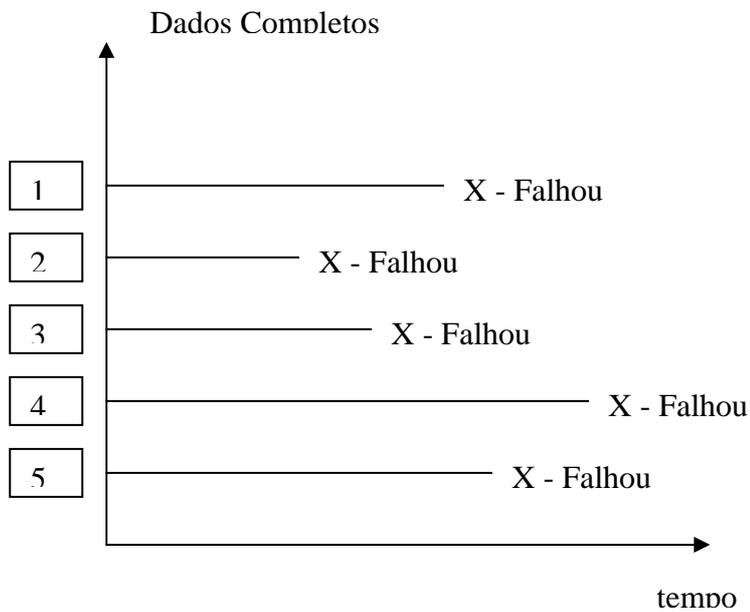
se a distância é suficientemente pequena ( $p < 0,05$ ), conclui-se que o modelo escolhido para o ajuste dos dados deve ser aceito.

Esta prova tem a vantagem de não depender de uma classificação arbitrária dos dados em intervalos, o que pode influenciar os resultados do ajuste. Outra vantagem é que pode ser usada para valores de  $n < 4$ , ou seja, amostras pequenas, o que exige muita cautela quando se utiliza a prova qui-quadrado.

## 3.5 Tipos de dados de vida

### 3.5.1 Dados completos

Quando conhecemos os valores de cada item da amostra que está sendo analisada, dizemos que temos dados completos. No caso de análises de confiabilidade, se for conhecido os tempos até a falha de cada componente, ou elemento analisado, dir-se-á que se têm dados completos. Por exemplo, se for testado cinco itens e todos falharam, e se tivermos a informação de quando cada item falhou, ter-se-ão dados completos, conforme Figura 8.



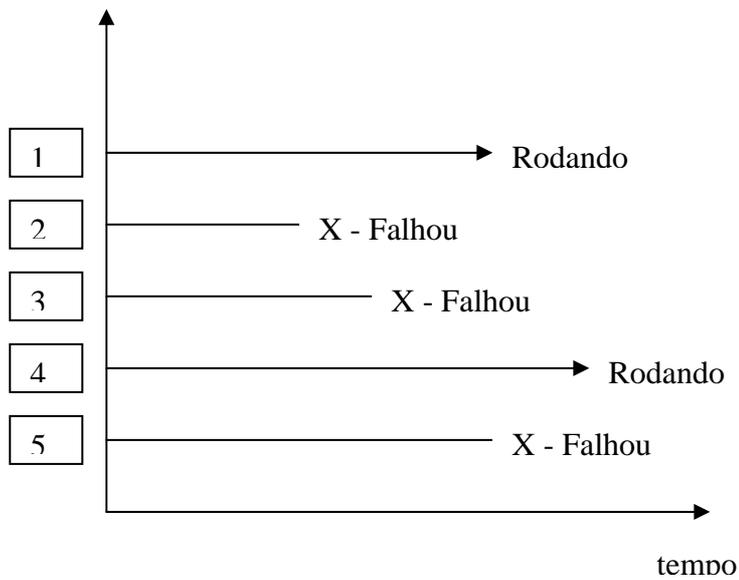
Fonte: Reliasof (2001, p. 156)

FIGURA 8 - Representação de dados completos

### 3.5.2 Dados censurados à direita

Também são chamados de dados suspensos. É o caso quando um determinado teste chega ao seu final e algumas unidades não falharam. Também são chamados de dados censurados à direita.

Se por exemplo, testado cinco itens, somente três falharam, deve-se levar em conta, as unidades que não falharam, pois as mesmas fazem parte da amostra. São muito comuns as amostras não falhadas serem desprezadas, o que é um erro, porque as mesmas irão influenciar nos parâmetros estatísticos resultantes da amostra.



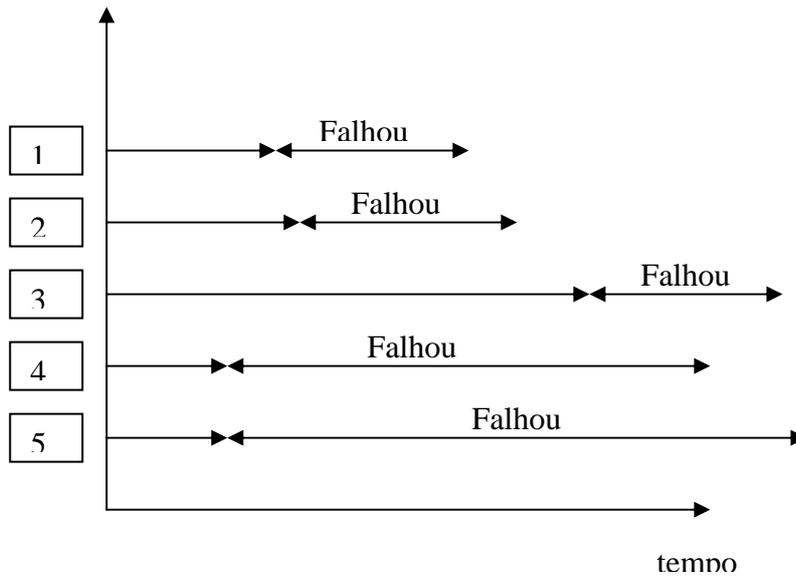
Fonte: Reliasof (2001, p. 159)

FIGURA 9 - Representação de dados censurados à direita

### 3.5.3 Dados censurados no intervalo

São dados que contém incertezas em relação ao tempo exato em que o item falhou. As informações disponíveis são de que os itens falharam em um determinado intervalo de tempo.

Se for executado um teste com cinco itens e realizado inspeções a cada 100 horas, somente saber-se-á que o item que falhou ou não entre as inspeções, e não o momento exato da falha.

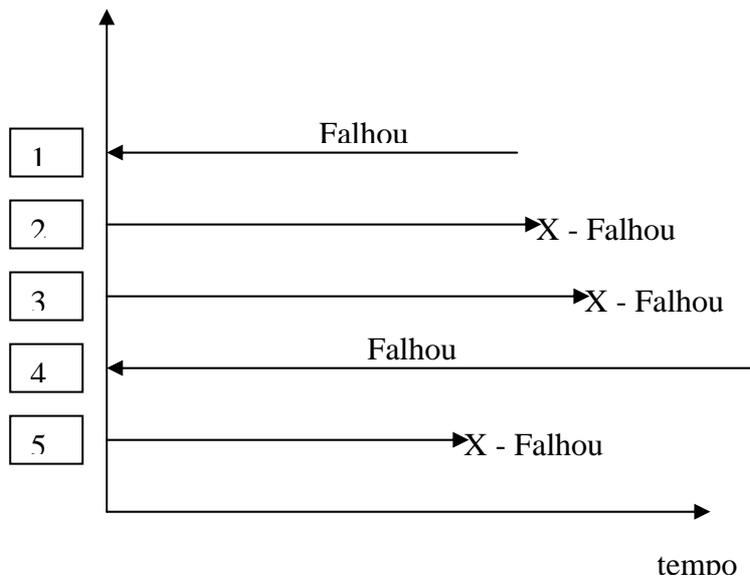


Fonte: Reliasof (2001, p. 161)

FIGURA 10 - Representação de dados censurados no intervalo

#### 3.5.4 Dados censurados à esquerda

É o caso onde se sabe somente que a falha ocorreu antes de um determinado momento. Por exemplo, sabe-se que a falha ocorreu antes das 100 horas, mas não se sabe exatamente quando.



Fonte: Reliasof (2001, p. 163)

FIGURA 11 - Representação de dados censurados à esquerda.

### 3.5.5 Dados agrupados

Todos os tipos de dados mencionados anteriormente podem ser agrupados. Dados agrupados são utilizados em testes onde há vários itens que falharam com o mesmo tempo até a falha, ou os itens são agrupados em intervalos, ou há grupos de itens suspensos ao mesmo tempo.

No caso de dados agrupados deve-se ter cuidado na hora da estimação dos parâmetros, pois será considerada na regressão a última posição no agrupamento considerado.

### 3.5.6 Intervalos de confiança

Quando se for estimar a probabilidade de falha de uma população e não saber o exato valor até que todos os itens desta população falharem. Se for realizado testes com diferentes amostras da mesma população, pode-se obter resultados diferentes para diferentes amostras. Os intervalos de confiança nos dão uma dimensão da probabilidade da falha ocorrer.

Os intervalos de confiança podem ser estabelecidos unilateralmente, estabelecendo uma porcentagem maior ou menor que  $X$ , ou bi-lateralmente, estabelecendo que  $X$  por cento da população estarão entre o intervalo  $Y$  e  $Z$ .

### 3.5.7 Síntese do Capítulo

Neste capítulo iniciou-se revisando os conceitos básicos em probabilidade estatística para proporcionar um nivelamento dos conhecimentos que são necessários para um entendimento básico dos conceitos que são apresentados neste trabalho.

Posteriormente se iniciou uma explanação das principais distribuições estatísticas e métodos para a estimação dos seus parâmetros, provas de ajustes, tipos de dados de vida e uma breve explanação sobre intervalos de confiança. Estes conhecimentos são aplicados na análise de sistemas reparáveis, cuja definição será abordada no próximo capítulo.

## **4 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE PARA SISTEMAS NÃO REPARÁVEIS E SISTEMAS REPARÁVEIS**

---

### **4.1 Sistemas não reparáveis**

Sistemas não reparáveis são aqueles que podem ser definidos com sendo descartados quando deixarem de desempenhar suas funções satisfatoriamente. Peças ou componentes se enquadram neste caso.

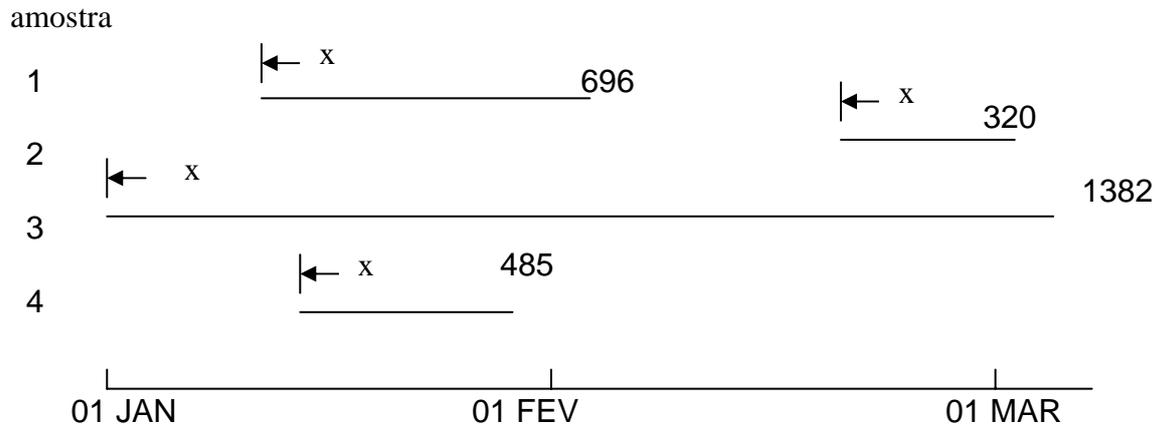
#### **4.1.1 Análise estatística de tempo até a falha para peças ou componentes**

Supondo que  $n$  peças forem colocadas em teste sob condições idênticas e de tal forma que nenhuma delas é afetada por nenhuma outra. Assim estamos considerando que os tempos até falha das  $n$  peças são amostras de uma mesma função de distribuição  $F_X(x)$ , ou seja, que os tempos até a falha são independentes e identicamente distribuídos (IID).

Esta é uma condição fundamental para a aplicação das técnicas anteriormente vistas. Ou seja, na análise de tempos até a primeira falha de peças ou componentes, expostos às mesmas condições de uso ou teste, poderemos procurar a distribuição estatística que melhor representa as ocorrências das falhas e a estimação dos seus respectivos parâmetros pelas técnicas vistas anteriormente.

Estas condições não são encontradas no caso de sistemas reparáveis. As falhas normalmente não são IID, ou seja, não são independentes e não são representativas de uma mesma distribuição estatística. Portanto, nestes casos, faz-se necessário a aplicação de técnicas adequadas para estas condições.

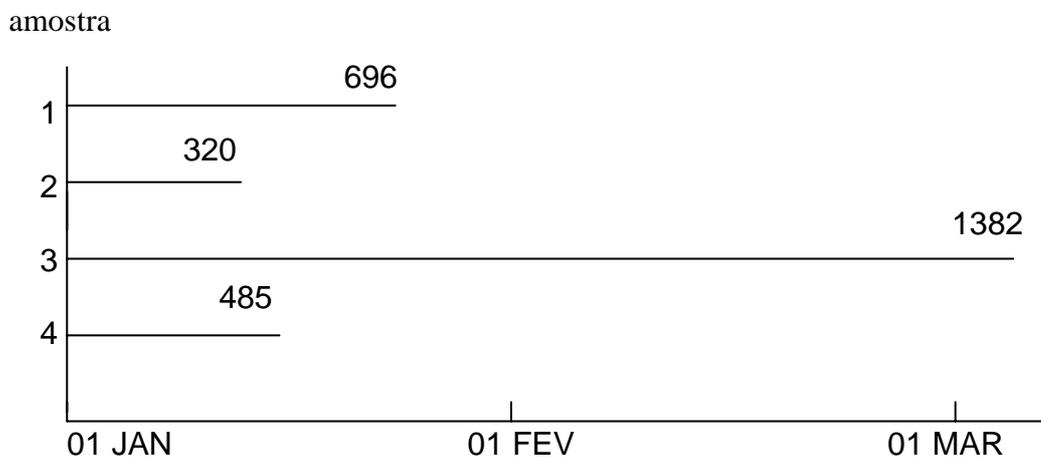
As Figuras 12, 13 e 14 foram apresentadas por Asher & Feingold (1984, p.15) e ilustram a situação onde quatro peças são colocadas em teste aleatoriamente.



Fonte: Asher & Feingold (1984, p.15)

FIGURA 12 - Tempos até falha de peças colocadas em teste aleatoriamente

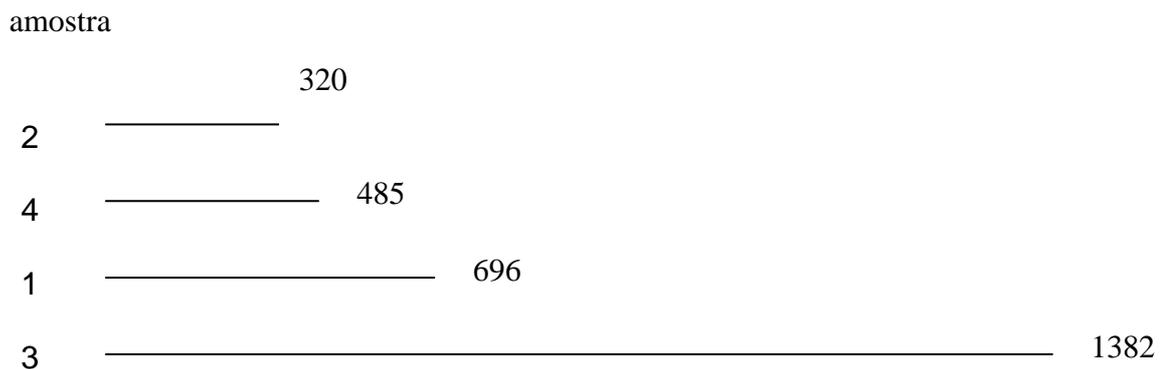
Como nas análises de confiabilidade o que interessa é o tempo até a falha ( $x$ ), sendo irrelevante o instante em que as amostras foram colocadas em teste, possibilitando-nos representar esta mesma situação pela figura 13.



Fonte: Asher & Feingold (1984, p.15).

FIGURA 13 - Tempos até a falha de peças colocadas em teste simultaneamente

A irrelevância da cronologia e a equivalência dos dados representados pelas duas figuras acima podem ser visualizadas pela figura abaixo, reordenando os dados em ordem crescente e omitindo a escala cronológica.



Fonte: Asher & Feingold (1984, p.15).

FIGURA 14 - Tempos até a falha das peças reordenadas

#### 4.1.2 Análise da taxa de falha para sistemas não reparáveis ou partes (FOM)

No item 3.1.8 analisamos o conceito de taxa de falhas. Estes conceitos se aplicam ao cálculo de taxas de falhas de sistemas não reparáveis.

Asher & Feingold (1984) usam a notação  $h(x)$  para definir a taxa de falhas ou FOM (*force of mortality*) como preferem denominá-la, para sistemas não reparáveis.

$$h(x) = \frac{dF(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{R(x)} \quad (4.1)$$

FOM pode ser interpretada como a probabilidade condicional de uma peça de uma determinada população com distribuição  $F(x)$ , colocada em serviço em  $x=0$ , e tendo sobrevivido até o instante  $x$ , falhar em  $(x, x+dx)$ .

Nos itens 3.2.1 e 3.2.2 abordar-se-á a diferença entre a taxa de falhas para sistemas não reparáveis (FOM) e a taxa de falhas para sistemas reparáveis (ROCOF).

## 4.2 Análise de confiabilidade para sistemas reparáveis

A maioria dos sistemas mecanizados que nos deparamos, são de natureza reparável. Ou seja, quando falham são restaurados à sua condição de operação ao invés de serem substituídos.

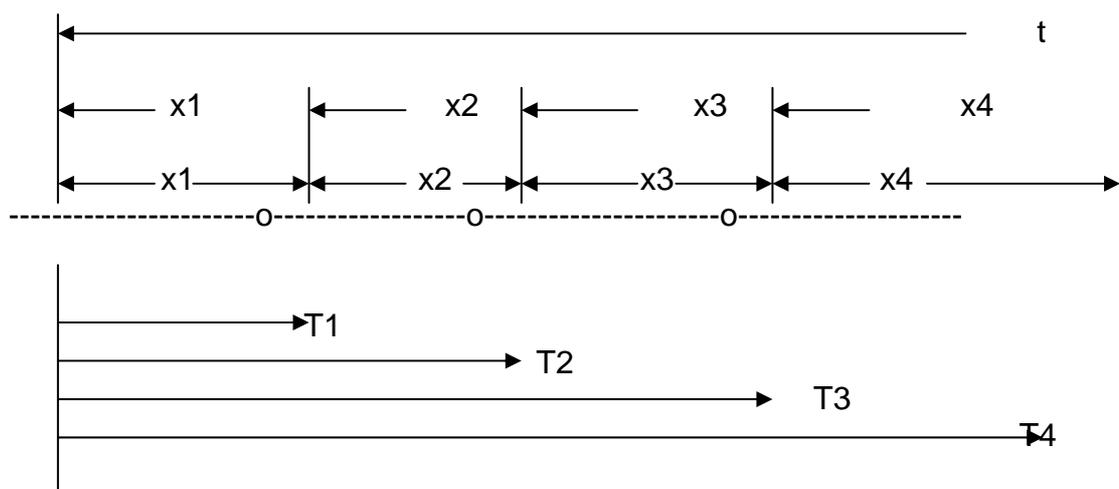
Análise de confiabilidade nestes casos difere das análises descritas até aqui. Normalmente as falhas nestes casos não são IID independentes e identicamente distribuídas). Dificilmente se pode representar os eventos amostrais através de uma distribuição estatística. Técnicas apropriadas para estes casos serão descritas a seguir.

### 4.2.1 Processos estocásticos pontuais

Um processo estocástico pontual é um modelo matemático para fenômenos físicos caracterizados por eventos localizados e distribuídos aleatoriamente em um contínuo (Asher & Feingold, 1984).

Em confiabilidade, o contínuo é o tempo e os eventos localizados são as falhas.

A figura 15 mostra um processo aleatório pontual representando sucessivas falhas de um sistema. Supõe-se que o tempo de reparo é desprezível. Neste caso, também estaremos analisando o tempo até a falha e o tempo cronológico não é importante.



Fonte: Asher e Feingold, 1984, p. 18.

FIGURA 15 - Exemplo de processo estocástico pontual

A diferença fundamental entre tempos até a falha de peças e tempos entre falhas sucessivas de um sistema pode ser percebida pela comparação das Figuras 17, 18, 19 e 20.

$T_i$   $i=1,2,3,\dots$ , mede o tempo total desde o instante zero até a  $i$ -ésima falha e é definido por Feingold (1984) como *arrival time*.  $T_i$  é a variável aleatória (VA). Nós o definimos como tempo total até a falha.

$X_i$   $i=1,2,3,\dots$ , é o tempo entre as sucessivas falhas entre a  $(i-1)$  e a  $i$ -ésima falha, onde  $X_0=0$ .  $X_i$  é uma VA. Asher&Feingold (1984) definem  $X(i)$  como *interarrival time*. Também pode ser definido como tempo entre falhas sucessivas. A variável  $x_i$  mede o tempo transcorrido desde a última falha. Note que  $x_i$  é análogo a  $x$  na Figura 12, mas  $t$  não tem nenhuma analogia ao modelo usado para peças.

Sendo  $N(t)$  o número de falhas que entre  $(0, t)$ , o valor esperado (esperança matemática) de  $N(t)$  é denotado por  $V(t)$ ,  $V(t) = E[N(t)]$ . Assumindo que  $V(t)$  seja contínua, sua derivada  $v(t) = V'(t)$  é a razão de variação do valor esperado no tempo, **denominado razão de ocorrência de falhas**, ROCOF, do inglês *rate of occurrence of failures*.

ROCOF não deve ser confundida com a taxa de falhas (ou *force of mortality*, FOM) definida no capítulo 2 é a probabilidade  $v(t)dt$  que uma falha, não necessariamente a primeira, ocorra em  $(t, t + dt)$ .

Esta definição contrasta com a definição de FOM,  $h_x(x)dx$ , que é a probabilidade da primeira e única falha em  $(x, x + dx)$ , visto que já sobreviveu até o instante  $x$ , uma vez que, sendo não reparável, seria descartado quando falhasse.

Como  $v(t) = dE(N(t))/dt$ , um estimador para  $v(t)$  é,

$$\hat{v}(t) = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{N(t, t + \Delta t)}{\Delta t} . \quad (4.2)$$

#### 4.2.2 Diferença entre FOM $h(x)$ , para peças, e ROCOF $v(t)$ , para sistemas reparáveis

Asher e Feingold (1984), definem  $v(t)$  como a derivada de um número de falhas,  $\int_0^{t_0} v(t) dt$  é o valor esperado de falhas no intervalo  $(0, t_0)$ ,  $E[N(t_0)]$ .

Já  $h(x)$  é uma taxa relativa,  $\int_0^{x_0} h_x(x) dx = \int_0^{x_0} \frac{f_x(x)}{R_x(x)} dx$ , não pode ser interpretada como um número esperado de falhas em  $(0, x_0)$ . Se colocarmos  $p$  peças em teste em  $x = 0$ , o número esperado de falhas em  $(0, x_0)$  é  $pF_x(x_0) = p \int_0^{x_0} f_x(x) dx$ . Este número esperado de falhas não é simplesmente a integral de FOM.

#### 4.2.3 Processo de Poisson homogêneo (HPP) (*homogeneous Poisson process*)

O processo HPP pode ser definido como uma seqüência de eventos (no nosso contexto, falhas), independentes, e exponencialmente distribuídos. Outros o definem como um processo estocástico com incrementos independentes e estacionários.

O processo estocástico  $\{N(t), t \geq 0\}$  é classificado como HPP se:

- ( a )  $N(0) = 0$
- ( b )  $\{N(t), t \geq 0\}$  tem incrementos independentes
- ( c ) O número de eventos ( falhas ) em cada intervalo  $t_2 - t_1$  tenha uma distribuição de Poisson com média  $\rho(t_2 - t_1)$ .

ou seja, para  $t_2 \geq t_1 \geq 0$ ,

$$\Pr\{N(t_2) - N(t_1) = j\} = \frac{e^{-\rho(t_2 - t_1)} \{\rho(t_2 - t_1)\}^j}{j!}, \text{ para } j \geq 0. \quad (4.3)$$

da condição (c) segue que :

$$E\{N(t_2 - t_1)\} = \rho(t_2 - t_1), \quad (4.4)$$

onde  $\rho$  é a taxa de ocorrência de falhas (*rate of occurrence of failures*), ROCOF, segundo Ascher & Feingold (1984). Como o processo HPP tem incrementos estacionários e independentes,  $v(t) = \rho = \frac{1}{E(x)}$ , ou seja, ROCOF é constante. Desta definição resulta que a função confiabilidade é.

$$R(t_1, t_2) = e^{-\rho(t_2 - t_1)}. \quad (4.5)$$

#### 4.2.4 Processo de Poisson não homogêneo (NHPP) (*nonhomogeneous Poisson Process*)

NHPP distingue-se do HPP somente pela ROCOF, a qual não é constante como no caso anterior, mas varia com o tempo. Assim, as condições (a) e (b) descritas anteriormente, permanecem para este caso, mas a condição (c) fica:

(c') As falhas em qualquer intervalo  $(t_1, t_2)$  estão distribuídas conforme a distribuição de Poisson com média  $\int_{t_1}^{t_2} \nu(t) dt$ , para todo  $t_2 > t_1 \geq 0$ . Em algumas literaturas  $\nu(t)$  é expresso por  $\rho(t)$ .

$$\Pr\{N(t_2) - N(t_1) = j\} = \frac{e^{-\int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt \right\}^j}{j!}, \quad (4.6)$$

para  $j = 0$ . De (c') vem que

$$E[N(t_2) - N(t_1)] = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt \quad (4.7)$$

e

$$R(t_1, t_2) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt}. \quad (4.8)$$

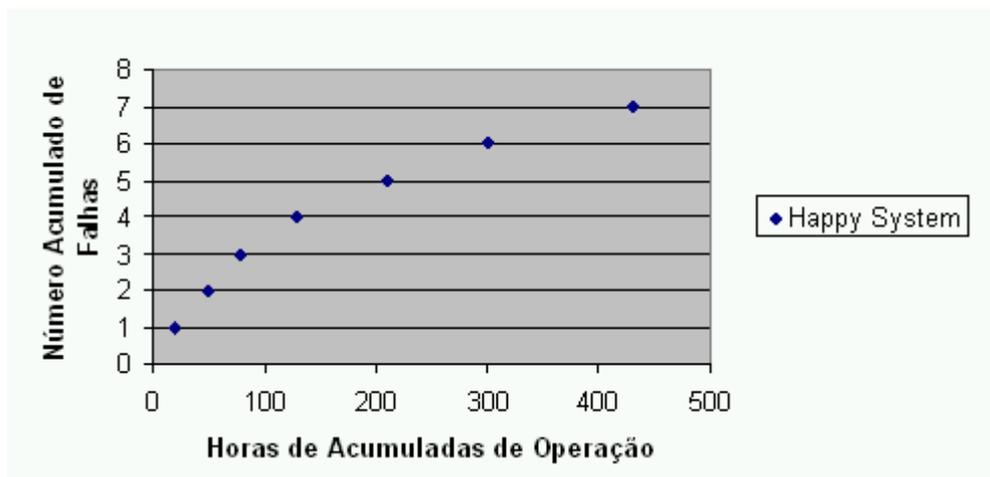
### 4.3 Análise de tendência para os dados de falha

Quando estivermos fazendo análises de confiabilidade, buscamos saber se o sistema em estudo está melhorando ou deteriorando com o tempo. Durante a fase de desenvolvimento de máquina, vamos incorporando melhorias no projeto e precisamos de ferramentas para analisar se as melhorias estão sendo eficazes. Também na simples análise de um sistema poderemos estar buscando informações a respeito da tendência dos dados para sabermos que técnica é a mais adequada para a análise.

#### 4.3.1 Análise gráfica

A análise mais simples que podemos fazer é uma análise gráfica dos dados de falhas.

A Figura 21 mostra uma clara tendência da curva ser côncava para baixo, à medida que os dados vão ficando mais espaçados com o tempo. Asher & Feingold (1984) definem um sistema com esta tendência de “*happy system*” em oposição a um “*sad system*” quando os dados tiverem a tendência de ficarem menos espaçados.;



Fonte: Asher & Feingold (1984, p.74)

FIGURA 16 - Gráfico de um sistema que está melhorando ao longo do tempo

Quando se tem uma base de dados relativamente grande, entretando, pode ser difícil se perceber uma tendência somente pela análise visual. Uma técnica alternativa seria dividir os dados em subintervalos de tempo e plotar o ROCOF

médio de cada intervalo ou o número de falhas de cada intervalo. A Tabela 1 mostra dados de reparação de um motor diesel de submarino, apresentados por Lee (1980). Serão desconsiderados os dados das manutenções completas programadas, as quais estão indicadas por um asterisco.

TABELA 1 – Tempos até a falha do motor diesel (em horas) número 4 do USS Grampus

Tempos	Tempos	Tempos	Tempos
860	4411	8468	13399
1203	4456	8690	13668
1258	4517	9042	13780
1317	4889	9330	13877
1442	4910	9394	14007
1897	5414	9426	14028
2011	5676	9872	14035
2122	5755	10191	14173
2439	6137	10594	14357
3197	6221	11511	14449
3203	6311	11575	14587
3298	6613	12100	14610
3902	6975	12126	15070
3910	7335	12368	15574
4000	7723	12681	22000
4247	8158	12795	22575

Fonte: Asher & Feingold (1984, p. 76)

Como há um total de 58 falhas em 22.575 horas de operação, é razoável usar-se cinco subintervalos de 4.515 horas cada. O número de falhas em cada subintervalo é 16, 14, 12 e 2. Fica claro que a ROCOF é constante para tempos pequenos e moderados; tendo uma drástica queda para tempos grandes. Se mudarmos o número de subintervalos, podemos notar variações diferentes para os diferentes intervalos. Se expandirmos a observação para 10 intervalos de 2258 horas cada, o número de falhas em cada intervalos passa a ser 7, 9, 9, 5, 6, 8, 12, 0, 0, 2.

Nota-se que a interpretação pode ser um pouco diferente, mas mantém-se a ROCOF constante para tempos pequenos, com pequenas variações para tempos intermediários e uma drástica queda para tempos grandes.

Esta interpretação ligeiramente diferente mostra a limitação deste tipo de análise.

Análises algébricas podem ser aplicadas aos dados, para se investigar tendências.

#### 4.3.2 Postulado de Duane

Em 1968, J. T. Duane publicou estudos com a análise de diversos sistemas, e demonstrou que o MTBF acumulado versus o tempo acumulado de teste lineariza-se quando grafado em escala logarítmica.

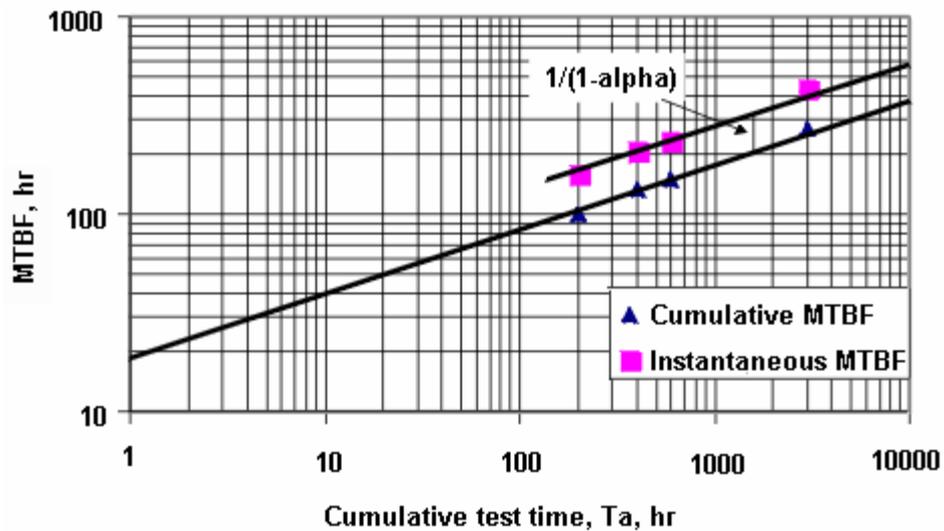


FIGURA 17 - Modelo de Duane – MTBF acumulado versus tempo de teste acumulado

Do gráfico acima podemos assumir que:

$$\ln(\text{MTBF}_c) = \ln b + \alpha \ln(T), \quad (4.9)$$

$$\text{MTBF}_c = bT^\alpha, \quad (4.10)$$

e a taxa de falhas acumulada  $\lambda_c$ :

$$\lambda_c = \frac{1}{b} T^{-\alpha}, \text{ ou } \overline{\lambda}_c = \frac{1}{b} T^{-\alpha}. \quad (4.11)$$

O número de falhas esperado até o tempo T, é:

$$N(T) = \bar{\lambda}cT \quad , \text{ ou } \quad \frac{1}{b}T^{1-\alpha} \quad , \quad (4.12)$$

onde,

$\bar{\lambda}c$  = média estimada da taxa de falha acumulada;

$T$  = tempo total acumulado de teste ou tempo de desenvolvimento;

$\frac{1}{b}$  = taxa de falhas acumulada em  $T=1$ , ou no início do teste;

$\alpha$  = taxa de melhoria do MTBF ou  $\bar{\lambda}$  .

A taxa de falha instantânea em um momento específico pode ser determinada por:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{d(N(T))}{dT} \\ &= \frac{1}{b}(1-\alpha)T^{-\alpha} \\ &= (1-\alpha)\lambda_c \end{aligned} \quad (4.13)$$

similarmente, usando a equação (4.12),

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{1}{1-\alpha}bT^\alpha \\ &= \frac{1}{1-\alpha}m_c; \quad \alpha \neq 1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde  $\alpha=1$  implica em melhora infinita no MTBF.

Pode ser verificado da equação (4.14) que a linha de melhoria na taxa de falhas instantânea é obtida deslocando-se para baixo a linha da taxa de falhas acumulada paralelamente, pela distância de  $(1-\alpha)$ . Similarmente, pode ser visto da equação (3.14), que a linha de melhoria do MTBF instantâneo é obtido deslocando-

se para cima a linha do MTBF acumulado, paralelamente, pela distância de  $\frac{1}{1-\alpha}$ , conforme ilustrado na Figura 14.

#### 4.3.3 Teste de tendência de Laplace

Determina se os dados apresentam uma tendência ou se os espaçamentos são uniformemente distribuídos. É definido por:

$$U = \frac{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} T_i - \frac{T_m}{2}}{T_m \sqrt{\frac{1}{12(m-1)}}}, \quad (4.15)$$

onde  $m$  é o número de falhas, e  $T_i$  é o tempo de cada falha individual e  $T_m$  é o tempo da última falha da amostra.

A aproximação é adequada para  $m \geq 4$ , com um nível de significância de 5%.

Se  $U = 0$ , não há tendência presente na distribuição. Neste caso podemos concluir que trata-se de dados HPP.

Se  $U > 0$  indica uma tendência crescente (sistema melhorando) e se  $U < 0$ , indica uma tendência decrescente (sistema deteriorando). Neste caso os dados são NHPP.

O teste de Laplace é discutido em detalhes por Cox & Lewis (1966) em "*The Statistical Analysis of Series Events*".

#### 4.3.4 Síntese do Capítulo

Neste capítulo definiu-se sistemas reparáveis e sistemas não reparáveis. Foi apresentada a análise de confiabilidade pertinente para cada um destes casos, mostrando-se a importância de não se atribuir uma distribuição estatística para o caso de sistemas reparáveis. Estes sistemas devem ser abordados como um processo estocástico pontual cuja taxa de falhas tem uma abordagem matemática diferenciada da abordagem da taxa de falhas para sistemas não reparáveis. Também foi apresentada técnica para a análise da tendência dos dados estudados, possibilitando a compreensão se o sistema em questão está deteriorando-se ou melhorando com o passar do tempo.

## 5 ESTUDOS DE CASOS

---

### 5.1 Sistema reparável simples

John Usher (1993) publicou um estudo de caso apontando a diferença entre a análise de confiabilidade para sistemas reparáveis e para peças e os erros que podemos cometer se quando analisamos sistemas reparáveis com as técnicas apresentadas no Capítulo 2, as quais são adequadas somente para peças que estão submetidas a somente um modo de falha e, portanto, podem ser modeladas por uma das distribuições estatísticas apresentadas naquele capítulo.

Usher analisou uma unidade eletrônica empregada em uma instalação telefônica, que será referenciada como sistema. A análise aqui descrita pode também ser aplicada a qualquer sistema reparável, como um trator agrícola ou seus sistemas mecânicos, hidráulicos, elétricos/eletrônicos, como transmissão, motor, eixo dianteiro, eixo traseiro, plataforma do operador e seus sub-sistemas.

O sistema operou por seis meses e apresentou seis falhas após 4123 horas de operação. O resumo das falhas pode ser observada na Tabela 2.

TABELA 2 - Tempo de operação do sistema

Falha $i$	Tempo da Falha ( $T_i$ )	Tempo entre falhas ( $X_i$ )
1	364	364
2	2789	2425
3	3770	981
4	3836	66
5	4107	271
6	4123	16

Fonte: Usher 1993.

O sistema acima foi analisado conforme a distribuição de Weibull, cuja função confiabilidade pode ser expressa por

$$R(t) = \text{Prob}(T > t) = \exp(-\lambda t^\beta) \quad (5.1)$$

A função taxa de falhas (*hazard rate*, definida no capítulo 4), pode ser expressa por:

$$h(t) = \lambda \beta t^{\beta-1} \quad (5.2)$$

Representa a taxa relativa nas quais os componentes falham, visto que sobreviveram até o tempo  $t$ . Ou seja  $h(t)dt$  representa a probabilidade de que um componente que operou do instante  $0$  até o instante  $t$ , venha a falhar em  $(t, t + dt)$ .

Estes dados podem ser grafados usando-se uma Tabela de *rankings* medianos e um papel Weibull. Pode-se também usar o software Weibull<sup>++</sup> da empresa Reliasoft do Brasil, o qual pode ser adquirido comercialmente.

O resultado deste gráfico é mostrado na figura 18.

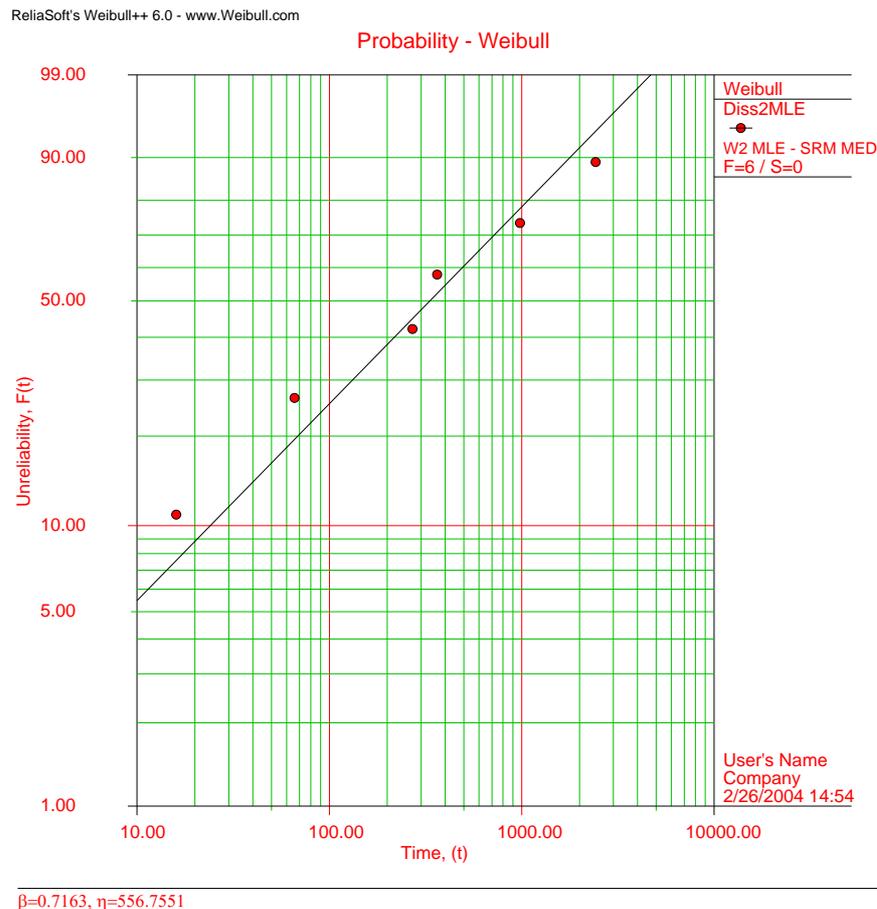


FIGURA 18 - Gráfico Weibull dos dados da tabela tempo de operação do sistema

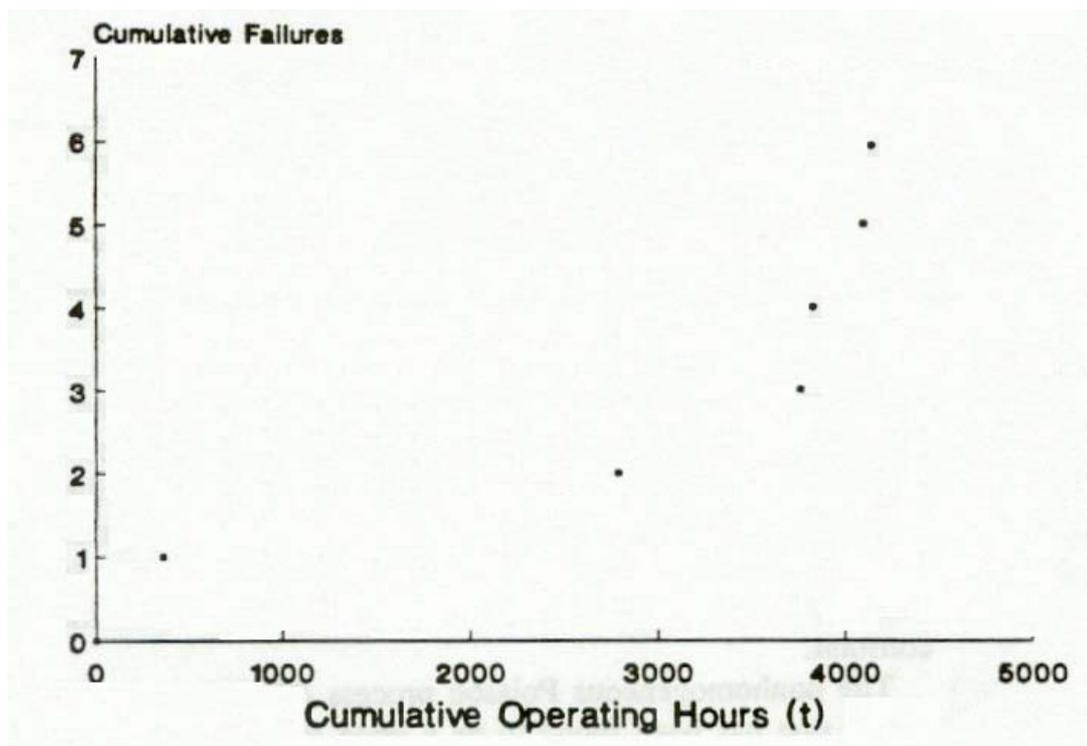
O gráfico nos indica que os dados se adequam a distribuição de Weibull. Pelo método da máxima verossimilhança podemos encontrar os parâmetros  $\lambda = 0,0108$  e  $\beta = 0,72$ .

Substituindo-se estes parâmetros na equação da hazard rate acima, temos que.

$$h(t) = 0,0077t^{-0,28} \quad (5.3)$$

Nota-se que devido a  $\beta < 1$ , esta função é decrescente com o tempo, mostrando que o sistema tem uma tendência das falhas se tornarem mais espaçadas com o passar do tempo.

Entretanto, se analisarmos os dados das falhas acumuladas pelo tempo de operação podemos constatar que o sistema está deteriorando-se.



Fonte: Usher, (1993, p.267).

FIGURA 19 - Análise gráfica da tendência do sistema

Aplicando-se o teste de Laplace descrito em (4.5.2), tem-se

$$U = \frac{14866/5 - 4123/2}{4123(0,1291)} = 1,71$$

confirmando que o sistema está deteriorando.

Isto mostra que a análise dos dados usando-se a distribuição de Weibull não está correta. Isto porque os dados na verdade não pertencem a uma mesma distribuição. Ou seja há diferentes fatores afetando o sistema na medida em que o tempo passa e as condições de operação não são constantes ao longo do tempo. Na prática, as condições de um componente podem estar influenciando nas condições de operação do outro, descaracterizando a condição de independência dos componentes e de que as falhas pertencem a mesma distribuição estatística. Veja que a taxa de ocorrência de falhas está aumentando com o tempo, o que contradiz a análise da hazard rate feita anteriormente.

Este comportamento crescente na taxa de ocorrência de falhas pode estar sendo causado por inúmeros fatores, como alterações no processo de manufatura, a severidade das condições de operação podem estar variando ou o sistema pode estar deteriorando-se.

Analisando-se as falhas acima como um processo estocástico conforme definido no capítulo 4, e não como uma distribuição estatística, obtem-se resultados diferentes.

O processo não homogêneo de Poisson (NHPP) definido em (4.2.4) é um bom modelo para sistemas que exibem uma taxa de falhas ROCOF (*rate of occurrence of failures*) que varia com o tempo, quando os tempos entre falhas não são independentes e nem identicamente distribuídos.

Para um NHPP, assumindo-se que a ROCOF,  $v(t)$ , assume a seguinte forma.

$$v(t) = \lambda \beta t^{\beta-1} \quad (4.4)$$

Quando  $\beta > 1$ ,  $v(t)$  é uma função crescente, implicando em tempos entre falhas decrescentes, o que indica que o sistema está se deteriorando com o tempo.

Quando  $\beta < 1$ ,  $v(t)$  é uma função decrescente, implicando em tempos entre falhas crescentes, mostrando que o sistema está melhorando com o tempo.

Quando  $\beta = 1$ , o NHPP reduz-se a um HPP, com  $v(t) = \lambda$ .

É importante salientar que apesar da expressão da ROCOF  $v(t)$  assumir a mesma forma da função *hazard rate* ( $h(x)$ ) para uma distribuição de Weibull, os tempos entre falhas de uma NHPP não podem ser modelados por esta distribuição, pelo fato dos dados não serem IIDs. É importante salientar que em muitas literaturas, este processo é definido como um processo de Weibull, o que é evitado por Usher (1993, p.270) que salienta que esta terminologia por provocar confusão e levar a interpretações errôneas como a demonstrada acima.

Este autor salienta que, muitos outros autores referem-se a  $v(t)$  e  $h(x)$  como taxa de falhas. Esta duas funções realmente expressam a quantidade de falhas por unidade de tempo, entretanto a ROCOF deve ser interpretada como a probabilidade de uma falha qualquer, não necessariamente a primeira, ocorrer no intervalo  $(t, t + dt)$ .

Isto é diferente da interpretação de  $h(x)dx$  que é a probabilidade de uma peça não reparável colocada em serviço no instante  $x = 0$ , e tendo sobrevivido até o instante  $x$ , venha a falhar no intervalo  $(x, x + dx)$ . Conforme definido por Ascher & Feingold (1984), ROCOF é a taxa **absoluta** nas quais as falhas de um **sistema** ocorrem, enquanto que a **hazard rate** é a taxa relativa em que uma **peça** falha, visto que já sobreviveu até o instante  $x$ .

Seja  $N(t)$  o número de falhas que ocorreram no tempo  $t$ . A probabilidade de um sistema apresentar  $j$  falhas em um intervalo  $(t_1, t_2)$  é dada pela expressão de Poisson.

$$\text{Pr ob}[N(t_2) - N(t_1) = j] = \frac{\left\{ \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \right\}^j \exp\left[ - \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \right]}{j!} \quad (5.5)$$

quando  $\beta = 1, v(t) = \lambda$ , e a NHPP reduz-se a uma HPP:

$$\text{Pr ob}[N(t_2) - N(t_1) = j] = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^j \exp[-\lambda(t_2 - t_1)]}{j!} \quad (5.6)$$

O número esperado de falhas da NHPP, pode ser expresso por:

$$E[N(t_2) - N(t_1)] = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \lambda(t_2)^\beta - \lambda(t_1)^\beta \quad (5.7)$$

A função confiabilidade de um sistema no tempo  $t$  é a probabilidade deste sistema operar no intervalo  $(t, t+dt)$  é a seguinte:

$$R(t, t + dt) = \exp\{-[\lambda(t + dt)^\beta - \lambda t^\beta]\} \quad (5.8)$$

Crow (1974) apresenta estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros  $\lambda$  e  $\beta$  de uma NHPP, assumindo que um sistema único é observado no instante de sua  $m$ -ésima falha.

$$\hat{\beta} = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m-1} \ln\left(\frac{T_m}{T_i}\right)} \quad \text{e} \quad \hat{\lambda} = \frac{m}{T_m^\beta} \quad (5.9)$$

Usando-se os tempos das falhas da Tabela 2, acha-se, pelo método da MLE,  $\hat{\lambda} = 3,22 \times 10^{-7}$  e  $\hat{\beta} = 2,01$ .

Substituindo-se estes parâmetros na equação (5.4), obtém-se a ROCOF para este sistema:

$$v(t) = (6,47 \times 10^{-7}) t^{1,01} \quad (5.10)$$

Pode-se notar que esta é uma função crescente e portanto podemos concluir que o sistema está deteriorando-se.

Usando-se a equação (5.8), encontra-se que a confiabilidade do sistema nas próximas 500h, ou seja, no intervalo (4123 h, 4623 h) é:

$$R(4123, 4623) = \exp\{-[\lambda(4623)^\beta - \lambda(4123)^\beta]\} = 0,21$$

ou seja, há a probabilidade de 21% do sistema operar nas próximas 500 h sem falhar.

Este resultado é significativamente diferente daquele obtido anteriormente quando o sistema foi analisado conforme a distribuição de Weibull.

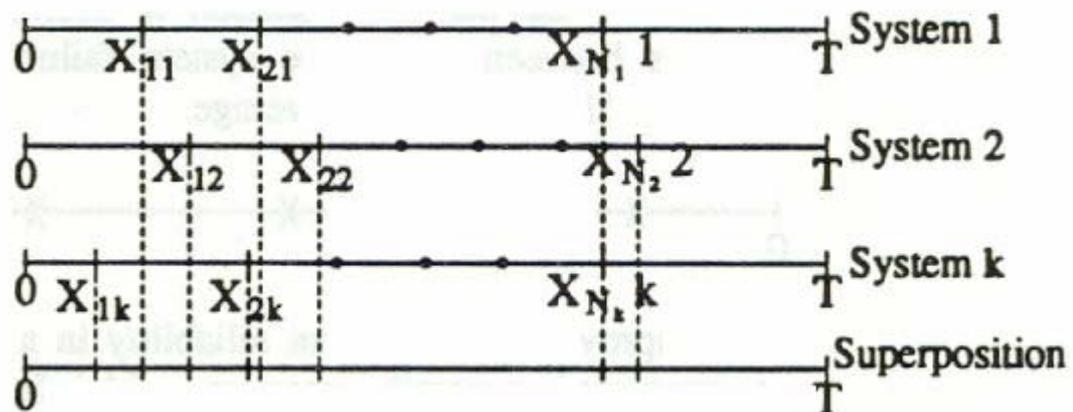
## 5.2 Sistemas reparáveis múltiplos

Crow (1974) desenvolveu o processo de Poisson não homogêneo para modelar a confiabilidade de sistemas reparáveis complexos para sistemas múltiplos, onde várias máquinas são representadas por um sistema equivalente simples.

O sistema equivalente pode ser representado pela superposição de todos os sistemas que o compõem, conforme demonstrado na figura abaixo.

Este método pode ser aplicado para máquinas agrícolas, onde cada unidade em teste representa um sistema e a frota pode ser representada pelo sistema equivalente.

A Figura 20 representa um sistema equivalente composto por  $k$  sistemas.



Fonte: Crow (1993)

FIGURA 20 - Representação de um sistema equivalente composto por  $k$  unidades (ou sistemas)

Para o sistema superposto, há uma falha sempre que qualquer um dos  $k$  sistemas falharem. A função intensidade de falhas do sistema equivalente pode ser expressa por

$$\mu(t) = \lambda\beta t^{\beta-1} . \quad (5.11)$$

As técnicas descritas para o caso do sistema simples podem ser aplicadas ao sistema equivalente simples.

### 5.2.1 Estudo de casos

A seguir compara-se a análise das falhas de um teste de desenvolvimento de uma frota de cinco máquinas testadas respectivamente por 415, 563, 365, 474 e 287 horas.

Um resumo dos eventos registrados durante o teste pode ser visto na tabela abaixo.

TABELA 3 - Resumo das falhas dos cinco protótipos

Protótipo	Evento	Horas	Quantidade
1	Falha	1	1
1	Falha	93	1
1	Falha	121	1
1	Falha	130	1
1	Falha	135	1
1	Suspensão	415	1
2	Falha	12	1
2	Falha	112	1
2	Falha	162	1
2	Falha	169	1
2	Falha	381	1
2	Falha	396	1
2	Falha	529	1
2	Falha	563	1
2	Suspensão	563	1
3	Falha	30	2
3	Falha	35	1
3	Falha	100	2
3	Falha	283	2
3	Falha	312	1
3	Suspensão	365	1
4	Falha	98	1
4	Falha	138	1
4	Falha	280	1
4	Falha	304	2
4	Falha	474	1
4	Suspensão	474	1

continuação...

5	Falha	67	1
5	Falha	134	1
5	Falha	143	1
5	Falha	156	2
5	Falha	261	1
5	Falha	287	1
5	Suspensão	287	1

Primeiramente iremos analisar a confiabilidade da frota considerando uma distribuição de Weibull. Para auxiliar a análise iremos utilizar o software Weibull++ da empresa Reliasoft.

O método de estimação de parâmetros adotado será o MLE (máxima verossimilhança).

O gráfico dos dados de falhas  $F(t)$  (também referenciado como  $Q(t)$  neste trabalho) pode ser visto na Figura 21, onde as linhas vermelhas denotam um intervalo de confiança de 90%.

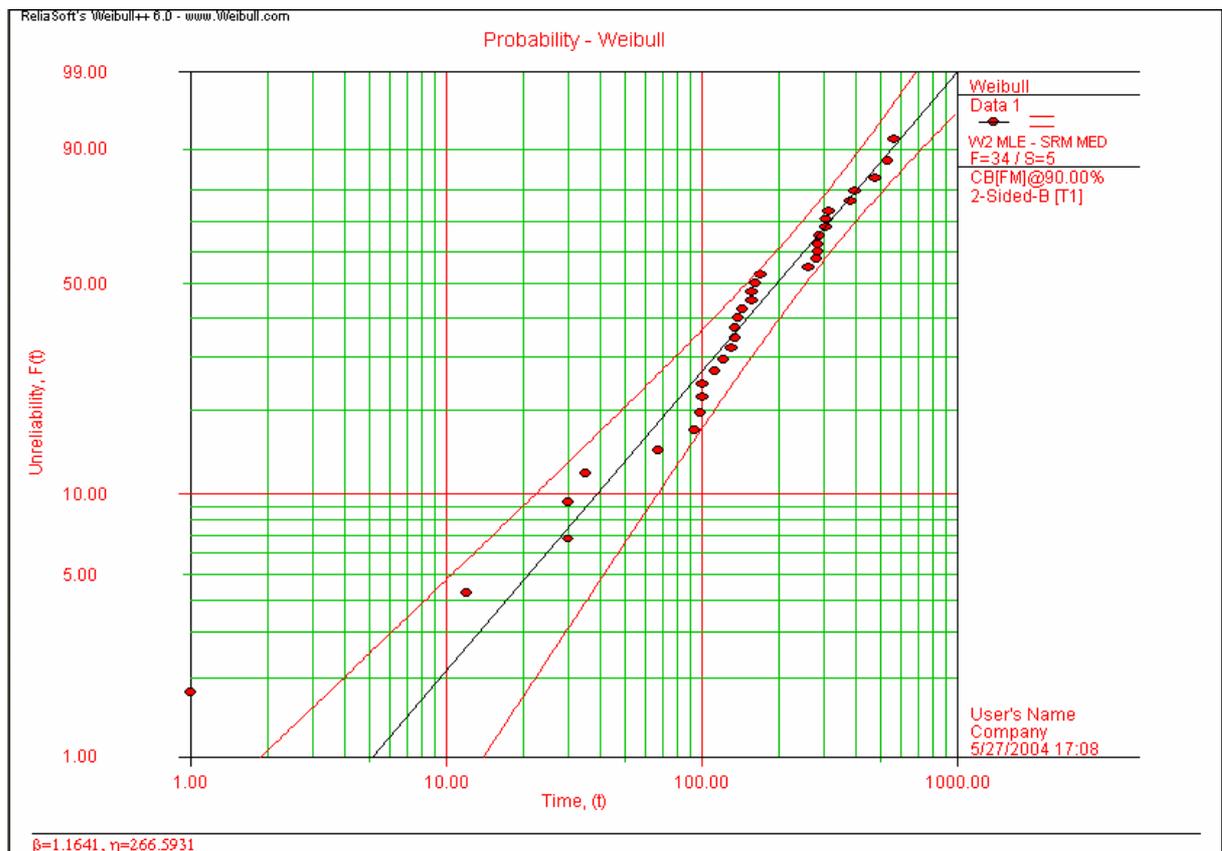


FIGURA 21 - Gráfico dos dados da Tabela 3 conforme a distribuição de Weibull.

A análise acima resultou em um beta de 1,16 e vida característica de 266 horas. O beta maior do que 1 significa que o sistema está deteriorando-se. A tendência do sistema equivalente pode também ser visualizada pelo gráfico da taxa de falhas. A taxa de falhas comprova a tendência dos sistemas.

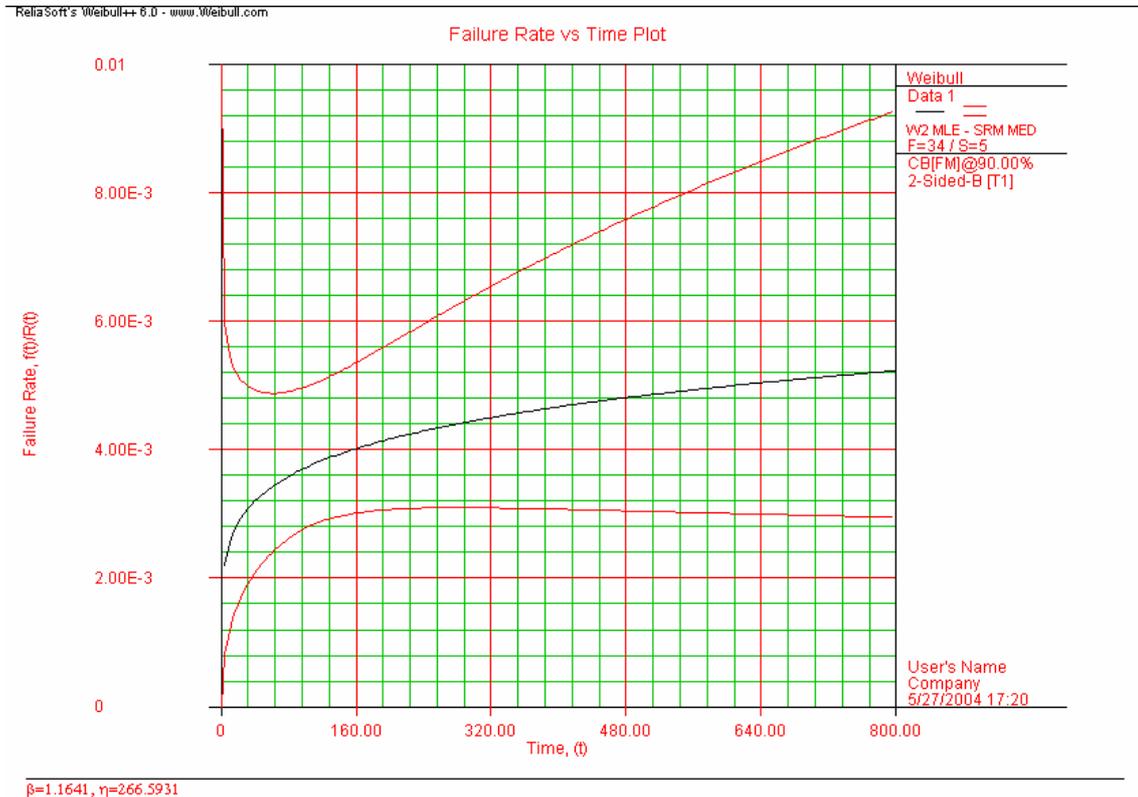


FIGURA 22 - Gráfico da taxa de falhas dos dados da Tabela 3, segundo uma distribuição de Weibull

Os mesmos dados analisados conforme um processo de Poisson não homogêneo (NHPP), resultam em um sistema equivalente neutro, ou seja, que não está nem melhorando e nem deteriorando-se. A análise será feita usando-se o software RSA (*Reliability Software Analysis*) de propriedade da Deere & Company.

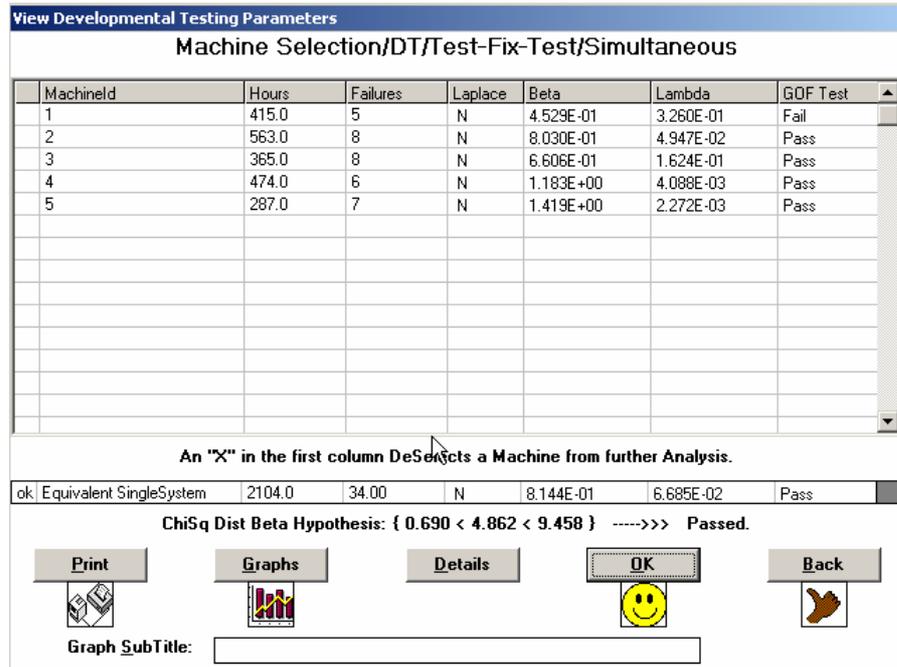


FIGURA 23 - Análise dos dados da Tabela 3, conforme um processo NHPP

Das cinco máquinas, somente a primeira falhou no teste de aderência (GOF test). O teste de aderência usado pelo sistema é o teste Cramér von Mises, adaptado por Crow (1990) para o processo de Poisson não homogêneo.

A parte de baixo da tabela mostra os resultados para um sistema equivalente formado pelos cinco protótipos testados. O sistema equivalente rodou um total de 2104 horas, apresentou um total de 34 falhas, e passou no teste de aderência do Chi-Quadrado, demonstrando que as máquinas podem ser estatisticamente representadas pelo sistema equivalente.

Nota-se da análise, que as cinco máquinas apresentaram uma tendência neutra no teste de Laplace, demonstrado pela letra N (Neutrum) na coluna Laplace. As outras possibilidades de resultados para este teste, seria D (*deterioration*) ou I (*improving*).

A taxa de falhas levemente decrescente pode ser visualizada na Figura 24..

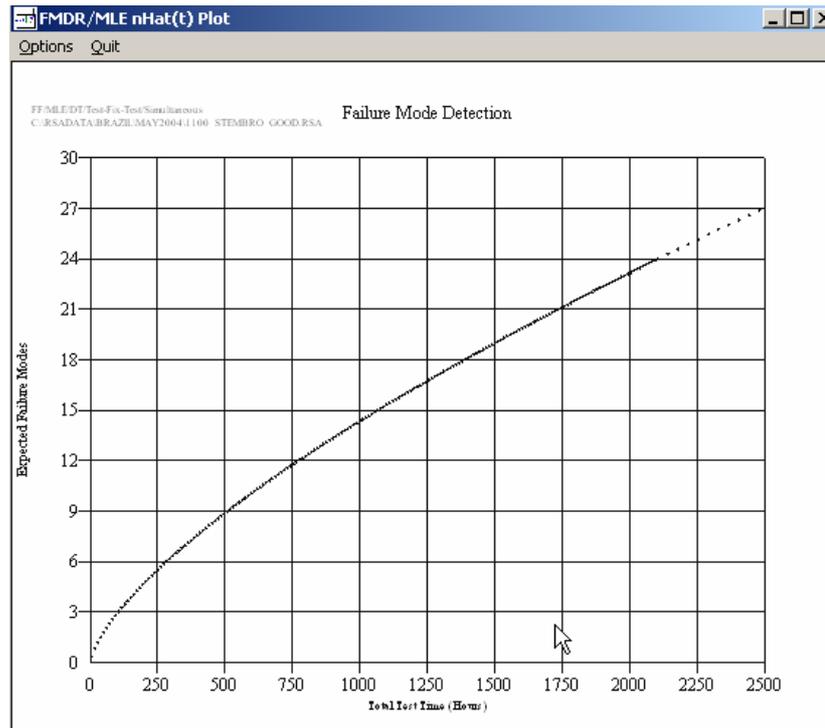


FIGURA 24 - Taxa de falhas dos dados da Tabela 3

O gráfico da taxa de falhas mostra que os sistema está melhorando levemente. Portanto, a análise pontual demonstrou resultados contraditórios quando os dados foram analisados conforme uma distribuição de Weibull e quando foi analisado como um NHPP.

Tratores agrícolas, colheitadeiras e máquinas agrícolas em geral são sistemas que são reparados quando falham, e as análises de confiabilidade para estas máquinas devem ser feitas com base no processo de Poisson não homogêneo. O mesmo vale para outros tipos de maquinário que são reparados quando falham, bem como os sistemas integrantes destas máquinas, como transmissões, motores, sistemas hidráulicos, etc.

## **6 CONCLUSÕES**

---

O objetivo inicial deste trabalho foi a aplicação da técnica proposta em tratores agrícolas. Entretanto, no desenvolver deste trabalho, constatou-se que a teoria aqui apresentada aplica-se a diferentes tipos de maquinário, tanto agrícola, como automotivo e máquinas de um modo geral. No final deste trabalho foram apresentados estudos de caso, para comprovar a teoria apresentada.

Na teoria apresentada neste trabalho, foram demonstrados os parâmetros estabelecidos nos objetivos. A orientação econômica pode ser obtida, através das curvas de probabilidade de falha para as peças e produtos, podendo-se assim estimar os custos decorrentes de garantias, bem como a redução destes custos decorrentes de esforços de re-projeto para se atingir os objetivos estabelecidos para a confiabilidade dos produtos.

Finalmente, as empresas que monitorarem a confiabilidade dos seus produtos pelas técnicas aqui apresentadas, poderão monitorar a redução total de custos decorrentes do aumento da confiabilidade de seus produtos e componentes, entendendo que, por vezes, é mais lucrativo, aumentar a qualidade dos mesmos, elevando o custo inicial, mas reduzindo os custos de garantia e reposição pelo aumento da confiabilidade.

A qualidade de produtos pode ser monitorada pelas curvas de taxa de falhas e de MTBF aqui apresentadas. Ao selecionar diferentes fornecedores, os departamentos de Qualidade poderão avaliar quais os produtos que oferecem menor índice de falhas com um determinado número de horas de operação.

Portanto os objetivos propostos neste trabalho foram plenamente atingidos.

Ao analisar-se falhas de máquinas agrícolas devemos sempre aplicar as técnicas descritas no capítulo 3, considerando que as mesmas são sistemas complexos reparáveis. É, portanto, impossível tentarmos atribuir uma distribuição estatística à análise, visto que diversos modos de falhas, advindos de diversas condições distintas de operação, estarão influenciando os modos de falhas. A relação de dependência entre estas falhas existe, mas é impossível determinar a

natureza desta dependência. Assim devemos adotar uma metodologia adequada à estas circunstâncias.

Quando estivermos analisando somente um modo de falha em sistemas não reparáveis ou análise dos tempos até a primeira falha, entretanto, poderemos usar as técnicas descritas no capítulo 2.

A análise de confiabilidade está muito relacionada ao desenvolvimento de produtos (Richter & Lopes, 2004). Outro estudo que muito pode contribuir na fase de desenvolvimento de produtos são técnicas associadas a ensaios acelerados de componentes e sua incorporação à análise de confiabilidade dos produtos em questão.

Esta técnica associada a análise de confiabilidade para sistemas não reparáveis podem ser uma ferramenta de especial importância para o modelamento da confiabilidade inicial de novos projetos. De posse destes parâmetros será possível decidir-se pela construção de protótipo ou pela reciclagem do projeto antes da construção dos protótipos, caso os objetivo de confiabilidade inicial não forem atingidos.

Um modelo para a análise de falhas em ambos os casos pode ser descrito pela figura abaixo e vem sendo utilizados por empresas com a Deere & Company, a qual resume as conclusões advindas deste trabalho.

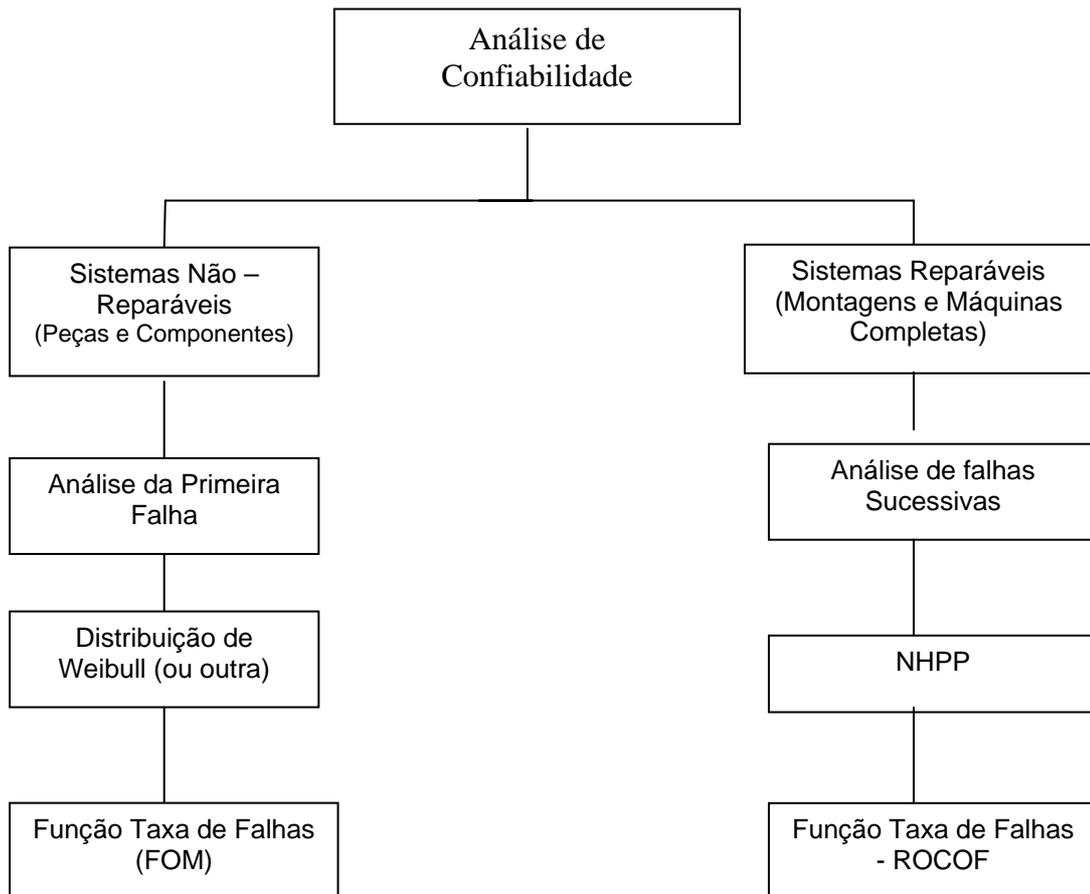


FIGURA 25 - Modelo para análise de falhas de máquinas

### 6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Neste trabalho foram revisadas as técnicas estatísticas mais apropriadas para a análise de confiabilidade de sistemas reparáveis e sistemas não reparáveis.

Como as máquinas agrícolas são sistemas complexos com vários componentes interagindo entre si, recomenda-se investigação e aplicação de técnicas estatísticas adequadas para sistemas complexos com análise estatística multivariada, além do processo de estocástico de Poisson apresentado neste trabalho.

Com o domínio das técnicas citadas acima, sugere-se modelar as máquinas em sistemas, calculando-se taxas de falhas para cada sub-sistema, a partir dos dados de cada peça individualmente. Nesta fase sugere-se investigar as técnicas estatísticas multivariada e a análise de componentes principais sugeridas por Lopes (2001) e o apoio de *softwares* para a modelagem de máquinas em diagramas de blocos de acordo com seus sub-sistemas.

## **7 BIBLIOGRAFIA**

---

ALBERNETHY, R.B **Weibull Analysis Handbook. Ohio. Aero Propulsion Laboratory.** 1983.

ASCHER, H.; FEINGOLD, H.**Repairable System Reliability.** Marcel Dekker. New York: Dekker, 1984.

ASCHER, H. **Comments on “Constant Failure Rate – A Paradigm in Transition?”** By James McLinn – Quality and Reliability International, v. 7, 1991.

BILLINGTON, R.; ALLAN, R. N. **Reliability Evaluation of Engineering Systems: Concepts and Techniques** . New York: Plenum Press. 1983.

COOPER, D.R. & SCHINDLER, P.S. **Métodos de pesquisa em administração.** 7. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

COX, D. R.; LEWIS P. A. **The statistical analysis of series events.**, London: Mehuen , 1966.

CROW, L. H. **Reliability for Complex Repairable Systems, Reliability and Biometry**, edited by F. Proschan and R.J. and R.J. Serfling, SIAM, Philadelphia, p. 379-410. 1974.

CROW, L. H. **Confidence intervals on the Reliability of Repairable Systems.** Proceedings Annual Reliability and Mantainability Symposium. 1993.

CROW, L. H. **Evaluating the Reliability of Repairable Systems.** Proceedings Annual Reliability and Mantainability Symposium. 1990.

DUANE, J. T. **Learning Curve Approach to Reliability Monitoring.** IEEE Transaction on Aerospace, vol. 2, p. 563-566, 1964.

- FALCETA, E. F. **Análise da confiabilidade de produtos baseada em dados de utilização da garantia.** Porto Alegre, 2000. Dissertação de mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFRGS.
- LEE, L. **Testing Adequacy of the Weibull and Log Linear Rate Models for a Poisson Process** , Technometrics, London. 1980.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica volumes 1 e 2.** São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda. 1977.
- LOPES, L. F. D. **Estatística Industrial, Apostilas da cadeira de mestrado da UFSM.** Santa Maria. 2002.
- LOPES, L. F. D. (2001). Análise de componentes principais aplicada à confiabilidade de sistemas complexos. **Florianópolis, 2001. 121 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, UFSC.**
- MALHOTRA, N. **Pesquisa de marketing: uma orientação aplicada.** 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.
- MEEKER, W. Q.; ESCOBAR, L. A. **Statistical methods for reliability data.** New York: John Wiley & Sons, Inc. 1998.
- NELSON, W. **Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses.** New York: Wiley Interscience. 1990.
- PULCINI, G. **Accounting for model uncertainty in reliability analysis of mechanical repairable equipment.** New York: Marcel Dekker, Inc. 2002.
- RELIASOFT **Engenharia de Confiabilidade, apostilas de treinamento.** 2001.
- RICHTER, P.E.; LOPES, L.F.D. **The Reliability Related to Products Development and the Total Quality Management.** Proceedings of ICPR Americas. Santiago do Chile, 2004.
- RIGDON, S. E.; BASU A. P. **The power law process: a model for the reliability of repairable systems** Journal of Quality Technology, v. 21, n. 4, 1989.
- RUGGERI, F.; PIEVATOLO, A. **On the reliability of repairable systems: methods and applications.** Milão: CNR-IMATI. (1999).

TARUM, C. D. **Classification and Analysis of Weibull Mixtures. SAE technical paper.** Detroit. **International Congress and Exposition.** 1999.

USHER, J. S. **Case study: Reliability models and misconceptions.** Louisville: Marcel Dekker, Inc. 1993-94.