



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**ESTUDO DO CICLO DIÁRIO DA CAMADA LIMITE  
PLANETÁRIA ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO DOS  
GRANDES TURBILHÕES**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Franciano Scremin Puhales**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2008**

# **ESTUDO DO CICLO DIÁRIO DA CAMADA LIMITE PLANETÁRIA ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO DOS GRANDES TURBILHÕES**

**por**

**Franciano Scremin Puhales**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do  
Programa de Pós-Graduação em Física, área de  
Concentração em Áreas Clássicas da Fenomenologia e  
suas Aplicações, da Universidade Federal de Santa  
Maria (UFSM , RS), como requisito parcial para obtenção  
do grau de  
**Mestre em Física.**

Orientador: Prof. Dr. Gervásio Annes Degrazia  
UFSM

Santa Maria, RS, Brasil

2008

**Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Ciências Naturais e Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Física**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação de Mestrado

**ESTUDO DO CICLO DIÁRIO DA CAMADA LIMITE  
PLANETÁRIA ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO DOS  
GRANDES TURBILHÕES**

elaborada por

**Franciano Scremin Puhales**

como requisito parcial para obtenção do grau de

**Mestre em Física.**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

---

**Prof. Dr. Gervásio Annes Degrazia**

**UFSM**

(Orientador)

---

**Prof. Dr. Fernando Porté-Agel**

**UMN**

---

**Prof. Dr. Edson Marques Filho**

**UFRJ**

Santa Maria, 15 de dezembro de 2008.

**Num piscar de olhos tudo se  
transforma...tá vendo?!**  
**Já passou!!!**

(Humberto Gessinger)

*A minha mãe, irmãos, mestre, Gabrielle e Ivan.*

# Agradecimentos

Neste momento agradecer é preciso...e não para poucos!!

Sem dúvida alguma, em primeiro lugar a minha mãe e minha família pelo apoio, não só na elaboração deste trabalho mas em toda minha formação acadêmica.

Ao professor Gervásio por toda a orientação, dedicação, confiança e amizade destes últimos anos. Por me orientar na graduação, no mestrado e continuar este trabalho no doutorado.

Ao professor Osvaldo por todas as oportunidades e confiança. Ao professor Otávio (Coordenador) pelo apoio, confiança que além de me ajudar no mestrado foi um dos principais responsáveis pela minha motivação e provável conclusão do curso de graduação Meteorologia. Ao Umberto, *questo ragazzo italiano* que me ajudou muito na realização deste trabalho, pois sem sua orientação trabalhar com LES seria muito mais complicado.

Aos meus colegas de sala, integrantes da FdS, Welter e Felipe – pelas discussões científicas, pelas horas de bom (e mau) humor no laboratório mas, principalmente pela amizade muito "além dos outdoors". Ao pessoal do GruMA – gurizada da previsão. Aos professores Vagner e Everson (Bento) pela constante ajuda na realização de trabalhos e das atividades acadêmicas. Demais colegas do laboratório, da meteoro e da física que de alguma forma ou outra colaboraram na conclusão deste trabalho ou em outros.

Aos membros do GEARAS, pela confiança e compreensão neste ano turbulento (foi um bom ano!) Em especial a gurizadinha da Fênix que alegra os meus sábados; aos pioneiros – meus leais amigos de tantas horas – pioneiros hoje, pioneiros de

ontem, pioneiros de SEMPRE (*Hic Sunt Dracones*). E claro, ao mestre Vidor por todos os ensinamentos e amizade de quase oito anos de atividades em conjunto, afinal são "cavalos marinhos porque borboletas não nadam!".

Aos meus amigos dos velhos tempos, mesmo que não nos encontremos tão seguidamente como naquela época, ainda são meus grandes amigos...Je, Bruna, Ed, Márcio, Boris, Tícia, Filipe, Luiz Antônio, Alisson, Spall e por ai vai...

# Lista de Figuras

2.1	Campo idealizado de temperatura e velocidade do vento. . . . .	35
2.2	Variação no regime de escoamento. Adaptado de Oke, 1987 . . . . .	37
2.3	Representação do gráfico log-log do espectro de energia cinética turbulenta para TCD. . . . .	39
2.4	Escalas temporais e espaciais de vários fenômenos atmosféricos(OKE, 1987, p. 5). . . . .	46
2.5	Representação da atmosfera padrão – uma idealização da atmosfera. . . .	47
3.1	Espectro de emissão de um corpo negro a diferentes temperaturas e Lei do Deslocamento de Wien . . . . .	50
3.2	Representação do espectro eletromagnético . . . . .	51
3.3	Absorção dos constituintes da atmosfera em função do comprimento de onda da radiação incidente, adaptado de Oke, 1989. . . . .	52
3.4	Evolução das médias horárias de fluxo de radiação para o dia 15 de fevereiro de 2004. . . . .	54
3.5	Evolução das médias horárias de fluxo de radiação para o dia 4 de fevereiro de 2004. . . . .	54
3.6	Representação da variação diária da CLP. Adaptado de Stull, 1988. . . . .	55



4.1	Representação do gráfico log-log para o espectro de energia cinética turbulenta $S(k)$ em função do número de onda $k$ . A linha tracejada indica a separação entre os grandes turbilhões (resolvida) e os pequenos (parametrizada), sendo $k_c$ o número de onda de filtro ou corte. . . . .	66
4.2	Comportamento das funções filtro tipo caixa (pontilhado), guassiana (linha cheia) e filtro agudo (tracejado). A figura 4.2(a) mostra o comportamento em um espaço físico e a 4.2(b) em um espaço de números de onda, sendo que em (a) é a própria função $G$ e em (b) a função de transferência $\hat{G}$ associada a função filtro. Adaptado de Gioia (2003). . . . .	69
5.1	Dados experimentais de fluxo de radiação global incidente medido entre 30 de setembro e 1º de outubro em Candiota-RS. . . . .	81
5.2	Mapa sinótico contendo a plotagem das observações synop evidenciando as condições de tempo reinantes sobre o sudeste da América do Sul às 12Z (9h local) do dia 30 de setembro de 2007. O retângulo sobre o Rio Grande do Sul destaca a região de Candiota. A informação em destaque na carta é referente ao aeródromo de Bagé - RS (cidade vizinha à Candiota). Fonte: sítio na internet do CPTEC - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos . . . . .	82
5.3	Imagem do satélite GOES 12 – canal do infravermelho (IR4) – das 8h do dia 30/09/2007 horário local. O retângulo sobre o Rio Grande do Sul destaca a região de Candiota. Fonte: Acervo de imagens do GruMA – Grupo de Modelagem Atmosférica de Santa Maria. . . . .	83
5.4	Carta sinótica de superfície às 12Z (9h local) do dia 30 de setembro de 2007. Fonte: sítio na internet da Marinha do Brasil ( <a href="http://www.mar.mil.br">http://www.mar.mil.br</a> ) . . . . .	84
5.5	Dados experimentais de umidade relativa medida entre 30 de setembro e 1º de outubro em Candiota-RS. . . . .	85
5.6	Variação do passo de tempo $\Delta t$ durante a simulação do ciclo diário da CLP. . . . .	85
5.7	Perfis iniciais de temperatura potencial e umidade específica obtidos a partir do modelo BRAMS . . . . .	86

5.8	Perfis iniciais das componentes e velocidade do vento obtidos a partir do modelo BRAMS. . . . .	86
5.9	Dados experimentais de temperatura da superfície e umidade relativa interpolados e incorporados ao modelo LES como forçantes de superfície. As linhas indicam a função interpoladora e as marcas em forma de 'x' e '+' o valor experimental de cada um dos forçantes. . . . .	87
5.10	Evolução da temperatura potencial virtual – comparação entre LES e dados experimentais de superfície. . . . .	89
5.11	Fluxo de energia na forma de calor – comparação entre LES e dados experimentais de superfície. . . . .	89
5.12	Evolução da umidade específica – comparação entre LES e dados experimentais de superfície. . . . .	89
5.13	Evolução do fluxo turbulento de umidade específica – comparação entre LES e dados experimentais de superfície. . . . .	89
5.14	Evolução do módulo da velocidade do vento – comparação entre LES e dados experimentais de superfície. . . . .	90
5.15	Evolução da velocidade de fricção – comparação entre LES e dados experimentais de superfície. . . . .	90
5.16	Evolução de $z/L$ – comparação entre LES e dados experimentais de superfície. . . . .	91
5.17	Evolução do número de Richardson – comparação entre LES e dados experimentais de superfície. . . . .	91
5.18	Evolução da energia cinética turbulenta – comparação entre LES e dados experimentais de superfície. . . . .	91
5.19	Evolução da altura da CLP. Por falta de dados experimentais não há comparação com dados observados. . . . .	91
5.20	Perfis da componente zonal da velocidade do vento. . . . .	93
5.21	Perfis da componente meridional da velocidade do vento. . . . .	93

5.22	Perfis da magnitude da velocidade do vento. . . . .	94
5.23	Perfis do número de Richardson (gradiente). . . . .	94
5.24	Evolução temporal do perfil da componente zonal da velocidade do vento. . . . .	94
5.25	Evolução temporal do perfil da componente meridional da velocidade do vento. . . . .	94
5.26	Evolução temporal do perfil da magnitude da velocidade do vento. . . . .	95
5.27	Perfil de fluxo turbulento de momento. . . . .	96
5.28	Perfil de fluxo turbulento de momento – escala resolvida. . . . .	96
5.29	Perfil de fluxo turbulento de momento – escala de subfiltro. . . . .	96
5.30	Perfil da temperatura potencial virtual. . . . .	97
5.31	Perfil do fluxo turbulento de energia na forma de calor. . . . .	97
5.32	Perfil do fluxo turbulento de energia na forma de calor – escala resolvida. . . . .	97
5.33	Perfil do fluxo turbulento de energia na forma de calor – escala de subfiltro. . . . .	97
5.34	Evolução temporal do perfil da temperatura potencial virtual. . . . .	98
5.35	Perfil de energia cinética turbulenta total da simulação (escala resolvida e escala de subfiltro). . . . .	99
5.36	da razão entre a energia cinética de subfiltro e a energia cinética turbulenta. . . . .	99
5.37	Evolução temporal do perfil da energia cinética turbulenta total da simulação. . . . .	99
5.38	Evolução temporal do perfil da razão entre a energia cinética de subfiltro e a energia cinética turbulenta. . . . .	99
5.39	Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 12h (local) . . . . .	102
5.40	Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 16h (local) . . . . .	102
5.41	Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 20h (local) . . . . .	102

5.42 Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 00h (local) . . . . .	102
5.43 Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 04h (local) . . . . .	103
5.44 Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 08h (local) . . . . .	103
5.45 Evolução temporal do perfil do termo mecânico da equação de balanço da energia cinética turbulenta. . . . .	103
5.46 Evolução temporal do perfil do termo mecânico da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala resolvida. . . . .	104
5.47 Evolução temporal do perfil do termo mecânico da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala de subfiltro. . . . .	104
5.48 Evolução temporal do perfil do termo de empuxo da equação de balanço da energia cinética turbulenta. . . . .	105
5.49 Evolução temporal do perfil do termo de empuxo da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala resolvida. . . . .	105
5.50 Evolução temporal do perfil do termo de empuxo da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala de subfiltro. . . . .	105
5.51 Evolução temporal do perfil do termo de transporte da equação de balanço da energia cinética turbulenta. . . . .	106
5.52 Evolução temporal do perfil do termo de transporte da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala resolvida. . . . .	106
5.53 Evolução temporal do perfil do termo de transporte da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala de subfiltro. . . . .	106
5.54 Evolução temporal do perfil do termo de dissipação da equação de balanço da energia cinética turbulenta. . . . .	107
5.55 Representação espacial dos pontos de medida temporal do modelo LES. . .	109

5.56	Perfil da variância da componente longitudinal da velocidade do vento normalizada por uma escala de velocidade. . . . .	111
5.57	Perfil da variância da componente vertical da velocidade do vento normalizada por uma escala de velocidade. . . . .	111
5.58	Perfil da variância da temperatura potencial normalizada por uma escala de temperatura. . . . .	113
5.59	Perfil da variância de $w$ na região de convecção livre. . . . .	114
5.60	Perfil da variância de $\theta$ na região de convecção livre. . . . .	114
5.61	Função estrutura da componente longitudinal da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 10,42m$ . . . . .	117
5.62	Função estrutura da componente longitudinal da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,2z_i$ . . . . .	117
5.63	Função estrutura da componente longitudinal da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,5z_i$ . . . . .	118
5.64	S2u Função estrutura da componente longitudinal da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = z_i$ . . . . .	118
5.65	Função estrutura da componente lateral da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 10,42m$ . . . . .	119
5.66	Função estrutura da componente lateral da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,2z_i$ . . . . .	120
5.67	Função estrutura da componente lateral da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,5z_i$ . . . . .	120
5.68	Função estrutura da componente lateral da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = z_i$ . . . . .	121
5.69	Função estrutura da componente vertical da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 10,42m$ . . . . .	122
5.70	Função estrutura da componente vertical da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,2z_i$ . . . . .	123

5.71	Função estrutura da componente vertical da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,5z_i$ . . . . .	123
5.72	Função estrutura da componente vertical da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = z_i$ . . . . .	124
5.73	Gráfico log-log da função estrutura de segunda ordem $D_2u_i(r)$ segundo Kolmogorov. A região <i>I</i> caracteriza o intervalo de dissipação onde as quantidades estatísticas dependem da taxa de dissipação e da viscosidade cinemática e $r \ll \eta$ onde $D_2u_i(r) \propto r^2$ . A região <i>II</i> é conhecida com sub-intervalo inercial onde as quantidades estatísticas dependem apenas da taxa de dissipação e encontra-se no intervalo $\eta \ll r \ll L$ e $D_2u_i(r) \propto r^{2/3}$ . A região <i>III</i> caracteriza os grandes turbilhões, com tamanho da ordem ou maior que $L$ . Adaptado de Welter (2006). . . . .	125
5.74	Razão entre a função estrutura da componente longitudinal da velocidade e a separação de escalas $r^{2/3}$ calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 10,42m$ . . . . .	128
5.75	Razão entre a função estrutura da componente longitudinal da velocidade e a separação de escalas $r^{2/3}$ calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,2z_i$ . . . . .	128
5.76	Razão entre a função estrutura da componente longitudinal da velocidade e a separação de escalas $r^{2/3}$ calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,5z_i$ . . . . .	129
5.77	Razão entre a função estrutura da componente longitudinal da velocidade e a separação de escalas $r^{2/3}$ calculada a partir de dados do modelo LES em $z = z_i$ . . . . .	129
5.78	Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1, T_2, T_3$ e $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 12h (local) . . . . .	130

5.79	Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1$ , $T_2$ , $T_3$ e $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 16h (local) . . . . .	130
5.80	Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1$ , $T_2$ , $T_3$ e $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 20h (local) . . . . .	130
5.81	Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1$ , $T_2$ , $T_3$ e $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 00h (local) . . . . .	130
5.82	Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1$ , $T_2$ , $T_3$ e $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 04h (local) . . . . .	131
5.83	Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1$ , $T_2$ , $T_3$ e $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 08h (local) . . . . .	131
5.84	Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente vertical e longitudinal da velocidade em $z = 10,42m$ . . . . .	133
5.85	Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente vertical e longitudinal da velocidade em $z = 0,2z_i$ . . . . .	133
5.86	Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente vertical e longitudinal da velocidade em $z = 0,5z_i$ . . . . .	134
5.87	Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente vertical e longitudinal da velocidade em $z = z_i$ . . . . .	134

5.88 Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente lateral e longitudinal da velocidade em $z = 10,42m$ .	135
5.89 Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente lateral e longitudinal da velocidade em $z = 0,2z_i$ .	135
5.90 Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente lateral e longitudinal da velocidade em $z = 0,5z_i$ .	136
5.91 Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente lateral e longitudinal da velocidade em $z = z_i$ .	136
5.92 Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 10,42m$ , às 12h.	138
5.93 Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,2z_i$ , às 12h.	138
5.94 Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,5z_i$ , às 12h.	139
5.95 Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = z_i$ , às 12h.	139
5.96 Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 10,42m$ , às 16h.	140
5.97 Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,2z_i$ , às 16h.	140
5.98 Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = 0,5z_i$ , às 16h.	141
5.99 Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em $z = z_i$ , às 16h.	141
A.1 Representação de $V_c$ e $V_{sis}$	152
A.2 Elemento de área infinitesimal de $V_c$ e vetores	153



C.1	(a) Representação do elemento de fluido e as forças que sobre ele atuam.	
	(b) Representação das tensões que agem em uma face do elemento de fluido.	158
C.2	Representação de uma partícula qualquer a uma distância $r$ do centro da Terra. . . . .	159
C.3	Sistemas de referência: referencial inercial $(x, y, z)$ e não inercial $(x', y', z')$ . . . . .	168

# Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros da CLP no instante de cada perfil . . . . .	92
5.2	Estimativas para a escala integral no horário das 12h (local) para diferentes níveis da CLP. . . . .	142
5.3	Estimativas para a escala integral no horário das 16h (local) para diferentes níveis da CLP. . . . .	142
5.4	Estimativas de alguns parâmetros que caracterizam a turbulência no horário das 12h (local) para diferentes níveis da CLP. . . . .	144
5.5	Estimativas de alguns parâmetros que caracterizam a turbulência no horário das 16h (local) para diferentes níveis da CLP. . . . .	144

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>22</b>
<b>Abstract</b>	<b>24</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>26</b>
<b>2 Uma breve introdução à física de fluidos geofísicos</b>	<b>28</b>
2.1 Definições gerais . . . . .	29
2.1.1 Campo de velocidade . . . . .	29
2.1.2 Campo de temperatura . . . . .	30
2.1.3 Campo de umidade . . . . .	31
2.1.4 Métodos de descrição de um escoamento geofísico . . . . .	32
2.1.5 Camada limite . . . . .	35
2.1.6 Regimes de escoamento . . . . .	35
2.2 Escoamentos turbulentos . . . . .	37
2.2.1 Espectro de energia cinética turbulenta . . . . .	38
2.3 Equações básicas no estudo da mecânica de fluidos . . . . .	40
2.3.1 Equação da Continuidade - conservação da quantidade de matéria em um escoamento . . . . .	40
2.3.2 Equação de estado dos gases ideais . . . . .	41
2.3.3 Primeira Lei da Termodinâmica . . . . .	43

2.3.4	Segunda Lei de Newton aplicada a fluidos geofísicos – equação de Navier-Stokes . . . . .	43
2.3.5	Considerações sobre as equações básicas . . . . .	44
2.4	Escalas dos fenômenos atmosféricos . . . . .	46
2.4.1	Modelo da Atmosfera Padrão . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Camada Limite Planetária</b>	<b>48</b>
3.1	Balanço radiativo na superfície . . . . .	49
3.2	Variação diária da CLP . . . . .	55
3.2.1	Camada limite convectiva . . . . .	56
3.2.2	Camada limite estável . . . . .	56
3.2.3	Camada limite neutra . . . . .	57
3.2.4	Camada limite residual . . . . .	57
3.3	Equação da energia cinética turbulenta . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Dinâmica de fluidos computacional</b>	<b>61</b>
4.1	Descrição do escoamento a partir do processo de médias . . . . .	62
4.2	Modelo de simulação dos grandes turbilhões . . . . .	65
4.2.1	Filtros utilizados em modelos LES . . . . .	66
4.2.2	Modelo LES de Moeng (1984) . . . . .	69
4.2.2.1	Esquema numérico . . . . .	69
4.2.2.2	Condições de contorno . . . . .	70
4.2.2.3	Equações para as escalas resolvidas . . . . .	72
4.2.2.4	Modelo de subfiltro . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Experimento Numérico</b>	<b>80</b>

5.1	Condições iniciais . . . . .	86
5.2	Forçantes superficiais . . . . .	87
5.3	Comparação entre LES e observações de superfície . . . . .	88
5.4	Perfis verticais . . . . .	92
5.5	Balço da energia cinética turbulenta . . . . .	100
5.6	Análise estatística do escoamento . . . . .	108
5.6.1	Perfil vertical das variâncias . . . . .	109
5.6.2	Funções estrutura de segunda ordem das componentes da velocidade . . . . .	115
5.6.3	Outras análises . . . . .	137
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>146</b>
<b>A</b>	<b>Teorema do Transporte de Reynolds</b>	<b>150</b>
<b>B</b>	<b>Equação da Continuidade</b>	<b>155</b>
<b>C</b>	<b>A Segunda Lei de Newton aplicada a fluidos geofísicos</b>	<b>157</b>

# **RESUMO**

Dissertação de Mestrado  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Universidade Federal de Santa Maria

## **ESTUDO DO CICLO DIÁRIO DA CAMADA LIMITE PLANETÁRIA ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO DOS GRANDES TURBILHÕES**

AUTOR: FRANCIANO SCREMIN PUHALES

ORIENTADOR: PROF. DR. GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA  
UFSM

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 15 de dezembro de 2008.

A CLP é a região da troposfera caracterizada pela existência da turbulência (BUSINGER, 1981). Um escoamento turbulento é aquele no qual as flutuações das variáveis que descrevem o escoamento são amplificadas no tempo e no espaço (LANDAU; LIFSHITZ, 1959).

O estudo da camada limite planetária (CLP) através da dinâmica de fluidos computacional, sobretudo a simulação dos grandes turbilhões (LES), é uma ferramenta bastante empregada e impulsionada pelo constante aprimoramento dos recursos computacionais. O uso de simulações numéricas apresenta algumas vantagens em relação a outras técnicas pois fornece uma descrição completa da extensão vertical da CLP. No entanto, também apresenta suas limitações através de simplificações nas equações resolvidas e aproximações dos métodos numéricos.

A técnica empregada na construção do modelo LES consiste na utilização de médias de volume para resolver as equações de movimento para uma partícula de fluido. Com isto espera-se resolver estas equações para os grandes turbilhões, nos quais acredita-se estar a maior parte da energia cinética turbulenta. Chamamos esta escala de resolvida. O restante das escalas, ou seja, as menores escalas do escoamento são aproximadas por um modelo de subfiltro ou subgrade. A separação entre as escalas resolvidas e de subfiltro é realizada por um processo de

filtragem. A largura deste filtro está diretamente relacionada a resolução da grade computacional.

Neste trabalho propõem-se uma comparação entre os resultados obtidos a partir do modelo LES de Moeng (MOENG, 1984) com dados experimentais obtidos na CLP. Além disto, são realizadas comparações com resultados de outros modelos. Adicionalmente, foram geradas estatísticas turbulentas, que descrevem o escoamento em uma aproximação baseada na teoria estatística da turbulência. Para isso foram utilizadas condições iniciais e forçantes de superfície para um dia de bom tempo do sítio experimental de Candiota.

O desempenho do modelo LES em reproduzir os dados experimentais foi considerado satisfatório. Entretanto o modelo se mostrou menos eficaz em simular a turbulência noturna. Para tal período se faz necessária uma maior resolução de grade.

# **ABSTRACT**

Dissertação de Mestrado  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Universidade Federal de Santa Maria

## **STUDY OF DAILY CYCLE OF PLANETARY BOUNDARY LAYER BY LARGE EDDY SIMULATION**

AUTOR: FRANCIANO SCREMIN PUHALES  
ORIENTADOR: PROF. DR. GERVÁSIO ANNES DEGRAZIA  
UFSM

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 15 de dezembro de 2008.

The PBL is the region on the troposphere characterized by existence of turbulence (BUSINGER, 1981). Turbulent flow is that when the fluctuations of the variables that describe the flow are amplified in time and space (LANDAU; LIFSHITZ, 1959).

The study of the planetary boundary layer (PBL) through the computational fluid dynamics, particularly the large eddy simulation (LES) is an important tool and driven by constant improvement of computing resources. The use of numerical simulations has some advantages over other techniques because it gives a full description of the vertical extent of the PBL. However, it also shows its limitations by simplifications in the equations solved and approximations of numerical methods.

The technique employed in the construction of LES models utilizes the volume-average to solve the equations of motion for a particle of fluid. With this procedure is expects to solve these equations for large eddies, in which it is believed to be the most turbulent kinetic energy. We solved this scale. Therefore, we solve the scales associated to the large eddies. The rest of the turbulent scales, that is, the smaller scales are approximated by a subfilter or subgrid model. The separation between the scales resolved and subfilter is made by a process of filtering. The width of this filter is directly related to resolution of the grid computing.



In this work we establish a comparison between the results obtained from the Moeng's LES model (MOENG, 1984) with experimental data obtained in the PBL. In addition, are accomplished comparisons with results from other models. Furthermore, were generated turbulent statisticals, which describe the flow in approach based on the turbulent statistical theory. To perform this task, were used for initial conditions and forcing the surface to a good weather day at the experimental site of Candiota.

The performance of the LES model to reproduce the experimental data was considered satisfactory. However, the model was less effective in simulating the turbulent night. For this period is necessary a higher resolution grid.

# Capítulo 1

## Introdução

Os estudos sobre turbulência e sua influência na Camada Limite Planetária são bastante antigos porém seus resultados mais significativos começaram a surgir no início do século XX e, desde então muitos trabalhos foram realizados tentando elucidar o fenômeno turbulento. O tratamento matemático da turbulência é bastante complicado e seu estudo experimental exhibe uma relevante complexidade principalmente quando se trata de turbulência atmosférica. Tendo em vista todos esses fatores, Wyngaard em 1981 iniciou um de seus artigos com o seguinte questionamento:

“Certamente não podemos esperar uma solução analítica para as equações de movimento de uma camada limite turbulenta, mas podemos nos questionar: Por que é necessário modelar as equações antes de resolvê-las numericamente? Por que não podemos resolvê-las diretamente com os grandes e rápidos computadores de hoje?”

A resposta para esta pergunta feita em 1981 ainda é a mesma para a atualidade. Não temos recursos computacionais suficientes para isso, mesmo com toda a evolução computacional dos últimos anos. Resolver diretamente as equações do movimento turbulento – Simulação numérica direta (DNS) – implica considerar na solução um grande número de graus de liberdade do movimento e com isso uma malha computacional de altíssima resolução. Porém, quando uma solução numérica é vinculada a um esquema de modelagem surge um caminho viável para o estudo da turbulência.

Em muitas áreas da mecânica de fluidos tem-se utilizado simulações computacionais para o estudo da turbulência, já que as medidas observacionais são extremamente complicadas e de alto custo. Em particular, no estudo da Camada Limite Planetária (CLP) o uso da dinâmica de fluidos computacional é cada vez mais comum pois observações experimentais na CLP apresentam um gradiente físico complicador associado a sua grande extensão vertical que pode chegar a 3000 metros. Além disto, o avanço da computação de alto desempenho é outro fato que tem impulsionado as simulações de alta resolução na baixa atmosfera. Dentre as técnicas de simulação empregadas em turbulência uma das mais utilizadas é a Simulação dos Grandes Turbilhões (LES, do inglês *Large Eddy Simulation*).

A simulação dos grandes turbilhões consiste em um modelo de médias de volume no qual os turbilhões mais energéticos são resolvidos diretamente enquanto os menores são filtrados e tem a sua energia parametrizada por um modelo chamado de subfiltro ou subgrade. A quantidade de turbilhões e, portanto de energia cinética turbulenta resolvida diretamente é tão grande quanto for a resolução da grade do modelo (POPE, 2000). Contudo, algumas questões devem ser respondidas: É possível simular um ciclo diário da CLP utilizando a metodologia LES? Sendo possível, os dados gerados pelo modelo são consistentes? O objetivo deste trabalho é utilizar o modelo LES desenvolvido por Moeng (1984), utilizando a parametrização de subgrade proposta por Sullivan et. al (1994) para responder estas questões. Para isso o modelo foi iniciado com dados experimentais de superfície obtidos no sítio experimental de Candiota, RS, Brasil. Os perfis verticais iniciais das variáveis de interesse foram determinados a partir da previsão numérica para a região de Candiota realizado pelo Grupo de Modelagem Atmosférica de Santa Maria (GruMA), com o modelo BRAMS. Com isso compara-se a saída do modelo com os dados medidos por uma torre micrometeorológica para diferentes casos. Além do mais, a partir dos dados simulados foram estimados perfis verticais de velocidade e temperatura, evolução da energia cinética turbulenta e propriedades estatísticas do escoamento turbulento na CLP.

## Capítulo 2

# Uma breve introdução à física de fluidos geofísicos

Fluido é um conjunto de partículas que se deforma continuamente sob a ação de uma tensão tangencial (tensão de cisalhamento). Considerando que o comportamento do fluido é descrito em termos de fenômenos macroscópicos o fluido é tratado como um meio contínuo e formado por elementos de fluido. Elemento de fluido (ou partícula de fluido) é definido como uma quantidade infinitesimal de fluido muito maior que a escala molecular (constituído por várias moléculas) e bem menor que a escala macroscópica. Desta maneira, do ponto de vista da termodinâmica as interações eletromagnéticas na escala molecular são bem definidas em função das grandezas macroscópicas.

A tensão de cisalhamento é o resultado da interação eletromagnética entre os constituintes do fluido e suas vizinhanças. Para um fluido Newtoniano<sup>1</sup> a tensão de cisalhamento é dada por(LANDAU; LIFSHITZ, 1959):

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

para todo  $i \neq j$ , onde  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido,  $x_\alpha$  é a direção analisada e  $U_\alpha$  e a velocidade na direção  $x_\alpha$ . Além das tensões tangenciais existem as tensões normais que agem sobre o elemento de fluido. Assim, estas tensões são bem definidas pelo tensor  $\tau_{ij}$ , representado pela matriz  $3 \times 3$  em

---

<sup>1</sup>O modelo de fluido Newtoniano é aquele onde a tensão de cisalhamento é linearmente proporcional ao gradiente de velocidade nas direções perpendiculares a própria tensão. Este gradiente também é chamado de cisalhamento do campo de velocidade.

coordenadas retangulares:

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}.$$

onde os elementos da diagonal principal da matriz representam as componentes normais da tensão. Para um fluido Newtoniano e incompressível cada um dos termos da matriz é definido como (LANDAU; LIFSHITZ, 1959):

$$\tau_{ij} = -\delta_{ij}p + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,  $p$  é a pressão e onde  $u_i$  é a componente do vetor velocidade  $\vec{U}$  na direção  $x_i$ . Analisando-se a equação (2.2) é fácil perceber que se  $i \neq j$  as componentes do tensor recaem na expressão para a tensão de cisalhamento do fluido. Além disto, se utilizarmos a aproximação extrema de fluido não viscoso ( $\mu = 0$ ) as tensões tangenciais são nulas e as tensões normais correspondem a pressão sobre o elemento de fluido. Neste caso não a deformação do elemento de fluido e a sua dinâmica corresponde a de um corpo rígido.

Fluidos geofísicos são todos os fluidos que escoam na superfície do planeta. Em geral, o termo se refere aos oceanos e a atmosfera, sendo a atmosfera o foco deste trabalho.

## 2.1 Definições gerais

### 2.1.1 Campo de velocidade

Seja  $\vec{U}$  o vetor velocidade de uma partícula de fluido. Considerando-se como referencial um conjunto de eixos cartesianos este vetor pode ser escrito como

$$\vec{U} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad (2.3)$$

onde  $\vec{U} = \vec{U}(x, y, z, t)$  e

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} \\ y &= \frac{dy}{dt} \\ w &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

O campo de velocidade do escoamento é formado pelo conjunto de vetores velocidade de cada ponto do escoamento. Se o campo de velocidade é invariante no tempo em cada ponto do escoamento dizemos que este escoamento é estacionário e então  $\vec{U} = \vec{U}(x, y, z)$ .

### 2.1.2 Campo de temperatura

Seja  $T$  a temperatura de cada ponto do escoamento. O campo de temperatura é descrito por uma função escalar que descreve a temperatura no tempo e no espaço, assim:

$$T = T(x, y, z, t) \quad (2.5)$$

Quando uma parcela de fluido se desloca verticalmente na atmosfera sua temperatura varia devido a variação de pressão e densidade do ar. Porém, se considerarmos um processo adiabático podemos definir uma grandeza que se mantém constante neste processo. Assim definimos a temperatura potencial ( $\theta$ ). Considere uma parcela de fluido com temperatura absoluta  $T$  a uma pressão  $p_o$  e densidade  $\rho$ . A temperatura potencial desta parcela é a temperatura que esta teria se fosse levada a uma pressão  $p$  mantendo a densidade  $\rho$ . Matematicamente temos:

$$\theta = T \left( \frac{p}{p_o} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (2.6)$$

onde  $R$  é a constante do gás e  $c_p$  o calor específico a pressão constante. Se o gás for o ar seco  $R_d = 287 J(kgK)^{-1}$  e  $c_p = 1004 J(kgK)^{-1}$ .

### 2.1.3 Campo de umidade

A presença de água na atmosfera é um fator determinante em seus processos termodinâmicos. Isto é mais evidente quando ocorre a mudança de fase, pois quando este fenômeno ocorre, uma grande quantidade de energia na forma de calor latente é liberado ou absorvido do meio. Este fato é determinante para o favorecimento ou inibição de vários processos atmosféricos. Existem várias formas de se quantificar o teor de umidade do ar:

– Umidade absoluta  $\rho_v$ : é a densidade de vapor d'água de uma parcela de ar de volume  $V$ .

$$\rho_v = \frac{m_v}{V} \quad (2.7)$$

onde  $m_v$  é a massa do vapor d'água contido no volume  $V$ .

– Umidade específica  $q$ : é a razão entre a massa de ar umido  $m_v$  e a massa total da parcela de ar  $m = m_d + m_v$  contida em um volume  $V$ , onde  $m_d$  é a massa de ar seco da parcela.

$$\begin{aligned} q &= \frac{m_v}{m} \\ q &= \frac{m_v}{m_d + m_v} \\ q &= \frac{m_v V}{m_d V + m_v V} \\ q &= \frac{\rho_v}{\rho_d + \rho_v} \end{aligned} \quad (2.8)$$

– Razão de mistura : é a razão entre a massa de vapor d'água e ar seco contidos no volume  $V$  da parcela

$$\begin{aligned} w &= \frac{m_v}{m_d} \\ w &= \frac{m_v V}{m_d V} \\ w &= \frac{\rho_v}{\rho_d} \end{aligned} \quad (2.9)$$

– Umidade relativa : é a razão entre a razão de mistura  $w$  e a razão de mistura para o ar saturado  $w_s^2$

---

<sup>2</sup>Ar saturado é aquele que não consegue mais absorver vapor d'água. Em geral, após atingir a saturação do ar a umidade excedente condensa. A quantidade de vapor d'água que o ar consegue armazenar é função da temperatura.

$$f = \frac{w}{w_s}. \quad (2.10)$$

Independentemente da grandeza escolhida para quantificar a umidade do ar, matematicamente define-se um campo de umidade qualquer  $\psi$  como

$$\psi = \psi(x, y, z, t). \quad (2.11)$$

#### 2.1.4 Métodos de descrição de um escoamento geofísico

Um escoamento geofísico é comumente descrito em termos Eulerianos e Lagrangianos. Para diferenciar os dois métodos vamos adotar um referencial no qual a superfície da Terra está em repouso.

Um escoamento descrito sob o ponto de vista Euleriano é aquele onde um observador em repouso em relação ao referencial adotado anteriormente avalia o comportamento do fluido analisando um único ponto do escoamento. Desta forma uma variável qualquer  $\xi$  do fluido é matematicamente definida como

$$\xi \equiv \xi(x, y, z, t) \quad (2.12)$$

onde as coordenadas espaciais  $x$ ,  $y$ , e  $z$  são independentes do tempo, ou seja, um ponto fixo em relação ao referencial do observador. Em termos experimentais a descrição Euleriana é equivalente as medidas realizadas em uma torre micrometeorológica.

A descrição Lagrangiana é aquela onde um observador em repouso avalia o comportamento do escoamento seguindo um elemento de fluido no tempo enquanto ele se desloca pelo espaço. Assim, uma variável qualquer do fluido sob o ponto de vista Lagrangiano é definida matematicamente como



$$\begin{aligned}
\xi &\equiv \xi(x, y, z) \\
x &= x(t) \\
y &= y(t) \\
z &= z(t).
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

Nesta descrição o ponto de observação varia no tempo e no espaço em relação ao referencial do observador. Experimentalmente esta descrição corresponde, por exemplo, a um balão sonda que é carregado pelo vento.

É possível relacionar variações Lagrangianas e Eulerianas de uma determinada variável  $\xi$  para um determinado escoamento. Uma maneira de fazer isto é diferenciando-se  $\xi$ .

$$\begin{aligned}
d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz + \frac{\partial \xi}{\partial t} dt \\
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{dt}{dt} \\
\frac{dx_i}{dt} &= u_i \\
\frac{d\xi}{dt} &= u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \\
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \xi \\
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{d\xi}{dt} - \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \xi
\end{aligned}
\tag{2.14}$$

onde a derivada parcial em relação ao tempo de  $\xi$  corresponde a variação local de  $\xi$ , ou seja, a variação em um unico ponto – Euleriana. Já a variação temporal total corresponde a variação Lagrangiana de  $\xi$ . O termo  $\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \xi$  é o termo que descreve o transporte de  $\xi$  devido ao campo de velocidade do vento, chamada de advecção. De um ponto de vista mais rigoroso a advecção é definida como

$$adv(\xi) = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \xi. \tag{2.15}$$

Esta definição tem uma interpretação física importante. Para o termo advectivo ser positivo, ou seja, para que a quantidade de  $\xi$  aumente em um determinado ponto é necessário que o vento esteja no sentido contrário do gradiente de  $\xi$ , ou seja, o vento deve vir de uma região onde  $\xi$  é maior para uma região onde é menor. Vamos considerar a figura 2.1 que apresenta o campo de velocidade do vento e de temperatura de uma determinada região. O campo de velocidade do vento é perpendicular as isotermas, assim como o vetor que indica o gradiente de temperatura. O vetor gradiente de temperatura aponta no sentido em que a temperatura aumenta:

$$\begin{aligned}
 adv(T) &= -\vec{U} \cdot \vec{\nabla}T \\
 adv(T) &= -\|\vec{U}\| \|\vec{\nabla}T\| \cos\theta \\
 adv(T) &= -\|\vec{U}\| \|\vec{\nabla}T\| \cos(\pi) \\
 adv(T) &= \|\vec{U}\| \|\vec{\nabla}T\|.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Logo, a advecção de temperatura é positiva e isto colabora para a variação local da temperatura seja positiva, ou seja, colabora para um aumento local da temperatura.

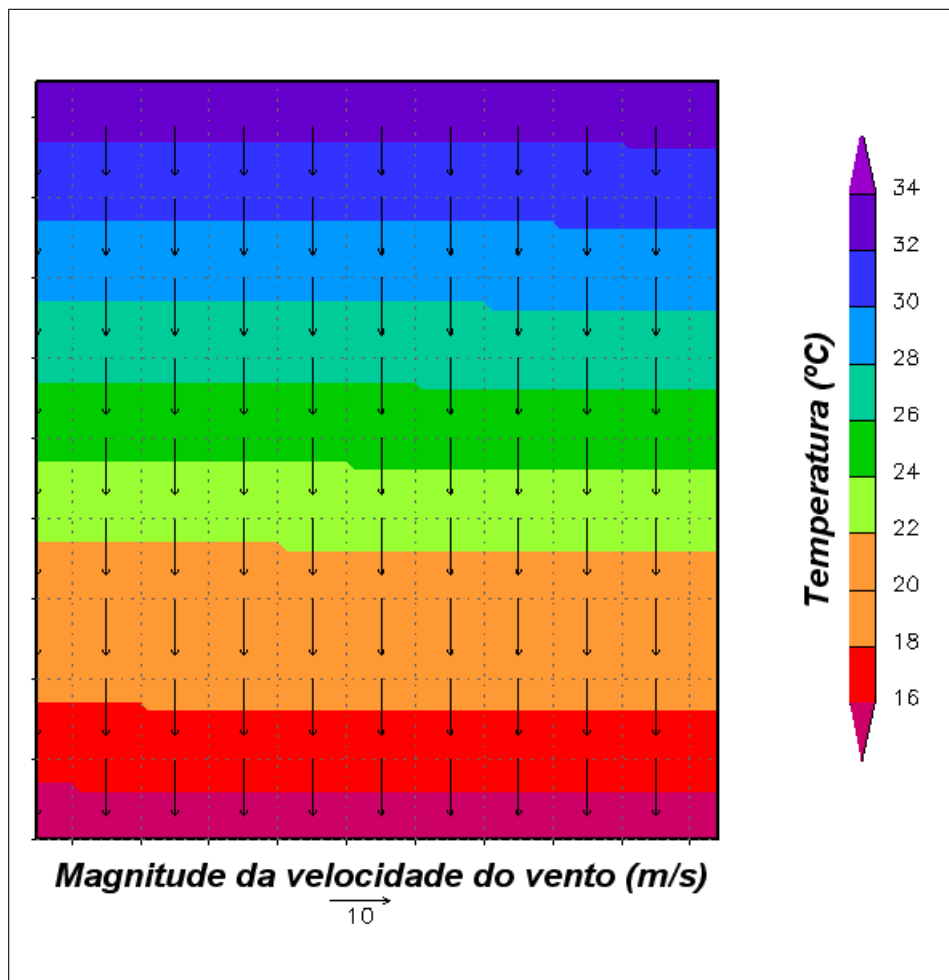
Uma outra forma de relacionar estes dois pontos de vista é o Teorema do Transporte de Reynolds. Seja  $B$  uma quantidade qualquer relativa a um fluido e  $b$  seu valor por unidade de massa, tal que

$$B = mb. \tag{2.17}$$

Este fluido escoar através de um volume de controle  $V_c$  e tem uma quantidade de massa contida no volume do sistema  $V_{sis}$ , que se move com velocidade  $\vec{U}$  em relação ao referencial em que  $V_c$  está fixo. O Teorema do Transporte de Reynolds relaciona a variação temporal de  $B$  no volume de controle e no sistema através da equação

$$\frac{d}{dt}B_{sis} = \frac{\partial}{\partial t}B_{V_c} + \oint_{SV_c} \rho b \vec{U} \cdot \hat{n} dA. \tag{2.18}$$

A demonstração de tal teorema é apresentada no apêndice A.



**Figura 2.1:** Campo idealizado de temperatura e velocidade do vento.

### 2.1.5 Camada limite

A expressão camada limite, é definida de maneira geral em mecânica de fluidos como a região do escoamento onde existe um intenso gradiente de velocidade, forçando as componentes deste campo convergirem para zero quando se aproximam de uma superfície rígida ou interface entre dois meios (LANDAU; LIFSHITZ, 1959). Nas proximidades da superfície do planeta Terra há a formação de uma camada limite que será discutida em detalhe no capítulo 3.

### 2.1.6 Regimes de escoamento

Conforme as propriedades do escoamento ele pode ser classificado em dois regimes: regime de escoamento laminar ou turbulento. Quando um escoamento é laminar o fluido escoar como finas lâminas (camadas) que deslizam uma sobre

as outras. Neste caso, não há trocas de propriedades macroscópicas entre estas camadas do escoamento. Quando a velocidade do escoamento atinge um valor crítico este escoamento passa por um processo de transição onde as simetrias do escoamento laminar são quebradas e o regime de escoamento converge para um regime de turbulência (exceto para uma fina camada do fluido próxima a superfície que continua a ser laminar – camada superficial laminar). A turbulência consiste em um movimento irregular e quase aleatório do fluido no qual existe uma intensa troca de propriedades macroscópicas entre as diferentes regiões do escoamento. Ela é caracterizada pela existência de vórtices e de uma grande resistência ao escoamento. Quanto mais complicado este movimento se torna, ou seja, mais turbulento, mais simetrias vão sendo quebradas. Entretanto, para um número de Reynolds muito alto existe uma tendência a recuperar as simetrias do escoamento em um senso estatístico para regiões afastadas dos contornos sistema (FRISCH, 1995, p. 11). Nesta condição se define a turbulência completamente desenvolvida, onde se espera que todos os possíveis graus de liberdade do sistema sejam alcançados e supõe-se que exista um domínio onde um equilíbrio estatístico universal seja atinido (WELTER, 2006).

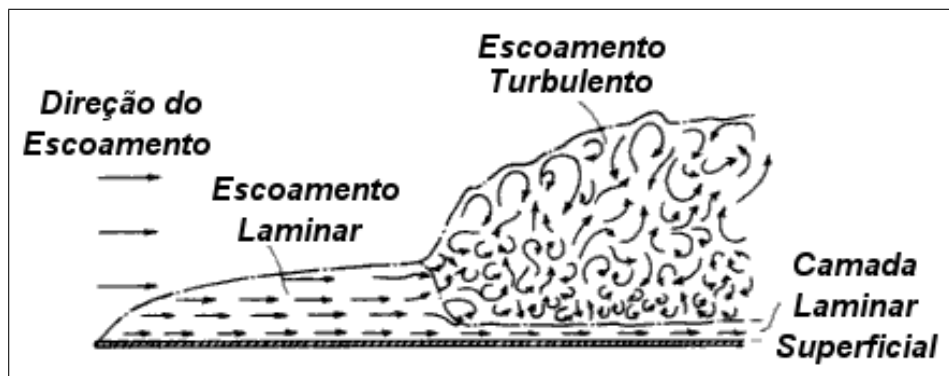
Turbulência completamente desenvolvida (TCD) é caracterizada por um comportamento espacial e temporal desordenado nas características dinâmicas e termodinâmicas que descrevem o escoamento. Por isso, a utilização de teorias estatísticas é fundamental na compreensão deste fenômeno (WELTER, 2006).

A figura 2.2 mostra de forma didática essa variação no regime de escoamento. O valor crítico de velocidade para que existe a mudança no regime de escoamento é definida pelo Número de Reynolds.

O Número de Reynolds  $Re$  é a razão entre os forçantes inerciais e viscosos do escoamento. Sua definição é oriunda da segunda Lei de Newton. O seu valor crítico varia no intervalo  $2300 \leq Re \leq 3000$ . Para os escoamentos na baixa atmosfera,  $Re$  pode ser da ordem de  $10^7$ . O Número de Reynolds é dado por

$$Re = \frac{\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U}}{\nu \nabla^2 \vec{U}} \quad (2.19)$$

onde  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido. Escrevendo-se esta definição em função



**Figura 2.2:** Variação no regime de escoamento. Adaptado de Oke, 1987

da ordem de grandeza de cada termo temos que

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.20)$$

onde  $U$  é uma velocidade característica do escoamento e  $L$  uma escala de comprimento característica.

## 2.2 Escoamentos turbulentos

A turbulência é um fenômeno físico complexo no qual perturbações infinitesimais das variáveis que descrevem o escoamento são amplificadas no tempo e no espaço. Como visto anteriormente, um escoamento é considerado turbulento a partir de um número de Reynolds crítico. O valor deste limite varia no intervalo  $2300 \leq Re \leq 3000$ .

Lumley e Panofsky (1964, página 3, *apud* WELTER, 2005, página 29) aponta algumas propriedades do campo turbulento:

- Turbulência é observada ser rotacional e dissipativa, isto é, a energia mecânica é transformada em energia na forma de calor; Há movimentos aleatórios tridimensionais que são aproximadamente irrotacionais e não dissipativos, tais como um corpo em um fluido. Neste particular caso a sua superfície é perturbada por um escoamento turbulento, mas os turbilhões não dissipam energia mecânica em energia interna do sistema através de uma cascata que vai dos vórtices maiores para os menores (espectro de energia cinética turbulenta).

- Turbulência é tridimensional. A cascata de energia para turbilhões menores pode ser pensada como um reposicionamento de “vórtices esticados” descritos pelos termos não lineares das equações de movimento que impõe um caráter tridimensional e não linear ao movimento.
- Turbulência é não linear. A transferência de energia que ocorre de um turbilhão para o outro acontece de forma não linear.
- Turbulência é estocástica. De fato, não importa com qual cuidado as condições de um experimento são reproduzidas. O campo de velocidade não poderá ser predito em detalhes.
- Turbulência é difusiva. Uma partícula de fluido marcada irá se deslocar em relação a sua posição inicial de maneira análoga a uma molécula em um gás, porém, quantitativamente, de maneira muito mais intensa. Isto implica em um transporte de quantidades como matéria, *momentum*, energia na forma de calor, etc..
- Em turbulência, as escalas de tempo e comprimento do movimento são grandes e geralmente da mesma ordem de tempo e comprimento das escalas espaciais e temporais que limitam o processo de difusão.
- Turbulência é um fenômeno contínuo. Na maioria dos escoamentos a escala dinâmica de menor importância é muito maior que o livre caminho médio das moléculas e, conseqüentemente, muito maior que as próprias moléculas.

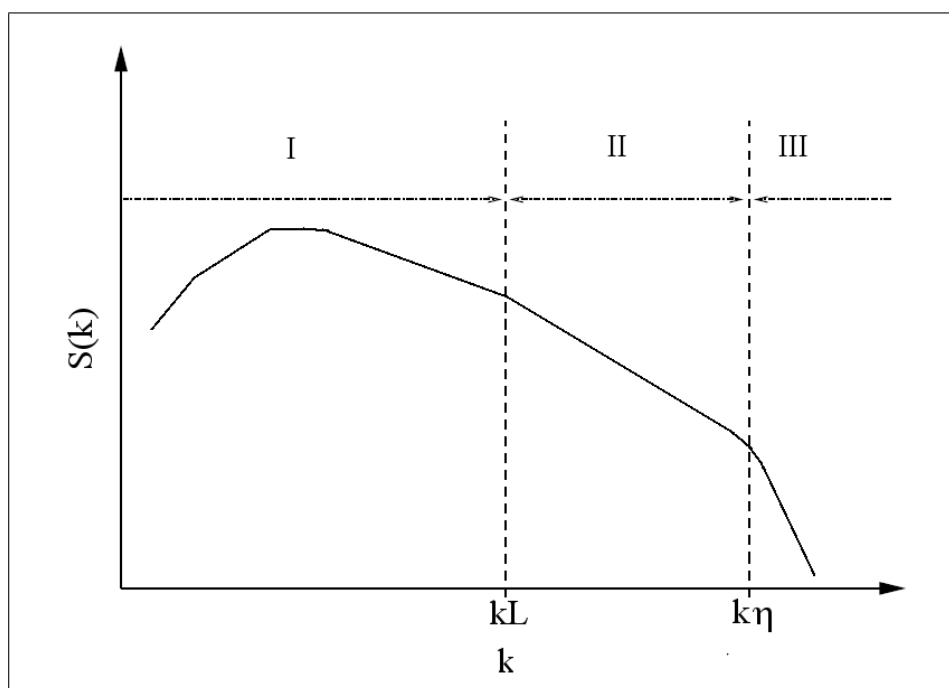
### 2.2.1 Espectro de energia cinética turbulenta

Um parâmetro descrevendo um campo turbulento possui uma grande variabilidade, tanto espacial como temporal. Esta variabilidade está associada ao número de graus de liberdade que, por sua vez, está diretamente relacionado com o número de Reynolds (LANDAU; LIFSHITZ, 1959). Desta maneira, pode-se conceber a idéia de uma variável turbulenta ser composta pela sobreposição de harmônicos de diferentes números de onda ( $k$ ) chamados turbilhões ou vórtices. Assim, como a radiação eletromagnética, cada número de onda corresponde a uma quantidade de energia cinética turbulenta e portanto, precisamos saber como esta energia está

distribuída nos turbilhões de diferentes tamanhos ou harmônicos de diferentes números de onda.

Os turbilhões são formados nas grandes escalas e transferem energia para os menores e assim por diante. Esta transferência de energia cinética turbulenta em forma de cascata, que vai dos maiores para os menores turbilhões, ocorre até um comprimento de onda limite no qual a ação da viscosidade se torna importante no processo de dissipação da energia cinética turbulenta forma de calor (RICHARDSON, 1922).

Mesmo que uma certa analogia com o espectro de energia eletromagnética seja válida, a distribuição da energia cinética turbulenta entre os turbilhões de diferentes números de onda não se dá de forma linear como a energia eletromagnética se distribui entre fótons de diferentes frequências. O espectro de energia cinética turbulenta está distribuído em intervalos que possuem diferentes características, conforme a figura 2.3.



**Figura 2.3:** Representação do gráfico log-log do espectro de energia cinética turbulenta para TCD.

- Intervalo I: Grandes turbilhões com tamanho maior ou igual a  $L$  (escala integral).
- Intervalo II – sub intervalo inercial: o caráter da turbulência, nestes números de

onda, é inteiramente determinado pelo fluxo de energia e pela taxa de dissipação. O fluxo de energia mais a dissipação é igual a energia total fornecida para este intervalo. Da forma do espectro observa-se que esta energia é proveniente dos turbilhões que possuem maior conteúdo de energia. Esta região do espectro se encerra entre turbilhões menores que a escala integral e maiores que a micro escala de Kolmogorov,  $\eta$ .

- Intervalo III: nesta região do espectro ocorre a dissipação da energia cinética turbulenta em energia na forma de calor. Os turbilhões aqui são menores que a micro escala de Kolmogorov (WELTER, 2006).

## 2.3 Equações básicas no estudo da mecânica de fluidos

Acredita-se que a equação de Navier-Stokes, que nada mais é que a segunda lei de Newton aplicada a um elemento de fluido, associada as equações da termodinâmica e da continuidade seja capaz de descrever todo o comportamento do escoamento. Isto implica que esta equação também contenha a informação sobre todas as quebras de simetrias que ocorrem na transição e formação de um escoamento turbulento.

### 2.3.1 Equação da Continuidade - conservação da quantidade de matéria em um escoamento

A equação da continuidade relaciona a variação local da densidade do fluido em função da divergência do campo de velocidade. Esta equação é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0, \quad (2.21)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido. No apêndice B é apresentada uma derivação desta equação.

É possível fazer uma análise interessante desta equação quanto a compressibilidade do fluido. Se supomos um fluido não compressível sua densidade é cons-



tante, logo a sua variação local é nula. Portanto, assumir a hipótese de fluido incompressível é equivalente a hipótese de fluido não divergente, ou seja,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ . Esta simplificação é bastante válida em escoamentos na baixa atmosfera onde as flutuações de densidade são de uma ordem bem menor que a própria densidade do fluido.

### 2.3.2 Equação de estado dos gases ideais

O modelo da teoria cinética para um gás ideal é formulado com base nas seguintes condições:

- O gás é constituído por um número gigantesco de moléculas em movimento aleatório que possuem dimensões insignificantes perante ao meio em que se movem.
- A interação entre as moléculas se dá apenas nas colisões (perfeitamente elásticas e com tempo de duração desprezível) e seu deslocamento entre uma colisão e outra é o de uma partícula livre.
- Assume-se que o movimento das moléculas se dá em um referencial inercial.

As condições deste modelo são satisfeitas, se não em sua totalidade, em boa parte pelos escoamentos na atmosfera. Portanto é possível utilizá-lo para ajudar a descrever estes escoamentos. Para o gás ideal a equação de estado termodinâmico é dada por

$$pV = n\mathcal{R}T \quad (2.22)$$

onde  $V$  é o volume,  $n$  o número de mols,  $\mathcal{R}$  é a constante dos gases ideais e  $T$  é a temperatura absoluta. O número de mols contidos em um determinado volume  $V$  de alguma substância pode ser obtido através da razão entre a massa contida em  $V$  e a massa molar  $M$  da substância:

$$\begin{aligned}
 pV &= \frac{m}{M} \mathfrak{R}T \\
 p &= \frac{m}{V} \frac{\mathfrak{R}}{M} T \\
 p &= \rho \frac{\mathfrak{R}}{M} T
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Como uma boa aproximação, podemos considerar a atmosfera como um gás ideal. Assim, definimos a constante dos gases para o ar atmosférico,  $R$  como

$$R = \frac{\mathfrak{R}}{M}. \tag{2.24}$$

A constante dos gases para a atmosfera depende da concentração dos diferentes gases que compõem tal fluido. Para o ar seco este valor é bem definido pois a atmosfera possui concentração fixa de seus principais componentes: nitrogênio, oxigênio, gás carbônico e argônio. Porém, quando consideramos o ar úmido devemos levar em conta a quantidade de vapor d'água na atmosfera o que implica numa constante termodinâmica que depende dos constituintes da mistura, o que não é interessante do ponto de vista matemático. A partir desta necessidade define-se a temperatura virtual  $T_v$ . A temperatura virtual é a temperatura que uma parcela de ar, mantida a mesma densidade e pressão teria se o ar fosse seco. Matematicamente tem-se:

$$T_v = T (1 + 0,61w) \tag{2.25}$$

e conseqüentemente,

$$\theta_v = \theta (1 + 0,61w). \tag{2.26}$$

Então, podemos reescrever a equação de estado do gás ideal para uma atmosfera úmida utilizando a constante do ar seco

$$p = \rho R_d T_v \tag{2.27}$$

### 2.3.3 Primeira Lei da Termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica é uma consequência direta da aplicação do princípio da conservação da energia em um sistema termodinâmico. Seja  $E_{in}$  a energia interna do sistema. Se o sistema for perturbado infinitesimalmente uma variação da energia interna  $dE_{in}$  é percebida. Isto é decorrência da quantidade de energia na forma de calor  $dQ$  trocada com as vizinhanças e pela quantidade de energia trocada na forma de trabalho  $dW$  devido a expansão ou contração do sistema contra as vizinhanças. Logo, por conservação de energia, a variação da energia interna é dada por,

$$dE_{in} = dQ + dW \quad (2.28)$$

onde a expressão (2.28) é a representação matemática da primeira lei da termodinâmica.

### 2.3.4 Segunda Lei de Newton aplicada a fluidos geofísicos – equação de Navier-Stokes

A segunda Lei de Newton aplicada a fluidos geofísicos (que escoam na superfície ou adjacências do planeta) é dada por<sup>3</sup>:

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}}_I + \underbrace{\vec{U} \cdot \nabla \vec{U}}_{II} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p}_{III} + \underbrace{g_{ef} \hat{r}}_{IV} - \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{U}}_V + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{U}}_{VI} \quad (2.29)$$

esta equação também é chamada de equação de Navier-Stokes. Nela estão contidas todas as informações sobre um determinado escoamento e cada termo tem uma interpretação física. Ela relaciona a aceleração ( $\vec{a}$ ) em uma partícula de fluido com as suas causas (forças ( $\vec{F}$ )) usando como constante de proporcionalidade o inverso da massa ( $m$ ).

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F} \quad (2.30)$$

<sup>3</sup>As considerações realizadas e o desenvolvimento matemático para obter a equação são descritos no apêndice C.

- Termo I – Variação local de velocidade: Corresponde a variação Euleriana de velocidade, ou seja, a variação temporal da velocidade em um único ponto do campo de velocidade.
- Termo II – Transporte advectivo: Corresponde ao transporte advectivo de velocidade. A soma do termo I com o termo II equivale a variação temporal total do campo de velocidade ou variação Lagrangiana deste campo.
- Termo III – Gradiente de pressão: Corresponde a aceleração causada em um elemento de fluido devido ao gradiente de pressão. O sinal negativo indica que a aceleração causada é sempre contrária ao gradiente de pressão ou seja, a força devido a este termo tem sentido que aponta da região de alta para baixa pressão.
- Termo IV – Gravidade efetiva: É a resultante da aceleração gravitacional e da aceleração centrífuga imposta por um referencial não inercial que apresenta movimento de rotação.
- Termo V – Coriolis: Este termo representa a aceleração imposta pela força de Coriolis que surge devido a rotação da Terra.
- Termo VI – Dissipação: Este termo corresponde a desaceleração causada na partícula de fluido devido a viscosidade.

### **2.3.5 Considerações sobre as equações básicas**

Acredita-se que a equação de Navier-Stokes juntamente com as demais equações possa descrever completamente o escoamento mediante condições iniciais e contorno apropriadas. Porém, a solução desta equação é de grande complexidade matemática devido a natureza desta equação. Stanišić (1988 *apud* WELTER, 2005) indica os seguintes fatores complicadores para a realização da solução da equação de Navier-Stokes:

- não linearidade;
- acoplamento;
- não ser compreendida pelo conjunto de equações com simetria hiperbólica, parabólica e elíptica;

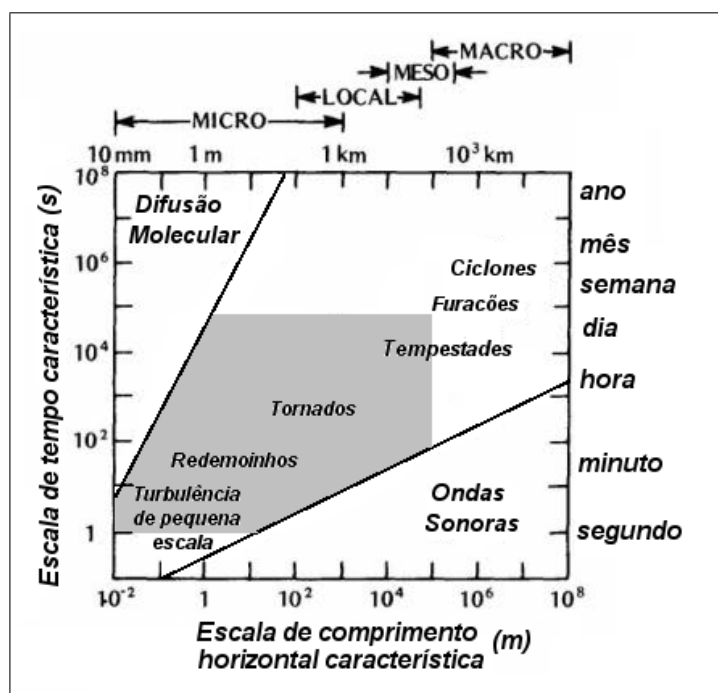
- a geometria e as condições de fronteira dinâmicas para quais o sistema é sujeito.

Além da dificuldade matemática que envolve a solução da equação que descreve a segunda lei de Newton aplicada na dinâmica de fluidos, há o problema físico de não se conhecer as condições iniciais e os fatores que controlam o movimento. Mesmo que as complexidades matemáticas e físicas fossem suplantadas e, fosse possível conhecer a velocidade do escoamento em cada ponto da região de domínio, para cada instante de tempo, ainda recairíamos em um outro obstáculo: como aplicá-lo. A quantidade de informação seria absurdamente gigantesca e não teríamos como lidar com essa quantidade de informação e armazená-la seria extremamente custoso computacionalmente. Isto porque o número de graus de liberdade para um escoamento turbulento é proporcional a  $Re^{9/4}$  (LANDAU; LIFSHITZ, 1959), ou seja, o número de graus de liberdade cresce rapidamente quando o escoamento se torna turbulento. Desta forma, a ferramenta que torna viável o estudo deste fenômeno complexo é o tratamento estatístico das variáveis.

Anteriormente foi discutido o fluido como um meio contínuo. Contudo, as interações moleculares podem controlar a estabilidade do fluido e pequenas flutuações na viscosidade originadas a partir da colisão entre as moléculas, pode desencadear o processo de quebra de simetrias que leva ao regime de escoamento turbulento. Uma investigação mais rigorosa sobre os processos de transfêrencia de *momentum* na escala molecular deveria ser tratada utilizando-se o formalismo da teoria cinética dos gases. Seguindo este método, perderíamos de vista o modelo de fluido como meio contínuo e passaríamos a tratar o escoamento como um problema de muitos corpos. Neste contexto, não poderíamos utilizar o emprego da mecânica estatística clássica pois um escoamento turbulento caracteriza um sistema longe do equilíbrio termodinâmico. Esta é uma outra razão para se evitar considerações em primeiros princípios e considerar métodos estatísticos no estudo da turbulência (WELTER, 2006).

## 2.4 Escalas dos fenômenos atmosféricos

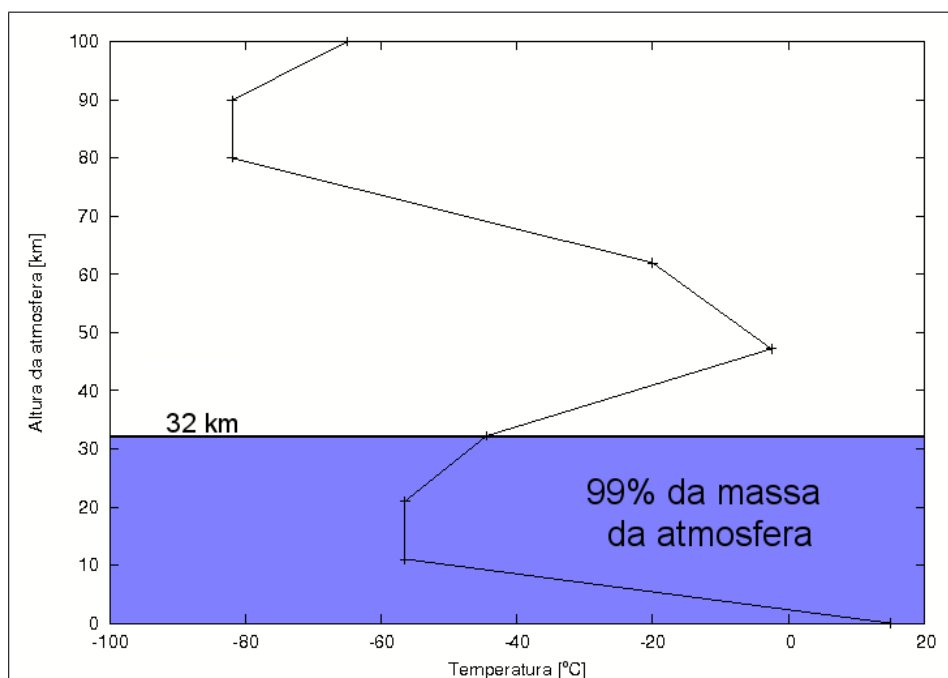
A atmosfera é caracterizada por fenômenos cujas escalas temporais e espaciais variam em um grande intervalo. As escalas espaciais desses fenômenos são determinadas a partir de um tamanho ou comprimento de onda típico e a escala de tempo se baseia no intervalo de tempo de duração ou período destes fenômenos. A figura 2.4 mostra uma correlação entre fenômenos atmosféricos e suas escalas temporais e espaciais. A área sombreada na figura representa os fenômenos que são influenciados pela superfície. Esta primeira análise parece dar uma idéia de que os fenômenos na atmosfera se manifestam de forma discretizada e que ocorrem independentemente uns dos outros. Porém isto não é correto – os fenômenos, cada qual em suas escalas atmosféricas, são partes de um fenômeno dinâmico contínuo que são separados apenas para fins de simplicidade no estudo (OKE, 1987, p. 4).



**Figura 2.4:** Escalas temporais e espaciais de vários fenômenos atmosféricos(OKE, 1987, p. 5).

## 2.4.1 Modelo da Atmosfera Padrão

A atmosfera padrão é uma representação idealizada da atmosfera em latitudes médias com condições anuais médias. As variações de pressão com altura na atmosfera padrão são típicas e, em muitos casos, utilizadas como aproximação inicial. Uma representação do perfil vertical da atmosfera padrão é apresentado na figura 2.5. É interessante observar que a maior parte da massa da atmosfera está até  $32\text{km}$  de altitude, portanto são os movimentos atmosféricos até este nível que tem impacto direto sobre o Clima e o Tempo na Terra e influenciam diretamente a baixa atmosfera.



**Figura 2.5:** Representação da atmosfera padrão – uma idealização da atmosfera.

# Capítulo 3

## Camada Limite Planetária

Em mecânica de fluidos, de maneira geral, define-se camada limite como a região do escoamento na qual a velocidade tende a zero na vizinhança de uma parede sólida. Portanto, esta região é caracterizada por um gradiente de velocidade de grande magnitude (LANDAU; LIFSHITZ, 1959, p. 145). Esta definição leva em conta apenas o forçante mecânico, ou seja, o cisalhamento do campo de velocidade do escoamento. Na troposfera, próximo à superfície, também há a formação de uma camada limite, na qual além do cisalhamento do vento deve-se considerar os efeitos térmicos gerados pelo aquecimento da superfície devido a incidência de radiação eletromagnética proveniente do Sol. Deste modo, considerando-se este forçante adicional, define-se Camada Limite Planetária (CLP) como a região da atmosfera que tem seu regime de escoamento diretamente influenciado pela presença da superfície (cisalhamento do campo de velocidade do vento e aquecimento (ou resfriamento) dos níveis inferiores da atmosfera). O escoamento atmosférico na CLP é essencialmente turbulento e o número de Reynolds é da ordem de  $10^7$ . A intensidade da turbulência na CLP é diretamente influenciada pelos forçantes que formam a própria camada limite planetária. Por isso uma outra definição de CLP pode ser dada em função da turbulência: CLP pode ser definida como a porção da atmosfera onde os efeitos diretos da superfície sobre o processo de transporte turbulento são apreciáveis (BUSINGER, 1981). A altura da CLP possui uma grande variabilidade e depende de condições como cobertura de nuvens, quantidade de radiação recebida pela atmosfera, estação do ano etc. Durante um dia ensolarado o seu valor pode chegar a mais de  $1000m$ . Sobre regiões continentais e na ausên-



cia de nuvens a CLP tem um ciclo diário, particularmente bem definido, onde a sua estrutura se modifica ao longo do dia em função dos forçantes que atuam sobre o escoamento. Porém, deve ser enfatizado que o forçante fundamental na CLP é a incidência de radiação eletromagnética na superfície.

### 3.1 Balanço radiativo na superfície

Na superfície do planeta Terra ocorre a quase totalidade das entradas de massa e energia disponível no sistema Terra–Atmosfera. Estas transferências ocorrem através de diferentes processos para níveis superiores da atmosfera ou para o interior do planeta. Todos os corpos com temperatura acima do zero absoluto emitem energia na forma de radiação eletromagnética, e o fluxo desta energia por comprimento de onda é descrito pela Lei de Planck:

$$E_{\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/K\lambda T) - 1} \quad (3.1)$$

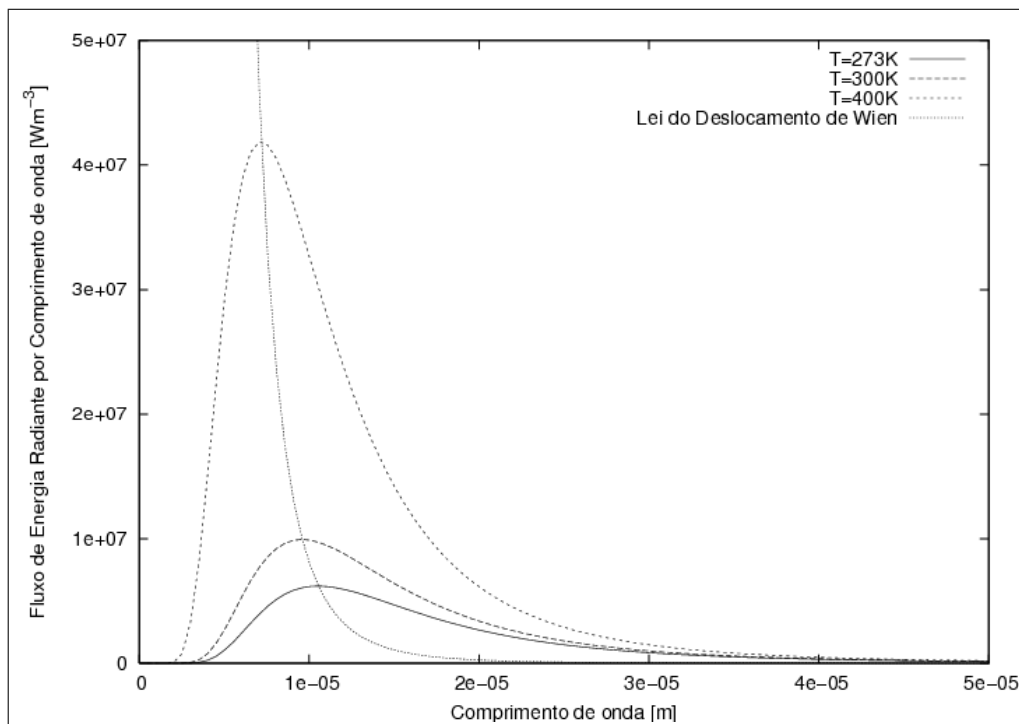
onde  $T$  é a temperatura absoluta do corpo,  $h$  é a constante de Planck e  $c$  a velocidade da luz. A integral da função  $E_{\lambda}d\lambda$  para todos os comprimentos de onda equivale ao fluxo de energia total recebido ou emitido pelo corpo e isto também pode ser descrito pela Lei de Stefan-Boltzmann:

$$E = \varepsilon\sigma T^4 \quad (3.2)$$

onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann e  $\varepsilon$  é a emissividade do corpo. O comprimento de onda no qual ocorre o pico de emissão depende da temperatura do corpo. A lei que desceve a variação do comprimento de onda máximo em função da temperatura é a Lei de Deslocamento de Wien, escrita como:

$$\lambda_m = 2,88 \times 10^{-3} \frac{1}{T} \quad (3.3)$$

É possível distinguir a radiação solar da terrestre pela análise do comprimento de onda. Define-se radiação de onda curta é a radiação solar e a radiação de onda



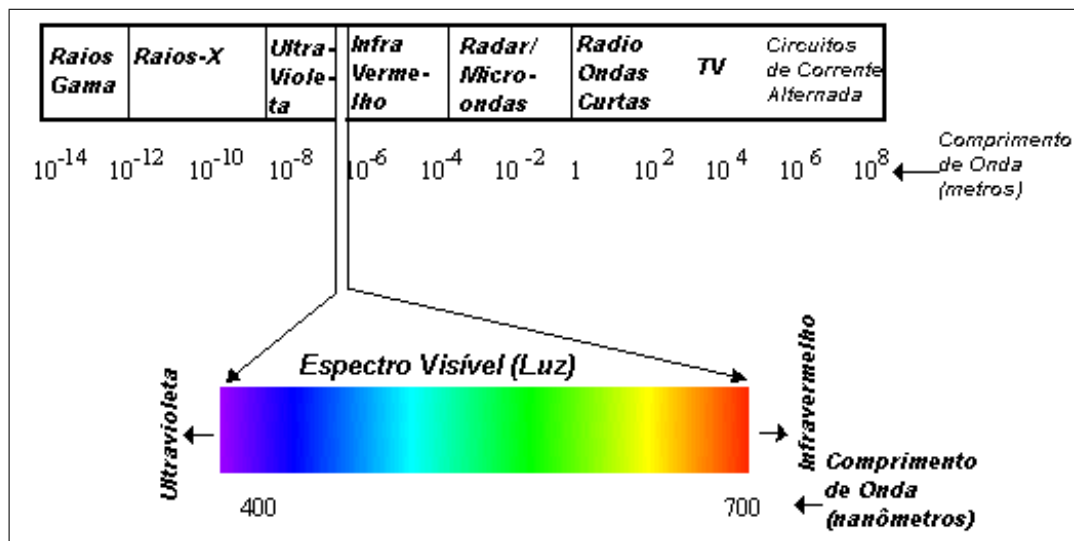
**Figura 3.1:** Espectro de emissão de um corpo negro a diferentes temperaturas e Lei do Deslocamento de Wien

longa é a radiação terrestre.

A emissão solar se dá em uma extensa faixa, desde frequências altíssimas até muito baixas. A radiação solar é caracterizada por comprimentos de onda menores que  $10^{-8} \mu\text{m}$  até  $10^{16} \mu\text{m}$ .

Raios *gamma*, raios-X e ultravioleta, em ondas curtas, antecedem a região espectral em que a luz é visível. O espectro visível é a faixa de radiação de ondas curtas, na qual as ondas eletromagnéticas, atuando sobre a matéria, são captadas pelo olho humano. Tal espectro, de  $400$  a  $700\text{nm}$ , contém o comprimento de onda máximo de emissão do Sol. Nesta faixa de comprimentos de onda a atmosfera é praticamente transparente, por isso, é o canal mais importante de aquecimento da Terra (cerca de 70% da energia solar incidem na Terra). A região do infravermelho, de  $700\text{nm}$  em diante, desempenhará uma importante função: captar energia liberada pela superfície em onda longa. Neste caso, os gases em suspensão na atmosfera desempenham um papel fundamental.

Cada gás constituinte da atmosfera tem propriedades radiativas específicas. Assim, a radiação solar incidente é por eles parcialmente refletida, transmitida,



**Figura 3.2:** Representação do espectro eletromagnético

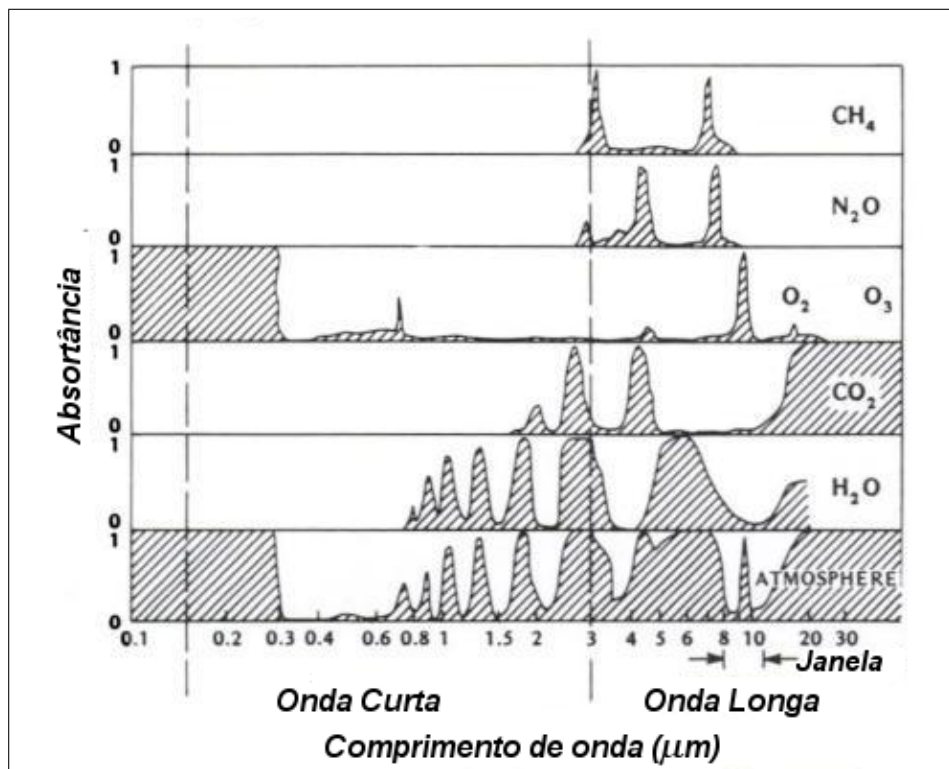
absorvida e reemitida. Os constituintes atmosféricos em geral não são bons absorvedores de onda curta, exceto o ozônio, que é bastante eficaz na absorção de radiação ultravioleta. Por outro lado, o vapor d'água que se torna progressivamente bom absorvedor para comprimentos de onda acima de  $800\text{nm}$ . Na banda em que ocorre o pico de emissão solar, em torno de  $480\text{nm}$ , a atmosfera é transparente.

A absorção de onda longa por constituintes atmosféricos é mais complexa, pois a maioria dos constituintes atmosféricos são bons absorvedores em alguma faixa. Os constituintes que mais contribuem são o vapor d'água, o dióxido de carbono e o ozônio, sendo o vapor d'água o mais importante pois está em maiores concentrações na atmosfera. Porém, no intervalo de  $8 \times 10^3\text{nm}$  a  $11 \times 10^3\text{nm}$  a atmosfera, na ausência de nuvens, é transparente para onda longa. Esse intervalo é chamado de janela atmosférica, e é neste local que se dá a maior perda de energia do sistema Terra–Atmosfera para o espaço.

Quando a radiação de determinado comprimento de onda incide ( $I_\lambda$ ) sobre uma substância, pode ser transmitida através desta ( $T_\lambda$ ), refletida por sua superfície ( $R_\lambda$ ) ou absorvida ( $A_\lambda$ ), de forma que a conservação de energia pode ser expressa como:

$$I_\lambda = T_\lambda + R_\lambda + A_\lambda \quad (3.4)$$

ou



**Figura 3.3:** Absorção dos constituintes da atmosfera em função do comprimento de onda da radiação incidente, adaptado de Oke, 1989.

$$t_{\lambda} + r_{\lambda} + a_{\lambda} = 1 \quad (3.5)$$

onde  $t_{\lambda}$  é a transmissividade,  $r_{\lambda}$  é a refletividade e  $a_{\lambda}$  é a absorvidade.

Essas propriedades são típicas de cada substância e definidas em cada comprimento de onda. Podemos definir, então, o albedo  $al$ , como a refletividade em onda curta:

$$al = \frac{\text{Radiação refletida de onda curta}}{\text{Radiação incidente de onda curta}} \quad (3.6)$$

Quanto maior o albedo, menos radiação de onda curta é absorvida pela superfície.

O balanço radiativo corresponde a soma de quatro componentes e determina a radiação líquida ( $Q^*$ ). Assume-se como referência valores positivos de radiação quando esta é emitida da superfície para atmosfera e negativos quando a radiação é emitida da atmosfera para a superfície. As componentes do balanço radiativo são:

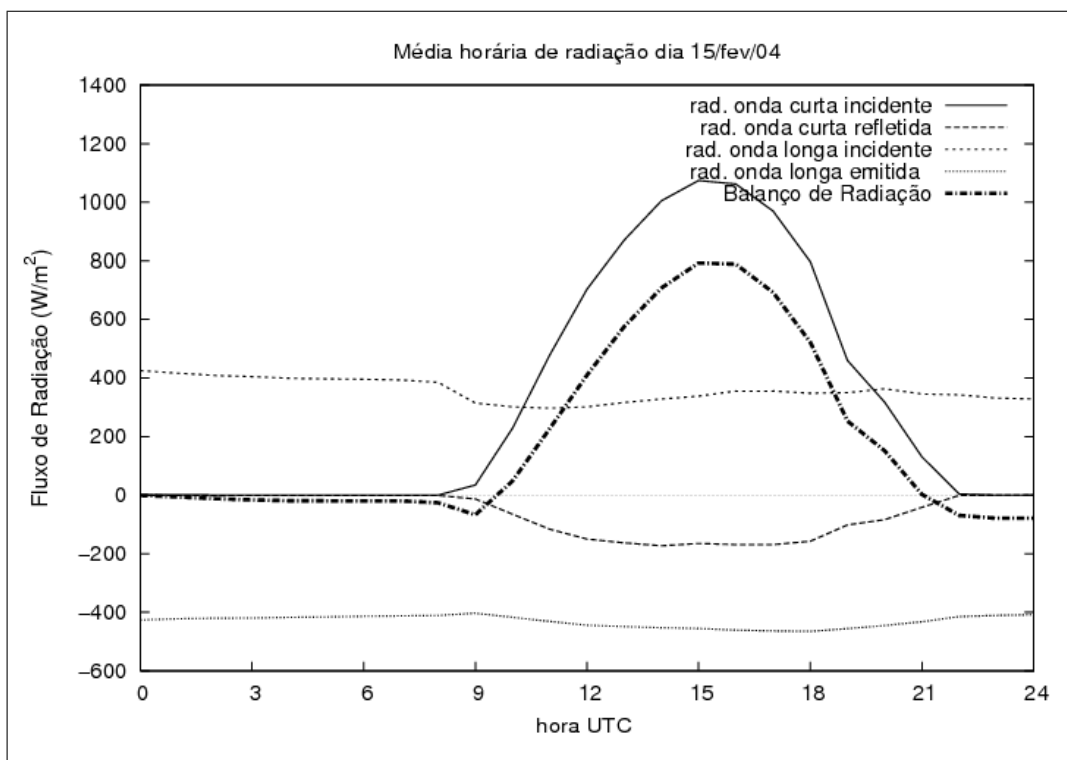
- $K \downarrow$  – radiação incidente de onda curta: é a soma das componentes direta ( $S$ )

e difusa( $D$ ). Varia com a latitude e a época do ano. A cobertura de nuvens também afeta seu valor.

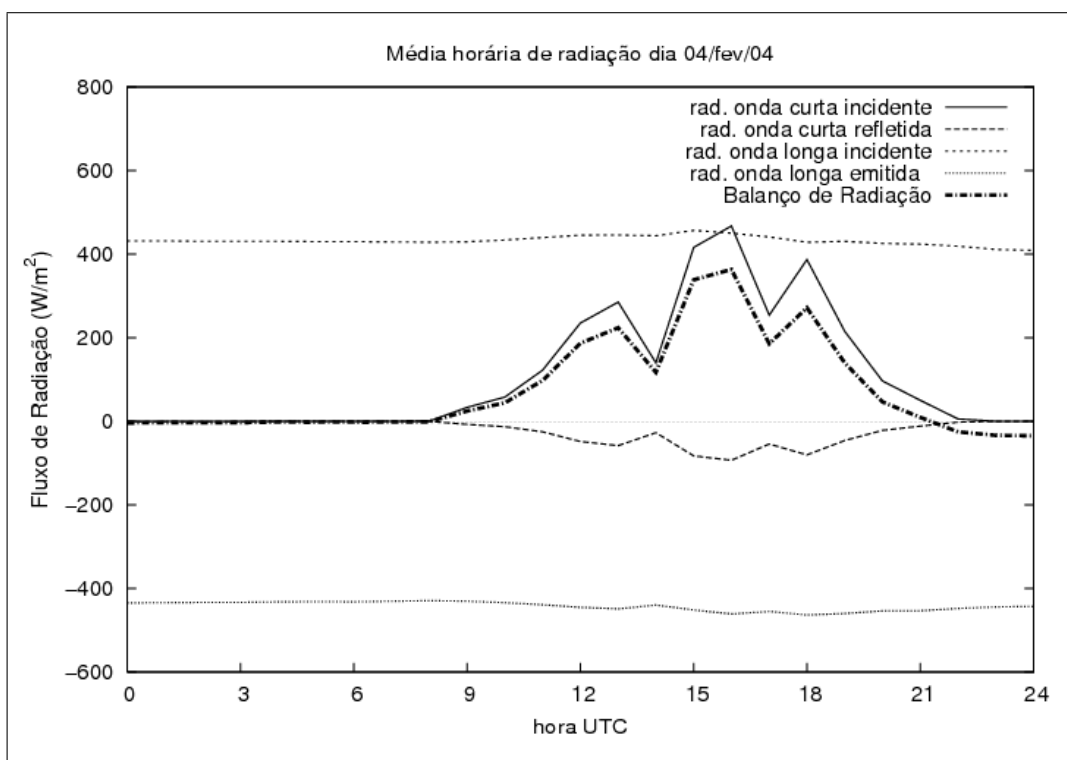
- $K \uparrow$  – radiação de onda curta refletida: depende da radiação incidente e do albedo superficial.
- $L \downarrow$  – radiação de onda longa emitida pela atmosfera para a superfície: depende da composição e temperatura atmosféricas. Tem pouca variação durante o dia.
- $L \uparrow$  – radiação de onda longa emitida pela superfície: depende da temperatura e emissividade superficial, de acordo com a lei de Stefan-Boltzmann. Apresenta pouca variação diária, os valores maiores ocorrem durante o dia do que à noite (devido à temperatura).

$$Q_* = K \downarrow - K \uparrow + L \downarrow - L \uparrow \quad (3.7)$$

A radiação líquida é positiva durante o dia, e negativa durante a noite como pode ser observado nas figuras 3.4 e 3.5 que apresentam gráficos de médias horárias de fluxo de radiação medidos na estação experimental de Paraíso do Sul. A primeira para um dia sem cobertura de nuvens e a segunda para um dia nublado.



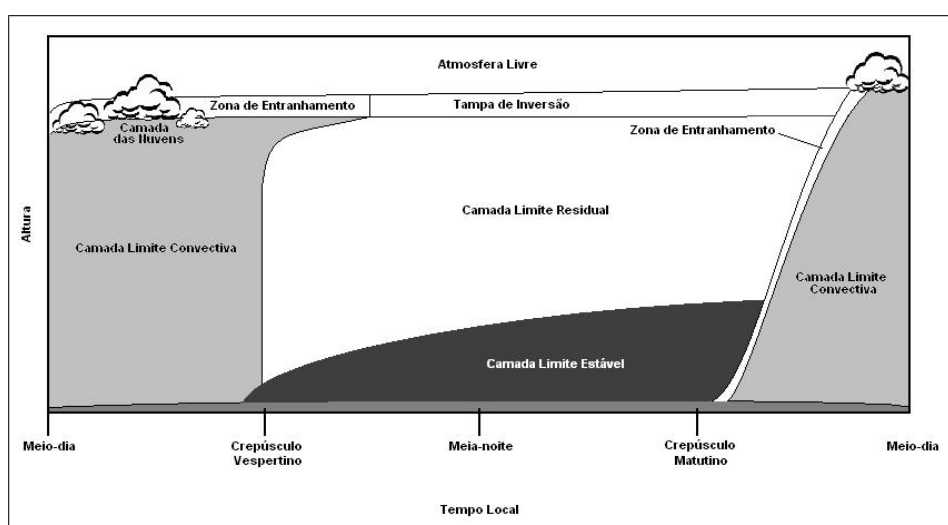
**Figura 3.4:** Evolução das médias horárias de fluxo de radiação para o dia 15 de fevereiro de 2004.



**Figura 3.5:** Evolução das médias horárias de fluxo de radiação para o dia 4 de fevereiro de 2004.

## 3.2 Variação diária da CLP

Com o nascer do Sol ocorre o processo de aquecimento da superfície pela radiação incidente de onda curta. A atmosfera é semi-transparente a este intervalo de freqüências do espectro eletromagnético, portanto não é a radiação incidente que aquece diretamente a CLP mas sim a radiação absorvida pela superfície e reemitida para a atmosfera. A partir deste aquecimento começa a se formar a Camada Limite Planetária Convectiva ou simplesmente Camada Limite Conectiva (CLC). Esta camada vai crescendo com o passar da manhã e atinge o seu valor máximo por volta do meio dia. Esta estrutura se mantém até o momento em que começa a diminuir a incidência de radiação e esta começa a decair. Com isso, no pôr-do-sol a CLC deixa de existir e em seu lugar começa a se formar uma Camada Limite Planetária Estável ou Camada Limite Estável (CLE). Acima desta CLE formada pela estratificação térmica existe uma camada formada por resíduos da CLC, a chamada Camada Limite Planetária Residual ou Camada Limite Residual (CLR), caracterizada pelo decaimento da turbulência convectiva que ocorre por, aproximadamente, 1h após o por-do-sol. A CLE se mantém até o crepúsculo matutino onde o ciclo novamente se inicia. Durante a transição entre a CLC–CLE–CLC, em momentos onde há um campo de velocidades intenso ou cobertura de nuvens, a CLP pode ter um caráter neutro. Esta é a Camada Limite Planetária Neutra ou Camada Limite Neutra (CLN).



**Figura 3.6:** Representação da variação diária da CLP. Adaptado de Stull, 1988.

### 3.2.1 Camada limite convectiva

Devido ao aquecimento da superfície pela incidência de radiação eletromagnética de onda curta o solo adquire uma temperatura maior que a da atmosfera. Isto estabelece um gradiente vertical de temperatura e, conseqüentemente, a troca de energia na forma de calor entre a superfície e a CLP se dá no sentido solo-atmosfera e então as camadas de ar adjacentes ao solo se tornam menos densas que as superiores e ascendem criando células de convecção ou termas (com um caráter instável) estabelecendo um escoamento turbulento na vertical. A turbulência nesta estrutura particular da CLP é predominantemente convectiva (devido ao forçante térmico que a superfície impõe a atmosfera). Quanto mais intensa é a turbulência mais eficiente é o processo de transporte das camadas inferiores de ar para as superiores promovendo uma eficiente troca de energia na forma de calor, *momentum* e matéria entre os níveis inferiores e superiores. Quando este processo é bem estabelecido uma região homogênea é criada no interior da CLC, a camada de mistura, caracterizada pelo gradiente vertical nulo de velocidade, temperatura etc. Além disto, nos primeiros metros, em relação a superfície, existe a influência da turbulência gerada mecanicamente devido ao cisalhamento do campo de vento com o solo.

### 3.2.2 Camada limite estável

No final do dia quando desaparece a incidência de radiação eletromagnética de onda curta na superfície, o gradiente vertical de temperatura se inverte. Nesta situação a atmosfera torna-se mais quente que a superfície passando a aquecê-la através da troca de energia na forma de calor. Com isso os níveis inferiores tornam-se menos aquecidos que os superiores e os movimentos ascendentes das termas são freados por ação da força de empuxo. A atuação desta força de empuxo torna a camada estável, ou seja, uma parcela de fluido que por algum motivo é deslocada de baixo para cima (ou de cima para baixo) encontra regiões mais quentes (mais frias) e portanto menos densas (mais densas) e acaba sendo forçada a descer (subir). Então, o forçante térmico que antes era fonte de instabilidade e por conseqüência turbulência agora é sumidouro e começa a destruir estas estruturas.



A CLE vai aumentando sua altura de domínio conforme este gradiente de temperatura negativo vai se estabelecendo nos níveis mais elevados da CLP. A turbulência na CLE é predominantemente mecânica. Em regiões onde os ventos noturnos possuem uma velocidade baixa durante a noite a intensidade da turbulência é bastante reduzida chegando quase a extinção. Uma peculiaridade da turbulência na CLE é o fenômeno da intermitência que corresponde a uma reorganização do escoamento gerando picos de intensidade turbulenta durante a evolução desta camada. Outros fenômenos interessantes que ocorrem na CLE é o meandro do vento e a formação de jatos de baixos níveis. Em geral a CLE atinge alturas bem menores que a CLC.

### 3.2.3 Camada limite neutra

Esta camada não tem sua existência caracterizada por períodos apreciáveis na CLP. Ela ocorre em momentos de transição de estabilidade ou em dias com forte vento. Sua principal característica é o gradiente vertical de temperatura nulo.

### 3.2.4 Camada limite residual

A CLR se forma logo após o pôr do sol e é constituída pelo resíduo de turbulência da CLC que persiste nos níveis mais altos da CLP. A turbulência convectiva nesta camada decai rapidamente (aproximadamente 1h) e há pouca influência da turbulência gerada na superfície nesta camada.

## 3.3 Equação da energia cinética turbulenta

A energia cinética turbulenta é a fração da energia cinética do escoamento devido as flutuações de velocidade da partícula de fluido. Qualquer variável  $\xi$  pode ser descrita como a soma de duas partes: uma parte média e uma flutuação.

$$\xi = \bar{\xi} + \xi' \quad (3.8)$$

onde  $\bar{\xi}$  é a parte média e  $\xi'$  a flutuação ou variável turbulenta. Pela definição de

energia cinética temos:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m u_i^2 \quad (3.9)$$

onde  $m$  é a massa da partícula e  $u_i$  é a velocidade da partícula na direção  $i$ . Definindo  $e$  como a energia cinética por unidade de massa

$$e = \frac{E_{cin}}{m}, \quad (3.10)$$

temos que a energia cinética turbulenta média por unidade de massa é dada por

$$\bar{e}' = \frac{1}{2} \overline{u_i'^2}. \quad (3.11)$$

O princípio da conservação da energia diz que em um sistema isolado<sup>1</sup> a energia se conserva, então

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}'}{dt} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{e}'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}'}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j' e'}}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Porém, na camada limite planetária temos influência de forçantes externos como a radiação solar. Portanto para manter a condição de sistema isolado e garantir a validade do princípio de conservação da energia precisamos incluir na equação (3.12) os termos de fonte  $\Xi$  e sumidouro  $\beta$  de energia cinética turbulenta. Logo, para um fluido incompressível

$$\frac{\partial \bar{e}'}{\partial t} = -\bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}'}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{(u_j' e')}}{\partial x_j} + \Xi + \beta \quad (3.13)$$

Os termos de fonte e sumidouro podem ser encontrados matematicamente a partir da manipulação da equação de Navier-Stokes. A equação da energia cinética turbulenta com os termos de fonte e sumidouro é dada por

<sup>1</sup>Não há troca de energia com o exterior do sistema nem a influência de forças não conservativas.

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{e}'}{\partial t}}_I = - \underbrace{\bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}'}{\partial x_j}}_{II} - \underbrace{\frac{\partial (\overline{u'_j e'})}}_{III} + \underbrace{\delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} (\overline{u'_i \theta'_v})}_{IV} - \underbrace{\bar{u}'_i \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_V - \underbrace{\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u'_i p'})}_{VI} - \underbrace{\varepsilon}_{VII} \quad (3.14)$$

- Termo I: Variação temporal local da energia cinética turbulenta média;
- Termo II: Transporte advectivo médio de energia cinética turbulenta média;
- Termo III: Transporte turbulento de energia cinética turbulenta média;
- Termo IV: Criação ou destruição de energia cinética turbulenta devido ao fluxo de energia na forma de calor  $\overline{u'_j \theta'_v}$ . Este termo é positivo quando a camada é convectiva ou instável (geralmente durante o dia). Neste caso é um termo de produção de energia cinética turbulenta. Quando a camada é estável, geralmente durante a noite, este fluxo é negativo devido a inversão do gradiente vertical de temperatura. Este termo no período noturno impõe a CLP um balanço delicado de energia cinética turbulenta. Por isso, durante a noite a turbulência é muito menos intensa do que durante o dia.
- Termo V: Produção de energia cinética turbulenta a partir do cisalhamento do campo de velocidade do vento. Este termo, mesmo com sinal negativo na equação é termo de produção pois o fluxo de momento  $\overline{u'_i u'_j}$  é sempre contrário ao gradiente de velocidade, portanto o fluxo é negativo e com isso o termo torna-se positivo.
- Termo VI: Transporte de energia cinética turbulenta devido as flutuações de pressão. Este termo está associado as oscilações no ar criadas pela resultante da força de empuxo e força gravitacional ou ondas de gravidade.
- Termo VII: Taxa de dissipação de energia cinética turbulenta. Representa a dissipação de energia cinética turbulenta como energia na forma de calor. Sua origem é a interação eletromagnética (viscosidade).

Algumas simplificações podem ser feitas na equação (3.14). Considerando a homogeneidade horizontal da turbulência a soma dos fluxos turbulentos horizontais é nula e ainda, fazendo uma rotação de coordenadas e alinhando a componente  $\bar{v}$  do vento com o próprio valor da velocidade média do vento, temos que  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  são nulas. Assim, reescrevemos a equação (3.14) como:

$$\frac{\partial \bar{e}'}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial \bar{e}'}{\partial x} - \frac{\partial (\overline{w'e'})}{\partial z} + \frac{g}{\theta_v} (\overline{w'\theta'_v}) - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'p'}) - \varepsilon \quad (3.15)$$

# Capítulo 4

## Dinâmica de fluidos computacional

A dinâmica de fluidos computacional (CFD, do inglês *Computational Fluid Dynamic*) é o estudo de escoamentos através de simulações numéricas. Este tipo de estudo é empregado tanto no desenvolvimento de pesquisas científicas de base como no de produtos tecnológicos (SAGAUT, 1998). No que se refere a investigação de escoamentos complexos, as simulações numéricas nos ajudam a entender, modelar e prever os diferentes efeitos causados por cada um dos forçantes que atuam no escoamento. Contudo, este tipo de estudo exige que as simulações numéricas forneçam dados com grande precisão e alta performance o que implica em uma forte relação entre o modelo físico e o algoritmo implementado para reproduzi-lo.

A qualidade ou coerência física dos dados gerados pela simulação é extremamente dependente da resolução do modelo. Para uma precisão ótima a simulação deve ter uma resolução que contemple todas as escalas temporais e espaciais do escoamento. Quando o intervalo de escalas é muito grande, como no escoamento turbulento, o problema torna-se complicado uma vez que a razão entre as maiores e menores escalas tende a um número bastante elevado.

Para inserir todas as escalas espaciais relevantes na simulação de um escoamento turbulento, ou seja, para se realizar uma simulação numérica direta (DNS, do inglês *direct numerical simulation*) deve-se considerar os turbilhões mais energéticos, de escala  $\ell_e$  e a microescala de Kolmogorov  $\eta$ . A razão entre essas duas escalas é diretamente relacionada com o número de Reynolds expressa pela seguinte relação(WYNGAARD, 1981)

$$\frac{\ell_e}{\eta} \sim Re^{3/4}. \quad (4.1)$$

Então, a razão entre as escalas aumenta quando o escoamento torna-se mais turbulento. Welter (2006), estimou o número de Reynolds da microescala de Taylor ( $R_\lambda$ ) e a microescala de Kolmogorov para várias séries de dados consecutivas de CLP. Utilizando uma destas séries com  $R_\lambda = 20975m$  e  $\eta = 0,53mm$ , tem-se  $Re \sim 10^7$ . Logo,  $\ell_e \sim 100m$ .

Considerando a hipótese de que a menor escala que contribui para o escoamento turbulento é da ordem de  $\eta$  e utilizando um domínio horizontal de  $5km$  em cada dimensão e  $2km$  na vertical necessitamos de uma grade tridimensional da ordem de  $4 \times 10^{20}$  pontos. Assim, torna-se inviável a aplicação desta técnica para simulações de escoamentos com número de Reynolds elevado.

Neste contexto aplica-se a técnica de Simulação dos Grandes Turbilhões (LES, do inglês *large eddy simulation*). Esta técnica não resolve completamente o intervalo de escalas que compõem o escoamento e sim a parte que contém a maior porção da energia cinética turbulenta, ou seja, os grandes turbilhões.

## 4.1 Descrição do escoamento a partir do processo de médias

Como visto anteriormente, resolver completamente, mesmo que numericamente, as equações para o campo de velocidade de um escoamento com elevado número de Reynolds (como o escoamento na CLP) é uma tarefa considerada, atualmente, impossível. Por isso utiliza-se modelos que resolvem equações médias para o escoamento. Antes de definir a natureza do processo de média aplicado às variáveis do escoamento, escreveremos uma variável qualquer  $a$  como a soma da parte média  $A$  é um desvio em relação à media  $\check{a}$ ,

$$a = A + \check{a} \quad (4.2)$$

Considerando um campo de velocidade descrito em coordenadas retangulares

$(x, y, z)$ , e aplicando a decomposição acima ao termo não linear do campo de velocidade de um escoamento, temos

$$u_i u_j = (U_i + \check{u}_i)(U_j + \check{u}_j) \quad (4.3)$$

$$u_i u_j = U_i U_j + U_i \check{u}_j + \check{u}_i U_j + \check{u}_i \check{u}_j \quad (4.4)$$

Aplicando na equação (4.3) o processo de média sobre *ensemble*<sup>1</sup> a equação se reduz a:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{U_i U_j} + \overline{u'_i u'_j} \quad (4.5)$$

já que neste processo a média das flutuações é nula. O operador média sobre *ensemble* é representado pela barra acima do termo mediado e as flutuações pelo símbolo  $'$ . Logo o termo não linear, neste processo, é representado pelo produto das média da velocidade em cada direção e pela média do produto das flutuações, onde este produto  $\overline{u'_i u'_j}$  é conhecido como tensor de Reynolds, em homenagem a Osborn Reynolds que o propôs em 1895 (WYNGAARD, 1981), sendo Reynolds um dos precursores do estudo de escoamentos turbulentos. O processo de média sobre *ensemble*, largamente utilizado em mecânica estatística, na mecânica de fluidos é bastante referenciado como média de Reynolds. Este processo de média descreve as equações de movimento em função dos campos médios, necessitando assim de uma resolução numérica muito menos apurada que o DNS, pois se espera que a resolução de grade seja da ordem de  $\ell_e$ . Todavia este método não descreve os processos de flutuação intrínsecos ao escoamento turbulento(WYNGAARD, 1981).

Por não fornecer informações sobre os processos de flutuação do escoamento turbulento, muitas vezes se utiliza outros processos de média. Um deles é o processo de média sobre volume. Considerando a componente  $i$  do campo de velocidade descrito em coordenadas retangulares  $(x, y, z)$ , a operação média sobre volume da variável  $u_i$  pode ser definida pela seguinte expressão(DEARDORFF, 1973):

<sup>1</sup>Considerando um experimento repetido infinitas vezes com as mesmas condições, a média sobre *ensemble* corresponde a média aritmética de cada variável  $a(x_i, t)$

$$\{u_i\}(x_i, t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} u_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.6)$$

onde  $\{ \}$  representa o operador média sobre volume. Este operador aplicado em um termo não linear do tipo  $u_i u_j$  é escrito como (WYNGAARD, 1981)

$$\{u_i u_j\} = \{U_i\} \{U_j\} + R_{ij} \quad (4.7)$$

onde  $R_{ij}$  é o termo que representa o tensor generalizado de Reynolds (GIOIA, 2003). Este tensor é definido por

$$R_{ij} = \{u_i'' \{u_j\}\} + \{\{u_i\} u_j''\} + \{u_i'' u_j''\} \quad (4.8)$$

Este tensor contém a interação entre os termos de subfiltro e escala resolvida, os produtos não lineares dos termos de subfiltro e a influência da escala resolvida conhecida como termo de Leonard (WYNGAARD, 1981; MARQUES, 2004).

O processo de média sobre volume e *ensemble* possuem diferentes propriedades. Uma das mais importantes está diretamente relacionada com a capacidade de reproduzir as flutuações do escoamento turbulento. O processo de média sobre *ensemble* remove completamente as características randômicas da variável mediada, enquanto a média sobre volume não, ou seja, enquanto o campo de velocidade  $u_i(x_i, t)$  é randômico, o campo  $\bar{U}_i$  não é. O campo descrito em função de médias de volume  $\{U_i\}(x_i, t)$  continua apresentando características aleatórias uma vez que o volume de controle não engloba todos os possíveis estados da variável mediada. Conseqüentemente, a média sobre volume converge para uma média sobre *ensemble* ao passo em que o volume de controle empregado no processo de média aumenta. Em termos de escoamentos turbulentos, podemos dizer que a média de Reynolds remove as características turbulentas do escoamento enquanto a média sobre volume remove algumas componentes (turbilhões) ou graus de liberdade deste escoamento. Os turbilhões removidos são aqueles que possuem uma escala espacial menor que as dimensões da grade onde é realizada a média. Assumindo condições estatisticamente estacionárias e homogêneas a média sobre



volume corresponde a média sobre *ensemble* dos turbilhões compreendidos nas grandes escalas do escoamento (WYNGAARD, 1981).

## 4.2 Modelo de simulação dos grandes turbilhões

O modelo LES consiste na aplicação do processo de médias sobre volume para resolver as equações que descrevem um escoamento turbulento. O argumento físico deste modelo é a separação de escalas de movimento (filtragem); as grandes escalas<sup>2</sup> que contém a maior parte da ECT e são dependentes do ambiente (grandes turbilhões) são separados das pequenas escalas (pequenos turbilhões) nas quais acredita-se que exista um comportamento universal (GIOIA, 2003).

Os efeitos atribuídos aos pequenos turbilhões estão diretamente ligados a dissipação da ECT, já que nestas escalas a ação das forças de viscosidade é mais intensa e dominante no escoamento. Esta escala não é resolvida diretamente, mas parametrizada por um modelo de subfiltro. Já os grandes turbilhões são resolvidos a partir de médias de volume. Se o volume no qual é realizada a operação de média for suficientemente pequeno e garantir a separação entre estas escalas o modelo LES é muito mais preciso para simular escoamentos turbulentos que dependem diretamente de características dos forçantes térmicos e mecânicos. Ao contrário dos modelos baseados em médias sobre volume, os modelos tratados em termos das médias de Reynolds apresentam sérias dificuldades em representar estes detalhes do escoamento devido à remoção da aleatoriedade.

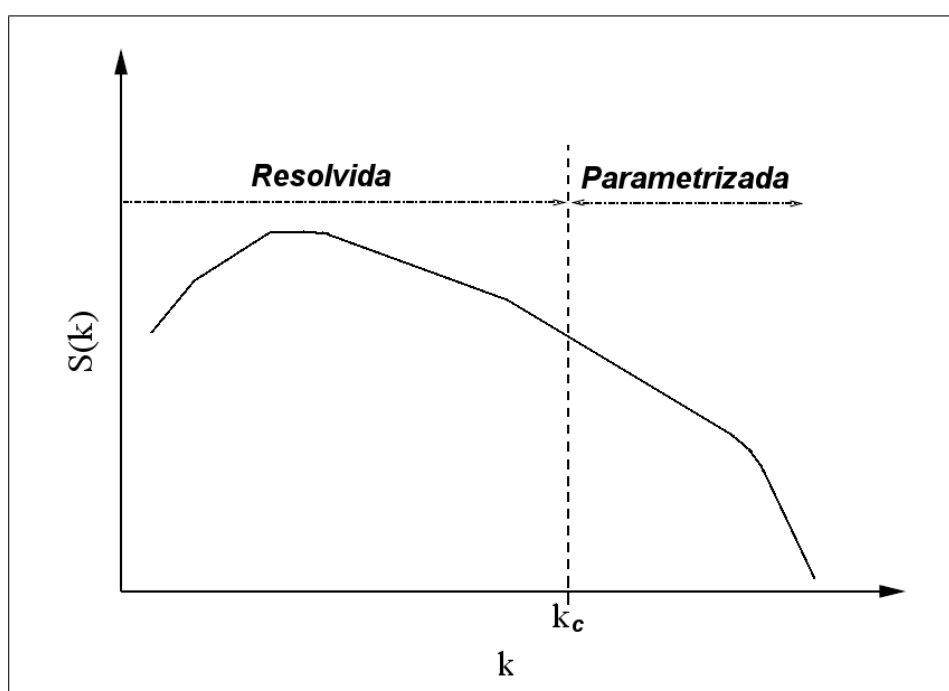
Segundo Pope (2000), o modelo LES é composto, conceitualmente, por quatro passos:

- (i) Filtragem: a operação de filtragem é definida como a decomposição da velocidade  $u_i(x_i, t)$  em uma parte filtrada ou resolvida  $\{U_i\}(x_i, t)$  e uma parte residual ou subfiltro  $u_i''(x_i, t)$ . O campo de velocidade resolvido  $\{U_i\}(x_i, t)$  representa a solução para a equação de movimento para as grandes escalas (ver figura 4.1).

---

<sup>2</sup>Grandes escalas dentro do escoamento turbulento

- (ii) Obtenção da equação de movimento: a equação para a evolução para o campo de velocidade filtrada é obtida a partir da equação de Navier-Stokes. Esta equação contém o tensor de cisalhamento (tensor residual) que é responsável por descrever a evolução das pequenas escalas.
- (iii) Modelo de subfiltro: o fechamento da equação é obtido através da parametrização do tensor residual através do modelo de subfiltro.
- (iv) Resolução numérica: a equação de movimento é resolvida numericamente para as componentes filtradas  $\{U_i\}(x_i, t)$ .



**Figura 4.1:** Representação do gráfico log-log para o espectro de energia cinética turbulenta  $S(k)$  em função do número de onda  $k$ . A linha tracejada indica a separação entre os grandes turbilhões (resolvida) e os pequenos (parametrizada), sendo  $k_c$  o número de onda de filtro ou corte.

### 4.2.1 Filtros utilizados em modelos LES

As discussões anteriores mostram claramente que a metodologia LES é baseada na separação de escalas de movimento. As escalas de movimento são separadas através da aplicação de um filtro de frequências que elimina as altas frequências do escoamento turbulento (filtro passa-baixa). Matematicamente, a filtragem é representada em um espaço físico pela convolução da função filtro  $G$  pela variável a ser filtrada, assim:

$$\{f\} = G * f \quad (4.9)$$

Entretanto, muitas vezes, os efeitos da filtragem são mais claros quando se utiliza uma representação espectral. Utilizando a transformada de Fourier  $F(k_i)$  da função  $f(x_i)$ , definida por

$$F(k_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_i) e^{-ik_i x_i} dx_i. \quad (4.10)$$

Podemos escrever a convolução para  $F$ , como

$$\{F\} = \hat{G} * F \quad (4.11)$$

onde  $\hat{G}$  é a função de transferência associada a  $G$ . A operação de filtragem apresenta algumas propriedades (POPE, 2000)(GIOIA, 2003):

1. As constantes envolvidas no processo de média se conservam:

$$\{a\} = a \Leftrightarrow \iiint_V G(x_i - x'_i, t) dx'_i = 1 \quad (4.12)$$

2. O Princípio de Superposição Linear é válido:

$$\{f + g\} = \{f\} + \{g\} \quad (4.13)$$

3. A comutação do operador derivada parcial temporal é válida:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \{f\} \quad (4.14)$$

4. Relação entre derivadas espaciais é dada pela seguinte expressão

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \{f\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + \iiint_V f(x_i - x'_i, t) \frac{\partial}{\partial x_i} G(x_i - x'_i, t) dx'_i \quad (4.15)$$

Se o filtro for isotrópico e homogêneo:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} G(x_i - x'_i, t) dx'_i = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \{f\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \quad (4.17)$$

Logo, para filtros deste tipo a operação derivada parcial espacial também comuta.

Em modelos LES, existem três tipos de filtro que são normalmente utilizados para realizar a separação de escalas. O filtro do tipo *box*, gaussiano e *top hat*.

- ◇ **Filtro tipo *box***: a função filtro  $G$  assume um valor constante e não nulo para um determinado intervalo de freqüências e nulo para o resto do domínio de filtragem:

$$G_i(x_i - x'_i, t) = \begin{cases} \Delta^{-1}, & \text{se } |x_i - x'_i| \leq 0,5\Delta \\ 0, & \text{se } |x_i - x'_i| > 0,5\Delta \end{cases} \quad (4.18)$$

onde  $\Delta$  é a largura do filtro.

- ◇ **Filtro Gaussiano**: A função filtro é expressa por uma distribuição gaussiana.

$$G_i(x_i - x'_i, t) = \left(\frac{\gamma}{\pi\Delta^2}\right)^{1/2} \exp\left[-(\gamma/\Delta^2)(x_i - x'_i, t)^2\right] \quad (4.19)$$

onde a constante  $\gamma$  é geralmente da ordem de 6 e a variância da distribuição gaussiana é dada por (GIOIA, 2003):

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}\Delta^2 \quad (4.20)$$

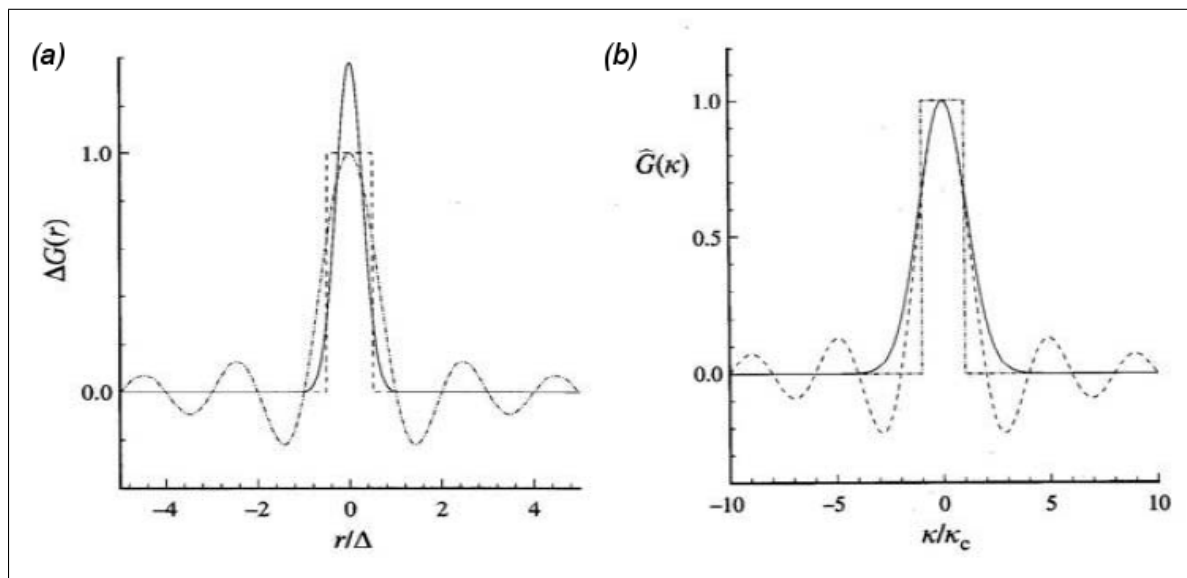
- ◇ **Filtro *top hat***: Neste filtro a função  $G$  assume o valor nulo para os turbilhões com número de onda (ou freqüência) maiores que o número de onda de corte  $k_c$ , definido como

$$k_c = \frac{\pi}{\Delta} \quad (4.21)$$

e a função filtro é dada por

$$G_i(x_i - x'_i, t) = \frac{2 \sin [k_c (x_i - x'_i)]}{\pi (x_i - x'_i)} \quad (4.22)$$

A figura 4.2 esboça o comportamento de cada função filtro descrita anteriormente em um espaço físico e de números de onda.



**Figura 4.2:** Comportamento das funções filtro tipo caixa (pontilhado), gaussiana (linha cheia) e filtro agudo (tracejado). A figura 4.2(a) mostra o comportamento em um espaço físico e a 4.2(b) em um espaço de números de onda, sendo que em (a) é a própria função  $G$  e em (b) a função de transferência  $\hat{G}$  associada a função filtro. Adaptado de Gioia (2003).

## 4.2.2 Modelo LES de Moeng (1984)

O modelo LES de Moeng (1984) é um dos mais utilizados pela comunidade científica para o estudo da CLP. Este modelo emprega o método pseudo-espectral para resolver numericamente as derivadas espaciais horizontais. Para as derivadas espaciais verticais o método de diferenças finitas (SULLIVAN; MCWILLIAMS; MOENG, 1994; MARQUES, 2004; GIOIA, 2003; RIZZA et al., 2006; DEGRAZIA et al., 2007).

### 4.2.2.1 Esquema numérico

A escolha do esquema numérico deste modelo é baseada no comportamento da turbulência na CLP. Em relação à homogeneidade, a turbulência atmosférica apresenta um comportamento totalmente diferente na horizontal e vertical. A quase homogeneidade em todos os planos horizontais possibilita a aplicação de condições de contorno periódicas nas direções  $x$  e  $y$ . Por outro lado, na vertical, a presença de fontes e sumidouros de turbulência distribuídos de forma não uniforme implica em uma não homogeneidade vertical (GIOIA, 2003). Desta forma, um esquema misto de

expansão em séries de Fourier, utilizada nas componentes horizontais, e diferenças finitas na vertical é apropriado para a discretização das equações de movimento.

A formulação matemática do modelo pseudo-espectral foi desenvolvido por Fox e Orzag (1973) . Esta formulação permite calcular as derivadas de qualquer ordem no plano horizontal do modelo, por exemplo a derivada da componente  $v$  na direção  $y$ , levando esta dimensão para um espaço de Fourier (GIOIA, 2003),

$$\{\hat{v}\}(x, k_m, z) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \{v\}(x, y_n, z) e^{-ik_m y_n} \quad (4.23)$$

A derivada de  $\{v\}$  em relação a  $y$  é dada por

$$\left( \frac{\partial \{v\}}{\partial y} \right)_n = \sum_{m=-(N/2)+1}^{N/2} ik_m \{\hat{v}\}(x, k_m, z) e^{-ik_m y_n} \quad (4.24)$$

onde  $N$  é o número total de pontos no plano,  $n$  é o ponto onde está sendo realizada a transformada, e  $k_m$  é o número de onda dado por

$$k_m = 2\pi \frac{m}{N} \frac{1}{\Delta y} \quad (4.25)$$

O avanço dos campos tridimensionais no tempo é realizado através da aplicação do esquema numérico explícito de terceira ordem – Runge-kuta (RK3). A estabilidade numérica é verificada a cada interação temporal  $n$  do modelo, através de um parâmetro  $cfl$  (Número de Courant-Friedrich-Levy). Neste modelo LES o número  $cfl = 0,6$ . Este esquema temporal implica em um passo de tempo  $\Delta t$  variável durante a simulação, pois se torna dependente do campo de velocidade e da estabilidade da camada.

$$\Delta t = cfl \frac{\Delta x_i}{\max(u_i)} \quad (4.26)$$

#### 4.2.2.2 Condições de contorno

##### Condições de contorno laterais:

O uso do método pseudo-spectral nas componentes horizontais do modelo impõe condições de contorno periódicas, ou seja, os valores obtidos na borda de fuga do modelo são utilizados como entrada no outro lado do domínio do plano  $x - y$ . Esta condição facilita o processo computacional pois elimina o problema das bordas laterais mal definidas. Todavia ele é apropriado somente para condições de terreno homogêneo.

### **Condições de contorno inferior:**

A borda inferior, ou contorno de superfície, no modelo LES é uma interface rígida onde a velocidade vertical é nula. A conexão entre os dados de superfície, que são utilizados como forçante no modelo, e o primeiro ponto da grade numérica é realizada através da teoria de similaridade de Monin-Obukov, através das relações (STULL, 1988):

$$\frac{\partial V_s}{\partial z} = \frac{u_* \phi_m}{kz} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\theta_* \phi_h}{kz} \quad (4.28)$$

onde  $V_s$  é a velocidade do escoamento dada por  $V_s = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $\theta$  é a temperatura potencial,  $u_*$  a velocidade de fricção,  $\theta_*$  é a escala de temperatura superficial,  $\phi_m$  a função de estabilidade mecânica de Monin-Obukov,  $\phi_h$  a função de estabilidade térmica de Monin-Obukov,  $k$  é a constante de von karman e  $z$  é a altura em relação a superfície.

### **Condições de contorno superior:**

As condições de contorno superior impõem velocidade vertical média nula, fluxos de subgrade nulos, barotropia e gradiente linear de temperatura potencial. Isto significa que não há variação da velocidade entre os dois últimos pontos verticais da grade e a variação de temperatura é linear. Matematicamente, definimos estas condições da seguinte maneira

$$\frac{\partial V_s}{\partial z} = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \gamma \quad (4.30)$$

$$\{W\} = 0 \quad (4.31)$$

Este tipo de condição de contorno não permite a transmissão de ondas de gravidade que podem ser geradas em uma camada estável. Desta forma, para que esta condição artificial não se propague para o restante do domínio durante a simulação, a condição de contorno superior é estabelecida bem acima do topo da camada limite planetária simulada (MARQUES, 2004)(GIOIA, 2003).

#### 4.2.2.3 Equações para as escalas resolvidas

As equações da escala resolvida neste modelo LES são obtidas a partir da equação de Navier-Stokes, que utilizando a notação do somatório de índices é expressa pela equação (4.32)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (4.32)$$

Assumindo-se a hipótese de fluido incompressível, temos

$$\begin{aligned} \rho &= cte \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \\ u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

assim, podemos somar a expressão (4.33) ao lado esquerdo da equação (4.32) sem alterar a igualdade,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (4.34)$$



Por se tratar de um escoamento turbulento, a difusividade molecular é desprezível quando comparada à turbulenta, logo podemos considerar  $\nu \approx 0$ .

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k \quad (4.35)$$

Aplicando-se o operador média sobre volume em todos os termos da equação (4.35), resulta

$$\frac{\partial \{u_i\}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{u_i u_j\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \{p\}}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \{u_k\} \quad (4.36)$$

O termo não linear pode ser substituído pela equação (4.7), onde o tensor  $R_{ij}$  pode ser escrito como

$$R_{ij} = \tau_{ij} + \frac{1}{3} R_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \quad (4.37)$$

onde  $\tau_{ij}$  é o tensor de Reynolds diretamente relacionado ao fluxo cinemático turbulento de momento de subgrade e  $R_{kk}$  os termos da diagonal principal do tensor  $R_{ij}$ . Desta forma, o termo não linear é dado por

$$u_i u_j = \{U_i\} \{U_j\} + \tau_{ij} + \frac{1}{3} R_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \quad (4.38)$$

Substituindo-se (4.38) em (4.36), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{u_i\}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \{U_i\} \{U_j\} + \tau_{ij} + \frac{1}{3} R_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \{p\}}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \{u_k\} \\ \frac{\partial \{u_i\}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \{U_i\} \{U_j\} \} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial x_i} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \{p\}}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \{u_k\} \\ \frac{\partial \{u_i\}}{\partial t} + \{ \{U_j\} \frac{\partial \{U_i\}}{\partial x_j} \} + \{ \{U_i\} \frac{\partial \{U_j\}}{\partial x_j} \} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial x_i} &= \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \{p\}}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \{u_k\} & \quad (4.39) \end{aligned}$$

Na equação (4.39) podemos simplificar o lado esquerdo da igualdade já que por assumir a incompressibilidade do fluido, a terceira parcela deste termo é nula. Além disto, podemos aplicar as propriedades do cálculo vetorial e escrever o termo de advecção da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\varepsilon_{ijk} u_j \left( \varepsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right)_k + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^2}{\partial x_j} \delta_{ij} \\
 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \varepsilon_{ikj} \left( \varepsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right)_k u_j + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^2}{\partial x_i} \\
 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \varepsilon_{ikj} \zeta_k u_j + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^2}{\partial x_i}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

onde  $\zeta$  é a vorticidade do campo de velocidade do escoamento. Realizando a substituição de (4.40) na equação (4.39), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \{u_i\}}{\partial t} + \varepsilon_{ikj} \{ \{ \zeta_k \} \{ U_j \} \} + \frac{1}{2} \frac{\partial \{u_\alpha^2\}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \{p\}}{\partial x_i} \\
 + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \{u_k\}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

O termo de pressão da equação (4.41) pode ser separado em duas partes:  $\{p\} = \{p_*\} + P_*$ , onde  $\{p_*\}$  representa pressão hidrostática na escala resolvida e  $P_*$  a média espacial da pressão hidrostática relacionada a pressão exercida pelo escoamento de escala sinótica na micro escala. Logo, o gradiente de  $P_*$  pode ser representado pelo vento geostrófico, e este termo corresponde a um forçante no modelo LES. Substituindo-se a decomposição de pressão na equação (4.41), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \{u_i\}}{\partial t} + \varepsilon_{ikj} \{ \{ \zeta_k \} \{ U_j \} \} + \frac{1}{2} \frac{\partial \{u_\alpha^2\}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \{p\}_*}{\partial x_i} - \\
 \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_*}{\partial x_i} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \{u_k\}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

O gradiente horizontal de  $P_*$  pode ser representado pela aproximação geostrófica. Deste modo, agrupando os demais termos derivados em relação a  $x_i$ , ficamos

com a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{u_i\}}{\partial t} = & -\varepsilon_{ikj} \{ \{ \zeta_k \} \{ U_j \} \} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\{u_\alpha^2\}}{2} + \frac{R_{\alpha\alpha}}{3} + \frac{\{p\}_*}{\rho} \right) \\ & - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - f U_{gj} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \{u_k\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde  $f$  é o parâmetro de Coriolis e  $U_{gj}$  a  $j$ -ésima componente do vento geostrófico. O termo entre parênteses é definido como a pressão modificada  $\Pi$  e representa o efeito dinâmico da turbulência sobre o campo de pressão na escala resolvida. Se não houvesse escoamento, a pressão modificada seria igual a pressão hidrostática. A presença do termo de vento geostrófico indica que o forçante externo do modelo induz à convergência para um estado de equilíbrio geostrófico (MARQUES, 2004). Substituindo-se a definição de  $\Pi$ , temos

$$\frac{\partial \{u_i\}}{\partial t} = -\varepsilon_{ikj} \{ \{ \zeta_k \} \{ U_j \} \} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - f U_{gj} + g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \{u_k\} \quad (4.44)$$

Esta é a principal equação do modelo LES de Moeng. Dela são derivadas as equações para cada componente da velocidade do escoamento. Para as componentes horizontais,  $u$  e  $v$ , temos:

$$\frac{\partial \{u\}}{\partial t} = \{ \{ \zeta_z \} \{ V \} \} - \{ \{ \zeta_y \} \{ W \} \} - \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{uu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{uw}}{\partial z} - f(V_g + \{v\}) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \{v\}}{\partial t} = \{ \{ \zeta_x \} \{ W \} \} - \{ \{ \zeta_x \} \{ U \} \} - \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{vu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{vv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{vw}}{\partial z} + f(U_g - \{u\}) \quad (4.46)$$

A equação para a velocidade vertical inclui a aproximação de Boussinesq e impõe a condição de velocidade vertical mediada na horizontal nula, dada por:

$$\frac{\partial \{w\}}{\partial t} = \{ \{ \zeta_y \} \{ U \} \} - \{ \{ \zeta_x \} \{ V \} \} + \frac{\{\theta\}}{\theta_o} g - \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{wu}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{wv}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{ww}}{\partial z} - \left\langle \frac{\partial \{w\}}{\partial t} \right\rangle \quad (4.47)$$

onde  $\theta$  é a temperatura potencial e  $\theta_o$  a temperatura potencial de referência. Na equação (4.47) o que garante a condição de velocidade média vertical nula e tam-

bém a aceleração vertical média nula é a ultima parcela do segundo termo da equação, mantendo assim o equilíbrio hidrostático (MARQUES, 2004)(DEARDORFF, 1972).

Para resolver o campo de pressão modificado utiliza-se a equação de Poisson (MOENG, 1984):

$$\nabla^2 \Pi = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \quad (4.48)$$

onde  $H_x$ ,  $H_y$ , e  $H_z$  são obtidos das equações (4.45), (4.46) e (4.47), respectivamente, através da soma das parcelas do lado direito de cada equação, exceto os gradientes de pressão modificada (MOENG, 1984).

A equação que torna este sistema de equações um sistema fechado é a equação de conservação da temperatura potencial, dada por (MARQUES, 2004)(GIOIA, 2003)

$$\frac{\partial \{\theta\}}{\partial t} = -\{\{U\} \frac{\partial \{\theta\}}{\partial x}\} - \{\{V\} \frac{\partial \{\theta\}}{\partial y}\} - \{\{W\} \frac{\partial \{\theta\}}{\partial z}\} - \{w\} \frac{\partial \theta_o}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{\theta u}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{\theta v}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{\theta w}}{\partial z} \quad (4.49)$$

onde  $\tau_{\theta j}$  representa o fluxo cinemático turbulento de energia na forma de calor sensível de subfiltro.

Os tensores  $\tau_{ij}$  e  $\tau_{\theta j}$  são desconhecidos e devem ser parametrizados pelo modelo LES. A parametrização destes termos é realizada através de um modelo de subgrade ou subfiltro. Nestes termos estão as grandes incertezas do modelo LES, principalmente em regiões próximas a superfície e camada de entranhamento onde os turbilhões menores são dominantes.

#### 4.2.2.4 Modelo de subfiltro

O modelo de subfiltro tem como objetivo parametrizar os tensores  $\tau_{ij}$  e  $\tau_{\theta j}$  presentes nas equações do modelo LES. Estes tensores estão relacionados com a escala resolvida através dos coeficientes de difusividade turbulenta, obtidos a partir do modelo de viscosidade de Smagorinsky (1963) (MARQUES, 2004).

O modelo de viscosidade de Smagorinsky é um modelo não linear que impõe um equilíbrio local entre a produção mecânica de energia cinética turbulenta (ECT) e a dissipação viscosa. Além disto, supõe uma cascata de transferência onde a energia passa dos grandes turbilhões para os de menor estrutura. Porém, condições convectivas, o principal forçante da CLP é o térmico, o que torna o modelo de Smagorinsky pouco eficaz neste caso. Adicionalmente, próximo a superfície, o cisalhamento do campo de velocidade induz a uma quebra na isotropia das flutuações de velocidade, fazendo com que os turbilhões dominantes no escoamento, nesta região, sejam menores. Assim, estes fatores comprometem a capacidade do modelo LES em reproduzir o escoamento turbulento na camada superficial.

Tendo em vista esses problemas fenomenológicos e baseando-se na descrição estatística da turbulência, Sullivan et. al. (1994) propuseram um modelo de subgrade. Neste modelo o tensor de cisalhamento é dividido em dois termos: um isotrópico – dependente da flutuação do tensor de deformação do escoamento e um termo não homogêneo relacionado com a média espacial horizontal do tensor de deformação. Este modelo de subgrade também garante o perfil log-linear da velocidade do vento junto a superfície e satisfaz a teoria de similaridade de Monin-Obukov.

Os tensores que representam os fluxos cinemáticos turbulentos de momento e de energia na forma de calor de subgrade são dados respectivamente por (SULLIVAN; MCWILLIAMS; MOENG, 1994)

$$\tau_{ij} = -2K_M\gamma S_{ij} - 2K_{\langle M \rangle} \langle S_{ij} \rangle \quad (4.50)$$

$$\tau_{\theta j} = -K_H \left( \frac{\partial \{ \theta \}}{\partial x_j} \right) \quad (4.51)$$

onde  $\{ \}$  representa o operador média sobre volume,  $\langle \rangle$  o operador média espacial horizontal,  $K_M$  é o coeficiente de difusividade turbulenta de momento isotropico,  $K_{\langle M \rangle}$  é o coeficiente de difusividade turbulenta de momento não homogêneo,  $K_H$  é o coeficiente de difusividade turbulenta de energia na forma de calor,  $\gamma$  é o fator de isotropia e  $S_{ij}$  é o tensor de deformação do escoamento, sendo este definido por

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\{u_i\}}{\partial x_j} + \frac{\partial\{u_j\}}{\partial x_i} \right) \quad (4.52)$$

e o fator de isotropia é dado por

$$\gamma = \left( \frac{(S_{ij} - \langle S_{ij} \rangle)^2}{\langle (S_{ij} - \langle S_{ij} \rangle)^2 \rangle + \langle S_{ij} \rangle^2} \right)^{1/2} \quad (4.53)$$

O fator de isotropia é definido como a razão entre a taxa de estiramento dos vórtices de pequena e grande escala. Próximo ao contorno inferior, o fator de isotropia tende a zero enquanto nas regiões superiores da CLP tende a um (SULLIVAN; MCWILLIAMS; MOENG, 1994; GIOIA, 2003).

Os coeficientes de difusividade turbulenta são dados pelas seguintes expressões:

$$K_M = c_k \ell \sqrt{e''} \quad (4.54)$$

$$K_H = \left( 1 + 2 \frac{\ell}{\Delta} \right) K_M \quad (4.55)$$

onde  $e''$  é a energia cinética turbulenta associada à subgrade e  $c_k$  uma constante cujo o valor, neste modelo é 0,1 (MOENG, 1984),  $\Delta$  é o espaçamento médio da grade dado por  $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$  e  $\ell$  é a escala de comprimento de mistura de subgrade. De acordo com Deardorff (1980), para contemplar os efeitos da estabilidade local da camada,  $\ell$  é definido como o valor mínimo entre duas escalas (MOENG, 1984; MARQUES, 2004)

$$\ell = \min \left[ 0, 76 \sqrt{e''} \left( \frac{g}{\theta_o} \frac{\partial\{\theta\}}{\partial z} \right)^{-1/2}; \Delta \right] \quad (4.56)$$

onde a primeira escala esta relacionada com a frequência de Brünt-Vaisála. Em condições bastante estáveis  $K_H \approx K_M$  e em condições convectivas  $K_H = 3K_M$ . Para uma CLP homogênea na horizontal, a parte não homogênea do coeficiente de difusão de momento é dado por

$$K_{\langle M \rangle} = (c_k \ell)^2 \left( \left( \frac{\partial \langle \{u\} \rangle}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \langle \{v\} \rangle}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.57)$$

A energia cinética turbulenta na escala de subgrade é calculada a partir da seguinte equação

$$\frac{\partial e''}{\partial t} = -\{u_j\} \frac{\partial e''}{\partial x_j} - \{u_i'' u_j''\} \frac{\partial \{u_j\}}{\partial x_j} + \frac{g}{\theta_o} \{w'' \theta''\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ -2K_M \frac{\partial e''}{\partial x_i} \right] - \varepsilon \quad (4.58)$$

onde  $\varepsilon$  é a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta, dada por (MOENG, 1984)

$$\varepsilon = c_\varepsilon \frac{(e'')^{3/2}}{\ell} \quad (4.59)$$

e  $c_\varepsilon = 0,19 + 0,74(\ell/\Delta)$ .

Contudo, estudos realizados em laboratório e com simulações DNS mostram que o processo de transferência de energia cinética turbulenta nos pequenos turbilhões também ocorre dos menores para os maiores turbilhões (cascata inversa). Assim, os modelos de subgrade ainda precisam de muito aprimoramento para representar fidedignamente a turbulência próxima a superfície do escoamento (MARCQUES, 2004).

# Capítulo 5

## Experimento Numérico

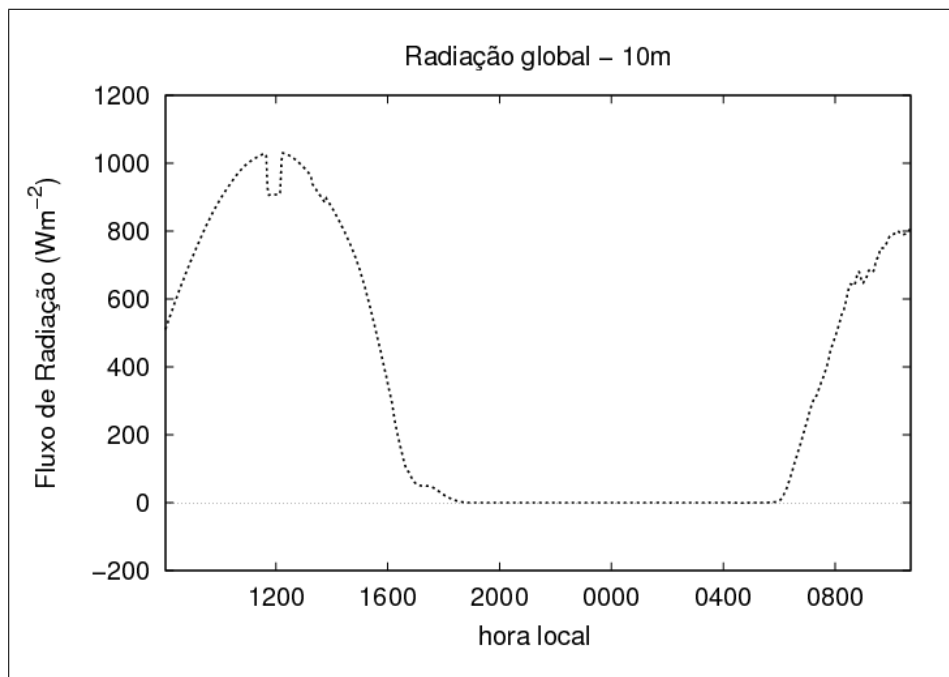
Para a realização do experimento numérico utilizando o modelo LES foram empregados dados experimentais do projeto Candiota 2007, realizado pelo Laboratório de Micrometeorologia da UFSM na cidade de Candiota, RS. O experimento consiste na simulação do ciclo diário da CLP, totalizando, aproximadamente, 28h simuladas. O dia escolhido para o início do experimento numérico foi 30 de setembro de 2007, às 8h da manhã (local). Este dia foi escolhido devido à ausência de nebulosidade e de forçante sinótica evidente – crista<sup>1</sup>, cavado, frente fria – sobre a região de interesse e à presença de condições de umidade relativa abaixo dos 100%. A ausência de nebulosidade é uma condição necessária já que o modelo LES de Moeng (1984) não resolve e nem mesmo parametriza a cobertura de nuvens na CLP. A ausência de nuvens pode ser constatada a partir da figura 5.1 que mostra a radiação global medida no sítio experimental nos dias escolhidos para o experimento numérico e também pela figura 5.2 que mostra as condições do tempo (através do código synop) na região em um horário representativo para o período como um todo

A ausência das forçantes sinóticas citadas anteriormente se faz necessária pois, na presença de uma frente fria, por exemplo, a forçante externa ao modelo LES (a saber, o vento geostrófico) deixa de ser uma aproximação válida, mesmo para os níveis superiores da atmosfera. Para avaliar a condição sinótica foram consultadas imagens de satélite (GOES-12) e cartas sinóticas de superfície, apresentadas nas figuras 5.3 e 5.4, respectivamente.

---

<sup>1</sup>A presença de uma crista geralmente está associada a condições de bom tempo, porém neste caso não são desejáveis pela curvatura acentuada nas isóbaras.



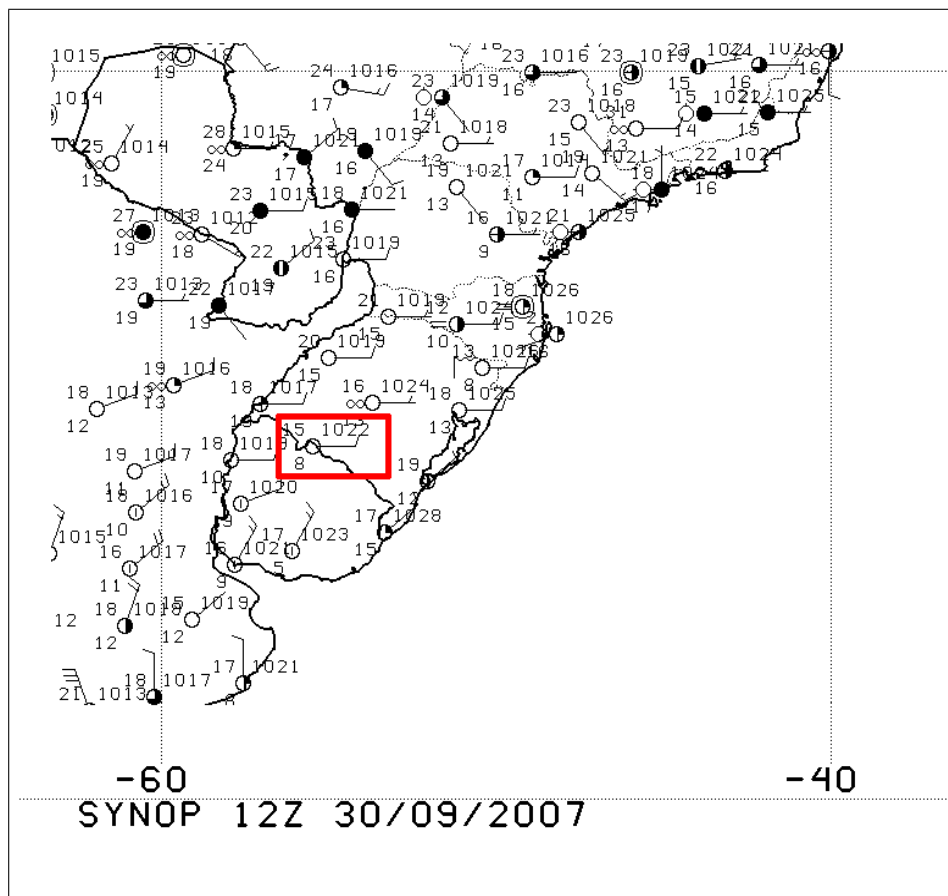


**Figura 5.1:** Dados experimentais de fluxo de radiação global incidente medido entre 30 de setembro e 1º de outubro em Candiotá-RS.

As figuras 5.3 e 5.4 mostram que há uma região de alta pressão sobre o Rio Grande do Sul, associada a uma massa de ar frio e que não há presença de sistemas precipitantes ou curvaturas muito acentuadas nas isóbaras, garantindo uma melhor representação da escala sinótica, no modelo LES, pelo vento geostrófico (HOLTON, 1992).

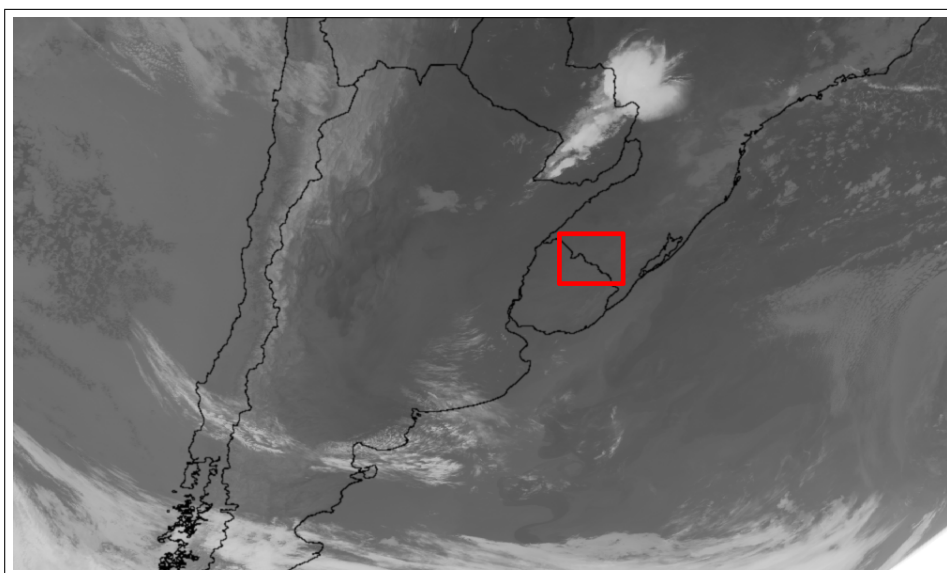
A necessidade de umidade relativa inferior a 100% durante o experimento numérico surge devido ao fato do modelo LES de Moeng (1984) não resolver nem parametrizar mudanças de fase da água na atmosfera. Portanto, neste experimento numérico, o vapor d'água é tratado como um escalar passivo. Os dados de umidade relativa medidos em Candiotá, durante o experimento Candiotá 2007 apontam para valores menores que 100%, conforme figura 5.5.

O domínio de simulação corresponde a uma caixa medindo  $4km$  nos eixos horizontais  $x - y$  e  $2km$  na vertical. A discretização do domínio corresponde a uma grade numérica de 128 pontos em cada um dos eixos horizontais e 192 pontos na vertical. O espaçamento de grade é o quociente entre o tamanho do domínio e o número de pontos em uma dada direção. Para esta simulação temos:  $\Delta x = \Delta y = 31,25m$  e  $\Delta z \approx 10,42m$ . A simulação do ciclo diário da CLP utilizando o modelo LES de Mo-

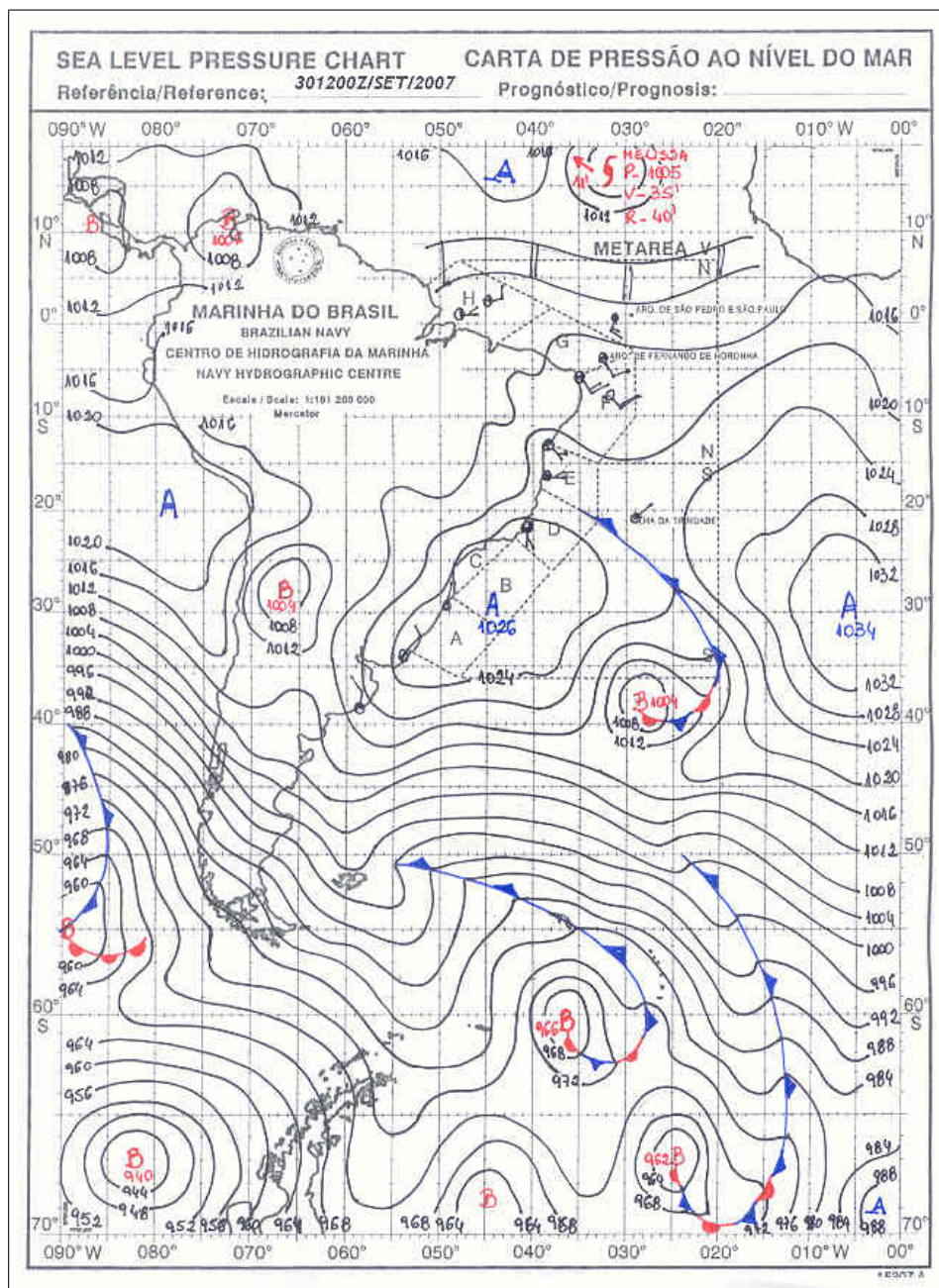


**Figura 5.2:** Mapa sinótico contendo a plotagem das observações synop evidenciando as condições de tempo reinantes sobre o sudeste da América do Sul às 12Z (9h local) do dia 30 de setembro de 2007. O retângulo sobre o Rio Grande do Sul destaca a região de Candiota. A informação em destaque na carta é referente ao aeródromo de Bagé - RS (cidade vizinha à Candiota). Fonte: sítio na internet do CPTEC - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos

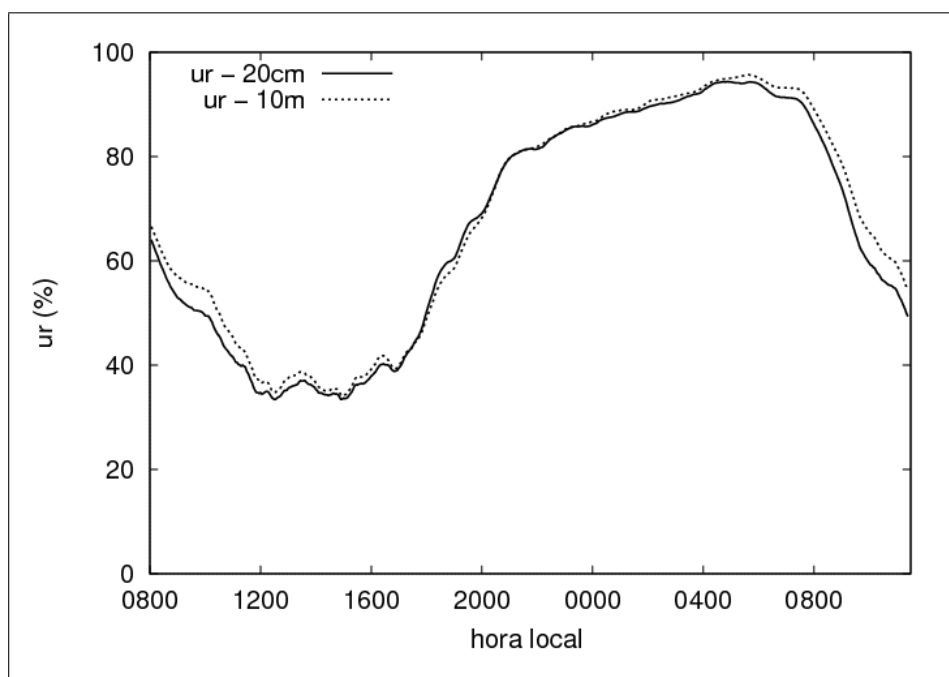
eng (1984) foi realizada em um cluster com 8 nós de processamento. A simulação utilizou um tempo computacional de 360 horas (aproximadamente) sendo gerados em torno de 50Gb de dados. O passo de tempo da simulação é variável e depende das características do escoamento. O gráfico da figura 5.6 mostra a variação do passo de tempo  $\Delta t$  em função do número de interações.



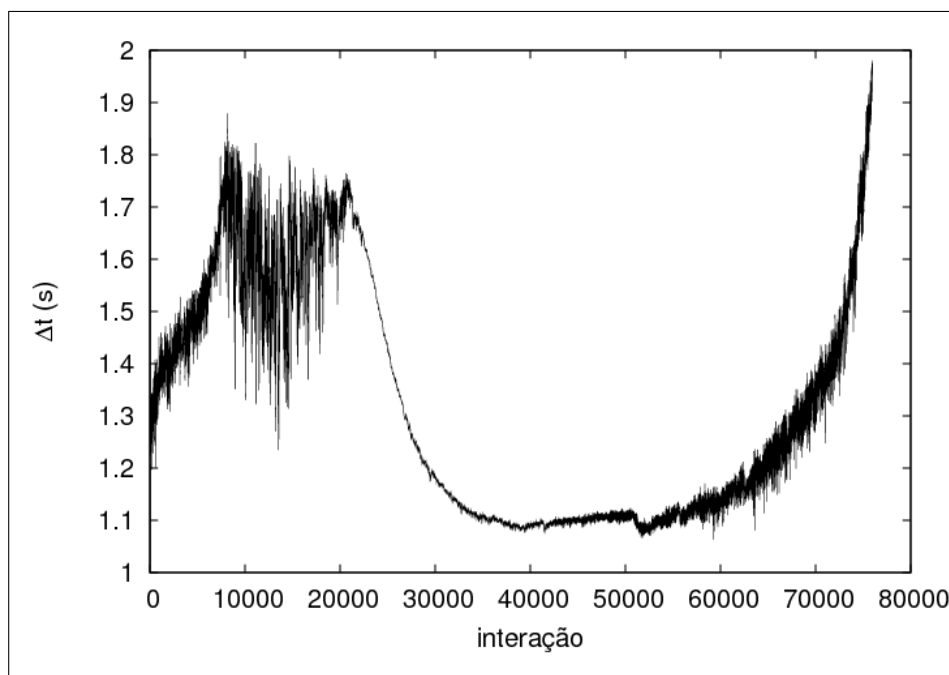
**Figura 5.3:** Imagem do satélite GOES 12 – canal do infravermelho (IR4) – das 8h do dia 30/09/2007 horário local. O retângulo sobre o Rio Grande do Sul destaca a região de Candiota. Fonte: Acervo de imagens do GruMA – Grupo de Modelagem Atmosférica de Santa Maria.



**Figura 5.4:** Carta sinótica de superfície às 12Z (9h local) do dia 30 de setembro de 2007.  
 Fonte: sítio na internet da Marinha do Brasil (<http://www.mar.mil.br>)



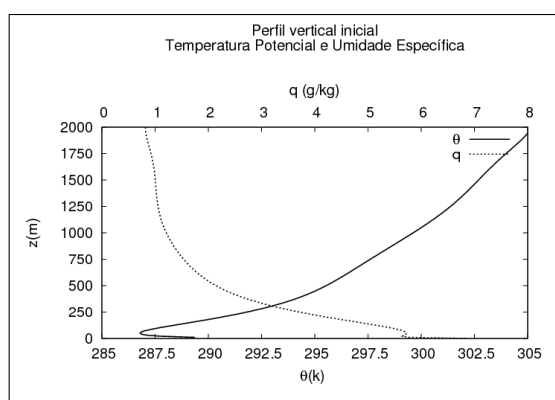
**Figura 5.5:** Dados experimentais de umidade relativa medida entre 30 de setembro e 1º de outubro em Candiota-RS.



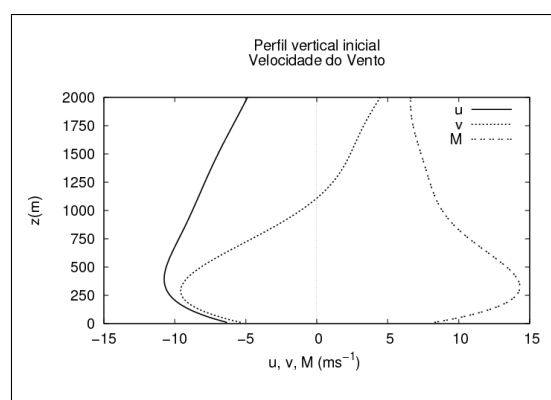
**Figura 5.6:** Variação do passo de tempo  $\Delta t$  durante a simulação do ciclo diário da CLP.

## 5.1 Condições iniciais

Como qualquer modelo numérico, o LES de Moeng (1984) necessita de condições iniciais para a simulação. Esta condição inicial inclui perfis verticais de velocidade do vento, temperatura potencial e umidade específica, bem como parâmetros da CLP: velocidade de fricção ( $u_*$ ), fluxo de energia na forma de calor na superfície ( $w'\theta'$ ) e a altura da camada ( $z_i$ ). Os valores de  $u_*$  e  $w'\theta'$  foram obtidos de dados experimentais. Neste trabalho, utilizou-se o valor inicial de  $u_* = 0.56\text{ms}^{-1}$  e  $w'\theta' = 0.053\text{Kms}^{-1}$ . O valor de  $z_i$  bem como os perfis verticais de temperatura, umidade específica e velocidade do vento não puderam ser estimados a partir de medidas devido a falta de sondagens verticais em todo o perfil da CLP. Desta forma, foram utilizados perfis extraídos do modelo BRAMS – Brazilian Regional Atmospheric Modeling System. O BRAMS é um modelo de escala regional, largamente utilizado no Brasil para previsão de tempo. O valor de altura inicial da CLP empregado foi de  $z_i \approx 196\text{m}$ . Portanto, as condições iniciais para a simulação LES foram obtidas em parte de dados experimentais e parte de um modelo regional de previsão do tempo. A figura 5.7 mostra os perfis iniciais de temperatura potencial e umidade relativa utilizados na inicialização do modelo, já a figura 5.8 mostra o perfil das duas componentes do vento –  $u$  e  $v$  e o módulo da velocidade do vento dado por  $M = \sqrt{u^2 + v^2}$ .



**Figura 5.7:** Perfis iniciais de temperatura potencial e umidade específica obtidos a partir do modelo BRAMS

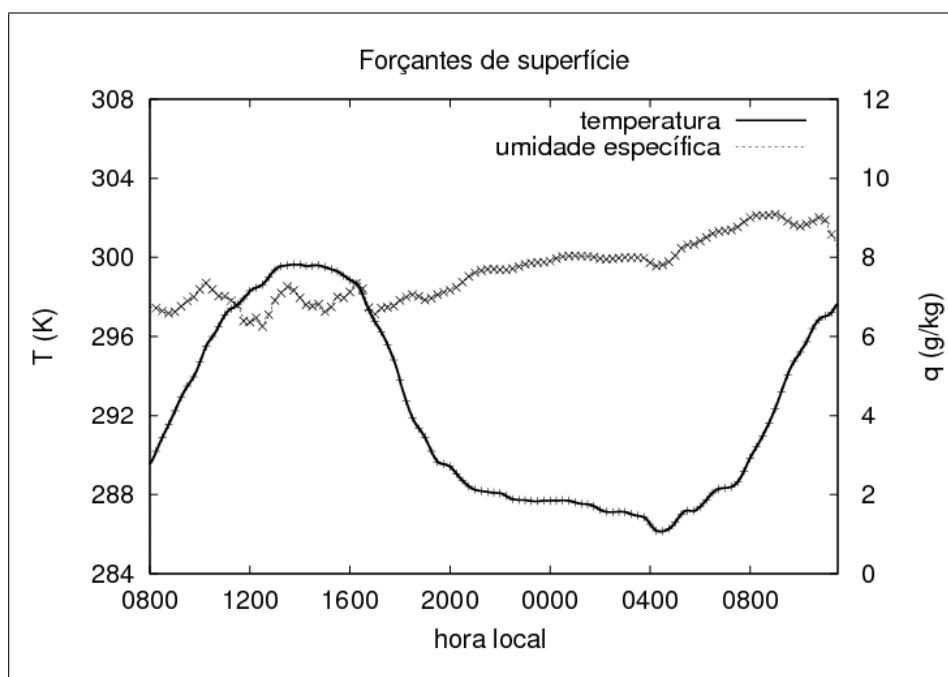


**Figura 5.8:** Perfis iniciais das componentes e velocidade do vento obtidos a partir do modelo BRAMS.

## 5.2 Forçantes superficiais

Para realizar a simulação, o modelo LES de Moeng (1984) utiliza valores de fluxo de energia na forma de calor ou temperatura, ambos em superfície para forçar o primeiro nível do modelo através da teoria de similaridade de Monin-Obukov. O mesmo ocorre para a umidade. Neste trabalho utilizou-se os dados de temperatura e umidade específica medidos a  $20\text{cm}$  do solo com taxa de aquisição de  $1\text{hz}$ . Estes dados foram tratados através de um processo de média móvel de  $30\text{min}$  com um passo de tempo de  $3\text{min}$  a cada janela.

Os dados de superfície foram introduzidos no modelo LES através de uma função do tempo ( $T = T(t)$  e  $q = q(t)$ ). As funções que descrevem as variações de temperatura e umidade específica no tempo foram obtidos a partir da interpolação polinomial da série de dados de cada uma das variáveis. A figura 5.9 apresenta os gráficos da temperatura e umidade específica de superfície.



**Figura 5.9:** Dados experimentais de temperatura da superfície e umidade relativa interpolados e incorporados ao modelo LES como forçantes de superfície. As linhas indicam a função interpoladora e as marcas em forma de 'x' e '+' o valor experimental de cada um dos forçantes.

### 5.3 Comparação entre LES e observações de superfície

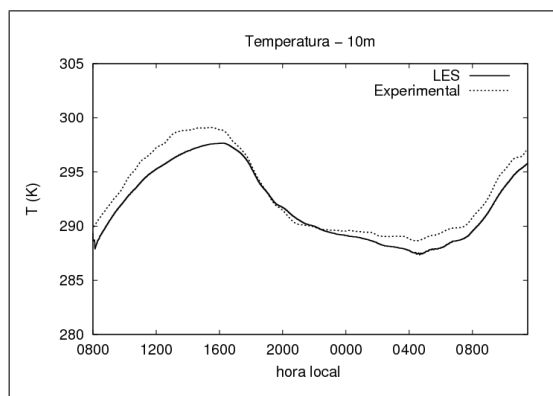
Para realizar a comparação entre a saída do modelo LES e os dados de superfície foi utilizado o primeiro ponto da grade vertical do modelo (que está a uma altura  $z_1 \approx 10,4m$ ) e os dados medidos por uma torre micrometeorológica com instrumentos operando na frequência de 10 e 1hz a uma altura de 10m. É importante salientar que os pontos mais próximos da superfície, no modelo LES, são os mais complicados de se analisar visto que nesta região o número de onda de corte do filtro do modelo é da ordem do número de onda do máximo espectral.

Neste trabalho foram comparados a evolução das variáveis médias, fluxos turbulentos e parâmetros que descrevem a estabilidade da CLP. Os dados experimentais foram tratados a partir de médias temporais de 30min com um passo de tempo de 3min a cada janela. Já os dados do modelo LES correspondem a média espacial do primeiro plano horizontal a cada interação temporal realizada na simulação.

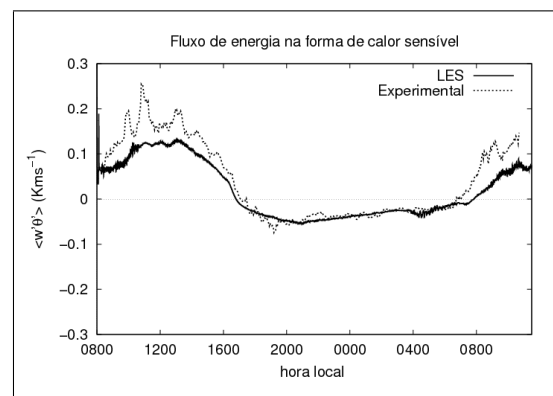
De maneira geral, o modelo LES obteve uma boa reprodução das variáveis de superfície. As figuras 5.10 e 5.11 apresentam os gráficos com os dados do modelo LES e medidas experimentais de temperatura e fluxo de energia na forma de calor. A temperatura simulada pelo modelo LES apresenta uma evolução defasada em relação aos dados observados. Esta defasagem pode estar relacionada com a pouca eficiência do processo de randomização do escoamento durante a inicialização do modelo. O fluxo turbulento de energia na forma de calor modelado não apresenta os picos que os dados experimentais apontam, além de apresentar uma magnitude inferior aos valores medidos no período diurno da simulação. As figuras 5.12 e 5.13 mostram a evolução da umidade específica e o fluxo turbulento vertical desta variável, respectivamente. A umidade específica simulada pelo modelo LES apresenta durante o período de simulação valores menores do que os resultados experimentais. O modelo LES de Moeng (1984) não possui parametrizações para a umidade e esta variável é tratada como um escalar passivo, porém na atmosfera o vapor d'água é um dos principais constituintes e fonte de liberação ou absorção de grandes quantidades de energia na forma de calor latente. Portanto, ignorar as trocas



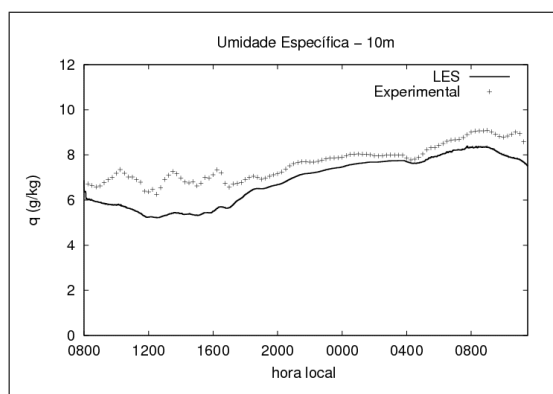
de fase que ocorrem com a água presente na atmosfera é uma das fontes de erro dos resultados obtidos por este modelo. O fluxo turbulento de umidade específica apresenta uma boa relação com os resultados obtidos experimentalmente.



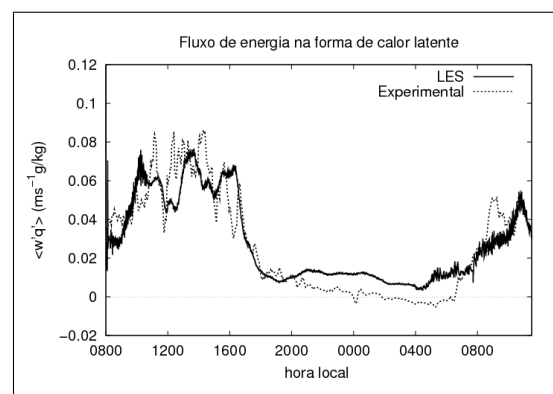
**Figura 5.10:** Evolução da temperatura potencial virtual – comparação entre LES e dados experimentais de superfície.



**Figura 5.11:** Fluxo de energia na forma de calor – comparação entre LES e dados experimentais de superfície.



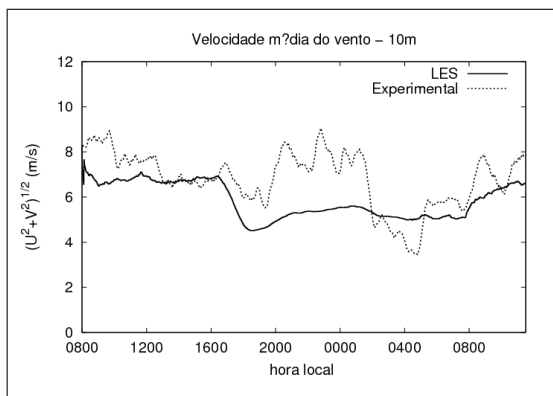
**Figura 5.12:** Evolução da umidade específica – comparação entre LES e dados experimentais de superfície.



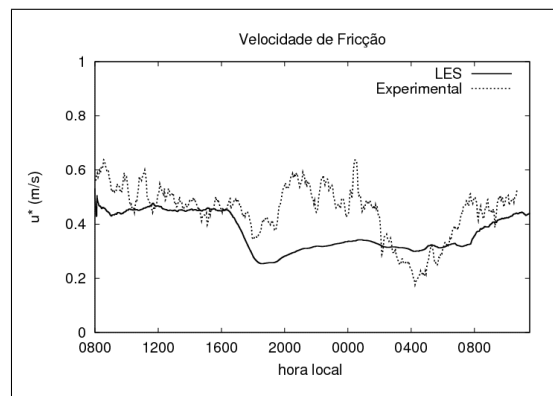
**Figura 5.13:** Evolução do fluxo turbulento de umidade específica – comparação entre LES e dados experimentais de superfície.

Os gráficos apresentados nas figuras 5.14 e 5.15 exibem, respectivamente, a comparação entre o módulo da velocidade e a velocidade de fricção. O modelo LES, durante o período noturno da simulação, apresenta valores mais baixos de velocidade do que apontam os dados experimentais. O mesmo ocorre com a velocidade de fricção pois estas duas variáveis são diretamente relacionadas. Isto mostra que o LES apresenta uma maior dificuldade em reproduzir a turbulência mecânica do que a convectiva. Isto é, de certa forma, esperado já que os turbilhões associados a turbulência mecânica são menores que os turbilhões associados a convecção.

Nas figuras 5.16 e 5.17 são apresentados, respectivamente, a evolução tempo-



**Figura 5.14:** Evolução do módulo da velocidade do vento – comparação entre LES e dados experimentais de superfície.



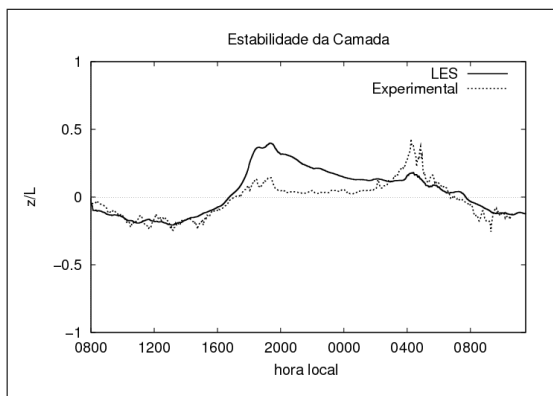
**Figura 5.15:** Evolução da velocidade de fricção – comparação entre LES e dados experimentais de superfície.

ral de  $z/L$  e do número de Richardson (fluxo)  $R_f$  dado por (STULL, 1988)

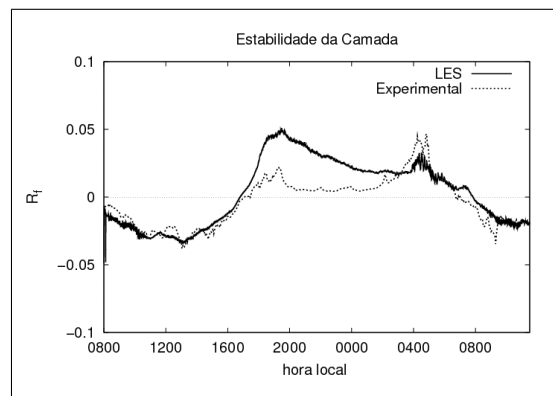
$$R_f = \frac{\left(\frac{g}{\theta_v}\right) \overline{w'\theta'_v}}{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}} \quad (5.1)$$

Estes dois parâmetros descrevem a condição de estabilidade da CLP, sendo ambos uma razão entre os forçantes térmicos e mecânicos da turbulência. Para a parte convectiva da simulação, quando confrontados os resultados simulados com os obtidos a partir de medições ambas as variáveis apresentadas nos gráficos reproduzem bem a condição de estabilidade da CLP. A maior discrepância ocorre no período noturno onde o modelo LES impõe um caráter muito mais estável que o apresentado pelos dados experimentais, apontando novamente a falta de precisão do modelo LES em representar a camada limite noturna com a resolução utilizada. É interessante observar que, em torno das 4h da manhã (horário local) há um pico de estabilidade na CLP que pode ser notado também nos gráficos de velocidade e velocidade de fricção.

A figura 5.18 apresenta a evolução da energia cinética turbulenta (ECT) na CLP. Neste gráfico fica claro o problema associado a inicialização do modelo LES. O processo de randomização dos perfis iniciais de velocidade do vento, temperatura e umidade, não é eficaz em reproduzir um escoamento com características semelhantes a um escoamento turbulento. Desta forma a simulação parte de um valor muito baixo de ECT que vai aumentando gradativamente enquanto o escoamento



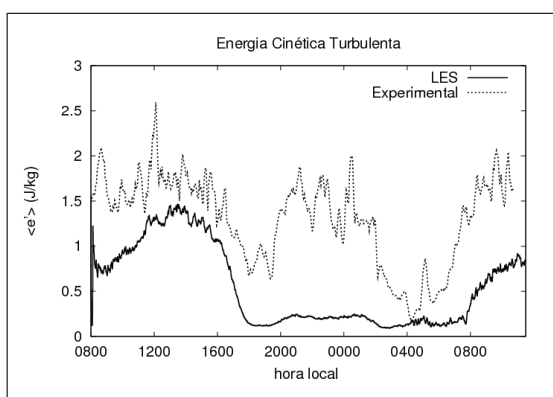
**Figura 5.16:** Evolução de  $z/L$  – comparação entre LES e dados experimentais de superfície.



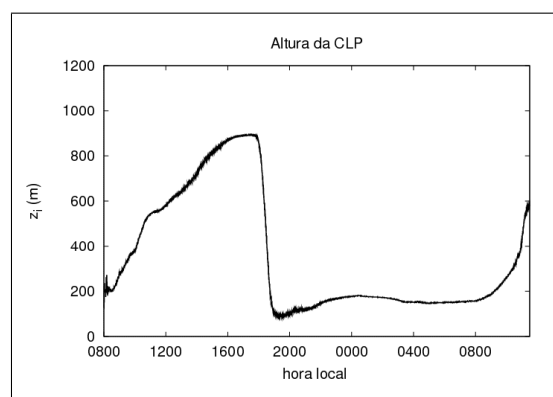
**Figura 5.17:** Evolução do número de Richardson – comparação entre LES e dados experimentais de superfície.

simulado converge para um escoamento turbulento próximo da realidade. Outro problema que pode ser identificado neste gráfico é o forte amortecimento dos graus de liberdade do escoamento turbulento enquanto a camada convectiva decai para uma camada estável. O valor da ECT no período noturno fica muito abaixo do esperado, exceto próximo das 4h da manhã quando ocorre um pico de estabilidade na CLP.

A evolução da altura da CLP é mostrada no gráfico da figura 5.19. Não existem dados experimentais para comparar a altura da camada simulada.



**Figura 5.18:** Evolução da energia cinética turbulenta – comparação entre LES e dados experimentais de superfície.



**Figura 5.19:** Evolução da altura da CLP. Por falta de dados experimentais não há comparação com dados observados.

## 5.4 Perfis verticais

Estudos experimentais que descrevam o perfil vertical das variáveis na CLP são bastante complicados e geralmente de alto custo. Uma das grandes vantagens do modelo LES é que podemos investigar, com uma boa confiabilidade, a estrutura vertical da CLP. O experimento Candiota 2007 não contava com sondagens verticais, por isso não há como comparar os resultados desta simulação com perfis experimentais. Entretanto, Basu et. al (2008) publicaram um artigo comparando os resultados de uma simulação LES com o experimento de Wangara. Utilizaremos este artigo para comparar (de forma qualitativa) os resultados obtidos em nossa simulação, bem como outros artigos científicos envolvendo perfis verticais na CLP.

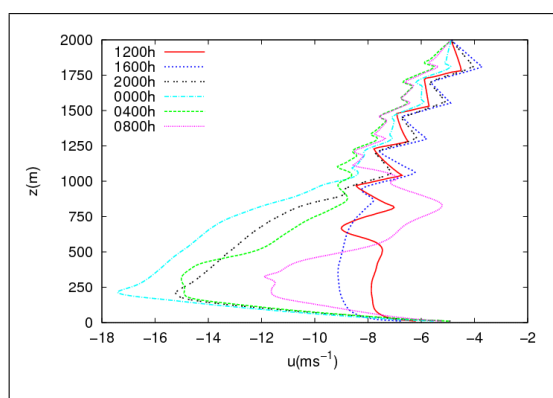
Os perfis apresentados nesta sessão correspondem ao perfil médio de cada variável. O valor em cada nível vertical representa a média horizontal das variáveis. Para uma variável  $\Psi$ , o perfil vertical é dado por  $\Psi = \langle \Psi \rangle (z)$ . Serão apresentados perfis verticais de 6 instantes de tempo da simulação, representando as 12, 16 e 20 horas (local) do primeiro dia de simulação (30/09) e 0, 4 e 8h (local) do segundo dia de simulação (01/10). A tabela 5.1 apresenta alguns parâmetros da CLP simulada em cada um dos horários previstos acima.

**Tabela 5.1:** Parâmetros da CLP no instante de cada perfil

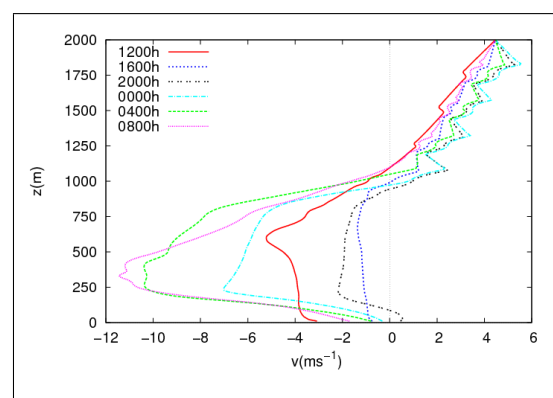
<i>hora</i>	$z_i(m)$	$\langle w'\theta' \rangle_s (Kms^{-1})$	$\theta_s(K)$	$w_*(ms^{-1})$	$u_*(ms^{-1})$	$z/L(10^{-1})$
1200	579,5	0,13	298,3	1,35	0,47	-0,90
1600	869,9	0,05	298,9	1,13	0,45	-0,39
2000	101,6	-0,05	289,4	-	0,28	1,60
0000	177,3	-0,04	287,7	-	0,34	0,74
0400	151,2	-0,03	286,5	-	0,31	0,79
0800	157,5	0,01	289,9	0,38	0,37	-0,16

As figuras 5.20, 5.21 e 5.22 mostram os perfis das componentes  $u$ ,  $v$  e a magnitude da velocidade do vento  $M$ , respectivamente, para diferentes horários da simulação. Nos horários das 1200h e 1600h (horário local) o perfil vertical da velocidade do vento apresenta características típicas de camada convectiva, com uma região de mistura bem definida no centro da camada. Para os demais horários podemos perceber a formação de um jato no topo da camada limite estável – jato de bai-

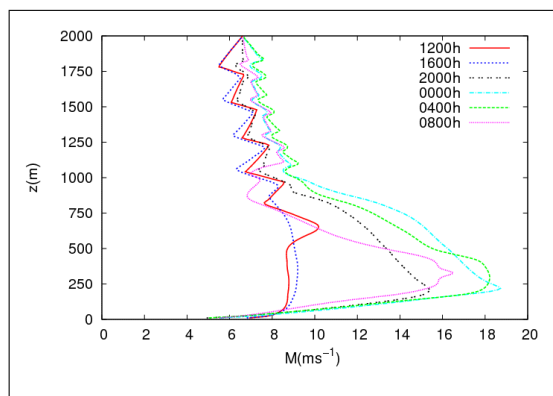
xos níveis (JBN). Estes resultados estão de acordo com os apresentados por Basu et. al (2008). Além de Basu et. al (2008), Cuxart e Jiménez (2007) publicaram um trabalho que utiliza o modelo LES para simular uma camada estável. Neste trabalho, um padrão de formação de um JBN também é observado, tanto em dados experimentais como na simulação LES. Além dos perfis de velocidade, Cuxart e Jiménez (2007) apresentam gráficos do número de Richardson. A figura 5.23 mostra o perfil do número de Richardson, em diferentes horários. Os resultados observados nesta simulação são qualitativamente semelhantes àquela de Cuxart e Jiménez (2007), revelando um pico no número de Richardson no topo da CLE, ou seja, o pico do número de Richardson está associado ao JBN, resultado também constatado por Mahrt et al. (1979, *apud* BASU et al., 2008). As figuras 5.24, 5.25 e 5.26 apresentam a evolução temporal dos perfis da componente  $u$ ,  $v$  e da magnitude da velocidade do vento. Nestas figuras pode-se acompanhar a intensificação do JBN com o desenvolvimento da CLE. Após atingir um máximo por volta das 4h da manhã o jato começa a se desintensificar e se desconfigura com o início da convecção (processo de mistura) com o nascer do sol.



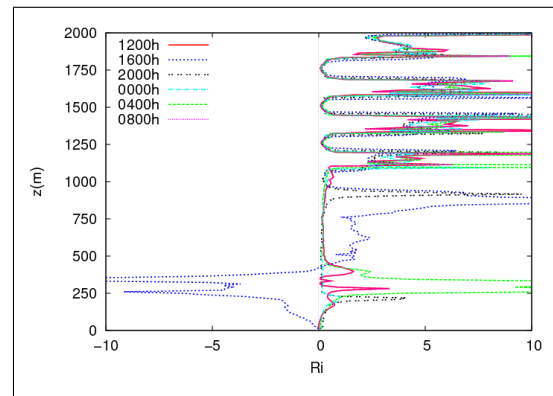
**Figura 5.20:** Perfis da componente zonal da velocidade do vento.



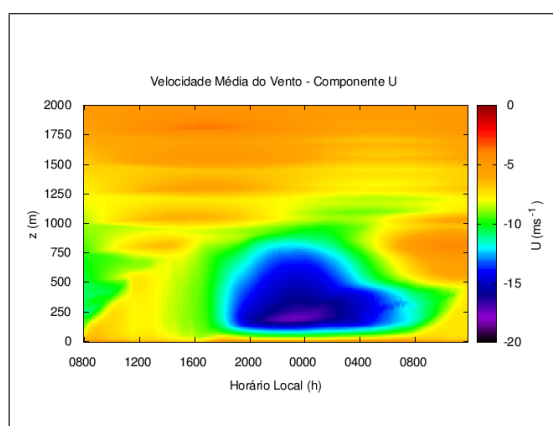
**Figura 5.21:** Perfis da componente meridional da velocidade do vento.



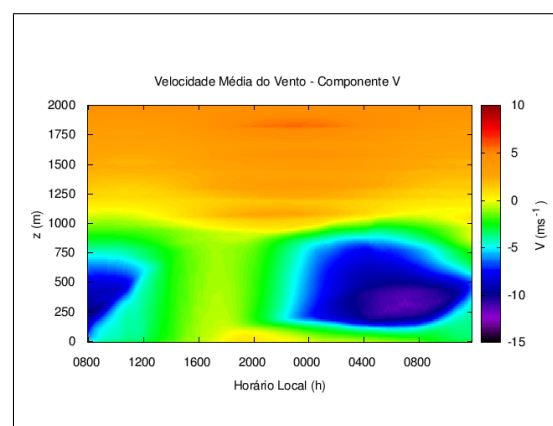
**Figura 5.22:** Perfis da magnitude da velocidade do vento.



**Figura 5.23:** Perfis do número de Richardson (gradiente).

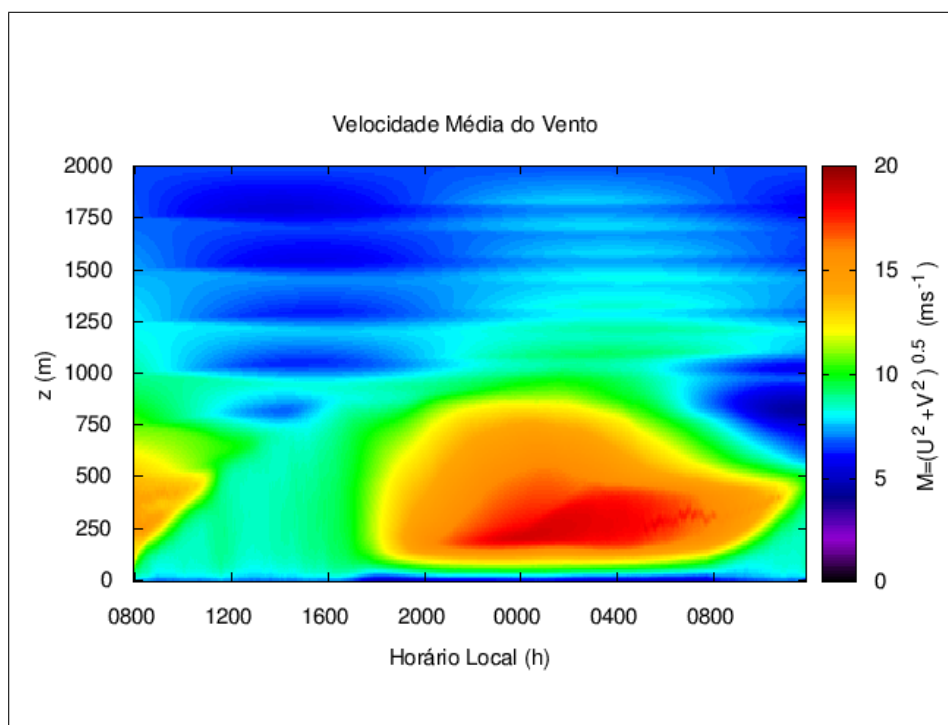


**Figura 5.24:** Evolução temporal do perfil da componente zonal da velocidade do vento.



**Figura 5.25:** Evolução temporal do perfil da componente meridional da velocidade do vento.

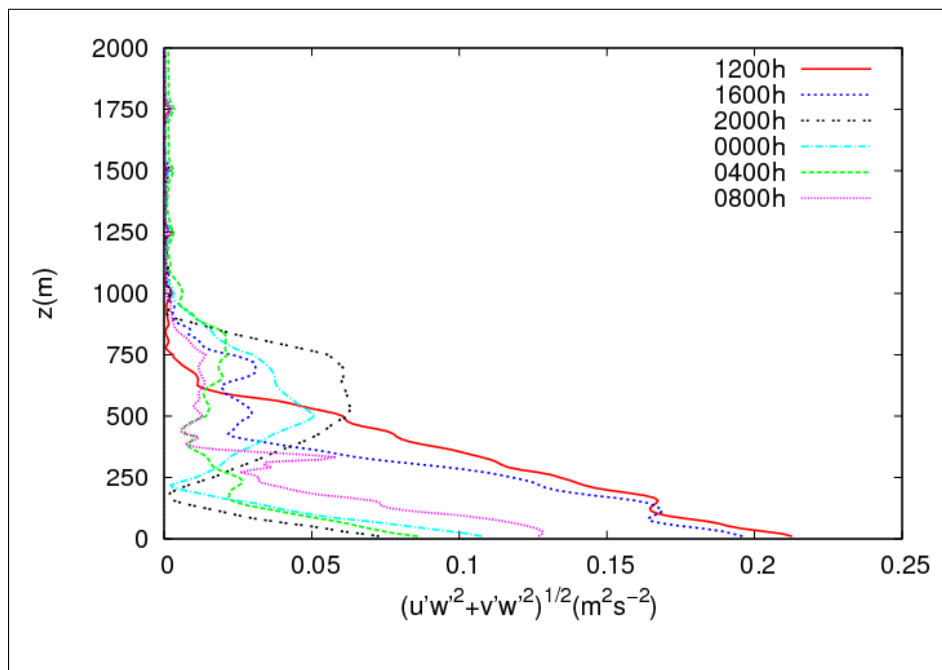
A figura 5.27 apresenta o perfil do fluxo turbulento de momento na CLP. Para os períodos convectivos o fluxo tem uma variação quase linear com a altura, convergindo para zero no topo da camada. O interessante nesta figura é o comportamento dos fluxos noturnos. O perfil de fluxo turbulento de momento na camada estável decresce linearmente com a altura até o topo da camada estável, onde volta a crescer, atingindo uma magnitude menor que a da superfície e voltando ao valor nulo na altura da CLP convectiva. Esta figura indica a presença de turbulência residual acima da CLE o que concorda com o comportamento esperado da CLP e com resultados apresentados para esta mesma variável por Cuxart e Jiménez (2007). As figuras 5.28 e 5.29 mostram o fluxo turbulento de momento de escala resolvida e escala de subfiltro, respectivamente. Nestes gráficos podemos notar que, no período onde a CLP apresenta um caráter convectivo, a escala de subfiltro é maior que a resolvida apenas próximo à superfície, sendo este resultado esperado devido ao processo de



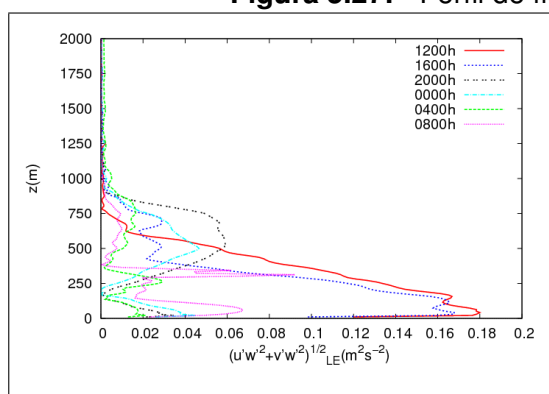
**Figura 5.26:** Evolução temporal do perfil da magnitude da velocidade do vento.

filtragem. Nos períodos estáveis da CLP a escala de subfiltro domina no interior da CLE, porém, acima desta região, na camada residual (CLR) a escala resolvida volta a ser maior que a escala de subfiltro, porém a uma razão menor que na camada convectiva.

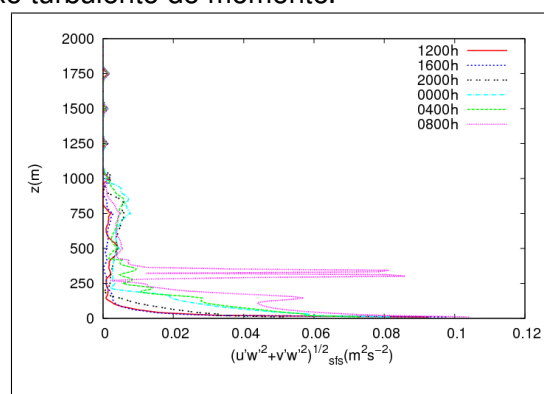
As figuras 5.30 e 5.31 apresentam os gráficos referentes aos perfis de temperatura potencial virtual e fluxo turbulento de energia na forma de calor sensível, respectivamente. A figura 5.30 tem uma boa concordância com o esperado para o ciclo diário da CLP, mostrando o processo de inversão e estratificação térmica. Tanto Basu et al. (2008) como Cuxart e Jiménez (2007) encontraram resultados qualitativamente semelhantes para os perfis de temperatura simulados com outros modelos LES. Além do mais, os perfis simulados estão de acordo com o esperado quando comparados a perfis experimentais disponíveis na literatura (STULL, 1988; SORBJAN, 1989). Por outro lado, Basu et al. (2008) constatou que os resultados dos perfis de temperatura no período noturno apontavam uma camada limite estável mais rasa que os resultados experimentais de Wangara. Tal consideração pode ser válida para a simulação referente ao projeto Candiota 2007, pois os resultados do modelo LES de Moeng (1984) apresentam uma forte estratificação estável, ge-



**Figura 5.27:** Perfil de fluxo turbulento de momento.



**Figura 5.28:** Perfil de fluxo turbulento de momento – escala resolvida.

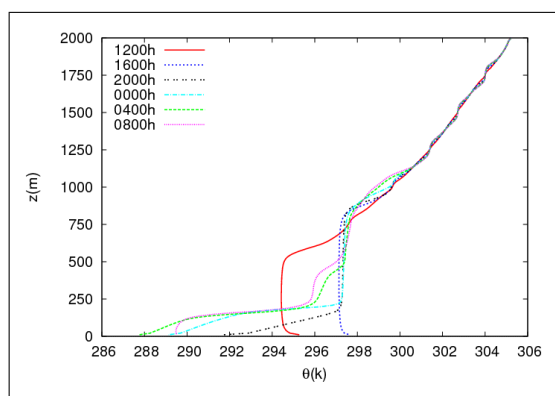


**Figura 5.29:** Perfil de fluxo turbulento de momento – escala de subfiltro.

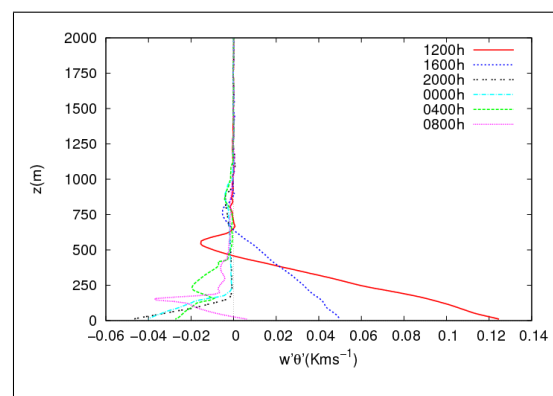
rada por um intenso gradiente de temperatura. Contudo, não podemos comprovar esta hipótese devido a falta de dados experimentais. O gráfico da figura 5.31 também está de acordo com o comportamento esperado do fluxo de energia na forma de calor sensível na CLP. Este fluxo é positivo durante o dia, exceto na região de entranhamento, e negativo durante a noite. Estas condições são bem representadas pelo modelo LES. No perfil de  $w'\theta'$  para as 0800h pode-se verificar o processo de quebra de inversão térmica no transiente da manhã. Neste horário, o perfil do fluxo turbulento de energia na forma de calor sensível está se tornando positivo, próximo ao solo, devido ao aquecimento da superfície pela radiação de onda curta mas ainda é negativo na região superior da camada limite planetária que continua



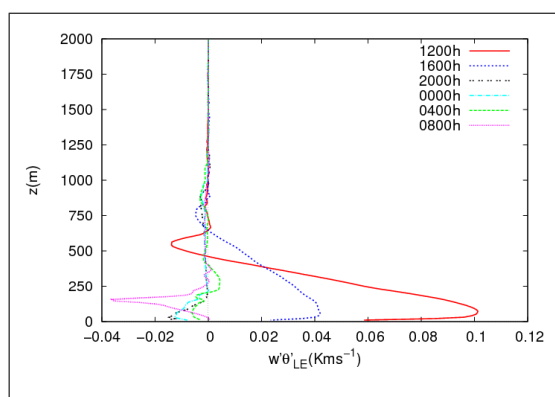
dominada por um regime estável. As figuras 5.32 e 5.33 mostram, respectivamente, os fluxos turbulentos de energia na forma de calor da escala resolvida e da escala de subfiltro. Em períodos no qual a CLP apresenta uma estrutura convectiva, os fluxos de escala de subfiltro são maiores que os da escala resolvida apenas na região próxima ao solo, devido a relação entre a largura do filtro e o pico espectral. Contudo, na simulação referente a camada estável, os fluxos de escala resolvida dominam em todas as regiões da CLE, ressaltando o problema da resolução da grade numérica para simular a CLE. A figura 5.34 mostra a evolução temporal do perfil de temperatura potencial virtual na CLP. Pode-se ver o desenvolvimento da CLC a partir da elevação da camada de inversão e a formação da CLE com a inversão térmica junto a superfície.



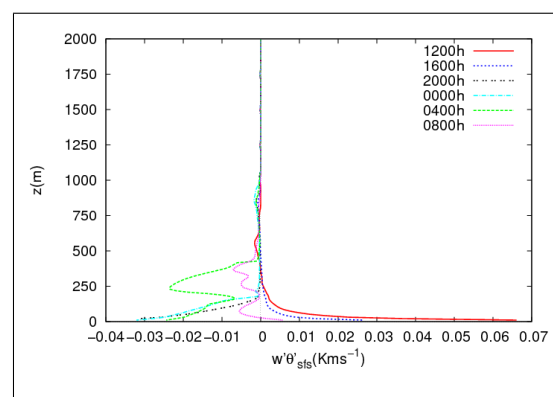
**Figura 5.30:** Perfil da temperatura potencial virtual.



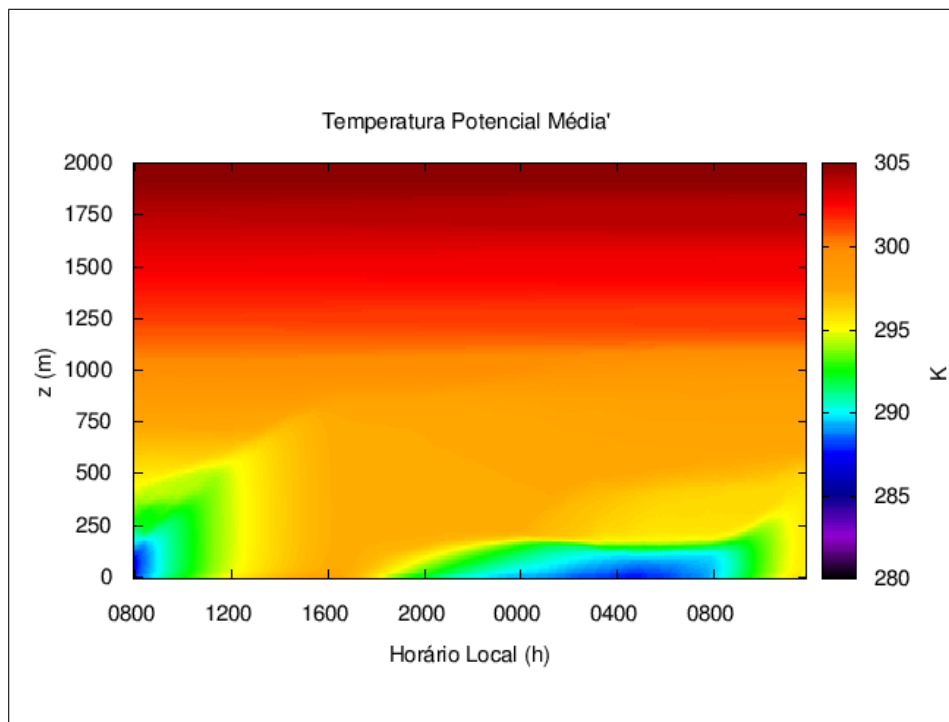
**Figura 5.31:** Perfil do fluxo turbulento de energia na forma de calor.



**Figura 5.32:** Perfil do fluxo turbulento de energia na forma de calor – escala resolvida.



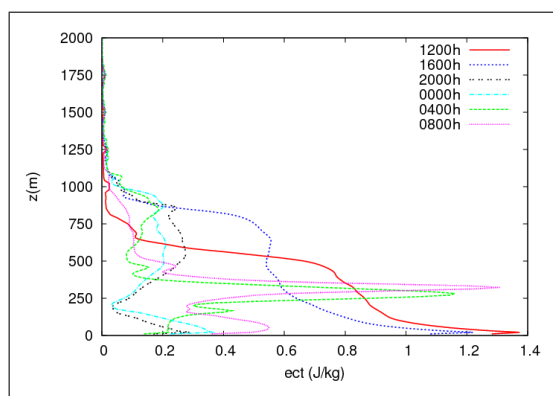
**Figura 5.33:** Perfil do fluxo turbulento de energia na forma de calor – escala de subfiltro.



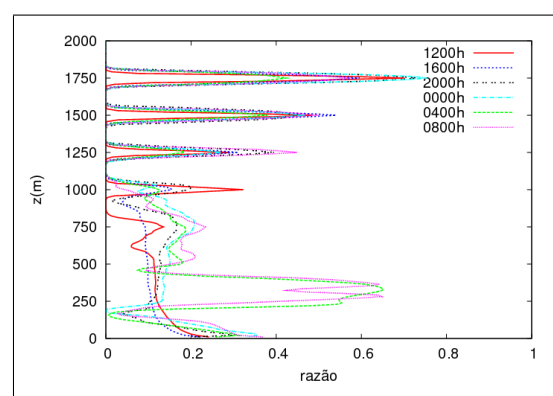
**Figura 5.34:** Evolução temporal do perfil da temperatura potencial virtual.

A figura 5.35 apresenta os gráficos do perfil de energia cinética turbulenta para os horários selecionados anteriormente. Nesta figura percebe-se que durante o período diurno os perfis de energia cinética turbulenta estão de acordo com os resultados encontrados na literatura. Estes perfis apresentam um decréscimo quase linear com a altura até próximo do topo da CLC onde converge para um valor quase nulo. Nos primeiros horários da noite, os perfis exibem um “bolsão” de turbulência acima da CLC, evidenciando a presença de turbulência residual enquanto a CLC decai para CLE. Além disto, os perfis referentes ao período da madrugada (quando ocorre a intensificação do JBN) indicam um pico de energia cinética na posição do JBN e uma menor quantidade de energia cinética turbulenta na CLR. A figura 5.36 mostra a razão entre a energia cinética turbulenta da escala de subfiltro e a energia cinética total. Neste gráfico pode-se ver que durante a simulação convectiva, a razão entre a escala de subfiltro e a energia total é sempre menor que 0,2, mesmo próximo a superfície. Contudo, na simulação estável esta razão aumenta em superfície e sobretudo, torna-se mais elevada (chegando a 0,6) na posição do JBN. Este resultado indica uma grande incerteza na coerência do pico de energia cinética turbulenta. Cuxart e Jiménez (2007) apresentam um gráfico para energia cinética turbulenta em um caso noturno simulado com LES. Em seu trabalho não se verifica

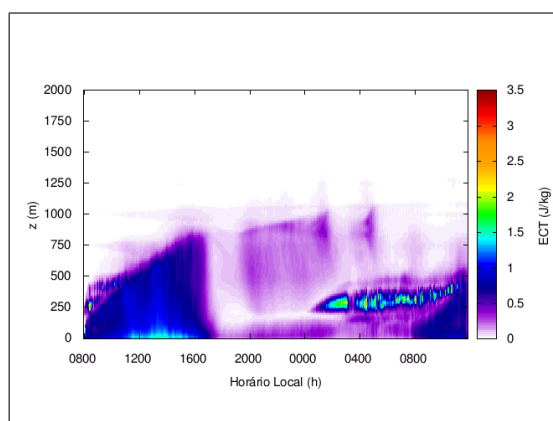
tal pico de energia cinética turbulenta na posição do JBN. Entretanto o “bolsão” de energia cinética turbulenta na CLR também aparece em seus resultados. As figuras 5.37 e 5.38 mostram, respectivamente, a evolução da energia cinética turbulenta e da razão entre a escala de subfiltro e a energia cinética turbulenta total da simulação. Nestas figuras pode-se observar que durante o período diurno, os maiores valores de energia cinética turbulenta estão próximos a superfície e que a razão entre as escalas é sempre pequena. Além disto, a questão do desenvolvimento de um pico de energia cinética turbulenta no topo da CLE pode ser acompanhado. Este aumento começa com a intensificação do JBN e com isto ocorre também o aumento da razão entre as escalas. Outro fato interessante é o desenvolvimento da CLC a partir do nascer do sol.



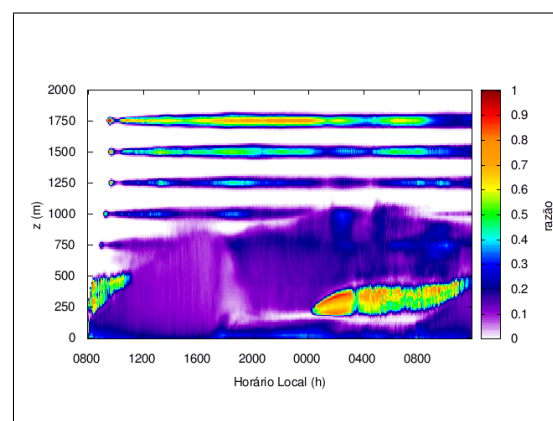
**Figura 5.35:** Perfil de energia cinética turbulenta total da simulação (escala resolvida e escala de subfiltro).



**Figura 5.36:** da razão entre a energia cinética de subfiltro e a energia cinética turbulenta.



**Figura 5.37:** Evolução temporal do perfil da energia cinética turbulenta total da simulação.



**Figura 5.38:** Evolução temporal do perfil da razão entre a energia cinética de subfiltro e a energia cinética turbulenta.

## 5.5 Balanço da energia cinética turbulenta

O desenvolvimento da energia cinética turbulenta descreve a evolução da turbulência e da camada limite planetária. Como discutido anteriormente, o modelo LES nos proporciona um conhecimento de toda estrutura vertical da CLP. Nesta sessão será discutida a evolução da energia cinética turbulenta na CLP. Pretende-se investigar a entrada de energia cinética turbulenta pelos diferentes forçantes, o seu transporte e a sua dissipação entre os diferentes níveis da CLP. Podemos entender os processos físicos que influenciam a energia cinética turbulenta através de sua equação de balanço (equação (3.15), no capítulo 3). De forma simplificada esta equação pode ser expressa como

$$\frac{de}{dt} = C + M + T + D \quad (5.2)$$

onde  $e$  representa a energia cinética turbulenta,  $t$  é o tempo,  $de/dt$  representa a taxa com que a energia cinética turbulenta aumenta ou diminui no tempo,  $C$  é o termo convectivo ou térmico,  $M$  o termo mecânico ou de cisalhamento,  $T$  o termo de transporte de energia cinética turbulenta e  $D$  a dissipação. O termo convectivo está associado com o fluxo de energia na forma de calor sensível. Desta maneira ele representa um termo de fonte ou sumidouro de energia cinética turbulenta. De maneira geral, o termo convectivo ou térmico é a principal fonte de energia cinética turbulenta durante o dia (exceto na região de entranhamento). No período da noite, este termo apresenta um sumidouro de energia cinética turbulenta. O termo mecânico  $M$  representa a entrada de energia cinética turbulenta devido ao cisalhamento do campo de velocidade. Assim, o termo mecânico é sempre um termo de fonte de energia cinética turbulenta. O termo de transporte  $T$  está associado com a transferência de energia cinética turbulenta dentro da CLP. Deste modo, não representa nem fonte nem sumidouro. O transporte de energia cinética turbulenta pode ser realizado tanto pelo próprio transporte turbulento que leva partículas de fluido com maior (menor) quantidade de energia cinética turbulenta para regiões com menor (maior) quantidade de energia cinética turbulenta. Adicionalmente, uma outra forma de transportar energia cinética turbulenta ocorre devido ao trabalho realizado pela

turbulência através de flutuações no campo de pressão. O termo de dissipação  $D$  refere-se a transformação da energia cinética turbulenta em energia interna da CLP devido a viscosidade molecular. Este termo é sempre negativo e dominante nas menores escalas do escoamento turbulento.

Neste trabalho, cada um dos termos foi obtido através de um processo de média espacial horizontal. Além disto, os termos foram separados em função das escalas resolvidas e das escalas de subfiltro. A equação para a escala resolvida é dada por

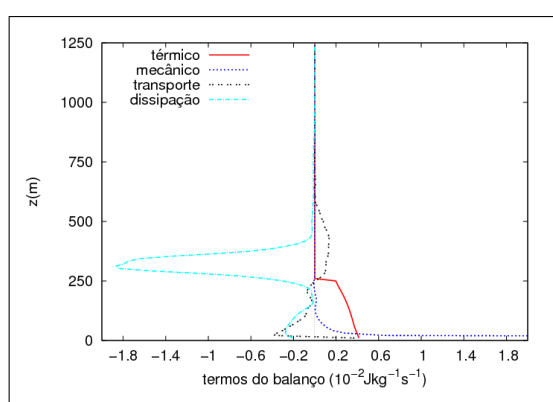
$$\frac{d}{dt} \langle e \rangle_{LE} = \langle C \rangle_{LE} + \langle M \rangle_{LE} + \langle T \rangle_{LE} \quad (5.3)$$

onde  $\langle \rangle$  representa a média horizontal. Deve-se notar que na equação (5.3) não existe o termo de dissipação. Isto deve-se ao fato da dissipação só ocorrer nas menores escalas e ser calculada pelo modelo de subfiltro ou subgrade. A equação de balanço de energia cinética turbulenta na subgrade é dada por

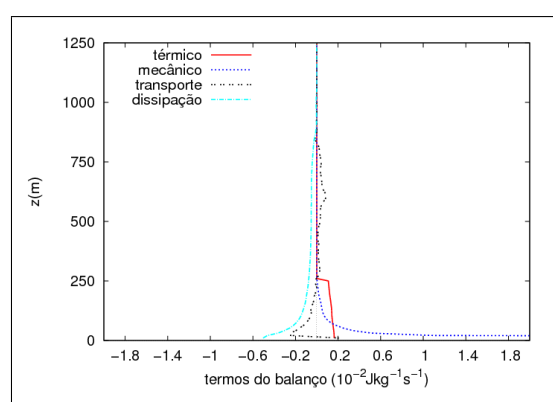
$$\frac{d}{dt} \langle e \rangle_{sfs} = \langle C \rangle_{sfs} + \langle M \rangle_{sfs} + \langle T \rangle_{sfs} + D \quad (5.4)$$

As figuras 5.39, 5.40, 5.41, 5.42, 5.43 e 5.44 mostram, respectivamente, perfis verticais dos termos: térmico  $C$ , mecânico  $M$ , transporte  $T$  e dissipação  $D$ , para os mesmos horários dos perfis apresentados anteriormente na tabela 5.1. Os termos  $C$ ,  $M$  e  $T$  correspondem a soma das duas escalas. Os perfis simulados concordam com as previsões teóricas sobre o comportamento de cada um dos termos. Todavia, cabe salientar o comportamento incomum da taxa de dissipação nas figuras 5.39, 5.43 e 5.44. Nestes perfis há um pico na taxa de dissipação no topo da CLE. Este resultado não concorda com outros trabalhos publicados (MOENG; SULLIVAN, 1994; COXART; JIMÉNEZ, 2006). Como a taxa de dissipação está diretamente ligada a energia cinética turbulenta de subfiltro e, como visto anteriormente, nestes horários a energia cinética turbulenta desta escala apresenta valores espúrios, pode-se atribuir este resultado à incerteza vinculada ao modelo de subgrade. Outro fato interessante é a magnitude do termo de empuxo ou convectivo em relação ao mecânico ou cisalhamento. O termo mecânico é maior próximo a superfície, porém decai rapidamente com a altura enquanto o valor do termo de

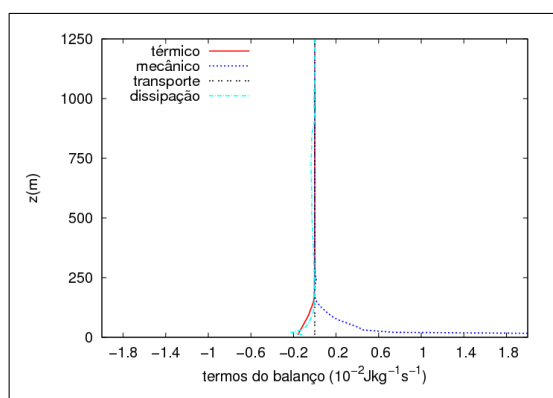
empuxo decai de maneira mais lenta com a altura. Além disto pode ser observado que, em períodos convectivos, o termo de transporte é negativo na parte inferior da camada e positivo na parte superior, concordando com os resultados observacionais de Caughey (1982). Isto está diretamente relacionado com o sentido em que a energia cinética turbulenta é transferida dentro da CLP. Na região inferior, por haver maior quantidade de energia cinética turbulenta, há um transporte negativo, ou seja, a energia é transportada das regiões inferiores da camada para as superiores, que apresentam sinal positivo para este termo. Na camada estável, o transporte dentro da CLP é muito pequeno como pode ser visto nos perfis.



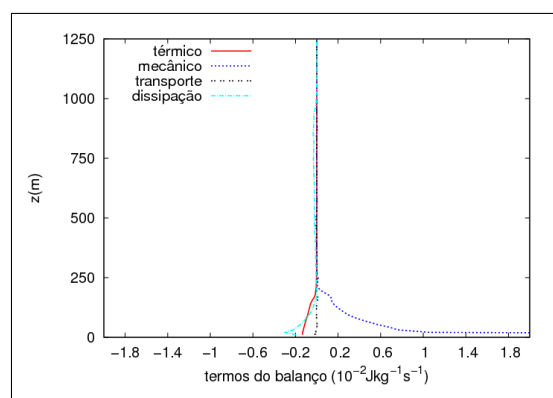
**Figura 5.39:** Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 12h (local)



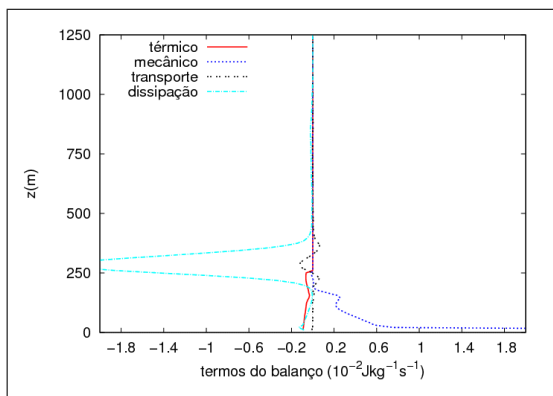
**Figura 5.40:** Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 16h (local)



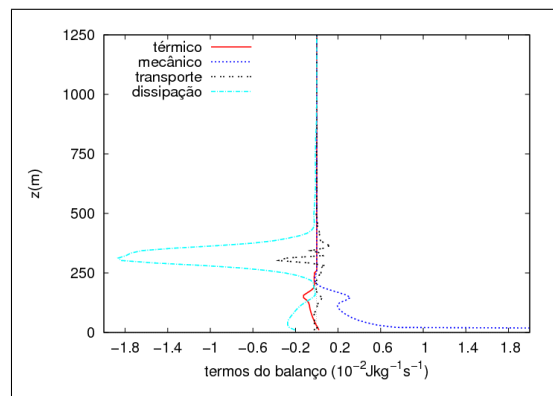
**Figura 5.41:** Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 20h (local)



**Figura 5.42:** Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 00h (local)

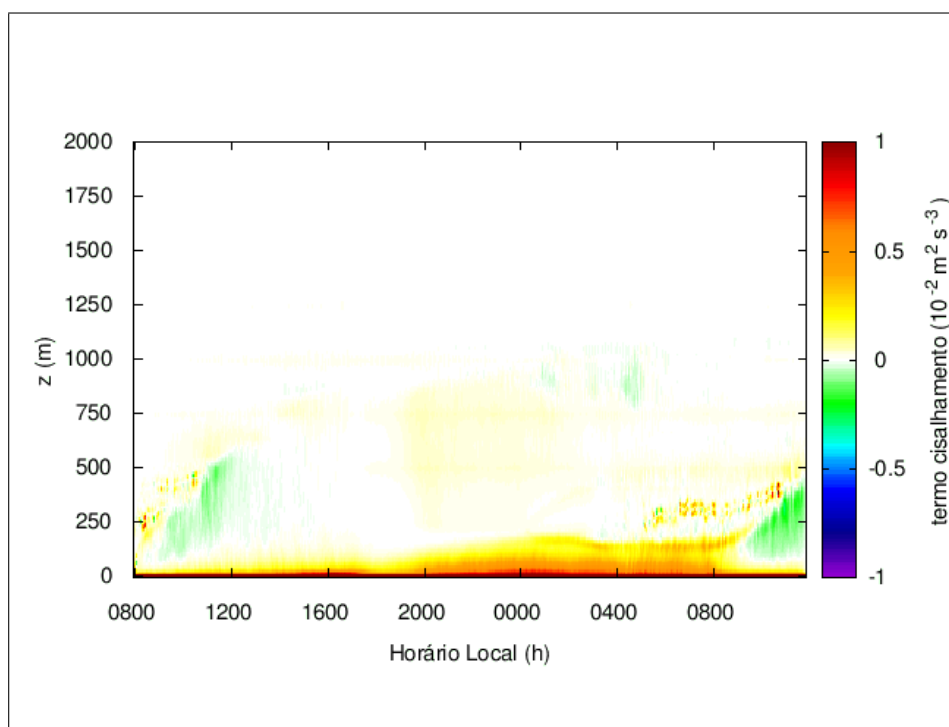


**Figura 5.43:** Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 04h (local)

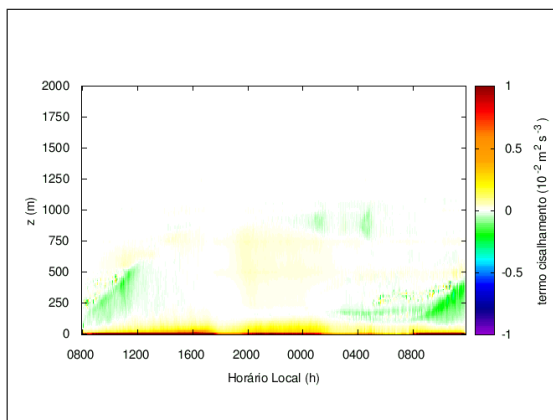


**Figura 5.44:** Perfil para os termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta – 08h (local)

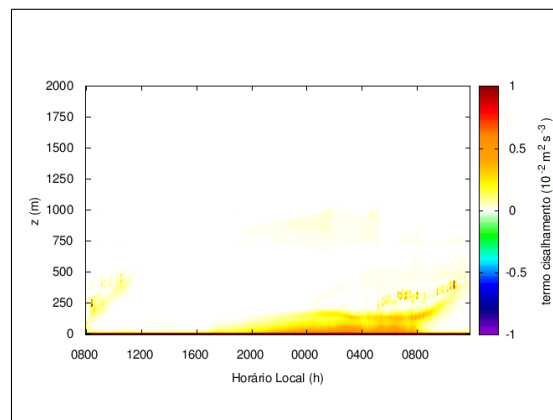
As figuras 5.45, 5.46 e 5.47 apresentam, respectivamente, a evolução do termo mecânico no tempo. Este termo apresenta valores positivos e intensos na região próxima a superfície. Comparando-se 5.46 e 5.47 nota-se que a escala de subfiltro é dominante neste termo, sobretudo na camada estável.



**Figura 5.45:** Evolução temporal do perfil do termo mecânico da equação de balanço da energia cinética turbulenta.



**Figura 5.46:** Evolução temporal do perfil do termo mecânico da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala resolvida.

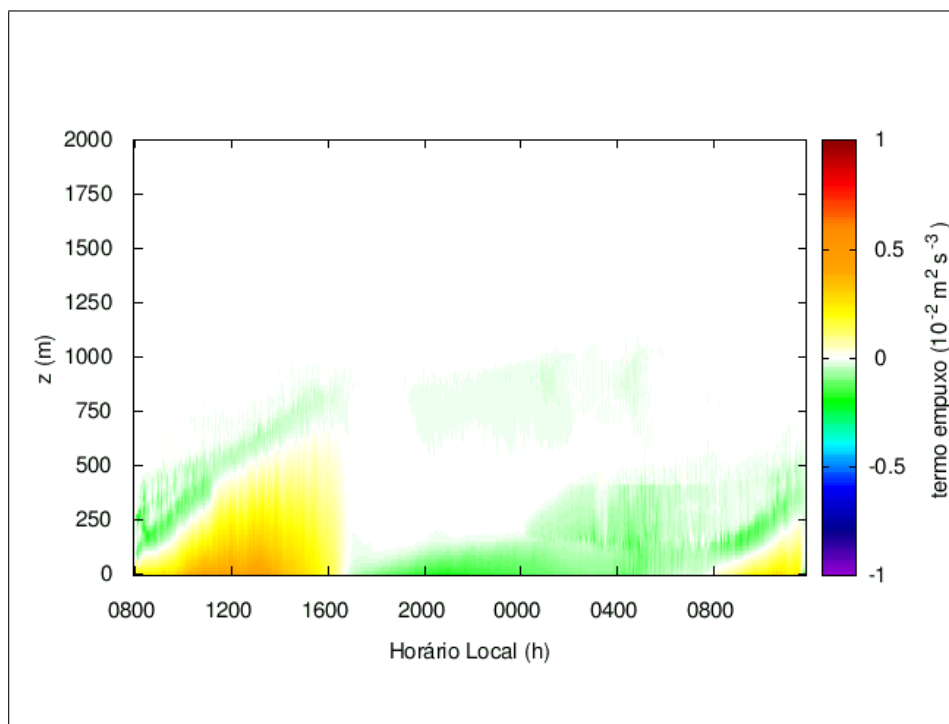


**Figura 5.47:** Evolução temporal do perfil do termo mecânico da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala de subfiltro.

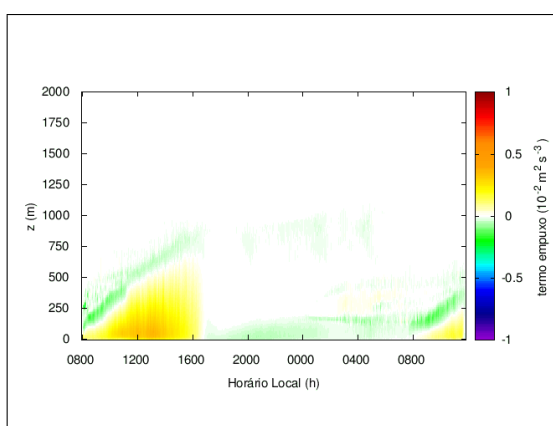
As figuras 5.48, 5.49 e 5.50, respectivamente, mostram a evolução do termo de empuxo ou convectivo na CLP. Visualizando-se 5.48 nota-se que, na camada convectiva, este termo é positivo e contribui fortemente para o aumento da energia cinética turbulenta, exceto na região de entranhamento, onde a troca de ar potencialmente mais aquecido da atmosfera livre com a CLP impõe um fluxo de energia na forma de calor negativo. Na camada estável, como pode ser visto na figura 5.48 o papel deste termo se inverte e seu sinal negativo atribui a esta quantidade um caráter de sumidouro de energia cinética turbulenta. Além do mais, analisando-se as figuras 5.49 e 5.50 percebe-se que a contribuição da escala de subfiltro neste termo é bastante relevante durante a noite, porém muito pequena durante o dia.

O termo de transporte é apresentado nas figuras 5.51, 5.52 e 5.53, sendo as duas últimas, respectivamente, a contribuição da escala resolvida e de subfiltro no transporte de energia cinética turbulenta. Na figura 5.51, observa-se que para a simulação diurna, existe um forte transporte de energia cinética turbulenta da região inferior para a superior da CLP. Conforme as figuras 5.52 e 5.53, este transporte efetivo é realizado, principalmente, pelos grandes turbilhões que existem na camada convectiva o que contribui em uma redução nas componentes de subfiltro. Por outro lado, na parte estável da simulação, o termo de transporte é quase imperceptível devido ao amortecimento da turbulência convectiva com a estratificação térmica estável.

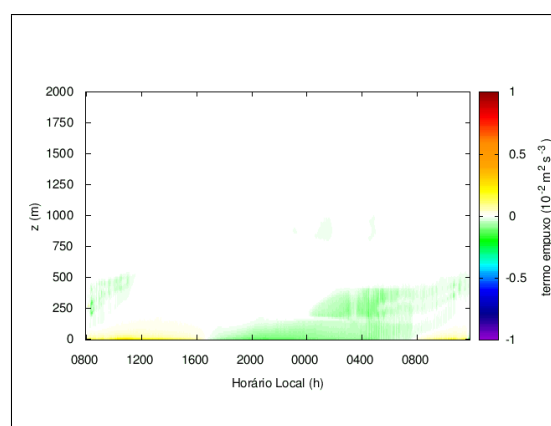




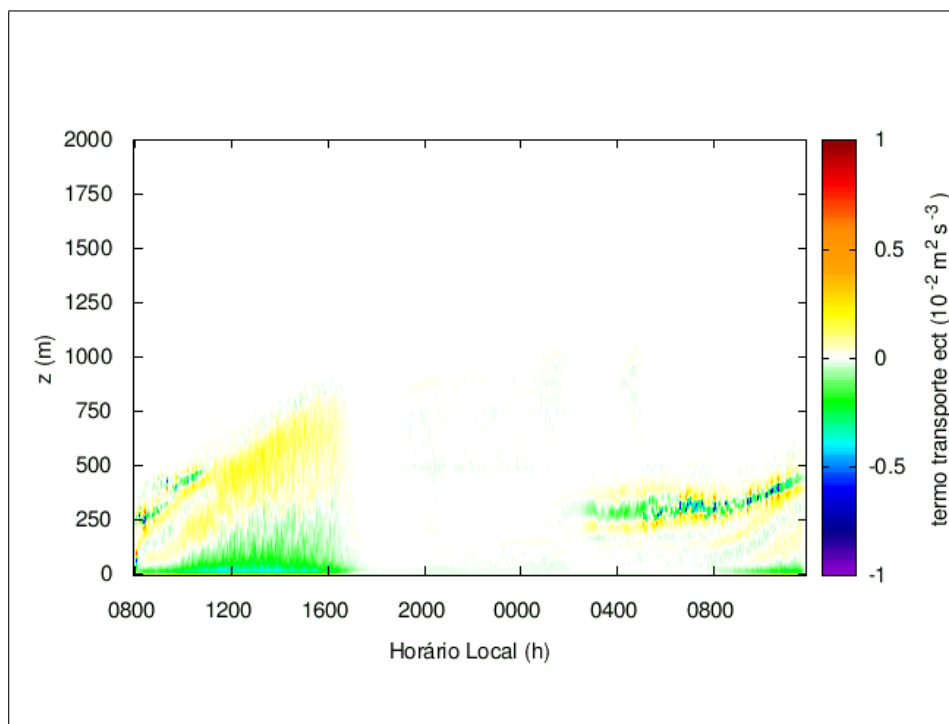
**Figura 5.48:** Evolução temporal do perfil do termo de empuxo da equação de balanço da energia cinética turbulenta.



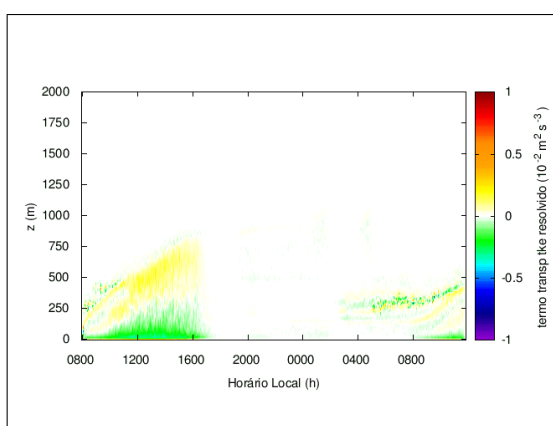
**Figura 5.49:** Evolução temporal do perfil do termo de empuxo da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala resolvida.



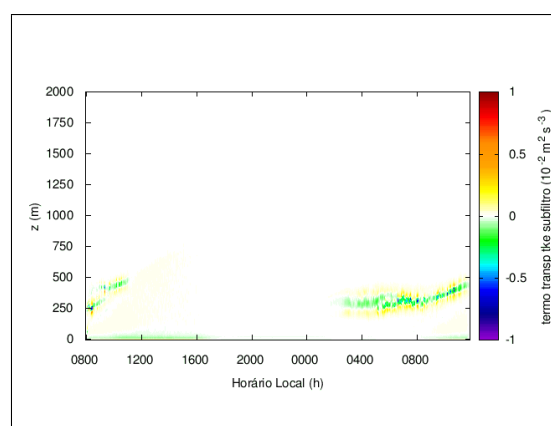
**Figura 5.50:** Evolução temporal do perfil do termo de empuxo da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala de subfiltro.



**Figura 5.51:** Evolução temporal do perfil do termo de transporte da equação de balanço da energia cinética turbulenta.

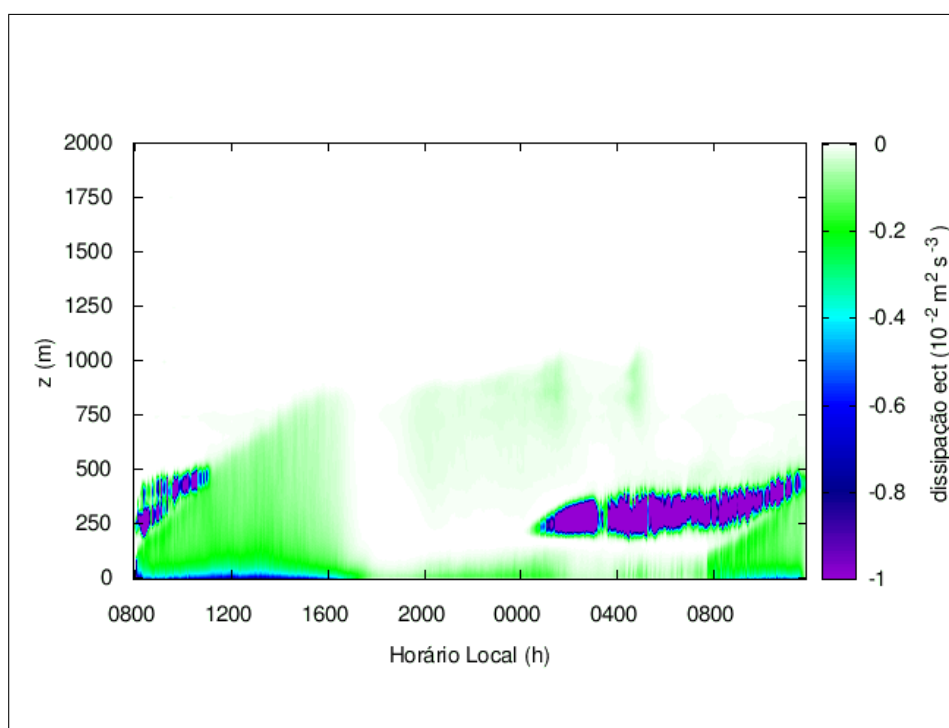


**Figura 5.52:** Evolução temporal do perfil do termo de transporte da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala resolvida.



**Figura 5.53:** Evolução temporal do perfil do termo de transporte da equação de balanço da energia cinética turbulenta – escala de subfiltro.

A figura 5.54 mostra a evolução do perfil vertical da taxa de dissipação. Esta variável é sempre muito complicada, pois exige uma grande resolução em medidas experimentais para ser determinada. O modelo LES obtém o valor da taxa de dissipação a partir do modelo de subgrade. Contudo, na figura 5.54 percebemos alguns valores que não condizem com o comportamento esperado na CLP, principalmente no topo da CLE, onde existe uma região com alta dissipação. Considerando-se apenas o intervalo convectivo da simulação, o valor da taxa de dissipação está de acordo com o esperado a partir de resultados teóricos e outras simulações LES, sendo maior próxima da superfície e diminuindo com a altura (CAUGHEY, 1982; MOENG; SULLIVAN, 1994).



**Figura 5.54:** Evolução temporal do perfil do termo de dissipação da equação de balanço da energia cinética turbulenta.

## 5.6 Análise estatística do escoamento

Nesta sessão pretende-se discutir alguns resultados da simulação LES do ciclo diário da CLP à luz da teoria estatística da turbulência. Para isso foram calculados perfis verticais da variância ( $\sigma^2(z)$ ) da velocidade longitudinal e vertical. Além disso foram calculados perfis verticais da variância de temperatura para os horários apontados na tabela 5.1. A variância é o momento estatístico que representa o quanto uma determinada variável  $\xi$  flutua em torno da sua média. No caso dos perfis verticais da variância das componentes da velocidade e temperatura, as flutuações avaliadas foram calculadas em relação a média espacial horizontal de cada plano (nível) da grade numérica. Desta forma a variância de  $\xi$  foi obtida através da equação (5.5)

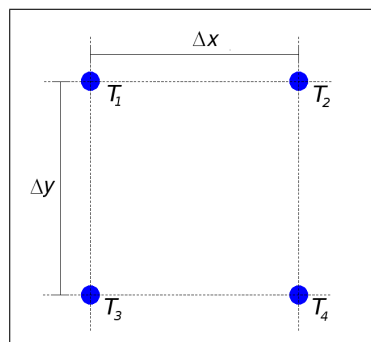
$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\xi_i - \langle \xi \rangle)^2. \quad (5.5)$$

Outra análise estatística realizada foi a avaliação das funções estrutura eulerianas de segunda ordem das componentes da velocidade. As funções estrutura foram obtidas através de uma análise estatística temporal do modelo LES. Para isto foram selecionados os quatro pontos centrais da grade horizontal do modelo em todos os níveis verticais. Destes quatro pontos, a cada interação foram armazenados os valores instantâneos das componentes do campo de velocidade do modelo LES analogamente a quatro torres micrometeorológicas, ou seja, os dados obtidos nestas séries temporais fornecem uma descrição euleriana do escoamento. A figura 5.55 exibe uma representação dos quatro pontos de grade selecionados que equivalem à quatro torres micrometeorológicas ( $T_1, T_2, T_3$  e  $T_4$ ).

As funções estrutura foram calculadas a partir da seguinte definição (PANCHEV, 1971)

$$D_n u_i(\tau) = \overline{(u_i(t+\tau) - u_i(t))^n} \quad (5.6)$$

onde a barra representa o processo de média temporal. Neste trabalho foram utilizadas funções estrutura de segunda ordem, ou seja, fazendo  $n = 2$  na equação



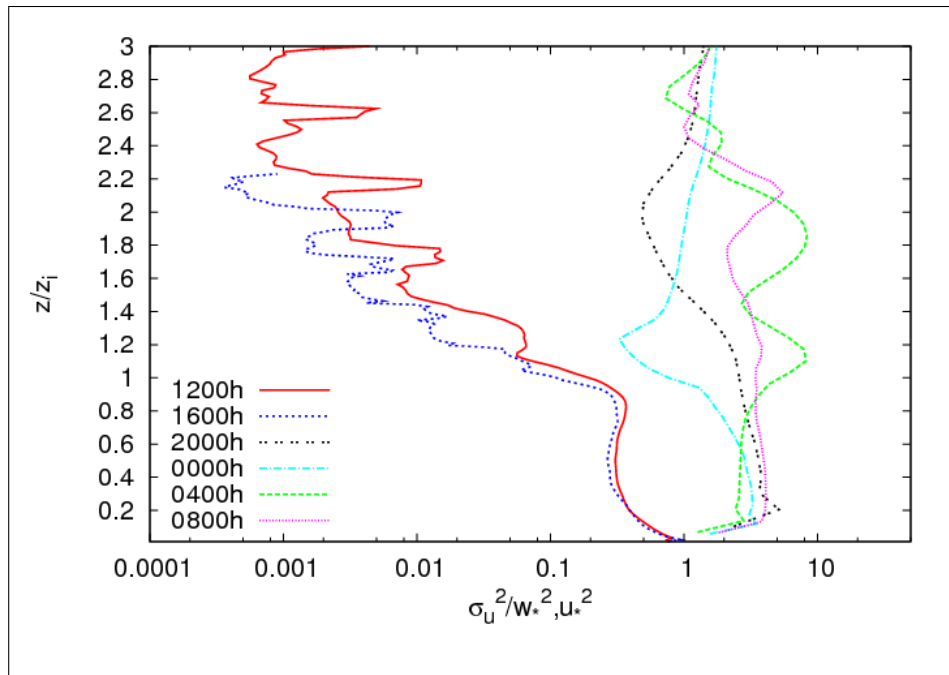
**Figura 5.55:** Representação espacial dos pontos de medição temporal do modelo LES.

(5.6). No estudo da turbulência utiliza-se uma definição diferente para as componentes da velocidade. Neste estudo considera-se a componente  $u$  do vento a componente longitudinal (alinhada com a velocidade média do vento). Deste modo, as componentes lateral  $v$  e vertical  $w$  possuem um valor médio nulo. A rotação de coordenadas é necessária pois a teoria estatística da turbulência é baseada na teoria de campos de funções aleatórias e esta teoria descreve as relações estatísticas entre as variáveis neste formalismo (componente radial ou longitudinal e componentes normais ou transversais) (PANCHEV, 1971). Para se realizar esta rotação de coordenadas, alinhando a componente  $u$  com o campo médio da velocidade do vento empregou-se a rotação de coordenadas proposta por McMillen (1988)(KAIMAL; FINNINGAN, 1994). Foram calculadas funções estrutura de segunda ordem para os períodos representativos dos horários propostos na tabela 5.1 no primeiro nível da grade, ou seja a altura de  $10,42m$ . Além do mais, foram calculadas funções estrutura de segunda ordem para os níveis de  $0,2z_i$ ,  $0,5z_i$  e  $z_i$  para as séries dos quatro pontos de grade selecionados.

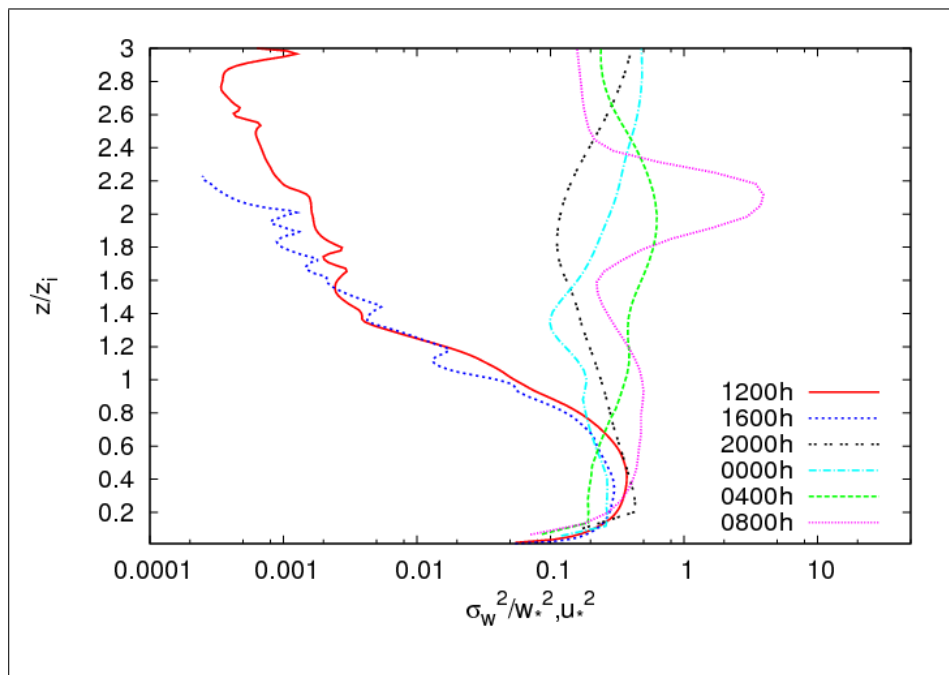
### 5.6.1 Perfil vertical das variâncias

As figuras 5.56 e 5.57 apresentam, respectivamente, a variância vertical da componente longitudinal da velocidade do vento e da componente vertical. Estas variâncias foram normalizadas pelo quadrado da escala de velocidade convectiva ( $w_*^2$ ) para os casos convectivos ou pelo quadrado da velocidade de fricção ( $u_*^2$ ) para os casos estáveis (conforme a tabela 5.1). Na figura 5.56 percebe-se que, próximo da superfície a variância da componente longitudinal do vento apresenta uma maior

magnitude do que em regiões em torno de  $0,3z_i$  e  $z_i$ . Nesta região central e superior da CLP,  $\sigma_u^2/w_*^2$  apresenta um valor constante com a altura, da ordem de  $0,4$ . Este comportamento concorda com as observações de Caughey (1982) e com diversos perfis desta grandeza apresentados por Sorbjan (1987) em seu livro clássico sobre estrutura da camada limite planetária. Os bons resultados encontrados para a variância da componente longitudinal da velocidade também são observados para a variância da componente vertical da velocidade do vento (figura 5.57), para o período convectivo da simulação. A variância da velocidade vertical apresenta valores pequenos próximo a superfície e no topo da camada. Na região central há um valor máximo bem definido da razão  $\sigma_w^2/w_*^2$  em aproximadamente  $0,4z_i$ , com magnitude, em torno de  $0,5$ . O comportamento da variância da velocidade vertical está de acordo com as descrições teóricas e experimentais de vários trabalhos publicados na literatura (KAIMAL et al., 1976; CAUGHEY, 1982; SORBJAN, 1989). Para os períodos de simulação de camada estável, o comportamento das variâncias de velocidade – tanto longitudinal como vertical – apresentam um perfil diferente daquele proposto pela literatura ao relatar evidências experimentais. Espera-se que tanto o perfil da variância longitudinal quanto vertical tenham valores que decrescem rapidamente com a altura. Este fato não é bem reproduzido pelos dados obtidos na simulação. Os dados da simulação indicam um perfil de variância de velocidade praticamente constante com a altura dentro da clp (exceto na região mais baixa, até  $0,2z_i$ ).



**Figura 5.56:** Perfil da variância da componenete longitudinal da velocidade do vento normalizada por uma escala de velocidade.



**Figura 5.57:** Perfil da variância da componenete vertical da velocidade do vento normalizada por uma escala de velocidade.

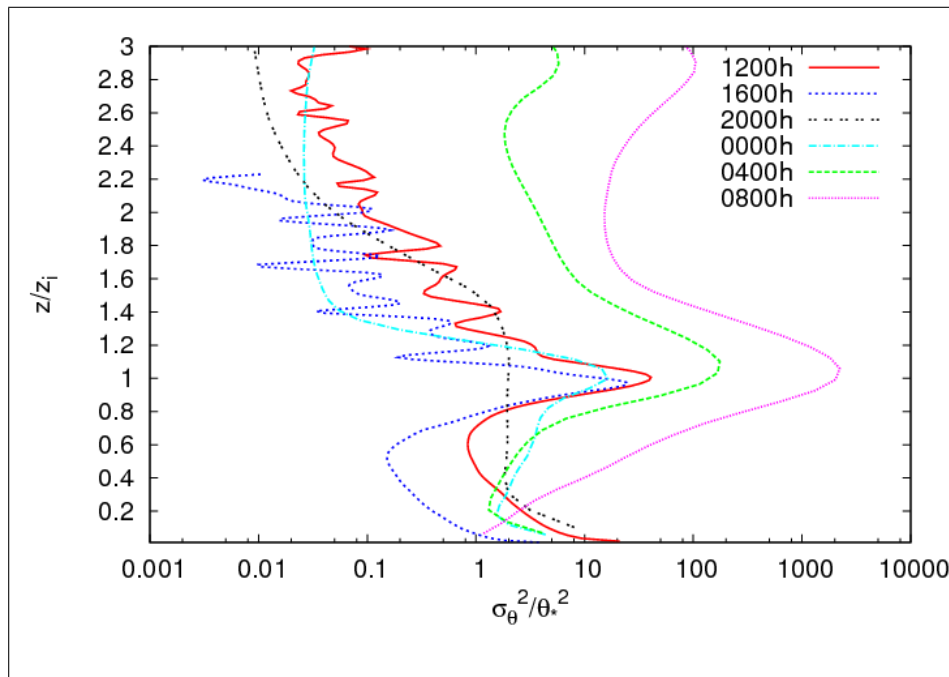
A figura 5.58 exibe a variância da temperatura potencial  $\sigma_\theta^2$  normalizada pelo quadrado da escala de temperatura superficial ( $\theta_*^2$ ). A escala de temperatura superficial é definida como (STULL, 1988)

$$\theta_* = \begin{cases} \overline{w'\theta'}/w_*, & \text{se } w'\theta' > 0 \\ -\overline{w'\theta'}/u_*, & \text{se } w'\theta' < 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Para os períodos de camada convectiva a figura 5.58 apresenta um comportamento diferente. No horário das 12h (local), o comportamento da razão  $\sigma_\theta^2/\theta_*^2$  concorda com o apresentado no trabalho experimental de Caughey (1982) e outros autores (KAIMAL et al., 1976; SORBJAN, 1989). Neste horário, a variância da temperatura potencial apresenta um máximo próximo da superfície, diminui com a altura e torna a apresentar uma grande flutuação de temperatura potencial na região de entramento. Para o horário das 16h, a forma da curva que descreve o perfil da variância de temperatura potencial é semelhante ao apresentado para às 12h. Entretanto, a magnitude das flutuações é consideravelmente inferior, chegando a ser uma ordem de grandeza menor. É interessante observar que neste horário, o fluxo de energia na forma de calor na superfície é bastante pequeno (cerca de  $0,05 Kms^{-1}$ , ver tabela 5.1). Isto mostra uma dependência muito grande das flutuações de temperatura em relação ao fluxo de energia na forma de calor na camada convectiva. Além do mais, o perfil da variância de temperatura para as 8h (local) apresenta um crescimento com a altura. Este é um horário de transição da camada estável para convectiva. Não se tem observações deste período do dia para confrontar com os dados simulados. Os perfis da variância de temperatura potencial para a camada estável apresentam um comportamento semelhante ao da convectiva, exceto o perfil das 20h que exibe um decréscimo desta variância até  $0,4z_i$  e depois assume um perfil constante com a altura até  $1,4z_i$  onde volta a diminuir. Os perfis para a variância de temperatura na camada estável encontrados na literatura apresentam um rápido decréscimo desta variância com a altura, chegando a valores próximos de zero no topo da camada. Entretanto, assim como para as variâncias de velocidade, os dados do modelo LES não exibiram tal comportamento.

As figuras 5.59 e 5.60 apresentam a comparação entre os perfis da variância da





**Figura 5.58:** Perfil da variância da temperatura potencial normalizada por uma escala de temperatura.

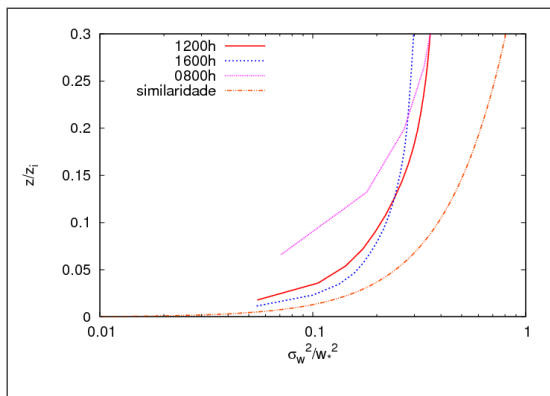
velocidade vertical e temperatura potencial para a região próxima da superfície em períodos convectivos (convecção livre) com curvas de similaridade obtidas de dados experimentais (KAIMAL et al., 1976; CAUGHEY, 1982). A variância da velocidade vertical nesta região é dada por

$$\frac{\sigma_w^2}{w_*^2} = 1,8 \left( \frac{z}{z_i} \right)^{2/3} \quad (5.8)$$

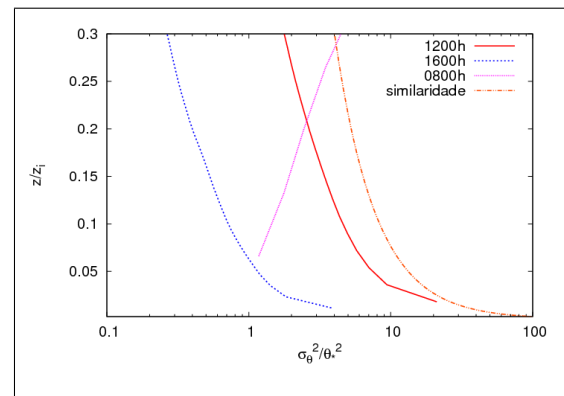
enquanto a função que descreve o comportamento vertical da variância da temperatura potencial na região de convecção livre é expressa pela seguinte equação (CAUGHEY, 1982)

$$\frac{\sigma_\theta^2}{\theta_*^2} = 1,8 \left( \frac{z}{z_i} \right)^{-2/3} . \quad (5.9)$$

O comportamento da variância da velocidade vertical (apresenta na figura 5.59) é bastante coerente com a curva de similaridade. Já em relação a figura 5.60 que mostra a variação vertical de  $\sigma_\theta^2$  com a altura na região de convecção livre, o melhor resultado é em relação ao perfil das 12h (local), como já comentado anteriormente.



**Figura 5.59:** Perfil da variância de  $w$  na região de convecção livre.



**Figura 5.60:** Perfil da variância de  $\theta$  na região de convecção livre.

## 5.6.2 Funções estrutura de segunda ordem das componentes da velocidade

A teoria de Kolmogorov para a turbulência completamente desenvolvida preve a existência de um sub-intervalo de equilíbrio universal. Este intervalo está localizado entre os turbilhões de tamanho  $r$  que são muito maiores que a microescala de de Kolmogorov  $\eta$  e a escala integral  $L$  (WELTER, 2006), matematicamente expresso pela desigualdade

$$\eta \ll r \ll L \quad (5.10)$$

Para este intervalo há uma relação bastante conhecida entre a função estrutura de segunda ordem da velocidade e a dimensão dos turbilhões. Esta relação é a "Lei dos 2/3" de Kolmogorov (PANCHEV, 1971) dada por

$$D_2 u_i \propto r^{2/3} \quad (5.11)$$

onde  $D_2 u_i$  é a função estrutura da  $i$ -ésima componente da velocidade. Neste trabalho as funções estrutura foram obtidas de séries temporais extraídas do modelo LES. A relação entre a escala temporal e a dimensão do turbilhão foi obtida através da relação  $r = \overline{u_i} \tau$ , onde  $\overline{u_i}$  é a média da  $i$ -ésima componente da velocidade velocidade e  $\tau$  o incremento temporal entre dois valores consecutivos de velocidade na série de dados. Desta forma  $\tau$  nada mais é que o passo de tempo do modelo.

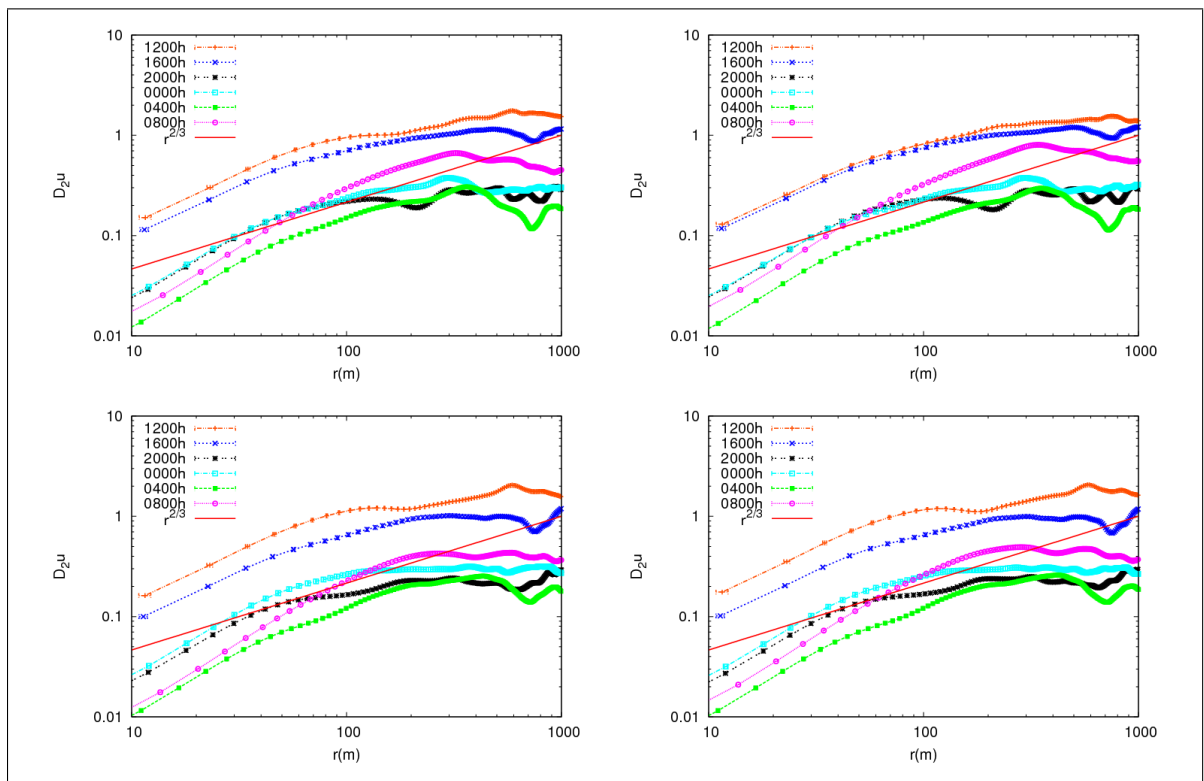
O conceito de função estrutura foi introduzido pela escola russa de estatística na década de trinta (PANCHEV, 1971). Kolmogorov (1941) utilizou tal conceito para o estudo da turbulência definindo um intervalo de escalas espaciais onde a turbulência deveria ser localmente homogênia e isotrópica. Portanto, as funções estrutura são definidas em função do espaçamento  $r$  pertencente ao subintervalo inercial, ou seja, em termos espaciais. Para se realizar esse tipo de análise necessita-se que o sistema de referência esteja alinhando com a velocidade média do vento devido ao requerimento da relação de isotropia entre componentes transversais e longitudinas da velocidade (LANDAU; LIFSHITZ, 1959)

$$2rD_2v = 2rD_2w = \frac{d}{dr} (r^2 D_2u). \quad (5.12)$$

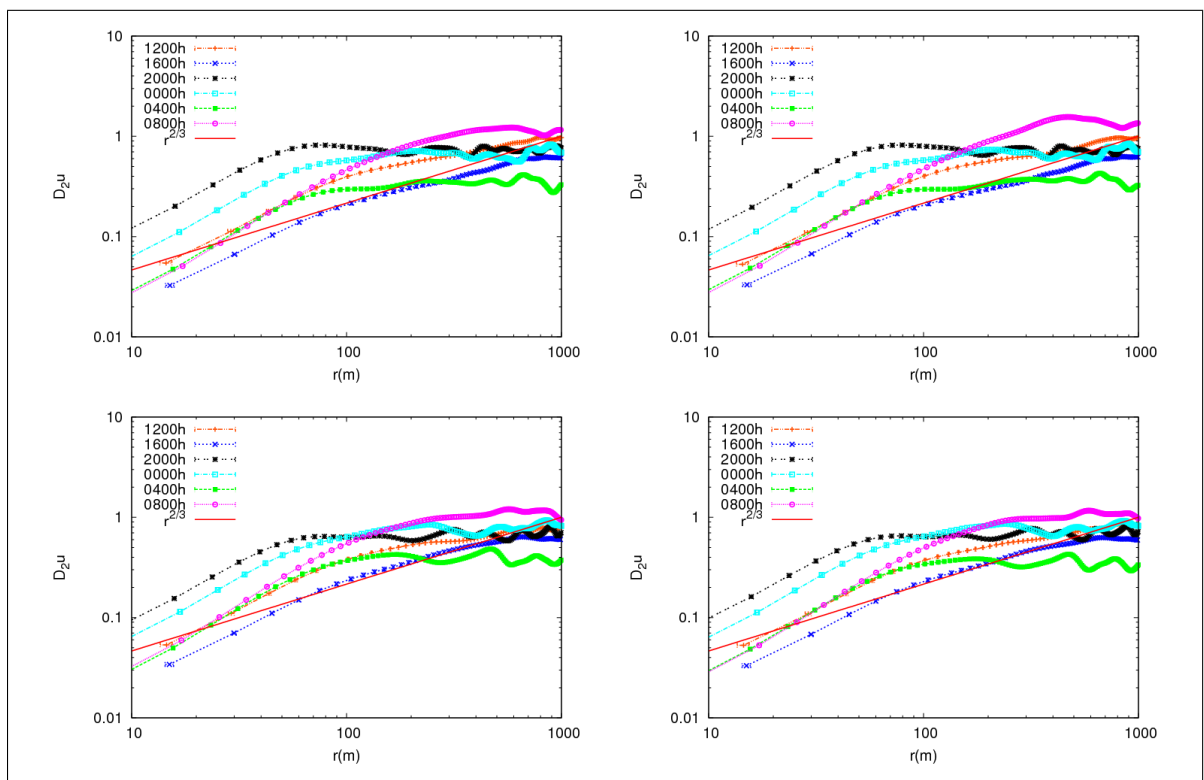
A determinação de funções estrutura espaciais de um experimento numérico necessita que os pontos de grade utilizados para o cálculo da função estrutura estejam alinhados com a velocidade média do vento. De forma prática isto é bastante complicado, mesmo através de modelos, pois se faz necessário uma grade numérica com uma resolução relevante para que haja o número de pontos para convergência estatística. Por esta razão, neste trabalho, baseando-se na hipótese de Taylor (STULL, 1988) as funções estrutura foram calculadas em relação a incrementos temporais e transformadas em funções estrutura espaciais. Este procedimento foi realizado devido a facilidade em se obter a rotação de coordenadas neste tipo de dado.

É comum no estudo da turbulência a utilização de espectros. No caso de espectros espaciais a menor escala resolvida seria da ordem de duas vezes o espaçamento de grade. Além disto, o espectro de Fourier (mesmo em uma análise no espaço de freqüências) apresenta um aspecto bastante ruidoso nas pequenas escalas, o que dificulta a visualização da forma da função espectral. Devido a este ruído nas altas freqüências, a utilização de espectros ainda exige um pós processamento dos dados. De forma geral, segundo Mahrt e Gamage (1986), funções estrutura apresentam propriedades vantajosas para a análise de movimentos altamente não lineares e são menos sensíveis a tendências.

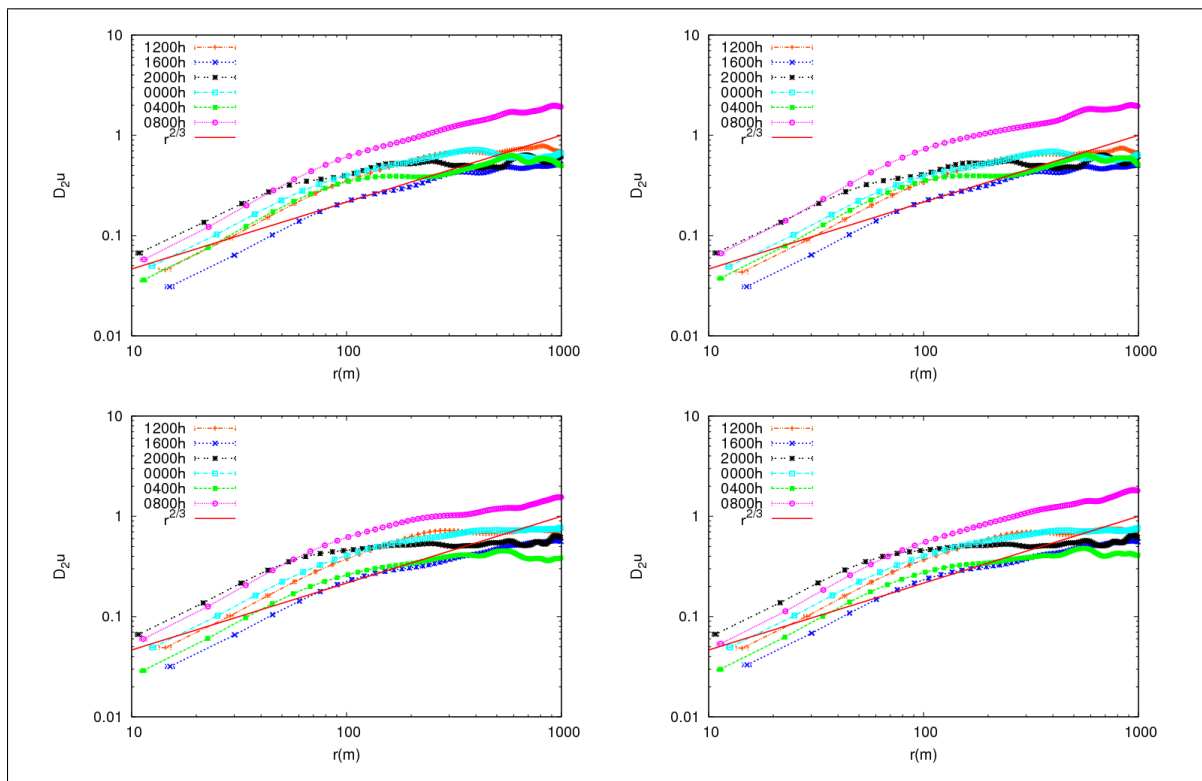
As figuras 5.61, 5.62, 5.63 e 5.64 exibem, respectivamente, as funções estrutura de segunda ordem da componente longitudinal da velocidade para  $z = 10,42m$  (primeiro ponto de grade do modelo),  $z = 0,2z_i$ ,  $z = 0,5z_i$  e  $z = z_i$ . As funções estrutura em cada um dos níveis foram calculadas para diferentes horários (definidos na tabela 5.1). Cada figura possui quatro gráficos, sendo cada um deles referente a um dos pontos de grade utilizados para a obtenção das séries temporais. A posição dos gráficos na figura está condicionada a disposição dos pontos de grade selecionados (ver a figura 5.55). Além das funções estrutura, cada gráfico contém a apresentação de uma função  $f(x) \propto r^{2/3}$ , para comparação da inclinação da função estrutura e verificação da existência de um sub-intervalo inercial.



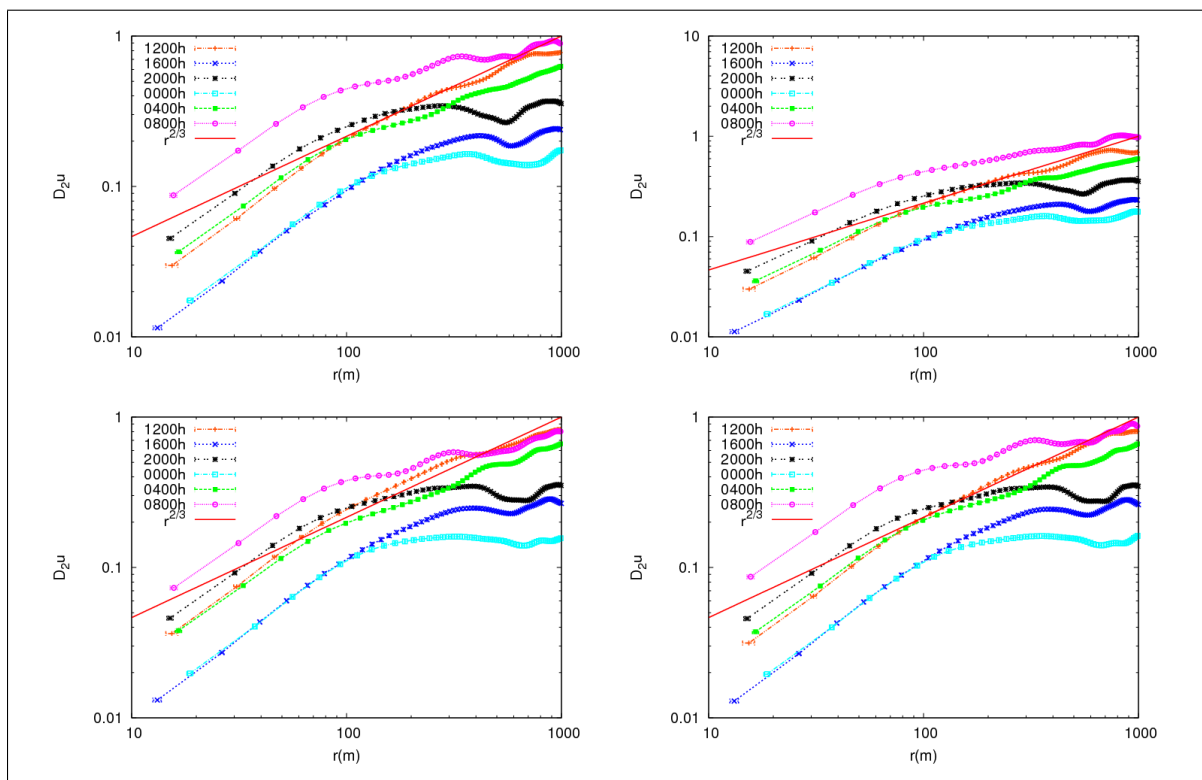
**Figura 5.61:** Função estrutura da componente longitudinal da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 10, 42m$ .



**Figura 5.62:** Função estrutura da componente longitudinal da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0, 2z_i$

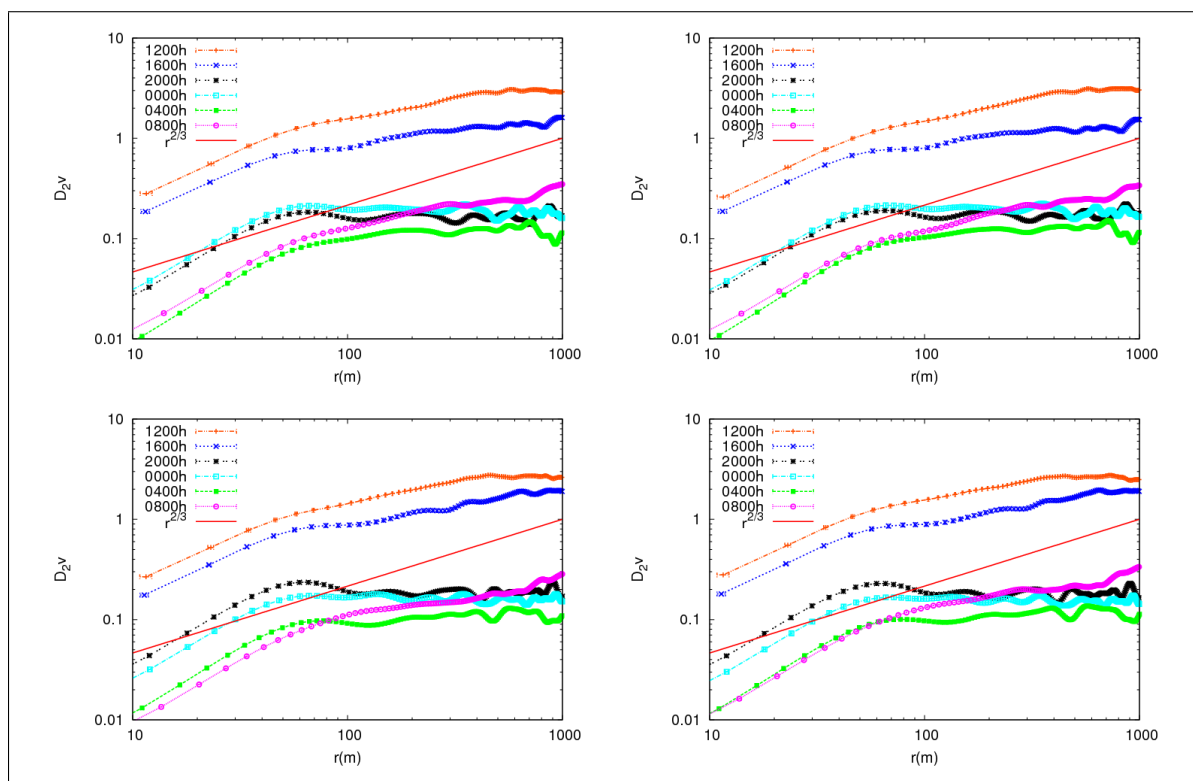


**Figura 5.63:** Função estrutura da componente longitudinal da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0,5z_i$

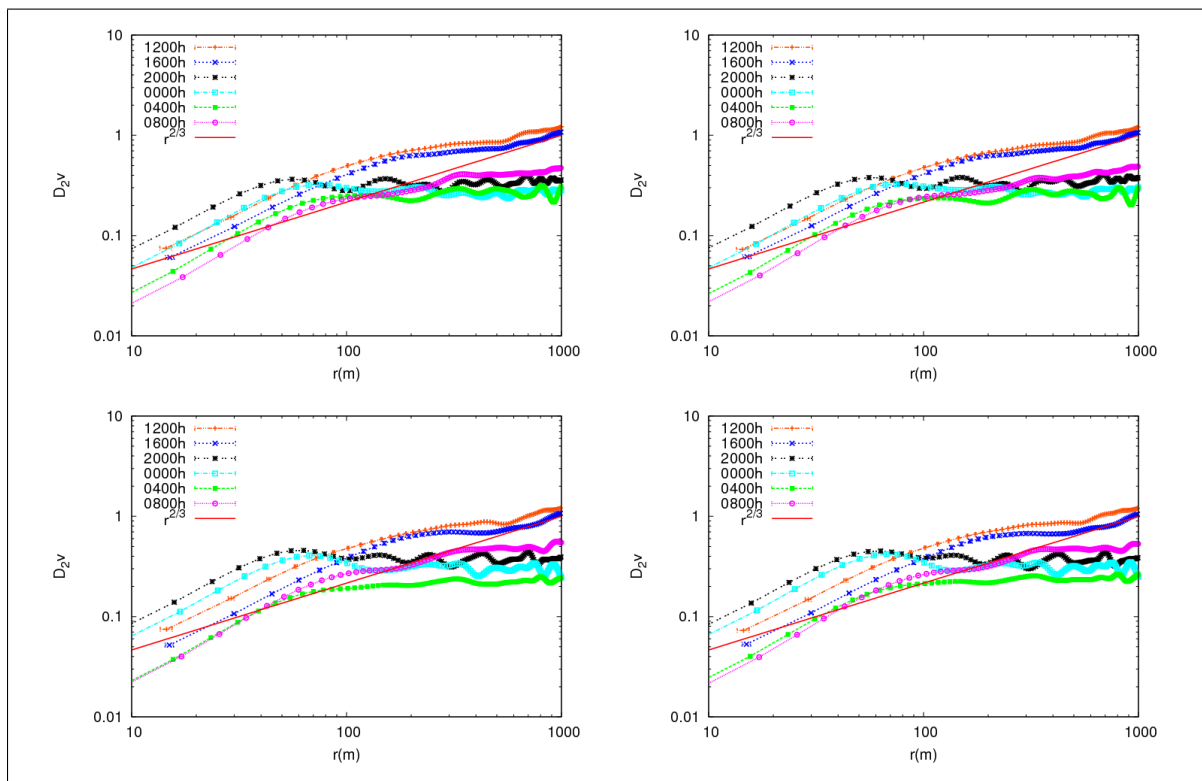


**Figura 5.64:** S2u Função estrutura da componente longitudinal da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = z_i$

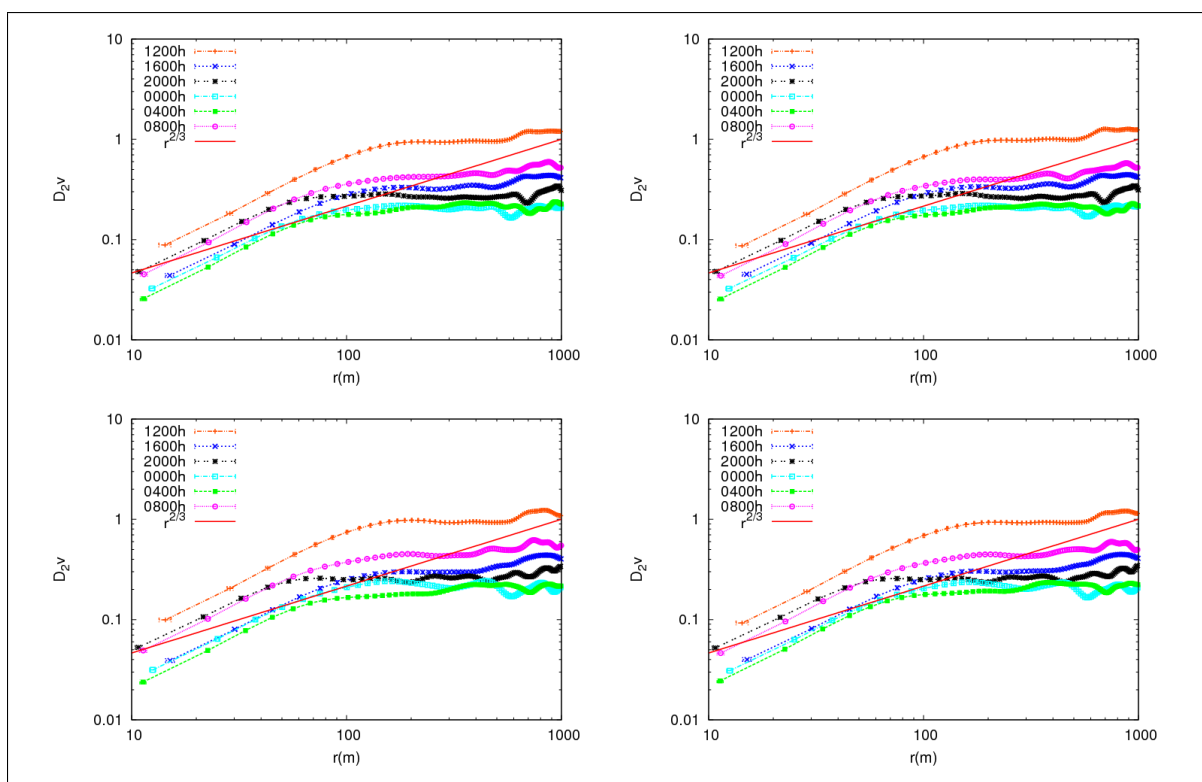
As figuras 5.65, 5.66, 5.67 e 5.68 apresentam, respectivamente, as funções estrutura de segunda ordem da componente lateral da velocidade para os níveis de  $z = 10,42m$ ,  $z = 0,2z_i$ ,  $z = 0,5z_i$  e  $z = z_i$ . A organização dos gráficos em cada figura segue a mesma lógica da representação das funções estrutura de segunda ordem da componente longitudinal.



**Figura 5.65:** Função estrutura da componente lateral da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 10,42m$

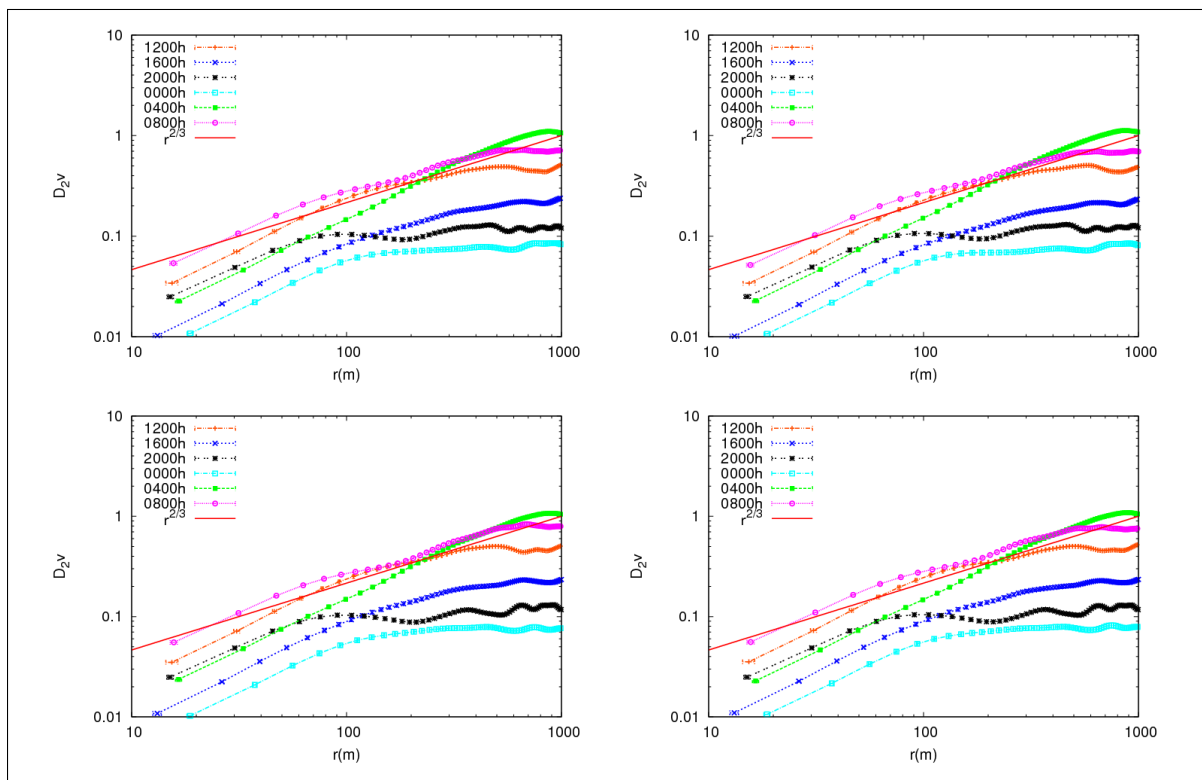


**Figura 5.66:** Função estrutura da componente lateral da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0, 2z_i$



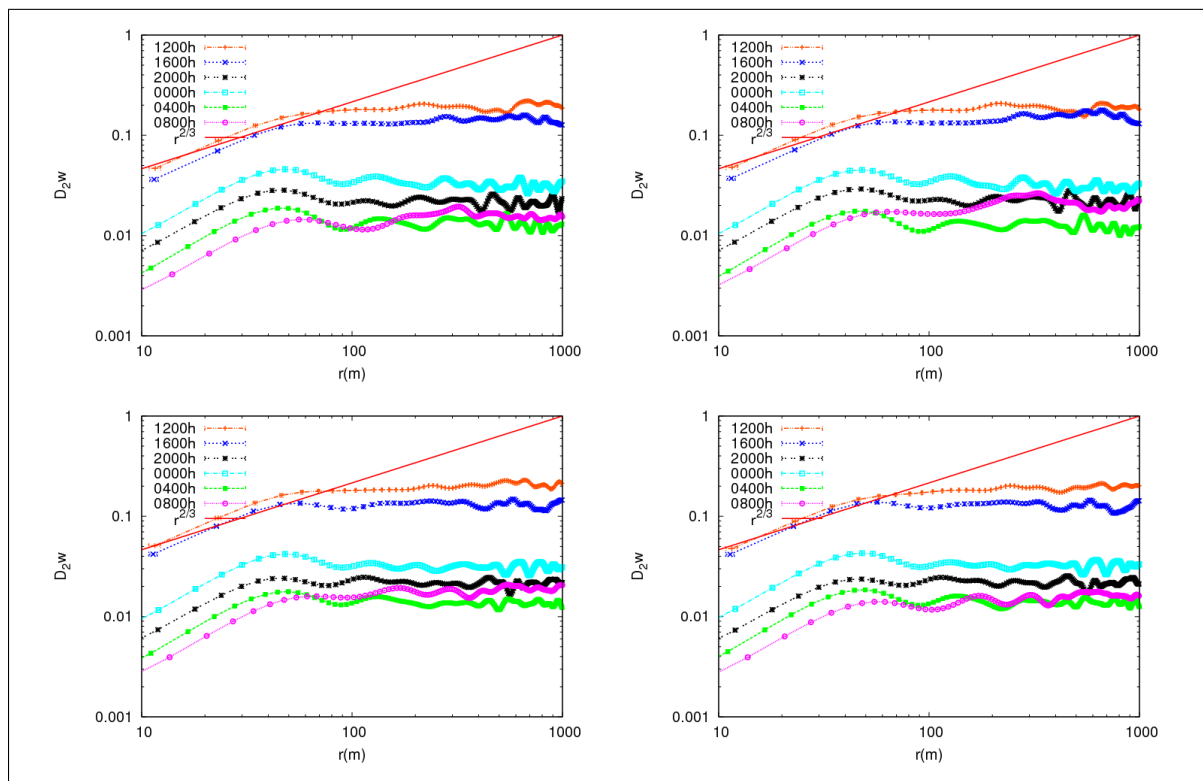
**Figura 5.67:** Função estrutura da componente lateral da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0, 5z_i$



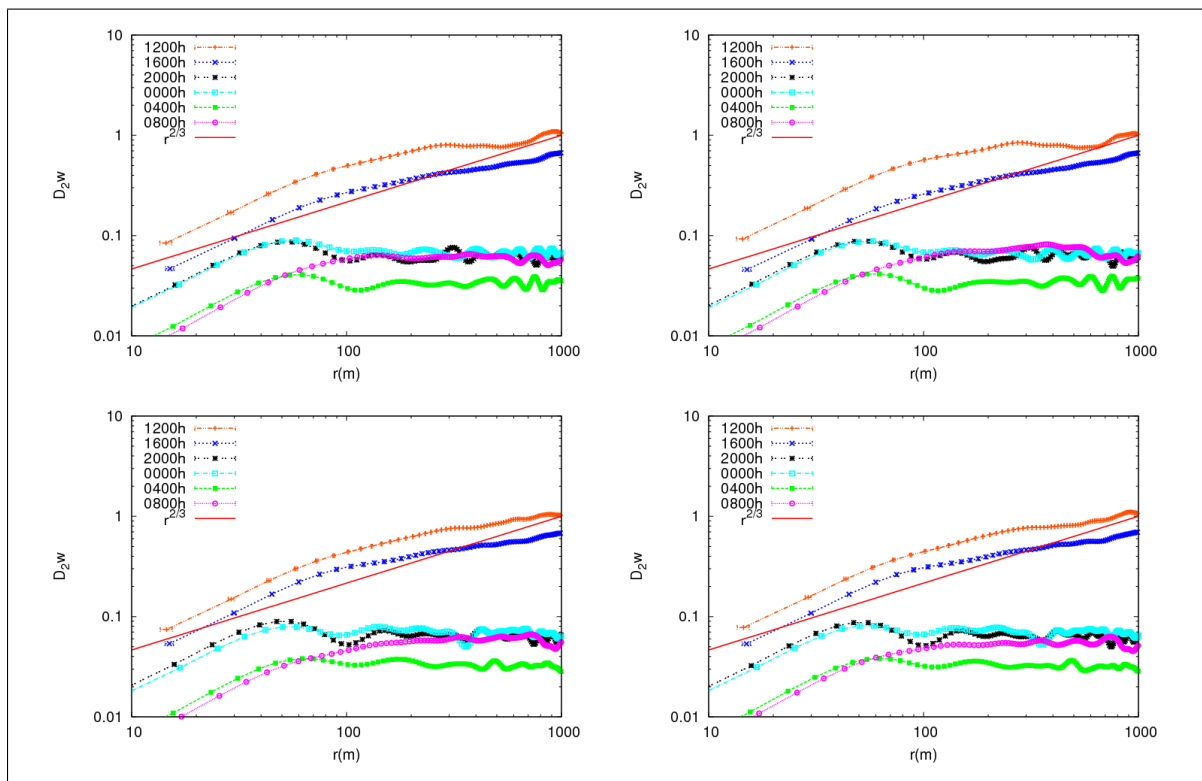


**Figura 5.68:** Função estrutura da componente lateral da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = z_i$

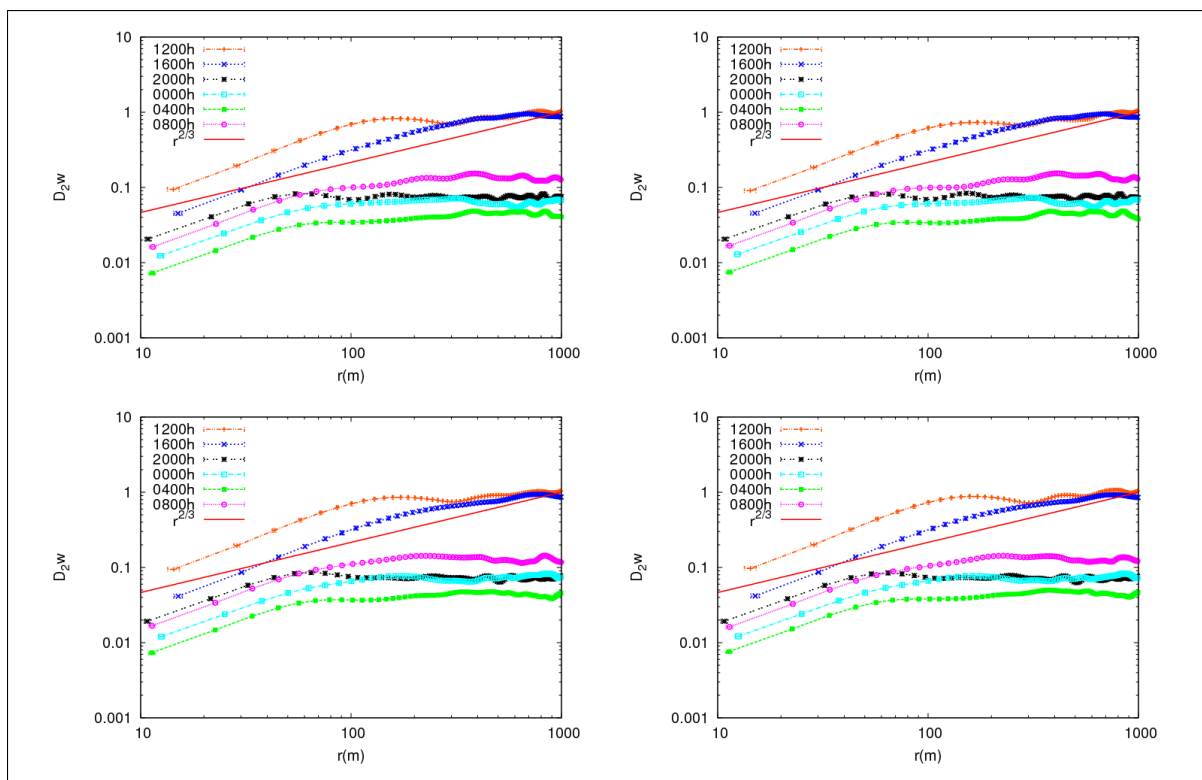
As figuras 5.69, 5.70, 5.71 e 5.72 apresentam, respectivamente, as funções estrutura de segunda ordem da componente lateral da velocidade para os níveis de  $z = 10,42m$ ,  $z = 0,2z_i$ ,  $z = 0,5z_i$  e  $z = z_i$ . A organização dos gráficos em cada figura segue a mesma lógica da representação das funções estrutura de segunda ordem das demais componentes da velocidade apresentadas anteriormente.



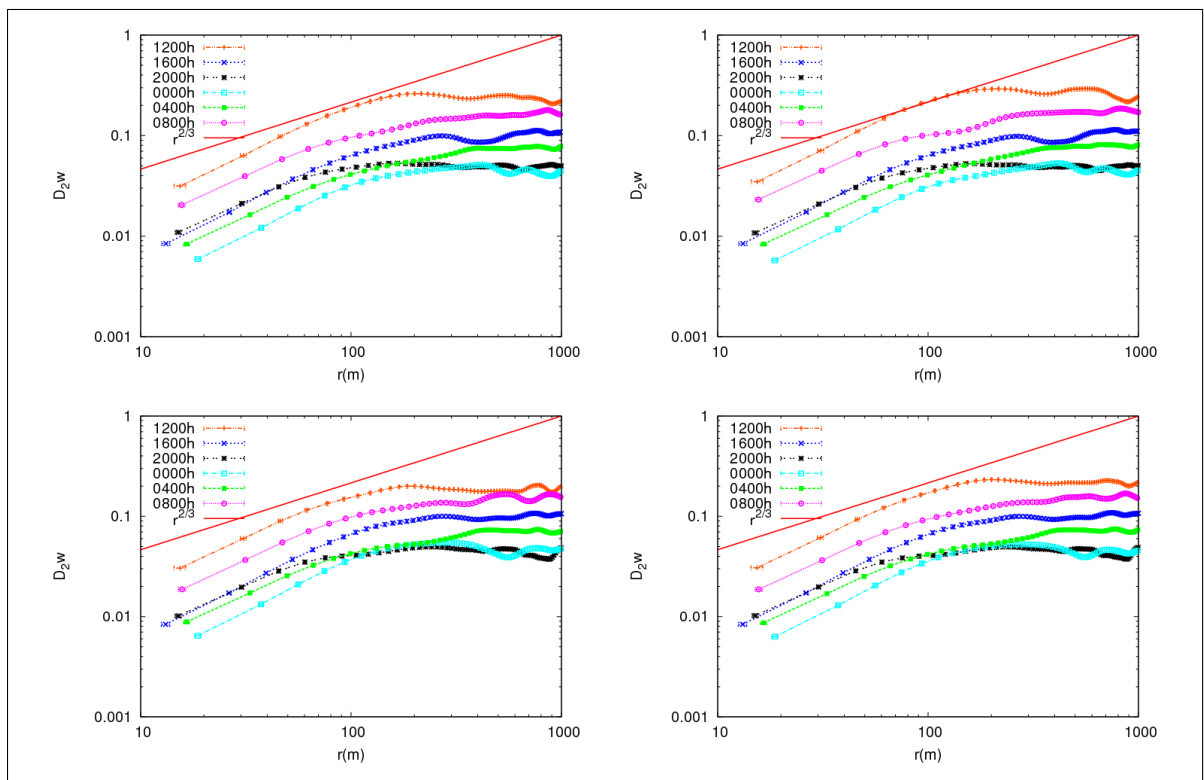
**Figura 5.69:** Função estrutura da componente vertical da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 10,42m$



**Figura 5.70:** Função estrutura da componente vertical da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0, 2z_i$

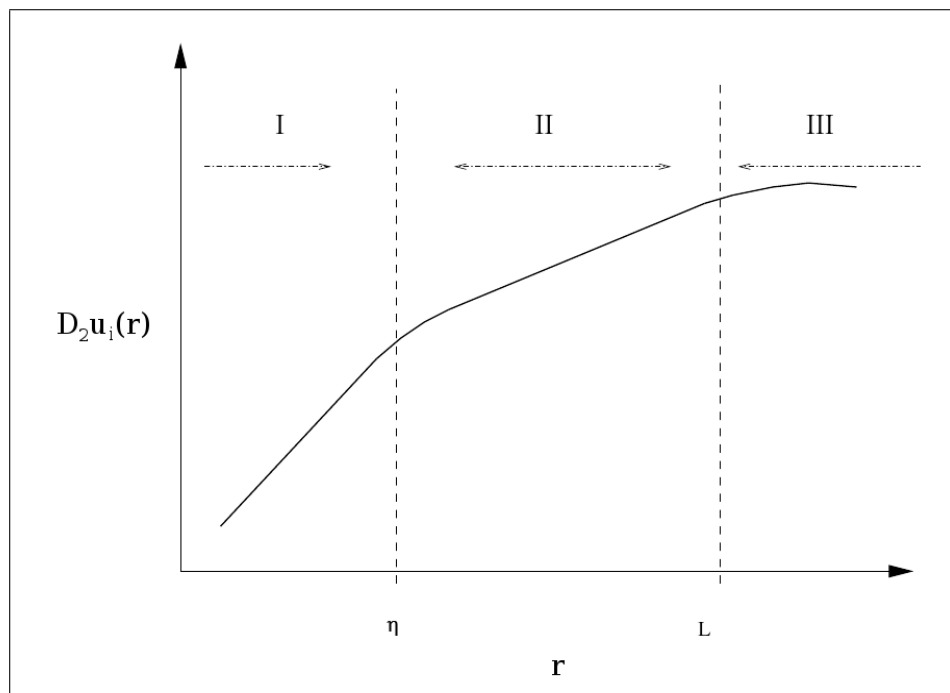


**Figura 5.71:** Função estrutura da componente vertical da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0, 5z_i$



**Figura 5.72:** Função estrutura da componente vertical da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = z_i$

De uma maneira geral, as funções estrutura obtidas a partir dos dados do modelo LES apresentam características qualitativas semelhantes às aquelas calculadas a partir de dados experimentais. Entretanto, sabe-se que a função estrutura de uma variável turbulenta apresenta três intervalos bem definidos em sua extensão, conforme a figura 5.73



**Figura 5.73:** Gráfico log-log da função estrutura de segunda ordem  $D_2u_i(r)$  segundo Kolmogorov. A região I caracteriza o intervalo de dissipação onde as quantidades estatísticas dependem da taxa de dissipação e da viscosidade cinemática e  $r \ll \eta$  onde  $D_2u_i(r) \propto r^2$ . A região II é conhecida com sub-intervalo inercial onde as quantidades estatísticas dependem apenas da taxa de dissipação e encontra-se no intervalo  $\eta \ll r \ll L$  e  $D_2u_i(r) \propto r^{2/3}$ . A região III caracteriza os grandes turbilhões, com tamanho da ordem ou maior que  $L$ . Adaptado de Welter (2006).

Nas funções estrutura de segunda ordem obtidas de dados do modelo LES não ficam claros estes três intervalos, sobretudo o sub-intervalo inercial. Para resolver este problema pode-se utilizar a uma técnica matemática conhecida por *finite size lyapunov exponent*, FSLE. Esta técnica foi introduzida em estudos de teoria de sistemas dinâmicos caóticos (BOFFETTA; CELANI, 2000; GIOIA et al., 2004; LACORATA; MAZZINO; RIZZA, 2008). Espera-se que o modelo LES, em seu processo de médias sobre volume, resolva os turbilhões que contêm a maior parte da energia. Para separar os grandes turbilhões (escala resolvida) dos menores (escala se subfiltro) aplica-se um filtro passa-baixa. O ideal é que a filtragem ocorra dentro

do subintervalo inercial, ou pelo menos, no início deste intervalo. Contudo, este fato está diretamente ligado a resolução de grade do modelo. O LES de Moeng (1984) aplica um filtro agudo de Fourier nos turbilhões com número de onda igual a  $K \approx 1,33\pi/\Delta x_i$  em cada componente horizontal da velocidade (MOENG; WYNGAARD, 1988). Para este trabalho,  $\Delta x = \Delta y = 31,25m$ , desta forma o número de onda de corte é igual a  $K = 0,13m^{-1}$ . Desta maneira, a dimensão  $r$  do turbilhão onde é realizado o corte é  $r_c \approx 23,5m$ . Analisando as funções estrutura das componentes horizontais da velocidade do vento, percebemos que este é o valor do menor turbilhão representado por estas funções. Devido a isto, a função estrutura de segunda ordem deveria apresentar uma inclinação equivalente a uma função  $f(r) \propto r^{2/3}$  (representativa do sub-intervalo inercial, segundo Kolmogorov (1941)). Porém não consegue-se identificar tal intervalo claramente nas funções estrutura. Contudo, a componente vertical da velocidade independe do filtro utilizado. Nas funções estrutura calculadas para esta componente, verifica-se mais claramente a presença de um intervalo com inclinação equivalente a  $f(r) \propto r^{2/3}$ , sobretudo nos períodos convectivos da simulação.

Mesmo não sendo claro visualmente a existência do sub-intervalo inercial, as funções estrutura da componente longitudinal da velocidade foram utilizadas para calcular a taxa de dissipação de cada série turbulenta pada cada nível simulado da CLP. Para o cálculo da taxa de dissipação a seguinte metodologia foi empregada: dividiu-se a função estrutura (localmente) pela dimensão  $r^{2/3}$  dos turbilhões. Assim foram obtidos os seguintes gráficos apresentados nas figuras 5.74, 5.75, 5.76 e 5.77 para os horários e níveis verticais já mencionados seguindo a mesma distribuição gráfica das figuras anteriores para função estrutura. Nestes gráficos a região compreendida pelo subintervalo inercial deveria ser uma reta constante (pico platô) proporcional a constante de Kolmogorov ( $C_k$ ) e taxa de dissipação ( $\varepsilon$ ). Neste trabalho utilizou-se o valor de  $C_k = 2,13$  estimado por Sreenivasan (1995). Para o sub-intervalo inercial a função estrutura de segunda ordem é dada por

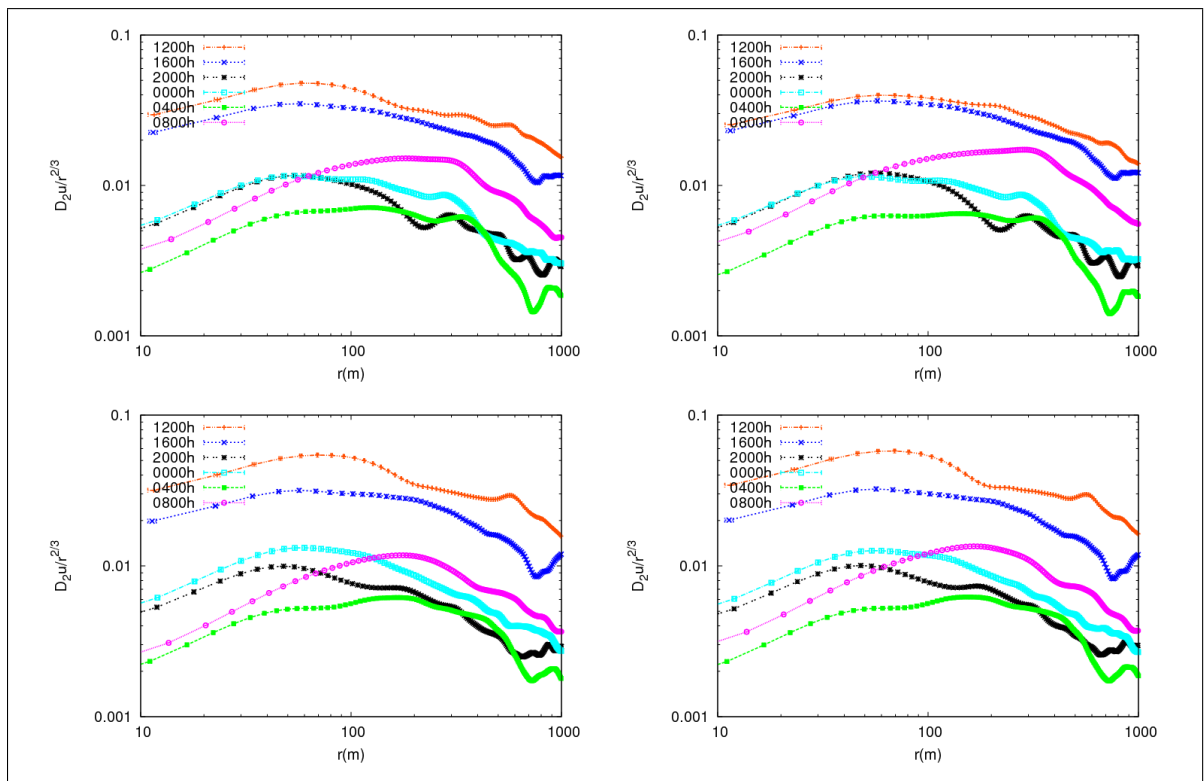
$$D_2u = C_k \varepsilon^{2/3} r^{2/3} \quad (5.13)$$

Assim, as curvas apresentadas nas figuras 5.74, 5.75, 5.76 e 5.77 deverão apresentar uma região de máximo constante como valor dado por  $C_k \varepsilon^{2/3}$ . Como

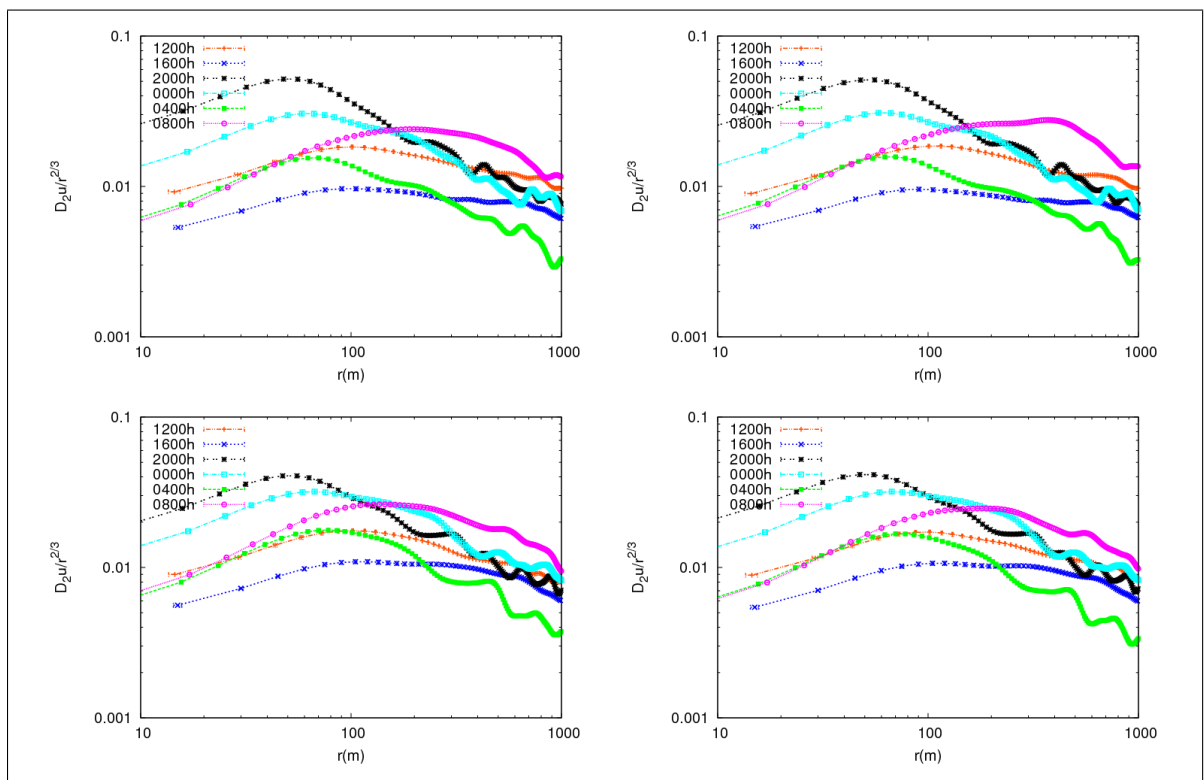
este máximo não é evidente visualmente como uma região plana, um algoritmo foi empregado para encontrar o valor da taxa de dissipação a partir da função estrutura de segunda ordem. Este algoritmo localiza o valor máximo da razão  $D_2u/r^{2/3}$  e calcula o valor da taxa de dissipação da série de dados pela seguinte equação

$$\varepsilon = \frac{1}{r} \left( \frac{D_2u}{C_k} \right)^{3/2} \quad (5.14)$$

A taxa de dissipação calculada a partir das funções estrutura obtidas do modelo LES foi comparada com aquela calculada pelo próprio modelo de subfiltro. A comparação entre os perfis das taxas de dissipação de energia cinética turbulenta para os horários selecionados são apresentados nas figuras 5.78, 5.79, 5.80, 5.81, 5.82 e 5.83. Nestas figuras pode-se constatar que o modelo de subfiltro representa de forma similar a taxa de dissipação calculada a partir das funções estrutura de segunda ordem da componente longitudinal da velocidade. Contudo, nas figuras 5.78, 5.82 e 5.83 o modelo de subfiltro apresenta um pico na taxa de dissipação. Na sessão 5.5 este fato já havia sido discutido. Naquela sessão este pico foi interpretado com um valor espúrio, consequência da incerteza atribuída ao modelo de subfiltro, visto que na região vertical da CLP onde ocorre o pico da taxa de dissipação também existe a presença um pico de energia cinética turbulenta associada à escala de subfiltro. A comparação entre as duas formas de obtenção da taxa de dissipação corrobora a hipótese de erro vinculado à incerteza do modelo de subfiltro na determinação da taxa de dissipação de energia cinética turbulenta. Além do mais, os perfis obtidos para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta apresentados nas figuras 5.78, 5.79, 5.80, 5.81, 5.82 e 5.83 concordam com aqueles obtidos por Basu et. al (2008) e Cuxart e Jiménez (2007).

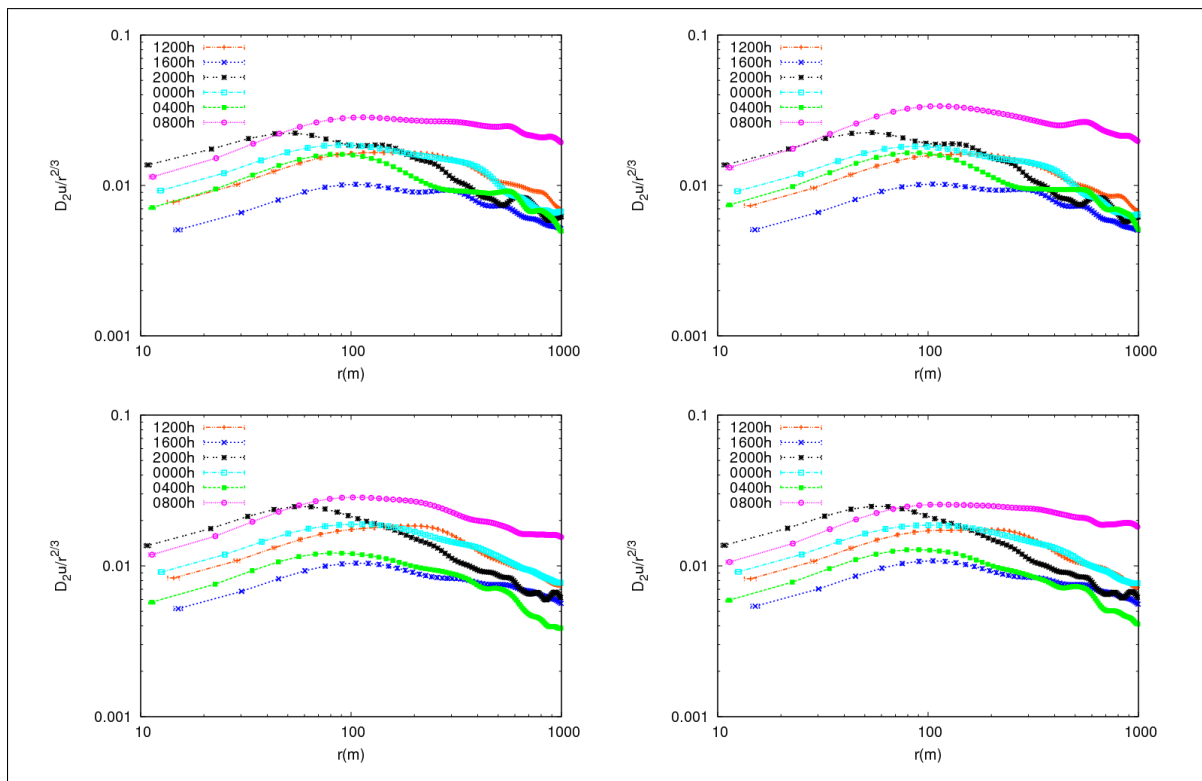


**Figura 5.74:** Razão entre a função estrutura da componente longitudinal da velocidade e a separação de escalas  $r^{2/3}$  calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 10, 42m$ .

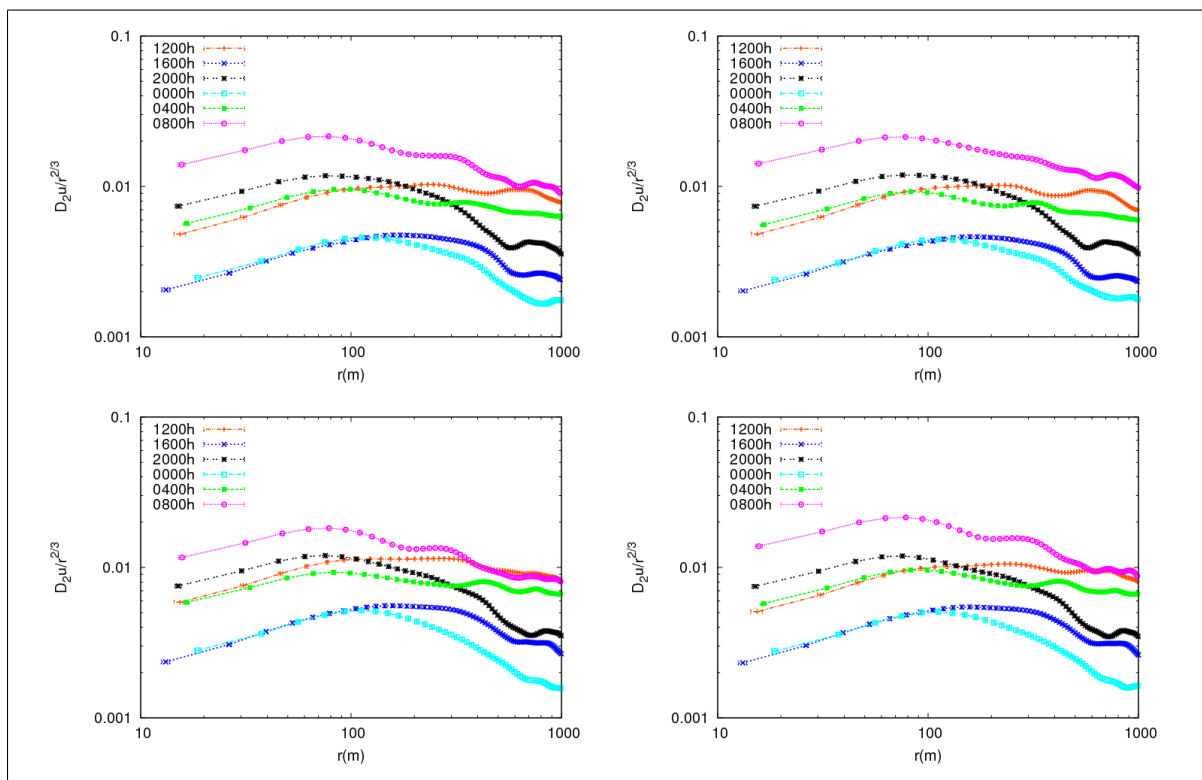


**Figura 5.75:** Razão entre a função estrutura da componente longitudinal da velocidade e a separação de escalas  $r^{2/3}$  calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0, 2z_i$

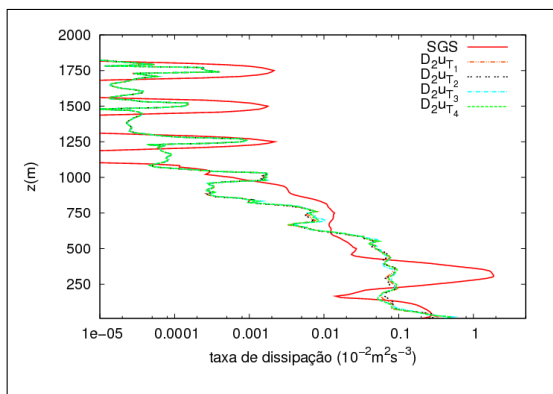




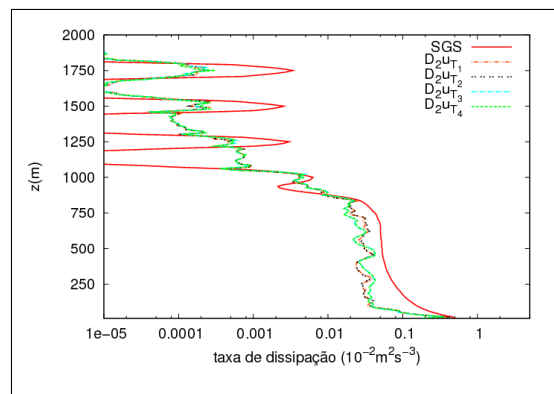
**Figura 5.76:** Razão entre a função estrutura da componente longitudinal da velocidade e a separação de escalas  $r^{2/3}$  calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0,5z_i$



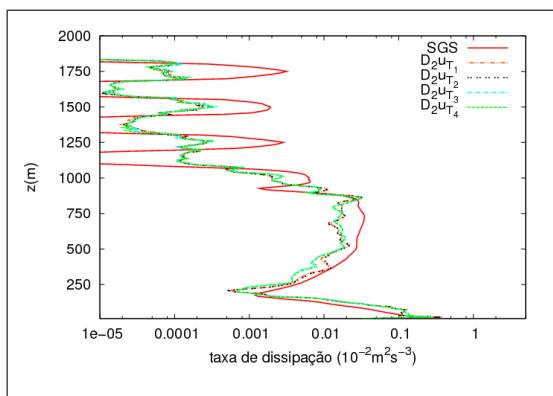
**Figura 5.77:** Razão entre a função estrutura da componente longitudinal da velocidade e a separação de escalas  $r^{2/3}$  calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = z_i$



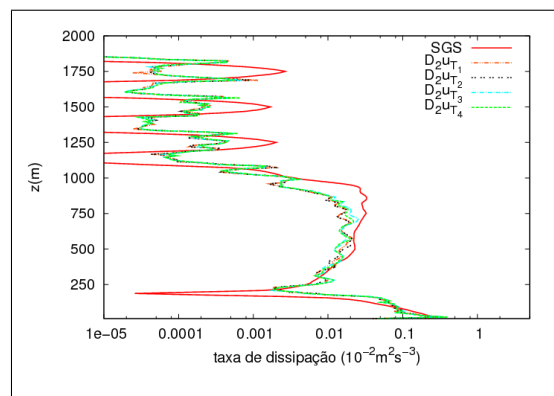
**Figura 5.78:** Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 12h (local)



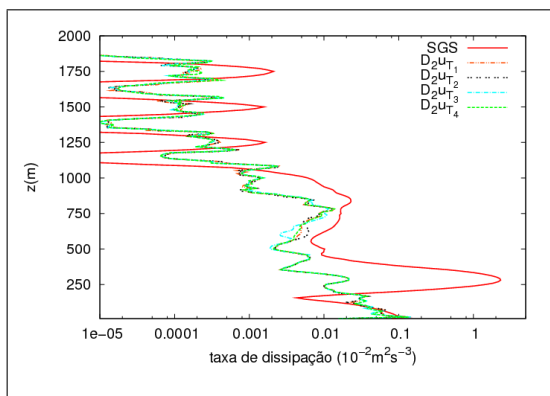
**Figura 5.79:** Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 16h (local)



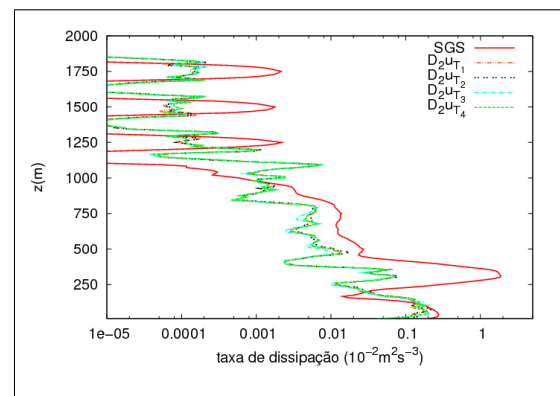
**Figura 5.80:** Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 20h (local)



**Figura 5.81:** Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 00h (local)



**Figura 5.82:** Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 04h (local)

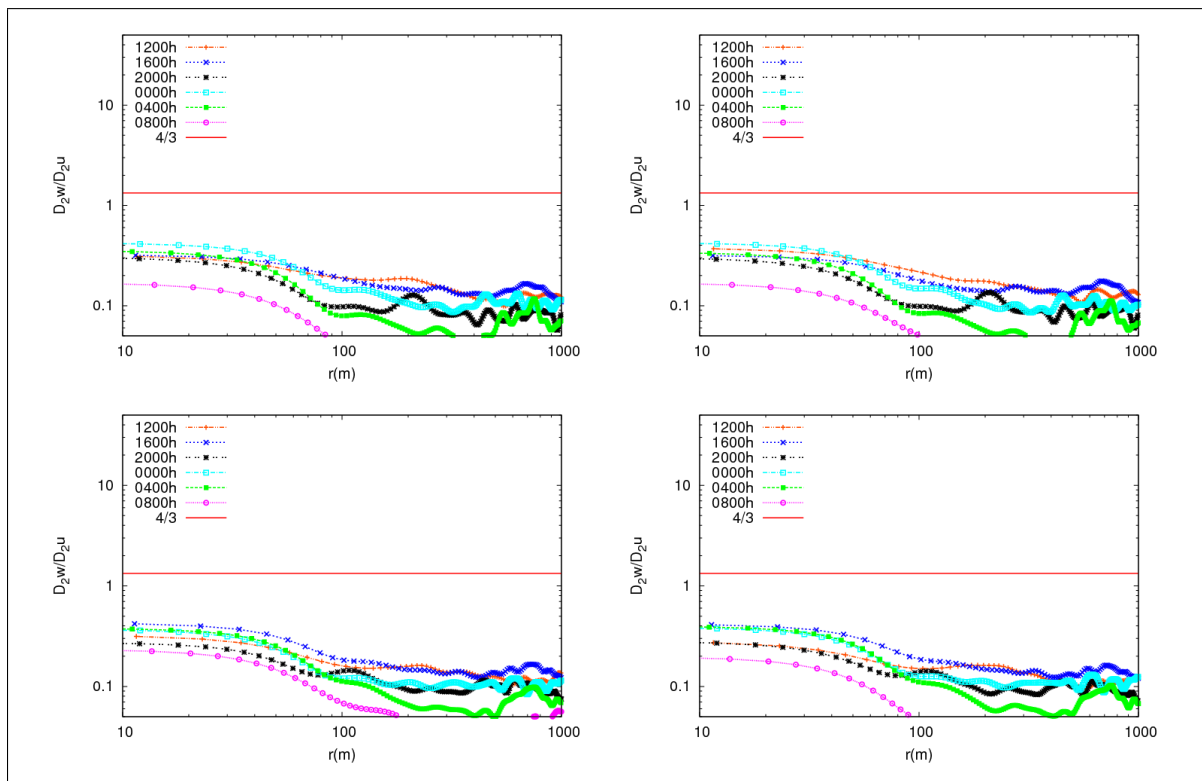


**Figura 5.83:** Comparação entre perfis verticais para a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta obtidas pela função estrutura de segunda ordem da componente longitudinal do vento ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ ) e a calculada pelo modelo de subgrade do modelo LES – 08h (local)

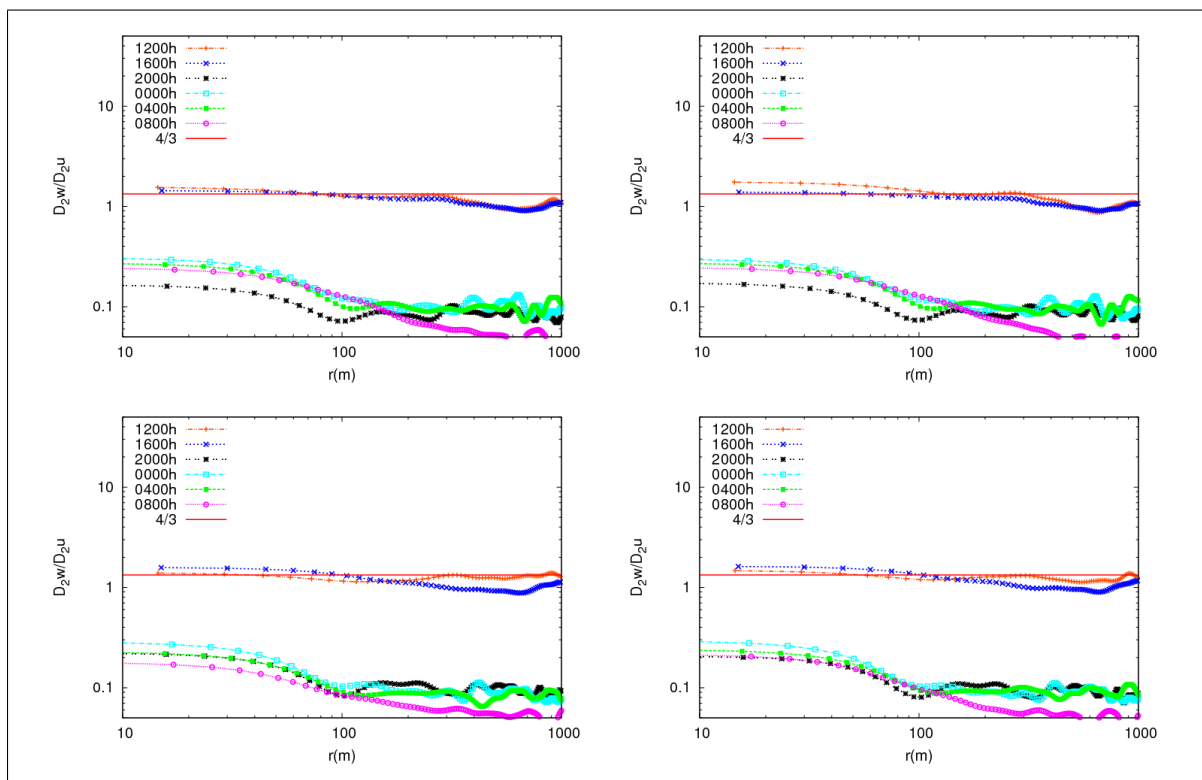
Uma outra informação importante que podemos obter através das funções estrutura de segunda ordem de uma variável turbulenta é a relação de isotropia local. Se a turbulência for localmente isotrópica a razão entre a função estrutura transversal (seja lateral ou vertical) e a função estrutura longitudinal é igual a  $4/3$  (WELTER, 2006)

$$\frac{D_2 w}{D_2 u} = \frac{D_2 v}{D_2 u} = \frac{4}{3} \quad (5.15)$$

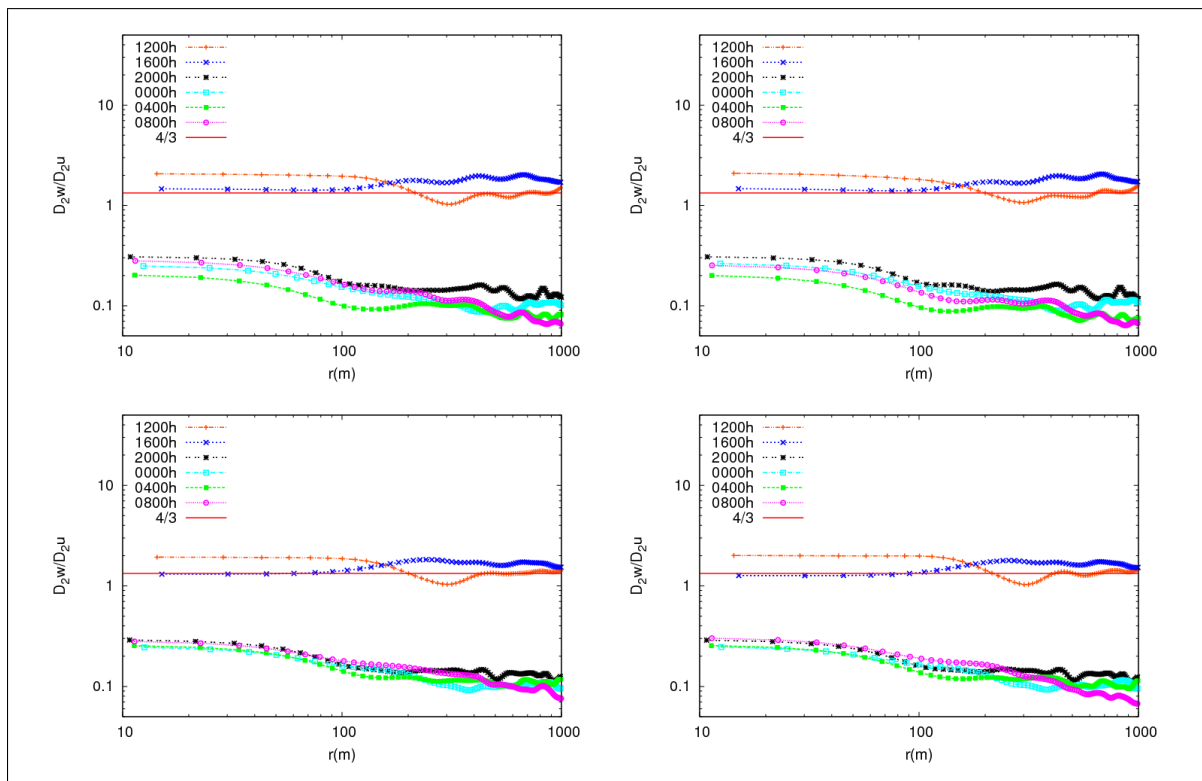
A partir das funções estrutura apresentadas anteriormente foram calculados os fatores de isotropia para cada uma das séries geradas pelo modelo LES em diferentes períodos (ver tabela 5.1) e níveis verticais. As figuras 5.84, 5.85, 5.86 e 5.87 respectivamente, apresentam os gráficos para a razão entre a função estrutura de segunda ordem da componente vertical e longitudinal da velocidade para os níveis  $z = 10,42m$ ,  $z = 0,2z_i$ ,  $z = 0,5z_i$  e  $z = z_i$ . Cada figura contém quatro gráficos representando os pontos de grade do modelo selecionados para a análise temporal (conforme figura 5.55). Seguindo a mesma estrutura de apresentação, as figuras 5.89, 5.90 e 5.91 exibem os gráficos para a razão entre a função estrutura de segunda ordem da componente vertical e longitudinal da velocidade para os níveis  $z = 10,42m$ ,  $z = 0,2z_i$ ,  $z = 0,5z_i$  e  $z = z_i$ , respectivamente. Nestas figuras fica claro a falta de isotropia em relação a componente vertical da velocidade quando são analisados os períodos estáveis da simulação e o primeiro nível do modelo. Para os níveis superiores apresentados nas figuras 5.85, 5.86 e 5.87 os períodos convectivos confirmam uma boa razão de isotropia. Já a relação de isotropia entre as componentes lateral e longitudinal da velocidade exibem uma relação bem mais próxima dos  $4/3$  do que as componentes vertical e longitudinal. Inclusive, este bom resultado é obtido para o primeiro nível da simulação. De qualquer maneira, a razão de  $4/3$  entre  $D_2 v/D_2 u$  é mais evidente para os períodos convectivos da simulação.



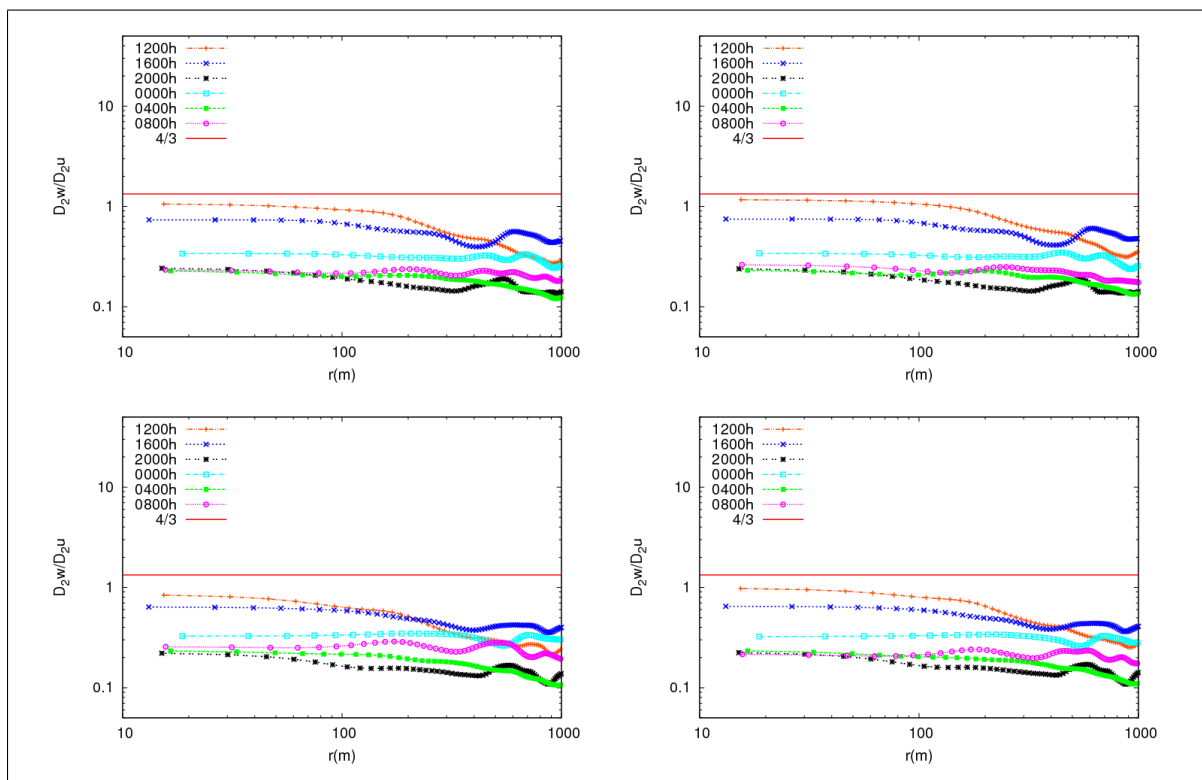
**Figura 5.84:** Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente vertical e longitudinal da velocidade em  $z = 10,42m$ .



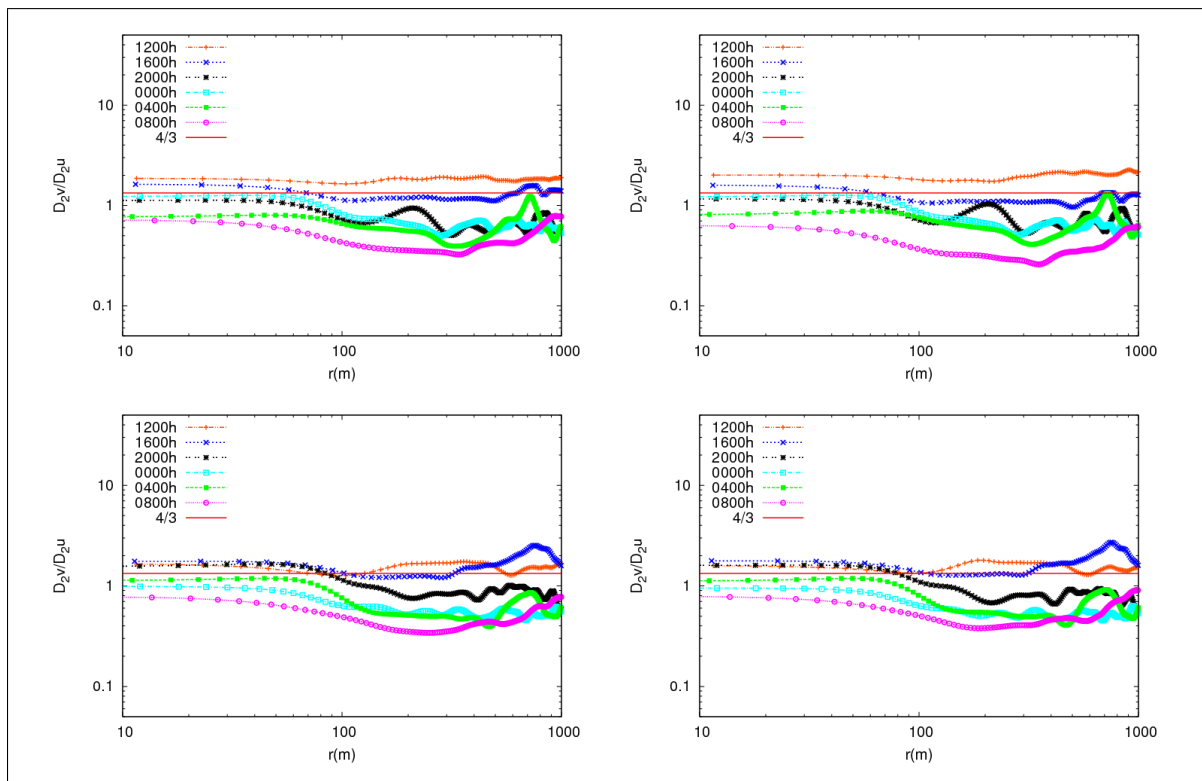
**Figura 5.85:** Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente vertical e longitudinal da velocidade em  $z = 0,2z_i$ .



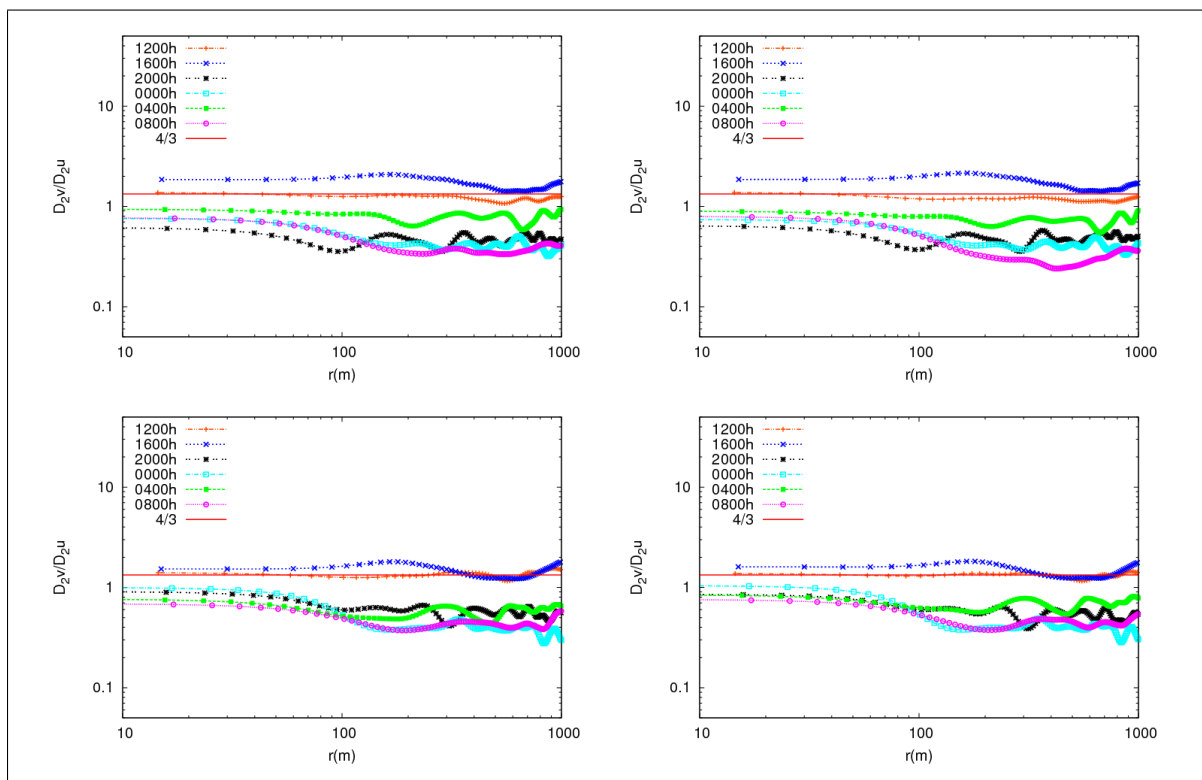
**Figura 5.86:** Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente vertical e longitudinal da velocidade em  $z = 0, 5z_i$ .



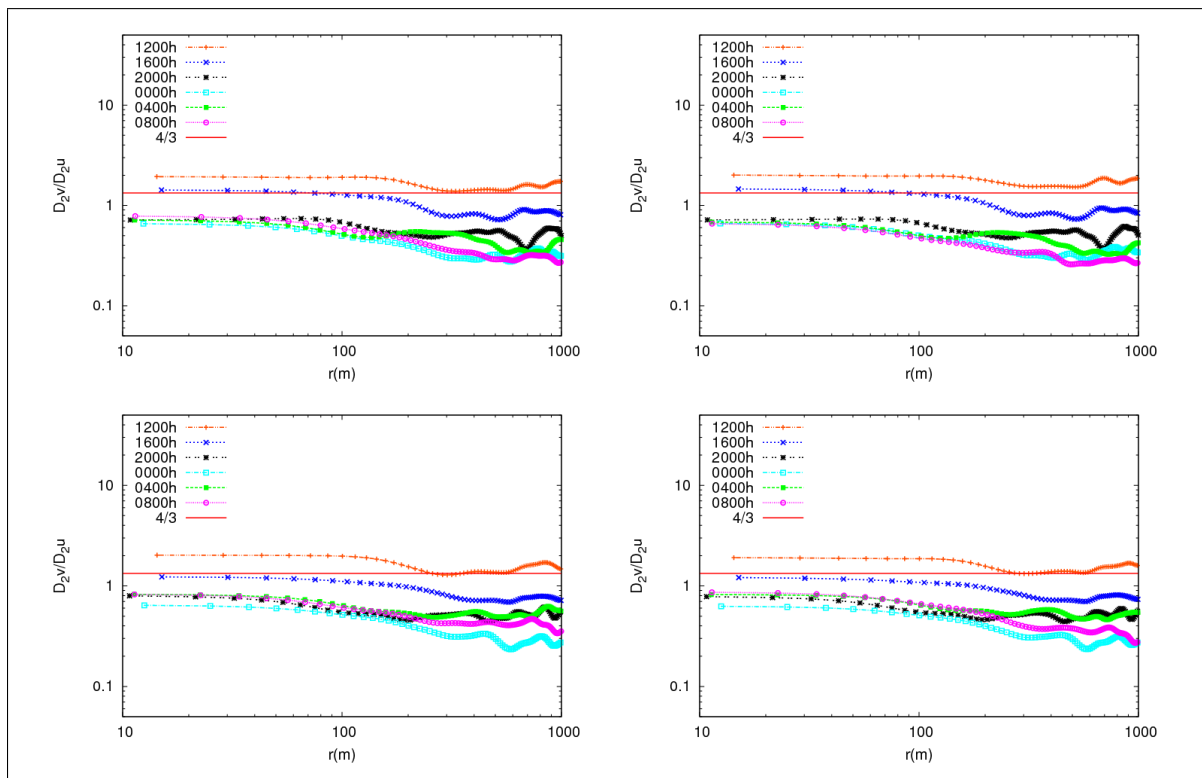
**Figura 5.87:** Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente vertical e longitudinal da velocidade em  $z = z_i$ .



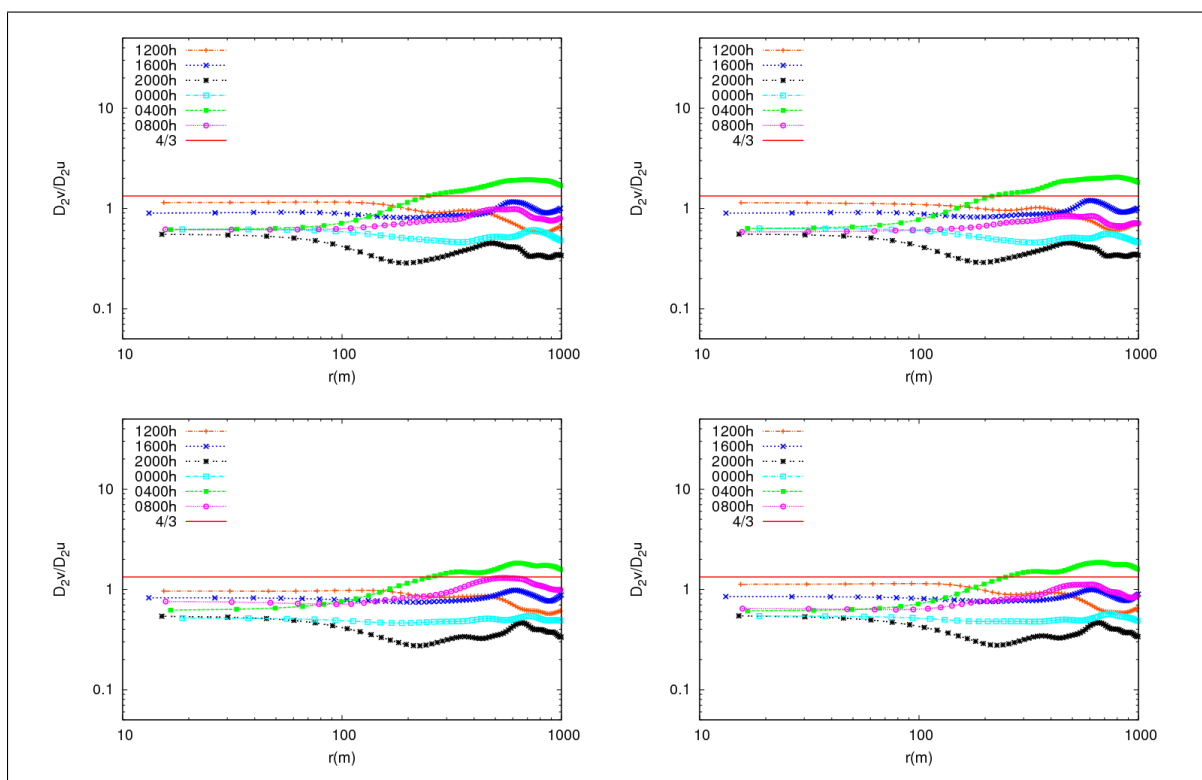
**Figura 5.88:** Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente lateral e longitudinal da velocidade em  $z = 10,42m$ .



**Figura 5.89:** Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente lateral e longitudinal da velocidade em  $z = 0, 2z_i$ .



**Figura 5.90:** Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente lateral e longitudinal da velocidade em  $z = 0,5z_i$ .



**Figura 5.91:** Razão entre as funções estrutura de segunda ordem da componente lateral e longitudinal da velocidade em  $z = z_i$ .



### 5.6.3 Outras análises

Para o período das 12h e 16h (local) foram calculadas as funções de autocorrelação das três componentes da velocidade. A função de auto correlação de uma variável  $\xi$  qualquer é definida por (PANCHEV, 1971)

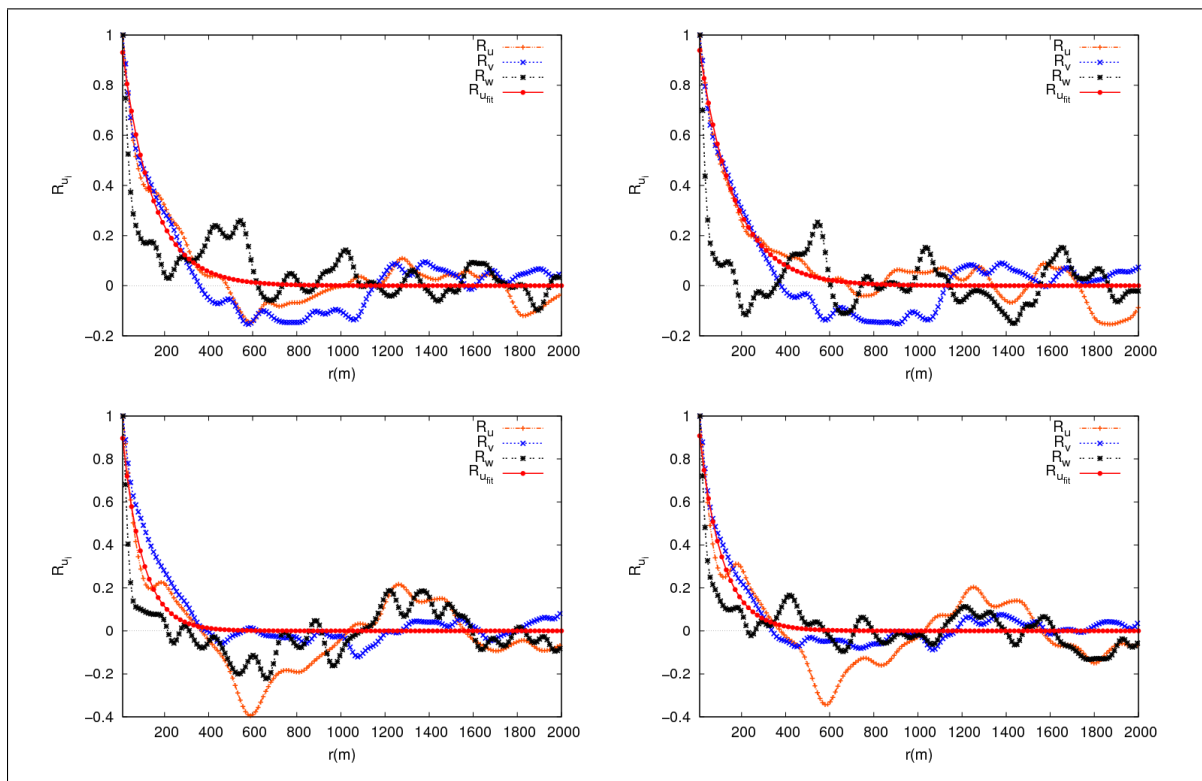
$$R_{\xi} = \frac{\overline{\xi_{i+1} * \xi_i}}{\sigma_{\xi}^2} \quad (5.16)$$

As figuras 5.92, 5.93, 5.94 e 5.95 exibem o comportamento das funções de autocorrelação para os níveis  $z = 10,42m$ ,  $z = 0,2z_i$ ,  $z = 0,5z_i$  e  $z = z_i$  no horário das 12h. Os gráficos estão organizados de modo similar àquele empregado na representação das funções estrutura. Além das funções de autocorrelação cada gráfico apresenta um ajuste de curva da função de autocorrelação da componente longitudinal da velocidade. O ajuste de curva foi realizado através da função

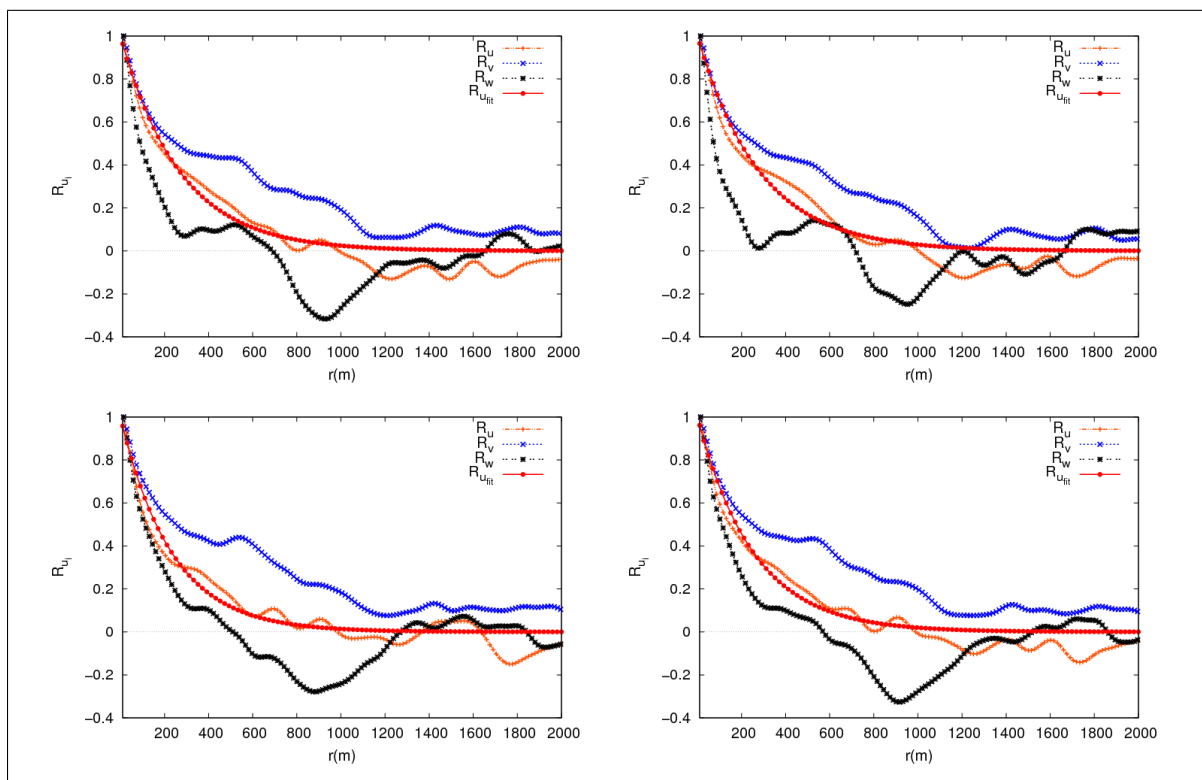
$$R_{u_{fit}}(r) = e^{-r/a} \quad (5.17)$$

onde  $a$  é uma constante que será definida mais tarde (ANFOSSI et al., 2000).

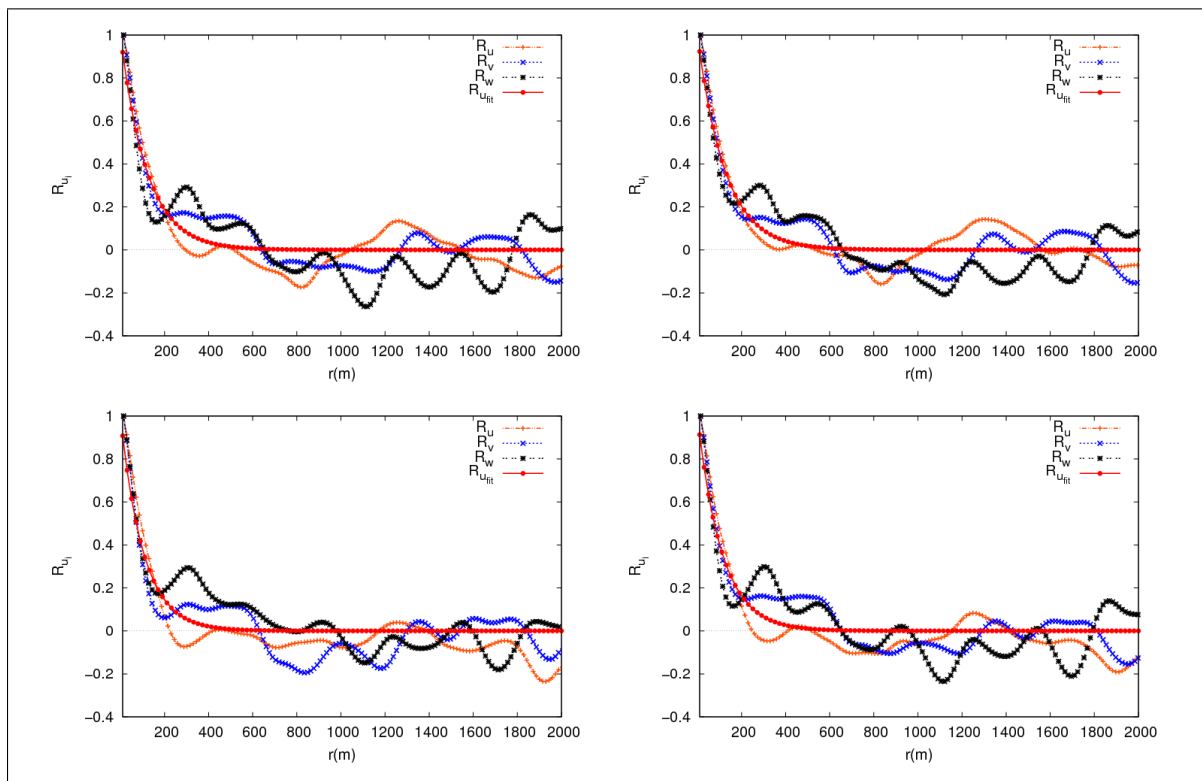
As figuras 5.96, 5.97, 5.98 e 5.99 exibem o comportamento das funções de autocorrelação para os níveis  $z = 10,42m$ ,  $z = 0,2z_i$ ,  $z = 0,5z_i$  e  $z = z_i$  no horário das 16h e seguem a mesma organização das figuras anteriores(5.92, 5.93, 5.94 e 5.95).



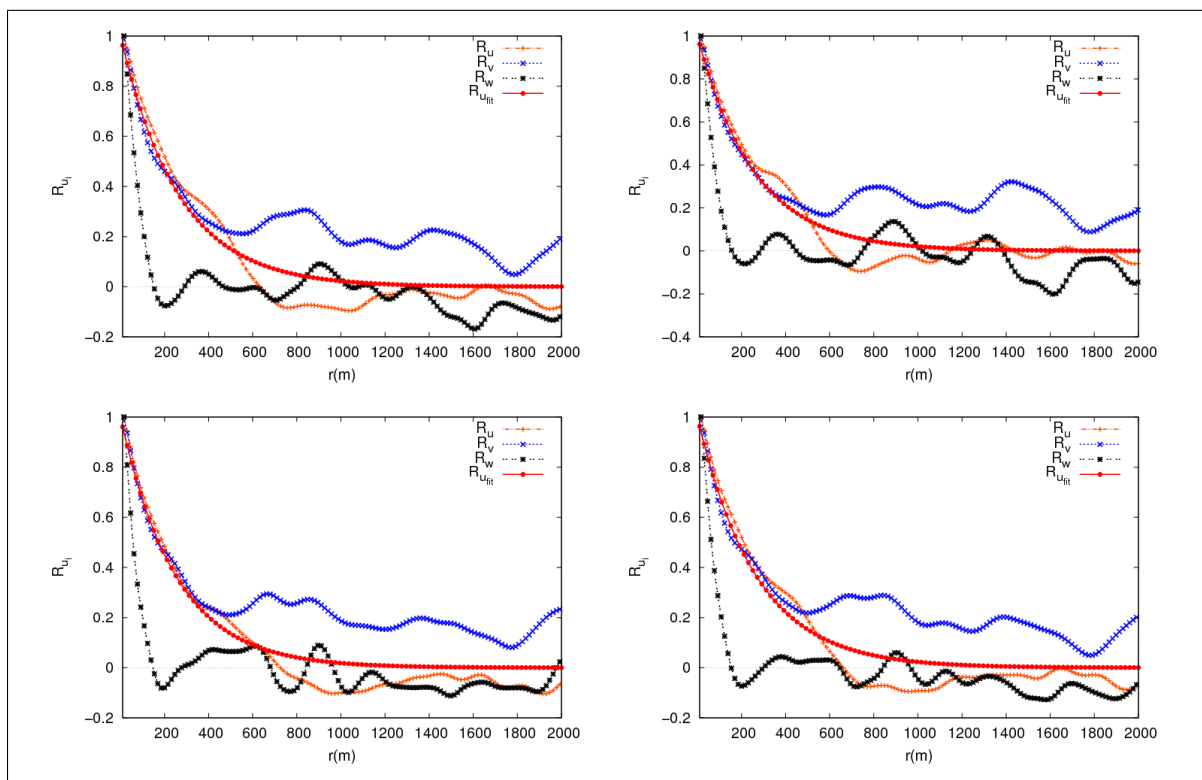
**Figura 5.92:** Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 10,42m$ , às  $12h$ .



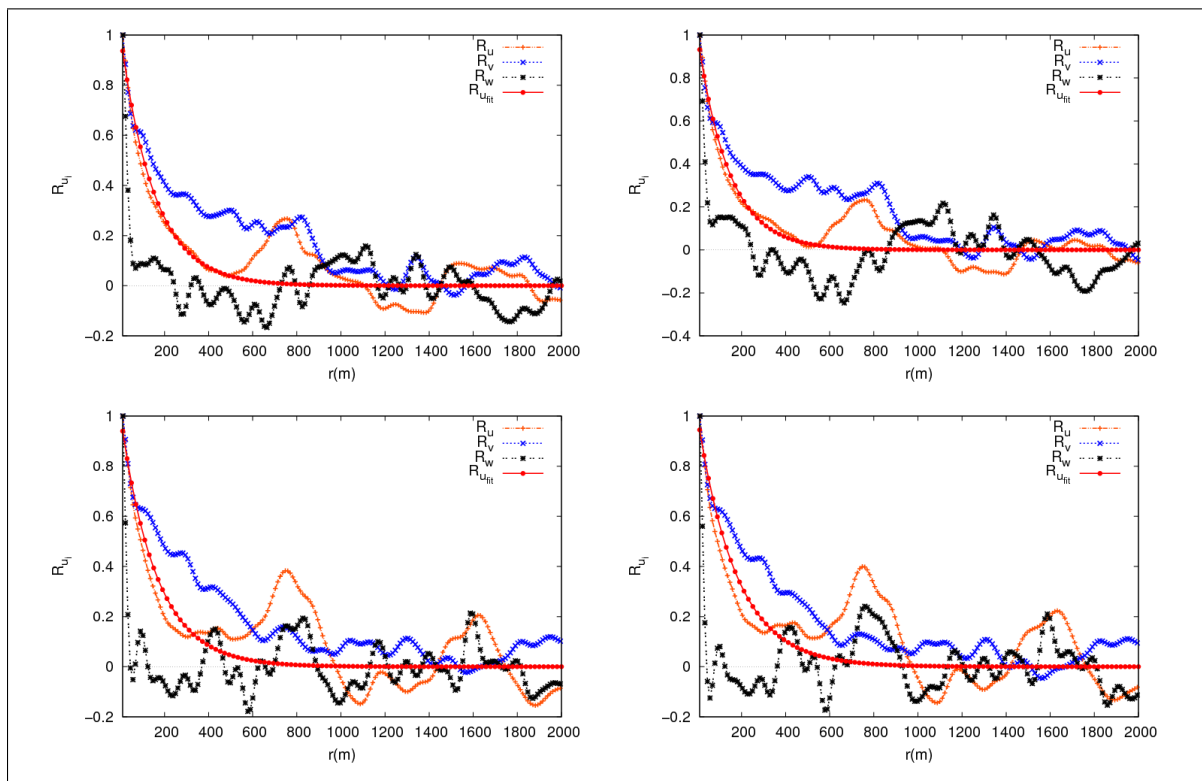
**Figura 5.93:** Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0,2z_i$ , às  $12h$ .



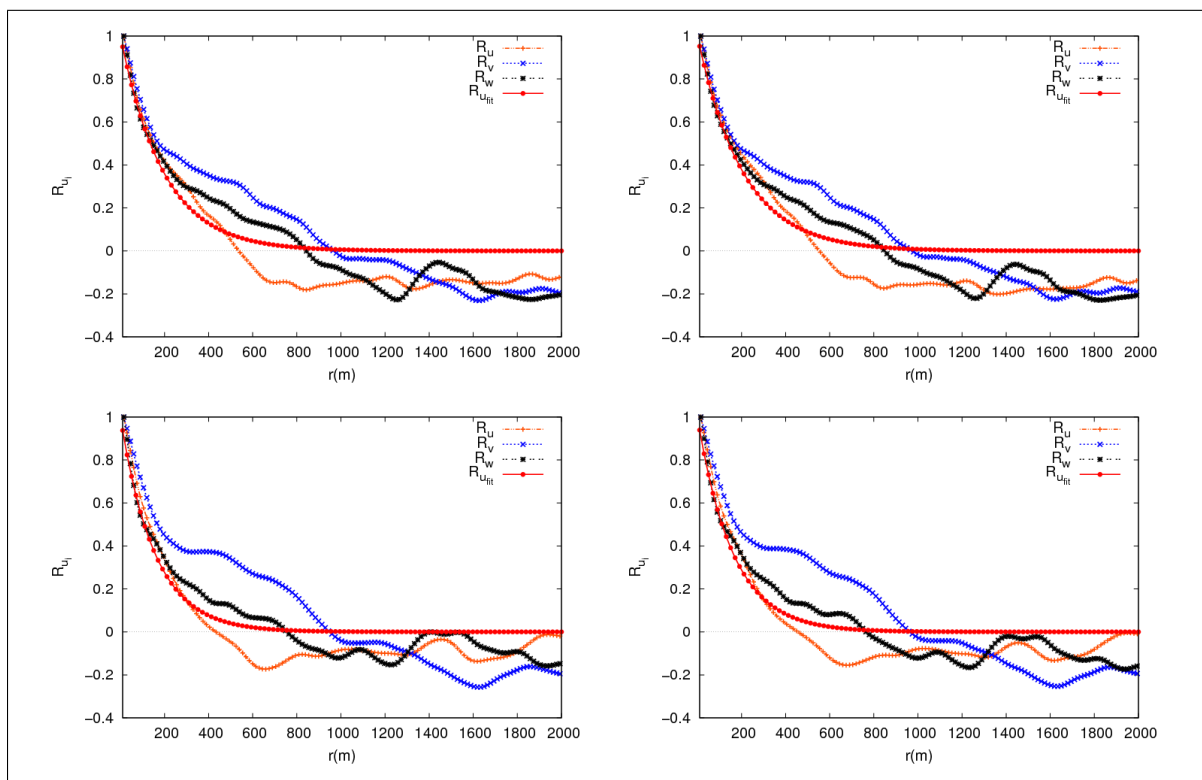
**Figura 5.94:** Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0,5z_i$ , às 12h.



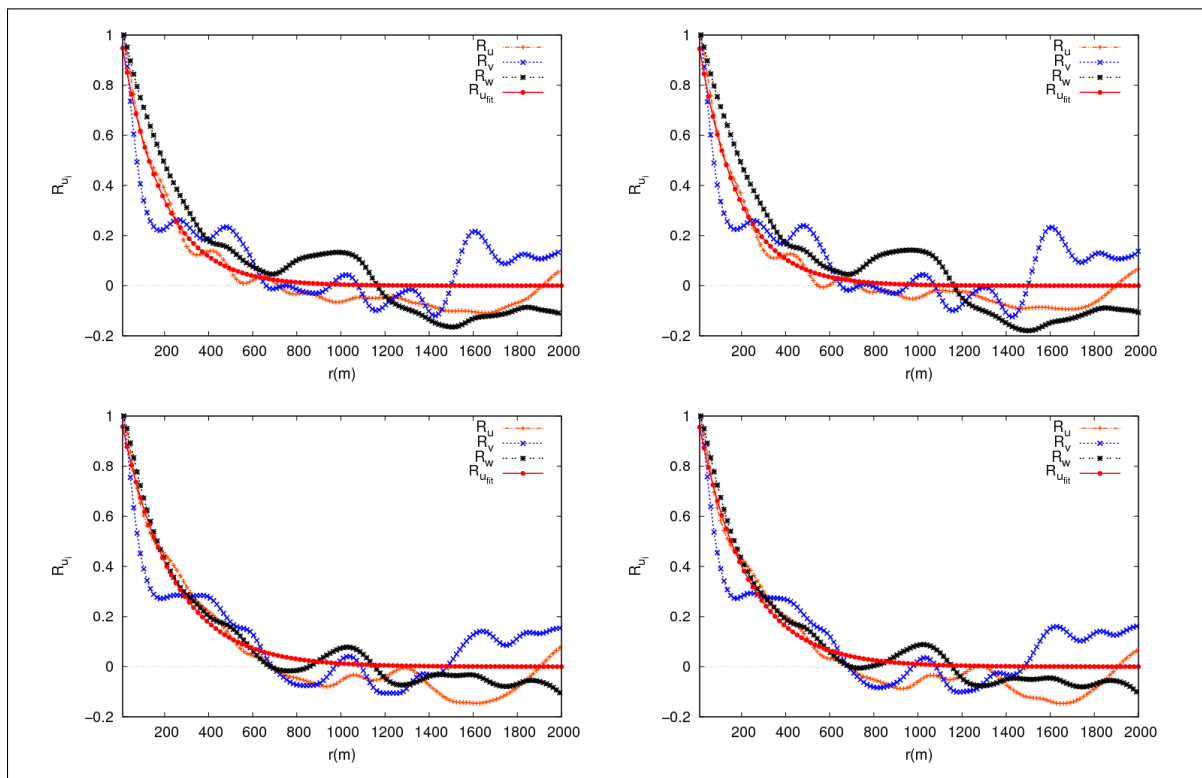
**Figura 5.95:** Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = z_i$ , às 12h.



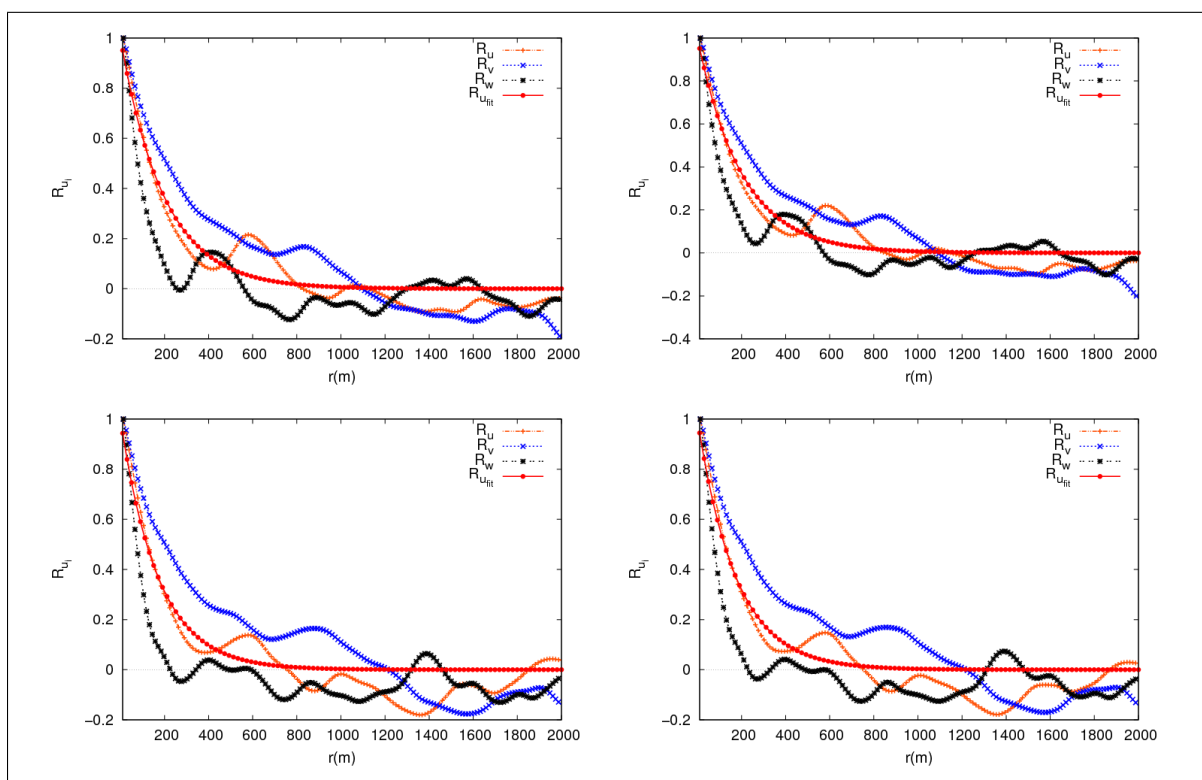
**Figura 5.96:** Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 10,42m$ , às  $16h$ .



**Figura 5.97:** Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0,2z_i$ , às  $16h$ .



**Figura 5.98:** Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = 0,5z_i$ , às  $16h$ .



**Figura 5.99:** Função de autocorrelação das componentes da velocidade calculada a partir de dados do modelo LES em  $z = z_i$ , às  $16h$ .

O ajuste de curva na função de autocorrelação foi utilizado para estimar a escala integral da série turbulenta. Neste caso, a constante  $a$  da equação (5.17) é definida como a escala integral de comprimento,  $a \equiv L$ . Para cada uma das séries dos horários selecionados estimou-se o valor de  $L$ . Com isto montou-se as tabelas 5.2 e 5.3. Estas tabelas indicam na sua primeira linha o ponto de grade (ver figura 5.55) e na sua primeira coluna o nível no qual foi estimado a escala integral. A última coluna expressa a média de cada nível.

**Tabela 5.2:** Estimativas para a escala integral no horário das 12h (local) para diferentes níveis da CLP.

12h	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$\langle T \rangle$
10,42m	138,86m	158,66m	91,62m	103,68m	123,21m
0,2z <sub>i</sub>	269,59m	282,74	233,17m	255,01m	260,17m
0,5z <sub>i</sub>	119,13m	124,91m	102,03m	110,10m	114,04m
z <sub>i</sub>	263,89m	258,81m	250,50m	265,67m	259,72m

**Tabela 5.3:** Estimativas para a escala integral no horário das 16h (local) para diferentes níveis da CLP.

16h	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$\langle T \rangle$
10,42m	153,21m	141,87m	162,16m	176,07m	159,00m
0,2z <sub>i</sub>	194,94m	205,77	155,41m	160,68m	180,54m
0,5z <sub>i</sub>	186,07m	178,88m	229,58m	219,01m	203,55m
z <sub>i</sub>	197,76m	201,36m	171,73m	175,30m	186,48m

Os valores encontrados para a escala integral, nos dois períodos, são maiores (uma ordem de grandeza) do valor encontrado por Welter (2006) a partir de dados experimentos. Além do mais, o valor de  $L$  diminuir no centro da camada, no horário das 12h, causa uma certa desconfiança na confiabilidade desta estimativa. Contudo, o problema pode estar na forma de estimar a escala integral a partir da função de autocorrelação. Pela definição, a escala integral é a área sob a curva da função de autocorrelação, ou seja, a integral da mesma. Entretanto, mesmo para dados de alta resolução é difícil efetuar o cálculo da escala integral pelo método de integração pois o valor numérico não converge devido as oscilações nas maiores escalas da série de dados.

Empregando-se o valor médio encontrado para a escala integral nos quatro pontos de grade selecionados e, além disto, a velocidade longitudinal média destes pontos em cada nível calculou-se alguns parâmetros que caracterizam a turbulência: a intensidade da turbulência ( $I$ ), o número de Reynolds ( $Re$ ), o número de Reynolds da microescala de Taylor ( $R_\lambda$ ), o comprimento da escala de Taylor ( $\lambda$ ) e a taxa de dissipação ( $\varepsilon$ ). Estes valores foram calculados a partir de equações que relacionam estas variáveis. Como conseqüência, estas equações fornecem uma estimativa para estes parâmetros turbulentos. A análise que foi realizada é relevante uma vez que obter estes parâmetros com alta precisão exige uma sofisticada técnica de medida e uma alta resolução nos dados.

A intensidade da turbulência  $I$  é definida como a razão entre o desvio padrão da velocidade longitudinal e a velocidade longitudinal média, assim temos

$$I = \frac{\sigma_u}{\bar{u}}. \quad (5.18)$$

O número de Reynolds foi calculado pela sua definição, dada por

$$Re = \frac{\bar{u}L}{\nu}. \quad (5.19)$$

Neste trabalho utilizado um valor padrão para a viscosidade cinemática  $\nu = 1,42 \times 10^{-5} m^2 s^{-1}$ . O número de Reynolds da microescala de Taylor foi estimado a partir da relação 5.20 (LANDAU; LIFSHITZ, 1959; HINZE, 1975)

$$R_\lambda = (Re)^{1/2}. \quad (5.20)$$

O comprimento da microescala de Taylor foi obtido de uma relação para estimar o número de Reynolds desta escala. Uma expressão equivalente para o número de Reynolds é expressa na seguinte forma

$$R_\lambda = \frac{\sigma_u \lambda}{\nu}. \quad (5.21)$$

A partir equação (5.21) pode-se facilmente encontrar uma expressão para estimar

o comprimento da microescala de Taylor. Desta maneira o comprimento da escala de Taylor pode ser dado por

$$\lambda = \frac{R_\lambda \nu}{\sigma_u}. \quad (5.22)$$

A taxa de dissipação foi estimada a partir da seguinte expressão, que relaciona a viscosidade cinemática, o desvio padrão da velocidade longitudinal e o comprimento da microescala de Taylor

$$\varepsilon = 15\nu \left( \frac{\sigma_u}{\lambda} \right)^2. \quad (5.23)$$

Empregando-se as relações apresentadas anteriormente e os dados obtidos do modelo LES foram construídas as tabelas 5.4 e 5.5, com as características da turbulência na camada limite planetária, em diferentes níveis nos horários das 12h e 16h (local). Nestas tabelas todos os valores que possuem unidade estão apresentados no SI.

**Tabela 5.4:** Estimativas de alguns parâmetros que caracterizam a turbulência no horário das 12h (local) para diferentes níveis da CLP.

12h	$\bar{u}$	$\sigma_u$	$I$	$Re$	$R_\lambda$	$\lambda$	$\varepsilon$
10,42m	7,04	0,77	0,11	$6,11 \times 10^7$	$7,82 \times 10^3$	0,14	$6,08 \times 10^{-3}$
0,2z <sub>i</sub>	8,81	0,44	0,05	$1,61 \times 10^8$	$1,30 \times 10^4$	0,41	$2,50 \times 10^{-4}$
0,5z <sub>i</sub>	8,72	0,33	0,04	$7,00 \times 10^7$	$8,37 \times 10^3$	0,36	$1,78 \times 10^{-4}$
z <sub>i</sub>	9,38	0,35	0,04	$1,72 \times 10^8$	$1,31 \times 10^4$	0,53	$9,24 \times 10^{-5}$

**Tabela 5.5:** Estimativas de alguns parâmetros que caracterizam a turbulência no horário das 16h (local) para diferentes níveis da CLP.

16h	$\bar{u}$	$\sigma_u$	$I$	$Re$	$R_\lambda$	$\lambda$	$\varepsilon$
10,42m	6,38	0,59	0,09	$7,14 \times 10^7$	$8,45 \times 10^3$	0,20	$1,90 \times 10^{-3}$
0,2z <sub>i</sub>	9,53	0,27	0,03	$1,21 \times 10^8$	$1,10 \times 10^4$	0,58	$4,62 \times 10^{-5}$
0,5z <sub>i</sub>	9,29	0,26	0,03	$1,33 \times 10^8$	$1,15 \times 10^4$	0,63	$3,62 \times 10^{-5}$
z <sub>i</sub>	7,90	0,12	0,02	$1,04 \times 10^8$	$1,02 \times 10^4$	1,21	$2,09 \times 10^{-6}$

Os dados apresentados nas tabelas 5.4 e 5.5 indicam que, nestes horários, a turbulência na CLP é bem desenvolvida. Welter (2006) calculou alguns destes pa-



râmetros a partir de dados medidos em uma torre micrometeorológica e os estimou de maneira diferente (através da função estrutura de segunda ordem e integral da função de autocorrelação). Em seu estudo, Welter (2006) encontrou para a escala integral valores da ordem de dezenas de metros, ou seja, uma ordem de grandeza menor que os apresentados nas tabelas 5.4 e 5.5. Quanto ao número de Reynolds da microescala de Taylor, Welter (2006) apresenta valores de uma ordem de grandeza maior que os apresentados neste trabalho (considerando dados em  $z = 10,42m$ ). Entretanto os valores do comprimento da escala de Taylor evidenciam uma boa relação com os observados por Welter (2006) a partir de dados experimentais. Além disto, é importante ressaltar que nos dois períodos analisados (em todos os níveis) a intensidade da turbulência calculada apresenta valores menores que 0,5. Isto é importante pois satisfaz a hipótese de Taylor e nos permite associar as funções estrutura e de autocorrelação espaciais com medidas temporais (hipótese da turbulência congelada)(STULL, 1988).

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Neste trabalho evidencia-se a capacidade do modelo LES de Moeng (1984) em representar escoamentos turbulentos na camada limite planetária. Isto é inferido a partir da comparação entre os resultados de uma simulação do ciclo diário da CLP, sob condições de bom tempo, com dados experimentais obtidos em uma torre micrometeorológica. Da mesma forma, resultados publicados na literatura a respeito de conclusões experimentais e simulações com outros modelos LES corroboram a capacidade do modelo LES de Moeng (1984) em gerar os diferentes e complexos aspectos da turbulência na CLP. Na simulação realizada neste trabalho, o modelo LES apresenta maior dificuldade para descrever a CLP no período noturno. Devido as diferentes propriedades da turbulência nos dois períodos, esta falta de precisão em tal período é, provavelmente, decorrência da falta de resolução da malha numérica. O período noturno exige um espaçamento de grade menor que o período convectivo.

A comparação com dados experimentais de superfície, obtidos no sítio experimental de Candiota, RS, Brasil apresentou resultados satisfatórios, sobretudo no período diurno. No período noturno a maior dificuldade do modelo LES foi reproduzir a energia cinética turbulenta. Outro ponto que deve ser avaliado é a inicialização do modelo, pois a comparação entre LES e dados experimentais apontam uma falha no processo de randomização dos campos iniciais, ou seja, o LES não impõe uma condição semelhante a um escoamento turbulento nos momentos iniciais da simulação. Após algumas centenas de interações o modelo começa a convergir para um escoamento mais realístico, ou seja, uma situação mais próxima daquela

exibida na natureza. Isto pode não ser um problema quando se deseja simular um campo turbulento qualquer tendo como objetivo apenas comparar as propriedades do escoamento após este período de convergência. Entretanto, quando se deseja comparar os resultados da saída do modelo com dados experimentais necessita-se que o modelo apresente uma rápida convergência.

Uma das grandes vantagens do modelo LES é a capacidade de reproduzir todo o perfil vertical da CLP com uma alta resolução temporal e espacial. Este mesmo tipo de análise é bastante complicada e de alto custo quando realizada do ponto de vista observacional e este é um dos fatores pelo qual o LES é tão largamente utilizado pela comunidade científica. O experimento realizado no Projeto Candiota 2007 não contava com sondagens verticais do perfil da CLP. Devido a isto, para se comparar os resultados obtidos neste trabalho foram utilizados perfis observados por outros pesquisadores através de modelos LES e experimentos. O modelo LES de Moeng (1984) reproduziu bem os perfis verticais das diferentes variáveis de interesse na CLP, principalmente no período convectivo da simulação. No período noturno, que é caracterizado pela estratificação térmica estável, foi observado a presença do jato de baixos níveis (JBN) no topo da CLE. Este é um resultado positivo, uma vez que outros pesquisadores também os verificaram através de experimentos e simulações LES (STULL, 1988; SORBJAN, 1989; COXART; JIMÉNEZ, 2006; BASU; VINUESA; SWIFT, 2008). Entretanto, ocorrem picos de energia cinética turbulenta associada às escalas de subfiltro. Este fato acarreta uma incerteza nos resultados nos perfis de energia cinética turbulenta.

Um dos objetivos deste trabalho foi a obtenção da evolução dos termos da equação de balanço da energia cinética turbulenta para a CLP. Os perfis calculados na simulação do ciclo diário da CLP concordam com as previsões teóricas e experimentais sobre estes termos (CAUGHEY, 1982; STULL, 1988; SORBJAN, 1989). Contudo, a evolução da taxa de dissipação apresenta um comportamento fora do esperado no topo da CLE. Nesta região vertical ocorre um pico na taxa de dissipação, de forma que os valores são maiores que os valores na superfície. A taxa de dissipação, no modelo LES, é calculada a partir do modelo de subfiltro ou subgrade (SULLIVAN; MCWILLIAMS; MOENG, 1994). Como também ocorre um pico

de energia cinética turbulenta em tal região é bastante provável que este pico na taxa de dissipação esteja associado às incertezas do modelo de subfiltro.

É importante salientar que na realização de um trabalho sobre camada limite planetária é impossível de se deixar de estudar as propriedades do campo turbulento a ela relacionadas. Uma metodologia utilizadas para a análise de dados turbulentos é a teoria estatística da turbulência. Neste ponto deve ser lembrado que a turbulência pode ser interpretada como um sistema termodinâmico fora do equilíbrio e portanto não é descrita pelas equações de mecânica estatística clássica (WELTER, 2006). No presente estudo investigou-se tanto propriedades estatísticas espaciais quanto temporais. Do ponto de vista espacial foram obtidas os perfis verticais das variâncias da velocidade e temperatura. Estes perfis gerados do modelo LES apresentam uma boa concordância com os dados experimentais medidos por vários autores para a CLP convectiva (KAIMAL et al., 1976; CAUGHEY, 1982; STULL, 1988; SORBJAN, 1989). No entanto os dados simulados para a CLP estável exibem um comportamento diferente do descrito na literatura. Do ponto de vista temporal foram calculadas as funções estrutura de segunda ordem e as funções de autocorrelação das componentes da velocidade. Tanto as funções estrutura como de autocorrelação são definidas em termos espaciais. Como estas funções exigem um tratamento matemático baseado em um sistema de referência bem definido pela teoria estatística de funções aleatórias (PANCHEV, 1971), a utilização de uma série de dados temporais facilita a obtenção destes requisitos teóricos. Além do mais, pela hipótese de Taylor é possível relacionar dados estatísticos fornecidos a partir de uma série temporal em um formalismo espacial. As funções estrutura para diferentes níveis e períodos da CLP, obtidas a partir dos dados do modelo LES, apresentam um comportamento semelhante àquelas estimadas através de dados experimentais. Nestas funções estrutura espera-se encontrar três intervalos bem definidos que descrevem diferentes escalas da turbulência, sobretudo o subintervalo inercial. Porém este intervalo não é claramente observado na análise destas funções. Entretanto isto não é apenas um problema do modelo LES. Mesmo com dados experimentais de boa qualidade este intervalo característico do escoamento turbulento não é bem representado nestas funções (WELTER, 2006). Contudo, a partir das funções estrutura e da teoria estatística proposta por Kolmogorov (1941)

obteve-se a variação vertical da taxa de dissipação da energia cinética turbulenta. Comparando-se os valores encontrados a partir das funções estrutura e do modelo de subfiltro verificou-se que os picos da taxa de dissipação apresentados pelo modelo de subfiltro realmente são oriundos das incertezas atribuídas àquelas escalas. Além do mais, a partir das funções de autocorrelação e relações que estimam parâmetros turbulentos obteve-se algumas quantidades que caracterizam a turbulência na CLP (intensidade da turbulência, número de Reynolds (global e escala de Taylor), comprimento da microescala de Taylor e taxa de dissipação). De forma geral, estes parâmetros apresentaram uma boa relação com o esperado a partir de resultados teóricos. É importante ressaltar que a intensidade da turbulência obtida garante a utilização da hipótese de Taylor.

A partir deste trabalho pretende-se continuar um estudo sobre a caracterização da turbulência gerada pelo modelo LES. Alguns trabalhos futuros nesta linha estão previstos, dentre eles novas simulações com maior resolução com o intuito de se obter funções estrutura de ordem superior e com isso investigar o comportamento do modelo LES em relação a auto similaridade estendida da turbulência. Da mesma forma, pretende-se determinar a constante de Kolmogorov. Adicionalmente, um objetivo futuro será o desenvolvimento de um novo modelo de inicialização para a simulação LES. Espera-se que este novo método de inicialização contemple uma estatística mais realística do ponto de vista da turbulência.

# Apêndice A

## Teorema do Transporte de Reynolds

Seja  $B$  uma quantidade qualquer relativa a um fluido e  $b$  seu valor por unidade de massa,  $m$ , tal que

$$B = mb. \quad (\text{A.1})$$

Este fluido escoar através de um volume de controle  $V_c$  e tem uma quantidade de massa contida no volume do sistema  $V_{sis}$ , que se move com velocidade  $\vec{U}$  em relação ao referencial em que  $V_c$  está fixo. O Teorema do Transporte de Reynolds relaciona a variação temporal de  $B$  no volume de controle e no sistema. Para um volume infinitesimal  $\delta V$  de fluido temos que

$$\delta m = \rho \delta V, \quad (\text{A.2})$$

logo,

$$B = \rho \delta V b. \quad (\text{A.3})$$

O valor de  $B$  para todo o sistema vale:

$$B_{sis} = \sum_i b_i (\rho \delta V_i). \quad (\text{A.4})$$

No limite em que  $\delta V_i \rightarrow 0$ ,

$$B_{sis} = \int_{sis} \rho b dV. \quad (A.5)$$

De forma análoga, o valor de  $B$  no volume de controle é dado por

$$B_{V_c} = \int_{V_c} \rho b dV. \quad (A.6)$$

A taxa de variação temporal de  $B$  em cada um dos volumes de contorno analisados é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_{sis} &= \frac{d}{dt} \int_{sis} \rho b dV \\ \frac{d}{dt} B_{V_c} &= \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho b dV \end{aligned} \quad (A.7)$$

Considerando-se que em um tempo inicial  $t' = t$ ,  $B_c = B_{sis}$  e analisando-se a figura A.1 em um instante  $t' = t + \delta t$  teremos

$$B_{sis}(t + \delta t) = B_{V_c}(t + \delta t) - B_{V_I}(t + \delta t) + B_{V_{II}}(t + \delta t). \quad (A.8)$$

A variação de  $B_{sis}$  em um intervalo de tempo  $\delta t$  é dada por

$$\frac{\delta B_{sis}}{\delta t} = \frac{B_{sis}(t + \delta t) - B_{sis}(t)}{\delta t}, \quad (A.9)$$

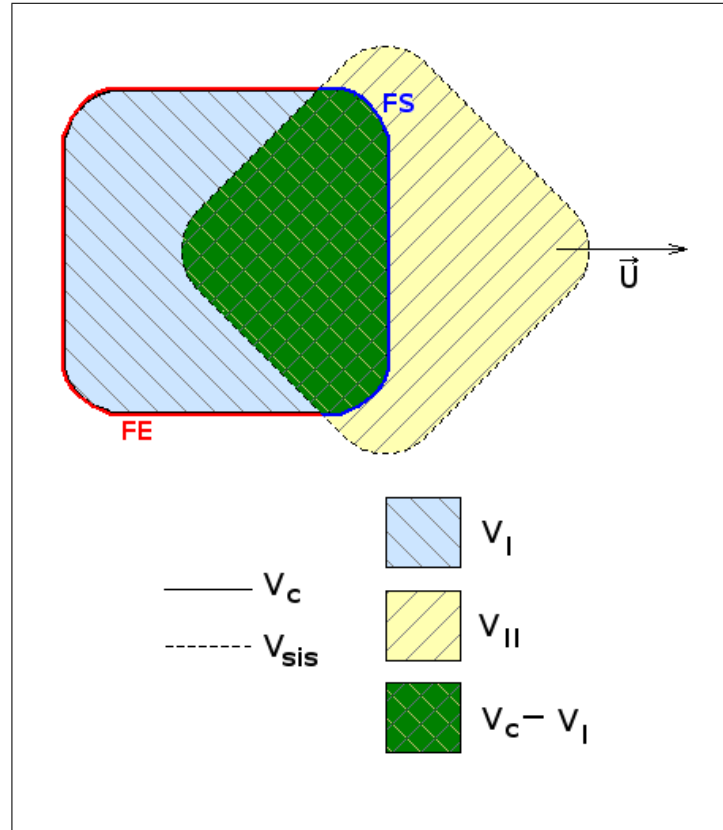
substituindo a equação (A.8) em (A.9) temos:

$$\frac{\delta B_{sis}}{\delta t} = \frac{B_{V_c}(t + \delta t) - B_{V_I}(t + \delta t) + B_{V_{II}}(t + \delta t) - B_{sis}(t)}{\delta t}. \quad (A.10)$$

Lembrando-se que em  $t' = t$ ,  $B_c = B_{sis}$  e, substituindo-se em (A.10),

$$\frac{\delta B_{sis}}{\delta t} = \frac{B_{V_c}(t + \delta t) - B_{V_c}(t)}{\delta t} - \frac{B_{V_I}(t + \delta t)}{\delta t} + \frac{B_{V_{II}}(t + \delta t)}{\delta t}. \quad (A.11)$$

Calculando-se (A.10) no limite em que  $\delta t \rightarrow 0$ , resulta



**Figura A.1:** Representação de  $V_c$  e  $V_{sis}$

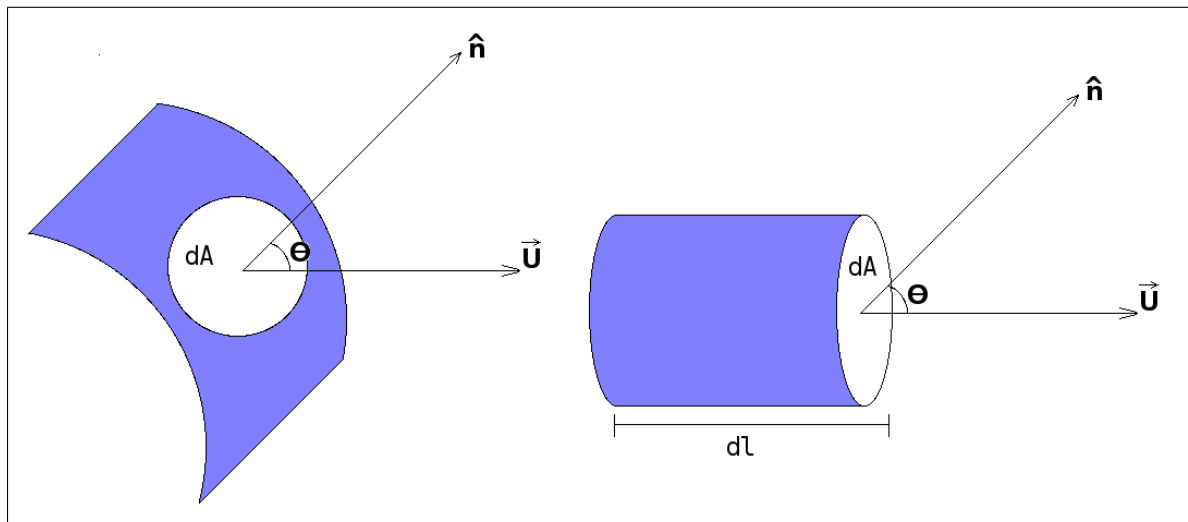
$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta B_{sis}}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{V_c}(t + \delta t) - B_{V_c}(t)}{\delta t} - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{V_I}(t + \delta t)}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{V_{II}}(t + \delta t)}{\delta t}. \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{d}{dt} B_{sis} = \frac{\partial}{\partial t} B_{V_c} - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{V_I}(t + \delta t)}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{V_{II}}(t + \delta t)}{\delta t}. \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{d}{dt} B_{sis} = \frac{\partial}{\partial t} B_{V_c} - \dot{B}_{ent} + \dot{B}_{sai}, \quad (\text{A.14})$$

onde  $\dot{B}_{ent}$  representa a taxa com  $B$  entra e  $\dot{B}_{sai}$  a taxa com  $B$  sai do volume de controle  $V_c$  através das superfícies que fazem fronteira entre  $V_c$  e  $V_{sis}$ , sendo estas superfícies definidas como  $FE$  e  $FS$ , respectivamente. O valor de  $\dot{B}_{sai}$  é dado pela soma das contribuições desta quantidade que passa por cada elemento infinitesimal de área  $\delta A$  de  $FS$ . Analisando-se a figura A.2, podemos chegar nas seguintes relações:





**Figura A.2:** Elemento de área infinitesimal de  $V_c$  e vetores

$$\delta B = \delta mb$$

$$\delta B = \rho \delta V b$$

$$\delta V = \delta A \delta l \cos \theta$$

$$\delta l = U \delta t$$

$$\delta B = \rho b \delta A U \delta t \cos \theta, \quad (\text{A.15})$$

então

$$\begin{aligned} \delta \dot{B}_{sai} &= \frac{\delta B}{\delta t} \\ \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta B}{\delta t} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\rho b \delta A U \delta t \cos \theta}{\delta t} \\ \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta B}{\delta t} &= \rho b \delta A U \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

escrevendo  $U \cos \theta$  como  $\vec{U} \cdot \hat{n}$ , onde  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal a superfície

$$\delta \dot{B} = \rho b \vec{U} \cdot \hat{n} \delta A. \quad (\text{A.17})$$

No limite em que  $\delta A \rightarrow 0$ , faz-se a soma de todos os elementos  $\dot{B}_{sai}$  que atravessam a superfície  $FS$ . Isto equivale a integrar  $\delta \dot{B}_{sai}$  sobre esta superfície, então

$$\begin{aligned}\dot{B}_{sai} &= \int_{FS} \delta \dot{B}_{sai} \\ \dot{B}_{sai} &= \int_{FS} \rho b \vec{U} \cdot \hat{n} dA.\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

De maneira análoga,  $\dot{B}_{ent}$  é dado por

$$\dot{B}_{ent} = - \int_{FE} \rho b \vec{U} \cdot \hat{n} dA. \quad (\text{A.19})$$

Logo, o saldo da variação de  $B$  no volume de controle é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{B}_{sai} - \dot{B}_{ent} &= \int_{FS} \rho b \vec{U} \cdot \hat{n} dA + \int_{FE} \rho b \vec{U} \cdot \hat{n} dA \\ \dot{B}_{sai} - \dot{B}_{ent} &= \oint_{SV_c} \rho b \vec{U} \cdot \hat{n} dA,\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

onde  $SV_c$  é a superfície do volume de controle. Substituindo-se a equação (A.20) em (A.14) obtém-se

$$\frac{d}{dt} B_{sis} = \frac{\partial}{\partial t} B_{V_c} + \oint_{SV_c} \rho b \vec{U} \cdot \hat{n} dA. \quad (\text{A.21})$$

A equação (A.21) relaciona a variação temporal do volume de contorno do sistema com a variação temporal local do volume de controle. A diferença entre as duas é a variação do fluxo da quantidade  $B$  através da superfície do volume de contorno. A variação temporal de  $B_{sis}$  fornece a descrição lagrangiana, ou seja, a variação vista por um observador fixo que segue uma determinada partícula de fluido. Já a variação local de  $B_{V_c}$  fornece uma descrição euleriana da quantidade  $B$ . O termo que indica a variação do fluxo é o termo de transporte ou advecção de  $B$ .

## Apêndice B

### Equação da Continuidade

Existem várias maneiras de se obter a equação da continuidade. Aqui, a sua derivação será feita a partir do Teorema de Transporte de Reynolds. Fazendo-se as mesmas considerações para os volumes de contorno do apêndice A, e  $B = m$ , logo,  $b = 1$ , pelo Teorema de Transporte de Reynolds, temos:

$$\frac{d}{dt}m_{sis} = \frac{\partial}{\partial t}m_{V_c} + \oint_{SV_c} \rho \vec{U} \cdot \hat{n} dA. \quad (\text{B.1})$$

Se a massa se conserva,

$$\frac{d}{dt}m_{sis} = 0, \quad (\text{B.2})$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial t}m_{V_c} + \oint_{SV_c} \rho \vec{U} \cdot \hat{n} dA = 0. \quad (\text{B.3})$$

Aplicando-se o teorema da divergência de Gauss na integral de superfície da equação (B.3) e considerando-se as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{dm}{dV} \\ dm &= \rho dV \\ m &= \int \rho dV, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

a expressão (B.3) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{V_c} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) dV = 0. \quad (\text{B.5})$$

Como os limites de integração da região  $V_c$  independem do tempo, o operador derivada parcial pode ser manipulado e colocado dentro do operador integral,

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{V_c} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) dV &= 0 \\ \int_{V_c} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) \right] dV &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

A equação (B.6) é a equação da continuidade e, nesta forma, associa a variação local da densidade do fluido com a divergência do fluxo de massa do fluido. Manipulando o termo do divergente na equação, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{U} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde a equação (B.7) associa a variação total da densidade de um fluido com a divergência do campo de velocidade, ou seja, se um fluido for incompressível, portanto, apresentando densidade constante, o escoamento é não divergente. Assim, as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{aligned} \rho &= cte \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

logo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0.$$

## Apêndice C

### A Segunda Lei de Newton aplicada a fluidos geofísicos

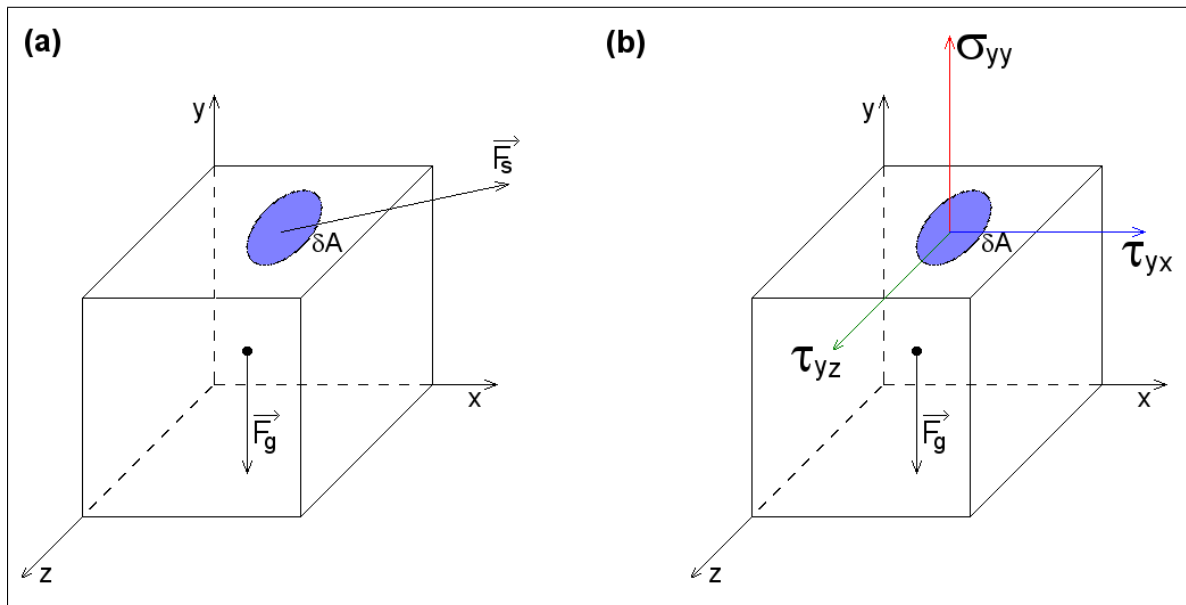
A segunda Lei de Newton expressa a relação “causa-conseqüência” na dinâmica de uma partícula em relação a um referencial. Isto é feito através da relação entre força resultante que atua sobre a partícula (causa) com a variação temporal do momento linear da mesma, (conseqüência). Matematicamente, definimos

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{C.1})$$

onde  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  é a força e  $\vec{p}$  é o momento linear da partícula. Considerando-se a Segunda Lei de Newton aplicada a um elemento de fluido (representado por um cubo, como o da figura C.1(a)) devemos inicialmente analisar as forças que atuam sobre tal elemento afim de encontrar a sua resultante. Adotando-se um referencial fixo na Terra e assumindo-se este referencial como inercial, as forças atuantes em um elemento de fluido presente na atmosfera terrestre são: a força peso (de origem gravitacional) que atua no centro gravitacional do elemento de fluido e a força de superfície (de origem eletromagnética) que atua nas paredes do elemento de fluido e surge devido ao contato de um elemento de fluido com as adjacências.

#### Força de natureza gravitacional – Força Peso

Aproximando-se a forma do planeta como esférico e de massa uniformemente distribuída e um elemento infinitesimal de fluido, a força de origem gravitacional



**Figura C.1:** (a) Representação do elemento de fluido e as forças que sobre ele atuam. (b) Representação das tensões que agem em uma face do elemento de fluido.

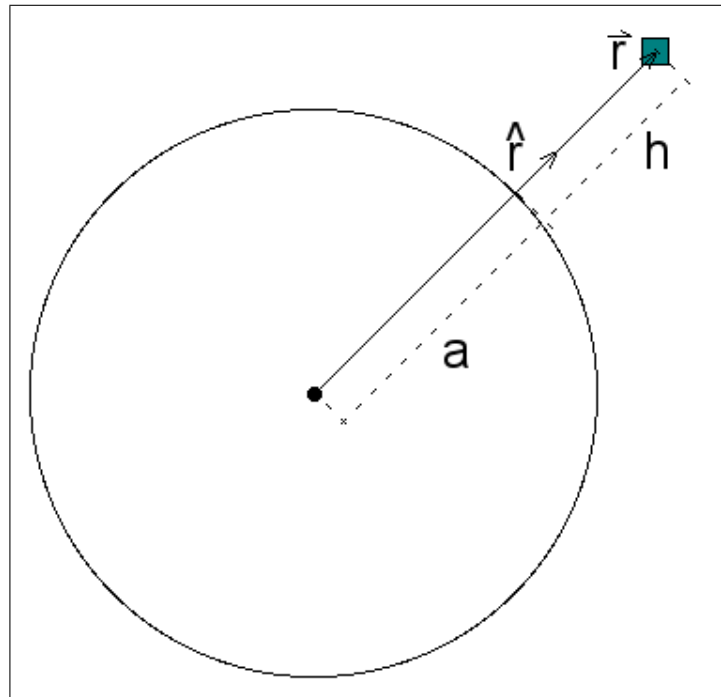
que atua sobre o elemento é dada pela Lei de Newton para a Gravitação

$$\delta \vec{F}_g = -G \frac{M \delta m}{r^2} \hat{r} \quad (\text{C.2})$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal,  $M$  a massa do planeta,  $\delta m$  a massa do elemento de fluido e  $r$  a distância do centro da Terra até a posição do elemento de fluido ( $\hat{r}$  o versor que indica a direção e sentido da força gravitacional). Como a força gravitacional é a própria força peso definida como  $\vec{P} = m\vec{g}$ , onde  $\vec{g}$  é a aceleração da gravidade, igualando-se as equações (C.2) e a definição de força peso resulta

$$\begin{aligned} \delta \vec{F}_g &= \delta \vec{P} \\ -G \frac{M \delta m}{r^2} \hat{r} &= \delta m \vec{g} \\ \vec{g} &= -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Pode-se escrever a distância que separa a partícula do centro da Terra como a soma do raio da Terra ( $a$ ) e a altura em que ela se encontra (a partir da superfície) ( $h$ ), logo  $r = a + h$ . Substituindo-se esta relação na equação (C.3), obtém-se



**Figura C.2:** Representação de uma partícula qualquer a uma distância  $r$  do centro da Terra.

$$\vec{g} = -G \frac{M}{(a+h)^2} \hat{r}. \quad (\text{C.4})$$

A variável  $a$  na equação anterior pode ser fatorada e disto resulta,

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -G \frac{M}{a^2} \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{-2} \hat{r} \\ \vec{g} &= -g_o \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{-2} \hat{r}, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

onde  $g_o$  é definido como o módulo da aceleração da gravidade na superfície da Terra,

$$g_o \equiv G \frac{M}{a^2}. \quad (\text{C.6})$$

Fazendo-se uma simples análise de escala baseada na atmosfera padrão resulta uma simplificação na equação (C.5). Para um elemento de fluido na atmosfera terrestre  $h \ll a$ , pois os níveis mais altos da atmosfera são da ordem de  $500\text{km}$ , entretanto, a maior parte do ar atmosférico (cerca de 99%) está até uma

altura de aproximadamente  $32km$ . Logo podemos sem problemas usar um valor máximo para  $h$  de  $100km$  (nível onde inicia a termosfera que é uma camada da atmosfera composta principalmente por Hidrogênio e Hélio em baixas concentrações. Comparado-se com o raio da Terra que é aproximadamente  $6400km$  a razão  $h/a$  é aproximadamente zero ( $h/a = 0,0156 \approx 0$ ), segue que

$$1 + h/a \approx 1, \quad (C.7)$$

então a expressão (C.5) pode ser aproximada por

$$\vec{g} = -g_o\hat{r}. \quad (C.8)$$

Desta maneira o elemento diferencial de força de origem gravitacional que atua sobre um fluido é dado por

$$\begin{aligned} \delta\vec{F}_g &= -\delta m g_o \hat{r} \\ \delta\vec{F}_g &= \delta m \vec{g}. \end{aligned} \quad (C.9)$$

Pela definição de densidade:

$$\rho = \frac{\delta m}{\delta V}, \quad (C.10)$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $\delta V$  o volume do elemento diferencial de fluido. Logo,

$$\delta m = \rho \delta V, \quad (C.11)$$

e a equação (C.9) é reescrita como:

$$\begin{aligned} \delta\vec{F}_g &= \rho \delta V \vec{g} \\ \frac{\delta\vec{F}_g}{\delta V} &= \rho \vec{g}. \end{aligned} \quad (C.12)$$

No limite  $\delta V \rightarrow 0$ :



$$\begin{aligned}
\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}_g}{\delta V} &= \lim_{\delta V \rightarrow 0} \rho \vec{g} \\
\frac{d\vec{F}_g}{dV} &= \rho \vec{g} \\
\frac{d\vec{F}_g}{dV} &= -\rho g_o \hat{r}
\end{aligned} \tag{C.13}$$

## Forças de natureza eletromagnética – Forças de Superfície

A análise da força de superfície é um pouco mais sofisticada pois além de considerar a direção em que a força atua também devemos levar em conta a “face” do elemento de fluido. Logo, as interações eletromagnéticas na superfície do elemento de fluido são bem descritas pelas componentes de um tensor  $\tau_{ij}$ , onde defini-se que o primeiro índice identifica a direção normal à face analisada e o segundo índice a direção da componente do tensor. De acordo com a figura C.1(b) o tensor  $\tau_{ij}$  é definido pela matriz:

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}.$$

onde as componentes do tensor que são normais as faces do elemento de fluido ocupam a diagonal principal da matriz e doravante serão definidos como  $\tau_{i,i} = \sigma_{i,i}$ . A relação entre cada componente do tensor e a respectiva componente da força de superfície é dada por

$$\tau_{ij} = \frac{\delta F_{ij}}{\delta A} \tag{C.14}$$

onde  $\delta A$  é a área de uma face do elemento de fluido. Cada componente  $x, y, z$  da força é proporcional a soma dos elementos de cada coluna da matriz que define o tensor  $\tau$ .

Para o eixo  $y$ , a força de superfície é dada por:

$$\begin{aligned}\delta F_{s_y} &= \delta F_{xy} + \delta F_{yy} + \delta F_{zy} \\ \delta F_{s_y} &= \tau_{xy}\delta y\delta z + \sigma_{yy}\delta x\delta z + \tau_{zy}\delta x\delta y\end{aligned}\quad (\text{C.15})$$

De forma análoga para o eixo  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned}\delta F_{s_x} &= \delta F_{xx} + \delta F_{yx} + \delta F_{zx} \\ \delta F_{s_x} &= \sigma_{xx}\delta y\delta z + \tau_{yx}\delta x\delta z + \tau_{zx}\delta x\delta y,\end{aligned}\quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned}\delta F_{s_z} &= \delta F_{xz} + \delta F_{yz} + \delta F_{zz} \\ \delta F_{s_z} &= \tau_{xz}\delta y\delta z + \tau_{yz}\delta x\delta z + \sigma_{zz}\delta x\delta y.\end{aligned}\quad (\text{C.17})$$

Porém, o elemento de fluido têm duas faces normais a cada eixo, portanto a componente  $\tau_{ij}$  deve ser a resultante entre as componentes  $\tau_{ij_1}$  e  $\tau_{ij_2}$  que atua em cada face. Para as faces normais ao eixo  $y$  definimos  $\tau_{yj_1} \equiv \tau_{yj\uparrow}$  como as tensões que agem na face superior do elemento de fluido e  $\tau_{yj_2} \equiv \tau_{yj\downarrow}$  as que agem na face oposta. Logo, pelo referencial adotado (expresso na figura C.1):

$$\tau_{yj} = \tau_{yj\uparrow} - \tau_{yj\downarrow}\quad (\text{C.18})$$

Para calcular a tensão em cada face obtemos a sua variação através do elemento de fluido. Considerando-se que o elemento de fluido é um cubo de aresta  $\delta l$  tal que  $\delta l = \delta x = \delta y = \delta z$ , e escolhendo um ponto  $P_0$  ( $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (\delta x/2, \delta y/2, \delta z/2)$ ) no centro do elemento de fluido tal que a tensão que age neste ponto é dada por

$$\tau_0 = \tau_{yj}(x_0, y_0, z_0).\quad (\text{C.19})$$

A variação de  $\tau_{yj}$  ao longo do eixo  $j$  pode ser estimada através de uma expansão em Série de Taylor. Para as tensões que agem na superfície superior e inferior do elemento de fluido na direção  $x$ ,

$$\begin{aligned}
\tau_{yx\uparrow} &= \tau_0 + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} \frac{\delta x}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\tau_{yx}}{\partial x^2} \left(\frac{\delta x}{2}\right)^2 + \dots \\
\tau_{yx\downarrow} &= \tau_0 - \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} \frac{\delta x}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\tau_{yx}}{\partial x^2} \left(\frac{\delta x}{2}\right)^2 + \dots
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Desprezando-se os termos de ordem  $n \geq 2$  da série de Taylor, devido as suas pequenas magnitudes (conseqüência do termo  $(\delta x/n!)^n$ ), a tensão resultante na face  $y$  na direção  $x$  é dada por:

$$\begin{aligned}
\tau_{yx} &= \tau_{yx\uparrow} - \tau_{yx\downarrow} \\
\tau_{yx} &= \left(\tau_0 + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} \frac{\delta y}{2}\right) - \left(\tau_0 - \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} \frac{\delta y}{2}\right) \\
\tau_{yx} &= \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} \delta y.
\end{aligned} \tag{C.21}$$

De forma análoga, para as demais tensões tangenciais:

$$\begin{aligned}
\tau_{yz} &= \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} \delta y \\
\tau_{xy} &= \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} \delta x \\
\tau_{xz} &= \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} \delta x \\
\tau_{zx} &= \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \delta z \\
\tau_{zy} &= \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} \delta z,
\end{aligned}$$

e para as normais

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \\
\sigma_{yy} &= \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} \delta y \\
\sigma_{zz} &= \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \delta z.
\end{aligned}$$

Então a equação (C.15) que expressa a força de superfície na direção  $y$  pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\delta F_{s_y} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \delta y \delta x \delta z + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \delta z \delta x \delta y \\
\delta F_{s_y} &= \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \\
\delta F_{s_y} &= \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \delta V \\
\frac{\delta F_{s_y}}{\delta V} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}. \tag{C.22}
\end{aligned}$$

Levando volume do elemento de fluido para um volume infinitesimal, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta F_{s_y}}{\delta V} &= \lim_{\delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\
\frac{dF_{s_y}}{dV} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}. \tag{C.23}
\end{aligned}$$

Aplicando manipulações matemáticas similares para as outras dimensões resulta que,

$$\begin{aligned}
\frac{dF_{s_x}}{dV} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
\frac{dF_{s_z}}{dV} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \tag{C.24}
\end{aligned}$$

Podemos escrever o tensor  $\tau_{ij}$  como a seguinte soma (LANDAU; LIFSHITZ, 1959):

$$\tau_{ij} = -\delta_{ij}p + \Lambda_{ij} \tag{C.25}$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,  $p$  é a pressão e  $\Lambda_{ij}$  é o tensor de viscosidade. Assim o tensor  $\tau$  é a soma dos efeitos de pressão e viscosidade agindo no elemento de fluido. É interessante observar que o tensor delta de Kronecker é definido como uma matriz identidade:

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

portanto  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ . Deste modo a pressão só tem participação nas componentes normais do tensor  $\tau_{ij}$ .

Considerando-se um fluido newtoniano<sup>1</sup> o tensor de viscosidade pode ser escrito como

$$\Lambda_{ij} = a \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} b \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (\text{C.26})$$

onde  $u_i$  é a componente do vetor velocidade  $\vec{U}$  na direção  $x_i$ . Defindo-se que  $u, v, w$  são as componentes do vetor  $\vec{U}$  nas direções  $(x, y, z)$ , respectivamente, percebe-se que o último termo da equação (C.26) tem suas componentes somadas em todas direções. Para cada valor de  $i$ , a componente normal do tensor  $\tau_{ij}$  na direção  $y$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= -p + a \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + b \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + a \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + b \vec{\nabla} \cdot \vec{U}. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

e as demais componentes do tensor na direção  $y$  são dadas por:

$$\tau_{xy} = a \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{C.28})$$

$$\tau_{zy} = a \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (\text{C.29})$$

Substituindo-se as equações (C.27), (C.28) e (C.29) na equação (C.23) temos que a força na direção  $y$  é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{sy}}{dV} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ a \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -p + a \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + b \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ a \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

<sup>1</sup>Fluido newtoniano é um modelo no qual o tensor de viscosidade é proporcional a variação da velocidade na direção normal ao escoamento. Esta aproximação é válida na maioria dos fluidos de interesse da mecânica de fluidos geofísicos, em especial para o ar atmosférico.

Aproximando-se o fluido newtoniano por um fluido newtoniano e incompressível<sup>2</sup> e analisando-se a equação da continuidade (ver página 156 no apêndice B) resulta que o escoamento é não divergente, portanto  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ . Empregando esta aproximação na equação (C.30),

$$\frac{dF_{s_y}}{dV} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ a \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -p + a \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ a \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]. \quad (\text{C.31})$$

Assumindo-se  $a$  como uma constante e definindo-a como  $a \equiv \mu$ , onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica, a equação (C.31) é reescrita como:

$$\frac{dF_{s_y}}{dV} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{C.32})$$

Considerando-se a simetria do tensor  $\tau_{ij}$  podemos aplicar a seguinte propriedade:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$$

então a equação (C.32) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{dF_{s_y}}{dV} &= \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{dF_{s_y}}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{dF_{s_y}}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right) \\ \frac{dF_{s_y}}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

analogamente para as direções  $x$  e  $z$ :

<sup>2</sup>Esta é uma aproximação largamente utilizada em dinâmica de fluidos na atmosfera, principalmente na CLP onde as flutuações de densidade são muito menores que a própria densidade do ar.

$$\frac{dF_{s_x}}{dV} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{C.34})$$

$$\frac{dF_{s_z}}{dV} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (\text{C.35})$$

logo a força de superfície resultante é dada por

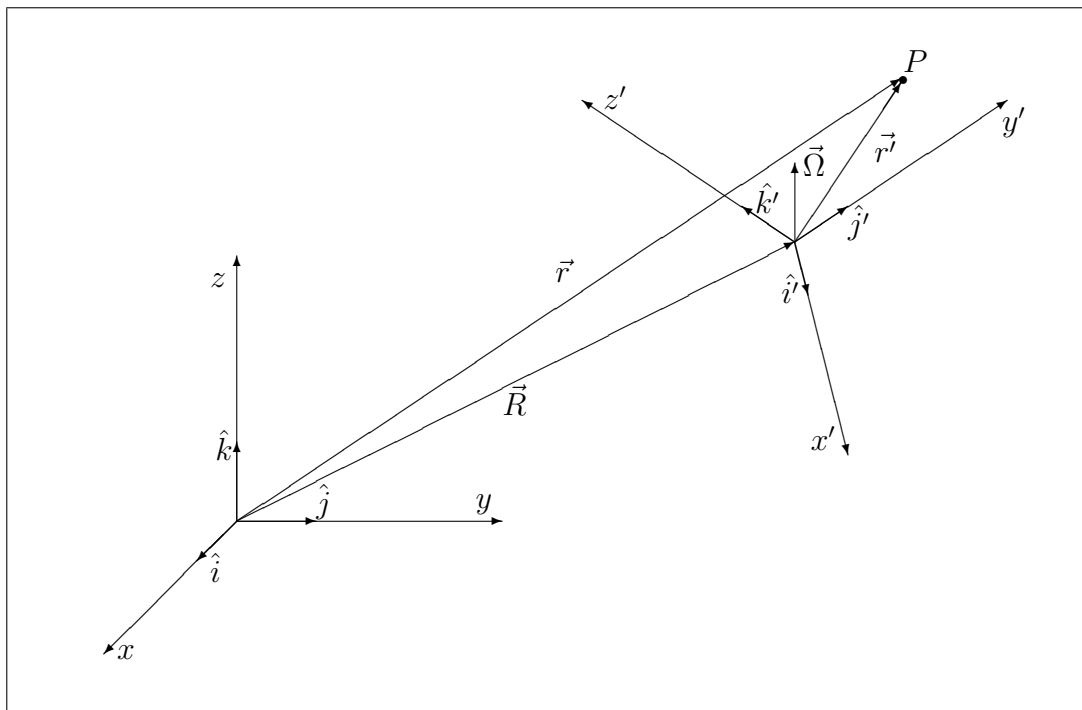
$$\begin{aligned} \frac{dF_s}{dV} &= \frac{dF_{s_x}}{dV} + \frac{dF_{s_y}}{dV} + \frac{dF_{s_z}}{dV} \\ \frac{dF_s}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{dF_s}{dV} &= -\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \\ \frac{dF_s}{dV} &= -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{U} \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

## Forças Inerciais

A primeira Lei de Newton define os referenciais inerciais como sendo aqueles onde uma partícula esta em repouso ou com movimento retilíneo uniforme (MRU) e nestes referenciais muito peculiares as leis de Newton são válidas. Portanto, um referencial que se move juntamente com o planeta Terra, em relação a um referencial inercial, não pode ser considerado um referencial desta natureza devido ao movimento de translação e rotação da Terra, que são acelerados. Então, para utilizarmos as Leis de Newton para uma partícula que tem sua posição obtida a partir de um referencial que se move com a superfície da Terra (em relação a um referencial inercial) devemos incluir forças de origem inercial (que surgem devido a aceleração do referencial em relação a um referencial inercial) no somatório das forças que atuam sobre partícula. Estas forças surgem naturalmente quando manipulamos matematicamente a segunda Lei de Newton. Um referencial aceito como inercial é aquele no qual as estrelas distantes estão em repouso ou em MRU, pois é senso comum na física que o movimento destas estrelas em relação a um referencial fixo na Terra é imperceptível, portanto estão em repouso.

Tomando como referencial o conjunto de eixos coordenados  $(x, y, z)$  que garan-

tem a condição de repouso ou MRU das estrelas distantes e o conjunto de eixos coordenados  $(x', y', z')$  (figura C.3) como fixo na superfície do planeta podemos obter as forças de origem inercial e incluí-las na segunda lei de Newton.



**Figura C.3:** Sistemas de referência: referencial inercial  $(x, y, z)$  e não inercial  $(x', y', z')$ .

Vamos considerar como exemplo o elemento de fluido na posição  $P$  (figura C.3) tal que sua posição em relação ao referencial  $(x, y, z)$  é dada pelo vetor  $\vec{r}$  e em relação ao referencial  $(x', y', z')$  é dada pelo vetor  $\vec{r}'$ . O vetor  $\vec{R}$  define a posição da origem do sistema  $(x', y', z')$  em relação a  $(x, y, z)$ , logo  $\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r}$ . Se tomarmos a a variação temporal de  $\vec{r}$  em relação ao referencial fixo (inercial), resulta

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_I + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_I, \quad (\text{C.37})$$

onde  $I$  indica que a derivada é realizada em relação ao referencial inercial. Sendo  $\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}$ , onde  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  são os versores da base do referencial  $(x, y, z)$  e portanto são independentes do tempo, logo:

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_I = \frac{dR_x}{dx} \hat{i} + \frac{dR_y}{dy} \hat{j} + \frac{dR_z}{dz} \hat{k}. \quad (\text{C.38})$$



Analisando-se a variação temporal do vetor  $\vec{r}$  em relação ao referencial inercial deve-se atentar-se para o fato de que  $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$  não são constantes no tempo, logo

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_I = \underbrace{\frac{dr'_x}{dx}\hat{i}' + \frac{dr'_y}{dy}\hat{j}' + \frac{dr'_z}{dz}\hat{k}'}_a + \underbrace{r'_x\frac{d\hat{i}'}{dx} + r'_y\frac{d\hat{j}'}{dy} + r'_z\frac{d\hat{k}'}{dz}}_b. \quad (\text{C.39})$$

O termo (a) na equação (C.39) corresponde a variação temporal das coordenadas de  $\vec{r}'$  no próprio sistema de referência  $(x', y', z')$ , e o termo (b) corresponde a variação dos versores  $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$  que pode ser interpretado como os versores dos vetores velocidade naquele referencial,  $\hat{u}', \hat{v}', \hat{w}'$ . Como o referencial  $(x', y', z')$  tem um movimento de rotação dado pela velocidade angular  $\vec{\Omega}$  pode-se usar a relação  $\vec{u}' = \vec{\Omega} \times \hat{i}'$  e reescrever a equação como

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_I &= \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{NI} + r'_x\vec{\Omega} \times \hat{i}' + r'_y\vec{\Omega} \times \hat{j}' + r'_z\vec{\Omega} \times \hat{k}' \\ \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_I &= \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{NI} + \vec{\Omega} \times r'_x\hat{i}' + \vec{\Omega} \times r'_y\hat{j}' + \vec{\Omega} \times r'_z\hat{k}' \\ \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_I &= \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{NI} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'. \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

Portanto, a variação temporal (considerada em um sistema de referência inercial) de um vetor pertencente um sistema de referência não inercial equivale a soma da variação temporal do vetor no próprio sistema de referência não inercial  $NI$  com o produto vetorial da velocidade angular do sistema de referência com o próprio vetor. A partir destas considerações segue que

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_I + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{NI} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'. \quad (\text{C.41})$$

A variação temporal da posição define a velocidade. Observando-se isto na equação (C.41) pode-se escrever a relação entre a velocidade de uma determinada partícula tomada em relação a um referencial inercial e a equivalente velocidade em relação a um referencial não inercial,

$$\vec{U}_I = \vec{\Upsilon}_I + \vec{U}_{NI} + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad (\text{C.42})$$

onde  $\vec{\Upsilon}$  é a velocidade da origem do sistema de eixos cartesianos  $(x', y', z')$ . Tomando a derivada temporal em relação ao referencial inercial na equação (C.42)

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{U}_I}{dt} \right)_I &= \left( \frac{d\vec{\Upsilon}_I}{dt} \right)_I + \left( \frac{d\vec{U}_{NI}}{dt} \right)_I + \frac{d}{dt} (\vec{\Omega} \times \vec{r})_I \\ \left( \frac{d\vec{U}_I}{dt} \right)_I &= \left( \frac{d\vec{\Upsilon}_I}{dt} \right)_I + \left( \frac{d\vec{U}_{NI}}{dt} \right)_I + \vec{\Omega} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_I. \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Por analogia a expressão (C.40),

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{U}_I}{dt} \right)_I &= \left( \frac{d\vec{\Upsilon}_I}{dt} \right)_I + \left( \frac{d\vec{U}_{NI}}{dt} \right)_{NI} + \vec{\Omega} \times \vec{U}_{NI} + \vec{\Omega} \times \left[ \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{NI} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right] \\ \left( \frac{d\vec{U}_I}{dt} \right)_I &= \left( \frac{d\vec{\Upsilon}_I}{dt} \right)_I + \left( \frac{d\vec{U}_{NI}}{dt} \right)_{NI} + \vec{\Omega} \times \vec{U}_{NI} + \vec{\Omega} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{NI} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

Lembrando que o referencial não inercial é a própria Terra, algumas considerações podem ser feitas. Em primeiro lugar, a velocidade medida em relação ao referencial não inercial é a própria velocidade em relação ao referencial fixo na Terra, logo  $\vec{U}_{NI} = \vec{U}$ , e para facilitar a notação vamos de agora em diante assumir que as derivas que não possuem indicação sobre o referencial são realizadas em relação ao referencial não inercial fixo na Terra. O termo de variação temporal da velocidade da origem do sistema é a própria variação da velocidade de órbita da Terra. Como a escala de tempo desta variação é muito maior que a escala de tempo da maioria dos eventos atmosféricos, em primeira análise podemos desconsiderá-la. Assim, a expressão (C.44) é reescrita como:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{U}_I}{dt} \right)_I &= \frac{d\vec{U}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{U} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ \left( \frac{d\vec{U}_I}{dt} \right)_I &= \frac{d\vec{U}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} - \Omega^2 \vec{r}. \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Considerando-se que a massa  $\delta m$  do elemento de fluido não varia no tempo, se multiplicarmos a equação (C.45) por  $\delta m$

$$\begin{aligned}
 \delta m \left( \frac{d\vec{U}_I}{dt} \right)_I &= \delta m \frac{d\vec{U}}{dt} + 2\delta m \vec{\Omega} \times \vec{U} - \delta m \Omega^2 \vec{r} \\
 \delta \vec{F}_I &= \delta \vec{F} + 2\delta m \vec{\Omega} \times \vec{U} - \delta m \Omega^2 \vec{r} \\
 \delta \vec{F}_I &= \delta \vec{F} + 2\rho \delta V \vec{\Omega} \times \vec{U} - \rho \delta V \Omega^2 \vec{r} \\
 \frac{\delta \vec{F}_I}{\delta V} &= \frac{\delta \vec{F}}{\delta V} + 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{U} - \rho \Omega^2 \vec{r} \\
 \delta V &\rightarrow 0 \\
 \lim_{\delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\delta \vec{F}_I}{\delta V} \right) &= \lim_{\delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\delta \vec{F}}{\delta V} + 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{U} - \rho \Omega^2 \vec{r} \right) \\
 \frac{d\vec{F}_I}{dV} &= \frac{d\vec{F}}{dV} + 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{U} - \rho \Omega^2 \vec{r} \tag{C.46}
 \end{aligned}$$

onde  $2m\vec{\Omega} \times \vec{U}$  é a força de Coriolis e  $-m\Omega^2\vec{r}$  a força centrífuga. A primeira é responsável por criar um desvio na trajetória do elemento de fluido devido a rotação da Terra. A segunda, é uma força de caráter inercial que tem o mesmo módulo, direção porém sentido contrário ao da força centripeta e deve ser acrescentada ao sistema para equilibrar esta força quando o observador está no referencial não inercial. Assim temos uma relação que nos permite aplicar a segunda Lei de Newton para referencias não inerciais.

## Segunda Lei de Newton aplicada a fluidos newtonianos incompressíveis - Equação de Navier-Stokes

Partindo-se da Segunda Lei de Newton (equação (C.1)),

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \\
\vec{F} &= \frac{d}{dt} (m\vec{U}_I dt) \\
\vec{F} &= \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{U}_I dV \\
\vec{F} &= \int_V \rho \frac{d\vec{U}_I}{dt} dV \\
\frac{d\vec{F}}{dV} &= \rho \frac{d\vec{U}_I}{dt}.
\end{aligned} \tag{C.47}$$

Substituindo-se os termos de força gravitacional, força de superfície e a correção para utilizar a Segunda Lei de Newton em um referencial não inercial na equação (C.47),

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{F}_g}{dV} + \frac{d\vec{F}_s}{dV} &= \rho \left( \frac{d\vec{U}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} - \Omega^2 \vec{r} \right) \\
-\rho g_o \hat{r} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{U} &= \rho \left( \frac{d\vec{U}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} - \Omega^2 r \hat{r} \right)
\end{aligned} \tag{C.48}$$

dividindo-se a equação (C.48) por  $\rho$  e isolando-se o termo da variação temporal da velocidade, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + (-g_o + \nabla^2 r) \hat{r} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{U} - 2\vec{\Omega} \times \vec{U} \\
\frac{d\vec{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + g_{ef} \hat{r} - 2\vec{\Omega} \times \vec{U} + \nu \nabla^2 \vec{U}
\end{aligned} \tag{C.49}$$

onde  $g_{ef}$  é definida como a gravidade efetiva sendo a resultante entre a aceleração gravitacional e a aceleração centrífuga e  $\nu$  é viscosidade cinemática definida como a razão entre a viscosidade dinâmica e a densidade do fluido. Desta maneira a equação (C.49) relaciona:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{F}}{dV} \tag{C.50}$$

A equação (C.49) é a Equação de Navier-Stokes para um fluido newtoniano incompressível sob uma análise lagrangiana.

Aplicando o Teorema do Transporte de Reynolds na segunda Lei de Newton obtemos:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{sis} &= \frac{d\vec{p}_{sis}}{dt} \\
 \vec{F}_{sis} &= \frac{\partial \vec{p}_{Vc}}{\partial t} + \oint_{SVc} \vec{U} \rho \vec{U} \cdot \hat{n} dA \\
 \vec{F}_{sis} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vc} \rho \vec{U} dV + \oint_{SVc} \vec{U} \rho \vec{U} \cdot \hat{n} dA.
 \end{aligned} \tag{C.51}$$

Como os limites da integral de volume em função de  $Vc$  são independentes do tempo, já que  $Vc$  é fixo (ver definição de volume de controle  $Vc$  no apêndice A) o operador derivada parcial pode ser inserido dentro da integral de volume em  $Vc$ . Já a integral sobre a superfície fechada de  $Vc$  pode ser escrita como a divergência do integrando no volume  $Vc$  (Teorema da Divergência de Gauss).

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{sis} &= \int_{Vc} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) dV + \int_{Vc} \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \rho \vec{U}) dV \\
 \vec{F}_{sis} &= \int_{Vc} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \rho \vec{U}) \right] dV
 \end{aligned} \tag{C.52}$$

Derivando (C.52) em função do volume temos

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{F}_{sis}}{dV} &= \frac{d}{dV} \left\{ \int_{Vc} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \rho \vec{U}) \right] dV \right\} \\
 \frac{d\vec{F}_{sis}}{dV} &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \rho \vec{U}) \\
 \frac{d\vec{F}_{sis}}{dV} &= \rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{U} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} (\rho \vec{U}).
 \end{aligned} \tag{C.53}$$

Pela condição de fluido incompressível  $\rho = cte$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{F}_{sis}}{dV} &= \rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \\
 \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{F}_{sis}}{dV} &= \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U}.
 \end{aligned} \tag{C.54}$$

Utilizando a relação (C.50) e substituindo a equação (C.49) em (C.54),

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + g_{ef} \hat{r} - 2\vec{\Omega} \times \vec{U} + \nu \nabla^2 \vec{U} \quad (\text{C.55})$$

onde a equação (C.55) é a equação de Navier-Stokes para um fluido newtoniano incompressível sob uma análise euleriana.

# Referências Bibliográficas

- ANFOSSI, D.; DEGRAZIA, G. A.; FERRERO, E.; GRYNING, S. E.; MORCELLI, M. G.; CASTELLI, S. T. Estimation of the lagrangian structure function constant  $c_0$  from surface-layer wind data. **Boundary-Layer Metereology**, v. 95, p. 249–270, 2000.
- BASU, S.; VINUESA, J.-F.; SWIFT, A. Dynamic les modeling of a diurnal cycle. **Journal of Applied Meteorology and Climatology**, v. 47, p. 1156–1174, 2008.
- BOFFETTA, G.; CELANI, A. Pair dispersion in turbulence. **Physica A**, v. 280, p. 1–9, 2000.
- BUSINGER, J. A. Equations and concepts. In: \_\_\_\_\_. F.T.M. NIEUWSTADT H. VON DOP (Ed.) **Atmospheric turbulence and Air Pollution Modeling**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1981. p. 1–36.
- CAUGHEY, S. J. Observed characteristics of the atmospheric boundary layer. In: \_\_\_\_\_. NIEUWSTADT, F.T.M. DOP, H.V. (Ed.) **Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modeling**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1982. p. 107–158.
- COXART, J.; JIMÉNEZ, M. A. Mixing process in a nocturnal low-level jet: An les study. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 64, p. 1666–1679, 2006.
- DEARDORFF, J. W. Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 29, p. 91–115, 1972.
- DEARDORFF, J. W. Three-dimensional numerical modeling of the planetary boundary layer. In: \_\_\_\_\_. D. A. HAUGEN (Ed.) **Workshop on Micrometeorology**. Boston: Americal Meteorological Society, 1973. p. 271–311.
- DEGRAZIA, G. A.; NUNES, A. B.; VELHO, H. F. C.; ACEVEDO, O. C.; SATYAMURTY, P.; RIZZA, U.; CARVALHO, J. C. Employing heisenberg's turbulent

spectral transfer theory to parameterize sub-filter scales in les models. **Atmospheric Environment**, v. 41, p. 7059–7068, 2007.

DINIZ, G. B. **Meteorologia Física**. Pelotas: Editora Universitária UFPEL, 2006. 156 p.

FOX, D. G.; ORSZAG, S. A. Pseudo-spectral approximation of two-dimensional turbulence. **Journal of Computational Physics**, v. 11, p. 612–619, 1973.

FRISCH, U. **Turbulence - The Legacy of A. N. Kolmogorov**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

GIOIA, G. **Study of the Dispersion Properties of Planetary Boundary Layer by Means of Large-Eddy Simulation**. 2003. 138f. Tese (Doutorado em Geosfísica) – Consorzio Interuniversitario Lecce-Messina-Palermo, Lecce, 2003.

GIOIA, G.; LACORATA, G.; FILHO, E. P. M.; MAZZINO, A.; RIZZA, U. The richardson's law in large-eddy simulations of boundary layer flows. **Boundary Layer Meteorology**, v. 113, p. 187–199, 2004.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física 2**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 1996. 292 p.

HINZE, J. O. **Turbulence**. New York: McGraw-Hill, 1975.

HOLTON, J. R. **An Introduction to Dynamic Meteorology**. 3. ed. San Diego: Academic Press, 1992. 511 p.

KAIMAL, J. C.; FINNINGAN, J. J. **Atmospheric Boundary Layer Flows**. Oxford: Oxford University Press, 1994. 289 p.

KAIMAL, J. C.; WYNGAARD, J. C.; HAUGEN, D. A. .; COTE', Y. I. O. R.; CAUGHEY, S. J.; READINGS, C. J. Turbulence structure in the convective boundary layer. **Journal of Atmospheric Science**, v. 33, p. 2152–2169, 1976.

KOLMOGOROV, A. N. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. **Dolk. Akad. Nauk. RSSS**, v. 32, p. 15–17, 1941. (reimpresso em Proc. R. Soc. Lond. A 434, 15-17 (1991) (c).

KOLMOGOROV, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds number. **Dolk. Akad. Nauk. RSSS**, v. 30, p. 9–13, 1941. (reimpresso em Proc. R. Soc. Lond. A 434, 9-13 (1991) (a).



- KOLMOGOROV, A. N. On degeneration (decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. **Dokl. Akad. Nauk. RSSS**, v. 31, p. 538–540, 1941. (b).
- LACORATA, G.; MAZZINO, A.; RIZZA, U. 3d chaotic model for subgrid turbulent dispersion in large eddy simulations. **Journal of Atmospheric Science**, v. 65, p. 2389—2401, 2008.
- LAMPORT, L. **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X A Document Preparation System: User's Guide and Reference Manual**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1985.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Fluid Mechanics**. London: Pergamon Press, 1959. 536 p.
- LUMLEY, J. L.; PANOFSKY, H. A. **Structure of the Atmospheric Turbulence**. London: John Wiley and Sons, 1964. 232 p.
- MAHRT, L.; GAMAGE, N. Observations of turbulence in stratfield flow. **Journal of Atmospheric Science**, v. 44, p. 1106–1121, 1986.
- MAHRT, L.; HEALD, R. C.; LENSCHOW, D. H.; STANKOV, B. B.; TROEN, I. An observation study of the structure of the nocturnal boundary layer. **Boundary Layer Meteorology**, v. 17, p. 247–264, 1979.
- MARQUES, E. P. **Investigação da camada limite planetária convectiva com modelo LES aplicado à dispersão de poluentes**. 2004. 139f. Tese (Doutorado em Meteorologia) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.
- MCMILLEN, R. T. An eddy correlation technique with extended applicability to non-simple terrain. **Boundary Layer Meteorology**, v. 43, p. 231–245, 1988.
- MOENG, C.-H. A large-eddy-simulation model for the study of planetary boundary layer turbulence. **Journal of Atmospheric Science**, v. 41, p. 2052–2062, 1984.
- MOENG, C. H.; SULLIVAN, P. P. A comparison of shear and buoyancy driven planetary boundary layer flows. **Journal of Atmospheric Science**, v. 51, p. 999–1022, 1994.
- MOENG, C.-H.; WYNGAARD, J. C. Spectral analysis of large-eddy simulations of the convective boundary layer. **Journal of Atmospheric Science**, v. 45, p. 3573–3587, 1988.

- OKE, T. R. ***Boundary Layer Climates***. 2.. ed. London: Taylor Francis Group, 1987. 435 p.
- PANCHEV, S. ***Random Functions and Turbulence***. 1.. ed. Oxford: Pergamon Press, 1971. 444 p.
- POPE, S. B. ***Turbulent Flows***. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 771 p.
- RICHARDSON, L. F. ***Weather Prediction by Numerical Process***. Cambridge: Cambridge University Press, 1922.
- RIZZA, U.; MANGIA, C.; CARVALHO, J. C.; ANFOSSI, D. Estimation of the lagrangian velocity structure function constant  $c_0$  by large-eddy simulation. ***Journal Boundary-Layer Meteorology***, v. 120, p. 25–37, 2006.
- ROGERS, R. R.; YAU, M. K. ***Short Course in Cloud Physics***. 3. ed. Woburn: Butterworth–Heinemann, 1989. 306 p.
- SAGAUT, P. ***Large Eddy Simulation for Incompressible Flows***. 3. ed. Berlin: Springer, 1998. 560 p.
- SORBJAN, Z. ***Structure of the Atmospheric Boundary Layer***. New Jersey: Prentice Hall Inc., 1989. 317 p.
- SREENIVASAN, K. R. On the universality of the kolmogorov constant. ***Physics of Fluids***, p. 2778–2784, 1995.
- STANISIC, M. M. ***The Mathematical Theory of Turbulence***. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1988. 501 p.
- STULL, R. ***An Introduction to Boundary Layer Meteorology***. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. 666 p.
- SULLIVAN, P. P.; MCWILLIAMS, J. C.; MOENG, C.-H. A subgrid-scale model for large-eddy simulations of planetary boundary-layer flows. ***Boundary Layer Meteorology***, v. 71, p. 247–276, 1994.
- WELTER, G. S. ***A Hipótese de Turbulência Localmente Isotrópica e a Universalidade da Constante de Kolmogorov***. 2006. 95f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2006.

WYNGAARD, J. C. Boundary-layer modeling. In: \_\_\_\_\_. F.T.M. NIEUWSTADT H. VON DOP (Ed.) **Atmospheric turbulence and Air Pollution Modeling**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1981. p. 69–106.