

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS RURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOMÁTICA**

**IMPLEMENTAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE UMA  
METODOLOGIA APLICADA AO CÁLCULO DE  
ÁREAS EM GEODÉSIA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Izaias Tadeu Backes Carvalho**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2006**

**IMPLEMENTAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE UMA  
METODOLOGIA APLICADA AO CÁLCULO DE ÁREAS EM  
GEODÉSIA**

**Por**

**Izaias Tadeu Backes Carvalho**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Geomática, Área de Concentração em Tecnologia da Geoinformação, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito para obtenção do grau de **Mestre em Geomática**.

**Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Julio Cesar Farret**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2006**

**Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Ciências Rurais  
Programa de Pós-Graduação em Geomática**

A comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação de Mestrado

**IMPLEMENTAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE UMA  
METODOLOGIA APLICADA AO CÁLCULO DE ÁREAS EM  
GEODÉSIA**

elaborada por  
Izaias Tadeu Backes Carvalho

Como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Mestre em Geomática**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

---

**Julio Cesar Farret, Dr.**  
(Presidente/Orientador)

---

**Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk, (UFSM)**

---

**Prof. Dr. Carlito Vieira de Moraes, (UFSM)**

---

**Prof. Dr. Eno Darci Saatkamp (UFSM)**

Santa Maria, 26 de Abril de 2006

*Dedico este trabalho a meus pais,  
Noeli Mario Da Costa Carvalho e  
Vera Regina Backes Carvalho;  
A meu amado filho Felipe;  
E a Maria Marina Bárbara (In memorian).*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a DEUS, pela saúde, pela fé, pelas oportunidades que se apresentam em meu caminho.

À minha família, que mesmo distante sempre esteve presente, me apoiando e incentivando na busca de meus objetivos.

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Julio Cesar Farret, pelas diretrizes seguras e permanentes incentivo na realização deste trabalho, pelos ensinamentos, apoio e pelo tempo dispensado.

Ao professor Dr. Carlito Vieira de Moraes pelos ensinamentos, pelas sugestões e contribuições que muito enriqueceram este trabalho.

Ao professor Dr. Eno Darci Saatkamp pelas sugestões e contribuição ao longo do trabalho.

Aos meus amigos Marcio Bisognin, Marcio Paim, Ismar Alveri, Pedro Moura e Edson Stanque, pelo prazer da convivência e por toda disponibilidade de auxiliar.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho, minha eterna gratidão.

## FOLHA DE EPÍGRAFE

*"Há homens que lutam um dia e são bons.  
Há outros que lutam um ano e são melhores.  
Há os que lutam muitos anos e são muito bons.  
Porém, há os que lutam toda a vida.  
Esses são os imprescindíveis."*

Bertolt Brecht

## **RESUMO**

Dissertação de Mestrado  
Programa de Pós-Graduação em Geomática  
Universidade Federal de Santa Maria

### **IMPLEMENTAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA APLICADA AO CÁLCULO DE ÁREAS EM GEODÉSIA**

**AUTOR: IZAIAS TADEU BACKES CARVALHO**

**ORIENTADOR: JULIO CESAR FARRET**

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 26 de Abril de 2006.

O cálculo das áreas elipsoidais em Geodésia não é uma tarefa trivial. Por esse motivo, é comum o cálculo de áreas planas, cujo grau de dificuldade é bastante pequeno. Para áreas pequenas, a simples abstração do formato real da Terra é suficiente. Para áreas maiores, entretanto, a Cartografia se vale das chamadas projeções equivalentes que, por serem formas indiretas, apresentam uma confiabilidade menor em relação a métodos numéricos diretos. Mais grave ainda é o caso do Brasil, em que as áreas enviadas para certificação junto ao Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária (INCRA), segundo a Lei 10267/2001 do Cadastro Nacional de imóveis Rurais (CNIR), são calculadas em função das coordenadas do sistema de projeção *Universal Transverse Mercator* (UTM). Esse sistema de projeção é conforme, ou seja, apresenta distorções em relação à área elipsoidal. Isso se deve ao fato de que a maioria dos programas comerciais usados não apresentam formas de cálculo mais eficientes. O presente trabalho de pesquisa é dirigido nesse sentido. Busca-se chegar a um programa executável que incorpore características fundamentais ao cálculo de áreas e à programação, gerando um produto que possa apresentar resultados efetivos para o mercado consumidor. Escolheu-se uma metodologia que propõe solução para qualquer que seja a forma das poligonais que constituem o polígono cuja área deseja-se calcular. A metodologia foi codificada de diferentes formas e foi gerado um executável final em linguagem C. Os resultados foram comparados com a mesma integração realizada em ambiente de calculadora HP42S e no sistema Spring através da Projeção Cônica Equivalente de Albers. A pesquisa mostra que a metodologia proposta possui amplo potencial para emprego em meio computacional, tendo apresentado grande eficiência no cálculo de áreas elipsoidais.

Palavras-chave: Áreas Elipsoidais, Integração Numérica, Projeção Equivalente.

## **ABSTRACT**

Master Dissertation  
Programa de Pós-Graduação em Geomática  
Universidade Federal de Santa Maria

### **IMPLEMENTAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA APLICADA AO CÁLCULO DE ÁREAS EM GEODÉSIA**

**AUTHOR: IZAIAS TADEU BACKES CARVALHO**

**ADVISER: JULIO CESAR FARRET**

Date and Place of Defense: Santa Maria, 26 de Abril de 2006.

The calculation of ellipsoidal areas in Geodesy is a not trivial task. By this motive, is common the calculation of plane areas, whose difficulty degree is enough small. For short areas, the simple abstraction of the real format of the Land is sufficient. For bigger areas, however, the Cartography uses the equivalent projections that, for being indirect forms, present a minor reliability in relation the direct numerical methods. More grave still it is the case of Brazil, where the areas send for certification together the *Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária* (INCRA), second to the Brazilian Law 10267 of *Cadastro Nacional de Imóveis Rurais* (CNIR), are calculated as function of the coordinates of the projection system *Universal Transverse Mercator* (UTM). This projection system is conformal, that is, presenting distortions in relation to the ellipsoidal. The majority of the used commercial programs does not present more efficient forms of calculation. The present work of research is directed in this direction. We searches a executable program that incorporates fundamental characteristics to the calculation of areas and to programming, generating a product that can present effective results consumer market. A methodology was chosen that considers solution for the calculation of any areas or polygon form that they desires to calculate. The methodology was codified in different forms and was generated an executable in C language. The results had been compared with the same integration carried through in environment of calculator HP42S and in the Spring system through the Albers Equivalent Conical Projection. The research shows that the proposal methodology possess ample potential to computational employment, having presented great efficiency in the calculation of ellipsoidais areas.

Keywords: Ellipsoidal Areas, Numerical Integration, Equivalent Projection.



## LISTA DE QUADROS

QUADRO – 1.1 – Análise Comparativa da Metodologia Proposta em Áreas Pequenas.....	66
QUADRO – 1.2 – Análise Comparativa da Metodologia Proposta em Áreas Grandes no elipsóide do sistema SAD69.....	67
QUADRO – 1.3 – Análise Comparativa da Metodologia Proposta em Áreas Grandes no elipsóide do sistema WGS84.....	67

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA - 1.1 Trapézio Infinitesimal no Elipsóide de Referência .....	19
FIGURA – 1.2 Projeção Equivalente no Plano .....	22
FIGURA - 2.1 Parâmetros da Elipse Meridiana.....	24
FIGURA - 2.2 Raios de Curvatura no Elipsóide .....	27
FIGURA – 2.3 Parâmetros Adicionais da Elipse .....	29
FIGURA – 2.4 Raio de Curvatura da Seção Transversal .....	31
FIGURA – 2.5 Elipse Meridiana usando Latitude Reduzida .....	35
FIGURA – 2.6 A Triângulo Elipsóidico – 2.6 B Triângulo Esférico.....	37
FIGURA – 3.1 Representação do Quadrilátero Infinitesimal no Elipsóide .....	40
FIGURA – 3.2 Quadrilátero Infinitesimal.....	41
FIGURA – 3.3 Triângulo Esférico sobre Esfera Unitária de Bessel .....	45
FIGURA – 3.4 Representação da Esfera de Bessel e seus Triângulos Esféricos .....	57
FIGURA – 3.5 Fluxograma do Algoritmo de Cálculo de Áreas .....	61
FIGURA A1 – Triângulo Esférico .....	75

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	: Semi-eixo maior do elipsóide
$b$	: Semi-eixo menor do elipsóide
$e$	: Primeira excentricidade numérica da elipse meridiana do elipsóide
$e'$	: Segunda excentricidade numérica da elipse meridiana do elipsóide
$f$	: Achatamento
$E_c$	: Excentricidade linear
$sen$	: função trigonométrica Seno
$cos$	: função trigonométrica Cosseno
$tan$	: função trigonométrica Tangente
$csc$	: função trigonométrica Inversa do Seno, função Cossecante
$sec$	: função trigonométrica Inversa do Cosseno, função Secante
$cotg$	: função trigonométrica Inversa da Tangente, função Cotangente
$\frac{dz}{dr}$	: derivada de $z$ em relação à $r$
$\frac{d^2z}{dr^2}$	: derivada segunda de $z$ em relação à $r$
$r$	: raio do paralelo
$\kappa$	: curvatura
$N$	: Raio de curvatura da seção transversal (seção primeira vertical)
$M$	: Raio de curvatura da seção meridiana
$s$	: comprimento da linha geodésica
$ds$	: elemento diferencial de comprimento de arco
$dS$	: elemento diferencial de área
$d\varphi$	: elemento diferencial de latitude geodésica
$d\lambda$	: elemento diferencial de longitude geodésica
$d\beta$	: elemento diferencial de latitude reduzida
$\Delta\lambda$	: Diferença de longitude geodésica ou Incremento diferencial
$A_g$	: Azimute geodésico

$\varphi$  : latitude geodésica

$\lambda$  : longitude geodésica

$\beta$  : latitude reduzida

$\gamma$  : latitude geocêntrica

$\omega$  : ângulo esférico da esfera unitária de Bessel

$\pi$  : Número irracional Pi

$||$  : Módulo,  $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\sum_{i=1}^k$  : somatório de  $i$  variando de 1 até  $k$

$\int_a^b f(x)dx$  : integral definida da função  $f$  de  $a$  até  $b$

## LISTA DE SIGLAS

<b>SGB</b>	: Sistema Geodésico Brasileiro
<b>WGS84</b>	: <i>World Geodetic System – 1984</i>
<b>SAD69</b>	: <i>South American Datum of 1969</i>
<b>CNIR</b>	: Cadastro Nacional de Imóveis Rurais.
<b>GRS80</b>	: <i>Geodetic Reference System (GRS) of 1980</i>
<b>IUGG</b>	: <i>International Union of Geodesy and Geophysics</i>
<b>UFSM</b>	: Universidade Federal de Santa Maria
<b>DER</b>	: Departamento de Engenharia Rural
<b>CPD</b>	: Centro de Processamento de Dados
<b>COMUT</b>	: Serviço de Comutação Bibliográfica
<b>UTM</b>	: <i>Universal Transverse Mercator</i>
<b>INCRA</b>	: Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária

## LISTA DE ANEXOS

ANEXO A – Trigonometria Esférica .....	75
ANEXO B – Relações Entre Linhas de Arcos Associados .....	76
ANEXO C – Identidades da Elipse Meridiana.....	77
ANEXO D – Algoritmo para Conversão de coordenadas.....	79
ANEXO E - Quadro das coordenadas da Parcela 02.....	80

## SUMÁRIO

<b>RESUMO</b> .....	7
<b>ABSTRACT</b> .....	8
<b>LISTA DE QUADROS</b> .....	9
<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> .....	10
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	11
<b>LISTA DE SIGLAS</b> .....	13
<b>LISTA DE ANEXOS</b> .....	14
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	16
<b>1.1 Objetivos</b> .....	17
1.1.1 Objetivo Geral .....	17
1.1.2 Objetivos Específicos .....	17
1.1.3 Importância.....	18
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO CONCEITUAL</b> .....	19
<b>2.1 Parâmetros da Elipse e do Elipsóide</b> .....	23
2.1.1 Excentricidade e Achatamento .....	23
<b>2.2 Raios de Curvatura Principais</b> .....	27
2.2.1 Raio do Paralelo r .....	27
2.2.2 Raio de Curvatura da Seção Transversal Meridiana N (Grande Normal).....	30
2.2.3 Raio de Curvatura da Seção Meridiana M.....	31
2.2.4 Latitude Reduzida.....	34
<b>2.3 Área de uma Superfície sobre o Elipsóide</b> .....	36
<b>3 MATERIAL E METODOLOGIA</b> .....	39
<b>3.1 Material</b> .....	39
<b>3.2 Metodologia</b> .....	39
3.2.1 Superfície de um Quadrilátero Infinitesimal .....	40
3.2.2 Seqüência de Cálculo Utilizada para a Área de um Polígono qualquer no Elipsóide.....	59
3.2.3 Fluxograma do Algoritmo para Cálculo de Áreas.....	61
3.2.4 Algoritmo de Cálculo de Áreas .....	61
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	66
<b>5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b> .....	70

<b>5.1 Conclusões .....</b>	<b>70</b>
<b>5.2 Recomendações .....</b>	<b>70</b>
<b>ANEXO A – Trigonometria Esférica.....</b>	<b>75</b>
<b>ANEXO B – Relações Entre Linhas de Arcos Associados.....</b>	<b>76</b>
<b>ANEXO C – Identidades da Elipse Meridiana .....</b>	<b>77</b>
<b>ANEXO D – Algoritmo para Conversão de coordenadas .....</b>	<b>79</b>
<b>ANEXO E - Quadro das coordenadas da Parcela 02.....</b>	<b>80</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Na Idade Antiga e Idade Média, com o desenvolvimento da Geodésia nas altas culturas do Oriente Médio, impulsionado pela necessidade de levantar e dividir as propriedades rurais em parcelas surgem as primeiras fórmulas para calcular áreas. Estas fórmulas, geralmente empíricas, eram usadas pelos agrimensores romanos e encontradas nos livros gregos. Como exemplo tem-se Eratóstenes que, depois de descobrir a forma esférica da Terra, determinou pela primeira vez o diâmetro do globo terrestre.

Esse conhecimento foi transferido para a Idade Média através dos livros dos agrimensores romanos e pelos árabes. No século XVI, S. Münster e R. Gemma Frisius desenvolveram o Método da Intersecção, que permitia o levantamento de grandes áreas.

Na Idade Moderna, em 1617 o holandês W. Snellius inventou a triangulação para o levantamento de áreas grandes, como regiões ou países. O final desta época foi marcado pelos grandes trabalhos de medições de arcos de meridianos por parte dos geodestas e astrônomos. O objetivo desses trabalhos era determinar os parâmetros de um elipsóide que tivesse a melhor aproximação com a Terra física.

Atualmente a principal referência para o cálculo de áreas utiliza-se dos sistemas de projeções (planas) para representação da superfície esférica ou elipsóidica da Terra, ou seja, procura-se obter correspondentes áreas planas dos polígonos desejados na esfera ou no elipsóide. Isso corresponde a uma simplificação do problema, pois o cálculo de áreas planas é muito mais fácil do que o de áreas elipsoidais. Tal sistema acarreta inevitáveis deformações. Essas deformações se refletem sobre distâncias e ângulos e, conseqüentemente, sobre áreas. Como é impossível evitá-las tenta-se, por meio da escolha de técnicas adequadas, conservar uma ou outra dessas grandezas (distâncias ou ângulos), de acordo com a finalidade do trabalho.

Tais cálculos aplicados no plano se justificam quando as necessidades das aplicações não exigem um maior rigor em termos de precisão ou diante da dificuldade em implementar-se uma rotina algorítmica que propicie agilidade nos programas disponíveis para cálculos de áreas em Geodésia aliada à precisão de resultados. Levando-se em conta o estágio avançado em que se encontram os meios técnicos e recursos matemáticos atualmente disponíveis, a pouca disponibilidade de ferramentas que realizem o cálculo de áreas elipsoidais, especialmente em função das coordenadas curvilíneas do polígono geodésico, não se justifica.

Os objetivos da presente pesquisa são no sentido de ajudar a suprir essa deficiência. Baseando-se na Lei 10267/2001, relativa ao Cadastro Nacional de Imóveis Rurais (CNIR), que determina que todo imóvel rural precisa ter seus limites definidos por meio de coordenadas UTM referenciadas ao SGB, esse aspecto se reveste de maior importância, pois a precisão posicional absoluta ou relativa dos pontos-limites de uma parcela territorial influenciam no cálculo da sua respectiva área. Através de formulações e técnicas matemáticas, procura-se nesta pesquisa, desenvolver uma metodologia de cálculo aplicada ao sistema de coordenadas geodésicas na qual se obtém as áreas na superfície do elipsóide.

## **1.1 Objetivos**

### 1.1.1 Objetivo Geral

- Produzir um algoritmo capaz de calcular áreas elipsoidais em função das coordenadas elipsoidais curvilíneas, ou seja, obter a área sobre a superfície do elipsóide para polígonos gerais, quando os lados são formados por paralelos e também por linhas geodésicas quaisquer.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Revisar a metodologia de cálculo de áreas elipsoidais existentes na literatura específica;
- Trabalhar com técnicas de integração dupla, constantes no trabalho proposto por Danielsen (1989) no sentido de explicitá-las em função de parâmetros do elipsóide e das coordenadas curvilíneas dos vértices do polígono geodésico;
- Programar as rotinas de cálculos em linguagem computacional;
- Testar (verificar) o método da solução computacional com as demais situações encontradas na literatura.

### 1.1.3 Importância

As necessidades cadastrais globais atualmente estão a exigir da Geodésia soluções precisas e operacionais para o cálculo de áreas elipsoidais. Essas exigências tornam-se mais importantes ainda pela natureza diversa dos formatos das poligonais geodésicas. As respostas, no entanto, passam pelo desenvolvimento de soluções matemáticas para alguns algoritmos propostos, as quais nem sempre cumprem as exigências de generalidade e programabilidade. No caso do Brasil, este fato reveste-se de uma importância ainda maior, uma vez que o cadastro rural de imóveis registra áreas em função das coordenadas UTM. Isto gera distorções em relação a áreas locais (mais familiares aos proprietários rurais) e também em relação a áreas elipsoidais, principal modelo matemático da Terra adotado em Geodésia, e capaz de conferir unicidade aos resultados. Os programas em uso no Brasil para o cálculo de áreas, em geral, não possuem rotinas para cálculo de áreas elipsoidais, o que é uma grave deficiência técnica e cuja sugestão de solução é apresentada no presente trabalho.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO CONCEITUAL

O cálculo de áreas de polígonos no elipsóide foi tratado de forma diversa por diferentes autores. Em Zakatov (1981, p.55), o tema é abordado como cálculo de áreas de trapézios de levantamentos geodésico, áreas estas que são formadas pelas linhas dos meridianos e dos paralelos, como mostrado na figura 1.1.

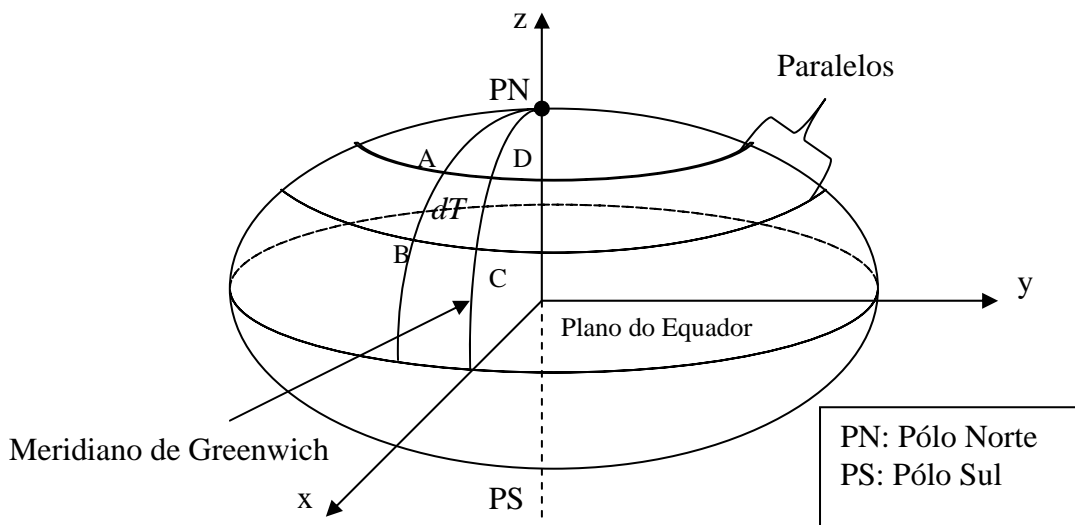


Figura -1.1 Trapézio Infinitesimal no Elipsóide de Referência

Foi tomado no elipsóide um trapézio infinitesimal  $ABCD$  (figura 1.1), onde seus lados são elementos de arcos de meridianos e paralelos, e  $\beta$  é a Latitude Reduzida (Ver seção 2.2.4), como segue-se:

$$AB = CD = M d\beta \quad (1.1)$$

$$AD = BC = N \cos\beta d\lambda \quad (1.2)$$

Logo, a área do trapézio infinitesimal  $ABCD$ , dada por  $dT$ , é expressa como:

$$dT = M \cdot N \cos\beta d\beta d\lambda \quad (1.3)$$

A área  $dz$  de toda a faixa delimitada pelos paralelos é obtida substituindo-se em (1.3) o valor  $d\lambda$  por  $2\pi$ , como segue:

$$dz = 2\pi MN \cos\beta d\beta$$

$$dz = 2\pi R^2 \cos\beta d\beta \quad (1.4)$$

ou

$$dz = 2\pi b^2 \frac{\cos\beta d\beta}{(1 - e^2 \text{sen}^2\beta)^2} \quad (1.5)$$

Com isso, a área da superfície da faixa do elipsóide situada entre paralelos com latitudes reduzidas  $\beta_1$  e  $\beta_2$  é dada por:

$$z = 2\pi b^2 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\cos\beta d\beta}{(1 - e^2 \text{sen}^2\beta)^2}, \quad (1.6)$$

que apresenta como solução:

$$z = 4\pi b^2 \left[ \begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4\right) \text{sen}\left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right) \cos\beta_m - \\ &\left(\frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4\right) \text{sen}\frac{3(\beta_2 - \beta_1)}{2} \cos 3\beta_m + \\ &+\frac{3}{80}e^4 \text{sen}\frac{5(\beta_2 - \beta_1)}{2} \cos 5\beta_m + \dots \end{aligned} \right], \quad (1.7)$$

onde  $\beta_m = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ .

Em Gemael (1987, cap.3), é explicitada uma fórmula para calcular a área de um quadrilátero elipsóidico, quadrilátero este que é definido como “a porção de superfície do elipsóide compreendida entre dois paralelos e dois meridianos”. Sejam  $\varphi_2$  e  $\varphi_1$  as latitudes dos dois paralelos e  $\Delta\lambda$  a diferença de longitude entre os dois meridianos,  $T$  é denominado a área do quadrilátero.

$$\frac{T}{A} = \frac{\Delta\lambda}{2\pi}, \quad (1.8)$$

que também pode ser escrita como,

$$T = 2b^2 \Delta \lambda (A' \text{sen} \Delta \phi \cos \phi_m - B' \text{sen} 3 \Delta \phi \cos 3 \phi_m + C' \text{sen} 5 \Delta \phi \cos 5 \phi_m + \dots), \quad (1.9)$$

onde:

$$A' = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{35}{128}e^8 + \frac{63}{256}e^{10}$$

$$B' = \frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{3}{16}e^6 + \frac{35}{192}e^8 + \frac{45}{256}e^{10}$$

$$C' = \frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \frac{5}{64}e^8 + \frac{45}{512}e^{10}$$

⋮

Gillissen (1993, p.92-93) desenvolveu um método para cálculo de áreas de um polígono no elipsóide onde os lados deste polígono podem ser linhas geodésicas, loxodrômicas (linha que corta os meridianos sob um mesmo azimute), círculos máximos ou combinação destes elementos. Se os pontos formadores dos vértices do polígono no elipsóide, bem como as interpolações entre eles, todos designados por  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , são projeções equivalentes no plano (vide figura 1.2) e as projeções destes pontos no plano são definidas por coordenadas polares  $(\rho_i, \theta_i)$ , onde  $\rho$  é o raio vetor e  $\theta$  é o ângulo vetorial, então a área do polígono é dada por:

$$P_1, P_2, \dots, P_n = \frac{1}{2} | \rho_1 \rho_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) + \rho_2 \rho_3 \text{sen}(\theta_3 - \theta_2) + \dots \\ \dots + \rho_{n-1} \rho_n \text{sen}(\theta_n - \theta_{n-1}) + \rho_n \rho_1 \text{sen}(\theta_1 - \theta_n) | \quad (1.10)$$

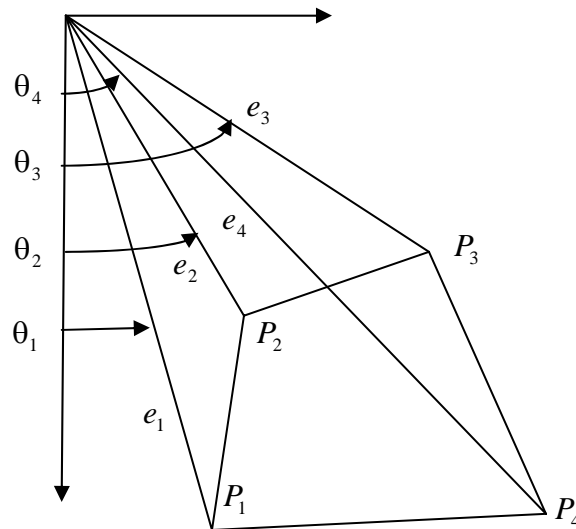


Figura – 1.2 Projeção Equivalente no Plano

FONTE: Gillisen, 1993, p.93.

Galo (2003, p.468-470) propõe uma solução para o cálculo de áreas de figuras elipsoidais onde os lados não são linhas geodésicas e nem arcos de paralelos e meridianos. Sugere que seja feita uma segmentação das bordas do polígono original, pela inclusão de pontos adicionais, permitindo o cálculo da área do polígono elipsoidal por meio de um polígono equivalente, obtido a partir do uso de uma projeção plana equivalente. Deste modo, a proposta para o cálculo de área se resume aos seguintes passos: 1) Leitura dos vértices do polígono em coordenadas geodésicas; 2) Divisão dos lados em vários segmentos, pela criação de pontos adicionais; 3) Cálculo do ponto de tangência  $(\varphi_0, \lambda_0)$ ; 4) Conversão de todos os pontos para a Projeção Azimutal Equivalente de Lambert; e 5) cálculo da área do polígono final pela Fórmula dos Trapézios de Gauss.

Tem-se a solução apresentada para o cálculo de blocos de exploração e produção de petróleo (ARAUJO & VARELLA, 1999 apud GALO, 2003) na qual é considerada a divisão dos blocos de exploração em sub-blocos, que pode ser resumida nas seguintes etapas: Fazer a divisão da área em sub-blocos de amplitude igual a 9,375” em latitude e longitude; Calcular a área plana de cada sub-bloco usando a Projeção Policônica; Calcular o fator de escala; Fazer a correção da área com o fator de escala calculado; Realizar o somatório da área de cada um dos sub-blocos.

Em (DIAZ & OLIVEIRA 2001 apud GALO, 2003) é apresentada uma solução para o cálculo da área de polígonos elipsoidais baseada na divisão do polígono original em uma

série de triângulos. Inicialmente o polígono é dividido em regiões triangulares usando a triangulação de Delaunay, sendo a área de cada triângulo elipsóidico aproximada pela área de um triângulo esférico no qual o raio de curvatura do triângulo é igual ao raio médio de curvatura calculado para o ponto médio do triângulo. Nessa solução a área total do polígono elipsoidal é dada pela soma da área de cada triângulo esférico. Posteriormente, cada triângulo é sucessivamente subdividido em quatro triângulos e a área é recalculada. O processo finaliza quando o valor da área estabiliza.

Constituindo-se na abordagem proposta no presente trabalho de pesquisa, tem-se em Danielsen (1989) e Moraes (2001), uma proposta de solução para o cálculo de áreas de quadriláteros elipsoidais. Nesse caso a superfície é obtida pela soma algébrica das áreas de quadriláteros parciais. Cada um desses quadriláteros é formado por cada linha formadora do polígono cuja área se deseja calcular (lado), os segmentos de meridianos desde as extremidades dessa linha até o Equador e o segmento deste (Equador) entre esses dois meridianos. O sinal da área de cada um desses polígonos parciais é definido através da diferença das longitudes dos pontos extremos desses lados, e sempre num mesmo sentido de caminhamo do polígono. Esse sentido tanto pode ser horário ou anti-horário (para a direita ou para a esquerda), invertendo o sinal da área em cada. Dentre esses dois trabalhos, o primeiro Danielsen (1989) foi adotado para o algoritmo proposto na presente pesquisa. Esta escolha se deve ao fato de apresentar características importantes como, por exemplo, ser genérico, englobando vários casos para a solução de áreas encontradas na literatura, formas de resolver os cálculos é ilimitada em relação ao número de pontos do polígono estudado. Pretende-se aliar estas características a um algoritmo aplicável de forma generalizada em diferentes linguagens de programação computacional.

## **2.1 Parâmetros da Elipse e do Elipsóide**

### **2.1.1 Excentricidade e Achatamento**

A figura a seguir ilustra os principais parâmetros da elipse e do elipsóide de revolução, gerado pela rotação da elipse em torno de seu eixo menor.



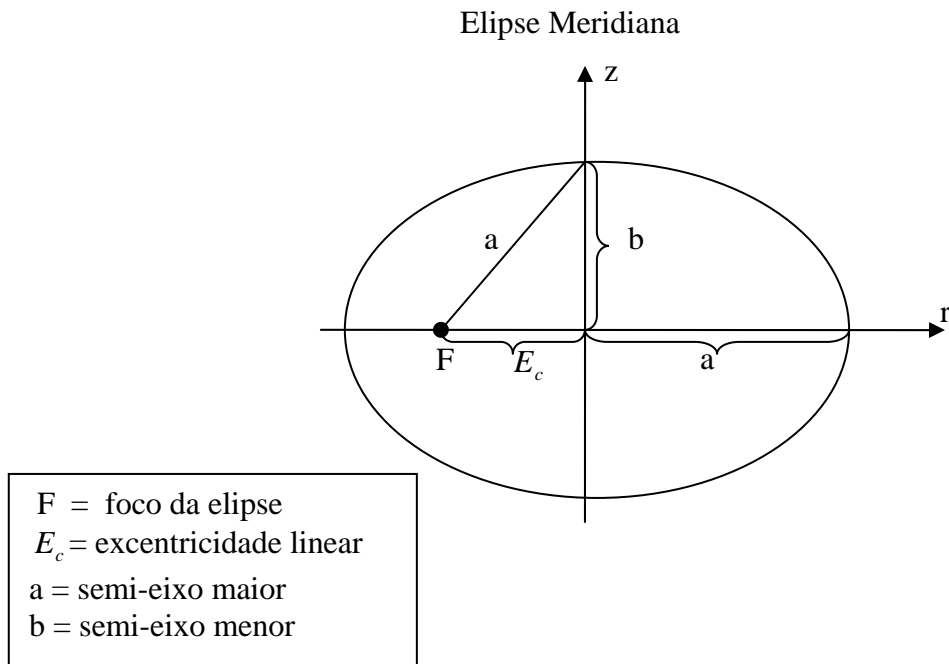


Figura -2.1 Parâmetros da Elipse Meridiana

Dá-se o nome de excentricidade linear  $E_c$  ao segmento que une o centro da elipse ao seu foco:

$$E_c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2.1)$$

Com a excentricidade linear  $E_c$  definem-se duas excentricidades numéricas, denominadas 1ª e 2ª excentricidades numéricas:

$$e = \frac{E_c}{a} \quad (2.2)$$

$$e' = \frac{E_c}{b} \quad (2.3)$$

Utilizando-se a (2.1) e a (2.2), a relação da 1ª excentricidade com os semi-eixos é:

$$ea = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Elevando-se cada membro ao quadrado tem-se:

$$e^2 a^2 = a^2 - b^2$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (2.4)$$

Uma vez que  $E_c < a$ , a excentricidade de uma elipse é menor do que a unidade (LEHMANN, 1979, p.150).

Com a (2.3) e a (2.1) a relação da 2ª excentricidade com os semi-eixos é:

$$\begin{aligned} e' b &= \sqrt{a^2 - b^2} \\ e'^2 b^2 &= a^2 - b^2 \\ e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Da (2.4) relaciona-se o semi-eixo menor com o semi-eixo maior e a 1ª excentricidade:

$$\begin{aligned} e^2 a^2 &= a^2 - b^2 \\ b^2 &= a^2 - e^2 a^2 = a^2 (1 - e^2) \\ b &= a \sqrt{1 - e^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Da (2.5) temos:

$$\begin{aligned} e'^2 b^2 &= a^2 - b^2 \\ a^2 &= b^2 + e'^2 b^2 \\ a^2 &= b^2 (1 + e'^2) \\ a &= b \sqrt{1 + e'^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo-se na (2.7) a (2.6), obtém-se a relação entre as excentricidades numéricas:

$$\begin{aligned} a &= a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + e'^2} \\ 1 &= \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + e'^2} \\ 1 &= (1 - e^2)(1 + e'^2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Da (2.8) obtém-se:

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \quad (2.9)$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \quad (2.10)$$

Recebe o nome de achatamento  $f$  a razão da diferença entre o semi-eixo maior e semi-eixo menor pelo seu semi-eixo maior:

$$f = \frac{a-b}{a}; \quad 0 \leq f \leq 1 \quad (2.11)$$

Substituindo-se em (2.11) a (2.6) tem-se:

$$f = \frac{a - a\sqrt{1-e^2}}{a}$$

$$f = \frac{a(1 - \sqrt{1-e^2})}{a}$$

$$f = 1 - \sqrt{1-e^2} \quad (2.12)$$

$$1 - f = \sqrt{1-e^2} \quad (2.13)$$

Substituindo-se na (2.12) a (2.9) obtém-se:

$$f = 1 - \sqrt{1 - \frac{e'^2}{1+e'^2}}$$

$$f = 1 - \sqrt{\frac{1+e'^2 - e'^2}{1+e'^2}}$$

$$f = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} \quad (2.14)$$

$$1 - f = \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} \quad (2.15)$$

Substituindo-se a (2.13) na (2.6):

$$b = a(1 - f) \quad (2.16)$$

Elevando-se ambos os membros da (2.13) ao quadrado:

$$(1 - f)^2 = 1 - e^2$$

$$1 - 2f + f^2 = 1 - e^2$$

$$e^2 = 2f - f^2 \quad (2.17)$$

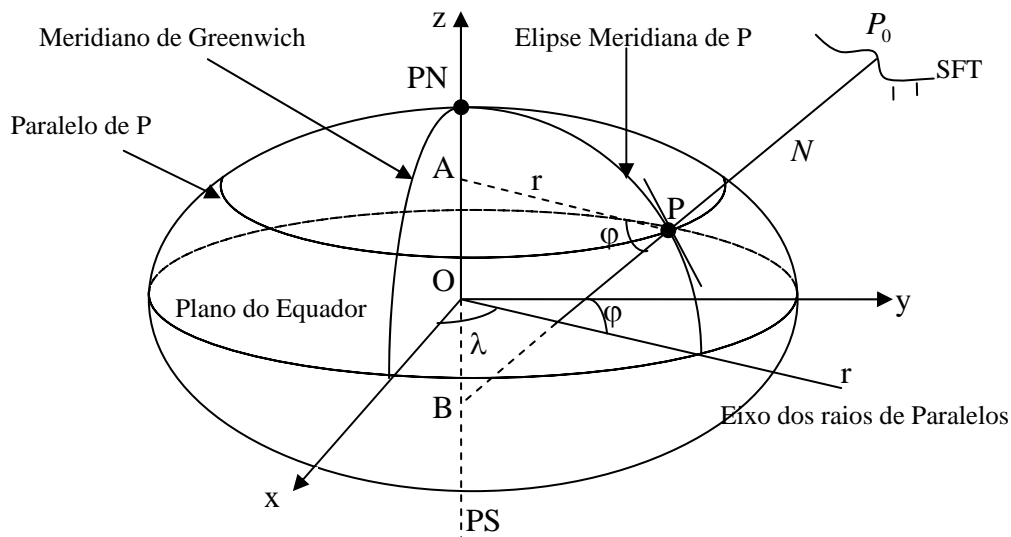
Substituindo-se a (2.13) na (2.10) tem-se:

$$e'^2 = \frac{e^2}{(1-f)^2} \quad (2.18)$$

## 2.2 Raios de Curvatura Principais

Pela normal a superfície do elipsóide pode-se traçar um conjunto inumerável de planos. Os mesmos perpendiculares ao plano tangente à superfície do elipsóide em um ponto dado, denominam-se planos normais. As curvas, formadas pela intersecção dos planos normais, traçados em um ponto dado, com a superfície do elipsóide, denominam-se seções normais (ZAKATOV, 1981, p.37). Em cada ponto existem duas seções normais, seções estas perpendiculares entre si, de curvatura máxima e mínima, são ditas seções principais, e os respectivos raios são ditos raios principais.

Na figura a seguir são apresentados os raios de curvatura principais do elipsóide de revolução.



PN : Pólo Norte; PS : Pólo Sul; O : Centro do Elipsóide; $\varphi$ : Latitude Geodésica $\lambda$ : Longitude Geodésica $N$ : Normal passante por P SFT : Superfície Física da Terra
--

Figura - 2.2 Raios de Curvatura no Elipsóide

### 2.2.1 Raio do Paralelo r

A equação geral do elipsóide é escrita como:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.19)$$

Introduzindo as equações na forma paramétrica, ou seja, em função de seus parâmetros;

$$x = r \cos \lambda \quad (2.20)$$

$$y = r \operatorname{sen} \lambda, \quad (2.21)$$

elevando-se ambos os membros da (2.20) e da (2.21) ao quadrado e adicionando-os, tem-se:

$$x^2 = r^2 \cos^2 \lambda$$

$$y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \lambda$$

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \lambda + \operatorname{sen}^2 \lambda)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Substituindo-se esta expressão na (2.19):

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.22)$$

que é a equação da elipse meridiana de  $P$ .

Multiplicando-se ambos os termos da (2.22) por  $a^2 b^2$  tem-se:

$$\frac{a^2 b^2 r^2}{a^2} + \frac{a^2 b^2 z^2}{b^2} = a^2 b^2$$

$$b^2 r^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2$$

Reagrupando-se os termos em função de  $z$  tem-se,

$$z^2 = \frac{a^2 b^2 - b^2 r^2}{a^2},$$

A qual é simplificada para,

$$z^2 = b^2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

$$z = b \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

Derivando a (2.23) em relação à variável  $r$  tem-se:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{1}{2} b \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 0 - \frac{2r}{a^2} \right)$$

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{br}{a^2} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{br}{a^2} \left( \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{br}{a} (a^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

Como  $\frac{dz}{dr}$  é o coeficiente angular da curva no ponto  $(r, z)$ , como visualiza-se na figura (2.3) tem-se, a partir desta figura:

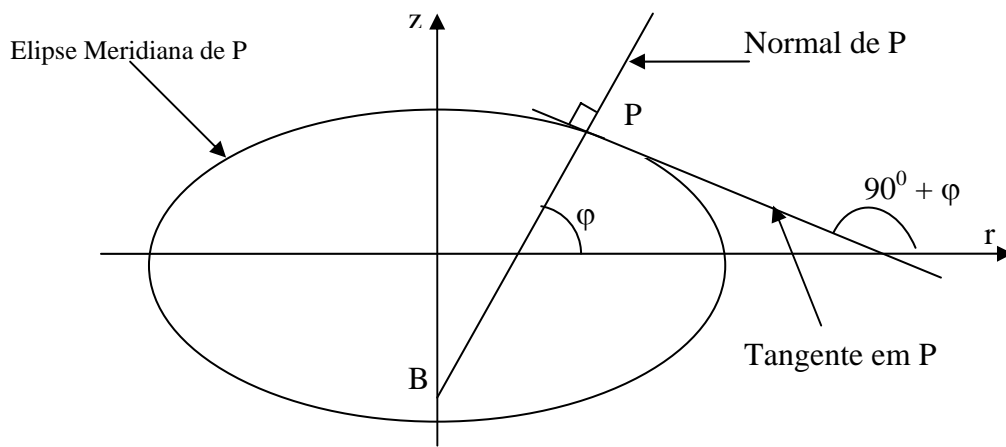


Figura – 2.3 Parâmetros Adicionais da Elipse

$$\frac{dz}{dr} = \tan(90^\circ + \varphi) = -\cot \varphi = -\frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \quad (2.25)$$

Logo, igualando-se (2.25) com a (2.24):

$$-\frac{br}{a} (a^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} = -\cot \varphi = -\frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da igualdade,

$$\frac{b^2 r^2}{a^2} (a^2 - r^2)^{-1} = \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$\frac{b^2 r^2}{a^2 (a^2 - r^2)} = \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$b^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = a^2 (a^2 - r^2) \cos^2 \varphi$$

$$b^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - a^2 (a^2 - r^2) \cos^2 \varphi = 0, \quad (2.26)$$

Fazendo-se  $b = a\sqrt{1-e^2}$  tem-se:

$$\begin{aligned} a^2(1-e^2)r^2\text{sen}^2\varphi - a^2(a^2-r^2)\text{cos}^2\varphi &= 0 \\ a^2[(1-e^2)r^2\text{sen}^2\varphi - (a^2-r^2)\text{cos}^2\varphi] &= 0 \\ (1-e^2)r^2\text{sen}^2\varphi - a^2\text{cos}^2\varphi + r^2\text{cos}^2\varphi &= 0 \\ r^2\text{sen}^2\varphi - e^2r^2\text{sen}^2\varphi - a^2\text{cos}^2\varphi + r^2\text{cos}^2\varphi &= 0, \end{aligned}$$

e associando-se os termos da expressão acima, tem-se:

$$\begin{aligned} r^2(\text{sen}^2\varphi - e^2\text{sen}^2\varphi + \text{cos}^2\varphi) - a^2\text{cos}^2\varphi &= 0 \\ r^2(\text{sen}^2\varphi + \text{cos}^2\varphi - e^2\text{sen}^2\varphi) &= a^2\text{cos}^2\varphi. \end{aligned}$$

Como  $\text{sen}^2\varphi + \text{cos}^2\varphi = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} r^2(1 - e^2\text{sen}^2\varphi) &= a^2\text{cos}^2\varphi \\ r^2 &= \frac{a^2\text{cos}^2\varphi}{(1 - e^2\text{sen}^2\varphi)}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

o que resulta:

$$r = \frac{a\text{cos}\varphi}{(1 - e^2\text{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.28}$$

que é o Raio do Paralelo na latitude considerada.

### 2.2.2 Raio de Curvatura da Seção Transversal Meridiana N (Grande Normal)

Na figura a seguir tem-se a visualização do triângulo retângulo formado pelos pontos  $APB$ , obtido a partir da (figura 2.2), para obtenção do raio de curvatura da seção transversal.

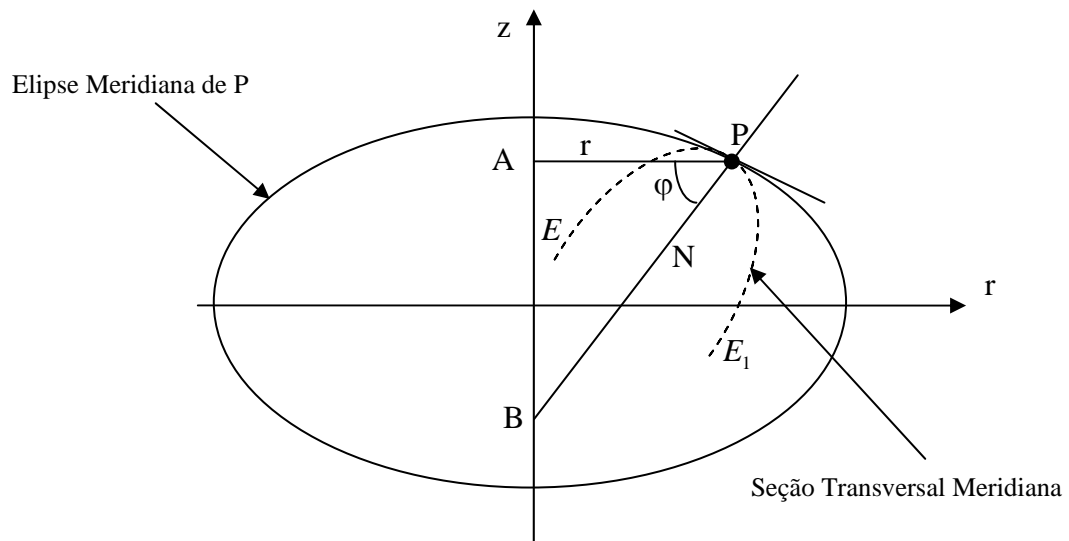


Figura – 2.4 Raio de Curvatura da Seção Transversal

Da figura anterior retira-se a relação:

$$\overline{BP} = \frac{r}{\cos \varphi}, \quad (2.29)$$

logo, observa-se que o segmento  $\overline{BP}$  é o raio de curvatura da seção transversal ao meridiano de  $P$ , e é denotado pelo símbolo  $N$ .

Substituindo-se a (2.27) na (2.29) obtém-se:

$$\overline{BP} = N = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

onde

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (2.30)$$

que é o Raio de Curvatura da Seção Transversal (ou Seção Primeiro Vertical), também conhecido como Grande Normal.

### 2.2.3 Raio de Curvatura da Seção Meridiana M



O centro das seções transversais ao meridiano está contido no eixo  $z$ . O raio de curvatura da seção meridiana, denotado pelo símbolo  $M$ , obtém-se do cálculo diferencial.

$$M = \frac{1}{|\kappa|} = \left| \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dr^2}} \right| \quad (2.31)$$

Onde  $\kappa$  é a curvatura (GUIDORIZZI, 1986, p. 727).

Derivando a (2.24), obtém-se:

$$\frac{d^2z}{dr^2} = -ab(a^2 - r^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (2.32)$$

Substituindo-se a (2.24) e a (2.32) na expressão (2.31):

$$M = \left| \frac{\left[ 1 + \frac{b^2 r^2}{a^2} (a^2 - r^2)^{-1} \right]^{\frac{3}{2}}}{-ab(a^2 - r^2)^{-\frac{3}{2}}} \right|$$

$$M = \left| \frac{\left[ \frac{a^2((a^2 - r^2) + b^2 r^2)}{a^2(a^2 - r^2)} \right]^{\frac{3}{2}}}{-ab(a^2 - r^2)^{-\frac{3}{2}}} \right|$$

$$M = \left| \frac{\left[ \frac{a^2(a^2 - r^2) + b^2 r^2}{a^2(a^2 - r^2)} \right]^{\frac{3}{2}} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{-ab} \right|$$

$$M = \left| \frac{\left[ a^2(a^2 - r^2) + b^2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3 (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - ab} \right|$$

$$M = \left| \frac{\left[ \frac{a^2(a^2 - r^2) + b^2 r^2}{a^3} \right]^{\frac{3}{2}}}{-ab} \right|$$

$$M = \left| \frac{\left[ a^2(a^2 - r^2) + b^2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{-a^4 b} \right|. \quad (2.33)$$

Substituindo na (2.33) a equação (2.6) elevada ao quadrado e a (2.27) tem-se:

$$M = \left| \frac{\left[ a^2 \left( a^2 - \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) + a^2 (1 - e^2)^2 \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right]^{\frac{3}{2}}}{-a^4 a (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \right|$$

$$M = \left| \frac{\left[ a^4 \left( 1 - \frac{\cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + (1 - e^2) \frac{\cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) \right]^{\frac{3}{2}}}{-a^5 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \right|$$

$$M = \left| \frac{\left[ a^4 \left( \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi + (1 - e^2) \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) \right]^{\frac{3}{2}}}{-a^5 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \right|$$

$$M = \left| \frac{a^6 \left[ \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi - 1 + \sin^2 \varphi + (1 - e^2)(1 - \sin^2 \varphi)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right]^{\frac{3}{2}}}{-a^5 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \right|$$

$$M = \left| \frac{a \left[ \frac{-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi + 1 - \operatorname{sen}^2 \varphi - e^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right]^{\frac{3}{2}}}{-(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \right|$$

$$M = \left| \frac{a \left[ \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right]^{\frac{3}{2}}}{-(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \right|$$

$$M = \left| \frac{a \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}}{-(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \right|$$

$$M = \left| \frac{-a(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

$$M = \left| \frac{-a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

do que resulta,

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.34)$$

que é o Raio de Curvatura da Seção Meridiana.

#### 2.2.4 Latitude Reduzida

Na figura a seguir representa-se um quadrante da elipse meridiana de centro O, com o ponto  $P(x, z)$  e o círculo principal desta elipse circunscrito, de raio a. O ângulo  $\beta$ , formado pela reta  $OP_1$  e sua projeção no plano equatorial, denomina-se de latitude reduzida (GEMAEL, 1987, Cap. 3).

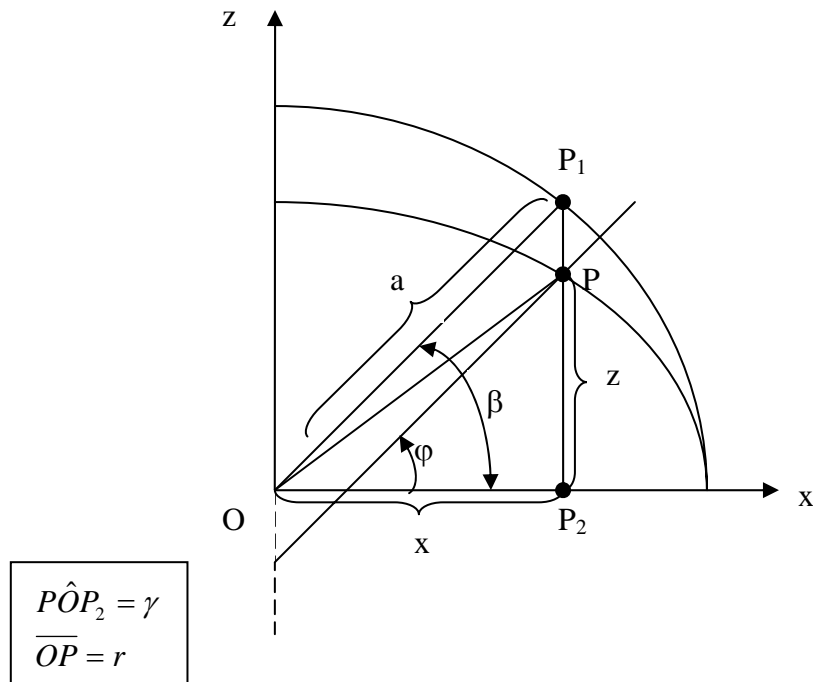


Figura – 2.5 Elipse Meridiana usando Latitude Reduzida

Da geometria plana e pela aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo  $OP_1P_2$ , tem-se:

$$(OP_2)^2 + (P_2P_1)^2 = a^2. \quad (2.35)$$

Da (figura 2.5) tem-se a seguinte equação da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.36)$$

sendo  $x = OP_2$  e  $z = P_2P$ . Substituindo-se esta relação na (2.36), tem-se que:

$$\frac{(OP_2)^2}{a^2} + \frac{(P_2P)^2}{b^2} = 1, \quad (2.37)$$

a qual pode ser reescrita em função do semi-eixo maior, multiplicando-se ambos os lados da equação por  $a^2$ :

$$(OP_2)^2 + (P_2P)^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} = a^2 \quad (2.38)$$

Igualando-se a (2.35) com a (2.38) tem-se:

$$(OP_2)^2 + (P_2P)^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} = a^2 = (OP_2)^2 + (P_2P_1)^2 \quad (2.39)$$

Resolvendo-se a equação acima em função de  $P_2P$  :

$$\begin{aligned}(P_2P_1)^2 &= (P_2P)^2 \frac{a^2}{b^2} \\ (P_2P)^2 &= \frac{b^2}{a^2} (P_2P_1)^2 \\ P_2P &= \frac{b}{a} (P_2P_1)\end{aligned}\tag{2.40}$$

Conforme a (figura 2.5), tem-se que  $P_2P_1 = a \operatorname{sen}\beta$ . Logo,

$$z = P_2P = \frac{b}{a} P_2P_1 = \frac{b}{a} \cdot a \operatorname{sen}\beta\tag{2.41}$$

$$z = b \operatorname{sen}\beta\tag{2.42}$$

$$x = a \operatorname{cos}\beta.\tag{2.43}$$

Da (figura 2.5) também tem-se a seguinte relação, utilizando a latitude geocêntrica:

$$x = r \operatorname{cos}\gamma\tag{2.44}$$

$$z = r \operatorname{sen}\gamma.\tag{2.45}$$

Logo, tem-se que:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{z}{x}.\tag{2.46}$$

Substituindo-se a (2.42) e a (2.43) na expressão anterior, obtém-se:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{b}{a} \operatorname{tg}\beta\tag{2.47}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg}\beta.\tag{2.48}$$

Relacionando-se a latitude geodésica com a latitude reduzida, obtém-se:

$$\operatorname{tg}\varphi = (1 + e'^2)^{1/2} \operatorname{tg}\beta\tag{2.49}$$

$$\operatorname{tg}\beta = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg}\varphi\tag{2.50}$$

### 2.3 Área de uma Superfície sobre o Elipsóide

A área de uma superfície sobre o elipsóide pode ser deduzida a partir da área formada pela linha geodésica<sup>1</sup>, pelos meridianos dos pontos extremos que formam os lados e pelo Equador.

A comparação da (figura 2.6A) com a (figura 2.6B) mostram que a linha geodésica entre os pontos  $B$  e  $C$  do elipsóide corresponde ao arco de círculo máximo<sup>2</sup> entre os pontos  $B'$  e  $C'$  da esfera. Nisto as latitudes esféricas dos pontos sobre a esfera são idênticas com as latitudes reduzidas dos pontos sobre o elipsóide. Assim, para cada ponto  $(\varphi, \lambda)$  da linha geodésica no elipsóide, há o ponto  $(\beta, \omega)$  em um círculo máximo (MORAES, 2001, p.165).

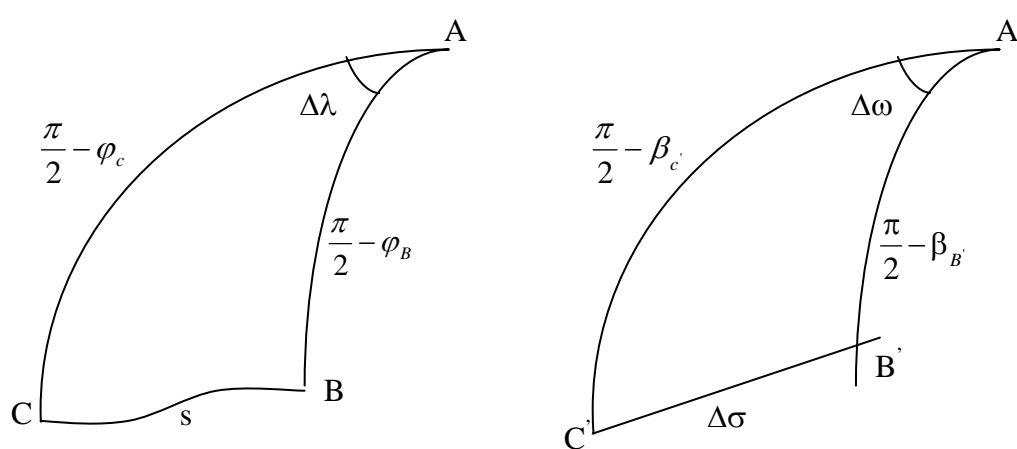


Figura – 2.6 A Triângulo Elipsóidico – 2.6 B Triângulo Esférico

FONTE: Zakatov 1981, p. 154

Sobre as figuras (2.6A) e (2.6B), o triângulo elipsóidico  $ABC$  corresponde ao triângulo esférico  $A'B'C'$  com o mesmo azimuth  $A_g$  para as linhas  $s$  e  $\Delta\sigma$  (RAINSFORD, 1955, p.13; HECK, 1995, p.183, 245; WOLFRUM, 1995, p.413). A latitude reduzida  $\beta$  do ponto  $B$  é a mesma do ponto  $B'$ , e a do ponto  $C$  é a mesma de  $C'$ , mas a distância entre os dois pontos e a diferença de longitude são diferentes (JORDAN-EGGERT, 1962b, p.110).

Elemento diferencial de comprimento de arco  $ds$  expresso:

- Na esfera

<sup>1</sup> Linha Geodésica: É uma linha jacente numa superfície e tal que em todos os seus pontos a sua normal principal coincide com a normal à superfície. (GEMAEL, 1987, Cap.4)

<sup>2</sup> Círculo máximo obtido da intersecção da esfera com um plano passante pelo seu centro.

$$Rd\sigma \cos A_g = Rd\beta \quad (2.35)$$

$$Rd\sigma \operatorname{sen}A_g = R \cos \beta d\omega. \quad (2.36)$$

- No elipsóide

$$ds \cos A_g = Md\varphi \quad (2.37)$$

$$ds \operatorname{sen}A_g = N \cos \varphi d\lambda \quad (2.38)$$

Sabendo-se que a relação entre a longitude geográfica elipsóidica  $\lambda$  e o ângulo  $\omega$  é a razão entre (2.35) e (2.37), tem-se:

$$\frac{Rd\beta}{Md\varphi} = \frac{Rd\sigma}{ds}, \quad (2.39)$$

onde;

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = M \frac{d\sigma}{ds} \quad (2.40)$$

A razão entre a (2.36) e a (2.38) é:

$$\frac{R \cos \beta d\omega}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{R d\sigma \operatorname{sen}A_g}{ds \operatorname{sen}A_g}. \quad (2.41)$$

Realizando as simplificações, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \beta d\omega}{N \cos \varphi d\lambda} &= \frac{d\sigma}{ds} \\ \frac{d\omega}{d\lambda} &= \frac{N \cos \varphi d\sigma}{\cos \beta ds} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Substituindo-se a (2.40) na (2.42), tem-se:

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{N \cos \varphi d\beta}{M \cos \beta d\varphi}, \quad (2.43)$$

o que resulta:

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = V^2 \frac{\cos \varphi d\beta}{\cos \beta d\varphi} \quad (2.44)$$

Onde,  $V$  é uma variável auxiliar, (Ver Anexo C)

## 3 MATERIAL E METODOLOGIA

### 3.1 Material

- Serviço de Comutação Bibliográfica (COMUT), da Biblioteca Central da UFSM;
- Acervo da Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Naturais e Exatas da UFSM;
- Acervo da Biblioteca Central da UFSM;
- Programa Computacional MATLAB 6.5;
- Programa Computacional Maple 8;
- Compilador *Bloodshed Dev- C++ 5.0 beta 9.2*.
- Micro-computadores do CPD/UFSM e do Setor de Geodésia do DER/UFSM.

### 3.2 Metodologia

Inicialmente, pesquisou-se a literatura no sentido de conhecer formas de resolver o problema das áreas elipsoidais, objetivando a escolha de uma metodologia geral, ilimitada em termos de tamanho do polígono e com características de fácil programabilidade em termos computacionais. Por esses motivos, a metodologia escolhida baseou-se na proposta de Danielsen (1989). Uma vez definida a metodologia de cálculo, estudou-se formas de programação alternativas, para que pudesse haver a comparação entre elas, até como meio de verificação da eficiência do algoritmo proposto. Essas formas foram os ambientes programáveis Matlab e Maple, nos quais foram geradas e testadas as versões iniciais do sistema proposto e cuja verificação inicial foi feita pela comparação de resultados. Os resultados das áreas calculadas nesses programas computacionais usando o algoritmo produzido na presente pesquisa, foram comparados com os de polígonos pequenos (parcelas rurais) calculados originalmente por Moraes (2001) em rotina de calculadora HP42S, e somente para os polígonos parciais. Para as áreas de polígonos grandes (países), calculadas através do somatório dos polígonos parciais (polígono total), comparou-se as áreas calculadas



pelo algoritmo proposto através de programa executável gerado na linguagem C com as mesmas calculadas através do programa Spring 4.3 na Projeção Cônica Equivalente de Albers. Nessa etapa foram verificados e resolvidos todos os eventuais problemas, como inconsistências de resultados e sincronismo dos sinais das áreas parciais na formação do polígono total. Uma vez verificada a viabilidade do processo, originou-se o programa executável final na linguagem de programação C, para o cálculo das áreas dos polígonos totais.

Mostra-se a seguir a seqüência adotada por Danielsen (1989, p.61-65). A determinação da área de um polígono sobre o elipsóide pode ser obtida pela soma algébrica de áreas parciais entre o Equador e as linhas que constituem cada lado deste polígono cuja superfície se quer calcular, tendo os meridianos expressos como referência. O sinal de cada área parcial é dado pela diferença de longitude.

### 3.2.1 Superfície de um Quadrilátero Infinitesimal

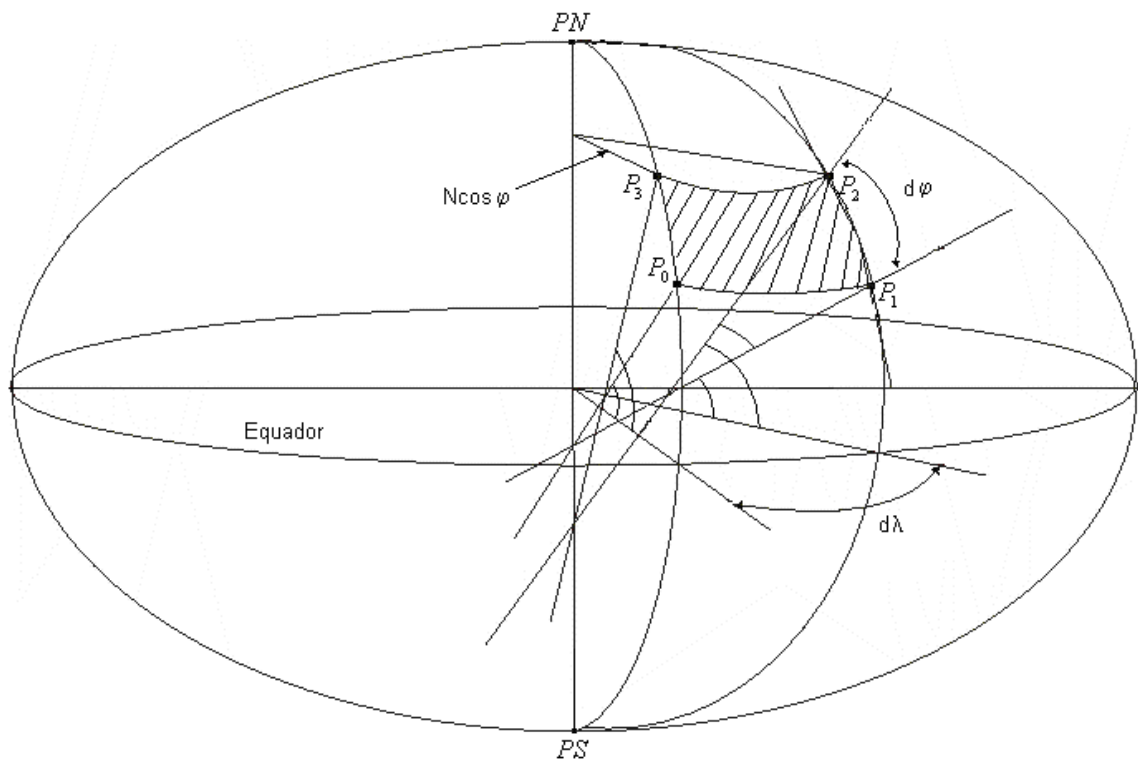


Figura – 3.1 Representação do Quadrilátero Infinitesimal no Elipsóide

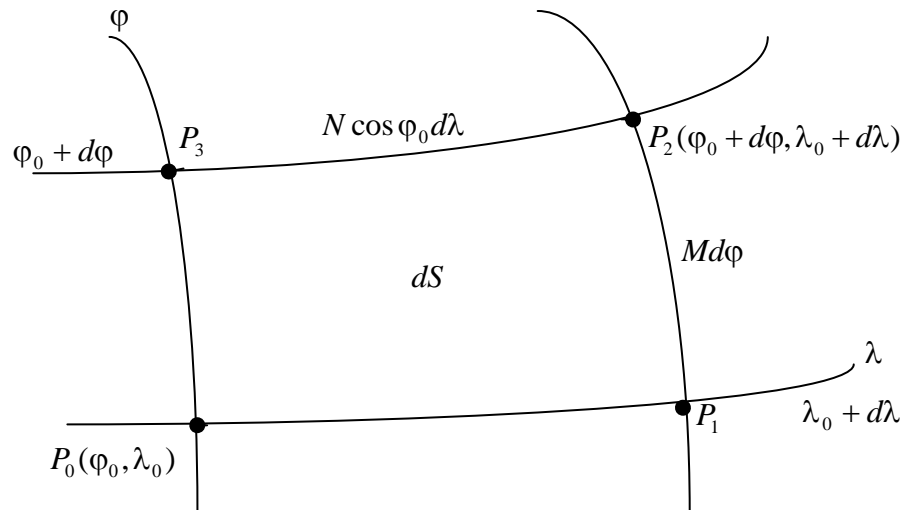


Figura – 3.2 Quadrilátero Infinitesimal

Observando-se as figuras 3.1 e 3.2, tem-se que a superfície  $dS$  de um quadrilátero infinitesimal na superfície do elipsóide, pode ser expressa como:

$$dS = (Md\varphi)(N \cos \varphi d\lambda) \quad (3.1)$$

$$dS = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^3}} \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \cos \varphi d\varphi d\lambda,$$

de onde, desenvolvendo, obtém-se,

$$dS = \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2} \cos \varphi d\varphi d\lambda. \quad (3.2)$$

Utilizando-se as expressões anteriores e substituindo-as na equação (3.2), obtém-se:

$$dS = \frac{b^2(1+e'^2)(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2} \cos \beta V \sqrt{1-e^2} \frac{V^2}{\sqrt{1+e'^2}} \frac{1}{V} d\beta d\omega,$$

de onde, por meio de cálculos, substituições e simplificações, tem-se:

$$dS = \frac{b^2}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2} \cos \beta \sqrt{1-e^2} \frac{V^2}{\sqrt{1+e'^2}} d\beta d\omega$$

$$dS = \frac{b^2}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2} \cos \beta \sqrt{1-e^2} \frac{1+e'^2}{\sqrt{1+e'^2} \operatorname{sen}^2 \beta} d\beta d\omega$$

$$dS = \frac{b^2}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2} \cos \beta \sqrt{1-e^2} \frac{1+e'^2}{1+e'^2 \operatorname{sen}^2 \beta} \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} d\beta d\omega$$

$$\begin{aligned}
dS &= \frac{b^2}{(1-e^2 \text{sen}^2 \varphi)^2} \cos \beta \sqrt{1-e^2} \frac{\sqrt{1+e'^2}}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta} d\beta d\omega \\
dS &= \frac{b^2}{(1-e^2 \text{sen}^2 \varphi)^2} \frac{\cos \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta} d\beta d\omega \\
dS &= \frac{b^2}{(1-e^2 (V \text{sen} \beta)^2)^2} \frac{\cos \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta} d\beta d\omega \\
dS &= \frac{b^2}{\left(1-e^2 \frac{(1+e'^2) \text{sen}^2 \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta}\right)^2} \frac{\cos \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta} d\beta d\omega \\
dS &= \frac{b^2}{\left(\frac{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta - e^2 (1+e'^2) \text{sen}^2 \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta}\right)^2} \frac{\cos \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta} d\beta d\omega \\
dS &= \frac{b^2}{\left(\frac{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta - \frac{e'^2}{(1+e'^2)} (1+e'^2) \text{sen}^2 \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta}\right)^2} \frac{\cos \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta} d\beta d\omega \\
dS &= \frac{b^2}{\left(\frac{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta - e'^2 \text{sen}^2 \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta}\right)^2} \frac{\cos \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta} d\beta d\omega \\
dS &= \frac{b^2}{\left(\frac{1}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta}\right)^2} \frac{\cos \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta} d\beta d\omega \\
dS &= \frac{b^2}{1} \frac{\cos \beta}{(1+e'^2 \text{sen}^2 \beta)^2} d\beta d\omega \\
dS &= b^2 (1+e'^2 \text{sen}^2 \beta)^2 \frac{\cos \beta}{1+e'^2 \text{sen}^2 \beta} d\beta d\omega \\
dS &= b^2 (1+e'^2 \text{sen}^2 \beta) \cos \beta d\beta d\omega \tag{3.3}
\end{aligned}$$

A expressão (3.3) é a superfície infinitesimal  $dS$  em função da latitude reduzida  $\beta$  e do diferencial  $d\omega$ .

Utilizando-se  $t$  e  $t'$  como variáveis auxiliares tem-se:

$$t' = t = \sqrt{1 + e'^2 \operatorname{sen}^2 \beta} \quad (3.4)$$

Logo, substituindo  $t$  e  $t'$  na expressão (3.3), obtém-se:

$$dS = b^2 t' \cos \beta d\beta d\omega, \quad (3.5)$$

onde  $t'$  diz respeito à esfera.

Logo, seguindo a solução da (3.5), a integração é realizada sobre a esfera (DANIELSEN, 1989, p.62). A área da superfície  $S$  compreendida pelas linhas do Equador; geodésica e os meridianos são dados pela seguinte integral iterada:

$$S = b^2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} t' d\omega \int_0^{\beta_1} t \cos \beta d\beta, \quad (3.6)$$

onde, fazendo-se as substituições, tem-se:

$$\int_0^{\beta_1} t \cos \beta d\beta = \int_0^{\beta_1} \sqrt{1 + e'^2 \operatorname{sen}^2 \beta} \cos \beta d\beta. \quad (3.7)$$

Tomando  $x = e' \operatorname{sen} \beta$ , e diferenciando em relação a  $\beta$  tem-se:

$$\frac{dx}{d\beta} = e' \cos \beta \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{e'} dx = \cos \beta d\beta. \quad (3.9)$$

Tomando-se  $y = e' \operatorname{sen} \beta_1$  pode-se reescrever a integral (3.7) como:

$$\int_0^{\beta_1} t \cos \beta d\beta = \frac{1}{e'} \int_0^y \sqrt{1 + x^2} dx. \quad (3.10)$$

O teorema binomial diz:

**Teorema** - Se  $m$  for um número real\* qualquer, então

$$(1 + x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$$

para todos os valores de  $x$ , tais que  $|x| < 1$ . (LEITHOLD 1994, p.779).

Utilizando-se este teorema para solucionar a integral (3.10), tem-se que o integrando pode ser desenvolvido pelo teorema acima, onde:

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (3.11)$$

---

\* Se  $m$  for um inteiro positivo, a série binomial terminará após um número finito de termos.

o que, substituindo-se devidamente os valores, resulta:

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \frac{7}{256}x^{10} \dots \quad (3.12)$$

Logo, a solução da integral (3.10) resume-se a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e'} \int_0^y \left( 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \frac{7}{256}x^{10} + \dots \right) dx = \\ = \frac{1}{e'} \left( y + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{40}y^5 + \frac{1}{112}y^7 - \frac{5}{1152}y^9 + \frac{7}{2816}y^{11} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Voltando a (3.6), tem-se que:

$$S = b^2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} t' \left( y + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{40}y^5 + \frac{1}{112}y^7 - \frac{5}{1152}y^9 + \frac{7}{2816}y^{11} + \dots \right) d\omega \quad (3.14)$$

Do mesmo processo anterior, pelo teorema binomial aplicado a  $t'$  tem-se que  $t'$  resulta:

$$t' = (1+y^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{16}y^6 - \frac{5}{128}y^8 + \frac{7}{256}y^{10} \dots, \quad (3.15)$$

o que, substituindo-se no integrando de (3.14), realizando-se as devidas multiplicações termo a termo e eliminando as potências de  $y$  superiores a 11, potências estas de  $y$  que indicam a contribuição máxima de cada termo na fórmula final da área(vide cap. 4), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{16}y^6 - \frac{5}{128}y^8 + \frac{7}{256}y^{10} \dots \right) \cdot \\ \frac{1}{e'} \left( y + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{40}y^5 + \frac{1}{112}y^7 - \frac{5}{1152}y^9 + \frac{7}{2816}y^{11} + \dots \right) = \\ = \frac{1}{e'} \left( y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{15}y^5 + \frac{4}{105}y^7 - \frac{8}{315}y^9 + \frac{64}{3465}y^{11} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Logo, substituindo a (3.16) na (3.14) a integral de área torna-se:

$$S = \frac{b^2}{e'} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left( y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{15}y^5 + \frac{4}{105}y^7 - \frac{8}{315}y^9 + \frac{64}{3465}y^{11} + \dots \right) d\omega \quad (3.17)$$

Sabendo-se que  $y = e' \text{sen}\beta_1$ , tem-se que explicitar  $\text{sen}\beta_1$  em função dos argumentos  $\omega$  e  $\beta_0$  de acordo com a figura seguinte.

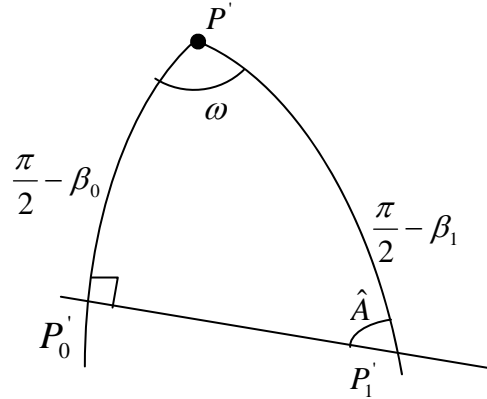


Figura – 3.3 Triângulo Esférico sobre Esfera Unitária de Bessel

No triângulo retângulo esférico  $P'P_0'P_1'$  sobre a esfera unitária de Bessel, o ponto  $P_0'$  possui a máxima latitude reduzida e  $\omega$  é contado a partir do meridiano deste ponto (HECK, 1995, p. 246).

Aplicando-se o teorema dos senos da trigonometria esférica, tem-se que:

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)}{\text{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right)}{\text{sen}A}$$

$$\frac{\cos\beta_1}{1} = \frac{\cos\beta_0}{\text{sen}A}$$

$$\frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_0} = \frac{1}{\text{sen}A} \quad (3.18)$$

Logo, aplicando-se também o teorema dos cossenos\* da trigonometria esférica, tem-se que:

$$\cos P_1' = -\cos P_0' \cos P' + \text{sen}P_0' \text{sen}P' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right). \quad (3.19)$$

Como o triângulo  $P'P_0'P_1'$  é retângulo ( $P_0' = 90^\circ$ ), tem-se que a (3.19) pode ser escrita como:

$$\cos P_1' = \text{sen}P' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right)** . \quad (3.20)$$

\* Ver trigonometria esférica no Anexo A.

\*\* Ver Reduções trigonométricas no Anexo B.

Tem-se, então:

$$\cos A = \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \beta_0. \quad (3.21)$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da (3.21), tem-se:

$$\cos^2 A = \operatorname{sen}^2 \omega \operatorname{sen}^2 \beta_0. \quad (3.22)$$

Fazendo-se uso das identidades trigonométricas, a (3.22) é escrita como:

$$1 - \operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen}^2 \omega \operatorname{sen}^2 \beta_0, \quad (3.23)$$

que expresso em função de  $\operatorname{sen} A$ , torna-se,

$$\operatorname{sen} A = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \omega \operatorname{sen}^2 \beta_0}. \quad (3.24)$$

Substituindo-se a (3.24) na (3.18) obtém-se:

$$\frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \omega \operatorname{sen}^2 \beta_0}}. \quad (3.25)$$

Aplicando-se o teorema das cotangentes ao triângulo  $P'P_0P_1'$ , obtém-se:

$$\cot g \left( \frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) = \cot g P_0' \operatorname{sen} \omega + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \omega. \quad (3.26)$$

Como  $P_0' = 90^\circ$ , a (3.26) resume-se a:

$$\cot g \left( \frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \omega. \quad (3.27)$$

Utilizando-se das relações fundamentais da trigonometria, tem-se que:

$$\cot g \left( \frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \cos \beta_0 = \operatorname{sen} \beta_0 \cos \omega \quad (3.28)$$

$$\cot g \left( \frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \frac{\cos \beta_0}{\operatorname{sen} \beta_0} = \cos \omega, \quad (3.29)$$

obtendo-se:

$$\cos \omega = \cot g \left( \frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \cot g \beta_0, \quad (3.30)$$

onde, novamente, trabalhando com as relações fundamentais da trigonometria, reescreve-se

(3.30) como segue:

$$\cot g \left( \frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) = \frac{1}{\cot g \beta_0} \cos \omega \quad (3.31)$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{1}{\cot g \beta_0} \cos \omega \quad (3.32)$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \beta_0 \cos \omega. \quad (3.33)$$

Da (3.33) tem-se que:

$$\frac{\text{sen}\beta_1}{\cos\beta_1} = \frac{\text{sen}\beta_0}{\cos\beta_0} \cos\omega. \quad (3.34)$$

Colocando-se a expressão (3.34) em função de  $\text{sen}\beta_1$ , obtém-se:

$$\text{sen}\beta_1 = \text{sen}\beta_0 \cos\omega \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_0}. \quad (3.35)$$

Sabendo-se que  $y = e' \text{sen}\beta_1$ , pode-se reescrever  $y$  como:

$$y = e' \text{sen}\beta_0 \cos\omega \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_0}. \quad (3.36)$$

Utilizando-se da (3.25), pode-se reescrever a (3.36) como segue:

$$y = e' \frac{\text{sen}\beta_0 \cos\omega}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\beta_0 \text{sen}^2\omega}}. \quad (3.37)$$

Tomando-se:

$$\text{sen}\theta = \text{sen}\beta_0 \text{sen}\omega, \quad (3.38)$$

onde  $\theta$  é um ângulo auxiliar, e elevando-se ao quadrado ambos os membros da (3.38), tem-se:

$$\text{sen}^2\theta = \text{sen}^2\beta_0 \text{sen}^2\omega \quad (3.39)$$

$$1 - \cos^2\theta = \text{sen}^2\beta_0 \text{sen}^2\omega, \quad (3.40)$$

de onde resulta que:

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\beta_0 \text{sen}^2\omega}. \quad (3.41)$$

Reescrevendo (3.40), tem-se:

$$1 - \cos^2\theta = \text{sen}^2\beta_0 (1 - \cos^2\omega) \quad (3.42)$$

$$1 = \text{sen}^2\beta_0 (1 - \cos^2\omega) + \cos^2\theta \quad (3.43)$$

$$1 = \text{sen}^2\beta_0 - \text{sen}^2\beta_0 \cos^2\omega + \cos^2\theta \quad (3.44)$$

$$1 = 1 - \cos^2\beta_0 - \text{sen}^2\beta_0 \cos^2\omega + \cos^2\theta \quad (3.45)$$

$$1 - 1 + \cos^2\beta_0 - \cos^2\theta = -\text{sen}^2\beta_0 \cos^2\omega \quad (-1) \quad (3.46)$$

$$\cos^2\theta - \cos^2\beta_0 \frac{1}{\text{sen}^2\beta_0} = \cos^2\omega \quad (3.47)$$

$$\cos\omega = \sqrt{\frac{\cos^2\theta - \cos^2\beta_0}{\text{sen}^2\beta_0}} \quad (3.48)$$



$$\cos \omega = \frac{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}}{\operatorname{sen}^2 \beta_0}, \quad (3.49)$$

de onde pode-se reescrever a (3.37) como:

$$y = e' \frac{\operatorname{sen} \beta_0 \cos \omega}{\cos \theta} \quad (3.50)$$

$$y = e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}. \quad (3.51)$$

Aplicando-se o operador diferencial à expressão (3.38) e derivando-a em relação a  $\theta$  e  $\omega$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen} \theta) &= \frac{d}{d\omega}(\operatorname{sen} \beta_0 \operatorname{sen} \omega) \\ \cos \theta d\theta &= \operatorname{sen} \beta_0 \cos \omega d\omega \end{aligned} \quad (3.52)$$

Logo, a partir da (3.52), obtém-se a diferencial  $d\omega$ :

$$d\omega = \frac{\cos \theta d\theta}{\operatorname{sen} \beta_0 \cos \omega}. \quad (3.53)$$

Substituindo-se a (3.49) na (3.53), obtém-se:

$$d\omega = \frac{\cos \theta d\theta}{\operatorname{sen} \beta_0 \frac{1}{\operatorname{sen} \beta_0} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} \quad (3.54)$$

$$d\omega = \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}}. \quad (3.55)$$

Utilizando-se da (3.51) e (3.55), tem-se que a integral da soma gerada pela (3.17) tem sua solução apresentada sob a forma:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} y d\omega = \quad (3.56)$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} =$$

$$= e' \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\theta = e' [\theta]_{\omega_1}^{\omega_2}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} y^3 d\omega = \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left( e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \right)^3 \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} = \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^3 \frac{1}{\cos^2 \theta} (\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0) d\theta = \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^3 d\theta - \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^3 \frac{\cos^2 \beta_0}{\cos^2 \theta} d\theta = \\
&= e'^3 \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\theta - e'^3 \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \\
&= e'^3 \left[ \theta - \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \right] = \\
&= e'^3 \left[ \theta - c^2 I_2 \right]_{\omega_1}^{\omega_2}.
\end{aligned}$$

Para simplificação de cálculos, utiliza-se do seguinte artifício  $c^n = \cos^n \beta_0$  e

$$I_n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^n \theta} d\theta, \text{ onde } n = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\omega_1}^{\omega_2} y^5 d\omega = \tag{3.58} \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left( e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \right)^5 \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} d\theta = \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^5 \frac{1}{\cos^4 \theta} (\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0)^2 d\theta = \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^5 \frac{1}{\cos^4 \theta} (\cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta \cos^2 \beta_0 + \cos^4 \beta_0) d\theta =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^5 \left( 1 - 2 \frac{\cos^2 \beta_0}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^4 \beta_0}{\cos^4 \theta} \right) d\theta = \\
&= e'^5 \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\theta - 2e'^5 \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta + e'^5 \cos^4 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^4 \theta} d\theta = \\
&= e'^5 \left[ \theta - 2c^2 I_2 + c^4 I_4 \right]_{\omega_1}^{\omega_2}
\end{aligned}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} y^7 d\omega = \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left( e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \right)^7 \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} d\theta = \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^7 \frac{1}{\cos^6 \theta} (\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0)^3 d\theta = \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^7 \frac{1}{\cos^6 \theta} (\cos^6 \theta - 3\cos^4 \theta \cos^2 \beta_0 + 3\cos^2 \theta \cos^4 \beta_0 - \cos^6 \beta_0) d\theta = \\
&= e'^7 \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\theta - 3e'^7 \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta + 3e'^7 \cos^4 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^4 \theta} d\theta - e'^7 \cos^6 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^6 \theta} d\theta = \\
&= e'^7 \left[ \theta - 3c^2 I_2 + 3c^4 I_4 - c^6 I_6 \right]_{\omega_1}^{\omega_2}
\end{aligned}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} y^9 d\omega = \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left( e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \right)^9 \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} d\theta = \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^9 \frac{1}{\cos^8 \theta} (\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0)^4 d\theta =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^9 \frac{1}{\cos^8 \theta} (\cos^8 \theta - 4 \cos^6 \theta \cos^2 \beta_0 + 6 \cos^4 \theta \cos^4 \beta_0 - 4 \cos^2 \theta \cos^6 \beta_0 + \cos^8 \beta_0) d\theta = \\
&= e'^9 \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\theta - 4e'^9 \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta + 6e'^9 \cos^4 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^4 \theta} d\theta - 4e'^9 \cos^6 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^6 \theta} d\theta + \\
&+ e'^9 \cos^8 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^8 \theta} d\theta = \\
&= e'^9 [\theta - 4c^2 I_2 + 6c^4 I_4 - 4c^6 I_6 + c^8 I_8]_{\omega_1}^{\omega_2} \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} y^{11} d\omega = \tag{3.61} \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left( e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \right)^{11} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} d\theta = \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^{11} \frac{1}{\cos^{10} \theta} (\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0)^5 d\theta = \\
&= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e'^{11} \frac{1}{\cos^{10} \theta} \left( \cos^{10} \theta - 5 \cos^8 \theta \cos^2 \beta_0 + 10 \cos^6 \theta \cos^4 \beta_0 - 10 \cos^4 \theta \cos^6 \beta_0 + \right. \\
&\quad \left. + 5 \cos^2 \theta \cos^8 \beta_0 - \cos^{10} \beta_0 \right) d\theta = \\
&= e'^{11} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\theta - 5e'^{11} \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta + 10e'^{11} \cos^4 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^4 \theta} d\theta - 10e'^{11} \cos^6 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^6 \theta} d\theta + \\
&+ 5e'^{11} \cos^8 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^8 \theta} d\theta - e'^{11} \cos^{10} \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^{10} \theta} d\theta = \\
&= e'^{11} [\theta - 5c^2 I_2 + 10c^4 I_4 - 10c^6 I_6 + 5c^8 I_8 - c^{10} I_{10}]_{\omega_1}^{\omega_2}
\end{aligned}$$

Tomando-se a solução das integrais (3.56), (3.57), (3.58), (3.59), (3.60) e (3.61) e substituindo-as na (3.17), tem-se:

$$S = \frac{b^2}{e'} \left[ \begin{array}{l} e' \theta + \frac{2}{3} e'^3 (\theta - c^2 I_2) - \frac{1}{15} e'^5 (\theta - 2c^2 I_2 + c^4 I_4) + \\ + \frac{4}{105} e'^7 (\theta - 3c^2 I_2 + 3c^4 I_4 - c^6 I_6) - \\ - \frac{8}{315} e'^9 (\theta - 4c^2 I_2 + 6c^4 I_4 - 4c^6 I_6 + c^8 I_8) + \\ + \frac{64}{3465} e'^{11} (\theta - 5c^2 I_2 + 10c^4 I_4 - 10c^6 I_6 + 5c^8 I_8 - c^{10} I_{10}) \end{array} \right]_{\omega_1}^{\omega_2}$$

$$S = b^2 \left[ \begin{array}{l} \theta + \frac{2}{3} e'^2 \theta - \frac{2}{3} e'^2 c^2 I_2 - \frac{1}{15} e'^4 \theta + \frac{2}{15} e'^4 c^2 I_2 - \frac{1}{15} e'^4 c^4 I_4 + \frac{4}{105} e'^6 \theta - \frac{12}{105} e'^6 c^2 I_2 + \\ + \frac{12}{105} e'^6 c^4 I_4 - \frac{4}{105} e'^6 c^6 I_6 - \frac{8}{315} e'^8 \theta + \frac{32}{315} e'^8 c^2 I_2 - \frac{48}{315} e'^8 c^4 I_4 + \frac{32}{315} e'^8 c^6 I_6 - \\ - \frac{8}{315} e'^8 c^8 I_8 + \frac{64}{3465} e'^{10} \theta - \frac{320}{3465} e'^{10} c^2 I_2 + \frac{640}{3465} e'^{10} c^4 I_4 - \frac{640}{3465} e'^{10} c^6 I_6 + \\ + \frac{320}{3465} e'^{10} c^8 I_8 - \frac{64}{3465} e'^{10} c^{10} I_{10} \end{array} \right]_{\omega_1}^{\omega_2}$$

Reagrupando os termos da expressão anterior, tem-se:

$$S = b^2 \left[ \begin{array}{l} \theta \left( 1 + \frac{2}{3} e'^2 - \frac{1}{15} e'^4 + \frac{4}{105} e'^6 - \frac{8}{315} e'^8 + \frac{64}{3465} e'^{10} \right) - \\ - c^2 I_2 \left( \frac{2}{3} e'^2 - \frac{2}{15} e'^4 + \frac{4}{35} e'^6 - \frac{32}{315} e'^8 + \frac{64}{693} e'^{10} \right) - \\ - c^4 I_4 \left( \frac{1}{15} e'^4 - \frac{4}{35} e'^6 + \frac{16}{105} e'^8 - \frac{128}{693} e'^{10} \right) - \\ - c^6 I_6 \left( \frac{4}{105} e'^6 - \frac{32}{315} e'^8 + \frac{128}{693} e'^{10} \right) - \\ - c^8 I_8 \left( \frac{8}{315} e'^8 - \frac{64}{693} e'^{10} \right) - \\ - c^{10} I_{10} \left( \frac{64}{3465} e'^{10} \right) \end{array} \right]_{\omega_1}^{\omega_2} \quad (3.62)$$

Voltando às integrais nomeadas  $I_2$ ,  $I_4$ ,  $I_6$ ,  $I_8$  e  $I_{10}$  apresentadas anteriormente, tem-se que a sua solução é obtida pela fórmula geral a seguir (MURRAY 1973, p.78):

$$\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\operatorname{sen} ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}, \text{ com } n > 1 \text{ e } a = \text{cte.} \quad (3.63)$$

Tomando-se  $a = 1$ ,  $x = \theta$  e  $n \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ , obtém-se a seguinte fórmula de recorrência:

$$\int \frac{d\theta}{\cos^n \theta} = \frac{1}{n-1} J_{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}; \text{ onde } J_{n-1} = \frac{\text{sen}\theta}{\cos^{n-1} \theta}, \quad (3.64)$$

Logo,

$$n = 2 \Rightarrow I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos \theta} = J_1 \quad (3.65)$$

$$n = 4 \Rightarrow I_4 = \int \frac{1}{\cos^4 \theta} d\theta = \frac{1}{3} \frac{\text{sen}\theta}{\cos^3 \theta} + \frac{2}{3} I_2 = \frac{1}{3} J_3 + \frac{2}{3} J_1 \quad (3.66)$$

$$n = 6 \Rightarrow I_6 = \int \frac{1}{\cos^6 \theta} d\theta = \frac{1}{5} \frac{\text{sen}\theta}{\cos^5 \theta} + \frac{4}{5} I_4 = \frac{1}{5} J_5 + \frac{4}{15} J_3 + \frac{8}{15} J_1 \quad (3.67)$$

$$n = 8 \Rightarrow I_8 = \int \frac{1}{\cos^8 \theta} d\theta = \frac{1}{7} \frac{\text{sen}\theta}{\cos^7 \theta} + \frac{6}{7} I_6 = \frac{1}{7} J_7 + \frac{6}{35} J_5 + \frac{8}{35} J_3 + \frac{16}{35} J_1 \quad (3.68)$$

$$n = 10 \Rightarrow I_{10} = \int \frac{1}{\cos^{10} \theta} d\theta = \frac{1}{9} \frac{\text{sen}\theta}{\cos^9 \theta} + \frac{8}{9} I_8 = \frac{1}{9} J_9 + \frac{8}{63} J_7 + \frac{16}{105} J_5 + \frac{64}{315} J_3 + \frac{128}{315} J_1. \quad (3.69)$$

Substituindo a (3.65), (3.66), (3.67), (3.68) e (3.69) na (3.62), tem-se:

$$S = b^2 \left[ \begin{array}{l} \theta \left( 1 + \frac{2}{3} e'^2 - \frac{1}{15} e'^4 + \frac{4}{105} e'^6 - \frac{8}{315} e'^8 + \frac{64}{3465} e'^{10} \right) - \\ - c^2 J_1 \left( \frac{2}{3} e'^2 - \frac{2}{15} e'^4 + \frac{4}{35} e'^6 - \frac{32}{315} e'^8 + \frac{64}{693} e'^{10} \right) - \\ - c^4 \left( \frac{1}{3} J_3 + \frac{2}{3} J_1 \right) \left( \frac{1}{15} e'^4 - \frac{4}{35} e'^6 + \frac{16}{105} e'^8 - \frac{128}{693} e'^{10} \right) - \\ - c^6 \left( \frac{1}{5} J_5 + \frac{4}{15} J_3 + \frac{8}{15} J_1 \right) \left( \frac{4}{105} e'^6 - \frac{32}{315} e'^8 + \frac{128}{693} e'^{10} \right) - \\ - c^8 \left( \frac{1}{7} J_7 + \frac{6}{35} J_5 + \frac{8}{35} J_3 + \frac{16}{35} J_1 \right) \left( \frac{8}{315} e'^8 - \frac{64}{693} e'^{10} \right) - \\ - c^{10} \left( \frac{1}{9} J_9 + \frac{8}{63} J_7 + \frac{16}{105} J_5 + \frac{64}{315} J_3 + \frac{128}{315} J_1 \right) \left( \frac{64}{3465} e'^{10} \right) \end{array} \right]_{\omega_1}^{\omega_2}. \quad (3.70)$$

Após as multiplicações e conseqüente reordenação dos termos, fica-se com:

$$\begin{aligned}
S = b^2 \left\{ \right. & \left. \begin{aligned}
& \theta \left( 1 + \frac{2}{3} e'^2 - \frac{1}{15} e'^4 + \frac{4}{105} e'^6 - \frac{8}{315} e'^8 + \frac{64}{3465} e'^{10} \right) - \\
& \left[ \left( \frac{2}{3} e'^2 - \frac{2}{15} e'^4 + \frac{4}{35} e'^6 - \frac{32}{315} e'^8 + \frac{64}{693} e'^{10} \right) + \right. \\
& \quad + c^2 \left( \frac{2}{45} e'^4 - \frac{8}{105} e'^6 + \frac{32}{315} e'^8 - \frac{256}{2079} e'^{10} \right) + \\
& \quad - c^2 J_1 + c^4 \left( \frac{32}{1575} e'^6 - \frac{256}{4725} e'^8 + \frac{1024}{10395} e'^{10} \right) + \\
& \quad + c^6 \left( \frac{128}{11025} e'^8 - \frac{1024}{24255} e'^{10} \right) + \\
& \quad \left. + c^8 \left( \frac{8192}{1091475} e'^{10} \right) \right] - \\
& \left[ \left( \frac{1}{45} e'^4 - \frac{4}{105} e'^6 + \frac{16}{315} e'^8 - \frac{128}{2079} e'^{10} \right) + \right. \\
& \quad + c^2 \left( \frac{16}{1575} e'^6 - \frac{128}{4725} e'^8 + \frac{512}{10395} e'^{10} \right) + \\
& \quad + c^4 \left( \frac{64}{11025} e'^8 - \frac{512}{24255} e'^{10} \right) + \\
& \quad \left. + c^6 \left( \frac{4096}{1091475} e'^{10} \right) \right] - \\
& \left[ \left( \frac{4}{525} e'^6 - \frac{32}{1575} e'^8 + \frac{128}{3465} e'^{10} \right) + \right. \\
& \quad + c^2 \left( \frac{16}{3675} e'^8 - \frac{128}{8085} e'^{10} \right) + \\
& \quad \left. + c^4 \left( \frac{1024}{363825} e'^{10} \right) \right] - \\
& \left[ \left( \frac{8}{2205} e'^8 - \frac{64}{4851} e'^{10} \right) + \right. \\
& \quad \left. + c^2 \left( \frac{512}{218295} e'^{10} \right) \right] - \\
& \left. - c^{10} J_9 \left[ \left( \frac{64}{31185} e'^{10} \right) \right] \right\} \omega_1 \omega_2
\end{aligned} \tag{3.71}
\end{aligned}$$

Da (3.38) faz –se,

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arcsen(\sen\beta_0 \sen\omega_2) - \arcsen(\sen\beta_0 \sen\omega_1), \tag{3.72}$$

e da (3.64) tem-se:

$$\Delta J_{n-1} = \frac{\text{sen}\theta_2}{\cos^{n-1}\theta_2} - \frac{\text{sen}\theta_1}{\cos^{n-1}\theta_1}. \quad (3.73)$$

Representando as parcelas que estão entre parênteses por  $K_{ij}$ , em que  $i$  e  $j$  são o expoente da constante  $c$  que está fora e dentro dos colchetes, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} K_{00} &= 1 + \frac{2}{3}e'^2 - \frac{1}{15}e'^4 + \frac{4}{105}e'^6 - \frac{8}{315}e'^8 + \frac{64}{3465}e'^{10} \\ K_{20} &= \frac{2}{3}e'^2 - \frac{2}{15}e'^4 + \frac{4}{35}e'^6 - \frac{32}{315}e'^8 + \frac{64}{393}e'^{10} \\ K_{22} &= \frac{2}{45}e'^4 - \frac{8}{105}e'^6 + \frac{32}{315}e'^8 - \frac{256}{2079}e'^{10} \\ K_{24} &= \frac{32}{1575}e'^6 - \frac{256}{4725}e'^8 + \frac{1024}{10395}e'^{10} \\ K_{26} &= \frac{128}{11025}e'^8 - \frac{1024}{24255}e'^{10} \\ K_{28} &= \frac{8192}{1091475}e'^{10} \\ K_{40} &= \frac{1}{45}e'^4 - \frac{4}{105}e'^6 + \frac{16}{315}e'^8 - \frac{128}{2079}e'^{10} \\ K_{42} &= \frac{16}{1575}e'^6 - \frac{128}{4725}e'^8 + \frac{512}{10395}e'^{10} \\ K_{44} &= \frac{64}{11025}e'^8 - \frac{512}{24255}e'^{10} \\ K_{46} &= \frac{4096}{1091475}e'^{10} \\ K_{60} &= \frac{4}{525}e'^6 - \frac{32}{1575}e'^8 + \frac{128}{3465}e'^{10} \\ K_{62} &= \frac{16}{3675}e'^8 - \frac{128}{8085}e'^{10} \\ K_{64} &= \frac{1024}{363825}e'^{10} \\ K_{80} &= \frac{8}{2205}e'^8 - \frac{64}{4851}e'^{10} \\ K_{82} &= \frac{512}{218295}e'^{10} \end{aligned} \quad (3.74)$$



$$K_{100} = \frac{64}{31185} e'^{10},$$

e, substituindo a (3.74) na (3.71), tem-se que:

$$|S| = a^2(1-f)^2 \left[ \begin{array}{l} K_{00}\Delta\theta - c^2\Delta J_1(K_{20} + K_{22}c^2 + K_{24}c^4 + K_{26}c^6 + K_{28}c^8) - \\ - c^4\Delta J_3(K_{40} + K_{42}c^2 + K_{44}c^4 + K_{46}c^8) - \\ - c^6\Delta J_5(K_{60} + K_{62}c^2 + K_{64}c^4) - \\ - c^8\Delta J_7(K_{80} + K_{82}c^2) - \\ - c^{10}\Delta J_9(K_{100}) \end{array} \right], \quad (3.75)$$

que é a expressão da área em função do fator  $K_{ij}$ , que é função das  $e'$  e assim parâmetros do elipsóide dado.

Cálculo da diferença angular  $\Delta\omega$ :

A diferença angular  $\Delta\omega$  na esfera é calculada pelo procedimento em (SODANO, 1958, p.15-18).

$$\Delta\omega = |\Delta\lambda| + x, \quad (3.76)$$

onde  $x$  é dado pela série de Helmert, abaixo.

$$x = \frac{e^2c}{128} \left[ \begin{array}{l} 128nF + 128e^2n^2C^2F - 8hF - 8hsenF \cos F + 128e^2n^2PF^2 + 16e'^2Psen^2F + \\ + 128e^4n^3C^4F - 24e^2nhC^2F + 3h^2F - 8e^2nhC^2senF \cos F + 5h^2senF \cos F - \\ - 64e^4n^3C^2mF^3 - 2h^2sen^3F \cos F + (16e^2e'^2n + 448e^4n^3)C^2PF^2 - 16e^2nhPF^2 + \\ + 16e^2e'^2nC^2Psen^2F - 8e'^2hPsen^2F - 16nhPFsenF \cos F - 192e^4n^3C^2PF^3 \cot gF - \\ - 8e'^2hPsen^2F \cos^2 F + 128e^4n^3P^2F^3 + 32e^2e'^2nP^2Fsen^2F + 8e'^4P^2sen^3F \cos F \end{array} \right] \quad (3.77)$$

em que,

$$n = \frac{e'}{e' + e} \quad (3.78)$$

$$A = sen\beta_1 sen\beta_2 \quad (3.79)$$

$$B = \cos\beta_1 \cos\beta_2 \quad (3.80)$$

$$F = \arccos(A + B \cos \Delta\lambda) \quad (3.81)$$

$$C = \frac{Bsen|\Delta\lambda|}{senF} \quad (3.82)$$

$$m = 1 - C^2 \quad (3.83)$$

$$h = e'^2 m \quad (3.84)$$

$$P = \frac{m}{\operatorname{tg} F} - \frac{A}{\operatorname{sen} F}. \quad (3.85)$$

Uma vez calculado  $\Delta\omega$ , calcula-se  $\omega_1$  pela solução dos triângulos retângulos esféricos  $P'P_0P_1'$  e  $P'P_0P_2'$ , de acordo com a figura:

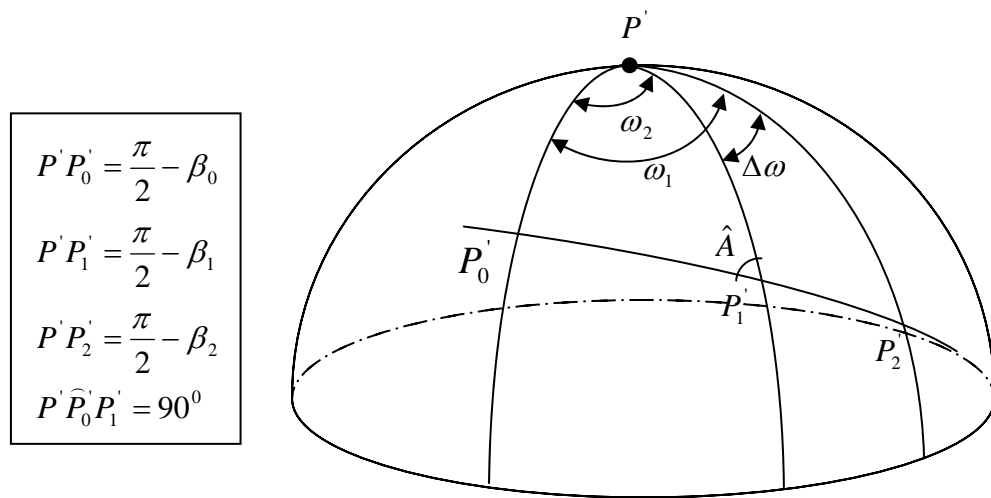


Figura – 3.4 Representação da Esfera de Bessel e seus Triângulos Esféricos

FONTE: Moraes, 2001, p. 169.

Aplicando o teorema das cotangentes ao triângulo  $P'P_0P_1'$ , obtém-se:

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\omega_1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right) \cos\omega_1$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 \cos\beta_0 = \operatorname{sen}\beta_0 \cos\omega_1$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 \cos\beta_0 \frac{1}{\cos\omega_1} = \operatorname{sen}\beta_0$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 \frac{1}{\cos\omega_1} = \frac{\operatorname{sen}\beta_0}{\cos\beta_0}$$

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\cos\omega_1}. \quad (3.86)$$

Analogamente, para o triângulo  $P'P_0P_2'$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
\cot g\left(\frac{\pi}{2}-\beta_2\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta_0\right) &= \cot g\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\omega_2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta_0\right)\cos\omega_2 \\
\operatorname{tg}\beta_2 \cos\beta_0 &= \operatorname{sen}\beta_0 \cos\omega_2 \\
\operatorname{tg}\beta_2 &= \frac{1}{\cos\beta_0}\operatorname{sen}\beta_0 \cos\omega_2 \\
\operatorname{tg}\beta_2 &= \operatorname{tg}\beta_0 \cos\omega_2 \\
\operatorname{tg}\beta_0 &= \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\cos\omega_2}.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Igualando as expressões (3.86) e (3.87), tem-se:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\cos\omega_1} = \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\cos\omega_2} \tag{3.88}$$

$$\frac{\cos\omega_2}{\cos\omega_1} = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}. \tag{3.89}$$

Substituindo-se  $\omega_2$  por  $\omega_1 + \Delta\omega$ , obtém-se:

$$\frac{\cos(\omega_1 + \Delta\omega)}{\cos\omega_1} = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}. \tag{3.90}$$

Tem-se da soma de arcos da trigonometria plana que:

$$\frac{\cos\omega_1 \cos\Delta\omega - \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\Delta\omega}{\cos\omega_1} = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}, \tag{3.91}$$

de onde tem-se que,

$$\cos\Delta\omega - \operatorname{tg}\omega_1 \operatorname{sen}\Delta\omega = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1} \tag{3.92}$$

$$-\operatorname{tg}\omega_1 \operatorname{sen}\Delta\omega = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1} - \cos\Delta\omega \quad .(-1)$$

$$\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{1}{\operatorname{sen}\Delta\omega} \cos\Delta\omega - \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}.$$

Portanto, tem-se que:

$$\omega_1 = \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\Delta\omega}\left(\cos\Delta\omega - \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_1}\right)\right] \tag{3.93}$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega,$$

que são valores que entram no cálculo das diferenças de longitudes, fundamentais para o cálculo das áreas elipsoidais.

### 3.2.2 Seqüência de Cálculo Utilizada para a Área de um Polígono qualquer no Elipsóide

A superfície de um polígono constituído por  $n$  lados no elipsóide pode ser calculada como o somatório das  $n$  superfícies, cada uma delas formada pela linha geodésica em si, pelos segmentos dos meridianos que partem dos extremos dessa linha até o Equador e pelo segmento do Equador entre esses dois meridianos. Estes segmentos compõem os lados do polígono geodésico parcial, que é um quadrilátero elipsóidico. O somatório algébrico das áreas parciais resultará a área total do polígono. Neste processo de cálculo têm-se superfícies que serão excluídas, as quais recebem no somatório sinal negativo. Estas áreas serão maiores ou menores que as positivas, de acordo com o fato do caminho percorrido ser no sentido horário ou anti-horário do polígono que se quer calcular. Desse fato resultará uma área total com sinal negativo ou positivo, a qual deve ser tomada somente em módulo.

- Seqüência dos dados de entrada:

#### a) Parâmetros de Entrada

- Semi-eixo maior  $a$ ;
- Achatamento  $f$ ;
- Coordenadas latitude e longitude dos pontos dados.

Estas coordenadas são digitadas em um arquivo de leitura tipo texto (txt) e estão dispostas da seguinte forma neste arquivo: 1) Na primeira linha do arquivo é digitado o número de linhas formado pelos valores dos pares de coordenadas que formam cada lado do polígono, dispostas na forma seqüencial de duas latitudes ( $\varphi$ ) e duas longitudes ( $\lambda$ ) extremas desse lado; 2) Dessa forma, este valor equivale ao quádruplo do número de lados (ou vértices) do polígono; 3) Estas coordenadas estão dispostas na forma de colunas formadas pelos graus, minutos e segundos das coordenadas dos vértices do polígono. Entre cada coluna há a inserção de dois espaços em branco, sendo cada coordenada inserida uma abaixo da outra nas respectivas colunas; 4) Essa ordenação é seqüencial, seguindo um sentido para o polígono que se quer calcular a área, sentido este que pode ser horário ou anti-horário. Todos os valores das coordenadas dispostas no arquivo, em graus e suas frações sexagesimais, são convertidos para radianos em um outro arquivo com extensão rad (ver algoritmo de conversão no Anexo D).

#### b) Processamento do Algoritmo

- Cálculo da primeira excentricidade “ $e$ ”;
- Cálculo da segunda excentricidade “ $e_1$ ”;
- Conversão dos dados de graus e suas frações sexagesimais para radianos;
- Leitura do arquivo de coordenadas;
- Cálculo das latitudes reduzidas  $\beta_1$  e  $\beta_2$ ;
- Obtenção do valor da diferença de longitude geográfica elipsóidica  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ ;
- Cálculo das quantidades dadas por (3.78)  $n$ , (3.79)  $A$ , (3.80)  $B$ , (3.81)  $F$ , (3.82)  $C$ , (3.83)  $m$ , (3.84)  $h$  e (3.85)  $P$ ;
- Cálculo do valor dado por (3.77)  $x$ ;
- Cálculo do valor da diferença angular dado por (3.76)  $\Delta\omega$ ;
- Cálculo do valor dado por (3.93)  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ;
- Cálculo do valor dado por (3.86)  $\beta_0$ ;
- Cálculo dos valores dados por  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , e da diferença angular dada por (3.72)  $\Delta\theta$  onde estes estão em radianos;
- Cálculo dos valores dados por (3.73)  $\Delta J_{n-1}$ , com  $n = 2,4,6,8,10$ .;
- Cálculo dos valores dados por (3.74);
- Cálculo de  $c^n = \cos^n \beta_0$  com  $n = 2,4,6,8,10$ .;
- Cálculo do valor da área dado por (3.75)  $S$  onde a unidade da área é dada em  $m^2$  ou em  $ha$ .

### c) Algoritmo para Atribuição do Sinal das Áreas (quadriláteros) Parciais

Determina-se um sentido de percurso para o polígono que se quer calcular a área e toma-se as coordenadas de um ponto (vértice) como partida. A longitude deste ponto é comparada com a do ponto conseqüente. Se a longitude do ponto conseqüente for maior que a do anterior, atribui-se sinal negativo (-) e, caso contrário, atribui-se sinal (+), e assim sucessivamente até completar o percurso de todos os pontos que constituem o polígono.

### 3.2.3 Fluxograma do Algoritmo para Cálculo de Áreas

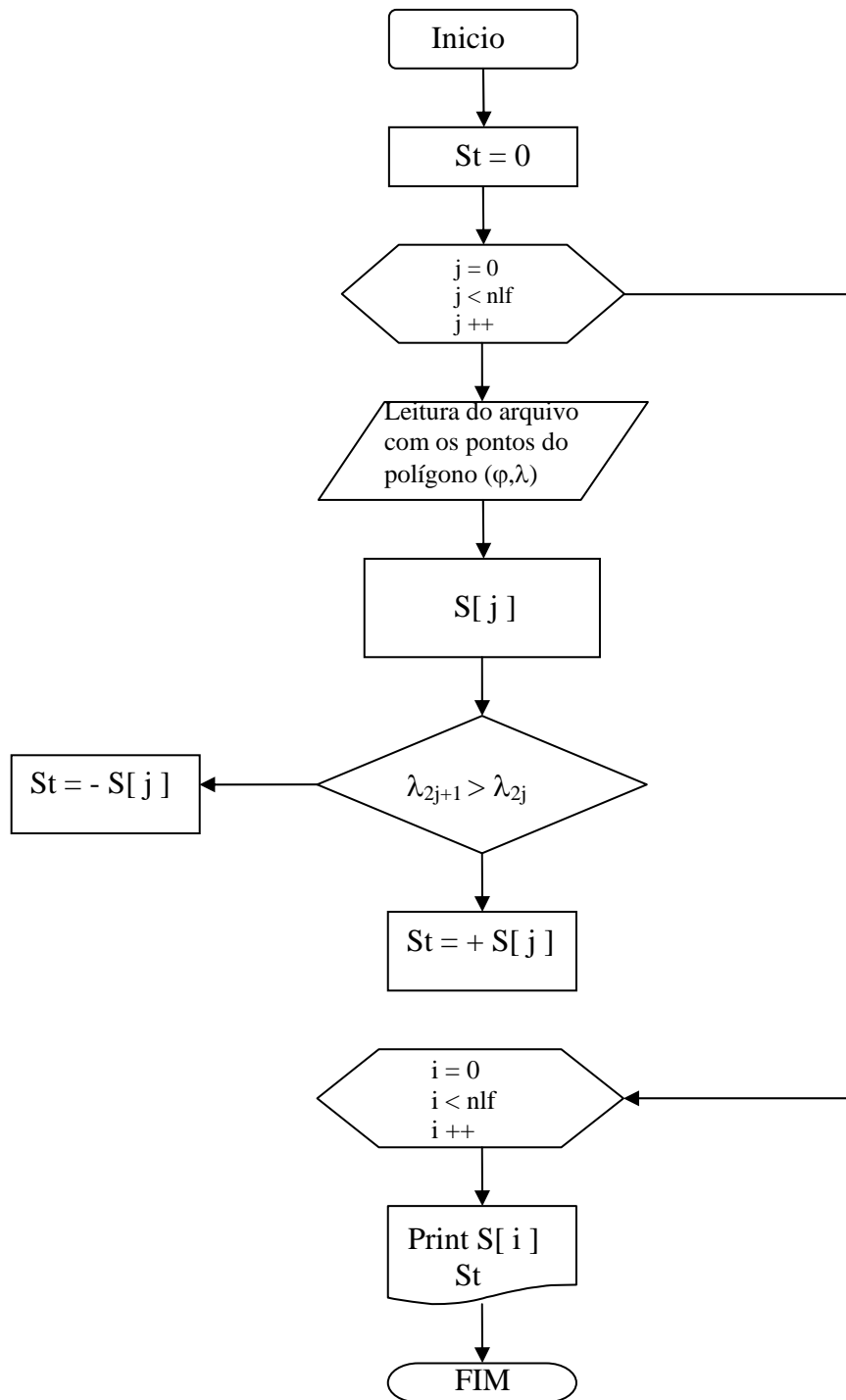


Figura – 3.5 Fluxograma do Algoritmo de Cálculo de Áreas

### 3.2.4 Algoritmo de Cálculo de Áreas

Mostra-se a seguir o arquivo em forma de texto dos comandos utilizados em um programa na linguagem C.

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(int argc, char **argv)
{
    int nlf = atoi(argv[2]); /* numero de lf's(pares de pontos) */

    double
        x,
        a = (double)6378160.0,
        f = (double)1.0/298.25,
        e,
        el,
        deltatheta, theta1, theta2,
        beta0, beta1, beta2,
        deltaomega, omega1, omega2,
        deltalambda;

    static double S[100] = {0};
    double St = 0;

    e = (double)sqrt(2*f - pow(f,2));
    el = e/(1 - f);

    double phi[100];
    double lambda[100];

    FILE *fp;

    if (argc != 3) {
        fprintf(stderr, "usage:policalc datafile nlf\n");
        exit(0);
    }

    if ((fp = fopen(argv[1], "r")) == NULL) {
        fprintf(stderr, "can't open the file\n");
        exit (1);
    }

    int i, j, flag;
    for (i = 0; i < nlf; i++) {
        fscanf(fp, "%lf %lf", &phi[2*i], &phi[2*i+1]);
        fscanf(fp, "%lf %lf", &lambda[2*i], &lambda[2*i+1]);
    }

    for (j = 0; j < nlf; j++) {
        beta1 = fabs(atan((1 - f)*tan(phi[2*j])));
        beta2 = fabs(atan((1 - f)*tan(phi[2*j+1])));

        deltalambda = (double)lambda[2*j+1] - (double)lambda[2*j];

        double n = el/(el + e);
    }
}

```

```

double A = sin(beta1)*sin(beta2);
double B = cos(beta1)*cos(beta2);

double F = acos(A + B*cos(deltalambda));
double C = B*sin(fabs(deltalambda))/sin(F);
double m = 1 - pow(C,2);

double h = pow(el,2)*m;
double P = (m/tan(F)) - (A/sin(F));

double C2 = pow(C,2);
double F3 = pow(F,3);
double F2 = pow(F,2);
double n3 = pow(n,3);

x = (pow(e,2)*C/128.0)*(128*n*F + 128*pow(e,2)*pow(n,2)*C2*F -
8*h*F - 8*h*sin(F)*cos(F) + 128*pow(e,2)*pow(n,2)*P*F2 +
16*pow(el,2)*P*pow(sin(F),2) + 128*pow(e,4)*n3*pow(C,4)*F -
24*pow(e,2)*n*h*C2*F + 3*pow(h,2)*F - 8*pow(e,2)*n*h*C2*sin(F)*cos(F) +
5*pow(h,2)*sin(F)*cos(F) - 64*pow(e,4)*n3*C2*m*F3 -
2*pow(h,2)*pow(sin(F),3)*cos(F) + (16*pow(e,2)*pow(el,2)*n +
448*pow(e,4)*n3)*C2*P*F2 - 16*pow(e,2)*n*h*P*F2 +
16*pow(e,2)*pow(el,2)*n*C2*P*pow(sin(F),2) - 8*pow(el,2)*h*P*pow(sin(F),2)
- 16*n*h*P*F*sin(F)*cos(F) - 192*pow(e,4)*n3*C2*P*F3*(1.0/tan(F)) -
8*pow(el,2)*h*P*pow(sin(F),2)*pow(cos(F),2) + 128*pow(e,4)*n3*pow(P,2)*F3 +
32*pow(e,2)*pow(el,2)*n*pow(P,2)*F*pow(sin(F),2) +
8*pow(el,4)*pow(P,2)*pow(sin(F),3)*cos(F));

deltaomega = fabs(deltalambda) + x;

omegal = atan((1.0/sin(deltaomega))*(cos(deltaomega) -
(tan(beta2)/tan(beta1))));
omega2 = omegal + deltaomega;

beta0 = atan(tan(beta1)/cos(omegal));
theta1 = asin( sin(beta0) * sin(omegal) );
theta2 = asin( sin(beta0) * sin(omega2) );
deltatheta = theta2 - theta1;

double deltaj1;
double deltaj3;
double deltaj5;
double deltaj7;
double deltaj9;

deltaj1 = (sin(theta2) / cos(theta2))
- (sin(theta1) / cos(theta1));

deltaj3 = (sin(theta2) / pow(cos(theta2),3))
- (sin(theta1) / pow(cos(theta1),3));

deltaj5 = (sin(theta2) / pow(cos(theta2),5))
- (sin(theta1) / pow(cos(theta1),5));

deltaj7 = (sin(theta2) / pow(cos(theta2),7))
- (sin(theta1) / pow(cos(theta1),7));

```



```

deltaj9 = (sin(theta2) / pow(cos(theta2),9))
          - (sin(theta1) / pow(cos(theta1),9));

double k00, k20, k22, k24, k26, k28, k40,
       k42, k44, k46, k60, k62, k64, k80, k82, k100;

k00 = 1 + ((2.0/3.0) * pow(e1,2)) - ((1.0/15.0)*pow(e1,4))
      + ((4.0/105.0)*pow(e1,6)) - ((8.0/315.0)*pow(e1,8))
      + ((64.0/3465.0)*pow(e1,10));

k20 = ((2.0/3.0)*pow(e1,2)) - ((2.0/15.0)*pow(e1,4))
      + ((4.0/35.0)*pow(e1,6)) - ((32.0/315.0)*pow(e1,8)) +
      ((64.0/393.0)*pow(e1,10));

k22 = ((2.0/45.0)*pow(e1,4)) - ((8.0/105.0)*pow(e1,6))
      + ((32.0/315.0)*pow(e1,8)) - ((256.0/2079.0)*pow(e1,10));

k24 = ((32.0/1575.0)*pow(e1,6)) - ((256.0/4725.0)*pow(e1,8))
      + ((1024.0/10395.0)*pow(e1,10));

k26 = ((128.0/11025.0)*pow(e1,8)) - ((1024.0/24255.0)*pow(e1,10));

k28 = ((8192.0/1091475.0)*pow(e1,10));

k40 = ((1.0/45.0)*pow(e1,4)) - ((4.0/105.0)*pow(e1,6))
      + ((16.0/315.0)*pow(e1,8)) - ((128.0/2079.0)*pow(e1,10));

k42 = ((16.0/1575.0)*pow(e1,6)) - ((128.0/4725.0)*pow(e1,8))
      + ((512.0/10395.0)*pow(e1,10));

k44 = ((64.0/11025.0)*pow(e1,8)) - ((512.0/24255.0)*pow(e1,10));

k46 = ((4096.0/1091475.0)*pow(e1,10));

k60 = ((4.0/525.0)*pow(e1,6)) - ((32.0/1575.0)*pow(e1,8))
      + ((128.0/3465.0)*pow(e1,10));

k62 = ((16.0/3675.0)*pow(e1,8)) - ((128.0/8085.0)*pow(e1,10));

k64 = ((1024.0/363825.0)*pow(e1,10));

k80 = ((8.0/2205.0)*pow(e1,8)) - ((64.0/4851.0)*pow(e1,10));

k82 = ((512.0/218295.0)*pow(e1,10));

k100 = ((64.0/31185.0)*pow(e1,10));

double c2, c4, c6, c8, c10;

c2 = pow(cos(beta0),2);
c4 = pow(cos(beta0),4);
c6 = pow(cos(beta0),6);
c8 = pow(cos(beta0),8);
c10 = pow(cos(beta0),10);

S[j] = pow(a,2)*(1 - f)*((k00*deltatheta) - (k20*c2 + k22*c4 +
k24*c6 + k26*c8 + k28*c10)*deltaj1 - (k40*c4 + k42*c6 + k44*c8 +
k46*c10)*deltaj3 - (k60*c6 + k62*c8 + k64*c10)*deltaj5 - (k80*c8 +
k82*c10)*deltaj7 - (k100*c10)*deltaj9);

```

```
/* Algoritmo do sinal da area */
flag = 0;

    if (fabs(lambda[2*j]) > fabs(lambda[2*j + 1]) ) {
        flag = 1;
    }
    else
        flag = 0;

    if ( flag == 1 ) {
        St -= S[j];
    }
    else {
        St += S[j];
    } /* fim do calculo da area com sinal */
}

printf("\nAreas\n\n");
for (i = 0; i < nlf; i++)
    printf("A area %d eh: %f\n", i+1, (double)S[i]);
printf("\nA area total eh: %f\n", (double)St);

fclose(fp);

return 0;
}
```

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A metodologia proposta foi aplicada no cálculo de áreas no elipsóide de revolução adotado até pouco tempo atrás pelo SGB, ou seja, o Elipsóide de Referência de 1967, associado ao SAD69, que tem seus parâmetros definidos pela União Geodésica e Geofísica Internacional de 1967 (IUGG), para áreas pequenas, e também no elipsóide de Referência associado ao WGS84, tanto para áreas pequenas como para áreas grandes.

Para aplicação da metodologia proposta, inicialmente considerou-se polígonos (parcelas) pequenos que constituem a Gleba Pó de Serra (INCRA, 1998b apud MORAES, 2001, p.218-224). Estas parcelas têm suas áreas calculadas pela metodologia que é empregada para esta pesquisa, com a diferença de sua implementação que, em Moraes 2001, foi programada em HP42S e, neste trabalho de pesquisa, a metodologia proposta foi programada em linguagem C, devido a sua versatilidade e rapidez na execução dos processos. Os resultados comparativos são mostrados no quadro a seguir, em SAD69 (ver coordenadas da parcela 02 no Anexo E):

Parcelas (SAD69)	Áreas obtidas pela programação em HP 48GX (m <sup>2</sup> )	Áreas obtida pelo programa proposto (m <sup>2</sup> )	Diferença percentual entre as Áreas (%)
Parcela 02	100272,9	101961,525659	1,6 %
Parcela 08	114507,9	114312,173546	0,17 %
Parcela 10	111614,4	112043,679010	0,38 %
Parcela 12	111946,8	112553,175266	0,54 %
Gleba Pó de Serra	1561996,2	1559114,907944	0,18 %

Quadro – 1.1 – Análise Comparativa da Metodologia Proposta em Áreas Pequenas

A eficácia do algoritmo proposto também foi testada em polígonos de dimensões maiores, que descrevem as áreas aproximadas de países como o Peru, Bolívia, Paraguai e Uruguai. Neste caso, essas áreas calculadas empregando-se o algoritmo proposto neste trabalho foram comparadas com as suas correspondentes obtidas através do programa Spring

4.3, no qual utilizou-se a Projeção Cônica Equivalente de Albers, projeção esta que tem como característica principal a vantagem de preservar áreas. Esses resultados comparativos são mostrados nos quadros a seguir:

Polígonos (SAD69)	Área Obtida pelo programa proposto (m <sup>2</sup> )	Área Obtida pelo Software Spring 4.3 (m <sup>2</sup> )	Diferença percentual entre as Áreas (%)
Peru	1090257850754,383300	1084524604422,77	0,52 %
Bolívia	1055793568426,242900	1050883510109,72	0,46 %
Paraguai	411110946398,216550	409343699026,77	0,43 %
Uruguai	207521208023,161990	206727383963,21	0,38 %

Quadro – 1. 2 – Análise Comparativa da Metodologia Proposta em Áreas Grandes no elipsóide do sistema SAD69

Polígonos (WGS84)	Área Obtida pelo programa proposto (m <sup>2</sup> )	Área Obtida pelo Software Spring 4.3 (m <sup>2</sup> )	Diferença percentual entre as Áreas (%)
Peru	1090250063066,009000	1084516948237,03	0,52 %
Bolívia	1055786013141,445100	1050876076970,72	0,46 %
Paraguai	411107994303,877380	409340793307,84	0,43 %
Uruguai	207519708078,420530	206725906733,98	0,38 %

Quadro – 1. 3 – Análise Comparativa da Metodologia Proposta em Áreas Grandes no elipsóide do sistema WGS84

A observação dos valores do Quadro-1.1, indicam que a implementação da metodologia proposta em linguagem de programação se mostrou eficiente no cálculo de áreas pequenas. O fato dos valores comparados estarem muito próximos, com baixo percentual de diferença entre ambos, caracterizam uma boa avaliação das áreas por parte do programa proposto, com diferenças médias se situando em torno de 0,57%. As pequenas diferenças encontradas podem ser atribuídas à precisão numérica de cada linguagem de programação e na capacidade de recursos oferecidos por cada uma delas. Salienta-se que o algoritmo

programado foi o mesmo, tanto no programa executável gerado na presente pesquisa, quanto no elaborado na linguagem da HP42S.

Em relação aos resultados mostrados nos quadros 1.2 e 1.3, a igualdade de valores na diferença percentual entre as áreas calculadas nos dois elipsóides, mostra uma característica importante para a metodologia proposta em termos de programação, que é a generalidade, ou seja, a proposta é eficiente para qualquer elipsóide adotado. Também esta característica se mostra contemplada no fato de se comparar os resultados numéricos de um algoritmo matemático desenvolvido diretamente por integração e os mesmos oriundos de um programa computacional que faz uso de uma projeção equivalente, ou seja, realiza o cálculo das áreas desenvolvidas em um plano de referência.

Em relação às diferenças percentuais entre as áreas calculadas pelo programa desenvolvido e as suas correspondentes na projeção equivalente, observam-se valores médios em torno de 0,45%. Essas diferenças são insignificantes do ponto de vista estatístico, e podem ser atribuídas às diferenças de metodologias empregadas em ambos os cálculos. Observa-se que das projeções equivalentes, por serem uma forma indireta de cálculo da área elipsoidal, pode-se esperar algum tipo de inconsistência em relação a métodos numéricos diretos, até porque seu desenvolvimento é feito para áreas não muito grandes. Nenhuma projeção evitará a totalidade das deformações (DUARTE, 1994, p.84).

A análise comparativa da eficiência do programa proposto para áreas grandes e pequenas, mostra um desempenho semelhante entre ambas. Esse resultado não gerou surpresa, uma vez não poderiam ocorrer diferenças significativas nesse aspecto, por se tratar do mesmo algoritmo programado (codificado) de forma diferente. As pequenas diferenças podem residir nas características intrínsecas ao ambiente de programação da calculadora HP42S, bem como ao número de dígitos utilizado.

A série que é dada como solução da integral (3.17) é truncada em seus termos de potências maiores que  $y^{11}$ , pois cada termo desta série é resolvido em função dos parâmetros do elipsóide, o qual indica a contribuição máxima de cada termo da série na solução da expressão (3.75), que é a fórmula para o cálculo de áreas. Como mostra Danielsen (1989, p.65):

$$S = e^{10} b^2 \left( \underbrace{\frac{64}{3465}}_{30m^2} \Delta\theta - \underbrace{\frac{24576}{3274425}}_{4m^2} c^2 \Delta J_1 - \underbrace{\frac{4096}{1091475}}_{2m^2} c^4 \Delta J_3 - \underbrace{\frac{1024}{363825}}_{1,5m^2} c^6 \Delta J_5 - \underbrace{\frac{512}{218295}}_{1m^2} c^8 \Delta J_7 - \right. \\ \left. - \underbrace{\frac{64}{31185}}_{1m^2} c^{10} \Delta J_9 \right)$$

O que indica que se uma exatidão de distâncias de  $1m^2$  for requerida então o desenvolvimento dos termos até  $e^{10}$  podem ser omitidos, com exceção do termo  $\Delta\theta$ . O que se salienta a influência dos termos da série dada no erro cometido, na obtenção dos resultados significativos de áreas.

## **5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES**

### **5.1 Conclusões**

Pelos resultados obtidos neste trabalho de pesquisa, conclui-se que a metodologia proposta para o cálculo de áreas atende de forma adequada a sua implementação em linguagem computacional. O algoritmo cumpriu de forma satisfatória as exigências de generalidade e empregabilidade no cálculo de áreas. A grande diversidade na forma dos polígonos empregados, indica que o programa é geral também nesse aspecto, mesmo quando composto por várias linhas geodésicas. O programa também não mostrou limitação em relação ao número de lados do polígono, tendo-se mostrado eficiente para polígonos com número variado de lados, em polígonos regulares ou irregulares.

A causa principal das pequenas diferenças de valores encontradas nos resultados das áreas calculadas são esperados e facilmente explicáveis pelos recursos de precisão numérica de cada linguagem de programação e pela comparação direta com um programa que faz uso de uma projeção plana.

### **5.2 Recomendações**

Um algoritmo de cálculo de área, para ser genérico, tem que ser eficiente tanto para áreas grandes quanto para áreas pequenas. No caso do cálculo de áreas grandes, existe o problema do fator comparativo, uma vez que, nesses casos, é fundamental conhecer a qualidade com que as áreas grandes foram determinadas. Em geral, os valores dessas áreas não provêm de levantamentos de campo, mas de formas indiretas ou pelo uso de projeções equivalentes. Por esse motivo, para comprovações complementares da eficiência do algoritmo proposto nesta pesquisa, recomendam-se algumas medidas, especialmente para trabalhos futuros, como:

- Implementação da rotina em outras linguagens de programação;
- Alteração dos limites de integração da integral dada por (3.6) e sua conseqüente implementação na rotina gerada pela modificação, para cálculo da área total do elipsóide;

- Verificação em número maior e mais variado de polígonos, tanto em termos de tamanho como em termos de forma.

- Expansão da série dada por (3.17) para potências maiores que  $y^{11}$ , para verificação da influência do erro no cálculo de áreas.



## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, R. L. VARELLA, L.E. Metodologia para cálculo das áreas dos blocos de exploração e produção de petróleo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA. 19, 1999, Recife, **Anais...** Recife. S. n., 1999, 1 CD-Room

**Brasil.** Lei nº 10267, de 28 de agosto de 2001. Altera dispositivos das Leis nº 4947, de 6 de abril de 1966, 5868, de 12 de dezembro de 1972, 6015 de 31 de dezembro de 1973, 6739 de 5 de dezembro de 1979, 9393 de 19 de dezembro de 1996, e dá outras providências. Disponível em: < [http:// www. planalto.gov.br](http://www.planalto.gov.br) >. Acesso em: 15 de novembro 2005.

DANIELSEN, J. The area under the geodesic. **Survey Review**, v. 30, n. 232, p. 61-66, 1989.

DIAZ, J. M. C.; OLIVEIRA, C. L. Cálculo de área de um polígono elipsoidal. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA. 20, 2001, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: PUCRS, 2001, 1 CD-Room.

DUARTE, P. A.; **Fundamentos de Cartografia.**, Florianópolis, Editora da UFSC, 1994.

GALO, Mauricio; MONICO, João F. G; OLIVEIRA, Leonardo C. Cálculo de áreas de polígonos sobre o elipsóide usando projeções equivalentes. In: MITISHITA, E. A. **Série em Ciências Geodésicas v.3 “Novos Desenvolvimento em Ciências Geodésicas”**, Curitiba – Imprensa Universitária da UFPR. p. 265-479, 2003

GEMAEL, C. Introdução à Geodésia Geométrica. **Apostila.** Curso de Pós – Graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná. (1987).

GILLISSEN, I. Area Computation of polygon on an ellipsoid. **Survey Review**, v. 32, n. 248, p. 92 – 98, 1993.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de Cálculo**, 4. ed, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 2000. v.2.

HECK, B. **Rechenverfahren und Auswertmodelle der Landsvermessung.** 3 Auf. Heidelberg: Wichmann, 1995.

JORDAN-EGGERT. **Jordan's handbook of Geodesy ( Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde)**. Washington: Corps of engineers, U. S. Army – Army Map Service. English translation by Martha W. Carta, v. 3, 1962b.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra 1994, 2v.

LEHMANN, C. H. **Geometria Analítica**. Porto Alegre. Globo, 1979.

MORAES, C. V. **Aprimoramento da Concepção do Modelo Geodésico para a Caracterização de Estremas no Espaço Geométrico**. f. 277, Tese ( Doutorado em Ciências Geodésicas ) – Departamento de Geomática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2001.

MURRAY, R. SPIEGEL. **Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas**. Tradução Roberto Chioccarello. São Paulo McGraw-Hill do Brasil, p.78, 1973.

RAINSFORD, H. F. Long geodesics on the ellipsoid. **Bulletin Géodésique**, v. 37, p. 12 – 22, 1995.

SODANO, E. M. A rigorous non-iterative procedure for rapid inverse and direct geodetic problems. **Bulletin Géodésique**, n. 75, p. 69 – 89, 1958.

WOLFRUM, O. Differential relations in the system of geographical coordinates. **Manuscripta Geodaetica, Berlin**, v. 20, p. 413 – 420, 1995.

ZAKATOV, P. S. **Curso de Geodésia Superior**. Madrid: Rubiños, 1981.

**ANEXO**

---

## ANEXO A – Trigonometria Esférica

## Trigonometria Esférica Fórmulas Gerais

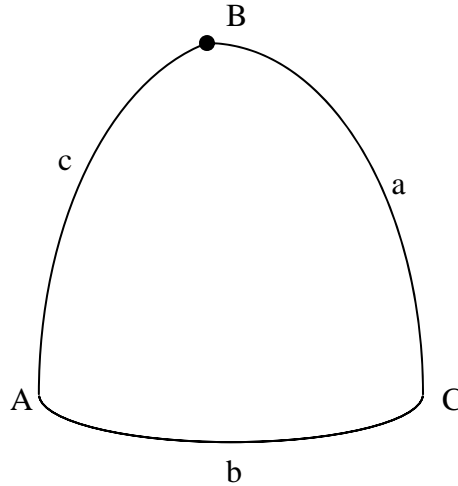


Figura A1 – Triângulo Esférico

FONTE: Moraes 2001 p.267.

Triângulo Esférico Retângulo: é aquele que tem um ângulo igual a  $90^{\circ}$ .

Triângulo Esférico Retilátero: é aquele que tem um lado igual a  $90^{\circ}$ .

Fórmulas Gerais	Fórmulas Simplificadas	
	$\hat{A} = 90^{\circ}$	$a = 90^{\circ}$
$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A$	$\cos a = \cos b \cdot \cos c$	$\cos A = -\cotg b \cdot \cotg c$
$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos B$		$\cos b = \operatorname{sen} c \cdot \cos B$
$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C$		$\cos c = \operatorname{sen} b \cdot \cos C$
$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos a$	$\cos a = \cotg B \cdot \cotg C$	$\cos A = -\cos B \cdot \cos C$
$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos b$	$\cos B = \operatorname{sen} C \cdot \cos b$	
$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \cos c$	$\cos C = \operatorname{sen} B \cdot \cos c$	
$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$	$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} B$	$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} A$
$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$	$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} C$	$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} A$
$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$		
$\cotg a \cdot \operatorname{sen} c = \cotg A \cdot \operatorname{sen} B + \cos c \cdot \cos B$	$\cotg a = \cotg c \cdot \cos B$	$\cotg A = -\cos c \cdot \cotg B$
$\cotg a \cdot \operatorname{sen} b = \cotg A \cdot \operatorname{sen} C + \cos b \cdot \cos C$	$\cotg a = \cotg b \cdot \cos C$	$\cotg A = -\cos b \cdot \cotg C$
$\cotg b \cdot \operatorname{sen} a = \cotg B \cdot \operatorname{sen} C + \cos a \cdot \cos C$		$\cotg b = \cotg B \cdot \operatorname{sen} C$
$\cotg b \cdot \operatorname{sen} c = \cotg B \cdot \operatorname{sen} A + \cos c \cdot \cos A$	$\cotg B = \cotg b \cdot \operatorname{sen} c$	
$\cotg c \cdot \operatorname{sen} a = \cotg C \cdot \operatorname{sen} B + \cos a \cdot \cos B$		$\cotg c = \cotg C \cdot \operatorname{sen} B$
$\cotg c \cdot \operatorname{sen} b = \cotg C \cdot \operatorname{sen} A + \cos b \cdot \cos A$	$\cotg C = \cotg c \cdot \operatorname{sen} b$	

## ANEXO B – Relações Entre Linhas de Arcos Associados

### Relações entre linhas trigonométricas de arcos associados

A) Arcos Complementares:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = \cos(90^\circ - x); \\ \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}(90^\circ - x); \\ \operatorname{sec} x = \operatorname{csc}(90^\circ - x); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \operatorname{sen}(90^\circ - x); \\ \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}(90^\circ - x); \\ \operatorname{csc} x = \operatorname{sec}(90^\circ - x); \end{array} \right.$$

B) Arcos Suplementares:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(180^\circ - x) = \operatorname{sen} x; \\ \cos(180^\circ - x) = -\cos x; \\ \operatorname{tg}(180^\circ - x) = -\operatorname{tg} x; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{cotg}(180^\circ - x) = -\operatorname{cotg} x; \\ \operatorname{sec}(180^\circ - x) = -\operatorname{sec} x; \\ \operatorname{csc}(180^\circ - x) = \operatorname{csc} x; \end{array} \right.$$

C) Arcos que diferem de meia circunferência (explementares):

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(180^\circ + x) = -\operatorname{sen} x; \\ \cos(180^\circ + x) = -\cos x; \\ \operatorname{tg}(180^\circ + x) = \operatorname{tg} x; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{cotg}(180^\circ + x) = \operatorname{cotg} x; \\ \operatorname{sec}(180^\circ + x) = -\operatorname{sec} x; \\ \operatorname{csc}(180^\circ + x) = -\operatorname{csc} x; \end{array} \right.$$

D) Arcos replementares ou simétricos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(360^\circ - x) = -\operatorname{sen} x; \\ \cos(360^\circ - x) = \cos x; \\ \operatorname{tg}(360^\circ - x) = -\operatorname{tg} x; \\ \operatorname{cotg}(360^\circ - x) = -\operatorname{cotg} x; \\ \operatorname{sec}(360^\circ - x) = \operatorname{sec} x; \\ \operatorname{csc}(360^\circ - x) = -\operatorname{csc} x; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x; \\ \cos(-x) = \cos x; \\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x; \\ \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x; \\ \operatorname{sec}(-x) = \operatorname{sec} x; \\ \operatorname{csc}(-x) = -\operatorname{csc} x; \end{array} \right.$$

## ANEXO C – Identidades da Elipse Meridiana

### Identidades da Elipse Meridiana

FONTE: Moraes, 2001,p. 264-266.

$$a = b\sqrt{1+e'^2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 1+e'^2 \Rightarrow a^2 = b^2(1+e'^2); \quad (\text{C - 1.1})$$

$$1 = (1-e^2)(1+e'^2); \quad (\text{C - 1.2})$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2}; \quad (\text{C - 1.3})$$

$$\text{sen}\varphi = V\text{sen}\beta; \quad (\text{C - 1.4})$$

$$V^2 = \frac{1+e'^2}{1+e'^2\text{sen}^2\beta}; \quad (\text{C - 1.5})$$

$$0 = e'^2 - e^2 - e^2e'^2; \quad (\text{C - 1.6})$$

$$d\varphi = \frac{V^2}{\sqrt{1+e'^2}} d\beta; \quad (\text{C - 1.7})$$

$$p = N \cos \varphi; \quad (\text{C - 1.8})$$

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\text{sen}^2\varphi)^3}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{\sqrt{(1-e'^2\cos^2\varphi)^3}} = \frac{c}{\sqrt{(1-\eta^2)^3}} = \frac{c}{V^3}; \quad (\text{C - 1.9})$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\text{sen}^2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\text{sen}^2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1-f)^2\text{sen}^2\varphi}} = \frac{M(1-e^2\text{sen}^2\varphi)}{1-e^2} = \\ &= \frac{c}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}} = \frac{c}{\sqrt{1+\eta^2}} = \frac{c}{V} = \frac{a}{W} \end{aligned} \quad (\text{C - 1.10})$$

$$n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{-1+\sqrt{1+e'^2}}{1+\sqrt{1+e'^2}} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} = \frac{f}{2-f}; \quad (\text{C - 1.11})$$

$$\eta^2 = e'^2\cos^2\varphi = V^2 - 1; \quad (\text{C - 1.12})$$

$$R_m = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\text{sen}^2\varphi} = \frac{c}{V^2} = \frac{b}{W^2}; \quad (\text{C - 1.13})$$

$$\frac{1}{R_{A_g}} = \frac{\cos^2 A_g}{M_m} + \frac{\text{sen}^2 A_g}{N_m} = \frac{N}{1+e'^2\cos^2\varphi\cos^2 A_g} = \frac{M}{1-e^2\cos^2\beta\text{sen}^2 A_g}; \quad (\text{C - 1.14})$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\text{sen} \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\cos \varphi}{\cos \beta}; \quad (\text{C} - 1.15)$$

$$V^2 = \frac{N}{M} = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \beta} = \frac{1 + e'^2}{1 + e'^2 \text{sen}^2 \beta}; \quad (\text{C} - 1.16)$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 \varphi}; \quad (\text{C} - 1.17)$$

$$W^2 = (1 - e^2)V^2 = \frac{V^2}{1 + e'^2}; \quad (\text{C} - 1.18)$$

$$\frac{V}{W} = \frac{c}{a} = \frac{a}{b} = \sqrt{1 + e'^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}; \quad (\text{C} - 1.19)$$

$$1 = (1 - e^2)(1 + e'^2) = f + \sqrt{1 - e^2} = f + \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}}; \quad (\text{C} - 1.20)$$

$$1 - e^2 = (1 - f)^2; \quad (\text{C} - 1.21)$$

$$0 = e'^2 - e^2 - e^2 e'^2; \quad (\text{C} - 1.22)$$

$$\tan \beta = (\tan \varphi) \sqrt{1 - e^2} = (\tan \varphi)(1 - f); \quad (\text{C} - 1.23)$$

$$\tan \varphi = (\tan \beta) \sqrt{1 + e'^2}; \quad (\text{C} - 1.24)$$

$$\text{sen} \varphi = V \text{sen} \beta; \quad (\text{C} - 1.25)$$

$$\cos \varphi = (\cos \beta) V \sqrt{1 - e^2}; \quad (\text{C} - 1.26)$$

$$\cos \beta = \frac{(\cos \varphi) \sqrt{1 + e'^2}}{V}; \quad (\text{C} - 1.27)$$

$$\cos(\varphi - \beta) = \frac{(\text{sen} 2\varphi)(1 - \sqrt{1 - e^2})}{2V\sqrt{1 - e^2}} = \frac{f \text{sen} 2\varphi}{2W} = \frac{fV}{2} \text{sen} 2\beta; \quad (\text{C} - 1.28)$$

$$\tan \gamma = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{\tan \varphi}{1 + e'^2}; \quad (\text{C} - 1.29)$$

$$\tan(\varphi - \beta) = \frac{\tan \varphi - \tan \beta}{1 + \tan \varphi \tan \beta} = \frac{(-1 + \sqrt{1 + e'^2}) \text{sen} \varphi \cos \varphi}{1 + (-1 + \sqrt{1 + e'^2}) \cos^2 \varphi} = \frac{f \text{sen} 2\varphi}{2(1 - f \text{sen}^2 \varphi)}; \quad (\text{C} - 1.30)$$

$$\tan(\varphi - \gamma) = \frac{\tan \varphi - \tan \gamma}{1 + \tan \varphi \tan \gamma} = \frac{e'^2 \text{sen} \varphi \cos \varphi}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\eta^2 \tan \varphi}{V^2} = \frac{e'^2 \text{sen} 2\varphi}{2(1 + e'^2 \cos^2 \varphi)}; \quad (\text{C} - 1.31)$$

$$\frac{d\varphi}{d\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \beta} = \frac{V^2}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{W^2}{\sqrt{1 - e^2}}; \quad (\text{C} - 1.32)$$

## ANEXO D – Algoritmo para Conversão de coordenadas

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>

double deg2rad(const double deg[]);

int main(int argc, char **argv)
{
    FILE *fpr, *fpw;
    double deg[3];
    int i;
    int num_coord;

    if( argc != 2 ) {
        fprintf(stderr, "Usage: deg2rad.exe filename\n");
        exit (EXIT_FAILURE);
    }

    fpr = fopen(argv[1], "r");
    fpw = fopen(strcat(argv[1], ".rad"), "w");

    if( fpr == NULL || fpw == NULL ) {
        fprintf(stderr, "deg2rad: I/O error\n");
        exit(EXIT_FAILURE);
    }

    fscanf(fpr, "%d", &num_coord);

    for( i = 0; i < num_coord; ++i ) {
        fscanf(fpr, "%lf %lf %lf", &deg[0], &deg[1], &deg[2]);
        fprintf(fpw, "%.12f\n", deg2rad(deg));
    }

    fclose(fpr);
    fclose(fpw);

    return(EXIT_SUCCESS);
}

double deg2rad(const double deg[])
{
    double rad_value =
        ((abs(deg[0]) + (deg[1] + (deg[2] / 60.0))/60) *
(M_PI / 180));

    return ( (deg[0] > 0) ? 1 : -1 ) * rad_value;
}

```



## ANEXO E - Quadro das coordenadas da Parcela 02

Parcela	Estremas	Coordenadas		Integração	Sgn	N. do lf
		Latitude	Longitude			
02	AZM02	- 23° 43' 34,2019"	- 50° 58' 42,1853"	3972793,7	+	41
	SAT02	- 23° 43' 29,4803"	- 50° 58' 42,1351"			
	M27	- 23° 43' 39,9880"	- 50° 58' 42,3100"	9874637,0	+	43
	AZM02	- 23° 43' 34,2019"	- 50° 58' 42,1853"			
	M16	- 23° 43' 41,6426"	- 50° 58' 57,0913"	1170465848,9	+	44
	M27	- 23° 43' 39,9880"	- 50° 58' 42,3100"			
	M16	- 23° 43' 41,6426"	- 50° 58' 57,0913"	319363121,7	-	35
	EJ27A	- 23° 43' 35,3641"	- 50° 58' 53,0581"			
	EJ27A	- 23° 43' 35,3641"	- 50° 58' 53,0581"	221456947,8	-	36
	EJ28	- 23° 43' 32,1688"	- 50° 58' 50,2612"			
	EJ28	- 23° 43' 32,1688"	- 50° 58' 50,2612"	46952061,1	-	37
	M17	- 23° 43' 30,2445"	- 50° 58' 49,6682"			
	M17	- 23° 43' 30,2445"	- 50° 58' 49,6682"	596440876,1	-	38
	SAT02	- 23° 43' 29,4803"	- 50° 58' 42,1351"			
				S=100272,9 m <sup>2</sup> 10,0273ha		

FONTE: (INCRA, 1998b, apud MORAES, 2001, p. 220)