

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MODOS QUASE-NORMAIS DE BURACOS
NEGROS PLANO-SIMÉTRICOS ANTI-DE
SITTER EM d DIMENSÕES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Jaqueline Morgan

Santa Maria, RS, Brasil

2007

**MODOS QUASE-NORMAIS DE BURACOS
NEGROS PLANO-SIMÉTRICOS ANTI-DE
SITTER EM d DIMENSÕES**

por

Jaqueline Morgan

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física, da Univerdade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Física.**

Orientador: Vilson Tonin Zanchin

Santa Maria, RS, Brasil

2007

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**MODOS QUASE-NORMAIS DE BURACOS
NEGROS PLANO-SIMÉTRICOS ANTI-DE
SITTER EM d DIMENSÕES**

elaborada por
Jaqueline Morgan

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Física

COMISSÃO EXAMINADORA:

Vilson Tonin Zanchin, Dr. (UFABC)
(Orientador)

Carlos Molina Mendes, Dr. (USP)

Matheus Jatkoske Lazo, Dr. (UNIPAMPA-UFSM)

Santa Maria, 22 de agosto de 2007.

*Para meus pais Maria Eli e Irineo,
minha irmã Flávia
e para meu amor Neymar.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Vilson Tonin Zanchin pela oportunidade e principalmente por acreditar em mim. Agradeço também pela orientação que se fez sempre presente mesmo estando tão distante; pela calma e disposição demonstradas, mesmo tendo que enfrentar cansativas viagens para que pudéssemos melhor discutir nosso trabalho.

Ao colega e amigo Alex dos Santos Miranda, pela constante ajuda e interesse em meu trabalho; às suas grandiosas contribuições, às inúmeras discussões e principalmente pela extrema paciência para comigo.

Aos colegas Daniel e Gustavo por dividirem as alegrias, dúvidas e angústias do dia-a-dia.

Ao meus queridos colegas de sala Aline e Carlos, pela grande amizade e companheirismo. Como também não poderia deixar de agradecer à Carla, ao Eleonir, Fábio e Jonas.

Agradeço também àquelas pessoas que mesmo não entendendo quase nada do que eu estava falando escutavam pacientemente, vocês “são demais”: Ariane, Patrícia, Franck, Janaína, Susane e Vanessa.

Aos meus amados pais, pelas constantes palavras de incentivo, pelo “colinho” sempre disponível em todas às vezes que precisei; pela dedicação e amor, em fim pela vida!!! Amo vocês.

À minha irmã “preferida”, por me alegrar e por sempre me incentivar, amo-te.

Ao meu amor Neimar, obrigada por estar sempre ao meu lado, por torcer pelo meu sucesso, por me incentivar incondicionalmente; pelo carinho e amor. Amo-te.

Aos funcionários do PPGFIS pelo apoio e disponibilidade, e aos professores que contribuíram para minha formação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização deste trabalho, meu muito obrigada.

Sem sonhos, a vida não tem brilho.

Sem metas, os sonhos não tem alicerces.

Sem prioridades, os sonhos não se tornam reais.

(Augusto Cury)

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

MODOS QUASE-NORMAIS DE BURACOS NEGROS PLANO-SIMÉTRICOS ANTI-DE SITTER EM d DIMENSÕES

AUTORA: JAQUELINE MORGAN

ORIENTADOR: VILSON TONIN ZANCHIN

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 22 de agosto de 2007.

Investiga-se os modos quase-normais gravitacionais de buracos negros plano-simétricos anti-de Sitter em d dimensões, cuja geometria das seções espaciais é plana e cuja topologia pode ser plana, cilíndrica ou toroidal. Deduz-se equações fundamentais de perturbação gravitacional para este *background*, seguindo o formalismo invariante de gauge desenvolvido por Kodama, Ishibashi e Seto (2000), segundo o qual as perturbações métricas são naturalmente separadas em três setores ortogonais: tensorial, vetorial e escalar. Entretanto, são escolhidas diferentes quantidades invariantes de *gauge* tais que sob condições de contorno apropriadas fornecem os modos quase-normais hidrodinâmicos do buraco negro em questão. Particularmente, no limite hidrodinâmico, os modos de cisalhamento nas perturbações gravitacionais vetoriais e modos de onda sonora nas perturbações escalares são encontrados explicitamente. Mostra-se que o modo de cisalhamento é único e independe do número de dimensões, apresenta-se uma expressão para o modo de onda sonora válida para qualquer dimensão e verifica-se que as perturbações gravitacionais tensoriais não apresentam modos hidrodinâmicos. Utiliza-se o método de Horowitz-Hubeny para calcular numericamente os primeiros modos quase-normais comuns para cada setor de perturbação e apresentam-se as respectivas relações de dispersão $\text{Re}(\omega) \times \mathbf{q}$ e $\text{Im}(\omega) \times \mathbf{q}$, onde ω são as frequências quase-normais e \mathbf{q} é o número de onda normalizados. Também obtêm-se numericamente os modos hidrodinâmicos e suas relações de dispersão. Os modos quase-normais das perturbações tensoriais são calculados para buracos negros plano-simétricos anti-de Sitter em cinco e seis dimensões, e os modos quase-normais das perturbações vetoriais e escalares são calculados para buracos negros em quatro, cinco e seis dimensões. Observa-se que as relações de dispersão apresentam um comportamento geral onde $\text{Re}(\omega) \rightarrow \mathbf{q}$ e $\text{Im}(\omega) \rightarrow 0$ conforme $\mathbf{q} \rightarrow \infty$ independentemente do tipo de perturbação, número de dimensões e do modo quase-normal analisado.

Palavras-chave: buracos negros; altas dimensões; modos quase-normais; AdS/CFT

ABSTRACT

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

QUASINORMAL MODES OF PLANE-SYMMETRIC ANTI-DE SITTER BLACK HOLES IN d DIMENSIONS

AUTHOR: JAQUELINE MORGAN

ADVISER: VILSON TONIN ZANCHIN

Local and Date: Santa Maria, August 22nd, 2007.

Quasinormal modes of plane-symmetric anti-de Sitter (AdS) black holes in d spacetime dimensions are investigated. Following the gauge invariant prescription developed by Kodama, Ishibashi and Seto (2000), fundamental equations for gravitational perturbation in such a background are constructed. Within such a prescription, metric perturbations naturally split into three disjoint classes. Namely, tensor, vector and scalar perturbations. However, different gauge invariant quantities are chosen in the present work, because they are more suited to the particular boundary conditions usually imposed to find quasinormal modes in AdS spacetimes than those used by Kodama, Ishibashi and Seto. In particular, the quantities used here present also the so called hydrodynamic modes, i. e., shear modes for vector perturbations and sound wave modes for the scalar ones, what is not found using the former quantities. It is also shown that there is just one shear mode, which does not depend upon the number of spacetime dimensions (d). Moreover, it is also found a general expression for the sound wave modes in terms of the number of the parameter d for scalar perturbations, and that there is no such a hydrodynamic mode for the tensor sector. Horowitz-Hubeny power series method is used in numerical analysis to find the dispersion relations for the first few quasinormal modes, and also for the hydrodynamic modes. This analysis is performed for five and six spacetime dimensions in the case of tensor perturbations, and for four, five and six dimensions in the cases of vector and scalar perturbations. The dispersion relations of regular modes present the same general behavior for all kinds of perturbations, $\text{Re}(\omega) \rightarrow \mathfrak{q}$ and $\text{Im}(\omega) \rightarrow 0$ in the limit $\mathfrak{q} \rightarrow \infty$, where ω and \mathfrak{q} are the normalized frequency and the normalized wave number, respectively.

Keywords: black holes; higher dimensions; quasinormal modes; AdS/CFT

LISTA DE FIGURAS

2.1	Potenciais de Zerilli e Regge-Wheeler para $l = 2$ e $l = 3$	28
2.2	Evolução de um pacote de ondas gravitacionais gaussiano nas vizinhanças de um buraco negro de Schwarzschild (CARDOSO, 2003).	30
2.3	Estrutura de singularidades da função de Green (CHING et al., 1995).	31
5.1	Relações de dispersão para os primeiros modos tensoriais em cinco dimensões.	60
5.2	Relações de dispersão para modos tensoriais em seis dimensões.	60
5.3	Relações de dispersão para o primeiro modo tensorial em cinco e seis dimensões para maiores valores de k	61
5.4	Relações de dispersão para os primeiros modos vetoriais em quatro dimensões.	64
5.5	Relações de dispersão para modos vetoriais em cinco dimensões.	64
5.6	Relações de dispersão para os primeiros modos vetoriais de um buraco negro plano em seis dimensões.	65
5.7	Relações de dispersão para o primeiro modo vetorial comum em quatro, cinco e seis dimensões para maiores valores de k	65
5.8	Relação de dispersão para o modo hidrodinâmico vetorial em quatro dimensões. A linha tracejada mostra, à esquerda, o modo de cisalhamento e, à direita, o modo algebricamente especial.	67
5.9	Modos hidrodinâmicos vetoriais, na esquerda, para cinco dimensões e, na direita, para seis dimensões.	67
5.10	Relações de dispersão para os primeiros modos comuns das perturbações escalares em quatro dimensões.	70
5.11	Relações de dispersão para os modos quase-normais escalares em cinco dimensões.	70
5.12	Relações de dispersão para os modos comuns escalares em seis dimensões.	71
5.13	Relações de dispersão para o modo escalar hidrodinâmico em quatro dimensões.	72
5.14	Modo escalar hidrodinâmico para buracos negros em cinco dimensões.	72
5.15	O modo hidrodinâmico escalar em seis dimensões.	73

LISTA DE TABELAS

5.1	Os primeiros modos quase-normais tensoriais com número de onda nulo para um buraco negro plano em cinco e seis dimensões.	59
5.2	Modos quase-normais para um buraco negro plano em quatro dimensões, calculados com $q = 0,02$	63
5.3	Modos vetoriais para buracos negros em cinco dimensões, calculados com $q = 2$	63
5.4	Modos quase-normais vetoriais em seis dimensões, calculados com $q = 0$	64
5.5	Modos quase-normais escalares em quatro dimensões, calculados com $q = 0,02$	68
5.6	Os cinco primeiros modos escalares comuns em cinco dimensões, calculados com $q = 2$	69
5.7	Os cinco modos quase-normais escalares comuns em seis dimensões, calculados com $q = 0$	69

SISTEMA DE UNIDADES

Neste trabalho utiliza-se o sistema de unidades geometrizadas, no qual as quantidades físicas são expressas em termos de unidades de comprimento. A base desse sistema é construída fazendo-se com que a velocidade da luz c , a constante gravitacional G , a constante de Boltzman k_B e a constante de Planck h sejam iguais a unidade.

São utilizados os seguintes fatores de conversão:

quantidade física	fator de conversão	valor numérico
tempo	c	$2,997930 \times 10^8 \text{ m/s}$
massa	G/c^2	$7,43 \times 10^{-28} \text{ m/kg}$
temperatura	Gk_B/c^4	$1,14 \times 10^{-67} \text{ m/K}$
momento	G/c^3	$2,48 \times 10^{-36} \text{ s/kg}$
energia	G/c^4	$8,26 \times 10^{-45} \text{ m/J}$
potência	G/c^5	$2,75 \times 10^{-55} \text{ s/J}$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	MODOS QUASE-NORMAIS	19
2.1	Motivação	19
2.1.1	Estimativas dos parâmetros	20
2.1.2	Quantização da área dos buracos negros	21
2.1.3	Correspondência AdS/CFT	23
2.2	Definindo modos quase-normais	27
3	PERTURBAÇÕES GRAVITACIONAIS EM d DIMENSÕES	32
3.1	Equações de Einstein	32
3.2	Teoria de perturbações	33
3.3	Transformações de <i>gauge</i>	35
3.4	Formalismo invariante de <i>gauge</i>	36
3.5	Equações de perturbação invariantes de <i>gauge</i>	39
3.5.1	Perturbações tensoriais	39
3.5.2	Perturbações vetoriais	40
3.5.3	Perturbações escalares	41
4	PERTURBAÇÕES DE BURACOS NEGROS EM d DIMENSÕES	44
4.1	<i>Background</i>	44
4.2	Equações para as quantidades invariantes de <i>gauge</i>	46
4.2.1	Perturbações tensoriais	46
4.2.2	Perturbações vetoriais	47
4.2.3	Perturbações escalares	48
5	CÁLCULO DOS MODOS QUASE-NORMAIS	51
5.1	Cálculo analítico dos modos hidrodinâmicos	52
5.1.1	Limite hidrodinâmico das perturbações tensoriais	53
5.1.2	Limite hidrodinâmico das perturbações vetoriais	54
5.1.3	Limite hidrodinâmico das perturbações escalares	56

5.2	Cálculo numérico dos modos quase-normais	57
5.2.1	Modos quase-normais tensoriais	58
a)	Modos tensoriais comuns	59
b)	Modos tensoriais hidrodinâmicos	62
5.2.2	Modos quase-normais vetoriais	62
a)	Modos vetoriais comuns	62
b)	Modo vetorial hidrodinâmico	66
5.2.3	Modos quase-normais escalares	68
a)	Modos escalares comuns	68
b)	Modo escalar hidrodinâmico	71
6	CONCLUSÃO	74
A	Quantidades geométricas	81
B	Harmônicos escalares, vetoriais e tensoriais	84
B.1	Harmônicos escalares	84
B.2	Harmônicos vetoriais	85
B.3	Harmônicos tensoriais	85
C	Equações de perturbação gravitacional escalar	86

1 INTRODUÇÃO

Alguns sistemas físicos respondem a uma perturbação por meio da seleção de frequências naturais, as frequências normais, e sua resposta é dada como uma superposição de modos estacionários, os modos normais. Por exemplo, quando uma corda de comprimento L é esticada e presa nas duas pontas, e faz-se a corda oscilar numa frequência de ressonância, gera-se uma onda estacionária. Como as duas pontas da corda estão fixas, deve existir um nó em cada extremidade. O modo mais simples que atende a esta condição apresenta um antinó no centro da corda, e a distância L é igual a $\lambda/2$, onde λ é o comprimento de onda necessário para gerar esse modo de onda estacionária. Um segundo modo apresentará três nós e dois antinós, onde a distância L e o comprimento de onda associado se relacionam por $L = \lambda$; o terceiro modo tem quatro nós e três antinós, e $L = 3\lambda/2$. Pode-se continuar nessa progressão, infinitamente, a cada passo, o modo terá mais um nó e mais um antinó que o precedente, e um fator adicional $\lambda/2$ é ajustado ao comprimento L . A relação entre λ e L é dada por $L = \frac{n}{2}\lambda$, para $n = 1, 2, 3, \dots$, e as frequências de ressonância por $\omega = \frac{v}{2L}n$, onde v é a velocidade escalar das ondas.

Portanto, esses modos normais formam um conjunto completo, cada modo contendo uma frequência particular de oscilação. O sistema, uma vez perturbado, continua a vibrar em um ou em vários modos normais. Formalmente, os modos normais desse sistema são obtidos de uma equação de perturbações, isto é, uma equação de onda que governa as oscilações, acrescida de condições de contorno bem definidas, no caso os nós nas extremidades da corda. O resultado é um espectro discreto de modos cujas frequências são múltiplas de uma frequência fundamental que depende somente dos parâmetros físicos da corda.

Os buracos negros possuem modos de vibração próprios semelhantes aos dos sistemas mecânicos oscilatórios, como o caso da corda mencionado acima. Porém, devido às suas peculiaridades, as oscilações características de buracos negros são chamadas de modos quase-normais, e as frequências associadas de frequências quase-normais. A parte “normal” nesses nomes apresenta-se devido à semelhança com os sistemas de modos normais. Entretanto, existem diferenças importantes que devem ser consideradas: os modos quase-normais não são estacionários e sim exponencialmente amortecidos, uma vez que o buraco negro está radiando energia para o infinito na forma de ondas gravitacionais. As

freqüências quase-normais são complexas, com a parte real representando a verdadeira freqüência de oscilação, e a parte imaginária representando o amortecimento. Além disso, os modos quase-normais surgem somente em um intervalo de tempo particular, diferentemente dos modos normais, que se estendem de um instante inicial arbitrário até um tempo posterior também arbitrário.

Os modos quase-normais de buracos negros foram observados primeiramente por Vishveshwara (1970) nos cálculos de espalhamento de ondas gravitacionais por um buraco negro de Schwarzschild. Desde então, os modos quase-normais têm sido extensivamente estudados. Nos primeiros trinta anos, foram realizados vários estudos de modos quase-normais para diferentes espaços-tempos, como por exemplo, Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman, motivados principalmente pelo desejo de compreender a estabilidade, as freqüências características e os mecanismos de excitação dessas oscilações (KOKKOTAS; SCHMIDT, 1999). A maioria desses estudos restringiu-se a interesses astrofísicos, compatíveis com o cenário da época.

Os estudos dos modos quase-normais podem ser desenvolvidos a partir de uma teoria de perturbações. Ao perturbar gravitacionalmente um buraco negro, perturba-se a geometria em suas vizinhanças, e o campo pode cair para o buraco negro ou irradiar para o infinito, causando assim um amortecimento nas oscilações. Os modos decaem, e as freqüências correspondentes são complexas, sendo essas oscilações reconhecidas como modos quase-normais.

O estudo das perturbações em buracos negros iniciou com o trabalho pioneiro de Regge e Wheeler (1957), cujo objetivo foi estudar a estabilidade dos buracos negros de Schwarzschild frente a pequenas perturbações. O trabalho foi continuado por Zerilli (1970).

Usualmente, são consideradas duas maneiras para perturbar buracos negros. A primeira consiste na adição de um campo de teste ao espaço-tempo de um buraco negro, de modo que a perturbação possa ser descrita por uma equação dinâmica para esse campo nesse espaço-tempo. A segunda maneira é perturbar o próprio espaço-tempo, ou seja, considerar perturbações da métrica do buraco negro. Nesse caso, para encontrar a equação de evolução da perturbação, tem-se que linearizar as equações de Einstein. Essas perturbações são chamadas perturbações gravitacionais e sempre atraem mais atenção. Isso porque a radiação gravitacional é muito mais forte que o decaimento dos campos externos próximos aos buracos negros, e também porque as perturbações métricas permitem julgar sobre a estabilidade de um buraco negro. Originalmente, o formalismo das

perturbações foi desenvolvido nas coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) e com uma escolha de *gauge* padrão, conhecida como *gauge* de Regge e Wheeler (1957). Também se fez uso de transformadas de Fourier para que a equação de perturbação fosse apresentada no domínio das frequências, em vez de ser apresentada no domínio do tempo.

Em 1974, Moncrief (apud MARTEL; POISSON, 2005) apresentou pela primeira vez um formalismo invariante de *gauge*, reconhecendo as vantagens práticas que a invariância de *gauge* fornece, como a liberdade de substituição de um *gauge* por outro, algo de grande utilidade na resolução de alguns problemas. Outro refinamento do formalismo foi produzido por Gerlach e Sengupta (1980), que apresentaram equações de perturbação invariantes de *gauge* em um sistema de coordenadas arbitrário, liberando assim o formalismo do uso obrigatório das coordenadas de Schwarzschild.

Esses estudos restringiram-se ao caso quadridimensional e, até recentemente, não existia nenhuma equação fundamental para examinar os modos quase-normais gravitacionais de buracos negros em dimensões mais altas. Essa situação mudou com o desenvolvimento de teorias de unificação e propostas da gravidade na escala TeV , para as quais necessita-se conhecer o comportamento da gravidade em altas dimensões. Kodama, Ishibashi e Seto (2000) estenderam o formalismo invariante de *gauge* para o caso onde o espaço-tempo de fundo é $(m + n)$ -dimensional e cuja simetria espacial corresponde ao grupo de isometrias de um espaço maximamente simétrico n -dimensional. Essa simetria é utilizada para expandir as perturbações em funções harmônicas no espaço n -dimensional e definir as quantidades invariantes de *gauge*. No caso particular em que $d = 2 + n$, eles mostraram que para $n \geq 3$, as perturbações gravitacionais dividem-se em três classes, a saber: perturbações tensoriais, vetoriais e escalares.

As perturbações escalares e vetoriais correspondem, respectivamente, às perturbações polares e axiais do espaço-tempo quadridimensional. As perturbações tensoriais são um novo tipo de perturbação, que aparece quando o número de dimensões é maior do que quatro. Em 2003, Kodama e Ishibashi mostraram que as equações de evolução das perturbações podem ser separadas, uma para cada tipo de perturbação gravitacional, e que cada uma delas pode ser reduzida a uma simples equação de onda tipo Schrödinger, como as equações de Regge e Wheeler (1957) e de Zerilli (1970).

Um dos assuntos pesquisados nestes últimos anos é se as perturbações tensoriais, vetoriais e escalares apresentam alguma relação especial, uma vez que, em quatro dimensões, as perturbações axiais e polares apresentam as mesmas frequências quase-

normais. Por exemplo, Konoplya (2003) calculou os modos quase-normais gravitacionais de buracos negros de Schwarzschild em d dimensões, usando uma aproximação JWKB, e encontrou que os três tipos de perturbação têm frequências quase-normais diferentes. Para buracos negros em cinco dimensões, Cardoso, Lemos e Yoshida (2003) utilizaram o método das frações continuadas e mostraram que as frequências dos modos quase-normais escalares, vetoriais e tensoriais são diferentes, porém os três tipos de perturbação possuem o mesmo comportamento assintótico. Os mesmos autores (CARDOSO; LEMOS; YOSHIDA, 2004) analisaram o limite de modos altamente amortecidos em d dimensões e perceberam que os modos apresentam o mesmo comportamento, independente da dimensão do espaço-tempo ou dos números quânticos angulares das perturbações.

Além dos interesses mencionados acima, os modos quase-normais de buracos negros em altas dimensões têm importância em conexão com a chamada conjectura AdS/CFT, proposta inicialmente por Maldacena (1998). Esta conjectura estabelece uma correspondência entre uma teoria de campos invariante conforme (sigla em inglês, CFT) e uma teoria de cordas num espaço-tempo anti-de Sitter (AdS), relacionando os modos quase-normais de buracos negros em espaços assintoticamente AdS ao tempo de termalização na CFT. De acordo com essa correspondência, esses buracos negros correspondem a um estado térmico na CFT, sugerindo que o inverso da parte imaginária da frequência fundamental desses buracos negros corresponda ao tempo de termalização na CFT.

Motivados por essa correspondência, Son e Starinets (2002) formularam uma receita para o cálculo de funções de Green no tempo real da CFT dual. Utilizando essa receita, eles mostraram que os pólos das funções de Green para uma CFT bidimensional correspondem precisamente às frequências quase-normais da solução de buraco negro de Bañados, Teitelboim e Zanelli (1992). No mesmo ano, juntamente com Policastro (POLICASTRO; SON; STARINETS, 2002a), os autores estabeleceram uma relação entre a correspondência AdS/CFT e a hidrodinâmica. Eles mostraram que, para frequências baixas e comprimentos de onda longos, os modos quase-normais apresentam um comportamento hidrodinâmico, permitindo o cálculo de coeficientes de transporte e constantes de difusão. Desde então, vários trabalhos têm sido publicados confirmando esse comportamento (STARINETS, 2002; HERZOG, 2002; KOVTUN; SON; STARINETS, 2003; NÚÑEZ; STARINETS, 2003; KOVTUN; STARINETS, 2005; KOVTUN; SON; STARINETS, 2005).

Nesse contexto, o trabalho aqui proposto tem por objetivo derivar equações de perturbação gravitacional para um buraco negro plano-simétrico AdS em $d = 2 + n$

dimensões. As equações são obtidas para um conjunto de variáveis fundamentais diferentes das apresentadas por Kodama, Ishibashi e Seto (2000). A partir dessas equações com essas novas variáveis torna-se possível obter os modos hidrodinâmicos para as perturbações vetoriais e escalares. Outro objetivo é calcular os modos quase-normais gravitacionais de buracos negros plano-simétricos AdS em diferentes dimensões, bem como obter as relações de dispersão para cada setor das perturbações, e em cada dimensão calculada. Esses assuntos estão distribuídos entre os próximos capítulos, conforme descrito a seguir.

No segundo capítulo, discute-se as principais motivações para o estudo dos modos quase-normais, dando ênfase àquela que levou ao desenvolvimento deste trabalho. Faz-se também uma breve revisão teórica sobre os modos quase-normais, definindo-os matematicamente.

Aborda-se, no terceiro capítulo, as ferramentas necessárias para a construção das equações de perturbação gravitacional, a saber: equações de Einstein e teoria de perturbações lineares. Nesse capítulo, também apresenta-se o formalismo invariante de *gauge* desenvolvido por Kodama, Ishibashi e Seto (2000).

No quarto capítulo, apresentam-se a solução de buraco negro plano-simétrico AdS em $d = 2 + n$ dimensões e as equações de perturbação gravitacional para tal espaço-tempo, seguindo o formalismo invariante de *gauge* apresentado no capítulo anterior.

No quinto capítulo, estuda-se o limite hidrodinâmico das frequências quase-normais associadas com as perturbações gravitacionais tensoriais, vetoriais e escalares. Os resultados numéricos obtidos para os primeiros modos quase-normais de cada setor de perturbação, em algumas dimensões, bem como as respectivas relações de dispersão também estão presentes nesse capítulo.

O sexto capítulo refere-se aos comentários finais e à possível continuidade do trabalho.

2 MODOS QUASE-NORMAIS

Nas seções deste capítulo, discute-se as principais motivações para um estudo de modos quase-normais, como a estimativa dos parâmetros dos buracos negros e estrelas compactas, a quantização da área do horizonte de eventos dos buracos negros e a correspondência AdS/CFT. Define-se os modos quase-normais de uma forma mais criteriosa.

2.1 Motivação

Apesar de terem sido aqui apresentados no contexto de buracos negros, o conceito de modos quase-normais se aplica a outros sistemas físicos dissipativos. Por exemplo, uma corda vibrando acoplada ao meio mecânico que a cerca, transmitindo energia para esse meio, é um sistema físico que apresenta modos quase-normais. Outro exemplo da astrofísica relativística, são as estrelas de nêutrons, que apresentam oscilações amortecidas mesmo quando sua viscosidade interna é ignorada, já que a radiação gravitacional leva energia para longe da estrela resultando no amortecimento da oscilação estelar.

Os modos quase-normais de buracos negros têm sido estudados há mais de trinta anos e, durante muito tempo, esses estudos foram motivados exclusivamente por interesses astrofísicos. Testar a estabilidade do espaço-tempo contra pequenas perturbações, e conhecer que tipo de oscilações seriam excitadas por tais perturbações são duas motivações astrofísicas clássicas. A última delas é importante, porque torna possível estimar parâmetros fundamentais, tanto para buracos negros (massa, carga elétrica e/ou momento angular), quanto para estrelas relativísticas (raio, massa e/ou equação de estado).

Recentemente, o interesse em estudar modos quase-normais foi ampliado. As teorias de supercordas trouxeram um novo conjunto de interesses em espaços-tempos anti-de Sitter, contribuindo para a construção da correspondência AdS/CFT, a qual deu um novo significado aos modos quase-normais. Segundo a AdS/CFT, a parte imaginária da frequência quase-normal fundamental deve descrever o tempo de termalização numa teoria de campos invariante conforme na fronteira do espaço-tempo anti-de Sitter.

Mais recentemente, os modos quase-normais têm sido ligados à gravidade quântica (HOD, 1998; DREYER, 2003). Algumas evidências apontam que os modos quase-normais altamente amortecidos podem ser importantes nas tentativas de quantização da área de

um buraco negro.

Dentre as várias motivações que justificam um estudo detalhado dos modos quase-normais, apresenta-se nesta seção (a) a estimativa dos parâmetros dos buracos negros, que é feita partindo do fato das frequências quase-normais dependerem somente dos parâmetros intrínsecos dos buracos negros, (b) a quantização da área de um buraco negro e (c) a estimativa do tempo de termalização de uma CFT em conexão com a conjectura de Maldacena (1998). Dedicar-se uma atenção especial à relação entre os modos quase-normais e a correspondência AdS/CFT, já que esta é a principal motivação do presente trabalho.

2.1.1 Estimativas dos parâmetros

Para a física em geral, é importante não só observar os vários fenômenos da natureza, como também tentar extrair informações dessas observações.

Um dos fenômenos diretamente associados aos modos quase-normais são as ondas gravitacionais. Embora a variação no tempo do periastro no pulsar binário observado por Hulse e Taylor (1975) e colaboradores seja atribuída à existência de ondas gravitacionais (TAYLOR; FOWLER; WEISBERG, 1979), elas ainda não foram diretamente observadas.

Para a detecção de ondas gravitacionais ser possível é necessário que se tenha uma fonte muito intensa, como por exemplo, o colapso de uma estrela ou a colisão entre buracos negros, que são eventos de difícil observação. Apesar disso, espera-se que as ondas gravitacionais sejam diretamente detectadas em poucos anos.

Simulações numéricas mostram que o estágio final dos processos mencionados acima é dominado pelos modos quase-normais. Dessa forma, a detecção de ondas está fortemente conectada à existência de buracos negros. As ondas gravitacionais transmitirão uma espécie de impressão digital do buraco negro, propiciando uma identificação particular por meio de seus parâmetros: massa, momento angular e carga elétrica.

Usando os modos quase-normais, pode-se não somente obter informação sobre os buracos negros, como também sobre as estrelas de nêutrons: massa, raio e equação de estado. Essa idéia relativa aos modos quase-normais não é recente. Desde a descoberta de que os buracos negros podem vibrar, as frequências de oscilação dos modos quase-normais e seus tempos de amortecimento têm sido calculados em função dos parâmetros dos buracos negros. Em 1977, os cálculos de Detweiler (apud ECHEVERRIA, 1989, p. 3194)

mostraram que as frequências de vibração ω e os tempos de amortecimento τ eram funções unicamente da massa e do momento angular, despertando para a possibilidade de inferir tais parâmetros através da análise desses modos. Em particular, para a frequência do primeiro modo quase-normal de um buraco negro com rotação, Echeverria (1989) e Finn (1992) sugeriram as seguintes relações:

$$M\omega \approx \left[1 - \frac{63}{100}(1-a)^{3/10} \right] \approx (0.37 + 0.19a); \quad (2.1)$$

$$\tau \approx \frac{4M}{(1-a)^{9/10}} \left[1 - \frac{63}{100}(1-a)^{3/10} \right] \approx M(1.48 + 2.09a); \quad (2.2)$$

onde M é a massa e $a = L/M^2$ é o parâmetro angular do buraco negro, em unidades geometrizadas. Essas duas relações podem ser invertidas e, então, a partir da frequência e do tempo de amortecimento observados, pode-se obter os parâmetros do buraco negro: massa M e momento angular L .

Não é possível derivar um grupo semelhante de relações empíricas no caso das oscilações de estrelas de nêutrons, uma vez que, diferentemente das oscilações de buracos negros, o sinal detectado é composto por várias famílias de modos quase-normais. Dentre eles, o modo fundamental f , o de pressão ou acústico p , o de gravidade g , o rotacional r e o de espaço-tempo ω , que ainda se subdivide em mais três tipos de modos (para uma revisão mais detalhada ver Kokkotas e Schmidt (1999)). Apesar disso, Andersson e Kokkotas (1998) conseguiram construir uma série de relações empíricas, com as quais pode-se estimar com boa precisão a massa, o raio e a equação de estado da estrela. Em particular, eles mostraram que a relação entre as frequências do modo f e a densidade da estrela é aproximadamente linear:

$$\omega_f(kHz) \approx 0,78 + 1,635 \left[\left(\frac{M}{1,4M_\odot} \right) \left(\frac{10 \text{ km}}{R} \right)^3 \right]^{1/2}. \quad (2.3)$$

Além disso do primeiro modo ω , tem-se que

$$\omega_\omega(kHz) \approx \left(\frac{10 \text{ km}}{R} \right) \left[20,92 - 9,14 \left(\frac{M}{1,4M_\odot} \right) \left(\frac{10 \text{ km}}{R} \right) \right], \quad (2.4)$$

de onde pode-se extrair a massa e o raio da estrela.

2.1.2 Quantização da área dos buracos negros

A quantização da área dos buracos negros foi proposta em 1974 por Bekenstein (apud HOD, 1998, p. 4293). A idéia baseou-se na observação de que a área do horizonte

de eventos dos buracos negros não extremos comporta-se como um invariante adiabático clássico. De acordo com o princípio de Ehrenfest, qualquer invariante adiabático clássico corresponde a uma entidade quântica com espectro discreto. Bekenstein conjecturou que a área do horizonte de eventos de um buraco negro quântico não extremo deveria ter um espectro de autovalores discretos.

Pelo uso de uma versão semi-clássica dos processos de Christodoulou (1970), juntamente com o princípio de incerteza de Heisenberg, Bekenstein concluiu que a condição de quantização da área de um buraco negro deveria ter a forma

$$A_n = \gamma l_p^2 n, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.5)$$

onde γ é uma constante adimensional e l_p , o comprimento de Planck.

Por meio de argumentos baseados na mecânica estatística, concluiu-se que a constante adimensional γ deveria apresentar a forma (BEKENSTEIN; MUKHANOV, 1995; BEKENSTEIN, 1997):

$$\gamma = 4 \ln k, \quad (2.6)$$

onde k é um número natural, $k = 1, 2, 3, \dots$

A possibilidade de conexão entre os modos quase-normais de buracos negros e as propriedades quânticas do espectro da entropia foi primeiro observada por Bekenstein (1997) e, mais adiante, desenvolvida por Hod (1998). Em particular, Hod propôs que a parte real das frequências quase-normais altamente amortecidas podia ser relacionada, por meio do princípio de correspondência de Bohr, ao quantum fundamental de massa e momento angular. Baseado no resultado de Nollert (1993), para o comportamento assintótico das frequências quase-normais de um buraco negro de Schwarzschild,

$$M\omega_n = 0,0437123 - \frac{i}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}[(n+1)^{-1/2}], \quad (2.7)$$

ele observou que, no limite $n \rightarrow \infty$, a parte real da frequência concordava com $\ln 3/8\pi$. Assim, usando a relação $A = 16\pi M^2$, para a área do horizonte do buraco negro, e $dM = E = h\omega/2\pi$, Hod obteve

$$\gamma = 4 \ln 3, \quad (2.8)$$

o que implica em

$$A_n = (4 l_p^2 \ln 3) n, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Dreyer (2003) também utilizou as frequências quase-normais altamente amortecidas para determinar o valor de γ na gravidade quântica em loop, e encontrou exatamente $4 \ln 3$.

Salienta-se que a relação (2.8) é consistente com a relação termodinâmica área-entropia, com argumentos estatísticos e com o princípio de correspondência de Bohr, somente para um buraco negro de Schwarzschild. Tentativas de generalização dessa conjectura têm sido propostas para o buraco negro de Kerr, porém os resultados encontrados (CARDOSO, 2003) não concordam com a conjectura de Hod (1998, 2003). Portanto, essa conjectura não é considerada válida para outros buracos negros. Vale salientar, porém, que essa conjectura merece uma análise mais cuidadosa, uma vez que tal coincidência ocorre também para buracos negros carregados (HOD, 2006).

2.1.3 Correspondência AdS/CFT

A teoria de cordas originou-se das tentativas em compreender as interações fortes, por volta de 1970. Entretanto, depois da emergência da cromodinâmica quântica como uma teoria de hádrons, em torno de 1974, o tema dominante da pesquisa em cordas migrou para a escala de Planck, setor da gravidade quântica. Atualmente, pode-se dizer que, pelo menos, algumas teorias de *gauge* fortemente acopladas têm uma descrição dual em termos de cordas (KLEBANOV, 2000).

Numa teoria de *gauge* fracamente acoplada uma descrição conveniente da teoria envolve métodos perturbativos convencionais. No regime de acoplamento forte, tais métodos são intratáveis e a descrição dual de cordas simplifica e fornece informações exatas sobre a teoria. Um dos melhores exemplos desta dualidade é a chamada correspondência AdS/CFT. Essa correspondência relaciona uma teoria quântica de campos invariante conforme (CFT) a uma teoria que inclui gravidade num espaço-tempo curvo anti-de Sitter (AdS). A teoria de cordas é dual a uma teoria quântica de campos num espaço de dimensão inferior, motivo pelo qual a correspondência é muitas vezes representada por $\text{AdS}_{d+1}/\text{CFT}_d$.

O exemplo original, proposto por Maldacena (1998), é a correspondência entre a teoria de cordas do tipo IIB no espaço-tempo $AdS_5 \times S^5$ e a teoria supersimétrica Yang-Mills (SYM) $\mathcal{N} = 4$, para a qual segue abaixo uma breve revisão baseada no trabalho de Son e Starinets (2007).

Por um lado, tem-se a teoria de cordas tipo IIB, a qual contém um número finito de campos sem massa, incluindo o gráviton e o dÍlaton, e um número infinito de excitações de cordas massivas. Essa teoria tem dois parâmetros: o comprimento da corda l_s e a constante de acoplamento g_s . A teoria de cordas tipo IIB vive em um espaço-tempo de dez dimensões, cuja métrica tem a seguinte forma:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\mathbf{x}^2 + dz^2) + R^2 d\Omega_5^2. \quad (2.10)$$

Esse espaço-tempo representa o produto direto de uma esfera em cinco dimensões S^5 com outro espaço, também em cinco dimensões, medido pelas coordenadas t , \mathbf{x} e z . A coordenada z é uma coordenada radial, cujo valor limite $z = 0$ é a fronteira do espaço AdS. Acrescenta-se aos parâmetros g_s e l_s , o raio R do espaço-tempo anti-de Sitter, dos quais tem-se dois parâmetros adimensionais: g_s e R/l_s .

Pelo lado da teoria de campos também tem-se dois parâmetros, que são o número de cores N e o acoplamento g . Quando o número de cores é grande, é a constante de acoplamento de 't Hooft, $\lambda = g^2 N$, que controla a teoria de perturbações. O mapeamento entre ambas as teorias é realizado por meio de relações entre seus parâmetros adimensionais, representadas por (SON; STARINETS, 2007)

$$g^2 = 4\pi g_s, \quad (2.11)$$

$$g^2 N = \frac{R^4}{l_s^4}. \quad (2.12)$$

A equação (2.11) demonstra que, tendo uma teoria de cordas fracamente interagente, então o acoplamento de *gauge* na teoria de campos deve ser pequeno. Da equação (2.12), observa-se que o limite de acoplamento λ forte da teoria de campos corresponde ao limite de raio AdS muito maior que o comprimento da corda l_s . Nesse limite, em especial, é possível desacoplar os modos de vibração (massivos) das cordas e reduzir a teoria de cordas à supergravidade. Ou seja, no limite $g_s \ll 1$ e $R \gg l_s$, a teoria de cordas se reduz à supergravidade clássica. A utilidade prática da correspondência AdS/CFT vem, em grande parte, de sua habilidade para trabalhar com o limite de acoplamento forte na teoria de *gauge*.

A equivalência entre as duas teorias descritas acima inclui operadores, observáveis, estados e funções de correlação. Assim, um operador O da teoria de campos pode ser posto em correspondência com um campo ϕ na supergravidade. A sentença matemática dessa correspondência é dada por:

$$Z_{4D}[J] = e^{iS[\phi_{cl}]} . \quad (2.13)$$

No lado esquerdo dessa equação, tem-se a função de partição de uma teoria de campos, com a inclusão de um termo que acopla a fonte J ao operador O . No lado direito, $S[\phi_{cl}]$ é a ação clássica, calculada para uma função ϕ_{cl} que é solução das equações clássicas de movimento com a condição de contorno, no caso mais simples, sendo dada por

$$\lim_{z \rightarrow 0} \phi_{cl}(z, \mathbf{x}) = J(\mathbf{x}) . \quad (2.14)$$

Derivando a equação (2.13) com relação a J , pode-se encontrar as funções de correlação de O . Em particular, a função de Green de dois pontos pode ser obtida por meio da derivada segunda de $S[\phi_{cl}]$ com relação ao valor de ϕ na fronteira,

$$G(x - y) = -i \langle TO(x)O(y) \rangle = - \left. \frac{\delta^2 S[\phi_{cl}]}{\delta J(x) \delta J(y)} \right|_{\phi(z=0)=J} . \quad (2.15)$$

O mapeamento operador \leftrightarrow campo na correspondência AdS/CFT se dá da seguinte forma:

- o dilaton Φ corresponde ao operador $O = -\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^2 + \dots$, onde \mathcal{L} é a densidade lagrangeana;
- o campo de *gauge* A_β corresponde à corrente conservada J^β da teoria de campos;
- o tensor métrico corresponde ao tensor energia-momento $T^{\alpha\beta}$. Ou seja, a função de partição da teoria de campos quadridimensional em uma métrica externa $g_{\alpha\beta}^0$ é igual a

$$Z_{4D}[g_{\alpha\beta}^0] = \exp(iS_{cl}[g_{\alpha\beta}]) , \quad (2.16)$$

onde $g_{\alpha\beta}$ satisfaz as equações de Einstein em cinco dimensões e tem o comportamento assintótico, em $z = 0$, dado por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \frac{R^2}{z^2} (dz^2 + g_{\alpha\beta}^0 dx^\alpha dx^\beta) . \quad (2.17)$$

A correspondência AdS/CFT então mapeia o problema de encontrar funções de correlação quânticas na teoria de campos para um problema clássico em gravitação.

Toda a descrição acima foi formulada para uma assinatura euclidiana, com tempo imaginário, e tem sido usada com sucesso desde então. Porém, para obter determinados

resultados físicos, muitas vezes é necessário encontrar funções de correlação no tempo real, as quais em geral não são dadas diretamente pelas funções de correlação euclidianas.

Em princípio, algumas funções de Green no tempo real podem ser obtidas através de uma continuação analítica das funções de Green euclidianas. Em geral, essa continuação é muito difícil de se realizar, sendo possível apenas sob condições especiais (SON; STARINETS, 2002, 2007). Para eliminar essa dificuldade, Son e Starinets (2002) elaboraram uma receita por meio da qual se pode obter as funções de correlação no espaço-tempo de Minkowski, diretamente da AdS/CFT. Essa receita é apresentada no que segue.

Levando em conta que a parte AdS da métrica (2.10) é da forma

$$ds^2 = g_{zz}dz^2 + g_{\alpha\beta}(z)dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.18)$$

e considerando perturbações de um campo escalar massivo nesse *background*, a ação é dada por

$$S = K \int d^4x \int_0^{z_h} dz \sqrt{-g} [g^{zz}(\partial_z \phi)^2 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + m^2 \phi], \quad (2.19)$$

onde K é a constante de normalização e m a massa do campo escalar. O limite de integração é entre a fronteira $z = 0$ e o horizonte $z = z_h$.

A equação de campo linearizada para ϕ , dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_z (\sqrt{-g} g^{zz} \partial_z \phi) + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \phi - m^2 \phi = 0, \quad (2.20)$$

deve ser resolvida com uma condição de contorno fixa em $z = 0$. A solução pode ser escrita como

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} f_k(z) \phi_0(k), \quad (2.21)$$

onde $\phi_0(k)$ é a transformada de Fourier do campo na fronteira e $f_k(z)$ é a solução da equação

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_z (\sqrt{-g} g^{zz} \partial_z f_k) - (g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta + m^2) f_k = 0, \quad (2.22)$$

com a condição de contorno $f_k(0) = 1$ na fronteira, e de onda entrando no horizonte de eventos ($z = z_h$).

Usando a equação (2.21) para expressar $\partial_z \phi$ e $\partial_\alpha \phi$, e substituindo essas derivadas na ação (2.19), encontra-se

$$S = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \phi_0(-k) \mathcal{F}(k, z) \phi_0(k) \Big|_{z=0}^{z=z_h}, \quad (2.23)$$

onde

$$\mathcal{F}(k, z) = K \sqrt{-g} g^{zz} f_{-k}(z) \partial_z f_k(z). \quad (2.24)$$

Uma maneira direta de se obter funções de correlação no tempo real seria através de uma extensão de (2.13). No entanto, esse procedimento não produz as funções de Green esperadas. Na tentativa de contornar essa dificuldade, Son e Starinets (2002) postularam que

$$G^R(k) = -2\mathcal{F}(k, z)|_{z=0}. \quad (2.25)$$

Com o uso dessa receita, os autores calcularam funções de Green retardadas em teorias nas quais essas funções já são conhecidas, como por exemplo, para uma teoria de campos à temperatura zero, e numa CFT bidimensional, e verificaram a validade da receita (2.25). Posteriormente, Policastro, Son e Starinets (2002a) mostraram que os modos quase-normais de um buraco negro plano AdS em cinco dimensões, os quais correspondem aos pólos das funções de Green na CFT dual, apresentam um comportamento hidrodinâmico. Esse comportamento, que surge no limite de baixas frequências e grandes comprimentos de onda, fornece um teste não trivial da correspondência AdS/CFT.

2.2 Definindo modos quase-normais

A propagação de ondas em espaços-tempos curvos é frequentemente modelada pela equação de Klein-Gordon:

$$[\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + V(r_*)] \phi(r_*, t) = 0, \quad (2.26)$$

onde $V(r_*)$ é o potencial efetivo que descreve o espalhamento do campo $\phi(r_*, t)$ pela curvatura do espaço-tempo, e r_* é uma coordenada radial, chamada de coordenada tartaruga. Ela coloca o horizonte de eventos do buraco negro em $r_* = -\infty$, limitando o domínio da equação diferencial para o espaço-tempo exterior ao horizonte. Exemplos familiares da equação de Klein-Gordon incluem as equações de Zerilli (1970) e Regge e Wheeler (1957).

Para espaços-tempos assintoticamente Minkowski, o potencial efetivo presente na equação (2.26) tem um comportamento específico: ele é sempre positivo e assintoticamente nulo quando r_* se aproxima de $\pm\infty$, caindo exponencialmente quando $r_* \rightarrow -\infty$ e com r_*^{-2} na direção de $r_* \rightarrow +\infty$, apresentando um máximo nesse intervalo. Para exemplificar esse comportamento, na Figura 2.1 têm-se os potenciais de Zerilli e Regge-Wheeler para o buraco negro de Schwarzschild. A Figura 2.1 é uma adaptação da figura apresentada por Nollert (1999, p. 169).

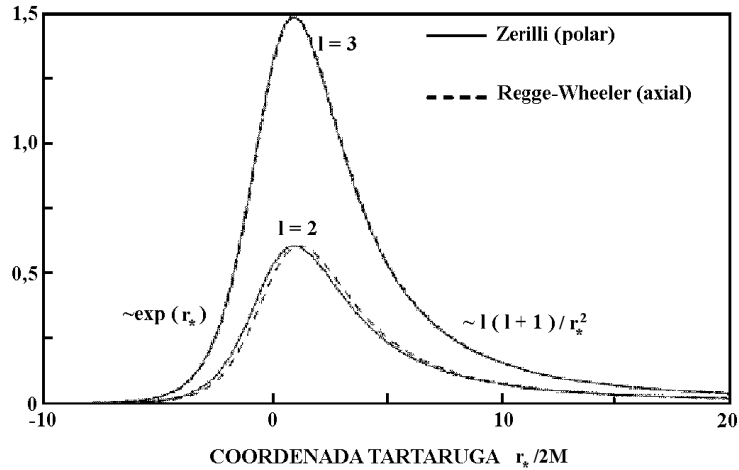


Figura 2.1: Potenciais de Zerilli e Regge-Wheeler para $l = 2$ e $l = 3$.

Para facilitar a definição de modos quase-normais pode-se tomar a transformada de Fourier e eliminar a dependência temporal da equação de Klein-Gordon:

$$\phi(t, r_*) = \int \phi(\omega, r_*) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.27)$$

assim a equação (2.26) torna-se uma equação diferencial ordinária apenas na coordenada radial:

$$\phi''(\omega, r_*) + [\omega^2 - V(r_*)] \phi(\omega, r_*) = 0. \quad (2.28)$$

onde (') representa derivadas com relação a r_* . Uma perturbação geral pode então ser representada como uma transformada de Fourier contínua da solução geral dessa equação.

Como as equações de perturbação de buracos negros de Schwarzschild possuem potenciais estritamente positivos por toda a parte e que se anulam no horizonte e no infinito, não é permitido condições de contorno nas quais a solução se anule nessas fronteiras. De qualquer forma, o surgimento de oscilações de frequência única na evolução temporal das perturbações sugere que se pode seguir uma análise semelhante a de modos normais para definir modos quase-normais.

Conforme $|r_*|$ se aproxima de valores infinitos, as soluções da equação (2.26) aproximam-se de ondas planas ou, mais precisamente, de uma combinação de ondas planas entrando e saindo dessas regiões. Isso exige a imposição de certas condições de contorno nessas fronteiras. As soluções devem parecer soluções puramente de onda entrando no horizonte, matematicamente de acordo com (2.27), tem-se $\phi(\omega, r_*) \sim e^{i\omega r_*}$ à medida que

$r_* \rightarrow -\infty$ (no horizonte), e de onda saindo no infinito, que de acordo com (2.27) é representada por, $\phi(\omega, r_*) \sim e^{-i\omega r_*}$ à medida que $r_* \rightarrow +\infty$ (no infinito espacial). Essa escolha de condições de contorno faz sentido intuitivamente, pois deseja-se estudar a resposta da métrica exterior ao buraco negro frente a perturbações iniciais. Portanto, não se quer que radiação gravitacional vinda do infinito continue perturbando o buraco negro e assume-se que nada pode vir através do horizonte de eventos para fora do buraco negro.

As frequências discretas que são soluções da equação (2.28), juntamente com as condições de contorno citadas acima, são as chamadas frequências quase-normais e as soluções construídas delas são os modos quase-normais.

Estudos numéricos e analíticos mostram que a evolução das perturbações no espaço-tempo de um buraco negro, como por exemplo o buraco negro de Schwarzschild pode, a grosso modo, ser dividida em três partes. A primeira parte é a resposta imediata. Nessa fase, a forma do sinal depende fortemente das condições iniciais. A segunda parte corresponde aos tempos intermediários, quando o sinal é dominado por um decaimento exponencial, cujas frequências e tempos de amortecimento são determinados pelos modos quase-normais. Essa fase depende inteiramente dos parâmetros dos buracos negros (massa, momento angular e carga elétrica). A terceira e última fase ocorre mais tardiamente, quando a propagação da onda cessa pelo decaimento do campo através de uma lei de potências (CHING et al., 1995; BERTI; CARDOSO; LEMOS, 2004).

O trabalho pioneiro em modos quase-normais deve-se a Vishveshwara (1970), o qual mostrou que era possível “observar” buracos negros através do espalhamento de ondas gravitacionais. Assim, perturbando o espaço-tempo de um buraco negro de Schwarzschild com pacotes de ondas gaussianos, Vishveshwara encontrou que o buraco negro respondia com modos de decaimento característicos, os modos quase-normais. Os resultados obtidos no nível da teoria linearizada, na qual os campos são tratados como perturbações no espaço-tempo do buraco negro, estão mostrados na Figura 2.2 (CARDOSO, 2003).

Essas características das ondas gravitacionais, como descritas acima e observadas no gráfico da Figura 2.2, correspondem a estruturas específicas das funções de Green da equação (2.26). Para esclarecer tal fato, observa-se que a evolução temporal de um campo $\phi(r_*, t)$ descrito pela equação (2.26) pode ser escrita, para $t > 0$, como (CHING et al., 1995)

$$\phi(r_*, t) = \int dy G(r_*, y; t) \partial_t \phi(y, 0) + \int dy \partial_t G(r_*, y; t) \phi(y, 0), \quad (2.29)$$

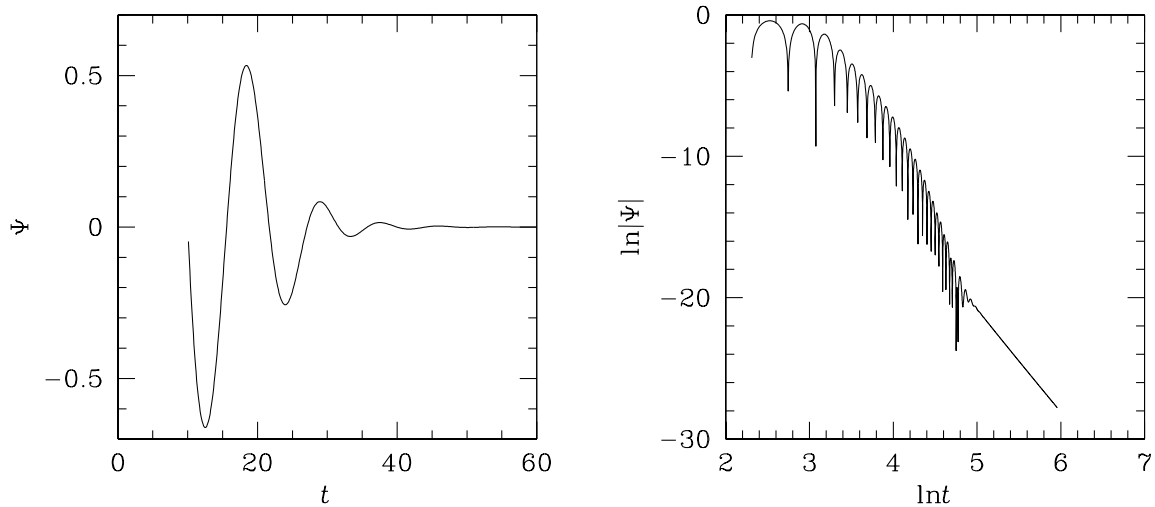


Figura 2.2: Evolução de um pacote de ondas gravitacionais gaussiano nas vizinhanças de um buraco negro de Schwarzschild (CARDOSO, 2003).

onde a função de Green retardada G é definida por

$$[\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + V(r_*)]G(r_*, y; t) = \delta(t)\delta(r_* - y), \quad (2.30)$$

com a condição inicial $G(r_*, y; t) = 0$ para $t < 0$. A sua transformada de Fourier

$$\tilde{G}(r_*, y; \omega) = \int_0^\infty dt G(r_*, y; t) e^{i\omega t}, \quad (2.31)$$

satisfaz a equação

$$\tilde{D}(\omega)\tilde{G} \equiv [-\omega^2 - \partial_{r_*}^2 + V(r_*)]\tilde{G}(r_*, y; \omega) = \delta(r_* - y). \quad (2.32)$$

Definindo duas funções auxiliares $f(\omega, r_*)$ e $g(\omega, r_*)$ como soluções para a equação homogênea $\tilde{D}(\omega)f(\omega, r_*) = \tilde{D}(\omega)g(\omega, r_*) = 0$, pode-se escrever

$$\tilde{G}(r_*, y; \omega) = \begin{cases} \frac{f(\omega, r_*)g(\omega, y)}{W(\omega)} & r_* < y \\ \frac{f(\omega, y)g(\omega, r_*)}{W(\omega)} & y < r_*, \end{cases} \quad (2.33)$$

onde $f(\omega, r_*)$ satisfaz a condição de contorno no horizonte, $g(\omega, r_*)$ satisfaz a condição de contorno no infinito e $W(\omega) = W(g, f) = g(\partial_{r_*} f) - f(\partial_{r_*} g)$ é o wronskiano.

Então, tem-se que integrar $f(\omega, r_*)$ pela esquerda e $g(\omega, r_*)$ pela direita até que elas possam ser comparadas num mesmo valor de r_* , no qual o wronskiano também possa ser avaliado. Para isso considera-se a transformada de Fourier inversa de (2.31), e para

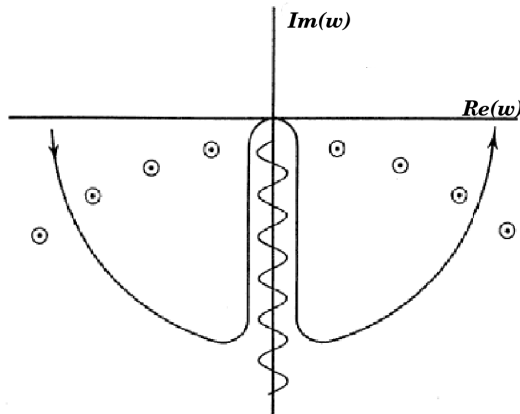


Figura 2.3: Estrutura de singularidades da função de Green (CHING et al., 1995).

$t > 0$, tenta-se fechar o contorno em ω por um semicírculo de raio C na metade inferior do plano complexo.

O wronskiano presente na equação (2.33) pode ter zeros no plano complexo de ω e em todas essas frequências $f(\omega, r_*)$ e $g(\omega, r_*)$ são linearmente dependentes. De fato, em tal situação, essas funções são proporcionais entre si, conforme segue da equação $W(\omega) = W(g, f) = g(\partial_{r_*} f) - f(\partial_{r_*} g) = 0$, de modo que as soluções correspondentes satisfazem ambas as condições de contorno. Tais soluções são, por definição, os modos quase-normais cujas frequências são então identificadas com os pólos da função de Green.

Ao considerar as singularidades de \tilde{G} para $Im(\omega) < 0$ (Figura 2.3), Ching et al. (1995) identificam-nas às diferentes etapas de evolução temporal do pacote de onda gaussiano observadas na Figura 2.2 e discutidas anteriormente. Os autores referem-se ao semicírculo de raio C em $|\omega| = C$, quando $C \rightarrow \infty$, como a resposta imediata do sistema, uma vez que com $|\omega|$ grande a contribuição na evolução se dá por um tempo muito curto.

Para alguns casos particulares [$V(r_* \rightarrow \infty) \sim r_*^{-\alpha} (\ln r_*)^\beta$ para $\beta = 0, 1$], $g(\omega, r_*)$ terá singularidades no eixo $-Im(\omega)$ que tomam uma forma de *branch cut* vindo do infinito negativo para a origem. Essa contribuição afeta o comportamento das ondas após um longo tempo e por isso é identificada como a lei de decaimento de potências, característica da evolução das perturbações em tempos muito grandes (CHING et al., 1995).

3 PERTURBAÇÕES GRAVITACIONAIS EM d DIMENSÕES

A teoria de perturbações é uma das ferramentas que torna possível o estudo dos modos quase-normais. Através dela, perturbando a métrica do buraco negro e linearizando as equações de Einstein, pode-se encontrar as equações de evolução das perturbações, das quais obtêm-se os modos quase-normais.

Na primeira seção deste capítulo, apresenta-se as equações de Einstein com o intuito principal de estabelecer a notação e as equações básicas a serem utilizadas no que segue. Na segunda seção, aplica-se a teoria de perturbações a uma métrica genérica linearizando o tensor de Ricci, com o qual pode-se obter qualquer componente das equações de Einstein. Na última seção, apresenta-se o formalismo invariante de *gauge* para as perturbações gravitacionais desenvolvido por Kodama, Ishibashi e Seto (2000), que fundamenta este trabalho.

3.1 Equações de Einstein

Para facilitar a leitura do presente trabalho, e para referência futura, acrescenta-se aqui as definições das quantidades fundamentais do cálculo tensorial necessárias para a formulação da teoria da relatividade geral.

Considerando um espaço-tempo com d dimensões e com métrica $g_{\alpha\beta}$, tem-se as seguintes definições (no que segue usa-se a notação e convenções de Hartle (2002)):

(i) Símbolos de Christoffel ou coeficientes de conexão:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(\partial_{\gamma}g_{\delta\beta} + \partial_{\beta}g_{\delta\gamma} - \partial_{\delta}g_{\beta\gamma}), \quad (3.1)$$

onde ∂_{α} indica a derivada parcial em relação à coordenada x^{α} , etc.

(ii) Tensor de (curvatura de) Riemann:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} - \partial_{\delta}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\epsilon}^{\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{\epsilon} - \Gamma_{\delta\epsilon}^{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon}. \quad (3.2)$$

(iii) Tensor de (curvatura de) Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta}, \quad (3.3)$$

onde há soma sobre os índices repetidos. A curvatura de Ricci pode ser expressa diretamente em termos dos símbolos de Christoffel por

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^\delta - \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\delta. \quad (3.4)$$

(iv) Escalar de curvatura de Ricci:

$$R = R^\gamma_\gamma = g^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}. \quad (3.5)$$

(v) Tensor de Einstein:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R, \quad (3.6)$$

(vi) Tensor de energia-momento: $T_{\alpha\beta}$

Para completar a descrição das equações de Einstein, busca-se a medida da densidade de matéria e energia. Essa medida é feita através do tensor de energia-momento, cuja forma depende do tipo específico de matéria/energia que o mesmo representa. Além disso, pode-se acrescentar ainda um termo cosmológico na forma $\Lambda g_{\alpha\beta}$, onde Λ é a constante cosmológica. Esse termo é fundamental no desenvolvimento do presente trabalho pois as soluções de buraco negro aqui estudadas só existem pra Λ diferente de 0 e também devido a correspondência AdS/CFT. Assim, as equações de Einstein com constante cosmológica Λ são escritas na forma

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (3.7)$$

onde usou-se o sistema de unidades geometrizadas.

3.2 Teoria de perturbações

Soluções exatas das equações de Einstein são possíveis em um número muito pequeno de problemas. Porém, existem métodos de aproximação que permitem a obtenção de soluções analíticas, válidas dentro de um certo regime. Nesta seção, estuda-se um desses métodos, conhecido como teoria de perturbações.

A teoria de perturbações é aplicável quando, por exemplo, considera-se ondas gravitacionais propagando-se através do vácuo no espaço-tempo curvo, de modo que os coeficientes da métrica possam ser separados em coeficientes de fundo mais perturbações,

$$g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} + \mathcal{O}([h_{\alpha\beta}]^2) + \dots, \quad (3.8)$$

onde $\bar{g}_{\alpha\beta}$ corresponde à métrica de fundo e $h_{\alpha\beta}$ corresponde às perturbações métricas, consideradas pequenas em comparação com a unidade $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$.

A fim de aplicar a teoria de perturbações às equações de Einstein, analisa-se inicialmente o tensor de curvatura de Ricci, o qual é definido a partir dos símbolos de Christoffel, que por sua vez dependem da métrica. Logo, o primeiro passo é substituir a nova métrica (3.8) na expressão (3.1), usando a relação

$$g^{\alpha\beta} = \bar{g}^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + \mathcal{O}([h_{\alpha\beta}]^2) + \dots, \quad (3.9)$$

e considerando que os índices devem ser “levantados” e “abaixados” com a métrica de fundo $\bar{g}_{\alpha\beta}$ e a sua inversa $\bar{g}^{\alpha\beta}$.

Desprezando os termos de segunda e mais altas ordens nas perturbações métricas $h_{\alpha\beta}$, e tendo em vista que suas derivadas são da ordem de $h_{\alpha\beta}$, tem-se que os símbolos de Christoffel podem ser separados em duas partes:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\nu} + \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}. \quad (3.10)$$

Nessa relação, os coeficientes $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\nu}$ são os símbolos de Christoffel em relação à métrica de fundo $\bar{g}_{\alpha\beta}$, e $\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}$ são perturbações destes, dadas por

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\gamma\delta} (\bar{\nabla}_{\beta}h_{\delta\alpha} + \bar{\nabla}_{\alpha}h_{\delta\beta} - \bar{\nabla}_{\delta}h_{\alpha\beta}), \quad (3.11)$$

onde

$$\bar{\nabla}_{\alpha}h_{\delta\beta} = \partial_{\alpha}h_{\delta\beta} - \bar{\Gamma}_{\alpha\delta}^{\nu}h_{\nu\beta} - \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\nu}h_{\nu\delta} \quad (3.12)$$

é a derivada covariante associada à métrica de fundo.

Substituindo (3.10) no tensor de curvatura de Ricci (3.4), tem-se a seguinte decomposição

$$R_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^{(1)}(h_{\alpha\beta}) + \mathcal{O}([h_{\alpha\beta}]^2) + \dots, \quad (3.13)$$

onde $\bar{R}_{\alpha\beta}$ é tensor de curvatura de Ricci que corresponde à métrica de fundo $\bar{g}_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}^{(1)}(h_{\alpha\beta})$ representam os termos de primeira ordem em $h_{\alpha\beta}$. Desprezando os termos de segunda e mais altas ordens em $h_{\alpha\beta}$, restam apenas os termos lineares nas perturbações métricas, de modo que as perturbações no tensor de Ricci, denotadas por $\delta R_{\alpha\beta}$, correspondem exatamente aos coeficientes $R_{\alpha\beta}^{(1)}(h_{\alpha\beta})$, os quais podem ser colocados na forma

$$\begin{aligned} 2\delta R_{\alpha\beta} = & -\bar{\nabla}^{\gamma}\bar{\nabla}_{\gamma}h_{\alpha\beta} - \bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}h + \bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\gamma}h_{\beta}^{\gamma} + \bar{\nabla}_{\beta}\bar{\nabla}_{\gamma}h_{\alpha}^{\gamma} + \\ & + \bar{R}_{\alpha\gamma}h_{\beta}^{\gamma} + \bar{R}_{\beta\gamma}h_{\alpha}^{\gamma} - 2\bar{R}_{\alpha\gamma\beta\sigma}h^{\gamma\sigma}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Contraindo as perturbações no tensor de Ricci, encontram-se as perturbações no escalar de Ricci

$$\delta R = -h_{\alpha\beta}\bar{R}^{\alpha\beta} + \bar{\nabla}^\alpha\bar{\nabla}^\beta h_{\alpha\beta} - \bar{\nabla}^\alpha\bar{\nabla}_\alpha h. \quad (3.15)$$

Com esses resultados, pode-se obter qualquer componente das perturbações nas equações de Einstein.

3.3 Transformações de *gauge*

Os valores das perturbações métricas $h_{\alpha\beta}$ não só carregam informações sobre o sistema físico que está sendo estudado, como também sobre o sistema de coordenadas escolhido. Por isso, tem-se liberdade para realizar transformações infinitesimais no sistema de coordenadas, que refletirão em mudanças nas perturbações métricas $h_{\alpha\beta}$.

Considere uma transformação infinitesimal da forma

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta), \quad (3.16)$$

onde ξ^α são d funções arbitrárias, de mesma ordem de grandeza de $h_{\alpha\beta}$, e pequenas suficientes para deixar $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. Até primeira ordem em ξ^α tem-se $x^\alpha = x'^\alpha - \xi^\alpha(x'^\beta)$, de modo que a métrica (3.8), após algumas manipulações transforma-se em

$$\bar{g}'_{\alpha\beta}(x') + h'_{\alpha\beta}(x') = \bar{g}_{\alpha\beta}(x) + h_{\alpha\beta}(x) - \bar{\nabla}_\beta\xi_\alpha - \bar{\nabla}_\alpha\xi_\beta + (\partial_\nu\bar{g}_{\alpha\beta})\xi^\nu, \quad (3.17)$$

onde

$$\bar{\nabla}_\alpha\xi_\beta = \partial_\alpha\xi_\beta + \bar{\Gamma}'_{\alpha\beta}{}^\nu\xi_\nu \quad (3.18)$$

é a derivada covariante de ξ_β em relação à métrica de fundo. Além disso, considerando a relação $\bar{g}_{\alpha\beta}(x) = \bar{g}'_{\alpha\beta}(x') - \xi^\mu\partial_\mu\bar{g}_{\alpha\beta}$, encontra-se que as perturbações métricas transformam-se de acordo com as relações

$$h'_{\alpha\beta}(x') = h_{\alpha\beta}(x) + \delta h_{\alpha\beta}(x), \quad (3.19)$$

onde

$$\delta h_{\alpha\beta} = -\bar{\nabla}_\alpha\xi_\beta - \bar{\nabla}_\beta\xi_\alpha. \quad (3.20)$$

Têm-se diferentes perturbações métricas $h_{\alpha\beta}$ descrevendo a mesma quantidade física, ou seja, $h_{\alpha\beta}$ sofre uma transformação de *gauge*, muito semelhante à transformação

de *gauge* do eletromagnetismo. Portanto, pode-se usar essa importante propriedade para simplificar a descrição da perturbação e fazê-la única.

De acordo com Misner, Thorne e Wheeler (1999, p. 440), as transformações de *gauge* gravitacionais não afetam a forma funcional de observáveis, como por exemplo, escalares, vetores e tensores. Do mesmo modo que cálculos diretos revelam a invariância de *gauge* do campo eletromagnético, pode-se revelar a invariância de *gauge* do tensor de Riemann:

$$R'_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (3.21)$$

A exemplo do tensor de Riemann, o tensor de Einstein também se mantém inalterado pelas transformações de *gauge*.

3.4 Formalismo invariante de *gauge*

Nesta seção, apresenta-se o formalismo invariante de *gauge* para as perturbações gravitacionais de espaços-tempos de dimensão arbitrária desenvolvido por Kodama, Ishibashi e Seto (2000). As perturbações gravitacionais são expandidas em termos de harmônicos tensoriais, e as perturbações nas equações de Einstein são expressas como um grupo de equações para quantidades invariantes de *gauge*. Essas quantidades são agrupadas em três tipos: tensorial, vetorial e escalar, de acordo com o tipo de harmônico tensorial usado na respectiva expansão. Cada um destes setores obedecerá um grupo fechado de equações independentes.

Considera-se perturbações gravitacionais de um espaço-tempo de fundo de $(m + n)$ dimensões, cuja simetria espacial corresponde ao grupo de isometrias de um espaço maximamente simétrico n -dimensional. Tal espaço-tempo é localmente escrito como o produto

$$\mathcal{M}^{m+n} = \mathcal{N}^m \times \mathcal{K}^n \ni (y^a, x^i) = (z^\alpha). \quad (3.22)$$

A geometria desse espaço-tempo é dada pela métrica

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^\beta = g_{ab}(y) dy^a dy^b + r^2(y) d\sigma_n^2, \quad (3.23)$$

onde

$$d\sigma_n^2 = \gamma_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (3.24)$$

é a métrica do espaço n -dimensional \mathcal{K}^n . Quando a métrica (3.23) representa o espaço-tempo de um buraco negro, o espaço \mathcal{K}^n descreve a estrutura de uma seção espacial de seu horizonte de eventos. Nos casos onde \mathcal{K}^n é um espaço de curvatura constante, a constante K representa sua curvatura seccional. Assume-se que \mathcal{K}^n é completo com relação a métrica e K é normalizado de modo que $K = 0, \pm 1$, onde $K = 0$ representa curvatura seccional nula, isto é, o espaço \mathcal{K}^n é plano; $K = 1$ representa curvatura seccional positiva, ou seja, o espaço é esférico; e $K = -1$ representa curvatura seccional negativa, indicando um espaço hiperbólico. Denota-se as derivadas covariantes, os coeficientes de conexão, e os tensores de curvatura para as três métricas ds^2 , $g_{ab}dy^a dy^b$, e $d\sigma_n^2$ como

$$ds^2 \Rightarrow \nabla_\alpha, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, R_{\alpha\beta\gamma\sigma}, \quad (3.25)$$

$$g_{ab}(y)dy^a dy^b \Rightarrow D_a, {}^m\Gamma_{bc}^a(y), {}^mR_{abcd}(y), \quad (3.26)$$

$$d\sigma_n^2 \Rightarrow \widehat{D}_i, \widehat{\Gamma}_{jk}^i(x), \widehat{R}_{ijkl}(x) = K(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}). \quad (3.27)$$

As expressões para os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ e as componentes do tensor de Riemman $R_{\alpha\beta\gamma\sigma}$, em termos das quantidades correspondentes às métricas $g_{ab}(y)dy^a dy^b$ e $d\sigma_n^2$, são dadas no Apêndice A.

Percebe-se, então, como salientado por Mukohyama (2000), que se tem três tipos de derivadas covariantes para a geometria de fundo: a primeira, representada por ∇_α , é a derivada covariante associada à métrica de fundo original $(m+n)$ -dimensional $g_{\alpha\beta}$; a segunda, D_a , é a derivada covariante associada com a métrica m -dimensional g_{ab} ; e a terceira, representada por \widehat{D}_i , está associada com γ_{ij} . Algumas das relações entre esses três tipos de derivadas, para um campo vetorial arbitrário V_α , estão exemplificadas no Apêndice A.

As perturbações no tensor de Ricci podem ser reescritas considerando a decomposição da derivada covariante ∇ em D e \widehat{D} (ver também o Apêndice A). As novas expressões encontram-se nas equações abaixo:

$$\begin{aligned} 2\delta R_{ab} = & -\square h_{ab} + D_a D_c h_b^c + D_b D_c h_a^c + n \frac{D^c r}{r} (-D_c h_{ab} + D_a h_{cb} + D_b h_{ca}) \\ & + {}^m R_a^c h_{cb} + {}^m R_b^c h_{ca} - 2 {}^m R_{abcd} h^{cd} - \frac{1}{r^2} \widehat{\Delta} h_{ab} + \frac{1}{r^2} \left(D_a \widehat{D}^i h_{bi} + D_b \widehat{D}^i h_{ai} \right) \\ & - \frac{D_b r}{r^3} D_a h_{ij} \gamma^{ij} - \frac{D_a r}{r^3} D_b h_{ij} \gamma^{ij} + \frac{4}{r^4} D_a r D_b r h_{ij} \gamma^{ij} - D_a D_b h; \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
2\delta R_{ai} &= \widehat{D}_i D_b h_a^b + \frac{n-2}{r} D^b r \widehat{D}_i h_{ab} - r \square \left(\frac{1}{r} h_{ai} \right) - \frac{n}{r} D^b r D_b h_{ai} - D_a r D_b \left(\frac{1}{r} h_i^b \right) \\
&+ \frac{n+1}{r} D^b r D_a h_{bi} + (n+1) r D_a \left(\frac{1}{r^2} D^b r \right) h_{bi} - \frac{n+2}{r} D_a D^b r h_{ib} \\
&+ \left((n+1) \frac{(Dr)^2}{r^2} + (n-1) \frac{K - (Dr)^2}{r^2} - \frac{\square r}{r} \right) h_{ia} + r D_a D_b \left(\frac{1}{r} h_i^b \right) \\
&+ \frac{1}{r^2} D^b r D_a r h_{bi} + {}^m R_a^b h_{bi} - \frac{1}{r^2} \widehat{\Delta} h_{ai} + \frac{1}{r^2} \widehat{D}_i \widehat{D}^j h_{aj} + r D_a \left(\frac{1}{r^3} \widehat{D}^j h_{ji} \right) \\
&+ \frac{1}{r^3} D_a r \widehat{D}^j h_{ji} - \frac{1}{r^3} D_a r \widehat{D}_i h_{jk} \gamma^{jk} - r D_a \left(\frac{1}{r} \widehat{D}_i h \right); \tag{3.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\delta R_{ij} &= [2r D^a D_b h_a^b + 2(n-1) D^a r D^b r h_{ab} + 2r D^a D^b r h_{ab}] \gamma_{ij} + r \widehat{D}_i D_a \left(\frac{1}{r} h_j^a \right) \\
&+ r \widehat{D}_j D_a \left(\frac{1}{r} h_i^a \right) + (n-1) \frac{D^a r}{r} \left(\widehat{D}_i h_{aj} + \widehat{D}_j h_{ai} \right) + 2 \frac{D^a r}{r} \widehat{D}^k h_{ka} \gamma_{ij} \\
&- r^2 \square \left(\frac{1}{r^2} h_{ij} \right) - n \frac{D^a r}{r} D_a h_{ij} + \frac{1}{r^2} \left(\widehat{D}_i \widehat{D}^k h_{kj} + \widehat{D}_j \widehat{D}^k h_{ki} \right) - \frac{1}{r^2} \widehat{\Delta} h_{ij} \\
&+ 2 \left((n-1) \frac{K}{r^2} + 2 \frac{(Dr)^2}{r^2} - \frac{\square r}{r} \right) h_{ij} - 2 \left(\gamma^{kl} h_{kl} \gamma_{ij} - h_{ij} \right) \frac{K - (Dr)^2}{r^2} \\
&- 2 \frac{(Dr)^2}{r^2} \gamma_{ij} \gamma^{kl} h_{kl} - \widehat{D}_i \widehat{D}_j h - r D^a r D_a h \gamma_{ij}. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Analogamente, tem-se a seguinte expressão para a perturbação no escalar de Ricci:

$$\begin{aligned}
\delta R &= D_a D_b h^{ab} + \frac{2n}{r} D^a r D^b h_{ab} + \left(\frac{2n}{r} D^a D^b r + \frac{n(n-1)}{r^2} D^a r D^b r - {}^m R^{ab} \right) h_{ab} + \\
&+ \frac{2}{r^2} D_a \widehat{D}^i h_i^a + 2(n-1) \frac{D^a r}{r^3} \widehat{D}^i h_{ai} + \frac{1}{r^4} \widehat{D}^i \widehat{D}^j h_{ij} - \frac{D^a r}{r^3} D_a h_{ij} \gamma^{ij} - \\
&- \frac{1}{r^2} \left((n-1) \frac{K}{r^2} - 2 \frac{(Dr)^2}{r^2} \right) h_{ij} \gamma^{ij} - \square h - n \frac{D^a r}{r} D_a h - \frac{1}{r^2} \widehat{\Delta} h. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Além disso, é necessário reescrever também as relações de transformação das perturbações métricas (3.20) frente a transformação infinitesimal de *gauge* (3.16). Assim, decompondo as derivadas covariantes em termos dos símbolos de Christoffel e utilizando as igualdades presentes no Apêndice A, chega-se às relações

$$\delta h_{ab} = -D_a \xi_b - D_b \xi_a, \tag{3.32}$$

$$\delta h_{ai} = -r^2 D_a \left(\frac{\xi_i}{r^2} \right) - \widehat{D}_i \xi_a, \tag{3.33}$$

$$\delta h_{ij} = -\widehat{D}_i \xi_j - \widehat{D}_j \xi_i - 2r D^a r \xi_a \gamma_{ij}. \tag{3.34}$$

3.5 Equações de perturbação invariantes de *gauge*

Em geral, cada tensor com ordem igual ou superior a dois, no espaço maximamente simétrico \mathcal{K}^n , é decomposto unicamente em três tipos de componentes: escalar, vetorial e tensorial, e cada componente pode ser expandida, em termos de funções harmônicas do mesmo tipo (KODAMA; ISHIBASHI; SETO, 2000). Vale observar, porém, que num espaço-tempo quadridimensional ($n = 2$) as perturbações são classificadas em escalares (ou polares) e vetoriais (ou axiais) somente. As perturbações do tipo tensorial não se manifestam em espaços de baixa dimensionalidade.

3.5.1 Perturbações tensoriais

As perturbações tensoriais podem ser expandidas em termos dos harmônicos tensoriais \tilde{T}_{ij} da seguinte forma:

$$h_{ab} = 0, \quad h_{ai} = 0, \quad h_{ij} = 2r^2 H_T \tilde{T}_{ij}, \quad (3.35)$$

onde H_T é uma quantidade a ser determinada e \tilde{T}_{ij} está definido no Apêndice B. Observa-se que não há perturbações nas componentes correspondentes as coordenadas r e t , e nas combinações dessas com o espaço \mathcal{K} .

Uma vez que a transformação de *gauge* infinitesimal $\xi^\alpha = (\xi^a, \xi^i)$ não tem componente tensorial, segue que H_T é um invariante de *gauge*.

Inserindo (3.35) nas equações de perturbação linearizadas, obtidas das equações de Einstein $G_{ij} + \Lambda g_{ij} = 0$, e utilizando a igualdade

$$\bar{R} = -\frac{2\Lambda(n+m)}{2-n-m} = -\frac{\square r}{r} + (n+1)\frac{K - (Dr)^2}{r^2}, \quad (3.36)$$

obtém-se a seguinte equação:

$$-\square H_T - \frac{n}{r} Dr \cdot DH_T + \frac{k^2 + 2K}{r^2} H_T = 0, \quad (3.37)$$

onde $\square = D^a D_a$ é o d'alembertiano no espaço m -dimensional \mathcal{N}^m . No próximo capítulo, são analisadas as soluções de modos quase-normais para esta equação.

3.5.2 Perturbações vetoriais

As perturbações métricas do tipo vetorial são expandidas em termos dos harmônicos vetoriais \tilde{V}_i da seguinte forma:

$$h_{ab} = 0, \quad h_{ai} = r f_a \tilde{V}_i, \quad h_{ij} = 2r^2 H_T \tilde{V}_{ij}, \quad (3.38)$$

onde f_a e H_T são quantidades a serem determinadas, e \tilde{V}_{ij} são tensores harmônicos construídos a partir de \tilde{V}_i (ver Apêndice B). Percebe-se que não há perturbações no espaço m -dimensional \mathcal{N}^m .

Uma vez que o vetor deslocamento infinitesimal ξ^α tem somente a componente vetorial

$$\xi_a = 0, \quad \xi_i = r L \tilde{V}_i, \quad (3.39)$$

onde L é um invariante de gauge, os coeficientes da expansão da perturbação transformam-se, de acordo com (3.33) e (3.34), como

$$\delta f_a = -r D_a \left(\frac{L}{r} \right), \quad \delta H_T = \frac{k}{r} L. \quad (3.40)$$

Conseqüentemente, a perturbação vetorial pode ser descrita pela quantidade invariante de *gauge*

$$F_a = f_a + \frac{r}{k} D_a H_T. \quad (3.41)$$

Pode-se mostrar que as “variações” das equações de Einstein com constante cosmológica e na ausência de fontes externas, $G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0$, são invariantes de *gauge*. Assim, de acordo com Martel e Poisson (2005), o cálculo dessas equações pode ser realizado em qualquer *gauge* conveniente. Para as perturbações vetoriais, percebe-se que a escolha $H_T = 0$ é adequada, pois anula a perturbação métrica h_{ij} e elimina a derivada covariante presente em (3.41), facilitando as manipulações algébricas envolvidas na obtenção das equações de perturbação deste setor.

Então, para obter as equações para as perturbações vetoriais invariantes de *gauge*, substitui-se as expansões dadas em (3.38), com a escolha de $H_T = 0$, nas componentes das perturbações linearizadas das equações de Einstein $G_i^a = 0$ e $G_j^i + \Lambda g_j^i = 0$. Destas, utilizando novamente a igualdade (3.36), encontra-se equações para as quantidades invariantes de *gauge* f_a . De acordo com o *gauge* escolhido, a equação (3.41) torna-se $F_a = f_a$. Então, de forma consistente, pode-se realizar a substituição $f_a \rightarrow F_a$, de modo a obter as

seguintes equações de perturbação invariantes de *gauge*:

$$\frac{1}{r^{n+1}} D^b \left\{ r^{n+2} \left[D_b \left(\frac{F_a}{r} \right) - D_a \left(\frac{F_b}{r} \right) \right] \right\} - \frac{k^2 - (n-1)K}{r^2} F_a = 0; \quad (3.42)$$

$$\frac{k}{r^n} D_a (r^{n-1} F^a) = 0. \quad (3.43)$$

3.5.3 Perturbações escalares

As perturbações métricas escalares são expandidas em termos dos harmônicos escalares \tilde{S} do seguinte modo:

$$h_{ab} = f_{ab} \tilde{S}, \quad h_{ai} = r f_a \tilde{S}_i, \quad h_{ij} = 2r^2 (H_L \gamma_{ij} \tilde{S} + H_T \tilde{S}_{ij}), \quad (3.44)$$

onde f_{ab} , f_a , H_L e H_T são quantidades a serem determinadas; \tilde{S}_i e \tilde{S}_{ij} são respectivamente os vetores e os tensores harmônicos construídos a partir de \tilde{S} (ver Apêndice B). Neste setor há perturbação em todo o espaço-tempo.

As transformações de *gauge* com vetor infinitesimal são dadas por

$$\xi_a = T_a \tilde{S}, \quad \xi_i = r L \tilde{S}_i, \quad (3.45)$$

onde T_a e L são quantidades invariantes de *gauge*, que de acordo com (3.32) e (3.33), implicam nas seguintes transformações para os coeficientes de expansão dos modos escalares:

$$\delta f_{ab} = -D_a T_b - D_b T_a; \quad (3.46)$$

$$\delta f_a = -r D_a \left(\frac{L}{r} \right) + \frac{k}{r} T_a; \quad (3.47)$$

$$\delta X_a = T_a; \quad (3.48)$$

$$\delta H_L = -\frac{k}{nr} L - \frac{D^a r}{r} T_a; \quad (3.49)$$

$$\delta H_T = \frac{k}{r} L; \quad (3.50)$$

onde X_a é definido por

$$X_a = \frac{r}{k} \left(f_a + \frac{r}{k} D_a H_T \right). \quad (3.51)$$

Conseqüentemente, pode-se construir as seguintes quantidades invariantes de *gauge*:

$$F = H_L + \frac{1}{n} H_T + \frac{1}{r} D^a r X_a; \quad (3.52)$$

$$F_{ab} = f_{ab} + D_a X_b + D_b X_a.$$

Usando uma vez mais o fato de que as perturbações nas equações de Einstein, com tensor energia-momento nulo, são invariantes de *gauge* (MARTEL; POISSON, 2005), tem-se que o cálculo das equações de perturbação pode ser feito em qualquer *gauge* conveniente. Para as perturbações escalares, as escolhas de $f_a = 0$ e $H_T = 0$ mostram-se mais apropriadas, uma vez que estas eliminam as perturbações métricas h_{ai} e simplificam as expansões para h_{ij} . Além disso, essas escolhas anulam a quantidade X_a em (3.51), implicando em enormes simplificações nas quantidades invariantes de *gauge* das equações (3.52).

Sendo assim, substituindo as expansões dadas em (3.44), com as escolhas de $f_a = 0$ e $H_T = 0$, nas componentes linearizadas das equações de Einstein

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0, \quad G_i^a = 0, \quad G_i^j + \Lambda g_i^j = 0, \quad (3.53)$$

e ainda na componente sem a contribuição do traço,

$$G_j^i + \Lambda g_j^i - (G_i^i + \Lambda g_i^i) \delta_i^j / n = 0, \quad (3.54)$$

obtêm-se equações em termos de H_L e f_{ab} . Depois disso, usando a equação (3.52), nota-se que $F = H_L$ e $F_{ab} = f_{ab}$, devido ao *gauge* escolhido. Então, realizam-se as substituições $H_L \rightarrow F$ e $f_{ab} \rightarrow F_{ab}$ naquelas equações, e encontra-se as seguintes equações de perturbação para quantidades invariantes de *gauge*:

$$\begin{aligned} & -\square F_{ab} + D_a D_c F_b^c + D_b D_c F_a^c + n \frac{D^c r}{r} (-D_c F_{ab} + D_a F_{cb} + D_b F_{ca}) + {}^m R_a^c F_{cb} + \\ & + {}^m R_b^c F_{ca} - 2 {}^m R_{abcd} F^{cd} + \left(\frac{k^2}{r^2} - R + 2\Lambda \right) F_{ab} - D_a D_b F_c^c - \\ & - 2n \left(D_a D_b F + \frac{1}{r} D_a r D_b F + \frac{1}{r} D_b r D_a F \right) - \\ & - \left[D_c D_d F^{cd} + \left(- {}^m R^{cd} + \frac{2n}{r} D^c D^d r + \frac{n(n-1)}{r^2} D^c r D^d r \right) F_{cd} \right] g_{ab} - \\ & - \left\{ -2n \square F - \frac{2n}{r} [(n+1) Dr \cdot DF - D^c r D^d F_{cd}] + 2(n-1) \frac{k^2 - nK}{r^2} F \right\} g_{ab} - \\ & - \left[-\square F_c^c - \frac{n}{r} Dr \cdot DF_c^c + \frac{k^2}{r^2} F_c^c \right] g_{ab} = 0; \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\frac{k}{r} \left[-\frac{1}{r^{n-2}} D_b (r^{n-2} F_a^b) + r D_a \left(\frac{1}{r} F_b^b \right) + 2(n-1) D_a F \right] = 0; \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} D_a D_b F^{ab} + \left(\frac{1}{2} {}^m R^{ab} - \frac{(n-1)(n-2)}{2r^2} D^a r D^b r - (n-1) \frac{D^a D^b r}{r} \right) F_{ab} - \\ & - \frac{n-1}{r} D^a r D^b F_{ab} + \frac{1}{2} \square F_c^c + \frac{n-1}{2r} Dr \cdot DF_c^c - \frac{n-1}{2n} \frac{k^2}{r^2} F_c^c + (n-1) \square F + \\ & + \frac{n(n-1)}{r} Dr \cdot DF - \frac{(n-1)(n-2)}{n} \frac{k^2 - nK}{r^2} F = 0; \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\frac{k^2}{2r^2} [2(n-2)F + F_a^a] = 0. \quad (3.58)$$

Todas as equações de perturbação gravitacional encontradas nesta seção, para os setores tensorial, vetorial e escalar, seguem o formalismo invariante de *gauge* de Kodama, Ishibashi e Seto (2000), e foram obtidas a partir de uma métrica suficientemente genérica, cujo espaço-tempo é $(m+n)$ -dimensional.

4 PERTURBAÇÕES DE BURACOS NEGROS EM d DIMENSÕES

Neste capítulo, é apresentada a métrica de fundo dos buracos negros plano-simétricos d -dimensionais, escolhida para o desenvolvimento deste trabalho, e a ela é aplicado o formalismo descrito no capítulo anterior. Mostra-se que, para essa métrica, as equações de perturbação de cada setor (tensorial, vetorial e escalar) podem ser reduzidas a uma única equação diferencial ordinária de segunda ordem para cada um desses setores.

4.1 *Background*

A forma geral da métrica do espaço-tempo de fundo apresentada na equação (3.23) inclui o caso particular da métrica de um buraco negro plano-simétrico anti-de Sitter (LEMOS, 1995; LEMOS; ZANCHIN, 1996; BAÑADOS, 1998; AWAD, 2003). Nesse espaço-tempo, as duas dimensões m correspondem às coordenadas radial r e temporal t , sendo que a métrica do buraco negro plano-simétrico AdS pode ser escrita da forma:

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \left[-f(r) dt^2 + \sum_{i=1}^n dx^i dx_i \right] + \frac{R^2}{r^2 f(r)} dr^2, \quad (4.1)$$

para a qual

$$f(r) = 1 - \frac{r_h^{n+1}}{r^{n+1}}, \quad (4.2)$$

sendo r_h o raio do horizonte de eventos, que está relacionado à temperatura de Hawking T do buraco negro por

$$r_h = \frac{(4\pi T)R^2}{n+1}, \quad (4.3)$$

onde R é o raio anti-de Sitter

$$R^2 = -\frac{n(n+1)}{2\Lambda}. \quad (4.4)$$

As coordenadas t e r estão definidas nos intervalos $-\infty \leq t \leq +\infty$ e $0 \leq r \leq +\infty$, enquanto que os domínios das coordenadas x^i dependem da topologia do buraco negro considerado. Além disso, tem-se $1 \leq i \leq n$, sendo que n determinará o número de dimensões do espaço-tempo, visto que $d = n + 2$.

Observa-se que, para r grande e constante, a métrica (4.1) reduz-se para a métrica de Minkowski $(n+1)$ -dimensional, e ainda que, para r e t constantes, tem-se um espaço

plano n -dimensional.

A métrica (4.1), além da singularidade coordenada em $r = r_h$, possui uma singularidade física em $r = 0$. Isso, porém, não é relevante para o presente trabalho, pois a região $r < r_h$ não é de interesse para a análise dos primeiros modos quase-normais. Assim, o sistema de coordenadas (t, r, x^i) pode ser usado para toda a região exterior ao horizonte, sendo que a coordenada radial r fica restrita ao intervalo $r_h < r < \infty$. Contudo, para facilitar a análise, procede-se uma mudança de modo a transformar o intervalo de variação da coordenada radial num intervalo finito. Isso pode ser feito por meio da transformação

$$u = \frac{r_h}{r}, \quad (4.5)$$

a qual implica em

$$f(u) = 1 - u^{n+1}. \quad (4.6)$$

Agora o horizonte de eventos do buraco negro está localizado em $u = 1$, e a fronteira do infinito espacial está em $u = 0$. Assim, $u \in (1, 0)$. Com essa nova coordenada radial, a métrica (4.1) torna-se

$$ds^2 = \frac{1}{u^2 R^2} \left[-f(u) dt^2 + \sum_{i=1}^n dx^i dx_i \right] + \frac{u^4 R^2}{f(u)} du^2. \quad (4.7)$$

Apesar de apresentarem simetrias diferentes, o buraco negro plano-simétrico é semelhante, em certos aspectos, ao buraco negro de Schwarzschild. Horowitz e Hubeny (2000) mostraram que, para buracos negros grandes, onde $r_h \gg R$, a região exterior ao horizonte de eventos da métrica de Schwarzschild-AdS torna-se aproximadamente plano-simétrica. Esse *background* possui uma simetria particular que permite reescalonar r_h através de uma transformação de coordenadas pura: $t = at'$, $x_i = ax'_i$, $r = r'/a$, onde a é uma constante. Isso tem conseqüências interessantes nas propriedades das freqüências dos modos quase-normais associadas com as perturbações de um buraco negro plano-simétrico, as quais poderão ser representadas como uma função homogênea de primeiro grau de seus parâmetros: $\omega(ar_h, ak) = a\omega(r_h, k)$, onde k é o número de onda. Assim, quando efetuado o cálculo das freqüências quase-normais para um dado r_h e para diferentes valores de k , essa propriedade implica na obtenção de $\omega(r_h, k)$ para todos os valores de r_h .

4.2 Equações para as quantidades invariantes de *gauge*

O objetivo agora é aplicar o formalismo invariante de *gauge* apresentado no Capítulo 3 às perturbações dos buracos negros plano-simétricos d -dimensionais. Para isso, basta relacionar as quantidades da métrica (4.1) com a forma genérica (3.23) e, então, seguir os procedimentos lá descritos. A comparação entre as equações (3.23), (3.24) e (4.7) fornece as relações

$$\bar{g}_{ab} dy^a dy^b = -\frac{1}{u^2 R^2} f(u) dt^2 + \frac{u^4 R^2}{f(u)} du^2, \quad (4.8)$$

$$\gamma_{ij}(x) dx^i dx^j = \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^n dx^i dx_i. \quad (4.9)$$

Além disso, observa-se que o sub-espaço \mathcal{K}^n tem curvatura nula, ou seja, tem-se que $K = 0$, uma vez que o *background* apresenta curvatura seccional nula e o espaço \mathcal{K}^n é plano.

De acordo com Kodama, Ishibashi e Seto (2000), as perturbações métricas são expandidas em harmônicos tensoriais, vetoriais e escalares, e a ortogonalidade desses setores permite tratá-los separadamente. A partir dessas expansões, obtêm-se as equações de perturbação gravitacional para uma métrica genérica. Nesta seção, substitui-se as quantidades relativas à métrica de um buraco negro plano-simétrico (4.7) naquelas equações e mostra-se que elas se reduzem a uma única equação diferencial ordinária de segunda ordem para cada classe de perturbação.

4.2.1 Perturbações tensoriais

Para obter a equação para as perturbações tensoriais, substitui-se as quantidades relativas à métrica de fundo (4.7) na equação de perturbação invariante de *gauge* (3.37). Isso é feito a partir das derivadas covariantes presentes em (3.37), que devem ser escritas em termos dos símbolos de Christoffel, onde o índice a , varia entre u e t . Os símbolos de Christoffel, uma vez determinados a partir das equações (3.1), devem ser substituídos pelos seus valores correspondentes à métrica (4.7).

Inspirando-se no trabalho de Kovtun e Starinets (2005) para rotular as funções, a transformada de Fourier da quantidade invariante de *gauge* H_T é representada em termos

da função independente do tempo $Z_3(u)$ ¹:

$$H_T(t, u) = \frac{1}{2} \int Z_3(u) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.10)$$

Conseqüentemente, $Z_3(u)$ também é uma quantidade invariante de *gauge*.

A expressão (4.10) é, então, substituída em (3.37). Da expressão resultante dessas substituições, realiza-se algumas manipulações algébricas que conduzem à seguinte equação de perturbação:

$$Z_3'' - \left[\frac{n + u^{n+1}}{uf} \right] Z_3' + \left[\frac{\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 f}{f^2} \right] Z_3 = 0, \quad (4.11)$$

onde (') representa derivadas em relação à coordenada u e f representa, e desse ponto em diante representará, a função horizonte. Os parâmetros adimensionais, frequência (\mathfrak{w}) e número de onda (\mathfrak{q}), presentes em (4.11), são definidos por

$$\mathfrak{w} = \frac{(n+1)\omega}{4\pi T}, \quad (4.12)$$

$$\mathfrak{q} = \frac{(n+1)k}{4\pi T}, \quad (4.13)$$

onde T é a temperatura de Hawking do buraco negro. A dependência das perturbações somente em termos desses parâmetros adimensionais está relacionada com a simetria particular do *background*, discutida no final da Seção 4.1.

A análise dos modos de perturbação tensorial obtidos a partir da (4.11) é feita no próximo capítulo.

4.2.2 Perturbações vetoriais

Para obter a equação de perturbação gravitacional vetorial, utiliza-se as equações invariantes de *gauge* (3.42) e (3.43), lembrando que $K = 0$.

Analisando a equação (3.42), percebe-se que ela apresenta um índice livre, logo dela obtém-se duas equações, isto é, uma para $a = u$ e outra para $a = t$, com b variando sobre u e t . Já a equação (3.43), observando-se o somatório sobre o índice a que varia entre u e t , resultará em apenas uma equação. Novamente, inspirando-se no trabalho de Kovtun e Starinets (2005), a quantidade invariante de *gauge* F_a , presente em (3.42), é

¹Neste capítulo, o sinal escolhido para a exponencial complexa da transformada de Fourier é contrário àquele utilizado no Capítulo 2.

reescrita da forma $F_a = \tilde{F}_a/u$, e a quantidade \tilde{F}_a é representada pela transformada de Fourier

$$\tilde{F}_a(t, u) = \int \tilde{F}_a(u) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.14)$$

Como no caso das perturbações tensoriais, substitui-se em (3.42) e em (3.43), as derivadas covariantes em termos dos símbolos de Christoffel, os quais são obtidos a partir da expressão (3.1) com a métrica de fundo (4.7). A relação (4.14) também é substituída naquelas equações. Com isso, depois de algumas manipulações, resultam as seguintes equações:

$$\tilde{F}'_t + \frac{i(k^2 f - \omega^2)}{\omega} \tilde{F}_u = 0; \quad (4.15)$$

$$\tilde{F}''_t - i\omega \left(\tilde{F}'_u - \frac{n}{u} \tilde{F}_u \right) - \frac{k^2}{f} \tilde{F}_t = 0; \quad (4.16)$$

$$\tilde{F}'_u - \frac{i\omega}{f^2} \tilde{F}_t - \frac{n + u^{n+1}}{uf} \tilde{F}_u = 0. \quad (4.17)$$

Analisando as equações acima, percebe-se que a terceira equação é dependente das duas primeiras e, por isso, pode-se obter a equação de perturbação vetorial fundamental somente a partir de (4.15) e (4.16). Substituindo \tilde{F}_u de (4.15) em (4.16), e renomeando a quantidade invariante de *gauge* $\tilde{F}_t = Z_1$, encontra-se

$$Z''_1 - \left[\frac{n(\mathfrak{q}^2 f - \mathfrak{w}^2)f + uf'\mathfrak{w}^2}{uf(\mathfrak{q}^2 f - \mathfrak{w}^2)} \right] Z'_1 + \left[\frac{\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 f}{f^2} \right] Z_1 = 0. \quad (4.18)$$

Essa é a equação fundamental para as perturbações métricas vetoriais dos buracos negros plano-simétricos que será analisada no próximo capítulo.

4.2.3 Perturbações escalares

Analogamente ao que foi feito no caso das perturbações tensoriais e vetoriais, para obter a equação de perturbação gravitacional escalar, substitui-se as quantidades relativas à métrica (4.7) nas equações de evolução para tais perturbações. No presente caso, essas equações são (3.55)-(3.58) (com $K = 0$).

Percebe-se agora que a equação (3.55) contém dois índices livres, o que implicaria, a princípio, em quatro equações, uma para cada combinação diferente dos índices a e b , os quais assumem os valores $a, b = u, t$. Porém, devido ao fato da quantidade invariante de *gauge* F_{ab} ser simétrica, tem-se apenas três equações independentes. Para a equação (3.56), tem-se apenas um índice livre, implicando em duas equações, uma para $a = u$ e

outra para $a = t$. As equações (3.57) e (3.58) não apresentam índices livres, de forma que cada uma resultará em uma única equação. Assim, o conjunto de equações acopladas (3.55)–(3.58) fornece um sistema de sete equações, que são escritas explicitamente no Apêndice C. Analisando esse conjunto de equações, observa-se que nem todas são independentes. De fato, todas elas podem ser derivadas de um sistema de quatro equações: (C.2), (C.3), (C.4) e (C.5). A partir destas é, então, possível obter uma única equação característica das perturbações escalares. A fim de facilitar o processo de cálculo envolvido na obtenção de tal equação, seguindo Kodama e Ishibashi (2003), procurou-se reduzir as equações obtidas e apresentadas no Apêndice C em equações diferenciais apenas de primeira ordem. Para tornar isso possível, Kodama e Ishibashi (2003) sugeriram três novas variáveis, X , Y e Z , relacionadas às atuais quantidades invariantes de *gauge* por

$$F = -\frac{(X + Y)u^{n-2}}{2n}, \quad (4.19)$$

$$F_{tt} = -\frac{[(n-1)X - Y]fu^{n-4}}{n}, \quad (4.20)$$

$$F_{uu} = \frac{[-X + (n-1)Y]u^{n-4}}{nf}, \quad (4.21)$$

$$F_{ut} = -\frac{Zu^{n-2}}{f}. \quad (4.22)$$

Persistindo no objetivo de encontrar uma forma mais simples para as equações de perturbação, utiliza-se a transformação de Fourier com relação a coordenada temporal t das funções X , Y e Z definidas acima. Além disso, redefine-se a componente de Fourier proporcional a $e^{i\omega t}$ de cada função pelas substituições

$$X \longrightarrow X, \quad Y \longrightarrow Y, \quad Z \longrightarrow -i\omega\tilde{Z}, \quad (4.23)$$

onde a última relação exige $\omega \neq 0$.

Para encontrar o novo sistema de equações em termos das variáveis X , Y e \tilde{Z} , substitui-se as relações (4.19), (4.20), (4.21) e (4.22) nas equações do Apêndice C. Assim, as equações para as perturbações métricas escalares reduzem-se a

$$Y' = \frac{2 + (n-1)u^{n+1}}{2uf}(Y - X) - \frac{u^2\omega^2}{f^2}\tilde{Z}, \quad (4.24)$$

$$X' = \frac{n-2}{u}X - \frac{(n+1)u^n}{f}Y + \frac{u^2(\omega^2 - k^2f)}{f^2}\tilde{Z}, \quad (4.25)$$

$$\tilde{Z}' = X, \quad (4.26)$$

$$\left\{ \omega^2 + \frac{u^{n-1}}{2} \left[n(n+1) - \frac{(n^2-1)u^{n+1}}{2} \right] \right\} X + \left[\omega^2 - k^2 f + \frac{(n+1)^2 u^{2n}}{4} \right] Y - u \left\{ n\omega^2 - \left[1 + \frac{(n-1)u^{n+1}}{2} k^2 \right] \right\} \tilde{Z} = 0, \quad (4.27)$$

com $\omega \neq 0$.

A equação (4.24) é obtida das equações (C.7) e (C.4). A equação (4.25), é obtida de (C.7) e (C.3), com Y' substituído a partir da equação (4.24). Das equações (C.7) e (C.5), encontra-se (4.26). A equação (4.27) é obtida através das equações (C.7) e (C.2), juntamente com todos os resultados anteriores.

Entre todas as combinações possíveis de X , Y e \tilde{Z} que podem ser usadas como variável fundamental das perturbações escalares, adota-se aqui a função Z_2 , definida por

$$Z_2 = \frac{u^{n-2} [n(u^{n+1} - 2) - u^{n+1}]}{2n} X - \frac{(n+1)u^{2n-1}}{2n} Y, \quad (4.28)$$

a qual é uma quantidade invariante de *gauge*. A escolha de Z_2 segue a indicação de Kovtun e Starinets (2005), uma vez que utilizando uma variável análoga a essa em cinco dimensões, os autores obtiveram modos quase-normais que correspondiam aos pólos da função de Green na CFT dual e apresentavam comportamento hidrodinâmico. Usando essa quantidade e as equações (4.24)–(4.27), mostra-se que Z_2 obedece a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$Z_2'' - \left[\frac{\mathfrak{q}^2 b(u) - 2n \mathfrak{w}^2 c(u)}{uf a(u)} \right] Z_2' + \left[\frac{\mathfrak{q}^4 d(u) + 2n \mathfrak{w}^4 + \mathfrak{q}^2 e(u)}{f^2 a(u)} \right] Z_2 = 0, \quad (4.29)$$

onde

$$\begin{aligned} a(u) &= \mathfrak{q}^2 [u^{n+1}(n-1) - 2] + 2n \mathfrak{w}^2, \\ b(u) &= n^2 [2(1 - u^{2(n+1)}) - u^{n+1}(1+f) - 3u^{n+1}], \\ c(u) &= n + u^{n+1}, \\ d(u) &= u^{n+1} f + n[2 - u^{n+1}(3 - u^{n+1})], \\ e(u) &= -\{(n-1)(n^2+1)u^{2n} f + [4n + (1-3n)u^{n+1}] \mathfrak{w}^2\}, \end{aligned}$$

sendo esta a equação de perturbação gravitacional escalar, invariante de *gauge*, que será estudada no próximo capítulo.

5 CÁLCULO DOS MODOS QUASE-NORMAIS

As primeiras tentativas de calcular frequências quase-normais de buracos negros datam da década de 70. Mais especificamente, iniciaram com o estudo da radiação gravitacional de uma partícula caindo num buraco negro de Schwarzschild, realizado por Davis et al. (1971). Atualmente, existem vários métodos que podem ser utilizados para calcular modos quase-normais, tais como o método das frações continuadas e o método JWKB. Para uma breve revisão, ver Nollert (1999).

A partir do desenvolvimento da correspondência AdS/CFT, alguns métodos numéricos foram desenvolvidos especialmente para espaços-tempos AdS; dentre eles, o método de Horowitz e Hubeny (2000), o qual é usado no desenvolvimento deste trabalho. Por outro lado, cálculos analíticos somente são possível em casos especiais, ou através de aproximações especiais, como o limite hidrodinâmico, que também é usado como um teste para a correspondência AdS/CFT.

Quando a geometria é assintoticamente plana, como já comentado no Capítulo 2, existem condições de contorno naturais: ondas entrando no horizonte de eventos e saindo no infinito. Para buracos negros assintoticamente AdS, a escolha da condição no horizonte deve continuar sendo a mesma do espaço assintoticamente plano, porém a condição de contorno natural a ser imposta no infinito é a de onda nula, uma vez que não há propagação de ondas para o infinito e novamente não se quer que ondas vindas de lá voltem a perturbar o buraco negro. Nesse sentido, as variáveis Z_1, Z_2 e Z_3 foram escolhidas para que, impondo condições de Dirichlet no infinito, os modos quase-normais correspondessem aos pólos das funções de Green na CFT dual, seguindo a prescrição de Son e Starinets (2002).

Neste capítulo, apresentam-se os procedimentos realizados no cálculo analítico e numérico dos modos quase-normais, a descrição do método de Horowitz-Hubeny e os resultados obtidos para cada setor de perturbação, juntamente com uma breve análise em cada caso. Os cálculos analíticos são realizados para um número de dimensões arbitrário $d = n + 2$. Para o cálculo numérico, escolheram-se algumas dimensões ($d = 4, 5$ e 6), dentro de cada setor de perturbação. A escolha de apenas três dimensões foi feita, em primeiro lugar, para poder comparar com os resultados existentes na literatura e, em segundo lugar, devido às nossas limitações computacionais.

5.1 Cálculo analítico dos modos hidrodinâmicos

Sabe-se que, para grandes comprimentos de onda e baixas frequências, o comportamento de qualquer teoria interagente pode ser bem descrito através da mecânica dos fluidos, a hidrodinâmica (LANDAU; LIFSHITZ, 1987). Esse enunciado não foi, e talvez nunca poderá ser, rigorosamente demonstrado para todas as teorias, mas é fortemente sustentado pela intuição física que se tem acerca dos sistemas macroscópicos.

As equações de perturbação (4.11), (4.18) e (4.29) não podem ser resolvidas exatamente para todos os \mathfrak{w} e \mathfrak{q} . No entanto, quando ω e k são muito menores que a temperatura T , é possível encontrar soluções analíticas para tais equações na forma de uma série de potências em \mathfrak{w} e \mathfrak{q} , e reter somente os termos até primeira ordem, sendo esta condição reconhecida como o limite hidrodinâmico ($\mathfrak{w} \ll 1$, $\mathfrak{q} \ll 1$).

O procedimento consiste, inicialmente, em determinar o comportamento singular das funções de perturbação $Z_1(u)$, $Z_2(u)$ e $Z_3(u)$ nas vizinhanças do horizonte de eventos. Então, para cada um dos setores de perturbação, buscam-se soluções na forma de potências da função horizonte: $f^\nu(u)$, onde ν é uma constante a ser determinada. Tomando o limite em que $u \rightarrow 1$ nos três casos, encontra-se que as equações são satisfeitas se

$$\nu = \pm \frac{i\mathfrak{w}}{n+1}. \quad (5.1)$$

A solução negativa corresponde a ondas que se deslocam para o infinito, isto é, saindo do horizonte de eventos; a solução positiva corresponde a ondas que caem para o interior do buraco negro, ou seja, entrando no horizonte de eventos. Classicamente, somente ondas caindo para o buraco negro devem estar presentes nas vizinhanças do horizonte. Isso significa que, para o cálculo dos modos quase-normais, deve-se ignorar a solução com ν negativo, e escolher a solução com o sinal positivo. Então, para dar prosseguimento aos cálculos, utiliza-se o termo $f^{i\mathfrak{w}/(n+1)}$. Para separar o termo dominante no horizonte de eventos, é conveniente realizar uma mudança de variáveis da forma

$$Z_p = f^{i\mathfrak{w}/(n+1)} \mathcal{F}_p, \quad p = 1, 2, 3, \quad (5.2)$$

onde as quantidades \mathcal{F}_p também são invariantes de *gauge*. Essas funções são, então, substituídas nas respectivas equações (4.11), (4.18) e (4.29), resultando em uma nova equação diferencial de segunda ordem para cada uma das quantidades \mathcal{F}_p .

O próximo passo é resolver perturbativamente cada equação, expandindo cada \mathcal{F}_p

em série de potências de \mathfrak{w} na forma

$$\mathcal{F}_p(u) = \mathcal{F}_p^{(0)}(u) + i \mathfrak{w} \mathcal{F}_p^{(1)}(u) + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2), \quad (5.3)$$

desprezando os termos de segunda e mais altas ordens em \mathfrak{w} e \mathfrak{q} e considerando que $\mathfrak{w} \sim \mathfrak{q}$. Os coeficientes da expansão acima podem, em alguns casos, depender simultaneamente de \mathfrak{w} e \mathfrak{q} e/ou de \mathfrak{w}^2 e \mathfrak{q}^2 , desde que a combinação entre essas quantidades seja de ordem zero.

O procedimento descrito acima, aplicado a cada tipo de perturbação, é apresentado nas próximas seções.

5.1.1 Limite hidrodinâmico das perturbações tensoriais

Procedendo conforme descrito na seção anterior, encontra-se a seguinte equação para $\mathcal{F}_3(u)$:

$$\left[\mathcal{F}_3''^{(0)} - \frac{n + u^{n+1}}{uf} \mathcal{F}_3'^{(0)} \right] + i \mathfrak{w} \left[\mathcal{F}_3''^{(1)} - \frac{n + u^{n+1}}{uf} \mathcal{F}_3'^{(1)} - \frac{2u^n}{f} \mathcal{F}_3'^{(0)} \right] + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2) = 0. \quad (5.4)$$

A equação relativa ao termo de ordem zero em \mathfrak{w} , apresentada acima, tem como solução

$$\mathcal{F}_3^{(0)}(u) = C_2 \left[\frac{1}{n+1} \ln f \right] + C_3, \quad (5.5)$$

onde C_2 e C_3 são constantes a serem determinadas. A escolha da condição de onda entrando no horizonte de eventos exige que a função $\mathcal{F}_3^{(0)}(u)$ seja bem comportada em $u = 1$, o que conduz a $C_2 = 0$. Assim,

$$\mathcal{F}_3^{(0)}(u) = C_3. \quad (5.6)$$

O termo de primeira ordem em \mathfrak{w} na equação (5.4) leva a uma equação diferencial de segunda ordem para $\mathcal{F}_3^{(1)}(u)$, cujo termo de fonte, proporcional à $\mathcal{F}_3'^{(0)}$, é nulo de acordo com a condição (5.6). A equação resultante tem como solução

$$\mathcal{F}_3^{(1)}(u) = C_4 \left[\frac{1}{n+1} \ln f \right] + C_5. \quad (5.7)$$

Novamente, exige-se que $\mathcal{F}_3^{(1)}(u)$ seja bem comportada em $u = 1$, o que implica em $C_4 = 0$. Além disso, a condição de contorno de onda entrando no horizonte de eventos exige que $\mathcal{F}_3(1)$ seja uma constante independente de \mathfrak{w} , o que leva a $\mathcal{F}_3^{(1)}(1) = 0$. Essa

condição, por sua vez, implica em $C_5 = 0$. Desse modo, tem-se $\mathcal{F}_3 = C_3 + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2)$ e, conseqüentemente,

$$Z_3 = C_3 f^{i\mathfrak{w}/(n+1)} [1 + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2)], \quad (5.8)$$

onde C_3 é uma constante de normalização.

Impondo a condição de contorno de Dirichlet em $u = 0$, não se encontram soluções de $Z_3(0) = 0$ compatíveis com a hipótese $\mathfrak{w}^2 \ll 1$. Isso é consistente com as expectativas da teoria hidrodinâmica da não existência de singularidades para as perturbações tensoriais (KOVTON; STARINETS, 2005).

5.1.2 Limite hidrodinâmico das perturbações vetoriais

Aplicando aqui os mesmos procedimentos da seção anterior, espera-se encontrar o modo quase-normal vetorial correspondente ao modo hidrodinâmico de cisalhamento. Então, depois das manipulações apropriadas, encontra-se

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathcal{F}_1^{(0)} + \left[\frac{(n+1)u^n}{f} g(u) - \frac{n}{u} \right] \mathcal{F}_1^{\prime(0)} \right\} + i\mathfrak{w} \left\{ \mathcal{F}_1^{\prime(1)} + \left[\frac{(n+1)u^n}{f} g(u) + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n}{u} \right] \mathcal{F}_1^{\prime(1)} - \frac{2u^n}{f} \mathcal{F}_1^{\prime(0)} - \frac{(n+1)u^{2n}}{f^2} [1 + g(u)] \mathcal{F}_1^{(0)} \right\} + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2) = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

com

$$g(u) = \frac{\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{q}^2 f - \mathfrak{w}^2}.$$

Analogamente ao caso das perturbações tensoriais, o termo de ordem zero em \mathfrak{w} de (5.9) produz uma equação diferencial de segunda ordem para a função $\mathcal{F}_1^{(0)}$, cuja solução geral é dada por:

$$\mathcal{F}_1^{(0)} = -\frac{C_2}{(n+1)} \left[1 - f + \ln \left(\frac{\mathfrak{q}^2 f}{\mathfrak{w}^2} \right) \right] + C_1. \quad (5.10)$$

A exigência de que $\mathcal{F}_1^{(0)}(u)$ seja bem comportada em $u = 1$, impõe a escolha $C_2 = 0$. Logo,

$$\mathcal{F}_1^{(0)} = C_1. \quad (5.11)$$

Além disso, a partir do termo de primeira ordem em \mathfrak{w} , obtém-se também uma equação diferencial de segunda ordem para $\mathcal{F}_1^{(1)}$, cuja solução é

$$\mathcal{F}_1^{(1)} = -\frac{(C_1 + C_4)}{(n+1)} \ln \left(\frac{\mathfrak{q}^2 f}{\mathfrak{w}^2} \right) - \left[\frac{\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 f} C_1 + C_4 \right] \frac{1-f}{(n+1)} + C_5. \quad (5.12)$$

A condição de que não deve existir onda saindo do horizonte de eventos do buraco negro, exige que C_4 seja igual a $-C_1$, enquanto que a exigência de que $\mathcal{F}_1^{(1)}(1) = 0$ conduz a

$C_5 = 0$. Substituindo esses resultados em (5.12), obtém-se

$$\mathcal{F}_1^{(1)} = -\frac{\mathfrak{q}^2 f}{\mathfrak{w}^2} \frac{C_1}{(n+1)}, \quad (5.13)$$

e, então,

$$Z_1 = C_1 f^{i\mathfrak{w}/(n+1)} \left[1 - \frac{i \mathfrak{q}^2 f}{(n+1) \mathfrak{w}} + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2) \right], \quad (5.14)$$

onde C_1 é uma constante de normalização.

A condição de contorno de Dirichlet no infinito espacial, $Z_1(0) = 0$, implica na seguinte relação de dispersão:

$$\mathfrak{w} = \frac{i \mathfrak{q}^2}{(n+1)} + \mathcal{O}(\mathfrak{q}^3). \quad (5.15)$$

Utilizando as relações (4.12) e (4.13), pode-se escrever essa última relação na forma

$$\omega = \frac{i}{4\pi T} k^2 + \mathcal{O}(k^3). \quad (5.16)$$

Com base em argumentos hidrodinâmicos gerais (FETTER; WALECKA, 1980) espera-se que uma perturbação vetorial (transversal) apresente um modo puramente amortecido, cuja relação de dispersão é dada por

$$\omega = iDk^2, \quad (5.17)$$

onde D é uma constante de difusão com dimensão de comprimento. Sendo assim, o resultado encontrado em (5.16) concorda com as expectativas da hidrodinâmica, e essa frequência quase-normal pode ser interpretada como a relação de dispersão para o modo de cisalhamento, com a constante de difusão sendo dada por $D = 1/4\pi T$.

É importante salientar que o resultado (5.16) foi obtido a partir da equação fundamental de perturbação vetorial em $d = n + 2$ dimensões e, além disso, apresenta concordância com os cálculos encontrados na literatura para $d = 4$ e 7 (HERZOG, 2002) e $d = 5$ (POLICASTRO; SON; STARINETS, 2002a).

5.1.3 Limite hidrodinâmico das perturbações escalares

Para investigar o limite hidrodinâmico das perturbações escalares, aplica-se o procedimento descrito anteriormente, obtendo-se a seguinte equação para $\mathcal{F}_2(u)$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathcal{F}_2''^{(0)} + \frac{u^n t(u)}{fr(u)} \mathcal{F}_2'^{(0)} + \frac{u^{2n}}{fr(u)} (n-1)(n+1)^2 \mathcal{F}_2^{(0)} \right\} + \\ & + i\mathfrak{w} \left\{ \mathcal{F}_2''^{(1)} - \frac{2u^n}{fr(u)} \left[(n-1)u^{n+1} + 2n \left(\frac{\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{q}^2} - 1 \right) \right] \mathcal{F}_2'^{(0)} + \right. \\ & \left. + \frac{u^n t(u)}{fr(u)} \mathcal{F}_2'^{(1)} + \frac{2u^{2n}}{fr(u)} (n^2 - 1) \mathcal{F}_2^{(0)} + \frac{u^{2n}}{fr(u)} (n-1)(n+1)^2 \mathcal{F}_2^{(1)} \right\} + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2) = 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde, para simplificar a equação, introduziu-se os coeficientes

$$\begin{aligned} r(u) &= (n-1)u^{n+1} + 2n \left(\frac{\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{q}^2} - 1 \right), \\ t(u) &= 3n(1-n) + 2 \left(1 - n \frac{\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{q}^2} \right) - (n+1 - 2n^2)u^{1+n} - 2n^2 u^{-(n+1)} \left(\frac{\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{q}^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Do termo de ordem zero em \mathfrak{w} na equação (5.18), obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem para $\mathcal{F}_2^{(0)}$. Uma vez resolvida essa equação, e após impor a condição de contorno em $u = 1$, encontra-se

$$\mathcal{F}_2^{(0)} = C_2 \left[2 - 2n \frac{\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{q}^2} + (n-1)(1-f) \right], \quad (5.20)$$

onde C_2 é uma constante arbitrária.

A solução para $\mathcal{F}_2^{(1)}$, obtida a partir da equação proveniente do termo primeira ordem em \mathfrak{w} , e que satisfaz a condição de contorno no horizonte é

$$\mathcal{F}_2^{(1)} = \frac{4C_2(n-1)f}{n+1}, \quad (5.21)$$

onde C_2 é a mesma constante introduzida na solução para $\mathcal{F}_2^{(0)}$, expressa na equação (5.20).

Por meio dos resultados (5.20) e (5.21), e usando as relações (5.2) e (5.3) com $p = 2$, encontra-se

$$Z_2 = C_2 f^{i\omega/(n+1)} \left\{ \left[2 - 2n \frac{\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{q}^2} + (n-1)(f-1)u^{n+1} \right] + \frac{4i\mathfrak{w}(n-1)f}{(n+1)} + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^2) \right\}, \quad (5.22)$$

onde C_2 agora faz o papel de constante de normalização.

Aplicando na função Z_2 da equação anterior, a condição de contorno de Dirichlet em $u = 0$, e considerando o limite hidrodinâmico ($\mathfrak{w}, \mathfrak{q} \ll 1$), obtém-se

$$\mathfrak{w} = \pm \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{n}} + \frac{i(n-1)\mathfrak{q}^2}{n(n+1)} + \mathcal{O}(\mathfrak{q}^3), \quad (5.23)$$

que, pelas relações (4.12) e (4.13), torna-se

$$\omega = \pm \frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{i(n-1)k^2}{n(4\pi T)} + \mathcal{O}(k^3). \quad (5.24)$$

Para a teoria de campos invariante conforme o traço do tensor energia-momento é nulo, de modo que a relação de dispersão prevista para as perturbações escalares (longitudinais), no limite hidrodinâmico, corresponde a um modo de onda sonora, dado por

$$\omega = u_s k + \frac{i(n-1)}{n} D k^2, \quad (5.25)$$

onde u_s é a velocidade do som, dada por $u_s = 1/\sqrt{n}$. A constante D é a constante de difusão já presente no modo de cisalhamento (5.17). O valor encontrado para essa constante em (5.24), $D = 1/4\pi T$, concorda com aquele obtido no limite hidrodinâmico das perturbações vetoriais, o que mostra que o resultado (5.24) está de acordo com a hidrodinâmica. Além disso, esse resultado está de acordo também com os cálculos encontrados na literatura para $d = 4, 7$ (HERZOG, 2003) e $d = 5$ (POLICASTRO; SON; STARINETS, 2002b).

5.2 Cálculo numérico dos modos quase-normais

Foi utilizado o método de Horowitz e Hubeny (2000) para efetuar o cálculo dos modos quase-normais gravitacionais de buracos negros plano-simétricos anti-de Sitter em algumas dimensões. Para cada setor de perturbação, foram calculados os primeiros cinco modos quase-normais, devido ao fato de que eles são os modos mais importantes para a correspondência AdS/CFT, uma vez que fornecem o tempo de termalização na teoria de campos da fronteira.

As equações de perturbação invariantes de *gauge* (4.11), (4.18) e (4.29) são equações diferenciais ordinárias com alguns pontos singulares regulares, dos quais um corresponde ao horizonte de eventos do buraco negro ($u = 1$) e outro à fronteira do espaço-tempo ($u = 0$). Para essas equações, têm-se duas soluções locais nas vizinhanças do horizonte, que representam ondas saindo e entrando no buraco negro, conforme verificado através dos cálculos analíticos realizados na primeira seção deste capítulo.

Seguindo o método de Horowitz-Hubeny, expandem-se as variáveis de perturbação numa série de potências em torno do horizonte ($u = 1$) e impõe-se a condição de contorno de que existem somente ondas entrando no horizonte. Ou seja, expande-se as funções

$Z_p(u)$, $p = 1, 2, 3$, na forma de uma série de Fröbenius

$$Z_p(u) = (1 - u)^{i\mathfrak{w}/(n+1)} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})(1 - u)^j. \quad (5.26)$$

Conforme o procedimento padrão na solução de equações diferenciais em série de potências, os coeficientes a_j são determinados substituindo a equação (5.26) nas equações diferenciais de cada setor das perturbações. Uma vez que as equações diferenciais são lineares e de segunda ordem, e dado que uma das condições de contorno já é satisfeita, resulta que os coeficientes obedecem uma relação de recorrência com um termo livre: o coeficiente a_0 , o qual, por simplicidade, é considerado igual a unidade.

Para calcular os modos quase-normais, impõe-se a condição de contorno de Dirichlet em $u = 0$, obtendo uma equação que é dada por uma soma infinita,

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(\mathfrak{w}, \mathfrak{q}) = 0, \quad (5.27)$$

e, então, procura-se pelas raízes desta equação. No processo de cálculo numérico, trunca-se a série depois de um grande número de termos e buscam-se os zeros da soma parcial correspondente. A precisão dos resultados é, então, verificada pelo cálculo da variação relativa entre os zeros apresentados a cada duas somas parciais sucessivas; a busca cessa toda vez que se tenha a precisão desejada, que neste trabalho, corresponde a seis dígitos decimais. As frequências quase-normais assim determinadas são decompostas em partes reais e imaginárias,

$$\mathfrak{w} = \text{Re}(\mathfrak{w}) + i \text{Im}(\mathfrak{w}). \quad (5.28)$$

Os resultados numéricos podem ser divididos em dois grupos: modos hidrodinâmicos e modos comuns. Os modos hidrodinâmicos estão associados àquelas frequências quase-normais que, no limite hidrodinâmico, apresentam o comportamento característico de um modo de cisalhamento, equação (5.17), ou de um modo de onda sonora, equação (5.25). Os modos comuns são todos os demais modos quase-normais.

5.2.1 Modos quase-normais tensoriais

Nesta seção, apresentam-se os resultados obtidos a partir do procedimento numérico descrito acima, aplicado aos modos tensoriais de buracos negros planos em $d = 5$ e 6 dimensões. Conforme já comentado na Seção 3.5, as perturbações do tipo tensorial não

se manifestam em espaços-tempos quadridimensionais ($d = 4$); isso se verifica por meio das propriedades dos harmônicos tensoriais (ver Apêndice B), uma vez que $\tilde{T}_{ij} \equiv 0$ para $n = 2$ (MUKOHYAMA, 2000).

a) Modos tensoriais comuns

Na Tabela 5.1, listam-se os valores obtidos para as frequências dos cinco primeiros modos quase-normais comuns, com $k = 0$ e $d = 5$, em comparação com os resultados de Starinets (2002).

Tabela 5.1: Os primeiros modos quase-normais tensoriais com número de onda nulo para um buraco negro plano em cinco e seis dimensões.

n	$d = 5$				$d = 6$	
	Neste trabalho		Starinets (2002)		Neste trabalho	
	Im($\omega/\pi T$)	Re($\omega/\pi T$)	Im($\omega/\pi T$)	Re($\omega/\pi T$)	Im($\omega/\pi T$)	Re($\omega/\pi T$)
1	2,74668	3,11945	2,74668	3,11945	4,31555	3,97394
2	4,76357	5,16952	4,76357	5,16952	7,26024	7,33151
3	6,76957	7,18793	6,76957	7,18793	9,73081	10,5115
4	8,77248	9,19720	8,77248	9,19720	11,9631	13,5440
5	10,7742	11,2027	10,7742	11,2027	14,0584	16,4651

Os modos quase-normais apresentados no trabalho de Starinets (2002) são soluções da equação para um campo escalar sem massa, minimamente acoplado, no espaço-tempo de um buraco negro plano em cinco dimensões. O fato de que as equações de perturbação gravitacionais tensoriais coincidem com a equação para o campo escalar sem massa é apontado por Kovtun, Son e Starinets (2005).

Por meio dos resultados presentes na Tabela 5.1, percebe-se que a equação de perturbação gravitacional (4.11) para $n = 3$, através do método de Horowitz e Hubeny (2000), reproduz os resultados presentes na literatura com boa precisão. Foram determinados também os primeiros cinco modos quase-normais com número de onda nulo para um buraco negro em seis dimensões, com $k = 0$, cujos resultados obtidos estão na Tabela 5.1. Para este caso, não se encontrou resultados na literatura para fins de comparação.

Nos gráficos das Figuras 5.1 e 5.2, apresentam-se as relações de dispersão para

as partes reais e imaginárias das frequências quase-normais em cinco e seis dimensões, respectivamente.

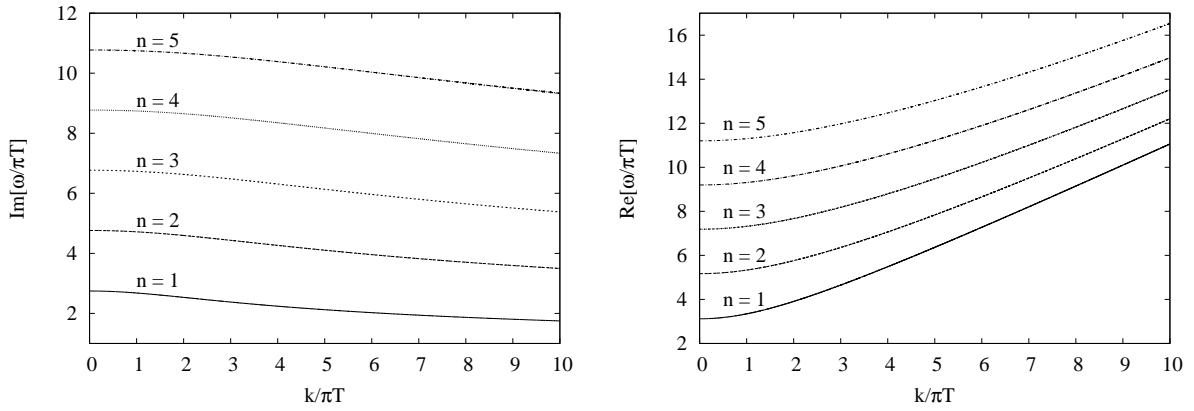


Figura 5.1: Relações de dispersão para os primeiros modos tensoriais em cinco dimensões.

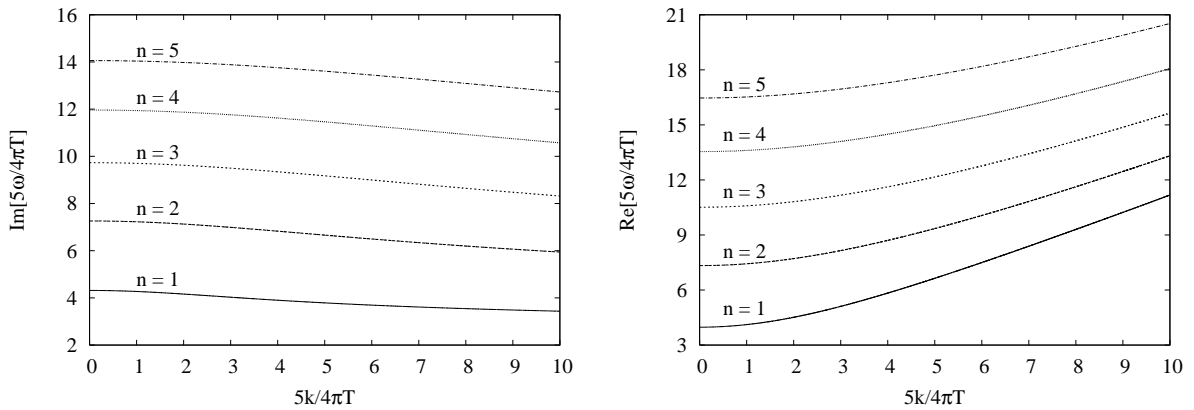


Figura 5.2: Relações de dispersão para modos tensoriais em seis dimensões.

O que se observa na parte imaginária das relações de dispersão é que as curvas apresentam um comportamento que, a princípio, parece ser independente do número de dimensão. Para uma temperatura finita, percebe-se que a parte imaginária das frequências quase-normais decresce conforme o número de onda aumenta. Realizando um estudo mais detalhado com o primeiro modo comum, pode-se observar que essas $\text{Im}[(d-1)\omega/4\pi T]$ tendem a zero conforme o número de onda tende ao infinito, como observado na Figura 5.3. Esse comportamento se verifica para os demais modos quase-normais, porém, quanto maior o n e maior o número de dimensões, mais lentamente se dá essa convergência.

De acordo com a correspondência AdS/CFT, perturbar um buraco negro é equivalente a perturbar um estado térmico na CFT, e o decaimento da perturbação descreve o retorno desse estado ao equilíbrio térmico. Isso nos permite observar que o tempo de

termalização [$\tau = 1/\text{Im}(\omega)$] tende ao infinito conforme o número de onda k aumenta e que a aproximação ao equilíbrio térmico se dá mais rapidamente para os modos quase-normais mais altos. Dito de outra forma, para um número de onda finito, as excitações não decaem no caso de uma CFT a temperatura nula.

Analisando a parte real das relações de dispersão, percebe-se que todas as curvas apresentam o mesmo comportamento: aumentam conforme o número de onda aumenta, porém observa-se que as curvas tendem a uma determinada assíntota. No gráfico da direita na Figura 5.3, observa-se que as curvas tendem assintoticamente à linha $\text{Re}(\omega) = \eta$ pelo lado superior, conforme o número de onda “normalizado” tende ao infinito. Nesse gráfico, a relação de dispersão superior refere-se a $d = 6$, e a inferior a $d = 5$, ao passo que a linha $\text{Re}(\omega) = \eta$ é representada por uma linha reta pontilhada. Esse comportamento assintótico é previsto pela CFT e está associado a um regime conhecido como sem colisões. Para mais detalhes ver Herzog et al. (2007).

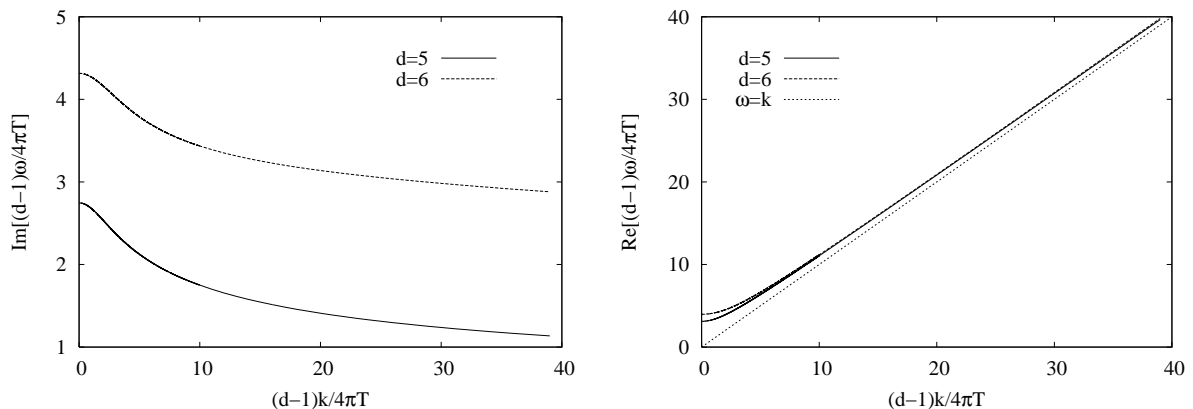


Figura 5.3: Relações de dispersão para o primeiro modo tensorial em cinco e seis dimensões para maiores valores de k .

O comportamento descrito acima se verifica para os demais modos e dimensões, sendo que, quanto maior a dimensão e o número quântico principal \mathbf{n} , mais lentamente a relação de dispersão se aproxima de $\text{Re}(\omega) = \eta$. Em cinco dimensões, esse mesmo comportamento já havia sido obtido por Starinets (2002), no estudo de perturbações de um campo escalar sem massa.

b) Modos tensoriais hidrodinâmicos

Não foram encontrados modos hidrodinâmicos para as perturbações tensoriais. Esse resultado já era esperado, tendo em vista os cálculos analíticos apresentados na Subseção 5.1.1.

5.2.2 Modos quase-normais vetoriais

Para as perturbações gravitacionais do tipo vetorial, além dos modos comuns, cujas frequências possuem partes reais representando as verdadeiras frequências de oscilação e partes imaginárias representando o amortecimento, existe um modo puramente amortecidos, cuja frequência é um número puramente imaginário, caracterizando o amortecimento das perturbações sem oscilação.

Nesta seção, apresentam-se os resultados numéricos para os modos quase-normais vetoriais em quatro, cinco e seis dimensões. São apresentadas relações de dispersão $\text{Re}(\mathfrak{w}) \times \mathfrak{q}$ e $\text{Im}(\mathfrak{w}) \times \mathfrak{q}$ para os primeiros modos comuns, bem como para o modo puramente amortecido.

a) Modos vetoriais comuns

Na Tabela 5.2, apresentam-se os resultados obtidos para os primeiros cinco modos quase-normais comuns para $d = 4$ e $\mathfrak{q} = 0,02$. Essa mesma tabela contém os resultados obtidos por Miranda e Zanchin (2006). A equação de perturbação utilizada por esses autores é diferente da equação (4.18), visto que a variável fundamental escolhida por eles é diferente de Z_1 . Apesar dessas diferenças, os resultados obtidos em ambas formulações apresentam uma concordância muito boa, mostrando que a equação de perturbação vetorial (4.18), para $n = 3$, reproduz os resultados já esperados.

Na Tabela 5.3, têm-se os resultados obtidos para os cinco modos vetoriais comuns, calculados para um buraco negro em cinco dimensões, com $\mathfrak{q} = 2,00$, comparados com os resultados de Kovtun e Starinets (2005). No entanto, Kovtun e Starinets (2005) utilizaram uma frequência normalizada $\mathfrak{w} = \omega/2\pi T$ diferente daquela definida neste trabalho, $\mathfrak{w} = \omega/\pi T$; logo a comparação somente torna-se possível quando os resultados de Kovtun e Starinets (2005) são multiplicados por um fator dois.

Tabela 5.2: Modos quase-normais para um buraco negro plano em quatro dimensões, calculados com $\mathfrak{q} = 0,02$.

n	Neste trabalho		Miranda e Zanchin (2006)	
	Im($3\omega/4\pi T$)	Re($3\omega/4\pi T$)	Im($3\omega/4\pi T$)	Re($3\omega/4\pi T$)
1	2,66384	1,84948	2,66384	1,84948
2	4,91641	3,16130	4,91641	3,16130
3	7,16753	4,46438	7,16753	4,46438
4	9,41807	5,76528	9,41807	5,76528
5	11,6684	7,06536	11,6684	7,06536

Tabela 5.3: Modos vetoriais para buracos negros em cinco dimensões, calculados com $\mathfrak{q} = 2$.

n	Neste trabalho		Kovtun e Starinets (2005)	
	Im($\omega/\pi T$)	Re($\omega/\pi T$)	Im($\omega/\pi T$)	Re($\omega/\pi T$)
1	2,58319	3,51823	2,58319	3,51823
2	4,66081	5,46616	4,66081	5,46616
3	6,69069	7,43187	6,69069	7,43187
4	8,70698	9,40729	8,70697	9,40729
5	10,7175	11,3889	10,7164	11,3889

Feito isso, percebe-se que os resultados são praticamente idênticos, exceto pelos modos quase-normais $\mathfrak{n} = 4$ e $\mathfrak{n} = 5$, que mostram partes imaginárias um pouco diferentes. Essas diferenças podem ser atribuídas ao uso de métodos numéricos diferentes, como também à precisão imposta e ao arredondamento durante o cálculo computacional.

Também foram obtidos os primeiros modos vetoriais comuns para o caso hexa-dimensional, com $k = 0$, os quais estão discriminados na Tabela 5.4. No caso desses resultados, não existem trabalhos na literatura para comparação.

Tabela 5.4: Modos quase-normais vetoriais em seis dimensões, calculados com $\eta = 0$.

n	1	2	3	4	5
$\text{Im}(5\omega/4\pi T)$	2,69339	4,45349	6,19321	7,92688	9,65803
$\text{Re}(5\omega/4\pi T)$	4,13591	6,60919	9,02574	11,4242	13,8146

Os gráficos das Figuras 5.4–5.6 apresentam as relações de dispersão dos modos gravitacionais vetoriais em quatro, cinco e seis dimensões. Para cada um desses modos, tem-se duas curvas, uma para a parte real e outra para a parte imaginária das frequências.

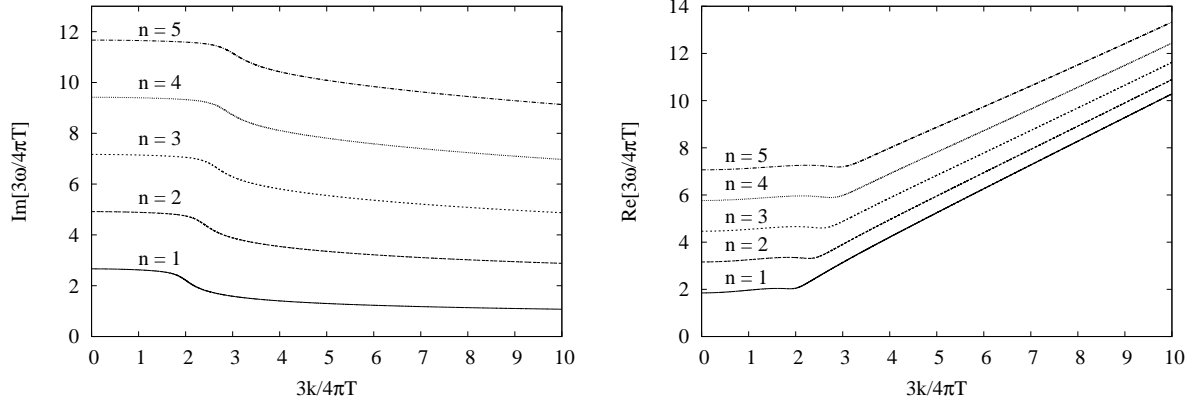


Figura 5.4: Relações de dispersão para os primeiros modos vetoriais em quatro dimensões.

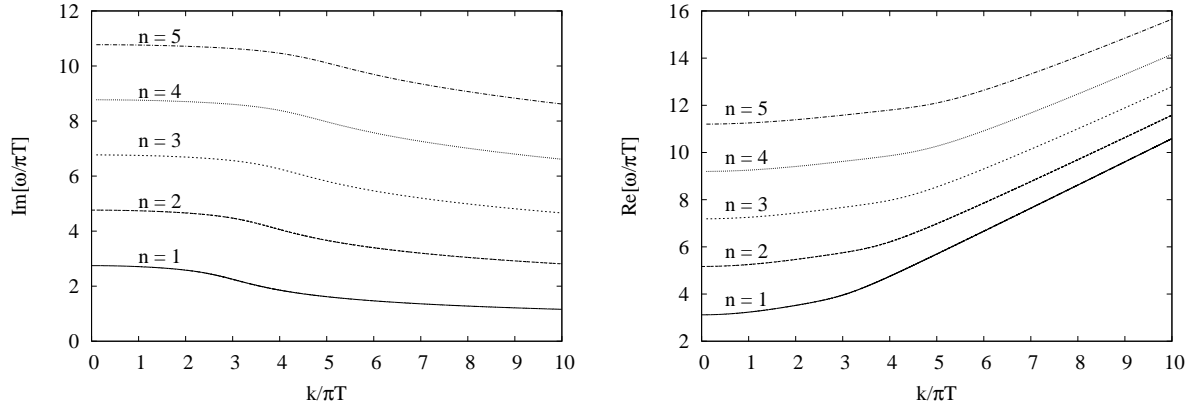


Figura 5.5: Relações de dispersão para modos vetoriais em cinco dimensões.

O comportamento das relações de dispersão é muito semelhante àquele observado no caso dos modos tensoriais. Novamente, a parte imaginária das frequências tende a zero, e a parte real tende a $\text{Re}(\mathbf{w}) = \eta$ conforme o número de onda η tende ao infinito. A fim de tornar esses limites mais perceptíveis, a Figura 5.7 exibe gráficos com valores

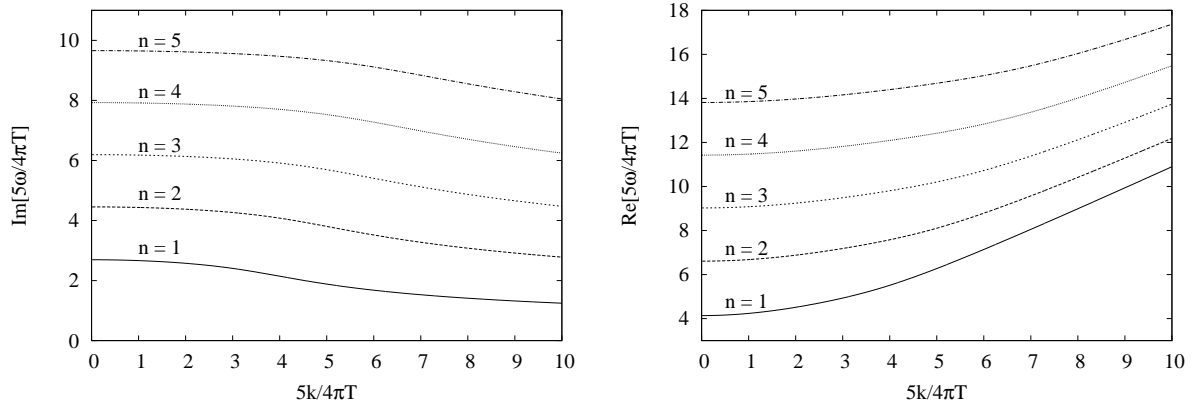


Figura 5.6: Relações de dispersão para os primeiros modos vetoriais de um buraco negro plano em seis dimensões.

grandes de \mathfrak{q} , para o modo fundamental em cada dimensão.

Vale salientar algumas das diferenças apresentadas na comparação com o caso tensorial. Dentre elas, tem-se que as partes imaginárias das relações de dispersão vão a zero mais rapidamente que no caso tensorial, o que significa que o tempo de termalização correspondente ao caso vetorial é maior. As partes reais das relações de dispersão apresentam-se bastante próximas da linha $\text{Re}(\mathfrak{w}) = \mathfrak{q}$ desde pequenos valores de \mathfrak{q} , e novamente esse valor limite é atingido mais rapidamente que no caso tensorial. Por último, observa-se um comportamento não trivial presente nas partes reais das relações de dispersão em $d = 4$, os quais apresentam um mínimo local. Esse “*roton*” mínimo também foi observado por Núñez e Starinets (2003) em perturbações eletromagnéticas de um buraco negro plano AdS em cinco dimensões. Porém, nesse trabalho não foi investigado o significado físico de tal comportamento.

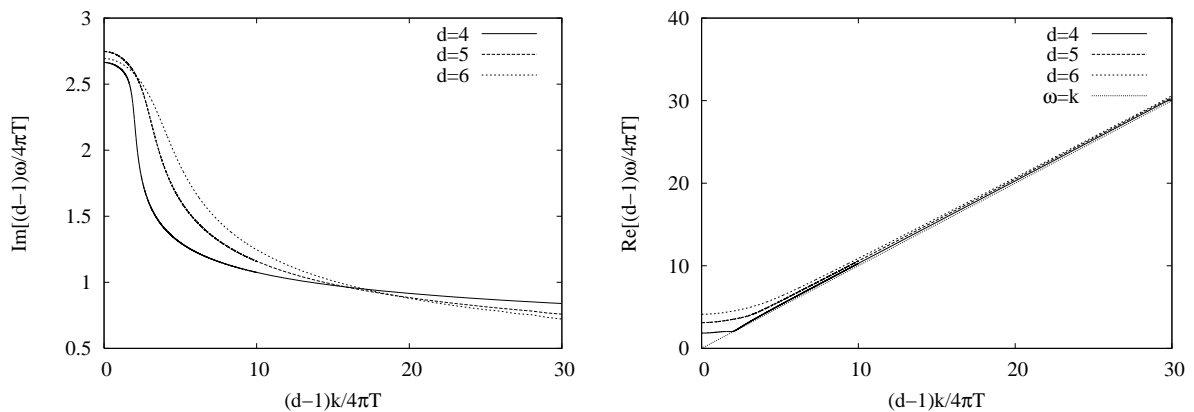


Figura 5.7: Relações de dispersão para o primeiro modo vetorial comum em quatro, cinco e seis dimensões para maiores valores de k .

b) Modo vetorial hidrodinâmico

Conforme mencionado acima, as perturbações gravitacionais vetoriais são conhecidas por possuírem um modo quase-normal puramente amortecido, o que significa dizer que a frequência quase-normal é puramente imaginária. Além disso, foi mostrado na Seção 5.1.2, que esse modo apresenta um limite hidrodinâmico bem característico, o que permite que ele seja reconhecido como um modo hidrodinâmico.

Neste trabalho, obtiveram-se as curvas $\text{Im}(\mathfrak{w}) \times \mathfrak{q}$ para o modo quase-normal puramente imaginário em quatro, cinco e seis dimensões. Foi novamente utilizado o método de Horowitz e Hubeny (2000), porém com uma ligeira modificação, de forma a procurar por raízes somente sobre o eixo imaginário.

A análise do limite hidrodinâmico da equação de perturbação vetorial mostra a presença de um modo de cisalhamento, que corresponde a uma frequência puramente imaginária, dada pela equação (5.16). Por meio das curvas obtidas em cada caso ($d = 4, 5$ e 6 ,) pode-se confirmar tal comportamento hidrodinâmico.

A Figura 5.8 exibe, através das curvas de linha sólida, a relação de dispersão para o modo puramente amortecido no espaço-tempo quadridimensional. A curva referente ao modo de cisalhamento, representada pela linha tracejada do gráfico da esquerda, é também mostrada. Percebe-se que os resultados numéricos confirmam os resultados analíticos obtidos, uma vez que as curvas se ajustam nos limites de \mathfrak{w} e \mathfrak{q} pequenos, o que corresponde exatamente ao limite hidrodinâmico.

Foi obtido numericamente também a frequência algebricamente especial apontada por Miranda e Zanchin (2006). Essa frequência puramente imaginária, dada por $\mathfrak{w} = i\mathfrak{q}^4/6$, é considerada especial, pois corresponde a uma solução analítica simples da equação de perturbação vetorial. Nesse caso particular, o coeficiente a_2 da série de Fröbenius é nulo e, conseqüentemente, todos os demais coeficientes também se anulam, $a_3 = a_4 = \dots = 0$. Tal frequência especial representa o comportamento assintótico da relação de dispersão do modo quase-normal puramente amortecido no limite em que \mathfrak{q} e $\mathfrak{w} \rightarrow \infty$. Esse resultado é mostrado através do gráfico da direita na Figura 5.8, onde a relação $\mathfrak{w} = i\mathfrak{q}^4/6$ é representada pela linha tracejada.

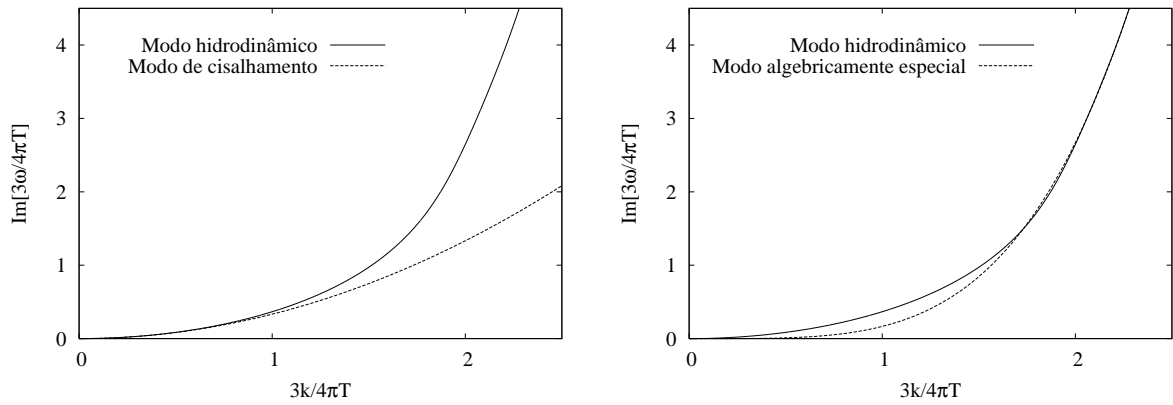


Figura 5.8: Relação de dispersão para o modo hidrodinâmico vetorial em quatro dimensões. A linha tracejada mostra, à esquerda, o modo de cisalhamento e, à direita, o modo algebricamente especial.

Os gráficos da Figura 5.9 correspondem à relação de dispersão para os modos vetoriais puramente amortecidos dos espaços-tempos de cinco e seis dimensões. Novamente, através da linha tracejada que representa o modo de cisalhamento, comprova-se o comportamento esperado no limite hidrodinâmico dos modos gravitacionais vetoriais.

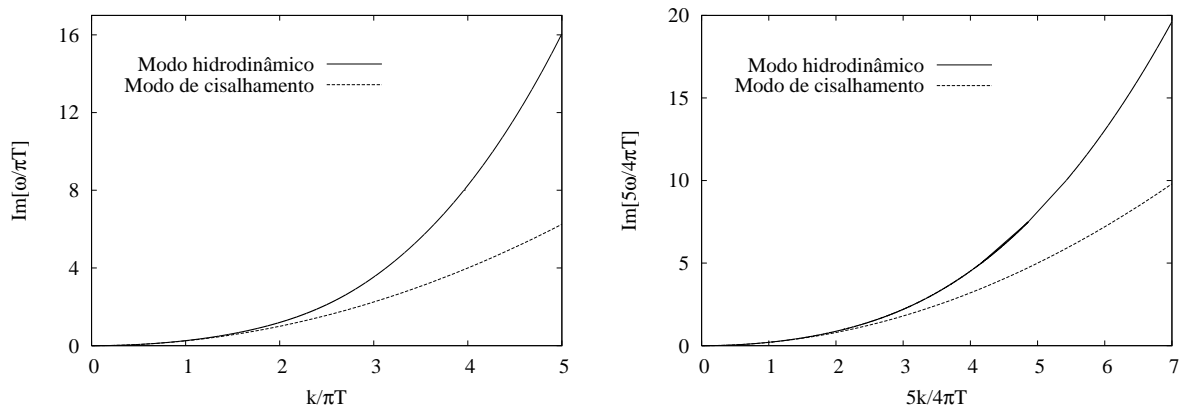


Figura 5.9: Modos hidrodinâmicos vetoriais, na esquerda, para cinco dimensões e, na direita, para seis dimensões.

Para buracos negros plano-simétricos AdS em cinco e seis dimensões, não são conhecidas frequências semelhantes à frequência algebricamente especial do caso quadridimensional. Porém, não se pode afirmar com certeza que tais modos não existam para buracos negros com dimensões superiores a quatro, ou, caso existam, se eles representam ou não o comportamento assintótico ($\mathbf{v}, \mathbf{q} \rightarrow \infty$) do modo quase-normal puramente amortecido.

5.2.3 Modos quase-normais escalares

Esta seção investiga os modos quase-normais gravitacionais escalares de buracos negros planos em quatro, cinco e seis dimensões. Valores numéricos são apresentados para números de onda específicos, bem como as relações de dispersão para as primeiras frequências quase-normais são mostradas.

Entre os modos quase-normais escalares, existe um modo especial que, no limite hidrodinâmico, corresponde ao modo de onda sonora, conforme tratado na Subseção 5.1.3. Nesta seção, a relação de dispersão relativa a tal modo é obtida numericamente.

a) Modos escalares comuns

Na Tabela 5.5, listam-se os valores das frequências dos primeiros cinco modos comuns, para buracos negros plano-simétricos AdS em quatro dimensões, com $\mathfrak{q} = 0,02$, em comparação com os resultados obtidos por Miranda e Zanchin (2006).

Tabela 5.5: Modos quase-normais escalares em quatro dimensões, calculados com $\mathfrak{q} = 0,02$.

n	Neste trabalho		Miranda e Zanchin (2006)	
	Im($3\omega/4\pi T$)	Re($3\omega/4\pi T$)	Im($3\omega/4\pi T$)	Re($3\omega/4\pi T$)
1	2,66384	1,84948	2.66351	1,84963
2	4,91641	3,16130	4,91583	3,16159
3	7,16753	4,46438	7,16671	4,46482
4	9,41807	5,76528	9,41700	5,76586
5	11,6684	7,06536	11,6671	7,06608

Percebe-se que alguns dos resultados apresentam diferenças nas duas últimas casas decimais, e outros nas três últimas casas decimais. Isso pode ser atribuído ao fato de que as equações de perturbação utilizadas no cálculo dos modos não são as mesmas, como já comentado na comparação para os modos quase-normais vetoriais na Subseção 5.2.2.

Calculou-se também os cinco primeiros modos escalares comuns para buracos negros em cinco dimensões. Na Tabela 5.6, esses resultados são comparados com aqueles obtidos por Kovtun e Starinets (2005), feitas as mesmas considerações decritas na Subseção 5.2.2.

Tabela 5.6: Os cinco primeiros modos escalares comuns em cinco dimensões, calculados com $q = 2$.

n	Neste trabalho		Kovtun e Starinets (2005)	
	$\text{Im}(\omega/\pi T)$	$\text{Re}(\omega/\pi T)$	$\text{Im}(\omega/\pi T)$	$\text{Re}(\omega/\pi T)$
1	2,68602	3,46702	2,68602	3,46702
2	4,71412	5,41108	4,71412	5,41108
3	6,72773	7,37878	6,72773	7,37878
4	8,73596	9,35747	8,73596	9,35747
5	10,7416	11,3422	10,7418	11,3422

Para um buraco negro em seis dimensões os modos quase-normais com número de onda nulo são listados na Tabela 5.7. Para esse caso, não foram encontrados trabalhos para efeito de comparação.

Tabela 5.7: Os cinco modos quase-normais escalares comuns em seis dimensões, calculados com $q = 0$.

n	1	2	3	4	5
$\text{Im}(5\omega/4\pi T)$	2,69339	4,45349	6,19321	7,92684	9,65438
$\text{Re}(5\omega/4\pi T)$	4,13591	6,60919	9,02574	11,4242	13,9651

As relações de dispersão dos cinco primeiros modos comuns para quatro e cinco dimensões, são apresentados, respectivamente, nos gráficos das Figuras 5.10 e 5.11.

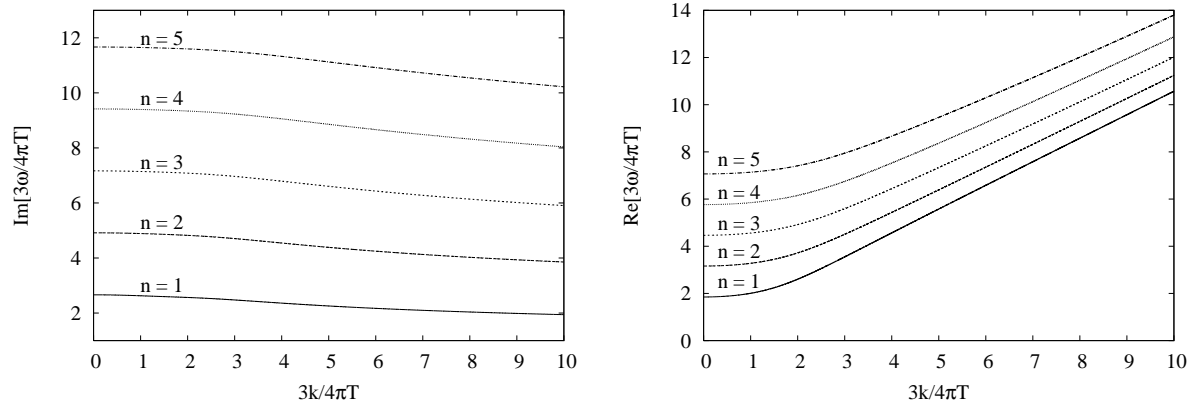


Figura 5.10: Relações de dispersão para os primeiros modos comuns das perturbações escalares em quatro dimensões.

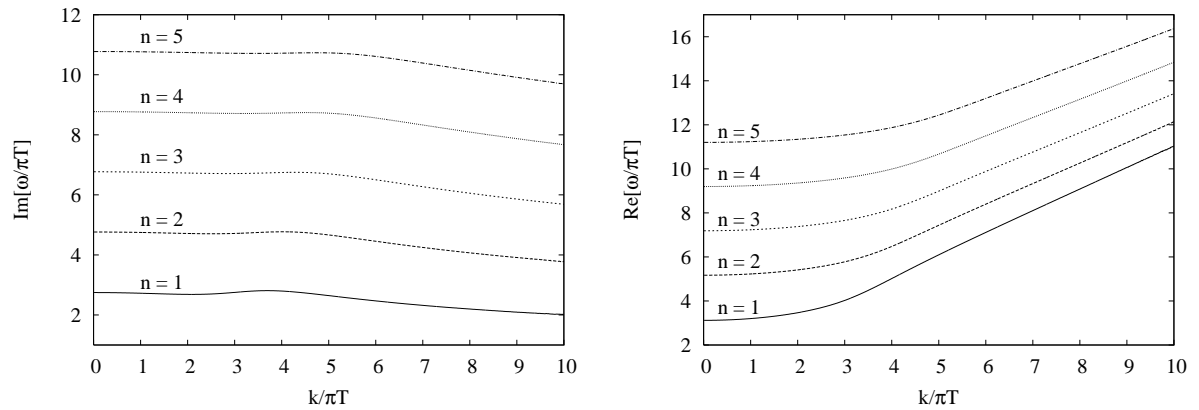


Figura 5.11: Relações de dispersão para os modos quase-normais escalares em cinco dimensões.

No caso de um espaço-tempo hexadimensional, as relações de dispersão foram obtidas apenas para pequenos valores de \mathfrak{q} . O método inesperadamente não converge para números de onda maiores. Pode-se inferir que a origem de tal problema seja devida ao método utilizado, e/ou devido à baixa capacidade computacional disponível. Na Figura 5.12, apresentam-se as relações de dispersão dos primeiros modos escalares para alguns valores de \mathfrak{q} .

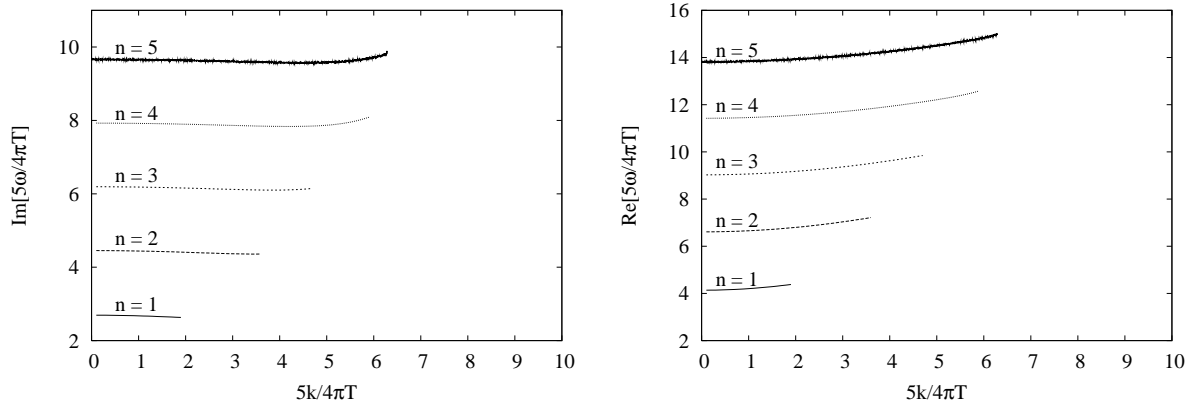


Figura 5.12: Relações de dispersão para os modos comuns escalares em seis dimensões.

As relações de dispersão para o caso escalar apresentam um comportamento similar ao das perturbações tensorial e vetorial: as partes imaginárias das frequências tendem a zero, enquanto que as partes reais tendem à linha $\text{Re}(\mathfrak{w}) = \mathfrak{q}$, conforme $\mathfrak{q} \rightarrow \infty$, independentemente do número de dimensões do espaço-tempo. Infelizmente, os resultados numéricos obtidos para $d = 6$ não são suficientes para observar esse limite.

As relações de dispersão para os modos escalares também apresentam uma peculiaridade. No caso pentadimensional, observa-se um máximo nos gráficos $\text{Im}(\mathfrak{w}) \times \mathfrak{q}$ em valores finitos de \mathfrak{q} , enquanto que para os modos tensoriais e vetoriais, tal máximo está localizado em $\mathfrak{q} = 0$. Nota-se também que esse máximo é suavizado com o aumento de n . Não foi possível determinar se tal máximo é característico do caso $d = 5$ ou se está presente nas relações de dispersão para maiores dimensões. O significado físico deste máximo, nesse trabalho, não foi investigado.

b) Modo escalar hidrodinâmico

Assim como acontece com as perturbações vetoriais, o setor escalar das perturbações apresenta um modo com características especiais. Esse modo é conhecido por apresentar um comportamento de onda sonora no limite hidrodinâmico ($\mathfrak{w}, \mathfrak{q} \ll 1$), cuja forma é determinada pela equação

$$\omega = \pm \frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{i(n-1)k^2}{n(4\pi T)} + \mathcal{O}(k^3),$$

como relatado na subseção 5.1.3. Essa expressão contém a velocidade do som $u_s = 1/\sqrt{n}$, onde n está associado ao número de dimensões $d = n + 2$, e o coeficiente de difusão

$D = 1/4\pi T$, que está relacionado com a viscosidade, como mostrado, por exemplo, em Herzog (2002).

A seguir, nas Figuras 5.13–5.15, apresentam-se as relações de dispersão $\text{Im}(\mathfrak{w}) \times \mathfrak{q}$ e $\text{Re}(\mathfrak{w}) \times \mathfrak{q}$ do modo escalar hidrodinâmico para buracos negros em quatro, cinco e seis dimensões. A fim de confirmar o comportamento hidrodinâmico para \mathfrak{w} e \mathfrak{q} pequenos, mostra-se em cada gráfico uma linha tracejada representando o modo de onda sonora obtido analiticamente, tanto para a parte real, quanto para a parte imaginária da frequência quase-normal correspondente.

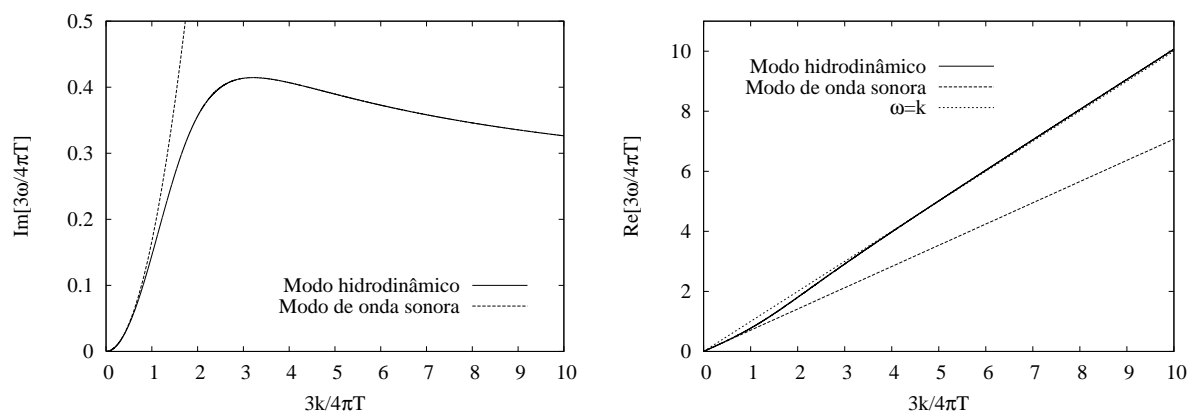


Figura 5.13: Relações de dispersão para o modo escalar hidrodinâmico em quatro dimensões.

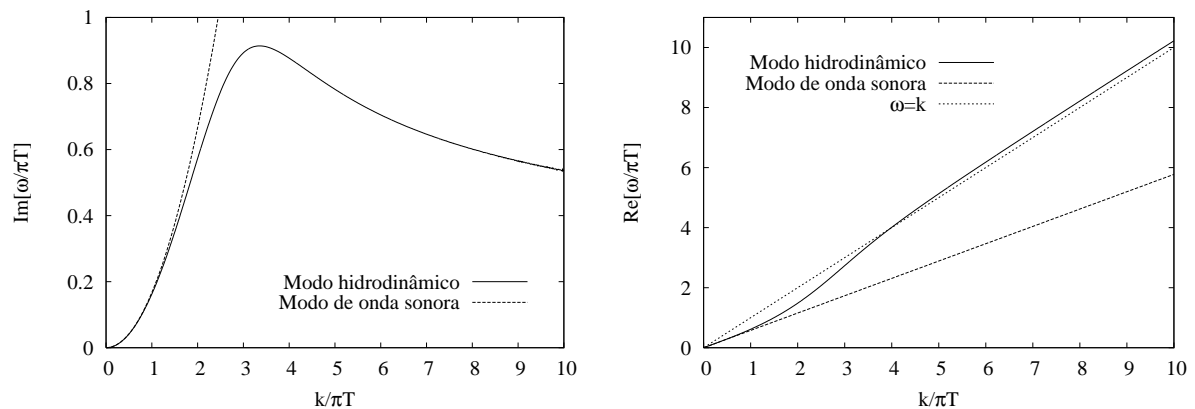


Figura 5.14: Modo escalar hidrodinâmico para buracos negros em cinco dimensões.

Através dos gráficos 5.13–5.15, pode-se observar um perfeito acordo entre as relações de dispersão do modo quase-normal hidrodinâmico e as curvas referentes ao modo de onda sonora. Isso se verifica no limite de baixas frequências e grandes comprimentos de onda, demonstrando que os resultados obtidos analiticamente no limite hidrodinâmico são também reproduzidos numericamente. Além disso, por meio desses gráficos pode-se perce-

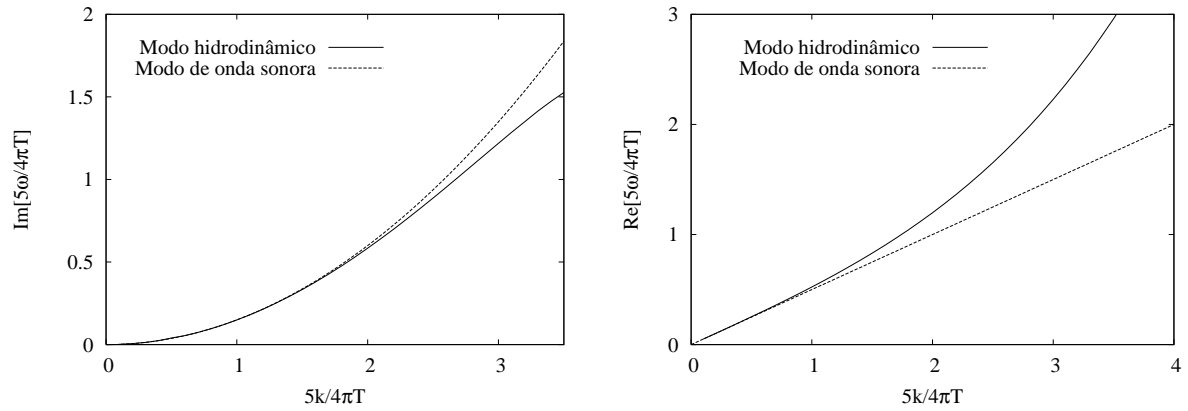


Figura 5.15: O modo hidrodinâmico escalar em seis dimensões.

ber que o comportamento assintótico das relações de dispersão dos modos hidrodinâmicos apresentam o mesmo comportamento das relações de dispersão dos modos quase-normais comuns.

6 CONCLUSÃO

O objetivo principal deste trabalho foi calcular os modos quase-normais de buracos negros plano-simétricos em d dimensões. Para tornar isso possível, desenvolveu-se o estudo de uma teoria de perturbações que segue o formalismo invariante de *gauge* apresentado por Kodama, Ishibashi e Seto (2000). Tal formalismo permite a obtenção de equações fundamentais de perturbação em d dimensões que podem ser reduzidas a equações diferenciais de segunda ordem, cujas soluções sob condições de contorno apropriadas fornecem os modos quase-normais.

Porém, durante este estudo, concluiu-se que o uso das variáveis fundamentais sugeridas por Kodama, Ishibashi e Seto (2000) dificultaria a análise de modos quase-normais, uma vez que por meio delas não seria possível obter, com condição de Dirichlet no infinito, os modos previstos pela hidrodinâmica. Nesse sentido, foram introduzidas novas quantidades invariantes de *gauge* em d dimensões, tendo como base a receita minkowskiana de Son e Starinets (2002) e o trabalho de Kovtun e Starinets (2005), permitindo assim a obtenção dos modos hidrodinâmicos presentes nas perturbações vetoriais e escalares em d dimensões.

As expressões (5.16) e (5.24), encontradas no presente trabalho, estão em completo acordo com a previsão da hidrodinâmica de uma CFT, fornecendo um teste não trivial para a conjectura de Maldacena (1998). Além disso, os resultados obtidos são exatamente os mesmos apresentados na literatura para $d = 4$ e 7 (HERZOG, 2002, 2003) e $d = 5$ (POLICASTRO; SON; STARINETS, 2002a, 2002b), em especial para o modo de onda sonora, já que o modo de cisalhamento é independente do número de dimensões. Por meio das relações de dispersão, pode-se observar que esse mesmo comportamento também é obtido numericamente, tanto para as perturbações vetoriais, quanto para as perturbações escalares, o que reforça tal conclusão. E ainda, por meio dos cálculos analíticos, conclui-se que não existem modos hidrodinâmicos para as perturbações gravitacionais tensoriais. Esses resultados são importantes para a correspondência AdS/CFT que estabelece que os modos quase-normais de buracos negros anti-de Sitter correspondem aos pólos das funções de Green da teoria de campos invariante conforme dual.

A análise numérica dos modos quase-normais foi realizada por meio do método de Horowitz e Hubeny (2000), para o qual utilizou-se uma rotina na linguagem FORTRAN.

Antes de procurar pelas relações de dispersão completas, testou-se o programa procurando pelos cinco primeiros modos quase-normais comuns para determinados números de onda \mathbf{q} , para os quais os resultados já eram conhecidos. A comparação dos resultados mostra que a rotina e o método empregado são consistentes, uma vez que se reproduziram os dados encontrados na literatura, com no mínimo duas casas decimais (Ver as Tabelas do Capítulo 5). Salienta-se ainda que os resultados apresentados para os casos em seis dimensões para cada setor de perturbação gravitacional são inéditos.

Infelizmente, não foi possível obter modos quase-normais para dimensões maiores que seis, um dos objetivos deste trabalho que visava a obtenção de modos quase-normais em quaisquer dimensões. Não foi possível concluir se o problema enfrentado deve-se ao método Horowitz-Hubeny, ao programa em FORTRAN, ou à capacidade computacional disponível.

O cálculo dos modos quase-normais comuns restringiu-se aos cinco primeiros modos devido à correspondência AdS/CFT que considera como mais importantes os modos com frequências menores, pois o tempo de retorno ao equilíbrio térmico na CFT está relacionado à parte imaginária das menores frequências quase-normais de buracos negros AdS.

Por meio das relações de dispersão, observa-se que a dependência das frequências quase-normais em relação ao número de onda \mathbf{q} , de modo geral, caracteriza-se por $\text{Re}(\omega) \rightarrow \mathbf{q}$ e $\text{Im}(\omega) \rightarrow 0$ quando $\mathbf{q} \rightarrow \infty$. Esse comportamento mostra-se independente do tipo de perturbação gravitacional e do número de dimensões, bem como do modo quase-normal que está sendo analisado. Porém, percebem-se algumas particularidades, tais como o “*roton*” mínimo presente nas partes reais das relações de dispersão dos modos vetoriais de um buraco negro quadridimensional, e o máximo observado nas partes imaginárias das relações de dispersão dos modos escalares de um buraco negro em cinco dimensões.

Uma vez mais as dificuldades numéricas impedem a obtenção das relações de dispersão para os modos comuns escalares em seis (ou mais) dimensões, o que impossibilita qualquer conclusão referente a estas, tanto em relação aos comportamentos de $\text{Re}(\omega)$ e $\text{Im}(\omega)$ conforme $\mathbf{q} \rightarrow \infty$, quanto em relação à presença ou ausência do máximo observado no caso pentadimensional. Essa dificuldade numérica é um problema em aberto para o qual buscar-se-ão soluções em estudos futuros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSSON, N.; KOKKOTAS, K. D. Towards gravitational-wave asteroseismology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 299, p. 1059–1068, 1998.
- AWAD, A. M. Higher dimensional charged rotating solutions in AdS space-times. *Classical and Quantum Gravity*, v. 20, p. 2827–2834, 2003.
- BAÑADOS, M. Constant curvature black holes. *Physical Review D*, v. 57, p. 1068–1072, 1998.
- BAÑADOS, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J. Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 69, n. 13, p. 1849–1851, 1992.
- BEKENSTEIN, J. D. The quantum mass spectrum of the Kerr black hole. *Letters Nuovo Cimento*, v. 11, p. 467–470, 1974.
- BEKENSTEIN, J. D. Quantum black holes as atoms. arxiv:gr-qc/9710076v2. 1997.
- BEKENSTEIN, J. D.; MUKHANOV, V. F. Spectroscopy of the quantum black hole. *Physical Letters B*, v. 360, p. 7–12, 1995.
- BERTI, E.; CARDOSO, V.; LEMOS, J. P. S. Quasinormal modes and classical wave propagation in analogue black holes. *Physical Review D*, v. 70, n. 12, p. 124006, 2004.
- CARDOSO, V. *Quasinormal modes and gravitational radiation in black hole spacetimes*. 2003. 222f. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Técnica de Lisboa - Instituto Superior Técnico. Lisboa. 2003.
- CARDOSO, V.; LEMOS, J. P. S.; YOSHIDA, S. Scalar-gravitational perturbations and quasinormal modes in the five dimensional Schwarzschild black hole. *Journal of High Energy Physics*, v. 12, p. 041, 2003.
- CARDOSO, V.; LEMOS, J. P. S.; YOSHIDA, S. Quasinormal modes of Schwarzschild black holes in four and higher dimensions. *Physical Review D*, v. 69, n. 4, p. 044004, 2004.

- CHING, E. S. C. et al. Wave propagation in gravitational systems: Late time behavior. *Physical Review D*, v. 52, n. 4, p. 2118–2132, 1995.
- CHRISTODOULOU, D. Reversible and Irreversible Transformations in Black-hole Physics. *Physical Review Letters*, v. 25, n. 22, p. 1596–1597, 1970.
- DAVIS, M. et al. Gravitational Radiation from a Particle Falling Radially into a Schwarzschild Black Hole. *Physical Review Letters*, v. 27, n. 21, p. 1466–1469, 1971.
- DETWEILER, S. Black holes and gravitational waves. III. The resonant frequencies of rotating holes. *The Astrophysical Journal*, v. 239, p. 292–295, 1980.
- DREYER, O. Quasinormal modes, the Area Spectrum, and Black Hole Entropy. *Physical Review Letters*, v. 90, cod. 081301, n. 8, 2003.
- ECHEVERRIA, F. Gravitational-wave measurements of the mass and angular momentum of a black hole. *Physical Review D*, v. 40, n. 10, p. 3194–3203, 1989.
- FETTER, A. L.; WALECKA, J. D. *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*. New York: McGraw-Hill, p. 434–458, 1980.
- FINN, L. S. Detection, measurement, and gravitational radiation. *Physical Review D*, v. 46, n. 12, p. 5236–5249, 1992.
- GERLACH, U. H.; SENGUPTA, U. K. Gauge-invariant coupled gravitational, acoustical, and electromagnetic modes on most general spherical space-times. *Physical Review D*, v. 22, n. 6, p. 1300–1312, 1980.
- HARTLE, J. B. *Gravity: An introduction to Einstein's general relativity*. San Francisco: Addison Wesley, p. 445–487, 2002.
- HERZOG, C. P. The hydrodynamics of M-theory. *Journal of High Energy Physics*, v. 12, p. 026, 2002.
- HERZOG, C. P. Sound of M theory. *Physical Review D*, v. 68, n. 2, p. 024013, 2003.
- HERZOG, C. P. et al. Quantum critical transport, duality, and M-theory. arxiv:0701036 [hep-th]. 2007.

- HOD, S. Bohr's Correspondence Principle and the Area Spectrum of Quantum Black Holes. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 20, p. 4293–4296, 1998.
- HOD, S. Kerr black-hole quasinormal frequencies. *Physical Review D*, v. 67, n. 8, p. 081501, 2003.
- HOD, S. Quasinormal Spectrum and Quantization of Charged Black Holes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 23, n. 4, p. L23–L27, 2006.
- HOROWITZ, G. T.; HUBENY, V. E. Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium. *Physical Review D*, v. 62, n. 2, p. 024027, 2000.
- HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. *The Astrophysical Journal*, v. 195, p. L51–L53, 1975.
- KLEBANOV, I. R. TASI lectures: Introduction to the AdS/CFT correspondence. hep-th/0009139. 2000.
- KODAMA, H.; ISHIBASHI, A. A master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions. *Progress of Theoretical Physics*, v. 110, p. 701–722, 2003.
- KODAMA, H.; ISHIBASHI, A.; SETO, O. Brane world cosmology: Gauge-invariant formalism for perturbation. *Physical Review D*, v. 62, n. 6, p. 064022, 2000.
- KOKKOTAS, K. D.; SCHMIDT, D. G. Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes. *Living Reviews in Relativity*, v. 2, 1999.
- KONOPLYA, R. A. Gravitational quasinormal radiation of higher-dimensional black holes. *Physical Review D*, v. 68, n. 12, p. 124017, 2003.
- KOVTUN, P.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. Holography and hydrodynamics: Diffusion on stretched horizons. *Journal of High Energy Physics*, v. 10, p. 064, 2003.
- KOVTUN, P. K.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. Viscosity in Strongly Interacting Quantum Field Theories from Black Hole Physics. *Physical Review Letters*, v. 94, n. 11, p. 111601, 2005.
- KOVTUN, P. K.; STARINETS, A. O. Quasinormal modes and holography. *Physical Review D*, v. 72, n. 8, p. 086009, 2005.

- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*. New York: Pergamon Pres, 539 p., 1987.
- LEMOS, J. P. S. Cylindrical black hole in general relativity. *Physical Letters B*, v. 353, p. 46–51, 1995.
- LEMOS, J. P. S.; ZANCHIN, V. T. Rotating charged black strings and three-dimensional black holes. *Physical Review D*, v. 54, n. 6, p. 3840–3853, 1996.
- MALDACENA, J. M. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, v. 2, p. 231–252, 1998.
- MARTEL, K.; POISSON, E. Gravitational perturbations of the Schwarzschild spacetime: A practical covariant and gauge-invariant formalism. *Physical Review D*, v. 71, n. 10, p. 104003, 2005.
- MIRANDA, A. S.; ZANCHIN, V. T. Quasinormal modes of plane-symmetric anti-de Sitter black holes: A complete analysis of the gravitational perturbations. *Physical Review D*, v. 73, n. 6, p. 064034, 2006.
- MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. New York: W. H. Freeman and Company, p. 439–441, 1999.
- MONCRIEF, V. Gravitational perturbations of spherically symmetric systems. I. The exterior problem. *Annals of Physics*, v. 88, p. 323–342, 1974.
- MUKOHYAMA, S. Gauge-invariant gravitational perturbations of maximally symmetric spacetimes. *Physical Review D*, v. 62, n. 8, p. 084015, 2000.
- NOLLERT, H. P. Quasinormal modes of Schwarzschild black holes: The determination of quasinormal frequencies with very large imaginary parts. *Physical Review D*, v. 47, n. 12, p. 5253–5258, 1993.
- NOLLERT, H. P. Topical review: Quasinormal modes: the characteristic ‘sound’ of black holes and neutron stars. *Classical and Quantum Gravity*, v. 16, p. R159–R216, 1999.
- NÚÑEZ, A.; STARINETS, A. O. AdS/CFT correspondence, quasinormal modes, and thermal correlators in $N = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory. *Physical Review D*, v. 67, n. 12, p. 124013, 2003.

- POLICASTRO, G.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. From AdS/CFT correspondence to hydrodynamics. *Journal of High Energy Physics*, v. 09, p. 043, 2002.
- POLICASTRO, G.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. From AdS/CFT correspondence to hydrodynamics. II: Sound waves. *Journal of High Energy Physics*, v. 12, p. 054, 2002.
- REGGE, T.; WHEELER, J. A. Stability of a Schwarzschild Singularity. *Physical Review*, v. 108, n. 4, p. 1063–1069, 1957.
- SON, D. T.; STARINETS, A. O. Minkowski-space correlators in AdS/CFT correspondence: Recipe and applications. *Journal of High Energy Physics*, v. 09, p. 042, 2002.
- SON, D. T.; STARINETS, A. O. Viscosity, Black Holes, and Quantum Field Theory. arxiv:0704.0240 [hep-th]. 2007.
- STARINETS, A. O. Quasinormal modes of near extremal black branes. *Physical Review D*, v. 66, n. 12, p. 124013, 2002.
- TAYLOR, J.; FOWLER, L.; WEISBERG, J. Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar psr1913+16. *Nature*, v. 277, p. 437, 1979.
- VISHVESHWARA, C. V. Scattering of Gravitational Radiation by a Schwarzschild Black-hole. *Nature*, v. 227, n. 29, p. 936–938, 1970.
- ZERILLI, F. J. Gravitational Field of a Particle Falling in a Schwarzschild Geometry Analyzed in Tensor Harmonics. *Physical Review D*, v. 2, n. 10, p. 2141–2160, 1970.

A Quantidades geométricas

O objetivo deste apêndice é apresentar as expressões para os símbolos de Christoffel e tensores de Riemann, Ricci e Einstein da métrica (3.23), em termos das quantidades correspondentes às métricas $g_{ab}(y)dy^a dy^b$ e $d\sigma_n^2$, e as relações entre os três tipos de derivadas covariantes referentes a cada uma dessas métricas.

1) Coeficientes de conexão ou símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{bc}^a = {}^m\Gamma_{bc}^a(y), \quad (\text{A.1})$$

$$\Gamma_{ij}^a = -r D^a r \gamma_{ij}, \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma_{aj}^i = \frac{D_a r}{r} \delta_j^i, \quad (\text{A.3})$$

$$\Gamma_{jk}^i = \widehat{\Gamma}_{jk}^i(x). \quad (\text{A.4})$$

2) Tensores de curvatura ou tensores de Riemann

$$R^a{}_{bcd} = {}^m R^a{}_{bcd}, \quad (\text{A.5})$$

$$R^i{}_{ajb} = -\frac{D_a D_b r}{r} \delta_j^i, \quad (\text{A.6})$$

$$R^i{}_{jkl} = [K - (Dr)^2](\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk}). \quad (\text{A.7})$$

3) Tensores de Ricci

$$R_{ab} = {}^m R_{ab} - \frac{n}{r} D_a D_b r, \quad (\text{A.8})$$

$$R_{ai} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$R_j^i = \left(-\frac{\square r}{r} + (n-1) \frac{K - (Dr)^2}{r^2} \right) \delta_j^i, \quad (\text{A.10})$$

$$R = {}^m R - 2n \frac{\square r}{r} + n(n-1) \frac{K - (Dr)^2}{r^2}. \quad (\text{A.11})$$

4) Tensores de Einstein

$$G_{ab} = {}^m G_{ab} - \frac{n}{r} D_a D_b r - \left(\frac{n(n-1)}{2} \frac{K - (Dr)^2}{r^2} - \frac{n}{r} \square r \right) g_{ab}, \quad (\text{A.12})$$

$$G_j^i = \left(-\frac{1}{2} {}^m R - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \frac{K - (Dr)^2}{r^2} + \frac{n-1}{r} \square r \right) \delta_j^i, \quad (\text{A.13})$$

$$G_{ai} = 0. \quad (\text{A.14})$$

5) Derivadas primeiras:

$$\nabla_b V_a = D_b V_a, \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla_i V_a = \partial_i V_a - \frac{V_i D_a r}{r}, \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla_a V_i = \partial_a V_i - \frac{V_i D_a r}{r}, \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla_j V_i = \widehat{D}_j V_i + r^2 \gamma_{ij} g^{ab} V_a \frac{D_b r}{r}. \quad (\text{A.18})$$

6) Derivadas segundas:

$$\nabla_d \nabla_c h_{ab} = D_d D_c h_{ab}, \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_c h_{ab} &= D_d \partial_i h_{ab} - \partial_i h_{ab} \frac{D_c r}{r} - \left(D_c h_{ib} - 2h_{ib} \frac{D_c r}{r} \right) \frac{D_a r}{r} + \\ &- \left(D_c h_{ai} - 2h_{ai} \frac{D_c r}{r} \right) \frac{D_b r}{r}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \nabla_c \nabla_b h_{ai} &= D_c D_b h_{ai} - D_b h_{ai} \frac{D_c r}{r} - \left(D_c h_{ai} - h_{ai} \frac{D_c r}{r} \right) \frac{D_b r}{r} + \\ &- h_{ai} D_c D_b \ln r, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \nabla_j \nabla_i h_{ab} &= r^2 \gamma_{ij} \left(D_c h_{ab} - h_{ac} \frac{D_c r}{r} - h_{cb} \frac{D_a r}{r} \right) \frac{D_c r}{r} + \widehat{D}_j \widehat{D}_i h_{ab} - \\ &- \left(\widehat{D}_i h_{aj} + \widehat{D}_j h_{ai} \right) \frac{D_b r}{r} - \left(\widehat{D}_i h_{jb} + \widehat{D}_j h_{ib} \right) \frac{D_a r}{r} + (h_{ij} + h_{ji}) \frac{D_a r}{r} \frac{D_b r}{r}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \nabla_j \nabla_b h_{ai} &= r^2 \gamma_{ij} \left(D_b h_{ac} - h_{ac} \frac{D_b r}{r} \right) \frac{D_c r}{r} + D_b \widehat{D}_j h_{ai} - 2\widehat{D}_j h_{ai} \frac{D_b r}{r} \\ &- \left(\partial_b h_{ji} - 3h_{ji} \frac{D_b r}{r} \right) \frac{D_a r}{r}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \nabla_b \nabla_j h_{ai} &= r^2 \gamma_{ij} \left(D_b h_{ac} \frac{D_c r}{r} + h_{ac} D_b D^d \ln r \right) + \\ &+ \widehat{D}_b \widehat{D}_j h_{ai} - 2\widehat{D}_j h_{ai} \frac{D_b r}{r} - \left(\partial_b h_{ji} - 2h_{ji} \frac{D_b r}{r} \right) \frac{D_a r}{r} - h_{ij} D_b D_a \ln r, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \nabla_b \nabla_a h_{ij} &= D_b D_a h_{ij} - 2\partial_a h_{ij} \frac{D_b r}{r} - 2\partial_b h_{ij} \frac{D_a r}{r} + \\ &+ 2h_{ij} \left(2\frac{D_a r}{r} \frac{D_b r}{r} - D_b D_a \ln r \right), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_k h_{ij} &= r^2 \gamma_{ki} \left[D_a h_{bj} \frac{D_b r}{r} + h_{bj} \left(D_a D^b \ln r - \frac{D_a r}{r} \frac{D^b r}{r} \right) \right] + \\ &+ r^2 \gamma_{jk} \left[D_a h_{ib} \frac{D_b r}{r} + h_{ib} \left(D_a D^b \ln r - \frac{D_a r}{r} \frac{D^b r}{r} \right) \right] + \\ &+ \partial_a \widehat{D}_k h_{ij} - 3\widehat{D}_k h_{ij} \frac{D_a r}{r}, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned}\nabla_k \nabla_a h_{ij} &= r^2 \gamma_{ik} \left(D_a h_{bj} \frac{D^b r}{r} - 2 h_{bj} \frac{D_a r}{r} \frac{D^b r}{r} \right) + \\ &+ r^2 \gamma_{jk} \left(D_a h_{ib} \frac{D^b r}{r} - 2 h_{ib} \frac{D_a r}{r} \frac{D^b r}{r} \right) + \partial_a \widehat{D}_k h_{ij} - 3 \widehat{D}_k h_{ij} \frac{D_a r}{r},\end{aligned}\quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned}\nabla_l \nabla_k h_{ij} &= r^4 (\gamma_{ik} \gamma_{jl} + \gamma_{il} \gamma_{jk}) h_{ab} \frac{D^a r}{r} \frac{D^b r}{r} + \\ &+ r^2 \left(\gamma_{ik} \widehat{D}_l h_{aj} + \gamma_{jl} \widehat{D}_k h_{ia} + \gamma_{jk} \widehat{D}_l h_{ia} + \gamma_{il} \widehat{D}_k h_{aj} \right) \frac{D^a r}{r} + \\ &+ r^2 \gamma_{kl} \left(\partial_a h_{ij} - 2 h_{ij} \frac{D_a r}{r} \right) \frac{D^a r}{r} + \\ &- r^2 (\gamma_{il} h_{kj} + \gamma_{jl} h_{ik}) \frac{D_a r}{r} \frac{D^a r}{r} + \widehat{D}_l \widehat{D}_k h_{ij},\end{aligned}\quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned}\nabla_c \nabla_i h_{ab} &= D_c \partial_i h_{ab} - \partial_i h_{ab} \frac{D_c r}{r} - \left(D_c h_{ib} - h_{ib} \frac{D_c r}{r} \right) \frac{D_a r}{r} + \\ &- \left(D_c h_{ai} - h_{ai} \frac{D_c r}{r} \right) \frac{D_b r}{r} - h_{ai} D_c D_b \ln r - h_{bi} D_c D_a \ln r,\end{aligned}\quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned}\nabla_k \nabla_j h_{ai} &= r^2 (\gamma_{ik} \partial_j h_{ab} + \gamma_{ij} \partial_k h_{ab}) \frac{D^b r}{r} + r^2 \gamma_{jk} \left(D_b h_{ai} - h_{ai} \frac{D_b r}{r} \right) \frac{D^b r}{r} - \\ &- r^2 (\gamma_{jk} h_{bi} + \gamma_{ij} h_{kb}) \frac{D_a r}{r} \frac{D^b r}{r} - r^2 \gamma_{ik} \left(h_{aj} \frac{D_b r}{r} + h_{jb} \frac{D_a r}{r} \right) \frac{D^b r}{r} + \\ &+ \widehat{D}_k \widehat{D}_j h_{ai} - \left(\widehat{D}_k h_{ji} + \widehat{D}_j h_{ki} \right) \frac{D_a r}{r}.\end{aligned}\quad (\text{A.30})$$

B Harmônicos escalares, vetoriais e tensoriais

Neste apêndice, apresentam-se os harmônicos escalares, vetoriais e tensoriais utilizados para expandir as perturbações métricas no formalismo invariante de *gauge* de Kodama, Ishibashi e Seto (2000), permitindo que as perturbações gravitacionais possam ser separadas nessas mesmas três classes.

B.1 Harmônicos escalares

As funções harmônicas escalares são definidas a partir da equação

$$\left(\widehat{\Delta} + k^2\right) \widetilde{S} = 0, \quad (\text{B.1})$$

onde $\widehat{\Delta}$ é o operador de Laplace-Beltrami em \mathcal{K}^n , e k^2 é seu autovalor. Para $K = 1$, k^2 assume valores discretos

$$k^2 = l(l + n - 1) - 2, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{B.2})$$

enquanto que para $K \leq 0$, k^2 pode assumir qualquer valor real positivo.

A partir dessas funções, podem-se construir os vetores harmônicos \widetilde{S}_i .

$$\widetilde{S}_i = -\frac{1}{k} \widehat{D}_i \widetilde{S}, \quad (\text{B.3})$$

$$\left[\widehat{\Delta} + k^2 - (n - 1)K\right] \widetilde{S}_i = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\widehat{D}_i \widetilde{S}^i = k \widetilde{S}, \quad (\text{B.5})$$

e os tensores harmônicos \widetilde{S}_{ij}

$$\widetilde{S}_{ij} = \frac{1}{k^2} \widehat{D}_i \widehat{D}_j \widetilde{S} + \frac{1}{n} \gamma_{ij} \widetilde{S}, \quad (\text{B.6})$$

$$\widetilde{S}_i^i = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\widehat{D}_j \widetilde{S}_i^j = \frac{n - 1}{n} \frac{k^2 - nK}{k} \widetilde{S}_i, \quad (\text{B.8})$$

$$\left(\widehat{\Delta} + k^2 - 2nK\right) \widetilde{S}_{ij} = 0. \quad (\text{B.9})$$

B.2 Harmônicos vetoriais

Os vetores harmônicos \tilde{V}_i são definidos por:

$$\left(\hat{\Delta} + k^2\right) \tilde{V}_i = 0, \quad (\text{B.10})$$

$$\hat{D}_i \tilde{V}^i = 0. \quad (\text{B.11})$$

Como no caso dos harmônicos escalares, os autovalores k^2 são todos positivos, formando um grupo contínuo para $K \leq 0$ e um grupo discreto para $K = 1$. Entretanto, esse espectro discreto é deslocado por uma unidade com relação àquele do caso escalar:

$$k^2 = l(l + n - 1) - 1, \quad l = 1, 2, \dots \quad (\text{B.12})$$

Pode-se definir o tensor harmônico \tilde{V}_{ij} :

$$\tilde{V}_{ij} = -\frac{1}{2k} \left(\hat{D}_i \tilde{V}_j + \hat{D}_j \tilde{V}_i \right), \quad (\text{B.13})$$

cujas propriedades apresentam-se abaixo:

$$\left[\hat{\Delta} + k^2 - (n + 1)K \right] \tilde{V}_{ij} = 0; \quad (\text{B.14})$$

$$\tilde{V}_i^i = 0; \quad (\text{B.15})$$

$$\hat{D}_j \tilde{V}_i^j = \frac{k^2 - (n - 1)K}{2k} \tilde{V}_i.$$

B.3 Harmônicos tensoriais

Os harmônicos tensoriais são definidos por

$$\left(\hat{\Delta} + k^2\right) \tilde{T}_{ij} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Os autovalores k^2 são todos positivos formando um grupo contínuo para $K \leq 0$ e um grupo discreto

$$k^2 = l(l + n - 1) - 2, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (\text{B.17})$$

para $K = 1$. Os harmônicos tensoriais possuem as seguintes propriedades:

$$\tilde{T}_i^i = 0; \quad (\text{B.18})$$

$$\hat{D}_j \tilde{T}_i^j = 0.$$

C Equações de perturbação gravitacional escalar

Neste apêndice, apresentam-se as equações de perturbação gravitacional escalar obtidas a partir das equações (3.55)–(3.58), com a transformação de coordenadas de r para u de acordo com (4.5).

Em cada uma das equações de (3.55) à (3.58), foram substituídas as derivadas covariantes em função dos símbolos de Christoffel obtidos a partir da equação (3.1), com a métrica utilizada no cálculo sendo dada pela métrica de fundo (4.1).

Da equação (3.55), sem a contribuição do traço δR , obtêm-se três equações:

i) para $a = t$ e $b = t$:

$$\begin{aligned}
& -u^2 f F''_{tt} + \left[(n-3)uf - \frac{(n+1)u^{n+2}}{2} \right] F'_{tt} + \left[uf^3 + \frac{(n+1)f^2 u^{n+2}}{2} \right] F'_{uu} - \\
& -2u^2 f \tilde{F}'_{ut} + \left[-\frac{2nf^2}{u} - n(n+1)fu^n \right] F' + \left[-n(n+1)f - \frac{(n+1)^2 u^{2n+2}}{2f} \right] F_{tt} + \\
& + [4nf + n(n-1)f + k^2 u^2] F_{tt} + \left[-\frac{(n+1)^2 f u^{2n+2}}{2} + u^2 f \omega^2 - 2nf^3 \right] F_{uu} - \\
& [-2(n+1)f^2 u^{n+1}] F_{uu} + [2(n-1)uf + (n+1)u^{n+2}] \tilde{F}_{ut} + 2n\omega^2 F = 0,
\end{aligned} \tag{C.1}$$

ii) para $a = u$, $b = u$:

$$\begin{aligned}
& + \frac{u^2}{f} F''_{tt} - 2nF'' + \left[\frac{3u}{f} + \frac{(n+1)u^{n+2}}{2f^2} \right] F'_{tt} - (n+1)u \left[f + \frac{u^{n+1}}{2} \right] F'_{uu} + \\
& + \frac{2u^2}{f} \tilde{F}'_{ut} + n \left[\frac{2}{u} + \frac{(n+1)}{f} \right] F' + \frac{(n+1)u^{n+1}}{f^2} \left[n + \frac{(n+1)u^{n+1}}{2f} \right] F_{tt} + \\
& + \left[-\frac{u^2 \omega^2}{f} + (n+1)^2 u^{n+1} \left(2 + \frac{u^{n+1}}{2f} \right) + k^2 u^2 + n(n+1) + n(n-1)f \right] F_{uu} + \\
& + \frac{u}{f} \left[2 - \frac{(n+1)u^{n+1}}{f} \right] F_{ut} = 0,
\end{aligned} \tag{C.2}$$

iii) para $a = u$ e $b = t$:

$$-2n\omega^2 F' - nuf\omega^2 F_{uu} + k^2 u^2 \tilde{F}_{ut} - \frac{n(n+1)\omega^2 u^n}{f} F = 0. \tag{C.3}$$

Da equação (3.56), obtém-se uma equação para a componente radial ($a = u$),

$$\begin{aligned} & -\frac{u^2}{f}F'_{tt} + 2(n-1)F' - \frac{u}{f}\left[2 + \frac{(n+1)u^{n+1}}{2f}\right]F_{tt} + \\ & + u\left[nf + \frac{(n+1)u^{n+1}}{2}\right]F_{uu} - \frac{u^2}{f}\tilde{F}_{ut} = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

e outra para a componente temporal ($a = t$),

$$-u^2f\tilde{F}'_{ut} + u^2\omega^2fF_{uu} + u[(n-2)f + (n+1)u^{n+1}]\tilde{F}_{ut} + 2(n-1)\omega^2F = 0. \quad (\text{C.5})$$

Da equação (3.57), sem a contribuição do traço δR , encontra-se

$$\begin{aligned} & -u^2fF'' - \frac{u^3}{2}F'_{tt} - \frac{u^3f}{2}F'_{uu} + u[(n+1)u^{n+1} + 2nf]F' + \\ & -u^2\left[1 + \frac{(n+1)u^{n+1}}{2f} + \frac{k^2u^2}{2nf}\right]F_{tt} + u^2\left[nf^2 + \frac{3(n+1)fu^{n+1}}{2} + \frac{k^2u^2f}{2n}\right]F_{uu} - \\ & -u^3\tilde{F}_{ut} + u^2\left[\frac{2(n-1)k^2}{n} - \frac{\omega^2}{f}\right]F = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Por fim, da equação (3.58), encontra-se

$$-\frac{u^2}{f}F_{tt} + u^2fF_{uu} + 2(n-2)F = 0 \quad (\text{C.7})$$

As equações (3.55) e (3.57) foram calculadas sem a contribuição do traço δR , para que pudessem ser comparados com as equações apresentadas por Policastro, Son e Starinets (2002a) para o caso $n = 3$. Isso é possível pois a perturbação do escalar de Ricci é identicamente nula em decorrência das equações de Einstein.