

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE
RETIFICADORES COM CORREÇÃO DE FATOR
DE POTÊNCIA EMPREGANDO MODELOS
LINEARES PERIÓDICOS NO TEMPO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Rafael Zanatta Scapini

Santa Maria, RS, Brasil
2012

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE
RETIFICADORES COM CORREÇÃO DE FATOR
DE POTÊNCIA EMPREGANDO MODELOS
LINEARES PERIÓDICOS NO TEMPO**

Rafael Zanatta Scapini

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Processamento de Energia Elétrica, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM,RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Engenharia Elétrica.**

Orientador: Prof. Leandro Michels

**Santa Maria, RS, Brasil
2012**

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Scapini, Rafael Zanatta

Análise de estabilidade de retificadores com correção de fator de potência empregando modelos lineares periódicos no tempo / Rafael Zanatta Scapini - 2012

198 p.; 30 cm

Orientador: Leandro Michels

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, RS, 2012

1. Sistemas LTP 2. Análise da estabilidade 3. Retificadores com correção do fator de potência 4. Controle realimentado I. Michels, Leandro II. Análise de estabilidade de retificadores com correção de fator de potência empregando modelos lineares periódicos no tempo.

© 2012

Todos os direitos autorais reservados a Rafael Zanatta Scapini. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita com autorização por escrito do autor.

Endereço: Av. Roraima, Nº 1000, Bairro Camobi, Santa Maria, RS, Brasil, CEP: 97105-900;

Fone: (55) 9994-4668;

Endereço Eletrônico: scapinirz@gmail.com.

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

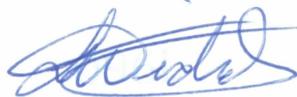
A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE RETIFICADORES COM
CORREÇÃO DE FATOR DE POTÊNCIA EMPREGANDO
MODELOS LINEARES PERIÓDICOS NO TEMPO**

elaborada por
Rafael Zanatta Scapini

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Engenharia Elétrica

COMISSÃO EXAMINADORA:



Leandro Michels Dr.
(Presidente/Orientador)



Rafael Cardoso, Dr. (UTFPR-PR)



Humberto Pinheiro, Ph.D. (UFSM-RS)

Santa Maria, 30 de Julho de 2012

Dedico este trabalho àqueles que me ensinaram as primeiras letras da vida

“ Sólo le pido a Dios
que el dolor no me sea indiferente,
que la reseca muerte no me encuentre
vacío y solo sin haber hecho lo suficiente.”

León Gieco

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE RETIFICADORES COM CORREÇÃO DE FATOR DE POTÊNCIA EMPREGANDO MODELOS LINEARES PERIÓDICOS NO TEMPO

AUTOR: RAFAEL ZANATTA SCAPINI

ORIENTADOR: LEANDRO MICHELS

Local da Defesa e Data: Santa Maria, 30 de Julho de 2012.

Muitas técnicas de controle aplicadas a retificadores monofásicos com correção do fator de potência (PFC) utilizam controladores em cascata para compensação da tensão de saída e da corrente de entrada. Essas técnicas, em geral, empregam modelos lineares e invariantes no tempo (LTI) e desconsideram as oscilações periódicas presentes nas tensões de saída, fazendo uso de leis de controle com características passa-baixa. Para garantir a correlação entre o modelo LTI e o retificador, bem como a correção do fator de potência, estas estratégias utilizam banda-passante reduzida, o que limita consideravelmente a resposta dinâmica da compensação da tensão. No intuito de reduzir o tempo de resposta da malha de tensão, sem comprometer a correção do fator de potência, projetistas têm associado filtros rejeita-banda à malha de controle. Esses filtros acentuam a atenuação nas frequências de interesse e, assim, possibilitam elevar a banda-passante sem comprometer a correção do fator de potência na entrada. Porém, a elevação da banda-passante aumenta a interação das componentes alternadas da tensão do lado cc com o sistema de compensação. Nestes casos, a abordagem LTI pode não representar adequadamente as dinâmicas de malha fechada e, consequentemente, não é válida para a análise da estabilidade. Por outro lado, uma melhor representação dinâmica da malha de compensação da tensão de retificadores PFC monofásicos pode ser obtida com a utilização de modelos lineares periódicos no tempo (LTP). Esses modelos dinâmicos incluem os efeitos de modulação inerentes da dinâmica da tensão de saída. Este trabalho apresenta uma metodologia sistemática alternativa para a análise da estabilidade de malha fechada de retificadores PFC monofásicos empregando-se modelos LTP em tempo contínuo. A metodologia de análise da estabilidade utiliza uma representação dos modelos LTP no domínio da frequência, denominado função de transferência harmônica (HTF). Esta representação estende as técnicas clássicas de análise da estabilidade de sistemas LTI multivariáveis para a abordagem LTP. Por fim, são detalhadas as análises de estabilidade dos retificadores monofásicos em ponte completa e meia ponte, considerando-se a operação com correção do fator de potência de entrada. Resultados teóricos, de simulação e experimentais são apresentados para validar a técnica de análise da estabilidade.

Palavras-chave: Sistemas LTP. Análise da estabilidade. Retificadores com correção do fator de potência. Controle realimentado.

ABSTRACT

Master's Dissertation

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

STABILITY ANALYSIS OF POWER FACTOR CORRECTION RECTIFIERS EMPLOYING LINEAR TIME PERIODIC MODELS

AUTHOR: RAFAEL ZANATTA SCAPINI

ADVISOR: LEANDRO MICHELS

Place and Date: Santa Maria, July 30th, 2012.

Many control techniques applied to converters with power factor correction (PFC) use cascaded control to compensate the output voltage and the input current. These techniques usually employ linear time-invariant (LTI) models and ignore the periodic output voltage oscillation by using compensator with low-pass characteristic. To ensure correlation between the rectifier and its LTI model, as well as power factor correction, these techniques reduce the crossing frequency, which result in a closed-loop voltage with poor dynamic response. Aiming to reduce the time-response designers have associated notch filters into the controller to increase the bandwidth. These filters increase the attenuation in ripple frequencies making possible to enlarge system bandwidth without compromising power factor correction. However, increasing the crossing frequency enhances the interaction between ac output components and the feedback system. In these cases, linear time-invariant (LTI) approach can not adequately represent the closed loop dynamics. As a result, LTI stability analysis based on LTI approach is no longer valid. On the other hand, a better dynamic representation can be achieved by using linear time-periodic models (LTP). These models include the modulation effects inherent in the output voltage dynamics. This work presents an alternative systematic methodology to perform the stability analysis for continuous-time closed-loop control systems using linear time-periodic (LTP) models. This methodology use an LTP representation in frequency domain called harmonic transfer function (HTF). This method extends the multi-variable LTI techniques for LTP approach. Finally is detailed the stability analysis of full-bridge and half-bridge single-phase PFC rectifiers. Theoretical, simulation and experimental results are presented to validate the proposed technique.

Keywords: LTP systems. Stability analysis. Power factor corrected rectifiers. Feedback control.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	– Circuito retificador monofásico empregando sistema de controle em múltiplas malhas.	33
Figura 1.2	– Circuito retificador monofásico empregando sistema de controle em malha fechada com filtros rejeita-banda.	35
Figura 1.3	– Retificador PFC monofásico em ponte completa.	38
Figura 1.4	– Mapeamento de frequências para o conversor em ponte completa. ...	38
Figura 1.5	– Retificador PFC monofásico em meia ponte.	40
Figura 1.6	– Mapeamento de frequências para a malha de tensão total do retificador em meia ponte.	41
Figura 2.2	– Malha de controle da corrente dinâmica de entrada do retificador monofásico em ponte completa.	47
Figura 2.3	– Malha de controle da tensão dinâmica de saída do retificador monofásico em ponte completa.	47
Figura 2.4	– Circuito equivalente da malha de corrente do retificador em ponte completa.	48
Figura 2.5	– Representação por diagrama de blocos da dinâmica de corrente.	50
Figura 2.6	– Circuito equivalente instantâneo da malha de tensão.	51
Figura 2.7	– Correntes instantâneas nos dispositivos semicondutores.	52
Figura 2.8	– Circuito médio equivalente da tensão de saída.	53
Figura 2.9	– Circuito do retificador monofásico em meia ponte.	59
Figura 2.10	– Diagrama de blocos da malha de controle da corrente de entrada do retificador monofásico em meia ponte.	61
Figura 2.11	– Diagrama de blocos das malhas de controle das tensões de saída do retificador monofásico em meia ponte.	62
Figura 2.12	– Circuito elétrico instantâneo equivalente do estágio de entrada do retificador em meia ponte.	62
Figura 2.13	– Forma de onda instantânea nos terminais ca de entrada do retificador em meia ponte.	63
Figura 2.14	– Diagrama de blocos do modelo dinâmico da corrente de entrada do retificador em meia ponte.	65
Figura 2.15	– Circuito resultante para a tensão de saída em função da corrente de entrada do retificador em meia ponte.	66
Figura 2.16	– Formas de onda das correntes instantâneas nos semicondutores do retificador em meia ponte.	67
Figura 2.17	– Circuito elétrico médio equivalente da dinâmica da tensão de saída para o retificador em meia ponte.	68

Figura 3.1	– Transição dos polos e zeros em sistemas exponencialmente modulados.	86
Figura 3.2	– Diagrama de blocos do sistema de controle em malha fechada para a representação por HTF.	91
Figura 3.3	– Caminho de mapeamento de contorno modificado de Nyquist \mathcal{C}_S , no plano complexo s	92
Figura 4.1	– Circuito elétrico do retificador monofásico em ponte completa.	98
Figura 4.2	– Sistema de controle empregado ao retificador monofásico em ponte completa.	99
Figura 4.3	– Resposta em frequência de malha aberta do sistema de controle da corrente de entrada.	100
Figura 4.4	– Resposta em frequência da dinâmica da corrente de entrada.	101
Figura 4.5	– Resposta em frequência do filtro rejeita-banda do controlador em malha aberta.	103
Figura 4.6	– Resposta em frequência de malha aberta do sistema de controle da tensão de saída.	103
Figura 4.7	– Resposta em frequência do controlador de tensão em malha aberta.	104
Figura 4.8	– Resposta em frequência do controlador de tensão em malha fechada.	104
Figura 4.9	– Diagrama de Nyquist do sistema de controle $C_v(s)G_v(s)$ em malha aberta.	111
Figura 4.10	– Emprego do método do determinante para análise da estabilidade em malha fechada.	112
Figura 4.11	– Emprego do método dos auto-lugares para análise da estabilidade em malha fechada.	113
Figura 4.12	– Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 2,67$	114
Figura 4.13	– Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 2,67$	115
Figura 4.14	– Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 2,75$	116
Figura 4.15	– Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 2,75$	117
Figura 4.16	– Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada.	118
Figura 4.17	– Comparação entre os modelos e a simulação do retificador.	119
Figura 4.18	– Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada para $\beta = 2,67$	120
Figura 4.19	– Comparação entre os modelos e a simulação do retificador para $\beta = 2,67$	121

Figura 4.20 – Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada para $\beta = 2,88$	122
Figura 4.21 – Comparação entre os modelos e a simulação do retificador para $\beta = 2,88$	122
Figura 4.22 – Circuito elétrico do retificador monofásico em meia ponte.	123
Figura 4.23 – Sistema de controle empregado ao retificador monofásico em meia ponte.	124
Figura 4.24 – Resposta em frequência de malha aberta do sistema de controle da tensão de saída.	125
Figura 4.25 – Resposta em frequência do sistema de controle da corrente em malha fechada.	126
Figura 4.26 – Resposta em frequência dos filtros rejeita-banda do controlador em malha aberta.	128
Figura 4.27 – Resposta em frequência do controlador de tensão diferencial em malha aberta – $T_d(s)$	129
Figura 4.28 – Resposta em frequência do compensador de tensão total em malha aberta – $T_t(s)$	130
Figura 4.29 – Resposta em frequência dos compensadores de tensão em malha aberta.	130
Figura 4.30 – Resposta em frequência dos compensadores de tensão em malha fechada.	131
Figura 4.31 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade em malha fechada.	136
Figura 4.32 – Emprego do método dos auto-lugares para análise da estabilidade em malha fechada.	138
Figura 4.33 – Diagrama de Nyquist em malha aberta empregando-se o modelo médio LTI.	139
Figura 4.34 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 1,85$	140
Figura 4.35 – Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 1,85$	141
Figura 4.36 – Emprego do método médio LTI para análise da estabilidade para $\beta = 1,85$	142
Figura 4.37 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 2,15$	142
Figura 4.38 – Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 2,15$	143
Figura 4.39 – Emprego do método médio LTI para análise da estabilidade para $\beta = 2,15$	144
Figura 4.40 – Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada.	145

Figura 4.41 – Comparação entre os modelos e a simulação do retificador para a tensão total de saída.	146
Figura 4.42 – Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada para $\beta = 1,85$	147
Figura 4.43 – Comparação entre os modelos e a simulação do retificador para a tensão total de saída e $\beta = 1,85$	148
Figura 4.44 – Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada para $\beta = 2,15$	149
Figura 4.45 – Comparação entre os modelos e a simulação do retificador para a tensão total de saída e $\beta = 2,15$	150
Figura 5.2 – Resposta em frequência de malha aberta do sistema de controle da corrente de entrada.	156
Figura 5.3 – Resposta em frequência da dinâmica da corrente de entrada.	157
Figura 5.4 – Resposta em frequência de malha aberta do sistema de controle da tensão de saída.	158
Figura 5.5 – Resposta em frequência do controlador de tensão em malha fechada.	159
Figura 5.6 – Diagrama de Nyquist do sistema de controle $C_v(s)G_v(s)$ em malha aberta.	165
Figura 5.7 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade em malha fechada.	165
Figura 5.8 – Emprego do método dos auto-lugares para análise da estabilidade em malha fechada.	166
Figura 5.9 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 2,20$	167
Figura 5.10 – Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 2,20$	168
Figura 5.11 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 2,21$	169
Figura 5.12 – Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 2,21$	170
Figura 5.13 – Formas de onda de operação do retificador monofásico em ponte completa para a condição nominal.	172
Figura 5.14 – Formas de onda de operação do retificador monofásico em ponte completa para a condição de ganho $\beta = 2,20$	173
Figura 5.15 – Formas de onda de operação do retificador monofásico em ponte completa para a condição de ganho $\beta = 2,21$	174
Figura A.1 – Retificador em ponte completa.	189
Figura A.2 – Formas de onda de tensão instantâneas nos terminais ac do inversor em função da razão cíclica.	190
Figura A.3 – Amplitude e fase da tensão média de entrada normalizada com relação ao valor de pico.	194

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Especificações do retificador monofásico em ponte completa.	98
Tabela 4.2 – Especificações do retificador monofásico em meia ponte.	123
Tabela 5.1 – Especificações do retificador monofásico em ponte completa.	154
Tabela A.1 – Efeito da amplitude da ondulação da tensão de saída nas amplitudes das componentes harmônicas da razão cíclica.	195

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ca	Sinal de grandeza alternada
cc	Sinal de grandeza contínua
EMP	Sinal periódico exponencialmente modulado (do inglês, <i>Exponentially Modulated Periodic</i>)
HTF	Função de transferência harmônica (do inglês, <i>Harmonic Transfer Function</i>)
LTI	Sistema linear invariante no tempo, (do inglês, <i>Linear Time-Invariant</i>)
LTP	Sistema linear periódico no tempo (do inglês, <i>Linear Time-Periodic</i>)
MF	Margem de fase
MG	Margem de ganho
MG _{dB}	Margem de ganho medida em decibéis
MIMO	Sistema multivariáveis (do inglês, <i>Multiple-Input-Multiple-Output</i>)
PFC	Correção do fator de potência (do inglês, <i>Power Factor Correction</i>)
PWM	Modulação por largura de pulso (do inglês, <i>Pulse Width Modulation</i>)
SISO	Sistema de única entrada única saída (do inglês, <i>Single-Input-Single-Output</i>)
ZOH	Retentor de ordem zero (do inglês, <i>Zero Order Hold</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

$v_i(t)$	Tensão instantânea de entrada
$v_o(t)$	Tensão instantânea de saída do retificador em ponte completa
$G_i(s)$	Função de transferência do modelo LTI da corrente de entrada com relação à razão cíclica
$i_L(t)$	Corrente instantânea no indutor de entrada
$d(t)$	Razão cíclica instantânea de operação
$G_v(s)$	Função de transferência do modelo LTI da tensão de saída com relação à corrente de entrada para o retificador em ponte completa
$P_{in}(t)$	Potência instantânea de entrada
$V_{i_{\text{RMS}}}$	Tensão eficaz da fonte de alimentação
I_{RMS}	Corrente eficaz de regime permanente no indutor de entrada
$C_i(s)$	Função de transferência do controlador da malha interna de controle da corrente de entrada
$i_L^*(t)$	Referência de corrente de entrada
$C_v(s)$	Função de transferência do controlador da malha externa de tensão
$u(t)$	Ação de controle da malha de tensão
V_o^*	Referência de tensão de saída
h_{vi}	Ganho de realimentação da medida da fonte de alimentação
h_i	Ganho de realimentação da medida da corrente de entrada
h_v	Ganho de realimentação da medida da tensão de saída
$e_v(t)$	Erro entre a tensão de referência e a tensão de saída
f_1	Frequência da componente fundamental do sinal em Hz
$C_d(s)$	Função de transferência do compensador da malha externa de tensão diferencial
$C_t(s)$	Função de transferência do compensador da malha externa de tensão total
$v_d(t)$	Tensão diferencial instantânea sobre os capacitores de barramento do retificador em meia ponte
$v_t(t)$	Tensão total instantânea sobre os capacitores de barramento do retificador em meia ponte

v_d^*	Referência de tensão diferencial
v_t^*	Referência de tensão total
$v_{C_1}(t)$	Tensão instantânea sobre o capacitor C_1
$v_{C_2}(t)$	Tensão instantânea sobre o capacitor C_2
$u_d(t)$	Ação de controle da malha diferencial
$u_t(t)$	Ação de controle da malha total
h_d	Ganho de realimentação da medida de tensão diferencial
h_t	Ganho de realimentação da medida de tensão total
$G_d(s)$	Função de transferência do modelo LTI da tensão diferencial de saída
$G_t(s)$	Função de transferência do modelo LTI da tensão total de saída
$e_t(t)$	Erro de regulação da malha de tensão total
$i_{C_1}(t)$	Corrente instantânea no capacitor C_1
$i_{C_2}(t)$	Corrente instantânea no capacitor C_2
$i_{R_1}(t)$	Corrente instantânea no resistor R_1
$i_{R_2}(t)$	Corrente instantânea no resistor R_2
T_s	Período de comutação
$v_{ab}(t)$	Tensão instantânea nos terminais ca do inversor em ponte completa
ω_s	Frequência de comutação em rad/s
f_s	Frequência de comutação em Hz
ω_1	Frequência da componente fundamental do sinal em rad/s
$i_{S_x}(t)$	Corrente instantânea na chave S_x para $x \in \{1, 2, 3, 4\}$
$i_C(t)$	Corrente instantânea no capacitor de filtro do retificador em ponte completa
$i_R(t)$	Corrente instantânea na resistência de carga do retificador em ponte completa
$v_L(t)$	Tensão instantânea sobre o indutor de entrada
$\langle i_L(t) \rangle$	Corrente média no indutor de entrada
$\langle v_i(t) \rangle$	Tensão média da fonte de alimentação
$\langle v_{ab}(t) \rangle$	Tensão média nos terminais ca do retificador em ponte completa
$\langle d(t) \rangle$	Razão cíclica média de operação em regime permanente

$\langle v_o(t) \rangle$	Tensão média de saída do retificador em ponte completa
$V_i(s)$	Representação da tensão média de alimentação no domínio da frequência
$I_L(s)$	Representação da corrente média de entrada no domínio da frequência
$D(s)$	Representação da razão cíclica média no domínio da frequência
$\langle i_{S_1}(t) \rangle$	Corrente média no interruptor S_1
$\langle i_{S_3}(t) \rangle$	Corrente média no interruptor S_3
$i_o(t)$	Corrente instantânea de carga no retificador em ponte completa
$\langle i_o(t) \rangle$	Corrente média de carga no retificador em ponte completa
k_{vi}	Ganho de normalização da amplitude da corrente de entrada
D	Amplitude da componente alternada da $\langle d(t) \rangle$
$v_{an}(t)$	Tensão instantânea nos terminais ca do retificador em meia ponte
$\langle v_{an}(t) \rangle$	Tensão média nos terminais ca do retificador em meia ponte
$\langle v_{C_1}(t) \rangle$	Tensão média sobre o capacitor C_1
$\langle v_{C_2}(t) \rangle$	Tensão média sobre o capacitor C_2
$\langle v_t(t) \rangle$	Tensão média total sobre os capacitores de barramento do retificador em meia ponte
$\langle v_d(t) \rangle$	Tensão média diferencial sobre os capacitores de barramento do retificador em meia ponte
$i_{o1}(t)$	Corrente instantânea na malha de tensão de saída do retificador em meia ponte
$i_{o2}(t)$	Corrente instantânea na malha de tensão de saída do retificador em meia ponte
$\langle i_{o1}(t) \rangle$	Corrente média do modelo dinâmico de tensões de saída
$\langle i_{o2}(t) \rangle$	Corrente média do modelo dinâmico de tensões de saída
I_{cc}	Componente de corrente contínua no indutor de entrada
$\mathbf{x}(t)$	Vetor de estados
$\mathbf{u}(t)$	Vetor de entradas
$\mathbf{y}(t)$	Vetor de saídas
$A(t)$	Matriz de estados LTP
$B(t)$	Matriz de entradas LTP
$C(t)$	Matriz de saídas LTP

$D(t)$	Matriz de realimentação direta LTP
T_1	Período da componente fundamental do sinal LTP
$\mathbf{x}^{\text{EMP}}(t)$	Vetor de estados exponencialmente modulado
$\mathbf{u}^{\text{EMP}}(t)$	Vetor de entradas exponencialmente modulado
$\mathbf{y}^{\text{EMP}}(t)$	Vetor de saídas exponencialmente modulado
$\mathcal{X}(s)$	Representação do vetor harmônico de estados no domínio da frequência
$\mathcal{U}(s)$	Representação do vetor harmônico de entradas no domínio da frequência
$\mathcal{Y}(s)$	Representação do vetor harmônico de saídas no domínio da frequência
\mathcal{A}	Matriz harmônica de estados
\mathcal{B}	Matriz harmônica de entradas
\mathcal{C}	Matriz harmônica de saídas
\mathcal{D}	Matriz harmônica de realimentação direta
\mathcal{N}	Matriz de modulação em frequência
\mathcal{I}	Matriz identidade com dimensão compatível com HTF
$\mathbf{H}(s)$	Função de transferência harmônica
$\mathbf{H}_C(s)$	Função de transferência harmônica do controlador
$\mathbf{H}_P(s)$	Função de transferência harmônica do retificador monofásico
$\Gamma(s)$	Autovalores do sistema de controle de malha fechada no domínio HTF
\mathcal{C}_S	Região do contorno modificado de Nyquist no plano complexo s
$C_n(s)$	Função de transferência do filtro rejeita-banda
$C_f(s)$	Função de transferência do compensador de fase
$T(s)$	Função de transferência de malha aberta da tensão de saída
ζ	Coefficiente de amortecimento
ω_c	Coefficiente de amortecimento
f_c	Coefficiente de amortecimento
β	Constante de proporcionalidade para o compensador de tensão
α	Posição de cruzamento dos auto-lugares pelo eixo real
$N_{60}(s)$	Função de transferência do filtro rejeita-banda sintonizado em 60Hz
$N_{120}(s)$	Função de transferência do filtro rejeita-banda sintonizado em 120Hz

LISTA DE SÍMBOLOS

$C_{fd}(s)$	Função de transferência do compensador de fase da malha de tensão diferencial
$C_{ft}(s)$	Função de transferência do compensador de fase da malha de tensão total
$T_d(s)$	Função de transferência de malha aberta da tensão diferencial
$T_t(s)$	Função de transferência de malha aberta da tensão total
$v_{ao}(t)$	Tensão instantânea de braço do inversor
$v_{bo}(t)$	Tensão instantânea de braço do inversor
$\langle v_{ao}(t) \rangle$	Tensão média de braço do inversor
$\langle v_{bo}(t) \rangle$	Tensão média de braço do inversor

LISTA DE APÊNDICES

Apêndice A – Determinação das grandezas médias no período de comuta- ção	187
Apêndice B – Ortogonalidade de funções exponenciais	197

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	31
1.1 Interações harmônicas em retificadores com correção do fator de potência monofásicos	37
1.1.1 Retificador em ponte completa	37
1.1.2 Retificador em meia ponte	39
1.2 Objetivos do trabalho	41
1.3 Organização do trabalho	43
2 MODELAGEM DINÂMICA DE RETIFICADORES COM CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA	45
2.1 Retificador em ponte completa	46
2.1.1 Modelagem dinâmica da corrente de entrada com relação à razão cíclica	48
2.1.2 Linearização do modelo dinâmico da corrente de entrada com relação à razão cíclica	49
2.1.3 Modelagem dinâmica da tensão de saída com relação à corrente de entrada ..	50
2.1.4 Linearização do modelo dinâmico da tensão de saída com relação à corrente de entrada	53
2.1.5 Modelos LTI e representação por funções de transferência	56
2.2 Retificador em meia ponte	59
2.2.1 Modelagem dinâmica da corrente de entrada com relação à razão cíclica	61
2.2.2 Linearização do modelo dinâmico da corrente de entrada com relação à razão cíclica	64
2.2.3 Modelagem dinâmica da tensão de saída com relação à corrente de entrada ..	65
2.2.4 Linearização do modelo dinâmico da tensão de saída com relação à corrente de entrada	69
2.2.5 Modelos LTI e representação por funções de transferência	73
2.3 Sumário	76
3 ANÁLISE DE SISTEMAS LTP POR FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA HARMÔNICA	79
3.1 Representação de sistemas LTP por função de transferência harmônica	80
3.1.1 Representação por séries de Fourier	81
3.1.2 Representação no domínio da frequência complexa s	84
3.1.3 Função de transferência harmônica	89
3.2 Análise da estabilidade de sistemas LTP representados por funções de transferência harmônica	91
3.2.1 Implementação computacional	94
3.3 Sumário	94

4 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE RETIFICADORES PFC EM TEMPO CONTÍNUO	97
4.1 Retificador em ponte completa	97
4.1.1 Projeto do controlador da malha interna de compensação da corrente	99
4.1.2 Projeto do controlador da malha externa de compensação da tensão	101
4.1.3 Análise da estabilidade da malha de tensão empregando-se a abordagem LTP	105
4.1.3.1 Representação do modelo LTP por função de transferência harmônica	105
4.1.3.2 Análise da estabilidade em malha fechada	111
4.1.4 Resultados de simulação para validação da metodologia	118
4.2 Retificador em meia ponte	123
4.2.1 Projeto do controlador da malha interna de compensação da corrente	124
4.2.2 Projeto dos controladores das malhas externas de compensação da tensão ...	126
4.2.3 Análise da estabilidade das malhas de tensão empregando-se a abordagem LTP	131
4.2.3.1 Representação do modelo LTP por função de transferência harmônica	131
4.2.3.2 Análise da estabilidade em malha fechada	135
4.2.4 Resultados de simulação para validação da metodologia	144
4.3 Sumário	151
5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS PARA O RETIFICADOR EM PONTE COMPLETA	153
5.1 Projeto do controlador da malha interna de compensação da corrente	155
5.2 Projeto do controlador da malha externa de compensação da tensão	156
5.3 Análise da estabilidade da malha de tensão empregando-se a abordagem LTP	160
5.3.1 Representação do modelo LTP por função de transferência harmônica	160
5.3.2 Análise da estabilidade em malha fechada	164
5.4 Resultados experimentais para validação da metodologia	171
5.5 Sumário	175
6 CONCLUSÕES	177
6.1 Proposta para trabalhos futuros	178
6.2 Publicações relacionadas	179
REFERÊNCIAS	181
APÊNDICES	185

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da eletrônica de potência tem, cada vez mais, favorecido o emprego de conversores estáticos para o acionamento de sistemas e conversão de energia. A utilização dessa tecnologia possibilita o projeto de equipamentos mais eficientes, baratos e compactos. Dentre os equipamentos que utilizam semicondutores, a combinação dos circuitos retificador–inversor alimentados em tensão tem se destacado para a conversão da energia elétrica dentre as mais variadas formas e aplicações.

Conversores estáticos de potência alimentados em tensão utilizam capacitores como elementos de armazenagem de energia. Estes equipamentos são comumente empregados para a conversão de energia nas formas ca/cc ou retificação, cc/ca ou inversão, ca/cc/ca de dupla conversão, cc/cc, ca/ca e, ainda, conectado de forma interativa com a rede. A utilização desses modos de conversão de energia elétrica empregando sistemas estáticos de potência tende a crescer à medida que o conceito de geração distribuída e redes inteligentes é disseminado.

O crescente aumento de cargas não-lineares conectadas à rede elétrica reduz a qualidade da energia disponível devido à injeção de componentes harmônicas. De forma semelhante, cargas com elevada potência reativa circulante reduzem a capacidade de fornecimento de energia elétrica pelo sistema de distribuição (EMADI; NASIRI; BEKIA-ROV, 2005). Devido a esses fatores, existe uma preocupação com a qualidade da energia disponibilizada pelo sistema de distribuição, onde muitas técnicas tem sido empregadas para mitigar a injeção de componentes harmônicas e reduzir a circulação de potência reativa na linha. Os limites para injeção de harmônicas de corrente é especificada pela norma internacional IEC 61000-3-2 (2005) para equipamentos com corrente de entrada $\leq 16\text{A}$ por fase. Da mesma forma, a IEEE Std. 519-1992 (1993) apresenta as práticas e requisitos recomendados para o controle das componentes harmônicas em sistemas elétricos de potência.

Uma técnica bem difundida e muito utilizada para equipamentos de média potência é o uso de retificadores totalmente controlados com correção do fator de potência de entrada. Estes retificadores operam com elevado fator de potência e reduzem significativamente a injeção de componentes harmônicas de baixa ordem no sistema de distribuição. Por outro lado, empregam maior número de elementos eletrônicos e necessitam de um sistema de controle adequado para a sua operação. Tais aspectos estão diretamente relacionados ao custo dos equipamentos.

Retificadores com correção do fator de potência de entrada empregam malhas de compensação para o controle da corrente de entrada e regulação da tensão do barramento. O adequado projeto desses compensadores baseia-se no conhecimento do modelo matemático que descreve o comportamento do sistema. As técnicas mais difundidas para análise

e projeto de sistemas de controle são baseadas em representações matemáticas lineares e invariantes no tempo (LTI). De forma similar, as provas de estabilidade de malha fechada são também realizadas empregando-se o modelo dinâmico LTI do retificador.

Conversores estáticos, em geral, utilizam dispositivos semicondutores projetados para operar na região de saturação, apresentando, assim, apenas dois estados de operação: ligado e desligado. Devido à natureza desses equipamentos, as características dinâmicas dos retificadores controlados resultam, normalmente, em uma representação matemática não-linear. Como as ferramentas clássicas de projeto e análise baseiam-se em representações LTI, muitas técnicas de modelagem e linearização são desenvolvidas para estes sistemas conversores (ERICKSON; MAKSIMOVIC, 2000). Na grande maioria das aplicações, a utilização de modelos linearizados em torno do ponto de operação, para pequenas perturbações, é suficiente para uma boa representação matemática. Dentre essas técnicas, podem ser citados o modelo médio por espaço de estados, o modelo de comutação por largura de pulso (VORPERIAN, 1990), dentre outros.

Embora o modelo LTI seja muito empregado para análise de retificadores de potência controlados em malha fechada, a utilização dessas representações pode não ser suficiente para representar as características dinâmicas do retificador. Isso ocorre porque a abordagem LTI não considera a conversão intrínseca de frequências presente nesses conversores. Esse fenômeno é significativo em retificadores monofásicos operando com correção do fator de potência de entrada, cujos efeitos se refletem na tensão de barramento do lado cc, cujo resultado é o surgimento de uma componente alternada somada à componente contínua da tensão de saída. Esta componente alternada é resultado da absorção de potência pulsada na entrada. Por essa razão, a característica dinâmica da tensão de saída é naturalmente variável no tempo, e não é adequadamente descrita por modelos LTI.

O efeito da conversão em frequência presente em sistemas retificadores monofásicos com correção do fator de potência da entrada pode ser analisado na Figura 1.1. O circuito retificador é constituído por um ou mais elementos semicondutores controlados, um indutor de filtro de entrada L , capacitor de barramento C e uma carga, representada por uma resistência R . A tensão de entrada $v_i(t)$ é uma fonte de tensão senoidal, e a tensão de saída $v_o(t)$ é predominantemente de grandeza constante.

Usualmente emprega-se uma estratégia de controle em duas malhas, onde o compensador da malha interna $G_i(s)$ rastreia o valor da corrente de entrada $i_L(t)$ e atua sobre a razão cíclica $d(t)$ de operação dos semicondutores, considerando-se modulação por largura de pulso (PWM). O compensador da malha externa $G_v(s)$ regula a tensão de saída do retificador $v_o(t)$ e atua sobre a amplitude da referência da corrente de entrada.

A operação do sistema de controle dessa estrutura baseia-se no princípio do desacoplamento dinâmico entre as malhas interna e externa do retificador mostrado na Figura 1.1. Este desacoplamento é obtido a partir do projeto dos compensadores, assumindo-se que a malha interna de corrente possui banda passante muito maior que a malha externa

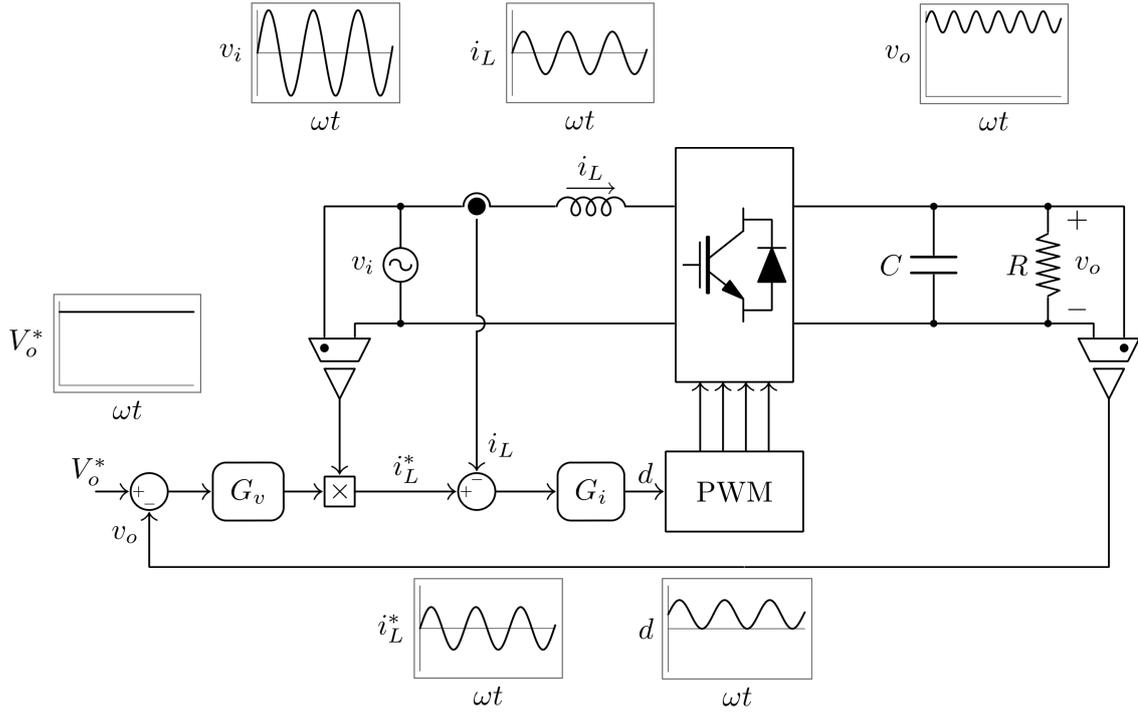


Figura 1.1 – Circuito retificador monofásico empregando sistema de controle em múltiplas malhas.

de tensão. É usual adotar-se uma relação de dez vezes entre as frequências de corte ou cruzamento do ganho entre as malhas. Assim, o comportamento dinâmico de cada malha pode ser analisado de forma independente (KIMBALL; KREIN, 2008).

Para garantir a correção do fator de potência na entrada do retificador, a forma de onda da corrente de entrada deve apresentar forma de onda senoidal e em fase com a tensão de alimentação. Uma técnica muito empregada consiste em efetuar o produto da ação de controle da malha de tensão pela forma de onda da tensão de entrada, garantindo-se, assim, a correlação entre as formas de onda de corrente e tensão. Com isso, a potência instantânea absorvida pelo retificador em regime permanente pode ser calculado considerando-se sinal de alimentação senoidal:

$$P_{in}(t) = v_i(t)i_L(t) = 2V_{i_{\text{RMS}}}I_{\text{RMS}}\sin^2(\omega t) = V_{i_{\text{RMS}}}I_{\text{RMS}}[1 - \cos(2\omega t)] . \quad (1.1)$$

Como a potência absorvida apresenta característica variante no tempo e é transferida para a saída, a característica dinâmica da tensão de saída do retificador, sobre o filtro RC, é função da potência. Como resultado, a forma de onda da tensão de saída, considerando-se a malha fechada, tem a forma:

$$v_o(t) = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\omega t) \quad (1.2)$$

onde v_n são constantes e dependem dos parâmetros e da topologia adotada para o re-

tificador monofásico. Como pode ser observado, a forma de onda da tensão de saída é constituída por uma componente contínua predominante e um conjunto de componentes harmônicas, cuja amplitude mais significativa oscila em frequência igual a duas vezes a frequência da tensão de entrada (2ω). Este fenômeno pode ser analisado como efeito de modulação (BELLINASSO; SCAPINI; MICHELS, 2011).

Dessa maneira, quando a ondulação da tensão de saída 2ω do retificador é realimentada pela malha de compensação da tensão do barramento, introduz esta componente de frequência no sinal de erro. Para evitar que as harmônicas de baixa ordem presentes na tensão do barramento comprometam a correção do fator de potência na entrada, emprega-se capacitores de barramento com elevada capacitância, reduzindo-se, assim, a amplitude da oscilação da tensão. Associado a esta prática, são amplamente utilizados compensadores com reduzida banda passante na malha de tensão, a fim de garantir boa atenuação nas frequências de oscilação da saída.

Quando estas condições são garantidas, a influência da oscilação de tensão na saída de retificadores monofásicos com correção do fator de potência (PFC) é muito pequena. Baseando-se neste fato, muitas técnicas de projeto e análise consideram apenas a dinâmica contínua da tensão de saída. Nestes casos, utiliza-se representações dinâmicas LTI obtidas a partir de técnicas de modelagem de pequenos sinais. No entanto, faz-se necessário o emprego de compensadores de tensão com característica de banda passante muito abaixo das frequências de oscilação da tensão de barramento. Como resultado, a resposta dinâmica da tensão de saída a variações de referência e distúrbios de carga é consideravelmente lenta (SRINIVASAN; ORUGANTI, 1998; LO; OU; YEN, 2002).

Com o objetivo de melhorar a resposta dinâmica da malha de tensão sem comprometer a correção do fator de potência de entrada, propôs-se a inclusão de filtros rejeita-banda na malha de compensação da tensão do barramento, sintonizados nas frequências de ondulação da saída. Este filtro acentua consideravelmente a atenuação das componentes harmônicas do sinal de saída, possibilitando a elevação da banda passante da malha de compensação de tensão. O emprego dessa técnica resulta em respostas dinâmicas de tensão mais rápidas para variação da referência e rejeição de distúrbios de carga. A inclusão do filtro rejeita-banda na malha de tensão é mostrada no circuito da Figura 1.2 (NODARI et al., 2010; BUSO et al., 1998; PRODIC et al., 2002; PERREAULT; VERGHESE, 1995).

Modelos LTI são muito utilizados em projetos e análises de sistemas de controle de malha fechada. No entanto, a representação de retificadores PFC monofásicos por modelos LTI é eficiente somente quando as componentes alternadas da tensão de saída for consideravelmente mitigada no processo de realimentação. Essa hipótese é garantida apenas com o emprego de compensadores passa-baixa e com reduzida frequência de corte, evitando-se, assim, a replicação espectral causada pela modulação da tensão $v_o(t)$ pela malha de controle e pelo inversor PWM.

Por outro lado, quando sistemas de controle de alto desempenho são utilizados, como

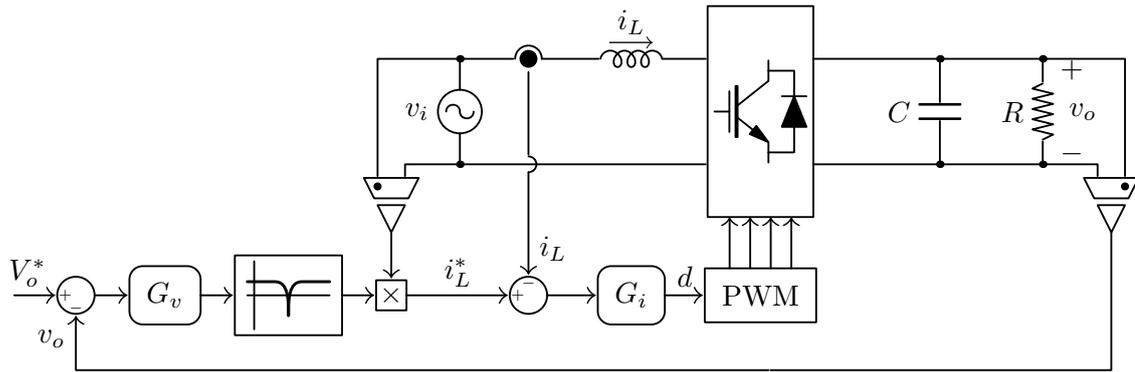


Figura 1.2 – Circuito retificador monofásico empregando sistema de controle em malha fechada com filtros rejeita-banda.

o caso da Figura 1.2, fica difícil assegurar as hipóteses necessárias para o emprego do modelo LTI:

- Elevada atenuação nas componentes de frequências de ondulação da tensão de saída;
- Reduzida banda-passante da função de transferência em malha fechada;
- Dimensionamento do capacitor para obter reduzida oscilação do barramento cc;
- Desacoplamento dinâmico entre as malhas externa de tensão e interna de corrente.

Caso uma ou mais destas hipóteses não sejam garantidas, a análise do sistema utilizando-se metodologias baseadas em modelos médios LTI são insuficientes na representação das dinâmicas da malha de tensão.

Da mesma forma, se o comportamento dinâmico desses sistemas não são apropriadamente descritos por modelos de pequenos sinais, os quais contém apenas a dinâmica média da planta, não é possível garantir a estabilidade desses sistemas em malha fechada baseando-se nos modelos médios LTI (SCAPINI; BELLINASSO; MICHELS, 2012b).

Uma melhor representação para estes sistemas retificadores é obtida com a utilização de modelos lineares periódicos no tempo (LTP). Esta técnica de modelagem permite considerar os efeitos de modulação do conversor e as interações espectrais presentes na malha de tensão. Assim, as interações espectrais que ocorrem entre as componentes harmônicas do sinal de saída e o sistema de compensação em malha fechada são dinâmicas presentes no modelo. Conseqüentemente, a análise da estabilidade empregando-se os modelos LTP incluem os efeitos da replicação espectral, e são mais apropriados para análise de retificadores PFC monofásicos em malha fechada (WERELEY, 1990; MÖLLERSTEDT, 2000).

Esta abordagem tem sido empregada com êxito para a análise da estabilidade em malha fechada de sistemas com características de modulação em frequência. Como exemplo, pode-se citar a análise da estabilidade aplicada em sistemas de acionamento elétrico

de locomotivas, incluindo-se a influência das componentes harmônicas da rede (MÖLLERSTEDT; BERNHARDSSON, 2000b), conversor elevador cc-cc (ALMÉR; JÖNSSON, 2009), modelo e análise de retificadores a diodos (MÖLLERSTEDT; BERNHARDSSON, 2000a), conversor elevador-abaiçador (LOVE; WOOD, 2008), sistemas magnéticos de rolamento ativo (JUGO; LIZARRAGA; ARREDONDO, 2008), identificação de consumo de combustível (KESSELS et al., 2008) e análise de estabilidade de redes de distribuição incluindo-se conversores estáticos (STROBL, 2007), dentre outros.

Métodos baseados na resposta em frequência são constantemente utilizados para análise e projeto de controladores lineares e invariantes no tempo. Sistemas LTI apresentam característica de separação em frequência e podem ser tratados de forma independente a cada ponto do espectro. No entanto, esta característica não é satisfeita para sistemas variantes e, dessa forma, não pode ser diretamente generalizada para o caso LTP. Uma metodologia alternativa é apresentada em Möllerstedt (2000, p.26), a qual possibilita a determinação de uma representação LTI equivalente para o sistema LTP a partir da decomposição por séries de Fourier.

Esta forma alternativa foi introduzida por Wereley (1990), onde é proposta uma representação no domínio da frequência para modelos de sistemas LTP. Esta representação é denominada função de transferência harmônica (HTF) e utiliza decomposição por séries complexas de Fourier, teoria de matrizes circulares ou de Toeplitz e o conceito de equilíbrio harmônico. A HTF resultante consiste em um modelo de dimensão infinita e compõe as correlações dinâmicas entre todas as componentes harmônicas da entrada para a saída do modelo.

A abordagem HTF é sustentada pela comparação com técnicas clássicas de análises de sistemas LTP: teoria de Floquet e Hill. A análise da resposta em frequência e transição de polos e zeros para a HTF é ilustrada por Wereley e Hall (1990, 1991), respectivamente. Trabalhos complementares visando a implementação de técnicas de análise da estabilidade empregando-se métodos generalizados de Nyquist foram apresentados por Zhou e Hagiwara (2002a, 2002b).

Möllerstedt (2000) apresenta maiores detalhes de implementação da metodologia para análise da estabilidade de malha fechada empregando-se HTF. Trata, também, do conceito básico para limitação da dimensão da HTF, necessária para a implementação. Seus trabalhos se estendem a aplicações de análise da estabilidade de regime permanente em sistemas de distribuição de energia (MÖLLERSTEDT; BERNHARDSSON, 1997), modelagem de retificador não controlados (MÖLLERSTEDT; BERNHARDSSON, 2000a) e modelo de micro-turbinas (MÖLLERSTEDT; STOTHERT, 2000).

Uma vez que o sistema é representado por uma função de transferência harmônica, cuja característica dinâmica é LTI, as técnicas generalizadas de análise da estabilidade desenvolvidas para sistemas MIMO podem ser utilizadas para a análise de sistemas LTP. Neste trabalho, a representação HTF de modelos LTP é utilizada para a análise da es-

tabilidade em malha fechada dos retificadores PFC monofásicos em ponte completa e meia ponte. A seguir são apresentados os efeitos de modulação presentes nesses dois retificadores.

1.1 Interações harmônicas em retificadores com correção do fator de potência monofásicos

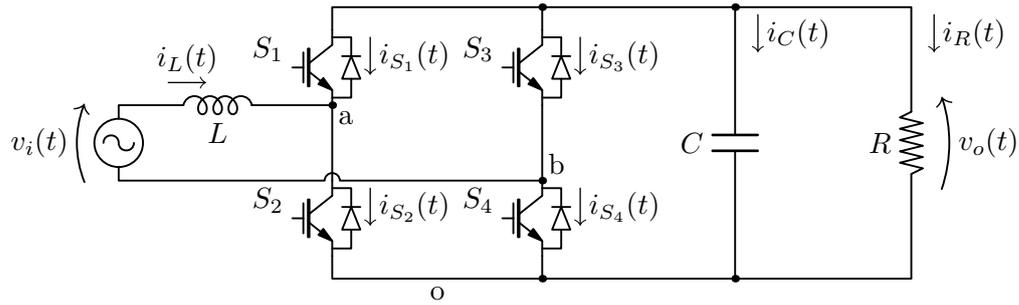
Sistemas retificadores com correção do fator de potência da entrada empregam controladores em malha fechada. Devido ao efeito de modulação presente na estratégia de controle e no conversor, a tensão de saída é sempre composta por um nível contínuo sobreposto por uma ondulação de baixa frequência. Quando a ondulação de tensão da saída, de frequência múltipla à frequência da rede, é realimentada pelo sistema de controle, esta componente também é modulada, produzindo ondulações em outras componentes de frequências. A seguir são descritos os casos particulares para os retificadores abordados neste trabalho.

1.1.1 Retificador em ponte completa

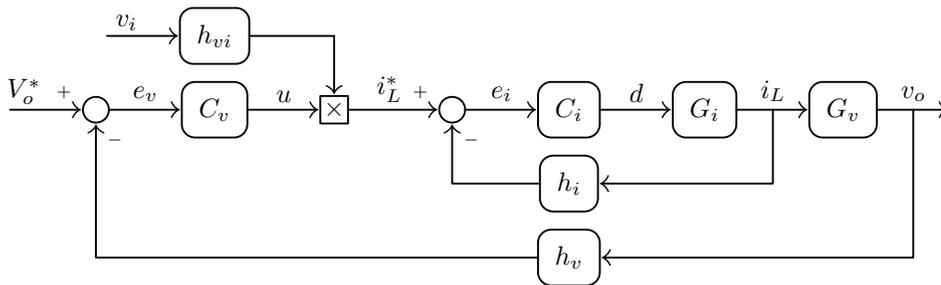
A Figura 1.3 mostra o circuito elétrico do retificador em ponte completa e um arranjo utilizado para o controle da tensão de saída, representado por diagrama de blocos. O sistema de controle é constituído por duas malhas de retroação: uma malha interna de controle da corrente de entrada, cuja dinâmica é, por definição, rápida; e uma malha externa de controle da tensão de saída, cuja dinâmica é consideravelmente reduzida.

O controlador da malha interna $C_i(s)$ atua sobre a razão cíclica $d(t)$ forçando a corrente de entrada $i_L(t)$ a rastrear a referência de corrente $i_L^*(t)$, a qual é produzida pela ação de controle da malha externa. O controlador da malha externa de tensão $C_v(s)$ atua sobre a amplitude da referência da corrente $u(t)$ forçando a regulação da tensão de saída $v_o(t)$ para o valor de referência V_o^* . A ação de controle da malha de tensão é multiplicada por um escalar da tensão de entrada $h_{vi}v_i(t)$, considerada senoidal, resultando em uma corrente de referência senoidal e em fase com a tensão de entrada. Os blocos h_i e h_v são os ganhos de medida da corrente de entrada e da tensão de saída, respectivamente.

O mapeamento em frequências para o retificador monofásico em ponte completa é mostrado na Figura 1.4 para o circuito em malha fechada, onde múltiplas interações harmônicas podem ser observadas. Este mapeamento assume a operação em regime permanente para referência de tensão de saída V_o^* constante. Considerando-se, inicialmente, a tensão de saída $v_o(t)$ constante, o erro de tensão $e_v(t)$ entre a saída e a referência é constante é também constante, da mesma forma que a ação de controle da malha de



(a) Circuito de potência



(b) Diagrama de blocos do sistema de controle

Figura 1.3 – Retificador PFC monofásico em ponte completa.

tensão $u(t)$, tendo em vista um controlador linear. Em consequência, do produto da ação de controle $u(t)$ por um escalar da tensão de entrada resulta uma referência de corrente senoidal de frequência ω igual à frequência da rede. Da mesma forma, considerando-se o controlador da malha de corrente linear, a razão cíclica $d(t)$ resultante apresenta forma de onda senoidal com frequência ω . O efeito de modulação intrínseco no conversor, resultado do produto da corrente de entrada $i_L(t)$ pela razão cíclica $d(t)$, produz na saída um sinal de tensão com valor constante sobreposto por uma componente senoidal de frequência 2ω .

Considerando-se, agora, a realimentação da componente de frequência 2ω da tensão da saída, resulta em componente de erro de tensão com frequência 2ω . Em consequência, a componente de 2ω estará presente no sinal de ação de controle. O produto desta

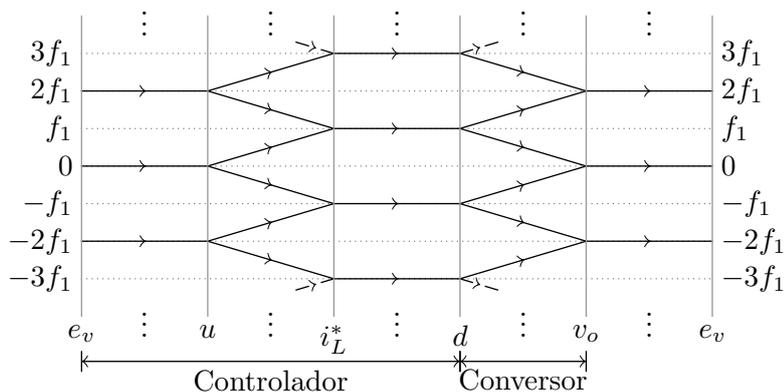


Figura 1.4 – Mapeamento de frequências para o conversor em ponte completa.

componente de frequência com a tensão de entrada resulta em componentes moduladas nas frequências ω e 3ω para a referência de corrente. Tais componentes aparecem na razão cíclica e, por sua vez, são moduladas para a saída do retificador, e assim sucessivamente. Como pode ser observado, este espalhamento em frequência estende-se indefinidamente, como mostra a Figura 1.4, quando não consideradas as atenuações em frequência pelas malhas de retroação.

O efeito de modulação é resultado do produto de duas funções senoidais. Como exemplo, considere o produto de duas funções cossenoidais de frequências a e b quaisquer:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \quad (1.3)$$

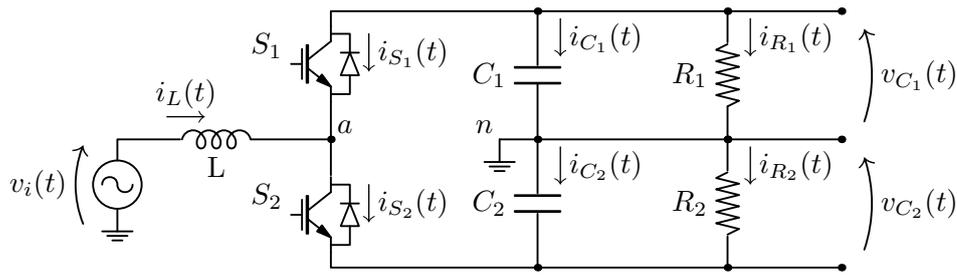
Esta operação resulta em um sinal composto por duas componentes harmônicas de frequências distintas: $a+b$ e $a-b$.

Muitas técnicas convencionais utilizam um elevado capacitor de barramento e controladores de tensão com reduzido ganho nas frequências de ondulação da saída. Estes controladores lentos atenuam significativamente as componentes harmônicas, e, dessa forma, os impactos da interação espectral podem ser negligenciados. No entanto, quando esta condição não é garantida, as interações harmônicas podem reduzir o desempenho e levar o sistema à instabilidade (SCAPINI; BELLINASSO; MICHELS, 2012a). Estas situações serão melhor abordadas e exemplificadas no decorrer deste trabalho.

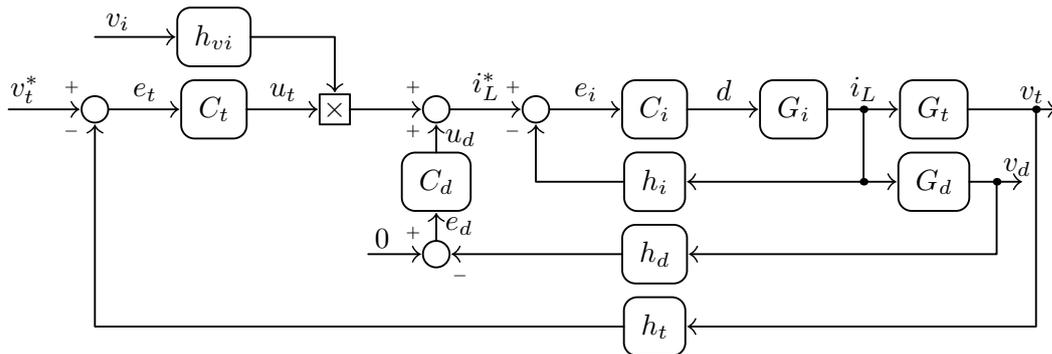
1.1.2 Retificador em meia ponte

A Figura 1.5 apresenta o circuito retificador e o diagrama de blocos do sistema convencional de controle usado em retificadores PFC em meia ponte. Este esquema se baseia no emprego de múltiplas malhas de controle realimentado: uma malha interna para compensação da corrente de entrada e duas malhas externas para compensação das tensões de saída. A malha interna de corrente apresenta dinâmica rápida, onde o controlador de corrente $C_i(s)$ atua sobre o valor da razão cíclica $d(t)$ para forçar a corrente de entrada $i_L(t)$ a rastrear a referência da corrente $i_L^*(t)$. As malhas externas de controle de tensão apresentam dinâmicas consideravelmente lentas. Neste caso, os compensadores de tensão diferencial $C_d(s)$ e total $C_t(s)$ atuam sobre a referência da corrente de entrada, a fim de levar as tensões de saída da planta $v_d(t)$ e $v_t(t)$ para seus valores de referência de tensão v_d^* e v_t^* , respectivamente (SCAPINI; BELLINASSO; MICHELS, 2012c).

A tensão total de saída é definida como a soma das tensões nos capacitores, enquanto a tensão diferencial tem como finalidade manter o equilíbrio entre as tensões $v_{C_1}(t)$ e $v_{C_2}(t)$. Os controladores de tensão determinam a corrente de referência $i_L^*(t)$ através das ações de controle $u_d(t)$ e $u_t(t)$. O produto de $u_t(t)$ pela tensão de entrada assegura um fator de potência próximo à unidade para cargas equilibradas, onde $u_d(t) = 0$. Os blocos



(a) Circuito de potência



(b) Diagrama de blocos do sistema de controle

Figura 1.5 – Retificador PFC monofásico em meia ponte.

de realimentação h_i , h_d e h_t representam os ganhos de medidas da corrente no indutor e das tensões de saída, respectivamente. Os blocos representados por $G_i(s)$, $G_d(s)$ e $G_t(s)$ correspondem à representação da planta por funções de transferência.

Considerando-se a análise do espalhamento espectral para a malha de controle da tensão total da topologia em malha fechada, inicialmente para $v_t(t)$ e v_t^* constantes, resulta que $e_t(t)$ e $u_t(t)$ são constantes para um controlador de tensão senoidal. O produto de $u_t(t)$ pela tensão de entrada produz $i_L^*(t)$ e $d(t)$ senoidais de frequência ω , que, por sua vez, resulta em corrente de entrada $i_L(t)$ com frequência ω . O produto $i_L(t)d(t)$, caracterizado pelo efeito de modulação no retificador, produz na saída um nível de tensão contínuo sobreposto por uma componente alternada de frequência 2ω .

Quando da realimentação da componente de frequência 2ω da tensão total na saída, o resultado são componentes de sinais de erro e de ação de controle de frequência 2ω . O produto da componente de frequência 2ω de $u_t(t)$ pela tensão de entrada $v_i(t)$ resulta em componentes de frequência ω e 3ω para a referência de corrente, cujo efeito se reflete na tensão total de saída devido à modulação no inversor, e assim sucessivamente. Generalizando-se este comportamento, o resultado é o mapeamento em frequências mostrado na Figura 1.6.

Como pode ser notado, com o emprego de cargas equilibradas, o efeito de espalhamento espectral da entrada para a saída é muito semelhante ao caso do retificador em ponte completa, considerando-se apenas a malha de tensão total. Por outro lado, a medida em que ocorre desequilíbrio de carga, surge oscilação de tensão de saída com frequência

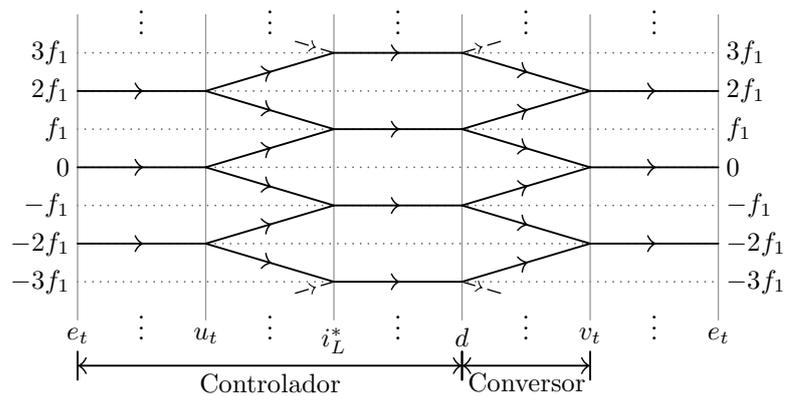


Figura 1.6 – Mapeamento de frequências para a malha de tensão total do retificador em meia ponte

ω , e, por consequência da realimentação, todas as harmônicas ímpares da tensão de saída. Incluindo-se na análise a malha de controle da tensão diferencial, o mesmo fenômeno espectral é observado, além do mais, existe interação entre as harmônicas das malhas de controle diferencial e total, fazendo com que ambas as tensões de saída apresentem componentes harmônicas múltiplas da tensão de entrada ω .

Tal como na topologia em ponte completa, muitas técnicas convencionais utilizam elevado capacitor de barramento e controladores de tensão com reduzido ganho nas frequências de ondulação da saída. Estes controladores lentos atenuam significativamente as componentes harmônicas, e os impactos da interação espectral pode ser desconsiderado. Por outro lado, se estas condições não são garantidas, as interações harmônicas podem reduzir a performance e levar o sistema à instabilidade. Estas situações serão melhor abordadas e exemplificadas ao decorrer desse trabalho.

1.2 Objetivos do trabalho

Este trabalho apresenta a modelagem dinâmica de retificadores monofásicos com correção do fator de potência de entrada. A linearização em torno das condições de operação é realizada resultando em representações matemáticas LTP para os retificadores.

Este trabalho se propõe a mostrar que os modelos LTI normalmente utilizados para a análise da estabilidade são falhos quando da utilização de compensadores de tensão de desempenho elevado. Uma metodologia alternativa é apresentada para a análise da estabilidade empregando-se modelos LTP, os quais representam melhor as características dinâmicas da malha de compensação de tensão e contemplam os efeitos intrínsecos de modulação em frequência.

A análise da estabilidade de malha fechada emprega o critério generalizado de Nyquist para sistemas MIMO-LTI. Este critério é aplicado à representação do modelo LTP

por funções de transferência harmônica, para os retificadores PFC em ponte completa e meia ponte. Resultados de simulação e experimentais são realizados para validação da metodologia.

São objetivos específicos deste trabalho:

- Descrever o processo da modelagem do retificador em ponte completa. Nesta etapa, são apresentados os modelos matemáticos que descrevem o comportamento dinâmico dos estados da planta, onde são obtidos o modelo completo não-linear, o modelo linear periódico no tempo e o modelo médio LTI;
- Descrever o processo da modelagem do retificador em meia ponte. Nesta etapa, são apresentados os modelos matemáticos que descrevem o comportamento dinâmico dos estados da planta, onde são obtidos o modelo completo não-linear, o modelo linear periódico no tempo e o modelo médio LTI;
- Demonstrar a metodologia para representação de modelos LTP por funções de transferência harmônica. Descrever a decomposição por séries de Fourier e determinar a HTF a partir de um sistema de equações por espaço de estados LTP;
- Apresentar dois possível métodos para a análise da estabilidade de sistemas LTP empregando-se a abordagem HTF. Mostrar as particularidades e a região de mapeamento do plano complexo modificada para sistemas periódicos;
- Projetar um sistema de controle em malha fechada para o retificador em ponte completa com correção do fator de potência da entrada. Obter o modelo LTP e sua respectiva representação por função de transferência harmônica. Obter a HTF do sistema em malha aberta;
- Aplicar os métodos apresentados para a análise da estabilidade em malha fechada, empregando-se a representação HTF ao retificador em ponte completa projetado. Comparar os resultados obtidos com a análise da estabilidade baseada nos modelos médios LTI;
- Projetar um sistema de controle em malha fechada para o retificador em meia ponte com correção do fator de potência da entrada. Obter o modelo LTP e sua respectiva representação por função de transferência harmônica. Obter a HTF do sistema em malha aberta;
- Aplicar os métodos apresentados para a análise da estabilidade em malha fechada, empregando-se a representação HTF ao retificador em meia ponte projetado. Comparar os resultados obtidos com a análise da estabilidade baseada nos modelos médios LTI;

- Apresentar resultados de simulação para para os retificadores em ponte completa e em meia ponte, para validar a metodologia de análise da estabilidade apresentada;
- Apresentar resultados experimentais para o retificador em ponte completa para validar a metodologia de análise da estabilidade apresentada.

Embora a metodologia HTF tenha sido empregada na literatura para a análise de sistemas em diversas áreas, onde os efeitos causados pelas interações harmônicas afetam a estabilidade, não foram encontradas aplicações em que esta metodologia tenha sido empregada com clareza na análise da estabilidade de retificadores PFC.

1.3 Organização do trabalho

O corpo deste trabalho é organizado em quatro capítulos principais: o Capítulo 2 é dedicado à obtenção das representações matemáticas para as dinâmicas dos retificadores em ponte completa e meia ponte; o capítulo seguinte apresenta a metodologia utilizada para a análise da estabilidade de sistemas lineares periódicos no tempo, onde são apresentados dois métodos; no Capítulo 4, aplica-se a metodologia de análise da estabilidade aos retificadores em ponte completa e meia ponte, comparando-a com a análise LTI convencional e com simulações; o Capítulo 5 apresenta resultados experimentais para o retificador em ponte completa.

No Capítulo 2 apresenta-se a modelagem matemática dos retificadores monofásicos em ponte completa (Seção 2.1) e meia ponte (Seção 2.2) considerando-se operação com correção do fator de potência. Faz-se uma breve descrição dos retificadores, seus elementos, modos e etapas de operação. São utilizadas estruturas típicas de controle em múltiplas malhas de realimentação, considerando-se desacoplamento dinâmico entre elas. Ainda neste capítulo, é obtido o modelo linear periódico no tempo para estes retificadores, cuja representação matemática contempla as interações harmônicas intrínsecas quando da realimentação. Em seguida, são mostradas as representações lineares e invariantes no tempo para cada topologia, bem como a representação no domínio da frequência por funções de transferência.

No Capítulo 3 é elaborada a representação de sistemas LTP por funções de transferência harmônica (HTF). A Seção 3.1 descreve detalhadamente a metodologia para obtenção da HTF. A partir da HTF, a análise da estabilidade de sistemas LTP é realizada utilizando-se métodos desenvolvidos para sistemas LTI com múltiplas entradas e saídas (MIMO). Dessa forma, a teoria de sistemas LTI é generalizada para sistemas LTP. A Seção 3.2 apresenta dois métodos para análise da estabilidade empregando-se a abordagem HTF e baseando-se no critério generalizado de Nyquist. O caminho de mapeamento do contorno de Nyquist no plano s é modificado, atendendo às particularidades de sistemas

LTP.

No Capítulo 4 a abordagem HTF é empregada para a análise da estabilidade de um retificador em ponte completa, na Seção 4.1, e de um retificador em meia ponte, na Seção 4.2. Para isso, o sistema de controle em malha fechada é projetado a partir de ferramentas convencionais baseadas no modelo médio LTI para controle da corrente de entrada e da tensão de saída. Resultados de simulação são apresentados para validação da metodologia de análise da estabilidade empregando modelos LTP.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados experimentais para um retificador em ponte completa. Apresenta-se o projeto dos controladores, o modelo LTP, a representação HTF e a análise da estabilidade. Os resultados obtidos são comparados aos resultados nos quais se emprega os modelos LTI.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões obtidas com o emprego dos métodos para a análise da estabilidade dos retificadores em ponte completa e meia ponte.

2 MODELAGEM DINÂMICA DE RETIFICADORES COM CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA

Neste capítulo é apresentada a modelagem matemática dos retificadores em ponte completa e meia ponte considerando-se operação com correção do fator de potência de entrada. O objetivo é descrever detalhadamente as etapas de operação destes conversores em tempo contínuo e a obtenção das respectivas representações matemáticas. São obtidas diversas representações, resultado de diferentes simplificações aplicadas à modelagem, para as quais é de fundamental importância o conhecimento das limitações implícitas em cada abordagem.

Nas seções que seguem, é apresentada uma breve descrição dos retificadores estudados, seus elementos, modos e etapas de operação. O processo da modelagem considera a estrutura típica de controle empregada para a operação com correção do fator de potência, empregando-se múltiplas malhas de realimentação. Com isso, a representação matemática das malhas de corrente e tensão é analisada individualmente, considerando-se seu desacoplamento dinâmico.

O modelo característico que representa o comportamento da corrente de entrada com relação à razão cíclica, denominado *modelo de corrente*, é obtido considerando-se aproximações de pequenas ondulações. Neste caso, a linearização negligencia alguns termos do modelo, os quais devem ser compensados pelo sistema de controle.

O modelo característico que representa o comportamento da tensão de saída com relação à corrente de entrada, denominado neste trabalho *modelo de tensão*, é obtido considerando-se aproximação de pequenas ondulações. O modelo completo não-linear da malha de tensão é obtido, e sua linearização é realizada em torno do ponto de operação do sistema, com pequenas aproximações. Da linearização, resulta um modelo linear periódico no tempo.

As representações lineares e invariantes no tempo (LTI) para ambos os modelos são determinadas a partir dos modelos anteriores. Estas representações LTIs são amplamente utilizadas e permitem a utilização direta de ferramentas clássicas de projeto e análise de sistemas. No caso do retificador em meia ponte, o modelo LTI é simplificado por uma representação desacoplada por funções de transferência. Essa representação possibilita o emprego de ferramentas clássicas de projeto desenvolvidas para sistemas SISO.

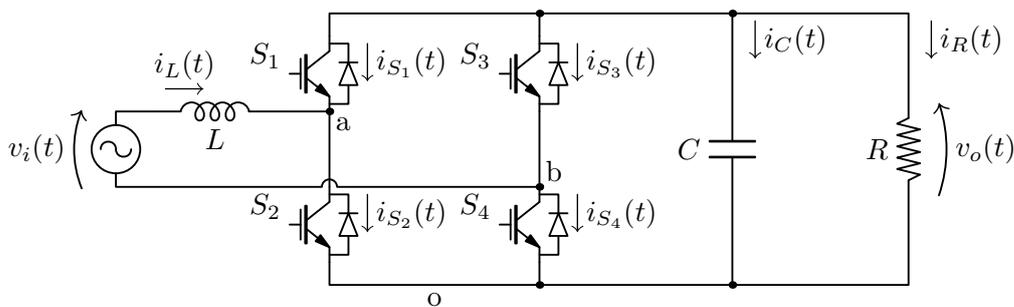
Para as análises matemáticas apresentadas a seguir não serão consideradas as características não ideais presentes nos sistemas retificadores em ponte completa e meia ponte, tais como saturação nos indutores, impedância da rede, quedas de tensão nos semicondutores, tempo de comutação, capacitâncias parasitas e flutuação e harmônicos da tensão de alimentação.

2.1 Retificador em ponte completa

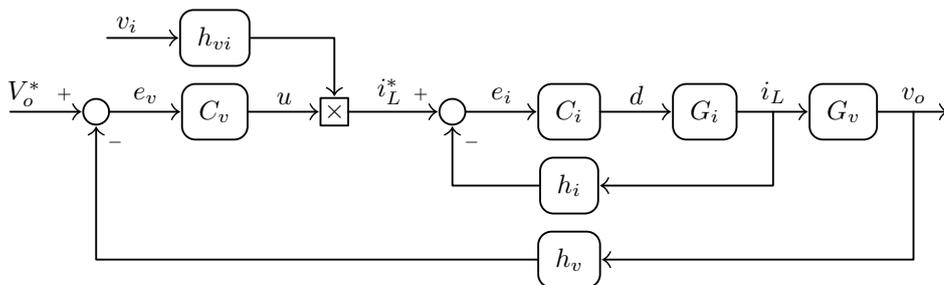
O circuito elétrico de um retificador em ponte completa é apresentado na Figura 2.1(a). Este conversor monofásico apresenta quatro chaves totalmente controladas S_1 – S_4 , um indutor de entrada L e um capacitor de saída C . O indutor de entrada é utilizado para reduzir a ondulação de corrente na entrada, causada pela natureza PWM da função entre os pontos a e b, enquanto o capacitor de saída é usado para atenuar a ondulação de tensão na saída, resultado da potência pulsada de entrada e distúrbios de carga.

A operação do circuito controlado considera um arranjo de comutação baseado na modulação por largura de pulso (PWM – do inglês, *pulse width modulation*). Os sinais modulados são obtidos a partir da comparação da razão cíclica $d(t)$ com uma portadora triangular definida com amplitude $[0, 1]$ e frequência T_s . A estratégia de modulação empregada resulta em tensão PWM unipolares entre os terminais de entrada do inversor $v_{ab}(t)$.

A Figura 2.1(b) apresenta o diagrama de blocos de um controlador usualmente utilizado em retificadores com correção do fator de potência (SILVA JR., 1994; HULIEHEL; LEE; CHO, 1992; TODD, 1999). Este esquema se baseia no emprego de duas malhas de controle com realimentação: uma malha interna de controle da corrente de entrada e uma malha externa de regulação da tensão de saída. A primeira apresenta dinâmica rápida, em que o controlador de corrente $C_i(s)$ atua sobre o valor da razão cíclica $d(t)$



(a)



(b)

Figura 2.1 – Circuito do retificador monofásico em ponte completa. (a) Circuito elétrico. (b) Diagrama de blocos da estrutura de controle em malha fechada.

para forçar a corrente de entrada $i_L(t)$ a rastrear a referência da corrente $i_L^*(t)$. Por outro lado, a malha externa de controle de tensão apresenta dinâmica consideravelmente mais lenta que a malha de corrente. O compensador de tensão $C_v(s)$ atua sobre a amplitude da referência de corrente para forçar a tensão de saída $v_o(t)$ a rastrear a referência constante da tensão de saída V_o^* . Neste caso, a representação efetuada normalmente por funções de transferência desconsidera as não-linearidades das dinâmicas da corrente de entrada e da tensão de saída do retificador.

A referência da corrente de entrada é resultado do produto da ação de controle da malha de tensão $u(t)$ por um fator da tensão de entrada $h_{vi}v_i(t)$. Esse procedimento é utilizado para garantir fator de potência de entrada muito próximo à unidade, onde a forma de onda da corrente é uma imagem da forma de onda da tensão. Os blocos de realimentação h_i e h_v representam os ganhos de medidas da corrente de entrada e tensão de saída do inversor, respectivamente.

Para a análise do retificador monofásico em ponte completa considera-se que a malha interna de corrente possui resposta dinâmica consideravelmente mais rápida que a malha externa de tensão, de modo que ambas apresentem desacoplamento dinâmico, e, assim, possam ser analisadas individualmente. Neste caso, para a análise da malha de tensão, o modelo dinâmico da malha de corrente é substituído por uma fonte dependente de corrente ideal, tal que $i_L(t) = i_L^*(t)$. Como resultado, as malhas resultantes de corrente e de tensão são apresentadas na Figura 2.2 e na Figura 2.3, respectivamente, onde $\frac{1}{h_i}$ é o ganho de regime permanente em malha fechada do controlador de corrente (KIMBALL; KREIN, 2008).

A seguir, são apresentados, para o retificador em ponte completa, tanto a obtenção dos modelos que descrevem o comportamento da corrente de entrada com relação à razão cíclica quanto a obtenção dos modelos que descrevem o comportamento da tensão de saída

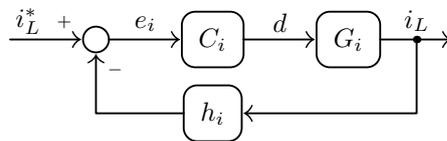


Figura 2.2 – Malha de controle da corrente dinâmica de entrada do retificador monofásico em ponte completa.

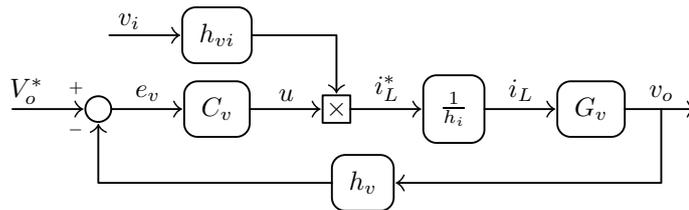


Figura 2.3 – Malha de controle da tensão dinâmica de saída do retificador monofásico em ponte completa.

com relação à corrente de entrada.

2.1.1 Modelagem dinâmica da corrente de entrada com relação à razão cíclica

O modelo que descreve o comportamento da corrente de entrada com relação à razão cíclica de operação do inversor em ponte completa é obtido nesta seção para seus respectivos valores médios no período de comutação.

O circuito equivalente do estágio de entrada do retificador é mostrado na Figura 2.4, para seus respectivos valores instantâneos. A tensão nos terminais ca do inversor é representada por uma fonte de tensão PWM $v_{ab}(t)$ de frequência constante f_s . A forma de onda de $v_{ab}(t)$ é função dos valores instantâneos da tensão de saída $v_o(t)$ e da razão cíclica $d(t)$.

Aplicando-se a Lei de Kirchhoff das malhas no circuito da Figura 2.4,

$$-v_i(t) + v_L(t) + v_{ab}(t) = 0, \quad (2.1)$$

e substituindo-se $v_L(t)$ pela equação característica que descreve o comportamento elétrico do indutor,

$$v_L(t) = L \frac{d(i_L(t))}{dt} \quad (2.2)$$

resulta a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d(i_L(t))}{dt} = \frac{1}{L} [v_i(t) - v_{ab}(t)] \quad (2.3)$$

Aplicando-se o teorema dos valores médios em um período de comutação em ambos os lados de (2.3), a fim de se obter o modelo dinâmico de baixa frequência, escreve-se:

$$\int_t^{t+T_s} \frac{d}{d\tau}(i_L(\tau))d\tau = \frac{1}{L} \int_t^{t+T_s} [v_i(\tau) - v_{ab}(\tau)]d\tau. \quad (2.4)$$

Onde T_s é o período de comutação do circuito inversor, definido na forma:

$$T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi}{\omega_s} \quad (2.5)$$

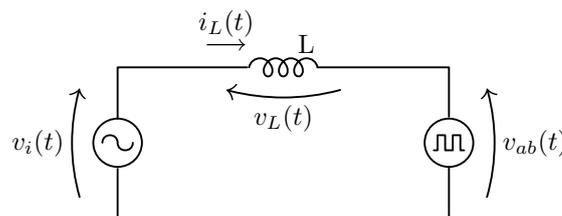


Figura 2.4 – Circuito equivalente da malha de corrente do retificador em ponte completa.

Aplicando-se a propriedade da distributividade, resolvendo-se a integração de $i_L(\tau)$, (2.4) é reescrita na forma:

$$i_L(t + T_s) - i_L(t) = \frac{1}{L} \int_t^{t+T_s} v_i(\tau) d\tau - \frac{1}{L} \int_t^{t+T_s} v_{ab}(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

No entanto, é sabido que

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \frac{1}{T_s} [i_L(t + T_s) - i_L(t)] \quad (2.7)$$

onde $\langle i_L(t) \rangle$ é a corrente média no indutor no período T_s . A demonstração dessa identidade encontra-se no Apêndice A.1.

Substituindo-se (2.7) em (2.6), tem-se:

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_i(\tau) d\tau - \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_{ab}(\tau) d\tau \right] \quad (2.8)$$

cujos termos à direita da igualdade são estritamente seus respectivos valores médios no período de comutação. Assim, pode-se escrever:

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \frac{1}{L} [\langle v_i(t) \rangle - \langle v_{ab}(t) \rangle] \quad (2.9)$$

Com isso, pode-se afirmar que a lei de Kirchhoff das tensões é válida para os respectivos valores médios da malha.

A equação que descreve a tensão média nos terminais ca de entrada do inversor é dada por:

$$\langle v_{ab}(t) \rangle = [2\langle d(t) \rangle - 1] \langle v_o(t) \rangle. \quad (2.10)$$

em função da razão cíclica média e da tensão média de saída. Essa dedução se encontra em maiores detalhes no Apêndice A.2.

Substituindo (2.10) em (2.9), obtém-se a equação diferencial não-linear que descreve o comportamento médio em T_s da corrente de entrada em função da razão cíclica, da tensão de entrada e da tensão de saída do retificador em ponte completa:

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \frac{1}{L} \langle v_i(t) \rangle - \frac{1}{L} [2\langle d(t) \rangle - 1] \langle v_o(t) \rangle. \quad (2.11)$$

2.1.2 Linearização do modelo dinâmico da corrente de entrada com relação à razão cíclica

Considerando-se que a equação diferencial que descreve o comportamento da corrente no indutor de entrada (2.11) é não-linear, a linearização deste é realizada em torno do ponto de operação do retificador. Com isso, para operação em regime permanente, a tensão de saída $\langle v_o(t) \rangle$ pode ser aproximada pela tensão de referência V_o^* , considerando-se

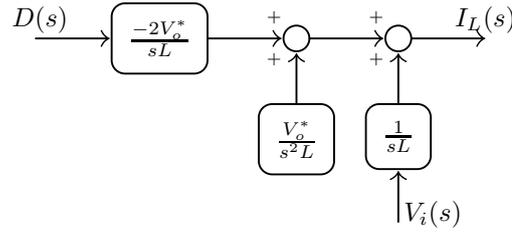


Figura 2.5 – Representação por diagrama de blocos da dinâmica de corrente.

que a componente alternada da saída é muito menor que a componente cc.

Substituindo

$$\langle v_o(t) \rangle = V_o^* \quad (2.12)$$

em (2.11), o modelo resultante é dado em função de duas variáveis de excitação $\langle v_i(t) \rangle$ e $\langle d(t) \rangle$:

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \frac{1}{L} \langle v_i(t) \rangle - \frac{2V_o^*}{L} \langle d(t) \rangle + \frac{V_o^*}{L}. \quad (2.13)$$

Empregando-se a transformada de Laplace em (2.13), e isolando-se a variável corrente, obtém-se a representação do modelo no domínio da frequência contínua:

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} V_i(s) - \frac{2V_o^*}{sL} D(s) + \frac{V_o^*}{s^2L}. \quad (2.14)$$

A representação desse modelo por diagrama de blocos se encontra na Figura 2.5, modelo este constituído por duas entradas $\langle d(t) \rangle$ e $\langle v_i(t) \rangle$ e uma parcela $\frac{V_o^*}{s^2L}$, relativa à tensão do barramento cc, a qual pode ser considerada distúrbio de saída.

Desconsiderando-se a parcela relativa ao distúrbio de saída, obtém-se uma representação linear invariante no tempo para o comportamento da corrente no indutor. Isso é representado no domínio da frequência pela expressão:

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} V_i(s) - \frac{2V_o^*}{sL} D(s). \quad (2.15)$$

A parcela não-linear da equação dinâmica da corrente pode ser desconsiderada na representação matemática. No entanto, deve ser abordada no projeto do controlador, sendo ela considerada como distúrbio de saída com frequência conhecida, no caso, cc. Neste caso, o controlador da malha de corrente deve garantir convergência assintótica para distúrbios de frequência constante.

2.1.3 Modelagem dinâmica da tensão de saída com relação à corrente de entrada

Levando-se em conta o princípio do desacoplamento dinâmico entre as malhas de controle da corrente de entrada e da tensão de saída, o circuito da tensão de saída do retificador pode ser simplificado na forma mostrada na Figura 2.6, considerando-se $i_L(t) =$

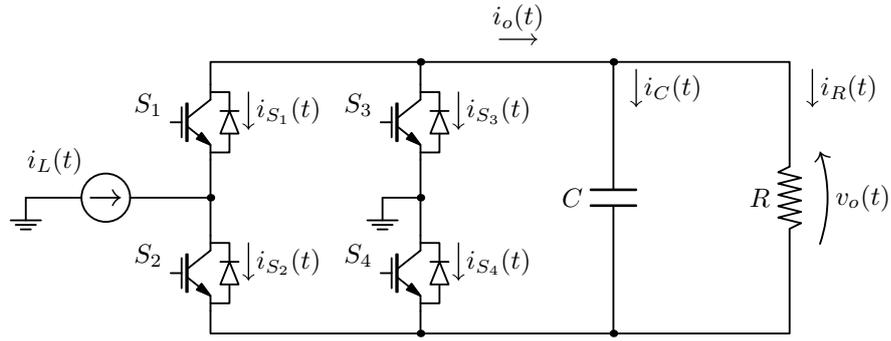


Figura 2.6 – Circuito equivalente instantâneo da malha de tensão.

$i_L^*(t)/h_i$.

Para uma portadora triangular com amplitude definida no intervalo $[0, 1]$ e período de operação T_s , considere o arranjo de comutação dos semicondutores para uma dada razão cíclica $d(t)$, onde

$$\begin{aligned} S_1 &\rightarrow d(t) \\ S_3 &\rightarrow 1 - d(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

e

$$\begin{aligned} S_2 &= \bar{S}_1 \\ S_4 &= \bar{S}_3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Aplicando-se a Lei de Kirchhoff das correntes no nó superior do circuito da Figura 2.6, resulta:

$$i_{S_1}(t) + i_{S_3}(t) + i_C(t) + i_R(t) = 0. \quad (2.18)$$

Substituindo-se $i_C(t)$ pela equação característica do capacitor

$$i_C(t) = C \frac{d(v_o(t))}{dt} \quad (2.19)$$

e $i_R(t)$ por

$$i_R(t) = \frac{v_o(t)}{R} \quad (2.20)$$

em função da tensão de saída do retificador, escreve-se:

$$i_{S_1}(t) + i_{S_3}(t) + C \frac{d(v_o(t))}{dt} + \frac{v_o(t)}{R} = 0. \quad (2.21)$$

Aplicando-se o teorema dos valores médios para um período de comutação, resulta:

$$\langle i_{S_1}(t) \rangle + \langle i_{S_3}(t) \rangle + \frac{C}{T_s} \int_t^{t+T_s} \frac{d}{d\tau} v_o(\tau) d\tau + \frac{1}{R} \langle v_o(t) \rangle = 0. \quad (2.22)$$

Resolvendo-se a integração e evidenciando-se os termos em função de $v_o(t)$, resulta:

$$-\langle i_{S_1}(t) \rangle - \langle i_{S_3}(t) \rangle = C \left[\frac{v_o(t + T_s) - v_o(t)}{T_s} \right] + \frac{1}{R} \langle v_o(t) \rangle. \quad (2.23)$$

Sabendo que

$$\frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} = \frac{v_o(t + T_s) - v_o(t)}{T_s}, \quad (2.24)$$

como demonstrado no Apêndice A.1, então (2.23) pode ser reescrita na forma:

$$-\langle i_{S_1}(t) \rangle - \langle i_{S_3}(t) \rangle = C \frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} + \frac{1}{R} \langle v_o(t) \rangle. \quad (2.25)$$

As correntes instantâneas nas chaves S_1 e S_3 são mostradas na Figura 2.7(b)-(c), respectivamente, em função da corrente de entrada $i_L(t)$ e da razão cíclica de comutação $d(t)$. Aplicando-se o teorema dos valores médios, as correntes $\langle i_{S_1}(t) \rangle$ e $\langle i_{S_3}(t) \rangle$ são determinadas:

$$\langle i_{S_1}(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} i_{S_1}(\tau) d\tau = -\langle i_L(t) \rangle \langle d(t) \rangle \quad (2.26)$$

$$\langle i_{S_3}(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} i_{S_3}(\tau) d\tau = \langle i_L(t) \rangle [1 - \langle d(t) \rangle] \quad (2.27)$$

em termos dos valores médios de corrente e razão cíclica.

Substituindo-se (2.26)–(2.27) em (2.25), tem-se a equação característica que descreve

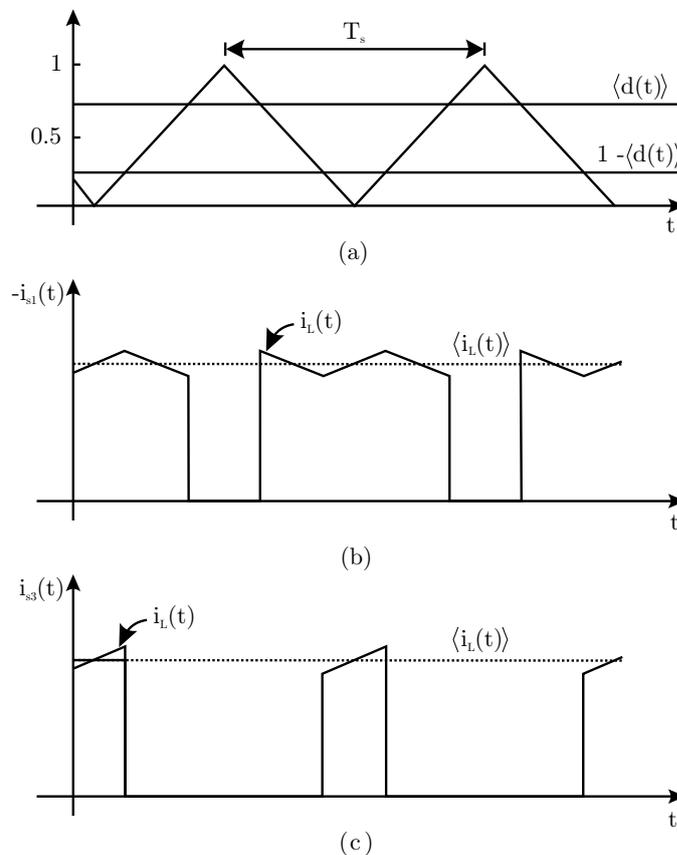


Figura 2.7 – Correntes instantâneas nos dispositivos semicondutores.

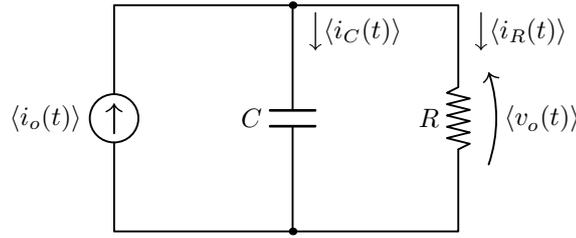


Figura 2.8 – Circuito médio equivalente da tensão de saída.

o comportamento da tensão de saída:

$$[2\langle d(t) \rangle - 1] \langle i_L(t) \rangle = C \frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} + \frac{1}{R} \langle v_o(t) \rangle. \quad (2.28)$$

Com isso, um circuito elétrico equivalente pode ser determinado em termos dos valores médios do circuito, considerando-se uma fonte de corrente auxiliar:

$$\langle i_o(t) \rangle = [2\langle d(t) \rangle - 1] \langle i_L(t) \rangle, \quad (2.29)$$

cujo circuito é mostrado na Figura 2.8. Esta representação contempla o comportamento médio do retificador em ponte completa no período de comutação.

Rearranjando-se os termos da equação diferencial (2.28), a mesma pode ser reescrita na forma:

$$\frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{RC} \langle v_o(t) \rangle + \frac{2}{C} \langle d(t) \rangle \langle i_L(t) \rangle - \frac{1}{C} \langle i_L(t) \rangle \quad (2.30)$$

a qual corresponde ao modelo matemático completo, que descreve o comportamento da tensão de saída do retificador em ponte completa em função da razão cíclica e corrente de entrada, para os valores médios no período de comutação.

Este modelo apresenta característica não-linear. O método utilizado para linearização é apresentado na Seção 2.1.4, cujo objetivo é reduzir as aproximações empregadas na linearização para pequenas perturbações. Como resultado, o modelo linear a ser obtido melhor representa a malha de tensão, contudo sua dinâmica é variante no tempo.

2.1.4 Linearização do modelo dinâmico da tensão de saída com relação à corrente de entrada

A representação de sistemas por equações lineares torna a análise um processo facilitado, permitindo o emprego de técnicas conhecidas e bem sedimentadas. Com isso, a linearização do modelo (2.30) é realizada considerando-se um ponto de operação específico. O que difere o processo de linearização apresentado aqui do método de pequenas perturbações consiste no emprego de funções temporais de regime permanente.

Para tanto, faz-se necessário a determinação das funções aproximadas de operação em

regime permanente das variáveis $\langle i_L(t) \rangle$ e $\langle d(t) \rangle$, para um ponto de operação específico. A substituição das grandezas de regime permanente em (2.30) resulta em um sistema linearizado.

Considerando-se a malha de controle de tensão, mostrada na Figura 2.3, para a operação do retificador com correção do fator de potência de entrada, a referência da corrente de entrada é função da ação de controle $u(t)$ da malha de regulação da tensão de saída e da tensão de entrada $v_i(t)$. Dessa forma, emprega-se a seguinte aproximação para o valor médio em T_s da tensão de entrada:

$$\langle v_i(t) \rangle = V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) \quad (2.31)$$

cuja análise de erro é mostrada no Apêndice A.3. Dessa forma, a referência da corrente é dada por:

$$i_L^*(t) = h_{vi} V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) u(t) \quad (2.32)$$

onde h_{vi} é o ganho do sensor da medida de tensão.

Como o comportamento dinâmico entre as malhas de corrente e tensão é considerado desacoplado, é plausível tomar apenas o ganho de regime permanente da malha interna, onde h_i é o ganho do sensor de medida da corrente no indutor. Com isso, a corrente média de entrada em T_s é dada por:

$$\langle i_L(t) \rangle = \frac{i_L^*(t)}{h_i} = \frac{h_{vi} V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t)}{h_i} u(t). \quad (2.33)$$

Relacionando-se o ganho da corrente média de entrada em (2.33) a uma constante, de modo que:

$$k_{vi} = \frac{h_{vi} V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{h_i}, \quad (2.34)$$

a corrente média pode ser reescrita na forma:

$$\langle i_L(t) \rangle = k_{vi} \cos(\omega_1 t) u(t). \quad (2.35)$$

É interessante mencionar que, se o h_{vi} é normalizado de forma que $k_{vi} = 1$, então a ação de controle $u(t)$ da malha de tensão atua sobre o valor de pico da corrente de entrada do retificador. Da mesma forma, se h_{vi} é normalizado para que $k_{vi} = \sqrt{2}$, então a variável de ação de controle atua sobre o valor eficaz da corrente.

Para se determinar a condição de operação de regime permanente para $\langle d(t) \rangle$, considere a equação dinâmica da corrente de entrada (2.11), dada por:

$$L \frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \langle v_i(t) \rangle - [2\langle d(t) \rangle - 1] \langle v_o(t) \rangle. \quad (2.36)$$

Substituindo-se $\langle i_L(t) \rangle$ de regime permanente:

$$\langle i_L(t) \rangle = I_{\text{RMS}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) \quad (2.37)$$

e a tensão média de entrada (2.31) em (2.36), e derivando-a em função ao tempo, resulta:

$$-L\omega_1 I_{\text{RMS}} \sqrt{2} \sin(\omega_1 t) = V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) - 2\langle d(t) \rangle \langle v_o(t) \rangle + \langle v_o(t) \rangle. \quad (2.38)$$

Evidenciando-se $\langle d(t) \rangle$, a mesma expressão pode ser reescrita na forma:

$$\langle d(t) \rangle = \frac{\langle v_o(t) \rangle + V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) + L\omega_1 I_{\text{RMS}} \sqrt{2} \sin(\omega_1 t)}{2\langle v_o(t) \rangle}. \quad (2.39)$$

Fatorando-se os termos, resulta:

$$\langle d(t) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t)}{2\langle v_o(t) \rangle} + \frac{L\omega_1 I_{\text{RMS}} \sqrt{2} \sin(\omega_1 t)}{2\langle v_o(t) \rangle}. \quad (2.40)$$

Sabendo-se que a tensão de saída é constituída por uma componente constante acrescida de componentes alternadas, pode-se escrever:

$$\langle v_o(t) \rangle = V_o^* + \tilde{v}_o(t). \quad (2.41)$$

Com isso, para condições de operação em que

$$\begin{cases} \tilde{v}_o(t) < 0, 2V_o^* \\ L\omega_1 I_{\text{RMS}} \ll V_{i_{\text{RMS}}} \end{cases}, \quad (2.42)$$

a razão cíclica de regime permanente é dada de forma aproximada pela expressão:

$$\langle d(t) \rangle \approx \frac{1}{2} + \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{2V_o^*} \cos(\omega_1 t). \quad (2.43)$$

No Apêndice A.4 é mostrada uma tabela relacionando as ondulações da saída com as componentes harmônicas da razão cíclica.

Definindo-se a constante

$$D = \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{2V_o^*}, \quad (2.44)$$

a razão cíclica média de operação pode ser reescrita na forma:

$$\langle d(t) \rangle \approx \frac{1}{2} + D \cos(\omega_1 t) \quad (2.45)$$

a qual será empregada nas equações a seguir.

Substituindo-se as equações de operação em regime permanente (2.33) e (2.45) no

modelo não-linear de tensão (2.30), tem-se:

$$\frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{RC} \langle v_o(t) \rangle + \frac{2}{C} \left[\frac{1}{2} + D \cos(\omega_1 t) \right] k_{vi} \cos(\omega_1 t) u(t) - \frac{k_{vi}}{C} \cos(\omega_1 t) u(t) \quad (2.46)$$

e, expandindo-se os termos das multiplicações, obtém-se:

$$\frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{RC} \langle v_o(t) \rangle + \frac{k_{vi}}{C} \cos(\omega_1 t) u(t) + \frac{2k_{vi}D}{C} \cos^2(\omega_1 t) u(t) - \frac{k_{vi}}{C} \cos(\omega_1 t) u(t) . \quad (2.47)$$

Simplificando-se os termos semelhantes, resulta:

$$\frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{RC} \langle v_o(t) \rangle + \frac{2k_{vi}D}{C} \cos^2(\omega_1 t) u(t) \quad (2.48)$$

cujo comportamento é linear variante no tempo.

Considerando-se a identidade trigonométrica,

$$\cos^2(\omega_1 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_1 t) \quad (2.49)$$

e substituindo-a na expressão (2.48), e reorganizando-a em termos do estado $\langle v_o(t) \rangle$ e da entrada $u(t)$, tem-se como resultado a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{RC} \langle v_o(t) \rangle + \left[\frac{k_{vi}D}{C} + \frac{k_{vi}D}{C} \cos(2\omega_1 t) \right] u(t). \quad (2.50)$$

O modelo de tensão (2.50) pode ser representado em termos dos coeficientes complexos de Fourier. Para tanto, os termos da equação em função de cossenos são substituídos pela correspondente função exponencial complexa:

$$\cos(2\omega_1 t) = \frac{1}{2} (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) . \quad (2.51)$$

Esta é obtida a partir da identidade de Euler. Dessa forma, tem-se o modelo linear de tensão, cuja matriz de entradas apresenta comportamento periódico no tempo:

$$\frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{RC} \langle v_o(t) \rangle + \left[\frac{k_{vi}D}{C} + \frac{k_{vi}D}{2C} (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) \right] u(t) \quad (2.52)$$

2.1.5 Modelos LTI e representação por funções de transferência

O modelo completo do retificador em ponte completa pode ser representado por equações de espaço de estados, na forma (ABOULOIFA et al., 2008; COSTA-CASTELLÓ;

GRINÓ; FOSSAS, 2007):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle i_L(t) \rangle \\ \langle v_o(t) \rangle \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-2\langle d(t) \rangle}{L} \\ \frac{2\langle d(t) \rangle - 1}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle i_L(t) \rangle \\ \langle v_o(t) \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \langle v_i(t) \rangle \\ \begin{bmatrix} \langle i_L(t) \rangle \\ \langle v_o(t) \rangle \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle i_L(t) \rangle \\ \langle v_o(t) \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.53)$$

a qual é naturalmente não-linear devido ao efeito de modulação intrínseco ao retificador monofásico.

As equações diferenciais de corrente e tensão são consideradas dinamicamente desacopladas em frequência. Com base nesta consideração, ambos os modelos de tensão e corrente foram obtidos e linearizados nas seções anteriores para um determinado ponto de operação.

A linearização do modelo de corrente, descrita na Seção 2.1.2, resultou na seguinte equação diferencial:

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \frac{1}{L} \langle v_i(t) \rangle - \frac{2V_o^*}{L} \langle d(t) \rangle \quad (2.54)$$

cuja característica é linear invariante no tempo, porém apresenta duas entradas $d(t)$ e $v_i(t)$ e uma saída $i_L(t)$.

A representação desse sistema no domínio da frequência é obtida com o emprego da transformada de Laplace:

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} V_i(s) - \frac{2V_o^*}{sL} D(s). \quad (2.55)$$

A formulação mais empregada do modelo de corrente se baseia na abordagem SISO, onde a representação no domínio da frequência é utilizada para a aplicação de ferramentas clássicas de análise e projeto de controladores. É possível se obter a representação SISO de (2.55) desconsiderando-se a fração correspondente à tensão de entrada $V_i(s)$, o que resulta em:

$$I_L(s) = -\frac{2V_o^*}{sL} D(s). \quad (2.56)$$

A qual, pode ser representada por função de transferência, relacionando a corrente de entrada com a razão cíclica de operação dos dispositivos semicondutores:

$$G_i(s) = \frac{I_L(s)}{D(s)} = -\frac{2V_o^*}{sL}. \quad (2.57)$$

Cabe salientar que o emprego de (2.57) para projeto e análise da malha de controle não descaracteriza a dinâmica destas parcelas no sistema real. A fim de garantir compatibilidade entre o modelo matemático simplificado e o sistema físico, as dinâmicas relacionadas às parcelas desconsideradas na obtenção do modelo devem ser bem conhecidas. Assim, estas dinâmicas podem ser tratadas como distúrbios de saída sintonizadas em $\omega = \omega_1$, para a parcela relacionada à tensão de entrada, e $\omega = 0$, para a parcela negligenciada

na linearização. O sistema de controle deve ser adequadamente projetado, de modo a garantir rejeição assintótica às componentes de distúrbios.

De forma similar, a linearização do modelo completo de tensão de saída resultou na seguinte equação diferencial linear variante no tempo:

$$\frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{RC}\langle v_o(t) \rangle + \left(\frac{k_{vi}D}{C} + \frac{k_{vi}D}{2C} (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) \right) u(t) \quad (2.58)$$

conforme descrito na Seção 2.1.4. Neste caso, o parâmetro $k_{vi}u(t)$ corresponde à amplitude média no período T_s da corrente de entrada do retificador em ponte completa, onde $u(t)$ é a variável de ação de controle da malha de tensão.

O modelo da malha de tensão (2.58) tem comportamento linear periódico no tempo, devido às parcelas variantes na matriz de entradas. Pode-se ter uma representação aproximada desse sistema, desconsiderando-se as parcelas variantes no tempo:

$$\frac{k_{vi}D}{2h_i C} (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) . \quad (2.59)$$

Isso resulta em um modelo médio equivalente linear e invariante no tempo:

$$\frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{RC}\langle v_o(t) \rangle + \frac{k_{vi}D}{C}u(t) . \quad (2.60)$$

A representação desse modelo no domínio da frequência é obtida com a aplicação da transformada de Laplace em (2.60):

$$sV_o(s) = -\frac{1}{RC}V_o(s) + \frac{k_{vi}D}{h_i C}U(s) . \quad (2.61)$$

Este modelo pode ser representado por função de transferência

$$G_v(s) = \frac{V_o(s)}{U(s)} = \frac{\frac{k_{vi}D}{h_i C}}{s + \frac{1}{RC}}, \quad (2.62)$$

o qual relaciona a componente média da tensão de saída com a ação de controle $u(t)$ da malha de tensão, diretamente relacionada à corrente de entrada do retificador em ponte completa.

É importante mencionar que o propósito deste trabalho é mostrar que a parcela variante (2.59), negligenciada na obtenção de modelos LTI, tem efeito significativo na operação em malha fechada quando o sistema de controle não garante sempre boa atenuação das ondulações na tensão de saída. Por essa razão, são apresentadas metodologias para análise da estabilidade empregando-se modelos LTP.

2.2 Retificador em meia ponte

O circuito elétrico de um retificador em meia ponte é apresentado na Figura 2.9(a). Este conversor monofásico apresenta dois dispositivos semicondutores totalmente controlados S_1 e S_2 , um indutor de entrada L e dois capacitores de saída C_1 e C_2 . O indutor de entrada é utilizado para reduzir a ondulação de corrente na entrada, causada pela natureza PWM da função de tensão $v_{an}(t)$, enquanto o capacitor de saída é usado para atenuar a ondulação de tensão na saída, resultado da potência pulsada de entrada e distúrbios de carga. Por essa razão, os capacitores de saída são normalmente de grande capacitância.

A operação do circuito controlado considera um arranjo de comutação baseado na modulação PWM. Os sinais modulados são obtidos a partir da comparação da razão cíclica $d(t)$ com uma portadora triangular definida com amplitude $[0, 1]$ e frequência T_s . A tensão PWM no estágio ca do inversor, $v_{an}(t)$, apresenta característica bipolar.

A Figura 2.9(b) apresenta o diagrama de blocos de um sistema de controle usualmente empregado em retificadores meia ponte com correção do fator de potência (NODARI et al., 2010). Este esquema se baseia no emprego de múltiplas malhas de realimentação: uma malha interna para compensação da corrente de entrada e duas malhas externas para compensação das tensões sobre os capacitores de barramento. A malha interna de compensação de corrente normalmente apresenta dinâmica elevada, quando comparada

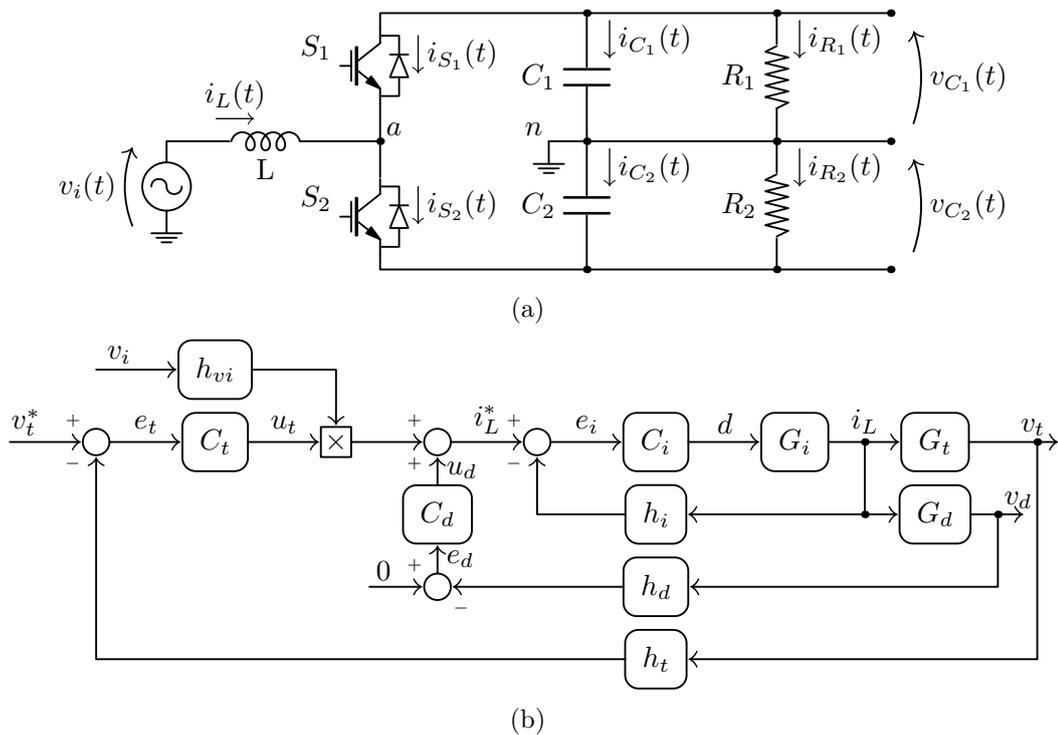


Figura 2.9 – Circuito do retificador monofásico em meia ponte. (a) Circuito elétrico. (b) Diagrama de blocos da estrutura de controle em malha fechada.

às dinâmicas das malhas de tensão. O controlador de corrente $C_i(s)$ atua sobre o valor da razão cíclica $d(t)$ para forçar a corrente de entrada $i_L(t)$ a rastrear seu respectivo valor de referência $i_L^*(t)$. Por outro lado, as malhas externas, usadas para regular as tensões no barramento, apresentam dinâmica consideravelmente mais lenta que o sinal de alimentação $v_i(t)$, para não prejudicar a correção do fator de potência de entrada.

A compensação da tensão de saída é dividida em duas malhas de controle: uma malha destinada à regulação da tensão total da saída, definida como a soma das tensões nos capacitores:

$$v_t(t) = v_{C_1}(t) + v_{C_2}(t); \quad (2.63)$$

e uma malha de realimentação adicional com o propósito de manter o equilíbrio das tensões entre nos capacitores $v_{C_1}(t)$ e $v_{C_2}(t)$. Definindo-se a grandeza da tensão diferencial como a subtração das tensões do barramento,

$$v_d(t) = v_{C_1}(t) - v_{C_2}(t), \quad (2.64)$$

esta malha adicional é destinada, então, à regulação da tensão diferencial do barramento em zero.

Os compensadores de tensão diferencial $C_d(s)$ e total $C_t(s)$ atuam sobre a referência da corrente de entrada, para regular as tensões de saída da planta $v_d(t)$ e $v_t(t)$ em seus valores de referência v_d^* e v_t^* , respectivamente, sendo que a referência da tensão diferencial é por definição $v_d^* = 0$.

A referência da corrente de entrada é resultado da combinação das ações de controle das malhas de tensão diferencial $u_d(t)$ e total $u_t(t)$ com um fator da tensão de entrada $h_{vi}v_i(t)$, onde

$$i_L^*(t) = u_d(t) + h_{vi}v_i(t)u_t(t). \quad (2.65)$$

A ação de controle da malha diferencial insere um nível contínuo à referência da corrente, enquanto a ação de controle da malha total define a amplitude da componente alternada da corrente de entrada do retificador. Esse procedimento é utilizado para garantir fator de potência muito próximo à unidade, quando se está operando com cargas equilibradas no barramento ($u_d(t) = 0$), onde, neste caso, a forma de onda da corrente é uma imagem da forma de onda da tensão.

Os blocos de realimentação h_i , h_d e h_t representam os ganhos de medidas da corrente no indutor e das tensões de saída, respectivamente. Os blocos representados por $G_i(s)$, $G_d(s)$ e $G_t(s)$ correspondem à representação por funções de transferência do retificador em meia ponte.

Para a análise do retificador monofásico em ponte completa considera-se que a malha interna de corrente possui resposta dinâmica consideravelmente mais rápida que as malhas externas de tensão. Com isso, a malha de controle de corrente é considerada dinamicamente desacoplada das malhas de tensão, e pode ser analisada separadamente.

O diagrama de blocos do sistema de controle da corrente de entrada é apresentado na Figura 2.10.

Da mesma forma, para a análise do comportamento das dinâmicas de tensões, a característica dinâmica da malha de corrente é substituída pelo respectivo valor de regime permanente, dado por

$$i_L(t) = \frac{i_L^*(t)}{h_i}. \quad (2.66)$$

O diagrama de blocos do sistema de controle em malha fechada das tensões de saída é mostrado na Figura 2.11, onde $\frac{1}{h_i}$ é o ganho de regime permanente correspondente à malha interna do controlador de corrente (KIMBALL; KREIN, 2008). As malhas de controle de tensões total e diferencial são naturalmente acopladas e compartilham a mesma ação de controle $i_L(t)$.

Muitas técnicas convencionais utilizam um elevado capacitor de barramento e controladores de tensão com reduzido ganho nas frequências de ondulação da saída. Esses controladores lentos atenuam significativamente as componentes harmônicas, e, por esta razão, os impactos da interação espectral podem ser desconsiderados. Por outro lado, se tais condições não são garantidas, as interações harmônicas podem reduzir o desempenho e levar o sistema à instabilidade.

2.2.1 Modelagem dinâmica da corrente de entrada com relação à razão cíclica

Esta seção trata da obtenção do modelo que descreve o comportamento médio no período de comutação da corrente de entrada com relação à razão cíclica de operação dos dispositivos semicondutores, para o retificador em meia ponte.

O circuito elétrico instantâneo equivalente que representa o estágio de entrada do retificador, com relação às tensões nos terminais ca do inversor e na entrada, é mostrado na Figura 2.12. Neste caso, a tensão nos terminais ca do retificador em meia ponte é representada por uma fonte de tensão PWM $v_{an}(t)$ de frequência constante T_s cuja forma de onda depende dos valores instantâneos sobre os capacitores de barramento, e da razão cíclica de operação $d(t)$.

Aplicando a Lei de Kirchhoff das malhas no circuito da Figura 2.12, obtém-se a seguinte equação diferencial:

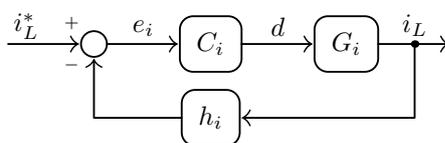


Figura 2.10 – Diagrama de blocos da malha de controle da corrente de entrada do retificador monofásico em meia ponte.

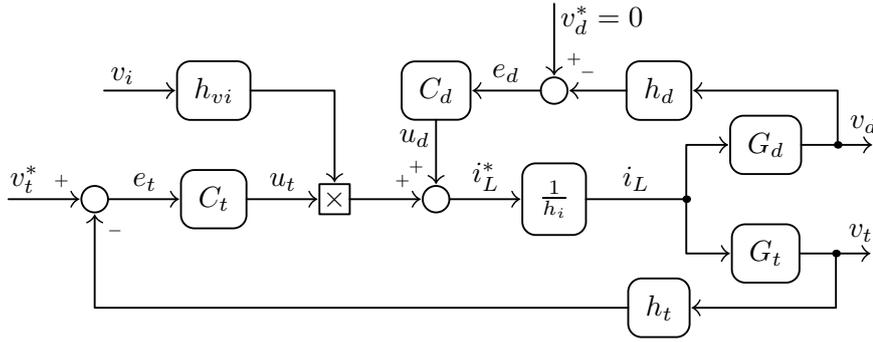


Figura 2.11 – Diagrama de blocos das malhas de controle das tensões de saída do retificador monofásico em meia ponte.

$$L \frac{d(i_L(t))}{dt} = v_i(t) - v_{an}(t) \quad (2.67)$$

Aplicando-se o teorema dos valores médios para um período de comutação em ambos os lados de (2.67), obtém-se:

$$\frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} \frac{d}{d\tau}(i_L(\tau))d\tau = \frac{1}{L} \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} [v_i(\tau) - v_{an}(\tau)]d\tau. \quad (2.68)$$

Resolvendo-se a integração da parcela referente à corrente $i_L(\tau)$, escreve-se:

$$\frac{i_L(t + T_s) - i_L(t)}{T_s} = \frac{1}{L} \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_i(\tau)d\tau - \frac{1}{L} \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_{an}(\tau)d\tau. \quad (2.69)$$

Substituindo-se

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \frac{i_L(t + T_s) - i_L(t)}{T_s}, \quad (2.70)$$

cuja identidade é apresentada no Apêndice A.1, e reescrevendo-se as variáveis em termos de seus valores médios, obtém-se a equação que descreve o comportamento dinâmico médio no período de comutação T_s para a corrente de entrada:

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \frac{1}{L} [\langle v_i(t) \rangle - \langle v_{an}(t) \rangle]. \quad (2.71)$$

Considere uma portadora triangular definida com amplitude $[0, 1]$ e período de comutação T_s . É dado um sinal modulante que, neste caso, corresponde à razão cíclica $d(t)$ de

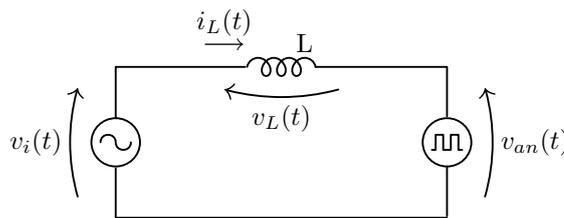


Figura 2.12 – Circuito elétrico instantâneo equivalente do estágio de entrada do retificador em meia ponte.

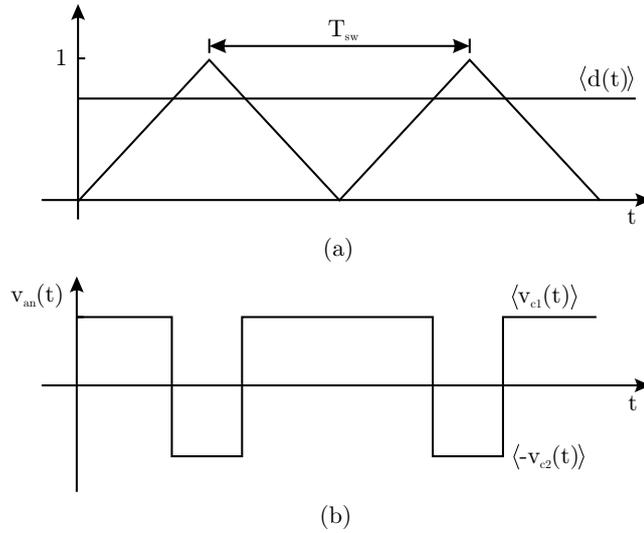


Figura 2.13 – Forma de onda instantânea nos terminais ca de entrada do retificador em meia ponte.

operação dos dispositivos semicondutores, mostrados na Figura 2.13(a). A tensão $v_{an}(t)$ se encontra na Figura 2.13(b), em que é considerado o seguinte arranjo de comutação:

$$S_1 \rightarrow d(t) \quad (2.72)$$

e operação complementar dos semicondutores:

$$S_2 = \overline{S_1}. \quad (2.73)$$

O valor médio de $v_{an}(t)$ no período de comutação T_s é dado pela aplicação do teorema do valor médio sobre a forma de onda do valor instantâneo:

$$\langle v_{an}(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+\langle d(t) \rangle T_s} v_{C_1}(\tau) d\tau + \frac{1}{T_s} \int_{t+\langle d(t) \rangle T_s}^{t+T_s} -v_{C_2}(\tau) d\tau. \quad (2.74)$$

Como as tensões nos capacitores não variam significativamente no período de comutação, é plausível aproximar $\langle v_{an}(t) \rangle$ na forma:

$$\langle v_{an}(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+\langle d(t) \rangle T_s} \langle v_{C_1}(t) \rangle d\tau + \frac{1}{T_s} \int_{t+\langle d(t) \rangle T_s}^{t+T_s} -\langle v_{C_2}(t) \rangle d\tau. \quad (2.75)$$

Resolvendo-se as integrais, resulta:

$$\langle v_{an}(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \langle v_{C_1}(t) \rangle \langle d(t) \rangle T_s - \frac{1}{T_s} \langle v_{C_2}(t) \rangle (1 - \langle d(t) \rangle) T_s \quad (2.76)$$

e, simplificando-se os termos em T_s , obtém-se a expressão equivalente para a tensão média nos terminais ca do inversor em meia ponte:

$$\langle v_{an}(t) \rangle = \langle v_{C_1}(t) \rangle \langle d(t) \rangle - \langle v_{C_2}(t) \rangle (1 - \langle d(t) \rangle). \quad (2.77)$$

Substituindo-se (2.77) na equação característica da corrente média (2.71), determina-se a equação característica para a corrente de entrada média em T_s :

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \frac{1}{L} \langle v_i(t) \rangle - \frac{1}{L} \langle v_{C_1}(t) \rangle \langle d(t) \rangle + \frac{1}{L} \langle v_{C_2}(t) \rangle (1 - \langle d(t) \rangle) . \quad (2.78)$$

Reagrupando os termos, resulta na seguinte equação diferencial, em função das tensões de saída, da tensão de entrada e da razão cíclica,

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{L} [\langle v_{C_1}(t) \rangle + \langle v_{C_2}(t) \rangle] \langle d(t) \rangle + \frac{1}{L} \langle v_i(t) \rangle + \frac{1}{L} \langle v_{C_2}(t) \rangle \quad (2.79)$$

cujas natureza é não-linear.

2.2.2 Linearização do modelo dinâmico da corrente de entrada com relação à razão cíclica

Considerando-se que a equação diferencial que descreve o comportamento da corrente no indutor de entrada (2.11) é não-linear, a linearização deste é realizada em torno do ponto de operação do retificador. Com isso, em regime permanente, a tensão total de saída $\langle v_t(t) \rangle$ pode ser aproximada pela tensão de referência v_t^* , considerando-se que a componente alternada da saída é muito menor que a componente contínua:

$$v_t^* = \langle v_t(t) \rangle = \langle v_{C_1}(t) \rangle + \langle v_{C_2}(t) \rangle . \quad (2.80)$$

Ao mesmo tempo, a tensão diferencial é considerada nula:

$$v_d^* = \langle v_d(t) \rangle = \langle v_{C_1}(t) \rangle - \langle v_{C_2}(t) \rangle = 0 . \quad (2.81)$$

Isso implica o equilíbrio das tensões nos capacitores:

$$\langle v_{C_1}(t) \rangle = \langle v_{C_2}(t) \rangle . \quad (2.82)$$

Substituindo-se as condições de regime permanente, em torno do ponto de operação do retificador em meia ponte, na equação que descreve a dinâmica da corrente de entrada(2.79), tem-se:

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = -\frac{v_t^*}{L} \langle d(t) \rangle + \frac{1}{L} \langle v_i(t) \rangle + \frac{1}{L} \frac{v_t^*}{2} . \quad (2.83)$$

A representação desse modelo no domínio da frequência é obtido com o emprego da transformada de Laplace em (2.83), em termos da variável corrente no indutor de entrada, resultando em:

$$I_L(s) = -\frac{v_t^*}{sL} D(s) + \frac{1}{sL} V_i(s) + \frac{v_t^*}{2s^2L} . \quad (2.84)$$

O modelo no domínio da frequência (2.84) pode ser apresentado por diagrama de

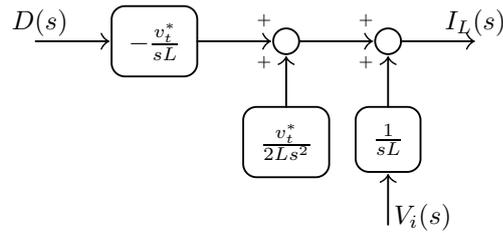


Figura 2.14 – Diagrama de blocos do modelo dinâmico da corrente de entrada do retificador em meia ponte.

blocos, como mostra a Figura 2.14. Neste modelo, a dinâmica da corrente de entrada é constituída por duas entradas $\langle d(t) \rangle$ e $\langle v_i(t) \rangle$ e uma parcela $\frac{v_t^*}{2s^2L}$, relativa ao valor da tensão total no barramento de saída.

A linearização do modelo é obtida eliminando-se a componente de distúrbio de saída da equação $\frac{v_t^*}{2L}$, tendo-se como resultado uma representação linear invariante no tempo que descreve o comportamento dinâmico da corrente no indutor de entrada para o retificador em meia ponte. Esta representação LTI é apresentada no domínio da frequência pela expressão:

$$I_L(s) = \frac{1}{sL}V_i(s) - \frac{v_t^*}{sL}D(s) . \quad (2.85)$$

A parcela não-linear da equação dinâmica da corrente pode ser desconsiderada na representação matemática. No entanto, deve ser abordada no projeto do controlador, considerando-a como distúrbio de saída de componente contínua. Neste caso, o controlador da malha de corrente deve garantir convergência assintótica para distúrbios de frequência zero.

2.2.3 Modelagem dinâmica da tensão de saída com relação à corrente de entrada

Considerando-se o princípio do desacoplamento dinâmico entre as malhas de controle da corrente de entrada e da tensão de saída, o circuito da tensão de saída do retificador pode ser simplificado na forma mostrada na Figura 2.15, sendo $i_L(t) = i_L^*(t)/h_i$.

Aplicando-se a Lei de Kirchhoff das correntes em dois nós independentes do circuito da Figura 2.17, o resultado é este conjunto de equações:

$$-i_{o1}(t) + i_{C_1}(t) + i_{R_1}(t) = 0 \quad (2.86)$$

$$i_{o2}(t) + i_{C_2}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \quad (2.87)$$

para grandezas instantâneas.

Substituindo-se a equação característica de tensão e corrente do capacitor e do resistor

em (2.86)–(2.87), o resultado é:

$$-i_{o1}(t) + C_1 \frac{d(v_{C_1}(t))}{dt} + \frac{v_{C_1}(t)}{R_1} = 0 \quad (2.88)$$

$$i_{o2}(t) + C_2 \frac{d(v_{C_2}(t))}{dt} + \frac{v_{C_2}(t)}{R_2} = 0. \quad (2.89)$$

Reorganizando-se as equações em termos das tensões nos capacitores de barramento, obtém-se:

$$\frac{d(v_{C_1}(t))}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} v_{C_1}(t) + \frac{1}{C_1} i_{o1}(t) \quad (2.90)$$

$$\frac{d(v_{C_2}(t))}{dt} = -\frac{1}{R_2 C_2} v_{C_2}(t) - \frac{1}{C_2} i_{o2}(t). \quad (2.91)$$

Aplicando-se o teorema dos valores médios em ambos os lados da equação, tem-se:

$$\frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} \frac{d(v_{C_1}(\tau))}{dt} d\tau = -\frac{1}{R_1 C_1} \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_{C_1}(\tau) d\tau + \frac{1}{C_1} \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} i_{o1}(\tau) d\tau \quad (2.92)$$

$$\frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} \frac{d(v_{C_2}(\tau))}{dt} d\tau = -\frac{1}{R_2 C_2} \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_{C_2}(\tau) d\tau - \frac{1}{C_2} \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} i_{o2}(\tau) d\tau \quad (2.93)$$

que resulta em:

$$\frac{v_{C_1}(t + T_s) - v_{C_1}(t)}{T_s} = -\frac{1}{R_1 C_1} \langle v_{C_1}(t) \rangle + \frac{1}{C_1} \langle i_{o1}(t) \rangle \quad (2.94)$$

$$\frac{v_{C_2}(t + T_s) - v_{C_2}(t)}{T_s} = -\frac{1}{R_2 C_2} \langle v_{C_2}(t) \rangle - \frac{1}{C_2} \langle i_{o2}(t) \rangle \quad (2.95)$$

Substituindo-se a identidade apresentada no Apêndice A.1,

$$\frac{d(\langle v_C(t) \rangle)}{dt} = \frac{v_C(t + T_s) - v_C(t)}{T_s} \quad (2.96)$$

no conjunto de equações (2.94)–(2.95), obtém-se o conjunto de equações que descreve a

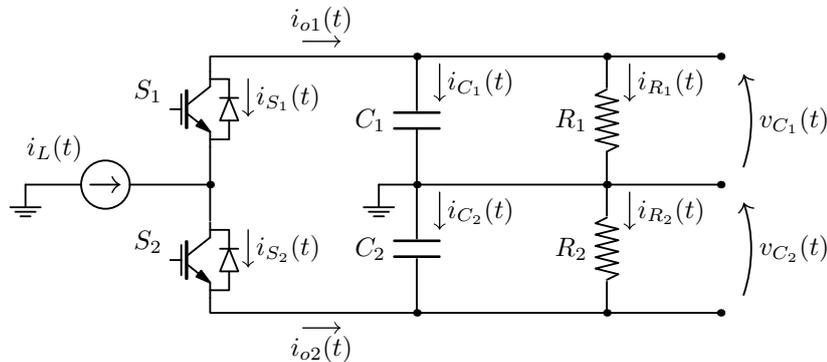


Figura 2.15 – Circuito resultante para a tensão de saída em função da corrente de entrada do retificador em meia ponte.

dinâmica das tensões de saída médias no período de comutação:

$$\frac{d(\langle v_{C_1}(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} \langle v_{C_1}(t) \rangle + \frac{1}{C_1} \langle i_{o1}(t) \rangle \quad (2.97)$$

$$\frac{d(\langle v_{C_2}(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{R_2 C_2} \langle v_{C_2}(t) \rangle - \frac{1}{C_2} \langle i_{o2}(t) \rangle. \quad (2.98)$$

Os valores instantâneos das correntes $i_{o1}(t)$ e $i_{o2}(t)$ são mostrados na Figura 2.16(b)–(c) para um determinado sinal modulante, que, neste caso, equivale à razão cíclica de operação dos semicondutores.

Conhecidas as formas de onda instantâneas das correntes, determina-se os respectivos valores médios no período de comutação:

$$\langle i_{o1}(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} i_{o1}(t) dt = \langle d(t) \rangle \langle i_L(t) \rangle \quad (2.99)$$

$$\langle i_{o2}(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} i_{o2}(t) dt = [1 - \langle d(t) \rangle] \langle i_L(t) \rangle \quad (2.100)$$

Substituindo-se as correntes médias do circuito de entrada (2.99)–(2.100) no conjunto de equações das tensões de saída (2.97)–(2.98), o resultado é o conjunto de equações não-lineares que descreve o comportamento das tensões de saída, média no período de

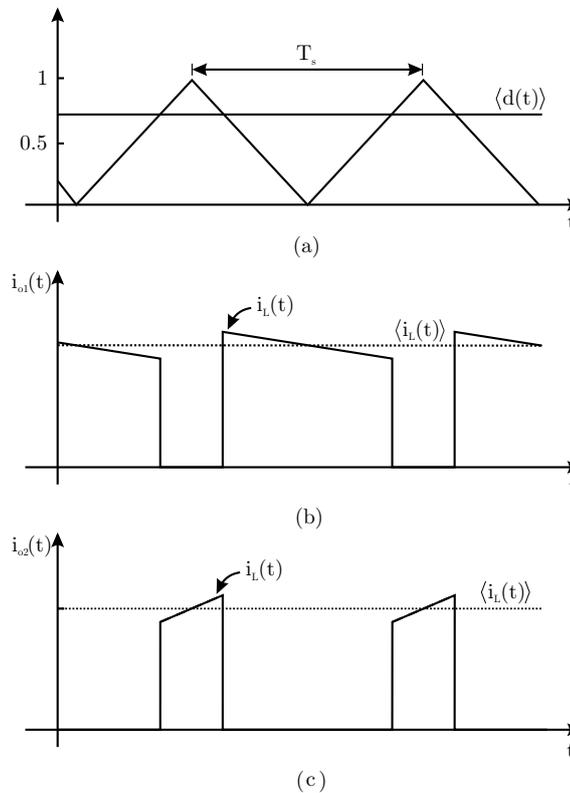


Figura 2.16 – Formas de onda das correntes instantâneas nos semicondutores do retificador em meia ponte. (a) Sinais de modulação. (b) Corrente de nó $i_{o1}(t)$. (c) Corrente de nó $i_{o2}(t)$.

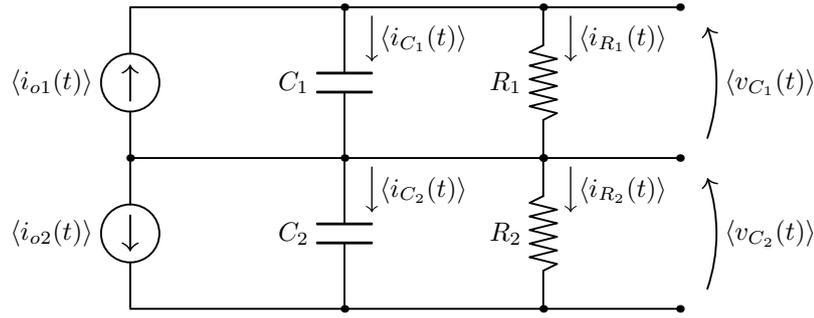


Figura 2.17 – Circuito elétrico médio equivalente da dinâmica da tensão de saída para o retificador em meia ponte.

comutação, em função da corrente de entrada e da razão cíclica:

$$\frac{d(\langle v_{C_1}(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} \langle v_{C_1}(t) \rangle + \frac{1}{C_1} \langle d(t) \rangle \langle i_L(t) \rangle \quad (2.101)$$

$$\frac{d(\langle v_{C_2}(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{R_2 C_2} \langle v_{C_2}(t) \rangle + \frac{1}{C_2} [\langle d(t) \rangle - 1] \langle i_L(t) \rangle. \quad (2.102)$$

Com isso, um circuito elétrico equivalente, médio no período de comutação, pode ser obtido para o circuito de saída do retificador em meia ponte, como mostra a Figura 2.17.

A representação do modelo de tensões por um sistema de equações por espaço de estados pode ser apresentada, considerando como estados as tensões nos capacitores e como saídas as tensões total e diferencial, em termos de seus médios no período de comutação:

$$\langle v_t(t) \rangle = \langle v_{C_1}(t) \rangle + \langle v_{C_2}(t) \rangle \quad (2.103)$$

e

$$\langle v_d(t) \rangle = \langle v_{C_1}(t) \rangle - \langle v_{C_2}(t) \rangle, \quad (2.104)$$

onde $\langle i_L(t) \rangle$ é a ação de controle, tida como entrada do modelo. Assim, a representação por espaço de estados é dada na forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \langle d(t) \rangle \\ \frac{1}{C_2} [\langle d(t) \rangle - 1] \end{bmatrix} \langle i_L(t) \rangle \\ \begin{bmatrix} \langle v_d(t) \rangle \\ \langle v_t(t) \rangle \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.105)$$

cuja natureza é não-linear.

2.2.4 Linearização do modelo dinâmico da tensão de saída com relação à corrente de entrada

A representação de sistemas por equações lineares torna a análise um processo facilitado, permitindo o emprego de técnicas conhecidas e bem sedimentadas. Com isso, a linearização do modelo (2.105) é realizada considerando-se um ponto de operação específico. O que diferencia o processo de linearização apresentado aqui do método de pequenas perturbações é a utilização de sinais variantes no tempo para as condições de regime permanente.

Para tanto, faz-se necessário a determinação das funções aproximadas de operação em regime permanente das variáveis $\langle i_L(t) \rangle$ e $\langle d(t) \rangle$, para um ponto de operação específico. A substituição das grandezas de regime permanente em (2.105) resulta em uma representação linearizada.

Considere a malha de controle de tensão mostrada na Figura 2.11, e a operação do retificador em meia ponte com correção do fator de potência de entrada. A referência da corrente de entrada é, então, função das ações de controle $u_d(t)$ e $u_t(t)$ das malhas de regulação das tensões de saída e da tensão de entrada $v_i(t)$. Considere, ainda, a seguinte aproximação para o valor médio da tensão de entrada no período T_s ,

$$\langle v_i(t) \rangle = V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) = v_i(t) \quad (2.106)$$

cuja análise de erro é mostrada no Apêndice A.3. Assim, a referência da corrente é dada por:

$$i_L^*(t) = u_d(t) + h_{vi} V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) u_t(t) . \quad (2.107)$$

Onde h_{vi} é o ganho do sensor da medida de tensão, $u_t(t)$ é a ação de controle correspondente à malha de regulação da tensão total e $u_d(t)$ é a ação de controle correspondente à malha de regulação da tensão diferencial.

Como o comportamento dinâmico entre as malhas de corrente e tensão são considerados desacoplados, é plausível considerar apenas o ganho de regime permanente da malha interna, onde h_i é o ganho do sensor de medida da corrente no indutor. Com isso a corrente média de entrada em T_s é dada por:

$$\langle i_L(t) \rangle = \frac{i_L^*(t)}{h_i} = \frac{1}{h_i} \left[u_d(t) + h_{vi} V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) u_t(t) \right]. \quad (2.108)$$

Definindo-se uma constante de ganho direto para a malha de tensão total:

$$k_{vi} = h_{vi} V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}, \quad (2.109)$$

a corrente média pode ser reescrita na forma:

$$\langle i_L(t) \rangle = \frac{1}{h_i} [u_d(t) + k_{vi} \cos(\omega_1 t) u_t(t)] . \quad (2.110)$$

Para se determinar a condição de operação de regime permanente para $\langle d(t) \rangle$, considere a equação dinâmica da corrente de entrada (2.79), dada por:

$$L \frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = -[\langle v_{C_1}(t) \rangle + \langle v_{C_2}(t) \rangle] \langle d(t) \rangle + \langle v_{C_2}(t) \rangle + \langle v_i(t) \rangle \quad (2.111)$$

Substituindo-se o valor da corrente $\langle i_L(t) \rangle$ de regime permanente,

$$\langle i_L(t) \rangle = I_{CC} + I_{RMS} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) \quad (2.112)$$

na equação da corrente de entrada (2.111), e resolvendo-se a derivada de $\langle i_L(t) \rangle$ em função do tempo, o resultado é:

$$-L\omega_1 I_{RMS} \sqrt{2} \sin(\omega_1 t) = -\langle v_t(t) \rangle \langle d(t) \rangle + \langle v_{C_2}(t) \rangle + \langle v_i(t) \rangle . \quad (2.113)$$

Substituindo-se a tensão média de entrada (2.106):

$$-L\omega_1 I_{RMS} \sqrt{2} \sin(\omega_1 t) = -\langle v_t(t) \rangle \langle d(t) \rangle + \langle v_{C_2}(t) \rangle + V_{iRMS} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) , \quad (2.114)$$

e colocando a razão cíclica $\langle d(t) \rangle$ e evidência, a mesma expressão pode ser reescrita na forma:

$$\langle d(t) \rangle = \frac{\langle v_{C_2}(t) \rangle + V_{iRMS} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) + L\omega_1 I_{RMS} \sqrt{2} \sin(\omega_1 t)}{\langle v_t(t) \rangle} . \quad (2.115)$$

Fatorando-se os termos, resulta:

$$\langle d(t) \rangle = \frac{\langle v_{C_2}(t) \rangle}{\langle v_t(t) \rangle} + \frac{V_{iRMS} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t)}{\langle v_t(t) \rangle} + \frac{L\omega_1 I_{RMS} \sqrt{2} \sin(\omega_1 t)}{\langle v_t(t) \rangle} . \quad (2.116)$$

Sabendo-se que a componente de tensão total e diferencial são constituídas por uma componente constante acrescida de componentes alternadas, estas podem ser representadas, em regime permanente, na forma:

$$\langle v_t(t) \rangle = v_t^* + \langle \tilde{v}_t(t) \rangle \quad (2.117)$$

$$\langle v_{C_2}(t) \rangle = \frac{v_t^*}{2} + \langle \tilde{v}_{C_2}(t) \rangle . \quad (2.118)$$

Com isso, considerando-se as ondulações de regime permanente menores que 20%, de modo que as seguintes condições sejam garantidas:

$$\begin{cases} \langle \tilde{v}_t(t) \rangle < 0,2V_o^* \\ \langle \tilde{v}_{C_2}(t) \rangle < 0,2V_o^* \\ L\omega_1 I_{RMS} \ll V_{iRMS} \end{cases} , \quad (2.119)$$

a característica da razão cíclica de regime permanente pode ser aproximada pela expressão:

$$\langle d(t) \rangle \approx \frac{1}{2} + \frac{V_{i\text{RMS}} \sqrt{2}}{v_t^*} \cos(\omega_1 t) . \quad (2.120)$$

Isso pode ser obtido desconsiderando-se as parcelas alternadas das tensões de saída e a parcela relativa à tensão sobre o indutor de entrada, a qual é considerada muito menor que as demais parcelas.

Definindo-se a constante

$$D = \frac{V_{i\text{RMS}} \sqrt{2}}{v_t^*}, \quad (2.121)$$

a razão cíclica média de operação pode ser reescrita na forma:

$$\langle d(t) \rangle \approx \frac{1}{2} + D \cos(\omega_1 t) \quad (2.122)$$

a qual será empregada nas equações a seguir.

Substituindo-se as equações de operação em regime permanente (2.110) e (2.122) no modelo não-linear de tensão (2.101)–(2.102), resulta em:

$$\frac{d(\langle v_{C_1}(t) \rangle)}{dt} = \frac{-1}{R_1 C_1} \langle v_{C_1}(t) \rangle + \frac{1}{C_1} \left[\frac{1}{2} + D \cos(\omega_1 t) \right] \left[\frac{u_d(t)}{h_i} + \frac{k_{vi} \cos(\omega_1 t) u_t(t)}{h_i} \right] \quad (2.123)$$

$$\frac{d(\langle v_{C_2}(t) \rangle)}{dt} = \frac{-1}{R_2 C_2} \langle v_{C_2}(t) \rangle + \frac{1}{C_2} \left[\frac{1}{2} + D \cos(\omega_1 t) - 1 \right] \left[\frac{u_d(t)}{h_i} + \frac{k_{vi} \cos(\omega_1 t) u_t(t)}{h_i} \right] \quad (2.124)$$

Expandindo-se os termos das multiplicações e escrevendo-se em termos das entrada $u_d(t)$ e $u_t(t)$, resultam as expressões:

$$\begin{aligned} \frac{d(\langle v_{C_1}(t) \rangle)}{dt} = & \frac{-1}{R_1 C_1} \langle v_{C_1}(t) \rangle + \frac{1}{2h_i C_1} u_d(t) + \frac{D}{h_i C_1} \cos(\omega_1 t) u_d(t) + \\ & + \frac{k_{vi}}{2h_i C_1} \cos(\omega_1 t) u_t(t) + \frac{k_{vi} D}{h_i C_1} \cos^2(\omega_1 t) u_t(t) \end{aligned} \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\langle v_{C_2}(t) \rangle)}{dt} = & \frac{-1}{R_2 C_2} \langle v_{C_2}(t) \rangle + \frac{-1}{2h_i C_2} u_d(t) + \frac{D}{h_i C_2} \cos(\omega_1 t) u_d(t) + \\ & + \frac{-k_{vi}}{2h_i C_2} \cos(\omega_1 t) u_t(t) + \frac{k_{vi} D}{h_i C_2} \cos^2(\omega_1 t) u_t(t) \end{aligned} \quad (2.126)$$

cuja dinâmica é linear, porém seu comportamento é variante no tempo.

Considerando-se a identidade trigonométrica

$$\cos^2(\omega_1 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_1 t) \quad (2.127)$$

substituindo-a em (2.125)–(2.126), e reorganizando-a em função dos estados e das entra-

das, resulta no seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{d(\langle v_{C_1}(t) \rangle)}{dt} &= \frac{-1}{R_1 C_1} \langle v_{C_1}(t) \rangle + \left[\frac{1}{2h_i C_1} + \frac{D}{h_i C_1} \cos(\omega_1 t) \right] u_d(t) + \\ &+ \left[\frac{k_{vi} D}{2h_i C_1} + \frac{k_{vi}}{2h_i C_1} \cos(\omega_1 t) + \frac{k_{vi} D}{2h_i C_1} \cos(2\omega_1 t) \right] u_t(t) \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\langle v_{C_2}(t) \rangle)}{dt} &= \frac{-1}{R_2 C_2} \langle v_{C_2}(t) \rangle + \left[\frac{-1}{2h_i C_2} + \frac{D}{h_i C_2} \cos(\omega_1 t) \right] u_d(t) + \\ &+ \left[\frac{k_{vi} D}{2h_i C_2} + \frac{-k_{vi}}{2h_i C_2} \cos(\omega_1 t) + \frac{k_{vi} D}{2h_i C_2} \cos(2\omega_1 t) \right] u_t(t) \end{aligned} \quad (2.129)$$

O sistema de equações (2.128)–(2.129) pode ser representado em termos dos coeficientes complexos de Fourier. Para tanto, os termos da equação em função de cossenos são substituídos pelas correspondentes funções exponenciais complexas:

$$\cos(\omega_1 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) \quad (2.130)$$

$$\cos(2\omega_1 t) = \frac{1}{2} (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) \quad (2.131)$$

obtidas a partir da identidade de Euler. Assim, o modelo de tensão é reescrito na forma:

$$\begin{aligned} \frac{d(\langle v_{C_1}(t) \rangle)}{dt} &= \frac{-1}{R_1 C_1} \langle v_{C_1}(t) \rangle + \left[\frac{1}{2h_i C_1} + \frac{D}{2h_i C_1} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) \right] u_d(t) + \\ &+ \left[\frac{k_{vi} D}{2h_i C_1} + \frac{k_{vi}}{4h_i C_1} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) + \frac{k_{vi} D}{4h_i C_1} (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) \right] u_t(t) \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\langle v_{C_2}(t) \rangle)}{dt} &= \frac{-1}{R_2 C_2} \langle v_{C_2}(t) \rangle + \left[\frac{-1}{2h_i C_2} + \frac{D}{2h_i C_2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) \right] u_d(t) + \\ &+ \left[\frac{k_{vi} D}{2h_i C_2} + \frac{-k_{vi}}{4h_i C_2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) + \frac{k_{vi} D}{4h_i C_2} (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) \right] u_t(t) \end{aligned} \quad (2.133)$$

em termos de exponenciais complexas.

O modelo de tensão de saída da planta pode ser representado por espaço de estados, considerando-se as tensões total $\langle v_t(t) \rangle$ e diferencial $\langle v_d(t) \rangle$ como saídas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} + \frac{1}{2h_i} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{k_{vi} D}{C_1} \\ \frac{-1}{C_2} & \frac{k_{vi} D}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d(t) \\ u_t(t) \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2h_i} \begin{bmatrix} \frac{D}{C_1} & \frac{k_{vi}}{2C_1} \\ \frac{D}{C_2} & \frac{-k_{vi}}{2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d(t) \\ u_t(t) \end{bmatrix} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) \\ &+ \frac{1}{4h_i} \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{vi} D}{C_1} \\ 0 & \frac{k_{vi} D}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d(t) \\ u_t(t) \end{bmatrix} (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) \end{aligned} \quad (2.134)$$

$$\begin{bmatrix} \langle v_d(t) \rangle \\ \langle v_t(t) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

cujos comportamento é linear variante no tempo com dinâmica periódica.

2.2.5 Modelos LTI e representação por funções de transferência

O modelo completo do retificador em meia ponte, representado por equações de espaço de estados, é dado na forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle i_L(t) \rangle \\ \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\langle d(t) \rangle}{L} & \frac{1-\langle d(t) \rangle}{L} \\ \frac{\langle d(t) \rangle}{C_1} & \frac{-1}{R_1 C_1} & 0 \\ \frac{\langle d(t) \rangle - 1}{C_2} & 0 & \frac{-1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle i_L(t) \rangle \\ \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \langle v_i(t) \rangle \quad (2.136)$$

$$\begin{bmatrix} \langle i_L(t) \rangle \\ \langle v_d(t) \rangle \\ \langle v_t(t) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle i_L(t) \rangle \\ \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

a qual é naturalmente não-linear devido ao efeito de modulação intrínseco ao retificador monofásico.

As equações diferenciais de corrente e tensão são consideradas dinamicamente desacopladas em frequência. Com esta consideração, a linearização dos respectivos modelos de corrente e tensão pode ser obtida independentemente para um determinado ponto de operação.

A linearização do modelo de corrente é descrita na Seção 2.2.2, resultando na equação diferencial

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = -\frac{v_t^*}{L} \langle d(t) \rangle + \frac{1}{L} \langle v_i(t) \rangle \quad (2.138)$$

cuja característica é linear invariante no tempo, apresentando duas entradas $d(t)$ e $v_i(t)$ e uma saída $i_L(t)$, onde sua representação pode ser dada no domínio da frequência por:

$$I_L(s) = -\frac{v_t^*}{sL} D(s) + \frac{1}{sL} V_i(s) \quad (2.139)$$

A formulação mais empregada do modelo de corrente se baseia na abordagem SISO, onde a representação no domínio da frequência é utilizada para a aplicação de ferramentas clássicas de análise e projeto de controladores. Essa representação é obtida negligenciando-se a parcela da equação em função da tensão de entrada. Dessa forma, (2.139) pode ser reescrita

$$I_L(s) = -\frac{v_t^*}{sL} D(s) \quad (2.140)$$

que pode ser representada por

$$G_i(s) = \frac{i_L(s)}{D(s)} = -\frac{v_t^*}{sL} \quad (2.141)$$

na forma de função de transferência, relacionando-se a corrente de entrada com a razão cíclica do sistema.

Cabe salientar que a utilização de (2.141) implica no conhecimento de que as parcelas desconsideradas no modelo existem na condição real, manifestando-se na forma de distúr-

bios de saída sintonizados em $\omega = \omega_1$ e $\omega = 0$, cujas frequências devem ser adequadamente rejeitadas pelo controlador em malha fechada.

De forma similar, a linearização do modelo completo de tensão de saída é obtida em (2.134)–(2.135), representada por equações de espaço de estados lineares, conforme descrito na Seção 2.2.4. Assim, $\frac{k_{vi}}{h_i} u_t(t)$ é a corrente de pico e $\frac{u_d(t)}{h_i}$ o nível contínuo da corrente de entrada do retificador, onde $u_d(t)$ e $u_t(t)$ são as ações de controle diferencial e total da malha de tensão, respectivamente.

A fim de se obter um sistema de equações lineares invariantes no tempo, as componentes variáveis são suprimidas do modelo LTP, e, como resultado, o modelo médio LTI é obtido:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} + \frac{1}{2h_i} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{k_{vi} D}{C_1} \\ \frac{-1}{C_2} & \frac{k_{vi} D}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d(t) \\ u_t(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \langle v_d(t) \rangle \\ \langle v_t(t) \rangle \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_{C_1}(t) \rangle \\ \langle v_{C_2}(t) \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.142)$$

Por outro lado, é comum projetistas utilizarem modelos desacoplados, cuja representação é dada no domínio da frequência por funções de transferência. Esta representação consiste na simplificação do sistema MIMO em dois sistemas SISO desacoplados. Para tanto, considerando-se um sistema equilibrado, de modo que

$$C = C_1 = C_2 \quad (2.143)$$

$$R = R_1 = R_2 \quad (2.144)$$

o conjunto de equações diferenciais LTI que descrevem o sistema pode ser simplificado:

$$\frac{d(\langle v_{C_1}(t) \rangle)}{dt} = \frac{-1}{RC} \langle v_{C_1}(t) \rangle + \frac{1}{2h_i C} u_d(t) + \frac{k_{vi} D}{2h_i C} u_t(t) \quad (2.145)$$

$$\frac{d(\langle v_{C_2}(t) \rangle)}{dt} = \frac{-1}{RC} \langle v_{C_2}(t) \rangle + \frac{-1}{2h_i C} u_d(t) + \frac{k_{vi} D}{2h_i C} u_t(t) \quad (2.146)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace em (2.145)–(2.146),

$$sV_{C_1}(s) = \frac{-1}{RC} V_{C_1}(s) + \frac{1}{2h_i C} U_d(s) + \frac{k_{vi} D}{2h_i C} U_t(s) \quad (2.147)$$

$$sV_{C_2}(s) = \frac{-1}{RC} V_{C_2}(s) + \frac{-1}{2h_i C} U_d(s) + \frac{k_{vi} D}{2h_i C} U_t(s) \quad (2.148)$$

e isolando-se as tensões de saída $V_{C_1}(s)$ e $V_{C_2}(s)$ em função das entrada, resulta nas expressões

$$V_{C_1}(s) = \frac{1}{(s + \frac{1}{RC})} \frac{1}{2h_i C} U_d(s) + \frac{1}{(s + \frac{1}{RC})} \frac{k_{vi} D}{2h_i C} U_t(s) \quad (2.149)$$

$$V_{C_2}(s) = \frac{1}{(s + \frac{1}{RC})} \frac{-1}{2h_i C} U_d(s) + \frac{1}{(s + \frac{1}{RC})} \frac{k_{vi} D}{2h_i C} U_t(s) \quad (2.150)$$

que descrevem o comportamento das tensões de saída no domínio da frequência.

Considera-se a tensão diferencial de saída:

$$\langle v_d(t) \rangle = \langle v_{C_1}(t) \rangle - \langle v_{C_2}(t) \rangle, \quad (2.151)$$

cuja representação no domínio da frequência é dada por:

$$V_d(s) = V_{C_1}(s) - V_{C_2}(s) \quad (2.152)$$

Substituindo-se (2.149)–(2.150) em (2.152), $V_d(s)$ pode ser reescrita na forma:

$$V_d(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \left(\frac{1}{2h_i C} - \frac{1}{2h_i C} + \frac{1}{h_i C} \right) U_d(s) + \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \left(\frac{k_{vi} D}{2h_i C} - \frac{k_{vi} D}{2h_i C} \right) U_t(s) \quad (2.153)$$

Simplificando-se os termos de (2.153),

$$V_d(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \frac{1}{h_i C} U_d(s) \quad (2.154)$$

onde a tensão diferencial é independente da ação de controle total, o resultado é um sistema SISO. Com isso, a função de transferência que relaciona a entrada e a saída é determinada:

$$G_d(s) = \frac{V_d(s)}{U_d(s)} = \frac{\frac{1}{h_i C}}{s + \frac{1}{RC}} \quad (2.155)$$

De forma similar, considere a definição da tensão total de saída:

$$\langle v_t(t) \rangle = \langle v_{C_1}(t) \rangle + \langle v_{C_2}(t) \rangle \quad (2.156)$$

cuja representação no domínio da frequência é dada por:

$$V_t(s) = V_{C_1}(s) + V_{C_2}(s) \quad (2.157)$$

que, substituindo-se (2.149)–(2.150) em (2.157), $V_t(s)$ pode ser reescrita na forma:

$$V_t(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \left(\frac{1}{2h_i C} + \frac{1}{2h_i C} - \frac{1}{h_i C} \right) U_d(s) + \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \left(\frac{k_{vi} D}{2h_i C} + \frac{k_{vi} D}{2h_i C} \right) U_t(s). \quad (2.158)$$

Dessa forma, com a simplificação dos termos, nota-se que o efeito da entrada diferencial sobre a tensão total é nulo:

$$V_t(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \frac{k_{vi} D}{h_i C} U_t(s) \quad (2.159)$$

resultando em um sistema SISO, cuja função de transferência que relaciona a entrada e a saída é dada pela expressão:

$$G_t(s) = \frac{V_t(s)}{U_t(s)} = \frac{\frac{k_{vi} D}{h_i C}}{s + 1/RC}. \quad (2.160)$$

2.3 Sumário

Neste capítulo, foi apresentada a modelagem matemática dos retificadores em ponte completa e em meia ponte. Os modelos obtidos consideram apenas o comportamento físico ideal dos elementos elétricos, sendo que não se considera saturação nos indutores, impedâncias, quedas de tensão e harmônicos da rede, tempo de comutação e indutâncias e capacitâncias parasitas.

Na Seção 2.1 foi apresentada a modelagem do retificador em ponte completa. Realizou-se a descrição da topologia e do sistema de controle, com ênfase nas aplicações com correção do fator de potência de entrada. A representação matemática do comportamento da corrente de entrada com relação à razão cíclica foi obtida na Seção 2.1.1, cujo modelo LTI, representado por funções de transferência, será empregado no projeto de controladores da malha interna, contudo a dinâmica da corrente não será utilizada na análise da estabilidade apresentada neste trabalho.

Por outro lado, as diferentes representações matemáticas que relacionam o comportamento da tensão de saída com a variação da amplitude da corrente de entrada são determinados na Seção 2.1.3 para o retificador em ponte completa. Inicialmente, foi obtido o modelo completo não-linear, cuja linearização, realizada em torno do ponto de operação, resulta numa representação linear com dinâmica variante periódica no tempo, denominado LTP. Esta representação é utilizada na proposta deste trabalho para a análise da estabilidade do retificador, cuja abordagem é descrita no Capítulo 3. A simplificação deste modelo para uma representação linear invariante no tempo (LTI) é obtida, sendo empregada para o projeto dos controladores e para a análise da estabilidade convencional, a qual é, posteriormente, comparada à análise da estabilidade baseada em modelos LTP.

Na seção 2.2 foi apresentada a modelagem do retificador em meia ponte. Foi realizada a descrição da topologia e do sistema de controle, com ênfase nas aplicações com correção do fator de potência de entrada. A representação matemática do comportamento da corrente de entrada com relação à razão cíclica foi obtida na Seção 2.1.1, cujo modelo LTI, representado por funções de transferência, será empregado no projeto de controladores da malha interna. A dinâmica desse modelo não será utilizada, porém, na análise da estabilidade apresentada neste trabalho.

De forma similar ao retificador em ponte completa, as diferentes representações matemáticas que relacionam o comportamento das tensões de barramento com a variação da amplitude da corrente de entrada foram determinados na Seção 2.2.3 para o retificador em meia ponte. Inicialmente, foi obtido o modelo completo não-linear, cuja linearização, realizada em torno do ponto de operação, resulta numa representação linear com dinâmica variante periódica no tempo, denominado modelo LTP. A representação LTP será utilizada na proposta deste trabalho para a análise da estabilidade do retificador, cuja abordagem será descrita no Capítulo 3. A simplificação deste modelo para representações

LTI foram obtidas, as quais serão empregadas para o projeto dos controladores e para a análise da estabilidade convencional, sendo esta posteriormente comparada à análise da estabilidade baseada em modelos LTP.

A aproximação do modelo LTI com relação à planta real é maior à medida em que a influência das harmônicas do modelo são reduzidas. Por esta razão, normalmente empregam-se elevados valores de capacitâncias de saída, os quais tem influência direta na amplitude da ondulação da tensão do barramento e, por sua vez, na amplitude do sinal realimentado. Associado à esta prática, são empregados controladores nas malhas de tensão com reduzidos ganhos na faixa de frequências das ondulações do barramento. Com isso, os impactos da interação espectral são reduzidos, o que minimiza os impactos das dinâmicas não modeladas (parcelas periódicas no tempo) e, conseqüentemente, aproxima as dinâmicas LTI e LTP.

3 ANÁLISE DE SISTEMAS LTP POR FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA HARMÔNICA

No capítulo 2 foi apresentada a modelagem dinâmica dos retificadores com correção do fator de potência em ponte completa e em meia ponte. São obtidos modelos LTP correspondentes a cada retificador, considerando-se o desacoplamento dinâmico entre as malhas de corrente e tensão. Obteve-se, também, os modelos LTI desses conversores, a partir de simplificações dos modelos LTP. Observa-se que os modelos LTI são mais simples comparados aos modelos LTP, mas negligenciam informações relevantes da dinâmica do sistema.

A abordagem LTP contempla as interações harmônicas e efeitos de modulação, características da operação dos retificadores monofásicos em malha fechada, o que proporciona uma melhor representação do comportamento dinâmico real. A simplificação das parcelas variantes no tempo do modelo LTP, cujo resultado é o modelo LTI, pode ser inadequada para a representação do comportamento dinâmico, onde a representatividade do modelo para com a planta real é muito dependente do projeto do controlador. Cabe ressaltar que esse fenômeno é crítico em aplicações onde a resposta dinâmica da malha de controle da tensão é um fator limitante, como aplicações com variação severa de carga ou com reduzida capacitância de barramento. Nesses casos, a utilização de modelos LTI para a análise da estabilidade em malha fechada não é suficiente.

Muitas técnicas de análise de estabilidade, em sistemas lineares invariantes no tempo, baseiam-se em representações no domínio da frequência, principalmente por funções de transferência (OGATA, 2003; PHILLIPS; HARBOR, 1996, p.441–470, p.199–211). Uma possível generalização dessa abordagem para sistemas LTP implica na existência de uma função de transferência correspondente, ou seja, na obtenção de uma relação entrada-saída LTI. Esta generalização consiste na determinação de uma função de transferência equivalente para sistemas LTP. A Seção 3.1 apresenta o método para representação de sistemas LTP em uma função de transferência com características lineares invariantes no tempo, conhecida por Função de Transferência Harmônica (HTF). A HTF é um operador matricial (função de transferência) que representa a resposta ao impulso do sistema LTP, cujo resultado é uma série de componentes harmônicas que compõem o sinal de saída. A partir da HTF, a análise de sistemas LTP pode ser realizada utilizando-se métodos desenvolvidos para sistemas LTI multivariáveis (MIMO) e, assim, emprega-se teoria generalizada de sistemas LTI para análise de sistemas LTP.

Na Seção 3.2 são apresentados dois possíveis métodos para análise da estabilidade de sistemas LTP, empregando-se a abordagem HTF e baseado-se no critério generalizado de Nyquist. O caminho de mapeamento do contorno de Nyquist no plano s é modificado, atendendo às particularidades de sistemas LTP (WERELEY, 1990; MÖLLERSTEDT,

2000).

3.1 Representação de sistemas LTP por função de transferência harmônica

A representação de sistemas por funções de transferência harmônicas se aplica estritamente a sistemas que apresentam comportamento dinâmico periódico no tempo (LTP). Esses sistemas constituem um caso particular de sistemas variantes no tempo, cujas variáveis podem ser representadas por séries de Fourier.

Com a representação em séries de Fourier, todo sistema periódico resulta em uma soma de termos exponenciais complexos com coeficientes constantes. Os termos exponenciais constituem as componentes harmônicas da dinâmica envolvida, onde os coeficientes de Fourier determinam a amplitude de cada componente.

A HTF utiliza o conceito da decomposição em séries de Fourier, com o objetivo de determinar uma equivalência LTI para sistemas LTP. Esta determinação é obtida considerando-se o comportamento linear e invariante no tempo entre as diferentes componentes harmônicas da entrada e da saída. Esta representação agrega as interações espectrais entre as componentes harmônicas da entrada e da saída.

Para tanto, considera-se o sistema linear variante no tempo, representado por equações de espaço de estados:

$$\frac{d(\mathbf{x}(t))}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t) \quad (3.2)$$

sendo $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de entradas, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^q$ o vetor de estados e $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ o vetor de saídas. Para quaisquer matrizes compatíveis $A(t) \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{r \times q}$ e $D(t) \in \mathbb{R}^{r \times p}$, estritamente periódicas, onde:

$$A(t) = A(t + T_1) \quad (3.3)$$

$$B(t) = B(t + T_1) \quad (3.4)$$

$$C(t) = C(t + T_1) \quad (3.5)$$

$$D(t) = D(t + T_1) \quad (3.6)$$

T_1 é o período de repetição do comportamento dinâmico:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (3.7)$$

e ω_1 é a frequência fundamental de repetição em rad/s.

3.1.1 Representação por séries de Fourier

Seja uma função arbitrária qualquer $f(t)$ periódica com período T_1 , de modo que $f(t) = f(t + T_1)$, esta função apresenta espectro discreto no domínio da frequência. Consequentemente, esta função pode ser representada por séries de Fourier no domínio do tempo, que pode ser escrita como uma função de cossenos:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(2\omega_1 t + \phi_2) + a_3 \cos(3\omega_1 t + \phi_3) + \dots \quad (3.8)$$

Substituindo-se os termos em cosseno por funções exponenciais complexas, obtidas a partir da identidade de Euler:

$$\cos(n\omega_1 t + \phi_1) = \frac{e^{j(n\omega_1 t + \phi_1)} + e^{-j(n\omega_1 t + \phi_1)}}{2} \quad (3.9)$$

pode-se escrever $f(t)$ na forma de exponenciais complexas:

$$f(t) = a_0 + a_1 \frac{e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} + e^{-j(\omega_1 t + \phi_1)}}{2} + a_2 \frac{e^{j(2\omega_1 t + \phi_2)} + e^{-j(2\omega_1 t + \phi_2)}}{2} + \dots \quad (3.10)$$

Separando-se os termos em função da base exponencial,

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1 e^{j\phi_1}}{2} e^{j\omega_1 t} + \frac{a_1 e^{-j\phi_1}}{2} e^{-j\omega_1 t} + \frac{a_2 e^{j\phi_2}}{2} e^{j2\omega_1 t} + \frac{a_2 e^{-j\phi_2}}{2} e^{-j2\omega_1 t} + \dots \quad (3.11)$$

e reorganizando-os em uma sequência natural, resulta na representação de Fourier de $f(t)$:

$$f(t) = \dots + \frac{a_2 e^{-j\phi_2}}{2} e^{-j2\omega_1 t} + \frac{a_1 e^{-j\phi_1}}{2} e^{-j\omega_1 t} + a_0 + \frac{a_1 e^{j\phi_1}}{2} e^{j\omega_1 t} + \frac{a_2 e^{j\phi_2}}{2} e^{j2\omega_1 t} + \dots \quad (3.12)$$

que pode ser reescrita de forma generalizada:

$$f(t) = \dots + f_{(-2)} e^{-j2\omega_1 t} + f_{(-1)} e^{-j\omega_1 t} + f_{(0)} + f_{(1)} e^{j\omega_1 t} + f_{(2)} e^{j2\omega_1 t} + \dots \quad (3.13)$$

onde:

$$f_{(-2)} = \frac{a_2 e^{-j\phi_2}}{2} \quad (3.14)$$

$$f_{(-1)} = \frac{a_1 e^{-j\phi_1}}{2} \quad (3.15)$$

$$f_{(0)} = a_0 \quad (3.16)$$

$$f_{(1)} = \frac{a_1 e^{j\phi_1}}{2} \quad (3.17)$$

$$f_{(2)} = \frac{a_2 e^{j\phi_2}}{2} \quad (3.18)$$

são os coeficientes complexos da série de Fourier para $\forall f_{(n)} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Dessa forma,

uma função periódica qualquer pode ser representada por uma soma infinita:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{(n)} e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n=\mathbb{Z}} f_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.19)$$

onde $f_{(n)} \in \mathbb{C}$ são os coeficientes da série de Fourier escritos na forma exponencial.

De modo similar, este conceito pode ser expandido para o caso matricial. Para tanto, considera-se uma matriz arbitrária linear variante no tempo:

$$F(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1q}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2q}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}(t) & a_{p2}(t) & \cdots & a_{pq}(t) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

cujos coeficientes são estritamente periódicos, tal que $a_{pq}(t) = a_{pq}(t + T_1), \forall p, q \in \mathbb{Z}^+$.

Dessa forma, cada coeficiente de $F(t)$ pode ser representado pela série de Fourier:

$$a_{rs}(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} a_{rs(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.21)$$

Assim, a matriz periódica pode ser representada pela série de Fourier:

$$F(t) = \begin{bmatrix} \sum_{(n=\mathbb{Z})} a_{11(n)} e^{jn\omega_1 t} & \sum_{n=\mathbb{Z}} a_{12(n)} e^{jn\omega_1 t} & \cdots & \sum_{n=\mathbb{Z}} a_{1q(n)} e^{jn\omega_1 t} \\ \sum_{(n=\mathbb{Z})} a_{21(n)} e^{jn\omega_1 t} & \sum_{n=\mathbb{Z}} a_{22(n)} e^{jn\omega_1 t} & \cdots & \sum_{n=\mathbb{Z}} a_{2q(n)} e^{jn\omega_1 t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{(n=\mathbb{Z})} a_{p1(n)} e^{jn\omega_1 t} & \sum_{n=\mathbb{Z}} a_{p2(n)} e^{jn\omega_1 t} & \cdots & \sum_{n=\mathbb{Z}} a_{pq(n)} e^{jn\omega_1 t} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Aplicando-se a propriedade distributiva, (3.22) pode ser reescrita na forma:

$$F(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} \left(\begin{bmatrix} a_{11(n)} & a_{12(n)} & \cdots & a_{1q(n)} \\ a_{21(n)} & a_{22(n)} & \cdots & a_{2q(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1(n)} & a_{p2(n)} & \cdots & a_{pq(n)} \end{bmatrix} e^{jn\omega_1 t} \right) \quad (3.23)$$

Obtém-se, assim, um somatório cujos coeficientes da série são os respectivos coeficientes de Fourier da matriz periódica $F(t)$. Logo:

$$F(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} F_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.24)$$

Esta representação de matrizes por séries de Fourier pode ser empregada às matrizes do sistema (3.1)–(3.2), cujo comportamento é LTP. Com isso, a matriz de estado é representada no domínio do tempo por:

$$A(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} A_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.25)$$

a matriz de entrada por:

$$B(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} B_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.26)$$

a matriz de saída por:

$$C(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} C_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.27)$$

e a matriz de realimentação direta por:

$$D(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} D_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.28)$$

onde $A_{(n)}$, $B_{(n)}$, $C_{(n)}$ e $D_{(n)} \in \mathbb{C}$ são os coeficientes matriciais da série de Fourier.

Para a análise de sistemas periódicos, os sinais de excitação que compõem o vetor de entradas $\mathbf{u}(t)$ são sinais periódicos com período T_1 . Assim, o vetor de entradas pode ser representado pela expansão em Séries de Fourier:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} u_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.29)$$

Esta consideração sobre o período do sinal de referência garante que o resultado das interações entre duas componentes harmônicas quaisquer de ordem a e b seja sempre um sinal periódico com relação à T_1 . Esta afirmação pode ser verificada diretamente por

$$c_1 e^{ja\omega_1 t} c_2 e^{jb\omega_1 t} = c_1 c_2 e^{j(a+b)\omega_1 t} \quad (3.30)$$

para $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Como a e $b \in \mathbb{Z}$, $a + b \in \mathbb{Z}$. Por consequência, $e^{j(a+b)\omega_1 t}$ é também periódico com relação à T_1 . Dessa forma, o vetor de estados, que é resultado da interação da entrada com a dinâmica da planta, também é um sinal periódico com relação à T_1 , e pode ser representado por:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} x_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.31)$$

Por consequência, a derivada do estado é dada por:

$$\frac{d(\mathbf{x}(t))}{dt} = \sum_{m=\mathbb{Z}} j m \omega_1 x_{(m)} e^{jm\omega_1 t} \quad (3.32)$$

O vetor de saída, que é uma relação da dinâmica da planta com os estados e a entrada, pode ser representado na forma:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} y_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.33)$$

para $u_{(n)}$, $x_{(n)}$ e $y_{(n)} \in \mathbb{C}$.

3.1.2 Representação no domínio da frequência complexa s

Möllerstedt e Bernhardsson (2000b) mostram que sistemas LTI podem ser estudados pela análise da resposta de sinais na forma e^{st} , conhecidos como caracteres, usando superposição. Dessa forma, sistemas LTP podem ser estudados pela superposição de caracteres de sinais periódicos exponencialmente modulados (EMP) com período T_1 . Dessa forma, considere o sinal de entrada exponencialmente modulado¹ na forma:

$$\mathbf{u}^{\text{EMP}}(t) = e^{st} \sum_{n=\mathbb{Z}} u_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.34)$$

onde $s = \sigma + j\omega$ é uma função de variável complexa definida no eixo imaginário e limitada no intervalo:

$$-\frac{j\omega_1}{2} \leq s \leq \frac{j\omega_1}{2} \quad (3.35)$$

e $u_{(n)} \in \mathbb{C}$.

Aplicando-se um sinal EMP na entrada do sistema de equações por espaço de estados (3.1)–(3.2), de acordo com a observação (3.30), resulta em vetor de estados EMP:

$$\mathbf{x}^{\text{EMP}}(t) = e^{st} \sum_{n=\mathbb{Z}} x_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.36)$$

cuja derivada resulta na expressão:

$$\frac{d(\mathbf{x}^{\text{EMP}}(t))}{dt} = e^{st} \sum_{n=\mathbb{Z}} (s + jn\omega_1) x_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.37)$$

Conseqüentemente, o vetor de saída é também um sinal exponencialmente modulado com a mesma base:

$$\mathbf{y}^{\text{EMP}}(t) = e^{st} \sum_{n=\mathbb{Z}} y_{(n)} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.38)$$

Ou seja, se a entrada de um sistema LTP é um sinal EMP, então os vetores de estados e saída são também EMP. Por conseqüência, o sistema (3.1)–(3.2) resulta em um sistema de equações EMP que pode ser representado por:

$$\frac{d(\mathbf{x}^{\text{EMP}}(t))}{dt} = A(t)\mathbf{x}^{\text{EMP}}(t) + B(t)\mathbf{u}^{\text{EMP}}(t) \quad (3.39)$$

$$\mathbf{y}^{\text{EMP}}(t) = C(t)\mathbf{x}^{\text{EMP}}(t) + D(t)\mathbf{u}^{\text{EMP}}(t) \quad (3.40)$$

Substituindo-se os vetores EMP correspondentes de entrada, estado e saída em (3.39)–

¹ $f^{\text{EMP}}(t)$ indica sinal EMP.

(3.40), resulta em:

$$\begin{aligned}
 e^{st} \sum_{n=\mathbb{Z}} (s + jn\omega_1) x(n) e^{jn\omega_1 t} &= e^{st} \sum_{m=\mathbb{Z}} A(m) e^{jm\omega_1 t} \sum_{n=\mathbb{Z}} x(n) e^{jn\omega_1 t} \\
 &+ e^{st} \sum_{m=\mathbb{Z}} B(m) e^{jm\omega_1 t} \sum_{n=\mathbb{Z}} u(n) e^{jn\omega_1 t} \\
 e^{st} \sum_{n=\mathbb{Z}} y(n) e^{jn\omega_1 t} &= e^{st} \sum_{m=\mathbb{Z}} C(m) e^{jm\omega_1 t} \sum_{n=\mathbb{Z}} x(n) e^{jn\omega_1 t} \\
 &+ e^{st} \sum_{m=\mathbb{Z}} D(m) e^{jm\omega_1 t} \sum_{n=\mathbb{Z}} u(n) e^{jn\omega_1 t}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Aplicando-se a propriedade distributiva e rearranjando-se os termos do somatório, é possível reescrever o conjunto de equações por:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=\mathbb{Z}} (s + jn\omega_1) x(n) e^{jn\omega_1 t} e^{st} &= \sum_{n=\mathbb{Z}} \left[\left(\sum_{m=\mathbb{Z}} A_{(n-m)} x(m) + \sum_{m=\mathbb{Z}} B_{(n-m)} u(m) \right) e^{jn\omega_1 t} e^{st} \right] \\
 \sum_{n=\mathbb{Z}} y(n) e^{jn\omega_1 t} e^{st} &= \sum_{n=\mathbb{Z}} \left[\left(\sum_{m=\mathbb{Z}} C_{(n-m)} x(m) + \sum_{m=\mathbb{Z}} D_{(n-m)} u(m) \right) e^{jn\omega_1 t} e^{st} \right]
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Como os índices de ambos os lados da igualdade de (3.42) são equivalentes, o mesmo pode ser reescrito em um mesmo somatório:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{n=\mathbb{Z}} \left[\left(-(s + jn\omega_1) x(n) + \sum_{m=\mathbb{Z}} A_{(n-m)} x(m) + \sum_{m=\mathbb{Z}} B_{(n-m)} u(m) \right) e^{jn\omega_1 t} \right] e^{st} \\
 0 &= \sum_{n=\mathbb{Z}} \left[\left(-y(n) + \sum_{m=\mathbb{Z}} C_{(n-m)} x(m) + \sum_{m=\mathbb{Z}} D_{(n-m)} u(m) \right) e^{jn\omega_1 t} \right] e^{st}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Como consequência da expressão (3.43), o sistema de equações por espaço de estados é também periódico exponencialmente modulado em e^{st} . O efeito da modulação causa a replicação espectral dos polos e zeros no domínio da frequência, como pode ser observado na Figura 3.1. Os infinitos dobramentos espectrais (*folding*) no plano s são definidos por $\pm j\frac{\omega_1}{2}$. Logo, o modelo HTF pode ser definido apenas no intervalo (3.35), sem perda de generalidade (WERELEY; HALL, 1991).

Dessa forma, multiplicando-se ambos os lados de (3.43) por e^{-st} , obtém-se o sistema reescrito na forma:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{n=\mathbb{Z}} \left[\left(-(s + jn\omega_1) x(n) + \sum_{m=\mathbb{Z}} A_{(n-m)} x(m) + \sum_{m=\mathbb{Z}} B_{(n-m)} u(m) \right) e^{jn\omega_1 t} \right] \\
 0 &= \sum_{n=\mathbb{Z}} \left[\left(-y(n) + \sum_{m=\mathbb{Z}} C_{(n-m)} x(m) + \sum_{m=\mathbb{Z}} D_{(n-m)} u(m) \right) e^{jn\omega_1 t} \right]
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

que é independente de e^{st} .

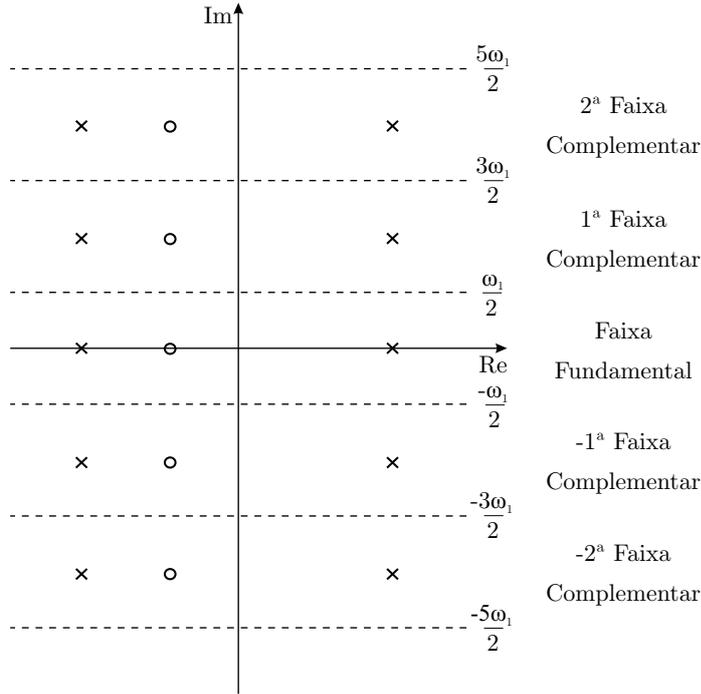


Figura 3.1 – Transição dos polos e zeros em sistemas exponencialmente modulados.

Como

$$e^{jn\omega_1 t} \tag{3.45}$$

forma uma base ortogonal, linearmente independente, para todo $n \in \mathbb{Z}$, então a solução de (3.44) $\exists \forall n \in \mathbb{Z}$, dado pelo conjunto de equações é independente de $e^{jn\omega_1 t}$:

$$\begin{aligned} (s + jn\omega_1)x(n) &= \sum_{m=\mathbb{Z}} A_{(n-m)}x(m) + \sum_{m=\mathbb{Z}} B_{(n-m)}u(m) \\ y(n) &= \sum_{m=\mathbb{Z}} C_{(n-m)}x(m) + \sum_{m=\mathbb{Z}} D_{(n-m)}u(m) \end{aligned} \tag{3.46}$$

O sistema de equações (3.46) é uma representação concisa de entrada-saída do sistema. Mostra o efeito individual das harmônicas da entrada sobre a saída do sistema. Neste caso, $A_{(k)}$, $B_{(k)}$, $C_{(k)}$ e $D_{(k)}$ são os coeficientes da série de Fourier do sistema periódico representado por equações de espaço de estados, para $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Reescrevendo-se as relações harmônicas (3.46) para todo n e $m \in [-1, 0, 1]$, a equação de estados pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} sx_{(-1)} - j\omega_1 x_{(-1)} &= \dots + A_{(0)}x_{(-1)} + A_{(-1)}x_{(0)} + A_{(-2)}x_{(1)} + \dots + \\ &\quad \dots + B_{(0)}u_{(-1)} + B_{(-1)}u_{(0)} + B_{(-2)}u_{(1)} + \dots \\ sx_{(0)} + j0\omega_1 x_{(0)} &= \dots + A_{(1)}x_{(-1)} + A_{(0)}x_{(0)} + A_{(-1)}x_{(1)} + \dots + \\ &\quad \dots + B_{(1)}u_{(-1)} + B_{(0)}u_{(0)} + B_{(-1)}u_{(1)} + \dots \\ sx_{(1)} + j\omega_1 x_{(1)} &= \dots + A_{(2)}x_{(-1)} + A_{(1)}x_{(0)} + A_{(0)}x_{(1)} + \dots + \\ &\quad \dots + B_{(2)}u_{(-1)} + B_{(1)}u_{(0)} + B_{(0)}u_{(1)} + \dots \end{aligned} \tag{3.47}$$

e a equação de saída:

$$\begin{aligned}
 y_{(-1)} &= \cdots + C_{(0)}x_{(-1)} + C_{(-1)}x_{(0)} + C_{(-2)}x_{(1)} + \cdots + \\
 &\quad \cdots + D_{(0)}u_{(-1)} + D_{(-1)}u_{(0)} + D_{(-2)}u_{(1)} + \cdots \\
 y_{(0)} &= \cdots + C_{(1)}x_{(-1)} + C_{(0)}x_{(0)} + C_{(-1)}x_{(1)} + \cdots + \\
 &\quad \cdots + D_{(1)}u_{(-1)} + D_{(0)}u_{(0)} + D_{(-1)}u_{(1)} + \cdots \\
 y_{(1)} &= \cdots + C_{(2)}x_{(-1)} + C_{(1)}x_{(0)} + C_{(0)}x_{(1)} + \cdots + \\
 &\quad \cdots + D_{(2)}u_{(-1)} + D_{(1)}u_{(0)} + D_{(0)}u_{(1)} + \cdots
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

generalizando-se para todo n e $m \in \mathbb{Z}$, este sistema de equações pode ser disposto na forma matricial:

$$\begin{aligned}
 s\mathcal{X}(s) + \mathcal{N}\mathcal{X}(s) &= \mathcal{A}\mathcal{X}(s) + \mathcal{B}\mathcal{U}(s) \\
 \mathcal{Y}(s) &= \mathcal{C}\mathcal{X}(s) + \mathcal{D}\mathcal{U}(s)
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Subtraindo-se $\mathcal{N}\mathcal{X}(s)$ em ambos os lados da equação de estados, então (3.46) pode ser reescrita na forma matricial, representada no domínio da frequência por um sistema de equações de espaço de estados lineares invariantes no tempo (WERELEY; HALL, 1991):

$$\begin{aligned}
 s\mathcal{X}(s) &= (\mathcal{A} - \mathcal{N})\mathcal{X}(s) + \mathcal{B}\mathcal{U}(s) \\
 \mathcal{Y}(s) &= \mathcal{C}\mathcal{X}(s) + \mathcal{D}\mathcal{U}(s)
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

onde o vetores de entradas, de estados e de saídas são representados pelo conjunto de seus respectivos coeficientes de Fourier:

$$\mathcal{U}(s) = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{(-2)} \\ u_{(-1)} \\ u_{(0)} \\ u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}(s) = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{(-2)} \\ x_{(-1)} \\ x_{(0)} \\ x_{(1)} \\ x_{(2)} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}(s) = \begin{bmatrix} \vdots \\ y_{(-2)} \\ y_{(-1)} \\ y_{(0)} \\ y_{(1)} \\ y_{(2)} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

para qualquer u_n , x_n e $y_n \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Esta abordagem é baseada na teoria da representação matricial de sistemas iterativos, cujas matrizes são denominadas circulares ou de Toeplitz (GRAY, 2006). Estas matrizes de equivalência, \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} são resultantes de (3.47)–(3.48), constituídas com base nos

respectivos coeficientes da série de Fourier:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & A_{(0)} & A_{(-1)} & A_{(-2)} & \cdots \\ \cdots & A_{(1)} & A_{(0)} & A_{(-1)} & \cdots \\ \cdots & A_{(1)} & A_1 & A_{(0)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

onde $A_{(n)}$ é a n -ésima harmônica de $A(t)$,

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & B_{(0)} & B_{(-1)} & B_{(-2)} & \cdots \\ \cdots & B_{(1)} & B_{(0)} & B_{(-1)} & \cdots \\ \cdots & B_{(1)} & B_1 & B_{(0)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

onde $B_{(n)}$ é a n -ésima harmônica de $B(t)$,

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & C_{(0)} & C_{(-1)} & C_{(-2)} & \cdots \\ \cdots & C_{(1)} & C_{(0)} & C_{(-1)} & \cdots \\ \cdots & C_{(1)} & C_1 & C_{(0)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

onde $C_{(n)}$ é a n -ésima harmônica de $C(t)$ e

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & D_{(0)} & D_{(-1)} & D_{(-2)} & \cdots \\ \cdots & D_{(1)} & D_{(0)} & D_{(-1)} & \cdots \\ \cdots & D_{(1)} & D_1 & D_{(0)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

onde $D_{(n)}$ representa a n -ésima harmônica de $D(t)$. A matriz \mathcal{N} é definida como a matriz de modulação em frequência. É diagonal em blocos em função da dimensão do sistema original:

$$\mathcal{N} = \text{blkdiag}(jn\omega_1 I) \quad (3.56)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, e I constitui a matriz identidade com dimensão $q \times q$, resultando na

seguinte matriz de modulação:

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & -j2\omega_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & -j\omega_1 I & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & j0\omega_1 I & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & j\omega_1 I & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & j2\omega_1 I & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Com isso, uma representação LTI de sistemas LTP é obtida no domínio da frequência, representada na forma de equações por espaço de estados na forma mostrada em (3.50).

3.1.3 Função de transferência harmônica

Em sistemas lineares e invariantes no tempo, muitas técnicas de análise de estabilidade e robustez são baseadas na abordagem por funções de transferência. A generalização desta abordagem para sistemas LTP implica na existência de uma função de transferência correspondente, de maneira que a relação entrada-saída seja dada na forma:

$$\mathcal{Y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathcal{U}(s) \quad (3.58)$$

onde $\mathcal{U}(s)$ representa a entrada, $\mathcal{Y}(s)$ a saída e $\mathbf{H}(s)$ a relação entre as duas primeiras, no domínio da frequência.

Observa-se, em (3.46), que existe acoplamento entre as componentes em frequência, separadas por um múltiplo da frequência fundamental ω_1 . No domínio da frequência, isso corresponde ao acoplamento entre as harmônicas da entrada $U(s + jm\omega_1)$ e as harmônicas da saída $Y(s + jn\omega_1)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$. Este acoplamento pode ser descrito por uma função de transferência $H_{(n,m)}(s)$, de tal forma que:

$$Y(s + jn\omega_1) = H_{(n,m)}(s)U(s + jm\omega_1) \quad (3.59)$$

para todo $n, m = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. Então, é possível determinar uma função de transferência LTI na forma (3.58), cujos sinais de entrada e saída correspondem aos coeficientes de Fourier da entrada e da saída do sistema LTP.

Reescrevendo-se a relação harmônica entrada-saída (3.59) para todo m e n , o resultado é uma matriz de função de transferência $\mathbf{H}(s)$, que define o acoplamento entre as diferentes frequências. Esta matriz é denominada Função de Transferência Harmônica

(HTF), definida na forma:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ Y(s - j\omega_1) \\ Y(s) \\ Y(s + j\omega_1) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & H_{(-1,-1)}(s) & H_{(-1,0)}(s) & H_{(-1,1)}(s) & \cdots \\ \cdots & H_{(0,-1)}(s) & H_{(0,0)}(s) & H_{(0,1)}(s) & \cdots \\ \cdots & H_{(1,-1)}(s) & H_{(1,0)}(s) & H_{(1,1)}(s) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ U(s - j\omega_1) \\ U(s) \\ U(s + j\omega_1) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

que, por consequência da representação dos sinais e sistema em séries de Fourier, apresenta dimensão infinita. Com isso, a partir desta abordagem, um sistema LTP pode ser tratado como um sistema LTI de infinitas entradas e saídas. Para este sistema, a teoria de sistemas LTI multivariáveis pode ser aplicada sem perda de generalidade (MÖLLERSTEDT; BERNHARDSSON, 2000b).

Como pode ser observado, em (3.60), a função de transferência $H_{(n,m)}(s)$ relaciona a harmônica n da saída com a harmônica m da entrada, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$. Com isso, pode-se concluir que sistemas LTI são casos particulares de sistemas LTP, onde a formulação HTF é simplificada. Além do mais, em sistemas LTI não há acoplamento entre as frequências harmônicas da entrada com a saída, resultando em uma função de transferência harmônica (3.60) diagonal composta apenas por uma função de transferência padrão $H_{(0)}(s)$ modulada em torno de $j\omega_1$ (MÖLLERSTEDT, 2000). Também, é interessante mencionar que $H_{(0)}(s)$ corresponde ao modelo médio LTI do sistema LTP no domínio da frequência.

Como (3.50) é a representação por equações de espaço de estados do sistema LTP, cuja dinâmica pode ser descrita por um sistema LTI multivariável, então a sua HTF é obtida por:

$$\mathbf{H}(s) = \mathcal{C} [s\mathcal{I} - (\mathcal{A} - \mathcal{N})]^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D} \quad (3.61)$$

Esta equação descreve a relação entre as harmônicas da entrada com as harmônicas da saída do sistema LTP original (WERELEY; HALL, 1990). A solução de (3.61) resulta na matriz de transferência harmônica, cuja melhor representação é dada por:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & H_{(0)}(s - j\omega_1) & H_{(-1)}(s) & H_{(-2)}(s + j\omega_1) & \cdots \\ \cdots & H_{(1)}(s - j\omega_1) & H_{(0)}(s) & H_{(-1)}(s + j\omega_1) & \cdots \\ \cdots & H_{(2)}(s - j\omega_1) & H_{(1)}(s) & H_{(0)}(s + j\omega_1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Soluções analíticas para sistemas LTP podem ser obtidos a partir da HTF do sistema. Para isso, considera-se um sinal de entrada periódico decomposto em séries de Fourier:

$$\mathbf{u}(t) = \cdots + u_{(-2)} e^{-j2\omega_1 t} + u_{(-1)} e^{j\omega_1 t} + u_{(0)} + u_{(1)} e^{j\omega_1 t} + u_{(2)} e^{j2\omega_1 t} + \cdots \quad (3.63)$$

escrito na forma exponencial, para $u_{(n)} \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$. A representação do sinal de entrada

no domínio da frequência é obtida com o emprego da transformada de Laplace em (3.63):

$$U(s) = \dots + \frac{u_{(-2)}}{s + j2\omega_1} + \frac{u_{(-1)}}{s + j\omega_1} + \frac{u_{(0)}}{s} + \frac{u_{(1)}}{s - j\omega_1} + \frac{u_{(2)}}{s - j2\omega_1} + \dots \quad (3.64)$$

De forma similar, o sinal periódico de saída é representado no domínio da frequência na forma:

$$Y(s) = \dots + \frac{y_{(-2)}}{s + j2\omega_1} + \frac{y_{(-1)}}{s + j\omega_1} + \frac{y_{(0)}}{s} + \frac{y_{(1)}}{s - j\omega_1} + \frac{y_{(2)}}{s - j2\omega_1} + \dots \quad (3.65)$$

Os sinais de entrada e saída podem ser representados em um formato compacto no domínio da frequência:

$$U(s) = \dots + U_{(-2)}(s) + U_{(-1)}(s) + U_{(0)}(s) + U_{(1)}(s) + U_{(2)}(s) + \dots \quad (3.66)$$

$$Y(s) = \dots + Y_{(-2)}(s) + Y_{(-1)}(s) + Y_{(0)}(s) + Y_{(1)}(s) + Y_{(2)}(s) + \dots \quad (3.67)$$

cujos respectivos vetores de entrada e saída são definidos na forma:

$$\mathcal{U}(s) = \begin{bmatrix} \vdots \\ U_{(-2)}(s) \\ U_{(-1)}(s) \\ U_{(0)}(s) \\ U_{(1)}(s) \\ U_{(2)}(s) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}(s) = \begin{bmatrix} \vdots \\ Y_{(-2)}(s) \\ Y_{(-1)}(s) \\ Y_{(0)}(s) \\ Y_{(1)}(s) \\ Y_{(2)}(s) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

3.2 Análise da estabilidade de sistemas LTP representados por funções de transferência harmônica

Considere $H_C(s)$ a HTF equivalente do controlador e $H_P(s)$ a HTF equivalente da planta. Então, a análise da estabilidade desse sistema em malha fechada, para a configuração mostrada na Figura 3.2, é obtida pela análise dos autovalores $\lambda_i(s)$, $\forall i \in$

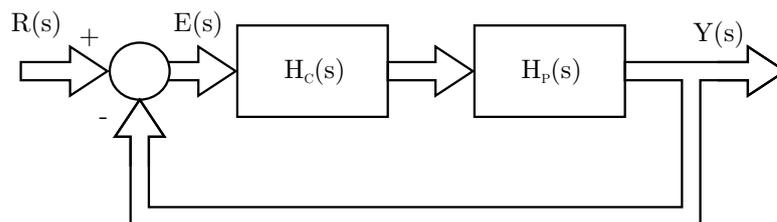


Figura 3.2 – Diagrama de blocos do sistema de controle em malha fechada para a representação por HTF.

$\{1, 2, \dots, m\}$ do denominador da função de transferência de malha fechada $\Gamma(s)$:

$$\Gamma(s) = \det[\mathcal{I} + \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)] = \prod_{i=1}^m (i + \lambda_i(s)) \quad (3.69)$$

onde m corresponde à dimensão de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$. Neste caso, o sistema em malha fechada é estável se, e somente se, todos os zeros de $\Gamma(s)$ estiverem contidos no semiplano esquerdo do plano s (GOODWIN; SALGADO, 2000).

Um possível método para determinação da estabilidade em malha fechada de sistema MIMO LTI é obtido a partir do emprego do critério generalizado de Nyquist (DESOER; WANG, 1980). Este método estende o critério de Nyquist para sistemas MIMO, onde todo o semiplano direito do plano complexo s é mapeado. Dessa forma, a estabilidade em malha fechada pode ser avaliada pela análise dos auto-lugares da função de transferência em malha aberta $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ do sistema controlado. Entende-se por auto-lugar, ou também chamado lugar-característico, o deslocamento dos autovalores de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ para um determinado contorno no plano complexo (neste caso, o mapeamento de Nyquist do semi-plano direito) (GOODWIN; SALGADO, 2000).

A análise da estabilidade de sistemas LTP é similar à análise de estabilidade de sistemas MIMO convencionais, onde o critério de Nyquist é um importante ingrediente para extensão da teoria de controle LTI para sistemas LTP. Contudo, devido ao efeito de modulação exponencial e^{st} , a análise da estabilidade de sistemas LTP pode ser particularizada. Observa-se que a função de transferência harmônica é isomorfa na faixa fundamental do plano s para $[-j\omega_1/2, j\omega_1/2]$ (HALL; WERELEY, 1990), como mostrado na Figura 3.1.

Com o emprego da teoria de sinais exponencialmente modulados, a análise dos autovalores de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ é restrita à faixa fundamental \mathcal{C}_S do plano. Então $\Gamma(s)$ é analítico em qualquer ponto da faixa fundamental, exceto sobre os polos de malha aberta $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$. Com isso, o contorno modificado de Nyquist, ou região de mapeamento, é mostrado na Figura 3.3 (WERELEY, 1990; ZHOU; HAGIWARA, 2002a). Baseando-se

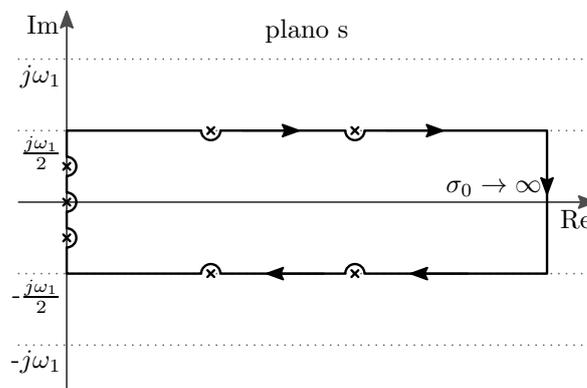


Figura 3.3 – Caminho de mapeamento de contorno modificado de Nyquist \mathcal{C}_S , no plano complexo s .

nesta teoria, dois critérios de estabilidade generalizados de Nyquist para sistemas com múltiplas entradas e saídas podem ser adaptados para sistemas LTP representados por funções de transferência harmônica. Estes critérios de estabilidade são mostrados nos Teoremas 3.1 e 3.2.

Teorema 3.1 (Teorema da estabilidade baseado na análise do denominador da função de transferência de malha fechada $\Gamma(s) = \det [\mathcal{I} + \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)]$.)

Considere a região de mapeamento \mathcal{C}_S mostrado na Figura 3.3 e uma função de transferência harmônica de malha aberta $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ estritamente própria. Então, o sistema em malha fechada é estável da entrada para a saída se, e somente se:

1. $\Gamma(s) = \det [\mathcal{I} + \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)] \neq 0, \forall s \in \mathcal{C}_S$; e
2. $\Gamma(s) = \det [\mathcal{I} + \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)], \forall s \in \mathcal{C}_S$, envolve a origem, no sentido horário, um número de vezes igual ao número de polos de malha aberta de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ no interior do contorno \mathcal{C}_S , incluindo as suas multiplicidades.

Prova. Vide Fortmann e Hitz (1977) e Wereley (1990, p.138), Teorema 4.1. □

Teorema 3.2 (Teorema da estabilidade baseado nos auto-lugares de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$.)
Considere um sistema linear e periódico da entrada para a saída, na forma (3.1)–(3.2), expresso por uma função de transferência harmônica $\mathbf{H}_P(s)$ com um controlador $\mathbf{H}_C(s)$, ambos na forma (3.62), resulta na função de transferência harmônica de malha aberta $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$.

Considere, ainda, $\lambda_i(s)|_{i=-\infty}^{\infty}$ os autovalores de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$, para $s \in \mathcal{C}_S$, como mostra a Figura 3.3. O conjunto de autovalores resultante do mapeamento em s forma um conjunto de curvas fechadas no plano complexo $\lambda(s)$, denominado auto-lugares da HTF.

Então, o sistema em malha fechada é estável da entrada para a saída se, e somente se, a combinação de todos os auto-lugares, ao longo do contorno \mathcal{C}_S , envolve o ponto $(-1+j0)$ no sentido horário, um número de vezes igual ao número de polos de malha aberta de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ contidos no contorno \mathcal{C}_S .

Dessa forma, um sistema estável em malha aberta será estável em malha fechada da entrada para a saída se, e somente se, a combinação de todos os auto-lugares de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$, ao longo do contorno \mathcal{C}_S , não envolver o ponto $(-1+j0)$.

Prova. Vide Desoer e Wang (1980), considerando-se o contorno \mathcal{C}_S . □

O método baseado no determinante de $[I + \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)]$, apresentado no Teorema 3.1, analisa a estabilidade com base em um único contorno de Nyquist. Isso simplifica a análise da estabilidade, mas não fornece uma medida da estabilidade relativa do sistema. Por outro lado, o método baseado nos auto-lugares, apresentado no Teorema 3.2, analisa a estabilidade com base em múltiplos contornos de Nyquist, o que torna a sua determinação

mais complexa. Contudo, esta abordagem é interessante pois possibilita a quantificação da margem de ganho do sistema em malha fechada.

3.2.1 Implementação computacional

Considerando-se que $\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ é um sistema de dimensão infinita, a análise computacional da HTF é somente realizável utilizando-se um modelo equivalente truncado. Essa restrição pode acarretar problemas de convergência numérica. Contudo, devido à característica dos sinais periódicos apresentarem redução da amplitude das suas componentes harmônicas para ordens elevadas, estas componentes pouco influenciam na resposta do sistema. Logo, é possível se desconsiderar as componentes harmônicas de alta ordem na HTF sem que isso resulte em significativos erros na representação dinâmica do sistema.

A ordem harmônica de truncamento da HTF deve ser corretamente escolhida para garantir a representatividade do sistema LTP original. No entanto, a ordem harmônica do modelo é bem caracterizada quando os auto-lugares não variam significativamente com a inclusão de mais harmônicas na análise. Logo, para realização computacional, o valor de σ_0 mostrado na Figura 3.3 pode ser limitado sem perda de generalidade (HALL; WERELEY, 1990; ZHOU; HAGIWARA, 2002b).

3.3 Sumário

Este capítulo apresentou um possível método para a análise da estabilidade de sistemas de controle em malha fechada empregando modelos lineares periódicos no tempo, representados por equações de espaço de estados. Esta abordagem utiliza o princípio da representação de sinais periódicos em séries de Fourier. Emprega-se a teoria de modulação exponencial de sinais, obtendo-se assim uma representação linear invariante no tempo no domínio da frequência complexa, denominada função de transferência harmônica (HTF). Por fim, a análise da estabilidade é realizada baseando-se na HTF de malha aberta do sistema de controle. A utilização dessa representação no domínio da frequência possibilita o uso de ferramentas clássicas, previamente desenvolvidas para sistemas multivariáveis, diferenciando-se apenas na região de mapeamento modificada.

Foram apresentados dois teoremas para a análise da estabilidade baseados no critério generalizado de Nyquist para sistemas multivariáveis. Tais teoremas são estendidos para a representação HTF e apresentam limitação na região de mapeamento do plano complexo s . O primeiro deles consiste na análise do argumento da equação característica de malha fechada, cuja análise é mais simplificada. O segundo teorema baseia-se na análise dos

auto-lugares da HTF de malha aberta e possibilita a determinação da margem de ganho do sistema de controle em malha fechada.

Foi apresentado neste capítulo o conceito básico para a redução da ordem harmônica da HTF e para a limitação da região de mapeamento no eixo real. A adequada simplificação desses termos não prejudica a análise da estabilidade e são necessárias para a realização computacional do método apresentado.

4 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE RETIFICADORES PFC EM TEMPO CONTÍNUO

Nos capítulos anteriores foi mostrada a obtenção de modelos para os retificadores monofásicos em ponte completa e em meia ponte com correção do fator de potência de entrada. Foi mostrada também a formulação HTF de sistemas lineares periódicos no tempo, resultando em uma representação LTI para esses sistemas. Dois métodos para análise da estabilidade empregando-se a representação HTF foram apresentados. Estes métodos são baseados no critério generalizado de Nyquist e estendidos para sistemas LTP.

Neste capítulo, a abordagem HTF é empregada para a análise da estabilidade de um retificador em ponte completa (Seção 4.1) e de um retificador em meia ponte (Seção 4.2). Para isso, um sistema de controle em malha fechada é projetado empregando-se técnicas convencionais baseadas no modelo médio LTI para controle da corrente de entrada e da tensão de saída.

Em seguida, a malha externa de tensão é modelada por um sistema de equações por espaço de estados LTP, baseado nos parâmetros do retificador. A representação do retificador por função de transferência harmônica é obtida, bem como a do controlador, resultando na HTF do sistema em malha aberta. A HTF do sistema em malha aberta é utilizada para a análise da estabilidade em malha fechada, onde são empregados os métodos do determinante e dos auto-lugares. A análise da estabilidade é realizada pelos métodos apresentados e é comparada à análise empregando-se os métodos clássicos e utilizando-se o modelo médio LTI. Resultados de simulação são apresentados para validar a análise teórica e demonstrar aplicações práticas da técnica sugerida.

4.1 Retificador em ponte completa

Nesta seção se encontra a análise da estabilidade empregando-se a abordagem HTF para o retificador monofásico em ponte completa. O circuito elétrico do retificador é mostrado na Figura 4.1, cujos elementos são considerados ideais na obtenção dos modelos. Os detalhes da modelagem deste retificador estão na Seção 2.1 do Capítulo 2. Os modelos LTI representados por funções de transferência são utilizados para o projeto dos controladores das malhas de compensação de corrente e tensão. Em seguida é desenvolvida a análise da estabilidade empregando a formulação HTF do modelo LTP da malha de tensão. Esta metodologia de análise da estabilidade é comparada ao método convencional, utilizando-se modelos médios LTI.

Os parâmetros do retificador em ponte completa e as especificações das malhas de compensação são mostrados na Tabela 4.1.

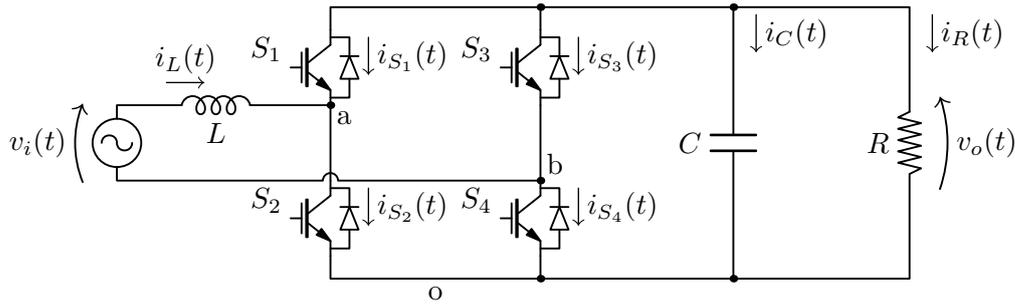


Figura 4.1 – Circuito elétrico do retificador monofásico em ponte completa.

O projeto dos controladores utilizados nesta análise são realizados usando-se técnicas clássicas de projeto, baseando-se na resposta em frequência do sistema em malha aberta. As malhas interna de controle da corrente de entrada e externa de controle da tensão de saída são projetadas de forma que possam ser consideradas dinamicamente desacopladas. Este desacoplamento é realizado no projeto dos controladores, fazendo com que a banda passante da malha de corrente seja significativamente maior que a banda passante da malha de tensão. Usualmente se emprega uma relação em torno a dez vezes entre as bandas passantes (KUU; GOLNARAGHI, 2002).

Considere o circuito do retificador já mostrado e a malha de compensação com correção do fator de potência presente na Figura 4.2. Os blocos $G_i(s)$ e $G_v(s)$ correspondem respectivamente aos modelos LTI da corrente de entrada (2.57) e da tensão de saída do retificador (2.62), respectivamente. Os ganhos de realimentação das variáveis do sistema são apresentados pelos blocos h_{vi} , h_i e h_v . Os controladores da malha de tensão e de corrente são representados por $C_v(s)$ e $C_i(s)$, respectivamente.

Tabela 4.1 – Especificações do retificador monofásico em ponte completa.

Parâmetro	Valor
Tensão eficaz de entrada	$V_{i_{\text{RMS}}} = 127V$
Frequência nominal de entrada	$\omega_1 = 2\pi 60\text{rad/s}$
Referência de tensão de saída	$V_o^* = 400V$
Potência média de saída	$P_o = 1,5kW$
Indutância de entrada	$L = 560\mu H$
Capacitância de saída	$C = 680\mu F$
Resistência de carga	$R = 105\Omega$
Ganho de realimentação de tensão	$h_v = 1$
Ganho de realimentação de corrente	$h_i = 1$
Frequência de comutação dos semicondutores	$T_s = 46875\text{Hz}$

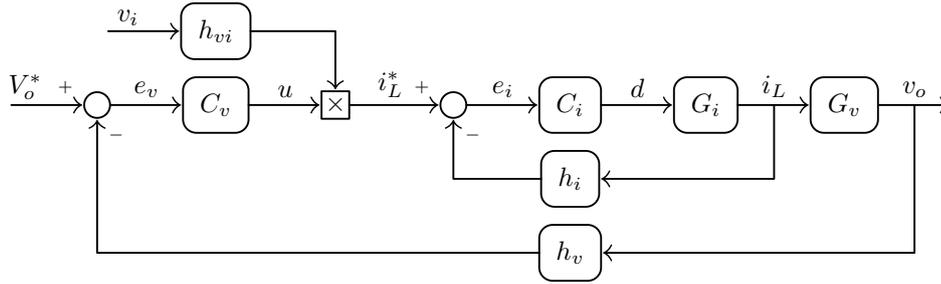


Figura 4.2 – Sistema de controle empregado ao retificador monofásico em ponte completa.

4.1.1 Projeto do controlador da malha interna de compensação da corrente

O modelo linear invariante no tempo que descreve o comportamento da corrente de entrada em função da razão cíclica, para o retificador em ponte completa, é dado por:

$$G_i(s) = \frac{I_L(s)}{D(s)} = -\frac{2V_o^*}{sL} \quad (4.1)$$

Substituindo-se os parâmetros da planta mostrados na Tabela 4.1, resulta na equação:

$$G_i(s) = -\frac{(2)(400)}{560(10^{-6})} \frac{1}{s} = -\frac{1,4286(10^6)}{s}. \quad (4.2)$$

Esta equação descreve a dinâmica da corrente de entrada para as especificações deste exemplo. O valor negativo de (4.2) é resultado da definição do sentido da corrente na modelagem da planta.

Devido às limitações dos modelos com relação à representação do comportamento dinâmico do retificador, o projeto da malha de controle da corrente de entrada deve garantir as hipóteses de operação estabelecidas para a simplificação do modelo. Dessa maneira, a metodologia de projeto empregada baseia-se na resposta em frequência de malha aberta, com os seguintes propósitos:

- Rejeitar distúrbio cc da corrente, resultado da simplificação na linearização do modelo. Esta componente cc pode ser caracterizada por uma condição inicial no indutor ou excitada por variações na tensão de barramento ou por transitórios de carga.
- Rejeitar distúrbios com frequência ω_1 , resultado da simplificação na representação do modelo por funções de transferência. Esta parcela corresponde à excitação da corrente de entrada devido à tensão de alimentação.
- Rastrear o valor de referência para a corrente de entrada. Este valor é fornecido pela malha externa de controle da tensão, e é sintonizado na frequência da rede de alimentação ω_1 .
- Apresentar desacoplamento dinâmico para com a malha externa de controle da

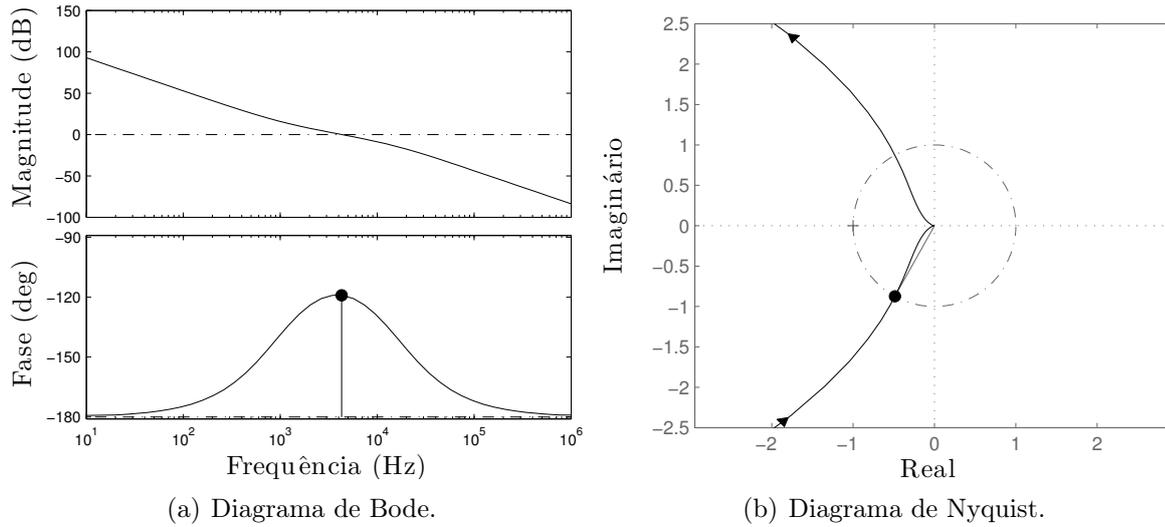


Figura 4.3 – Resposta em frequência de malha aberta do sistema de controle da corrente de entrada.

tensão de saída.

A compensação dos 180° de atraso de fase devido ao sentido adotado para a corrente de entrada é realizada com a adição de 180° na equação do controlador. A inclusão de um integrador na equação do controlador garante rejeição assintótica aos distúrbios de corrente contínua, cujo argumento é baseado no princípio do modelo interno (FRANCIS; WONHAM, 1976; LOH et al., 2003). Um zero real é incluído para melhorar a margem de fase em torno da frequência de cruzamento do ganho por 0dB. Um polo adicional é inserido em alta frequência pensando-se na validação experimental em tempo discreto da malha de tensão, com aproximação de ordem zero¹. Este polo de alta frequência não tem efeito significativo na resposta dinâmica do controlador e não é necessário para implementação em tempo contínuo. O ganho direto define a banda passante da resposta em frequência em malha aberta $C_i(s)G_i(s)$.

A função de transferência resultante para o compensador de corrente de entrada é dada por:

$$C_i(s) = -\frac{1800(s + 2\pi(10)^3)}{s(s + 2\pi 15(10)^3)} \quad (4.3)$$

que resulta nas seguintes características de malha aberta: margem de fase $MF = 61^\circ$, margem de ganho $MG = \infty$ e frequência de cruzamento $\omega_c = 27(10)^3 \text{ rad/s}$ ou $f_c = 4,3 \text{ kHz}$. A resposta em frequência da malha aberta de compensação da corrente de entrada é mostrada na Figura 4.3.

A resposta em frequência do sistema de controle da corrente de entrada em malha fe-

¹A inclusão do polo de alta frequência resulta em uma função de transferência com grau relativo um em tempo contínuo. Uma possível aproximação para tempo discreto emprega retentor de ordem zero (zoh, do inglês, *zero order hold*), que, por sua vez, resulta em uma equação de diferenças com grau relativo um, cuja implementação não insere atraso de transporte

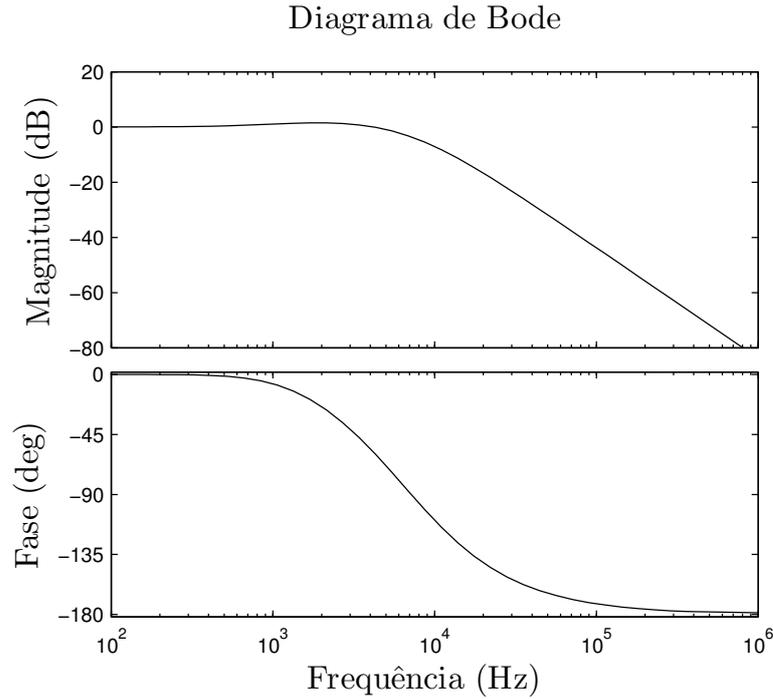


Figura 4.4 – Resposta em frequência da dinâmica da corrente de entrada.

chada é mostrado na Figura 4.4. Pode-se observar desvios de fase e ganho muito pequenos para a região de frequências de interesse.

4.1.2 Projeto do controlador da malha externa de compensação da tensão

Dispõe-se, nesta seção, o projeto de um controlador para a malha de controle da tensão de saída. Este projeto utiliza o modelo LTI do retificador em ponte completa representado por função de transferência. Tal representação, no domínio da frequência, relaciona a tensão de saída $v_o(t)$ com a corrente de entrada $u(t)$:

$$G_v(s) = \frac{V_o(s)}{U(s)} = \frac{\frac{k_{vi}D}{h_i C}}{s + \frac{1}{RC}} \quad (4.4)$$

Normalizando-se o ganho de realimentação da medida da tensão de entrada na forma:

$$h_{vi} = \frac{1}{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}} \quad , \quad (4.5)$$

resulta em ganho de normalização unitário para corrente de entrada:

$$k_{vi} = \frac{h_{vi} V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{h_i} = 1 \quad . \quad (4.6)$$

Dessa maneira, a ação de controle $u(t)$ da malha externa de tensão atua sobre o valor de pico da referência da corrente. Considerado o desacoplamento dinâmico entre as malhas

de tensão e corrente, a forma de onda da corrente de entrada é dada por:

$$i_L(t) = i_L^*(t) = u(t) \cos(\omega_1 t) \quad (4.7)$$

A constante relativa à forma de onda da razão cíclica D , resultante da linearização em torno do ponto de operação, é dada em termos dos parâmetros do retificador:

$$D = \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{2V_o^*} = \frac{127}{400\sqrt{2}} = 0,2245 \quad . \quad (4.8)$$

Substituindo-se k_{vi} , D e os demais parâmetros do retificador, apresentados na Tabela 4.1, na função de transferência (4.4), resulta:

$$G_v(s) = \frac{D/C}{s + 1/RC} = \frac{330,2}{s + 14,01} \quad (4.9)$$

que representa o comportamento dinâmico da tensão de saída no domínio da frequência.

O sistema de controle abordado nesta análise utiliza no controlador um filtro rejeita banda (do inglês, *notch filter*). Essa técnica possibilita a elevação da banda passante do controlador sem comprometer a correção do fator de potência na entrada. Essa prática aumenta o desempenho dinâmico da tensão de saída, quando comparado a controladores com reduzida banda passante.

O método de projeto pela resposta em frequência possibilita a determinação de um controlador para um sistema em malha fechada a partir da análise do sistema em malha aberta. Neste caso, considere o controlador de tensão

$$C_v(s) = C_n(s)C_f(s) \quad (4.10)$$

onde $C_n(s)$ é o filtro rejeita banda, definido na forma:

$$C_n(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1(2\omega_1)s + (2\omega_1)^2}{s^2 + 2\zeta_2(2\omega_1)s + (2\omega_1)^2} \quad (4.11)$$

sintonizado na frequência de oscilação da saída (120Hz), onde $\omega_1 = 2\pi 60$. Definindo-se as constantes de amortecimento

$$\zeta_1 = 10^{-3}, \quad \zeta_2 = 1,0 \quad (4.12)$$

resulta em atenuação de $|G_{(2\omega_1)}| = -60\text{dB}$ na frequência de interesse, para o filtro rejeita-banda. Assim, a função de transferência numérica é dada na forma:

$$C_n(s) = \frac{s^2 + 1,508s + 568,5(10^3)}{(s + 754)(s + 754)} \quad (4.13)$$

cuja resposta em frequência pode ser observada na Figura 4.5.

Dessa modo, o projeto do controlador pelo método da resposta em frequência consiste

Diagrama de Bode

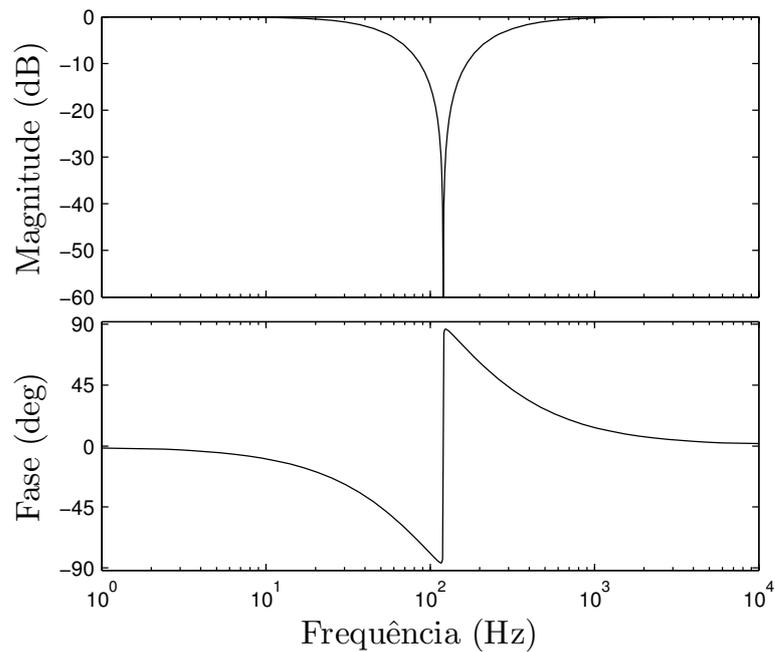
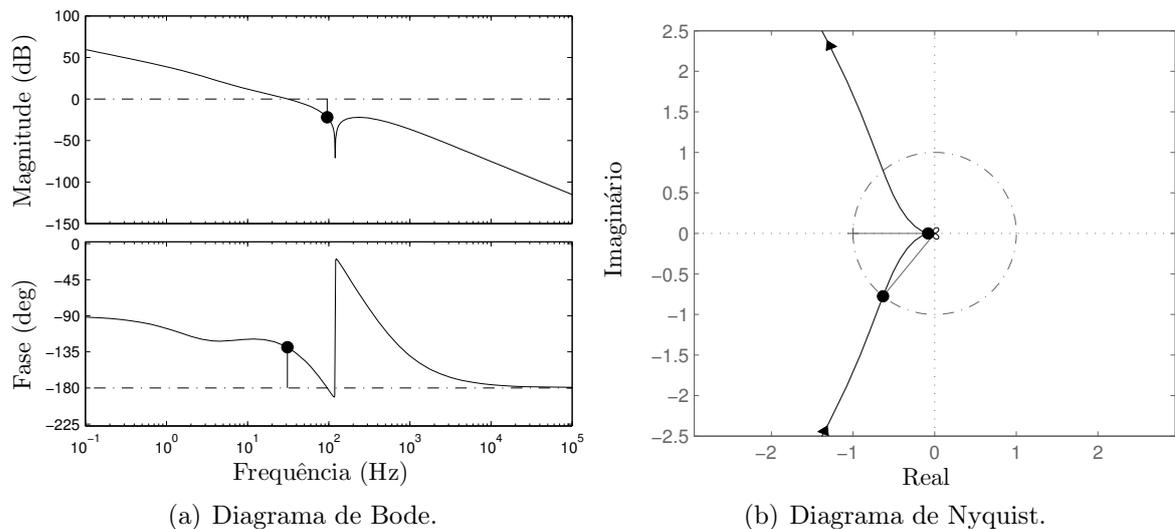


Figura 4.5 – Resposta em frequência do filtro rejeita-banda do controlador em malha aberta.

na análise do seguinte sistema em malha aberta:

$$T(s) = C_f(s)C_n(s)G_v(s) \quad (4.14)$$

onde $C_n(s)$ e $G_v(s)$ são funções conhecidas. O compensador de fase $C_f(s)$ é projetado pela análise da resposta em frequência de malha aberta do retificador, mostrada na Figura 4.6.



(a) Diagrama de Bode.

(b) Diagrama de Nyquist.

Figura 4.6 – Resposta em frequência de malha aberta do sistema de controle da tensão de saída.

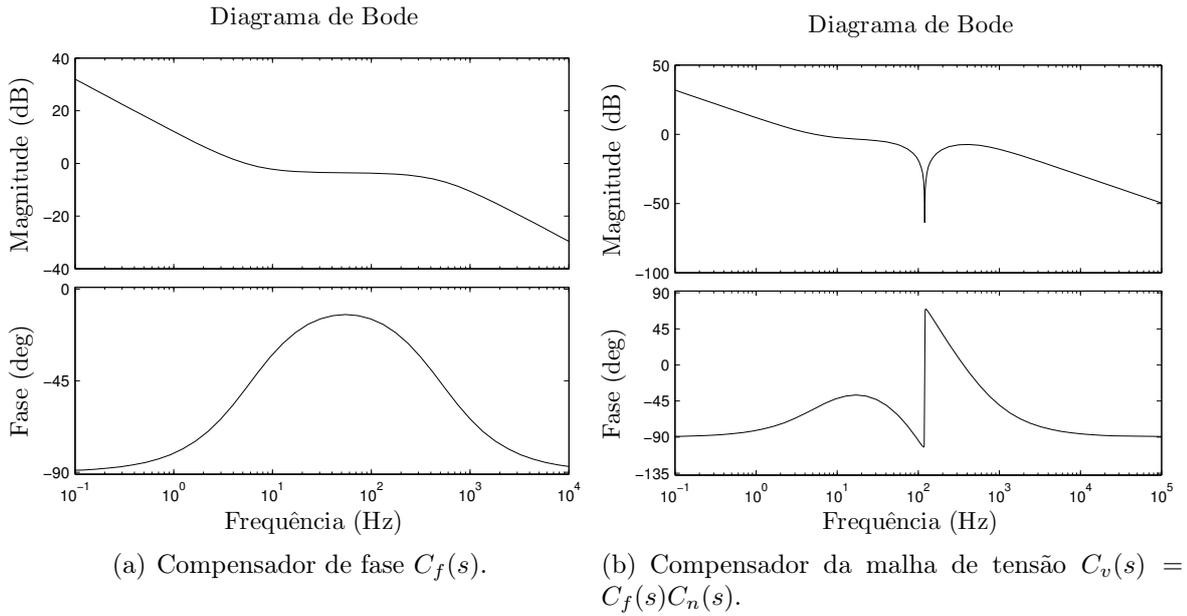


Figura 4.7 – Resposta em frequência do controlador de tensão em malha aberta.

A função de transferência resultante para o compensador de fase $C_f(s)$ é dada por:

$$C_f(s) = \frac{2083(s + 2\pi(6))}{s(s + 2\pi(500))} \quad (4.15)$$

e apresenta as seguintes características de malha aberta: margem de fase MF = 51°, margem de ganho MG = 22dB e frequência de cruzamento $\omega_c = 194\text{rad/s}$ ou $f_c = 31\text{Hz}$.

Uma importante característica deste sistema é apresentar elevado ganho nas frequên-

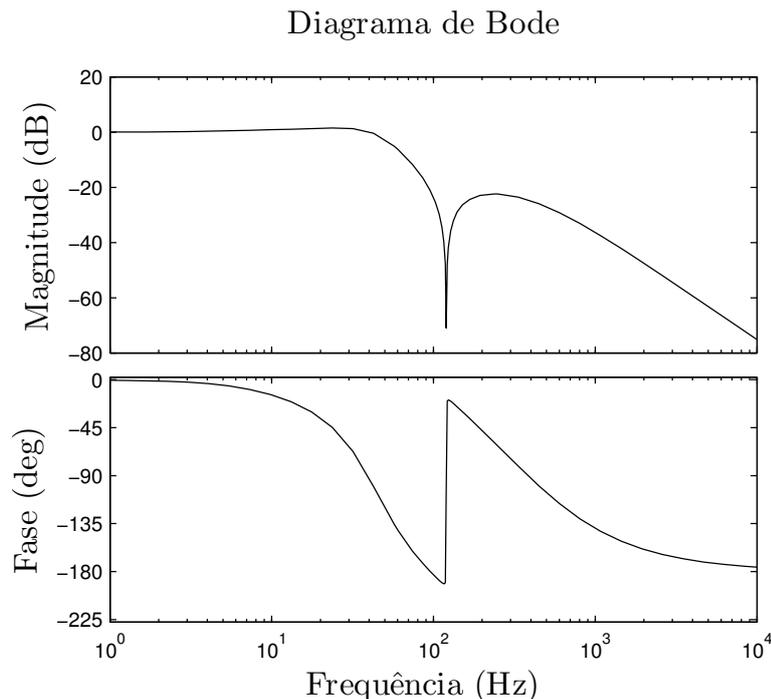


Figura 4.8 – Resposta em frequência do controlador de tensão em malha fechada

cias que compõem o sinal da referência $\omega = 0$, garantindo rastreamento assintótico em regime permanente. O reduzido ganho de malha aberta acentua a atenuação das componentes de frequência de 120Hz na realimentação. Isso possibilita a elevação da frequência de cruzamento do ganho por 0dB sem comprometer a correção do fator de potência de entrada. O aumento da frequência de cruzamento reduz o tempo de resposta da tensão de saída a variações da referência, a rejeição de distúrbios e a transitórios de carga.

A resposta em frequência do compensador de fase $C_f(s)$ e a resposta em frequência do compensador de tensão de saída são mostrados na Figura 4.7(a)–(b), respectivamente.

O comportamento em frequência do sistema de controle de malha fechada para a tensão de saída do retificador é ilustrado na Figura 4.8. Pela análise do diagrama, a característica de malha fechada apresenta erro muito reduzido para o rastreamento das baixas frequências da referência, ao mesmo tempo que apresenta acentuada atenuação das frequências em torno de 120Hz.

4.1.3 Análise da estabilidade da malha de tensão empregando-se a abordagem LTP

A análise da estabilidade baseada em modelos LTP utiliza a representação equivalente por funções de transferência harmônica, possibilitando o emprego de técnicas LTI. Nesta seção é demonstrada a obtenção da função de transferência harmônica para o retificador monofásico em ponte completa e para o controlador projetado. Em seguida a HTF do sistema em malha aberta é utilizada para análise da estabilidade desse sistema em malha fechada, empregando-se as técnicas baseadas no critério generalizado de Nyquist.

4.1.3.1 Representação do modelo LTP por função de transferência harmônica

Considere a equação diferencial linear variante no tempo que descreve o comportamento da tensão de saída, como apresentada por (2.52) no Capítulo 2:

$$\frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{RC} \langle v_o(t) \rangle + \left[\frac{k_{vi}D}{C} + \frac{k_{vi}D}{2C} (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) \right] u(t) \quad (4.16)$$

cuja representação LTP deve ser posta na forma de equações por espaço de estados:

$$\begin{aligned} \frac{d(x(t))}{dt} &= a(t)x(t) + b(t)u(t) \\ y(t) &= c(t)x(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde, neste caso, $u(t)$ corresponde ao valor de pico da corrente de entrada, enquanto o vetor de saídas $y(t)$ corresponde ao valor da tensão de saída média no período de

comutação:

$$y(t) = \langle v_o(t) \rangle . \quad (4.18)$$

A representação do modelo de tensão por equações de espaço de estados apresenta matriz de estados invariante no tempo:

$$a(t) = -\frac{1}{RC} , \quad (4.19)$$

matriz de entrada com dinâmica periódica no tempo:

$$b(t) = \frac{k_{vi}D}{C} + \frac{k_{vi}D}{2C} (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) \quad (4.20)$$

e matriz de saída unitária:

$$c(t) = 1 . \quad (4.21)$$

A representação numérica das matrizes do modelo (4.17) por espaço de estados é obtida com base nos parâmetros do retificador e resulta nas seguintes matrizes:

$$a(t) = -14,01 \quad (4.22)$$

$$b(t) = 330,2 + 165,08 (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) . \quad (4.23)$$

Com a representação do sistema LTP na forma (4.17), a decomposição das matrizes em seus respectivos coeficientes complexos de Fourier é diretamente obtida:

$$a(t) = a_{(0)} \quad (4.24)$$

$$b(t) = b_{(-2)} e^{-j2\omega_1 t} + b_{(0)} + b_{(2)} e^{j2\omega_1 t} \quad (4.25)$$

$$c(t) = c_{(0)} \quad (4.26)$$

cujos coeficientes numéricos são dados para o retificador em ponte completa:

$$a_{(0)} = -14,01 \quad (4.27)$$

$$b_{(0)} = 330,2 \quad (4.28)$$

$$b_{(2)} = b_{(-2)} = 165,08 \quad (4.29)$$

$$c_{(0)} = 1 \quad (4.30)$$

O sistema harmônico equivalente LTI pode ser determinado a partir da decomposição do sistema LTP em seus respectivos coeficientes exponenciais complexos de Fourier. Este sistema harmônico LTI, equivalente a LTP, é representado por equações de espaço de estados:

$$\begin{aligned} s\mathcal{X}(s) &= (\mathcal{A} - \mathcal{N})\mathcal{X}(s) + \mathcal{B}\mathcal{U}(s) \\ \mathcal{Y}(s) &= \mathcal{C}\mathcal{X}(s) + \mathcal{D}\mathcal{U}(s) \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde as matrizes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} são matrizes circulares e \mathcal{N} é a matriz de modulação em

frequência², cuja dimensão é infinita. Dessa forma, a nova matriz de estados é determinada:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{(0)} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & a_{(0)} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & a_{(0)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -14,01 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & -14,01 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & -14,01 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

onde $a_{(0)}$ é o coeficiente constante de $a(t)$. A matriz de entrada é dada por:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{(0)} & 0 & b_{(-2)} & \cdots \\ \cdots & 0 & b_{(0)} & 0 & \cdots \\ \cdots & b_{(2)} & 0 & b_{(0)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 330,2 & 0 & 165,08 & \cdots \\ \cdots & 0 & 330,2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 165,08 & 0 & 330,2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

onde $b_{(n)}$ é o n -ésimo coeficiente de $b(t)$. A matriz de saída é dada por:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & c_{(0)} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & c_{(0)} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & c_{(0)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

onde $c_{(0)}$ é o coeficiente constante de $c(t)$. A matriz de realimentação direta é definida por:

$$\mathcal{D} = 0\mathcal{I} \quad (4.35)$$

cujo valor resultante é nulo.

A matriz de matriz de modulação em frequência \mathcal{N} é definida diagonal em função da dimensão do sistema:

$$\mathcal{N} = \text{diag}(jn\omega_1) \quad (4.36)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, resultando na seguinte matriz de modulação:

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -j\omega_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & j0\omega_1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & j\omega_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -j377 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & j377 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

²Para maiores detalhes, consulte o Capítulo 3.

Uma vez que o sistema harmônico é determinado por um conjunto de equações por espaço de estados no domínio da frequência (4.31), a função de transferência harmônica é obtida na forma:

$$\mathbf{H}_P(s) = \mathbf{C} [s\mathcal{I} - (\mathcal{A} - \mathcal{N})]^{-1} \mathbf{B} + \mathcal{D} \quad (4.38)$$

considerando-se a matriz \mathcal{D} nula.

A representação numérica da HTF é obtida pela solução matricial de (4.38). Por outro lado, é possível obter a representação HTF genérica para o retificador monofásico em ponte completa em função dos coeficientes de Fourier, ou dos parâmetros da planta. Para isso, considere as matrizes diagonais representadas na forma indicada:

$$\mathcal{A} = \text{diag} (a_{(0)}) \quad (4.39)$$

$$\mathcal{C} = \text{diag} (c_{(0)}) \quad (4.40)$$

Como as matrizes $s\mathcal{I}$ e \mathcal{N} são também matrizes diagonais onde

$$s\mathcal{I} = \text{diag} (s) \quad (4.41)$$

então (4.38) pode ser reescrita na forma:

$$\mathbf{H}_P(s) = \text{diag} (c_{(0)}) [\text{diag} (s) - \text{diag} (a_{(0)}) + \text{diag} (jn\omega_1)]^{-1} \mathbf{B} \quad (4.42)$$

Pela propriedade de operação de matrizes diagonais,

$$\mathbf{H}_P(s) = \text{diag} (c_{(0)}) \text{diag} (s - a_{(0)} + jn\omega_1)^{-1} \mathbf{B} \quad (4.43)$$

cuja inversão matricial é dada de forma direta:

$$\mathbf{H}_P(s) = \text{diag} (c_{(0)}) \text{diag} \left(\frac{1}{s - a_{(0)} + jn\omega_1} \right) \mathbf{B} \quad (4.44)$$

o resultado é o seguinte produto matricial:

$$\mathbf{H}_P(s) = \text{diag} \left(\frac{c_{(0)}}{s - a_{(0)} + jn\omega_1} \right) \mathbf{B} \quad (4.45)$$

O produto (4.45) de uma matriz diagonal por \mathbf{B} resulta em um sistema onde cada elemento da matriz diagonal multiplica sua respectiva linha da matriz \mathbf{B} . Expandindo-se

esta solução na forma matricial, resulta na função de transferência harmônica:

$$\mathbf{H}_P(s) = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \frac{b_{(0)}c_{(0)}}{s-a_{(0)}-j2\omega_1} & 0 & \frac{b_{(-1)}c_{(0)}}{s-a_{(0)}-j2\omega_1} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{b_{(0)}c_{(0)}}{s-a_{(0)}-j\omega_1} & 0 & \frac{b_{(-1)}c_{(0)}}{s-a_{(0)}-j\omega_1} & 0 & \dots \\ \dots & \frac{b_{(1)}c_{(0)}}{s-a_{(0)}} & 0 & \frac{b_{(0)}c_{(0)}}{s-a_{(0)}} & 0 & \frac{b_{(-1)}c_{(0)}}{s-a_{(0)}} & \dots \\ \dots & 0 & \frac{b_{(1)}c_{(0)}}{s-a_{(0)}+j\omega_1} & 0 & \frac{b_{(0)}c_{(0)}}{s-a_{(0)}+j\omega_1} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{b_{(1)}c_{(0)}}{s-a_{(0)}+j2\omega_1} & 0 & \frac{b_{(0)}c_{(0)}}{s-a_{(0)}+j2\omega_1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

para o retificador em ponte completa.

Substituindo-se os parâmetros da planta, obtêm-se a seguinte HTF de coeficientes numéricos:

$$\mathbf{H}_P(s) = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \frac{330,2}{s+14,01-j754} & 0 & \frac{165,08}{s+14,01-j754} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{330,2}{s+14,01-j377} & 0 & \frac{165,08}{s+14,01-j377} & 0 & \dots \\ \dots & \frac{165,08}{s+14,01} & 0 & \frac{330,2}{s+14,01} & 0 & \frac{165,08}{s+14,01} & \dots \\ \dots & 0 & \frac{165,08}{s+14,01+j377} & 0 & \frac{330,2}{s+14,01+j377} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{165,08}{s+14,01+j754} & 0 & \frac{330,2}{s+14,01+j754} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

para o retificador em ponte completa.

A análise da estabilidade utiliza a HTF de malha aberta, constituída pela função de transferência harmônica da planta e do controlador. Por essa razão, a representação do controlador por HTF deve ser obtida baseando-se na mesma abordagem empregada para obtenção da HTF da planta. Contudo, se o controlador é linear e invariante no tempo, este apresenta função de transferência entrada-saída em um formato diagonal, ou seja, as dinâmicas de cada entrada para cada saída são desacopladas..

A função de transferência harmônica do controlador pode ser obtida pela aplicação da metodologia anterior. Contudo, como sua dinâmica é naturalmente LTI, não apresenta interações espectrais e pode ser diretamente determinada por:

4.1.3.2 Análise da estabilidade em malha fechada

Uma vez obtido o modelo do retificador monofásico em ponte completa representado por função de transferência harmônica, as técnicas multivariáveis LTI podem ser empregadas para a análise da estabilidade de malha fechada desses sistemas.

Nesta seção são apresentadas as análises da estabilidade do retificador para o método baseado no determinante da equação característica de malha fechada $\det [\mathcal{I} + \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)]$ e para o método baseado nos auto-lugares de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$, empregando-se a abordagem HTF. Apresenta-se, também, a comparação com a análise da estabilidade utilizando-se o modelo médio LTI.

A aplicação dos métodos de estabilidade baseada na abordagem HTF utiliza uma representação de dimensão limitada na quarta ordem harmônica. O mapeamento do semiplano direito é limitado em $\sigma_0 = 10^3 \text{rad/s}$.

Ilustra-se, na Figura 4.9, a análise da estabilidade em que se emprega o modelo médio LTI, cujo resultado é um sistema estável em malha fechada, com margem de ganho $MG_{dB} = 22\text{dB}$, margem de fase $MF = 51^\circ$ e frequência de cruzamento do ganho $f_c = 31\text{Hz}$.

Os métodos para a análise da estabilidade do sistema retificador em malha fechada empregando-se a representação HTF estão dispostos no Capítulo 3. O primeiro método utilizado, denominado método do determinante, é apresentado no Teorema 3.1, o qual consiste na análise da curva fechada gerada pela variação da função

$$\Gamma(s) = \det [\mathcal{I} + \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)] \quad (4.53)$$

ao longo do mapeamento do semiplano direito do plano complexo s na faixa fundamental

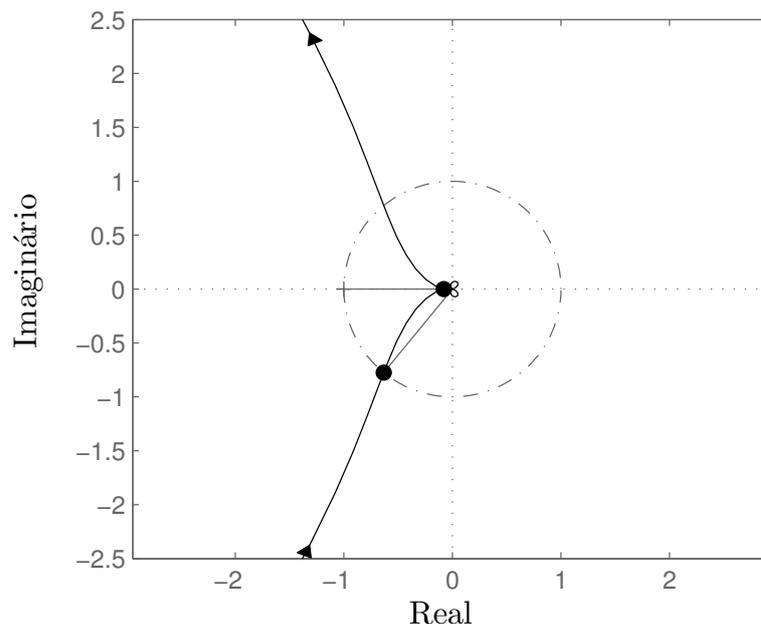


Figura 4.9 – Diagrama de Nyquist do sistema de controle $C_v(s)G_v(s)$ em malha aberta.

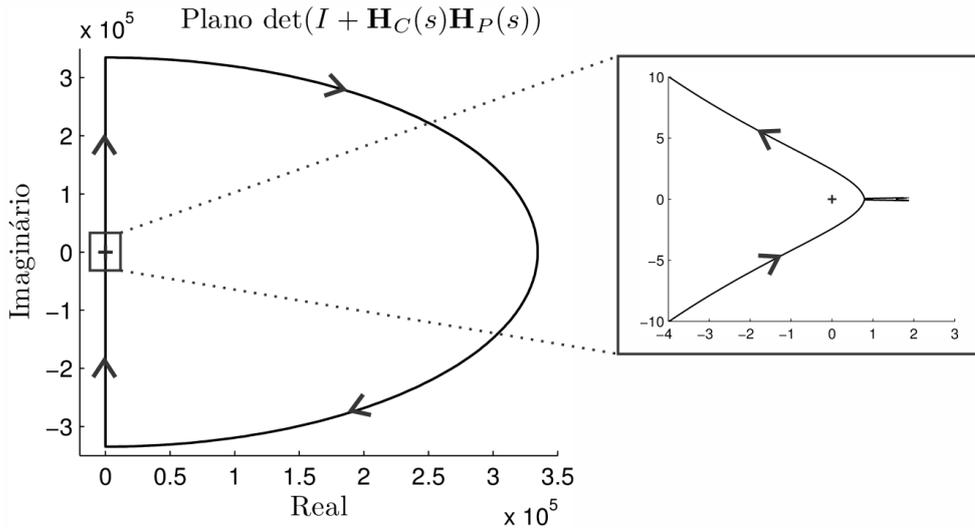


Figura 4.10 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade em malha fechada.

\mathcal{C}_S . O contorno polar gerado por este mapeamento é mostrado na Figura 4.10.

Como a função de transferência em malha aberta não apresenta nenhum polo no semiplano direito do plano s , ou, de forma equivalente, não apresenta nenhum polo no interior do caminho de mapeamento, então o sistema em malha fechada é estável se, e somente se, o contorno $\Gamma(s)$ não circunda a origem.

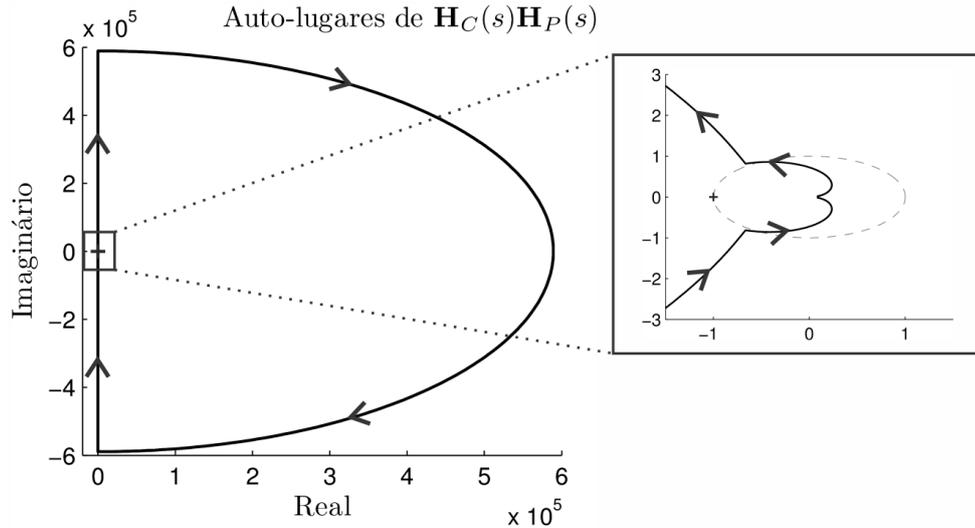
Observando-se a Figura 4.10, conclui-se que o sistema é estável em malha fechada, pois o diagrama do determinante não envolve a origem.

O método de análise da estabilidade empregando-se o determinante é fácil de ser obtido e analisado, pois resulta em uma única curva de caminho fechado. No entanto, este método apenas determina a estabilidade, e não fornece nenhum indicativo de desempenho ou margens de fase e ganho.

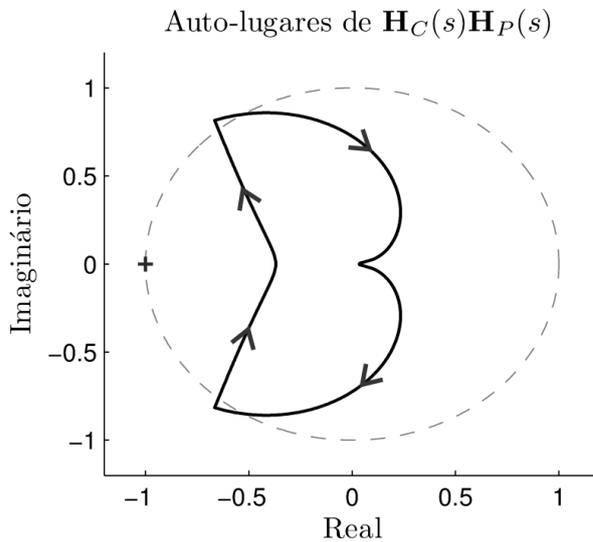
Outro possível método para a análise da estabilidade empregando a abordagem HTF é baseado na análise dos auto-lugares de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$. Este método consiste na análise dos caminhos produzidos pelo deslocamento dos autovalores de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ ao longo do mapeamento \mathcal{C}_S do plano complexo s . Esse deslocamento, denominado auto-lugares, produz caminhos sempre fechados e em número menor ou igual à dimensão da matriz HTF, como mostrado por Desoer e Wang (1980). O conjunto dos auto-lugares de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ é ilustrado na Figura 4.11 para o sistema em análise.

Como o sistema em malha aberta $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ não apresenta nenhum polo no semiplano direito do plano complexo s , então, de acordo com o Teorema 3.2, o sistema é estável em malha fechada da entrada para a saída se, e somente se, o conjunto dos auto-lugares não envolverem o ponto $(-1 + j0)$. Dessa forma, o sistema é estável pelo método dos auto-lugares.

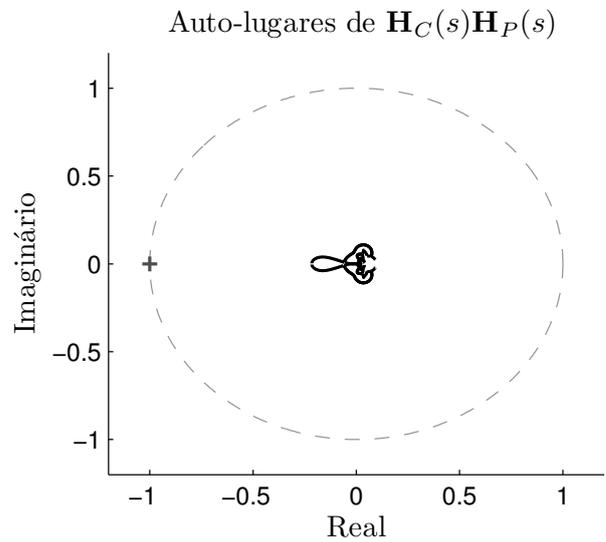
A principal vantagem da utilização deste método para a análise da estabilidade é a possibilidade de se obter uma medida relativa de estabilidade. Neste caso, é possível



(a) Auto-lugar correspondente a λ_1 .



(b) Auto-lugar correspondente a λ_2 .



(c) Auto-lugares correspondentes a $\lambda_1-\lambda_9$.

Figura 4.11 – Emprego do método dos auto-lugares para análise da estabilidade em malha fechada.

determinar a margem de ganho do sistema em malha aberta para o modelo LTP da mesma forma como obtido para sistemas LTI.

Neste caso, o ponto de cruzamento pelo eixo real da curva que mais se aproxima do ponto $(-1 + j0)$, considerando-se o pior caso, define a margem de ganho do sistema. Para os auto-lugares mostrados na Figura 4.11, o ponto de cruzamento pelo eixo real é dado por:

$$\alpha = (-0,369 + j0) , \quad (4.54)$$

que resulta na margem de ganho

$$MG = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,369} = 2,71 \quad (4.55)$$

para o compensador da tensão de saída de malha fechada. A representação da margem de ganho em decibéis é obtida na forma:

$$MG_{dB} = 20 \log (MG) = 20 \log (2,71) = 8,66dB . \quad (4.56)$$

A margem de ganho obtida pela análise dos auto-lugares pode ser comparada com a obtida empregando-se o modelo médio LTI. Observa-se na Figura 4.10 que a margem de ganho é $MG_{dB} = 22dB$, ou em valor absoluto:

$$MG = 12,6 \quad (4.57)$$

o que representa um ganho de 4,65 vezes maior.

Com o propósito de avaliar o limite da estabilidade com base na margem de ganho do sistema, considere o emprego do controlador (4.10), incluindo-se um fator de ganho direto β , dado na forma:

$$\beta C_v(s) = \beta C_n(s) C_f(s) \quad (4.58)$$

onde $\beta = 2,71$ é o limite de estabilidade do sistema em malha fechada informado pelo método dos auto-lugares. Com isso, a função de transferência harmônica resultante é escrita também em função de β :

$$\beta \mathbf{H}(s) = \beta \mathbf{H}_C(s) \mathbf{H}_P(s) \quad (4.59)$$

A fim de avaliar a equivalência da margem de ganho com o limite da estabilidade do sistema em malha fechada, é mostrada a análise da estabilidade para dois casos em torno do ganho crítico $\beta \pm 0,04$, onde $\beta = 2,67$ representa um caso estável e $\beta = 2,75$ representa um caso instável.

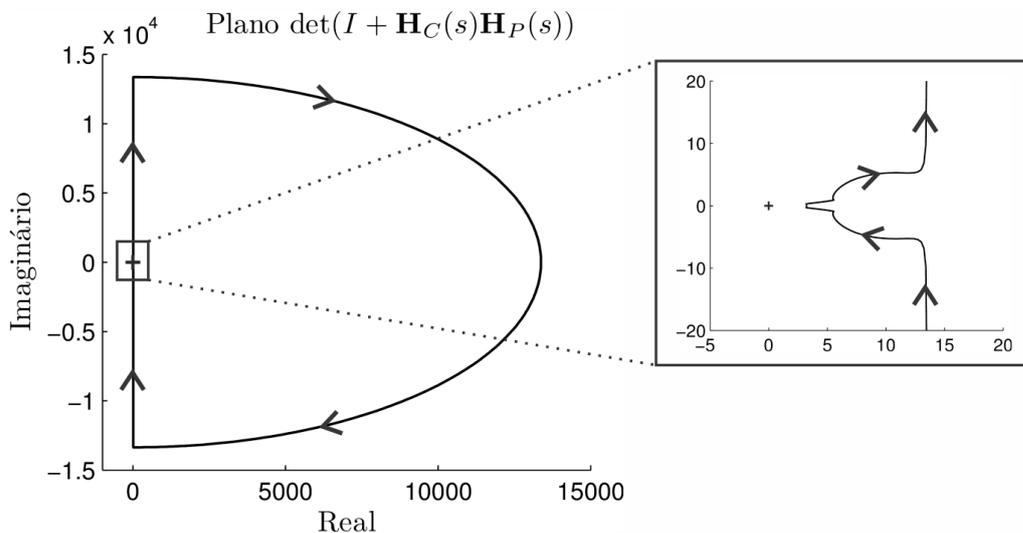


Figura 4.12 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 2,67$.

Considerando-se inicialmente o caso estável, para $\beta = 2,67$, e aplicando-se o método do determinante para a análise da estabilidade, onde é avaliado o deslocamento de

$$\Gamma(s) = \det [\mathcal{I} + \beta \mathbf{H}_C(s) \mathbf{H}_P(s)] \quad (4.60)$$

para o contorno \mathcal{C}_S , a curva fechada resultante do mapeamento é obtida na Figura 4.12. Como pode ser observado, a origem não é envolvida e, dessa forma, o sistema é estável em malha fechada.

De forma similar, com o emprego do método dos auto-lugares, o conjunto de curvas resultantes é mostrado na Figura 4.13. Nenhuma das curvas envolve o ponto $(-1 + j0)$, indicando que o sistema é estável em malha fechada.

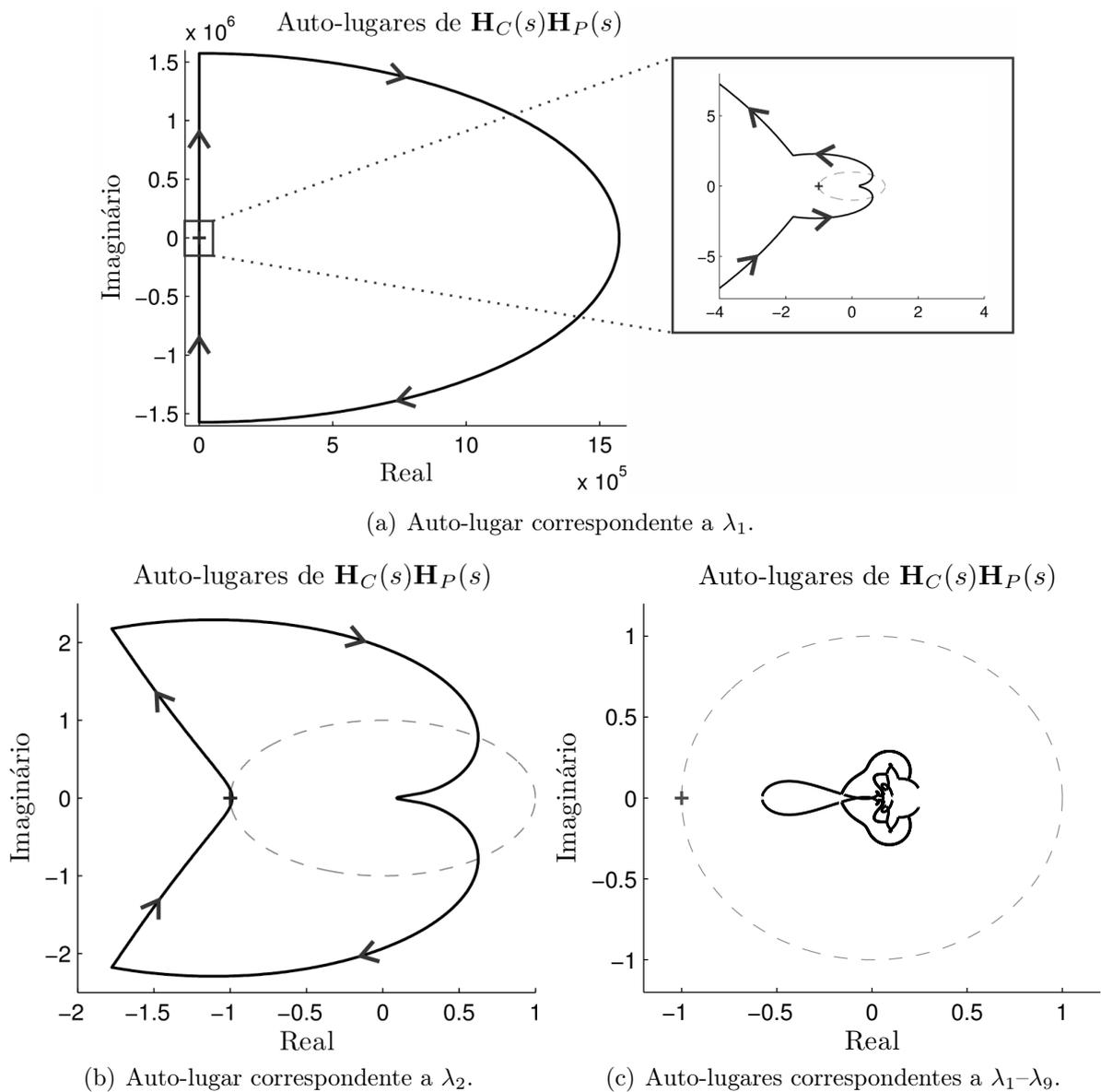


Figura 4.13 – Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 2,67$.

Uma das vantagens da aplicação deste método é a determinação da margem de ganho. O ponto de cruzamento do auto-lugar mais próximo ao ponto $(-1 + j0)$ é dado por:

$$\alpha = -0,986 , \tag{4.61}$$

resultando na seguinte margem de ganho

$$MG = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,986} = 1,014 \tag{4.62}$$

$$MG_{dB} = 20 \log (MG) = 0,12dB , \tag{4.63}$$

o que significa que o sistema está muito próximo da instabilidade.

Por outro lado, o emprego do método de análise da estabilidade de Nyquist utilizando-se o modelo médio LTI indica um sistema estável com as seguintes margens de ganho e fase, respectivamente:

$$MG_{dB} = 13,5dB \tag{4.64}$$

$$MF = 28,3^\circ . \tag{4.65}$$

Da mesma forma, para analisar o caso instável, $\beta = 2,75$, o método do determinante pode ser aplicado para a análise da estabilidade em malha fechada, resultando na Figura 4.14. Observando-se a figura, percebe-se que a curva $\Gamma(s)$ envolve a origem uma vez no sentido horário. Como resultado, este sistema é instável em malha fechada.

O método dos auto-lugares é empregado para $\beta = 2,75$, resultando no conjunto de curvas mostradas na Figura 4.15. Neste caso, o ponto $(-1 + j0)$ é envolvido uma vez no sentido horário, resultando em um sistema instável em malha fechada.

Com o emprego do método de análise da estabilidade de Nyquist utilizando-se o

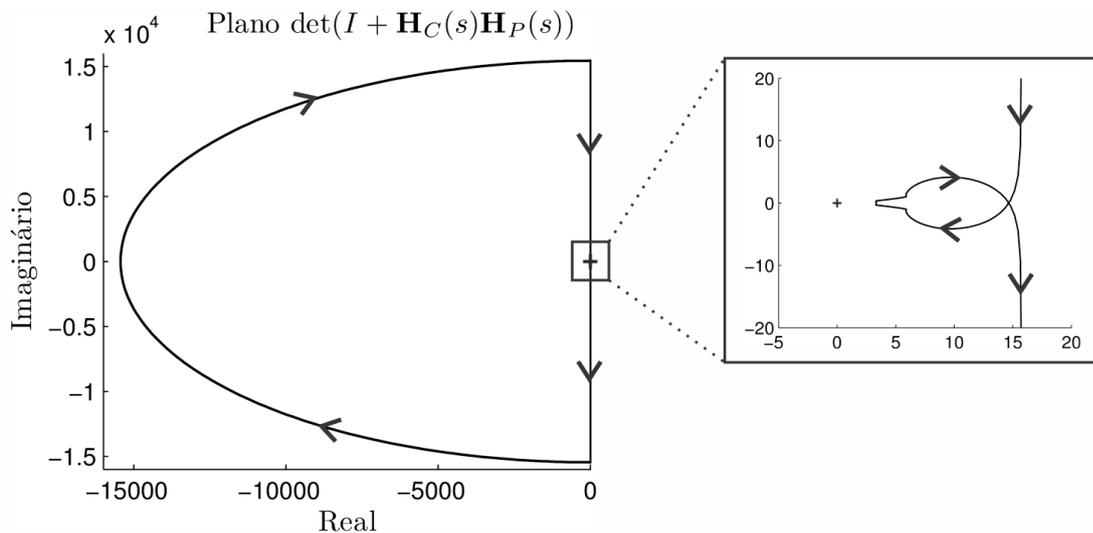
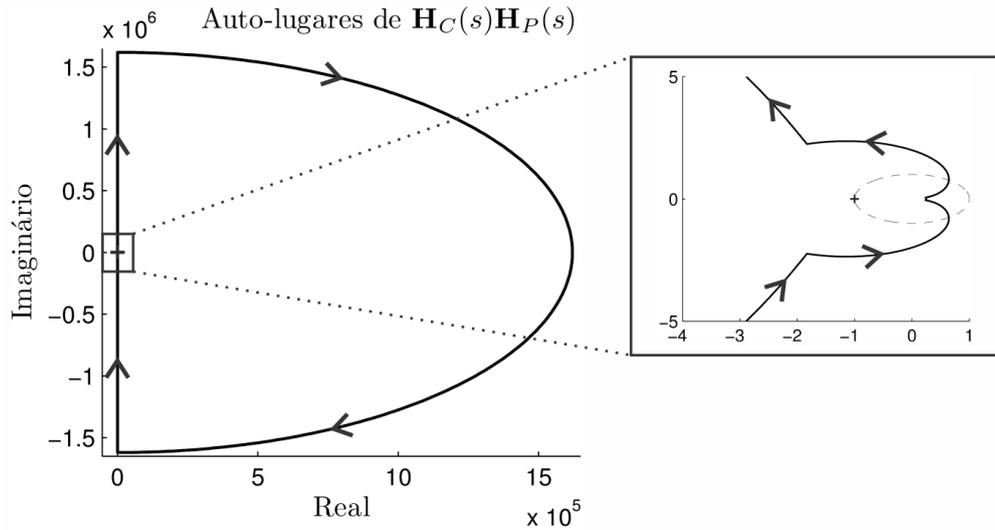
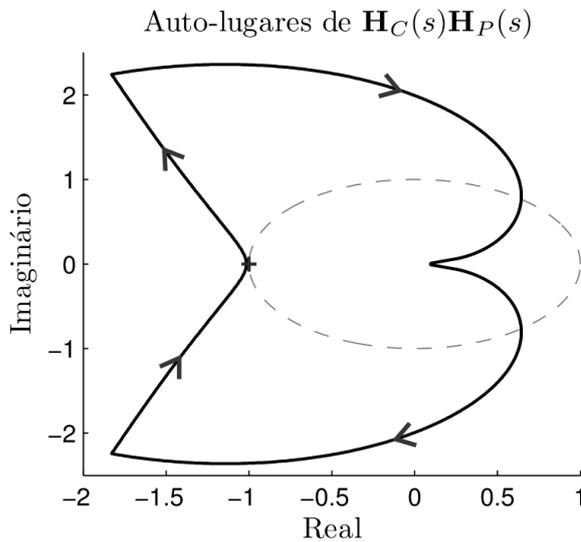


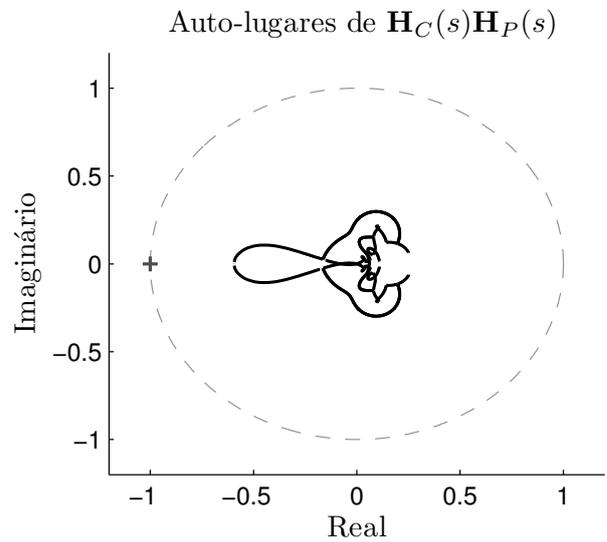
Figura 4.14 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 2,75$.



(a) Auto-lugar correspondente a λ_1 .



(b) Auto-lugar correspondente a λ_2 .



(c) Auto-lugares correspondentes a $\lambda_1-\lambda_9$.

Figura 4.15 – Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 2,75$.

modelo médio LTI, tem-se como resultado um sistema estável com as seguintes margens de ganho e fase, respectivamente:

$$MG_{dB} = 13,2dB \quad (4.66)$$

$$MF = 27,6^\circ . \quad (4.67)$$

4.1.4 Resultados de simulação para validação da metodologia

Os resultados de simulação são realizados a fim de comparar as respostas dos modelos LTI e LTP para diferentes condições de operação do retificador monofásico em ponte completa. A margem de estabilidade de ganho é verificada via simulação e comparada aos valores obtidos na análise dos autolugares, onde a simulação é realizada para as condições nominais de projeto e em torno do ponto crítico de instabilidade. Apresenta-se, ainda, o comportamento dinâmico da tensão de saída para os casos de simulação do retificador e simulação dos modelos LTI e LTP, cujas respostas podem ser comparadas. O compensador da malha interna de controle da corrente de entrada (4.3) é empregado apenas para simulação do circuito, baseando-se no princípio do desacoplamento dinâmico entre as malhas.

A simulação do retificador é elaborada considerando-se elementos de circuitos elétricos

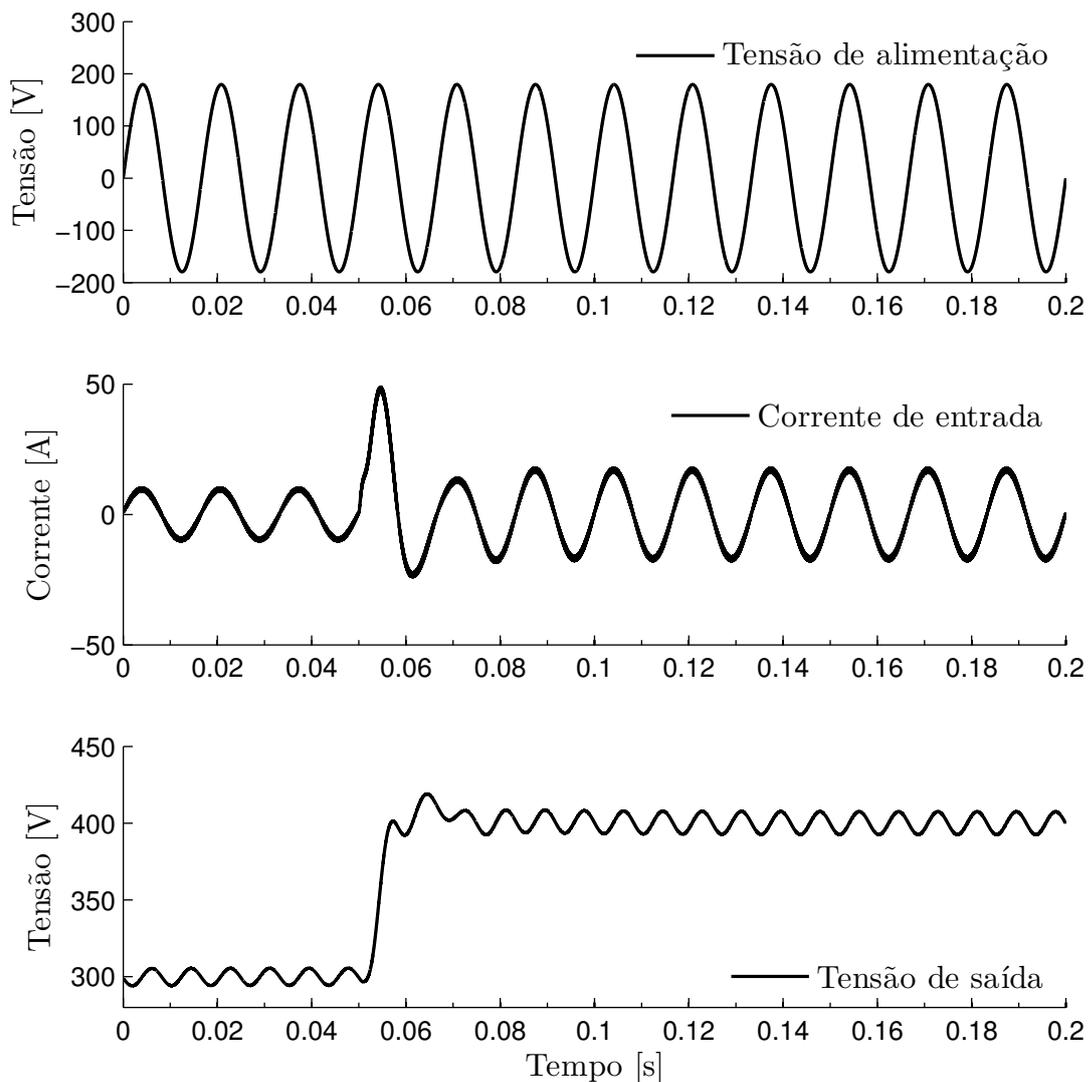


Figura 4.16 – Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada.

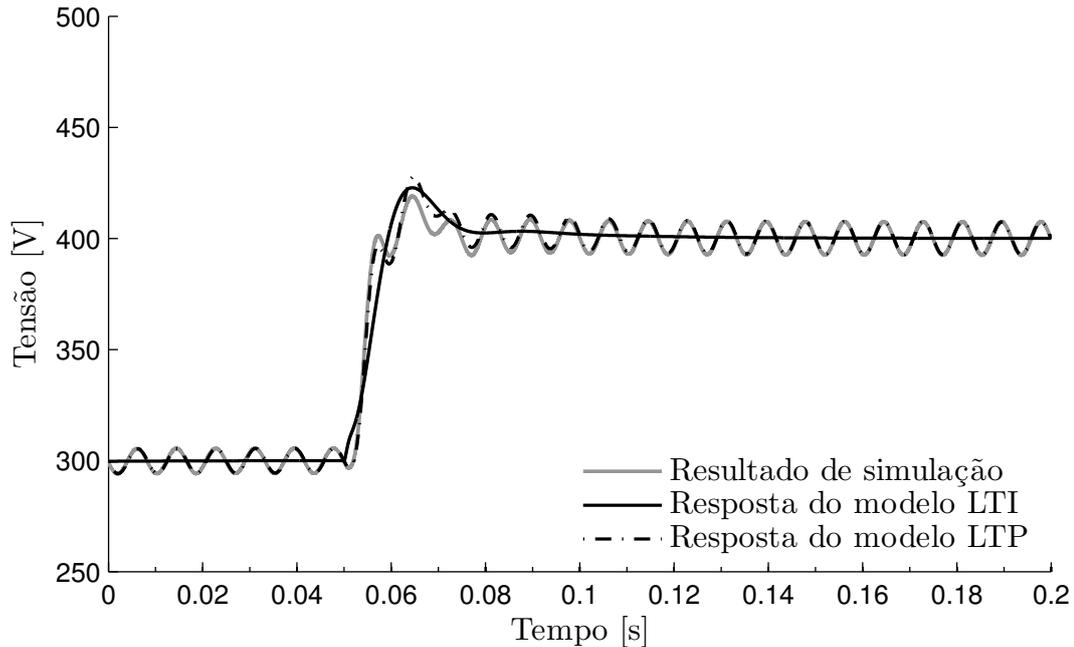


Figura 4.17 – Comparação entre os modelos e a simulação do retificador.

ideais em software PSIM. As formas de onda da tensão e corrente de entrada e da tensão de saída são mostradas na Figura 4.16 para o caso nominal de projeto do controlador de tensão (definido ganho da malha direta $\beta = 1$), considerando-se a resposta ao salto da referência de 300V para 400V.

A forma de onda da tensão de saída é composta por um valor constante somado a uma componente de 120Hz. A rápida resposta dinâmica do sistema pode ser observada na transição da referência de tensão ($t = 0,05s$), onde o tempo para o sistema atingir as condições de regime permanente é inferior à três ciclos de rede (60Hz). Neste sistema, mesmo com a elevada banda passante do controlador, a ondulação da tensão de saída não afeta a correção do fator de potência da entrada em regime permanente.

A Figura 4.17 apresenta as formas de onda da tensão de saída para o sistema retificador simulado, para o modelo LTP e para o modelo médio LTI em malha fechada empregando-se o projeto nominal do controlador de tensão.

Como pode ser observado, o modelo LTP contempla as dinâmicas variantes da tensão de saída e tem comportamento muito semelhante à planta simulada, quando em regime permanente. Por outro lado, o comportamento de saída do modelo médio LTI apresenta apenas a dinâmica média.

Para demonstrar que a utilização do modelo LTP é importante para a análise da estabilidade desses sistemas, a simulação do retificador é realizada para dois pontos próximos ao limite de estabilidade do sistema.

Considere inicialmente $\beta = 2,67$. De acordo com a análise HTF desenvolvida anteriormente, este sistema é estável, como pode ser observado na Figura 4.18. Neste caso, o sistema em malha fechada apresenta desempenho insatisfatório, no entanto é estável

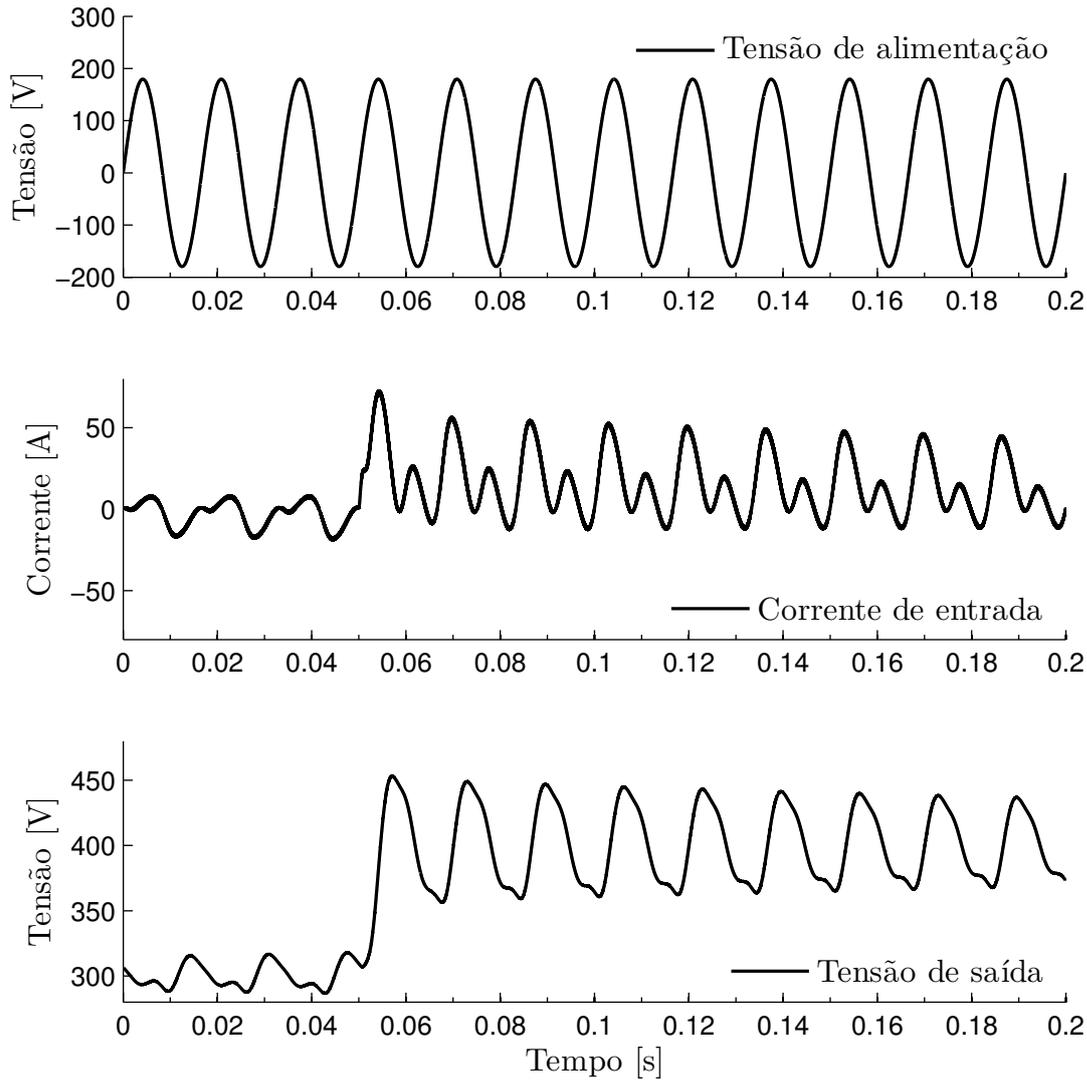


Figura 4.18 – Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada para $\beta = 2,67$.

para as condições de operação. A correção do fator de potência da entrada não é obtida e grandes oscilações são observadas na forma de onda da corrente de entrada e da tensão de saída.

A comparação entre as respostas dos modelos e da simulação do retificador é ilustrada na Figura 4.19 para $\beta = 2,67$. Observa-se que a resposta transitória do sistema apresenta comportamento oscilatório, o qual não está presente no modelo LTI.

Pode-se observar uma estreita correlação entre a resposta de simulação do retificador e a resposta do modelo LTP. A pequena diferença entre estas respostas é resultado da linearização do modelo LTP em torno do ponto de operação e, principalmente, do pequeno erro de ganho existente na malha de corrente, quando é considerado $i_L(t) = i_L^*(t)$.

Como o módulo do ganho de regime permanente da malha de corrente em 60Hz é sempre menor que um, devido ao sistema não apresentar ganho infinito em malha aberta, então a planta é sempre mais conservativa que o modelo LTP equivalente. Dessa forma,

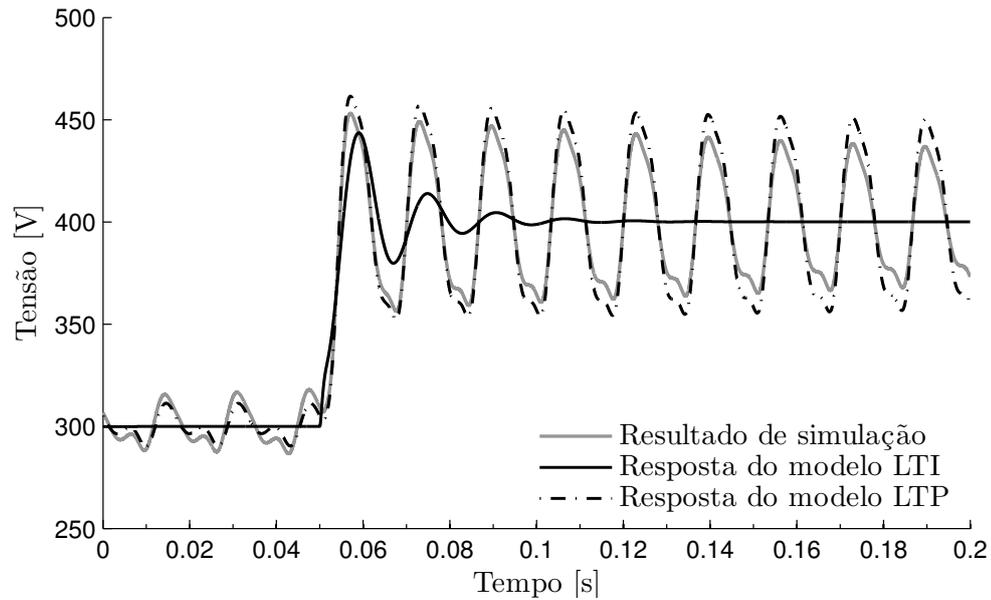


Figura 4.19 – Comparação entre os modelos e a simulação do retificador para $\beta = 2,67$.

o ponto limite de instabilidade da simulação tende a ser um pouco diferente devido à dinâmica não considerada da malha de corrente.

Considere, então, a simulação do retificador para $\beta = 2,88$. As formas de onda da tensão de saída e da corrente de entrada são mostradas na Figura 4.20, onde pode ser observado o comportamento instável do sistema em malha fechada, confirmando os resultados obtidos com o emprego da abordagem HTF.

A comparação entre os modelos e a simulação do retificador se encontra na Figura 4.21, onde pode ser observado que o modelo médio LTI permanece estável e com boa resposta dinâmica.

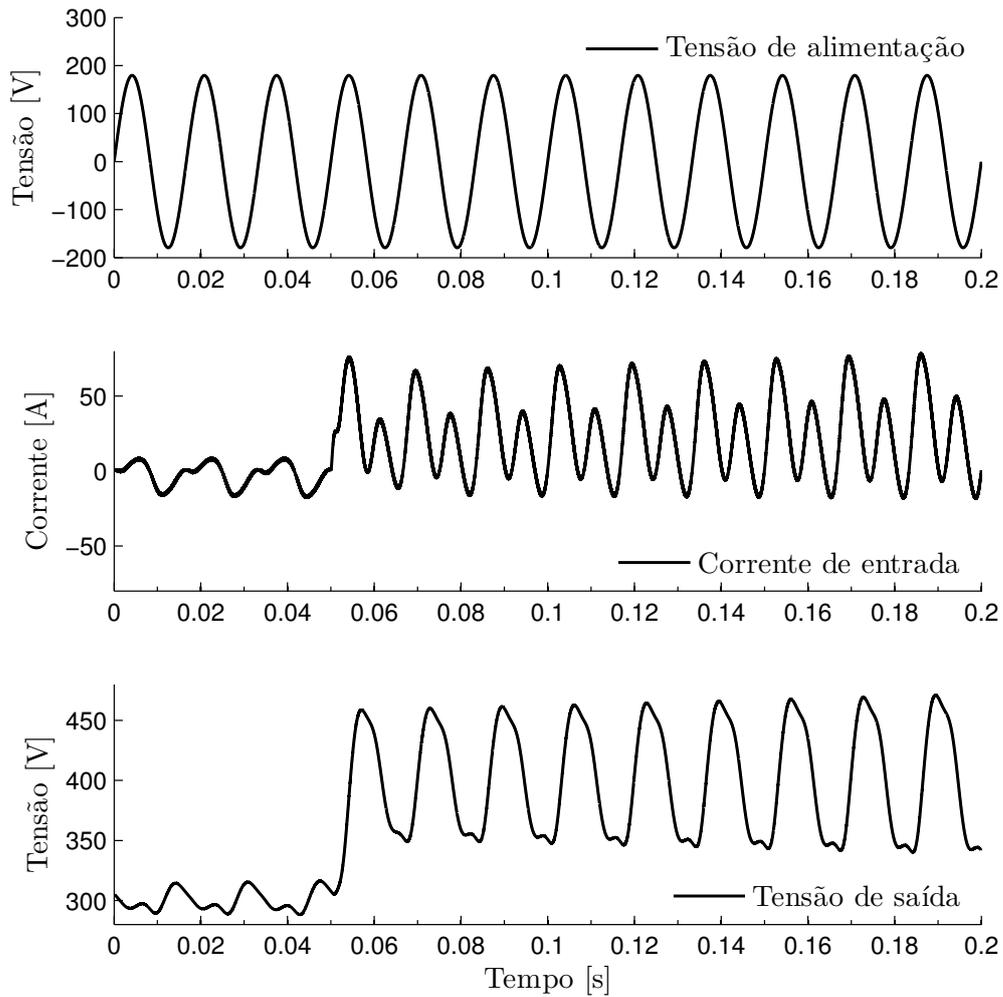


Figura 4.20 – Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada para $\beta = 2,88$.

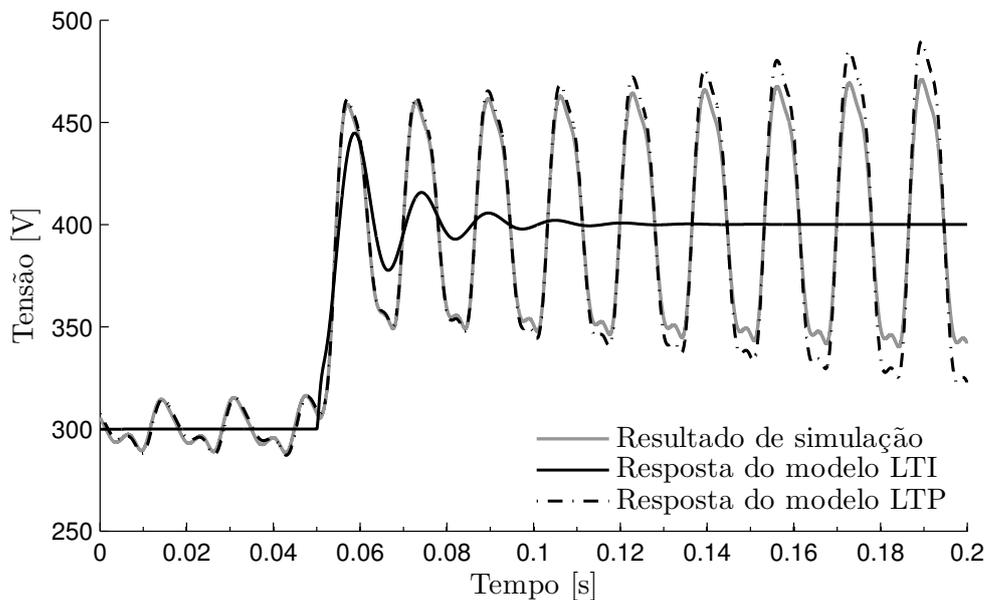


Figura 4.21 – Comparação entre os modelos e a simulação do retificador para $\beta = 2,88$.

4.2 Retificador em meia ponte

Nesta seção é apresentada a análise da estabilidade empregando-se a abordagem HTF para o retificador monofásico em meia ponte mostrado na Figura 4.22. Os detalhes da modelagem deste retificador se encontram na Seção 2.2 do Capítulo 2. Neste processo de análise, são desconsideradas as não idealidades do sistema, onde não são incluídos no modelo os parasitas do sistema. Da mesma forma, a tensão de entrada $v_i(t)$ é considerada puramente senoidal e sem flutuações. As especificações e parâmetros do retificador são mostrados na Tabela 4.2.

Como o objetivo deste trabalho é apresentar uma metodologia alternativa para análise da estabilidade desses retificadores, sem o objetivo de propor contribuições ao sistema de controle, foram consideradas apenas as situações com cargas equilibradas. Esta configuração é escolhida, pois este é o único caso em que a representação do modelo médio LTI por funções de transferência é equivalente, sem aproximações, ao modelo médio LTI com múltiplas entradas e saídas. Dessa forma, justifica-se o emprego das funções de transferência LTI para a comparação com os resultados obtidos na análise sugerida.

O projeto dos controladores utilizados nesta análise são realizados empregando-se técnicas LTI convencionais baseadas na resposta em frequência do sistema em malha

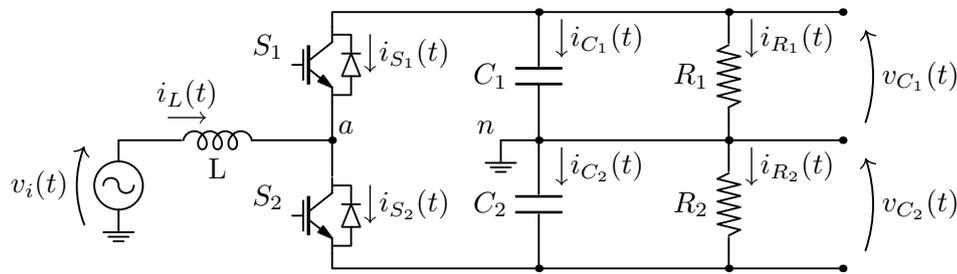


Figura 4.22 – Circuito elétrico do retificador monofásico em meia ponte.

Tabela 4.2 – Especificações do retificador monofásico em meia ponte.

Parâmetro	Valor
Tensão eficaz de entrada	$V_{i_{RMS}} = 127V$
Frequência nominal de entrada	$\omega_1 = 2\pi 60\text{rad/s}$
Referência de tensão de saída	$v_t^* = 420V$
Potência média de saída	$P_o = 1,5kW$
Indutância de entrada	$L = 560\mu H$
Capacitâncias de saída	$C = C_1 = C_2 = 1360\mu F$
Resistências de carga	$R = R_1 = R_2 = 58,8\Omega$
Ganho de realimentação de corrente	$h_i = 1$
Ganho de realimentação de tensão total	$h_t = 1$
Ganho de realimentação de tensão diferencial	$h_d = 1$
Frequência de comutação dos semicondutores	$T_s = 46875\text{Hz}$

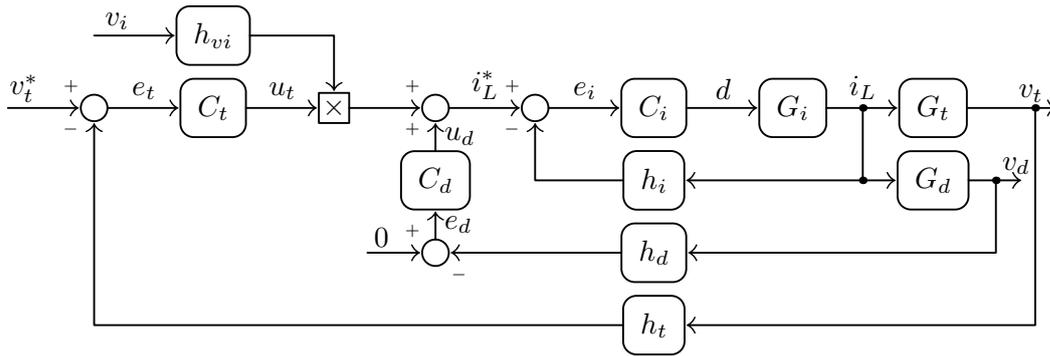


Figura 4.23 – Sistema de controle empregado ao retificador monofásico em meia ponte

aberta. O projeto da malha interna de corrente é realizado considerando-se banda passante dez vezes maior que às das malhas externas de controle das tensões de saída. Dessa forma, a dinâmica da malha interna pode ser aproximada por um ganho na análise das malhas de tensão.

O sistema de controle empregado ao retificador monofásico em meia ponte é mostrado na Figura 4.23, onde entende-se que o mesmo é projetado para a correção do fator de potência da entrada. Os modelos médios LTI do retificador são representados pelos blocos $G_i(s)$, $G_t(s)$ e $G_d(s)$, correspondendo às dinâmicas da corrente de entrada, da tensão total da saída e do equilíbrio das tensões de saída, respectivamente. Os ganhos de realimentação são representados por h_i , h_t e h_d para as medidas de corrente, tensão total e tensão diferencial, respectivamente. O ganho de medida da tensão de entrada é representado por h_{vi} . Os blocos que representam os controladores das malhas de corrente de entrada, tensão total e tensão diferencial são dados por $C_i(s)$, $C_t(s)$ e $C_d(s)$, respectivamente.

4.2.1 Projeto do controlador da malha interna de compensação da corrente

O modelo LTI que descreve o comportamento da corrente de entrada em função da razão cíclica para o retificador em meia ponte é apresentado no Capítulo 2, sendo definido por:

$$G_i(s) = \frac{I_L(s)}{D(s)} = -\frac{v_t^*}{sL} \quad (4.68)$$

Substituindo-se estas equações pelos parâmetros do retificador mostrados na Tabela 4.2, a dinâmica da corrente de entrada é determinada por:

$$G_i(s) = -\frac{(420)}{560(10^{-6})} \frac{1}{s} = -\frac{750(10^3)}{s} \quad (4.69)$$

O valor negativo em (4.69) é resultado da definição do sentido da corrente na modelagem matemática da planta.

Devido às limitações dos modelos LTI com relação à representação do comportamento

dinâmico do retificador, o projeto da malha de controle da corrente de entrada deve garantir as hipóteses de operação estabelecidas para a simplificação do mesmo. Dessa maneira, citam-se as principais características do compensador de corrente para operação em malha fechada:

- Rejeitar distúrbio cc da corrente, resultado da simplificação na linearização do modelo. Esta componente cc pode ser caracterizada por uma condição inicial no indutor ou excitada por variações na tensão de barramento ou por transitórios de carga.
- Rejeitar distúrbios com frequência ω_1 , resultado da simplificação na representação do modelo por funções de transferência. Esta parcela corresponde à excitação da corrente de entrada devido à tensão de alimentação.
- Apresentar pequeno erro de rastreamento da referência da corrente de entrada. Este valor é fornecido pelas malhas externas de controle da tensão, sendo constituído por componentes de frequência zero e ω_1 .
- Apresentar desacoplamento dinâmica para com a malha externa de controle da tensão de saída.

O projeto do controlador foi realizado empregando-se o método da resposta em frequência de malha aberta $C_i(s)G_i(s)$ utilizando o diagrama de Bode. A resposta em frequência do sistema em malha aberta é mostrado na Figura 4.24. A função de transferência do controlador de corrente projetado é dada por:

$$C_i(s) = -\frac{3600(s + 2\pi(10)^3)}{s(s + 2\pi 15(10)^3)} \quad (4.70)$$

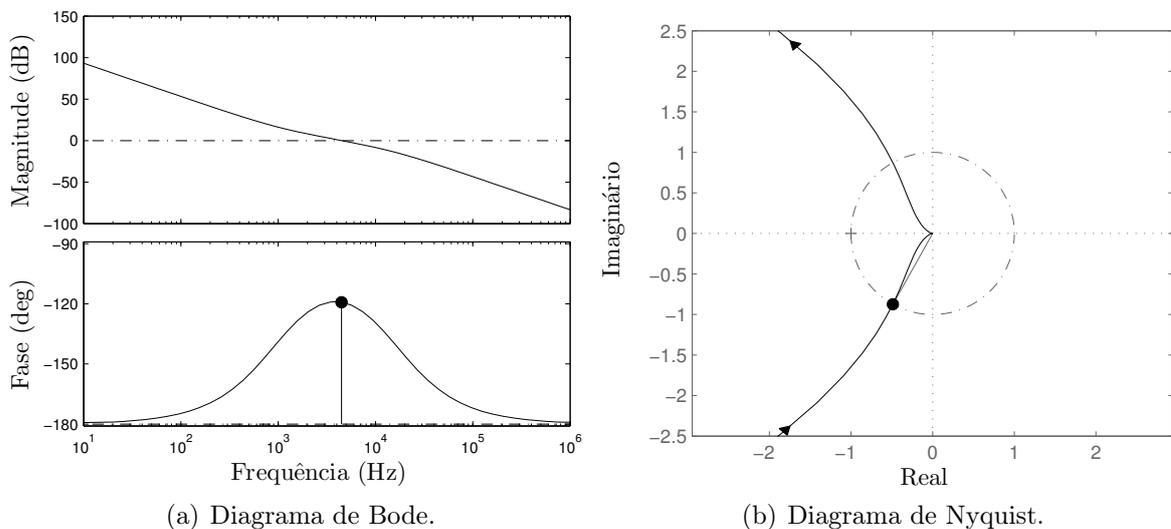


Figura 4.24 – Resposta em frequência de malha aberta do sistema de controle da tensão de saída.

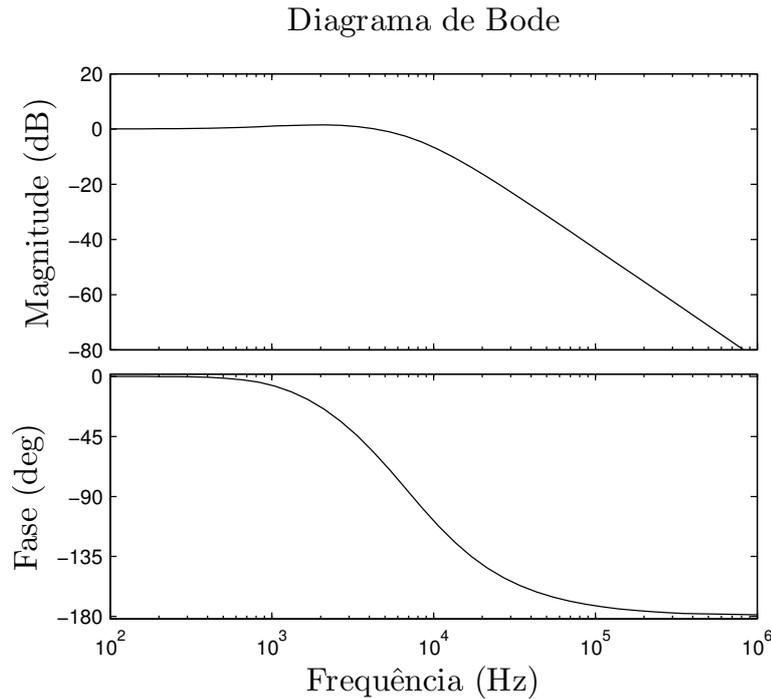


Figura 4.25 – Resposta em frequência do sistema de controle da corrente em malha fechada.

cujo sinal negativo corresponde aos 180° de compensação da fase da planta.

O emprego deste controlador resulta em margem de fase $MF = 61^\circ$, margem de ganho $MG = \infty$ e frequência de cruzamento $\omega_c = 28(10)^3 \text{ rad/s}$ ou $f_c = 4,47 \text{ kHz}$. O comportamento da corrente de entrada em malha fechada é mostrado pela resposta em frequência na Figura 4.25, onde existem desvios muito pequenos na fase e no ganho para a região de frequências de operação do sistema.

4.2.2 Projeto dos controladores das malhas externas de compensação da tensão

Com o sistema em meia ponte equilibrado $R = R_1 = R_2$, a função de transferência do sistema em malha aberta pode ser empregada no projeto dos controladores de tensão diferencial e total de saída. A representação dos modelos médios LTI por função de transferência é mostrada no Capítulo 2, a qual possibilita o emprego da técnica de projeto pela resposta em frequência.

Para a malha da tensão diferencial, a função de transferência que relaciona a variável de saída $v_d(t)$ com a ação de controle $u_d(t)$ é dada por:

$$G_d(s) = \frac{V_d(s)}{U_d(s)} = \frac{\frac{1}{h_i C}}{s + \frac{1}{RC}}. \quad (4.71)$$

Substituindo-se os parâmetros do retificador dados na Tabela 4.2 em (4.71), obtém-se o

seguinte modelo dinâmico da planta no domínio da frequência:

$$G_d(s) = \frac{735,3}{s + 12,51} . \quad (4.72)$$

Para a malha da tensão total, a função de transferência que relaciona a variável de saída $v_t(t)$ com a ação de controle $u_t(t)$ é dada por:

$$G_t(s) = \frac{V_t(s)}{U_t(s)} = \frac{\frac{k_{vi}D}{h_i C}}{s + \frac{1}{RC}} . \quad (4.73)$$

No entanto, definindo-se como ganho do sensor de medida da tensão de alimentação na forma:

$$h_{vi} = \frac{1}{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}} , \quad (4.74)$$

o resultado é o seguinte ganho de normalização da referência da corrente de entrada:

$$k_{vi} = h_{vi} V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} = 1 . \quad (4.75)$$

Conseqüentemente, as relações entre as ações de controle das malhas diferencial e total com a forma de onda da corrente de entrada é dada por:

$$\langle i_L(t) \rangle = i_L^*(t) = u_d(t) + u_t(t) \cos(\omega_1 t) , \quad (4.76)$$

onde se pode observar que o controlador da malha de tensão total $u_t(t)$ atua sobre o valor de pico da corrente de entrada, enquanto o controlador da malha de tensão diferencial $u_d(t)$ atua sobre o valor médio da corrente de entrada.

A constante relativa à forma de onda da razão cíclica D , resultante da linearização em torno do ponto de operação, é dada em termos dos parâmetros do retificador:

$$D = \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{v_t^*} = \frac{127 \sqrt{2}}{420} = 0,4276 \quad (4.77)$$

Substituindo-se k_{vi} , D e os demais parâmetros do retificador, apresentados na Tabela 4.2, na função de transferência (4.73), resulta:

$$G_t(s) = \frac{314,4}{s + 12,51} \quad (4.78)$$

que representa o comportamento dinâmico da tensão de saída no domínio da frequência.

A estratégia de controle empregada utiliza filtros rejeita-banda sintonizados nas frequências de oscilação permanente da saída, possibilitando aumento da banda passante da tensão de saída sem comprometer a correção do fator de potência da entrada. Dessa maneira, o controlador de tensão da malha diferencial é definido na seguinte forma:

$$C_d(s) = N_{60}(s) C_{fd}(s) , \quad (4.79)$$

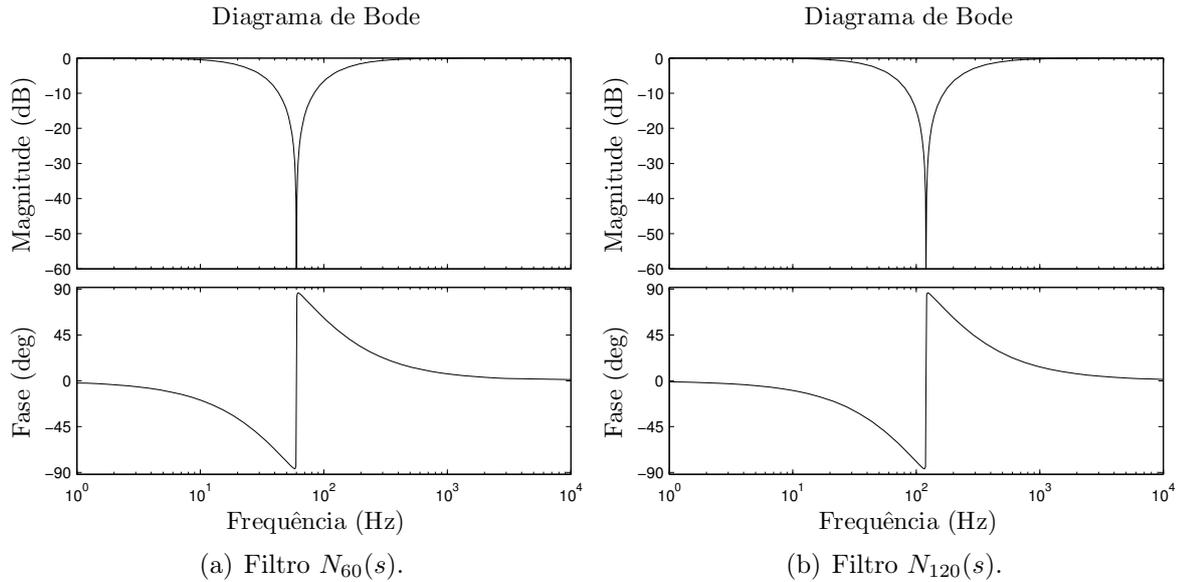


Figura 4.26 – Resposta em frequência dos filtros rejeita-banda do controlador em malha aberta.

e o controlador da malha total:

$$C_t(s) = N_{60}(s)N_{120}(s)C_{ft}(s) \quad (4.80)$$

onde $C_{fd}(s)$ $C_{ft}(s)$ são filtros de compensação de fase, enquanto $N_{60}(s)$ e $N_{120}(s)$ são filtros rejeita-banda sintonizados em $60Hz$ e $120Hz$, os quais são, respectivamente, definidos na forma:

$$N_{60}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_1s + \omega_1^2} \quad (4.81)$$

$$N_{120}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1(2\omega_1)s + (2\omega_1)^2}{s^2 + 2\zeta_2(2\omega_1)s + (2\omega_1)^2} \quad (4.82)$$

onde $\omega_1 = 2\pi 60$. Os coeficientes de amortecimento empregados neste projeto foram estabelecidos para obter-se uma atenuação de $-60dB$ nas frequências de interesse:

$$\zeta_1 = 10^{-3}, \quad \zeta_2 = 1 \quad (4.83)$$

A representação numérica destes filtros são dados por:

$$N_{60}(s) = \frac{s^2 + 0,754s + 142,1(10^3)}{(s + 377)(s + 377)} \quad (4.84)$$

$$N_{120}(s) = \frac{s^2 + 1,508s + 568,5(10^3)}{(s + 754)(s + 754)} \quad (4.85)$$

cujas respostas em frequência são mostradas na Figura 4.26(a)–(b), respectivamente. Estes filtros são empregados na malha de controle com o objetivo de reduzir a sensibilidade da compensação em malha fechada às excitações de saída em baixa frequência.

As funções de transferência em malha aberta do sistema de controle de tensão para as malhas de tensão diferencial e total, respectivamente, são dadas por:

$$T_d(s) = N_{60}(s)C_{fd}(s)G_d(s) \quad (4.86)$$

$$T_t(s) = N_{120}(s)N_{60}(s)C_{ft}(s)G_t(s) \quad (4.87)$$

Assim, os compensadores de fase $C_{fd}(s)$ e $C_{ft}(s)$ são determinados pelo método da resposta em frequência em malha aberta, empregando o diagrama de Bode, para a malha diferencial e total, respectivamente. A resposta em frequência da malha diferencial é mostrada na Figura 4.27, enquanto a resposta em frequência da malha total é mostrada na Figura 4.28.

O compensador de fase para a malha de tensão diferencial, que dá origem à resposta em frequência de malha aberta da Figura 4.27, é representada por função de transferência na forma:

$$C_{fd}(s) = \frac{0,1326(s + 2\pi(6))}{s} \quad (4.88)$$

cujo diagrama de ganho e fase resulta em margem de fase MF = 48°, margem de ganho MG = 38dB e frequência de cruzamento $\omega_c = 92\text{rad/s}$ ou $f_c = 15\text{Hz}$.

De forma similar, o compensador de fase para a malha de tensão total é obtida pela resposta em frequência (Figura 4.28), representado por função de transferência:

$$C_{ft}(s) = \frac{1,2732(s + 2\pi(2))(s + 2\pi(25))}{s(s + 2\pi(80))} \quad (4.89)$$

cujo diagrama de ganho e fase resulta em margem de fase MF = 61°, margem de ganho MG = 19dB e frequência de cruzamento $\omega_c = 120\text{rad/s}$ ou $f_c = 19\text{Hz}$.

Uma importante característica de operação destes sistemas em malha fechada é apre-

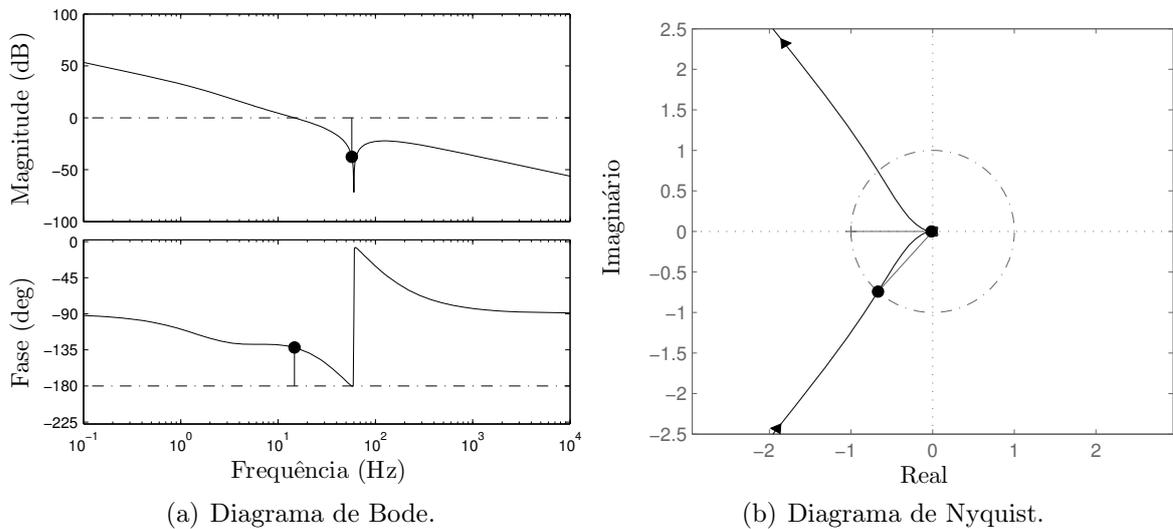


Figura 4.27 – Resposta em frequência do controlador de tensão diferencial em malha aberta – $T_d(s)$.

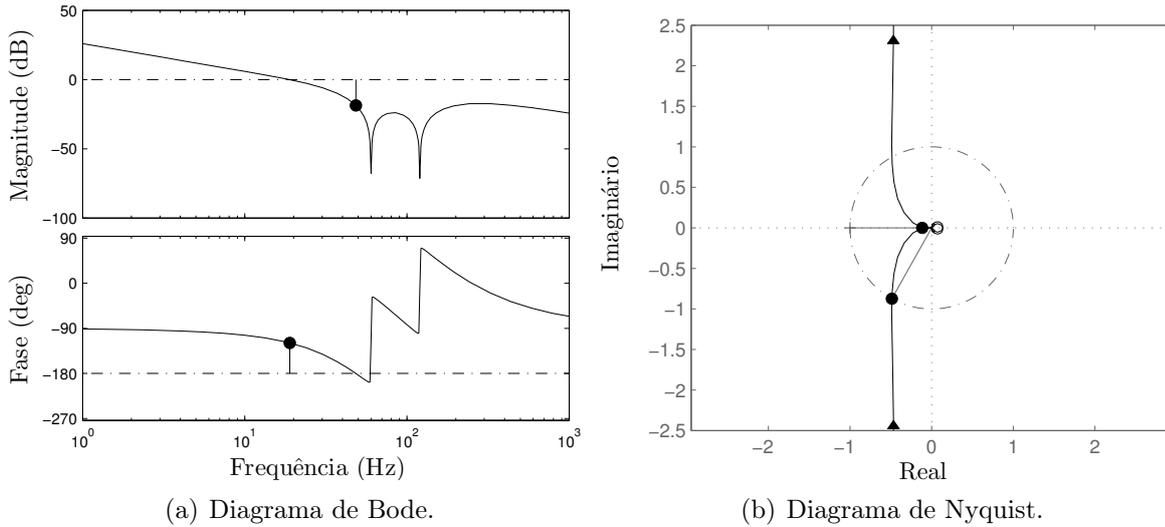


Figura 4.28 – Resposta em frequência do compensador de tensão total em malha aberta – $T_t(s)$.

sentar reduzido erro de rastreamento para as frequências que compõem o sinal da referência $\omega = 0$, garantindo rastreamento assintótico em regime permanente. Outro qualificativo é o ganho reduzido nas frequências de ondulação natural da saída. Por esta razão, é possível elevar a banda passante do controlador com a inclusão de filtros rejeita banda, sem comprometer a correção do fator de potência da entrada.

Na Figura 4.29(a)–(b) são mostradas as características das respostas em frequência dos compensadores de tensão diferencial e total, respectivamente. Na Figura 4.30(a) se encontra a resposta em frequência da compensação da tensão diferencial de saída em malha fechada, onde se pode observar rastreamento unitário para as baixas frequências e reduzido ganho nas frequências em torno de 120Hz. Na Figura 4.30(b) é mostrada a

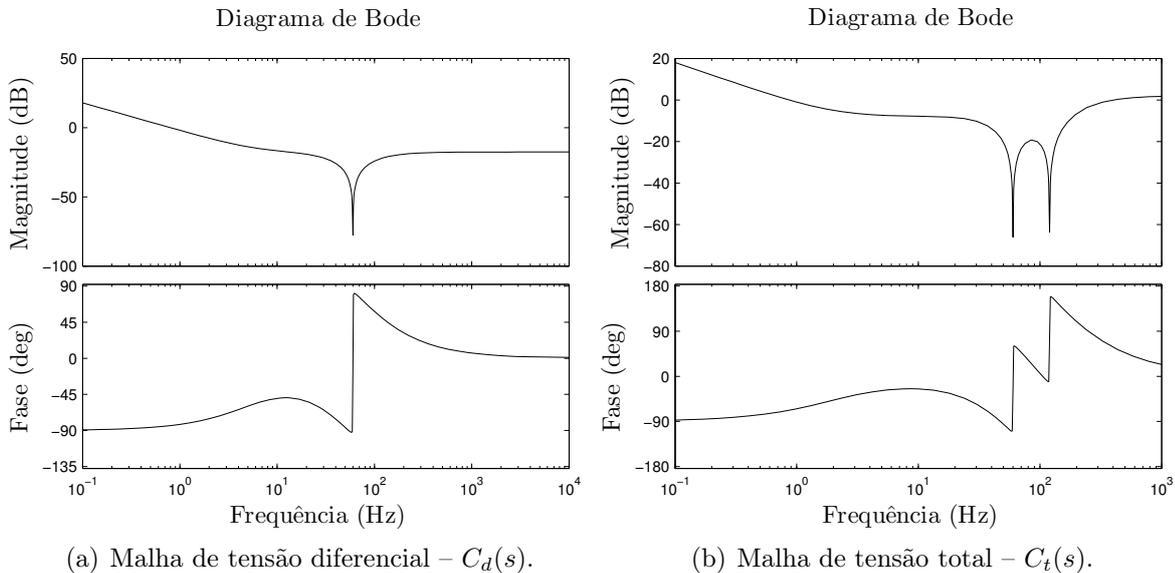


Figura 4.29 – Resposta em frequência dos compensadores de tensão em malha aberta.

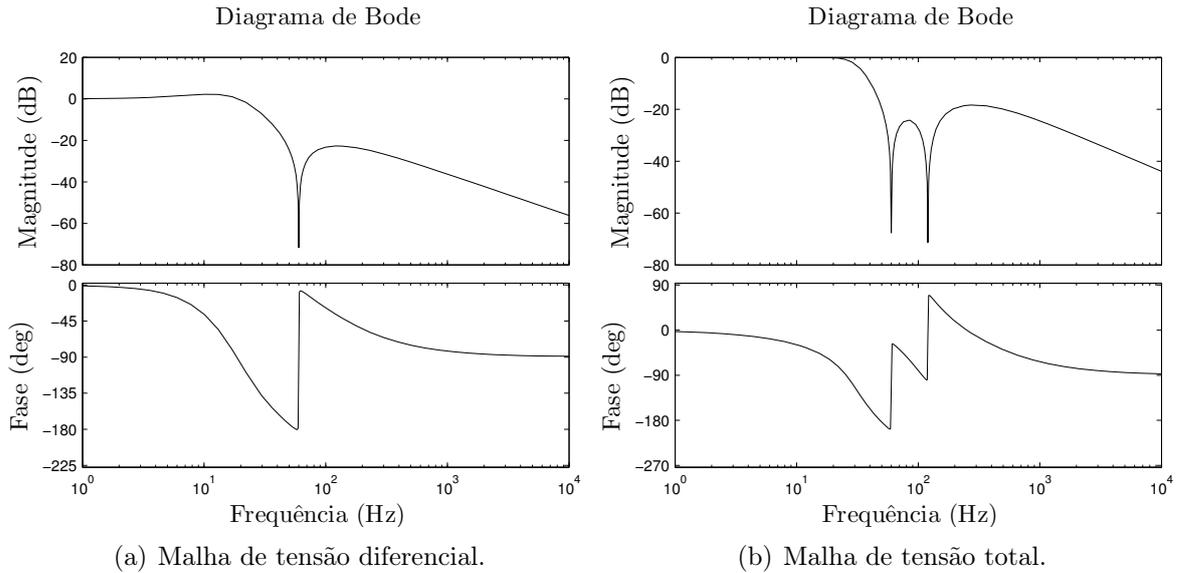


Figura 4.30 – Resposta em frequência dos compensadores de tensão em malha fechada.

resposta em frequência em malha fechada da malha de controle da tensão total de saída, onde se pode visualizar rastreamento unitário para as baixas frequências e reduzido ganho nas frequências em torno de 60Hz e 120Hz.

4.2.3 Análise da estabilidade das malhas de tensão empregando-se a abordagem LTP

A análise da estabilidade baseada em modelos LTP utiliza uma representação equivalente por HTF, possibilitando o emprego de técnicas de análise para sistemas LTI multivariáveis. Nesta seção é demonstrada a obtenção da função de transferência harmônica para o retificador monofásico em meia ponte e para o controlador projetado. Em seguida a HTF do sistema em malha aberta é utilizada para análise da estabilidade desse sistema em malha fechada. Estas técnicas são baseadas no critério generalizado de Nyquist.

4.2.3.1 Representação do modelo LTP por função de transferência harmônica

A representação do modelo LTP do retificador monofásico em meia ponte por função de transferência harmônica baseia-se na decomposição das dinâmicas variantes por séries exponenciais complexas de Fourier. Assim, considere a representação do retificador por espaço de estados:

$$\begin{aligned} \frac{d(x(t))}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \quad (4.90)$$

sendo os vetores de entrada, estado e saída definidos respectivamente por:

$$\begin{aligned} u(t)^T &= [u_d(t) \quad u_t(t)] \\ x(t)^T &= [\langle v_{C_1}(t) \rangle \quad \langle v_{C_2}(t) \rangle] \\ y(t)^T &= [\langle v_d(t) \rangle \quad \langle v_t(t) \rangle] \end{aligned} \quad (4.91)$$

onde as matrizes do sistema são representadas em função dos coeficientes exponenciais complexos da série de Fourier. Dessa forma, a matriz constante de estados é dada por:

$$A(t) = A_{(0)} = \begin{bmatrix} -12,51 & 0 \\ 0 & -12,51 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

A matriz periódica de entradas resulta em:

$$B(t) = B_{(-2)} e^{-j2\omega_1 t} + B_{(-1)} e^{-j\omega_1 t} + B_{(0)} + B_{(1)} e^{j\omega_1 t} + B_{(2)} e^{j2\omega_1 t} \quad (4.93)$$

cujos coeficientes são dados em função dos parâmetros da planta. Nesta o coeficiente constante é dado por:

$$b_{(0)} = \frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} \frac{1}{2C_1} & \frac{k_{vi}D}{2C_1} \\ \frac{-1}{2C_2} & \frac{k_{vi}D}{2C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 367,65 & 157,22 \\ -367,65 & 157,22 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

os coeficientes que compõem a primeira harmônica da dinâmica são dados por:

$$b_{(-1)} = b_{(1)} = \frac{1}{2h_i} \begin{bmatrix} \frac{D}{C_1} & \frac{k_{vi}}{2C_1} \\ \frac{D}{C_2} & \frac{k_{vi}(\frac{1}{2}-1)}{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 157,22 & 183,82 \\ 157,22 & -183,82 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

e os coeficientes da segunda harmônica são dados por:

$$b_{(-2)} = b_{(2)} = \frac{1}{4h_i} \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{vi}D}{C_1} \\ 0 & \frac{k_{vi}D}{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 78,61 \\ 0 & 78,61 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

A matriz constante de saída é, assim, obtida por:

$$C(t) = C_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

A partir da decomposição do modelo LTP em seus respectivos coeficientes da série de Fourier, a representação HTF é facilmente obtida. O sistema de equações por espaço de estados que contém as interações harmônicas do retificador é dado por:

$$\begin{aligned} s\mathcal{X}(s) &= (\mathcal{A} - \mathcal{N})\mathcal{X}(s) + \mathcal{B}\mathcal{U}(s) \\ \mathcal{Y}(s) &= \mathcal{C}\mathcal{X}(s) + \mathcal{D}\mathcal{U}(s) \end{aligned} \quad (4.98)$$

onde as matrizes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} são matrizes circulares³ e \mathcal{N} é a matriz de modulação em frequência. Este sistema tem comportamento LTI e contempla as dinâmicas variantes LTP.

As matrizes de (4.98) para o retificador monofásico em meia ponte são definidas em termos dos coeficientes de Fourier, onde a matriz de estados é definida na forma:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & A_{(0)} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & A_{(0)} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & A_{(0)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

para $A_{(0)}$ o coeficiente constante de $A(t)$, a matriz de entrada é:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & B_{(0)} & B_{(-1)} & B_{(-2)} & \cdots \\ \cdots & B_{(1)} & B_{(0)} & B_{(-1)} & \cdots \\ \cdots & B_{(2)} & B_{(1)} & B_{(0)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

para $B_{(n)}$ o n -ésimo coeficiente de $B(t)$, a matriz de saída é:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & C_{(0)} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & C_{(0)} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & C_{(0)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

para $C_{(0)}$ o coeficiente constante de $C(t)$, sendo que a matriz de realimentação direta:

$$\mathcal{D} = 0\mathcal{I} \quad (4.102)$$

é nula.

A matriz de modulação em frequência \mathcal{N} é definida diagonal em função da dimensão do sistema:

$$\mathcal{N} = \text{diag}(jn\omega_1 I) \quad (4.103)$$

³matrizes de Toeplitz. Ver referência (GRAY, 2006).

para todo $n \in \mathbb{Z}$, resultando na seguinte matriz de modulação:

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & -j\omega_1 I & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & j0\omega_1 I & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & j\omega_1 I & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

onde I é a matriz identidade de dimensão 2×2 .

Uma vez que o sistema harmônico é determinado por um conjunto de equações por espaço de estados no domínio da frequência (4.98), a função de transferência harmônica é obtida na forma:

$$\mathbf{H}_P(s) = \mathcal{C} [s\mathcal{I} - (\mathcal{A} - \mathcal{N})]^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D} \quad (4.105)$$

considerando-se a matriz \mathcal{D} nula.

Dessa forma, resolvendo-se (4.105) para os parâmetros da planta, obtém-se a função de transferência harmônica para o retificador:

$$\mathbf{H}_P(s) = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \frac{735,3}{s+12,51-j377} & 0 & 0 & \frac{367,6}{s+12,51-j377} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{314,4}{s+12,51-j377} & \frac{314,4}{s+12,51-j377} & 0 & 0 & \frac{157,2}{s+12,51-j377} & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{367,6}{s+12,51} & \frac{735,3}{s+12,51} & 0 & 0 & \frac{367,6}{s+12,51} & \cdots \\ \cdots & \frac{314,4}{s+12,51} & 0 & 0 & \frac{314,4}{s+12,51} & \frac{314,4}{s+12,51} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{367,6}{s+12,51+j377} & \frac{735,3}{s+12,51+j377} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{157,2}{s+12,51+j377} & \frac{314,4}{s+12,51+j377} & 0 & 0 & \frac{314,4}{s+12,51+j377} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

cujos comportamento é simétrico em blocos com relação à diagonal principal da HTF.

A representação do controlador por função de transferência harmônica pode ser obtida empregando-se a mesma técnica apresentada para sistemas LTP. No entanto, como o controlador é linear, invariante no tempo e apresenta comportamento entrada-saída desacoplado, a HTF do controlador pode ser obtida de forma simplificada. Assim, considere o controlador empregado no sistema de controle da tensão de saída do retificador:

$$C_v(s) = \begin{bmatrix} C_d(s) & 0 \\ 0 & C_t(s) \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

que relaciona os erros de tensões de saída $e_d(t)$ e $e_t(t)$ com as ações de controle $u_d(t)$ e $u_t(t)$, respectivamente.

Dessa forma, a HTF pode ser obtida diretamente da função de transferência de malha

aberta do controlador, incluindo os efeitos de modulação em frequência, cujo resultado é um sistema diagonal:

$$\mathbf{H}_C(s) = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & C_v(s - j\omega_1) & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & C_v(s) & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & C_v(s + j\omega_1) & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

substituindo-se $\omega_1 = 2\pi 60$ em (4.108), resulta na representação HTF do controlador:

$$\mathbf{H}_C(s) = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & C_v(s - j377) & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & C_v(s) & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & C_v(s + j377) & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

onde $C_v(s)$ é a função de transferência do controlador (4.107), cujos coeficientes numéricos são dados por:

$$C_d(s) = \frac{s^2 + 0,754s + 142,1(10^3)}{(s + 377)(s + 377)} \frac{0,1326(s + 2\pi(6))}{s} \quad (4.110)$$

para a malha de controle da tensão diferencial, e

$$C_t(s) = \frac{s^2 + 1,508s + 568,5(10^3)}{(s + 754)(s + 754)} \frac{s^2 + 0,754s + 142,1(10^3)}{(s + 377)(s + 377)} \frac{1,2732(s + 2\pi(2))(s + 2\pi(25))}{s(s + 2\pi(80))} \quad (4.111)$$

para a malha de controle da tensão total.

Assim, a função de transferência harmônica em malha aberta do sistema de controle da tensão de saída do retificador é dada por:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s) \quad (4.112)$$

cuja dinâmica é linear e invariante no tempo, possibilitando o emprego de técnicas LTI generalizadas para análise da estabilidade do sistema em malha fechada.

4.2.3.2 Análise da estabilidade em malha fechada

Uma vez obtida a representação por HTF do sistema retificador em malha aberta, as técnicas multivariáveis LTI podem ser empregadas para a análise da estabilidade de malha

fechada. Nesta análise, são empregadas representações HTF com dimensão limitada na terceira ordem harmônica. O mapeamento \mathcal{C}_S é limitado na margem direita em $\sigma_0 = 10^3 \text{rad/s}$.

Nesta seção são realizadas as análises da estabilidade do retificador monofásico em meia ponte para o método baseado no determinante de $[\mathcal{I} + \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)]$ e para o método baseado nos auto-lugares de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$, empregando-se a abordagem HTF para o sistema de controle projetado. Apresenta-se, também, a análise da estabilidade em que são utilizados modelos médios LTI, possibilitando comparações.

Os métodos para a análise da estabilidade em malha fechada empregando-se a representação HTF são apresentados no Capítulo 3 e empregados para o sistema retificador. O primeiro método utilizado, denominado método do determinante, é apresentado no Teorema 3.1, o qual consiste na análise da curva fechada gerada por:

$$\Gamma(s) = \det [\mathcal{I} + \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)] \tag{4.113}$$

ao longo do mapeamento do semiplano direito do plano complexo s na faixa fundamental \mathcal{C}_S . O contorno polar gerado por esse mapeamento é ilustrado na Figura 4.31.

Como a função de transferência em malha aberta não apresenta nenhum polo no semiplano direito do plano s , ou, de forma equivalente, não apresenta nenhum polo no interior do caminho de mapeamento, o sistema em malha fechada será, então, estável se, e somente se, o contorno $\Gamma(s)$ não circundar a origem. Dessa forma, observando-se a Figura 4.31, constata-se que o sistema é estável em malha fechada, pois o diagrama do determinante não envolve a origem.

O método de análise da estabilidade empregando-se o determinante é fácil de ser

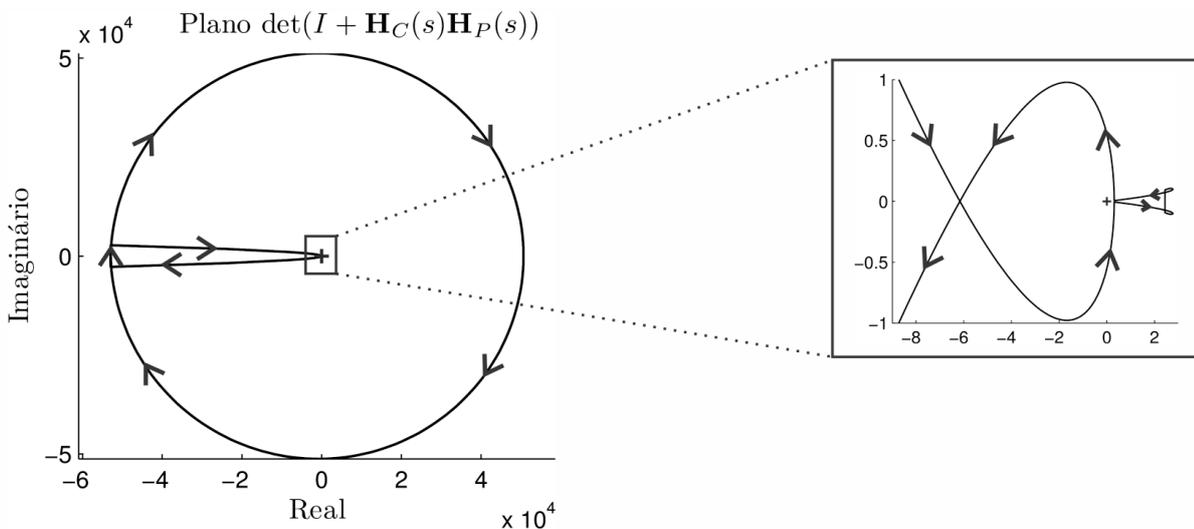


Figura 4.31 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade em malha fechada.

obtido e analisado, pois resulta em uma única curva de caminho fechado. No entanto, ele apenas determina a estabilidade e não fornece nenhum indicativo de desempenho ou margens de fase e ganho.

Outro possível método para a análise da estabilidade utilizando-se a abordagem HTF é baseado na análise dos auto-lugares de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$. Este método consiste na análise dos caminhos produzidos pelo deslocamento dos autovalores de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ ao longo do mapeamento \mathcal{C}_S do plano complexo s . Tal deslocamento, denominado auto-lugares, produz caminhos sempre fechados e em número menor ou igual à dimensão da matriz HTF empregada na análise, como mostrado por Desoer e Wang (1980). O conjunto dos auto-lugares de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ é mostrado na Figura 4.32 para o sistema em análise, onde $\lambda_2 - \lambda_7$ correspondem aos caminhos formados pelos autovalores menos significativos.

Como o sistema em malha aberta $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ não apresenta nenhum polo no semi-plano direito do plano complexo s , então, de acordo com o Teorema 3.2, o sistema será estável em malha fechada da entrada para a saída se, e somente se, o conjunto dos auto-lugares não envolver o ponto $(-1 + j0)$. Dessa forma, o sistema é estável pelo método dos auto-lugares.

A principal vantagem da utilização deste método para a análise da estabilidade é a possibilidade de se obter uma medida relativa de estabilidade. Assim, é possível determinar a margem de ganho do sistema em malha aberta para o modelo LTP da mesma forma como obtido para sistemas LTI. Desse modo, o ponto de cruzamento pelo eixo real da curva que mais se aproxima do ponto $(-1 + j0)$, considerando-se o pior caso, define a margem de ganho do sistema.

Considerando-se os caminhos produzidos pelos auto-lugares mostrados na Figura 4.32, o ponto de cruzamento pelo eixo real é dado por:

$$\alpha = (-0,5 + j0) \quad (4.114)$$

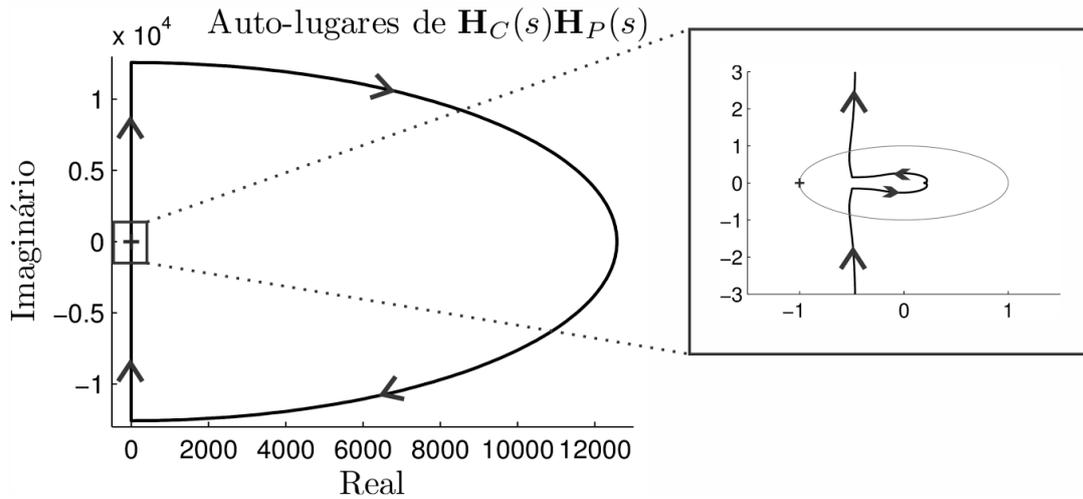
o que resulta na margem de ganho

$$\text{MG} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,5} = 2,0 \quad (4.115)$$

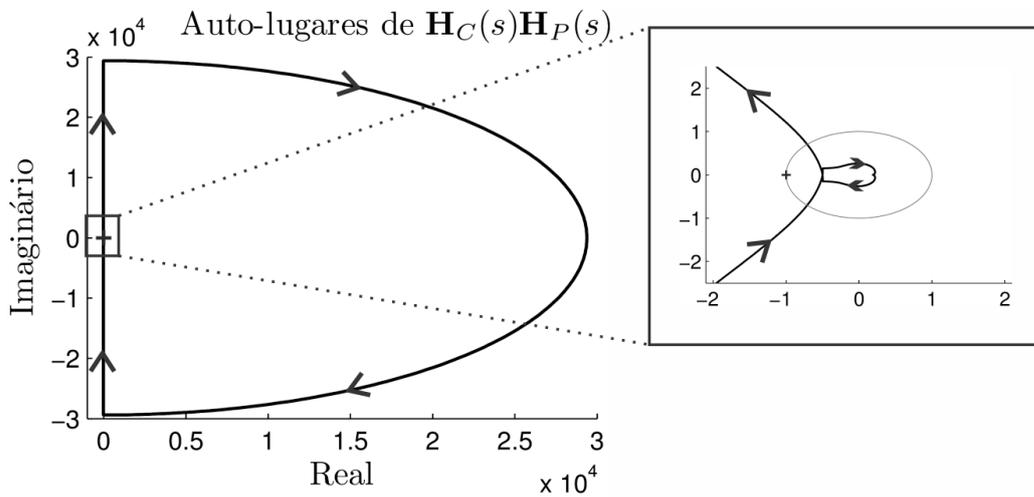
para o sistema em malha fechada. A representação da margem de ganho em decibéis é obtida na forma:

$$\text{MG}_{\text{dB}} = 20 \log(\text{MG}) = 20 \log(2,0) = 6,02\text{dB} \quad (4.116)$$

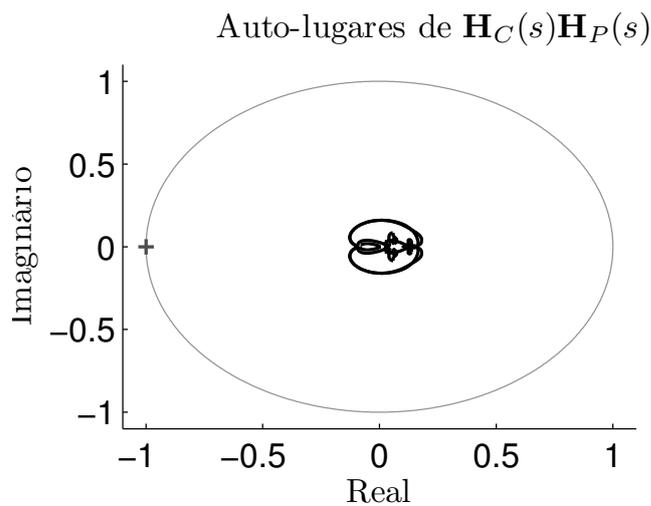
A análise da estabilidade empregando-se o modelo médio LTI se encontra na Figura 4.33 para as malhas diferencial e total, resultando em sistema estável em malha fechada. No caso da malha de tensão diferencial, resulta em margem de ganho $\text{MG}_{\text{dB}} = 37,6\text{dB}$, margem de fase $\text{MF} = 48^\circ$ e frequência de cruzamento do ganho $\omega_c = 92,5 \text{ rad/s}$ ou $f_c = 14,7\text{Hz}$, enquanto a malha de tensão total apresenta margem de ganho $\text{MG}_{\text{dB}} = 18,7\text{dB}$, margem de fase $\text{MF} = 61^\circ$ e frequência de cruzamento do ganho



(a) Auto-lugar correspondente a λ_1



(b) Auto-lugar correspondente a λ_2



(c) Auto-lugares correspondentes a $\lambda_2 - \lambda_7$

Figura 4.32 – Emprego do método dos auto-lugares para análise da estabilidade em malha fechada.

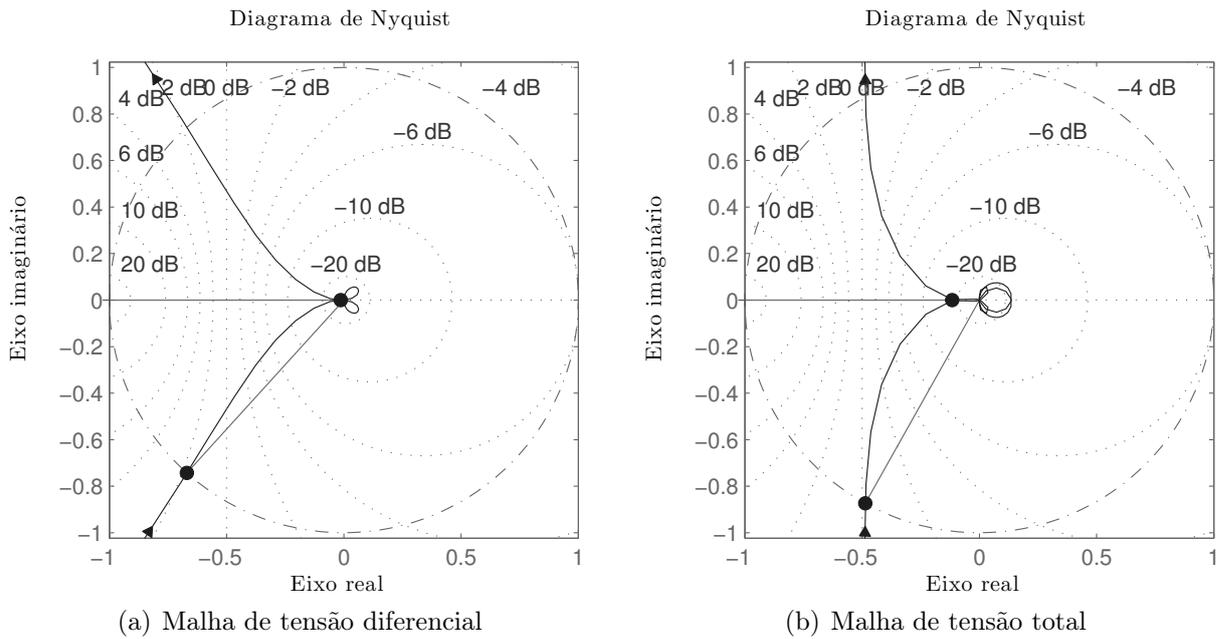


Figura 4.33 – Diagrama de Nyquist em malha aberta empregando-se o modelo médio LTI.

$\omega_c = 120 \text{ rad/s}$ ou $f_c = 19,1\text{Hz}$.

A margem de ganho obtida pela análise dos auto-lugares pode ser comparada com a obtida empregando-se o modelo médio LTI. A menor margem de ganho obtida na análise da Figura 4.33 é $MG_{dB} = 18,7\text{dB}$, ou em valor absoluto:

$$MG = 8,61 \tag{4.117}$$

o que representa uma margem de ganho de 4,3 vezes maior, quando comparada à análise LTP.

Com o propósito de avaliar o limite da estabilidade com base na margem de ganho do sistema, considere o emprego do controlador (4.10) incluindo um fator de ganho direto β , dado na forma:

$$\beta C_v(s) = \beta C_n(s) C_f(s) \tag{4.118}$$

onde $\beta = 2,0$ é o limite de estabilidade do sistema em malha fechada informado pelo método dos auto-lugares. Com isso, a função de transferência harmônica resultante é escrita também em função de β :

$$\beta \mathbf{H}(s) = \beta \mathbf{H}_C(s) \mathbf{H}_P(s) \tag{4.119}$$

A fim de avaliar a equivalência da margem de ganho com o limite da estabilidade do sistema em malha fechada, apresenta-se a análise da estabilidade para dois casos em torno do ganho crítico $\beta \pm 0,15$, onde $\beta = 1,85$ representa um caso estável e $\beta = 2,15$ representa um caso instável.

Considerando-se inicialmente o caso estável, para $\beta = 1,85$, e aplicando-se o método

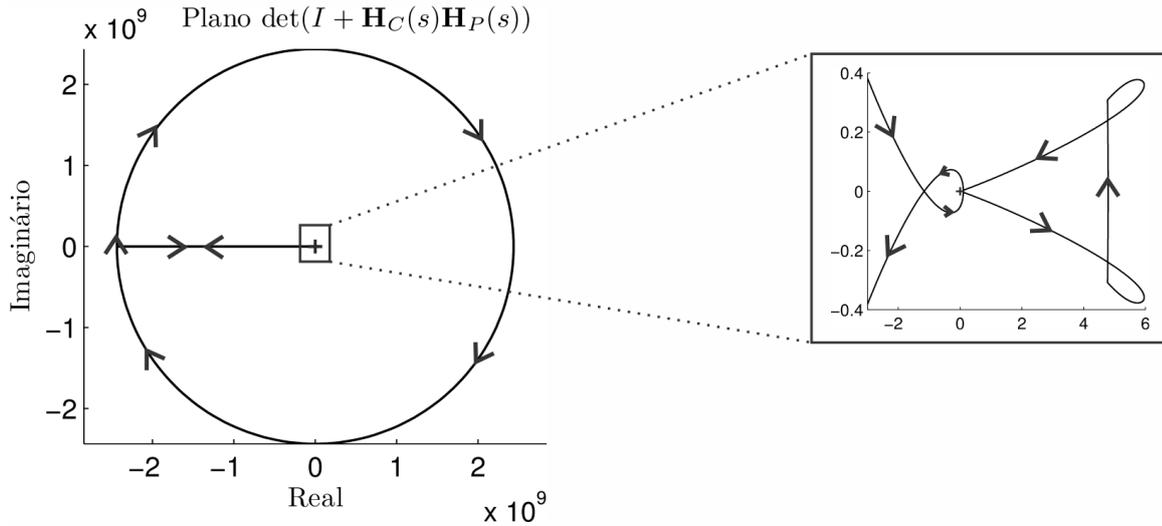


Figura 4.34 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 1,85$.

do determinante para a análise da estabilidade, onde é avaliado o deslocamento de

$$\Gamma(s) = \det [\mathcal{I} + \beta \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)] \quad (4.120)$$

para o contorno \mathcal{C}_S , então a curva fechada resultante do mapeamento é obtida na Figura 4.34. Como pode ser observado, a origem não é envolvida e, dessa forma, o sistema é estável em malha fechada.

De forma similar, com o emprego do método dos auto-lugares, o conjunto de curvas resultantes é mostrado na Figura 4.35. Nesta figura, o ponto $(-1 + j0)$ não é envolvido pelas curvas dos auto-lugares sendo que, dessa forma, o sistema é estável em malha fechada.

A determinação da margem de ganho é dada pela curva que mais se aproxima de $(-1 + j0)$, cuja margem de ganho resultante é muito próxima de um:

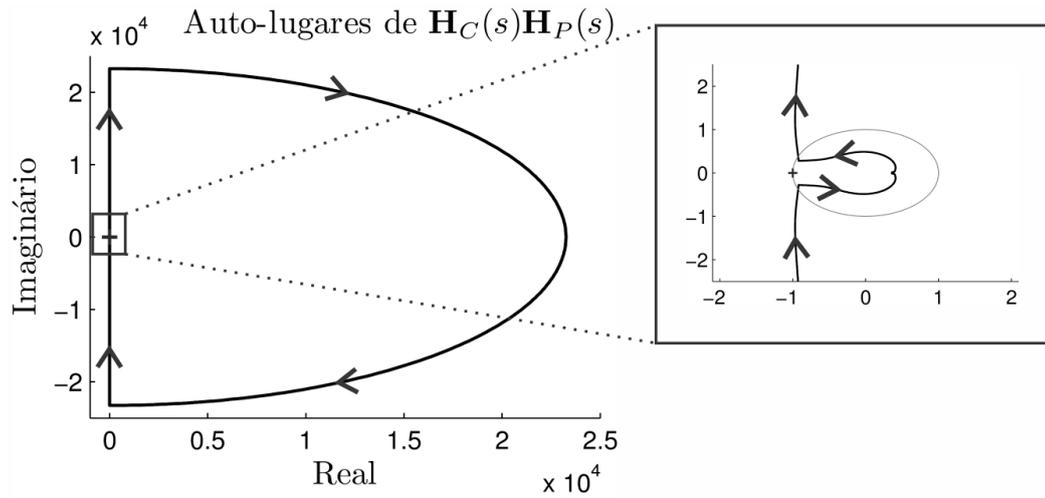
$$\alpha \approx -1 + j0 \quad (4.121)$$

resultando em margem de ganho

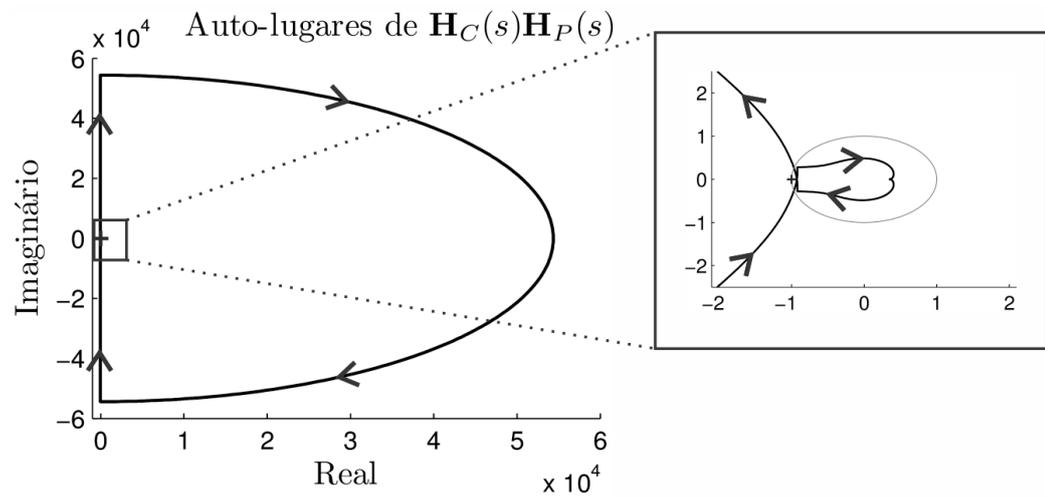
$$MG \approx 0\text{dB} \quad (4.122)$$

onde o sistema se encontra muito próximo à instabilidade.

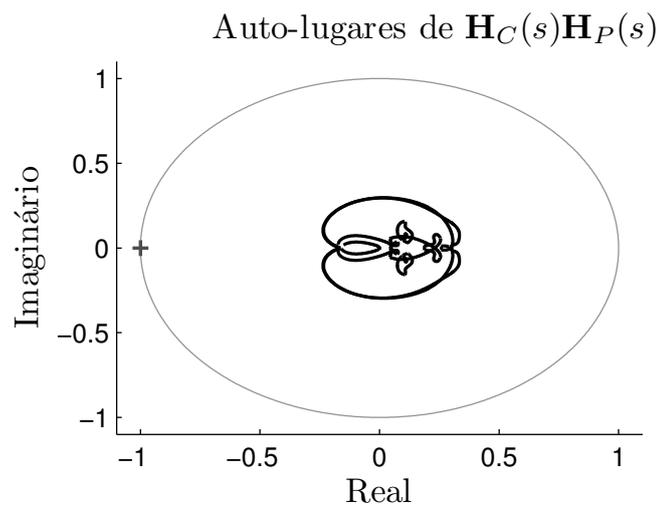
A análise da estabilidade empregando-se o modelo médio LTI para $\beta = 1,85$ é mostrada na Figura 4.36 para as malhas diferencial e total, resultando em sistema estável em malha fechada. Para o caso da malha de tensão diferencial, a análise da estabilidade resulta em margem de ganho $MG_{\text{dB}} = 32,3\text{dB}$, margem de fase $MF = 39,2^\circ$ e frequência de cruzamento do ganho $\omega_c = 141 \text{ rad/s}$ ou $f_c = 22,4\text{Hz}$, enquanto a malha de tensão total apresenta margem de ganho $MG_{\text{dB}} = 13,4\text{dB}$, margem de fase $MF = 40,3^\circ$ e frequência de cruzamento do ganho $\omega_c = 183 \text{ rad/s}$ ou $f_c = 29,1\text{Hz}$.



(a) Auto-lugar correspondente a λ_1



(b) Auto-lugar correspondente a λ_2



(c) Auto-lugares correspondentes a $\lambda_2 - \lambda_7$

Figura 4.35 – Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 1,85$.

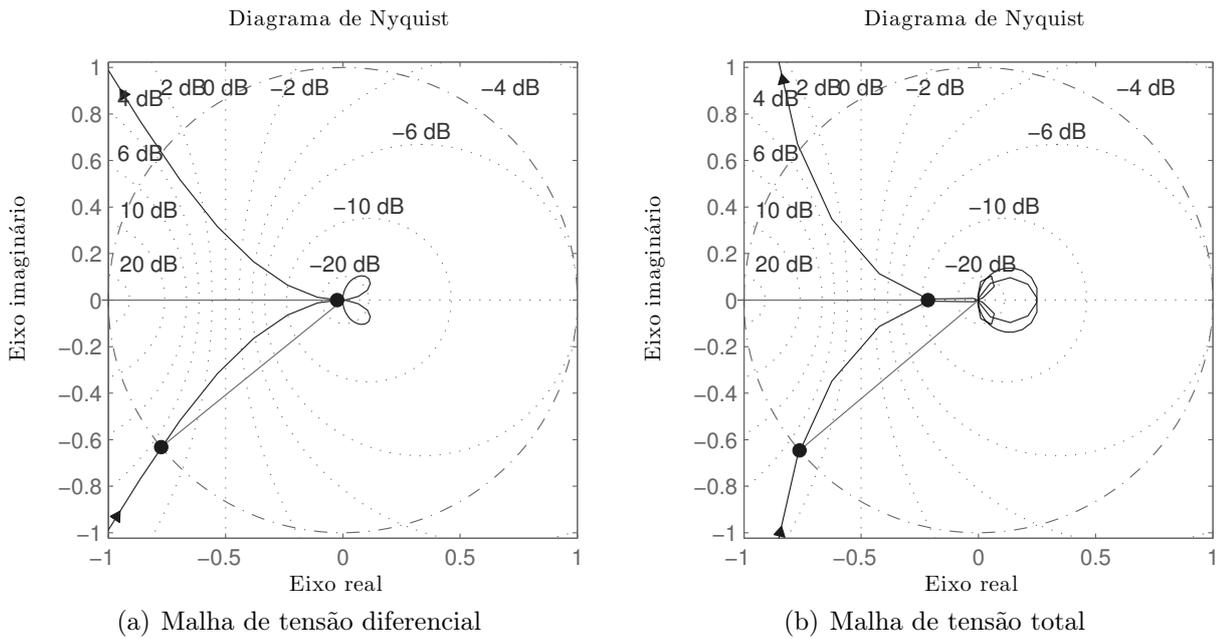


Figura 4.36 – Emprego do método médio LTI para análise da estabilidade para $\beta = 1,85$.

Da mesma forma, para analisar o caso instável, $\beta = 2,15$, o método do determinante pode ser aplicado para a análise da estabilidade em malha fechada, resultando na Figura 4.37. Como pode ser observado, agora a curva resultante envolve a origem duas vezes no sentido horário, cujo resultado é um sistema instável em malha fechada. Como visto, este método não fornece medida relativa de estabilidade.

O emprego do método dos auto-lugares para o caso $\beta = 2,15$ resulta no conjunto de curvas da Figura 4.38. Neste caso, o ponto $(-1 + j0)$ é envolvido duas vezes no sentido horário pelo autovalor λ_2 , enquanto os demais caminhos não influenciam na estabilidade

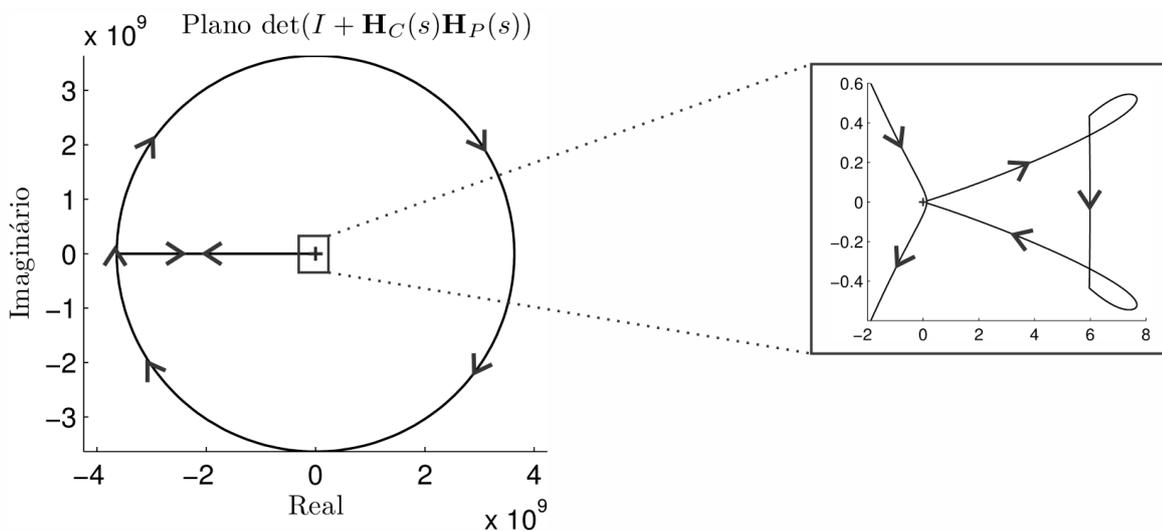
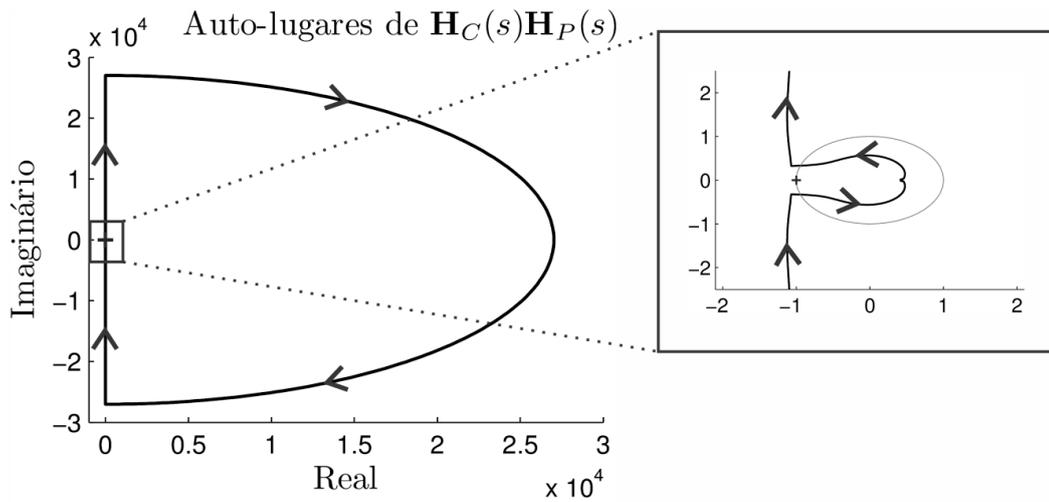
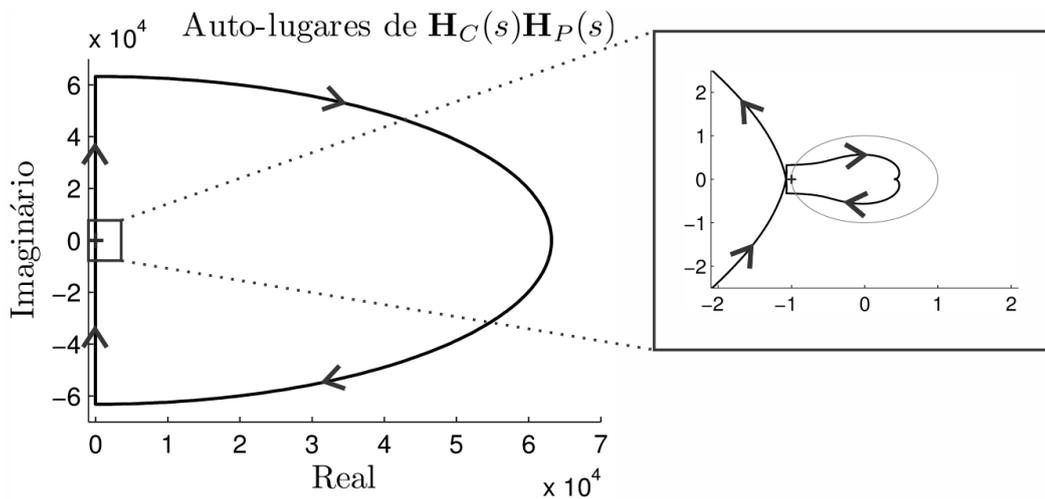


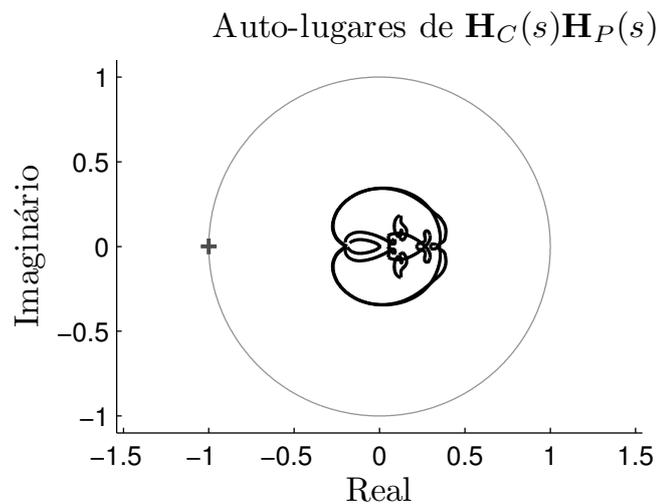
Figura 4.37 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 2,15$.



(a) Auto-lugar correspondente a λ_1



(b) Auto-lugar correspondente a λ_2



(c) Auto-lugares correspondentes a $\lambda_2 - \lambda_7$

Figura 4.38 – Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 2,15$.

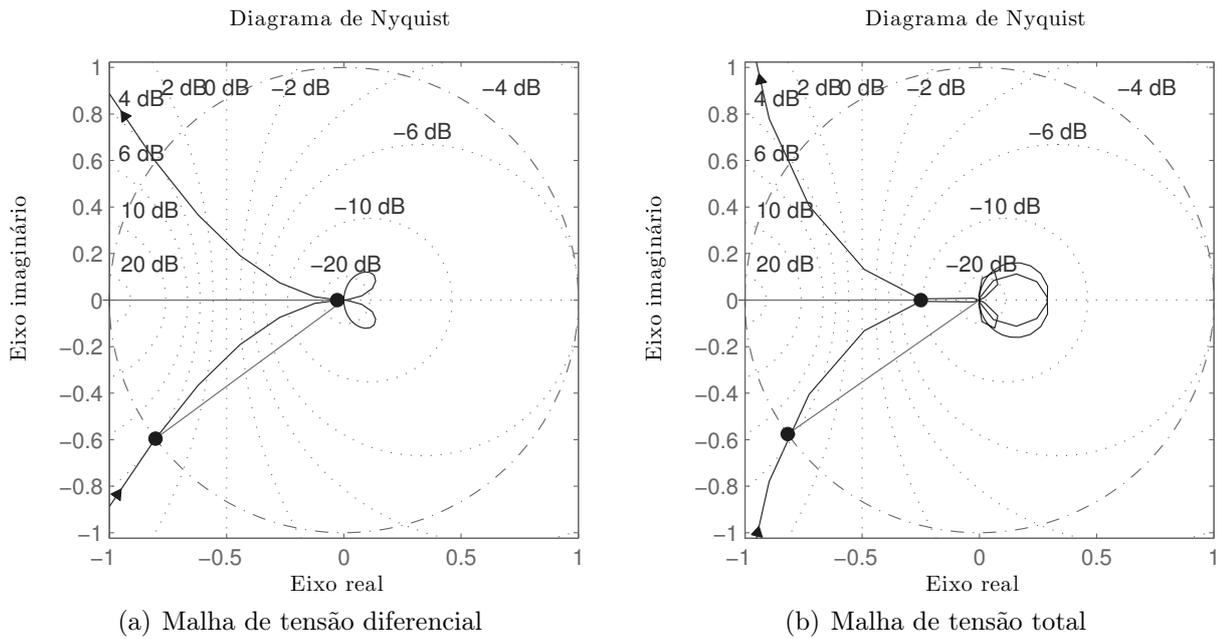


Figura 4.39 – Emprego do método médio LTI para análise da estabilidade para $\beta = 2,15$.

do sistema. Assim, de acordo com a análise, o sistema é instável em malha fechada.

A análise da estabilidade empregando-se o modelo médio LTI se encontra na Figura 4.39 para as malhas diferencial e total, resultando em sistema *estável* em malha fechada. Para o caso da malha de tensão diferencial, resulta em margem de ganho $MG_{dB} = 31dB$, margem de fase $MF = 36,5^\circ$ e frequência de cruzamento do ganho $\omega_c = 154 \text{ rad/s}$ ou $f_c = 24,5Hz$, enquanto a malha de tensão total apresenta margem de ganho $MG_{dB} = 12dB$, margem de fase $MF = 35,2^\circ$ e frequência de cruzamento do ganho $\omega_c = 198 \text{ rad/s}$ ou $f_c = 31,5Hz$.

4.2.4 Resultados de simulação para validação da metodologia

A comprovação dos resultados obtidos pela metodologia demonstrada nas seções anteriores é realizada por simulação. Nesta seção apresenta-se o comportamento da tensão de saída do retificador monofásico em meia ponte empregando-se o controlador projetado e com variação do ganho direto de controle β . As respostas dinâmicas dos modelos LTI e LTP são comparadas à resposta dinâmica obtida via simulação do retificador em software PSIM. Para o caso da simulação do retificador, a malha interna de controle da corrente de entrada utiliza o compensador projetado em (4.70), o qual apresenta boa resposta dinâmica, com o objetivo de não interferir consideravelmente na análise da malha de tensão.

A simulação do retificador pode ser vista na Figura 4.40 empregando o projeto nominal do controlador de tensão ($\beta = 1$). Nesta figura é mostrada a forma de onda da tensão

total de saída para um salto da referência de 400V para 420V, bem como o transitório correspondente à corrente de entrada, onde pode-se ver que a correção do fator de potência da entrada é preservada em regime permanente, mesmo com rápida dinâmica transitória do sistema em malha fechada.

A forma de onda da tensão de saída é composta por um valor constante somado a uma componente de 120Hz. A rápida resposta dinâmica do sistema pode ser observada na transição da referência de tensão ($t = 0,05s$), onde o tempo para o sistema atingir as condições de regime permanente é inferior a três ciclos de rede (60Hz).

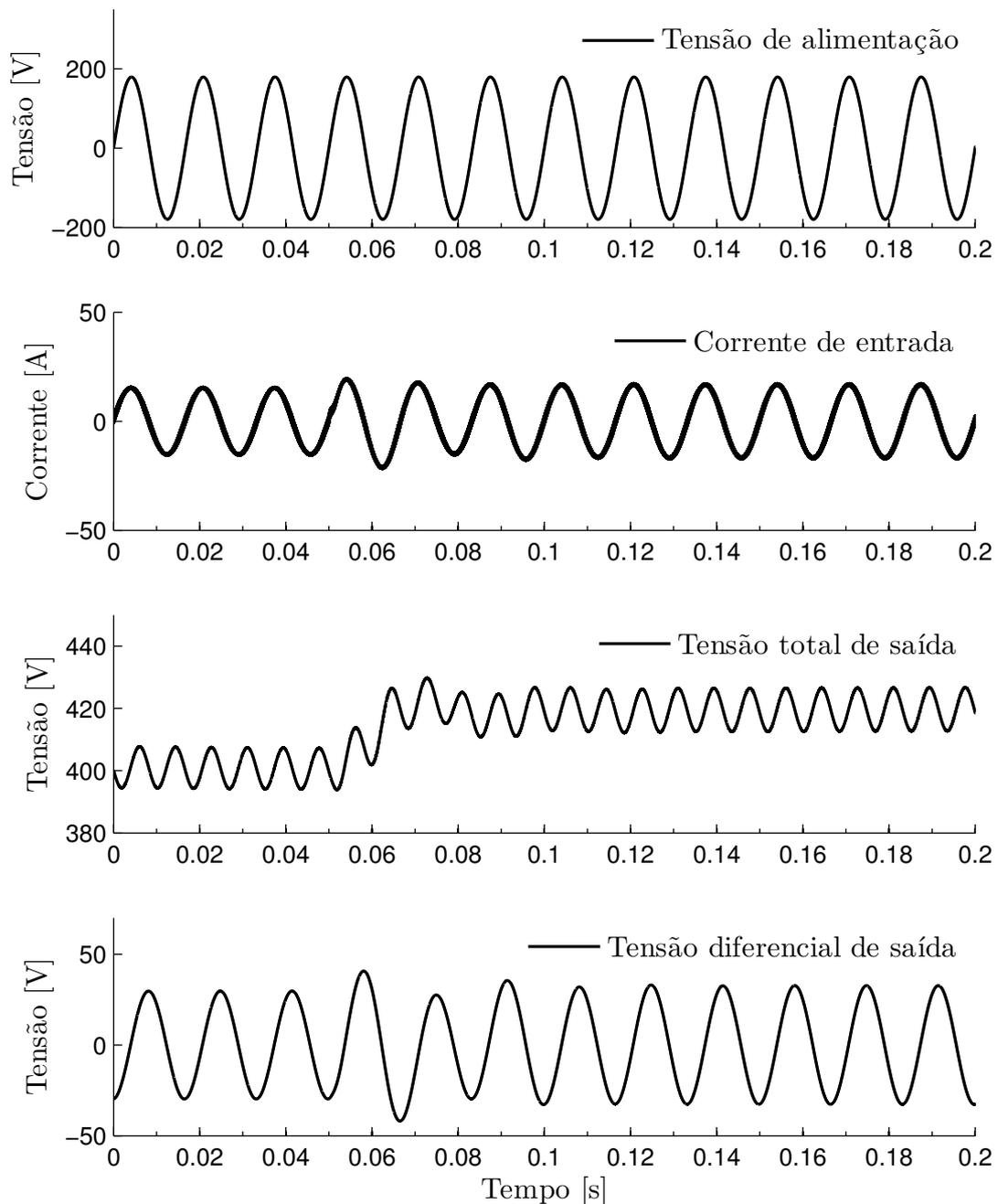


Figura 4.40 – Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada.

A Figura 4.41(a) apresenta as formas de onda da tensão total de saída para a simulação do sistema retificador, para o modelo LTP e para o modelo médio LTI em malha fechada empregando-se o projeto nominal do controlador de tensão. Da mesma forma, a Figura 4.41(b) compara o comportamento dos modelos LTI e LTP com a simulação do retificador para a dinâmica da tensão diferencial.

Como se pode observar, o modelo LTP contempla as dinâmicas variantes da tensão de saída e tem comportamento muito semelhante ao sistema de simulação para regime permanente. Por outro lado, o comportamento de saída do modelo médio LTI apresenta apenas os valores médios da dinâmica.

Para demonstrar que a utilização do modelo LTP é importante para a análise da esta-

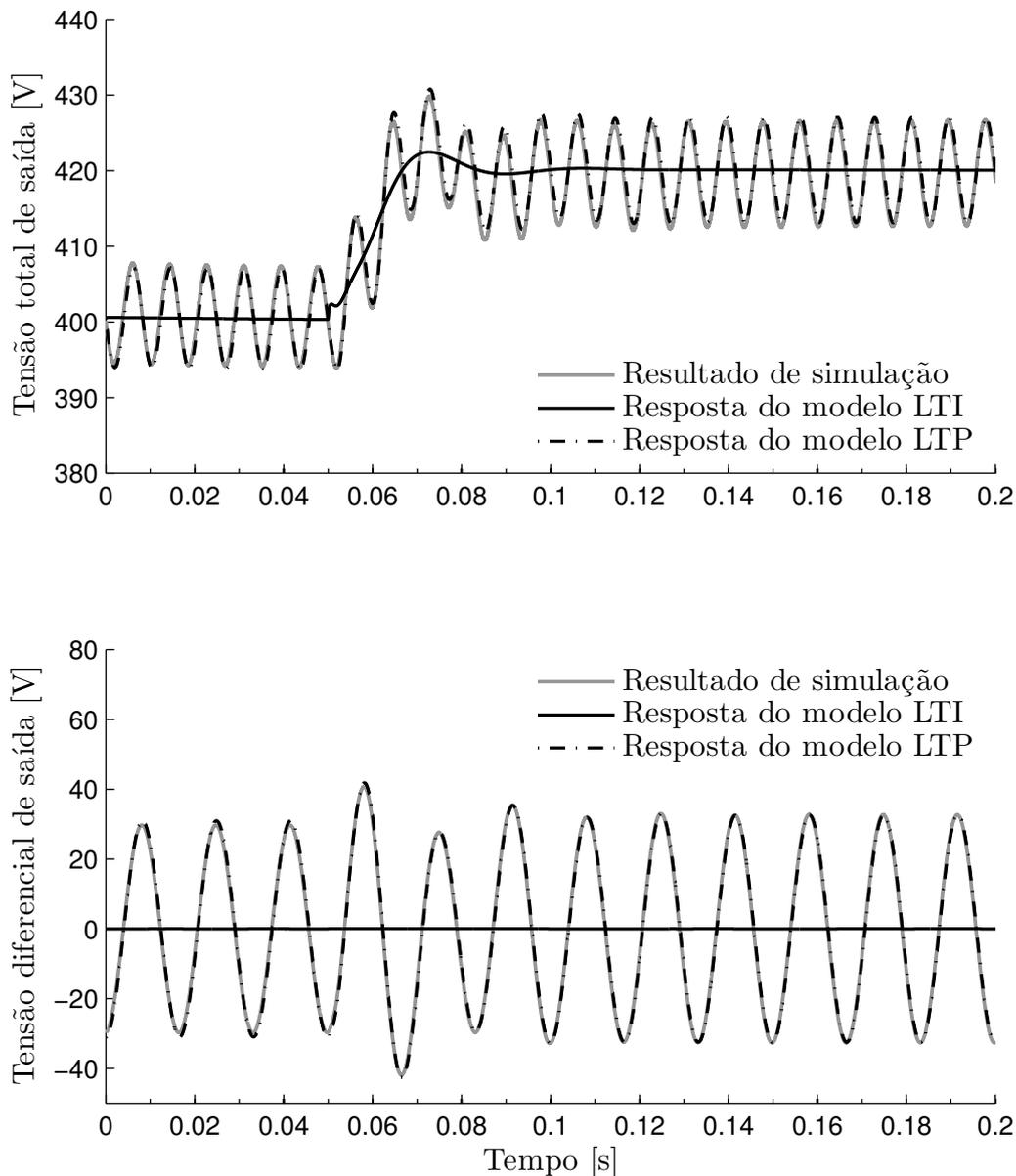


Figura 4.41 – Comparação entre os modelos e a simulação do retificador para a tensão total de saída.

bilidade desses sistemas, a simulação do retificador é realizada para dois pontos próximos ao limite de estabilidade do sistema.

Considere inicialmente $\beta = 1,85$. De acordo com a análise da HTF, desenvolvida anteriormente, este sistema é estável, como pode ser observado na Figura 4.42. Neste caso, a operação em malha fechada apresenta desempenho insatisfatório, no entanto é estável para as condições de operação. A correção do fator de potência da entrada não é obtida e grandes oscilações são observadas na forma de onda da corrente de entrada e da tensão de saída.

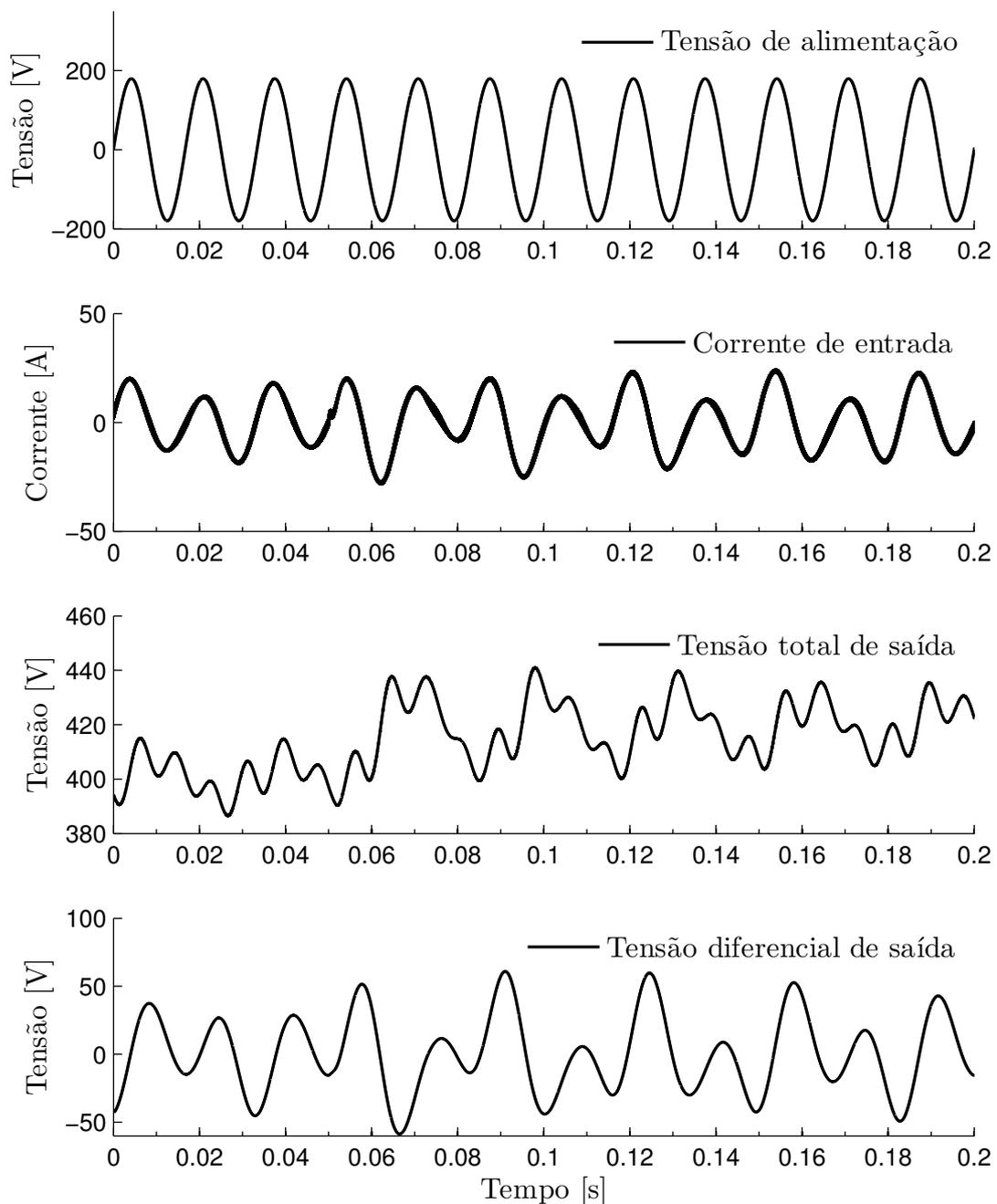


Figura 4.42 – Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada para $\beta = 1,85$.

Na Figura 4.43 é comparada as respostas dinâmicas dos modelos LTI e LTP aos valores obtidos por simulação, considerando-se $\beta = 1,85$. Observa-se que a resposta transitória do sistema apresenta comportamento oscilatório, o qual não é descrito pelo modelo LTI. As respostas dinâmicas das malhas de compensação das tensões de saída diferencial e total são mostradas na Figura 4.43(a)–(b), respectivamente.

Uma estreita correlação pode ser observada entre a resposta dinâmica apresentada nos resultados de simulação e a resposta dinâmica apresentada pelo modelo LTP do retificador em meia ponte. A pequena diferença existente entre estes dois sistemas é resultado de aproximações da linearização do modelo LTP em torno do ponto de operação e do desacoplamento dinâmico entre as malhas interna e externas de tensão e corrente.

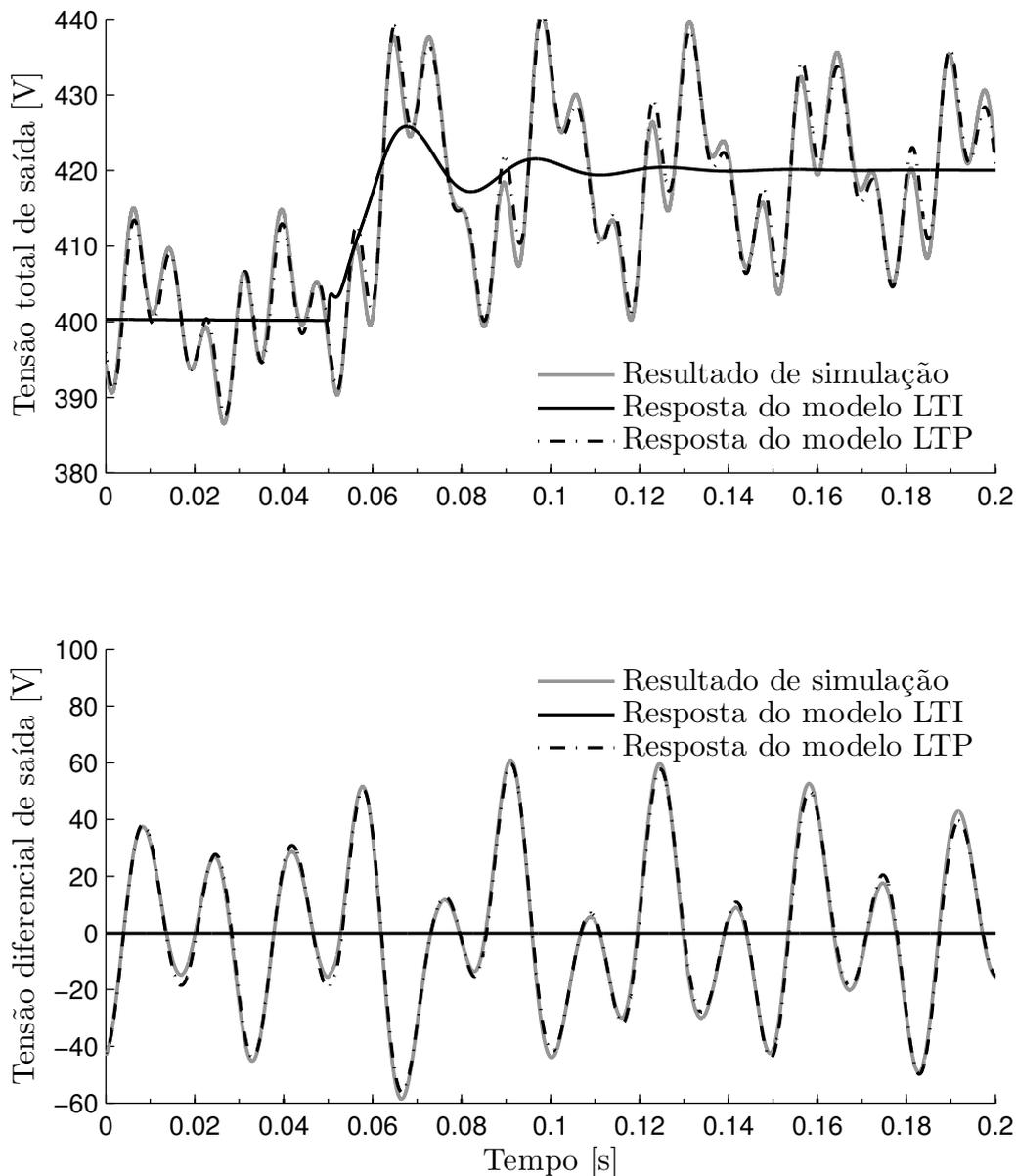


Figura 4.43 – Comparação entre os modelos e a simulação do retificador para a tensão total de saída e $\beta = 1,85$.

Como o módulo do ganho de regime permanente da malha de corrente em 60Hz é sempre menor que um, devido ao sistema não apresentar ganho infinito nesta frequência em malha aberta, então a planta é sempre mais conservativa que o modelo LTP equivalente. Dessa forma, o ponto limite para a instabilidade da simulação tende a ocorrer com ganho um pouco mais elevado, devido à dinâmica não considerada da malha de corrente.

Dessa forma, considere a comparação entre o circuito retificador e seus respectivos modelos para $\beta = 2,15$. De acordo com a análise HTF desenvolvida anteriormente, este sistema é instável a partir de $\beta = 2,00$, característica que pode ser comprovada

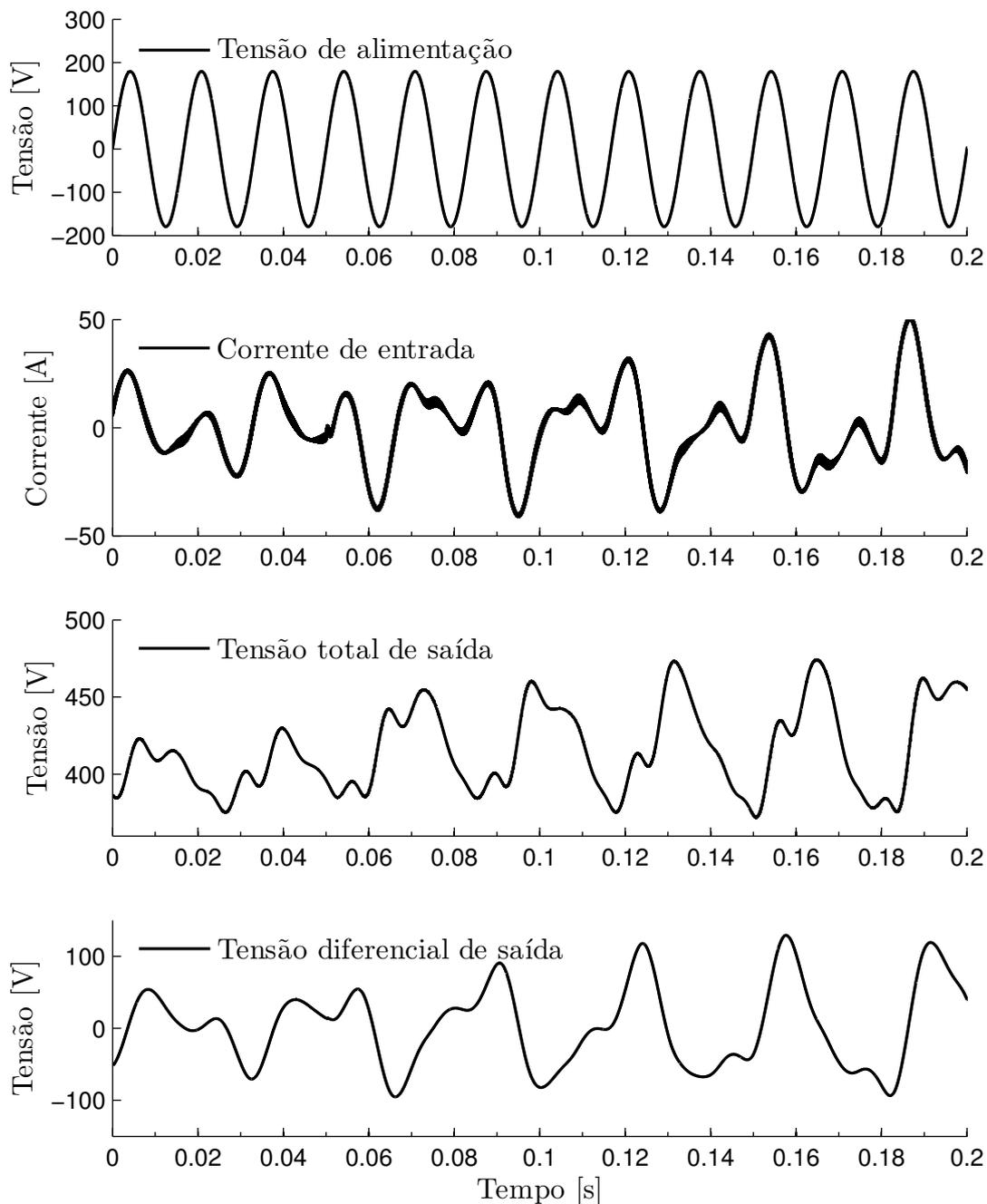


Figura 4.44 – Simulação do retificador monofásico operando com correção do fator de potência de entrada para $\beta = 2,15$.

pelas formas de onda da tensão total de saída e da corrente de entrada, mostradas na Figura 4.44. Nesta figura pode-se visualizar a forma de onda da tensão total de saída para resposta a um salto da referência de 400V para 420V em $t = 0,05s$.

A Figura 4.45(a)–(b) apresenta comparativamente as respostas dinâmicas entre os modelos LTI e LTP e os resultados de simulação, para as tensões de saída total e diferencial, respectivamente. As formas de onda são obtidas da operação em malha fechada para $\beta = 2,15$. Desta comparação, pode-se observar que ambas as dinâmicas da simulação e do modelo LTP são instáveis, enquanto o comportamento do modelo médio LTI permanece estável e apresenta boa resposta dinâmica.

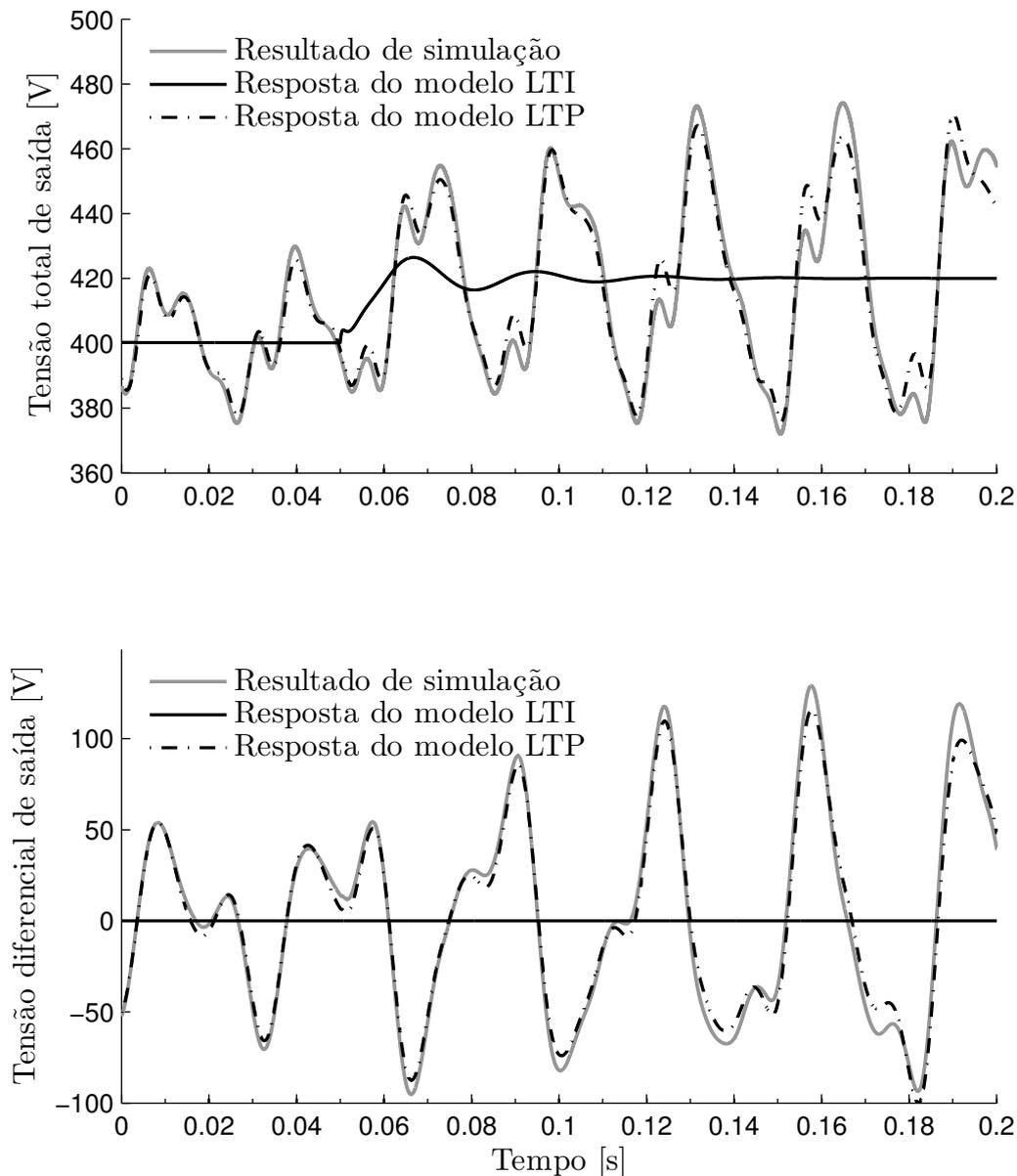


Figura 4.45 – Comparação entre os modelos e a simulação do retificador para a tensão total de saída e $\beta = 2,15$.

4.3 Sumário

Neste capítulo foram empregados os métodos de análise da estabilidade nos retificadores em ponte completa e em meia ponte utilizando-se seus respectivos modelos LTP. Para isso, foram projetados sistemas de controle usando filtros rejeita banda nas frequências de oscilação da saída, possibilitando que a frequência de cruzamento por 0dB fosse aumentada significativamente, melhorando a resposta dinâmica transitória sem comprometer a correção do fator de potência da entrada em regime permanente.

Controladores lineares invariantes no tempo foram projetados para as malhas de tensão de saída e de corrente de entrada empregando-se metodologias baseadas nos modelos médios LTI. Em seguida, as respectivas representações por funções de transferência harmônica foram obtidas para as malhas de controle de tensão a partir dos modelos LTP. A representação dos controladores por funções de transferência harmônica foram determinadas para obtenção da HTF do sistema em malha aberta.

A partir das representações HTF dos conversores analisados, efetuou-se a análise da estabilidade baseados no determinante e nos auto-lugares da função de transferência em malha aberta. Comparando-se estes resultados com aqueles obtidos a partir de análises de estabilidade baseadas em modelos médios LTI, observou-se significativas diferenças.

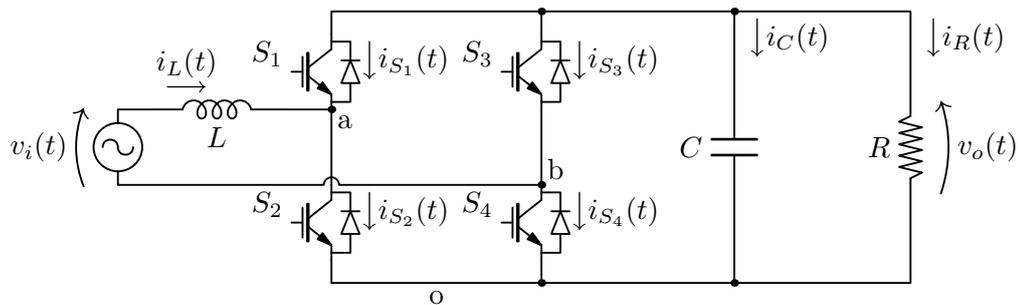
Por fim, são apresentados resultados de simulação para validação dos modelos e das análises efetuadas. Esses resultados demonstraram que as análises de estabilidade empregando os modelos LTP apresentam menor erro que as análises similares empregando os modelos LTI.

5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS PARA O RETIFICADOR EM PONTE COMPLETA

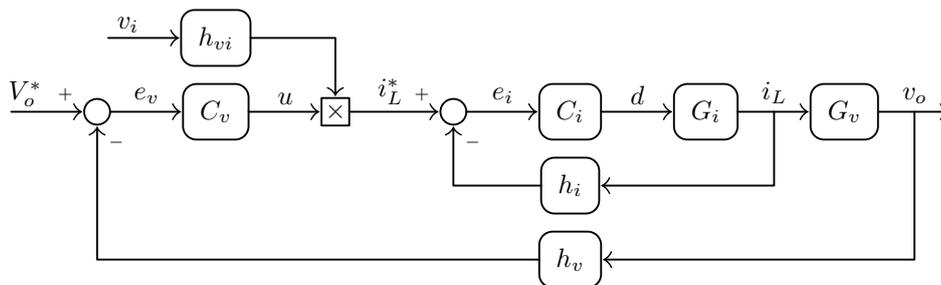
Nos capítulos anteriores foram apresentadas a modelagem dinâmica para os retificadores em ponte completa e meia ponte e uma metodologia para análise da estabilidade da malha de tensão empregando modelos LTP e representação por funções de transferência harmônica. Neste capítulo são realizados o projeto e a análise da estabilidade da malha de tensão para um retificador em ponte completa, incluindo-se resultados experimentais. Este procedimento é discutido com maiores detalhes na Seção 4.1 do Capítulo 4.

Os resultados da análise da estabilidade, que empregam modelos LTP, são comparados aos obtidos na análise da estabilidade usando modelos LTI, para a malha de controle da tensão do barramento do retificador. As malhas interna, de compensação da corrente de entrada, e externa, de compensação da tensão, são consideradas dinamicamente independentes. A representação do modelo LTP do retificador em ponte completa por funções de transferência harmônicas é apresentada com maiores detalhes no Capítulo 4.1. A consolidação da metodologia de análise da estabilidade é elaborada com a apresentação de resultados experimentais, demonstrados neste capítulo.

O circuito elétrico do retificador monofásico em ponte completa é mostrado na Figura 5.1(a), cuja estrutura de controle em malha fechada é apresentada na Figura 5.1(b) na forma de diagrama de blocos. Os blocos $G_i(s)$ e $G_v(s)$ correspondem respectivamente



(a)



(b)

Figura 5.1 – Circuito do retificador monofásico em ponte completa. (a) Circuito elétrico. (b) Diagrama de blocos da estrutura de controle em malha fechada.

Tabela 5.1 – Especificações do retificador monofásico em ponte completa.

Parâmetro	Valor
Tensão eficaz de entrada	$V_{i_{\text{RMS}}} = 127V$
Frequência nominal de entrada	$\omega_1 = 2\pi 60\text{rad/s}$
Referência de tensão de saída	$V_o^* = 300V$
Potência média de saída	$P_o = 375W$
Indutância de entrada	$L = 560\mu H$
Capacitância de saída	$C = 680\mu F$
Resistência de carga	$R = 240\Omega$
Ganho de realimentação de tensão	$h_v = 1$
Ganho de realimentação de corrente	$h_i = 1$
Frequência de comutação dos semicondutores	$T_s = 46875\text{Hz}$
Frequência de amostragem da implementação	46875Hz

à representação dos modelos da corrente de entrada e da tensão de saída do retificado. Os ganhos de realimentação das variáveis e estados do retificador são indicados pelos blocos h_{vi} , h_i e h_v . Os controladores da malha de tensão e de corrente são representados por $C_v(s)$ e $C_i(s)$, respectivamente.

A metodologia de projeto dos controladores das malhas de compensação da corrente e da tensão baseia-se na resposta em frequência de malha aberta e, para esse fim, emprega modelos LTI. O modelo LTP não é empregado diretamente para o projeto dos controladores, mas utilizado para a análise da estabilidade da malha de tensão, empregando a formulação HTF.

Os parâmetros do retificador em análise e suas respectivas especificações para as malhas de compensação da corrente de entrada e da tensão de barramento são mostrados na Tabela 5.1. A validação experimental não foi realizada no Capítulo 4 devido à problemas de implementação que impossibilitam a operação do retificador em torno da região limite de estabilidade, para condições nominais de carga. Com o objetivo de apresentar resultados experimentais para validação da metodologia, este capítulo foi desenvolvido para um caso de operação com capacidade de projeto do protótipo retificador. A metodologia apresentada aqui emprega os mesmos procedimentos demonstrados no Capítulo 4.1, no entanto, são tratados de forma mais resumida.

A elaboração experimental é realizada empregando-se uma plataforma computacional, cujas leis de controle são implementadas em tempo discreto. A motivação para a elaboração experimental em tempo discreto consiste na dificuldade de se determinar o ganho limite da estabilidade quando a implementação é realizada em tempo contínuo. Por essa razão, a frequência de amostragem é suficientemente maior que as dinâmicas presentes no sistema de compensação da tensão de saída, de modo que a representação em tempo discreto seja equivalente ao original contínuo.

5.1 Projeto do controlador da malha interna de compensação da corrente

O modelo linear invariante no tempo que descreve o comportamento da corrente de entrada em função da razão cíclica, para o retificador em ponte completa, é determinado no Capítulo 2:

$$G_i(s) = \frac{I_L(s)}{D(s)} = -\frac{2V_o^*}{sL} \quad (5.1)$$

Substituindo-se os parâmetros do retificador mostrados na Tabela 5.1, resulta no seguinte modelo LTI de primeira ordem,

$$G_i(s) = -\frac{(2)(300)}{560(10^{-6})} \frac{1}{s} = -\frac{1,071(10^6)}{s} \quad (5.2)$$

cujo valor negativo é resultado da definição do sentido da corrente na modelagem da planta.

Devido às limitações dos modelos com relação à representação do comportamento dinâmico do retificador, o projeto da malha de controle da corrente de entrada deve garantir as hipóteses de operação estabelecidas para a simplificação do modelo. Dessa maneira, a metodologia de projeto empregada baseia-se na resposta em frequência de malha aberta, com os seguintes propósitos:

- Rejeitar distúrbio cc da corrente, resultado da simplificação na linearização do modelo. Esta componente cc pode ser caracterizada por uma condição inicial no indutor ou excitada por variações na tensão de barramento ou por transitórios de carga.
- Rejeitar distúrbios com frequência ω_1 , resultado da simplificação na representação do modelo por funções de transferência. Esta parcela corresponde à excitação da corrente de entrada devido a tensão de alimentação.
- Rastrear o valor de referência para a corrente de entrada. Este valor é fornecido pela malha externa de controle da tensão, e é sintonizado na frequência da rede de alimentação ω_1 .
- Apresentar desacoplamento dinâmica para com a malha externa de controle da tensão de saída.

A compensação dos 180° de atraso de fase devido ao sentido adotado para a corrente de entrada é realizada com a adição de 180° na equação do controlador. A inclusão de um integrador na equação do controlador garante rejeição assintótica aos distúrbios de corrente contínua, cujo argumento é baseado no princípio do modelo interno (FRANCIS; WONHAM, 1976; LOH et al., 2003). Um zero real é incluído para melhorar a margem de fase em torno da frequência de cruzamento do ganho por 0dB. Um polo adicional é inserido em alta frequência visando a implementação experimental em tempo discreto da

malha de tensão, empregando aproximação por ZOH. Este polo de alta frequência não tem efeito significativo na resposta dinâmica do controlador, e não é necessário quando a implementação é realizada em tempo contínuo.

A função de transferência resultante para o compensador de corrente de entrada é dada por:

$$C_i(s) = -\frac{1800(s + 2\pi(10)^3)}{s(s + 2\pi 15(10)^3)} \quad (5.3)$$

que resulta nas seguintes características de malha aberta: margem de fase MF= 61°, margem de ganho MG = ∞ e frequência de cruzamento $\omega_c = 21(10)^3$ rad/s ou $f_c = 3,3$ kHz. A resposta em frequência da malha aberta do compensador da corrente de entrada é mostrada na Figura 5.2.

A resposta em frequência do sistema de controle da corrente de entrada em malha fechada é mostrado na Figura 5.3. Pode-se observar desvio de fase e ganho muito pequenos para a região de frequências de interesse.

5.2 Projeto do controlador da malha externa de compensação da tensão

Nesta seção é apresentado o projeto de um controlador para a malha de controle da tensão de saída. Este projeto utiliza o modelo LTI do retificador em ponte completa representado por função de transferência. Esta representação, no domínio da frequência, relaciona a tensão de saída $\langle v_o(t) \rangle$ com a amplitude da corrente de entrada $u(t)$:

$$G_v(s) = \frac{V_o(s)}{U(s)} = \frac{\frac{k_{vi}D}{h_i C}}{s + \frac{1}{RC}} \quad (5.4)$$

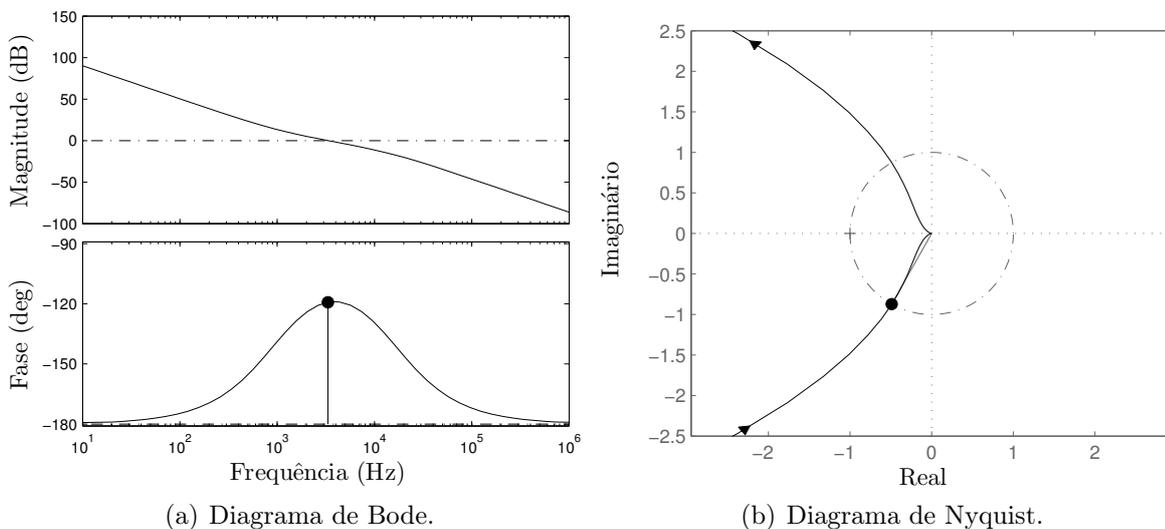


Figura 5.2 – Resposta em frequência de malha aberta do sistema de controle da corrente de entrada.

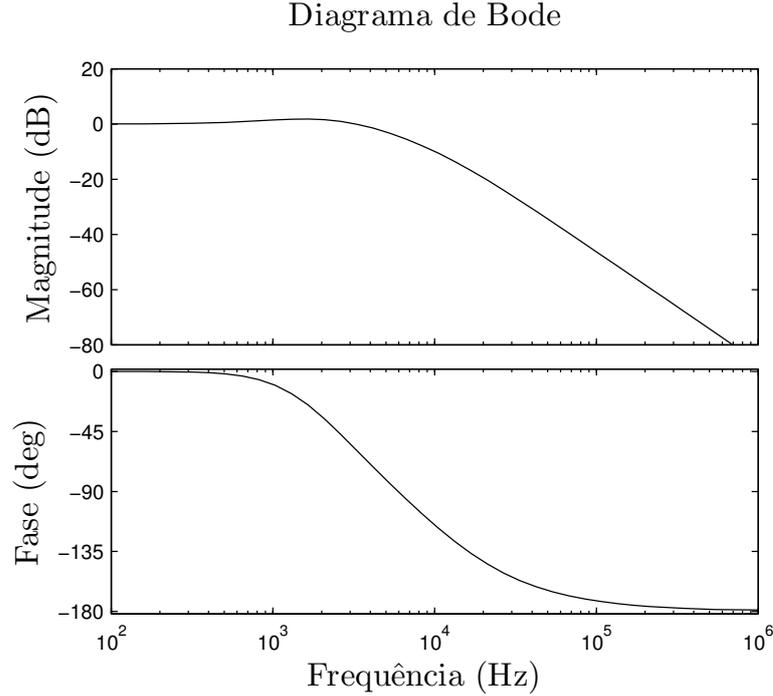


Figura 5.3 – Resposta em frequência da dinâmica da corrente de entrada.

Normalizando o ganho de realimentação da medida da tensão de entrada na forma:

$$h_{vi} = \frac{1}{V_{i_{\text{RMS}}}\sqrt{2}} \quad , \quad (5.5)$$

resulta em ganho de normalização unitário para corrente de entrada:

$$k_{vi} = \frac{h_{vi}V_{i_{\text{RMS}}}\sqrt{2}}{h_i} = 1 \quad (5.6)$$

Dessa forma, a ação de controle $u(t)$ da malha externa de tensão atua sobre o valor de pico da referência da corrente. Considerado-se, então, o desacoplamento dinâmico entre as malhas de tensão e corrente, resulta:

$$i_L(t) = i_L^*(t) = u(t) \cos(\omega_1 t) \quad (5.7)$$

A constante relativa à forma de onda da razão cíclica D , resultante da linearização em torno do ponto de operação, é dado em termos dos parâmetros do retificador:

$$D = \frac{V_{i_{\text{RMS}}}\sqrt{2}}{2V_o^*} = \frac{127}{300\sqrt{2}} = 0,2993 \quad . \quad (5.8)$$

Substituindo-se k_{vi} , D e os demais parâmetros do retificador, apresentados na Tabela 5.1, na função de transferência (5.4), resulta no modelo LTI,

$$G_v(s) = \frac{D/C}{s + 1/RC} = \frac{440,2}{s + 6,127} \quad (5.9)$$

que descreve o comportamento dinâmico da tensão de saída representado no domínio da frequência.

A função de transferência do controlador de tensão emprega um filtro rejeita-banda e uma parcela de compensação de fase, definido na forma:

$$C_v(s) = C_n(s)C_f(s) \quad (5.10)$$

Onde $C_n(s)$ é a função de transferência do filtro rejeita banda:

$$C_n(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1(2\omega_1)s + (2\omega_1)^2}{s^2 + 2\zeta_2(2\omega_1)s + (2\omega_1)^2} \quad (5.11)$$

sintonizado na frequência de oscilação da saída (120Hz), onde $\omega_1 = 2\pi 60$, cujos coeficientes de amortecimento

$$\zeta_1 = 10^{-3}, \quad \zeta_2 = 1,0 \quad (5.12)$$

proporcionam atenuação de $|G_{(2\omega_1)}| = -60dB$ na frequência de 120Hz.

A função de transferência de malha aberta para o retificador, incluindo a compensação, é dada no domínio da frequência por:

$$C_f(s)C_n(s)G_v(s) \quad (5.13)$$

Para $C_n(s)$ e $G_v(s)$ funções conhecidas. O projeto do compensador de fase $C_f(s)$ é realizado empregando-se o método da análise da resposta em frequência do retificador em malha aberta, cujo comportamento é mostrado na Figura 5.4. Da qual, resulta a seguinte

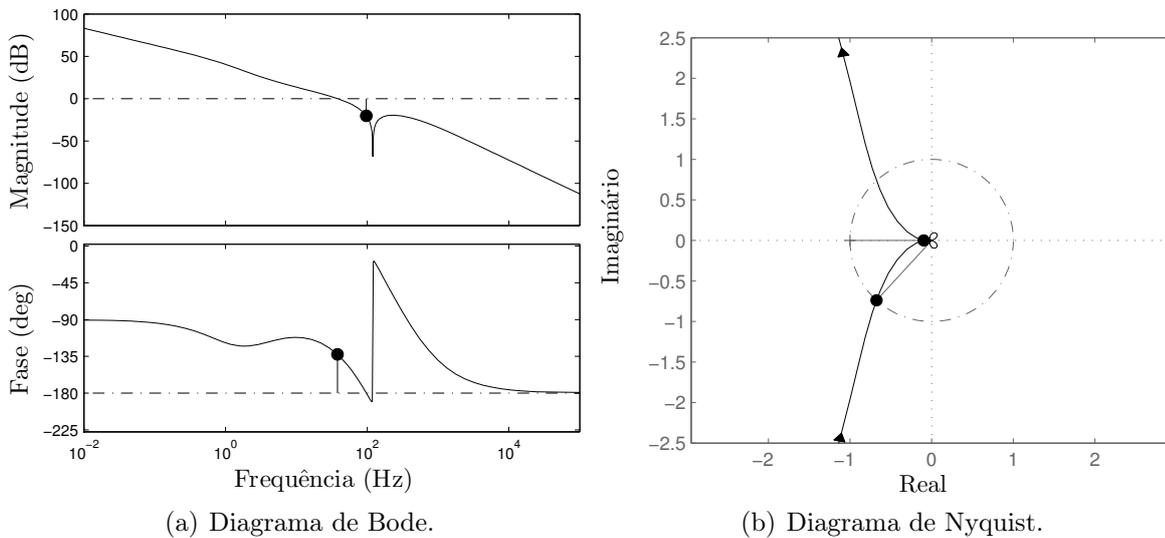


Figura 5.4 – Resposta em frequência de malha aberta do sistema de controle da tensão de saída.

função de transferência para o compensador de fase $C_f(s)$:

$$C_f(s) = \frac{4604(s + 2\pi(3))}{s(s + 2\pi(500))} \quad (5.14)$$

Cujas características de malha aberta são: margem de fase MF = 51° , margem de ganho MG = 22dB e frequência de cruzamento $\omega_c = 194\text{rad/s}$ ou $f_c = 31\text{Hz}$.

Uma importante característica deste sistema é apresentar elevado ganho nas frequências que compõe o sinal da referência $\omega = 0$, garantindo rastreamento assintótico em regime permanente. O reduzido ganho de malha aberta acentua a atenuação da realimentação das componentes de frequência de 120Hz, o que possibilita a elevação da banda passante de malha fechada sem comprometer a correção do fator de potência de entrada. o aumento da banda passante reduz o tempo de resposta da tensão de saída à variação da referência, à rejeição de distúrbios e à transitórios de carga.

A resposta em frequência do compensador do sistema de controle de malha fechada para a tensão de saída do retificador é mostrado na Figura 5.5. Pela análise do diagrama, a característica de malha fechada apresenta erro muito reduzido para o rastreamento das baixas frequências da referência, ao mesmo tempo que apresenta acentuada atenuação das frequências em torno de 120Hz.

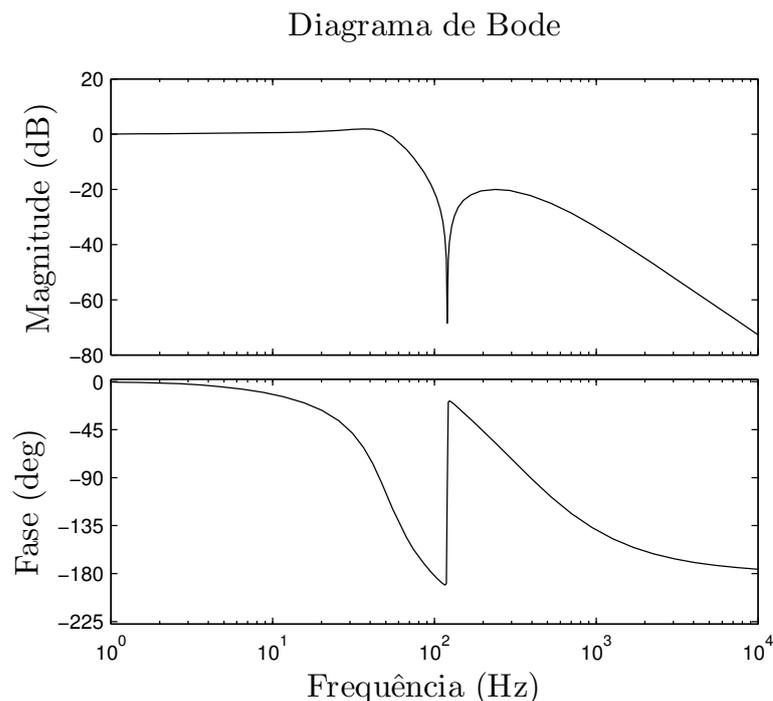


Figura 5.5 – Resposta em frequência do controlador de tensão em malha fechada.

5.3 Análise da estabilidade da malha de tensão empregando-se a abordagem LTP

A análise da estabilidade baseada em modelos LTP, utiliza a representação equivalente por funções de transferência harmônica, possibilitando o emprego de técnicas LTI. Nesta seção é demonstrada a obtenção da função de transferência harmônica para o retificador monofásico em ponte completa e para o controlador projetado. Em seguida a representação do modelo por HTF, que descreve o comportamento de malha aberta, é utilizada para análise da estabilidade do retificador em malha fechada, empregando-se as técnicas baseadas no critério generalizado de Nyquist, como descrito no Capítulo 3.

5.3.1 Representação do modelo LTP por função de transferência harmônica

Considere a equação diferencial linear variante no tempo que descreve o comportamento da tensão de saída, como apresentada em (2.52) no Capítulo 2:

$$\frac{d(\langle v_o(t) \rangle)}{dt} = -\frac{1}{RC} \langle v_o(t) \rangle + \left[\frac{k_{vi}D}{C} + \frac{k_{vi}D}{2C} (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) \right] u(t) \quad (5.15)$$

cuja representação LTP deve ser posta na forma de equações por espaço de estados:

$$\begin{aligned} \frac{d(x(t))}{dt} &= a(t)x(t) + b(t)u(t) \\ y(t) &= c(t)x(t) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Neste caso, $u(t)$ corresponde ao valor de pico da corrente de entrada, enquanto o vetor de saídas $y(t)$ corresponde ao valor da tensão de saída média no período de comutação:

$$y(t) = \langle v_o(t) \rangle . \quad (5.17)$$

As matrizes de estado, entrada e saída para a representação (5.16) por espaço de estados é obtida com base nos parâmetros do retificador, cuja matriz de entradas apresenta comportamento periódico no tempo:

$$a(t) = -6,13 \quad (5.18)$$

$$b(t) = 440,2 + 220,1 (e^{j2\omega_1 t} + e^{-j2\omega_1 t}) \quad (5.19)$$

$$c(t) = 1 \quad (5.20)$$

A decomposição dessas matrizes em seus respectivos coeficientes complexos de Fourier é

dada por:

$$a(t) = a_{(0)} \quad (5.21)$$

$$b(t) = b_{(-2)} e^{-j2\omega_1 t} + b_{(0)} + b_{(2)} e^{j2\omega_1 t} \quad (5.22)$$

$$c(t) = c_{(0)} \quad (5.23)$$

cujos coeficientes numéricos são dados para o retificador em ponte completa:

$$a_{(0)} = -6,13 \quad (5.24)$$

$$b_{(0)} = 440,2 \quad (5.25)$$

$$b_{(2)} = b_{(-2)} = 220,1 \quad (5.26)$$

$$c_{(0)} = 1 \quad (5.27)$$

A decomposição do modelo LTP pelos respectivos coeficientes exponenciais complexos de Fourier, possibilita a representação do mesmo modelo por um sistema de equações de espaço de estados, no domínio da frequência, cujo comportamento dinâmico apresenta característica LTI:

$$\begin{aligned} s\mathcal{X}(s) &= (\mathcal{A} - \mathcal{N})\mathcal{X}(s) + \mathcal{B}\mathcal{U}(s) \\ \mathcal{Y}(s) &= \mathcal{C}\mathcal{X}(s) + \mathcal{D}\mathcal{U}(s) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} matrizes circulares, ou Toeplitz, e \mathcal{N} matriz de modulação em frequência. Essas matrizes são resultadas diretamente dos coeficientes complexos de Fourier oriundos do modelo LTP. A matriz de estados:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{(0)} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & a_{(0)} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & a_{(0)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & -6,13 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & -6,13 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & -6,13 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

para $a_{(0)}$ o coeficiente constante de $a(t)$. A matriz de entradas:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & b_{(0)} & 0 & b_{(-2)} & \cdots \\ \cdots & 0 & b_{(0)} & 0 & \cdots \\ \cdots & b_{(2)} & 0 & b_{(0)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 440,2 & 0 & 220,1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 440,2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 220,1 & 0 & 440,2 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Substituindo-se os parâmetros da planta, obtém-se:

$$\mathbf{H}_P(s) = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \frac{440,2}{s+6,13-j754} & 0 & \frac{220,1}{s+6,13-j754} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{440,2}{s+6,13-j377} & 0 & \frac{220,1}{s+6,13-j377} & 0 & \dots \\ \dots & \frac{220,1}{s+6,13} & 0 & \frac{440,2}{s+6,13} & 0 & \frac{220,1}{s+6,13} & \dots \\ \dots & 0 & \frac{220,1}{s+6,13+j377} & 0 & \frac{440,2}{s+6,13+j377} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{220,1}{s+6,13+j754} & 0 & \frac{440,2}{s+6,13+j754} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

A análise da estabilidade utiliza a HTF de malha aberta, constituída pela função de transferência harmônica da planta e do controlador. Por essa razão, a representação do controlador por HTF deve ser obtida, baseando-se na mesma abordagem empregada na determinação da HTF da planta. No entanto, no caso de compensadores LTI, as dinâmicas são independentes em frequência e a representação do controlador por HTF pode ser simplificada. Com isso, a HTF do controlador resulta em uma matriz diagonal:

$$\mathbf{H}_C(s) = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & C_v(s - j754) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & C_v(s - j377) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & C_v(s) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & C_v(s + j377) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & C_v(s + j754) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Para $C_v(s)$ a função de transferência do controlador:

$$C_v(s) = 4604 \left(\frac{s^2 + 1,508s + 568,5(10^3)}{(s + 754)(s + 754)} \right) \left(\frac{(s + 2\pi(3))}{s(s + 2\pi(500))} \right) \quad (5.39)$$

A função de transferência harmônica de malha aberta para o sistema de controle da tensão de saída é, então, composta pela composição da HTF do compensador e da planta:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s) \quad (5.40)$$

Resultando na seguinte matriz de transferência:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \frac{440,2C_v(s-j754)}{s+6,13-j754} & 0 & \frac{220,1C_v(s-j754)}{s+6,13-j754} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{440,2C_v(s-j377)}{s+6,13-j377} & 0 & \frac{220,1C_v(s-j377)}{s+6,13-j377} & 0 & \dots \\ \dots & \frac{220,1C_v(s)}{s+6,13} & 0 & \frac{440,2C_v(s)}{s+6,13} & 0 & \frac{220,1C_v(s)}{s+6,13} & \dots \\ \dots & 0 & \frac{220,1C_v(s+j377)}{s+6,13+j377} & 0 & \frac{440,2C_v(s+j377)}{s+6,13+j377} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{220,1C_v(s+j754)}{s+6,13+j754} & 0 & \frac{440,2C_v(s+j754)}{s+6,13+j754} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

5.3.2 Análise da estabilidade em malha fechada

Uma vez obtido o modelo do retificador monofásico em ponte completa representado por função de transferência harmônica, as técnicas multivariáveis LTI podem ser empregadas para a análise da estabilidade de malha fechada destes sistemas.

Nesta seção são apresentadas as análises da estabilidade do retificador para o método baseado no determinante da equação característica de malha fechada $\det [1 + \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)]$ e para o método baseado nos auto-lugares de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$, empregando a abordagem HTF. A comparação com a análise da estabilidade utilizando o modelo médio LTI é mostrada.

A aplicação dos métodos de estabilidade empregando a abordagem HTF utiliza uma representação de dimensão limitada na quarta ordem harmônica. O mapeamento do semiplano direito é limitado em $\sigma_0 = 10^3 \text{rad/s}$.

A análise da estabilidade empregando o modelo médio LTI é mostrada na Figura 5.6, o qual indica que o sistema é estável em malha fechada e apresenta margem de ganho $MG_{dB} = 20\text{dB}$, margem de fase $MF = 48^\circ$ e frequência de cruzamento $f_c = 47\text{Hz}$.

Os métodos para a análise da estabilidade do sistema retificador em malha fechada empregando a representação HTF são apresentados no Capítulo 3. O primeiro método, denominado método do determinante, é apresentado no Teorema 3.1, o qual consiste na análise da curva fechada gerada pela variação da função

$$\Gamma(s) = \det [\mathcal{I} + \mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)] \quad (5.42)$$

ao longo do mapeamento do semiplano direito do plano complexo s na faixa fundamental \mathcal{C}_S . O contorno polar gerado por este mapeamento é mostrado na Figura 5.7.

Como a função de transferência em malha aberta não apresenta nenhum polo no semiplano direito do plano s , ou, de forma equivalente, não apresenta nenhum polo no

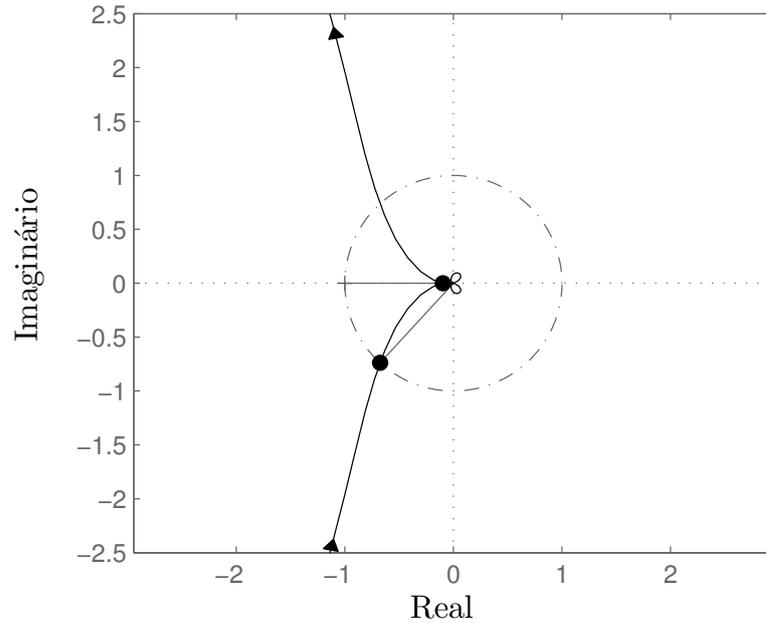


Figura 5.6 – Diagrama de Nyquist do sistema de controle $C_v(s)G_v(s)$ em malha aberta.

interior do caminho de mapeamento, então o sistema em malha fechada é estável se, e somente se, o contorno $\Gamma(s)$ não circunda a origem. Observando-se a Figura 5.7, conclui-se que o sistema é estável em malha fechada, pois o diagrama do determinante não envolve a origem.

O método de análise da estabilidade empregando o determinante é fácil de ser obtido e analisado, pois resulta em uma única curva de caminho fechado. No entanto, este método apenas determina a estabilidade, e não fornece nenhum indicativo de desempenho ou margens de fase e ganho.

Um método alternativo para a análise da estabilidade é baseado na análise dos auto-

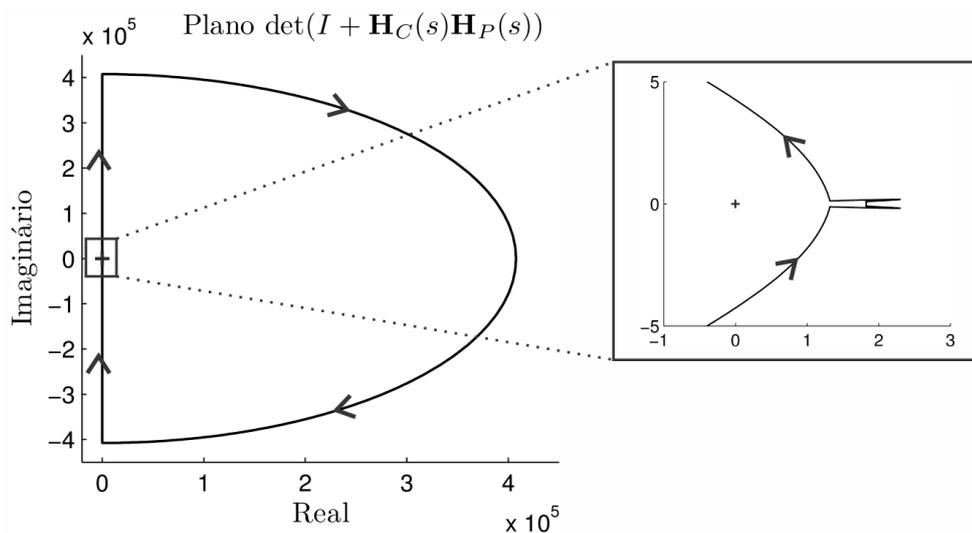
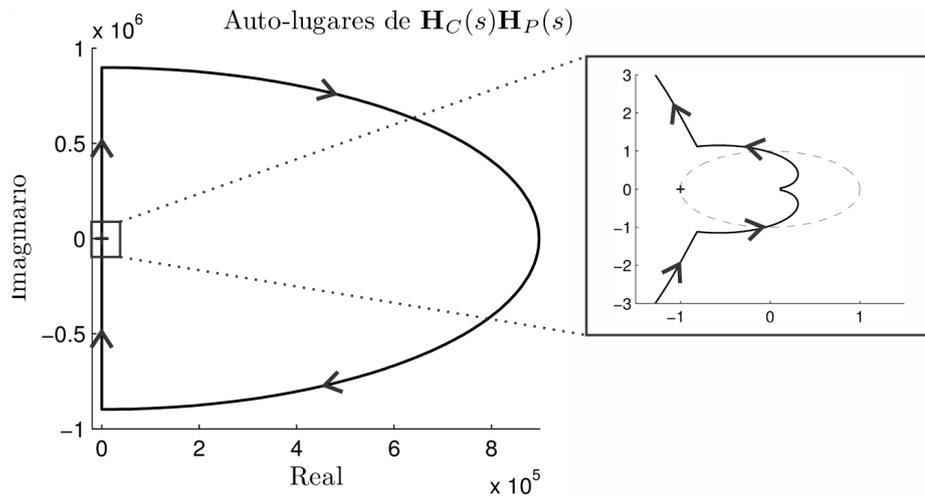


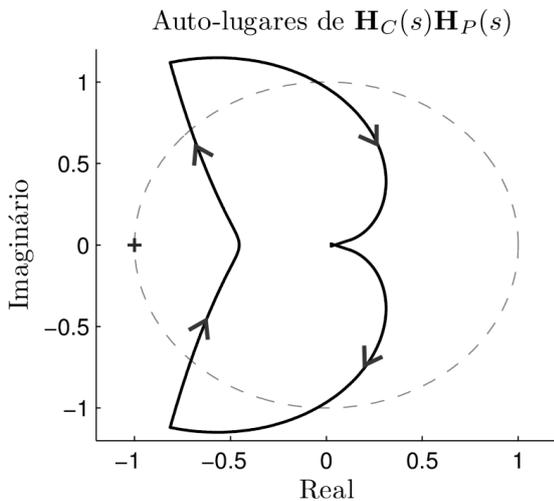
Figura 5.7 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade em malha fechada.

lugares de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$. Este método consiste na análise de um conjunto de curvas (auto-lugares) formadas pelo deslocamento dos autovalores da função $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ produzidas pelo mapeamento \mathcal{C}_S no plano complexo s . Os auto-lugares produzem caminhos sempre fechados e em número menor ou igual à dimensão da matriz HTF truncada. O conjunto dos auto-lugares de $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ é mostrado na Figura 5.8.

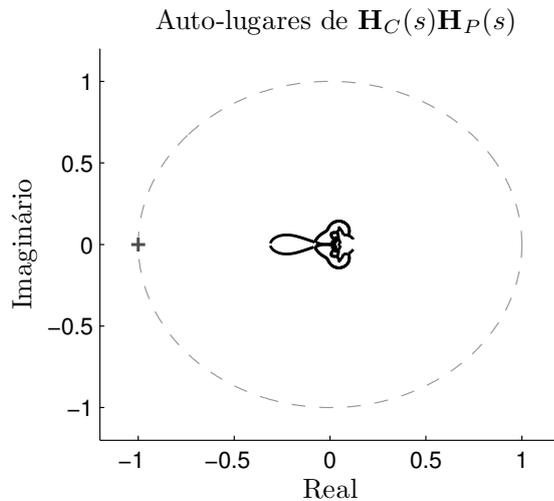
Como o sistema em malha aberta $\mathbf{H}_C(s)\mathbf{H}_P(s)$ não apresenta nenhum polo no semi-plano direito do plano complexo s , então, de acordo com o Teorema 3.2, o sistema é estável em malha fechada da entrada para a saída se, e somente se, o conjunto dos auto-lugares não envolver o ponto $(-1 + j0)$. Dessa forma, de acordo com o método dos auto-lugares, o sistema é estável. A margem de ganho resultante desta análise é determinada pelo ponto de cruzamento dos auto-lugares pelo semi-eixo real negativo. Nesse caso, o ponto



(a) Auto-lugar correspondente a λ_1 .



(b) Auto-lugar correspondente a λ_2 .



(c) Auto-lugares correspondentes a $\lambda_1-\lambda_9$.

Figura 5.8 – Emprego do método dos auto-lugares para análise da estabilidade em malha fechada.

de cruzamento é

$$\alpha = (-0,454 + j0) \quad (5.43)$$

e resulta na margem de ganho:

$$MG = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,454} = 2,202 \quad (5.44)$$

A representação da margem de ganho em decibéis é obtida na forma:

$$MG_{dB} = 20 \log(MG) = 6,86dB \quad (5.45)$$

Por outro lado, a margem de ganho obtida na análise que emprega o modelo médio LTI apresenta margem de ganho $MG_{dB} = 20dB$, cujo valor absoluto,

$$MG = 10,0 \quad (5.46)$$

apresenta margem ganho 4,54 vezes maior, comparado ao método dos auto-lugares.

Com o propósito de avaliar o ponto limite da estabilidade e validar a metodologia para a determinação da margem crítica da estabilidade, baseada na margem de ganho, considere o emprego controlador (5.10) incluindo um fator de ganho direto β , na forma:

$$\beta C_v(s) = \beta C_n(s) C_f(s) \quad (5.47)$$

Onde $\beta = 2,0$ equivale ao ponto limite da estabilidade de malha fechada, de acordo com método dos auto-lugares. Dessa forma, a HTF resultante é dada em função de β :

$$\beta \mathbf{H}(s) = \beta \mathbf{H}_C(s) \mathbf{H}_P(s) \quad (5.48)$$

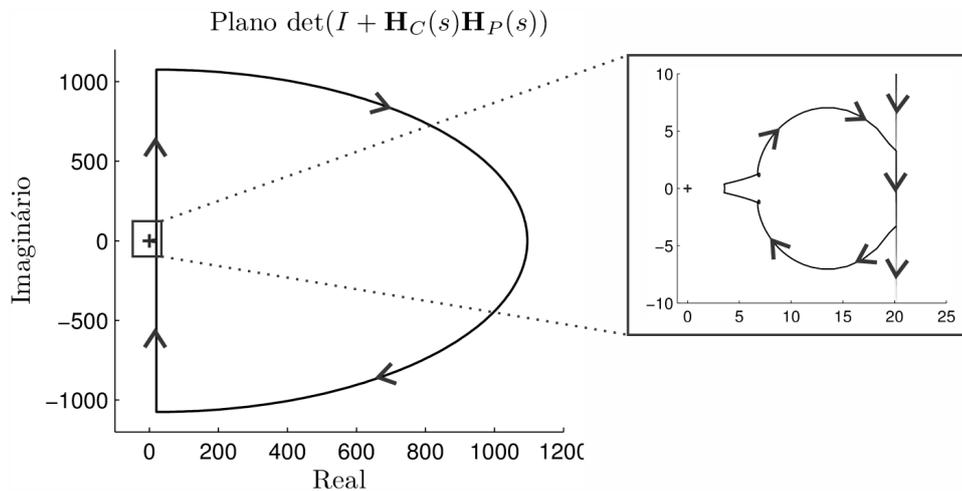


Figura 5.9 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 2,20$.

A análise da estabilidade é, então, elaborada para duas condições de β ,

$$\begin{aligned} \beta = 2,20 &\rightarrow \text{estável} \\ \beta = 2,21 &\rightarrow \text{instável} \end{aligned} \tag{5.49}$$

em torno do ponto crítico de estabilidade em malha fechada.

Considerando-se inicialmente o caso estável, $\beta = 2,20$, e aplicando-se o método do determinante para a análise da estabilidade resulta na curva fechada mostrada na Figura 5.9. Como pode ser observado, a origem não é envolvida e, portanto, o sistema é estável em malha fechada.

De forma similar, com o emprego do método dos auto-lugares o conjunto de curvas resultantes é mostrado na Figura 5.10. Nenhuma das curvas envolve o ponto $(-1 + j0)$, significando que o sistema é estável em malha fechada.

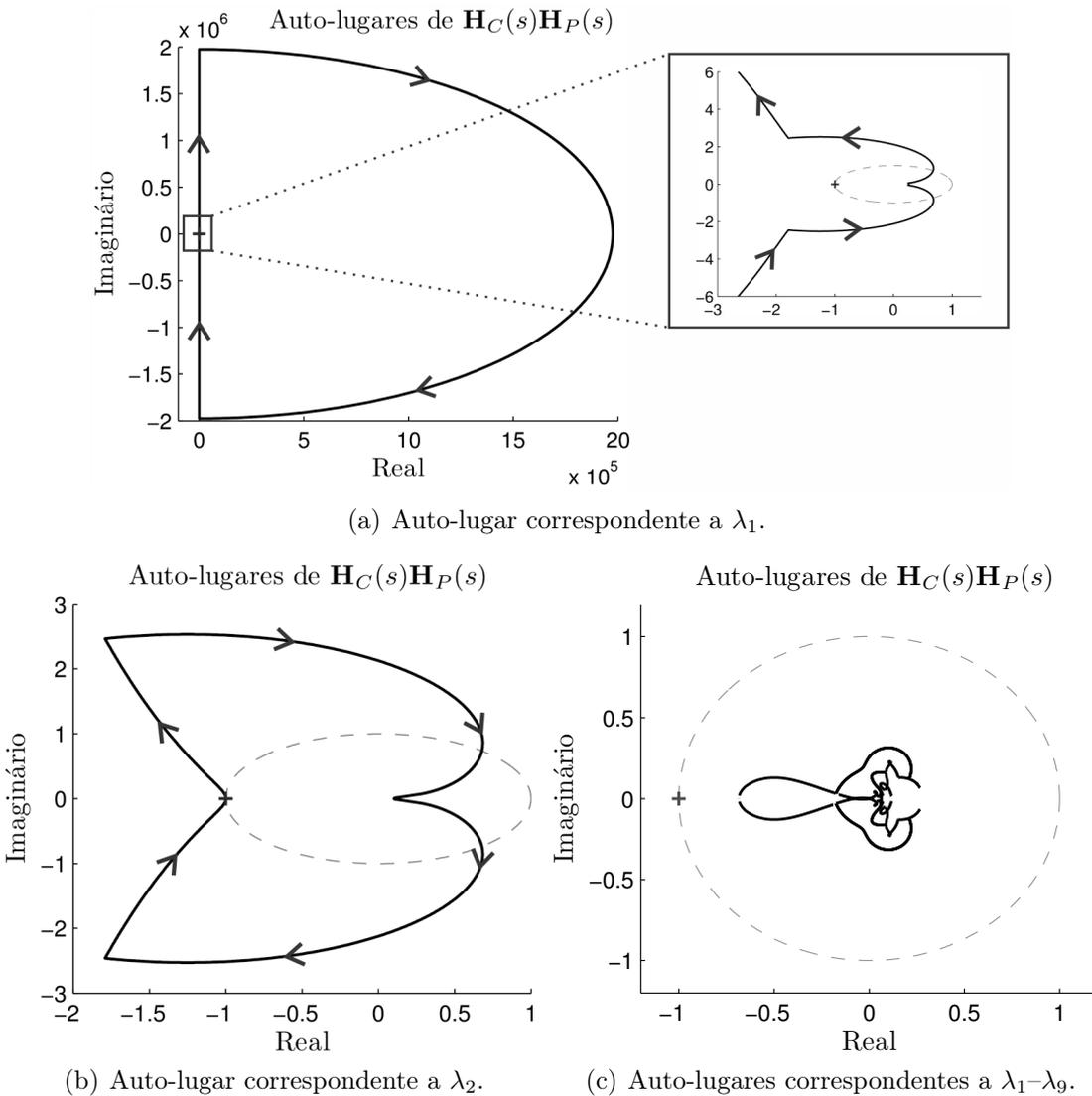


Figura 5.10 – Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 2,20$.

O ponto de cruzamento do auto-lugar mais próximo ao ponto $(-1 + j0)$ é dado por:

$$\alpha = -0,998 \tag{5.50}$$

resultando na seguinte margem de ganho

$$MG = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,986} = 1,001 \tag{5.51}$$

$$MG_{dB} = 20 \log(MG) = 0,01dB \tag{5.52}$$

Onde o sistema apresenta-se muito próximo da instabilidade.

Por outro lado, o emprego do método de análise da estabilidade de Nyquist utilizando o modelo médio LTI resulta em sistema estável e apresenta as seguintes margens de ganho e fase:

$$MG_{dB} = 13,15dB \tag{5.53}$$

$$MF = 28,1^\circ, \tag{5.54}$$

respectivamente.

De forma semelhante, o método baseado no determinante é usado para análise da estabilidade em malha fechada para $\beta = 2,21$, cuja curva resultante do mapeamento é mostrada na Figura 5.11. Nota-se que a curva $\Gamma(s)$ envolve a origem uma vez no sentido horário. Como resultado, este sistema é instável em malha fechada.

Do emprego do método dos auto-lugares para este caso, $\beta = 2,21$, resulta o conjunto de curvas mostradas na Figura 5.12. Neste caso, o ponto $(-1 + j0)$ é envolvido uma vez no sentido horário. Como consequência, a análise indica que o sistema é instável em malha fechada. Enquanto a análise da estabilidade que emprega o modelo médio LTI apresenta

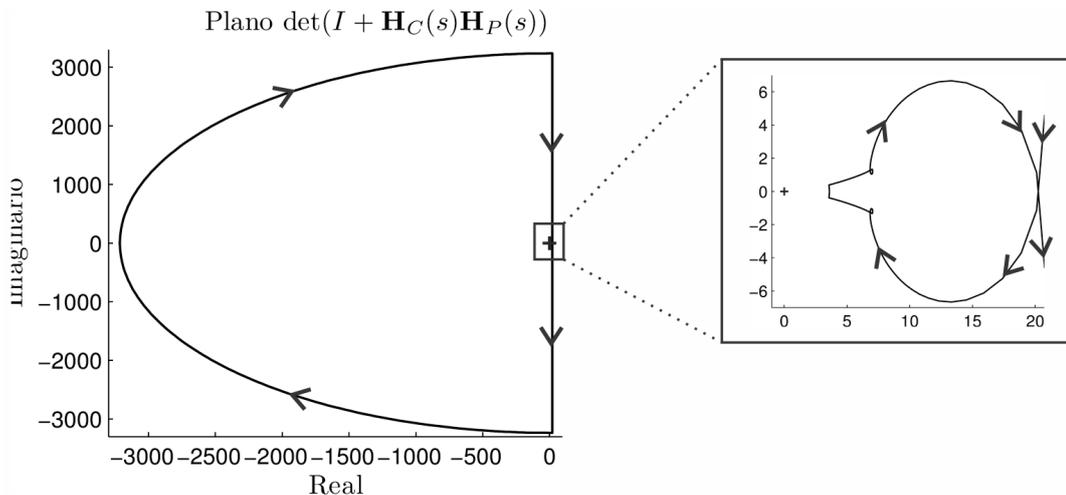


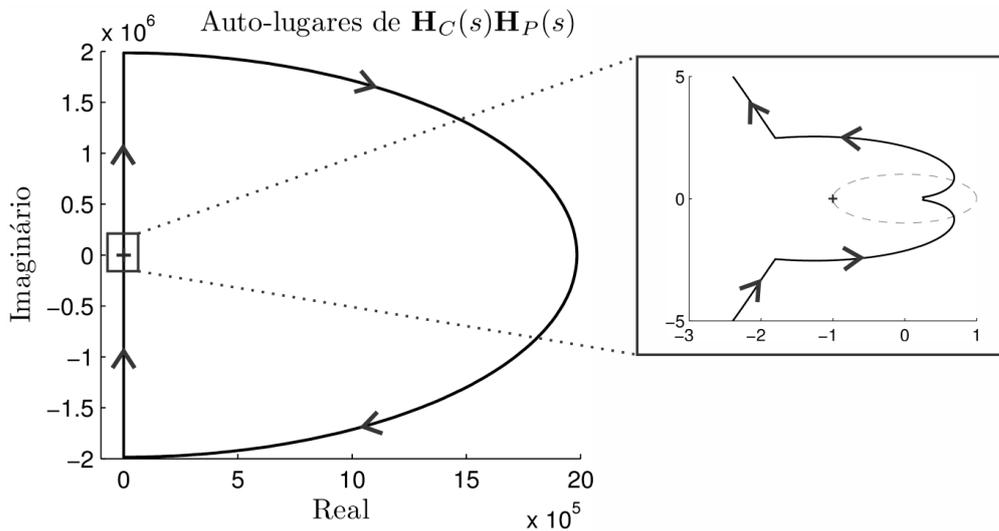
Figura 5.11 – Emprego do método do determinante para análise da estabilidade para $\beta = 2,21$.

margem de estabilidade significativa.

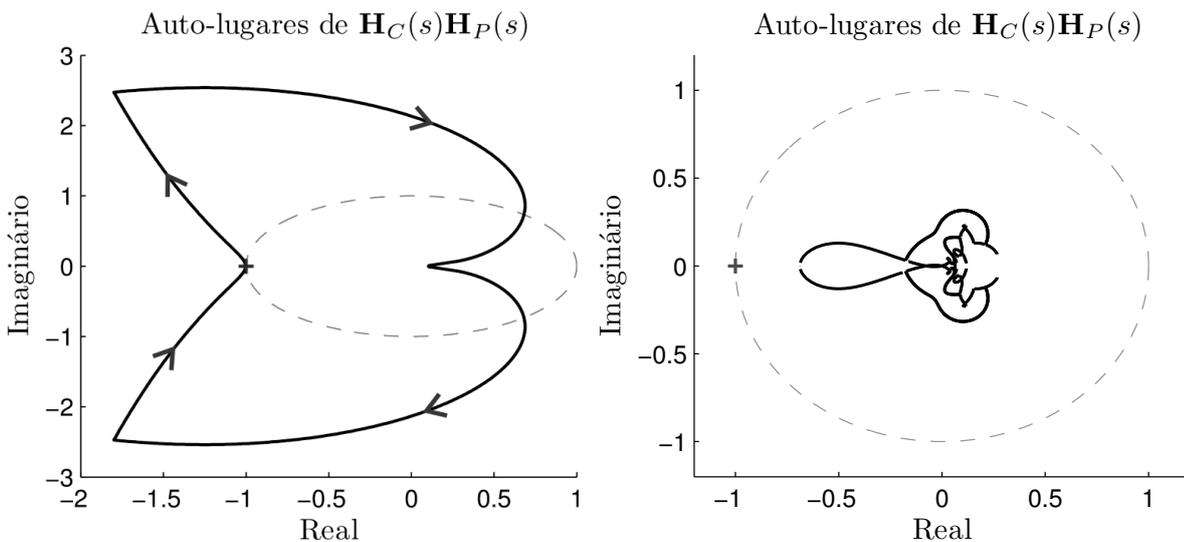
O resultados experimentais são mostrados para as três condições de β ,

$$\begin{aligned}
 \beta &= 1,00 \rightarrow \text{nominal} \\
 \beta &= 2,20 \rightarrow \text{estável} \\
 \beta &= 2,21 \rightarrow \text{instável}
 \end{aligned}
 \tag{5.55}$$

cujo propósito é demonstrar a correlação significativa entre as margens de ganho resultantes da análise da estabilidade empregando-se o modelo LTP.



(a) Auto-lugar correspondente a λ_1 .



(b) Auto-lugar correspondente a λ_2 .

(c) Auto-lugares correspondentes a $\lambda_1-\lambda_9$.

Figura 5.12 – Emprego do método do auto-lugar para análise da estabilidade para $\beta = 2,21$.

5.4 Resultados experimentais para validação da metodologia

Resultados experimentais são realizados para validação da metodologia de análise da estabilidade empregando modelos LTP do retificador monofásico em ponte completa. São realizadas experimentações para diferentes condições de ganho para o controlador com o objetivo de determinar experimentalmente o ganho limite da estabilidade do retificador, e compará-lo aos valores de margem de ganho obtidos no desenvolvimento teórico, apresentado na seção anterior.

Os resultados experimentais foram obtidos com base em uma plataforma digital de processamento em tempo real da Texas InstrumentsTM modelo TMS320F28335, processador de ponto flutuante, 32-bits, 150MHz da linha C2000TM.

As formas de onda relativas a operação nominal do retificador, sob condições de projeto, é mostrada na Figura 5.13, onde considera-se $\beta = 1$. As variáveis apresentadas correspondem às grandezas presentes internamente ao processador. São apresentadas as formas de onda da tensão de entrada de alimentação, da corrente de entrada e da tensão de saída, cujos sinais são amostrados em frequência igual à de comutação. São mostradas, ainda, a forma de onda da ação de controle do compensador da malha de tensão, a qual corresponde ao valor de pico da corrente de entrada, e a forma de onda da razão cíclica de operação dos semicondutores do inversor.

Pode-se observar a característica de correção do fator de potência da entrada, onde as formas de onda da tensão e corrente possuem características senoidais e em fase. Não são realizadas, neste trabalho, uma quantitativa com relação ao fator de potência e à taxa de distorção harmônica resultante na entrada do retificador monofásico em ponte completa, visto que o escopo desse trabalho remete à análise da estabilidade.

A forma de onda da tensão de saída é constituída por uma componente constante somado a uma componente de 120Hz. Nota-se que, mesmo com a elevada banda passante do controlador, a ondulação da tensão de saída não afeta a correção do fator de potência da entrada em regime permanente. Este fato, mostra que a estratégia de controle que inclui filtros rejeita-banda é efetiva e possibilita a elevação da banda passante de malha fechada, melhorando a resposta dinâmica do retificador.

A forma de onda da ação de controle da malha de tensão, que representa a amplitude da corrente de entrada do retificador é constituído basicamente por uma componente de corrente contínua. O produto dessa grandeza pela tensão de entrada produz a corrente de referência $i_L^*(t)$ a ser sintetizada pelo compensador da malha interna de corrente. Este último, atua sobre a razão cíclica de operação dos semicondutores, minimizando o erro entre a corrente de entrada $\langle i_L(t) \rangle$ e a corrente de referência.

A validação da metodologia de análise da estabilidade é realizada para o retificador monofásico em ponte completa. São obtidos resultados experimentais para ambos os casos estável e instável ($\beta = 2,20$ e $\beta = 2,21$, respectivamente) em torno do ponto limite de

estabilidade indicado pela análise teórica.

Para tanto, considere inicialmente $\beta = 2,20$. De acordo com a análise HTF desenvolvida anteriormente este sistema é estável, e isso pode ser confirmado pelos resultados experimentais apresentados na Figura 5.14. Neste caso, o sistema em malha fechada apre-

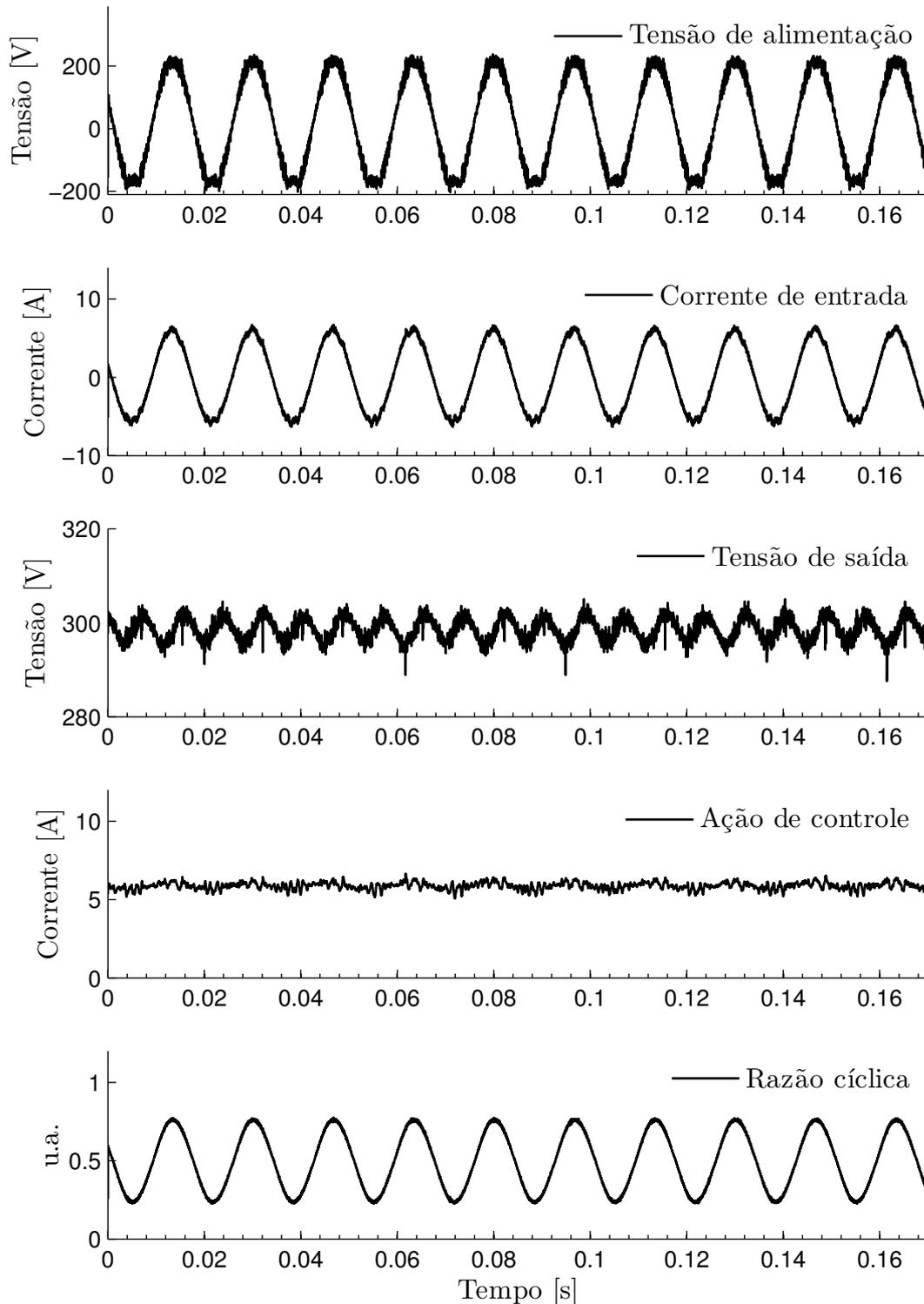


Figura 5.13 – Formas de onda de operação do retificador monofásico em ponte completa para a condição nominal.

senta desempenho insatisfatório, com reduzido fator de potência, distorção na forma de onda da corrente e resposta oscilatória à perturbações de referência e de carga. No entanto, o comportamento da tensão de saída com relação à corrente de entrada é estável em malha fechada. Esta característica pode ser observada pelo comportamento convergente

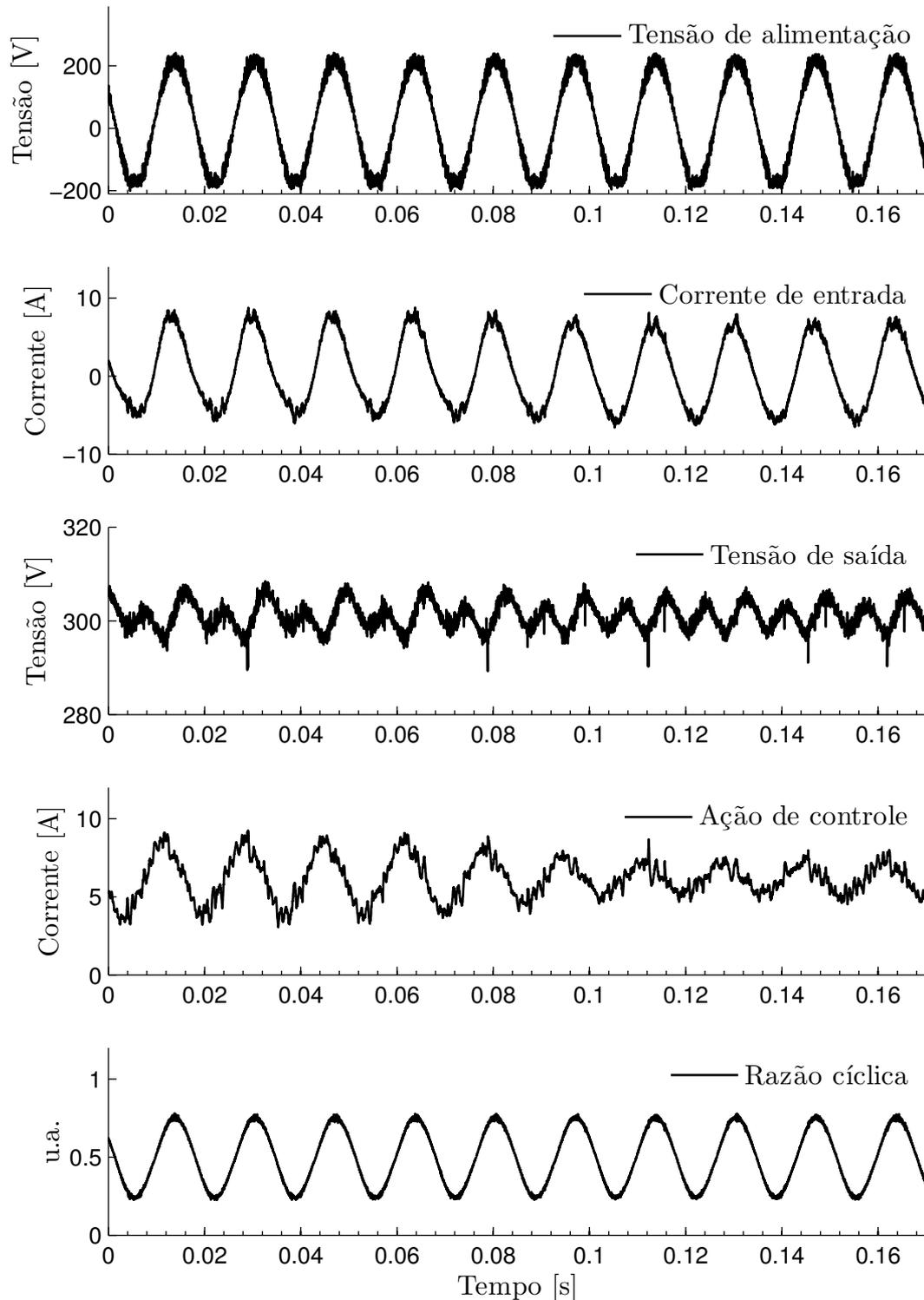


Figura 5.14 – Formas de onda de operação do retificador monofásico em ponte completa para a condição de ganho $\beta = 2,20$.

da ação de controle do compensador de tensão.

De forma semelhante, considere $\beta = 2,21$, cuja dinâmica de malha fechada é instável de acordo com a análise HTF desenvolvida anteriormente. A instabilidade presente neste caso pode ser verificada pelos resultados obtidos experimentalmente, mostrados na

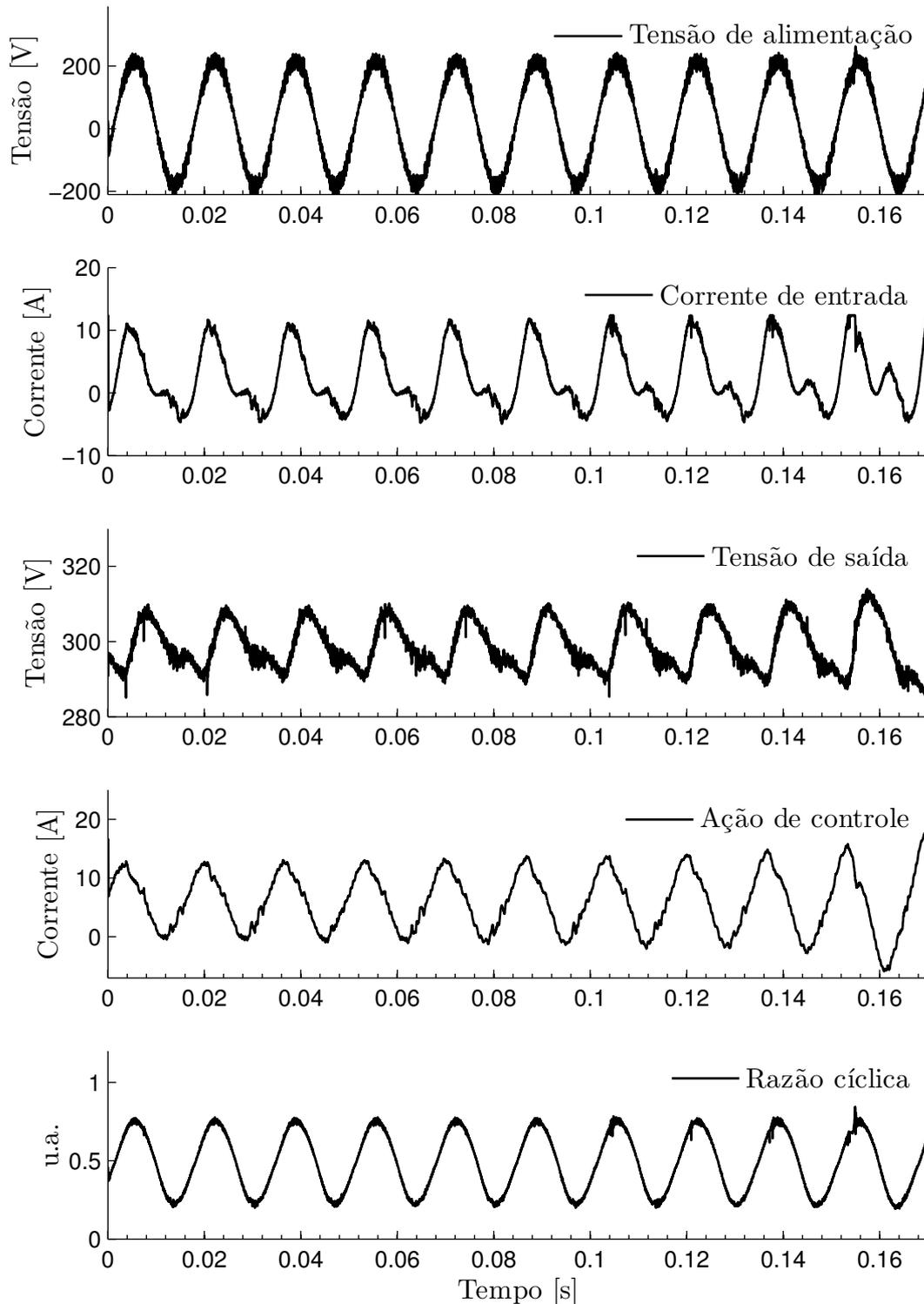


Figura 5.15 – Formas de onda de operação do retificador monofásico em ponte completa para a condição de ganho $\beta = 2,21$.

Figura 5.15. Neste caso, a característica divergente do sistema pode ser observada na corrente de entrada, na tensão de saída e na ação de controle do compensador de tensão.

Estes resultados demonstram que a utilização de um modelo que contempla os efeitos de modulação característicos de retificadores monofásicos é relevante para se determinar a característica da estabilidade em malha fechada.

5.5 Sumário

Neste capítulo foi apresentada a análise da estabilidade para um retificador em ponte completa utilizando o modelo LTP. Os resultados da análise são comparados aos obtidos empregando-se o modelo médio LTI, bem como às formas de onda obtidas experimentalmente.

Para tanto, os controladores da malha interna de corrente e da malha externa de compensação de tensão foram projetados utilizando ferramentas clássicas baseadas na resposta em frequência. O compensador de tensão inclui filtro rejeita banda e acentuada banda passante em malha fechada. Característica, esta, que melhora a resposta dinâmica transitória sem comprometer a correção do fator de potência da entrada na operação em regime permanente.

Os modelos LTP e LTI são determinados a partir dos parâmetros do retificador. A representação do modelo LTP por função de transferência harmônica foi obtida para a malha de compensação de tensão, considerando-se desacoplamento dinâmico entre as malhas interna e externa. Foi determinada a HTF da característica de tensão em malha aberta.

A partir da representação HTF foi realizada a análise da estabilidade baseando-se em teoremas generalizados, onde foi determinada a margem relativa da estabilidade do ganho. Foram analisados dois casos ao entorno ponto limite de estabilidade: um caso estável e outro instável.

Por fim, a correlação entre a metodologia de análise da estabilidade empregando HTF e a característica de estabilidade do retificador real é determinada experimentalmente. Estes resultados demonstraram que as análises de estabilidade empregando os modelos LTP apresentam reduzido erro, ao contrário das análises similares empregando os modelos LTI.

6 CONCLUSÕES

Retificadores monofásicos com correção do fator de potência de entrada apresentam efeito de modulação em frequência para a malha de controle da tensão, resultado da potência instantânea absorvida com característica pulsada. Esses efeitos de modulação não são modelados pelos métodos LTI convencionais. No entanto, sistemas de controle em malha fechada, projetados com base nos modelos LTI, tem sido empregados com êxito quando se utiliza compensadores com reduzida sensibilidade nas frequências de oscilação da saída. Nesses casos, o efeito das harmônicas da tensão de saída sobre o comportamento dinâmico de malha fechada é inexpressivo, e, por isso, os modelos médios LTI são adequados. Por outro lado, quando as frequências de ondulação da saída são realimentadas com pouca atenuação, seus efeitos são significativos e o modelo médio LTI não descreve o comportamento dinâmico da malha fechada.

No intuito de apresentar uma alternativa para determinar a estabilidade de retificadores PFC monofásicos em malha fechada, mesmo sob condições em que a insensibilidade para as oscilações de saída não é garantida, faz-se necessária uma representação matemática que inclua o seu comportamento. Para tanto, apresentou-se uma metodologia para análise da estabilidade empregando-se modelos lineares periódicos no tempo (LTP). Estes modelos contemplam os efeitos de modulação e interações espectrais presentes nesses retificadores em malha fechada, como demonstrado no Capítulo 4.

Este trabalho mostrou que a análise de sistemas baseada em modelos médios LTI pode não descrever corretamente o comportamento de conversores com característica de conversão de frequência, como é o caso dos retificadores estudados. Da mesma maneira, a análise convencional da estabilidade empregando-se modelos LTI pode apresentar um comportamento errôneo, baseado em representações matemáticas que não condizem com as respostas dinâmicas reais. Por outro lado, foi mostrado que os modelos LTP possuem resposta dinâmica muito similar às obtidas por simulação, apresentando uma melhor representação dinâmica para esses conversores.

Com o propósito de melhor descrever os métodos de análise da estabilidade para os sistemas retificadores monofásicos em ponte completa e em meia ponte com correção do fator de potência de entrada, foram apresentados a modelagem, o projeto dos controladores e análise da estabilidade empregando-se o método do determinante e o método dos auto-lugares, sendo estes comparados ao método convencional empregando modelo médio LTI e à resultados de simulação. Foram apresentados também resultados experimentais para o retificador em ponte completa.

A partir das análises dos dois retificadores, fica explícito o significativo erro quando emprega-se o modelo médio LTI para a análise da estabilidade desses retificadores monofásicos de alto desempenho. É importante destacar que, para muitos casos em que a

ondulação da tensão de saída é pouco significativa e/ou o sistema de controle em malha aberta apresenta reduzida banda-passante, os resultados obtidos pela análise da HTF se assemelham aos resultados utilizando-se o modelo LTI. No entanto, a análise da estabilidade pela abordagem HTF acarreta maior peso computacional. Outra dificuldade para o uso desta metodologia é a inexistência de ferramentas computacionais para sua rápida determinação.

Ainda, fica claro que o emprego do método do determinante facilita a interpretação dos resultados, pois resulta em apenas uma curva a ser analisada. Ele não fornece, porém, nenhuma medida de estabilidade relativa. Por outro lado, o critério de estabilidade baseado nos auto-lugares da função de malha aberta possibilita a determinação da margem relativa de ganho para o sistema compensado em malha fechada. A validação dos resultados foi realizada a partir de resultados de simulação e experimentais para os retificadores em ponte completa e em meia ponte, sendo estes comparados às análises teóricas.

6.1 Proposta para trabalhos futuros

Com base nos estudos realizados, tem-se algumas propostas para trabalhos futuros:

1. Analisar a influência de componentes harmônicas da rede de distribuição para análise dos retificadores em ponte completa e em meia ponte;
2. Aplicar a metodologia em outras topologias de conversores com características de modulação em frequência;
3. Estender a aplicação para sistemas trifásicos, possibilitando a análise da estabilidade de sistemas conectados com a rede, baseando-se em modelos mais completos, tendo em vista os efeitos das interações harmônicas;
4. Análise da estabilidade em tempo discreto empregando-se modelos LTP;
5. Elaboração de software para análise da estabilidade em tempo contínuo.

6.2 Publicações relacionadas

BELLINASO, L. V.; SCAPINI, R. Z.; MICHELS, L. Modeling and analysis of single phase full-bridge PFC boost rectifier using the LTP approach. In: *XI Congresso Brasileiro de Eletrônica de Potência*. [S.l.: s.n.], 2011.

Resumo – Este trabalho apresenta detalhes da abordagem HTF empregada para análise da estabilidade de sistemas lineares periódicos no tempo. Obtém o modelo linear periódico no tempo para o retificador em ponte completa. Aplica a metodologia para análise da estabilidade baseada nos auto-lugares, comparando os resultados obtidos com a análise baseada nos modelos médios LTI e por simulação.

SCAPINI, R. Z.; BELLINASO, L. V.; MICHELS, L. Is Conventional Stability Analysis Based on LTI Approach Valid for PFC Converters? In: *PCIM*. [S.l.: s.n.], 2012.

Resumo – Este trabalho compara dois sistemas de controle em malha fechada para o retificador em ponte completa com correção do fator de potência de entrada. Apresenta a análise da estabilidade empregando a abordagem HTF e o método dos auto-lugares. Compara os resultados obtidos com a simulação do retificador, mostrando que a abordagem de análise da estabilidade empregando modelos médios LTI pode apresentar erros significativos.

SCAPINI, R. Z.; BELLINASO, L. V.; MICHELS, L. Stability Analysis of Half-Bridge Rectifier Employing LTP Approach. In: *IECON*. [S.l.: s.n.], 2012.

Resumo – Este trabalho apresenta detalhes da abordagem HTF empregada para análise da estabilidade de sistemas lineares periódicos no tempo. Obtém o modelo linear periódico no tempo para o retificador em meia ponte com correção do fator de potência de entrada. Aplica a metodologia para análise da estabilidade baseada nos auto-lugares para dois sistemas de controle em malha fechada. Resultados de simulação do retificador são apresentados para comprovação da metodologia de análise demonstrada.

SCAPINI, R. Z.; BELLINASO, L. V.; MICHELS, L. Análise de Estabilidade do Retificador Meia-Ponte Monofásico Empregando a Abordagem LTP. In: *Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.: s.n.], 2012.

Resumo – Este trabalho emprega a abordagem HTF para a análise da estabilidade de dois sistemas de controle em malha fechada para o retificador em meia ponte com correção do fator de potência de entrada. O modelo linear periódico no tempo é obtido e emprega-se o método para análise da estabilidade baseado nos auto-lugares. Os resultados obtidos são comparados com simulação e com a abordagem baseada nos modelos médios LTI, mostrando que esta última pode apresentar erros significativos.

REFERÊNCIAS

- ABOULOIFA, A. et al. Nonlinear control design and averaging analysis of full-bridge boost rectifier. In: **IEEE International Symposium on Industrial Electronics, ISIE 2008**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 93–98.
- ALMÉR, S.; JÖNSSON, U. Harmonic analysis of pulse-width modulated systems. **Automatica**, Pergamon Press, Inc., Tarrytown, NY, USA, v. 45, n. 4, p. 851–862, April 2009. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109808005396>>.
- BELLINASSO, L.; SCAPINI, R.; MICHELS, L. Modeling and analysis of single phase full-bridge PFC boost rectifier using the LTP approach. In: **Brazilian Power Electronics Conference (COBEP)**. [S.l.: s.n.], 2011. p. 93 –100. ISSN 2175-8603.
- BUSO, S. et al. Simple digital control improving dynamic performance of power factor preregulators. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 13, n. 5, p. 814–823, sep 1998. ISSN 0885-8993.
- COSTA-CASTELLÓ, R.; GRIÑÓ, R.; FOSSAS, E. Resonant control of a single-phase full-bridge unity power factor boost rectifier. In: **IEEE International Conference on Control Applications, CCA 2007**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 599 –604. ISSN 1085-1992.
- DESOER, C.; WANG, Y.-T. On the generalized nyquist stability criterion. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 25, n. 2, p. 187–196, apr 1980. ISSN 0018-9286.
- EMADI, A.; NASIRI, A.; BEKIAROV, S. B. **Uninterruptible Power Supplies and Active Filters**. [S.l.]: CRC Press, 2005. ISBN 0-8493-3035-1.
- ERICKSON, R. W.; MAKSIMOVIC, D. **Fundamentals of Power Electronics**. 2nd. ed. New Jersey, USA: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- FORTMANN, T. E.; HITZ, K. L. **An Introduction to Linear Control Systems**. Kekker, New York: [s.n.], 1977.
- FRANCIS, B.; WONHAM, W. The internal model principle of control theory. **Automatica**, v. 12, n. 5, p. 457 – 465, 1976. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109876900066>>.
- GOODWIN, S. F.; SALGADO, M. E. **Control System Design**. Valparaíso, Chile: Prentice Hall, 2000.
- GRAY, R. M. **Toeplitz and Circulant Matrices: A review**. Boston, USA: Now Publishers Inc, 2006. 90 p. ISBN 1933019239.
- HALL, S. R.; WERELEY, N. M. Generalized nyquist stability criterion for linear time periodic systems. In: **American Control Conference, 1990**. [S.l.: s.n.], 1990. p. 1518 –1525.

HULIEHEL, F.; LEE, F.; CHO, B. Small-signal modeling of the single-phase boost high power factor converter with constant frequency control. In: **Power Electronics Specialists Conference, 1992. PESC '92 Record., 23rd Annual IEEE**. [S.l.: s.n.], 1992. p. 475–482 vol.1.

IEC 61000-3-2. **Electromagnetic compatibility (EMC) – Limits for harmonic current emissions (equipment input current ≤ 16 A per phase)**. Nov. 2005.

IEEE STD. 519-1992. **IEEE recommended practice and requirements for harmonic control in electrical power systems**. Apr. 1993.

JUGO, J.; LIZARRAGA, I.; ARREDONDO, I. Nonlinear modelling and analysis of active magnetic bearing systems in the harmonic domain: a case study. **Control Theory Applications, IET**, v. 2, n. 1, p. 61–71, january 2008. ISSN 1751-8644.

KESSELS, J. et al. On-line identification of vehicle fuel consumption for energy and emission management: An ltp system analysis. In: **American Control Conference, 2008**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 2070–2075. ISSN 0743-1619.

KIMBALL, J.; KREIN, P. Singular perturbation theory for dc-dc converters and application to pfc converters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, p. 01–12, march 2008. ISSN 0275-9306.

KUO, B. C.; GOLNARAGHI, F. **Automatic Control Systems**. 8th. ed. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2002. ISBN 0471134767.

LO, Y.-K.; OU, S.-Y.; YEN, S.-C. The analysis and elimination of voltage imbalance between the split capacitors in half-bridge boost rectifiers. In: **IEEE International Symposium on Industrial Electronics, ISIE 2002**. [S.l.: s.n.], 2002. v. 3, p. 728–730.

LOH, P. C. et al. A comparative analysis of multiloop voltage regulation strategies for single and three-phase ups systems. **Power Electronics, IEEE Transactions on**, v. 18, n. 5, p. 1176–1185, sept. 2003. ISSN 0885-8993.

LOVE, G.; WOOD, A. Harmonic state space model of power electronics. In: **13th International Conference on Harmonics and Quality of Power – ICHQP**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1–6.

MÖLLERSTEDT, E. **Dynamic Analysis of Harmonics in Electrical Systems**. 2000. 148 p. Tese (Doutorado) — Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, United Kingdom, 2000.

MÖLLERSTEDT, E.; BERNHARDSSON, B. A simple model for harmonics in electrical distribution networks. In: **Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control**. [S.l.: s.n.], 1997. v. 4, p. 3108–3109.

_____. A harmonic transfer function model for a diode converter train. In: **IEEE Power Engineering Society Winter Meeting**. [S.l.: s.n.], 2000. v. 2, p. 957–962.

_____. Out of control because of harmonics: an analysis of the harmonic response of an inverter locomotive. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 20, n. 4, p. 70–81, aug 2000. ISSN 1066-033X.

MÖLLERSTEDT, E.; STOTHERT, A. A model of a micro-turbine line side converter. In: **International Conference on Power System Technology, PowerCon 2000**. [S.l.: s.n.], 2000. v. 2, p. 909–914.

NODARI, L. et al. A new digital control system for a single-phase half-bridge rectifier with fast dynamic response. In: **Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE), 2010 IEEE**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1204–1211.

OGATA katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 4^a. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003. 788 p. ISBN 8587918230.

PERREAULT, D.; VERGHESE, G. Time-varying effects in models for current-mode control. In: **Power Electronics Specialists Conference, 1995. PESC '95 Record., 26th Annual IEEE**. [S.l.: s.n.], 1995. v. 1, p. 621–628 vol.1.

PHILLIPS, C. L.; HARBOR, R. D. **Feedback Control Systems**. 3rd. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 683 p. ISBN 0133716910.

PRODIC, A. et al. Digitally controlled low-harmonic rectifier having fast dynamic responses. In: **Seventeenth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition, APEC 2002**. [S.l.: s.n.], 2002. v. 1, p. 476–482.

SCAPINI, R. Z.; BELLINASSO, L. V.; MICHELS, L. Análise de estabilidade do retificador meia-ponte monofásico empregando a abordagem LTP. In: **XIX Congresso Brasileiro de Automática**. [s.n.], 2012. p. 8. Disponível em: <<https://sites.google.com/a/dee.ufcg.edu.br/cba-2012/home>>.

_____. Is conventional stability analysis based on LTI approach valid for pfc converters? In: **Power Electronics South America 2012**. São Paulo, Brazil: [s.n.], 2012. p. 8. Disponível em: <<http://www.mesago.de/en/pesa/home.htm>>.

_____. Stability analysis of half-bridge rectifier employing LTP approach. In: **38th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society**. Montreal, Canada: [s.n.], 2012. p. 6. Disponível em: <<http://www.icelie2012.org/>>.

SILVA JR., E. T. da. **Análise e projeto de compensadores para o conversor boost**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 1994.

SRINIVASAN, R.; ORUGANTI, R. A unity power factor converter using half-bridge boost topology. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 13, n. 3, p. 487–500, may 1998. ISSN 0885-8993.

STROBL, B. Analysis of stability for networks including converters. In: **European Conference on Power Electronics and Applications**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 1–10.

TODD, P. C. **UC3854 Controlled Power Factor Correction Circuit Design**. [S.l.], 1999.

VORPERIAN, V. Simplified analysis of pwm converters using model of pwm switch. continuous conduction mode. **Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on**, v. 26, n. 3, p. 490–496, may 1990. ISSN 0018-9251.

WERELEY, N.; HALL, S. Frequency response of linear time periodic systems. In: **Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.: s.n.], 1990. v. 6, p. 3650–3655.

_____. Linear time periodic systems: Transfer function, poles, transmission zeroes and directional properties. In: **American Control Conference, 1991**. [S.l.: s.n.], 1991. v. 6, p. 1179–1184.

WERELEY, N. M. **Analysis and Control of Linear Periodically Time Varying Systems**. 1991. 224 p. Tese (Doctor of Philosophy in the Field of Estimation and Control) — Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, USA, 1990.

ZHOU, J.; HAGIWARA, T. Generalized nyquist criterion of continuous-time periodic systems and its implementation i: Theoretic results. In: **Proceedings of the 41st SICE Annual Conference**. [S.l.: s.n.], 2002. v. 3, p. 1700–1705.

_____. Generalized nyquist criterion of continuous-time periodic systems and its implementation ii: Numerical computations and convergence. In: **Proceedings of the 41st SICE Annual Conference**. [S.l.: s.n.], 2002. v. 3, p. 1706–1709.

APÊNDICES

Apêndice A – Determinação das grandezas médias no período de comutação

A modelagem matemática de sistemas dinâmicos utiliza aproximação de pequenas ondulações, considerando-se apenas as componentes de baixa frequência dos sinais. Dessa forma, o processo de modelagem resulta em modelos dinâmicos para as características médias no período de comutação, cuja representação desconsidera as dinâmicas de alta frequência, como a dinâmica da comutação.

Neste apêndice, apresenta-se com maiores detalhes a obtenção das grandezas de tensão e corrente médias no período de comutação e a condição de operação da razão cíclica de regime permanente. Estas considerações são empregadas na determinação dos modelos dinâmicos dos retificadores em ponte completa e meia ponte.

A.1 Taxa de variação média no período de comutação

Esta seção apresenta uma equação dinâmica de equivalência para as taxas de variações da corrente em indutores e da tensão em capacitores, no que tange aos valores médios no período de comutação.

A.1.1 Taxa de variação da corrente média do indutor

Considere o valor instantâneo da corrente no indutor $i_L(t)$ produzido por um arranjo de comutação, onde normalmente emprega-se modulação por largura de pulso (PWM). O valor médio no período de comutação para a corrente no indutor é resultado da integração no período:

$$\langle i_L(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} i_L(\tau) d\tau \quad (\text{A.1})$$

cuja taxa de variação da corrente média, por sua vez, é dada por:

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} i_L(\tau) d\tau \right] \quad (\text{A.2})$$

A solução de (A.2) pode ser obtida com a aplicação da regra integral de Leibniz, dada pela seguinte solução de diferenciais parciais:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x, z) dx = \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial (f(x, z))}{\partial z} dx + \frac{\partial (b(z))}{\partial z} f(b(z), z) - \frac{\partial (a(z))}{\partial z} f(a(z), z) \quad (\text{A.3})$$

Fazendo-se uma relação de equivalência entre os termos da solução de Leibniz e a

equação que determina o valor médio da corrente no indutor (A.2), tal que,

$$\begin{aligned}
 z &\rightarrow t \\
 x &\rightarrow \tau \\
 a(z) &\rightarrow t \\
 b(z) &\rightarrow t + T_s \\
 f(x, z) &\rightarrow i_L(\tau)
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

a solução de Leibniz pode ser reescrita por:

$$\frac{d}{dt} \int_t^{t+T_s} i_L(\tau) d\tau = \int_t^{t+T_s} \frac{d(i_L(\tau))}{dt} d\tau + \frac{d(t + T_s)}{dt} i_L(t + T_s) - \frac{d(t)}{dt} i_L(t) . \tag{A.5}$$

Como a diferencial de $i_L(\tau)$ com relação ao tempo é nula,

$$\frac{d(i_L(\tau))}{dt} = 0 \tag{A.6}$$

e as diferenciais dos limites de integração,

$$\begin{aligned}
 \frac{d(t + T_s)}{dt} &= 1 \\
 \frac{d(t)}{dt} &= 1
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

são constantes unitárias, a solução da integral de Leibniz para a corrente do indutor no período de comutação T_s é dada por:

$$\frac{d}{dt} \int_t^{t+T_s} i_L(\tau) d\tau = i_L(t + T_s) - i_L(t) . \tag{A.8}$$

Multiplicando-se ambos os lados de (A.8) por $\frac{1}{T_s}$, obtém-se a equação que descreve a taxa de variação para a corrente média do indutor em um período de comutação T_s :

$$\frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \frac{i_L(t + T_s) - i_L(t)}{T_s} \tag{A.9}$$

A.1.2 Taxa de variação da tensão média do capacitor

Da mesma forma que no caso anterior, considere o valor instantâneo da tensão no capacitor $v_C(t)$, cujo valor médio em um período de comutação T_s é dado pela expressão:

$$\langle v_C(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_C(\tau) d\tau . \tag{A.10}$$

Diferenciando-se ambos os lados da equação acima, obtém-se uma equação para a

taxa de variação da tensão média:

$$\frac{d(\langle v_C(t) \rangle)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_C(\tau) d\tau \right] \quad (\text{A.11})$$

Aplicando-se a regra integral de Leibniz (A.3) e substituindo-se os termos de equivalência para (A.11), escreve-se:

$$\frac{d}{dt} \int_t^{t+T_s} v_C(\tau) d\tau = \int_t^{t+T_s} \frac{d(v_C(\tau))}{d\tau} d\tau + \frac{d(t+T_s)}{dt} v_C(t+T_s) - \frac{d(t)}{dt} v_C(t) . \quad (\text{A.12})$$

Resolvendo-se as diferenciações à direita da igualdade, obtém-se a solução para a derivada de uma integração definida, na forma:

$$\frac{d}{dt} \int_t^{t+T_s} v_C(\tau) d\tau = v_C(t+T_s) - v_C(t) \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando-se ambos os lados de (A.13) por $\frac{1}{T_s}$, obtém-se a equação que descreve a taxa de variação para a tensão média do capacitor em um período de comutação T_s :

$$\frac{d(\langle v_C(t) \rangle)}{dt} = \frac{v_C(t+T_s) - v_C(t)}{T_s} \quad (\text{A.14})$$

A.2 Tensão média nos terminais ca de entrada do inversor em ponte completa

A partir do circuito do retificador monofásico em ponte completa, mostrado na Figura A.1, considere os valores instantâneos de tensão $v_{ao}(t)$ e $v_{bo}(t)$ nos braços do inversor e uma portadora triangular com amplitude definida no intervalo $[0, 1]$ e período T_s , como mostra a Figura A.2(a).

Considere o emprego da estratégia de modulação PWM definida para uma dada razão cíclica $d(t)$, de modo que

$$\begin{aligned} S_1 &\rightarrow d(t) \\ S_3 &\rightarrow 1 - d(t) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

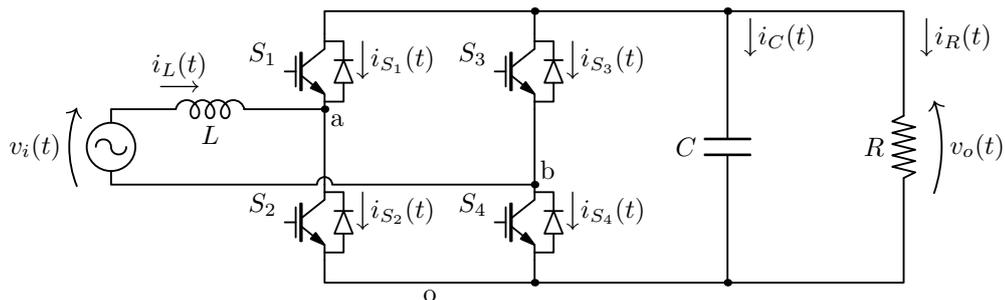


Figura A.1 – Retificador em ponte completa.

são respectivamente os sinais modulantes para os interruptores S_1 e S_3 , cuja característica de operação de inversores alimentados em tensão resulta na operação complementar dos interruptores de cada braço:

$$\begin{aligned} S_2 &= \overline{S_1} \\ S_4 &= \overline{S_3}. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Definida a estratégia de modulação, as formas de onda de tensão resultantes nos terminais ca do inversor são funções do sinal modulante $\langle d(t) \rangle$ e do valor médio da tensão cc de saída $\langle v_o(t) \rangle$.

Os valores instantâneos de tensão $v_{ao}(t)$ e $v_{bo}(t)$ nos braços do inversor são mostrados, respectivamente, na Figura A.2(b) e na Figura A.2(c).

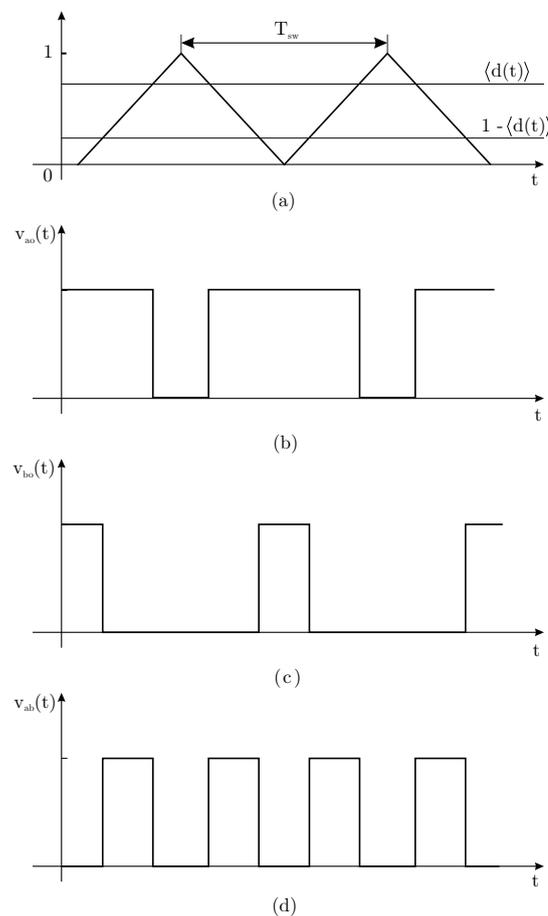


Figura A.2 – Formas de onda de tensão instantâneas nos terminais ac do inversor em função da razão cíclica. (a) Portadora e sinais modulantes. (b) Tensão de braço relativa à modulante $d(t)$. (c) Tensão de braço relativa à modulante $1 - d(t)$. (d) Tensão instantânea nos terminais ca do inversor.

Os valores médios no período de comutação para as tensões de braço $v_{ao}(t)$ e $v_{bo}(t)$

são dadas por

$$\langle v_{ao}(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_{ao}(\tau) d\tau = \langle v_o(t) \rangle \langle d(t) \rangle \quad (\text{A.17})$$

$$\langle v_{bo}(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_{bo}(\tau) d\tau = \langle v_o(t) \rangle [1 - \langle d(t) \rangle], \quad (\text{A.18})$$

respectivamente.

A tensão instantânea $v_{ab}(t)$ entre os braços ca do inversor é dada pela diferença instantânea entre as tensões individuais dos braços:

$$v_{ab}(t) = v_{ao}(t) - v_{bo}(t), \quad (\text{A.19})$$

cuja forma de onda é mostrada na Figura A.2(d).

Aplicando-se o teorema do valor médio em (A.19), resulta:

$$\frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_{ab}(\tau) d\tau = \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_{ao}(\tau) d\tau - \frac{1}{T_s} \int_t^{t+T_s} v_{bo}(\tau) d\tau \quad (\text{A.20})$$

que corresponde aos valores médios das tensões dos terminais. Assim, a tensão média no período de comutação entre os terminais ca do inversor pode ser escrita na forma

$$\langle v_{ab}(t) \rangle = \langle v_{ao}(t) \rangle - \langle v_{bo}(t) \rangle. \quad (\text{A.21})$$

Substituindo-se (A.17)–(A.18) em (A.21), resulta:

$$\langle v_{ab}(t) \rangle = \langle v_o(t) \rangle \langle d(t) \rangle - \langle v_o(t) \rangle [1 - \langle d(t) \rangle] . \quad (\text{A.22})$$

Aqui, reagrupando-se os termos de (A.22), resulta na equação que descreve a tensão média no período de comutação entre os terminais de entrada do inversor, em função da tensão de saída e da razão cíclica:

$$\langle v_{ab}(t) \rangle = [2\langle d(t) \rangle - 1] \langle v_o(t) \rangle. \quad (\text{A.23})$$

A.3 Tensão média da fonte de alimentação senoidal

Nesta seção é apresentada a determinação do valor médio no período de comutação T_s para a tensão de entrada de alimentação. São mostradas as condições necessárias para que a tensão média possa ser aproximada pelo valor da tensão instantânea. Considera-se a tensão de alimentação cossenoidal, com amplitude fixa e sem variação de fase, definida na forma:

$$v_i(t) = V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) . \quad (\text{A.24})$$

A tensão média no período de comutação é, então, dada pela integral sobre o período:

$$\langle v_i(t) \rangle = \frac{1}{T_s} V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \int_t^{t+T_s} \cos(\omega_1 \tau) d\tau . \quad (\text{A.25})$$

Resolvendo-se a integração,

$$\langle v_i(t) \rangle = \frac{1}{T_s} V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \left[\frac{\text{sen}(\omega_1 \tau)}{\omega_1} \right]_t^{t+T_s} \quad (\text{A.26})$$

e substituindo-se os limites de integração, resulta:

$$\langle v_i(t) \rangle = \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{\omega_1 T_s} [\text{sen}(\omega_1 t + \omega_1 T_s) - \text{sen}(\omega_1 t)] . \quad (\text{A.27})$$

Considerando-se a identidade trigonométrica:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \cos(b) + \cos(a) \text{sen}(b) , \quad (\text{A.28})$$

e aplicando-a em (A.26), escreve-se:

$$\langle v_i(t) \rangle = \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{\omega_1 T_s} [\text{sen}(\omega_1 t) \cos(\omega_1 T_s) + \cos(\omega_1 t) \text{sen}(\omega_1 T_s) - \text{sen}(\omega_1 t)] . \quad (\text{A.29})$$

Reagrupando-se os termos semelhantes em função do tempo, resulta:

$$\langle v_i(t) \rangle = \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{\omega_1 T_s} [(\cos(\omega_1 T_s) - 1) \text{sen}(\omega_1 t) + \text{sen}(\omega_1 T_s) \cos(\omega_1 t)] . \quad (\text{A.30})$$

Considerando-se, agora, a identidade trigonométrica:

$$\text{sen}^2\left(\frac{\omega_1 T_s}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\omega_1 T_s) \quad (\text{A.31})$$

e substituindo-a em (A.30), tem-se a equação que descreve a tensão de entrada média no período T_s em função da frequência do sinal e do período de amostragem:

$$\langle v_i(t) \rangle = \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{\omega_1 T_s} \left[-2 \text{sen}^2\left(\frac{\omega_1 T_s}{2}\right) \text{sen}(\omega_1 t) + \text{sen}(\omega_1 T_s) \cos(\omega_1 t) \right] \quad (\text{A.32})$$

Assumindo-se que a frequência de amostragem ω_s é muito maior que a frequência do sinal de tensão de entrada ω_1 , tal que

$$\begin{aligned} T_s &\ll T_1 \\ \omega_s &\gg \omega_1 \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

é plausível aproximar a função senoidal pela expansão de Taylor de primeira ordem:

$$\text{sen}(\omega_1 T_s) \approx \omega_1 T_s . \quad (\text{A.34})$$

Substituindo-se (A.34) pela equação da tensão média,

$$\langle v_i(t) \rangle = \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{\omega_1 T_s} \left[\frac{-2(\omega_1 T_s)^2}{4} \text{sen}(\omega_1 t) + (\omega_1 T_s) \cos(\omega_1 t) \right] \quad (\text{A.35})$$

e simplificando-se os termos de $\omega_1 T_s$, resulta na seguinte expressão:

$$\langle v_i(t) \rangle = V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \left[-\frac{\omega_1 T_s}{2} \text{sen}(\omega_1 t) + \cos(\omega_1 t) \right] . \quad (\text{A.36})$$

Para valores de T_s muito pequenos, tal que

$$\frac{\omega_1 T_s}{2} \ll 1 \quad (\text{A.37})$$

a componente em função de $\text{sen}(\omega_1 t)$ pode ser desconsiderada. Com isso, a partir das hipóteses assumidas, o valor médio no período de comutação para a tensão de entrada pode ser aproximado pela função:

$$\langle v_i(t) \rangle = V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t) . \quad (\text{A.38})$$

Sendo, esta, equivalente à forma de onda instantânea da tensão de entrada:

$$\langle v_i(t) \rangle = v_i(t) . \quad (\text{A.39})$$

A relação de convergência entre as formas de onda da tensão média e da tensão instantânea de entrada de alimentação pode ser analisada graficamente na Figura A.3. Para tanto, considere a equação da tensão média (A.32) normalizada com relação ao respectivo valor de pico:

$$\frac{\langle v_i(t) \rangle}{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}} = \frac{-2 \text{sen}^2\left(\frac{\omega_1 T_s}{2}\right)}{\omega_1 T_s} \text{sen}(\omega_1 t) + \frac{\text{sen}(\omega_1 T_s)}{\omega_1 T_s} \cos(\omega_1 t) \quad (\text{A.40})$$

Com o propósito de traçar-se uma relação entre frequências ω_1 e ω_s , substitui-se na equação anterior,

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \quad (\text{A.41})$$

que resulta na seguinte expressão para a tensão média de entrada e função das frequências e normalizada com relação ao valor de pico:

$$\frac{\langle v_i(t) \rangle}{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}} = -\frac{\omega_s}{\omega_1} \frac{\text{sen}^2\left(\pi \frac{\omega_1}{\omega_s}\right)}{\pi} \text{sen}(\omega_1 t) + \frac{\omega_s}{\omega_1} \frac{\text{sen}\left(2\pi \frac{\omega_1}{\omega_s}\right)}{2\pi} \cos(\omega_1 t) \quad (\text{A.42})$$

A Figura A.3 mostra a diferença de amplitude e fase da tensão média de entrada, no período de comutação, com relação à forma de onda instantânea. Nota-se que a convergência em amplitude é muito mais rápida que a convergência de fase. No entanto, é natural se trabalhar com frequências de comutação na faixa de 50–100 vezes maiores que

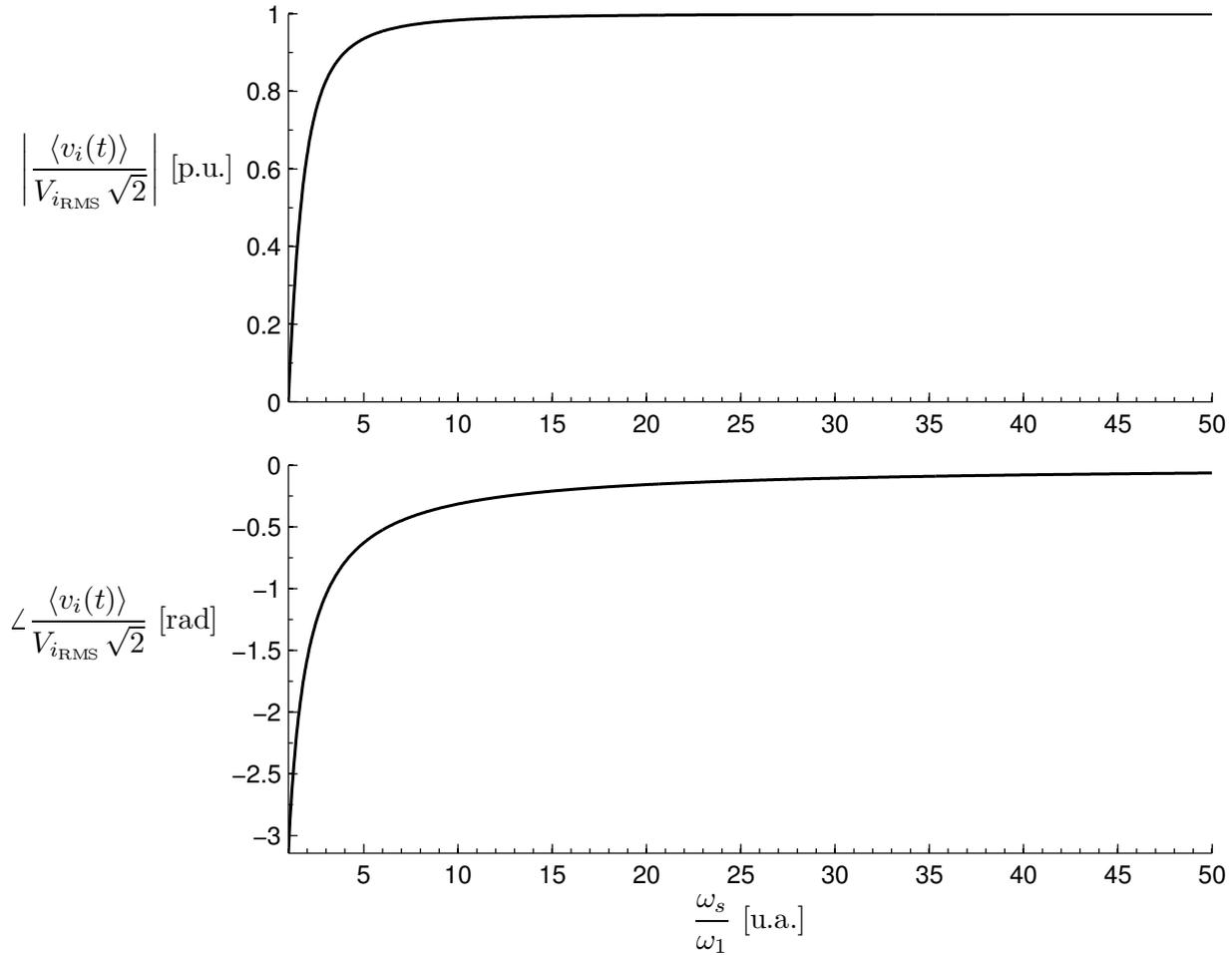


Figura A.3 – Amplitude e fase da tensão média de entrada normalizada com relação ao valor de pico.

a frequência da rede elétrica, condição esta que apresenta erro de deslocamento de fase também muito pequeno. Assim, é plausível aproximar-se a tensão média pelo respectivo valor instantâneo.

A.4 Razão cíclica de regime permanente para o retificador em ponte completa

Nesta seção é mostrado o efeito da simplificação da razão cíclica de regime permanente, empregado para linearização do modelo LTP. A razão cíclica média no período de comutação T_s é obtida a partir da equação dinâmica do circuito de entrada, ou da equação da corrente no indutor:

$$L \frac{d(\langle i_L(t) \rangle)}{dt} = \langle v_i(t) \rangle - [2\langle d(t) \rangle - 1] \langle v_o(t) \rangle . \quad (\text{A.43})$$

Substituindo-se as respectivas funções médias para a corrente $\langle i_L(t) \rangle$ e a tensão $\langle v_i(t) \rangle$

de entrada, resulta:

$$\langle d(t) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t)}{2\langle v_o(t) \rangle} + \frac{L\omega_1 I_{\text{RMS}} \sqrt{2} \sin(\omega_1 t)}{2\langle v_o(t) \rangle} \quad (\text{A.44})$$

onde a tensão de saída $\langle v_o(t) \rangle$ é composta, em regime permanente, por uma componente contínua e uma componente alternada de frequência $2\omega_1$:

$$\langle v_o(t) \rangle = V_o^* + \tilde{v}_o(t) . \quad (\text{A.45})$$

O efeito da componente alternada $\tilde{v}_o(t)$ sobre a forma de onda da razão cíclica $\langle d(t) \rangle$ é avaliado para diversos valores de ondulação com relação ao nível contínuo da tensão de saída V_o^* . Os ensaios realizados empregam a equação dinâmica da razão cíclica média (A.44) e são mostrados na Tabela A.1.

Como resultado, é possível simplificar a equação dinâmica da razão cíclica de operação dos semicondutores. Assumindo-se, como hipóteses,

$$\begin{cases} \tilde{v}_o(t) < 0,2V_o^* \\ L\omega_1 I_{\text{RMS}} \ll V_{i_{\text{RMS}}} \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

a equação dinâmica que descreve o comportamento da razão cíclica média no período de comutação pode ser escrita na forma:

$$\langle d(t) \rangle \approx \frac{1}{2} + \frac{V_{i_{\text{RMS}}} \sqrt{2}}{2V_o^*} \cos(\omega_1 t) . \quad (\text{A.47})$$

Considerando-se um caso com ondulação do barramento de 20%, o erro relativo da amplitude da primeira componente harmônica da razão cíclica é de 2,6%, o que indica que a aproximação é coerente.

Tabela A.1 – Efeito da amplitude da ondulação da tensão de saída nas amplitudes das componentes harmônicas da razão cíclica.

Amplitude [p.u.]			Componentes da razão cíclica			
$ v_i(t) $	$ V_o^* $	$ \tilde{v}_o(t) $	cc	1 ^a harm.	3 ^a harm.	5 ^a harm.
1	2	0%	0,5	0,2500	0,0	0,0
1	2	5%	0,5	0,2504	0,0063	0,0002
1	2	10%	0,5	0,2516	0,0126	0,0006
1	2	20%	0,5	0,2565	0,0259	0,0026
1	2	50%	0,5	0,2989	0,0801	0,0215

Apêndice B – Ortogonalidade de funções exponenciais

A representação de modelos lineares periódicos no tempo por funções de transferência harmônica emprega expansão por séries de Fourier e modulação exponencial para o plano complexo. Neste apêndice, demonstra-se a propriedade de ortogonalidade de funções exponenciais, princípio básico para a representação desses modelos no domínio da frequência por HTF.

Para tanto, da propriedade de funções ortogonais, duas funções arbitrárias $g(x)$ e $f(x)$ são ortogonais entre si se, e somente se, a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t) dt = 0 \quad (\text{B.1})$$

for satisfeita.

Considere, então, duas funções exponenciais arbitrárias não nulas,

$$f(t) = c_1 e^{ja\omega_1 t} \quad \text{e} \quad g(t) = c_2 e^{jb\omega_1 t} \quad (\text{B.2})$$

para $\forall c_1$ e $c_2 \in \mathbb{C}$. Aplicando-se a propriedade da ortogonalidade de funções, resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_1 e^{ja\omega_1 t} c_2 e^{jb\omega_1 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} c_1 c_2 e^{j(a+b)\omega_1 t} dx = 0 \quad (\text{B.3})$$

Como funções exponenciais complexas são de características circulares, o resultado da integração em todo cominho real é sempre nulo para todo coeficiente imaginário. Dessa forma, as funções $f(x)$ e $g(x)$ são sempre ortogonais entre si para todo $a \neq b$.

Com isso, para um conjunto de funções exponenciais não nulas,

$$f_n(t) = c_n e^{jn\omega_1 t} \quad (\text{B.4})$$

a propriedade da ortogonalidade é satisfeita aos pares para $\forall n \in \mathbb{R}$. Dessa maneira, $f_n(t)$ forma um conjunto de funções linearmente independentes (ortogonais) $\forall n \in \mathbb{R}$.

Este conceito pode ser estendido para se encontrar a solução da equação exponencial, definida na forma:

$$\sum_{n=\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_1 t} = 0 \quad (\text{B.5})$$

para $\forall c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Expandindo-se os termos da soma, escreve-se:

$$\dots + c_{-2} e^{-j2\omega_1 t} + c_{-1} e^{-j\omega_1 t} + c_0 + c_1 e^{j\omega_1 t} + c_2 e^{j2\omega_1 t} + \dots = 0 \quad (\text{B.6})$$

Como $e^{jn\omega_1 t}$ forma uma base ortogonal para todo n , os termos do somatório (B.5) são todos linearmente independentes entre si. Em consequência, o conjunto solução existe

somente se todos os termos linearmente independentes forem nulos, de maneira que

$$c_n e^{jn\omega_1 t} = 0 \quad (\text{B.7})$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, a solução de (B.5) independe dos termos exponenciais complexos, dada por

$$c_n = 0 \quad (\text{B.8})$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.