



**UFSM**

**Dissertação de Mestrado**

**AJUSTAMENTO E  
CONTROLES DE QUALIDADE  
DAS LINHAS POLIGONAIS**

---

**MÁRIO STRINGHINI**

**PPGG**

**Santa Maria, RS, BRASIL**

**2005**

**AJUSTAMENTO E  
CONTROLES DE QUALIDADE  
DAS LINHAS POLIGONAIS**

---

**por**

**Mário Stringhini**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geomática, área de concentração em Tecnologia da Geoinformação, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM-RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Geomática**.

**PPGG**

**Santa Maria, RS – Brasil**

**2005**

**Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Ciências Rurais  
Programa de Pós-Graduação em Geomática**

A comissão examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação de Mestrado

**AJUSTAMENTO E  
CONTROLES DE QUALIDADE  
DAS LINHAS POLIGONAIS**

elaborada por  
**MÁRIO STRINGHINI**

Como requisito parcial para a obtenção do grau de  
**Mestre em Geomática**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

---

**Prof. Dr. CARLITO VIEIRA DE MORAES**  
(Presidente/Orientador)

---

**Prof. Dr. ENIO GIOTTO**  
(Co-orientador)

---

**Prof. Dr. SÉRGIO FLORÊNCIO DE SOUZA**  
(Membro)

Santa Maria, 3 de março de 2005.

## Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S918a Stringhini, Mário

Ajustamento e controles de qualidade das linhas poligonais / Mário Stringhini. Orientador: Dr. Carlito Vieira de Moraes; Co-orientador: Dr. Enio Giotto – Santa Maria, 2005.

129 f.; il.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Geomática – Área de Concentração em Tecnologia da Geoinformação, Centro de Ciências Rurais, Universidade Federal de Santa Maria.

1. Geodésia. 2. Topografia. 3. Ajustamento Pelo Método dos Mínimos Quadrados. 4. Controle de Qualidade. 5. Linhas Poligonais. 6. Teste Qui-quadrado. 7. Estimação por Ponto. I. Título.

CDD 526  
551.4

**Bibliotecária responsável:**  
**Isabel Merlo Crespo**  
**CRB10/1201**

---

© 2005

Todos os direitos autorais reservados a Mário Stringhini. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho poderá ser feita desde que citada a fonte.

Fones: (0xx51) 33115706 e (0xx51) 99626808

Endereço Eletrônico: [mario.stringhini@poa.incra.gov.br](mailto:mario.stringhini@poa.incra.gov.br)

---

## Agradecimentos

O autor deseja externar seus agradecimentos aos seguintes professores, instituições e colaboradores.

Ao Professor Doutor Carlito Vieira de Moraes, professor da Universidade Federal de Santa Maria, a dedicada orientação desta dissertação;

Ao Professor Doutor Enio Giotto, professor da Universidade Federal de Santa Maria, a co-orientação desta dissertação;

Ao Professor Doutor Júlio Cezar Farret, professor da Universidade Federal de Santa Maria, a co-orientação desta dissertação;

Ao Professor Doutor Attus Pereira Moreira, professor aposentado da Universidade Federal de Santa Maria, o incentivo inicial ao aluno para a realização do curso;

Aos professores Doutores Francisco Humberto Simões Magro e Sérgio Florêncio de Souza da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o apoio recebido;

Ao Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária, a licença com remuneração concedida para realização do curso;

Aos colegas do INCRA, que sempre me incentivaram e acompanharam a caminhada para conclusão do curso;

À Maria Helena, minha irmã e Lourdes Patrícia, colega vinda de um país vizinho, o apoio ofertado durante a realização do curso;

Aos, como se fossem meus pais, Cláudio e Lourdes, os momentos passados juntos;

Aos colegas de curso Luiz Bevilacqua, Adriano e demais colegas, a interação e troca de idéias ocorridas durante o curso;

Aos colegas de moradia Leandro, Alarico, Luciano e Márcio; os momentos de convívio compartilhados;

À Universidade Federal de Santa Maria que me acolheu e me ofereceu o apoio logístico e intelectual à execução deste trabalho;

A todos que de uma forma ou de outra colaboraram com a minha formação intelectual nos dois anos passados na cidade de Santa Maria.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE QUADROS E FIGURAS</b> .....	ix
<b>LISTA DE ANEXOS</b> .....	x
<b>LISTA DE SIGLAS, SÍMBOLOS E ABREVIATURAS</b> .....	xi
<b>RESUMO</b> .....	xiv
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	5
<b>2.1 TOPOGRAFIA E GEODÉSIA</b> .....	5
<b>2.2 GRANDEZA, MEDIÇÃO E OBSERVAÇÃO</b> .....	5
<b>2.3 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS</b> .....	6
<b>2.3.1 Linguagem Matricial</b> .....	7
<b>2.3.2 Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados</b> .....	9
<b>2.3.3 Matriz dos Pesos</b> .....	10
<b>2.3.4 Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados com a Matriz dos Pesos</b> .....	11
<b>2.4 MODELO MATEMÁTICO</b> .....	12
<b>2.5 ESTATÍSTICAS</b> .....	13
<b>2.6 ESTUDO DOS ERROS DE OBSERVAÇÃO</b> .....	14
<b>2.6.1 Erros Grosseiros</b> .....	15
<b>2.6.2 Erros Sistemáticos</b> .....	15
<b>2.6.3 Erros Acidentais (Desvios de Medição Aleatórios)</b> .....	18
<b>2.6.4 Análise dos Resultados de uma Medição</b> .....	19
<b>2.7 PRECISÃO, ACURÁCIA E CORREÇÃO</b> .....	20
<b>2.8 PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS</b> .....	22
<b>2.8.1 Propagação das Covariâncias nos Modelos Lineares</b> .....	22
<b>2.8.2 Propagação das Covariâncias nos Modelos Não-Lineares</b> .....	23
<b>2.9 AJUSTAMENTO</b> .....	24

<b>2.10 CONTROLE DE QUALIDADE PARA OS LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS PLANIMÉTRICOS</b> .....	26
<b>2.10.1</b> Análise da Qualidade de uma Rede Geodésica .....	27
<b>2.10.2</b> Pré-ajustamento .....	29
<b>2.10.3</b> Durante o Ajustamento .....	29
<b>2.10.4</b> Pós-ajustamento .....	30
<b>2.11</b> NORMAS JURÍDICAS E NORMAS TÉCNICAS .....	33
<b>2.12</b> ALGORITMO .....	35
<b>3 MATERIAL E MÉTODOS</b> .....	37
<b>3.1</b> MATERIAL UTILIZADO .....	39
<b>3.1.1</b> Material de Campo .....	39
<b>3.1.2</b> Material de Escritório .....	41
<b>3.2</b> METODOLOGIA .....	42
<b>4 TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DO ERRO DE FECHAMENTO</b> .....	44
<b>4.1</b> APLICAÇÃO DO TESTE .....	45
<b>4.2</b> MATRIZES DE VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA (MVC) .....	46
<b>4.2.1</b> MVC das Distâncias .....	47
<b>4.2.2</b> MVC dos Azimutes .....	47
<b>4.2.3</b> MVC das Distâncias e Azimutes .....	49
<b>4.2.4</b> MVC das Coordenadas do Último Ponto .....	49
<b>4.2.5</b> Aplicação Final do Teste .....	50
<b>5 AJUSTAMENTO DE POLIGONAL FECHADA NO PLANO TOPOGRÁFICO PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS COM EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO DESENVOLVIDAS POR VARIAÇÃO DE COORDENADAS</b> .....	52
<b>5.1</b> PRIMEIRA DEDUÇÃO .....	52
<b>5.1.1</b> Equação de Observação para a Distância .....	53
<b>5.1.2</b> Equação de Observação para o Azimute $A_{ij}$ .....	54
<b>5.1.3</b> Equação de Observação para o Azimute $A_{ik}$ .....	55

5.1.4	Equação de Observação para o Ângulo Horário $a_{kij}$ .....	56
5.2	SEGUNDA DEDUÇÃO .....	56
5.2.1	Equação de Observação para a Distância .....	57
5.2.2	Equação de Observação para o Ângulo .....	59
5.3	SEQÜÊNCIA DE CÁLCULO DE AJUSTAMENTO .....	64
5.3.1	Modelo Matemático Natural .....	64
5.3.2	Modelo Matemático Linearizado .....	64
5.3.3	Sistema de Equações Normais .....	64
5.3.4	Vetor de Coordenadas Ajustadas .....	68
5.3.5	Variância da Unidade Peso <i>a Posteriori</i> .....	68
5.3.6	MVC das Coordenadas Ajustadas .....	68
5.3.7	Valores Observados Ajustados .....	68
5.3.8	MVC dos Valores Ajustados .....	68
5.3.9	MVC dos Resíduos .....	68
5.3.10	Teste Qui-quadrado da Forma Quadrática dos Resíduos .....	69
5.4	ITERAÇÕES .....	69
5.5	CONTROLES DE QUALIDADE DE LEVANTAMENTOS .....	71
5.5.1	Elipse dos Erros .....	72
5.5.1.1	Variâncias máxima e mínima das coordenadas do ponto .....	72
5.5.1.2	Semi-eixos da elipse dos erros .....	76
5.5.1.3	Outro método de obtenção dos semi-eixos da elipse dos erros .....	77
5.5.2	Semi-eixos da Elipse de Confiança .....	77
5.5.3	Interpretação da Elipse dos Erros, Elipse de Confiança, Podaria, Círculo do Erro de Posição e Círculo do Erro Médio .....	78
5.5.3.1	Elipse dos erros e elipse de confiança .....	79
5.5.3.2	Curva Podária .....	79
5.5.3.3	Círculo de erro de posição .....	80
5.5.3.4	Círculo do erro médio .....	80
5.5.4	Teste <i>Data Snooping</i> de Baarda .....	80
6.	EXPERIMENTAÇÃO E RESULTADOS COM ANÁLISE .....	82



<b>6.1</b>	<b>TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DO ERRO DE FECHAMENTO</b>	<b>83</b>
<b>6.2</b>	<b>AJUSTAMENTO PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS</b>	<b>89</b>
<b>6.2.1</b>	<b>Equações de Observação de Distâncias e Ângulos</b>	<b>89</b>
<b>6.2.1.1</b>	<b>Equações de observação de distâncias</b>	<b>89</b>
<b>6.2.1.2</b>	<b>Equações de observação de ângulos</b>	<b>90</b>
<b>6.3</b>	<b>ITERAÇÕES</b>	<b>98</b>
<b>6.4</b>	<b>COMPARAÇÃO DA VARIÂNCIA DA UNIDADE PESO A <i>PRIORI</i> COM VARIÂNCIA DA UNIDADE PESO A <i>POSTERIORI</i></b>	<b>103</b>
<b>6.5</b>	<b>LOCALIZAÇÃO DE ERROS NAS OBSERVAÇÕES PELO TESTE <i>DATA SNOOPING</i> DE BAARDA</b>	<b>107</b>
<b>6.6</b>	<b>PARÂMETROS DA ELIPSE DOS ERROS, ELIPSE DE CONFIANÇA, CÍRCULO DO ERRO DE POSIÇÃO E CÍRCULO DO ERRO MÉDIO</b>	<b>108</b>
<b>6.7</b>	<b>PROPOSTA ORGANIZAÇÃO DE ALGORITMO</b>	<b>112</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	<b>114</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>117</b>
	<b>OBRAS CONSULTADAS</b>	<b>121</b>

## LISTA DE QUADROS E FIGURAS

FIGURA 2.1 - CONCEITOS DA TEORIA CLÁSSICA DOS ERROS .....	20
FIGURA 2.2 - MÉDIA, DESVIO PADRÃO, CORREÇÃO E VALOR VERDADEIRO DE UMA GRANDEZA DE MEDIÇÃO .....	21
QUADRO 2.1 - ANÁLISE DE QUALIDADE DE REDE GEODÉSICA .....	28
QUADRO 2.2 - FATOR DE ESCALA BIDIMENCIONAL .....	32
FIGURA 3.1 - POLIGONAL TOPOGRÁFICA LEVANTADA .....	37
FIGURA 3.2 - FOTO DO MARCO INICIAL DO LEVANTAMENTO .....	38
FIGURA 3.3 - DESENHO DA ESTAÇÃO TOTAL .....	39
FIGURA 3.4 - DETALHES DA ORGANIZAÇÃO DO INSTRUMENTO ...	41
FIGURA 5.1 - DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E AZIMUTES NO PLANO .....	53
FIGURA 5.2 - DISTÂNCIA OBSERVADA .....	56
FIGURA 5.3 - ÂNGULO OBSERVADO .....	59
QUADRO 5.1 - ITERAÇÕES .....	70
FIGURA 5.4 - ELIPSE DOS ERROS DE CADA PONTO DE UMA REDE .....	72
FIGURA 5.5 - ROTAÇÃO DE SISTEMA CARTESIANO DO ESPAÇO BIDIMENCIONAL .....	73
FIGURA 5.6 - MEDIDAS DE ACURÁCIA GRAFICADAS .....	78
QUADRO 6.1 - PLANILHA DE CÁLCULO DO EXPERIMENTO .....	82
FIGURA 6.1 - CROQUI DO LEVANTAMENTO .....	83
FIGURA 6.2 - DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES QUI-QUADRADO PARA O TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DO ERRO DE FECHAMENTO .....	88
QUADRO 6.2 - MATRIZ <b>A</b> .....	94
QUADRO 6.3 - VALORES OBSERVADOS E CALCULADOS .....	95
QUADRO 6.4 - VALORES OBSERVADOS E CALCULADOS (1ª ITERAÇÃO) .....	98
QUADRO 6.5 - VALORES OBSERVADOS E CALCULADOS (2ª ITERAÇÃO) .....	100

QUADRO 6.6 – DADOS OBSERVADOS E CALCULADOS (3ª ITERAÇÃO) .....	101
FIGURA 6.3 - DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES QUI-QUADRADO PARA O TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DOS RESÍDUOS .....	107
QUADRO 6.7 – PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DAS ESTIMAÇÕES POR PONTO .....	109
FIGURA 6.4 – ESTIMATIVA POR PONTO ESPACIALIZADAS.....	110
QUADRO 6.8 – FLUXOGRAMA DO TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DO ERRO DE FECHAMENTO .....	111
QUADRO 6.9 – FLUXOGRAMA DO AJUSTAMENTO PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS .....	112
QUADRO 6.10 - FLUXOGRAMA DO TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DOS RESÍDUOS, MVC DAS COORDENADAS AJUSTADAS E TESTE <i>DATA SNOOPING</i> .....	113

### **LISTA DE ANEXOS**

RELATÓRIO DO LEVANTAMENTO EXTRAÍDO DO INSTRUMENTO .	124
RELATÓRIO DO PROGRAMA AJUSTMENT FOR WINDOWS .....	127

## LISTA DE SIGLAS, SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

$a_{\hat{k}ij}$	: ângulo horizontal para método variação de coordenadas
$dx$	: Correção aplicada à incógnita x das equações normais
$dy$	: Correção aplicada à incógnita y das equações normais
$i$	: índice que aponta o vértice ocupado da poligonal
$k$	: índice que aponta o vértice anterior ou usado como ré
$j$	: índice que aponta o vértice posterior ou usado como vante
$n$	: número de observações (ângulos e distâncias)
$p$	: penúltimo ponto da poligonal
$p+1$	: último ponto da poligonal
ppm	: partes por milhão
T	: índice que indica matriz transposta
rad	: radianos
$u$	: número de equações de observação
$x$	: coordenada fixa x de um ponto p da poligonal
$y$	: coordenada fixa y de um ponto p da poligonal
$\hat{x}$	: coordenada provisória x de um ponto p da poligonal, obtida com os valores observados
$\hat{y}$	: coordenada provisória y de um ponto p da poligonal, obtida com os valores observados
$\alpha$	: nível de significância do teste qui-quadrado
$\chi^2$	: estatística de distribuição Qui-quadrado
$\varepsilon_x$	: “erro de fechamento” em coordenada x
$\varepsilon_y$	: “erro de fechamento” em coordenada y
$\varepsilon_A$	: “erro de fechamento” do azimute topográfico

- $v$  : número de graus de liberdade
- $\rho = \frac{648000}{\pi} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right) \cong \frac{1}{\text{sen } 1''} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right)$  : fator que transforma as quantidades dadas em radianos para quantidades em segundos de arco
- $\sigma_a^2$  : variância do ângulo  $a$
- $\sigma_S^2$  : variância da distância  $S$
- $\sigma_x^2$  : variância da coordenada  $x$
- $\sigma_y^2$  : variância da coordenada  $y$
- $\sigma_{v_i}$  : desvio padrão dos resíduos  $v_i$  para teste *data snooping*
- $\sigma_{xy}$  : covariância das coordenadas  $x$  e  $y$
- $\sigma_0^2$  : variância da unidade peso *a priori*
- $\hat{\sigma}_0^2$  : variância da unidade peso *a posteriori*
- $A_0$  : azimute topográfico inicial
- $A_{ik}$  : azimute topográfico da visada à ré, contado no sentido horário a partir do Norte
- $A_{ij}$  : azimute topográfico da visada à vante, contado no sentido horário a partir do Norte
- ${}_n \mathbf{A}_u$  : matriz das derivadas parciais das equações de observações em relação aos parâmetros
- $\mathbf{G}$  : matriz das derivadas parciais da função  $A_{ij} = f(a_{ij})$
- $H_0$  : hipótese nula no teste de hipóteses
- $H_1$  : hipótese alternativa no teste de hipóteses
- $\mathbf{I}$  : matriz identidade
- ${}_n \ell_1$  : vetor de termos independentes
- ${}_n \ell_1^a$  : vetor dos valores observados ajustados

- ${}_n \ell_1^b$  : vetor dos valores observados
- MVC : matriz variância-covariância (matriz que reúne na diagonal as variâncias e fora da diagonal, as covariâncias)
- ${}_n \mathbf{P}_n$  : matriz dos pesos das observações
- $\mathbf{Q}$  : matriz dos coeficientes de peso
- $S_{ik}$  : distância do ponto ocupado até o ponto a ré
- $S_{ij}$  : distância do ponto ocupado até o ponto a vante
- $v_S$  : resíduo da distância
- $v_a$  : resíduo do ângulo
- ${}_n \mathbf{v}_1$  : vetor dos resíduos, obtido do ajustamento, para a obtenção dos valores observados ajustados
- ${}_u \mathbf{x}_1$  : vetor das correções (solução das equações normais: valores de dx e dy, quando as equações de observação forem expressas por variação de coordenadas)
- ${}_u \mathbf{x}_1^a$  : vetor de parâmetros ajustados
- $\Sigma_a$  : MVC dos ângulos
- $\Sigma_{xy}$  : MVC das coordenadas x e y de um ponto da poligonal
- $\Sigma_A$  : MVC dos azimutes
- $\Sigma_{\ell^a}$  : MVC dos valores observados ajustados
- $\Sigma_{\ell^b}$  : MVC dos valores observados
- $\Sigma_S$  : MVC das distâncias
- $\Sigma_{SA}$  : MVC das distâncias e dos azimutes
- $\Sigma_v$  : MVC do vetor dos resíduos
- MMQ: Método dos Mínimos Quadrados
- $\sim$ : segue a distribuição de probabilidade

## RESUMO

Dissertação de Mestrado  
Programa de Pós-Graduação em Geomática  
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

### AJUSTAMENTO E CONTROLES DE QUALIDADE DAS LINHAS POLIGONAIS

Autor: Mário Stringhini  
Orientador: Carlito Vieira de Moraes  
Co-orientador: Enio Giotto  
Local e Data da Defesa: Santa Maria, 03 de março de 2005.

O Brasil é um país de grande dimensão que ainda hoje possui vastas áreas virgens de pouca população e possuidoras de terras tidas como devolutas, especialmente na bacia amazônica. A necessidade de um gerenciamento territorial mais efetivo por parte do Estado foi implementada via burocrática com a criação de um cadastro nacional de imóveis rurais georreferenciados, sistema que integrará os órgãos públicos da administração direta e os serviços registrais de terras em uma base comum de dados. A ciência geodésica e os recursos tecnológicos avançados como o Sistema de Posicionamento Global que recebem sinais de rádio de satélites que circundam a Terra e os taquímetros eletrônicos que captam sinais infravermelho refletidos em locações sobre a superfície da Terra possibilitam levantamentos com georreferências confiáveis para o banco de dados gráfico. O Estado Brasileiro considera que em 10 anos terá uma base de dados abrangente para controlar a apropriação indevida de terras na fronteira agrícola, bem como grande gerência sobre o ordenamento do território nos estados de estrutura agrária consolidada.

O presente trabalho foi pensado com o objetivo de agregar valor aos levantamentos topográficos com o uso do ajustamento e de estimativas de qualidade de levantamentos visando atender os preceitos do georreferenciamento. O levantamento de um polígono de 9 (nove) vértices, sendo um usado como ponto de controle, foi implantado no *campus* da Universidade Federal de Santa Maria com taquímetro eletrônico e os dados obtidos trabalhados em uma planilha de cálculo digital. O teste qui-quadrado da forma quadrática do erro de fechamento foi aplicado para avaliação do levantamento como um todo. A seguir foi praticado o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, com o emprego de equações de observação obtidas por variação de coordenadas. A variância da unidade peso *a posteriori* foi calculada no teste qui-quadrado da forma quadrática dos resíduos que avalia a qualidade do ajustamento. A matriz de variância-covariância das coordenadas ajustadas possibilitou a estimação por ponto da poligonal

com o cálculo dos parâmetros das figuras geométricas das elipses dos erros e de confiança e dos círculos do erro de posição e do erro médio. Também o teste *data snooping* de Baarda foi aplicado para identificação das observações que poderiam apresentar problemas de medições. Todos os procedimentos foram organizados em um fluxograma de forma a facilitar uma programação computacional.

No trabalho desenvolvido foram constatados erros sistemáticos instrumentais, que não prejudicaram a apresentação do método. O ajustamento mostrou convergência após poucas iterações, os testes qui-quadrados ficaram na região de aceitação das hipóteses, o teste *data snooping* mostrou as observações mais confiáveis enquanto que as estimações por ponto foram quantificadas e apresentadas graficamente. O autor espera que a obra contribua para oferecer uma alternativa acessível e fundamentada cientificamente aos profissionais em seus levantamentos, sob o novo paradigma vivido pela Topografia.

Palavras-chave: ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, controle de qualidade, linhas poligonais, teste qui-quadrado, estimação por ponto.



## **ABSTRACT**

Master Dissertation  
Curso de Pós-Graduação em Geomática  
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

### **AJUSTAMENTO E CONTROLES DE QUALIDADE DAS LINHAS POLIGONAIS**

(LEAST-SQUARES ADJUSTMENT METHOD AND  
QUALITY CONTROLS OF TRAVERSES)

Author: Mário Stringhini

Adviser: Carlito Vieira de Moraes

Co-adviser: Enio Giotto

Place and Date of Examination: Santa Maria, March, 03, 2005.

Brazil is a country of great dimension that still holds unexplored areas of little population nowadays. Actually these lands are state-owned, but they have been appropriated as a private property, especially in the Amazon basin. The need for a governmental more effective territorial management was formally implemented through the establishment of a geodetic referenced landed property register. This system will integrate the public administration organization and the land register services in a common basis of data. The geodetic science and the advanced technological resources like the Global Positioning System, which receives radio rays transmitted by satellites that surround the Earth and the electronic tachymeter, which capture light rays reflected on locations over the surface of the Earth, enable reliable geodetic references for the database graphic. Brazilian government takes into consideration the set of a wide basis of data in 10 years in order to control the undue appropriation of lands in the agricultural border, as well as great management over the territorial organization in the states of consolidated agrarian structure.

The present work has been thought with the purpose of improving topographic survey quality by means of adjustment and quality survey estimation to serve geodetic referencing principles. This survey of a 9-points traverse being used one control point. It was implanted at Federal University of Santa Maria campus with electronic tachymeter and the obtained data worked in a digital calculation form. The qui-square test of the quadratic form of misclosures was put into practice to evaluate the survey as a whole. Then the adjustment by the least square method was done, utilizing the observation equations taken from the variation of coordinates. The weight unit variance *a posteriori* was calculated in the qui-square test in the quadratic form of the residuals, which evaluates adjustment quality. The variance-covariance matrix of the adjusted coordinates have enable the estimation for point of the trasverse by using

the calculation of the geometric parameters of the standard error ellipse, error ellipse, mean squared position error or radial error and circular error probable. Also, data snooping test of Baarda was developed to identify the observations that could present measuring problems. All the procedures were organized in a diagram to make a computer programming easier.

In that research, instrumental systematic errors were verified, but they did not impair the method presentation. The adjustment has shown convergence after little iterations, the qui-square tests were in the range of acceptance of the hypotheses; the data snooping test has shown the most reliable observations while the estimations for point were quantified and graphically presented. The author hopes the work contributes to offer an accessible alternative scientifically based to surveyors, under the new paradigm presented by Topography.

Keywords: least-square adjustment method, quality control of survey, traverses lines, test qui-square, estimate for point.

## 1 INTRODUÇÃO

Para várias finalidades, freqüentemente é necessário determinar posições relativas de pontos na superfície da Terra. Esta representação é feita pela medição de distâncias entre pontos e ângulos formados entre as linhas que ligam estes pontos. As distâncias são medidas em unidades de comprimento, enquanto que as direções em unidades de arco. Quando essa porção da superfície é restrita, o problema constituirá objeto da Topografia (GODOY, 1980, p. 1).

A Topografia é o ramo da Geodésia que se preocupa em levantar e representar através de planta e memorial descritivo uma parte da superfície da Terra referenciada a um plano, tangente a esta superfície. Esta atividade de caráter extremamente prático transformou-se grandemente no campo tecnológico com a introdução de equipamentos de medição de ondas refletidas, gravação digital de dados e processamento destes dados em computadores pessoais. Os programas de Topografia operam eletronicamente e produzem as peças de representação de superfície do terreno de maneira semi-automática. O técnico de Topografia deve adaptar-se a nova realidade, procurando o preparo técnico especializado para condução de um levantamento, dentro destas novas condições. A partir deste novo patamar de tecnologia, os levantamentos podem ser executados com níveis superiores de acurácia e precisão. A organização e sistematização do ajustamento e a busca de controles que sejam praticáveis e qualifiquem os levantamentos topográficos foram objetivos do presente estudo.

Uma prática usual entre os profissionais de Topografia é o uso da compensação dos erros de distância (linear) e erro nos ângulos (angular). Na compensação realiza-se em primeiro lugar a distribuição do erro angular de fechamento e a seguir distribui-se o erro linear expresso no plano cartesiano. A primeira compensação do erro linear conduzirá a novas distâncias, importando em novos ângulos e assim sucessivamente.

Ao tratar os erros linear e angular separadamente, haverá sempre o problema do fechamento. No Ajustamento, os ângulos e distâncias são trabalhados em um procedimento conjunto e os ciclos de ajuste ou iterações são repetidas até a estabilização dos valores dos parâmetros, que são as coordenadas plano-retangulares do levantamento.

Sobre uma área central do *Campus* Universitário da UFSM realizou-se um levantamento de uma poligonal fechada com taquímetro eletrônico de leitura digital de distâncias e ângulos. A poligonal desenvolvida contém 9 (nove) vértices, sendo ao ponto 1 de controle atribuído azimute e coordenadas cartesianas arbitrárias. Os dados foram organizados em uma planilha e a seguir procedeu-se a aplicação de teste estatístico para avaliação da qualidade do levantamento e o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados com equações de observações expressas por variação de coordenadas junto com uma proposição de controles de qualidade após o ajustamento.

O presente trabalho pretende estabelecer uma rotina de procedimentos para avaliar estatisticamente os erros de fechamento das linhas poligonais topográficas e o ajustamento. A avaliação estatística dos erros de fechamento é realizada pelo teste qui-quadrado da forma quadrática do erro de fechamento e o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados com o emprego das equações de observação obtidas por variação de coordenadas. O teste qui-quadrado aplicado ao último ponto da poligonal topográfica destina-se a verificar se a amostra de dados experimentais tem distribuição casual ou sofreu perturbações que prejudicaram a qualidade do trabalho. No ajustamento avaliou-se a variância da unidade peso *a posteriori* em comparação com a variância da unidade peso *a priori* no teste chamado qui-quadrado da forma quadrática dos resíduos. Para a localização das observações que poderiam abrigar erros foi usado o teste *data snooping* de Baarda. Por fim, foram calculados os componentes geométricos da elipse dos erros, elipse de

confiança, círculo do erro de posição e círculo do erro médio, elementos que indicam a qualidade do ajustamento em cada ponto da poligonal.

A seqüência de passos com a dedução das fórmulas primárias exige operações repetidas com matrizes de dimensão elevada, o que só podem ser obtidas de forma prática com o uso de programas de computação. O estudo foi proposto com a intenção de estabelecer subsídios para a elaboração de um programa computacional de aplicação de teste de avaliação do levantamento e o ajustamento dos pontos da poligonal com os controles derivados, sendo este o objetivo final deste trabalho.

Após a introdução do tema, o capítulo “Revisão de Literatura” extrai a fundamentação teórica, principalmente acadêmica, com a preocupação de expor com objetividade e clareza os conceitos, além de comentar aspectos do controle de qualidade de trabalhos topográficos adotados em normas técnicas e sobre o processo de programação computacional.

O capítulo “Material e Métodos” expõem o local de execução do levantamento, os equipamentos utilizados no experimento e os procedimentos de aplicação do teste e o ajustamento dos pontos da poligonal com o uso de programas de cálculo.

O capítulo 4 expõe teoricamente o procedimento para aplicação do teste qui-quadrado da forma quadrática do erro de fechamento a partir dos dados observados e calculados, a montagem das matrizes de variância-covariância e interpretação final do teste.

No capítulo 5 é apresentado o procedimento teórico do ajustamento de poligonal fechada no plano topográfico pelo método dos mínimos quadrados com equações de observação desenvolvidas por variação de coordenadas, a montagem da matriz  $A$  (matriz dos coeficientes das incógnitas), matriz dos pesos  $P$  (obtida a partir das especificações dos aparelhos utilizados), vetor  $l$  (vetor de termos independentes) e o procedimento de iteração que consiste em repetir as operações até que o vetor de correções se anule ou se torne

insignificante. Salienda-se no capítulo, os controles de qualidade durante e após o ajustamento efetuado.

O capítulo 6 mostra os resultados do experimento de campo, o desenvolvimento das equações, procedimento de aplicação prática do teste e ajustamento e a proposta para adequação a uma linguagem de programação na forma de fluxograma.

E o capítulo 7, apresenta a conclusão e as recomendações do autor, seguidas da bibliografia consultada. O mestrando espera que a formulação contribua para oferecer uma alternativa acessível e fundamentada cientificamente aos profissionais de Topografia em seus levantamentos, diante da nova situação de desenvolvimento do setor.

## **2 REVISÃO DE LITERATURA**

### **2.1 TOPOGRAFIA E GEODÉSIA**

Segundo TORGE (2001, p. 1-2), a Geodésia pode ser dividida em Levantamentos no Plano, Levantamentos Geodésicos e Geodésia Global. Nos Levantamentos no plano (topográficos e cadastrais) os detalhes da superfície da Terra são determinados em um plano local e os efeitos de curvatura e campo gravitacional são geralmente ignorados. No entanto, este tipo de levantamento está geralmente referenciado a pontos de controle estabelecidos pelos levantamentos geodésicos que consideram os efeitos de curvatura e campo gravitacional da Terra. A terceira divisão apresentada, preocupa-se com a determinação da forma e tamanho da Terra, sua orientação no espaço e seu campo gravitacional. Os levantamentos geodésicos trabalham em uma escala que incluem países e continentes e são vinculados a redes de referência estabelecidas pela Geodésia global.

Para GODOY (1980, p. 4), a Topografia completa o trabalho da Geodésia para o estudo em detalhe do terreno. O erro decorrente do plano horizontal adotado para as projeções topográficas faz com que seja limitada a áreas de extensões relativamente pequenas. Na época de seu trabalho, a convenção era limitar a área a ser levantada topograficamente a um círculo de 50 km de raio, onde o erro horizontal devido à curvatura da Terra estará em torno de 1 metro.

### **2.2 GRANDEZA, MEDIÇÃO E OBSERVAÇÃO**

Dá-se o nome de grandeza ao atributo de um fenômeno ou de um corpo que é suscetível de ser distinguido e determinado quantitativamente; uma grandeza é expressa pelo produto de um número e de uma unidade.

Exemplos: distância, ângulo e desnível.

Medição é o conjunto de operações que tem a finalidade de determinar o valor de uma grandeza. Enquanto que observação é a ação de observar por meio de um instrumento permitindo a obtenção das medidas; por extensão, termo utilizado para significar o resultado de uma medição. Assim, resultado de medição (também chamado medida) é o valor da grandeza resultante da medição. Chamamos de resultado bruto de medição, o resultado sem as correções e sem a determinação da incerteza de medição.

Medição direta é o método de medição quando se mede diretamente a incógnita, isto é, compara-se a grandeza a medir com uma grandeza de mesma natureza tomada como padrão.

Exemplo: medição de uma distância com uma trena.

Medição indireta é o método de medição quando não se tem condição de medir diretamente a incógnita, isto é, o valor de medição é obtido a partir da medição de outras grandezas.

Exemplo: a latitude geográfica astronômica  $\Phi$  ;

### 2.3 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

As observações são representações numéricas de quantidades físicas como, por exemplo, comprimento, ângulo e peso obtidos por meio de medições e possuem não apenas as flutuações aleatórias próprias das observações, mas também toda sorte de erros possíveis de ocorrer nas medições, identificações, anotações e transferência de dados (DALMOLIN, 2004, p. 47).

A desconfiança no resultado de uma medida isolada, devido a possibilidade de falibilidade humana leva naturalmente à multiplicação das observações ou medidas. Esta providência leva ao problema de como extrair um resultado único que represente com maior confiança a grandeza medida (GEMAEL, 1994, p. 11).



### 2.3.1 Linguagem Matricial

Seja obter as observações diretas  $\ell$  de uma grandeza  $x$ . Sejam  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  os valores obtidos de uma série de  $n$  observações. Como é impossível o valor verdadeiro de  $x$ , procura-se-á uma estimativa de  $x$  na qual se pode confiar. Seja  $\bar{x}$  essa estimativa. Efetuam-se as diferenças:

$$\bar{x} - \ell_1 = v_1, \bar{x} - \ell_2 = v_2, \dots, \bar{x} - \ell_n = v_n \quad (2.1)$$

Generalizando,

$$\bar{x} - \ell_i = v_i \text{ e } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

As diferenças são os resíduos, isto é, os valores *a priori* desconhecidos que somados às observações  $\ell$  reproduzem a estimativa  $\bar{x}$ .

Gauss e Legendre indicaram o caminho: aceitar como melhor estimativa de  $x$  o valor que torna mínima a soma dos quadrados dos resíduos:

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \text{mínimo} \quad (2.3)$$

Seja a função

$$f = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \text{mín.} \quad (2.4)$$

Substituindo a (2.2) na (2.4), obtém-se:

$$f = \sum_{i=1}^n (\bar{x} - \ell_i)^2 = \text{min.} \quad (2.5)$$

A minimização da função  $f$  requer que

$$\frac{df}{d\bar{x}} = 0, \quad (2.6)$$

cuja solução é

$$\frac{df}{d\bar{x}} = 2 \sum_{i=1}^n (\bar{x} - \ell_i) = 0, \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{x} - \sum_{i=1}^n \ell_i = 0, \quad (2.8)$$

$$n\bar{x} - \sum_{i=1}^n \ell_i = 0, \quad (2.9)$$

Expressando a estimativa  $\bar{x}$  (pode-se verificar que a média aritmética satisfaz o princípio do método).

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell_i \quad (2.10)$$

Este  $\bar{x}$  resultou da adoção do método dos mínimos quadrados que não requer que a distribuição seja normal.

Modernamente, a (2.3) recebe a notação com vetores, usando-se a linguagem matricial.

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min. \quad (2.11)$$

em que  $\mathbf{v}$  é o vetor (escrito na forma de coluna) dos resíduos

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

e o símbolo T indica transposição do vetor  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v}^T = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \quad (2.13)$$

Quando as observações não oferecem o mesmo grau de confiança, elas são homogeneizadas por pesos  $p_i$ :

$$\sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \min. \quad (2.14)$$

e matricialmente:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min., \quad (2.15)$$

em que  $\mathbf{P}$  é a matriz dos pesos. Se as observações forem, entre si não correlacionadas,  $\mathbf{P}$  será matriz diagonal.

Os avanços da Estatística Matemática com a introdução de novos conceitos, estimativas, testes e a operação de linguagem matricial com o

uso de computadores, tornaram possível a manipulação de matrizes de elevada dimensão. O Método dos Mínimos Quadrados é um procedimento que permite a obtenção de um resultado único, além de estimar a precisão de tais incógnitas e a eventual correlação entre elas (GEMAEL, 1994, p. 15). Assim, a introdução da estimativa e dos testes estatísticos possibilita o tratamento correto para os problemas topográficos.

### 2.3.2 Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados

Sob todos os procedimentos de estimação na ciência natural e técnica está nos problemas de ajustamento o método dos mínimos quadrados, também chamado método do erro quadrático ou na terminologia moderna de estimação segundo a norma 2 da Álgebra.

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) foi desenvolvido por C. F. Gauss em 1797. A primeira publicação deste procedimento de estimação surgiu de A. M. Legendre no ano de 1806, porém sem fundamentação de teoria da probabilidade (NIEMEIER, 2002, p. 108-109).

Nos problemas de Geodésia e Topografia, o número de observações ( $n$ ) é superior ao número de incógnitas ( $u$ ).

$${}_n \mathbf{A}_{u \times u} \mathbf{x}_1 = {}_n \ell_1^b; n > u \quad (2.16)$$

As observações vêm com erros que tornam o sistema inconsistente. A remoção da inconsistência se faz com a introdução dos resíduos  ${}_n \mathbf{v}_1^T = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$  no modelo anterior, tornando-o:

$${}_n \mathbf{A}_{u \times u} \hat{\mathbf{x}}_1 = {}_n \ell_1^b + {}_n \mathbf{v}_1 \quad (2.17)$$

em que  ${}_u \hat{\mathbf{x}}_1$  é o estimador de  ${}_u \mathbf{x}_1$

O vetor  ${}_u \hat{\mathbf{x}}_1$  depende da escolha de  ${}_n \mathbf{v}_1$ .

O melhor estimador é aquele que conduz a resíduos que satisfazem a condição:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \text{mín}, \quad (2.18)$$

$$\varphi = (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b)^T (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b) = \text{mín}, \quad (2.19)$$

$$\varphi = (\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T - \ell^{bT}) (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b) = \text{mín}, \quad (2.20)$$

$$\varphi = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \ell^b - \ell^{bT} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \ell^{bT} \ell^b = \text{mín} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \left[ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^T + \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right] \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \ell^b - \mathbf{A}^T \ell^b = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \left[ (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right] \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \ell^b - \mathbf{A}^T \ell^b = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{A}^T \ell^b = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \ell^b = \mathbf{0}, \quad (2.25)$$

que é um sistema de n equações normais a u incógnitas. Não havendo singularidade na matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema de equações normais, a solução é

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \ell^b. \quad (2.26)$$

### 2.3.3 Matriz dos Pesos

As observações  $\ell_i$ , ( $i=1,2,\dots,n$ ), efetuadas podem ser consideradas como uma amostra de um universo de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . O parâmetro amostral estimado  $\hat{\sigma}^2$  (também denotado pelo símbolo  $s^2$ ) é o indicativo de precisão das observações.

Se as observações não oferecem o mesmo “grau de confiança”, elas podem ser homogeneizadas mediante a multiplicação por “pesos”. Quanto maior for a confiança que uma observação inspira (quanto menor o valor de  $\hat{\sigma}^2$ ), maior será seu peso.

Sejam  $\Sigma_{\ell^b}$  a matriz variância-covariância (estimada) das observações  $\ell^b$  e  $\sigma_0^2$  o valor numericamente igual à variância da observação à qual foi atribuído o peso unitário. Dividindo-se  $\Sigma_{\ell^b}$  por  $\sigma_0^2$  obtém-se a matriz denominada matriz dos coeficientes de peso:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\ell^b}. \quad (2.27)$$

Se a matriz  $\mathbf{Q}$  for não-singular admitirá a inversa ordinária (inversa generalizada de Moore-Penrose)

$$\mathbf{Q}^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma_{\ell^b}^{-1} \quad (2.28)$$

que é denominada matriz de pesos, normalmente denotada pela letra  $\mathbf{P}$ .

Quanto menores foram as variâncias, tanto maior é a precisão das variáveis aleatórias e tanto maior serão os pesos respectivos.

### 2.3.4 Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados com a Matriz dos Pesos

Com a matriz dos pesos, a forma quadrática fundamental do MMQ é

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min \quad (2.29)$$

Substituindo  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b$  na forma quadrática fundamental:

$$\varphi = (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b)^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b) = \text{mín}, \quad (2.30)$$

$$\varphi = (\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T - \ell^{bT}) \mathbf{P} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \ell^b) = \text{mín}, \quad (2.31)$$

$$\varphi = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b - \ell^{bT} \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \ell^{bT} \mathbf{P} \ell^b = \min, \quad (2.32)$$

$$\varphi = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b + \ell^{bT} \mathbf{P} \ell^b = \min, \quad (2.33)$$

$$\varphi = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b + \ell^{bT} \mathbf{P} \ell^b = \min, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell^b. \quad (2.37)$$

## 2.4 MODELO MATEMÁTICO

As observações conduzidas pelo homem se caracterizam pela presença inevitável de erros. Estes podem ser decorrentes de falhas humanas, mas também da imperfeição do equipamento e da influência das condições ambientais em que se processa a medição. Quando se realizam medidas ou observações diretamente sobre as grandezas incógnitas (observações diretas), pode-se ligar tais incógnitas por equações de condição ou por relações funcionais conhecidas. O objetivo final é retirar das observações as inconsistências que as acompanham, ajustando-as a um modelo matemático. No processo pode-se ponderar ou atribuir peso maior àquelas observações que merecem maior confiança, o que pressupõe o conhecimento da precisão com que as medidas foram tomadas (GEMAEL, 1994, p. 11).

DALMOLIN (2004, p. 1-2) afirma que o conceito clássico de que as observações estão contaminadas de erros, é visto modernamente como as observações possuindo uma propriedade inerente a elas, de flutuações probabilísticas ou aleatórias. A Matemática descreve uma realidade física por meio de fórmulas, expressões ou equações na tentativa de representar tal realidade com a melhor aproximação possível. O modelo matemático envolve não apenas a parte determinística da realidade física (modelo funcional), mas também as propriedades não determinísticas das variáveis (modelo estocástico ou modelo que dependem das leis do acaso).

Chama-se modelo matemático o sistema teórico pelo qual se descreve uma situação física. A descrição não necessita explicar totalmente a situação física, mas relacionar somente as propriedades de

interesse. O modelo matemático é composto de duas partes: o modelo funcional e o modelo estocástico. Na natureza não há objetos tais como ponto, distância, ângulo ou coordenadas; eles são elementos do modelo funcional que são utilizados para descrever as feições dos objetos ou sua localização.

O modelo estocástico descreve as propriedades não determinísticas das variáveis envolvidas. As medidas estão sujeitas às influências. Tais influências não são completamente controladas, o que resulta em variabilidade do resultado quando as medições são repetidas. A variabilidade das medidas deve-se às causas físicas, à falibilidade humana e às imperfeições dos instrumentos.

## 2.5 ESTATÍSTICAS

Na visão moderna, um trabalho topográfico deve obter dados de distâncias e ângulos como medidas experimentais. COSTA NETO (1977, p. 1) considera a Estatística uma ciência aplicável a qualquer ramo do conhecimento onde se manipulem dados experimentais.

Designa-se com o termo estatística os valores calculados em função dos elementos da amostra. São exemplos comuns de estatística: a média aritmética amostral  $\bar{x}$  que estima a média populacional  $\mu_x$ , a variância  $\sigma_x^2$ , o desvio padrão  $\sigma_x$ , o desvio padrão da média aritmética  $\sigma_{\bar{x}}$  e a covariância  $\sigma_{xy}$ .

É objeto da Estatística Indutiva tirar conclusões sobre populações com base nos resultados observados em amostras extraídas dessas populações, dizendo até que ponto pode-se estar errando nas induções e com que probabilidade se pode confiar nas conclusões obtidas. Uma população ou universo é um conjunto de elementos com pelo menos uma característica comum; e uma amostra, um subconjunto desta,

necessariamente finito e que seja o mais possível fiel às características da população.

Em Topografia, as características analisadas são de natureza quantitativa e são obtidas mediante contagem ou variável contínua, aquela que, teoricamente, pode assumir qualquer valor num certo intervalo de variação. Isso decorre do fato de não existirem instrumentos capazes de oferecer precisão absoluta. Logo, ao se executar uma medição sempre está se fazendo uma aproximação compatível com o nível de precisão e com o critério utilizado ao medir (*op. cit.*, p. 7).

Ao se trabalhar com experimentos aleatórios, o resultado é imprevisível, embora se conheça o conjunto de resultados possíveis (espaço amostral). A amostra extraída de uma população contínua e infinita pode ser expressa em uma distribuição de probabilidade de ocorrência. A experiência mostra que caso se repetir a experiência *n* vezes, a frequência relativa manifesta a tendência de se estabilizar. Intuitivamente se é induzido a interpretar a frequência relativa de um evento como uma “probabilidade experimental”, recurso apto a orientar o matemático na previsão do resultado de um experimento. Quando se sabe que uma variável matemática pode assumir qualquer valor no intervalo para o qual foi definida, a variável aleatória é calculada pela sua função de probabilidade, modelo matemático que associa uma probabilidade a cada valor que a variável aleatória pode assumir. Assim pode-se falar em propriedades estatísticas das observações (GEMAEL, 1994, p. 17).

## 2.6 ESTUDO DOS ERROS DE OBSERVAÇÃO

Como não se pretende chegar ao valor verdadeiro para as grandezas, porque as observações, mesmo que repetidas em condições idênticas se fazem acompanhar dos inevitáveis erros. Os erros são atribuídos à falha humana, à imperfeição do instrumento ou à influência



das condições ambientais. Para efeito do estudo baseado nas propriedades estatísticas das observações usa-se a classificação de erros em grosseiros, sistemáticos e acidentais (GEMAEL, 1994, p. 59-60). Os chamados erros acidentais são referidos na literatura também como randômicos. DALMOLIN (2004, p. 47) apresenta uma idéia de considerar erros grosseiros aqueles maiores que “três desvios padrões” ( $3\sigma$ ).

MÔNICO & SILVA (2003, p. 4) consideram a descrição dos erros importante para a compreensão dos modelos de ajustamento, mas não para uma estratégia de detecção de erros, pois em condições práticas é difícil separar estes erros em classes e um processo de estimação proporciona resíduos que possuem uma mistura de todos os tipos de erros.

### **2.6.1 Erros Grosseiros**

Os erros grosseiros são enganos que eventualmente podem ocorrer no procedimento de medição ou na realização dos cálculos (VUOLO, 1992, p. 76). Estes erros são decorrentes da distração do operador e são evitados com o cuidado do próprio operador no ato de execução de suas medições.

Exemplos:

- a) engano na leitura de uma medida indicada no instrumento (trena, mira, círculos horizontal e vertical do teodolito);
- b) engano nas unidades de medida em uma fórmula matemática (os dados podem estar expressos em unidades diferentes e a fórmula matemática pode exigir uma única unidade).

### **2.6.2 Erros Sistemáticos**

Os erros sistemáticos são os erros que, em igualdade de condições, se repetem com a mesma magnitude e sinal algébrico. Os

valores das grandezas de medição afetados por esse tipo de erro são corrigidos após a comparação do instrumento utilizado com instrumento padrão.

Os erros sistemáticos podem ter causas diversas e geralmente se enquadram nos seguintes tipos:

- a) erros sistemáticos instrumentais: resultam da calibração do instrumento, a qual pode ser alterado por causas de diversos fatores, tais como a temperatura, desgaste da parte móvel, entre outras;
- b) erros sistemáticos teóricos: resultam de falhas conceituais, isto é, do uso de fórmulas teóricas aproximadas ou do uso de valores aproximados para as constantes físicas que sejam utilizadas;
- c) erros sistemáticos ambientais: resultam dos efeitos do ambiente sobre a experiência;
- d) erros sistemáticos observacionais: resultam das falhas ou limitações do observador.

Exemplos:

- a) trena com comprimento diferente do especificado no certificado de calibração;
- b) ausência da parte inicial graduada de uma trena (isto se repete em todas as medições).

Um trabalho dos cientistas DZIERZEGA & SCHERRER (2003) baseado na experiência adquirida com instrumentos da marca Leica faz uma proposição para a solução ou minimização dos erros sistemáticos ocasionados no uso do instrumento e devido ao ambiente. A proposta de carácter prático pressupõe o aperfeiçoamento da habilidade do técnico atuante na condução do levantamento. Diante de uma maior compreensão deste quanto a acurácia de um instrumento, o uso da dupla medição e a influência da temperatura no ato da medição. Os modernos

taquímetros eletrônicos tornaram a ciência da mensuração mais avançada e os levantamentos topográficos passaram a serem executados com padrões de precisão cada vez mais elevados.

Os erros chamados instrumentais ocorrem durante a fase de fabricação do instrumento e são inevitáveis, mas uma correta forma de medição e a atenção à calibração do instrumento podem eliminar ou reduzir a um mínimo sua influência. Os erros instrumentais mais comuns estão baseados na não perfeita orientação entre os eixos do instrumento. O erro de colimação ocorre quando a linha de visada não está na vertical e sim inclinada, enquanto que o erro de inclinação do eixo ocorre quando este não é perfeitamente perpendicular ao eixo de suporte do instrumento. Estas duas influências devido a erros são minimizadas quando as visadas são feitas próximas ao horizonte e podem ser reduzidas ao mínimo pela correta calibração do instrumento ou com o uso da dupla medição. O erro do ponto zero ocorre quando a escala de leitura não está na correta referência e é determinado no processo chamado calibração ATR (*automatic target recognition*), onde o ângulo de leitura é corrigido automaticamente pelos valores correspondentes. O chamado erro da constante do eixo é outro que pode ser totalmente eliminado por meio da dupla medição. Alguns dos equipamentos permitem ajuste pelo operador e outros somente no envio aos locais de serviços especializados.

Para as diferenças de temperatura entre o instrumento e o aparelho a seguinte regra deve ser seguida: o tempo para o ajustamento da temperatura do instrumento é de aproximadamente 2 minutos para cada °C de diferença para a temperatura ambiente.

Embora a medida simples seja poupadora de tempo no levantamento, as medições executadas onde o valor assumido é a média entre a medida executada da forma direta, círculo à esquerda e a medida executada com a luneta invertida círculo à direita, muitos erros sistemáticos são eliminados e um melhor resultado pode ser alcançado.

A definição quanto à frequência de calibração do instrumento depende da experiência do profissional quando da suspeita de dano que afetem o sistema. Estão no manual do usuário recomendações sobre longo período de armazenagem de dados, transporte em condições inseguras ou trabalho em extremas condições de temperatura.

Assim fica recomendado no trabalho o uso de dupla medição (medida direta e invertida) no uso de instrumentos corretamente calibrados nos casos de necessidade de alto grau de acurácia, alvo na faixa de 18° de zênite e a observância do tempo necessário para estabilizar a temperatura do instrumento, para o início dos trabalhos.

Outro trabalho desenvolvido por MAIA (1999, p. 170) analisa e quantifica os efeitos climáticos raramente levados em conta nas medições de ângulos e distâncias, resultado da refração da onda magnética a partir do uso de instrumentos de medição eletrônica de distância (MED).

### **2.6.3 Erros Acidentais (Desvios de Medição Aleatórios)**

Os erros acidentais devem-se a causas desconhecidas e impossíveis de serem previstos e eliminados. Eles podem ser estimados por métodos estatísticos. Os erros acidentais menores são mais freqüentes que os maiores.

Devido à impossibilidade de os erros acidentais serem eliminados dos valores de uma grandeza de medição, estes erros tornar-se-ão presentes nos valores das grandezas calculadas e são estimados pela lei de propagação das covariâncias (ver seção 2.8).

Para estimar a precisão do valor de uma grandeza afetada por erros acidentais, empregam-se as estatísticas.

A detecção dos erros grosseiros é fácil em certos casos como, por exemplo, quando existem erros muito grandes; porém, difíceis em outros. Muitas vezes, um teste estatístico pode justificar ou não a rejeição de uma observação suspeita de abrigar um erro grosseiro (GEMAEL, 1994, p. 59).

O mesmo autor no capítulo 2 (p. 17) afirma que a tendência moderna é de substituir a idéia de “erros de observações” pelo conceito de “propriedades estatísticas das observações”, pois estas podem ser consideradas como amostras extraídas de uma população contínua e infinita com a sua correspondente distribuição de probabilidade. Os erros acidentais ocorrem ora em um sentido, ora em outro e tendem a distribuição Normal quando o número de observações cresce e o predomínio de resíduos com um mesmo sinal deve servir de alerta quanto à existência de alguma influência de natureza sistemática (*op. cit.*, p. 63).

#### 2.6.4 Análise dos Resultados de uma Medição

A fim de caracterizar uma grandeza de medição, a teoria clássica dos erros faz a distinção entre valor medido  $x_i$  e valor verdadeiro  $\tilde{x}$  de uma grandeza. A diferença entre estes dois valores é chamada desvio verdadeiro  $\eta$  que permanece desconhecido. A diferença entre o  $i$ -ésimo valor medido  $x_i$  de uma amostra composta de  $n$  valores medidos  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$  sobre a grandeza  $x$  e o seu valor esperado  $E(x) = \mu$  é chamado desvio aleatório  $\varepsilon_i$ , que se estima a partir da realização do valor esperado que é efetuada pelo valor médio  $\bar{x}$  dos  $n$  valores medidos. A diferença entre o valor esperado e o valor verdadeiro é chamado desvio sistemático (“*bias*”)  $\delta$  que possui uma parte conhecida  $\delta_c$  e outra parte desconhecida  $\delta_d$ .

Estes conceitos são mostrados na (figura 2.1) e formulados:

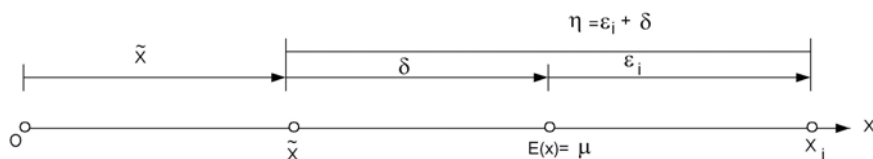
$$\varepsilon_i = x_i - \mu, \quad (2.38)$$

$$\delta = \mu - \tilde{x} = \delta_c + \delta_d; \quad (2.39)$$

então, comporá a realização da grandeza de medição  $x_i$ , as partes:

$$x_i = \varepsilon_i + \mu = \varepsilon_i + \tilde{x} \quad (2.40)$$

FIGURA 2.1 – CONCEITOS DA TEORIA CLÁSSICA DOS ERROS



FONTE: SCHMIDT (1994, p. 10).

NOTA: Figura adaptada.

Os valores estimados de variância, de covariância e, por conseguinte, de correlação não são influenciados pelos desvios sistemáticos, pois:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i + \delta_x) - (\bar{x} + \delta_x)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \quad (2.41)$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(y_i + \delta_y) - (\bar{y} + \delta_y)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2; \quad (2.42)$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i + \delta_x) - (\bar{x} + \delta_x)][(y_i + \delta_y) - (\bar{y} + \delta_y)] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})] \quad (2.43)$$

$$r = \frac{s_{x,y}}{s_x s_y} \quad (2.44)$$

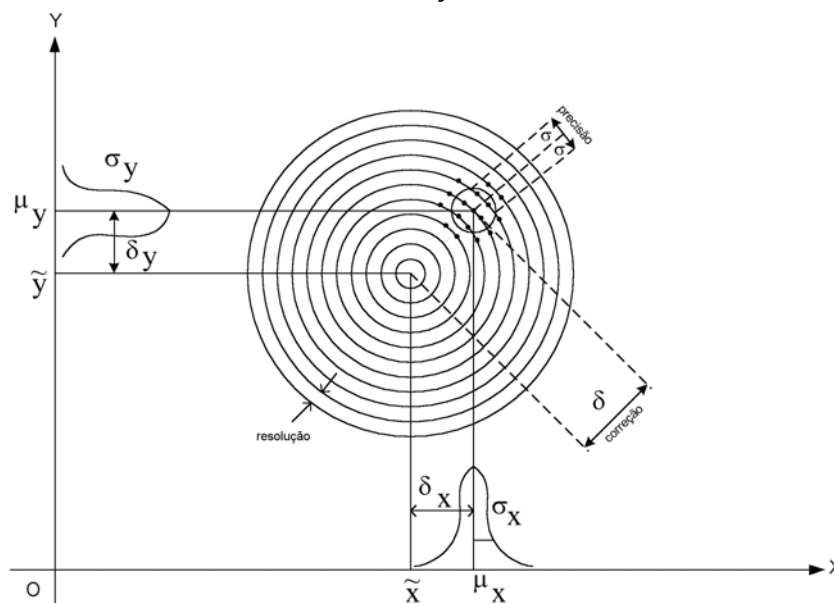
## 2.7 PRECISÃO, ACURÁCIA E CORREÇÃO

O termo *acurácia* (latim: *accuratio*; inglês: *accuracy*; alemão: *Genauigkeit*) é a designação qualitativa para o tamanho da aproximação proveniente do resultado da determinação em relação ao valor de referência em que pode estar conforme com a definição ou convenção do valor verdadeiro, do valor correto ou do valor esperado (DIN, 1987, p. 3).

Neste sentido, a *acurácia* é o grau de conformidade de um certo resultado em relação a um padrão no que diz respeito à qualidade. Segundo o padrão de referência, os atributos absoluto, relativo, interno e externo podem adjetivar o termo *acurácia* (WENDERLEIN, 1988, p. 147).

A acurácia de um resultado de medição é composta de duas componentes (BENNING, 2002, p. 82): a precisão e a correção. A figura 2.2 mostra que a precisão é a medida de dispersão das observações em torno de um valor médio e a correção é a medida do afastamento deste valor médio em relação ao valor verdadeiro.

FIGURA 2.2 – MÉDIA, DESVIO PADRÃO, CORREÇÃO E VALOR VERDADEIRO DE UMA GRANDEZA DE MEDIÇÃO



FONTE: SCHMIDT (1997, p. 215).

NOTA: Figura adaptada e traduzida do original

O desvio padrão  $\sigma = (\sigma_x; \sigma_y)$ , na figura 2.2, é a estatística que representa a dispersão dos  $n$  valores em torno da média  $\mu = (\mu_x; \mu_y)$  e a correção  $\delta = (\delta_x; \delta_y)$  que possui uma parte conhecida e outra parte desconhecida, aproxima o valor médio (isto é, a média) do valor verdadeiro  $(\tilde{x}; \tilde{y})$  que é sempre desconhecido.

A precisão descreve de quanto as medidas são reprodutíveis. Quanto menor forem os erros acidentais, tanto maior é a precisão da medida. A precisão não leva em conta os erros sistemáticos.

A acurácia descreve quanto o valor experimental está próximo do valor verdadeiro da grandeza (entendido como valor de referência);

quanto menor for a soma de todos os erros sistemáticos e acidentais, tanto maior é a acurácia do resultado.

Distingue-se o termo acurácia do termo precisão segundo o U. S. DEPARTMENT OF COMMERCE (1948)

- a) acurácia é o grau de conformidade com um padrão;
- b) precisão é o grau de refinamento no desempenho de uma operação;
- c) acurácia identifica a qualidade de um resultado enquanto que precisão refere-se à operação pela qual o resultado é obtido.

## 2.8 PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

O termo denotado pelo símbolo  $\sigma_{xy}$  é a medida do grau e do sinal da correlação linear entre duas observações  $x$  e  $y$  (COSTA NETO, 1977, p.182) Duas medidas são não-correlacionadas quando são estatisticamente independentes ou dependentes entre si. A independência implica o não-correlacionamento, mas a recíproca nem sempre é verdadeira (*op. cit.*, p. 181). Um exemplo seria ângulos medidos em diferentes estações de uma triangulação. Um exemplo de medidas correlacionadas pode-se citar ângulos, distâncias e coordenadas de cada estação de uma poligonal.

### 2.8.1 Propagação das Covariâncias nos Modelos Lineares

Sejam dois vetores aleatórios  ${}_m \mathbf{y}_1$  e  ${}_n \mathbf{x}_1$  ligados pelo modelo linear:

$${}_m \mathbf{y}_1 = {}_m \mathbf{G} {}_n \mathbf{x}_1 + {}_m \mathbf{c}_1 \quad (2.45)$$



A lei de propagação das covariâncias determina a matriz variância-covariância do vetor  ${}_m \mathbf{y}_1$ , sem calcular  ${}_m \mathbf{y}_1$ , desde que seja conhecida a matriz variância-covariância do vetor  ${}_n \mathbf{x}_1$ .

Aplicando o operador esperança em ambos os membros da (2.45), obtém-se:

$$E({}_m \mathbf{y}_1) = E({}_m \mathbf{G}_n {}_n \mathbf{x}_1 + {}_m \mathbf{c}_1) = {}_m \mathbf{G}_n E({}_n \mathbf{x}_1) + {}_m \mathbf{c}_1 \quad (2.46)$$

Da definição de matriz variância-covariância do vetor aleatório  $\mathbf{y}$ :

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = E\{[\mathbf{y} - E(\mathbf{y})][\mathbf{y} - E(\mathbf{y})]^T\} \quad (2.47)$$

substituindo a expressão de  $\mathbf{y}$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = E\{[\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{c} - E(\mathbf{y})][\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{c} - E(\mathbf{y})]^T\} \quad (2.48)$$

Substituindo  $E(\mathbf{y}) = \mathbf{G}E(\mathbf{x}) + \mathbf{c}$ , na (2.48) obtém-se

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = E\{[\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{G}E(\mathbf{x}) - \mathbf{c}][\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{G}E(\mathbf{x}) - \mathbf{c}]^T\} \quad (2.49)$$

Simplificando:

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = E\{[\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{G}E(\mathbf{x})][\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{G}E(\mathbf{x})]^T\}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = E\{\mathbf{G}[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{G}[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]]^T\}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = \mathbf{G}E\{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T\}\mathbf{G}^T; \quad (2.50)$$

mas

$$E\{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T\} = \boldsymbol{\Sigma}_x, \quad (2.51)$$

que substituída na (2.50), resulta a expressão

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = \mathbf{G}\boldsymbol{\Sigma}_x\mathbf{G}^T \quad (2.52)$$

que é Lei de Propagação das Covariâncias nos modelos lineares.

## 2.8.2 Propagação das Covariâncias nos Modelos Não-Lineares

Seja a função não-linear

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}). \quad (2.53)$$

Linearizando a (2.53) pela série de Taylor:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \quad (2.54)$$

em que  $\mathbf{x}^0$  é o vetor dado nas vizinhanças de  $\mathbf{x}$ .

Na (2.54) faz-se:

$$\mathbf{b} = f(\mathbf{x}^0), \quad (2.55)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^0}. \quad (2.56)$$

Substituindo a (2.55) e a (2.56) na (2.54), e sabendo-se que a aproximação é suficiente, obtém-se:

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \mathbf{b} + \mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{x}^0. \quad (2.57)$$

A esperança matemática do vetor  $\mathbf{y}$  é

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{b} + \mathbf{D}E(\mathbf{x}) - \mathbf{D}\mathbf{x}^0. \quad (2.58)$$

Substituindo a (2.58) na (2.47):

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{y}} &= E\left\{ [\mathbf{y} - E(\mathbf{y})][\mathbf{y} - E(\mathbf{y})]^T \right\} = \\ &= E\left\{ \left[ \mathbf{b} + \mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{x}^0 - \mathbf{b} - \mathbf{D}E(\mathbf{x}) + \mathbf{D}\mathbf{x}^0 \right] \left[ \mathbf{b} + \mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{x}^0 - \mathbf{b} - \mathbf{D}E(\mathbf{x}) + \mathbf{D}\mathbf{x}^0 \right]^T \right\} = \\ &= E\left\{ [\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{D}E(\mathbf{x})][\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{D}E(\mathbf{x})]^T \right\} = E\left\{ \mathbf{D}[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{D}[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]]^T \right\} = \\ &= E\left\{ \mathbf{D}[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T \mathbf{D}^T \right\} = \mathbf{D}E\left\{ [\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T \right\} \mathbf{D}^T \end{aligned} \quad (2.59)$$

Substituindo a (2.51) na (2.59) resulta

$$\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\Sigma_{\mathbf{x}}\mathbf{D}^T \quad (2.60)$$

que é expressão da Lei de Propagação das Covariâncias nos modelos não-lineares.

## 2.9 AJUSTAMENTO

Por que ajustar as observações?

As observações estão acometidas de erros devidos às falhas do operador, às imperfeições do equipamento de medição, às condições do

ambiente. Não se obtém o valor verdadeiro da grandeza. Procurar-se-á uma estimativa.

Objetivos do ajustamento:

- a) estimar mediante a aplicação de modelos matemáticos adequados e do método dos mínimos quadrados, um valor único para cada uma das incógnitas do problema;
- b) estimar a precisão de tais incógnitas e a eventual correlação entre elas.

Destes objetivos decorrem:

- a) que ajustar não é eliminar erros;
- b) a geometrização da figura;
- c) a extração da pluralidade de observações incorretas um único resultado que representa com maior confiança a grandeza medida;
- d) a unicidade de resultados seja qual for o caminho percorrido.

O ajustamento é importante para depurar os erros aleatórios. Os erros sistemáticos são depurados com as fórmulas usuais, antes de iniciar o ajustamento.

Chama-se Ajustamento, o ramo da matemática aplicada que tem por objetivo alcançar uma solução única aos problemas onde o número de observações é superabundante e o sistema de equações lineares é inconsistente, pois os dados conduzem a várias soluções (DALMOLIN, 2004, p. 1).

Os modelos matemáticos em ajustamento normalmente não são lineares, e para sua linearização desenvolve-se o modelo em série de Taylor desprezando-se os termos de ordem igual e superior à segunda; as derivadas parciais das equações que compõem o modelo para a obtenção dos parâmetros ajustados e dos valores observados ajustados são calculadas a partir dos valores iniciais atribuídos aos parâmetros e de valores observados (GEMAEL, 1994, p. 179).

O mesmo autor, explica que da primeira operação com matrizes resultam valores aproximados melhorados e usa-se a iteração ou repetição do ciclo de operações em sucessão até que o processo atinja um ponto de convergência. Neste processo iterativo de resolução de sistemas de equações lineares pode ocorrer convergência rápida ou lenta, oscilações em torno de um ponto ou divergência. Um pequeno número de iterações é suficiente para verificar a convergência a menos que interfiram erros sistemáticos e grosseiros. Um programa de ajustamento para computação eletrônica deve conter iterações e adotar critérios que fixem um valor como ponto de convergência, que é adotado para os parâmetros.

ASSUNÇÃO *et al.* (2004) em um trabalho conduzido em uma área teste comparou o cálculo executado com taquímetro eletrônico e processado em dois programas comerciais de Topografia, pelo método dos mínimos quadrados (modelo paramétrico) e a compensação de coordenadas tradicional. A conclusão do trabalho foi de que qualquer dos métodos utilizados atendeu as necessidades de ajustamento das coordenadas de uma poligonal, guardadas as particularidades de cada método. Mas o MMQ fornece as estimativas de variância mínima que a compensação não fornece.

## **2.10 CONTROLE DE QUALIDADE PARA LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS PLANIMÉTRICOS**

Um levantamento para a determinação de coordenadas dos vértices de uma poligonal é obtido a partir de dados experimentais que são as observações, enquanto que as coordenadas são os parâmetros incógnitos que são estimados no processo. As medidas de ângulos e distâncias são as observações e para cada observação coletada corresponde uma equação, linear ou não, envolvendo os parâmetros de interesse. Ao estabelecer a relação entre observações e parâmetros, o geodesta está definindo o modelo matemático. A redundância de dados

observados (ou presença de informações adicionais) possibilita a aplicação de controle de qualidade aos resultados do experimento. Um experimento ideal deve apresentar confiabilidade e precisão máxima a um custo mínimo. A precisão, a qual é dada pela matriz variância-covariância dos parâmetros representa a característica do levantamento em propagar erros aleatórios, partindo-se da inexistência de erros sistemáticos (MÔNICO & SILVA, 2003, p. 1-2).

### **2.10.1 Análise de Qualidade de uma Rede Geodésica**

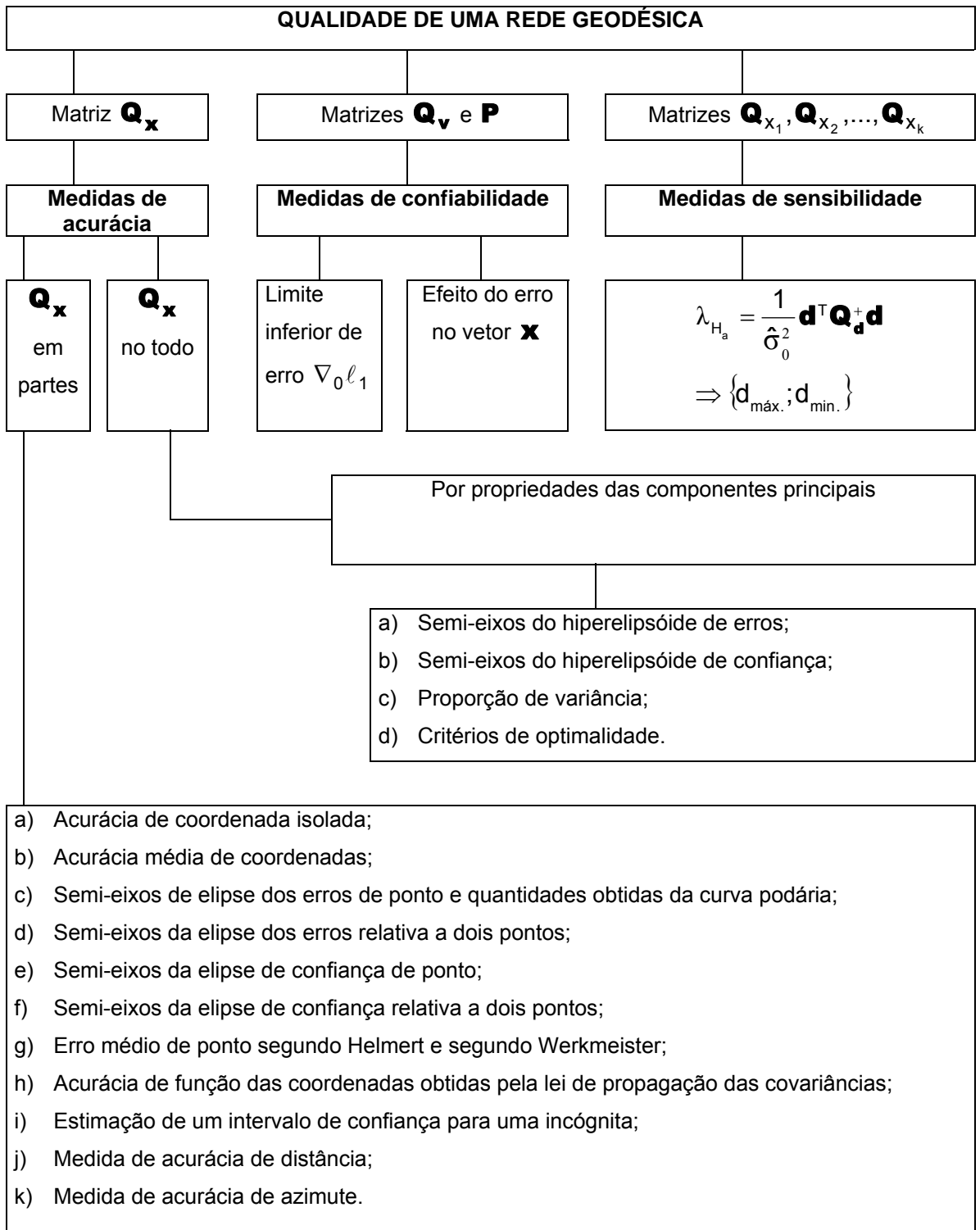
A qualidade de um ajustamento de rede é caracterizada pelas medidas de acurácia, confiabilidade e sensibilidade. Estas medidas definem a região em que o valor verdadeiro (valor de referência) se situa a uma probabilidade definida. A confiabilidade vincula-se à detecção dos erros grosseiros que podem falsificar os resultados, enquanto que a sensibilidade de rede geodésica refere-se ao refinamento dos dados, a ponto de detectar deslocamentos dados a partir de observações em duas épocas ou mais épocas.

As medidas locais de acurácia são obtidas das submatrizes da matriz de cofatores de covariância das incógnitas, sendo cada submatriz utilizada como portadora da informação da acurácia das incógnitas de cada ponto da rede geodésica. As medidas globais de acurácia de uma rede são obtidas da matriz completa de cofatores das incógnitas.

A teoria da confiabilidade serve para a detecção de erros no ajustamento ou para obter a influência de um erro não-detectável nos resultados do ajustamento.

As medidas de sensibilidade são importantes para a avaliação de uma rede ao longo do tempo e são fundamentais quando aplicadas à regiões sísmicas do planeta. Uma organização dos dados da pesquisa quanto as medidas de acurácia está descrito no quadro (2.1).

QUADRO 2.1 – ANÁLISE DE QUALIDADE DE REDE GEODÉSICA



FONTE: MORAES (2001, p. 184)

OBS: 
$$\mathbf{Q}_x = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \mathbf{\Sigma}_x$$

Sendo:

$\mathbf{Q}_x$  : matriz de cofatores de covariância das incógnitas ou inversa da matriz dos coeficientes das incógnitas das equações normais

$\hat{\sigma}_0^2$  : variância da unidade peso *a posteriori*

$\Sigma_x$  : matriz de covariância das incógnitas

### 2.10.2 Pré-ajustamento

Segundo COSTA NETO (1977, p. 50-53) as distribuições qui-quadrado pertencem a uma família de distribuições de probabilidades de grande importância em diversos problemas de Estatística Indutiva, que se preocupa em obter informações válidas para o geral (população) a partir do conhecimento do particular (amostra).

O teste qui-quadrado da forma quadrática do erro de fechamento é uma eficiente forma de detecção de erros acidentais, sendo adequado para poligonais que se apóiam nas redes de controle. A avaliação é segura dado um nível de significância ( $\alpha$ ) e o teste é aplicado ao último ponto de uma poligonal conforme seqüência exposta em GEMAEL (1994, p. 56-58) e MORAES (1997, 9-18). Este teste será mais bem estudado no capítulo 4.

### 2.10.3 Durante o Ajustamento

Durante o ajustamento um controle de qualidade importante é efetuado por meio do teste qui-quadrado da forma quadrática dos resíduos. A variância da unidade peso *a posteriori* ( $\hat{\sigma}_0^2$ ) é obtida da forma quadrática fundamental  $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$  dividido pelo número de graus de liberdade  $\nu$  (número de equações de observações menos o número de incógnitas).

O teste qui-quadrado da forma quadrática dos resíduos é resultado de um modelo desenvolvido para testar por meio de teste de hipóteses a igualdade do valor atribuído à variância da unidade peso *a priori* ( $\sigma_0^2$ ) com a variância da unidade peso *a posteriori* ( $\hat{\sigma}_0^2$ ). A validade desta hipótese deve ser testada usando-se o conhecimento em estatística

$$(\chi^2 = v \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}).$$

No caso do teste falhar, algumas razões podem ser apontadas:

- a) incorreção do modelo matemático;
- b) presença de erros sistemáticos nas observações;
- c) incorreção da matriz de covariância das observações.

#### 2.10.4 Pós-ajustamento

Segundo JONG *et al.* (2002, p. 48-50), profissionais do ramo de medições têm estado interessados não somente em estimativas de posição, mas também em associação com aspectos de controle de qualidade. A qualidade de um conjunto de parâmetros estimados consiste da análise da precisão e confiabilidade. A precisão obtida da matriz de covariância expressa as características dos parâmetros estimados na propagação dos erros aleatórios. Frequentemente, somente os elementos da diagonal são considerados, pois eles descrevem a variância dos parâmetros desconhecidos, sem considerar a correlação destes parâmetros ou covariâncias.

Se esta simplificação é efetivada e caso todas as observações tenham a mesma variância  $\sigma^2$ , então a matriz variância-covariância dos parâmetros estimados torna-se:

$$\mathbf{Q}_x = \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \quad (2.61)$$

enquanto a forma original da equação é:



$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A})^{-1} \quad (2.62)$$

em que  $\mathbf{y}$  é o vetor dos valores observados.

Por exemplo, no uso do Sistema de Posicionamento Global (GPS) a diluição da precisão (DOP) é definida como:

$$\text{DOP} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{i,i}^{-1}} \quad (2.63)$$

onde o subíndice  $i$ , significa a diagonal dos elementos da matriz  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ .

Na equação (2.62) todos os parâmetros estão envolvidos e em (2.61) somente um subconjunto destes parâmetros é considerado. O valor do DOP é indicativo da geometria dos satélites GPS na precisão dos parâmetros que serão estimados e expresso na matriz  $\mathbf{A}$ .

No posicionamento por GPS usando pseudodistâncias, solução por código, a estimativa dos parâmetros consiste no posicionamento tridimensional  $(\varphi, \lambda, h)$  e mais a componente do tempo, também incógnita do sistema. O valor do DOP informado nas coletoras de receptores GPS indica numericamente a estimativa destes parâmetros e é calculado freqüentemente por meio das fórmulas:

$$\text{GDOP (Geometric DOP)} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sigma_\varphi^2 + \sigma_\lambda^2 + \sigma_h^2 + \sigma_t^2}; \quad (2.64)$$

$$\text{PDOP (Position DOP)} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sigma_\varphi^2 + \sigma_\lambda^2 + \sigma_h^2}; \quad (2.65)$$

$$\text{HDOP (Horizontal DOP)} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sigma_\varphi^2 + \sigma_\lambda^2}; \quad (2.66)$$

$$\text{VDOP (Vertical DOP)} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sigma_h^2}; \quad (2.67)$$

$$\text{TDOP (Time DOP)} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sigma_t^2}; \quad (2.68)$$

considera-se  $\sigma$  a variância da unidade peso

Para observações de posicionamento no plano topográfico, cada uma das dimensões (2D) apresenta a sua correspondente precisão e a área dentro da qual a estimativa de posição é provável é limitada por uma

elipse chamada elipse dos erros (também chamada de elipse dos erros padrão) com probabilidade igual a 0,39. A matriz covariância  $\mathbf{Q}$  de um posicionamento horizontal (x,y) é dada por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

para a obtenção da elipse dos erros padrão (um desvio padrão de precisão para cada uma das variáveis), o semi-eixo  $a$ , o semi-eixo  $b$  e a orientação angular  $\gamma$  (o ângulo entre o semi-eixo maior e o eixo dos x) usa-se os seguintes cálculos:

$$a^2 = \lambda_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (2.69)$$

$$b^2 = \lambda_{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (2.70)$$

$$\tan 2\gamma = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (2.71)$$

Na 2.69 e 2.70,  $\lambda$  é o valor próprio (também chamado de autovalor e raiz latente). A probabilidade que o posicionamento horizontal esteja dentro da elipse dos erros padrão é de 39%. Para se obter a dimensão da elipse dos erros para um maior nível de probabilidade deve-se multiplicar cada um dos semi-eixos da elipse dos erros padrão pelo respectivo fator de escala conforme a quadro (2.2). Esta nova elipse de erros expandida chama-se elipse de confiança.

QUADRO 2.2 – FATOR DE ESCALA BIDIMENCIONAL

Nível de probabilidade (%)	Fator de escala
39,4	1,000
50,0	1,177
90,0	2,146
95,0	2,447
99,0	3,035

FONTE: JONG *et al.* (2002, p. 50); GEMAEL (1994, p. 243)

## 2.11 NORMAS JURÍDICAS E NORMAS TÉCNICAS

As normas jurídicas estabelecem o procedimento geral para uma região ou país, enquanto as normas técnicas firmam procedimentos a serem seguidos pelos profissionais atuantes em determinada atividade e são elaboradas por comissão de técnicos. Esta comissão, formada com membros de destacada atuação profissional e reconhecido saber, decide qual procedimento será adotado diante das formulações dadas pela pesquisa científica.

MOREIRA (1994, p. 124) em seu trabalho de dissertação que analisa o comportamento de erros em levantamentos topográficos usando trena, estadimetria (aparelho de leitura óptica) e distanciômetro eletrônico (aparelho de leitura digital de distâncias) verificou que o resultado freqüentemente não satisfaz as normas técnicas de qualidade de levantamentos obedecidas à época do trabalho. Conclui quanto a precisão de medidas de distância, que a precisão de cada medida é inerente ao processo, não podendo ser usados diferentes métodos para um mesmo trabalho.

Outro trabalho (MARQUES, 2002, p. 84-86) conduzido para comparação das precisões das coordenadas planas e áreas superficiais, levantadas pelo método da poligonação com instrumentos tradicionais e eletrônicos, mostrou a possibilidade de erros acima da norma técnica vigente, a NBR 13.133/1994. O autor obteve resultados melhores com o uso de medida obtida eletronicamente em relação às tomadas com trena e taqueometria óptica, demonstrando a evolução dos métodos.

A norma técnica brasileira em vigência para Levantamentos Topográficos NBR 13.133 (ABNT, 1994, p. 6-7) qualifica o instrumental básico para a execução de trabalhos o teodolito, níveis e medidores eletrônicos de distâncias, sendo os taquímetros separados em classes de baixa, média e alta precisão. A norma recomenda para precisão angular e

linear, valores expressos em desvio padrão (valor limite para ser aceitável) em segundos de arco que variam entre 3" e 5" por vértice da poligonal e para a distância em milímetros variando entre 3 a 5 mm mais 3 a 10 ppm multiplicado pela distância medida, a partir de repetidas operações.

Quanto a aceitação ou rejeição de trabalho topográfico (ABNT, 1994, p. 24-26), a norma faz referência à discordância existente entre o graficismo na elaboração de plantas e a correspondente medida no terreno.

O pouco conhecimento do território brasileiro por parte do Estado e o avanço da fronteira agrícola nacional rumo a Amazônia motivaram uma atuação dos órgãos executivos e judiciários na formulação de um sistema de ligação dos dados cadastrais e registrais sobre as terras públicas e privadas que resultou na aprovação da Lei 10267/2001. Pretende-se a unificação do cadastro do Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária e o da Receita Federal e uma alteração substancial no sistema registral (Cartórios de Registro de Imóveis) com a introdução de informações sobre a espacialidade dos imóveis rurais. A alteração do modelo de gerência do território está sendo implantada de forma gradativa com adaptações nos sistemas cadastrais e registrais, dentro da esfera pública e também no plano privado pelo público atuante no ramo da mensuração de terras. Esta legislação estatal gerou a necessidade de normas técnicas que disciplinem a atuação profissional neste campo.

Assim, foi editada pelo INCRA, em 2003, a Norma Técnica para o Georreferenciamento de Imóveis Rurais que define procedimentos a serem adotados pelos profissionais incorporando o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados para poligonais. Essa norma qualifica os instrumentos que se utilizam medidas angulares e lineares como técnica convencional de levantamento em contraposição aos levantamentos executados pelo Sistema de Posicionamento Global (GPS) que são referenciados a satélites artificiais. Este documento estabelece a

necessidade do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados às poligonais geodésicas de precisão (apoio básico) e de apoio à demarcação (apoio imediato), porém para as poligonais de levantamento perimétrico admite a compensação dos erros angulares e lineares de fechamento, embora recomende o ajustamento por mínimos quadrados.

Quanto ao controle de qualidade de levantamentos, esta mesma obra apenas recomenda observância aos valores de precisão angular e linear classificando os levantamentos por níveis de precisão e o teste de hipóteses de igualdade entre as variâncias de referência *a priori* e *a posteriori* (teste qui-quadrado da forma quadrática dos resíduos) é citado para poligonais geodésicas de precisão e de apoio à demarcação em transportes efetuados com GPS.

## 2.12 ALGORITMO

Os computadores são máquinas destinadas a resolver problemas com grande rapidez, de forma automatizada; o que pressupõe um planejamento das operações ou conjunto de comandos que, obedecidos resultam numa sucessão finita de ações. A utilização de um computador para resolver problemas exige, antes de tudo, que se desenvolva um algoritmo que é transmitido ao computador e armazenado em sua memória. O algoritmo deve prever antecipadamente todas as situações que possam ocorrer quando posto em execução. A clareza e simplicidade de um algoritmo são atributos inestimáveis quando se faz a sua manutenção (melhora, correção e aperfeiçoamento de um algoritmo) e a sua modificação (para atender a novas aplicações). Uma forma de que costuma ser usada para desenvolvimento e visualização de um algoritmo é o diagrama de blocos (FARRER *et al*, 1989, p. 23-24).

Os computadores só podem executar diretamente os algoritmos expressos em linguagem de máquina, que é um conjunto de instruções capazes de ativar diretamente os dispositivos eletrônicos do computador.

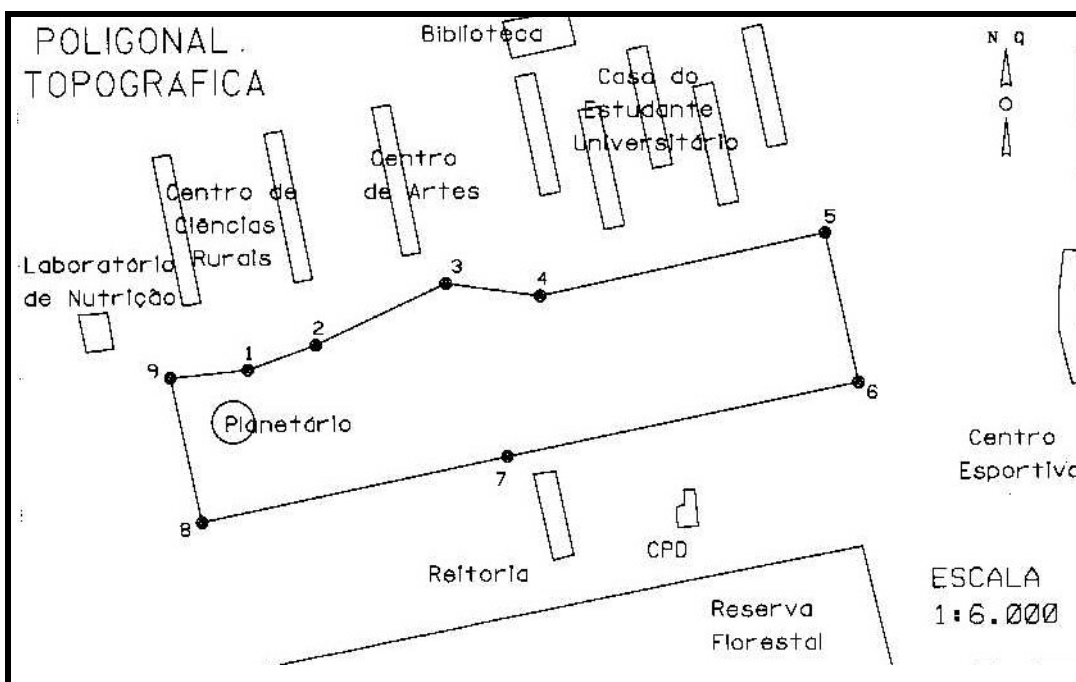
Esta linguagem tem alguns inconvenientes como: é diferente para cada tipo de computador, é extremamente rudimentar e exigindo que mesmo as operações mais simples sejam registradas, é totalmente expressa em forma numérica (binária ou hexagonal) e exige um cuidado extremo para estabelecer o posicionamento dos dados e das instruções na memória. Logo surgiu a idéia de se escreverem programas em Linguagem simbólica, onde a programação é feita através de uma notação matemática e de algumas palavras da língua inglesa, deixando o computador à tarefa de traduzir o programa para a linguagem de máquina. Estas linguagens que passaram a serem chamadas de alto nível foram desenvolvidas com o objetivo de serem usadas em qualquer tipo de máquina e surgiram o FORTRAN para área técnica e científica; o COBOL para área comercial e administrativa. Ainda surgiram o BASIC, o ALGOL e o PASCAL, linguagens criadas com o objetivo de serem mais simples e menos limitadas que o FORTRAN. Com o aparecimento dos microcomputadores, diversas outras linguagens de alto nível foram criadas para atividades específicas de interesse comercial (*op.cit.*, 1989, p. 30-32).

O mesmo autor explica que a linguagem de programação para ser usada em um computador depende da existência de um programa compilador, geralmente disponibilizado pelo próprio fabricante do computador; ou de um programa interpretador que interprete cada comando do programa e execute uma série de instruções que a ele correspondem. Existindo compiladores ou interpretadores para as diversas linguagens, a escolha pode ser pela linguagem preferida ou mais familiar para o programador. Mais importante que a linguagem de programação é o desenvolvimento de um algoritmo adequado, desenvolvido objetivando clareza, permitindo que os erros cometidos sejam detectados, evitando possíveis revisões e visando facilitar futuras modificações.

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

O trabalho foi realizado no *Campus Camobi* da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), cidade de Santa Maria–RS, em uma área entre os prédios da Reitoria, Centro de Processamento de Dados, Casa do Estudante Universitário, Centro de Artes e Letras e o Centro de Ciências Rurais, conforme figura (3.1). Uma poligonal fechada foi estabelecida circundando o gramado central e acompanhando o arruamento existente no local. As coordenadas geodésicas do centro do local do levantamento são:  $\varphi = -29^{\circ}43'$  e  $\lambda = -53^{\circ}43'$  e altitude ortométrica média de 100m.

FIGURA 3.1 – POLIGONAL TOPOGRÁFICA LEVANTADA



FONTE: DESENHO DO AUTOR

O marco número 1 está materializado com cilindro de concreto fixado à cerca de 50 centímetros do nível do solo, chapa de alumínio galvanizada e espera para colocação de parafuso de centragem forçada (figura 3.2). Os demais vértices da poligonal estão materializados com

cilindros de concreto localizados ao nível do solo com orifício e pintura centrais. Estes marcos foram implantados por docentes do Centro de Ciências Rurais com fins didáticos e acadêmicos. Os dados de campo foram coletados no dia 7 de fevereiro de 2004 com Estação Total Leica e mira com um prisma refletor.

FIGURA 3.2 - FOTO DO MARCO INICIAL DO LEVANTAMENTO



FOTO: AUTOR

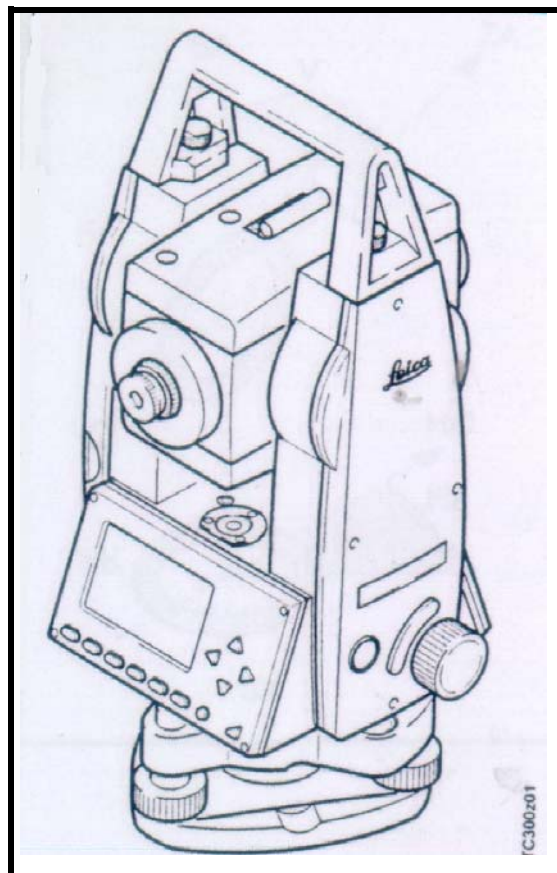


### 3.1 MATERIAL UTILIZADO

#### 3.1.1 Material de Campo

- Estação Total (Total Station) marca Leica TCR 307 (figura 3.3), fabricação Suíça, objetiva com medição eletrônica da distância de raio infravermelho invisível, visor, teclado, memória digital, dispositivos de ajuste, nível de bolha circular e eletrônico e prumo a laser;
- Mira com nível de bolha e prisma refletor;
- Trena 20 metros;
- Tripé com base nivelante;
- Instrumentos de aferição da pressão atmosférica, temperatura do ar e umidade relativa (Termômetro e Barômetro).

FIGURA 3.3 - DESENHO DA ESTAÇÃO TOTAL



FONTE: MANUAL DO USUÁRIO

Segundo o Manual do Usuário do instrumento, as Estações Totais Leica são equipamentos de alta qualidade, adequados para a execução de levantamentos destinados à engenharia civil e trabalhos de locação. Os instrumentos são ajustados na fábrica antes de serem despachados.

Uma fonte de erros freqüente são os erros de índice vertical e de colimação que variam com a temperatura e com o passar do tempo. Estes devem ser determinados antes do equipamento ser utilizado pela primeira vez, depois de longos períodos de transporte, antes e depois de longos períodos de trabalho ou quando a temperatura sofrer uma alteração superior a 10°C.

A calibração abrange a determinação dos seguintes erros instrumentais: colimação  $H_z$  e índice  $V$  que são obtidos e corrigidos acessando as funções do menu depois de realizadas medições para ambas as posições da luneta. A figura (3.4) apresenta detalhes da organização do instrumento importantes para a execução de medições, visando reduzir a um mínimo a possibilidade erros, que normalmente tem caráter sistemático ou acumulativo com mesma magnitude ou sinal algébrico.

FIGURA 3.4 – DETALHES DA ORGANIZAÇÃO DO INSTRUMENTO



FONTE: MANUAL DO USUÁRIO

### 3.1.2 Material de Escritório

#### Hardware:

- Computador com Processador Athlon XP 2400, Placa mãe ASUS A 7V8X-X, Memória DDR 256 MB, Disco Rígido 80 Gb, Placa de Vídeo 64 Mb, Monitor 17 A OC, Gabinete c/ drive para 4 baias, Mouse Óptico;
- Impressora marca Hewlet Packard, modelo 610C, jato de tinta.

## **Software:**

Pacote de programas *Survey Office* da LEICA é usado para transferência dos dados entre o instrumento e o computador e processamento de dados e são instalados em ambiente Windows:

- a) *Data Exchange Manager*: Para a transferência de coordenadas, medições, listas de códigos e formatos de saída entre o instrumento e o computador;
- b) *Codelist manager*: Para criação e processamento de listas de códigos;
- c) *Software upload*: Para carregar / apagar o programa do sistema, os programas aplicativos, bem como os textos do sistema ou dos aplicativos

*Programa Posição,*

*Microstation Intergraf,*

*Word – Equation,*

*Excel,*

*Mat Lab,*

*Adjustment for Windows.*

## **3.2 METODOLOGIA**

O levantamento topográfico planimétrico com Taquímetro Eletrônico (Total Station) foi realizado pelo método do caminhamento perimétrico ou poligonação realizado no sentido horário com medição de leitura digital dos ângulos externos ao polígono e distâncias dos lados do polígono.

Com as medições efetuadas a campo, pode-se determinar o erro de fechamento da poligonal os quais foram comparados com os chamados limites de tolerância ou desvios padrão máximos permitidos para ângulos e distâncias. Estas especificações do instrumento foram colhidas no manual do usuário e são expressas abaixo:

- a) Desvio Padrão para a medição de ângulo (de acordo com a DIN 18723 / ISO 12857): 7" ( sete segundos de arco);
- b) Desvio Padrão da medição de distância: 2mm + 2 ppm (medição padrão) e 5mm + 2ppm (medição rápida).

O levantamento foi efetuado com um operador do instrumento e um balizeiro portando o mira com prisma refletor que se deslocava para as posições de ré e vante. Medidas as condições atmosféricas e introduzidas as informações na memória do instrumento foi executado o levantamento com a realização de duas medidas de distância entre vértices (ré e vante) e uma medida de ângulo para cada vértice.

Os resultados coletados foram transferidos da memória do instrumento para um computador PC e lidos no programa Posição. A seguir os dados foram organizados em uma Planilha de Cálculo adotada na Seção de Topografia do Departamento de Engenharia Rural. Ao ponto inicial do levantamento foi atribuídos o azimute  $100^{\circ}$  e as coordenadas cartesianas  $x=10.000\text{m}$  e  $y=10.000\text{m}$ . Foram feitos os devidos cálculos da tolerância dos erros, compensações lineares e cálculo das coordenadas cartesianas dos demais vértices do polígono. Como dados de entrada para o teste e ajuste foram usados os ângulos compensados linearmente, em razão da constatação de erros sistemáticos de medidas no instrumento utilizado.

A planilha elaborada foi introduzida no programa Excel – Pacote Office da Microsoft o que permitiu a aplicação do teste qui-quadrado do erro de fechamento, controle de aceitação da poligonal; seguido do ajustamento do polígono no plano topográfico com ênfase nos controles de qualidade durante e posteriormente ao ajustamento. A seqüência de etapas de desenvolvimento com as deduções matemáticas e operações com matrizes estão detalhadas nos capítulos 4 e 5. O experimento desenvolvido e análise dos resultados estão no capítulo 6 e as conclusões e recomendações estão no capítulo 7 e último.

#### 4 TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DO ERRO DE FECHAMENTO

O principal objetivo do teste qui-quadrado ( $\chi^2$ ) é avaliar se a descrição gráfica ou histograma é compatível com a função de densidade de probabilidade formulada, que pode ou não obedecer a distribuição normal. Este é um teste singular, porque todos os outros testes são baseados com a suposição da normalidade, enquanto este teste é igualmente válido para outras distribuições de frequência. O teste qui-quadrado aplicado à variância determina se a variância da população hipotetizada ( $\sigma^2$ ) é realmente compatível com o valor ( $s^2$ ) estimado pela amostra. Algumas vezes, a variância da população hipotetizada pode ser vista como a variância das observações requeridas para alcançar uma certa acurácia nos parâmetros e a variância da amostra como a variância das observações. Se o teste mostra que  $s^2$  e  $\sigma^2$  são incompatíveis (falha no teste), então pode ser dito que há evidência que sugere que as observações não foram coletadas de acordo com o proposto, e logo uma reavaliação é indicada. Caso o teste indique compatibilidade entre  $s^2$  e  $\sigma^2$  (teste positivo), a variância da população é usada para caracterizar a precisão de dados em trabalho posterior. Em outras palavras, este teste como uma proposição de calibração da acurácia do processo de mensuração ou do instrumental (VANÍČEK & KRAKIWSKY, 1986, p. 227).

O teste que pode ser proposto é o teste qui-quadrado da forma quadrática do erro de fechamento. Dois casos distintos podem ocorrer: a variância inicial da população  $\sigma_0^2$  é conhecida conduzindo ao teste  $\chi^2$  ou desconhecida levando para o teste estatístico F. É interessante notar que quando a variância inicial da população  $\sigma_0^2$  é conhecida, o teste correspondente pode ser estabelecido para qualquer desvio padrão dos

resíduos antes da solução total dos mínimos quadrados ser feita. Isto é claramente impossível quando a variância inicial é desconhecida (VANIČEK & KRAKIWSKY, 1986, p. 237). O teste  $\chi^2$  da forma quadrática do erro de fechamento será aplicado ao último ponto da poligonal, resultado de uma seqüência de cálculos.

#### 4.1 APLICAÇÃO DO TESTE

Os dados necessários para a aplicação do teste qui-quadrado da forma quadrática do erro de fechamento são:

- a) observações ou medições de ângulos e distâncias de uma poligonal;
- b) ângulos horários de cada vértice com visada ré e vante ( $a_{nij}$ ) em graus, minutos e segundos, podendo ser tomados internamente ou externamente à poligonal;
- c) distâncias observadas entre os vértices ( $S_{ij}$ ) medidas em metros;
- d) desvio padrão ( $\sigma_a$ ) máximo para erro angular de cada observação, obtido das especificações do instrumento utilizado e expresso em segundos de arco;
- e) desvio padrão ( $\sigma_s$ ) máximo para erro linear de cada observação, obtido das especificações do instrumento, expresso em unidades de milímetros, acrescidos de partes por milhão multiplicado pelas distâncias observadas.

A planilha com os dados observados e calculados provisoriamente exigirá:

- a) azimute provisório ( $A_{ij}$ ) com norte verdadeiro ou atribuído;

- b) coordenadas provisórias ( $\hat{x}$ ) e ( $\hat{y}$ ) obtidas com os dados de campo;
- c) erro de fechamento em coordenadas x, denotada pelo símbolo  $\varepsilon_x$  e y, denotada pelo símbolo  $\varepsilon_y$ ;
- d) variância do ângulo ( $\sigma_a^2$ );
- e) variância da distância ( $\sigma_S^2$ ).

#### 4.2 MATRIZES VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA (MVC)

GEMAEL (1994, p. 37) explica que quando o resultado de um experimento estatístico é expresso por apenas um número a variável aleatória se diz unidimensional. No caso de um experimento consistindo de dois lançamentos, designando por “x” o resultado do primeiro lançamento e por “y” o segundo lançamento. Então (x,y) será uma variável aleatória bidimensional e as componentes “x” e “y” consideradas isoladamente são variáveis unidimensionais com variância própria.

As variâncias  $\sigma_i^2$  e as covariâncias  $\sigma_{ij}, (i \neq j)$ , das componentes de uma variável n-dimensional podem ser dispostas da maneira a formar uma matriz quadrada (n x n ) indicada por  $\Sigma$  :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\Sigma$ , simétrica por ser  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , recebe o nome de matriz variância-covariância ou simplesmente matriz covariância (pois a variância é um caso particular da covariância para  $i = j$ ). No caso de as componentes da matriz serem independentes entre si, as covariâncias serão nulas e  $\Sigma$  degenera para uma matriz diagonal.



#### 4.2.1 MVC das Distâncias

Os valores numéricos para compor a matriz são obtidos, usando-se a variância especificada no instrumento utilizado (desvio padrão elevado ao quadrado) com a seguinte forma geral:

$$\Sigma_{S_{ij}} = \begin{bmatrix} \sigma_{S_{12}}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{S_{23}}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{S_{34}}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{S_{p,p+1}}^2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

#### 4.2.2 MVC dos Azimutes

Obtida mediante a aplicação da lei de propagação das covariâncias

$$\Sigma_A = \mathbf{G} \Sigma_a \mathbf{G}^T \quad (4.2)$$

sendo:

$\mathbf{G}$  a matriz das derivadas parciais da função:  $A_{ij} = f(a_j)$

$$\mathbf{G} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial a_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{12}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{12}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial A_{12}}{\partial a_p} \\ \frac{\partial A_{23}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{23}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial A_{23}}{\partial a_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_{p,p+1}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{p,p+1}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial A_{p,p+1}}{\partial a_p} \end{bmatrix}; i=1,2,\dots,p; j=1,2,\dots,p \quad (4.3)$$

onde:

$A_{ij}$  é o azimute do lado da poligonal definido pelo vértice ocupado  $i$  e visado ao vértice de vante  $j$ , dado pela expressão

$$A_{ij} = A_0 + \sum_{j=1}^i a_j - (i-1)180^\circ; i=1,2,\dots,p; j=i+1; \quad (4.4)$$

$a_{kij}$  é o ângulo horizontal horário observado em cada estação e assim a expressão se decompõe como:

$$A_{12} = A_0 \text{ (azimute real ou atribuído)}$$

$$A_{23} = A_{12} + a_{1\hat{2}3} - 180^\circ$$

$$A_{34} = A_{12} + a_{1\hat{2}3} + a_{2\hat{3}4} - 360^\circ$$

$$A_{45} = A_{12} + a_{1\hat{2}3} + a_{2\hat{3}4} + a_{3\hat{4}5} - 540^\circ$$

⋮

$$A_{p,p+1} = A_{12} + a_{1\hat{2}3} + a_{2\hat{3}4} + a_{3\hat{4}5} + a_{4\hat{5}6} + \dots - (p-1)180^\circ \quad (4.5)$$

e assim por diante, o que resulta em uma matriz quadrada, triangular inferior e adimensional,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

e  $\Sigma_a$  é a MVC dos ângulos horizontais, cujos valores numéricos são obtidos das especificações do instrumento, expresso em variância,

$$\Sigma_a = \begin{bmatrix} \sigma_{a_1}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{a_2}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{a_3}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{a_{p+1}}^2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

uma matriz diagonal se as medidas não forem correlacionadas e terá o mesmo valor na diagonal, se as medidas forem obtidas com o mesmo equipamento.

#### 4.2.3 MVC das Distâncias e Azimutes

Agrupamento das matrizes variância-covariância da distância e azimutes (4.1 e 4.2) em uma única matriz,

$$\Sigma_{S,A} = \begin{bmatrix} \Sigma_S & 0 \\ 0 & \Sigma_A \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

resultará uma matriz quadrada.

#### 4.2.4 MVC das Coordenadas do Último Ponto

Aplicando-se a lei de propagação das covariâncias para as coordenadas do último ponto, a MVC das coordenadas do último ponto é:

$$\Sigma_{x,y} = \mathbf{D} \Sigma_{S,A} \mathbf{D}^T, \quad (4.9)$$

sendo:

**D** a matriz das derivadas parciais das funções,

$$x_{p+1} = f(S,A) \text{ e } y_{p+1} = f(S,A),$$

onde:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{p+1}}{\partial S_{12}} & \frac{\partial x_{p+1}}{\partial S_{23}} & \dots & \frac{\partial x_{p+1}}{\partial S_{p,p+1}} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial x_{p+1}}{\partial A_{12}} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial x_{p+1}}{\partial A_{23}} & \dots & \frac{1}{\rho} \frac{\partial x_{p+1}}{\partial A_{p,p+1}} \\ \frac{\partial y_{p+1}}{\partial S_{12}} & \frac{\partial y_{p+1}}{\partial S_{23}} & \dots & \frac{\partial y_{p+1}}{\partial S_{p,p+1}} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial y_{p+1}}{\partial A_{12}} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial y_{p+1}}{\partial A_{23}} & \dots & \frac{1}{\rho} \frac{\partial y_{p+1}}{\partial A_{p,p+1}} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{p+1} &= x_1 + \sum_{i=1}^p S_{ij} \text{sen} A_{ij} \\ y_{p+1} &= y_1 + \sum_{i=1}^p S_{ij} \text{cos} A_{ij} \end{aligned} \right\} \text{ para } i=1,2,\dots,p \text{ e } j=i+1 \quad (4.11)$$

$${}_2 \mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} \text{sen} A_{12} & \text{sen} A_{23} & \dots & \text{sen} A_{p1} & -\frac{1}{\rho} S_{12} \text{cos} A_{12} & -\frac{1}{\rho} S_{23} \text{cos} A_{23} & \dots & -\frac{1}{\rho} S_{p1} \text{cos} A_{p1} \\ \text{cos} A_{12} & \text{cos} A_{23} & \dots & \text{cos} A_{p1} & \frac{1}{\rho} S_{12} \text{sen} A_{12} & \frac{1}{\rho} S_{23} \text{sen} A_{23} & \dots & \frac{1}{\rho} S_{p1} \text{sen} A_{p1} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

sendo  $\rho = \frac{648000}{\pi} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right) \cong \frac{1}{\text{sen}1''} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right)$  o fator introduzido na (4.10) que transforma quantidades dadas em radianos para quantidades em segundos de arco e n é o número de observações.

O resultando será:

$$\mathbf{\Sigma}_{x,y} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

matriz que contém na diagonal principal as variâncias e fora da diagonal as covariâncias.

#### 4.2.5 Aplicação Final do Teste

A estatística do teste é

$$q = \mathbf{E}^T \mathbf{\Sigma}_{x,y}^{-1} \mathbf{E}, \quad (4.14)$$

sendo,

q: valor que é comparado com os valores encontrados na tabela qui-quadrado ( $\chi^2$ ) para o nível de significância ( $\alpha$ ) adotado e o número de graus de liberdade ( $\nu$ ) estabelecido.

$\mathbf{\Sigma}_{x,y}^{-1}$  inversa da MVC das coordenadas do último ponto,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix}; \quad (4.15)$$

$\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  são respectivamente os “erros de fechamento” em abscissa x e ordenada y, expressos por:

$$\varepsilon_x = \hat{y} - y,$$

$$\varepsilon_y = \hat{x} - x.$$

Os valores de x e y são as coordenadas fixas do último ponto da poligonal, enquanto  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são as coordenadas provisórias do último ponto da poligonal, obtida com os valores observados.

A poligonal será aceita caso o valor de  $q$  esteja dentro do intervalo dos valores da distribuição de probabilidade qui-quadrado.

$$\chi^2_{v; 0,5\alpha} < q < \chi^2_{v; 1-0,5\alpha} \quad (4.16)$$

onde:

$v = 2$  graus de liberdade, devido tratar-se de duas dimensões  $x$  e  $y$ ,

$\alpha$ : nível de significância

## 5 AJUSTAMENTO DE POLIGONAL FECHADA NO PLANO TOPOGRÁFICO PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS COM EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO DESENVOLVIDAS POR VARIAÇÃO DE COORDENADAS

O modelo paramétrico do Método dos Mínimos Quadrados parte de observações indiretas, ou seja, estimativa de grandezas que se vinculam às grandezas observadas por meio de um modelo matemático. As observações diretas são os ângulos e distâncias obtidos em um levantamento e as observações indiretas são as coordenadas cartesianas, chamadas de parâmetros (GRIPP JUNIOR, 1994, p. 46).

O método de variação de coordenadas é uma aplicação do modelo paramétrico recomendados às poligonais onde as incógnitas são as correções a serem adicionadas às coordenadas provisórias para a obtenção das coordenadas finais (GEMAEL, 1994, p. 213).

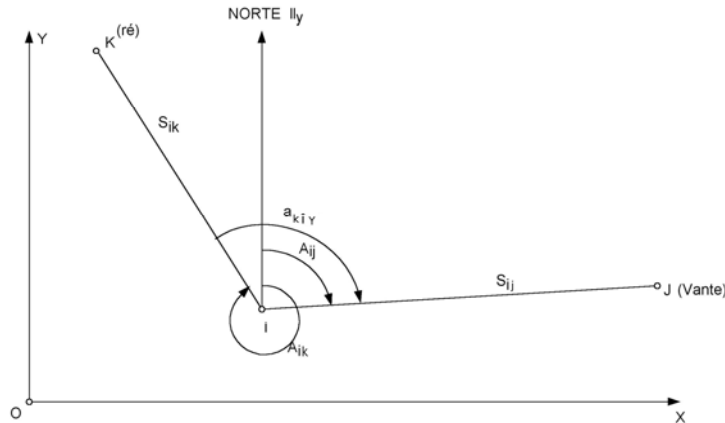
A poligonal desenvolvida no plano topográfico mensura os ângulos e distâncias e equações de observação são estabelecidas, uma para cada observação direta. O modelo matemático parte de fórmulas diferenciais que exprimem a variação do azimute e do comprimento do lado do polígono quando variam as coordenadas dos pontos extremos (MORAES, 1997, p. 19).

### 5.1 PRIMEIRA DEDUÇÃO

Partindo-se das estações genéricas (k, i, j) de um levantamento topográfico, cujo ponto (i) considera-se o ponto de estacionamento do instrumento medidor de distâncias e ângulos. Observando-se o ponto situado para trás (k) por uma distância ( $S_{ik}$ ) e observando-se o ponto situado à frente (j), por uma distância ( $S_{ij}$ ) e o ângulo horizontal horário formado entre os três pontos ( $a_{kij}$ ). Verifica-se que a orientação de uma linha pode ser obtida mediante o azimute transportado da base de apoio da poligonal ou usando-se um valor arbitrário. A orientação da linha de ré

(ik) é expressa no azimute ( $A_{ik}$ ) e a orientação da linha de vante (ij) mediante o azimute ( $A_{ij}$ ). Sobre esta geometria expressa na figura 5.1 se estabelecem as equações de observação fundamentais para o ajustamento pelo método de variação de coordenadas.

FIGURA 5.1 – DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E AZIMUTES NO PLANO



FONTE: MORAES (1997, p. 27)

### 5.1.1 Equação de Observação para a Distância

A equação de observação da distância  $S_{ij}$  é dada por:

$$S_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (5.1)$$

aplicando-se a diferencial a (5.1), temos:

$$2S_{ij}dS_{ij} = 2(x_j - x_i)(dx_j - dx_i) + 2(y_j - y_i)(dy_j - dy_i) \quad (5.2)$$

$$dS_{ij} = \frac{(x_j - x_i)}{S_{ij}}(dx_j - dx_i) + \frac{(y_j - y_i)}{S_{ij}}(dy_j - dy_i)$$

$$dS_{ij} = \text{sen}A_{ij}(dx_j - dx_i) + \text{cos}A_{ij}(dy_j - dy_i)$$

$$dS_{ij} = -\text{sen}A_{ij}dx_i - \text{cos}A_{ij}dy_i + \text{sen}A_{ij}dx_j + \text{cos}A_{ij}dy_j$$

mas

$$dS_{ij} = S_{ij}^o - S_{ij}^c + V_{S_{ij}}$$

temos:

$$S_{ij}^o - S_{ij}^c + V_{S_{ij}} = -\text{sen}A_{ij}dx_i - \text{cos}A_{ij}dy_i + \text{sen}A_{ij}dx_j + \text{cos}A_{ij}dy_j$$

$$f_i = -\text{sen}A_{ij}dx_i - \text{cos}A_{ij}dy_i + \text{sen}A_{ij}dx_j + \text{cos}A_{ij}dy_j + S_{ij}^c - S_{ij}^o = V_{S_{ij}} \quad (5.3)$$

ou substituindo

$$K_{ij} = \text{sen}A_{ij} = \frac{(x_j - x_i)}{S_{ij}} \quad (5.4)$$

$$L_{ij} = \text{cos}A_{ij} = \frac{(y_j - y_i)}{S_{ij}}$$

$$f_i = -K_{ij}dx_i - L_{ij}dy_i + K_{ij}dx_j + L_{ij}dy_j + S_{ij}^c - S_{ij}^o = V_{S_{ij}} \quad (5.5)$$

### 5.1.2 Equação de Observação para o Azimute $A_{ij}$

A equação para o azimute  $A_{ij}$  é dada por:

$$\text{tg}A_{ij} = \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \quad (5.6)$$

diferenciando-se a (5.6):

$$\frac{1}{\text{cos}^2 A_{ij}} dA_{ij} = \frac{(y_j - y_i)(dx_j - dx_i) - (x_j - x_i)(dy_j - dy_i)}{(y_j - y_i)^2}$$

$$dA_{ij} = \frac{\text{cos}^2 A_{ij}(y_j - y_i)(dx_j - dx_i) - \text{cos}^2 A_{ij}(x_j - x_i)(dy_j - dy_i)}{(y_j - y_i)^2} \quad (5.7)$$

mas:

$$\frac{\text{cos}^2 A_{ij}}{(y_j - y_i)^2} = \frac{1}{S_{ij}^2} \quad (5.8)$$

e

$$y_j - y_i = S_{ij} \text{cos}A_{ij} \quad (5.9)$$

$$x_j - x_i = S_{ij} \text{sen}A_{ij}$$

substituindo-se a (5.8) e a (5.9) na (5.7) e simplificando, temos:



$$dA_{ij} = \frac{1}{S_{ij}} [\cos A_{ij}(dx_j - dx_i) - \text{sen}A_{ij}(dy_j - dy_i)] \text{ em radianos} \quad (5.10)$$

expressando a (5.10) em segundos de arco:

$$d''A_{ij} = \frac{648000}{\pi S_{ij}} [\cos A_{ij}(dx_j - dx_i) - \text{sen}A_{ij}(dy_j - dy_i)]$$

$$d''A_{ij} = \frac{648000}{\pi S_{ij}} (-\cos A_{ij}dx_i + \cos A_{ij}dx_j + \text{sen}A_{ij}dy_i - \text{sen}A_{ij}dy_j), \quad (5.11)$$

$$\text{mas } d''A_{ij} = A_{ij}^{o''} - A_{ij}^{c''} + V_{A_{ij}}'' \quad (5.12)$$

Substituindo a (5.4) e a (5.12) na (5.11) e simplificando:

$$\frac{648000}{\pi} \frac{y_j - y_i}{S_{ij}^2} = \frac{648000}{\pi S_{ij}} \cos A_{ij} = \frac{648000}{\pi S_{ij}} L_{ij} = P_{ij} \quad (5.13)$$

$$\frac{648000}{\pi} \frac{x_j - x_i}{S_{ij}^2} = \frac{648000}{\pi S_{ij}} \text{sen}A_{ij} = \frac{648000}{\pi S_{ij}} K_{ij} = Q_{ij}$$

Chega-se à seguinte equação de observação

$$f_{ij} = -\frac{648000}{\pi S_{ij}} \cos A_{ij} dx_i + \frac{648000}{\pi S_{ij}} \cos A_{ij} dx_j + \frac{648000}{\pi S_{ij}} \text{sen}A_{ij} dy_i - \frac{648000}{\pi S_{ij}} \text{sen}A_{ij} dy_j + A_{ij}^{c''} - A_{ij}^{o''} = V_{A_{ij}}'';$$

ou simplificadamente

$$f_{ij} = -\frac{B}{S_{ij}} \cos A_{ij} dx_i + \frac{B}{S_{ij}} \cos A_{ij} dx_j + \frac{B}{S_{ij}} \text{sen}A_{ij} dy_i - \frac{B}{S_{ij}} \text{sen}A_{ij} dy_j + A_{ij}^{c''} - A_{ij}^{o''} = V_{A_{ij}}''$$

$$\text{sendo } B = \frac{648000''}{\pi}$$

ou ainda usando os coeficientes expressos na (5.13):

$$f_{ij} = -P_{ij} dx_i + P_{ij} dx_j + Q_{ij} dy_i - Q_{ij} dy_j + A_{ij}^{c''} - A_{ij}^{o''} = V_{A_{ij}}'' \quad (5.14)$$

### 5.1.3 Equação de Observação para o Azimute $A_{ik}$

Seguindo o raciocínio anterior chega-se à seguinte equação:

$$f_{ik} = -P_{ik} dx_i + P_{ik} dx_k + Q_{ik} dy_i - Q_{ik} dy_k + A_{ik}^c - A_{ik}^o = V_{A_{ik}}'' \quad (5.15)$$

#### 5.1.4 Equação de Observação para o Ângulo $a_{kij}$

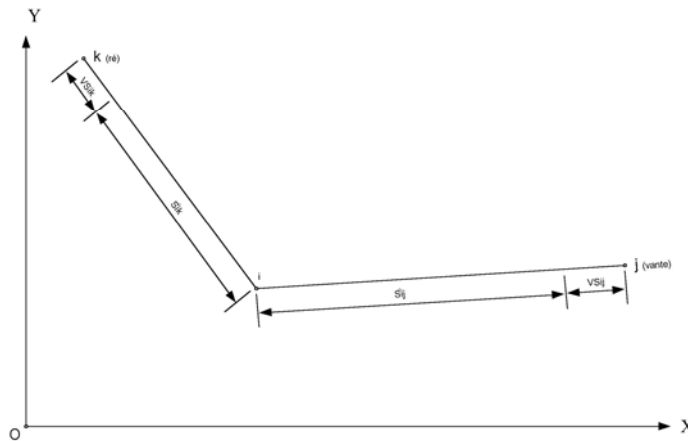
Efetuando-se a diferença entre (5.14) menos (5.15) encontra-se a equação de observação para o angulo  $a_{kij}$ .

$$f_{kij} = -P_{ik} dx_k + Q_{ik} dy_k + (P_{ik} - P_{ij}) dx_i + (Q_{ij} - Q_{ik}) dy_i + P_{ij} dx_j - Q_{ij} dy_j + a_{jik}^c - a_{jik}^o = V_{a_{jik}}'' \quad (5.16)$$

## 5.2 SEGUNDA DEDUÇÃO

A equação de observação de distância é escrita uma para cada lado de uma poligonal. Na figura (5.2) chamamos  $S_{ij}^o$  o comprimento observado da linha  $ij$  e  $V_{S_{ij}}$  o resíduo da observação que pode ser positivo ou negativo.

FIGURA 5.2 – DISTÂNCIA OBSERVADA



FONTE: MORAES (1997, p. 24)