UFSM

Dissertação de Mestrado

CONHECIMENTO SIMBÓLICO NA FILOSOFIA KANTIANA DA ARITMÉTICA

Dayane Fengler

PPGF

Santa Maria, RS, Brasil

2005

CONHECIMENTO SIMBÓLICO
NA FILOSOFIA KANTIANA DA ARITMÉTICA

---

por

Dayane Fengler

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Filosofia, área de concentração em Filosofia Transcendental e Hermenêutica, linha de pesquisa Fundamentação do Conhecimento, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Filosofia

PPGF

Santa Maria, RS, Brasil

2005

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Sociais e Humanas
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

CONHECIMENTO SIMBÓLICO
NA FILOSOFIA KANTIANA DA ARITMÉTICA

elaborada por
Dayane Fengler

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Filosofia

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Abel Lassalle Casanave - UFSM
(Presidente / Orientador)

Prof. Dr. Oscar Miguel Esquisabel – UNLP
(Examinador)

Prof. Dr. Dirk Greimann - UFSM
(Examinador)

Prof. Dr. Frank Thomas Sautter - UFSM
(Suplente)

Santa Maria, RS, 28 de fevereiro de 2005.

Dedico este trabalho
ao meu irmão **Lairton**
e ao **Luiz**.

AGRADECIMENTOS

No caminho percorrido até a realização deste trabalho foram muitas as parcerias. Manifestamos aqui nossos agradecimentos especiais:

- ao Professor Abel Lassalle Casanave, pela dedicação na orientação durante os dois anos do mestrado e também na graduação, mesclando confiança, seriedade, exigência, carinho e, sobretudo nessa fase final, muita paciência;
- ao Professor João Batista Peneireiro, pela disposição em ajudar, sempre sorridente, uma estudante de filosofia nos seus percalços ao transitar pela matemática;
- ao Professor Oscar Miguel Esquisabel, pela disponibilidade para ler e discutir nossos trabalhos em cada oportunidade em que esteve em Santa Maria, trazendo sempre valiosas contribuições;
- aos Professores Oswaldo Chateaubriand Filho e Luiz Carlos Pereira pela acolhida durante a missão de estudo do Programa de Cooperação Acadêmica – PROCAD/UFSM/PUC-Rio. Neste contexto, estendo os agradecimentos aos amigos Janice e Wagner pela generosidade com que me acolheram em sua casa;
- à colega e amiga Tiana de Barros Sant’Anna e à amiga Simone Teloeken pela amizade sincera e pelo apoio demonstrado;
- aos meus pais, Ilse e Irineu; e aos meus irmãos Fernando, Daniele e Lairton, parceiros incondicionais;
- ao Luiz, pela dedicação e apoio.
- à Universidade Federal de Santa Maria, pela formação e pela assistência estudantil, em particular, pelo benefício da Casa do Estudante.
- finalmente, à CAPES pela bolsa de estudos.

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIAÇÕES

CRP - Crítica da Razão Pura

UFSM - Universidade Federal de Santa Maria

UNLP – Universidade Nacional de La Plata (Argentina).

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Filosofia
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

CONHECIMENTO SIMBÓLICO
NA FILOSOFIA KANTIANA DA ARITMÉTICA

AUTORA: DAYANE FENGLER
ORIENTADOR: ABEL LASSALLE CASANAVE
Data e Local da Defesa: Santa Maria/RS, 28 de fevereiro de 2005.

Esta dissertação apresenta uma investigação acerca de qual, segundo Kant, é o papel do simbolismo na aritmética. Dado que são poucas as referências à aritmética na obra de Kant, buscou-se montar um quadro preliminar a respeito do papel do simbolismo na sua filosofia da matemática como um todo. Sobretudo no período pré-crítico, mas também na noção de construção simbólica apresentada na *Crítica da Razão Pura*, parecem sobreviver heranças do pensamento leibniziano, em particular, da noção de conhecimento simbólico, cujo exame também está contemplado neste quadro preliminar. A investigação foi conduzida, centralmente, pelo exame da vinculação do simbolismo com os dois elementos principais presentes na filosofia kantiana madura da matemática: intuição e conceito. Kant estabelece que a relação entre intuição e conceito ocorre na matemática por meio de construção, isto é, da exibição a priori de um conceito na intuição. Isto caracteriza a chamada construção ostensiva. O simbolismo ganha destaque no que Kant denomina de construção simbólica ou característica de conceitos, mediante a qual os conceitos são exibidos por meio de signos que estão por eles. A ênfase neste aspecto simbólico se justifica pelo crescente interesse que tem sido demonstrado neste respeito pela filosofia da matemática contemporânea, uma vez que aponta para um fato fundamental da prática matemática, a saber, a manipulação simbólica. Com o propósito de esclarecer qual o tipo de construção de conceitos próprio da aritmética passou-se, então, ao exame da renovação dos estudos acerca da filosofia da matemática de Kant, particularmente, da aritmética, que apontam para a discussão de questões vinculadas com o simbolismo e a intuição. Tencionou-se mostrar a relação entre o aspecto simbólico e o aspecto ostensivo da aritmética no âmbito da filosofia kantiana da matemática e, em conexão com isso, se devemos considerar instâncias que correspondem a conceitos aritméticos ou signos que estão por estes conceitos. Todas as interpretações discutidas, direta ou indiretamente, concluem na discussão entre as diferentes notações aritméticas e os correspondentes conceitos ou objetos por eles representados.

ABSTRACT

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Filosofia
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

CONHECIMENTO SIMBÓLICO
NA FILOSOFIA KANTIANA DA ARITMÉTICA
(SYMBOLIC KNOWLEDGE IN KANT'S PHILOSOPHY OF ARITHMETIC)
AUTHOR: DAYANE FENGLER
ADVISOR: ABEL LASSALLE CASANAVE
Date and place of defense: Santa Maria/RS, February 28th, 2005.

This dissertation presents an investigation into what, according to Kant, is the role of symbolism in arithmetic. There are few references to arithmetic in the Kant's work, it was search for to assemble a preliminary picture regarding the role of the symbolism in it philosophy of the mathematics as a whole. Above all in the precritical period, but also in the notion of symbolic construction presented in the Critic of Pure Reason, they seem to survive inheritances of the Leibniz's thought, in matter, of the notion of symbolic knowledge, whose exam is also contemplated in this preliminary situation. The investigation had been lead, centrally, for the exam of the linking of the symbolism with two main elements present in the mature Kant's philosophy of the mathematics: intuition and concept. Kant establishes that the relationship between intuition and concept occur in the mathematics through construction, that is, of the exhibition beforehand of an intuition concept. This characterizes what is called ostensive construction. The symbolism gets prominence in which Kant denominates of symbolic or characteristic construction of concepts, by which the concepts are exhibited through signs that are for them. The emphasis in this symbolic aspect is justified by the crescent interests that had been demonstrated in this respect by the contemporary mathematics philosophy, once it points for a fundamental fact of the practical mathematics, to know, the symbolic manipulation. With the purpose of explaining which the own concepts construction of the arithmetic type occurred, then, to the exam the renewal of the studies concerning the Kant's mathematics philosophy, particularly the arithmetic, that point for the discussion of subjects linked with the symbolism and the intuition. It had been intended to show the relationship between the symbolic aspect and the arithmetic ostensive aspect in the extent of the mathematics Kant's philosophy and in connection with that, if we should consider instances that correspond to arithmetic concepts or signs that are for these concepts. All discussed interpretations, direct or indirectly, conclude the discussion between the different arithmetic notations and the correspondent concepts or objects represented by them.

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação exploramos a relação entre o aspecto simbólico e o aspecto ostensivo da aritmética no âmbito da filosofia kantiana da matemática. Visamos esclarecer de que maneira os símbolos atuam na prática da aritmética, segundo Kant e, em conexão com isso, investigamos se devemos considerar instâncias que correspondem a conceitos aritméticos ou meros signos que estão por estes conceitos. Também, especialmente no que diz respeito ao uso de um aparato simbólico na aritmética, tencionamos vincular algumas das teses kantianas acerca do conhecimento matemático à concepção leibniziana em torno deste tópico, guardadas as devidas ressalvas.

A filosofia de Kant e a filosofia de Leibniz se relacionam com a matemática de maneira distinta. Kant foi mais bem um filósofo que um matemático e, talvez por isso, nunca escreveu o que poderíamos chamar de um texto matemático ortodoxo. Afora isso, nunca deixou as quantidades, sejam elas números ou magnitudes espaciais, longe de seu pensamento. Assim sendo, são muitos os escritos nos quais Kant se dedica a temas de filosofia da matemática, ainda que nem sempre em detalhe; porém, em poucos deles há referências à aritmética.

Leibniz, por sua vez, além de filósofo, foi também um grande matemático e foi nesta última atividade que ele buscou inspiração para muitos de seus escritos filosóficos. Como resultado, dispomos de uma série de textos de Leibniz nos quais a natureza do conhecimento matemático é tematizada. Em particular, há muitas passagens nas quais Leibniz ressalta o papel dos símbolos em conexão com a obtenção de conhecimento, tendo como um de seus paradigmas a aritmética.

Leibniz cita o conhecimento em torno do conceito de *número* como um dos exemplos mais aproximados do que ele vai chamar de conhecimento intuitivo, a saber, o tipo mais perfeito de conhecimento. Entretanto, alerta que em função de limitações humanas, esse tipo de conhecimento, em geral, não nos é acessível; teríamos sempre que contar com a intermediação de algum tipo de símbolo podendo obter conhecimentos não mediante a consideração direta e imediata *das* idéias, mas sim, apenas por meio de signos que *estão por* idéias. Daí a inserção da noção de conhecimento simbólico em complementação e/ou oposição ao conhecimento intuitivo.

Tendo isso em vista, na filosofia da matemática de Leibniz nos defrontamos, então, com a seguinte dificuldade: como entender, em relação à aritmética, a tese de que a noção de número deva ser tomada como o exemplo mais próximo do chamado conhecimento intuitivo ao mesmo tempo em que a aritmética é citada como caso paradigmático do chamado conhecimento simbólico?

A certeza do conhecimento matemático, devida ao fato de os símbolos nela utilizados terem seus significados definicionalmente estabelecidos, também serviu de inspiração para um dos projetos mais ambiciosos de Leibniz: a elaboração de uma língua característica que além de permitir a comunicação internacional, na medida em que considerasse por meio dos signos os próprios conceitos ou as coisas mesmas, servisse também como cálculo de pensamentos. Essa língua calculante teria como trunfo, além da economia de pensamentos, também a facilitação da confirmação da verdade daquilo que está sendo afirmado.

Algumas dificuldades foram apontadas em conexão com a confiança depositada nos signos e nas definições para a obtenção de conhecimento. A teoria leibniziana das definições reais e nominais e a argumentação em favor das conexões entre os signos e as coisas que representam e entre os próprios signos são consideradas na tentativa de dissolver tais dificuldades.

No primeiro capítulo desta dissertação, apresentamos a noção leibniziana de conhecimento simbólico em conexão com as concepções de Leibniz acerca da aritmética. Em três seções apresentamos, respectivamente, a relação entre intuitivo e simbólico na aritmética; uma breve caracterização da língua característica universal projetada por Leibniz, e as dificuldades e respostas de Leibniz relacionadas à arbitrariedade na manipulação simbólica.

Tal como Leibniz, Kant também destaca o papel do simbolismo na obtenção de conhecimento matemático. Essa abordagem é feita na *Investigação sobre a distinção dos princípios da teologia natural e da moral*, de 1764, a qual, especialmente na Primeira Consideração, compreende uma das mais detalhadas exposições de Kant acerca da matemática, apresentando, em oposição à filosofia, o modo próprio de definir, de demonstrar e, principalmente, o papel dos signos na matemática.

Há coincidências claras com teses leibnizianas em cada um desses aspectos tematizados por Kant na *Investigação*. Outrossim, também já podem ser notadas divergências nas interpretações de

Leibniz e Kant no que diz respeito à noção de definição: enquanto para o primeiro, a definição é um resultado da análise; para o último, não há outra maneira de obter definições matemáticas senão pela síntese. As teses kantianas acerca da matemática começam a se afastar cada vez mais das leibnizianas, não obstante algumas semelhanças serem preservadas, a partir de algumas mudanças fundamentais relativas à concepção kantiana da matemática no chamado período crítico, cujo foco está na noção de intuição pura.

Na *Crítica da Razão Pura*, a apresentação da teoria das representações (conceitos e intuições) e os resultados da *Estética Transcendental* conduzem a uma nova versão da concepção kantiana da matemática, a qual é apresentada com maior ênfase na *Doutrina Transcendental do Método*. Ali, Kant institui a chamada construção de conceitos como o método próprio para a obtenção de algum conhecimento matemático, entendendo por construção a exibição a priori de uma intuição correspondente ao conceito a ser construído. As figuras geométricas, que no período pré-crítico eram tidas como signos, agora são intuições, e de um tipo particular, a saber, puras. A construção de conceitos própria da geometria, denominada por Kant de construção ostensiva, exibe a priori uma intuição que funciona como uma instância do conceito correspondente.

Tendo em vista que a própria definição geral do método de construção de conceitos matemáticos parece ser de inspiração geométrica, a caracterização da noção de construção ostensiva se enquadra com alguma naturalidade. No entanto, Kant também considera o caso da álgebra cujos conceitos são construídos mediante a apresentação de símbolos que estão por estes conceitos, porém, não os instanciam. A esse tipo algébrico de construção de conceitos Kant denomina de construção simbólica. No que diz respeito à aritmética, Kant não estabelece diretamente o tipo de construção que lhe é próprio.

No segundo capítulo, dedicado à filosofia kantiana da matemática, apresentamos, respectivamente, o conhecimento simbólico na matemática, conforme a *Investigação de 1764*; a noção de construção de conceitos matemáticos como característica central da filosofia da matemática de Kant no período crítico; e algumas passagens da obra de Kant consideradas relevantes para o exame da filosofia kantiana da aritmética.

Na apresentação da noção de construção de conceitos matemáticos, seja ostensiva, seja simbólica, quase nada é dito acerca da aritmética. Isso se refletiu inclusive na literatura secundária, o que se confirma pelo fato de a maior parte dos trabalhos relativos à filosofia kantiana da matemática contemplar primordialmente discussões acerca de sua filosofia da geometria deixando, inclusive, sua filosofia da álgebra para segundo plano.

Contudo, nas últimas quatro décadas a filosofia kantiana da álgebra e, portanto, a noção kantiana de construção simbólica começou a despertar o interesse dos estudiosos contemporâneos, entre os quais, houve aqueles que procuraram investigar também as possíveis relações desta noção com a filosofia kantiana da aritmética. Os capítulos três e quatro estão dedicados fundamentalmente a esta renovação dos estudos acerca da filosofia da matemática de Kant que apontam para a discussão de questões vinculadas com o simbolismo e a intuição.

Ora, é necessário salientar que toda fala em termos de construções simbólicas de conceitos aritméticos é meramente especulativa uma vez que Kant nada diz, literalmente, acerca da aplicação desta noção à aritmética. Em relação à aplicação de construção ostensiva à aritmética, embora também não haja menção literal, há passagens em que o próprio Kant parece fazer a sugestão.

A dificuldade da questão é mostrada se considerarmos que existem argumentos contrários à conexão tradicionalmente assumida pela literatura entre intuição e sensibilidade na matemática; em particular no que diz respeito à aritmética. Em outro caso, a interpretação tradicional da noção kantiana de intuição elaborada na *Estética Transcendental* é preservada, mas, surpreendentemente, sob a perspectiva da construção simbólica e não da ostensiva. Finalmente, outras interpretações postulam vínculos entre construção simbólica e ostensiva na aritmética.

Examinamos, no terceiro capítulo, as duas primeiras conjeturas formuladas acima acerca da noção kantiana de construção na aritmética, que constituem o núcleo da celebrada polêmica entre Jaakko Hintikka e Charles Parsons. Cada uma das seções deste capítulo está dedicada a expor as interpretações em questão.

No quarto e último capítulo, examinamos a última das interpretações mencionadas, a saber, a de J. Michael Young, destacando, respectivamente, a aplicação de construção simbólica na aritmética e, subjacente à mesma, a construção ostensiva.

De toda esta discussão surge uma espécie de quadro de discussão de problemas de filosofia da aritmética cuja síntese elaboramos de maneira tentativa nas considerações finais. Pretendemos ali não tanto recapitular os resultados alcançados quanto sugerir possíveis linhas de pesquisa futuras.

Capitulo 1. CONHECIMENTO SIMBÓLICO LEIBNIZIANO E A ARITMÉTICA

A investigação, realizada nesta dissertação, acerca do papel dos símbolos na filosofia kantiana da matemática foi conduzida por um viés muito particular, qual seja, o exame do provável caráter de continuidade e, em alguma medida, de descontinuidade entre o pensamento leibniziano e o pensamento kantiano no que diz respeito à matemática.

A continuidade do pensamento de Leibniz, sobretudo no que tange à noção de conhecimento simbólico e aos resultados decorrentes da mesma, mostra-se bastante evidente em algumas teses kantianas; destacadamente, naquelas defendidas na *Investigação sobre a distinção dos princípios da teologia natural e da moral* de 1764. A importância do uso de signos na obtenção de conhecimento matemático estende-se também, ainda que com significativas ressalvas, à noção de construção simbólica apresentada por Kant na *Crítica da Razão Pura*.

Os aspectos que poderiam apontar para a descontinuidade entre os pensamentos de Leibniz e Kant apresentam-se mais claramente na concepção kantiana madura acerca da matemática. Entendemos, no entanto, que talvez seja mais coeso não falar aqui, propriamente, em descontinuidade, interpretada como discordâncias em absoluto. Destarte, podemos tomar a noção kantiana de definição matemática, apresentada como construção de conceitos, como um dos exemplos dessa descontinuidade e, ainda assim, falar da construção simbólica como uma herança considerada, ainda que periférica.

As convergências e divergências entre as abordagens de Leibniz e Kant acerca da matemática e, em particular, da aritmética, receberam um tratamento mais detalhado ao longo dos capítulos seguintes, tão logo se mostraram relevantes para o esclarecimento das questões relacionadas ao tema central da dissertação. Neste primeiro capítulo oferecemos alguns elementos para a almejada investigação mediante o exame da noção leibniziana de conhecimento simbólico, especialmente em relação a sua aplicação na aritmética.

Na primeira seção, examinamos a noção de pensamento simbólico, no contexto da concepção de conhecimento defendida por Leibniz. Paralelamente, destacamos o papel dos símbolos na aritmética, em conexão com o caráter quase metafísico atribuído por Leibniz à noção de número. Na segunda seção, abordamos o projeto leibniziano de uma *Lingua Universalis* e de um *Calculus Ratiocinator* apresentando, de maneira breve, duas conjecturas acerca de sua origem e desenvolvimento, bem como algumas características importantes que tornam uma língua universal também um cálculo. Finalmente, na terceira seção, apresentamos uma dificuldade relacionada ao destaque do papel dos signos e das definições na obtenção de conhecimento e as posições de Leibniz a respeito.

1.1. Intuitivo e Simbólico na Aritmética

A concepção leibniziana de conhecimento está atrelada ao princípio segundo o qual as idéias são analisáveis. Isto se traduz pela compreensão de que os conceitos podem ser decompostos em notas até chegarmos aos seus elementos simples ou primitivos, dando-nos condições de definirmos o conceito em questão[1]. No que se refere aos níveis sob os quais pode apresentar-se, o conhecimento é hierarquizado seguindo uma escala de maior ou menor perfeição[2]:

- é denominado *obscuro*, o conhecimento de uma noção cujas notas não nos possibilitam conhecer a coisa a que esta noção se refere;
- em contrapartida, claro, aquele que fornece notas suficientes para que a coisa possa ser reconhecida e, além disso, permite que a mesma seja distinguida das demais;
- ainda, o conhecimento claro pode ser confuso ou distinto: será confuso caso não formos capazes de enumerar cada uma das notas que compõem a noção da coisa, separadamente; ou distinto, quando o pudermos fazer, ou seja, quando ao analisarmos um composto conseguirmos compreender separadamente seus elementos[3];

[1] Leibniz concebe dois tipos de definições – as nominais e as reais – além de uma subclasse das definições reais, a saber, as definições genéticas. Retomamos estas distinções nas páginas subseqüentes.

[2] A primeira versão dessa hierarquia foi apresentada por Leibniz no *Sobre a Arte da Combinatória* (1666). Mais tarde, foi relembrada rapidamente no texto *Sobre la síntesis y el análisis universal, es decir sobre el arte de descubrir y el arte de juzgar* (CA 1679), no qual a decorrente classificação das definições foi pormenorizada. Novamente, foi apresentada no texto *Meditaciones sobre el conocimiento, la verdad y las ideas* (1684). Nossa apresentação mescla a abordagem de Leibniz feita nos dois últimos textos citados.

[3] O conhecimento confuso diz respeito àquele que temos acesso pelos sentidos e que, portanto, pode ser distinguido pelo testemunho e não pela enumeração de notas, isto é, mediante definição. São exemplos de conhecimento confuso as cores, sabores e odores. Em contrapartida, no caso do conhecimento distinto, mediante a enumeração das notas teríamos o que Leibniz chama de definição nominal de um conceito, cujo principal atributo é possibilitar que a coisa ou noção definida possa ser reconhecida e distinguida das demais.

- novamente, o conhecimento distinto pode ser classificado em inadequado ou adequado conforme a análise atinja seu objetivo completamente ou não, qual seja, chegar à noção primitiva. Quando as notas que compõem a noção da coisa forem conhecidas apenas de um modo confuso, o conhecimento é inadequado. Porém, quando essas notas forem, além do mais, conhecidas distintamente, levando a análise até seus últimos elementos, o conhecimento será considerado adequado.

Com base nessa hierarquia e, por conseguinte, a partir da caracterização de conhecimento adequado, Leibniz estabelece que o conhecimento perfeito ou ideal seria aquele que permitisse uma visão clara, distinta e simultânea de todos os elementos do composto. Tal conhecimento, denominado por Leibniz de *conhecimento intuitivo*, reúne as virtudes do conhecimento direto e imediato o que significa, respectivamente, que no conhecimento intuitivo é possível "ver" as notas simples que formam o conceito sem mediações, isto é, ter acesso "direto" à idéia da coisa; e também, ter acesso a todas as notas que compõem o conceito simultaneamente[4].

Conforme Leibniz, no entanto, esse tipo de conhecimento é alcançado plenamente somente por Deus; os homens não seriam capazes de oferecer um exemplo perfeito de conhecimento intuitivo.

[4] Conforme adiantamos anteriormente, a definição nominal consiste na enumeração das notas ou dos requisitos (condições *sine qua non*) que são suficientes para distinguir uma coisa das demais. É importante salientar, porém, que segundo Leibniz uma definição nominal não necessariamente garante a possibilidade da coisa definida, a exemplo das propriedades denominadas paradoxais, das quais se pode duvidar se são possíveis, muito embora permitam reconhecer a coisa à qual se referem. Por sua vez, quando a análise é levada até os últimos elementos e a compatibilidade entre eles é evidenciada, isso mostra que a noção definida é possível. Nesse caso, segundo Leibniz, a definição obtida é uma definição real.

Para Leibniz, o exemplo mais aproximado de conhecimento intuitivo que um homem pode alcançar está relacionado à noção de número.

Uma forte indicação do caráter atribuído por Leibniz a esta noção é dada na seguinte afirmação feita por ele logo ao início de um texto publicado por volta de 1680:

> É antigo o dito de que Deus fez tudo com peso, medida e número. Mas, existem coisas que não podem ser pesadas, a saber, as que carecem totalmente de força e poder. Também há as que não tem partes e, portanto, não são suscetíveis de medida. Porém, não existe nada que não admita o número. E assim, o número é quase uma figura metafísica e a aritmética certa estática universal com a qual se exploram as potências das coisas (GP VII 184, p. 165).

Ora, as dificuldades que se apresentam para que seja possível atingir o chamado conhecimento intuitivo parecem ser de dois tipos: umas que dizem respeito ao modelo redutivo de análise; e outras que chamaremos de dificuldades “epistêmicas”, relacionadas às limitações humanas.

O primeiro tipo de dificuldade tem origem em questões tais como: há conceitos que podem, de fato, ser decompostos até chegarmos aos seus elementos mais simples?; todos os conceitos são assim decomponíveis? Em outros termos, realmente seria possível obter um conhecimento adequado? No caso em que não fosse possível obter conhecimento adequado, é certo, não haveria nem sequer a possibilidade de atingir conhecimento intuitivo, tal como ele é caracterizado por Leibniz.

As dificuldades “epistêmicas”, por sua vez, são as que seguem: os homens são capazes de realizar a análise completa de conceitos complexos? Tendo feito isso, são capazes de perceber simultaneamente todos os elementos que compõem esses conceitos? Aqui, tanto a limitação frente à análise completa de um conceito complexo como a incapacidade humana de percepção imediata e simultânea de todos os elementos que o compõem são dificuldades, pelo menos em princípio, operacionalmente solucionáveis.

Com efeito, não obstante Leibniz reiterar em várias passagens seu entendimento acerca dessas últimas dificuldades, legitimando a dúvida de que o conhecimento intuitivo tenha sido alguma vez atingido pelo intelecto humano, ele não deriva disso a impossibilidade humana de conhecer. O problema que se coloca então é entender como o conhecimento humano opera. Aqui aparece a idéia de conhecimento simbólico.

Leibniz atribui aos símbolos um papel essencial na obtenção de conhecimento, chegando a sustentar que embora possamos ter pensamentos sem palavras, não o podemos sem o auxílio de outros signos. Leibniz escreve: *"... Advirto que nunca poderei conhecer, descobrir, provar, sem servir-me de palavras ou sem que outros signos estejam presentes ao meu espírito. Inclusive se não houvessem caracteres nunca pensaríamos com distinção em algo nem seríamos capazes de raciocínio"* (1677, GP VII 191, p. 175)[5]. Para reforçar essa idéia, no *Diálogo sobre a conexão entre as coisas e as palavras* (1677) Leibniz propõe ao interlocutor que trate de estabelecer algum cálculo aritmético sem signos numéricos.

[5] No artigo *Signos y cálculo lógico* (post. 1684), Leibniz destaca que os signos escritos, traçados ou esculpidos são denominados caracteres.

De acordo com Leibniz, portanto, as dificuldades que chamamos aqui de “epistêmicas” poderiam ser superadas mediante o emprego de símbolos. Segundo ele, *“em geral, e especialmente em uma análise de maior extensão, não vemos, no entanto, a inteira natureza da coisa de um modo simultâneo; em lugar das coisas empregamos signos cuja explicação costumamos omitir por razão de economia, sabendo ou acreditando que a possuímos”* (1684, GP IV 423, p. 273). É a este raciocínio auxiliado por signos que Leibniz denomina de *conhecimento simbólico* [6].

Para Leibniz, em primeira instância, signo é algo que está por outra coisa quando pensamos, ou seja, os signos exercem um papel substitutivo. Também, Leibniz os toma como *“nomes mediante os quais se abarca, de forma abreviada, uma grande quantidade de coisas”* (1671-2, ii 481, p. 89), apontando para a economia de pensamentos proporcionada pela manipulação simbólica. Trata-se, portanto, de empregar signos em lugar das coisas ou idéias, obtendo conhecimento por meio do recurso aos primeiros e não da consideração “direta” das últimas.

Por conseguinte, quando Leibniz menciona a noção de número como exemplo próximo de um conhecimento intuitivo, em verdade, ao que tudo indica, ele estaria se referindo apenas aos números

[6] Conforme detalha Esquisabel no artigo *Perspectives on Leibniz's concept of symbolic knowledge* (não publicado), a denominação "conhecimento simbólico" aparece, nestes termos, somente uma vez na obra leibniziana, sendo substituída mais freqüentemente pela expressão "pensamento simbólico" ou "pensamento cego". Esquisabel apresenta as prováveis motivações desta mudança, porém, entende que as diferentes expressões tenham sido utilizadas quase como sinônimos. Em nossa exposição não nos dedicamos ao detalhamento destas distinções, de modo que as expressões "conhecimento simbólico" e "pensamento simbólico" são utilizadas como sinônimos.

pequenos tais como os números dois e três, cujas unidades componentes e, portanto, seu significado, são facilmente apreensíveis em um ato único, simultâneo, da intuição. Não haveria, no entanto, como ter uma intuição simultânea de todas as unidades componentes de um número tal como 1.357.258, por exemplo. Isto aponta também para o caráter subjetivo no estabelecimento dos casos que se aproximam de um conhecimento intuitivo e os demais que não se aproximam.

O que estaria em jogo na relação dessas concepções de número e aritmética é a pergunta por como se dá significado para a aritmética. Em conformidade com as concepções leibnizianas a respeito, uma possível resposta seria que o recurso intuitivo, em princípio, lhe dá significado, ao mesmo tempo em que o recurso aos símbolos lhe dá mobilidade operacional[7], na medida em que colaboraria com a economia de pensamentos, além de auxiliar na memorização[8].

A importância dos signos na aritmética é confirmada nas seguintes passagens, nas quais Leibniz afirma, respectivamente, que:

> ... ninguém pode calcular, especialmente as grandes cifras, sem nomes ou signos numéricos, pois teria que imaginar distintamente em vez do número todas as unidades compreendidas nele. Mas, quem poderia imaginar distintamente as unidades incluídas em 1.000.000.000.000 a menos que disponha da idade de Matusalém? E ainda que pudesse levá-lo a cabo, ao avançar se esqueceria das primeiras (1671-2, ii 481, p. 89).

E que,

---

[7] ESQUISABEL, O. M. (informação verbal).

[8] O problema da memória que parece estar indicado nesta passagem foi outro tema explorado por Leibniz. Cf. ROSSI (1989).

> caso o aritmético, ao calcular, pensasse constantemente nos valores dos algarismos, ou seja, nos valores das cifras que escreve, e na multiplicidade de unidades, jamais terminaria aos cálculos extensos. O que igualmente sucederia se pretendesse utilizar um número equivalente de pequenas pedrinhas. (1684, GP VII 204, p. 188).

Outra passagem relacionada com essa discussão aparece nos *Novos ensaios sobre o entendimento humano*, na qual Leibniz destaca: *"Se na aritmética não designássemos os diferentes números por sinais cujo significado preciso seja conhecido, e que permanecem em vista, seria quase impossível efetuar grandes cálculos"* (1980, §19, p 309).

Em suma, o que Leibniz afirma é que na aritmética, em lugar das idéias correspondentes aos números e relações entre eles são colocados signos, de modo que as operações são realizadas sem considerar, no processo, as idéias envolvidas; as verdades aritméticas são alcançadas somente mediante a ordenação e disposição dos caracteres, que poderão ser reinterpretados ao final.

No limite, portanto, poder-se-ía pensar que todo conhecimento é simbólico, tendo em vista que, para Leibniz, um objeto conceitual nunca se apresenta numa intuição humana de modo puramente conceitual; sempre é preciso lançar mão de algum tipo de signo[9]. Entretanto, podem ser admitidos diferentes graus de conhecimento simbólico.

A noção de conhecimento simbólico permite, portanto, uma segunda distinção, muito embora a mesma não apareça literalmente na obra de Leibniz. Trata-se da distinção entre um pensamento simbólico

[9] Cf. *Diálogo sobre la conexión entre las cosas y las palabras* (1677).

no qual alguma compreensão dos conceitos substituídos por signos ainda subsiste e o chamado *pensamento cego*, um tipo particular de pensamento simbólico no qual isto não acontece. No primeiro caso os signos permitem alguma compreensão acerca daquilo que está sendo simbolizado por eles (isso não quer dizer conhecimento intuitivo); no segundo, o conhecimento é obtido mediante manipulação mecânica dos signos sem atentar, no processo, para as idéias ou coisas por eles simbolizadas. As figuras geométricas e as palavras da linguagem natural, por um lado, e os signos usados na aritmética e na álgebra por outro, exemplificam esta distinção.

Na geometria, ao operarmos com figuras que, segundo Leibniz, são signos que estão pelos conceitos, os conceitos envolvidos ainda são levados em conta a cada passo da demonstração, mesmo que de relance. Diferentemente, na aritmética, especialmente nas operações que envolvem grandes números, ainda que façamos uso de signos correspondentes aos conceitos dos números e às operações em questão, o procedimento é realizado mecanicamente não considerando, a cada passo, os conceitos envolvidos. Assim sendo, embora todo conhecimento simbólico tenha um pouco de cego a aritmética aparece como um caso paradigmático do mesmo.

Este aspecto é abordado por Esquisabel no artigo *Perspectives on Leibniz's concept of symbolic knowledge* (não publicado). O autor propõe a separação entre o que ele chama Pensamento Simbólico Cego, associado com a combinatória; e Pensamento Simbólico da Linguagem Natural, que envolve uma vaga compreensão dos significados. Esquisabel afirma:

> ... quando Leibniz fala de Pensamento Simbólico Cego, ele não tenciona qualquer necessidade de compreensão do significado (ao menos do que temos chamado significado 'extra-linguístico') mas enfatiza a relevância de uma disposição ordenada dos signos seguindo regras de construção para seqüências simbólicas. Não é que nós não entendemos o significado dos símbolos, mas que nós não necessitamos deste entendimento para operar com eles. É suficiente seguir as regras (p. 17) [10].

Ainda sobre o Pensamento Simbólico Cego, Esquisabel enfatiza que

> ... não é que devemos suprimir a consideração do significado, isto é, das idéias (ou o que nós supomos serem as idéias), mas antes, que temos que guiar nosso pensamento pela sintaxe, ou seja, pela estrutura, seja se consideramos significados ou não. Esta característica é o que distingue fortemente o Pensamento Simbólico Cego, do Pensamento Simbólico da Linguagem Natural: esta última não pode ser executada caso não considerarmos o significado, por mais vago ou subdeterminado que ele possa ser (p. 22) [11].

Não obstante a possibilidade de se obter conhecimento mediante manipulação cega de símbolos, é importante não perder de vista que também a verdade do conhecimento simbólico, assim como do conhecimento intuitivo, dependeria de análise, sobre a qual a lembrança da evidência que o sustenta deveria estar fundamentada.

---

[10] "... when Leibniz talks about Symbolic Blind Thought, he does not mean any need of meaning comprehension (at least of what we have called 'extra-linguistic' meaning), but do emphasizes the relevance of an orderly disposition of signs by following rules of construction for symbolic strings. It is not that we do not understand the meanings of symbols, but that we do not need this understanding for operating with them. It is enough with the rule-folowing".

[11] "... It is not that we must suppress the consideration of meaning, that is, of ideas (or what we suppose to be ideas), but rather that we have to guide our thinking by syntax, that is, by structure, whether we consider meanings or not. This feature is what distingues strongly Symbolic Blind Thought from Everyday Language Blind Thought: this latter can not be performed, if we do not consider meaning, however vague or subdetermined it may be”.

Este fator conduz a uma reflexão acerca dos problemas que a noção de conhecimento simbólico apresenta entre os quais, principalmente, a possibilidade de empregarmos signos no lugar de idéias[12] que cremos infundadamente possuir, supondo que os termos utilizados já tenham sido explicados[13]. Leopoldo e Silva destaca que *"é desta forma que se torna perfeitamente possível falar a respeito do que não se conhece. Podemos nomear aquilo de que não temos idéia clara; na verdade, para Leibniz, podemos até falar daquilo de que não possuímos idéia alguma, porque nem sempre temos na mente o significado da palavra que empregamos"* (p. 8).

Esse risco que acompanha o conhecimento simbólico é consideravelmente reduzido nos exemplos da matemática, pois, nesses casos, inclusive quando envolvem conceitos complexos, ainda que as noções envolvidas não sejam pensadas distintamente, no entanto, fazem parte da definição deste conceito. Em decorrência disso, em princípio, é possível recorrermos a elas, se necessário, por meio da análise da noção complexa, tendo em vista se tratarem de noções claras e também distintas[14].

---

[12] A expressão "idéia" está sendo usada aqui como entidade mental.

[13] Esta é uma das possíveis razões, apontadas por Esquisabel, para Leibniz retomar a velha denominação "pensamento cego" ou para a substituição do termo Conhecimento Simbólico por "Conhecimento Supositivo": um conhecimento que supomos ter, porém, não sabemos de fato se temos ou não.

[14] Faz-se necessário acrescentar "em princípio" nessa afirmação para não excluir alguns exemplos matemáticos importantes que embora possam não se enquadrar nessa noção de definição como análise completa (a definição de π, por exemplo), fazem parte de uma subclasse das definições reais, as definições genéticas. Leibniz explica em que consiste uma definição genética através do exemplo da definição euclidiana de círculo, qual seja, figura descrita pelo movimento de uma linha reta em um plano, em torno de um extremo imóvel. Estas definições ganham o status de reais na medida em que incluem a geração da coisa ou sua constituição, isto é, o modo com que parece que a coisa possa ser gerada ou é, pelo menos, possível.

Seria de bom grado que levássemos sempre a análise suficientemente longe, a fim de que qualquer inconsistência em nosso pensamento pudesse ser revelada. Entretanto, é importante considerar aqui uma distinção inegável entre o que é alcançável e o ideal, talvez inalcançável[15]. Segue-se disso que, não obstante a relevância do conhecimento simbólico, sua condição epistemológica não deixa de ser inferior à do conhecimento intuitivo.

Todavia, dado que este último não é alcançado pelo intelecto humano o que nos resta é *"estabelecer com rigor os requisitos que deveriam tornar o conhecimento simbólico absolutamente seguro, eliminando assim o risco ... da substituição da explicação analítica dos termos pela crença em tê-la feito"* (LEOPOLDO E SILVA, p. 9). É neste sentido de resgate da legitimidade do conhecimento simbólico, na medida em ele é essencial para nossa atividade intelectual, que a elaboração de uma língua ou característica universal apareceria como uma necessidade epistemológica incontornável.

1.2. *Lingua Universalis* e *Calculus Ratiocinator*

O interesse de Leibniz pelo projeto de uma língua universal remonta a sua juventude, quando ele não havia ainda entrado em contato com a matemática. Duas teses, eventualmente

[15] Daí o risco de supormos uma análise que realmente não foi efetuada, risco este que é maior no que tange ao uso de símbolos no âmbito da linguagem natural. Em relação a isso, em geral, os aspectos positivos do pensamento cego estão ligados com a natureza e função do cálculo com símbolos; já os aspectos negativos estão, muitas vezes, relacionados com o modo pelo qual nós usualmente pensamos ou raciocinamos por meio da linguagem cotidiana.

complementares, postulam origens diferentes de tal projeto: a primeira sustenta que Leibniz fora motivado por textos lulianos e por motivos referentes às correntes místico–pitagóricas[16]; a segunda defende que sua inspiração provém do modelo de linguagem utilizado na matemática[17].

A primeira tese está relacionada mais diretamente com a primeira fase do projeto leibniziano de buscar uma língua universal. A inspiração do projeto do jovem Leibniz parece vir de Ramon Lúlio. Entretanto, a *Ars Magna* de Lúlio, de acordo com Leibniz, é um método de combinatória mais geral, praticamente ao acaso, envolvendo também a arbitrariedade na escolha dos conceitos gerais ou simples, assim como do seu número, nove, cujo objetivo era obter simetria. A invenção de Lúlio, de acordo com Leibniz, era mais útil para a retórica que para as necessidades da filosofia.

Na concepção leibniziana, como vimos na seção anterior, primeiramente, cada conceito deveria ser analisado a fim de chegarmos a alguns conceitos absolutamente simples os quais seriam irredutíveis e indefiníveis[18]. Tais conceitos comporiam a classe dos termos de primeira ordem, sendo designados por alguns signos comuns. A segunda classe seria obtida pela combinação de pares de conceitos simples, e assim por diante. A Língua ou Arte Característica consistiria, portanto, em uma língua universal na qual os caracteres seriam formados e ordenados de maneira que as relações entre os pensamentos ou conceitos fossem conservadas.

[16] Cf. ROSSI (1989).
[17] Cf. CAJORI (1993).
[18] A característica supõe, portanto, a possível realização de análises completas.

A Arte Característica seria uma língua independente da língua falada; consequentemente, de qualquer idioma, donde se justificaria parte de sua universalidade. Além disso, sua universalidade seria devida ao fato de que com os caracteres ela representa todas as noções e não apenas os números, como a álgebra e a aritmética, que seriam apenas "amostras" da característica.

A idéia de buscar uma língua universal não surge, no entanto, como uma novidade nos esforços leibnizianos. Tal idéia já se encontra, por exemplo, na obra de Kircher, de Dalgarno e de Wilkins[19], precursores mencionados pelo próprio Leibniz em sua obra e que o levaram a desenvolver e aprimorar o esquema esboçado no *Sobre a Arte da Combinatória*[20]. Não obstante, Leibniz introduz algo novo em sua proposta.

Leibniz considerava insuficiente que os signos servissem somente para representar os pensamentos; havia um valor epistemológico inerente ao uso da língua buscada por ele. Esta língua, além de permitir a comunicação internacional, deveria servir também para o cálculo ou raciocínio.

Em outras palavras, ao substituir os conceitos simples por signos, a intenção era a de que através desse "alfabeto dos pensamentos humanos", mediante a combinação das letras e a análise das expressões formadas a partir delas, pudéssemos, além de raciocinar corretamente, descobrir verdades novas e julgar acerca de

---

[19] Para um estudo mais abrangente, ainda que menos detalhado, ver ECO, U. A busca da língua perfeita na cultura européia. Bauru : EDUSC, 2001.

[20] Obra publicada em 1666, na qual o projeto aparece pela primeira vez. É importante ressaltar que o trabalho desenvolvido na juventude de Leibniz serviu de base para suas investigações subseqüentes, porém, com as devidas ressalvas no que tange aos seus conhecimentos de matemática, decorrentes da idade de Leibniz na época.

todas as coisas, estendendo a linguagem simbólica para além da matemática.

O interesse nessa extensão está vinculado ao fato de a linguagem natural ser vitimada por uma flutuação semântica das palavras. Isso permite, por vezes, que um termo seja utilizado como se já tivesse sido analisado alguma vez quando na verdade isto não ocorreu em momento algum comprometendo, assim, o alcance da verdade. A matemática, por sua vez, não estaria submetida a tal dificuldade, na medida em que opera com símbolos cujos significados são estabelecidos a partir de definições. É essa univocidade de significados dos símbolos que garante o caráter demonstrativo da matemática, ou seja, *"a certeza da matemática provém de uma eficiência simbólica – se assim se pode dizer – que as palavras não possuem"* (LEOPOLDO E SILVA, p. 9).

As possibilidades oferecidas por uma língua perfeitamente adaptada ao conhecimento simbólico é que conduziram à busca de *"um meio de tratar em bases unívocas todos os conceitos, liberando-os da carga de flutuação semântica inerente à linguagem natural"* (LEOPOLDO E SILVA, p. 10). Relacionada a este aspecto é que se constrói a tese segundo a qual o projeto leibniziano fora motivado pelas peculiaridades da linguagem utilizada na matemática, em particular, na aritmética, tendo em vista seu caráter heurístico: a linguagem aritmética, genuinamente simbólica, serve tanto para descobrir verdades na aritmética como para verificar a correta aplicação do recurso simbólico e, consequentemente, confirmar as informações prestadas[21], objetivos que o chamado *calculus ratiocinator* deveria alcançar.

Leibniz afirma que o caráter heurístico da notação aritmética e algébrica deve ser considerado um sinal de que *"Deus quisera advertir-nos especialmente de que em nosso entendimento se escondia um segredo muito mais importante do qual essas ciências seriam somente sombras"* (CA. 1680, p 166), segredo este, ao que tudo indica, relacionado a uma língua calculante.

Leopoldo e Silva reitera as intenções de Leibniz, lembrando que

> ... a organização de um léxico e de regras de combinatória entre os símbolos ofereceria possibilidades de comunicação do pensamento, de juízos e de invenção dotados de total demonstrabilidade. Desta forma, a expressão permitiria uma ponderação ... que poderia ser efetuada simultaneamente aos enunciados, de forma que o acordo acerca de possíveis controvérsias se faria por

[21] Um exemplo disso, citado por Leibniz (Cf. *Diálogo sobre la conexión entre las cosas y las palabras* (1677); *Sobre la síntese y el análisis universal, es decir sobre el arte de descubrir y el arte de juzgar* (1679) e *Novos ensaios sobre o entendimento humano*) são os teoremas acerca da aplicação da Prova dos Noves. A chamada Prova dos Noves é utilizada, dentro do sistema decimal, como uma ferramenta para verificar se os resultados de uma soma ou produto obtidos via a aplicação do algoritmo usual para a adição e multiplicação estão corretos. O procedimento envolvido pode ser ilustrado do seguinte modo: neste caso, o que se pretende verificar é o resultado da multiplicação de 145 por 224, cujo cálculo correto é 32480. Primeiramente somamos os algarismos 1, 4 e 5 de 145, obtendo 10. Depois somamos os algarismos de 10, obtendo 1. Pode-se demonstrar que o número final obtido, o 1, é o resto da divisão de 145 por 9, daí a origem da frase "145 noves fora dá 1". Procedendo da mesma forma, o "noves fora" de 224 será igual a 8, ou seja, o resto da divisão de 224 por 9 é 8. Ocorre que ao multiplicarmos os números 145 por 224 o "noves fora" do resultado obtido sempre será igual ao "noves fora" da multiplicação do "noves fora" de 145 pelo "noves fora" de 224. Então, para verificar se a conta de multiplicação feita está correta, basta encontrar o "noves fora" do resultado obtido e checar se ele é igual ao "noves fora" 8 (8 é a multiplicação de 1 por 8). Na prática, a verificação ocorre da seguinte forma: "145 noves fora dá 1", "224 noves fora dá 8". Então o resultado da multiplicação entre 145 e 224 "noves fora" também terá que ser igual a 8. Verifica-se que, de fato, "32480 noves fora dá 17 e, portanto, 8". Vale lembrar que, se o resultado de uma conta de multiplicação estiver correto e a prova dos noves for feita corretamente, ela sempre irá confirmar a exatidão da resposta. Voltando a Leibniz, essa prova depende dos caracteres impostos ao sistema decimal na medida em que tem como noção central o 9, último algarismo do sistema de base 10, podendo constar como "noves fora" somente um número menor ou igual a 9. [Esta apresentação da *Prova dos Noves* foi construída com base no texto *"Matemática: na falta de calculadora, use a prova dos noves!", de* José Luiz Pastore Mello, disponível no *site* <http://www1.folha.uol.com.br/folha/educacao/ult305u14300.shtml>, em 13/11/2003].

> meio de uma operação que utilizaria símbolos unívocos e regras explicitamente estabelecidas (p. 10).

Segundo Leibniz, a partir desse sistema combinatório ao raciocinar, não necessitaríamos mais representar-nos as definições, conceitos e idéias envolvidas bastando que ordenássemos os caracteres de modo que as verdades fossem obtidas por meio da disposição dos caracteres e das conexões estabelecidas entre eles mediante regras. Assim, os raciocínios teriam a infalibilidade do cálculo numérico, facilitando a confirmação da verdade daquilo que está sendo afirmado, além de colaborar com a economia de pensamentos.

Leibniz acreditava que com esta língua as divergências teóricas, inclusive em questões filosóficas, poderiam ser facilmente solucionadas, na medida em que aplicássemos aos conceitos em questão os signos correspondentes e a eles algumas regras que mantivessem as conexões existentes entre os pensamentos. Depois, restar-nos-ia apenas calcular[22].

1.3. Definição, Manipulação Simbólica e Arbitrariedade

O destaque dado por Leibniz à utilização do recurso simbólico, aliado à importância das definições na obtenção de conhecimentos, exigiu dele alguma argumentação. Isso porque, foram apresentadas algumas supostas dificuldades geradas por essa concepção, as quais remetem para a arbitrariedade dos signos e, por conseqüência, das

[22] Cf. COUTURAT, L (ed.), 1988, p. 197.

definições, culminando na conclusão de que, então, também as verdades seriam arbitrárias.

Estas dificuldades foram cunhadas, principalmente, por Hobbes e provêm do fato deste autor ter reduzido a verdade a nomes, tornando-a dependente do arbítrio humano. Em outros termos, para Hobbes todas as definições são nominais e como está em nosso arbítrio por nomes nas coisas, todas as definições são arbitrárias. Dado que toda verdade é deduzida de definições, também as verdades seriam arbitrárias.

A argumentação de Leibniz segue duas orientações: uma relativa à sua teoria das definições reais; e outra, denominada por Dascal (1987) de semiótica, que visa defender a idéia de permanência da verdade independentemente dos caracteres. Dascal sugere que estas duas orientações podem não ser soluções alternativas para um mesmo problema. Segundo ele, a tese de Hobbes gera dois problemas distintos, ainda que relacionados, ou então, apresenta duas fontes diferentes que acabam levando ao mesmo problema, para o qual tais orientações buscam uma solução. Dascal escreve:

> ... a afirmação de que uma definição é arbitrária pode significar ou (a) que a relação entre o definiendum e o definiens é arbitrária, isto é, que o mesmo conceito (representado pelo definiens) poderia ter sido conectado a outros nomes (definienda) ou vice-versa; ou então (b) que a combinação de conceitos que constitui o definiens é ela mesma uma combinação 'arbitrária', a saber, que ela não está sujeita a quaisquer limitações ou princípios (1987, p. 61) [23].

---

[23] "... the claim that a definition is arbitrary may mean either (a) that the *relation* between the *definiendum* and the *definiens* is arbitrary i.e. that the same concept (represented by the *definiens*) might have been connected to other names (*definienda*) or vice-versa; or else (b) that

Conforme Dascal, então, a doutrina das definições reais estaria voltada principalmente para resolver o segundo problema ((b)) e a solução de orientação semiótica, para o primeiro ((a)). A primeira solução busca resolver o problema relacionado ao significado; a segunda pressupõe a possibilidade de uma análise puramente sintática no sistema de signos[24]. No entanto, a relação entre as duas tentativas de solução para o problema colocado por Hobbes é de complementação.

Leibniz concorda que não há conhecimento certo sem definições rigorosas e afirma, inclusive, que toda verdade deriva de uma cadeia de definições[25]. Destaca, porém, que o rigor de uma definição depende da demonstração prévia de sua possibilidade. Em relação a isso Leibniz apresenta o critério que deverá eliminar ou pelo menos reduzir a arbitrariedade no que concerne ao significado, qual seja, o requerimento de consistência lógica.

Estão em conformidade com esse critério as chamadas definições reais, que envolvem noções das quais consta que podem estar unidas entre si[26] e também uma subclasse delas, a saber, as definições genéticas, as quais incluem a geração da coisa ou pelo

---

the combination of concepts which constitutes the *definiens* is itself an 'arbitrary' combination. i.e. that it is not subject to any constrains or principles".

[24] Sintático não quer dizer que os signos não tenham relação com o que representam, mas sim, que quando os signos são utilizados no sistema não é preciso pensar no que eles representam.

[25] Cf. *Sobre la síntesis y el análisis universal, es decir sobre el arte de descubrir y el arte de juzgar* (1679)*:"A partir de estas ideas o definiciones, pues, pueden demonstrarse todas las verdades excepto las proposiciones idénticas, las que por su naturaleza es patente que son indemostrables y a las que realmente se las puede llamar axiomas"* (GP VII 295, p. 199).

[26] Como vimos anteriormente, uma definição real (não genética) seria obtida na medida em que tivéssemos a análise de uma noção literalmente diante dos olhos para então reconhecer se há contradição entre qualquer par de conceitos que a compõem. Vimos também que para os humanos isso só é possível mediante signos e, portanto, que em geral nos contentamos com um conhecimento cego. Assim, segundo Dascal, as diferenças entre as duas tentativas de solução ficam consideravelmente reduzidas.

menos sua constituição, a saber, o modo com que parece que a coisa pode ser gerada.

O que Leibniz pretende destacar, quanto a este aspecto, é que não podemos forjar com segurança demonstrações acerca de noção alguma sem estarmos certos de que ela é possível, pois, acerca de noções que envolvem contradição também podem ser demonstradas proposições contraditórias, o que é inadmissível. Portanto, a possibilidade lógica limita a arbitrariedade.

Em relação ao primeiro problema ((a)), uma conseqüência de seguir o raciocínio hobbesiano é a necessidade de admitir, então, que também as verdades aritméticas, na medida em que supõem a utilização de signos ou caracteres, dependem de nosso arbítrio. Essa conclusão é questionável. Basta considerarmos, seguindo Descartes e Leibniz, que a mesma aritmética, ainda que eventualmente com notações diferenciadas, é compartilhada por diferentes povos, de diferentes línguas e épocas.

A resposta de orientação semiótica busca eliminar esse tipo de dificuldade apontando para a existência de certas relações entre signos. Dascal afirma que, de acordo com Leibniz,

> ...embora os signos eles mesmos sejam arbitrários, as relações entre eles não são. ... a dificuldade pode ser superada no nível dos próprios signos, sem a intervenção das idéias ou das coisas às quais esses signos estão supostamente se referindo. Em outras palavras, se considerarmos não os signos em isolado, mas as combinações entre eles, descobriremos que elas mostram correspondências, obedecem a regras operacionais e estão sujeitas a um controle (como a prova por noves) que reduz a inevitável arbitrariedade de cada signo

> individual, constituindo assim um 'fundamento para a verdade' (1987, p. 63) [27].

De acordo com Leibniz, a arbitrariedade afeta somente a escolha dos signos que serão utilizados para representar as coisas e suas relações, mas não as próprias relações estruturais entre eles as quais devem ficar refletidas tanto nas regras de formação dos caracteres como nas regras de transformação[28]. Isto é, embora os nomes possam ser arbitrários, uma vez adotados, as conseqüências são necessárias e levam a algumas verdades as quais, mesmo dependentes de caracteres impostos são, no entanto, universais.

Leibniz insiste que se tais signos, embora eles mesmos sejam arbitrários, podem aplicar-se ao raciocínio é porque as relações entre eles não são arbitrárias. Ao contrário, deve haver entre eles uma construção complexa de conexões, uma

> ... certa proporção entre os caracteres e as coisas e nas relações entre os diversos caracteres que expressam as mesmas coisas. E esta proporção ou relação é o fundamento da verdade. Com efeito, esta proporção ou relação faz com que, ainda que empreguemos estes ou outros caracteres, o resultado seja sempre o mesmo, ou bem algo equivalente ou algo que corresponda proporcionalmente. [Por conseguinte] ... a base da verdade sempre se encontra na conexão mesma e na disposição dos caracteres (1677, GP VII 192, p. 176).

Em suma, embora seja preciso supor, necessariamente, alguns caracteres para alcançar verdades, deve-se ter em conta que os

[27] "... although the signs themselves are arbitrary, such relations are not. ... one can overcome the difficulty *at the level of signs themselves*, without the intervention of the ideas or of the things these signs are supposed to refer to. In others words, if one considers not signs in isolation but combinations thereof, one discovers that they display correspondences, obey to operational rules and are subject to controls (like the proof by the nines) which reduce the inevitable arbitrariness of each individual sign, thus constituting a 'foundation for truth'".

[28] Cf. ESQUISABEL, O. M. *Leibniz y el conocimiento simbólico* (no prelo).

caracteres não consistem somente no que eles têm de arbitrário, senão na relação deles com as coisas e deles entre si. Com vistas a ressaltar a necessidade de conexão entre as relações ditadas pelos signos e as realidades correspondentes, Leibniz enfatiza que *"os signos são tanto mais úteis quanto mais expressam o conceito da coisa significada de tal forma que não somente possa servir para a representação senão também para o raciocínio"* (1684, GP VII 204, p. 189).

Julgamos conveniente, aqui, apresentarmos uma distinção leibniziana relacionada aos signos e à noção de semelhança, mais especificamente, a distinção entre signos com semelhança e signos sem semelhança. Esta distinção, por sua vez, envolve duas caracterizações em torno da noção de semelhança, quais sejam, semelhança como imitação e semelhança estrutural (proporção entre duas coisas dessemelhantes). É sobre uma má compreensão dessas noções leibnizianas como, por exemplo, equiparar semelhança com não arbitrariedade e dessemelhança com arbitrariedade que um segundo aspecto da dificuldade parece estar alicerçado.

A referida dificuldade aponta para o fato de embora determinados signos, por exemplo, as figuras geométricas guardarem semelhanças, segundo Leibniz, com as idéias representadas por estas figuras, semelhanças estas que não parecem arbitrárias, outros não preservam nenhuma semelhança aparente com as idéias simbolizadas, como é o caso do uso da letra *a* em lugar da idéia de linha ou de numerais arábicos em lugar dos números, levantando a questão sobre o que asseguraria a necessidade das verdades nesses casos.

Como já dissemos, esta observação parece estar construída sobre a suposição, equivocada, de que semelhança eqüivale a não arbitrariedade. Assim, o que também parece estar em jogo é o entendimento de que a semelhança observável pela visão é o único paradigma de similitude, restando aos casos em que essa exigência não é satisfeita, a acusação de arbitrariedade.

A apresentação da recusa de Leibniz a esse ponto envolve uma análise mais cuidadosa da noção leibniziana de semelhança, a qual é contemplada em um artigo de Gérard Lebrun, intitulado *A noção de "semelhança", de Descartes a Leibniz*. Neste artigo é apresentada a argumentação leibniziana contra a compreensão do termo semelhante como imagem e do termo não semelhante como signo, entendido como algo que não reproduz nada do sinalizado. Leibniz procura resgatar a relação entre o inteligível e o sensível e, embora isto pareça surpreendente, haja vista que em alguns casos Leibniz dispensa e até condena essa exigência, na verdade o que faz é indicar que o que Leibniz exclui, nestes casos, é apenas uma semelhança por imitação.

De acordo com Lebrun, por semelhança Leibniz não entende, em geral, imitação. Ao contrário, exclui uma semelhança apenas por imitação, de modo que a ausência da mesma, *"ao invés de marcar dessemelhança, parece-lhe, ... o índice de que uma equivalência mais profunda é alcançada entre a grafia e o pensamento"* (1989, p.46). Além disso, Lebrun ressalta que, conforme Leibniz, entender a semelhança como imitação pode ser prejudicial, uma vez que leva a pensar que *"... fora a apresentação imitativa, só é possível uma* *correlação arbitrária entre dois termos supostos indiferentes um ao outro"* (1989, p. 47).

Assim sendo, a distinção proposta por Leibniz pode ser entendida do seguinte modo: o que Leibniz chama de signos com semelhança são aqueles signos que possuem uma semelhança imitativa em relação às idéias ou coisas por eles simbolizadas, ou seja, que guardam uma certa proximidade natural com aquilo que significam; por sua vez, os chamados signos sem semelhança são aqueles cuja semelhança em relação às coisas ou idéias simbolizadas não é imitativa, senão, estrutural. Trata-se de signos instituídos (convencionais), porém, que guardam uma analogia estrutural com as coisas significadas.

Lebrun adverte, entretanto, que

> se Leibniz pensa que a homogeneidade entre os sentidos e o entendimento é de direito, é porque, antes de mais nada, pretende proscrever absolutamente todo pseudoconhecimento por signos. [e que] ... Se o sensível é da mesma natureza que o inteligível, é porque nenhum signo, no limite, é signo de instituição; ou melhor, é porque desaparece a fronteira entre signos naturais e signos de instituição, substitutos que mostram e substitutos que dissimulam a razão de sua relação com a coisa (1989, pp. 53-54).

A título de encerramento da seção destacamos ainda, seguindo Dascal, que em qualquer uma das duas tentativas de solução ao problema imposto a arbitrariedade não é totalmente eliminada. A tentativa baseada na teoria leibniziana das definições reais e, portanto, no critério de consistência lógica das noções que compõem o *definiens* enfrenta a dificuldade de que o número de combinações logicamente possíveis é muito grande, sendo difícil, consequentemente, escolher os casos mais perfeitos. A escolha, assim, ainda seria arbitrária, razão pela qual Leibniz tentou, posteriormente, formular um critério que permitisse selecionar, dentre as definições reais, aquelas que seriam as mais perfeitas, quais sejam, as definições genéticas[29]. Na solução de orientação semiótica, por sua vez, ainda que haja uma construção complexa de conexões entre os signos e a estrutura daquilo que eles representam, cada um dos signos, isoladamente, permanece arbitrário.

[29] Cf. DASCAL (1987).

Capitulo 2. CONHECIMENTO SIMBÓLICO NA FILOSOFIA KANTIANA DA MATEMÁTICA

No capítulo anterior examinamos um conjunto de noções fundamentais para uma compreensão geral das teses de Leibniz acerca do conhecimento matemático. Dentre elas, exploramos mais cuidadosamente as noções leibnizianas de conhecimento simbólico e pensamento cego que têm como um de seus paradigmas a aritmética.

Estas noções foram cunhadas por Leibniz como uma alternativa às dificuldades, em grande medida "epistêmicas", provenientes da caracterização leibniziana do ideal de conhecimento: o conhecimento intuitivo. Tais dificuldades poderiam ser resolvidas, segundo Leibniz, por meio do emprego de signos em lugar das idéias, do que se conclui que o papel substitutivo dos signos permite obter conhecimento por meio de sua manipulação.

Em conexão com a noção de signo, apresentamos também a distinção leibniziana entre signos com semelhança e sem semelhança em relação aos conceitos ou idéias simbolizadas, distinção esta que será de importância na discussão ulterior. No que diz respeito propriamente ao conhecimento simbólico, destacamos a importância para Leibniz da decorrente economia de pensamentos, além das vantagens provenientes da possibilidade de mediante os signos, ter a certeza do conhecimento diante dos olhos. Com vistas à resolução do problema da arbitrariedade conceitual e do caráter convencional dos signos ressaltamos, também, os diferentes tipos de definições consideradas por Leibniz: nominal, real e genética, esta última, como uma subclasse das definições reais.

No presente capítulo iniciamos a investigação da concepção kantiana acerca da matemática. Objetivamos, sobretudo, mostrar que a importância dos símbolos assim como das definições na matemática é destacada por Kant desde seus primeiros escritos sobre temas de filosofia da matemática. Ressaltamos, porém, que as concepções kantianas a esse respeito foram marcadas por mudanças importantes ao longo das fases do pensamento de Kant, as quais serão apresentadas no decorrer deste capítulo.

Nas duas primeiras seções, tencionamos estabelecer um panorama geral da filosofia kantiana da matemática clarificando algumas das noções fundamentais relacionadas à mesma. Com este panorama fornecemos subsídios para a investigação em torno da filosofia kantiana da aritmética, em particular, investigação esta que começa a ganhar corpo na terceira seção deste capítulo, tornando-se central nos capítulos subseqüentes.

Na primeira seção apresentamos a concepção kantiana pré-critica em torno da matemática, na qual o destaque e a interpretação dada às definições e, em particular, aos símbolos, parecem evidenciar alguma continuidade em relação à abordagem leibniziana[30]. Ao final da seção, entretanto, indicamos algumas divergências entre Leibniz e Kant relacionadas à noção de definição.

Na segunda seção introduzimos algumas noções fundamentais para a compreensão da abordagem crítica kantiana, noções estas que tornarão a ser mencionadas ao longo da dissertação. Tendo feito isso,

---

[30] Um estudo mais abrangente acerca da sugestão de um vínculo entre as concepções kantianas e teses leibnizianas acerca da matemática é apresentado no artigo *Conhecimento Simbólico na Investigação de 1764*, de Abel Lassalle Casanave (no prelo).

passamos à abordagem da chamada concepção crítica de Kant acerca da matemática, a qual apresenta diferenciais determinantes em relação à abordagem pré-crítica, tendo em vista o destaque para as noções de intuição e de construção de conceitos, esta última podendo ser classificada em ostensiva ou simbólica conforme se aplicar à geometria ou à álgebra.

Finalmente, a terceira seção é dedicada, fundamentalmente, à apresentação e comentário das poucas passagens, ao longo da *Crítica da Razão Pura*, nas quais Kant faz menção à aritmética. Indicamos também algumas referências à aritmética na carta de Kant a Schultz objetivando, sobretudo, complementar o pano de fundo a partir do qual as interpretações contemporâneas em torno da filosofia kantiana da aritmética foram desenvolvidas. O exame de algumas dessas interpretações contemporâneas compõe os capítulos três e quatro.

2.1 Conhecimento Simbólico na *Investigação* de 1764

Na *Investigação Sobre a Distinção dos Princípios da Teologia Natural e da Moral*, de 1764, aparecem alguns dos mais importantes apontamentos de Kant sobre a matemática. Nesse trabalho, em particular na *Primeira Consideração*, Kant utiliza como estratégia, a exemplo do que fará anos depois, a comparação entre os modos de se obter verdades em matemática e em filosofia.

A relevância desta comparação reside no fato de que tanto a filosofia quanto a matemática são conhecimentos racionais, porém, de acordo com Kant, obtidos por métodos diferentes. Kant aborda, em relação a essas duas disciplinas, as diferenças em relação ao modo de definir, ao uso de signos em suas demonstrações, aos conceitos não analisáveis e proposições indemonstráveis e ao seu objeto de estudo. Nesta seção, nos centramos nos dois primeiros itens dando ênfase ao caso da matemática.

Em relação ao modo de definir, Kant sustenta que temos duas vias para chegar a qualquer conceito geral: a ligação arbitrária dos conceitos e a abstração a partir de um conhecimento que a análise tornou distinto. À Filosofia cabe a segunda via, uma vez que a ela compete a análise dos conceitos que são dados de um modo confuso a fim de clarificá-los em todas as suas partes; definir aqui significa desmembrar um conceito a fim de conhecermos suas notas. Trata-se, portanto, de uma definição analítica.

As definições matemáticas, por sua vez, são constituídas apenas por ligação arbitrária de conceitos, ou seja, a definição resulta da síntese, sendo denominada, por conseguinte, definição sintética. Com efeito, de acordo com Kant, ao contrário da filosofia, na matemática o conceito que explico não é dado antes da definição, senão que provém dela. Daí a importância das definições na obtenção de conhecimento matemático.

O uso dos signos na matemática é enfatizado em relação ao seu tipo próprio de demonstração, o qual permite que o universal seja considerado no particular, portanto, que os conceitos sejam substituídos por signos de modo a considerar *in concreto* o geral *nos* signos. Desse modo, na medida em que houvesse uma correspondência entre os signos e os conceitos por eles representados, seria possível obter conhecimento matemático mediante a manipulação dos mesmos de acordo com regras simples, porém certas, sem considerar, no processo, as idéias envolvidas, bastando retomá-las ao final.

Na passagem citada a seguir Kant aponta para esse papel substitutivo dos signos e para a manipulação simbólica cega como uma ferramenta na obtenção de conhecimento matemático. Após distinguir a aritmética geral das grandezas indeterminadas daquela aritmética dos números, Kant afirma:

> Em ambos os tipos de aritmética, primeiro são postos, em lugar das coisas mesmas, os seus signos, com a designação particular de seu aumento ou sua diminuição, das suas relações, etc., e procede-se a seguir, com esses signos, de acordo com regras fáceis e certas, através de permutação, combinação e subtração e todo tipo de mudanças, de tal modo que as coisas designadas são inteiramente deixadas de lado pelo pensamento, até que, ao fim, na conclusão, o significado da conseqüência simbólica seja decifrado (1992, p. 250)[31].

Por sua vez, na filosofia, é indispensável considerar os próprios conceitos ao invés dos signos, pois,

> Os signos da reflexão filosófica não são outra coisa senão palavras que nem indicam em seu conjunto os conceitos parciais que constituem a idéia completa designada pela palavra, nem podem designar, nas suas combinações, as relações entre os pensamentos filosóficos. Por isso neste tipo de conhecimento, deve-se ter em cada ponderação a coisa mesma ante os olhos, e é necessário representar o universal *in abstracto*, sem

[31] "In both kinds of arithmetic, there are posited first of all not things themselves but their signs, togheter with the special designations of their increase or decrease, their relations etc. Thereafter, one operates with these signs according to easy and certain rules, by means of substitution, combination, subtraction and many kinds of transformation, so that the things signified are themselves completely forgotten in the process, until eventually, when the conclusion is drawn, the meaning of the symbolic conclusion is deciphered".

> poder servirmo-nos da considerável facilidade da utilização de signos em lugar dos conceitos universais das coisas mesmas (1992, p. 251)[32].

Assim, os conceitos filosóficos somente podem ser considerados *in abstracto*, *através* dos signos, porém, não *nos* signos como na matemática.

O caráter seguro da significação dos signos constitui uma diferença notável entre a maneira com que a filosofia e a matemática atingem certeza, em particular pela economia de pensamentos e pela certeza *ad oculos*[33] proporcionada às demonstrações matemáticas. Esses elementos são mencionados por Kant, ainda que em outros termos, na seguinte passagem da *Investigação*, retirada da *Terceira Consideração*:

> Dado que, na matemática, os signos são meios sensíveis de conhecimento, segue-se que podemos saber que nenhum conceito escapou à nossa atenção e que cada comparação particular se processou de acordo com regras facilmente observadas, etc. E essas coisas podem ser conhecidas com o grau de segurança característico do que é visto com nossos próprios olhos. A atenção é assim consideravelmente facilitada pelo fato de que não é preciso pensar coisas em sua representação universal; o que precisamos pensar é nos signos como eles ocorrem no conhecimento particular que, neste caso, é sensível em caráter. Por contraste, a única ajuda que palavras, construídas como signos do conhecimento filosófico, oferece é a de lembrar-nos dos conceitos universais que

[32] "The signs employed in philosophical reflection are never anything other then words. And words can neither show in their composition the constituent concepts of which the whole idea, indicated by the word, consists; nor are they capable of indicating in their combinations the relations of the philosophical thoughts to each other. Hence, in reflection in this kind of cognition, one has to focus one's attention on the thing itself: one is constrained to represent the universal *in abstracto* without being able to avail oneself of that important device which facilitates thought and which consists in handling individual signs rather than the universal concepts of the things themselves".

[33] Certeza garantida em função da correção da demonstração poder ser inspecionada visualmente.

> elas significam. Por todo o tempo é necessário estar imediatamente consciente de seu significado. O entendimento puro deve ser mantido em estado de atenção constante; como é fácil para uma marca característica de um conceito abstrato escapar à nossa atenção sem notarmos, pois não há nada sensível que possa revelar-nos o fato de que tais marcas características tenham sido deixadas de lado. E quando isso acontece, coisas diferentes são tomadas como sendo a mesma coisa, o que resulta em erro. (1992, p. 265)[34].

Como vimos, a evidência creditada aos signos da matemática está relacionada ao seu caráter sensível. Em relação a isso vale destacar que nesse período também as figuras geométricas eram tidas por Kant como signos, e de um tipo particular, a saber, signos que guardam semelhanças com as coisas significadas, o que lhes proporcionava uma evidência ainda maior, embora em outros casos, na álgebra, por exemplo, a certeza também estivesse sempre assegurada.

Tendo em conta os elementos apresentados nessa seção, oriundos da comparação realizada por Kant na *Investigação de 1764* entre os modos de se atingir verdades na filosofia e na matemática, particularmente, em relação aos itens privilegiados em nossa

[34] "For since signs in mathematics are sensible means to cognition, it follows that one can know that no concept has been overlooked, and that each particular comparison has been drawn in accordance with easily observed rules etc. And these things can be known with the degree of assurance characteristic of seeing something with one's own eyes. And in this, the attention is considerably facilited by the fact that it does not have to think things in their universal representation; it has rather to think the signs as they occur in their particular cognition which, in this case, is sensible in character. By contrast, the only help which words, construed as the signs of philosophical cognition, afford is that of reminding us of the universal concepts which they signify. It is at all times necessary to be immediately aware of their significance. The pure understanding must be maintained in a state of constant attention; how easy it is for the characteristic mark of an abstracted concept to escape our attention without our noticing, for there is nothing sensible which can reveal to us the fact that the characteristic mark has been overlooked. And when that happens, different things are taken to be the same thing, and the result is error".

exposição, finalizamos a seção mostrando os vínculos que podem ser estabelecidos com a abordagem leibniziana em torno dos mesmos tópicos.

Em relação ao emprego de signos na matemática, as heranças do pensamento leibniziano ficam quase evidentes na exposição kantiana. Ao destacar a possibilidade de obtenção de conhecimento matemático mediante a consideração dos próprios signos em lugar dos conceitos pelos quais eles estão, por contraste à imperfeição dos signos utilizados na filosofia, Kant, assim como Leibniz, considera a possibilidade de se obter conhecimento via a manipulação cega de símbolos.

A economia de pensamentos e a certeza *ad oculos* proporcionadas pelos signos nas demonstrações matemáticas também são mencionadas por Kant, ainda que de maneira periférica. Finalmente, podemos destacar também que na *Investigação* as figuras geométricas são consideradas signos com semelhança em relação aos conceitos geométricos por elas simbolizados, resgatando a distinção leibniziana entre signos com semelhança e signos sem semelhança.

No que diz respeito às definições ainda há acordo com Leibniz quanto ao seu fundamento: no período pré-crítico, também para Kant o fundamento das definições está baseado num critério lógico, qual seja, o princípio de não-contradição; o desacordo se dá a partir da distinção entre conceitos dados e conceitos não-dados proposta por Kant. Ele sustenta que somente os conceitos dados, entre os quais os filosóficos, podem ser analisados e, portanto, definidos analiticamente. Por sua vez, os conceitos matemáticos não são dados, segundo Kant, anteriormente à definição, senão que provêm dela. Nesse caso a definição consiste numa ligação arbitrária de conceitos mediante síntese, do que se segue que definições matemáticas são todas sintéticas. Para Leibniz não há essa distinção; para ele todos os conceitos são dados.

A importância das definições na obtenção de conhecimento matemático é mantida na concepção madura de Kant, porém, ocorrem importantes alterações em torno de seu significado, seu fundamento e também em conexão com a distinção entre conceitos dados e não-dados, a qual envolverá também a distinção apresentada por Kant entre forma e matéria de um conceito. Em relação ao fundamento das definições, no período crítico, Kant passará a exigir além da possibilidade lógica também a possibilidade real do conceito em questão, esta última, mediante a apresentação de uma intuição que lhe corresponda. As modificações na concepção kantiana em relação ao modo de obtenção de conhecimento matemático mencionado na *Investigação* serão examinadas na seção seguinte.

2.2 Construção Simbólica e Ostensiva de Conceitos Matemáticos

A concepção madura de Kant acerca da matemática é apresentada fundamentalmente na *Crítica da Razão Pura* e foi desenvolvida a partir de uma série de noções apresentadas ao longo da referida obra, as quais promoveram importantes mudanças em relação às teses apresentadas na *Investigação*. A título de esclarecimento apresentamos na seqüência, de maneira muito breve, algumas das distinções kantianas mais relevantes nesse processo de mudança.

A começar pela faculdade de conhecer, Kant distingue entre duas formas de conhecimento: o empírico ou *a posteriori* e o puro ou *a priori*. O conhecimento empírico provém da experiência, ou seja, dos dados provenientes dos sentidos sendo, portanto, sempre contingente; o puro ou *a priori*, por sua vez, vai de encontro ao empírico, na medida em que é independente de qualquer experiência sensível, caracterizando-se, portanto, pela universalidade e necessidade (B1-B4).

Em conexão com esta distinção entre *a priori* e *a posteriori* é importante distinguir juízos analíticos de juízos sintéticos. O juízo será analítico, diz Kant, quando o conceito do predicado já está contido no conceito do sujeito, do que se segue que o que é dito no predicado pode ser extraído do sujeito mediante análise. Em oposição, o juízo será sintético no caso em que unir o conceito expresso pelo predicado ao conceito do sujeito acrescentando a ele algo novo e, portanto, ampliando o conhecimento.

Feitas as distinções entre a priori e a posteriori e entre analítico e sintético é possível classificar os juízos em três tipos: analíticos, sintéticos a posteriori e sintéticos a priori. Os analíticos, apesar de universais e necessários, não ampliam o conhecimento, tendo em vista se tratarem de juízos tautológicos; os sintéticos a posteriori perdem em interesse em função de sua contingência; finalmente, os juízos sintéticos a priori são aqueles que, ao mesmo tempo em que são universais e necessários, ampliam o conhecimento. Mostrar como são possíveis juízos desse último tipo, os sintéticos a priori, constituiu-se num dos principais objetivos da *Crítica da Razão Pura*. No momento é o bastante considerar que era essa a natureza dos juízos matemáticos, segundo Kant (B10-B14).

Para responder, entre outras perguntas, como são possíveis juízos sintéticos a priori, Kant se dedicou a mostrar que não é a faculdade de conhecer que se regula pelo objeto, mas o contrário, o objeto que se regula pela faculdade de conhecer. Caberia à filosofia investigar a possível existência de princípios a priori, responsáveis pela síntese dos dados empíricos, que deveriam ser encontrados nas duas fontes de conhecimento, quais sejam, a sensibilidade e o entendimento.

A sensibilidade é a faculdade das representações intuitivas mediante as quais os objetos nos são dados; o entendimento é a faculdade das representações conceituais pelas quais esses objetos são pensados (B30). Kant conclui que um conhecimento autêntico somente pode ser alcançado mediante a ligação entre sensibilidade e entendimento, isto é, entre intuição e conceito (B74).

Intuições são representações singulares e imediatas, isto é, se referem aos objetos singularmente e de modo direto. As intuições puras – espaço e tempo – contêm unicamente a forma sob a qual algo é intuído e são possíveis a priori; as intuições empíricas, por sua vez, envolvem sensações e, portanto, só são possíveis a posteriori (B34).

Conceitos são representações universais e mediatas e, como tal, referem-se a classes, de modo que sua aplicação a objetos particulares precisa ser mediada por outro tipo de representações, a saber, intuições. Daí o porquê *"nem conceitos sem uma intuição de certa maneira correspondente a eles nem intuição sem conceitos podem fornecer um conhecimento"* (B74).

Kant ressalta ainda, na *Lógica de Jäsche*, que em todo conceito, seja ele empírico ou puro, é preciso distinguir entre a matéria e a forma. *"A matéria dos conceitos é o objeto; sua forma a universalidade"* (#2). Com efeito, tanto os conceitos empíricos como os puros no que diz respeito à forma são universais. Quanto à matéria, no entanto, os primeiros originam-se dos sentidos pela comparação dos objetos da experiência, sendo sempre apenas a posteriori; e os últimos têm também sua origem no entendimento, independentemente de toda a experiência e, portanto, a priori. A diferença entre os conceitos dados e não-dados reside, então, sobre a matéria dos conceitos, isto é, sobre seu conteúdo[35].

Tendo concluído essa breve retomada de algumas noções e distinções kantianas que resultam essenciais para a discussão ulterior, passamos à exposição da filosofia kantiana da matemática desenvolvida no chamado período crítico.

A discussão em torno da matemática ganha lugar na *Crítica da Razão Pura*, propriamente, no primeiro capítulo da *Doutrina Transcendental do Método*, no qual Kant disserta sobre as definições, axiomas e demonstrações. Aqui, examinamos de modo mais direto apenas a abordagem em torno das definições.

Seguindo um modelo similar àquele da *Investigação de 1764*, Kant promove uma comparação entre o modo filosófico e o modo

[35] Podemos considerar, então, que os conceitos são classificados por Kant em dados a priori, dados a posteriori, não-dados a priori e não-dados a posteriori.

matemático de se alcançar verdades, destacando, como o fizera anteriormente, que *“o conhecimento filosófico considera o particular somente no universal, ao passo que o conhecimento matemático considera o universal no particular”* (A713/B741).

Entretanto, as similaridades vão dando lugar às diferenças a partir da inserção dos elementos característicos do período crítico, em particular, em relação à noção de definição, entendida agora como *construção de conceitos* e *reservada somente ao caso da matemática*. No caso da filosofia, segundo Kant, não há propriamente definição, mas sim, exposição. Isto se confirma na seguinte passagem:

> ...as definições filosóficas são unicamente exposições de conceitos dados, ao passo que as definições matemáticas são construções de conceitos originariamente forjados pelo entendimento; enquanto as primeiras só são obtidas analiticamente através de um trabalho de desmembramento (cuja completude não é apodíticamente certa), as últimas são constituídas sintéticamente. Logo, as definições matemáticas *forjam* o próprio conceito, ao passo que as filosóficas somente o explicam (A730/B758).

Assim, as verdades da filosofia e da matemática, ambas conhecimentos racionais, são obtidas agora, respectivamente, *por* conceitos e *por construção* de conceitos.

Construir um conceito, na linguagem kantiana significa exibir a priori a intuição que lhe corresponde, ou seja, apresentar a priori um correlato intuitivo dos conceitos envolvidos. Esta exigência reflete uma mudança importante no que tange aos fundamentos das definições. Agora, além da possibilidade lógica, que permite que o objeto seja pensado, é exigida a possibilidade real, isto é, que o objeto possa ser dado.

É fundamental reforçar que a intuição em questão é uma intuição pura, a qual, nas palavras de Kant, *"enquanto intuição... é um objeto singular, mas enquanto construção de um conceito (uma representação geral) nem por isso deve deixar de expressar, na representação, uma validade universal para todas as intuições que se subsumem no mesmo conceito"* (A713/B741).

Kant sustenta que a matemática considera o universal no particular, ou até mesmo no singular; o conceito *in concreto* na intuição; porém, a priori e mediante a razão. Ele insiste que para alcançar algum conhecimento na matemática é necessário ir além dos meros conceitos, tendo em vista tratarem-se de proposições sintéticas, mesmo que a priori.

Nos *Prolegômenos a toda metafísica futura que possa apresentar-se como ciência*, Kant esclarece que esta intuição a priori é possível somente pela forma da intuição sensível. Segundo ele,

> ...o espaço e o tempo são intuições que a matemática pura coloca como fundamento a todos os seus conhecimentos e juízos, que simultaneamente se apresentam como apodícticos e necessários; pois a matemática tem que representar, isto é, construir todos os seus conceitos primeiramente na intuição, e a matemática pura deve fazê-lo na intuição pura, sem a qual (visto não lhe ser permitido proceder analiticamente, ou seja, pela decomposição dos conceitos, senão somente sinteticamente) não lhe é possível dar nem um passo, enquanto lhe faltar a intuição pura, unicamente na qual pode ser dada a matéria para juízos sintéticos a priori (1984, p. 44).

Kant ilustra a noção de definição por construção de conceitos, contrapondo-a ao procedimento do filósofo, mediante uma alusão à demonstração euclidiana da proposição I.32[36]:

> Dê-se o conceito de um triângulo a um filósofo e permita-se que descubra à sua maneira, como a soma de seus ângulos se relaciona com o ângulo reto. Nada mais tem que o conceito de uma figura encerrada em três linhas retas, bem como o conceito de um número de ângulos igual ao de linhas. Que reflita o quanto quiser sobre este conceito; a partir do mesmo nada produzirá de novo. Pode desmembrar e tornar claro o conceito de linha reta, de um ângulo ou do número três, mas não atingir outras propriedades que nem se encontram nestes conceitos. Que o geômetra se dedique a esta questão. Imediatamente começa construindo um triângulo. Por saber que a soma de dois ângulos retos perfaz exatamente tanto quanto a soma de todos os ângulos adjacentes que podem ser traçados a partir de um ponto pertencente a uma linha reta, prolonga um dos lados de seu triângulo e obtém assim dois ângulos adjacentes que somam o mesmo que dois retos. Passa então a dividir o ângulo externo traçando uma linha paralela ao lado oposto do triângulo, e vê que aqui surge um ângulo adjacente externo que é igual a um ângulo interno e assim por diante. Deste modo, mediante uma cadeia de inferências e sempre guiado pela intuição, o geômetra atinge a solução totalmente elucidativa e ao mesmo tempo universal do problema (A716-717/B744-745).

Este exemplo contempla o tipo de construção considerado por Kant como próprio da geometria, a saber, uma construção na qual a intuição é uma espécie de instância do conceito por ela exibido. Daí a denominação de *construção ostensiva*. Há, porém, outro caso bastante diferente: a álgebra, a qual opera com símbolos que estão por

[36] Cf. EUCLID, (1956).

conceitos, mas não os instanciam[37]. Também este caso foi contemplado por Kant.

Assim, embora no período crítico a noção de intuição pura tenha ocupado, em grande medida, o lugar de destaque reservado anteriormente aos signos, o aspecto simbólico não foi deixado no esquecimento. Isto ficou atestado por Kant nas seguintes passagens da CRP nas quais ele considera o caso da álgebra, paradigma de conhecimento obtido mediante manipulação de signos e cuja construção de conceitos foi denominada simbólica ou característica:

> todavia, o matemático não constrói somente as quantidades (quanta), como na geometria, mas também a mera quantidade (quantitatem), como na álgebra (Buchstabenrechnung); neste caso [o matemático] abstrai completamente da natureza do objeto que deve ser pensado segundo um tal conceito de quantidade. Então, escolhe uma certa notação para todas as construções de quantidades em geral (números), como a adição, subtração, extração de raízes, etc., e após ter também adotado uma notação para o conceito geral das quantidades segundo as relações diversas das mesmas, exibe na intuição segundo certas regras universais todo procedimento por meio do qual se gera e se modifica a quantidade. Onde uma quantidade deve ser dividida por outra, a álgebra compõe os caracteres referentes a ambas segundo a forma notacional da divisão, e assim nos casos restantes. Deste modo, assim como a geometria o consegue por intermédio de uma construção ostensiva ou geométrica (dos próprios objetos), através de uma construção simbólica a álgebra atinge paragens jamais acessíveis ao conhecimento discursivo mediante simples conceitos (A717/B745).

Reconhecendo mais uma vez as diferenças entre os procedimentos geométricos e algébricos, Kant considera, na seguinte

[37] Instâncias exibem os conceitos; símbolos somente expressam conceitos.

passagem seguinte, uma das virtudes da manipulação de signos, a certeza assegurada *ad óculos*. Kant escreve:

> Mesmo o procedimento da álgebra (Verfahren der Algebra) com as suas equações, a partir das quais a verdade é produzida juntamente com a prova mediante uma redução, não é, por certo, nenhuma construção geométrica, senão uma construção característica, na qual se expõe na intuição, por meio de signos, os conceitos, principalmente de relações de quantidade, e que sem sequer considerar o aspecto heurístico, assegura contra erros todas as inferências pelo fato de que cada uma delas é posta ante os olhos. (A734/B762)

O conteúdo das duas passagens citadas sugere que, em princípio a definição geral de construção de conceitos apresentada por Kant deveria contemplar estes dois casos tão diferentes: a construção ostensiva aplicada à geometria e a construção simbólica relativa à álgebra.

Tendo em vista que no período crítico a noção kantiana de intuição está ligada à sensibilidade e, portanto, ao que parece, envolve a necessidade de instanciação do conceito, o enquadramento do caso da geometria se dá com alguma naturalidade, uma vez que no período crítico as figuras geométricas, que antes eram tidas como signos, passaram a ser vistas como intuições puras que de algum modo instanciam os conceitos geométricos em questão. O mesmo já não pode ser dito no caso da álgebra, na qual, não obstante a relevância dos símbolos na obtenção de conhecimento ser inquestionável, o caráter intuitivo requerido por Kant aos juízos da matemática não é tão evidente, na medida em que os símbolos envolvidos, como já observamos, estão por conceitos, porém, não os instanciam[38].

Além dessa dificuldade relacionada com a noção de construção de conceitos matemáticos, o fato da abordagem em torno das construções ostensiva e simbólica desenvolvida por Kant não trazer, em nenhum momento, referências diretas ao caso da aritmética também levanta questionamentos, por exemplo, se é legítimo falar em construção de conceitos aritméticos e se for, qual seria a construção envolvida.

Na seção seguinte elencamos e comentamos as poucas passagens nas quais temas de filosofia da aritmética aparecem de modo um pouco mais direto, fundamentalmente, aquelas da *Crítica da Razão Pura*.

2.3 A Aritmética em Kant

Como já dissemos anteriormente, não são muitas as passagens nas quais Kant faz referência direta à aritmética. No entanto, e inclusive por isso, cada uma dessas poucas passagens assume um papel importante na tentativa de interpretar como Kant concebia a atividade realizada nessa disciplina. Nesta seção apresentamos integralmente as passagens da *Crítica da Razão Pura* que consideramos relevantes para nossa investigação, além de algumas outras passagens da obra de Kant. Com isso, visamos completar o

[38] Cf. LASSALLE CASANAVE, A. *Conocimiento por Construción Simbólica* (no prelo).

pano de fundo para uma interpretação da filosofia kantiana da aritmética.

Algumas das seguintes passagens da CRP contêm referências diretas à aritmética; em outras, essa relação é de certo modo conjectural. Com exceção das passagens constantes na *Doutrina do Esquematismo*, as quais, dada a conexão com a mesma, podem ser abordadas de maneira mais satisfatória mediante uma apresentação mais completa de tal doutrina, as demais passagens serão apresentadas aqui isoladamente.

Já na *Introdução* da edição B da *Critica da Razão Pura* aparece uma das mais importantes e também polêmicas referências de Kant à aritmética. Defendendo o caráter sintético a priori da matemática, mediante um exemplo claramente retirado da aritmética, Kant afirma, em B15:

> Na verdade, dever-se-ia de início pensar que a proposição 7+5=12 é uma proposição meramente analítica que resulta do conceito de uma soma de sete mais cinco, segundo o princípio da contradição. Mas quando se observa mais de perto, descobre-se que o conceito da soma de 7 e 5 nada mais contém que a união de ambos os algarismos num único, mediante o que não é de maneira alguma pensado qual seja esse único algarismo que reúne ambos. O conceito de doze não é absolutamente pensado pelo fato de eu apenas pensar aquela união de sete mais cinco, e por mais que eu desmembre o meu conceito de uma tal possível soma, não encontrarei aí o conceito de doze.

Kant acrescenta:

> É preciso sair desses conceitos tomando como ajuda a intuição correspondente a um deles, por exemplo, os cinco dedos ou (como *Segner* na sua Aritmética) cinco pontos, e assim acrescentar sucessivamente as unidades

> do cinco, dado na intuição, ao conceito de sete. Com efeito, tomo primeiro o número 7 e, na medida em que para o conceito de cinco recorro ao auxílio dos dedos de minha mão como intuição, ponho agora as unidades que antes reuni para / perfazer o número 5 sucessivamente naquela minha imagem acrescentando-as ao número 7, e vejo assim surgir o número 12. Pensei já no conceito de uma soma 7+5 que 5 *devesse* ser acrescentado a 7, mas não que esta soma fosse igual ao número 12. A proposição aritmética é, portanto, sempre sintética; isso se reconhece bem mais claramente quando se tomam números um pouco maiores, já que então fica evidente que, viremos e reviremos os nossos conceitos como quisermos, sem tomar a ajuda da intuição jamais poderíamos encontrar a soma pelo simples desmembramento dos nossos conceitos (B15/16).

Como vimos anteriormente, juízos analíticos caracterizam-se por serem tautológicos, isto é, pelo fato do conceito do predicado já estar dado no conceito do sujeito, o que se mostra tão logo o conceito do sujeito for analisado. Kant claramente discorda que seja esse o caso dos juízos da aritmética, aqui representados pela proposição “7+5=12”. Para ele, o que ocorre nesses juízos é mais bem o oposto: aquilo que é predicado do sujeito mantém uma relação clara com este na medida em que representa a união dos conceitos que compõem o sujeito (o conceito de sete, de cinco e de soma) num único, informação conhecida mediante a simples análise do conceito do sujeito; porém, traz uma informação nova, isto é, que não deriva analiticamente do sujeito, a saber, qual é o conceito em questão: o de doze.

Com efeito, para que essa informação seja obtida é necessário, para além dos conceitos, buscar as intuições que lhe correspondem, intuições estas que deverão ser puras garantindo, assim, a extensão do conhecimento sem perda da universalidade, isto é, o caráter sintético a priori aos juízos da aritmética.

Ora, Leibniz propôs uma demonstração de proposições aritméticas elementares que, segundo ele, mostrariam que verdades aritméticas poderiam ser obtidas mediante definições e idênticas. Isso implicaria, em termos kantianos, analiticidade. A proposição considerada na demonstração de Leibniz foi “2+2=4”, porém, seu argumento contempla qualquer fórmula de adição do tipo acima.

Para demonstrar tal proposição, Leibniz assumiu como um axioma a substitutividade dos idênticos, qual seja, *“colocando coisas iguais em lugar de iguais, a igualdade permanece”*, o qual certamente seria considerado por Kant como analítico. Leibniz parte também das seguintes definições:

$$2 = 1 + 1$$
$$3 = 2 + 1$$
$$4 = 3 + 1,$$

a partir das quais é obtida a seguinte prova:

$$\begin{aligned} 2 + 2 &= \underline{2 + 1} + 1 && \text{(em virtude da definição de “2”)} \\ &= \underline{3 \quad + 1} && \text{(em virtude da definição de “3”)} \\ &= \quad 4 && \text{(em virtude da definição de “4”)} \end{aligned}$$

Frente a isso surge naturalmente a seguinte questão: se Kant conhecia essa demonstração de Leibniz, porque então não considerou que as proposições aritméticas são analíticas? O uso de leis da identidade como o mencionado princípio de substitutividade não poderia ser objetado, logo, o aspecto relevante deveria estar aqui na interpretação dada por Kant à noção de definição envolvida nesta prova. Com efeito, não estaríamos na presença de análises ou, se usarmos a terminologia da *Investigação* ou da *Lógica*, de definições analíticas, mas de definições entendidas como construções. Assim, esta demonstração, segundo Kant, estaria fundamentada, não na análise dos conceitos envolvidos, mas sim, na adição sucessiva de unidades homogêneas. Porém, Kant afirma que as proposições aritméticas chamadas por ele de fórmulas de igualdade numérica são indemonstráveis.

Com efeito, nos *Axiomas da intuição*, Kant faz afirmações relativas à ausência de axiomas na aritmética:

> ... no que diz respeito à quantidade (quantitas), isto é, à resposta dada à questão: quão grande é algo?, não existe nenhum axioma em sentido próprio, não obstante diversas dessas proposições serem sintéticas e imediatamente certas (*indemonstrabilia*) (A163-164/B204).

Para Kant, axiomas são proposições que devem ser universais, porém, sintéticas. As *noções comuns* de Euclides ou as chamadas *idênticas* em Leibniz, tais como “se a = b, então a – c = b – c” são tidas por ele como analíticas, não se tratando, portanto, de axiomas. Por sua vez, as proposições da aritmética, não obstante serem seus conceitos universais e as proposições sintéticas, não envolvem, segundo Kant, a universalidade requerida aos axiomas, uma vez que a verdade em questão é evidenciada sempre apenas de maneira singular. Com efeito, Kant sugere que tais proposições não sejam chamadas axiomas, mas sim, fórmulas numéricas.

Essa interpretação é confirmada na seguinte passagem:

> Que 7+5 seja = 12 não é uma proposição analítica. Com efeito, não penso o número 12 na representação de 7 nem na de 5, nem ainda na composição de ambos (aqui não se trata do fato de que eu devesse pensar este número *na adição de ambos*, pois na proposição analítica trata-se apenas da questão se realmente penso o predicado na representação do sujeito). Embora sintética tal proposição é somente singular. Na medida em que aqui se enfoca apenas a síntese do homogêneo (das unidades), esta pode ocorrer de uma única maneira, embora o uso de tais números seja posteriormente universal. ... o número 7 só é possível de um único modo, e assim também o número 12, que é produzido através da síntese do primeiro com o 5. Proposições tais têm que ser chamadas não axiomas / (senão haveria um número infinito deles), mas fórmulas numéricas (A164-165/B205-206).

Em relação com a afirmação da indemonstrabilidade poderiam ser considerados dois aspectos. Em primeiro lugar, levando em conta a demonstração de Leibniz apresentada acima, o procedimento de adição sucessiva de unidades homogêneas não poderia, em si mesmo, ser visto como uma demonstração? Deixaremos uma abordagem mais completa acerca deste aspecto para o terceiro capítulo, no qual discutiremos o tipo de construção (ostensiva ou simbólica) que corresponderia à aritmética.

Em segundo lugar, trabalhos de um discípulo de Kant, Johann Schultz, nos quais os princípios da associatividade e da comutatividade foram considerados em conexão com a demonstração das referidas fórmulas numéricas inspiraram a hipótese, levantada por Gottfried Martin, de que Kant teria vislumbrado uma possível axiomatização da aritmética aos moldes das axiomatizações clássicas da geometria indo de encontro à interpretação segundo a qual proposições aritméticas tais como “7+5=12” possam ser provadas a partir de axiomas propriamente aritméticos e definições.

Com efeito, uma objeção padrão ao argumento de Leibniz é a maneira com que as igualdades numéricas estão sendo consideradas, excluindo, essencialmente, o princípio de associatividade aí envolvido, como foi advertido por Schultz A sugestão é que Leibniz deveria ter inserido parênteses, apresentando a demonstração do seguinte modo:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

Schultz argumenta, no trabalho intitulado *Prüfung der Kantischen Kritik der reinen Vernunft* cuja primeira parte foi publicada em 1789 e a segunda em 1792, que uma prova de identidade aritmética envolve associatividade e também comutatividade; não obstante, ainda que isso fosse aceito como dado na concepção kantiana, o problema da participação da intuição na fundamentação da aritmética permaneceria e mesmo que Schultz tivesse algo a dizer a esse respeito, evidências textuais, como vimos acima, testemunham que, para Kant, não há axiomas na aritmética pelo menos não no sentido estrito do termo. Quando consideramos, no final deste capítulo, uma importante carta de Kant a Schultz, teremos algo mais a dizer acerca do status de enunciados como transitividade e comutatividade, porém, devemos antes examinar questões vinculadas com a doutrina do esquematismo, onde a noção de número é relacionada com a *“sucessiva adição de um a um (homogêneos)”*.

Logo ao início do capítulo da *Crítica da Razão Pura* dedicado ao *Esquematismo dos Conceitos Puros do Entendimento* Kant esclarece que a subsunção de um objeto a um conceito só é possível caso a representação do objeto seja homogênea à representação do conceito. Esse esclarecimento aponta para o problema em questão, qual seja: os conceitos puros do entendimento e as intuições sensíveis em geral são completamente heterogêneos entre si, de modo que tais conceitos não podem ser encontrados em nenhuma intuição. A fim de dar uma indicação para a solução dessa dificuldade Kant tratará, no referido capítulo, da *"condição sensível unicamente sob a qual podem ser utilizados os conceitos puros do entendimento"* (A136/B 175).

Tendo em vista a heterogeneidade entre conceitos puros do entendimento e intuições sensíveis, para que seja possível a subsunção das intuições aos conceitos e, por conseguinte, a aplicação da categoria a fenômenos, faz-se necessário, segundo Kant, um terceiro elemento, homogêneo a ambos. Esta representação mediadora, que deve ser pura e contemplar, além disso, um lado "intelectual" e outro sensível é denominada por Kant *Esquema Transcendental*.

Kant sugere que tal esquema dos conceitos puros do entendimento que media a subsunção dos fenômenos às categorias é a determinação transcendental do tempo, o que é esclarecido e justificado por meio de resultados obtidos anteriormente na CRP, via o seguinte argumento:

> o conceito do entendimento contém a unidade sintética pura do múltiplo em geral. Como a condição formal do múltiplo do sentido interno, por conseguinte da conexão de todas as representações, o tempo contém na intuição pura um múltiplo a priori. Ora, uma determinação transcendental do tempo é homogênea à *categoria* (que constitui a unidade de tal determinação) na medida em que é *universal* e repousa numa / regra a priori. Por outro

> lado, a determinação do tempo é homogênea ao *fenômeno*, na medida em que o tempo está contido em toda representação empírica do múltiplo. Logo, será possível uma aplicação da categoria a fenômenos mediante a determinação transcendental do tempo que, como o esquema dos conceitos puros do entendimento, media a subsunção dos fenômenos à primeira (A138-139/B177-178).

Kant ressalta, ainda, que as categorias somente têm significação própria quando um objeto lhes for dado, total ou parcialmente, de modo que é sempre necessário considerar se e como tais objetos podem nos ser dados; que o único modo pelo qual os objetos nos são dados é a modificação de nossa sensibilidade; e que os conceitos puros a priori têm a função do entendimento na categoria e também, contêm a priori condições formais da sensibilidade, a saber, o sentido interno, condição universal da aplicação da categoria a um objeto qualquer. É a esta condição formal e pura da sensibilidade que Kant denomina *esquema* de um conceito. O procedimento do entendimento com estes esquemas, por sua vez, é chamado *esquematismo* dos conceitos puros. O número é o esquema correspondente às categorias da Quantidade: unidade, pluralidade e totalidade.

Conforme Kant, o esquema deve ser distinguido da imagem, uma vez que ele é sempre um produto da capacidade de imaginação cuja síntese tem por objetivo apenas a unidade na determinação da sensibilidade e não uma intuição singular, tal como no caso da imagem. O esquema é a representação de um procedimento universal da capacidade de imaginação, cuja função é proporcionar a um conceito sua imagem.

> Assim, se ponho cinco pontos um após o outro . . . . ., isto é uma imagem do número cinco. Ao contrário, se apenas penso um número em geral, que pode ser cinco ou cem, então este pensamento é mais a representação de um método de representar uma quantidade (por exemplo, mil) numa imagem, conforme um certo conceito do que essa própria imagem que eu, no último caso, dificilmente poderia abranger com a vista e comparar com o conceito. Ora denomino tal representação de um procedimento universal da capacidade de imaginação, o de proporcionar a um / conceito sua imagem, o esquema deste conceito (A140/B179-180).

Como podemos ver, trata-se de uma representação de um procedimento para gerar uma imagem e não da própria imagem. Em relação a essa passagem poderíamos questionar, então, se ocorre o mesmo se consideramos como imagem do número cinco, por exemplo, os cinco pontos, tal como o faz Kant, o numeral arábico 5 ou ainda a notação romana V[39].

Um aspecto de algum modo similar ao mencionado acima aparece em uma breve passagem, quando Kant trata dos conceitos puros do entendimento ou categorias, que parece guardar alguma relação com a concepção kantiana em torno da aritmética, considerada no seu conjunto; nesse caso, porém, a referência à aritmética ocorre somente de modo indireto:

> A *síntese pura, representada de modo universal*, dá o conceito puro do entendimento. Por síntese pura entendo a que repousa sobre um fundamento da unidade sintética

[39] Martin Heidegger destacou no § 21 de *Kant e o Problema da Metafísica*, que não é o caso que esta série de pontos manifeste o número apenas porque seja possível abarca-la com a vista, mas sim, porque coincide com a representação da regra que torna possível a apresentação deste número. Heidegger observa a especificidade de determinados tipos de signos na seguinte passagem: “O número mesmo não tem nunca o aspecto dos cinco pontos, mas tampouco o dos signos 5 ou V. ... O signo 5 desenhado no espaço não tem absolutamente nada em comum com o número, enquanto o aspecto dos cinco pontos . . . . . pelo menos se deixa enumerar pelo número cinco” (1954, p. 89).

> a priori: assim, a nossa ação de enumerar (isso nota-se sobretudo em números maiores) é uma *síntese segundo conceitos* porque ocorre segundo um fundamento comum da unidade (por exemplo, o da dezena). Sob este conceito, portanto, a unidade torna-se necessária na síntese do múltiplo (A78/B104).

O termo "dezena", na passagem citada acima, permite diferentes interpretações. Por um lado, poderia dizer respeito a uma notação posicional de base dez e, portanto, significar "uma dezena e zero unidades"; por outro, poderia fazer referência a um instrumento como o ábaco, por exemplo, no qual não há representação para zero, assim, o termo dezena significaria "dez unidades". Cada uma dessas interpretações conduziria a conclusões bastante diferentes acerca da filosofia kantiana da aritmética[40].

Retomando a abordagem da doutrina do esquematismo, destacamos que Kant apresenta uma distinção entre três tipos de conceitos: conceitos sensíveis puros, ao que tudo indica, os conceitos matemáticos; conceitos empíricos; e conceitos puros do entendimento, ou seja, as categorias. Esta distinção parece facilitar a diferenciação entre o esquema de um conceito e sua imagem[41]. Examinaremos esta relação apenas no que tange aos conceitos matemáticos e às categorias.

---

[40] Este aspecto será examinado no quarto capítulo em conexão com as teses de J. Michael Young, o qual, no artigo *Kant on the Construction of Arithmetical Concepts*, também sustenta teses semelhantes àquelas de Heidegger, mencionadas na nota anterior.

[41] H. J. Paton (1965) observa que há uma dificuldade no fato de Kant ilustrar a diferença entre esquema e imagem com referência a conceitos particulares, qual seja: o esquema transcendental foi introduzido como uma idéia mediadora entre categorias e intuições, mediação esta que não era necessária entre conceitos particulares e suas intuições. Ele considera, no entanto, que nesses casos os esquemas poderiam ser necessários por outras razões. Assim sendo, no entanto, uma descrição do que poderia ser chamado de esquema em geral poderia ajudar a ilustrar o que o esquema transcendental tem em comum com os demais esquemas.

Kant argumenta que aos nossos conceitos sensíveis puros, isto é, aos conceitos matemáticos, não subjazem imagens de objetos, mas sim, esquemas. Isto parece claro na medida em que se prima pelo caráter a priori da matemática, caráter este que se perderia caso estivesse em jogo uma imagem singular (empírica) do conceito em questão.

Ao passo que a imagem é vista como um produto da faculdade empírica da capacidade produtiva da imaginação, o esquema dos conceitos sensíveis puros é entendido como um produto da capacidade pura a priori da imaginação. Por este esquema e através dele, afirma Kant, as imagens tornam-se primeiramente possíveis. Porém, teriam que estar conectadas ao conceito apenas mediante o esquema ao qual designam, ou seja, em si mesmas tais imagens não são completamente congruentes ao conceito.

A exposição sobre a relação esquema/imagem fica ainda mais obscura no que tange aos esquemas dos conceitos puros do entendimento, dado que estes não podem ser levados a nenhuma imagem. O esquema de um conceito puro do entendimento, segundo Kant,

> ... é somente a síntese pura conforme uma regra da unidade, segundo conceitos em geral que expressa a categoria e é um produto transcendental da capacidade de imaginação que concerne à determinação do sentido interno em geral, segundo condições de sua forma (o tempo), com vistas a todas as representações na medida em que estas deveriam interconectar-se a priori num conceito conforme a unidade da apercepção (A142/B 181).

Kant reserva à noção de esquema própria das categorias da Quantidade somente um parágrafo, tal como se segue:

> A imagem pura de todas as quantidades (quantorum) ante o sentido externo é o espaço; mas de todos os objetos dos sentidos em geral, o tempo. O esquema puro da quantidade (quantitatis) como conceito do entendimento é, contudo o número, que é uma representação que enfeixa a sucessiva adição de um a um (homogêneos). Portanto, o número não é senão a unidade da síntese do múltiplo de uma intuição homogênea em geral, mediante o fato de que produzo o próprio tempo na apreensão da intuição (A143/B182).

O esquema das categorias relacionadas à Quantidade, assim como o esquema das demais categorias, diz Kant, contém e faz representar uma determinação de tempo. Especificamente, o número contém e faz representar a produção (síntese) do próprio tempo na apreensão sucessiva de um objeto[42].

Estas passagens relacionadas aos esquemas podem conter informações valiosas acerca da aplicação da noção kantiana de construção de conceitos à aritmética, deixando em aberto, no entanto, a interpretação acerca do caráter ostensivo ou simbólico de tal

[42] No *Prolegômenos*, Kant apresenta praticamente a mesma abordagem acerca da aritmética feita na CRP, porém, em menos detalhes. Destacamos aqui apenas uma breve passagem na qual, dado o conjunto da obra, Kant parece dar mais ênfase para a interpretação da aritmética como uma ciência do tempo, do que nas duas edições da *Crítica da Razão Pura*: "A geometria toma por fundamento a intuição pura de espaço. A aritmética constrói ela mesma seus conceitos de números mediante a adição sucessiva das unidades no tempo; mas especialmente a mecânica pura pode formar seus conceitos de movimento somente mediante a representação do tempo" (§10, 1984, p. 44). Roberto Torreti (1980) chama atenção para o fato de que são poucas as passagens nas quais Kant relaciona a aritmética com o tempo e que somente em uma passagem, a que acaba de ser citada, e mesmo nessa, de maneira falha, Kant parece conceber a aritmética como uma "ciência do tempo". Não se justifica, portanto, segundo Torreti, uma abordagem da filosofia kantiana da aritmética que apresente a aritmética nestes termos, sobretudo, porque já na Dissertatio de 1770 Kant concebia os conceitos aritméticos como intelectuais, de modo que somente sua atualização exigiria apoio intuitivo. Esta concepção teria sido formulada de forma inequívoca, pela primeira vez, por Schultz. Tratamos disso na segunda seção do terceiro capítulo.

construção. A referência aos cinco pontos um após o outro como uma imagem do número cinco e a caracterização do número como *"uma representação que enfeixa a sucessiva adição de um a um (homogêneos)"* (A143/B182) podem conduzir a diferentes interpretações.

Por um lado, os pontos ou barras tomadas como imagens podem ser interpretados como instâncias de número. Nesse caso, cada ponto ou cada barra poderia ser visto como instância de uma unidade e o conjunto originado pela sucessiva adição de unidades, como instância da totalidade correspondente, caracterizando, portanto, uma construção ostensiva. Por outro lado, estes mesmos pontos ou barras podem ser interpretados apenas como signos que estão pelos conceitos em questão, e cujo caráter de instância seria irrelevante. Nesse caso, o resultado seria o mesmo, caso utilizássemos o símbolo arábico para um e o sinal para adição, tantas vezes quantas fossem necessárias. Esta última interpretação caracterizaria a construção em jogo como simbólica. Retomamos o tópico no quarto capítulo.

Em uma carta a Schultz, datada de 25 de novembro de 1788, Kant busca esclarecer algumas interpretações acerca da CRP feitas por Schultz em um manuscrito, as quais seriam publicadas alguns anos depois no livro referido anteriormente.

As primeiras observações de Kant dizem respeito à interpretação de Schultz, contrária à sua, de que não há conhecimento sintético a priori na aritmética, mas sim, somente analítico. Como argumento, Kant menciona o fato da álgebra (aritmética universal) ser uma ciência que amplia nosso conhecimento, do que se seguiria que a menos que a definição de "analítico" como meramente explicativo estivesse errada, a álgebra não consiste meramente de juízos analíticos. Para Kant, enunciados como a lei da transitividade ou de comutatividade como os que aparecem na demonstração de Schultz no *Prüfung* que comentávamos acima, são leis algébricas e não aritméticas; ampliativas por pertencer à álgebra, e não explicativas.

Além disso, Kant ressalta que o conceito de uma mesma quantidade pode ser formado mediante diversas operações, sendo que cada uma delas é uma síntese. Assim sendo, muito embora os conceitos formados sejam objetivamente os mesmos, subjetivamente, conforme o tipo de combinação pensado para se chegar a tal conceito, eles são muito diferentes, donde se conclui que o juízo vai além do conceito, pois envolve informações que dependem da síntese.

Esse caráter subjetivo, relacionado com o caráter singular da apreensão intuitiva em jogo conduz Kant a destacar, também aqui, que a aritmética não tem axiomas. No entanto, agora, Kant sugere de maneira literal que a aritmética tem postulados:

> Certamente a aritmética não tem axiomas, uma vez que seu objeto não é atualmente nenhum *quantum*, isto é, algum objeto quantitativo da intuição, mas antes *quantidade como tal*, ou seja, ela considera o conceito de uma coisa em geral por meio de uma determinação quantitativa. Por outro lado, a aritmética tem postulados, isto é, juízos práticos imediatamente certos... (1967, p. 129)[43].

[43] "Certainly arithmetic has no axioms, since its object is actually not any *quantum*, that is, any quantitative object of intuition, but rather *quantity as such*, that is, it considers the concept of a thing in general by means of quantitative determination. On the other hand, arithmetic has *postulates*, that is, immediately certain practical judgments ...".

Segundo Kant, se consideramos 7+5 como um contexto de um problema, qual seja, determinar um terceiro número (12) que devesse ser visto, nas palavras de Kant, como um *complementum ad totum* do outro, a solução para esse problema é encontrada por meio de uma operação muito simples, qual seja, a adição sucessiva proposta pelo número 5 como uma continuação da contagem a partir de 7. Assim, ainda que objetivamente o juízo "7+5=12" seja puramente teórico; subjetivamente, o signo +, relativo à adição, significa a síntese envolvida nessa busca de um terceiro número à parte dos outros dois. A necessidade de realizar esta tarefa é que faz do juízo um postulado[44].

Em outros termos, ratificando o que já havia dito na CRP, Kant afirma que nos juízos ou equações aritméticas os conceitos envolvidos precisam ser absolutamente recíprocos e objetivamente idênticos. No entanto, no problema: junte 7 e 5 em um único número, por exemplo, o número 12 não é obtido mediante a análise dos conceitos constituintes mas sim, mediante uma construção, ou seja, sinteticamente. Esta construção, uma contagem singular numa intuição pura, apresenta o conceito da conjunção dos dois números, de modo que o número 12 é a apresentação do pensamento "5+7" em um ato de contar juntos.

Ao final da carta, Kant reconhece a correção da interpretação de Schultz no que diz respeito à influência do tempo na aritmética e afirma que tal influência não se dá sobre as propriedades dos números, considerados como determinações puras da quantidade, mas nas

[44] Cf. KANT (1967).

mudanças relacionadas à determinação desta ou daquela quantidade em particular, a qual só é possível na medida em que sua intuição puder ser apreendida sucessivamente estando sujeita, portanto, à condição do tempo.

Com efeito, somente objetos de uma possível intuição sensível podem estar sujeitos a uma avaliação numérica ou quantitativa. Fica delimitada, assim, mais uma característica da concepção madura de Kant acerca da matemática: que a matemática pode ser aplicada somente a objetos sensíveis. O conteúdo da carta de Kant a Schultz será retomado no contexto da segunda seção do terceiro capítulo.

Capitulo 3. CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS NA ARITMÉTICA: PRIMEIRAS CONJECTURAS

Tomando como pano de fundo a abordagem geral da filosofia kantiana da matemática, assim como, a apresentação das passagens nas quais Kant faz alguma referência à aritmética, neste capítulo, e também no próximo, buscamos explorar mais detalhadamente o caso da aritmética no contexto da filosofia da matemática de Kant. Para isso, recorremos a um breve histórico do problema e a algumas das interpretações contemporâneas em torno da filosofia kantiana da aritmética.

O interesse em torno da aritmética pode ser notado na literatura relativa à filosofia kantiana da matemática produzida, nas últimas quatro décadas, por Hintikka (1967), Parsons (1969), Thompson (1972), Young (1982), Brittan (1982), Winterbourne (1990), Friedman (1992), Ferrarin (1995) e, mais recentemente, Shabel (1998; 2003). Nesse período, diferentes interpretações foram esboçadas, dentre as quais, a sugestão da aplicação da noção kantiana de construção de conceitos matemáticos também na aritmética.

Tal interpretação foi sugerida pela primeira vez nos artigos de Jaakko Hintikka e de Charles Parsons sem fornecer, no entanto, indicações claras acerca da natureza dessas construções. A interpretação na qual a caracterização da noção de construção de conceitos aritméticos torna-se realmente efetiva é, conforme nosso entendimento, a de J. Michael Young. Particularmente, foi no artigo de Young que a conjectura acerca da aplicação de construção simbólica na aritmética foi apresentada de modo mais fundamentado.

Neste capítulo examinamos as primeiras conjeturas sobre a extensão da noção kantiana de construção de conceitos também aos conceitos aritméticos. Na primeira seção, apresentamos a interpretação dada por Hintikka à abordagem kantiana acerca do método da matemática, destacando as passagens relativas à aritmética. Na segunda seção, examinamos um artigo de Parsons cujo tema central é a filosofia kantiana da aritmética buscando extrair as passagens mais significativas para o esclarecimento da natureza das construções na aritmética, segundo Parsons.

3.1 Imediatez e Indemonstrabilidade na Aritmética

No artigo *Kant on the mathematical method* (1967), Hintikka apresenta suas conjecturas acerca de como o método matemático, proposto por Kant na *Doutrina Transcendental do Método,* poderia ser melhor compreendido. Esta investigação, destacadamente, teve como ponto de partida o intento de tornar mais plausível a filosofia kantiana da álgebra; em particular, a afirmação feita por Kant de que também a álgebra envolve intuições. Neste contexto foram feitas também algumas considerações acerca da aritmética sem pretender, no entanto, abordar o problema como um todo.

O foco da abordagem de Hintikka está em mostrar as dificuldades oriundas da vinculação da concepção preliminar de Kant às teses expostas na *Estética Transcendental,* ou seja, da vinculação da noção kantiana de intuição à sensibilidade. Em particular, Hintikka sustenta que, caso os resultados da *Estética Transcendental* estivessem corretos e de fato precedessem sistemática e/ou historicamente a *Doutrina Transcendental do Método*, a concepção kantiana da álgebra seria inexplicável ou no mínimo insatisfatória. Isso poderia ser constatado imediatamente pela dificuldade para explicar em que momento intuições no sentido em que esta noção é entendida na *Estética Transcendental* são, de fato, empregadas na álgebra.

Segundo Hintikka, *"a intenção do uso de símbolos algébricos certamente não é proporcionar-nos intuições no sentido ordinário da palavra, isto é, seu propósito não é proporcionar-nos imagens vívidas ou quadros mentais"* (1992, p. 26)[45]. Consequentemente, se a álgebra opera com símbolos, e símbolos não instanciam conceitos, então não haveria propriamente em Kant uma teoria acerca do raciocínio algébrico. Hintikka menciona esta última tese, não propriamente para levá-la adiante, mas sim, como argumento em favor de uma interpretação alternativa para a noção kantiana de intuição.

Sua sugestão é de que há uma primazia sistemática e também histórica da *Doutrina Transcendental do Método* em relação à *Estética Transcendental*, de modo que ao termo intuição deve ser associado como nota essencial apenas a singularidade, ou seja, intuitividade deve significar somente individualidade. Com efeito, o método matemático de definir por construção de conceitos, proposto por Kant, consistiria simplesmente na introdução de representantes particulares de conceitos gerais. Hintikka sustenta também, que a idéia

[45] "The point of using algebraic symbols is certainly not to furnish ourselves with intuitions in the ordinary sense of the word, that is, its purpose is not to furnish ourselves with more vivid images or mental pictures".

de que o método matemático se baseia no uso de conceitos gerais in concreto, o que na sua interpretação significa na forma de instâncias individuais, teria sido o ponto de partida das concepções kantianas mais elaboradas.

É proposta, portanto, a distinção entre uma teoria preliminar e uma teoria completa da matemática de Kant. A primeira é relacionada às teses apresentadas na *Investigação de 1764* e sobreviveria também na *Doutrina Transcendental do Método*. A teoria completa se diferenciaria pela tentativa de Kant de mostrar que toda intuição é sensível, conexão essa que não seria assumida em nenhum momento na teoria preliminar, na qual, como já destacamos, a característica central da intuição seria a singularidade ou a individualidade.

Essa interpretação facilitaria bastante a compreensão da noção de construção simbólica, própria da álgebra, na medida em que os símbolos usados nela estariam por indivíduos e, nesse sentido, também a álgebra se basearia em intuições. Para chegar a esse resultado, porém, Hintikka deixa de lado uma série de elementos importantes relacionados à noção de construção simbólica.

O fato de que Kant tenha considerado, em algum momento, que o método matemático repousasse em substituir conceitos por signos não autoriza Hintikka a transportar essa concepção também para a concepção madura de Kant acerca da matemática, mediante a interpretação do termo intuição como "representante individual". Algumas passagens importantes da *Doutrina Transcendental do Método* parecem indicar mais bem o contrário.

A evidência em favor de uma interpretação de *"intuição que corresponde a um conceito"* em conexão com a sensibilidade é muito forte na concepção madura de Kant[46]. Por exemplo, na passagem A717/B745 já citada[47], a distinção entre construção simbólica (algébrica) e ostensiva (geométrica) é formulada precisamente em termos de signos em lugar dos objetos mesmos. Lassalle Casanave ratifica isso ao lembrar que, *"na Investigação, figuras, símbolos algébricos ou aritméticos são signos; na Crítica já não é assim com relação a figuras.* [Assim,] *A interpretação de Hintikka, cujo fio condutor é uma reconstrução aceitável das teses de Kant do ponto de vista formal, pretende reunir o que Kant, mal ou bem, separou"* (p. 6).

Em relação à aritmética Hintikka alerta que o caso é mais delicado que o caso da álgebra, não obstante também a aritmética pudesse se enquadrar em sua concepção. Conjeturamos que essa observação pode pretender indicar alguma complexidade quanto à definição do tipo de construção em jogo na aritmética como mostramos a seguir, na medida em que Hintikka não parece decidir-se por uma tese explicitamente.

A abordagem de Hintikka acerca da aritmética está centrada na interpretação das passagens B15/16 e A163-164/B204 da CRP[48]. Na primeira passagem, Kant defende a sinteticidade das proposições aritméticas na medida em que, segundo ele, tais verdades não podem ser obtidas mediante a simples análise dos conceitos envolvidos. Por meio de um exemplo, então, indica o procedimento a ser seguido para

[46] Cf. LASSALLE CASANAVE, A. *Conocimiento simbólico en la Investigación de 1764* (no prelo).
[47] Cf. citação na página 49 desta dissertação.
[48] Cf. citação, respectivamente, nas páginas 52-53 e 55 desta dissertação.

a determinação de verdades aritméticas, o qual envolveria o recurso à intuição. Ao final, diz ainda que a sinteticidade da aritmética é reconhecida mais claramente quando tratamos com números mais elevados. Na segunda passagem, porém, Kant afirma que, não obstante sintéticas tais proposições são imediatamente certas, ou seja, indemonstráveis.

Ao comentar essas passagens Hintikka afirma:

> no caso da aritmética de números pequenos, tais como 7, 5, e 12, a leitura usual das observações kantianas não é implausível. O que Kant parece estar dizendo é que para estabelecer que 7+5=12 temos que visualizar os números 7, 5 e 12 por meio de pontos ou dedos, ou algum outro tipo de ilustração adequada, de modo que possamos perceber imediatamente a equação desejada. Kant chegou até a dizer que equações como 7+5=12 são imediatas e indemonstráveis (A164/B204). Não é fácil conciliar isso com o fato de que Kant todavia descreve um procedimento que serve, chamemos isso de prova ou não, para estabelecer a verdade da equação em questão e que ele diz que essa concepção é mais natural quando aplicada a grandes números (B16) (1992, p. 27)[49].

Hintikka elabora uma interpretação da filosofia kantiana da aritmética mediante a tentativa de mostrar o que Kant quis dizer ao afirmar que equações tais como 7+5=12 são ‘imediatas’ e ‘indemonstráveis’. “Imediato” e “indemonstrável” não servem, segundo Hintikka, *“... para distinguir percepção imediata de um*

[49] “In the case of arithmetic of small numbers, such as 7, 5, and 12, the ordinary reading of Kant’s remarks is not without plausibility. What Kant seems to be saying is that in order to establish that 7+5=12 we have to visualize the numbers 7, 5 and 12 by means of points, fingers, or some other suitable illustrations so that we can immediately perceive the desired equation. He goes as far as to say that equations like 7+5+12 are immediate and indemonstrable (A 164 = B 204). This is not easy to reconcile with the fact that Kant nevertheless described a procedure which serves, whether we call it a proof or not, to establish the truth of the equation in question and that he said that his view is more natural as applied to large numbers (B 16)”.

argumento articulado, mas, para distinguir certa subclasse de argumentos particularmente simples de outros tipos de provas” (1992, p. 28)[50].

O recurso utilizado por Hintikka para a busca da interpretação correta da teoria kantiana da matemática foi o resgate dos paradigmas sobre os quais tal teoria pudesse estar fundamentada. O mais óbvio, haja vista ter sido reconhecido pelo próprio Kant, é o sistema euclidiano da geometria elementar. Embora reconheça que a comparação entre a teoria kantiana e o sistema euclidiano tenha sido usada na elaboração das críticas à primeira, Hintikka destaca que o problema, nesse caso, residiria menos na falsidade das críticas que na insuficiência da comparação; segundo ele é importante que se faça uma investigação cuidadosa em torno das características da apresentação euclidiana que Kant levava em conta em sua teoria.

A partir de sua interpretação da noção kantiana de intuição Hintikka procura mostrar se há alguma particularidade no procedimento euclidiano que dá lugar à idéia de que a matemática está baseada sobre o uso de instâncias particulares para conceitos gerais. Segundo ele, é fácil ver que há. Consideremos, então, a estrutura de uma demonstração em Euclides.

Para Euclides, em geral, a demonstração de uma proposição envolve as seguintes etapas. Primeiramente, a *enunciação* de uma proposição geral. Em seguida, o conteúdo da enunciação é aplicado a uma figura particular que Euclides assume como traçada; esta etapa é

[50] “… to distinguish immediate perception from an articulated argument, but to distinguish a certain subclass of particularly straightforward arguments from other kinds of proofs”.

chamada de *ecthesis* ou *exibição*[51]. À exibição, por sua vez, seguem as *construções auxiliares*, também referidas como preparação ou mecanismo, que consistem em complementações a partir da figura dada na exibição. Finalmente, a *prova* propriamente dita (*apodeixis*). Na prova não é realizada nenhuma construção adicional, senão que são feitas inferências concernentes à figura introduzida na exibição e completada pelas construções auxiliares usando definições e noções comuns. Tendo chegado à conclusão desejada acerca da figura particular, Euclides retorna novamente à enunciação geral.

Hintikka destaca, principalmente, a *ecthesis* ou *exibição* como um paradigma das construções kantianas, sustentando que é esse passo que Kant está considerando quando afirma que o método da matemática consiste em sempre considerar os conceitos gerais *in concreto*, em uma aplicação particular. Juntamente com a exibição, seriam consideradas também as chamadas construções auxiliares; essas duas partes da proposição euclidiana seriam, por conseguinte, necessárias para as construções kantianas.

Esta comparação reforça a tese de que a noção geral de construção de conceitos é de inspiração geométrica. Porém, como já destacamos no segundo capítulo, não apenas a sinteticidade da geometria, mas sim, da matemática em geral resulta, segundo Kant, do recurso às construções.

A comparação entre a geometria de Euclides e a de Descartes também pode, segundo Hintikka, proporcionar elementos que ajudem a entender Kant, tendo em vista a analogia que pode ser estabelecida

---

[51] Hintikka destaca que talvez não seja acidentalmente que Kant tenha usado o equivalente alemão para *exibição*, a saber, d*arstellung*, na explicação de sua noção de construção.

entre as operações algébricas e as operações geométricas. Particularmente, é importante destacar que operações algébricas correspondem a certas construções geométricas. Essa analogia poderia ser a chave para entender o que significava para Kant que equações aritméticas tais como 7+5=12 são ‘imediatas’ e ‘indemonstráveis’ bastando, para isso, tentarmos moldar o argumento por meio do qual 7+5=12 é verificado na forma de uma demonstração euclidiana.

De acordo com Hintikka,

> por causa da analogia entre operações algébricas e construções geométricas, a adição atual entre 7 e 5 corresponde ao terceiro estágio, isto é, à preparação ou mecanismo [construções auxiliares], de uma proposição euclidiana. As explanações de Kant também mostram que, de acordo com ele, os números 7 e 5 devem de algum modo ser exibidos anteriormente à operação atual de adição, em analogia à ‘*ecthesis*’ de uma proposição euclidiana (isso é o que suas observações sobre “pontos e dedos” ilustra) (1992, p. 32)[52].

Assim, a descrição feita por Kant do procedimento envolvido na determinação da soma de 7 e 5 - a partir da exibição do conceito de 7, mediante sete unidades, acrescentar a elas, uma a uma, cinco unidades, de modo que, ao final, é possível constatar que se tratam de doze unidades - envolve somente duas das etapas de uma demonstração euclidiana, a saber, a exibição e as construções auxiliares.

---

[52] “Because of the analogy between algebraic operations and geometrical constructions, the actual addition of 7 and 5 corresponds to the third stage, i.e., the preparation or ‘machinery’, of a Euclidean proposition. Kant’s explanations also show that, according to him, the numbers 7 and 5 must somehow be ‘set out’ or ‘exhibited’ before the actual operation of addition, in analogy to the ‘ecthesis’ of a Euclidean proposition. (This is what his remarks on “points or fingers” illustrate.)”.

Diante disso, Hintikka dá seguimento à sua argumentação mediante a questão:

> Mas o que então corresponde à prova propriamente, a *apodeixis*? Obviamente tudo o que temos que fazer a fim de mostrar que 7+5=12 é realizar a operação de adição; a prova mesmo é reduzida a um mínimo, à mera observação de que o resultado da adição equivale ao resultado desejado, 12. Em um sentido perfeitamente bom, portanto, pode-se dizer que nenhuma prova (completa), nenhuma *apodeixis* é necessária para estabelecer que 7+5=12. Esta equação é 'imediata' e 'indemonstrável' no preciso sentido de que ela pode ser estabelecida pela mera construção auxiliar ou *kataskeue* de uma prova euclideana (1992, p. 32)[53].

Hintikka argumenta que uma abordagem desse tipo ajuda a mostrar como Kant pretendia que a intuitividade da aritmética fosse entendida: a imediatez das verdades aritméticas não é devida ao fato de que a verdade de equações simples é percebida sem muita argumentação, mas sim, ao fato de que a única coisa que temos que fazer a fim de provar tais equações é realizar o cômputo, isto é, construções auxiliares. Isso ajuda a clarificar também a afirmação de Kant de que sua exposição em torno das equações aritméticas é mais facilmente entendida em conexão com números mais elevados.

Para finalizar, ressaltamos a afirmação de Hintikka de que ele não pretendeu negar a conexão proposta explicitamente por Kant entre intuição e sensibilidade, mas sim, argumentar em favor de que sua

[53] "But what, then, corresponds to the proof proper, to the *apodeixis*? Obviously, all that we have to do in order to show that 7+5=12 is to carry out the operation of addition; the proof proper is reduced to a mere minimum, to the mere observation that the result of the addition equals the desired result 12.In a perfectly good sense, therefore, one can say that no proof (proper), no *apodeixis* is needed to establish that 7+5=12. This equation is 'immediate' and 'indemonstrable' in the precise sense that it can be established by the mere auxiliary construction or *kataskeue* of a Euclidean proof".

interpretação da abordagem kantiana acerca do método da matemática não é desqualificada em função do desacordo com a teoria kantiana do espaço e tempo.

3.2 A Intuição na Filosofia Kantiana da Aritmética

Hintikka, no artigo citado na seção anterior, dedicou-se especialmente à interpretação do método da matemática tal como ele é apresentado por Kant na *Doutrina Transcendental do Método*. Neste contexto, desenvolveu a sua interpretação da noção kantiana de intuição, tecendo também algumas considerações acerca da filosofia kantiana da aritmética. Por sua vez, Parsons, no artigo *Kant´s Philosophy of Arithmetic*, de 1969, coloca a filosofia kantiana da aritmética como tema central, propondo uma interpretação da mesma no contexto da filosofia teórica de Kant como um todo. Um dos propósitos de Parsons, nesse artigo, foi esclarecer porque Kant sustentou que a aritmética depende de intuição sensível e que suas proposições são sintéticas ao invés de analíticas.

Parsons rejeita a tese de Hintikka segundo a qual apenas a singularidade deve ser vista como critério para a definição de intuição em Kant e tenta mostrar que os textos kantianos apontam para a caracterização do conceito de intuição como uma representação que combina o critério de imediatez com o critério de singularidade, relacionando intuição com sensibilidade.

Apesar de conceder que o critério de ‘relação imediata a objetos’ para a caracterização de algo como uma intuição poderia ser visto como uma formulação obscura da condição de singularidade, Parsons esclarece que tal critério, *"... evidentemente, significa que o objeto de uma intuição está de algum modo diretamente presente à mente ... e que intuição é assim uma fonte, em última instância a única fonte, do conhecimento imediato dos objetos"*. (1982, p. 14)[54].

Uma razão que pode ter fundamentado a tese de Hintikka, segundo Parsons, é a constatação da ausência do critério de imediatez na *Lógica*, além do fato de Kant fazer observações sobre conceitos sem considerar, essencialmente, conceitos singulares, o que pareceria conduzir à conclusão de que todas as representações singulares são intuições[55]. Além disso, a tese de Hintikka estaria fundamentada na interpretação do papel da intuição na matemática, dando suporte para a sua explicação da noção kantiana de construção de conceitos na intuição e para a análise resultante da demonstração matemática, com especial referência à álgebra.

Parsons privilegia, em sua argumentação, a importância dada por Kant ao fato de que nós humanos, enquanto seres finitos, só podemos ter intuições de objetos na medida em que formos afetados por eles e, por conseguinte, que a conexão entre intuição e sensibilidade não deriva diretamente do conceito de intuição mas sim, representa uma característica humana.

Por um lado, tal característica ressalta uma certa passividade de nossa parte, na medida em que nossas percepções não podem resultar unicamente de nossa própria atividade mental. Por outro, acentua um

---

[54] "... evidently means that the object of an intuition is in some way directly present to the mind ... and that intuition is thus a source, ultimately the only source, of immediate knowledge of objects".
[55] Cf. PARSONS (1982).

segundo aspecto, qual seja: a natureza de nossa capacidade de sermos afetados por objetos, nossa sensibilidade, já determina certas características de nossa intuição, a saber, que a forma da nossa intuição em geral é espaço-temporal. Como resultado, os objetos que intuímos devem ser espaciais e temporais; consequentemente, intuídos como tais.

Assim, esclarece Parsons, *"a intuição que exerce um papel na matemática, a qual não é o resultado direto da afecção de nossa razão por objetos, expressa um insight intuitivo que nós temos em nossas formas da intuição e é, nesse sentido, ainda uma intuição da sensibilidade"* (1982, p. 16)[56]. Ainda que de maneira periférica, Parsons acrescenta a observação de que além da sensibilidade, também o pensamento e a consciência mediante conceitos, isto é, o conhecimento por meio de conceitos são características dos entendimentos finitos.

Em relação a isso podemos fazer algumas observações em torno da distinção entre possibilidade lógica e possibilidade real. A possibilidade lógica é o tipo mais inclusivo de possibilidade. Se algo é possível de algum modo, seja ele qual for, é logicamente possível; a aplicabilidade da lógica não está limitada às formas de nossa sensibilidade. Contudo, há estados de coisas que são logicamente possíveis, mas que são excluídos pelas formas da intuição, ou seja, que podem ser pensados, mas não intuídos. A possibilidade real,

[56] "The intuition which plays a role in mathematics, which is not the direct result of the affection of our mind by objects, expresses an intuitive insight which we have into our forms of intuition and is in that sense still an intuition of sensibility".

portanto, somente pode ser mostrada com o concurso de nossas formas da sensibilidade.

Como destacamos no capítulo anterior, com respeito aos conceitos matemáticos, em sua concepção madura, Kant exige além da possibilidade lógica, também a possibilidade real dos objetos que caem sob tais conceitos, limitando a aplicação da matemática a objetos espaço-temporais. Uma das maiores dificuldades relacionadas à compreensão da filosofia kantiana da aritmética reside justamente em mostrar esse caráter intuitivo. Em relação com isso, Parsons ressalta que não há grandes dificuldades no que diz respeito ao por que Kant teria pensado que as proposições da aritmética são a priori; no entanto, não é nada fácil ver porque tais proposições foram consideradas sintéticas.

Na interpretação de Parsons, um dos elementos que levaram Kant a defender a sinteticidade das proposições da aritmética é a limitação do conceito kantiano de proposição analítica. Kant não dá uma formulação precisa deste conceito mas parece claro, a partir dos exemplos, que uma proposição é denominada analítica quando o conceito do predicado está contido no conceito do sujeito. Assim, segundo Kant, não haveria uma razão particular para que a proposição "7+5=12", por exemplo, fosse considerada analítica.

Um fator que depõe em favor disso é que o próprio Kant indica o modo pelo qual provamos que 7+5=12, a saber, mediante um procedimento tal como uma "contagem" no qual se progride do 7 até o 12 por adição sucessiva de 1, devendo-se operar com uma instância particular de um grupo de cinco objetos, que somente pode ser dada na intuição (B15/B16). No entanto, alerta Parsons, ainda assim parece ser possível colocar tal processo em termos puramente lógicos ou então, substituí-lo por outro que pudesse sê-lo, tentativa feita por Leibniz nos *Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano*, conforme a demonstração apresentada na terceira seção do segundo capítulo[57].

Frente aos aspectos que poderiam ser considerados a partir da demonstração leibniziana Kant considera, em relação à aritmética, duas possibilidades: regras de igualdade, que seriam analíticas, e identidades aritméticas elementares, tais como "7+5=12", consideradas sintéticas e indemonstráveis. Nenhuma dessas possibilidades poderia ser considerada por Kant como um axioma; as primeiras em função da analiticidade, pois, para Kant, axiomas em sentido próprio devem ser sintéticos; as últimas, pela singularidade, uma vez que axiomas devem ser também universais.

Esta posição é reafirmada na já citada carta a Schultz, na qual, após afirmar que a aritmética não tem axiomas Kant sustenta que, no entanto, a aritmética tem postulados, entendidos como *"juízos práticos imediatamente certos"*, cuja função é regrar o procedimento de obtenção de verdades aritméticas. De acordo com Parsons a ação envolvida no que Kant chama de postulados é a construção e seu propósito é que uma construção de um certo tipo possa ser realizada. Segundo Parsons, os postulados assumiriam, assim, o papel de axiomas de existência[58].

A interpretação de Parsons acerca de como a aritmética pode requerer intuição pura e, por conseguinte, qual a natureza da

[57] Cf. página 54 desta dissertação.
[58] Cf. PARSONS (1982).

construção de conceitos associada a ela é elaborada a partir do exame da diferença entre a geometria e a aritmética, especialmente quanto à evidência de suas relações com as formas puras da intuição: o espaço e o tempo.

Parsons argumenta que a dificuldade na aceitação do caráter sintético e intuitivo da geometria é menor que no caso da aritmética, entre outras coisas, porque *"a geometria pode ser vista naturalmente como uma teoria sobre o espaço atual e as figuras construídas nele"* (1982, p. 27)[59], tendo em vista ser o espaço o campo no qual os objetos dados aos sentidos aparecem e que a geometria dá uma informação substancial sobre este espaço.

Por sua vez, a aritmética, em primeira instância, fala acerca de números e de operações e relações puramente abstratas. Seu conteúdo não sugere, imediatamente, nenhuma conexão especial com a sensibilidade. Face à falta de clareza quanto ao campo da aplicação dos números, segundo Parsons, não há razão para acreditar que a aplicação da aritmética deva, necessariamente, ser a objetos no espaço e no tempo. Não bastasse isso, Parsons conjectura que Kant estava em condição de estar consciente de que os objetos matemáticos, eles mesmos, podiam ser numerados, donde se seguiria que se a aritmética está sendo limitada a fenômenos, esta limitação tem que ser entendida de maneira geral.

Parsons lembra também que no caso da geometria era possível mencionar possibilidades lógicas autorizadas pelos conceitos, mas que não existem de acordo com a teoria matemática; como exemplo, Kant

[59] "... geometry can naturally be viewed as a theory about actual space and figures constructed in it".

menciona uma figura plana de dois lados, a qual podia ser pensada, ainda que não houvesse uma intuição correspondente. Nesse caso, porém, ficaríamos apenas no plano da possibilidade lógica. No tempo de Kant, provavelmente, era impossível estar certo acerca de se tal possibilidade existia na aritmética. Se existisse, ela daria lugar a uma clara separação entre as verdades aritméticas e as verdades lógicas[60].

Uma observação a ser feita, e isso é notado por Parsons, é que a aritmética certamente não foi tomada por Kant como uma teoria especial do tempo, no sentido em que a geometria foi considerada uma teoria especial do espaço; apesar disso, de acordo com Kant, a dependência da aritmética sobre as formas da nossa intuição é, primeiramente, somente sobre o tempo.

Neste contexto, Parsons faz uma observação cujo conteúdo fornece uma orientação importante acerca de como ele interpretará, na seqüência, a noção de intuição aplicada à aritmética e, por conseguinte, o tipo de construção associado a ela. Parsons observa: *"eu me aventuraria a dizer que o espaço faz parte do quadro somente no que diz respeito à maneira geral na qual o sentido interno, e assim o tempo, é dependente do sentido externo, e assim, do espaço"* (1982, p. 31)[61]. Em outros termos, o espaço exerceria alguma função no que

---

[60] Além desse argumento não estar disponível para Kant, as dificuldades ficaram ainda maiores com os desenvolvimentos subseqüentes na Lógica, que tinham como um de seus objetivos provar justamente o que Kant sempre julgou impossível, a saber, que proposições aritméticas podiam ser deduzidas a partir de definições e proposições da lógica pura somente, com uma noção de lógica certamente muito mais ampla que aquela considerada por Kant. Assim Frege e alguns seguidores pensaram ter refutado que a aritmética dependesse em algum sentido de uma intuição pura, sensibilidade ou tempo. Deixaremos de lado uma discussão mais aprofundada em torno dos desenvolvimentos no campo da lógica e suas conseqüências, atendo-nos apenas à abordagem da análise de Parsons em torno do papel das construções de conceitos na filosofia kantiana da aritmética.

[61] "I should venture to say that space enters the picture only through the general manner in which inner sense, and thus time, depends on outer sense, and thus space".

tange ao caráter intuitivo da aritmética somente na medida em que dá suporte para a clarificação de sua dependência em relação à forma pura do tempo. Com respeito a isso, vale lembrar que sempre que Kant faz referência à aritmética ele afirma que o número e, portanto, que a própria aritmética envolve, de um modo fundamental, a sucessão[62].

Isso se mostra na passagem B15-16, na qual, ao argumentar que a intuição é necessária para ver que 7+5=12, Kant insiste que ao iniciar com o número 7 temos que buscar a ajuda da intuição para o conceito de 5 e então acrescentar, uma a uma, ao número 7 as unidades que foram postas juntas para compor o número 5 vendo, assim, se formar o número 12. Igualmente, a sucessão é destacada na passagem A143/B182[63] por meio da afirmação de que o número, como esquema da magnitude, a qual é considerada como um conceito puro do entendimento, compreende a adição sucessiva de unidades homogêneas.

Parsons destaca duas passagens da carta de Kant a Schultz nas quais, a seu ver, esse caráter mais geral da aritmética, relacionado à sucessão, é apresentado com mais ênfase[64]. Kant afirma:

> o tempo ... não tem influência sobre as propriedades dos números (considerados como determinações puras da

[62] Esta interpretação, além de conflitar com interpretações tais como a de Frege, por exemplo, também enfrenta dificuldades na sua aplicação à matemática moderna na qual enunciados aritméticos podem ser feitos acerca de estruturas que são inteiramente atemporais e em referência à qual, qualquer menção a 'adição sucessiva' é, com efeito, inteiramente metafórica. Vale a pena lembrar também que, para Kant, freqüentemente o espaço parece também estar envolvido.

[63] Cf. citação nas páginas 62-63 desta dissertação.

[64] Nossa citação destas passagens da *Carta a Schultz* foram feitas a partir da seguinte tradução: KANT, I. To Johann Schultz, November 25, 1788. In: ZWEIG, A. (ed.) Kant: philosophical correspondence 1759 – 99. Chicago : University of Chicago, 1967. p.128-131.

> magnitude) como ele poderia ter sobre o caráter daquelas transformações (da quantidade), que são possíveis somente relativamente a um estado específico do sentido interno e sua forma (tempo). A ciência dos números, apesar da sucessão que toda a construção da quantidade requer, é uma síntese puramente intelectual, que representamos a nós mesmos no pensamento. Mas na medida em que quantidades específicas (quanta) estão sendo determinadas de acordo com essa ciência, elas devem nos ser dadas de tal modo que possamos apreender (grasp) sua intuição sucessivamente; e esta apreensão (grasping) está sujeita à condição do tempo (1967, p. 130-131)[65].

Em uma passagem anterior, na carta, Kant sustenta:

> ... a aritmética não tem axiomas, uma vez que seu objeto não é atualmente nenhum quantum, isto é, algum objeto quantitativo da intuição, mas antes a quantidade como tal, ou seja, ela considera o conceito de uma coisa em geral por meio de uma determinação quantitativa" (1967, p. 129)[66].

Esta passagem já foi citada ao final do segundo capítulo a fim de evidenciar que, de acordo com Kant, a aritmética não tem axiomas. Aqui, no entanto, a ênfase recai sobre a afirmação de que o objeto da aritmética não é um objeto da intuição como magnitude, mas sim, a quantidade como tal, isto é, um conceito de uma coisa em geral que só pode ser considerado mediante uma determinação quantitativa.

---

[65] " Time,..., has no influence on the properties of numbers (considered as pure determinations of quantity), as it may have on the character of those changes (of quantity) that are possible only relative to a specific state of inner sense and its form (time). The science of numbers, notwithstanding the succession that every construction of quantity requires, is a pure intellectual synthesis, which we represent to ourselves in thought. But insofar as specific quantities (quanta) are to be determined in accordance with this science, they must be given to us in such a way that we can grasp their intuition successively; and thus this grasping is subjected to the time condition".

[66] "... arithmetic has no axioms, since its object is actually not any *quantum*, that is, any quantitative object of intuition, but rather *quantity as such*, that is, it considers the concept of a thing in general by means of quantitative determination".

Estas passagens, segundo Parsons, contêm reafirmações da posição afirmada na *Dissertação de 1770*. Como evidência Parsons cita a seguinte passagem, retirada do § 12 da referida obra[67]:

> Em adição a estes conceitos [referência aos conceitos da Geometria e da Mecânica], há um certo conceito que em si mesmo, de fato, pertence ao entendimento mas do qual a atualização no concreto requer as noções auxiliares de espaço e tempo (adicionando sucessivamente um grande número de coisas e colocando-as simultaneamente lado a lado). Este é o conceito de *número*, que é o conceito tratado na aritmética (2003, p. 390)[68].

Os elementos destacados nas três passagens acima citadas colocam a aritmética menos no lado do conhecimento intutivo e mais do lado do conhecimento conceitual. A caracterização da aritmética como referindo-se a um "conceito de uma coisa em geral" e, principalmente, a afirmação de que a ciência do número é uma "síntese puramente intelectual", sugerem que as noções aritméticas possam ser definíveis em termos de categorias puras sendo associadas, assim, com formas lógicas, as quais não se referem em momento algum às formas da sensibilidade. Se assim o fosse, porém, a abordagem em questão entraria em conflito com o enunciado do *Esquematismo* de que número é um *esquema*.

Nesse sentido, Parsons entende que a referência a um conceito de uma coisa em geral é pensada do mesmo modo que as categorias

[67] Nossa citação foi feita a partir da seguinte tradução: I. KANT. Inaugural dissertation (1770). In: *Theoretical Philosophy 1755 – 1770*. New York: Cambridge, 2003. p. 373–416.

[68] "In addition to these concepts, there is a certain concept which in itself, indeed, belongs to the understanding but of which the actualization in the concrete requires the auxiliary notions of time and space (by successively adding a number of things and setting them simultaneously side by side). This is the concept of *number*, which is the concept treated in arithmetic".

são ditas especificarem o conceito de um objeto em geral. Por sua vez, a síntese puramente intelectual seria tida como a síntese do múltiplo em geral referida na *Dedução Trascendental*, de modo que o conceito de uma coisa em geral só levaria a um conhecimento atual acerca dos objetos caso estes objetos pudessem ser dados de acordo com nossas formas da intuição.

Parsons alerta que não é uma tarefa fácil mostrar como as concepções gerais derivadas da *Estética* e da *Dedução Transcendental* se aplicam à aritmética, tendo em vista que na matemática pura as proposições dizem respeito a entidades abstratas e somente no caso da geometria que se poderia dizer que tais entidades estão no espaço e no tempo. Para Parsons, no entanto, também os objetos considerados na aritmética podem ser construídos como formas de objetos espaço-temporais:

> é natural pensar nos números naturais como representados aos sentidos (e, é claro, no espaço e no tempo) por algarismos. Isto não quer dizer, principalmente, que algarismos funcionem como nomes de números, embora certamente eles os nomeiem, mas, que eles provêem instâncias da estrutura dos números naturais. Em sentido algébrico, o conjunto dos algarismos gerados por algum procedimento é isomórfico ao conjunto dos números naturais pelo fato de eles terem um elemento inicial (por exemplo, '0') e uma relação sucessor que a noção de número natural requer. Neste sentido, é claro, os algarismos são objetos matemáticos abstratos; eles podem ser tomados como figuras geométricas. Mas certamente signos concretos dos primeiros *n* algarismos são tais como um modelo dos números de 1 até *n* ou de 0 até *n*-1 (1982, p. 33)[69].

[69] "It is natural to think of the natural numbers as represented to the senses (and of course in space and time) by numerals. This does not mean mainly that numeral function as names of numbers,

Ora, um conjunto de objetos tem *n* elementos se pode ser feita uma correspondência um-um entre estes elementos e os números de 1 a *n* e uma maneira padrão de fazer isso é colocando-os em ordem e estabelecendo uma correspondência com numerais que estariam representando esses números, ou seja, contando. Assim,

> a base para o uso de uma percepção concreta de *n* termos na verificação de proposições gerais é que, uma vez que ela serve como representante de uma estrutura, o mesmo propósito poderia ser alcançado por qualquer outra instância da mesma estrutura, isto é, qualquer outra seqüência perceptível que possa ser colocada numa correspondência um-um com a dada, de modo que preserve a relação sucessor. Isto poderia autorizar-nos a chamar uma tal percepção de 'intuição formal'. Poderíamos notar que a existência física dos objetos não é diretamente necessária, assim que podemos abstrair também deste fator 'material'. Uma intuição empírica funciona ... como uma intuição pura, se ela é tomada como representante de uma estrutura abstrata. Tal percepção provê a realização mais completa possível, à frente da razão, de um conceito abstrato (1982, p. 33-34)[70].

Ao final desta passagem Parsons reitera que uma das questões importantes acerca da filosofia kantiana da aritmética é se uma

---

although of course they do, but that they provide instances of the structure of the natural numbers. In the algebraic sense, the set of numerals generated by some procedure is isomorphic to the natural numbers in that it has an initial element (e.g., ‘0’) and a successor relation which the notion of natural number requires. In this sense, of course, the numerals are abstract mathematical objects; they can be taken as geometric figures. But of course concrete tokens of the first *n* numerals are likewise a model of the numbers from 1 to *n* or from 0 to *n*-1”.

[70] “The basis for the use of a concrete perception of a sequence of *n* terms in verifying general propositions is that, since it serves as a representative of a structure, the same purpose could be served by any other instance of the same structure, that is any other perceptible sequence which can be placed in a one-one correspondence with the given one so as to preserve the successor relation. This might justify us in calling such a perception a ‘formal intuition’. We might note that the physical existence of the objects is not directly necessary, so that we can abstract also from that ‘material’ factor. An empirical intuitions functions, we might say, as a pure intuition if it is taken as a representative of an abstract structure. Such a perception provides the fullest possible realization before the mind of an abstract concept”.

realização comparável existe para além dos limites da escala da percepção concreta.

Estas duas passagens envolvem ambigüidades que dificultam a compreensão do que propriamente Parsons pretendia defender ao afirmar que também os objetos considerados na aritmética podem ser construídos como formas de objetos espaço-temporais.

Uma leitura possível é que os objetos da aritmética, a saber, entidades abstratas tais como números e relações entre eles poderiam ser, em algum sentido, representadas aos sentidos por meio de signos concretos que expressariam a sua estrutura. Neste caso, a construção seria simbólica e a aritmética estaria sujeita às mesmas dificuldades enfrentadas pela álgebra quando se trata de explicar qual é a intuição pura mediante a qual seus conceitos são exibidos.

É de se esperar que Parsons, cuja intenção era preservar o significado da noção kantiana de intuição tal como ela foi definida na *Estética Transcendental* e, por conseguinte, o significado da noção de construção de conceitos como exibição à priori de uma intuição que corresponda ao conceito, ofereça alguma sugestão acerca de como tais noções são mantidas na sua interpretação da construção de conceitos aritméticos.

As observações de Parsons ao final da segunda citação parecem esclarecer a questão, levando em conta sua interpretação, mencionada anteriormente, acerca da participação da forma pura do espaço na aritmética[71]: a percepção concreta dos símbolos poderia ser chamada de 'intuição formal' na medida em que ela serviria apenas como um

[71] Cf. página 84 desta dissertação.

elemento auxiliar para a visualização da participação da forma pura do tempo na aritmética, unicamente a qual garantiria a conexão da aritmética com a sensibilidade ao mostrar o caráter temporal da aritmética. A noção de “intuição pura”, na afirmação de que uma intuição empírica poderia ser tomada como uma intuição pura caso fosse tomada como representante de uma estrutura abstrata deveria ser entendida, então, apenas nesse sentido de intuição formal. A intuição pura no sentido de forma da intuição corresponderia aqui apenas à forma do sentido interno, o tempo. Daí o porque a indiferença quanto ao tipo de seqüência perceptível a ser colocada como representante da estrutura abstrata, uma vez que a existência física dos objetos seria, em última instância, dispensável.

Parsons indica também outra razão para considerar a matemática dependente de intuição, mencionada por Kant na exposição em torno da noção de construção simbólica. Kant afirma que o algebrista alcança seus resultados manipulando símbolos de acordo com algumas regras, resultados estes que não poderiam ser alcançados de outro modo senão mediante uma representação intuitiva análoga aos seus conceitos. A construção simbólica é concebida como uma construção com símbolos como objetos da intuição. De acordo com Kant, este método, além das vantagens heurísticas que oferece, também assegura todas as inferências matemáticas contra o erro na medida em que as coloca, literalmente, diante dos olhos.

Estas observações acerca da conexão da matemática e os sentidos por meio de operações simbólicas retomam idéias apresentadas na *Investigação* de 1764. Neste período do pensamento kantiano a certeza da matemática é vinculada ao fato de os signos serem sensíveis. Há, porém, na *Investigação* uma posição incompatível com aquelas sustentadas na *Crítica da Razão Pura*, a saber, o entendimento de que dado que os signos são manipulados de acordo com regras assentidas por nós, as operações com estes signos, sem atenção ao que eles significam, seria uma garantia suficiente de sua correção. Também aqui, porém, signos que se assemelhassem às coisas simbolizadas traziam uma evidência ainda maior.

Essa posição, segundo Parsons, reforça a tese de que antes do desenvolvimento da teoria do espaço e do tempo na *Estética Transcendental* já havia em Kant a concepção acerca da conexão entre sensibilidade e caráter intuitivo da matemática. Porém, no período pré-crítico nada infere a limitação da aplicação da matemática a objetos sensíveis.

O aspecto geral que estaria por trás das observações sobre construção simbólica é que, em geral, uma proposição matemática somente pode ser verificada sob a base de uma prova ou cálculo, que são eles mesmos construções na intuição. No entanto, nas observações acerca de “7+5=12” outros elementos poderiam ter influenciado Kant; segundo Parsons, *“certas ‘construções simbólicas’ associadas às proposições acerca de números de fato envolvem construções isomórficas aos próprios números e suas relações ou ao menos algum aspecto destas”* (1982, p. 35)[72].

[72] “Certain ‘symbolic constructions’ associated with propositions about number actually involve constructions isomorphic to the numbers themselves and their relations, or at least na aspect of them”.

Ao que tudo indica, Parsons remete aqui às passagens nas quais a sucessão é destacada nas demonstrações aritméticas, as quais comumente são utilizadas na argumentação em favor de que a construção de conceitos aritméticos é ostensiva.

Não obstante, Parsons reitera a sugestão de que

> a construção simbólica na geração de numerais já é suficiente para estabelecer a questão de suas referências. Do mesmo modo, a realização atual dos cálculos mostra o caráter bem definido para argumentos individuais de funções definidas recursivamente. No entanto, indução ... está envolvida em ver que elas estão definidas para todos os argumentos. Talvez Kant devesse ter dito que à parte da intuição nem mesmo sabemos que há tal número como "7+5". E parece que poderíamos não ver por uma construção particular que há tal número sem também vê-lo ser o 12. Isto está de acordo com a afirmação de Hintikka de que o sentido da afirmação kantiana de que fórmulas numéricas são indemonstráveis é que a construção requerida para a sua prova já é suficiente (1982, p. 35-36)[73].

Uma vez que as considerações acerca do papel das operações simbólicas também se aplicam à lógica, isso mina, sob esta base, a distinção que Kant desejava fazer entre a aritmética e a lógica. Assim, Parsons retoma a abordagem acerca da conexão entre aritmética e *tempo* a qual, na sua interpretação, pode ser explicada do seguinte modo:

[73] “... the ‘symbolic’ construction in generating numerals is already enought to settle the question of their references. In the same way the actual carryng out of the calculation shows the well-defined character for individual arguments of recursively definded functions. However, induction, ... is involved in seeing that they are defined for all arguments. Maybe Kant ought to have said that apart from intuition I do not even know that there is such a numbers as ‘7+5=12’. And it seems that one could not see by a particular construction that there is such number without also seeing it to be 12. This is in agreement with Hintikka’s statement that the sense of Kant’s statement that numerical formulae are indemonstrable is that the construction required for their proof is already sufficient”.

> se alguém constrói de algum modo, seja no papel ou na 'cabeça', uma seqüência de símbolos como os primeiros *n* numerais, a estrutura já está representada na seqüência de operações e, de modo mais geral, na sucessão dos atos mentais de percorrer por um grupo de *n* objetos, como na contagem. Assim, o tempo entra por meio da sucessão dos atos envolvidos na construção ou na apreensão sucessiva. ... Nas operações envolvidas na representação de um número aos sentidos nós também geramos uma estrutura no *tempo*, que representa o número. O tempo provê uma fonte universal de modelos para os números. ... o elemento de sucessão aparece até mesmo para os números menores na comparação envolvida na geração ou percepção deles em *ordem* e a ordem é certamente parte do nosso conceito de número (1982, p. 36)[74].

Para finalizar, Parsons relembra que uma coisa é falar de representação *no* espaço e tempo, e outra é falar de representação *aos sentidos*; pois, ainda que o que está representado aos sentidos em princípio está representado no espaço e no tempo, talvez não vice-versa. Kant busca estabelecer essa ligação através de sua teoria do espaço e tempo como formas da sensibilidade, a partir da qual fica estabelecido que as estruturas que podem ser representadas no espaço e tempo são estruturas de possíveis objetos da percepção[75].

---

[74] "... if one constructs in some way, such on paper or in one's head, such a sequence of symbols as the first *n* numerals, the structure is already represented in the sequence of operations and more generally in the succession of mental acts of running through a group of *n* objects, as in counting. Thus time enters in through the succession of acts involved in construction or in successive apprehension. ... In the operations involved in representing a number to the senses we also generate a structure in *time* which represents the number. Time provides a universal source of modells for the number. ... the element of succession appears even for the smaller ones in the comparison involved in generating or perceiving them in *order*, and the order is certainly part of our concept of number".

[75] A possibilidade em jogo aqui é a possibilidade matemática; trata-se da possibilidade dos tipos numéricos (*types*) e não apenas dos signos concretos que podem servir para representá-los (*tokens*).

Parsons defende, visando esclarecer um pouco mais a noção kantiana de intuição pura, que *“parece haver dois tipos independentes de insight em nossas formas da intuição que uma concepção kantiana requer que tenhamos: aquela que permite uma percepção particular para funcionar como ‘intuição formal’ e aquela que temos na possível progressão da geração de intuições de acordo com uma regra”* (1982, p. 37) [76]. O tipo de intuição mencionado no segundo caso seria a ‘intuição’ no mais específico caso kantiano.

Parsons chamaria assim a atenção ao seguinte fato: para falarmos de aritmética não podemos simplesmente considerar se equações elementares são isoladamente fundadas; para que propriamente tenhamos aritmética a idéia de progressão, isto é, de regra, deve estar incluída.

[76] “There seem to be two independent types of insight into our forms of intuition which a Kantian view requires us to have, that which allows a particular perception to function as a ‘formal intuition’ and that which we have into the *possible progression* of the generation of intuitions according to a rule”.

Capitulo 4. CONSTRUÇÃO SIMBÓLICA E OSTENSIVA DE CONCEITOS ARITMÉTICOS

Como já adiantamos, além de Hintikka e Parsons, também J. M. Young considerou a possibilidade de falarmos em construção de conceitos aritméticos. Já ao início do artigo *Kant on the Construction of Arithmetical Concepts* (1982), Young afirma que a noção kantiana de construção de conceitos é mais rica do que ela tem sido reconhecida pelos comentadores e, assim, que as teses kantianas, ao menos no que se referem à aritmética, seriam sob certos aspectos mais defensáveis do que freqüentemente se pensou que fossem.

Young defende a possibilidade de construirmos conceitos aritméticos tanto ostensiva quanto simbolicamente. Entretanto, mesmo ao destacar a construção simbólica, não deixa de considerar a importância do caráter ostensivo subjacente a ela. Em sua abordagem, ainda que sem fazer menção direta, estão englobados muitos dos elementos leibnizianos que temos insistido em vincular com teses kantianas.

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos a linha de argumentação adotada por Young no referido artigo, destacando as teses relativas à aplicação da noção kantiana de construção simbólica na aritmética. Por sua vez, na segunda seção, além de darmos seguimento ao exame das teses de Young acerca do papel dos símbolos na aritmética, apresentamos a discussão sobre a defesa do caráter ostensivo subjacente à referida construção simbólica.

4.1 Conhecimento por Construção Simbólica na Aritmética

A estratégia adotada por Young na abordagem da aritmética reside em ver como de fato fazemos juízos aritméticos fundados sobre caracteres. Mediante isso, pretendeu mostrar como a filosofia kantiana da aritmética poderia ser melhor interpretada.

Para Young, os constantes ataques às teses kantianas, inspirados na interpretação de que Kant teria sustentado a questionável posição de que para determinar a soma de dois números deveríamos nos munir de coleções de dedos, pontos, barras ou algo do tipo e buscar a resposta contando são equivocados. Kant não teria sustentado esta posição de modo literal; o que ele pretendia destacar é que a atividade de enumerar ou contar desempenha um papel essencial na aritmética, tendo em vista que o conhecimento que temos de verdades aritméticas depende, em primeiro lugar, de nosso domínio e compreensão dessa atividade[77]. Young dá lugar, então, à consideração de como são feitos juízos acerca de operações aritméticas que envolvem números relativamente elevados e de como Kant poderia tê-los interpretado.

Segundo Young, quem quer que seja, ao ser perguntado sobre a soma de noventa e três mais quarenta e sete, por exemplo, não começa por juntar uma coleção de noventa e três coisas, sejam pontos ou dedos, ao lado de outra coleção de quarenta e sete coisas a fim de chegar à resposta correta. Ao invés disso, escreve a seqüência de numerais ‘93’ e ‘47’, um abaixo do outro e propriamente alinhados,

[77] Esta observação de Young remete ao funcionamento dos algoritmos em conexão com a notação e a base utilizadas, isto é, à distinção entre aquelas equações que dizem respeito aos números da base desse algoritmo e aquelas que dependem destas últimas. Neste contexto, as equações da base seriam as verdades elementares. Tratamos detalhadamente desse aspecto na seção seguinte.

passando a somar os algarismos de cima com os de baixo, da direita para a esquerda, do seguinte modo: primeiro junta o ‘3’ com o ‘7’, notando que sua soma é dez, resultado que é expresso pelo numeral ‘10’. Escreve o ‘0’ abaixo do ‘7’ e eleva o ‘1’ para o topo da coluna à esquerda. Em seguida, repete o procedimento, agora, somando o ‘1’ que fora elevado com o ‘9’ e o ‘4’ abaixo, obtendo como resultado quatorze, cuja seqüência de numerais correspondente, o ‘14’, é escrito à esquerda do ‘0’, chegando finalmente à conclusão de que a soma de noventa e três com quarenta e sete dá cento e quarenta, sendo expressa em numerais como ‘140’[78].

Young destaca que esse não é o único procedimento que pode ser utilizado; algo correspondente poderia ter sido feito utilizando a notação binária e o algoritmo correspondente, pois, independentemente do procedimento escolhido, o importante é fazermos uso de *algum* procedimento, nos engajarmos em uma certa atividade que nos conduza ao resultado buscado.

Young se mostra ciente de que Kant mesmo nunca discutiu o cálculo nesses termos, tendo em vista que a única fonte textual que poderia dar respaldo a uma interpretação dessa natureza é a passagem A78/B104 que apresentamos no segundo capítulo[79], na qual Kant faz referência à dezena como um fundamento comum da unidade presente em nossa ação de enumerar, sobretudo quando se tratam de números maiores. Apesar disso Young, que vê nessa passagem uma referência implícita ao uso de um sistema numérico de base dez, insiste que

[78] No artigo *Construction, Schematism and Imagination* (1992), Young menciona que uma característica inegável do sistema numérico que utiliza numeral Arábico e base dez é a facilidade do cálculo.
[79] Cf. citação nas páginas 60-61 desta dissertação.

parece claro que o cálculo exemplifica a noção kantiana de construção. Porém, como já ressaltamos, tendo em conta a concepção kantiana como um todo, Kant poderia mais bem estar considerando um instrumento de cálculo tal como o ábaco e então, consequentemente, um conjunto de dez unidades. Se assim o fosse, o argumento de Young estaria minado, uma vez que não lhe restaria nenhuma evidência textual para sua interpretação.

Ao realizarmos uma soma com algarismos, diz Young, seja (como se costuma dizer) "de cabeça" ou no papel, nos provemos de algo que pode ser percebido ou, em termos kantianos, intuído, o qual serve para exibir ou mostrar o conceito da soma que buscamos determinar de modo que, realizando certas atividades sobre ou com esses elementos intuídos chegamos a um ponto no qual podemos considerar o que essa soma é. Teríamos aqui, então, uma construção.

Certamente que há uma diferença importante entre os numerais utilizados no cálculo e os diagramas do geômetra, a saber, os primeiros não exemplificam ou instanciam o conceito aritmético correspondente enquanto que os últimos, pelo menos aproximadamente, exemplificam os conceitos aos quais eles servem para construir.

> Na terminologia kantiana, uma sequência de numerais não provê uma construção *ostensiva* do conceito aritmético correspondente. Todavia, permanece o ponto de que ela exibe ou expõe o que é pensado naquele conceito. Já que o modo de exibição é simbólico, a seqüência de numerais pode ser dita prover uma

> construção *simbólica* do correspondente conceito aritmético (YOUNG, 1982, p. 23)[80].

A noção de construção simbólica, segundo Young, é a mesma que o próprio Kant sugere. No entanto, dado que textualmente Kant somente aplica este tipo de construção à álgebra, sua extensão para o cálculo e, consequentemente, à aritmética poderia ser questionada. Mesmo assim, Young se propõe a defender diretamente essa extensão mostrando que o cálculo provê uma instância de construção simbólica. Segundo ele, reflexões continuadas em torno do cálculo servirão para clarificar a noção de construção simbólica e isso, em contrapartida, ajudará a elucidar a noção de construção ostensiva.

Uma dificuldade derivada de focar a importância sobre o uso de algum procedimento na realização de operações aritméticas é a seguinte: se um juízo matemático é, antes de tudo, um juízo *a priori*, como ele pode estar fundado sobre mera observação de que a atividade realizada com certos símbolos imaginados ou escritos levam a um certo resultado? Como ele se diferenciaria então dos juízos empíricos? A resposta para essa dificuldade é, conforme Young, que o juízo não está fundado em *mera* observação, pois não se trata, no cálculo, de lidar com os símbolos como objetos da percepção atribuindo a eles quaisquer propriedades que eles possam exibir como, por exemplo, tamanho e forma; os caracteres intuídos são tratados meramente como instâncias dos numerais arábicos, ignorando qualquer algo mais acerca deles.

---

[80] "In Kant's terminology, a numeral string does not provide an *ostensive* construction of the corresponding arithmetical concept. The point remains, nonetheless, that it does exhibit or display what is thought in that concept. Since the mode of exhibition is symbolic, the numeral string can be said provide a *symbolic* construction of the corresponding arithmetical concept".

Embora, então, seja verdadeiro que realizamos uma atividade a partir da escrita de seqüências de numerais e que baseamos nosso juízo aritmético sobre o resultado observado dessa atividade, precisa ficar claro, no entanto, que a referida atividade não é mera manipulação que simplesmente parece produzir um certo resultado; o cálculo é governado por um sistema claro e preciso de regras que não provêem apenas recomendações de como *podem* ser realizadas as atividades em questão; muito mais forte que isso, elas servem para *definir a atividade mesma*, para especificar o que *é* calcular uma soma, conferindo segurança para o resultado observado.

Com efeito, se cada coisa foi feita exatamente como ela deveria ser feita, pode-se dizer que foi realizado *o* cálculo e é isso que é levado em conta, independentemente do tempo em que foi realizado ou de quem o realizou, garantindo que quando fazemos juízos aritméticos os baseamos sobre o juízo de que esta seqüência de numerais resultou *no* resultado *do* cálculo.

Young não nega que de fato pressupomos a verdade de alguns juízos empíricos ao fundarmos um juízo aritmético sobre a execução de um cálculo, por exemplo, que todos os numerais tenham sido escritos e dispostos da maneira correta ou, que cada uma das etapas da operação tenha sido realizada; ressalta, porém, que o papel que esses juízos empíricos exercem é simplesmente o de dar suporte ao juízo de que a atividade foi executada corretamente, isto é, que tenhamos de fato executado *o* cálculo garantindo, consequentemente, que o resultado obtido é *o* resultado *do* cálculo[81]. Young alerta também que a conexão entre o cálculo e os juízos aritméticos que supostamente lhe dão suporte precisa ser clarificada, uma vez que, embora dominemos o procedimento de realizar somas, de modo que podemos calcular precisamente e identificar por fonte segura as atividades realizadas como execuções apropriadas da atividade de calcular, ainda está muito obscuro o porque esse procedimento levaria a respostas corretas.

Quanto a esse aspecto Young destaca a importância de entendermos os princípios algébricos que subjazem nosso procedimento de cálculo; a base e a notação que de fato serão usadas não se constituem no mais importante, mas sim, o fato de que tenhamos um determinado número de caracteres, chamemo-lo de *i*, que será usado para representar os primeiros *i* inteiros (base) e escolhamos algum tipo de notação para os mesmos. A partir daí os algoritmos de adição, subtração e demais operações aritméticas serão determinados. Por trás disso tudo também há a suposição geral de que procedimentos de cálculo sempre levam a respostas corretas[82].

---

[81] Ainda em relação a esses juízos empíricos, eles acabam sendo responsáveis por uma das razões pelas quais nós temos o procedimento de cálculo que temos: a facilidade de evitar erros na execução do cálculo e a facilidade de detectá-los quando ocorrem. Os juízos empíricos podem ser falsos, mas isso não implica que o cálculo poderia, por vezes, levar a respostas erradas e assim, que não pudéssemos basear juízos universais e necessários sobre ele. O que ocorre é que as vezes nos enganamos ao pensar que realizamos o cálculo que deveríamos realizar, quando de fato, em função do erro, não o fizemos.

[82] Conforme Young (1982, p. 27), essa suposição pode ser feita com diferentes graus de compreensão. Nos casos extremos pode haver alguém que simplesmente não compreenda os princípios sobre os quais os algoritmos estão fundados, restando apenas confiar que o cálculo funciona. Nesse caso, o cálculo parece ser um procedimento quase mecânico que conduz a respostas corretas que ele acredita e, por vezes, pode verificar serem corretas, ou seja, ele acredita que o procedimento funciona e que o cálculo é correto sempre e necessariamente, mas dificilmente pode dizer *saber* isso. Por outro lado, pode haver alguém que compreende os princípios algébricos subjacentes ao cálculo e, portanto, que o procedimento do cálculo *deve* levar a uma única resposta correta. Tal indivíduo pode utilizar o cálculo como base para juízos aritméticos e, além disso, pode afirmar razoavelmente *saber* o que estes juízos asserem e não meramente *crer* no que eles asserem.

Essa discussão acerca do cálculo permite retornar para a tese geral de Kant de que o conhecimento matemático se apoia sobre construção de conceitos e revisar alguns pontos problemáticos provenientes da mesma. O primeiro ponto, já referido anteriormente, é como juízos universais e necessários podem ser fundados sobre particulares intuídos sem perder sua universalidade.

No caso em questão, a saber, o cálculo, os particulares intuídos exibem os conceitos simbolicamente e é sobre e com os símbolos que realizamos um ato particular de calcular. Porém, esse ato é governado por regras ou procedimentos universais que autorizam a identificação do resultado dessa atividade particular com o resultado que teria que ser produzido sempre que as regras ou procedimentos fossem corretamente seguidos, ou seja, com *o* resultado *do* cálculo.

A marca maior da construção simbólica, qual seja, ser governada por regras ou procedimentos universais, levanta um segundo problema: estas regras, que Kant chama de *condições universais de construção*, devem ser distinguidas dos conceitos cuja construção elas governam, pois, de outro modo, a exibição de um particular intuído seria insignificante e os juízos da matemática, analíticos.

Um argumento que mostra a separação entre regra de construção e conceito a ser construído é o seguinte: poderíamos lidar com o conceito de número sem sermos capazes de representar os números simbolicamente, isto é, poderíamos não estar familiarizados com a representação de acordo com a qual ‘93’ simboliza o número noventa e três. Soma-se a isso o fato de que o procedimento familiar de construção simbólica de conceitos numéricos, a saber, com notação arábica e base dez, não é o único procedimento possível, além da construção simbólica também poder ser aplicada em disciplinas diferentes da aritmética como, por exemplo, a álgebra.

Para solucionar a dificuldade relacionada à tese kantiana segundo a qual uma construção de conceitos requer a exibição de um conceito na intuição sensível, Young ressalta uma vez mais que no caso do cálculo, apesar da importância estar focalizada nas regras ou procedimentos universais que garantem que o cálculo levará a um único resultado e que este resultado representará, por exemplo, a soma desejada *temos* que fundar nosso juízo sobre *alguma* performance do cálculo e, portanto, temos que apelar a algum conjunto de símbolos intuídos e a alguma atividade particular.

Young lamenta que o próprio Kant não tenha discutido o cálculo e reitera sua compreensão de que esta atividade possa ser vista como um exemplo do que Kant chamaria de construção e, em particular, de construção simbólica de conceitos. Na medida em que fica mais claro que podemos basear juízos aritméticos sobre o cálculo, diz Young, ao que parece,

> Kant está certo em pensar que pelo menos na aritmética elementar, podemos fundar juízos a priori sobre uma construção. Em suas próprias discussões sobre a aritmética, no entanto, Kant se foca sobre a construção ostensiva de conceitos. Sua afirmação, além disso, não é exatamente que nós podemos fundar juízos aritméticos sobre tais construções, mas que nós devemos (1982, p. 29)[83].

[83] "... Kant its right in thinking that in elementary arithmetic at least, we *can* ground *a priori* judgments upon a construction. In his own discussions of arithmetic, however, Kant himself

Young pretende mostrar, em relação a isso, como essas reflexões sobre construção simbólica podem ajudar a elucidar a noção de construção ostensiva aplicada a aritmética. Este é o enfoque que adotamos na seção seguinte.

4.2 Construção Ostensiva na Aritmética

Por vezes, em sua abordagem acerca do cálculo, Young o descreve como se fosse um procedimento quase mecânico que, a partir da utilização de alguns símbolos, é realizado de acordo com certas regras sem envolver qualquer juízo exceto aqueles requeridos para a aplicação dessas regras e para o reconhecimento de que elas foram aplicadas de modo apropriado. De acordo com Young, muito do que fazemos ao calcular de fato pode ser descrito desse modo, especialmente no que diz respeito aos cálculos longos e complicados. Porém, além disso, também temos que fazer vários juízos aritméticos ao longo do processo, o que nos mostra que nosso procedimento para calcular é, em parte, somente um instrumento que nos capacita a realizar juízos difíceis a partir da realização de uma série ordenada de juízos muito fáceis[84].

Torna-se natural questionar, então, como sabemos serem esses juízos fáceis verdadeiros. Seria possível fundamentar também esses

focuses on the *ostensive* constructions of concepts. His claim, moreover, is not just that we *can* ground arithmetical judgments on such constructions, but that we *must*".

[84] Guardadas as devidas ressalvas, essa maneira de apresentar o procedimento do cálculo se assemelha muito com a noção leibniziana de pensamento simbólico ou cego, a qual, também em particular no caso de cálculos longos, funciona como um instrumento que nos permite conhecer verdades complexas por meio de uma série ordenada de verdades simples.

juízos fáceis sobre o cálculo? Em princípio, sustenta Young, isso seria possível, embora se apresentassem algumas restrições, tais como a seguinte: não poderíamos utilizar o algoritmo usual de adição, de base dez, para calcularmos, por exemplo, a soma de 7 e 5, uma vez que essa é uma verdade que já é pressuposta ao usarmos tal algoritmo; não obstante, poderíamos utilizar o sistema binário para calcular essa soma. Em última instância, porém, o uso de qualquer procedimento de cálculo para realizar juízos aritméticos pressuporia que outros juízos aritméticos mais fáceis já tivessem sido feitos anteriormente; estes últimos, relacionados sempre a números menos elevados[85]. Segundo Young, eram esses os juízos que Kant estava considerando em suas conhecidas observações sobre aritmética feitas, fundamentalmente, na passagem B15-16[86]. Ao que tudo indica, portanto, tais juízos seriam fundamentados mediante a construção ostensiva dos conceitos envolvidos, procedimento que Young denomina de enumeração[87].

No que tange aos aspectos gerais, Young entende que esse procedimento de enumeração, denominado por Kant de construção ostensiva, segue os mesmo moldes daquela solução proposta no caso da construção simbólica ou cálculo ainda que, admitidamente, os procedimentos universais que governam a construção simbólica de operações aritméticas sejam bastante diferentes daqueles que governam a construção ostensiva. Não obstante, também nos

[85] Young também destaca que este ponto está refletido pedagogicamente no fato de que primeiro ensina-se às crianças a resolverem esses juízos fáceis, para somente depois ensinar-lhes a usá-los no cálculo.
[86] Cf. citação nas páginas 52-53 desta dissertação.
[87] Como já mencionamos nas primeiras páginas deste capítulo, a interpretação de Kant acerca desses juízos simples foi comumente considerada implausível, na medida em que Kant parece sugerir que podemos fundamentar juízos matemáticos sobre nossa experiência de contar dedos, pontos, etc., o que parece categoricamente impossível.

procedimentos envolvidos numa soma construída ostensivamente e, portanto, na enumeração das unidades da coleção conjunta podemos ver que esse procedimento tem que levar a um único resultado.

Young argumenta que,

> Ao julgar que sete e cinco são doze eu poderia desenhar uma coleção de sete barras, juntar ao lado uma coleção de cinco barras e então começar a enumerar as barras na coleção conjunta, notando que a primeira barra da última coleção eleva o número total de barras para oito, a segunda para nove, e assim por diante. Eu fundamento o juízo aritmético sobre o resultado notado desse procedimento. Seria um erro, no entanto, dizer que eu fundamento meu juízo meramente sobre uma observação – a observação, digamos, de que eu me vi dizendo "doze" quando finalizei. Pois a situação aqui é análoga àquela do cálculo. Em ambos os casos nós temos atividades que são governadas por certas regras universais, de modo que o que eu faço em uma ocasião particular conta como uma execução da atividade em questão somente na medida em que está de acordo com as regras relevantes. Em nenhum caso, portanto, nós meramente observamos que um certo resultado ocorreu. Antes, observamos que esse resultado foi ocasionado por uma execução apropriada, e assim, que ele é o resultado da atividade em questão – o cálculo em um caso, a enumeração no outro (1982, p. 30-31)[88].

[88] "In judging that seven and five are twelve I might draw a collection of seven strokes, set alongside it a collection of five other strokes, and then proceed to enumerate the strokes in the conjoint collection, noting that the first stroke from the latter collection brings the total number of strokes to eight, the second to nine, and so on. I ground the arithmetical judgment on the noted outcome of this procedure. It would be a mistake, however, to say that I base my judgment *merely* on an observation – the observation, say, that I find myself saying 'twelve' as I finish. For the situation here is analogous to that in calculation. In both cases we have activities which are governed by certain universal rules, so that what I do on a particular occasion counts as a performance of the activity in question only insofar as it accords with the relevant rules. In neither case, accordingly, do we *merely* observe that a certain outcome has eventuated. Rather, we observe that this outcome has eventuated from a proper performance, and thus that it is *the* outcome of *the* activity in question – the calculation in the one case, the enumeration in the other".

Também na enumeração a verdade de alguns juízos empíricos, tais como, que cada barra foi contada somente uma vez ou que nenhuma barra foi esquecida na contagem é pressuposta e, assim como no caso do cálculo, esses juízos servem apenas para certificar que a enumeração foi corretamente realizada. Consequentemente, caso ocorra erro em algum desses juízos empíricos isso não prova que o juízo aritmético fundado sobre a construção é contingente e, portanto, empírico, mas apenas que a pessoa que cometeu o erro não é infalível.

Young reforça que:

> Seja nas construções ostensivas, seja nas simbólicas, então, o papel exercido pelos particulares intuídos é importante. Não é suficiente comandar as regras universais que governam o cálculo ou enumeração. Caso queiramos saber o que a enumeração ou o cálculo de uma soma produzirá, devemos executar atualmente a atividade em questão, tratando com particulares percebidos ou imaginados. Ao mesmo tempo, no entanto, o que fazemos sobre e com esses particulares é governado inteiramente por regras universais garantindo um único resultado, um resultado que não pode diferir de um caso para o próximo (1982, p. 33)[89].

O reconhecimento desses dois pontos, segundo Young, remove muitos dos enigmas em torno da noção de construção, porém, também enraíza uma série de questões.

Em relação à noção de construção simbólica, por exemplo, Kant menciona somente a álgebra como área na qual ela se aplica, o que por

[89] "Both in symbolic and in ostensive constructions, then, the role played by the intuited particulars is important. It is not enough to command the universal rules governing calculation or enumeration. If one wants to know what enumeration or calculation of a sum will yield one must actually perform the activity in question, dealing with perceived or imagined particulars. At the same time, however, what one does on and with these particulars is governed entirely by universal rules guaranteeing a unique outcome, an outcome which cannot differ from one case to the next".

si só poderia servir na argumentação contra a extensão dessa noção ao cálculo. Além disso, seria possível argumentar que o importante nos juízos algébricos é que eles envolvem a representação de objetos particulares por meio de variáveis livres de modo que, o que Kant estaria dizendo acerca da matemática em geral ao afirmar que o conhecimento matemático repousa na exibição de conceitos na intuição é que os juízos matemáticos têm de ser fundados sobre argumentos que envolvam de uma maneira essencial, a representação de objetos particulares e *não* sobre algo sensível presente para *nós*. Essa parece ter sido a linha de argumentação adotada por Hintikka[90].

Young não nega o papel das variáveis livres na álgebra, mas alerta que essa reconstrução anacrônica das teses de Kant que dirigem a atenção para o que Kant não fez pode atrapalhar uma interpretação baseada numa apreciação adequada do que ele fez. Para Young, nas passagens kantianas acerca da álgebra[91], Kant não chama atenção para as variáveis livres, mas sim, para todas as ferramentas pelas quais as operações algébricas são simbolicamente exibidas. Ainda que o objetivo de Kant não fosse negar a importância do fato de usarmos estes símbolos e convenções em conjunto com variáveis livres, no entanto, sua principal reivindicação é que é somente pelo uso desses símbolos e convenções que chegamos a conhecer a verdade dos correspondentes juízos algébricos[92].

---

[90] Apenas para recordarmos, Hintikka defendeu que a interpretação da noção de intuição como representante individual de conceitos gerais tornaria mais plausível a abordagem das construções de conceitos matemáticos, particularmente na álgebra. Cf. primeira seção do segundo capítulo.
[91] Nos referimos aqui, fundamentalmente à passagem A717/B745 da CRP.
[92] Cf. YOUNG, (1982).

A simbolização dos juízos algébricos seria em última instância, uma ferramenta para tornar mais fácil a realização desses juízos. Nesse sentido, o ponto de Kant em torno da álgebra seria essencialmente o mesmo daquele que Young quis associar ao cálculo[93]. Young escreve:

> Tendo a nossa disposição um sistema simbólico, isto é, um conjunto de procedimentos universais para exibir conceitos de um certo tipo, nós podemos representar um conceito simbolicamente por meio de caracteres que percebemos ou imaginamos. Então, mediante a execução de várias atividades sobre e com esses caracteres, podemos estabelecer a verdade de vários juízos a priori (1982, p. 36)[94].

Essa citação remete à possibilidade de obtenção de conhecimento mediante a manipulação de signos. Porém, segundo Young, no caso do cálculo aritmético isso seria possível apenas porque a ele subjazem construções ostensivas e estas últimas é que garantiriam a sinteticidade da aritmética e não o cálculo propriamente. Nesta passagem Young parece depor contra a sua própria argumentação quanto à sinteticidade da álgebra cujos juízos, segundo ele, tem um objeto próprio, a saber, a quantidade em geral, tendo como fundamento último somente construções simbólicas. Em conformidade com a argumentação em torno da sinteticidade da aritmética, a conclusão que se segue parece ser que a sinteticidade da álgebra não estaria assegurada.

---

[93] Essa afirmação, se explorada, poderia iniciar uma ampla discussão voltada à interpretação da abordagem kantiana em torno da álgebra. Optamos, no entanto, por seguirmos mantendo o foco na filosofia kantiana da aritmética.

[94] "Having at our disposal a symbolic system, i.e., a set of universal procedures for displaying concepts of a certain sort, we can symbolically represent a concept by means of characters that we perceive or imagine. Then, by performing various activities on and with these characters, we can establish the truth of various *a priori* judgments".

Uma conseqüência semelhante se seguiria em relação à aritmética, caso considerássemos a diferença entre os signos utilizados no cálculo e a enumeração, respectivamente, não como uma diferença entre símbolos para conceitos e instâncias de conceitos, isto é, entre expressões e exibições de conceitos, mas sim, entre signos sem semelhança imitativa e com semelhança imitativa. Nos dois casos teríamos então somente construções simbólicas, estando em jogo não propriamente o papel substitutivo dos signos, mas a economia de pensamentos obtida em cada caso.

Há que se destacar que, para Kant, não se trata de *podermos* fundamentar juízos algébricos sobre construção simbólica, mas de *devermos*. Também em relação à aritmética, como já assinalamos, Kant sustenta que não somente *podemos* fundamentar juízos aritméticos sobre construção mas, de maneira mais forte, que *devemos*[95]. Diante da pergunta sobre se Kant, frente a interpretação de Young em torno da aritmética, teria boas razões para manter essa tese forte acerca da aritmética Young sustenta que sim, pois entende que não contradisse a tese forte de Kant ao apresentar a sua própria concepção, senão que apenas removeu uma das tradicionais objeções a ela.

Para corroborar essa afirmação, Young esclarece que, segundo sua interpretação, embora possamos fundar juízos aritméticos sobre construções simbólicas, como o fazemos no caso do cálculo, isto é em princípio eliminável dado que o fazemos quando estão em jogo

[95] Como veremos na seqüência, a força colocada sobre a expressão “devemos” no que diz respeito ao fundamento dos juízos aritméticos sobre construção dos respectivos conceitos remete, diferentemente do caso da álgebra, à construção ostensiva dos mesmos.

números mais elevados somente porque achamos o procedimento do cálculo mais fácil e mais confiável do que aquele procedimento de enumeração ou construção ostensiva. Em última instância, no entanto, estaríamos sempre dispensados deste procedimento, na medida em que, conforme concebe Kant, é o procedimento de construção ostensiva que provê o que poderíamos chamar de o fundamento primário para juízos aritméticos; o cálculo seria apenas um recurso secundário ou derivativo, cujo uso se justifica somente porque podemos certificar-nos de que o resultado alcançado por meio dele necessariamente coincide com aquele que seria alcançado por construção ostensiva ou enumeração.

Ao fazer essa afirmação Young acaba por reconhecer que para oferecer uma interpretação da filosofia kantiana da aritmética o que precisa ser destacado é, sobretudo, a relação dos juízos aritméticos com a noção de construção ostensiva. Passamos então a um detalhamento da interpretação de Young a respeito.

Young alerta que Kant, ao que parece, não pensa em juízos aritméticos como juízos sobre números, construídos como objetos individuais. Isso parece claro se levarmos em conta que, na concepção kantiana, a noção de um objeto individual está fortemente atrelada à intuição e intuição é sempre espaço-temporal. Como números não são objetos dados no espaço e no tempo, não haveria a possibilidade de termos intuições de números como objetos individuais e, por conseguinte, nenhum modo de dar significado a qualquer juízo que pretendesse tratá-los como tal. Em relação a esse aspecto, Young afirma claramente discordar de Parsons que, segundo ele, teria sustentado a tese de que os próprios números poderiam ser exibidos na intuição como objetos individuais[96].

Em contraposição, Young propõe outra leitura que, ao seu ver, parece tornar mais fácil o sentido da discussão kantiana acerca da sinteticidade de tais juízos e da construção ostensiva de conceitos aritméticos. De acordo com Young, ao insistir na importância da evidência, Kant não estava pensando que nós podemos ter intuições dos números naturais eles mesmos, mas sim, apenas de coleções de coisas deste ou daquele número de membros. Young argumenta que:

> Nós poderíamos expressar o juízo aritmético escrevendo '7+5=12', mas o juízo tem de ser entendido como asserindo, não uma certa relação obtida entre três objetos, mas antes, que qualquer coleção de sete coisas, juntada com uma coleção distinta de cinco coisas, é uma coleção de doze coisas. Ao sustentar que esse juízo é sintético, Kant tenciona afirmar que não está contido no conceito de tal coleção conjunta que ela seria uma coleção de doze coisas. Ao sustentar que somente podemos fundamentar o juízo por construção ostensiva ele tenciona afirmar que nosso conhecimento pode ser fundamentado, finalmente, somente pela produção de uma coleção de sete mais cinco coisas descobrindo, por meio da enumeração, que totaliza doze (1982, p.37)[97].

O procedimento universal envolvido nessa construção e enumeração constitui aquilo que, segundo Young, Kant denomina como os esquemas de conceitos aritméticos, tendo em vista a definição

---

[96] Cf. página 88 da dissertação.

[97] "We may express the arithmetical judgment by writing '7+5=12', but the judgment has to be understood as asserting, not that a certain relation obtains among three objects, but rather that any collection of seven things, conjoined with a distinct collection o five things, is a collection of twelve things. In maintaining that this judgment is synthetic, Kant thus means to claim that it is not contained in the concept of such a conjoint collection that it should be a collection of twelve things. In maintaining that we can only ground the judgment by ostensive construction, he means to claim that our knowledge can finally be grounded only by our producing a collection of seven plus five things and discovering, through enumeration, that it numbers twelve."

kantiana para a noção de *esquema*: *"representação de um processo geral da imaginação para dar a um conceito a sua imagem"* (A140/B179-180).

Estas teses relativas aos juízos aritméticos estão fundadas, segundo Young, sobre a concepção kantiana em torno dos conceitos aritméticos e sua relação com os procedimentos universais dos esquemas pelos quais esses conceitos são aplicados a objetos intuídos: temos um conceito puro ou intelectual de uma quantidade em geral (o conceito de uma coleção de coisas) e também, conceitos de quantidades determinadas (conceitos de coleções desta ou daquela quantidade de coisas); os conceitos puros, em si mesmos, seriam insuficientes, ganhando sentido ou significado para nós somente mediante seus correspondentes esquemas[98].

Young ressalta que:

> Se estamos manejando estes conceitos – para sermos capazes de identificar uma coleção como uma coleção de várias coisas e, em particular, de n ou n+m coisas – então além de estarmos de posse do conceito, devemos também ser capazes de executar um certo procedimento universal, qual seja, aquele de percorrer do início ao fim, uma após a outra, as várias coisas que formam a coleção, fixando, desse modo, seu número. Esse procedimento, que Kant descreve como a adição sucessiva da unidade à unidade homogêneas (A142/B182) e que eu tenho feito referência como enumeração provê o esquema para conceitos aritméticos (1982, p. 37-38)[99].

[98] Cf. KANT, A137/B176.

[99] "If, that is, we are to wield these concepts – to be capable of identifying a collection as a collection of many things, and in particular of *n* or of *n+m* things – them besides possessing the concept we must also be able to execute a certain universal procedure, *viz.*, that of running through the various things that make up the collection one after another, thereby fixing their number. This procedure, which Kant describes as 'the successive addition of unit to homogeneous unit' (A142/B182) and which I have referred to as enumeration, provides the schema for arithmetical concepts".

É esse procedimento que possibilita a aplicação de tais conceitos a coisas intuídas.

Kant também defende que conceitos aritméticos puros são insuficientes para dar conta da fundamentação dos juízos aritméticos; podemos ter o conceito de uma soma de sete mais cinco coisas, mas, para sabermos que esta é uma coleção de doze coisas temos que ordenar e exercitar a habilidade para identificar uma coleção de sete mais cinco coisas e enumerar seus membros. Ressaltando a distinção feita por Kant na *Doutrina do Esquematismo* Young alerta que *"o procedimento universal é distinto de qualquer execução particular do mesmo e que é o procedimento universal, ou a representação universal do procedimento, que é o esquema. A execução do procedimento poderia ser referida como um ato do esquematismo"* (1982, p.38)[100].

Young sinaliza algumas dificuldades concernentes à relação entre conceitos aritméticos, a atividade mediante a qual estes conceitos são esquematizados e a representação universal desse procedimento. Segundo Young, parece claro porque Kant distinguia entre conceitos aritméticos e a atividade que executamos na esquematização desses conceitos, afinal, conceitos obviamente não são atividades.

No entanto, não parece tão claro por que Kant deveria distinguir os conceitos aritméticos da representação universal do procedimento que seguimos na aplicação daqueles conceitos, ou seja, entre os

[100] "... the universal procedure is distinct from any particular execution of it, and that it is the universal procedure, or the universal representation of the procedure, which is the schema. The execution of the procedure might be referred to as an act of schematism". Cf. A140/B179-180.

conceitos e seus esquemas, pois, uma vez que aceitamos o ponto de vista de Kant de que conceitos aritméticos não têm sentido ou significado para nós exceto por meio dos procedimentos correspondentes ou esquemas, torna-se difícil ver exatamente como os conceitos podem diferir de seus esquemas. As concepções kantianas parecem, no entanto, sugerir que há tal distinção, na medida em que Kant utiliza o termo Quantidade (*Größe*) ao falar do *conceito* e Número (Zahl) ao falar do *esquema* da quantidade (*Größe*)[101].

Essa distinção não deve ser confundida com a distinção entre o conceito da quantidade em geral e a representação de determinada quantidade, isto é, entre a simples representação de uma coleção e a representação de uma coleção desta ou daquela quantidade de coisas. Uma confusão desta natureza levantaria a sugestão de que o que Kant estaria dizendo é que a representação de uma determinada quantidade está necessariamente ligada com o procedimento para enumerar uma coleção de coisas, sugestão esta, certamente equivocada.

Na interpretação de Young,

> Kant considera importante distinguir, em geral, entre a síntese de uma pluralidade ou multiplicidade intuída e o trazer essa síntese para conceitos, esta última sendo o que dá unidade para a síntese (A78-79/B 103-105; cf. também B151). Seu ponto, aplicado ao conceito de quantidade, parece ser que, enquanto o procedimento de enumeração capacita-nos a sintetizar ou combinar uma pluralidade intuída e apreende-la como uma coleção de digamos, sete coisas, ele o faz somente porque está informado por conceitos que não são eles mesmos

[101] Como veremos na seqüência, em lugar de "número" para indicar o esquema, Young sugere "enumerar".

> redutíveis a procedimentos ou representações de procedimentos (1982, p. 38-39)[102].

A identificação do intuído como uma coleção de sete coisas se daria mediante o percorrer sucessivamente cada uma dessas coisas reconhecendo cada uma delas como uma unidade e identificando as várias coisas juntas como uma totalidade.

Kant identifica os conceitos de unidade e de totalidade como categorias; por sua vez, o conceito de uma coleção de coisas, embora não seja considerado também como categoria, certamente era considerado como um conceito puro (sensível puro). Assim sendo, para evitar equívocos, de acordo com Young, há que se atentar para a tradução do termo *Zahl* no que diz respeito à sua relação com o esquema das categorias da quantidade. Em relação a isso, Young enfatiza:

> É errado, consequentemente, traduzir a declaração kantiana de que Zahl é o esquema da quantidade como asserindo que número é o esquema da quantidade, uma vez que isso sugere que a representação de determinada quantidade – de uma coleção desta ou daquela quantidade de coisas – não é um conceito puro, mas que depende necessariamente do procedimento de enumeração. O ponto de Kant é totalmente diferente. O termo 'Zahl' está conectado com o verbo 'zählen', termo kantiano para o procedimento de enumeração e seu ponto, portanto, não é que nós não temos conceito puro de uma quantidade determinada, mas sim, que não temos

[102] "Kant thinks it important to distinguish, in general, between the synthesis of an intuited plurality or manifold and the bringing of this synthesis to concepts, this latter being what gives unity to the synthesis (A78-9/B103-5; cf. also B 151). His point, as applied to the concept of quantity, seems to be that while the procedure of enumeration enables us to synthesize or combine an intuited plurality and to grasp it as a collection of, say, seven things, it does so only because it is informed by concepts which are not themselves reducible to procedures or representations of procedures".

> escolha para lidar com tal conceito à parte do procedimento de enumeração (1982, p. 39)[103].

Young sugere que a concepção kantiana acerca dos juízos aritméticos deveria ser vista em duas partes: primeiramente, a afirmação mais básica seria que conceitos aritméticos são insuficientes para dar suporte a juízos aritméticos e que, portanto, tais juízos são sintéticos; uma segunda tese, adicional, é a de que com a forma da intuição que temos, espaço-temporal, podemos esquematizar conceitos pelo procedimento de sucessão temporal ou enumeração e que podemos usar esse procedimento para construir conceitos aritméticos e fundamentar, assim, os juízos aritméticos.

Mais do que uma possibilidade, aparentemente, Kant pensa que é somente mediante o uso deste procedimento de construção que podemos fundamentar juízos aritméticos, do que se segue que, embora Kant sustente que conceitos de quantidade e de determinada quantidade são conceitos puros do entendimento, também ressalta que eles estão inseparavelmente ligados a intuição e de um modo bem particular. Young indica essa particularidade diferenciando o conceito de uma coleção de sete coisas do conceito de uma coleção de coisas vermelhas, do ponto de vista de sua relação com a intuição:

> O conceito, digamos, de uma coleção de sete coisas difere de maneira profunda do conceito de uma coleção de coisas vermelhas. Pois no último caso cada uma das coisas da coleção é vermelha, enquanto que a própria

[103] " It is misleading, accordingly, to translate Kant's statement that *Zahl* is the schema of quantity as asserting that number is the schema of quantity, since this suggests that the representation of determinate quantity – of a collection of this or that many things – is not a pure concept, but is rather necessarily dependent upon the procedure of enumeration. Kant's point is quite different. The term '*Zahl*' is connected with the verb '*zählen*', Kant's term for the procedure of enumeration, and his point therefore is not that we have no pure concept of determinate quantity, but that we have no way of wielding such a concept apart from the procedure of enumeration".

> coleção não é vermelha, ao passo que no primeiro caso é a coleção mesma que é de número sete, não as várias coisas que a compõe tomadas individualmente. O conceito de sete, assim, não está ligado a intuição da maneira como o conceito de vermelho está. Não é o conceito de uma propriedade ou determinação exibida pelas coisas na intuição sensível. Nem é o conceito de alguma propriedade sensível exibida pela coleção ela mesma, uma vez que obviamente a coleção não é um objeto sensível separada das coisas que a formam. O conceito de tal coleção é, todavia inseparavelmente ligado à intuição. Colocando isso de uma forma grosseira, a seticidade (sevenness) de uma coleção é algo que precisa ser visto para ser entendido. A seticidade e, em geral, o quanto (how-many-ness) de uma coleção reside no fato de que ele compreende objetos particulares distintos e a representação de tais coisas particulares, antes que meramente de tipos de coisas, é sempre objeto da intuição (1982, p. 40)[104].

Kant quer destacar, portanto, que a representação que permite determinar o quanto em questão não deve ser conceitual, mas sim, intuitiva. Conceitos, como vimos anteriormente, são representações universais e mediatas, isto é, dizem respeito a classes ou tipos e não a objetos em particular, os quais somente são acessados mediante intuições, que são representações singulares e imediatas. É somente mediante representações desse último tipo, segundo Kant, que podemos estabelecer o quanto de uma coleção.

---

[104] “The concept, say, of a collection of seven things differs in a deep way from the concept of a collection of red things. For in the latter case each of the things in the collection is red, while the collection itself is not red, whereas in the former case it is the collection itself that is of numbers seven, not the various things taken individually. The concept of seven is thus not tied to intuition in the way in which the concept of red is. It is not the concept of a property or determination exhibited by things in sensible intuition. Nor is it the concept of some sensible property exhibited by the collection itself, since obviously the collection is not a sensible object over and above the things that make it up. The concept of such a collection is nonetheless inextricably tied to intuition. Putting it very crudely, the sevenness of a collection is something that needs to be seen to be understood. The sevenness, that is, and in general the how-many-ness of a collection, resides in the fact that it comprises distinct, particular objects, and the representation of such particular, rather than merely of kinds of things, is always a matter of intuition”.

Com base nisso, Young adentra na argumentação que apresentamos no segundo capítulo acerca da interpretação kantiana das demonstrações leibnizianas de verdades aritméticas. Young procura justificar o desacordo de Kant em relação à concepção leibniziana de que as verdades aritméticas são deduzidas meramente de definições e princípios lógicos e de que, portanto, os números podem ser definidos a partir das idéias de unidade e de adição de uma unidade, provando as verdades aritméticas pela repetida aplicação dessas definições.

A objeção mais difundida a essa concepção, como vimos, é aquela que reclama o reconhecimento do uso dos princípios de comutatividade e associatividade nas provas leibnizianas de verdades aritméticas. Não obstante Kant pudesse concordar com tal objeção, segundo Young, sua abordagem objetaria, em primeiro lugar, a maneira com que Leibniz trata as definições[105]; muito embora concedesse que o conceito de dois, por exemplo, poderia ser "por definição" aquele de uma coleção de um mais um, seguiria insistindo que para dominar esta definição é preciso superar o plano discursivo ou conceitual, tendo em vista que duas coisas particulares e distintas somente podem ser representadas na intuição tornando-se, consequentemente, enumeráveis.

De acordo com Kant, portanto, é impossível provar verdades aritméticas usando apenas definições e princípios lógicos. O que Leibniz afirma, porém, envolve algo totalmente certo, desde que seja considerado não como uma prova senão como uma série de juízos.

[105] Cf. YOUNG, (1982).

Assim, cada juízo em que Leibniz acrescenta uma unidade às primeiras já estabelecidas, se apóia no uso de construção ostensiva e enumeração, tal como Kant o sugere em B15/16. Em última instância, as "provas" leibnizianas de verdades aritméticas estariam também fundadas sobre construções ostensivas.

Os equívocos têm origem, freqüentemente, no fato de considerar as construções simbólicas de provas, elas mesmas, como provas. As provas de identidades aritméticas, portanto, não seriam provas propriamente ditas. Em verdade, nesse caso seria inapropriado, inclusive, qualifica-las como construções simbólicas de provas, uma vez que elas só funcionam em função das "definições" e dos "postulados" sobre os quais se apóiam.

As definições, no sentido com que Leibniz emprega o termo, segundo Young, não explicariam os conceitos aritméticos; elas apenas proveriam um símbolo

> que nos serve para representar um conceito aritmético pela simples razão de que instancia ou constrói ostensivamente aquele conceito. Os "postulados", em contrapartida, simplesmente especificam procedimentos para transformar símbolos para somas de números em símbolos para números. As "provas" funcionam precisamente porque estes procedimentos são essencialmente idênticos àqueles envolvidos na construção ostensiva ou enumeração. (1982, p. 42)[106].

Em poucas palavras, o que Young procurou mostrar em seu artigo, a partir do exame de como de fato procedemos ao fazermos

---

[106] "... one which serves to represent na arithmetical concept for the very simple reason that it instantiates, or ostensively constructs, that concept. The 'postulates', in turn, simply specify procedures for transforming symbols for sums of numbers into symbols for numbers. The 'proofs' work precisely because these procedures are essentially identical to those involved in ostensive construction and enumeration".

juízos aritméticos é que tanto a construção ostensiva, quanto a construção simbólica podem ter lugar na aritmética e corresponderiam, respectivamente, à enumeração e ao cálculo.

Em geral, diz Young, quando os juízos envolvem números muito elevados o procedimento adotado é o cálculo, o qual é regido por um conjunto de regras que garantem a sua universalidade na medida em que mostram em que consiste a operação em questão. No entanto, este cálculo, em última instância está fundado sobre algumas verdades elementares que não poderiam, também elas, serem obtidas mediante algum tipo de cálculo. Estas verdades, na interpretação de Young, seriam obtidas mediante enumeração. Com efeito, embora conceda a presença de construções simbólicas de conceitos aritméticos, Young estabelece sua dependência em relação às construções ostensivas a ela subjacentes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma filosofia da aritmética envolve fundamentalmente questões dos seguintes tipos: a) questões de natureza ontológica, por exemplo, "Que são os números?"; b) questões de índole semântica, entre as quais, "O que significam os termos e/ou proposições da aritmética?"; e também, c) questões de caráter epistemológico, tais como, "Como se conhece em matemática?".

Nesta dissertação privilegiamos questões do terceiro tipo. Em última instância, porém, dado o caráter inextricável de tais questões, uma tal diferenciação só tem lugar, de fato, como um expediente classificatório; a forte vinculação entre as questões não permite dissociá-las para uma abordagem completamente isolada. Nesse sentido, ainda que notadamente as considerações epistemológicas tenham ocupado um posto central em nosso trabalho, em alguma medida ele esteve permeado também por considerações de natureza ontológica e semântica.

No contexto da filosofia da aritmética de Leibniz e Kant, autores cujas abordagens acerca do conhecimento aritmético deram corpo a este trabalho, três elementos ganharam destaque: a intuição, os conceitos e o simbolismo. Em nossa discussão, enfatizamos mais o que diz respeito ao simbolismo e, por conseguinte, ao conhecimento simbólico. Investigamos esses aspectos no âmbito da aritmética, analisando o que Leibniz e, principalmente, o que Kant, pensaram em torno disso. Uma ênfase deste tipo se justifica pelo crescente interesse que tem sido demonstrado sobre este aspecto na filosofia da matemática contemporânea, uma vez que aponta para um fato fundamental da prática matemática, a saber, a manipulação simbólica.

Ora, já a concepção leibniziana de conhecimento apontava para o primado metodológico da manipulação simbólica na obtenção de conhecimento, tendo em vista que nos permite o tratamento de conceitos matemáticos que são inalcançáveis pela intuição. Como vimos, a noção de intuição em Leibniz é de caráter puramente intelectual, isto é, está associada apenas ao acesso às idéias de um modo direto e imediato.

Deixando de lado a questão de se, em última instância, há de fato conhecimento intuitivo, em teoria, o conhecimento de conceitos simples seria apenas intuitivo. Em relação ao conhecimento de conceitos complexos, porém, limitações humanas dificultam a obtenção de conhecimento intuitivo. Nesses casos, segundo Leibniz, nos provemos de um recurso intermediário, os símbolos, cujo papel substitutivo permite a obtenção de conhecimento via manipulação simbólica. A noção de conhecimento simbólico é apresentada, portanto, não propriamente em oposição ao conhecimento intuitivo, mas como complementação.

Essa relação fica evidenciada, segundo Leibniz, na aritmética, a qual, ao mesmo tempo em que é considerada um paradigma de conhecimento simbólico (juntamente com a álgebra) compreende também o exemplo mais próximo de conhecimento intuitivo que nos é acessível, o conceito de número. O primeiro está relacionado às expressões aritméticas mais complexas, isto é, que envolvem números elevados; o último, apenas aos primeiros elementos da progressão dos números naturais.

Não obstante a superioridade epistemológica do conhecimento intuitivo, o primado metodológico dos símbolos na obtenção de conhecimento leva a noção de conhecimento simbólico a assumir um papel central no pensamento leibniziano. Heranças dessa noção leibniziana parecem sobreviver no pensamento kantiano, sobretudo na sua fase pré-crítica, na qual o papel dos símbolos é o principal elemento destacado em relação à matemática, sem qualquer restrição à sensibilidade.

A limitação da aplicação da matemática a objetos sensíveis se apresenta, porém, no período crítico, quando Kant passa a defender o caráter sintético a priori da matemática, sendo tal conhecimento obtido por meio de construções, ou seja, da exibição de seus conceitos na intuição, a saber, no espaço e tempo; com evidente perda no valor do papel do simbolismo em relação à *Investigação.*

Nas construções ostensivas, próprias segundo Kant da geometria, as intuições correspondentes instanciam os conceitos construídos; na característica ou simbólica, própria da álgebra, os conceitos são exibidos mediante signos que os expressam, porém, não os instanciam. A respeito do tipo de construção próprio à aritmética Kant não faz nenhuma declaração literal. Centralmente, é isso que nos propomos a investigar nesta dissertação. Definimos, então, o que entender por aritmética e os problemas associados com ela, neste contexto: trata-se essencialmente de equações numéricas, do modo pelo qual conhecemos sua verdade e de seu caráter analítico ou sintético.

Certamente, a literatura tradicional sobre a filosofia da matemática de Kant encontrou dificuldades em conceber como construção a construção simbólica, mesmo no âmbito da álgebra. E a noção de construção ostensiva progressivamente era desacreditada. Por um lado, pelos desenvolvimentos ulteriores na matemática que pareciam contrariar as teses de Kant a respeito do papel da intuição. Por outro lado, a tradição filosófica que, seguindo a A. Coffa, poderíamos denominar tradição semântica, teve como um dos seus objetivos eliminar qualquer referência à intuição kantiana no campo do conhecimento a priori. Outrossim, o programa fundacional de Frege e em certa medida o formalismo hilbertiano contribuíam na mesma direção. O programa construtivista original, ainda que referendasse teses de Kant, orientava-se numa direção completamente contrária a considerar a linguagem e os formalismos como elementos essenciais da matemática. A filosofia da matemática de Kant era, por volta dos anos sessenta, uma peça venerável de museu.

Porém, em 1967, Hintikka publica um trabalho acerca do método da matemática segundo Kant, no qual apresenta uma interpretação nada canônica da filosofia kantiana da matemática. Esta interpretação, ainda que severamente criticada, mostrou um viés da filosofia kantiana da matemática que resgatou sua relevância no cenário da filosofia da matemática atual, qual seja, o papel do simbolismo. Desse modo, o trabalho de Hintikka representou um marco para a filosofia kantiana da álgebra e da aritmética, uma vez que despertou a atenção para a atualidade destes temas.

Hintikka defendeu uma interpretação do método da matemática proposto por Kant, isto é, da construção de conceitos, partindo de um conceito de representação intuitiva desatrelada de seu caráter sensível e entendida apenas como representação singular. Tal interpretação teve como ponto de partida o intento de oferecer uma explicação mais satisfatória para a afirmação kantiana de que também a construção simbólica, aplicada à álgebra, envolve intuição.

Em relação à aritmética, Hintikka pôs-se a examinar a afirmação kantiana de que fórmulas numéricas tais como “7+5=12” são imediatas e indemonstráveis considerando, em paralelo, o procedimento pelo qual, em outra ocasião, Kant sustentara que a verdade de tais fórmulas é estabelecida. Segundo Hintikka, o que Kant quis dizer ao considerar que equações aritméticas simples são ‘imediatas’ e ‘indemonstráveis’ é que sua verdade fica demonstrada tão logo o procedimento pelo qual a fórmula numérica “7+5=12” é verificada for executado, não havendo a necessidade de alguma argumentação ulterior. Esta interpretação de Hintikka parece sugerir que a construção aplicada à aritmética é simbólica, entendida aqui sem nenhum vínculo com a sensibilidade. Chama-la ou não de prova ou demonstração é uma questão terminológica.

Parsons rejeitou qualquer abordagem acerca da aritmética em Kant que pretendesse desvincula-la de seu caráter sensível; ao contrário, tentou explicar a sinteticidade da aritmética mostrando como ela se relaciona com as intuições puras do espaço e do tempo, isto é, com as formas puras de nossa intuição. A intuição espacial teria participação na construção de conceitos aritméticos no que diz respeito à sua exibição na forma de uma percepção concreta, o que poderia ser feito mediante signos concretos (*tokens*) cujos *types* seriam isomórficos à estrutura dos números naturais. O simbolismo, assim, é concebido por Parsons em termos de uma intuição formal, proporcionando uma construção simbólica de conceitos aritméticos.

Young investigou como de fato fazemos juízos aritméticos. A partir disso, considerou o tipo de construção de conceitos aí envolvido. Diferentemente de Hintikka e de Parsons, Young, por um lado, se dedicou mais à discussão acerca do papel do simbolismo na aritmética em conexão com as notações e os algoritmos. Por outro, procurou fazer jus à ênfase de Kant na construção ostensiva como fundamento da matemática.

Com efeito, diferenciou as equações cuja verdade pode ser obtida por meio de algum algoritmo daquelas que estão na base deste. As primeiras seriam obtidas por construção simbólica; as últimas, diriam respeito às observações de Kant acerca das chamadas fórmulas numéricas e corresponderiam, para Young, a construções ostensivas. No que diz respeito a este ponto, Young objeta uma concepção que estaria presente tanto em Parsons quanto em Hintikka, a saber, a de que os números são objetos, quando do que para Kant se trata é de conceitos aplicados a coleções de coisas.

Young de alguma maneira pretende que as seqüências de barras ou de pontos “representem” coleções de objetos mas, independentemente do apoio textual da interpretação de Young, o problema é imediato: barras são signos ou barras são intuições? Caso forem signos, a construção pela qual Young sugere que as equações da base seriam demonstradas também é simbólica. Nesse caso, a intuição envolvida nessas construções deveria remeter a um aspecto particular, a saber, a idéia de progressão aritmética.

A principal contribuição de Parsons parece ser a observação de que tal construção representa um papel auxiliar na compreensão daquilo que, mediante ela, deve ser de fato considerado em relação à aritmética, a saber, a sucessão de atos e a apreensão sucessiva que está sendo considerada, isto é, algo assim como uma regra que caracteriza uma progressão. Assim, as verdades aritméticas seriam asseguradas, propriamente, apenas na medida em que essa sucessão e apreensão sucessiva fossem consideradas no contexto de uma possível progressão da geração de intuições de acordo com uma regra. O conhecimento matemático gerado por essa progressão somente poderia ser dado, segundo Kant, no tempo.

Mas a interpretação de Parsons deixa aberta uma dificuldade que a tese de Young justifica, a saber, que as identidades numéricas se justificam através de intuições como representações singulares e imediatas. O recurso de Parsons à noção de intuição formal parece um expediente de emergência destinado a escapar dessa dificuldade, com o acréscimo já mencionado de uma concepção de número como entidades abstratas que a tese de Young quer eliminar.

Todas as interpretações discutidas, direta ou indiretamente, concluem na discussão entre os diferentes simbolismos aritméticos e os correspondentes conceitos ou objetos que se entendem eles representar. Em trabalhos futuros tencionamos considerar mais atentamente o papel do simbolismo em conexão com diferentes notações e algoritmos, examinando, por exemplo, se esse papel contempla apenas a representação de algo que já está dado ou, como gostaríamos de examinar, com espírito wittgensteiniano, se tais simbolismos têm na verdade um papel constitutivo da noção de número.

BIBLIOGRAFIA

ALLISON, H. E. **El idealismo transcendental de Kant: una interpretación y defensa**. Barcelona : Anthropos, 1992.

BARKER. **Filosofia da matemática**. Rio de Janeiro : Zahar, 1976.

BRITTAN, G. Algebra and Intution. In: POSY, C. J. (ed.), **Kant's philosophy of mathematics. Modern essays.** Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1992.

BROAD, C. D. **Kant: an introduction**. New York : Cambridge, 1978.

CAJORI, F. **A history of mathematical notations**. New York : Dover, 1993.

COUTURAT, L. (ed.). **G. W. Leibniz. Opuscules et fragments inédits**. Hildesheim; Zürich; New York: Georg Olms Verlag: 1988.

____. **La filosofía de las matemáticas en Kant**. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 1960.

DASCAL, M. Leibniz's early views on definition. In.: **Leibniz. Language, signs and thought**. A collection of essays. Philadelphia : John Benjamins P. Co., 1987. p.61-79.

ECO, U. **A busca da língua perfeita** na cultura européia. Bauru : EDUSC, 2001.

ESQUISABEL, O. M. El algebra y el arte combinatório leibniziano. In. **Revista Latinoamericana de Filosofía**. Vol. 26, [S. l.], 2000. p. 239-274.

____. **Leibniz y el conocimiento simbólico**. (no prelo).

____. **Perspectives on Leibniz’s concept of symbolic knowledge**. (Artigo inédito apresentado no Workshop Mathematische Semiotik und Epistemologie, na Universidade de Bielefeld, em 8 de outubro de 2003.). p.1-24 “não paginado”.

____. **Rational Universal Language vs. “Calculus Ratiocinator” Does hold this distinction in Leibniz?.** (Artigo inédito apresentado no *Kolloquium zur Philosophie*, na Universidade de Paderborn, em 14 de outubro de 2003.). p.1-14 “não paginado”.

EUCLID. **The Thirteen Books of the Elements**. New York : Dover, 1956.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas : UNICAMP, 1997.

FANG, J. **Kant and the Mathematics Today**. New York : The Edwin Mellen Press, 1997.

FERRARIN. **Construction and mathematical schematism. Kant on the exhibition of a concept in intuition**. Kant-Studien, [S. l.], 86 Jahrgang, Heft 2, p.131-174, 1995.

FRIEDMAN, M. **Kant and the Exact Sciences.** Cambridge: Harvard, 1992.

HEIDEGGER, M. **Kant y el problema de la metafísica**. México: Fondo de Cultura Económica, 1954.

HINTIKKA, J. Kant on the mathematical method. In: POSY, C. J. (ed.), **Kant’s philosophy of mathematics. Modern essays.** Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1992. p.21-42.

____. Kant’s theory of Mathematics revisited. In. **Philosophical topics essays of pure reason**. Vol. 12. Nº 02. Oklahoma : University of Oklahoma Press, 1981. p.201-215.

KANT, I. **Crítica da Razão Pura**. São Paulo : Abril Cultural, 1996.

____. Inquiry concerning the distinctness of the principles of natural theology and morality. In: **Theoretical philosophy 1755 – 1770**. New York : Cambridge, 2003. p.243–286.

____. **Lógica**. Rio de Janeiro : Biblioteca Tempo Brasileiro, 1992.

____. On the form and principles of the sensible and the intelligible world [Inaugural dissertation] (1770). In: **Theoretical philosophy 1755 – 1770**. New York : Cambridge, 2003. p.373–416.

____. **Por que no es inútil una nueva Critica de la Razón Pura** (Respuesta a Eberhard). Buenos Aires : Biblioteca de Iniciación Filosófica Aguilar, 1960.

____. **Prolegomenos** a toda metafísica futura que pueda presentarse como ciência. Buenos Aires : Charcas, 1984.

____. To Johann Schultz, November 25, 1788. In: ZWEIG, A. (ed.) **Kant: philosophical correspondence 1759 – 99**. Chicago : University of Chicago, 1967. p.128-131.

LASSALLE CASANAVE, A. **Conocimiento por construcción simbólica**. Ensayos en homenaje a Alberto Moreno, Universidad de Córdoba (no prelo).

____. **Conocimiento simbólico en la *Investigación* de 1764**. (no prelo).

LEBRUN, G. A noção de “semelhança”, de Descartes a Leibniz. In. **Conhecimento, linguagem, ideologia**. São Paulo : Perspectiva, 1989.

LEIBNIZ, G. W. Demonstración de las proposiciones primarias. In: **Escritos** filosóficos. Buenos Aires : Charcas, 1982.

____. Dialogo sobre la conexión entre las cosas y las palabras (Agosto de 1677). In: **Escritos filosóficos**. Buenos Aires : Charcas, 1982. p.172-177.

____. El análisis de los lenguages (11 de septiembre de 1678). In: **Escritos filosóficos**. Buenos Aires : Charcas, 1982. p.180-184.

____. Ensayos de análisis gramatical (1683-1684). In: **Escritos filosóficos**. Buenos Aires : Charcas, 1982. p.185-187.

____. Historia y elogio de la lengua o característica universal (CA. 1680). In: **Escritos filosóficos**. Buenos Aires : Charcas, 1982. p.165-172.

____. Meditaciones sobre el conocimiento, la verdad y las ideas (Noviembre de 1684). In: **Escritos filosóficos**. Buenos Aires : Charcas, 1982. p.271-278.

____. **Novos ensaios sobre o entendimento humano**. São Paulo : Abril Cultural, 1984.

____. ¿Qué es idea? (1678) In: **Escritos filosóficos**. Buenos Aires : Charcas, 1982. p.178-179.

____. Signos y cálculo lógico (Post. 1684). In: **Escritos filosóficos**. Buenos Aires : Charcas, 1982. p.188-193.

____. Sobre la síntese y el análisis universal, es decir sobre el arte de descubrir y el arte de juzgar (CA. 1679). In: **Escritos filosóficos**. Buenos Aires : Charcas, 1982. p.194-202.

____. Verdades necesarias y contingentes (CA. 1686). In: **Escritos filosóficos**. Buenos Aires : Charcas, 1982. p.328-338.

____. Verdades primeras (CA. 1689). In: **Escritos filosóficos**. Buenos Aires : Charcas, 1982. p.339-345.

LEOPOLDO E SILVA, F. **Universalidade e simbolização em Leibniz**. p.1-11. (não publicado).

MANCOSU, P. **Philosophy of mathematics & mathematical practice in the seventeenth century.** New York : Oxford, 1996.

MARTIN, G. **Arithmetic and combinatory: Kant and his contemporaries.** [S. l.],: Southern Illinois University, 1985.

____. **Leibniz, logic and metaphysics.** Manchester : Manchester University, 1964.

MCRAE, R. “Idea” as a philosophical term in the seventeenth century. In. **Journal of the history of ideas**, [S. l.], 26, 1965, p.175-190.

MELLO, J. L. P. **Matemática: na falta de calculadora, use a prova dos noves**. Disponível no sítio ‹http://www.folha.uol.com.br/folha/educação/ult305u14300.shtml›, em 13/11/2003.

PARSONS, C. Kant´s philosophy of Arithmetic. In: **Kant on pure reason**. New York : Oxford, 1982. p.13-39.

PATON, H. J. **Kant’s methaphysic of experience**. Vol. I. London : George Allen & Unwin, 1961.

____. **Kant’s methaphysic of experience**. Vol. II. London : George Allen & Unwin, 1965.

RAGGIO, A. La filosofia matemática de Kant. In. **Manuscrito**, Vol.II, Nº 1. Campinas: UNICAMP, 1978. p.7-18.

ROSSI, P. ***Clavis Universalis***. El arte de la memoria y la lógica combinatoria de Lulio a Leibniz. México : Fondo de Cultura Econômica, 1989.

SHABEL, L. Kant on the ‘Symbolic Construction’ of mathematical concepts. **Stud. Hist. Phil. Sci**., [S. l.], 29(4), 1998, p.589-621.

____.**Mathematics in Kant’s critical philosophy**. Reflections on mathematical practice. New York; London : Routledge, 2003.

SHAPIRO, S. **Thinking about Mathematics**. New York : Oxford, 2000.

THOMPSON, M. Singular terms and intuitions in Kant's epistemology. In. **Review of metaphysics**, [S. l.], Vol. 26, 1972, p.314-343.

TORRETI, R. **Kant.** Estudio sobre los fundamentos de la filosofia crítica. Buenos Aires: Charcas, 1980.

YAKIRA, E.; GROSHOLZ, E. Leibniz's analysis of arithmetic. In. **Leibniz's science of the rational**. Stuttgart : Steiner, 1998.

YOUNG, J. M. Kant on the Construction of Arithmetical Concepts. **Kant-Studien**, [S. l.], 73, 1982, p.17-46.

____. Construction, Schematism and Imagination**.** In: C. J. Posy (ed.). **Kant's Philosophy of Mathematics**. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1992. p.159-175.

WINTERBOURNE, A.T. Construction and the role of schematism in Kant's philosophy of mathematics. **Stud. Hist. Phil. Sci**., [S. l.], Vol.12, Nº 1, 1981, p.33-46