

### 5.2.1 Equação de Observação para a Distância

A equação de observação da distância  $S_{ij}$  é dada por:

$$(S_{ij}^o + V_{S_{ij}}) = \left[ (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

(5.17)

então

$$(S_{ij}^o + V_{S_{ij}}) = F(x_i, y_i, x_j, y_j) = \left[ (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad (5.18)$$

A (5.18) é uma equação não-linear e pode ser linearizada por expansões da série de Taylor, desprezando-se todos os termos de 2ª ordem e maiores (WOLF, 1969) resultando:

$$F(x_i, y_j, x_i, y_j) = F(x_i^o, y_i^o, x_j^o, y_j^o) + \frac{\partial F}{\partial x_i^o} dx_i + \frac{\partial F}{\partial y_i^o} dy_i + \frac{\partial F}{\partial x_j^o} dx_j + \frac{\partial F}{\partial y_j^o} dy_j \quad (5.19)$$

onde:

$$x_i = x_i^o + dx_i$$

$$y_i = y_i^o + dy_i$$

$$x_j = x_j^o + dx_j$$

$$y_j = y_j^o + dy_j$$

Observações:

a)  $x_i^o, y_i^o, x_j^o, y_j^o$  são as coordenadas provisórias dos vértices, obtidas mediante o transporte e valores observados compensados;

b)  $dx_i, dy_i, dx_j, dy_j$  são as incógnitas e representam as correções a serem adicionadas às coordenadas provisórias dos vértices para a obtenção das coordenadas finais;

c)  $\frac{\partial F}{\partial x_i}$  é a derivada parcial de F com relação a  $x_i$  avaliada para  $x_i^o$ ;

analogamente para as outras derivadas.

Calculando as derivadas parciais da (5.18):

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \left[ (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{1/2} 2(x_j - x_i) = -\frac{x_j - x_i}{S_{ij}} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = -\frac{y_j - y_i}{S_{ij}} \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = -\frac{x_i - x_j}{S_{ij}} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = -\frac{y_i - y_j}{S_{ij}} \quad (5.23)$$

Substituindo as equações de (5.20) a (5.23) na (5.19):

$$F(x_i, y_i, x_j, y_j) = F(x_i^o, y_i^o, x_j^o, y_j^o) + \frac{x_i^o - x_j^o}{S_{ij}^o} dx_i + \frac{y_i^o - y_j^o}{S_{ij}^o} dy_i + \frac{x_j^o - x_i^o}{S_{ij}^o} dx_j + \frac{y_j^o - y_i^o}{S_{ij}^o} dy_j \quad (5.24)$$

$$\text{mas } F(x_i^o, y_i^o, x_j^o, y_j^o) = S_{ij}^c \quad (5.25)$$

substituindo a (5.18) e a (5.25) na (5.24):

$$(S_{ij}^o + V_{S_{ij}}) = S_{ij}^c + \frac{x_i^o - x_j^o}{S_{ij}^o} dx_i + \frac{y_i^o - y_j^o}{S_{ij}^o} dy_i + \frac{x_j^o - x_i^o}{S_{ij}^o} dx_j + \frac{y_j^o - y_i^o}{S_{ij}^o} dy_j \quad (5.26)$$

ordenando os termos:

$$\frac{x_i^o - x_j^o}{S_{ij}^o} dx_i + \frac{y_i^o - y_j^o}{S_{ij}^o} dy_i + \frac{x_j^o - x_i^o}{S_{ij}^o} dx_j + \frac{y_j^o - y_i^o}{S_{ij}^o} dy_j + S_{ij}^c - S_{ij}^o = V_{S_{ij}} \quad (5.27)$$

matricialmente, as equações de observação de distância podem ser expressas por:

$${}_n \mathbf{A}_u \mathbf{x}_1 + {}_n \mathbf{l}_1 = {}_n \mathbf{v}_1 \quad (5.28)$$

onde:

$${}_n \mathbf{A}_u = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_1^a} \Big|_{\mathbf{x}_1^o} = \begin{bmatrix} \frac{(x_i^o - x_j^o)(y_i^o - y_j^o)}{S_{ij}^o} & \frac{(x_j^o - x_i^o)(y_i^o - y_j^o)}{S_{ij}^o} \\ \frac{(x_i^o - x_j^o)(y_j^o - y_i^o)}{S_{ij}^o} & \frac{(x_j^o - x_i^o)(y_j^o - y_i^o)}{S_{ij}^o} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$u \mathbf{x}_1$  é o vetor das incógnitas dado por:

$$u \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dx_j \\ dy_j \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$n \ell_1$  é o vetor dos termos independentes das equações de observação de distância, dado por:

$$n \ell_1 = [S_{ij}^c - S_{ij}^o] \quad (5.31)$$

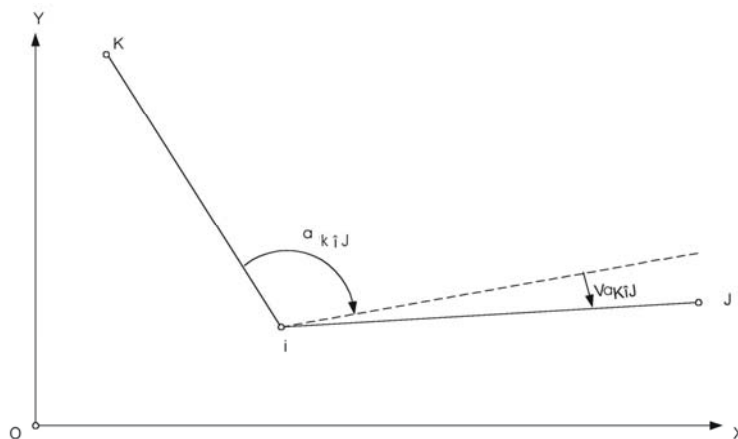
$n \mathbf{v}_1$  é o vetor dos resíduos das distâncias observadas, dado por:

$$n \mathbf{v}_1 = [V_{S_{ij}}] \quad (5.32)$$

### 5.2.2 Equação de Observação para o Ângulo

A equação de observação de ângulo dada a seguir, é escrita uma para cada ângulo ( $a_{kij}$ ) de uma poligonal. Na figura (5.3),  $a_{kij}^o$  é o ângulo observado entre as linhas ik e ij, e  $V_{a_{kij}}$  é o resíduo na observação.

FIGURA 5.3 – ÂNGULO OBSERVADO



FONTE: MORAES (1997, p. 28)

Desta forma, a equação de observação do ângulo  $a_{kij}$  é dada por:

$$a_{kij} + V_{a_{kij}} = F(x_k, y_k, x_i, y_i, x_j, y_j) = \arctg \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} - \arctg \frac{x_k - x_i}{y_k - y_i} \quad (5.33)$$

Da mesma forma que a (5.18), a (5.33) é uma equação não-linear e pode ser linearizada por expansões da série de Taylor, desprezando todos os termos de 2ª ordem e maiores, resultando:

$$F(x_k, y_k, x_i, y_i, x_j, y_j) = F(x_k^o, y_k^o, x_i^o, y_i^o, x_j^o, y_j^o) + \frac{\partial F}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial F}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial F}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial F}{\partial y_j} dy_j \quad (5.34)$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_k} &= - \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{x_k - x_i}{y_k - y_i} \right)^2} \right] \frac{1}{y_k - y_i} = - \left[ \frac{1}{\frac{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2}{(y_k - y_i)^2}} \right] \frac{1}{y_k - y_i} = \\ &= \frac{y_k - y_i}{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2} = - \frac{y_k - y_i}{S_{ik}^2} = + \frac{y_i - y_k}{S_{ik}^2} \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_k} &= \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{x_k - x_i}{y_k - y_i} \right)^2} \right] \left[ - (y_k - y_i)^{-2} (x_k - x_i) \right] = \\ &= + \frac{x_k - x_i}{(y_k - y_i)^2 + \frac{(x_k - x_i)^2}{(y_k - y_i)^2} (y_k - x_i)^2} = - \frac{x_i - x_k}{S_{ik}^2} \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right)^2} \left(-\frac{1}{y_j - y_i}\right) - \frac{1}{1 + \left(\frac{x_k - x_i}{y_k - y_i}\right)^2} \left(-\frac{1}{y_k - y_i}\right) = \\
&= -\frac{1}{\frac{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2}{(y_j - y_i)^2}} \frac{1}{(y_j - y_i)} + \frac{1}{\frac{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2}{(y_k - y_i)^2}} - \frac{1}{(y_k - y_i)} = \\
&= -\frac{y_j - y_i}{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2} + \frac{y_j - y_i}{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2} = \frac{y_i - y_j}{S_{ij}^2} - \frac{y_i - y_k}{S_{ik}^2} =
\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y_i} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right)^2} \left[(y_j - y_i)^{-2}(x_j - x_i)\right] - \frac{1}{1 + \left(\frac{x_k - x_i}{y_k - y_i}\right)^2} \\
&\left[(y_k - y_i)^{-2}(x_k - x_i)\right] = \frac{x_j - x_i}{(y_j - y_i)^2 + \frac{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}{(y_j - y_i)^2}} -
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\frac{x_k - x_i}{(y_k - y_i)^2 + \frac{(x_k - x_i)^2}{(y_k - y_i)^2}} = \frac{x_j - x_i}{S_{ij}^2} - \frac{x_k - x_{ik}}{S_{ik}^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_k} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right)^2} \left(\frac{1}{y_j - y_i}\right) = \frac{1}{\frac{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2}{(y_j - y_i)^2}} \left(\frac{1}{y_j - y_i}\right) = \\
&= -\frac{y_i - y_j}{S_{ij}^2}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right)^2} \left[ -(y_j - y_i)^{-2} (x_j - x_i) \right] = \\ &= -\frac{x_j - x_i}{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2} = +\frac{x_i - x_j}{S_{ij}^2}\end{aligned}\quad (5.40)$$

Substituindo a (5.25), da (5.36) até (5.40) na (5.34):

$$\begin{aligned}F(x_k, y_k, x_i, y_i, x_j, y_j) &= F(x_k^o, y_k^o, x_i^o, y_i^o, x_j^o, y_j^o) + \frac{y_i^o - y_k^o}{(S_{ik}^o)^2} dx_k \\ &- \frac{x_i^o - x_k^o}{(S_{ik}^o)^2} dy_k + \left( \frac{y_i^o - y_j^o}{(S_{ij}^o)^2} - \frac{y_i^o - y_k^o}{(S_{ik}^o)^2} \right) dx_i + \left( \frac{x_i^o - x_j^o}{(S_{ij}^o)^2} - \frac{x_i^o - x_k^o}{(S_{ik}^o)^2} \right) dy_i \\ &- \frac{y_i^o - y_j^o}{(S_{ij}^o)^2} dx_j + \frac{x_i^o - x_j^o}{(S_{ij}^o)^2} dy_j\end{aligned}\quad (5.41)$$

$$\text{mas, } F(x_k^o, y_k^o, x_i^o, y_i^o, x_j^o, y_j^o) = a_{kij}^c \quad (5.42)$$

e substituindo a (5.33) e (5.42) na (5.41):

$$\begin{aligned}a_{kij}^o + Va_{kij} &= a_{kij}^c + \frac{y_i^o - y_k^o}{(S_{ik}^o)^2} dx_k - \frac{x_i^o - x_k^o}{(S_{ik}^o)^2} dy_k + \\ &+ \left( \frac{y_i^o - y_j^o}{(S_{ij}^o)^2} - \frac{y_i^o - y_k^o}{(S_{ik}^o)^2} \right) dx_i + \left( \frac{x_i^o - x_j^o}{(S_{ij}^o)^2} - \frac{x_k^o - x_i^o}{(S_{ik}^o)^2} \right) dy_i - \\ &- \frac{y_i^o - y_j^o}{(S_{ij}^o)^2} dx_j + \frac{x_i^o - x_j^o}{(S_{ij}^o)^2} dy_j\end{aligned}\quad (5.43)$$

Orientando os termos:

$$\begin{aligned}&\frac{y_i^o - y_k^o}{(S_{ik}^o)^2} dx_k + \frac{x_i^o - x_k^o}{(S_{ik}^o)^2} dy_k + \left( \frac{y_i^o - y_j^o}{(S_{ij}^o)^2} - \frac{y_i^o - y_k^o}{(S_{ik}^o)^2} \right) dx_i + \\ &+ \left( \frac{x_j^o - x_i^o}{(S_{ij}^o)^2} - \frac{x_k^o - x_i^o}{(S_{ik}^o)^2} \right) dy_i + \frac{y_j^o - y_i^o}{(S_{ij}^o)^2} dx_j + \frac{x_i^o - x_k^o}{(S_{ij}^o)^2} dy_j \\ &+ a_{kij}^c - a_{kij}^o = Va_{kij}\end{aligned}$$

Nesta expressão  $a_{kij}^c$ ,  $a_{kij}^o$  e  $V_{a_{kij}}$  são medidos em radianos e para converter em segundos de arco, os coeficientes das incógnitas são multiplicados por  $\rho = \frac{648000}{\pi} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right) \cong \frac{1}{\text{sen}1''} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right)$ .

Matricialmente, as equações de observação de ângulo podem ser expressas por:

$${}_n \mathbf{A}_{u \times u} \mathbf{x}_1 + {}_n \ell_1 = {}_n \mathbf{v}_1 \quad (5.44)$$

onde

${}_n \mathbf{A}_u$  é a matriz de ordem  $(n \times u)$  dos coeficientes das incógnitas dados por:

$${}_n \mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} \frac{y_i^o - y_k^o}{(S_{ik}^o)^2} & \frac{x_k^o - x_i^o}{(S_{ik}^o)^2} & \left( \frac{y_i^o - y_j^o}{(S_{ij}^o)^2} - \frac{y_i^o - y_k^o}{(S_{ik}^o)^2} \right) & \left( \frac{x_j^o - x_i^o}{(S_{ij}^o)^2} - \frac{x_k^o - x_i^o}{(S_{ik}^o)^2} \right) & \frac{y_j^o - y_i^o}{(S_{ij}^o)^2} & \frac{x_i^o - x_j^o}{(S_{ij}^o)^2} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

${}_u \mathbf{x}_1$ : é o vetor de ordem  $(u \times 1)$  das incógnitas dado por:

$${}_u \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} dx_k \\ dy_k \\ dx_i \\ dy_i \\ dx_j \\ dy_j \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

${}_n \ell_1$ : é o vetor de ordem  $(n \times 1)$  dos termos independentes das equações de observação de ângulo, dado por:

$${}_n \ell_1 = [a_{kij}^c - a_{kij}^o] \quad (5.47)$$

${}_n \mathbf{v}_1$ : é o vetor de ordem  $(n \times 1)$  dos resíduos dos ângulos observados, dado por:

$${}_n \mathbf{v}_1 = [V_{a_{kij}}] \quad (5.48)$$

### 5.3 SEQÜÊNCIA DE CÁLCULO DE AJUSTAMENTO

Segundo DALMOLIN (2004, p. 89) o modelo matemático do ajustamento paramétrico (também chamado modelo das equações de observações ou método das observações indiretas) procura ao final o vetor das observações ajustadas  $\ell^a$  que é função dos parâmetros ajustados  $\mathbf{x}^a$ . Parâmetros são as grandezas estimadas vinculadas às observações.

#### 5.3.1 Modelo Matemático Natural

$$F(\mathbf{x}^a) = \ell^a \quad (5.49)$$

Os valores observados ajustados são função explícita dos parâmetros ajustados.

$${}_{u}\mathbf{x}_1^a = \begin{bmatrix} x_i^a \\ y_i^a \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

#### 5.3.2 Modelo Matemático Linearizado

$${}_{n}\mathbf{A}_{uu}\mathbf{x}_{1+n} + {}_{\ell_{1=n}}\mathbf{v}_1 \quad (5.51)$$

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_i^a} \right|_{\mathbf{x}_i^o} \quad (5.52)$$

#### 5.3.3 Sistema de Equações Normais

O sistema de equações normais, obtido da minimização da forma quadrática fundamental do MMQ é expresso por

$${}_{u}\mathbf{A}_{nn}^T \mathbf{P}_{nn} \mathbf{A}_{uu}\mathbf{x}_{1+u} + {}_{\ell_{1=u}}\mathbf{A}_{nn}^T \mathbf{P}_{nn} \ell_{1=u} = \mathbf{0}_1 \quad (5.53)$$



A solução do sistema de equações normais é

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell, \quad (5.54)$$

sendo

$\mathbf{A}$  é a matriz que abriga as derivadas parciais das equações de observações de distância e azimute, avaliadas com o vetor dos parâmetros aproximados;

$\mathbf{P}$  é a matriz dos pesos (inversa da matriz das variâncias de distâncias e ângulos horizontais) multiplicada pela variância da unidade de peso a priori;

$\ell$  é o vetor dos termos independentes.

Estabelecendo-se uma notação para a simplificação da equação, tem-se:

$K_{ij} = \text{sen } A_{ij}$  e  $K_{ik} = \text{sen } A_{ik}$  para o diferencial  $dx$  em relação à distância;

enquanto

$L_{ij} = \text{cos } A_{ij}$  e  $L_{ik} = \text{cos } A_{ik}$  para a diferencial  $dy$  em relação ao ângulo

$$P_{ij} = \frac{648000}{\pi S_{ij}} \text{cos } A_{ij} \quad \text{e} \quad P_{ik} = \frac{648000}{\pi S_{ik}} \text{cos } A_{ik}$$

para o diferencial  $dx$  em relação ao ângulo; enquanto

$$Q_{ij} = \frac{648000}{\pi S_{ij}} \text{sen } A_{ij} \quad \text{e} \quad Q_{ik} = \frac{648000}{\pi S_{ik}} \text{sen } A_{ik}$$

para o diferencial  $dy$  em relação ao ângulo

A matriz **A** é escrita na forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 -L_{12} & -K_{12} & L_{12} & K_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & -L_{23} & -K_{23} & L_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -L_{34} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 L_{p1} & K_{p1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 (P_{p1} - P_{12}) & (-Q_{p1} + Q_{12}) & P_{12} & -Q_{12} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 -P_{12} & Q_{12} & (P_{12} - P_{23}) & (-Q_{12} + Q_{23}) & P_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & -P_{23} & Q_{23} & (P_{23} - P_{34}) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 P_{p1} & -Q_{p1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 K_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 -K_{34} & L_{34} & K_{34} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & -L_{p1} & -K_{p1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & -P_{p1} & Q_{p1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 -Q_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 (-Q_{23} + Q_{34}) & P_{34} & -Q_{34} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & -P_{(p-1)p} & Q_{(p-1)p} & (P_{(p-1)p} - P_{p1}) & (-Q_{(p-1)p} + Q_{p1}) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{bmatrix}$$

(5.55)

A matriz dos pesos  $\mathbf{P}$  é matriz diagonal quando as covariâncias são nulas:

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{S_1}^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{S_2}^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{S_3}^2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{S_p}^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sigma_{a_1}^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{a_2}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{a_3}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{a_p}^2} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

O vetor de termos independentes ( $\ell$ ) é formado das seguintes diferenças:

$$\ell = \begin{bmatrix} S_{12}^c - S_{12}^o \\ S_{23}^c - S_{23}^o \\ S_{34}^c - S_{34}^o \\ \vdots \\ S_{p1}^c - S_{p1}^o \\ a_{p12}^c - a_{p12}^o \\ a_{123}^c - a_{123}^o \\ a_{234}^c - a_{234}^o \\ \vdots \\ a_{(p-1)\hat{p}1}^c - a_{(p-1)\hat{p}1}^o \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

### 5.3.4 Vetor de Coordenadas Ajustadas

O vetor das coordenadas ajustadas é obtido da soma do vetor de coordenadas aproximadas com o vetor das correções :

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^o + \mathbf{x} \quad (5.58)$$

### 5.3.5 Variância da Unidade Peso *a Posteriori*

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \ell \quad (5.59)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-u} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{u} + \ell^T \mathbf{P} \ell}{n-u}$$

(5.60)

### 5.3.6 MVC das Coordenadas Ajustadas

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}^a} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \quad (5.61)$$

### 5.3.7 Valores Observados Ajustados

$$\ell^a = \ell^b + \mathbf{v} \quad (5.62)$$

### 5.3.8 MVC dos Valores Ajustados

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\ell^a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (5.63)$$

### 5.3.9 MVC dos Resíduos

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{v}^a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{P}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}_{\ell^a} \quad (5.64)$$

### 5.3.10 Teste Qui-quadrado da Forma Quadrática dos Resíduos

A comparação de  $\sigma_0^2$  com  $\hat{\sigma}_0^2$  se baseia no fato de que a forma quadrática fundamental  $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$  tem distribuição  $\chi^2$  com (n-u) graus de liberdade (GEMAEL, 1994, p.123) e tem por finalidade verificar se estatisticamente  $\sigma_0^2$  é igual a  $\hat{\sigma}_0^2$ ; esta última, obtida do ajustamento.

Estabelece-se o teste de hipótese:

Hipótese básica ( $H_0$ )  $\rightarrow H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ ,

Hipótese Alternativa ( $H_1$ )  $\rightarrow H_1 : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$ .

Calcula-se a estatística

$$\chi^{*2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} (n-u), \text{ com } \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-u},$$

$$\chi^{*2} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\sigma_0^2}, \text{ que comparado com os valores teóricos:}$$

$\chi_{v;0,5\alpha}^2$  e  $\chi_{v;1-0,5\alpha}^2$ , fornece o resultado final do teste.

$H_0$  é aceita, ao nível de significância  $\alpha$ , se:

$$\chi_{v;0,5\alpha}^2 < \chi^{*2} < \chi_{v;1-0,5\alpha}^2$$

### 5.4 ITERAÇÕES

Os modelos matemáticos que ocorrem com mais freqüência em Topografia e em Geodésia são não-lineares. A omissão de termos da série de Taylor e a adoção de valores iniciais aproximados introduzem erros no ajustamento. O vetor  $\mathbf{x}^a$  e  $\ell^a$  seriam os resultados finais de um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados se os vetores  $\mathbf{x}^o$  e  $\ell^b$  que foram utilizados na série de Taylor estivessem suficientemente

próximos de  $\mathbf{x}^a$  e  $\ell^a$ , respectivamente; caso contrário, são necessárias as iterações.

Nas iterações, os primeiros resultados obtidos em uma etapa, tornam-se valores aproximados da etapa seguinte e assim sucessivamente.

Durante a iteração:

- os componentes do vetor  $\mathbf{x}$  diminuem, aproximando-se de zero;
- a forma quadrática fundamental  $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$  tende a se estabilizar;
- a MVC  $\Sigma_{\mathbf{x}^a}$  tende a se estabilizar.

QUADRO 5.1 – ITERAÇÕES

1ª ETAPA	2ª ETAPA (1ª iteração)	ETAPA i+1 (i-ésima iteração)
$\ell^a = f(\mathbf{x}^a);$ $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \ell;$ $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^a} \right _{\mathbf{x}^0}$ $\ell = \ell^0 - \ell^b$ $\ell^0 = f(\mathbf{x}^0)$ $\ell = f(\mathbf{x}^0) - \ell^b$ $\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell$ $\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^0 + \mathbf{x}$ $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-u}$ $\Sigma_{\mathbf{x}^a} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$	$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}_1^0;$ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \ell_1;$ $\mathbf{A}_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^a} \right _{\mathbf{x}_1^0}$ $\ell_1 = f(\mathbf{x}_1^0) - \ell^b$ $\mathbf{x}_1 = -(\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \ell_1$ $\mathbf{x}_1^a = \mathbf{x}_1^0 + \mathbf{x}_1$ $\hat{\sigma}_{01}^2 = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{P} \mathbf{v}_1}{n-u}$ $\Sigma_{\mathbf{x}_1^a} = \hat{\sigma}_{01}^2 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1)^{-1}$	$\mathbf{x}_{i-1}^a = \mathbf{x}_i^0;$ $\mathbf{v}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \ell_i;$ $\mathbf{A}_i = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^a} \right _{\mathbf{x}_i^0}$ $\ell_i = f(\mathbf{x}_i^0) - \ell^b$ $\mathbf{x}_i = -(\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} \ell_i$ $\mathbf{x}_i^a = \mathbf{x}_i^0 + \mathbf{x}_i$ $\hat{\sigma}_{oi}^2 = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{P} \mathbf{v}_i}{n-u}$ $\Sigma_{\mathbf{x}_i^a} = \hat{\sigma}_{oi}^2 (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} \mathbf{A}_i)^{-1}$

FONTE: GEMAEL (1994, p. 179-180)

## 5.5 CONTROLES DE QUALIDADE DE LEVANTAMENTOS

Até poucos anos atrás, os controles de qualidade de levantamentos topográficos e geodésicos estavam baseados em formulações matemáticas e geométricas, algumas documentadas na NBR 13133/1994 e outras de caráter práticas, adotadas pelos profissionais. Os erros angular e linear de fechamento obedeciam a uma tolerância e uma vez aceito o trabalho, compensações matemáticas eram praticadas. A este controle chama-se clássico ou tradicional.

Nas condições atuais, os avanços consideráveis de instrumentação para execução dos trabalhos e o uso da estatística, grande quantidade de controles de qualidade foram desenvolvidos e a exigência expressa em acurácia aumentou enormemente. Estas formulações passaram a ser chamados de controles de qualidade avançado.

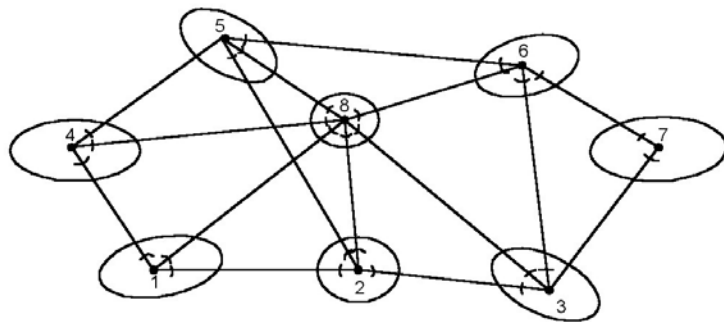
Para o propósito deste trabalho desenvolveu-se como controle pré-ajustamento, o teste qui-quadrado da forma quadrática do erro de fechamento expresso no capítulo 4. Como controle durante o ajustamento, calcula-se a variância da unidade peso *a posteriori* e compara-se com a variação da unidade peso *a priori*, que se convencionou em 1 (um) e aplica-se o teste qui-quadrado da forma quadrática dos resíduos, com o referencial desenvolvido no item 5.3 deste capítulo. Para a verificação da qualidade do levantamento após o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados usam-se as estimações por ponto: a elipse dos erros, a elipse de confiança, círculo médio de posição e o círculo do erro de posição, formulações estas que podem ser geometrizadas e foram bastante estudadas em unidades de pesquisa de fora do Brasil.

O controle de qualidade resultante de formulações matemáticas e estatísticas proposto, depende da informação de qualidade dos ângulos, distâncias e coordenadas que está disponível nas matrizes variância-covariância.

### 5.5.1 Elipse dos Erros

Uma das estimativas da qualidade de uma linha poligonal são os parâmetros da elipse dos erros de cada ponto desta rede expostos na figura (5.4). Os semi-eixos maior e menor da elipse dos erros, simbolizados respectivamente por  $a$  e  $b$ , são dados pelo desvio padrão máximo e mínimo das coordenadas do ponto. Os desvios padrões máximo e mínimo são função das variâncias máxima e mínima, respectivamente.

FIGURA 5.4 - ELIPSE DOS ERROS DE CADA PONTO DE UMA REDE



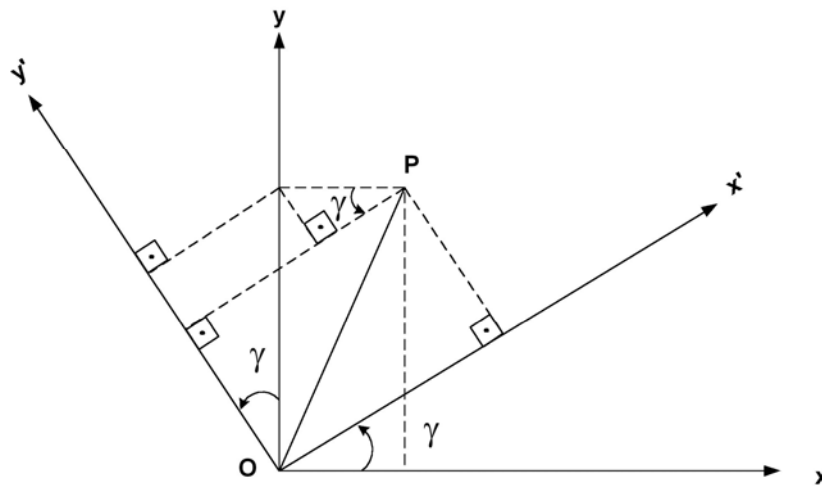
FONTE: NIEMEIER (2002, p. 235)

#### 5.5.1.1 Variâncias máxima e mínima das coordenadas do ponto

As variâncias e as covariâncias das coordenadas ajustadas de um ponto pelo MMQ acham-se vinculadas à direção de cada eixo. A direção do eixo maior da elipse (eixo  $x'$ ) forma um ângulo  $\gamma$  com a direção positiva do eixo  $x$ , conforme a figura (5.5).

FIGURA 5.5 – ROTAÇÃO DE SISTEMA CARTESIANO DO ESPAÇO BIDIMENSIONAL





FONTE: MORAES (2001, p. 63)

As coordenadas do ponto P referenciadas ao sistema  $O_{x'y'}$  são dadas por:

$$x' = x \cos \gamma + y \operatorname{sen} \gamma, \quad (5.65)$$

$$y' = -x \operatorname{sen} \gamma + y \cos \gamma \quad (5.66)$$

A (5.65) e a (5.66) são escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \operatorname{sen} \gamma \\ -\operatorname{sen} \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

em que a matriz

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma & \operatorname{sen} \gamma \\ -\operatorname{sen} \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\gamma) \quad (5.68)$$

é chamada matriz de rotação.

O ajustamento forneceu as coordenadas de  $P = (x; y)$  e a respectiva matriz covariância

$$\mathbf{\Sigma}_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Efetuada a propagação:

$$\mathbf{\Sigma}_{x'y'} = \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}_{xy}\mathbf{A}^T, \quad (5.70)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \text{sen} \gamma \\ -\text{sen} \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (5.71)$$

Substituindo na (5.70) a matriz  $\mathbf{A}$ , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'}^2 & \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \text{sen} \gamma \\ -\text{sen} \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\text{sen} \gamma \\ \text{sen} \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'}^2 & \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \cos \gamma + \sigma_{yx} \text{sen} \gamma & \sigma_{xy} \cos \gamma + \sigma_y^2 \text{sen} \gamma \\ -\sigma_x^2 \text{sen} \gamma + \sigma_{yx} \cos \gamma & -\sigma_{xy} \text{sen} \gamma + \sigma_y^2 \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\text{sen} \gamma \\ \text{sen} \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'}^2 & \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_x^2 \cos \gamma + \sigma_{yx} \text{sen} \gamma) \cos \gamma + (\sigma_{xy} \cos \gamma + \sigma_y^2 \text{sen} \gamma) \text{sen} \gamma & \\ (-\sigma_x^2 \text{sen} \gamma + \sigma_{yx} \cos \gamma) \cos \gamma + (-\sigma_{xy} \text{sen} \gamma + \sigma_y^2 \cos \gamma) \text{sen} \gamma & \\ -(\sigma_x^2 \cos \gamma + \sigma_{yx} \text{sen} \gamma) \text{sen} \gamma + (\sigma_{xy} \cos \gamma + \sigma_y^2 \text{sen} \gamma) \cos \gamma & \\ (-\sigma_x^2 \text{sen} \gamma + \sigma_{yx} \cos \gamma) \text{sen} \gamma + (-\sigma_{xy} \text{sen} \gamma + \sigma_y^2 \cos \gamma) \cos \gamma & \end{bmatrix}.$$

Os elementos da matriz  $\mathbf{\Sigma}_{x'y'}$  são:

$$\sigma_{x'}^2 = (\sigma_x^2 \cos \gamma + \sigma_{yx} \text{sen} \gamma) \cos \gamma + (\sigma_{xy} \cos \gamma + \sigma_y^2 \text{sen} \gamma) \text{sen} \gamma = \quad (5.72)$$

$$\sigma_x^2 \cos^2 \gamma + \sigma_y^2 \text{sen}^2 \gamma + 2\sigma_{xy} \text{sen} \gamma \cos \gamma,$$

$$\sigma_{y'}^2 = (\sigma_x^2 \text{sen} \gamma + \sigma_{yx} \cos \gamma) \text{sen} \gamma + (-\sigma_x^2 \text{sen} \gamma + \sigma_y^2 \cos \gamma) \cos \gamma = \quad (5.73)$$

$$\sigma_x^2 \text{sen}^2 \gamma + \sigma_y^2 \cos^2 \gamma + 2\sigma_{yx} \text{sen} \gamma \cos \gamma,$$

$$\sigma_{x'y'} = -(\sigma_x^2 \cos \gamma + \sigma_{yx} \text{sen} \gamma) \text{sen} \gamma + (\sigma_{xy} \cos \gamma + \sigma_y^2 \text{sen} \gamma) \cos \gamma = \quad (5.74)$$

$$-\sigma_x^2 \text{sen} \gamma \cos \gamma - \sigma_{yx} \text{sen}^2 \gamma + \sigma_{xy} \cos^2 \gamma + \sigma_y^2 \text{sen} \gamma \cos \gamma =$$

$$-(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \text{sen} \gamma \cos \gamma + \sigma_{xy} (\cos^2 \gamma - \text{sen}^2 \gamma).$$

Portanto, a matriz  $\mathbf{\Sigma}_{x'y'}$  depende do ângulo de rotação  $\gamma$ .

Somando (5.72) e (5.73):

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 + \sigma_y^2 &= \sigma_x^2(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) + \sigma_y^2(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = \\ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 &= \text{constante}\end{aligned}\quad (5.75)$$

Os extremos da função são obtidos da igualdade  $\frac{\partial \sigma_x^2}{\partial \gamma} = 0$ ; logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x^2}{\partial \gamma} &= -2\sigma_x^2 \cos \gamma \sin \gamma + 2\sigma_y^2 \sin \gamma \cos \gamma - 2\sigma_{xy} \cos \gamma \cos \gamma = 0 \\ \frac{\partial \sigma_x^2}{\partial \gamma} &= 2\cos \gamma \sin \gamma (-\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + 2\sigma_{xy} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = 0\end{aligned}\quad (5.76)$$

Substituindo na (5.76) as relações trigonométricas:

$$2\cos \gamma \sin \gamma = \sin 2\gamma \quad (5.77)$$

$$\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma = \cos 2\gamma, \quad (5.78)$$

obtem-se

$$\frac{\partial \sigma_x^2}{\partial \gamma} = \sin 2\gamma (-\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + 2\sigma_{xy} \cos 2\gamma = 0, \quad (5.79)$$

$$\sin 2\gamma (-\sigma_x^2 + \sigma_y^2) = -2\sigma_{xy} \cos 2\gamma, \quad (5.80)$$

$$\sin 2\gamma (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) = 2\sigma_{xy} \cos 2\gamma. \quad (5.81)$$

Resolvendo a (5.81):

$$\frac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma} = \frac{2\sigma_{xy}}{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)},$$

$$\text{tg} 2\gamma = \frac{2\sigma_{xy}}{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)} \quad (5.82)$$

que é a expressão do ângulo crítico.

As raízes (os pontos críticos) da (5.82) são  $\gamma$  e  $\gamma + 90^\circ$ . Isto significa que as variâncias máxima e mínima estão em eixos ortogonais.

A expressão do ângulo crítico pode assumir as formas:

$$\operatorname{sen}2\gamma = \frac{2\sigma_{xy}}{M}, \quad (5.83)$$

$$\operatorname{cos}2\gamma = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{M}, \quad (5.84)$$

Elevando ao quadrado a (5.83) e a (5.84) e somando, obtém-se a expressão de M:

$$M^2 = 4(\sigma_{xy})^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2, \quad (5.85)$$

As fórmulas que fornecem diretamente os valores extremos vêm da (5.72) após transformações trigonométricas (GEMAEL, 1994, p. 229):

$$\sigma_{x'}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{2}(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)\operatorname{cos}2\gamma + \sigma_{xy}\operatorname{sen}2\gamma. \quad (5.86)$$

Substituindo na (5.86) a (5.83) e a (5.84):

$$\begin{aligned} \max \sigma_{x'}^2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{2}(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{M} + \sigma_{xy}\frac{2\sigma_{xy}}{M}, \\ \max \sigma_{x'}^2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{2}\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{M} + \frac{2}{2}\frac{2(\sigma_{xy})^2}{M}, \\ \max \sigma_{x'}^2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{2M}\left[(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\sigma_{xy})^2\right] \end{aligned} \quad (5.87)$$

e substituindo na (5.87) a (5.85), a expressão usual da variância máxima:

$$\max \sigma_{x'}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{M}{2} \quad (5.88)$$

Partindo da (5.73)  $\sigma_{y'}^2 = \sigma_x^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + \sigma_y^2 \operatorname{cos}^2 \gamma - 2\sigma_{yx} \operatorname{sen} \gamma \operatorname{cos} \gamma$ ,

chega-se à expressão da variância mínima:

$$\min \sigma_{y'}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{M}{2} \quad (5.89)$$

O cálculo de M é efetuado com a (5.85).

### 5.5.1.2 Semi-eixos da elipse dos erros

Os semi-eixos a e b da elipse dos erros são calculados por:

$$a = \sqrt{\max \sigma_{x'}^2}, \quad (5.90)$$

$$b = \sqrt{\min \sigma_{y'}^2}. \quad (5.91)$$

A orientação da elipse é dada pelo ângulo  $\gamma$ .

### 5.5.1.3 Outro método de obtenção dos semi-eixos da elipse dos erros

Da decomposição da matriz covariância em valores próprios e vetores próprios, os semi-eixos da elipse dos erros são calculados por:

$$a = \sqrt{\max \lambda}, \quad (5.92)$$

$$b = \sqrt{\min \lambda}, \quad (5.93)$$

sendo  $\lambda$  o valor próprio obtido pelo método de decomposição espectral da submatriz da matriz covariância. A orientação da elipse é dada pelos vetores próprios.

### 5.5.2 Semi-Eixos da Elipse de Confiança

A probabilidade de que a posição calculada do ponto caia na superfície da elipse dos erros é 0,39. Com os semi-eixos da elipse dos erros calculam-se os semi-eixos da elipse de confiança a qual depende de uma probabilidade dada.

Designando por  $a$  e por  $b$  os semi-eixos maior e menor, respectivamente, da elipse dos erros, os semi-eixos  $a_{\text{conf.}}$  e  $b_{\text{conf.}}$  da elipse de confiança são dados por:

$$a_{\text{conf.}} = k a, \quad (5.94)$$

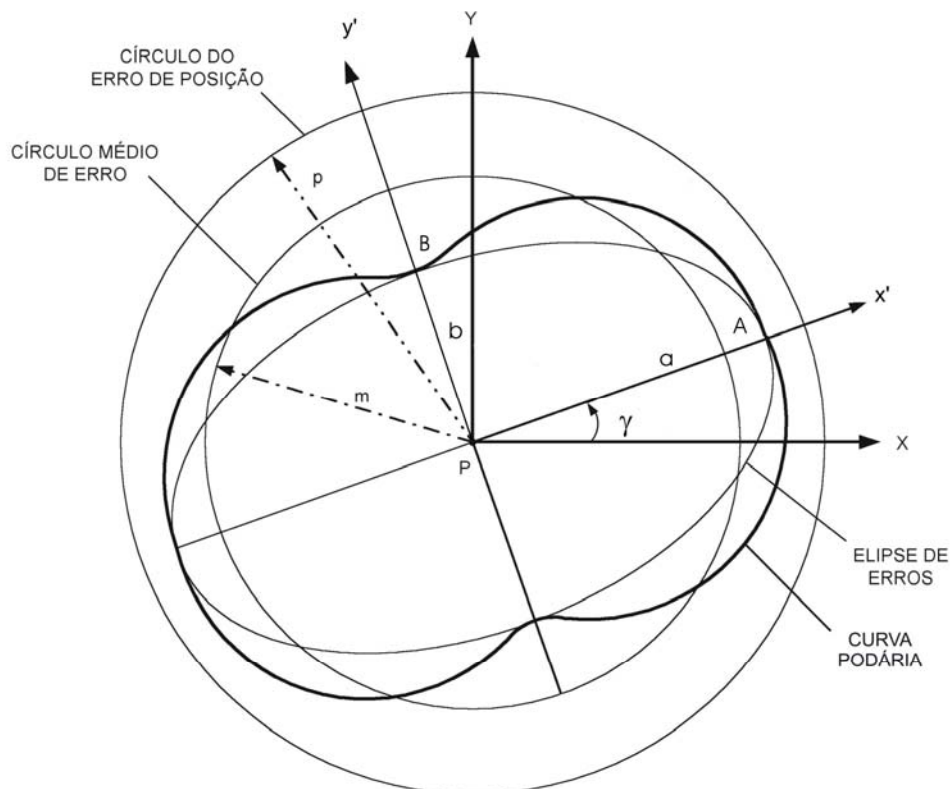
$$b_{\text{conf.}} = k b, \quad (5.95)$$

$k^2 \sim \chi_2^2$  (isto é, a estatística  $k^2$  segue a distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade).

### 5.5.3 Interpretação da Elipse dos Erros, Elipse de Confiança, Podária, Círculo do Erro de Posição e Círculo do Erro Médio

O estudo de ajustamento de levantamentos mostrados em VERESS (1973) relaciona diversas maneiras de medição da acurácia. Na análise de um levantamento pós-ajustado, diversas medidas foram desenvolvidas para expressar a acurácia, sendo a mais difundida a elipse dos erros. Todas estas medidas de acurácia como erro provável, erro de 90%, erro médio, erro padrão e erro de posição estão direta ou indiretamente ligados à distribuição normal ou gaussiana. Cabe salientar que a necessidade de acurácia tem sido consideravelmente aumentada nos levantamentos de hoje.

FIGURA 5.6 – MEDIDAS DE ACURÁCIA GRAFICADAS



FONTE: VERESS (1973, p. 436).  
NOTA: TRADUÇÃO E ADAPTAÇÃO DO AUTOR

### 5.5.3.1 Elipse dos erros e elipse de confiança

O conceito de elipse dos erros foi introduzido por HELMERT em 1868 e desde então tem sido gradualmente aceito para o uso em Geodésia. Estatisticamente, a elipse dos erros determina uma área de densidade de probabilidade constante.

Dadas duas variáveis  $x$  e  $y$ , com probabilidades seguindo a distribuição normal, as quais definem um ponto  $P$ , no espaço bidimensional. Se esta superfície é interceptada por planos paralelos à superfície básica  $X$ - $Y$ , uma elipse tendo probabilidade constante será obtida. Como pode ser visto na figura (5.6), o semi-eixo maior e o semi-eixo menor não coincidem com os eixos de coordenadas planas  $X$  e  $Y$ , e um novo sistema de coordenadas  $x'$  e  $y'$ , coincidentes com a direção dos parâmetros da elipse. A elipse dos erros apresenta a direção máxima e a direção mínima de erros, expressas em valores numéricos e dá o desvio padrão somente nas direções  $x'$  e  $y'$ .

### 5.5.3.2 Curva Podária

A curva que dá o erro padrão em qualquer direção é a curva Podária mostrada na figura (5.6). Geometricamente, a curva Podária representa o lugar dos pontos da intersecção dos pés das perpendiculares do centro  $P$  da elipse dos erros às tangentes a todo o ponto da elipse dos erros. A melhor maneira para determinar seus raios e a posição de sua origem é por interpolação visual com um compasso. Por representar os desvios padrões em qualquer direção e ser construída com simplicidade a curva Podária deveria ser incluída na documentação de levantamentos em que foi usado o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.

### 5.5.3.3 Círculo de erro de posição

Uma medida de precisão freqüentemente usada para avaliação de um levantamento é a soma dos quadrados dos desvios padrões que conduz ao conceito de erro de posição expresso na equação:

$$\sigma_p^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (5.96)$$

$\sigma_p = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ , sendo  $\sigma_p$  o raio do erro do círculo de posição.

Esta representação está na figura (5.6), não tendo porém, significação estatística e não pode ser usado como medida de acurácia do ponto de vista teórico.

#### 5.5.3.4 Círculo do erro médio

Outra medida, o círculo de erro médio foi sugerido por HOMORODI com o raio do círculo resultado da expressão:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{2}} \quad (5.97)$$

É representado por um círculo intermediário em relação ao círculo do erro de posição e a elipse dos erros (figura 5.3). Embora de fácil construção indica o desvio padrão igual em todas as direções, o que não é o caso na prática real. Também não apresenta significação estatística.

#### 5.5.4 Teste *Data Snooping* de Baarda

No ajustamento pelo MMQ, a detecção de erros é obtida mediante a aplicação do teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos e a localização pode ser efetuada pelo teste *data snooping* de Baarda (MORAES, 1998, p.77 e KAVOURAS, 1982, p.39). A estatística do teste é:

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{\ell_i} \sqrt{r_i}} \sim \sqrt{F_{1,\infty}} = N(0,1) \text{ sob } H_0, \quad (5.98)$$



$r_i$  é a redundância parcial que se obtém da diagonal da matriz,

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \mathbf{\Sigma}_v \mathbf{P}. \quad (5.99)$$

$\mathbf{R}$  é a matriz de redundâncias,

traço ( $\mathbf{R}$ ) =  $n-u = n^0$  de graus de liberdade,

Aplicação do teste:

$H_0$  : nenhum erro existe na observação  $\ell_i$

A hipótese básica é rejeitada se

$$|w_i| > K. \quad (5.100)$$

$K$  é um valor crítico conforme um nível de confiança específico:

$$1 - \alpha = 95\% \Rightarrow K = 1,96$$

$$1 - \alpha = 99\% \Rightarrow K = 2,57$$

## 6 EXPERIMENTAÇÃO E RESULTADOS COM ANÁLISE

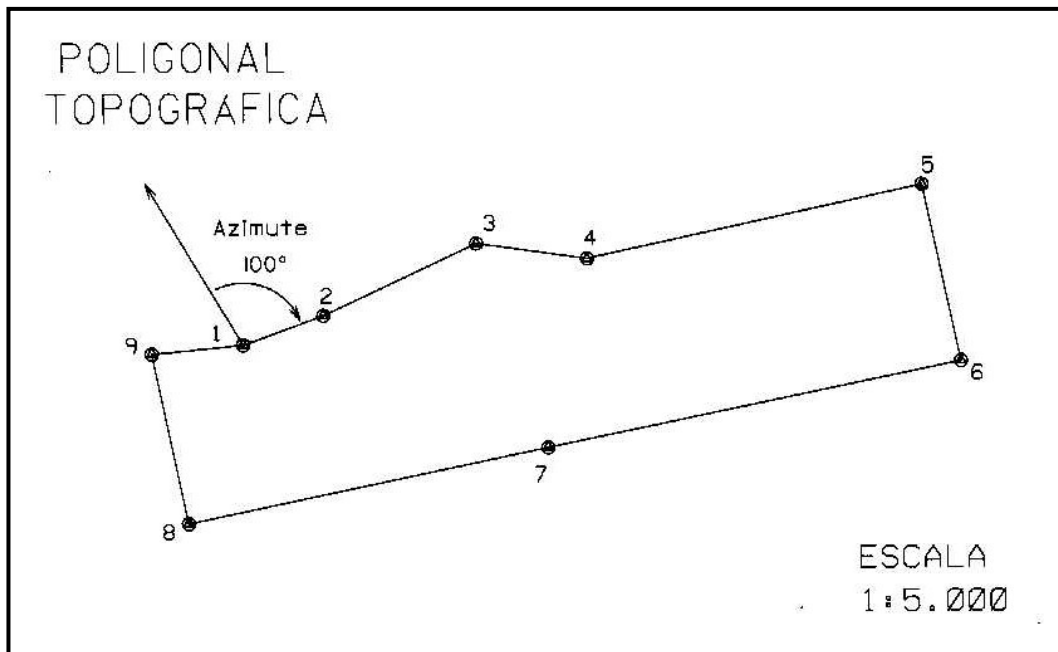
O levantamento resultado deste estudo no *Campus* UFSM teve os dados organizados em uma planilha retirada de MORAES (2004) e croqui expresso a seguir. Os dados foram trabalhados na seqüência dos capítulos anteriores com a elaboração de fluxograma para programação.

QUADRO 6.1- PLANILHA DE CÁLCULO DO EXPERIMENTO

PLANILHA DE CÁLCULO EM LINHA POLIGONAL FECHADA																			
Valores iniciais:		$P_1 = (x_1; y_1) = (10\ 000,000; 10\ 000,000)$ m						$Az_{1 \rightarrow 2} = 100^\circ\ 00'\ 00,00''$											
Es-ta-ção $P_i$	Ângulo Horizontal Horário $\alpha_i$ médio	Com-pensa-ção $C_{\alpha_i}$	$\alpha_i$ compensado	Alinha-mento		Distância horizontal $d_{i,i+1}$ [m]	Azimute $Az_{i,i+1}$	Projeções não-compensadas		Compensação		Projeções compensadas		Coordenadas cartesianas					
				Est $P_i$	PV $P_{i+1}$			$\Delta x'$	$\Delta y'$	$C_{\Delta x}$	$C_{\Delta y}$	$\Delta x$	$\Delta y$	PV $P_{i+1}$	x [m]	y [m]			
1	165° 27' 43"	8,22"	165° 27' 51,22"	1	2	58,695	100° 00' 00"	57,803	-10,192	0,000	-0,002	57,803	-10,194	2	10 057,803	9 989,806			
2	174° 50' 38"	8,22"	174° 50' 46,22"	2	3	116,373	94° 50' 46,22"	115,957	-9,831	0,000	-0,004	115,957	-9,835	3	10 173,760	9 979,971			
3	213° 08' 03"	8,22"	213° 08' 11,22"	3	4	77,011	127° 58' 57,44"	60,700	-47,394	0,000	-0,003	60,700	-47,397	4	10 234,460	9 932,574			
4	159° 47' 10"	8,22"	159° 47' 18,22"	4	5	236,377	107° 46' 15,66"	225,098	-72,145	0,000	-0,009	225,098	-72,154	5	10 459,558	9 860,420			
5	270° 09' 28"	8,22"	270° 09' 36,22"	5	6	124,440	197° 55' 51,88"	-38,312	-118,396	0,000	-0,005	-38,312	-118,401	6	10 421,246	9 742,019			
6	270° 24' 35"	8,22"	270° 24' 43,22"	6	7	290,451	288° 20' 35,10"	-275,693	91,407	0,000	-0,011	-275,693	91,396	7	10 145,553	9 833,415			
7	179° 50' 21"	8,22"	179° 50' 29,22"	7	8	253,068	288° 11' 04,32"	-240,429	78,977	0,000	-0,010	-240,429	78,967	8	9 905,124	9 912,382			
8	270° 00' 47"	8,22"	270° 00' 55,22"	8	9	119,843	18° 11' 59,54"	37,431	113,848	0,000	-0,005	37,431	113,843	9	9 942,555	10 026,225			
9	276° 20' 01"	8,22"	276° 20' 09,22"	9	1	63,148	114° 32' 08,76"	57,446	-26,223	0,000	-0,002	57,446	-26,225	1	10 000,000	10 000,000			
-	-	-	-	1	2	-	99° 59' 59,98"	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
$n=9$	$\sum_{i=1}^{n-9} \alpha_i = 1979^\circ 58' 46''$	$\sum_{i=1}^{n-9} C_{\alpha_i} = 74''$	$\sum_{i=1}^{n-9} \alpha_{i(comp)} = 1979^\circ 59' 59,98''$	$\sum_{i=1}^{n-9} d_{i,i+1} = p = 1339,406$ m				$\sum_{i=1}^{n-9} \Delta x' = 0,001$ m	$\sum_{i=1}^{n-9} \Delta y' = 0,051$ m	$\sum_{i=1}^{n-9} C_{\Delta x} = 0,000$ m	$\sum_{i=1}^{n-9} C_{\Delta y} = -0,051$ m	$\sum_{i=1}^{n-9} \Delta x = 0,001$ m	$\sum_{i=1}^{n-9} \Delta y = 0,000$ m						
FORMULÁRIO FUNDAMENTAL																			
<p><math>n</math> = quantidade de vértices da linha poligonal PV = ponto visado Erro angular de fechamento <math>\epsilon_{\alpha}</math></p> $\epsilon_{\alpha} = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n \pm 2)180^\circ$ <p>+ se os <math>\alpha_i</math> forem ângulos externos - se os <math>\alpha_i</math> forem ângulos internos</p> <p>Tolerância angular (NBR 13 133/1994, p. 19) <math>T_{\alpha} \leq a\sqrt{n}</math>, a = unidade de leitura direta no círculo horizontal do instrumento.</p>				<p>Compensação de <math>\alpha_i</math></p> $C_{\alpha_i} = \frac{-\epsilon_{\alpha}}{n}$ <p>Transporte de azimute <math>Az_{i,i+1} = Az_{i-1,i} + \alpha_i = Az_{i-1,i} \pm 180^\circ + \alpha_i</math></p> <p>Projeções não-compensadas <math>\Delta x' = d_{i,i+1} \text{ sen } Az_{i,i+1}</math>, <math>\Delta y' = d_{i,i+1} \text{ cos } Az_{i,i+1}</math></p>				<p>Erro linear absoluto <math>\epsilon_{r(abs.)}</math></p> $\epsilon_{r(abs.)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n-9} \Delta x'\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-9} \Delta y'\right)^2}$ <p>Erro linear relativo <math>\epsilon_{r(rel.)}</math></p> $\epsilon_{r(rel.)} = \frac{\epsilon_{r(abs.)}}{p} = \frac{1}{\frac{p}{\epsilon_{r(abs.)}}}$ <p>p = perímetro.</p>				<p>Compensação das projeções</p> $C_{\Delta x} = -\frac{\sum_{i=1}^{n-9} \Delta x'}{p} d_{i,i+1}$ $C_{\Delta y} = -\frac{\sum_{i=1}^{n-9} \Delta y'}{p} d_{i,i+1}$ <p>Projeções compensadas <math>\Delta x = \Delta x' + C_{\Delta x}</math> <math>\Delta y = \Delta y' + C_{\Delta y}</math></p>				<p>Transporte de coordenadas <math>x_{i+1} = x_i + \Delta x</math>, <math>\Delta x = d_{i,i+1} \text{ sen } Az_{i,i+1}</math> <math>y_{i+1} = y_i + \Delta y</math>, <math>\Delta y = d_{i,i+1} \text{ cos } Az_{i,i+1}</math>.</p> <p>Medida de superfície (área) Aplicação da fórmula de Gauss <math display="block">S = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{n-9} y_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-9} x_i y_{i+1} \right)</math></p>			
CÁLCULOS																			
$\epsilon_{\alpha} = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n \pm 2)180^\circ = -74''$ $T_{\alpha} \leq a\sqrt{n} = 27''$ $C_{\alpha_i} = \frac{-\epsilon_{\alpha}}{n} = 8,22''$				$\epsilon_{r(abs.)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n-9} \Delta x'\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-9} \Delta y'\right)^2} = 0,051$ m $\epsilon_{r(rel.)} = \frac{\epsilon_{r(abs.)}}{p} = \frac{1}{\frac{p}{\epsilon_{r(abs.)}}} = 1: 26\ 263$				$\frac{\sum_{i=1}^{n-9} \Delta x'}{p} =$ $\frac{\sum_{i=1}^{n-9} \Delta y'}{p} =$											



FIGURA 6.1 – CROQUI DO LEVANTAMENTO



### 6.1 TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DO ERRO DE FECHAMENTO

A poligonal representada por sua planilha de cálculos (quadro 6.1) e seu esboço (figura 6.1) é apresentada para exemplificar a aplicação do teste, adotando o nível de significância  $\alpha=1\%$ . As coordenadas do ponto inicial foram fixadas em  $x = y = 10\,000,00\text{ m}$ , ponto usado de controle. O azimute da linha definida pelos pontos 1 e 2 foi fixado em  $100^\circ$ . Os desvio padrão das distâncias e ângulos, dados por  $\sigma_S = (2\text{mm} + 2\text{ppm} \times S)$  e  $\sigma_a = 7''$ , respectivamente.

#### Seqüência de Passos

##### a) Matriz Variância-Covariância das Distâncias ( $\Sigma_S$ )

A matriz variância-covariância das distancias é de ordem  $9 \times 9$  diagonal com a variância das distâncias ocupando a diagonal da matriz



$\Sigma_a$ : MVC dos ângulos horizontais, matriz diagonal de ordem 9x9 com a variância dos ângulos  $\sigma_a^2 = (7'')^2 = 49('')^2$ . Os elementos da matriz são  $\sigma_{ij} = 49('')^2$ , para  $i = j$  e  $\sigma_{ij} = 0$ , para  $i \neq j$  se os ângulos não forem correlacionados:

$$\Sigma_a = \begin{bmatrix} 49 & & & & & & & & \\ & 49 & & & & & & & \\ & & 49 & & & & & & \\ & & & 49 & & & & & \\ & & & & 49 & & & & \\ & & & & & 49 & & & \\ & & & & & & 49 & & \\ & & & & & & & 49 & \\ & & & & & & & & 49 \end{bmatrix} ('')^2 = 49('')^2.$$

A MVC dos azimutes ( $\Sigma_A$ ) é

$${}_9(\Sigma_A)_9 = \begin{bmatrix} 49 & 49 & 49 & 49 & 49 & 49 & 49 & 49 & 49 \\ 49 & 98 & 98 & 98 & 98 & 98 & 98 & 98 & 98 \\ 49 & 98 & 147 & 147 & 147 & 147 & 147 & 147 & 147 \\ 49 & 98 & 147 & 196 & 196 & 196 & 196 & 196 & 196 \\ 49 & 98 & 147 & 196 & 245 & 245 & 245 & 245 & 245 \\ 49 & 98 & 147 & 196 & 245 & 294 & 294 & 294 & 294 \\ 49 & 98 & 147 & 196 & 245 & 294 & 343 & 343 & 343 \\ 49 & 98 & 147 & 196 & 245 & 294 & 343 & 392 & 392 \\ 49 & 98 & 147 & 196 & 245 & 294 & 343 & 392 & 441 \end{bmatrix} ('')^2$$

c) MVC das Distâncias e Azimutes ( $\Sigma_{SA}$ )

A matriz variância-covariância das distâncias e azimutes consiste em reunir as matrizes variância-covariância das distâncias e dos azimutes em uma única matriz (4.8);

$${}_{18}(\Sigma_{SA})_{18} = \begin{bmatrix} \Sigma_S & 0 \\ 0 & \Sigma_A \end{bmatrix}$$



**d) MVC das Coordenadas do Último Ponto ( $\Sigma_{x,y}$ )**

A lei de propagação das covariâncias para as coordenadas do último ponto é

$${}_2(\Sigma_{x,y})_2 = {}_2\mathbf{D}_{18} {}_{18}(\Sigma_{S.A})_{18} {}_2\mathbf{D}_{18}^T,$$

em que  $\mathbf{D}$  é dada pela (4.10):

$${}_2\mathbf{D}_{18} = \begin{bmatrix} 0,984808 & 0,996425 & 0,788197 & 0,952284 & -0,307873 & -0,949189 \\ -0,173648 & -0,084481 & -0,615422 & -0,305214 & -0,951428 & 0,314706 \\ -0,950056 & 0,312333 & 0,909702 & -0,000049 & -0,000048 & -0,000230 \\ 0,312078 & 0,949973 & -0,415261 & -0,000280 & -0,000562 & -0,000294 \\ -0,000350 & -0,000574 & 0,000443 & 0,000383 & 0,000552 & -0,000127 \\ 0,001091 & 0,000186 & 0,001337 & 0,001166 & -0,000181 & -0,000278 \end{bmatrix},$$

resultando

$${}_2(\Sigma_{x,y})_2 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000181 & 0,000234 \\ 0,000234 & 0,000602 \end{bmatrix} (\text{m}^2).$$

Os desvios padrões da abscissa e da ordenada são, respectivamente,

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0,000181} = 0,013440 \text{ m},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{0,000602} = 0,024530 \text{ m}.$$

**e) Aplicação do Teste**

A estatística do teste é  $q = {}_1\mathbf{E}_2^T {}_2(\Sigma_{xy}^{-1})_2 {}_2\mathbf{E}_1$ , em que  $\Sigma_{xy}^{-1}$  é a inversa da MVC das coordenadas do último ponto:

$${}_2(\Sigma_{xy}^{-1})_2 = \begin{bmatrix} 11179,921 & -4352,439 \\ -4352,439 & 3356,337 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{\text{m}^2} \right),$$



$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix}$  contém os “erros de fechamento” em abscissa x e ordenada y

(quadro 6.1):

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0,001 \\ 0,051 \end{bmatrix} (m),$$

$$q = \mathbf{E}_1^T (\boldsymbol{\Sigma}_{xy}^{-1})_2 \mathbf{E}_1 = 7,61.$$

Para o nível de significância  $\alpha = 1\%$ :

$$\chi^2 \text{ teórico com } \alpha = 1\%, \begin{cases} 0,5 \alpha = 0,005 \\ 1 - 0,5 \alpha = 0,995 \end{cases}$$

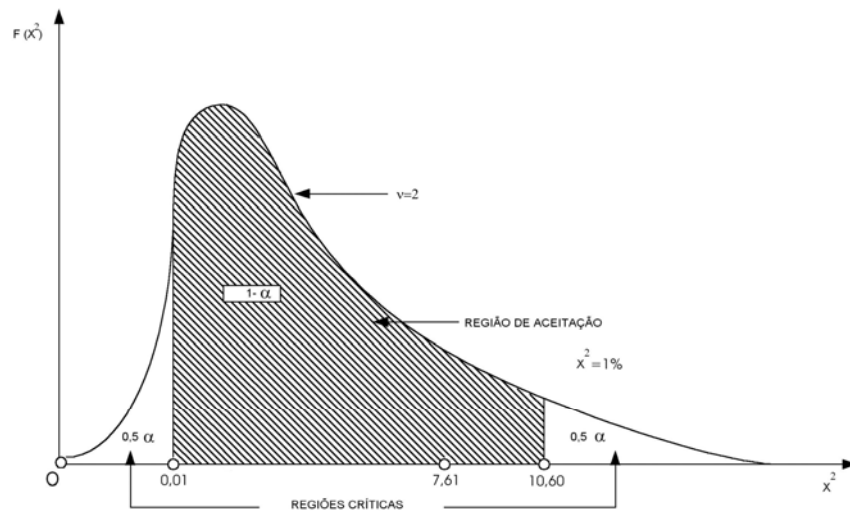
$v = 2$  graus de liberdade,

$$\chi_{2;0,005}^2 = 0,01, \quad \chi_{2;0,995}^2 = 10,60,$$

$$\chi_{v;0,5\alpha}^2 < q < \chi_{v;1-0,5\alpha}^2.$$

Conclusão: a poligonal é aceita ao nível de significância igual a 1%.

FIGURA 6.2 – DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES QUI-QUADRADO PARA O TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DO ERRO DE FECHAMENTO



NOTA: A curva da distribuição  $\chi^2$  assintótica ao eixo das abscissas, (ver p.107)

## 6.2 AJUSTAMENTO PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O levantamento efetuado demonstrado no croqui (figura 6.1) resultou em planilha de cálculo (quadro 6.1). O ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, com as equações de observação expressas por variação de coordenadas permite obter coordenadas finais dos vértices mediante as correções  $dx_i$  e  $dy_i$  que são adicionadas às coordenadas provisórias, calculadas com os valores observados. As deduções formuladas no capítulo 5, requerem que as equações de observação de distância e de ângulo sejam estabelecidas a fim de propiciar o ajustamento tanto das coordenadas x e y como dos valores observados.

Durante o ajustamento, o teste qui-quadrado da forma quadrática dos resíduos é aplicado para fazer a comparação estatística da variância da unidade peso *a priori* com a variância da unidade peso *a posteriori*. Esta comparação é efetuada por meio do teste de hipótese a fim de indicar a qualidade do ajustamento.

Por fim, após a obtenção da matriz de variância-covariância das coordenadas ajustadas, de posse das variâncias e covariâncias das coordenadas de cada ponto da poligonal foram calculados os parâmetros das elipses dos erros, elipses de confiança e círculo do erro de posição como controle de qualidade pós-ajustamento.

### 6.2.1 Equações de Observação de Distâncias e Ângulos

#### 6.2.1.1 Equações de observação de distâncias

A equação geral de observação de distância é escrita:

$$f_i = -\text{sen}A_{ij}dx_i - \text{cos}A_{ij}dy_i + \text{sen}A_{ij}dx_j + \text{cos}A_{ij}dy_j + S_{ij}^c - S_{ij}^o = V_{s_{ij}}$$

Para a linha poligonal em estudo, as equações de observação de distância são:

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\text{sen}A_{1\rightarrow 2} dx_1 - \text{cos}A_{1\rightarrow 2} dy_1 + \text{sen}A_{1\rightarrow 2} dx_2 + \text{cos}A_{1\rightarrow 2} dy_2 + S_{1\rightarrow 2}^c - S_{1\rightarrow 2}^o = V_{S_{12}} \\
f_2 &= -\text{sen}A_{2\rightarrow 3} dx_2 - \text{cos}A_{2\rightarrow 3} dy_2 + \text{sen}A_{2\rightarrow 3} dx_3 + \text{cos}A_{2\rightarrow 3} dy_3 + S_{2\rightarrow 3}^c - S_{2\rightarrow 3}^o = V_{S_{23}} \\
f_3 &= -\text{sen}A_{3\rightarrow 4} dx_3 - \text{cos}A_{3\rightarrow 4} dy_3 + \text{sen}A_{3\rightarrow 4} dx_4 + \text{cos}A_{3\rightarrow 4} dy_4 + S_{3\rightarrow 4}^c - S_{3\rightarrow 4}^o = V_{S_{34}} \\
f_4 &= -\text{sen}A_{4\rightarrow 5} dx_4 - \text{cos}A_{4\rightarrow 5} dy_4 + \text{sen}A_{4\rightarrow 5} dx_5 + \text{cos}A_{4\rightarrow 5} dy_5 + S_{4\rightarrow 5}^c - S_{4\rightarrow 5}^o = V_{S_{45}} \\
f_5 &= -\text{sen}A_{5\rightarrow 6} dx_5 - \text{cos}A_{5\rightarrow 6} dy_5 + \text{sen}A_{5\rightarrow 6} dx_6 + \text{cos}A_{5\rightarrow 6} dy_6 + S_{5\rightarrow 6}^c - S_{5\rightarrow 6}^o = V_{S_{56}} \\
f_6 &= -\text{sen}A_{6\rightarrow 7} dx_6 - \text{cos}A_{6\rightarrow 7} dy_6 + \text{sen}A_{6\rightarrow 7} dx_7 + \text{cos}A_{6\rightarrow 7} dy_7 + S_{6\rightarrow 7}^c - S_{6\rightarrow 7}^o = V_{S_{67}} \\
f_7 &= -\text{sen}A_{7\rightarrow 8} dx_7 - \text{cos}A_{7\rightarrow 8} dy_7 + \text{sen}A_{7\rightarrow 8} dx_8 + \text{cos}A_{7\rightarrow 8} dy_8 + S_{7\rightarrow 8}^c - S_{7\rightarrow 8}^o = V_{S_{78}} \\
f_8 &= -\text{sen}A_{8\rightarrow 9} dx_8 - \text{cos}A_{8\rightarrow 9} dy_8 + \text{sen}A_{8\rightarrow 9} dx_9 + \text{cos}A_{8\rightarrow 9} dy_9 + S_{8\rightarrow 9}^c - S_{8\rightarrow 9}^o = V_{S_{89}} \\
f_9 &= -\text{sen}A_{9\rightarrow 1} dx_9 - \text{cos}A_{9\rightarrow 1} dy_9 + \text{sen}A_{9\rightarrow 1} dx_1 + \text{cos}A_{9\rightarrow 1} dy_1 + S_{9\rightarrow 1}^c - S_{9\rightarrow 1}^o = V_{S_{91}}
\end{aligned}$$

### 6.2.1.2 Equações de observação de ângulos

A equação de observação de azimute  $A_{ij}$  é

$$f_{ij} = -\frac{B}{S_{ij}} \cos A_{ij} dx_i + \frac{B}{S_{ij}} \text{sen} A_{ij} dy_i + \frac{B}{S_{ij}} \cos A_{ij} dx_j - \frac{B}{S_{ij}} \text{sen} A_{ij} dy_j + A_{ij}^c - A_{ij}^o = V_{A_{ij}}$$

e a equação de observação de azimute  $A_{ik}$  é

$$f_{ik} = -\frac{B}{S_{ik}} \cos A_{ik} dx_i + \frac{B}{S_{ik}} \text{sen} A_{ik} dy_i + \frac{B}{S_{ik}} \cos A_{ik} dx_k - \frac{B}{S_{ik}} \text{sen} A_{ik} dy_k + A_{ik}^c - A_{ik}^o = V_{A_{ik}}$$

$$\text{sendo } B = \frac{648000}{\pi}$$

A equação de observação de ângulo é obtida da diferença ( $f_{ij} - f_{ik}$ )

resultando:

$$f_i = \left( -\frac{B}{S_{ij}} \cos A_{ij} + \frac{B}{S_{ik}} \cos A_{ik} \right) dx_i + \left( \frac{B}{S_{ij}} \sin A_{ij} - \frac{B}{S_{ik}} \sin A_{ik} \right) dy_1 + \frac{B}{S_{ij}} \cos A_{ij} dx_j - \frac{B}{S_{ik}} \sin A_{ik} dx_k - \frac{B}{S_{ij}} \cos A_{ij} dy_j + \frac{B}{S_{ik}} \sin A_{ik} dy_k + A_{ij}^c - A_{ik}^c - A_{ij}^o + A_{ik}^o = V_{A_{ij}}'' - V_{A_{ik}}''$$

simplificando:

$$f_i = B \left( -\frac{1}{S_{ij}} \cos A_{ij} + \frac{1}{S_{ik}} \cos A_{ik} \right) dx_i + B \left( \frac{1}{S_{ij}} \sin A_{ij} - \frac{1}{S_{ik}} \sin A_{ik} \right) dy_1 + \frac{B}{S_{ij}} \cos A_{ij} dx_j - \frac{B}{S_{ik}} \sin A_{ik} dx_k + \frac{B}{S_{ik}} \sin A_{ik} dy_k + a_{kij}^c - a_{kij}^o = V_{a_{kij}}''$$

As equações de observação de ângulo são:

$$f_{10} = B \left( -\frac{1}{S_{1 \rightarrow 2}} \cos A_{1 \rightarrow 2} + \frac{1}{S_{1 \rightarrow 9}} \cos A_{1 \rightarrow 9} \right) dx_1 + B \left( \frac{1}{S_{1 \rightarrow 2}} \sin A_{1 \rightarrow 2} - \frac{1}{S_{1 \rightarrow 9}} \sin A_{1 \rightarrow 9} \right) dy_1 + \frac{B}{S_{1 \rightarrow 2}} \cos A_{1 \rightarrow 2} dx_2 - \frac{B}{S_{1 \rightarrow 2}} \sin A_{1 \rightarrow 2} dy_2 - \frac{B}{S_{1 \rightarrow 9}} \cos A_{1 \rightarrow 9} dx_9 + \frac{B}{S_{1 \rightarrow 9}} \sin A_{1 \rightarrow 9} dy_9 + a_{912}^c - a_{912}^o = V_{a_{912}}''$$

$$f_{11} = B \left( -\frac{1}{S_{2 \rightarrow 3}} \cos A_{2 \rightarrow 3} + \frac{1}{S_{2 \rightarrow 1}} \cos A_{2 \rightarrow 1} \right) dx_1 + B \left( \frac{1}{S_{2 \rightarrow 3}} \sin A_{2 \rightarrow 3} - \frac{1}{S_{2 \rightarrow 1}} \sin A_{2 \rightarrow 1} \right) dy_2 + \frac{B}{S_{2 \rightarrow 3}} \cos A_{2 \rightarrow 3} dx_3 - \frac{B}{S_{2 \rightarrow 3}} \sin A_{2 \rightarrow 3} dy_3 - \frac{B}{S_{2 \rightarrow 1}} \cos A_{2 \rightarrow 1} dx_1 + \frac{B}{S_{2 \rightarrow 1}} \sin A_{2 \rightarrow 1} dy_1 + a_{123}^c - a_{123}^o = V_{a_{123}}''$$

$$f_{12} = B \left( -\frac{1}{S_{3 \rightarrow 4}} \cos A_{3 \rightarrow 4} + \frac{1}{S_{3 \rightarrow 2}} \cos A_{3 \rightarrow 2} \right) dx_3 + B \left( \frac{1}{S_{3 \rightarrow 4}} \sin A_{3 \rightarrow 4} - \frac{1}{S_{3 \rightarrow 2}} \sin A_{3 \rightarrow 2} \right) dy_3 + \frac{B}{S_{3 \rightarrow 4}} \cos A_{3 \rightarrow 4} dx_4 - \frac{B}{S_{3 \rightarrow 4}} \sin A_{3 \rightarrow 4} dy_4 - \frac{B}{S_{3 \rightarrow 2}} \cos A_{3 \rightarrow 2} dx_2 + \frac{B}{S_{3 \rightarrow 2}} \sin A_{3 \rightarrow 2} dy_2 + a_{234}^c - a_{234}^o = V_{a_{234}}''$$

$$f_{13} = B \left( -\frac{1}{S_{4 \rightarrow 5}} \cos A_{4 \rightarrow 5} + \frac{1}{S_{4 \rightarrow 3}} \cos A_{4 \rightarrow 3} \right) dx_4 + B \left( \frac{1}{S_{4 \rightarrow 5}} \operatorname{sen} A_{4 \rightarrow 5} - \frac{1}{S_{4 \rightarrow 3}} \operatorname{sen} A_{4 \rightarrow 3} \right) dy_4 +$$

$$\frac{B}{S_{4 \rightarrow 5}} \cos A_{4 \rightarrow 5} dx_6 - \frac{B}{S_{4 \rightarrow 5}} \operatorname{sen} A_{4 \rightarrow 5} dy_5 - \frac{B}{S_{4 \rightarrow 3}} \cos A_{4 \rightarrow 3} dx_3 + \frac{B}{S_{4 \rightarrow 3}} \operatorname{sen} A_{4 \rightarrow 3} dy_3$$

$$+ a_{345}^c - a_{345}^o = V_{a_{345}}''$$

$$f_{14} = B \left( -\frac{1}{S_{5 \rightarrow 6}} \cos A_{5 \rightarrow 6} + \frac{1}{S_{5 \rightarrow 4}} \cos A_{5 \rightarrow 4} \right) dx_6 + B \left( \frac{1}{S_{5 \rightarrow 6}} \operatorname{sen} A_{5 \rightarrow 6} - \frac{1}{S_{5 \rightarrow 4}} \operatorname{sen} A_{5 \rightarrow 4} \right) dy_5 +$$

$$\frac{B}{S_{5 \rightarrow 6}} \cos A_{5 \rightarrow 6} dx_6 - \frac{B}{S_{5 \rightarrow 6}} \operatorname{sen} A_{5 \rightarrow 6} dy_6 - \frac{B}{S_{5 \rightarrow 4}} \cos A_{5 \rightarrow 4} dx_4 + \frac{B}{S_{5 \rightarrow 4}} \operatorname{sen} A_{5 \rightarrow 4} dy_4$$

$$+ a_{456}^c - a_{456}^o = V_{a_{456}}''$$

$$f_{15} = B \left( -\frac{1}{S_{6 \rightarrow 7}} \cos A_{6 \rightarrow 7} + \frac{1}{S_{6 \rightarrow 5}} \cos A_{6 \rightarrow 5} \right) dx_6 + B \left( \frac{1}{S_{6 \rightarrow 7}} \operatorname{sen} A_{6 \rightarrow 7} - \frac{1}{S_{6 \rightarrow 5}} \operatorname{sen} A_{6 \rightarrow 5} \right) dy_6 +$$

$$\frac{B}{S_{6 \rightarrow 7}} \cos A_{6 \rightarrow 7} dx_7 - \frac{B}{S_{6 \rightarrow 7}} \operatorname{sen} A_{6 \rightarrow 7} dy_7 - \frac{B}{S_{6 \rightarrow 5}} \cos A_{6 \rightarrow 5} dx_5 + \frac{B}{S_{6 \rightarrow 5}} \operatorname{sen} A_{6 \rightarrow 5} dy_5$$

$$+ a_{567}^c - a_{567}^o = V_{a_{567}}''$$

$$f_{16} = B \left( -\frac{1}{S_{7 \rightarrow 8}} \cos A_{7 \rightarrow 8} + \frac{1}{S_{7 \rightarrow 6}} \cos A_{7 \rightarrow 6} \right) dx_7 + B \left( \frac{1}{S_{7 \rightarrow 8}} \operatorname{sen} A_{7 \rightarrow 8} - \frac{1}{S_{7 \rightarrow 6}} \operatorname{sen} A_{7 \rightarrow 6} \right) dy_7 +$$

$$\frac{B}{S_{7 \rightarrow 8}} \cos A_{7 \rightarrow 8} dx_8 - \frac{B}{S_{7 \rightarrow 8}} \operatorname{sen} A_{7 \rightarrow 8} dy_8 - \frac{B}{S_{7 \rightarrow 6}} \cos A_{7 \rightarrow 6} dx_6 + \frac{B}{S_{7 \rightarrow 6}} \operatorname{sen} A_{7 \rightarrow 6} dy_6$$

$$+ a_{678}^c - a_{678}^o = V_{a_{678}}''$$

$$f_{17} = B \left( -\frac{1}{S_{8 \rightarrow 9}} \cos A_{8 \rightarrow 9} + \frac{1}{S_{8 \rightarrow 7}} \cos A_{8 \rightarrow 7} \right) dx_8 + B \left( \frac{1}{S_{8 \rightarrow 9}} \operatorname{sen} A_{8 \rightarrow 9} - \frac{1}{S_{8 \rightarrow 7}} \operatorname{sen} A_{8 \rightarrow 7} \right) dy_8 +$$

$$\frac{B}{S_{8 \rightarrow 9}} \cos A_{8 \rightarrow 9} dx_9 - \frac{B}{S_{8 \rightarrow 9}} \operatorname{sen} A_{8 \rightarrow 9} dy_9 - \frac{B}{S_{8 \rightarrow 7}} \cos A_{8 \rightarrow 7} dx_7 + \frac{B}{S_{8 \rightarrow 7}} \operatorname{sen} A_{8 \rightarrow 7} dy_7$$

$$+ a_{789}^c - a_{789}^o = V_{a_{789}}''$$

$$f_{18} = B \left( -\frac{1}{S_{9 \rightarrow 1}} \cos A_{9 \rightarrow 1} + \frac{1}{S_{9 \rightarrow 8}} \cos A_{9 \rightarrow 8} \right) dx_9 + B \left( \frac{1}{S_{9 \rightarrow 1}} \operatorname{sen} A_{9 \rightarrow 1} - \frac{1}{S_{9 \rightarrow 8}} \operatorname{sen} A_{9 \rightarrow 8} \right) dy_9 +$$

$$\frac{B}{S_{9 \rightarrow 1}} \cos A_{9 \rightarrow 1} dx_1 - \frac{B}{S_{9 \rightarrow 1}} \operatorname{sen} A_{9 \rightarrow 1} dy_1 - \frac{B}{S_{9 \rightarrow 8}} \cos A_{9 \rightarrow 8} dx_8 + \frac{B}{S_{9 \rightarrow 8}} \operatorname{sen} A_{9 \rightarrow 8} dy_8$$

$$+ a_{891}^c - a_{891}^o = V_{aa81}''$$

Como as coordenadas do vértice 1 são fixas, os respectivos  $dx_1$  e  $dy_1$  não comporão a matriz **A** de ordem 18x16 (número de equações por número de incógnitas) ponto de partida para o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.

Como visto no capítulo 5 simbolizou-se as expressões desenvolvidas por letras para facilitar a compreensão e a montagem da matriz:

$$K_{ij} = \operatorname{sen} A_{ij} \text{ e } L_{ij} = \cos A_{ij}$$

assim como:

$$P_{ij} = \frac{648000}{\pi} \cos A_{ij}$$

$$Q_{ij} = \frac{648000}{\pi} \operatorname{sen} A_{ij}$$

QUADRO 6.2 – MATRIZ A

coluna → ↓ linha	$dx_2$ 1	$dy_2$ 2	$dx_3$ 3	$dy_3$ 4	$dx_4$ 5	$dy_4$ 6	$dx_5$ 7	$dy_5$ 8	$dx_6$ 9	$dy_6$ 10	$dx_7$ 11	$dy_7$ 12	$dx_8$ 13	$dy_8$ 14	$dx_9$ 15	$dy_9$ 16
1	$+K_{12}$	$+L_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$-K_{23}$	$-L_{23}$	$+K_{23}$	$+L_{23}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	$-K_{34}$	$-L_{34}$	$+K_{34}$	$+L_{34}$		0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	$-K_{45}$	$-L_{45}$	$+K_{45}$	$+L_{45}$	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	$-K_{56}$	$-L_{56}$	$+K_{56}$	$+L_{56}$	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	$-K_{67}$	$-L_{67}$	$+K_{67}$	$+L_{67}$	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-K_{78}$	$-L_{78}$	$+K_{78}$	$+L_{78}$	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-K_{89}$	$-L_{89}$	$+K_{89}$	$+L_{89}$
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-K_{91}$	$-L_{91}$
10	$+P_{12}$	$-Q_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$+P_{91}$	$-Q_{12}$
11	$-P_{12}$ $-P_{23}$	$+Q_{12}$ $+Q_{23}$	$+P_{23}$	$-Q_{23}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	$+P_{23}$	$-Q_{23}$	$-P_{23}$ $-P_{34}$	$+Q_{23}$ $+Q_{34}$	$+P_{34}$	$-Q_{34}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	$+P_{34}$	$-Q_{34}$	$-P_{34}$ $-P_{45}$	$+Q_{34}$ $+Q_{45}$	$+P_{45}$	$-Q_{45}$	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	$+P_{45}$	$-Q_{45}$	$-P_{45}$ $-P_{56}$	$+Q_{45}$ $+Q_{56}$	$+P_{56}$	$-Q_{56}$	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	$+P_{56}$	$-Q_{56}$	$-P_{56}$ $-P_{67}$	$+Q_{56}$ $+Q_{67}$	$+P_{67}$	$-Q_{67}$	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	$+P_{67}$	$-Q_{67}$	$-P_{67}$ $-P_{78}$	$+Q_{67}$ $+Q_{78}$	$+P_{78}$	$-Q_{78}$	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$+P_{78}$	$-Q_{78}$	$-P_{78}$ $-P_{89}$	$+Q_{78}$ $+Q_{89}$	$+P_{89}$	$-Q_{89}$
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$+P_{89}$	$-Q_{89}$	$-P_{89}$ $-P_{91}$	$+Q_{89}$ $+Q_{91}$





QUADRO 6.3 - VALORES OBSERVADOS E CALCULADOS

Ponto i	Ângulo observado (° ' ")	Ângulo observado (decimal)	Linha ij	Dist. observada (m)	Azimute Calculado (decimal)	Coordenadas cartesianas	
						x (m)	y (m)
1	165° 27' 51,22"	165,464228	1_2	58,695000	100,000000	10000,000000	10000,000000
2	174° 50' 46,22"	174,846172	2_3	116,373000	94,846172	10057,803291	9989,807720
3	213° 08' 11,22"	213,136450	3_4	77,011000	127,982622	10173,760270	9979,976431
4	159° 47' 18,22"	159,788394	4_5	236,377000	107,771017	10234,460143	9932,582133
5	270° 09' 36,22"	270,160061	5_6	124,440000	197,931078	10459,558156	9860,436651
6	270° 24' 43,22"	270,412005	6_7	290,451000	288,343083	10421,246474	9742,041006
7	179° 50' 29,22"	179,841450	7_8	253,068000	288,184533	10145,553550	9833,447759
8	270° 00' 55,22"	270,015339	8_9	119,843000	18,199872	9905,124694	9912,424832
9	276° 20' 09,22"	276,335894	9_1	63,148000	114,535767	9942,555593	10026,272416

Coeficientes (pontos a vante)							
K12	0,984808	L12	-0,173648	P12	-610,230986	Q12	3460,791897
K23	0,996425	L23	-0,084481	P23	-149,737695	Q23	1766,109243
K34	0,788197	L34	-0,615422	P34	-1648,335829	Q34	2111,093145
K45	0,952284	L45	-0,305214	P45	-266,332288	Q45	830,971950
K56	-0,307873	L56	-0,951428	P56	-1577,033271	Q56	-510,312645
K67	-0,949189	L67	0,314706	P67	223,489766	Q67	-674,070009
K78	-0,950056	L78	0,312078	P78	254,361674	Q78	-774,349923
K89	0,312333	L89	0,949973	P89	1635,022039	Q89	537,563815
K91	0,909702	L91	-0,415261	P91	-1356,397128	Q91	2971,425148

Os elementos diferentes de zero da matriz **A** são:

$$\begin{aligned}
 a_{1,1} &= 0,98808; a_{1,2} = -0,173648; a_{2,1} = -0,996425; a_{2,2} = -0,996425; \\
 a_{2,3} &= 0,996425; a_{2,4} = -0,084481; a_{3,3} = -0,788197; a_{3,4} = 0,615422; \\
 a_{3,5} &= 0,788197; a_{3,6} = -0,615422; a_{4,5} = -0,952284; a_{4,6} = 0,305214; \\
 a_{4,7} &= 0,952284; a_{4,8} = -0,305214; a_{5,7} = 0,307873; a_{5,8} = 0,951428; \\
 a_{5,9} &= -0,307873; a_{5,10} = -0,951428; a_{6,9} = 0,949189; a_{6,10} = -0,314706; \\
 a_{6,11} &= -0,949189; a_{6,12} = 0,314706; a_{6,13} = 0,950056; a_{6,14} = -0,312078; \\
 a_{6,15} &= -0,950056; a_{6,16} = 0,312078; a_{7,15} = -0,312333; a_{7,16} = -0,949973; \\
 a_{7,17} &= 0,312333; a_{7,18} = 0,949973; a_{8,17} = -0,909702; a_{8,18} = 0,415261; \\
 a_{9,1} &= -610,230; a_{9,2} = -3460,791; a_{18,17} = -1356,397; a_{18,18} = -2971,425; \\
 a_{10,1} &= 759,968; a_{10,2} = 5226,901; a_{10,17} = -1356,397; a_{10,18} = -2971,425;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{10,3} &= -149,737695; a_{10,4} = -1766,109; a_{12,1} = -149,737; a_{12,2} = -1766,109; \\
a_{12,3} &= 1798,073; a_{12,4} = 3877,202; a_{12,5} = -1648,335; a_{12,6} = -2111,093; \\
a_{13,3} &= -1648,335; a_{13,4} = -2111,093; a_{13,5} = 1914,668; a_{13,6} = 2942,065; \\
a_{13,7} &= -266,332; a_{13,8} = -830,971; a_{14,5} = -266,332; a_{14,6} = -830,971; \\
a_{14,7} &= 1843,365; a_{14,8} = 320,659; a_{14,9} = -1577,033; a_{14,10} = 510,312; \\
a_{15,7} &= -1577,033; a_{15,8} = 510,312; a_{15,9} = 1353,543; a_{15,10} = -1184,382; \\
a_{15,11} &= 223,489; a_{15,12} = 674,070; a_{16,9} = 223,489; a_{16,10} = 674,070; \\
a_{16,11} &= -477,851; a_{16,12} = -1448,419; a_{16,13} = 254,361; a_{16,14} = 774,349; \\
a_{17,11} &= 254,361; a_{17,12} = 774,349; a_{17,13} = -1889,383; a_{17,14} = -236,786; \\
a_{17,15} &= 1635,022; a_{17,16} = -537,563815; a_{18,13} = 1635,022; a_{18,14} = -537,563; \\
a_{18,15} &= -278,624; a_{18,16} = 3508,988.
\end{aligned}$$

A MVC das distâncias e ângulos é uma matriz diagonal, pois as covariâncias foram admitidas de valores nulos:

$$\mathbf{\Sigma}_{\ell^b} = \text{diag} \begin{bmatrix} 4 \times 10^{-6} \text{m}^2 & 5 \times 10^{-6} \text{m}^2 & 5 \times 10^{-6} \text{m}^2 & 6 \times 10^{-6} \text{m}^2 & 5 \times 10^{-6} \text{m}^2 & \\ & 7 \times 10^{-6} \text{m}^2 & 6 \times 10^{-6} \text{m}^2 & 5 \times 10^{-6} \text{m}^2 & 5 \times 10^{-6} \text{m}^2 & 49(^{\prime\prime})^2 \\ & & 49(^{\prime\prime})^2 & 49(^{\prime\prime})^2 & 49(^{\prime\prime})^2 & 49(^{\prime\prime})^2 \\ & & & 49(^{\prime\prime})^2 & 49(^{\prime\prime})^2 & 49(^{\prime\prime})^2 \\ & & & & 49(^{\prime\prime})^2 & 49(^{\prime\prime})^2 \\ & & & & & 49(^{\prime\prime})^2 \end{bmatrix}.$$

A matriz dos pesos  $\mathbf{P}$  é dada pela equação:

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \left( \mathbf{\Sigma}_{\ell^b} \right)^{-1},$$

em que adota-se  $\sigma_0^2 = 1 \text{m}^2$  para as distâncias e  $\sigma_0^2 = 1(^{\prime\prime})^2$  para os ângulos:

$$\mathbf{P} = \text{diag} \begin{bmatrix} 223047,97 & 200595,58 & 215526,03 & 1163545,33 & 197727,66 \\ 150126,36 & 159217,47 & 199354,35 & 221183,41 & 0,020408 \\ 0,020408 & 0,020408 & 0,020408 & 0,020408 & 0,020408 \\ 0,020408 & 0,020408 & 0,020408 & & \end{bmatrix}.$$

O vetor de termos independentes ( $\ell$ ):

$$\ell^T = \begin{bmatrix} 0,000021\text{m} & 0,000335\text{m} & 0,001763\text{m} & 0,002587\text{m} & 0,005193\text{m} \\ -0,003313\text{m} & -0,003006\text{m} & -0,004323\text{m} & 0,000069\text{m} & -1,234580'' \\ 0,418792'' & -1,053362'' & 1,586063'' & -9,313700'' & -5,034942'' \\ -0,570931'' & 10,465668'' & 4,757252'' & & \end{bmatrix}.$$

Vetor das Coordenadas Ajustadas  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{u}$$

Novo Vetor das Coordenadas Ajustadas  $\mathbf{x}^a$ :

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x} + \mathbf{x}^0$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2,759 \\ -15,648 \\ -5,421 \\ -47,039 \\ -18,252 \\ -63,471 \\ -37,784 \\ -124,404 \\ -69,832 \\ -114,029 \\ -45,093 \\ -39,403 \\ -23,718 \\ 25,677 \\ 7,098 \\ 15,549 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} 10057,803 \\ 9989,806 \\ 10173,760 \\ 9979,971 \\ 10234,460 \\ 9932,574 \\ 10459,558 \\ 9860,420 \\ 10421,246 \\ 9742,019 \\ 10145,553 \\ 9833,415 \\ 9905,124 \\ 9912,382 \\ 9942,555 \\ 10026,225 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^a = \begin{bmatrix} 10055,044 \\ 9974,158 \\ 10168,339 \\ 9932,932 \\ 10216,208 \\ 9869,103 \\ 10421,774 \\ 9736,016 \\ 10351,414 \\ 9627,990 \\ 10100,460 \\ 9794,012 \\ 9881,406 \\ 9938,059 \\ 9949,653 \\ 10041,774 \end{bmatrix} \quad (\text{m})$$

### 6.3 ITERAÇÕES

#### 1ª ITERAÇÃO – (2ª ETAPA)

QUADRO 6.4 - VALORES OBSERVADOS E CALCULADOS (1ª ITERAÇÃO)

Ponto	Coordenadas		Nova distância	Rumo	Azimute	Ângulo calculado	Novo ângulo horário (° ' ")
	x (m)	y (m)	(m)				
1	10000,000	10000,000	60,808	64,851 SE	115,148	-14,534	165,465480
2	10055,043	9974,158	120,562	70,004 SE	109,995	-5,153	174,846937
3	10168,339	9932,931	79,784	36,868 SE	143,131	33,136	213,136202
4	10216,207	9869,103	244,886	57,080 SE	122,919	-20,212	159,787763
5	10421,773	9736,016	128,918	33,077 SW	213,077	90,157	270,157487
6	10351,413	9627,990	300,900	56,512 NW	303,487	90,409	270,409858
7	10100,459	9794,011	262,172	56,671 NW	303,328	-0,158	179,841458
8	9881,405	9938,059	124,155	33,345 NE	33,345	-269,982	270,017363
9	9949,652	10041,774	65,421	50,316 SE	129,683	96,337	276,337453

Coeficientes (pontos a vante)							
K12	0,905207	L12	-0,424970	P12	1351,654	Q12	-2879,088
K23	0,939718	L23	-0,341950	P23	1007,541	Q23	-2768,841
K34	0,599975	L34	-0,800019	P34	4475,843	Q34	-3356,661
K45	0,839433	L45	-0,543463	P45	1963,851	Q45	-3033,366

K56	-0,545768	L56	-0,837936	P56	-5225,258	Q56	-3403,336
K67	-0,834011	L67	0,551748	P67	-2013,807	Q67	3044,027
K78	-0,835534	L78	0,549438	P78	-1999,766	Q78	3041,057
K89	0,549691	L89	0,835368	P89	5167,269	Q89	3400,183
K91	0,769586	L91	-0,638544	P91	2617,601	Q91	-3154,786

Solução do Sistema de Equações Normais:

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{u}$$

Novo Vetor das Coordenadas Ajustadas  $\mathbf{x}^a$ :

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x} + \mathbf{x}^o$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1,909 \\ 0,900 \\ -5,844 \\ 2,334 \\ -7,506 \\ 4,552 \\ -14,646 \\ 9,178 \\ -12,204 \\ 12,933 \\ -3,491 \\ 7,160 \\ 4,112 \\ 2,150 \\ 1,745 \\ -1,453 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

$$\mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} 10055,043 \\ 9974,158 \\ 10168,339 \\ 9932,931 \\ 10216,207 \\ 9869,103 \\ 10421,773 \\ 9736,016 \\ 10351,413 \\ 9627,990 \\ 10100,459 \\ 9794,011 \\ 9881,405 \\ 9938,059 \\ 9949,652 \\ 10041,774 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

$$\mathbf{x}^a = \begin{bmatrix} 10053,134 \\ 9975,058 \\ 10162,494 \\ 9935,266 \\ 10208,701 \\ 9873,656 \\ 10407,126 \\ 9745,194 \\ 10339,209 \\ 9640,923 \\ 10096,967 \\ 9801,172 \\ 9885,518 \\ 9940,209 \\ 9951,398 \\ 10040,320 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

## 2ª ITERAÇÃO – (3ª ETAPA)

QUADRO 6.5 - VALORES OBSERVADOS E CALCULADOS (2ª ITERAÇÃO)

Ponto	Coordenadas x (m)      y (m)		Nova distância (m)	Rumo	Azimute	Ângulo calculado	Novo ângulo horário (° ' ")
1	10000,000	10000,000	58,696	64,854 SE	115,145	-14,534	165,465884
2	10053,134	9975,058	116,374	70,005 SE	109,994	-5,150	174,849056
3	10162,494	9935,266	77,012	36,869 SE	143,130	33,136	213,136304
4	10208,701	9873,656	236,379	57,080 SE	122,919	-20,211	159,788214
5	10407,126	9745,194	124,439	33,078 SW	213,078	90,159	270,159391
6	10339,209	9640,923	290,448	56,514 NW	303,485	90,407	270,407139
7	10096,967	9801,172	253,065	56,673 NW	303,326	-0,158	179,841131
8	9885,518	9940,209	119,843	33,347 NE	33,347	-269,979	270,020915
9	9951,398	10040,320	63,149	50,320 SE	129,679	96,331	276,331967

Coeficientes (pontos a vante)							
K12	0,905232	L12	-0,424918	P12	1351,419715	Q12	-2879,020125
K23	0,939725	L23	-0,341931	P23	1007,467921	Q23	-2768,816045
K34	0,599990	L34	-0,800008	P34	4475,650491	Q34	-3356,647178
K45	0,839439	L45	-0,543454	P45	1963,796902	Q45	-3033,354875
K56	-0,545787	L56	-0,837924	P56	-5224,980059	Q56	-3403,322009
K67	-0,834025	L67	0,551727	P67	-2013,679484	Q67	3044,001048
K78	-0,835551	L78	0,549413	P78	-1999,610231	Q78	3041,024148
K89	0,549718	L89	0,835351	P89	5166,886117	Q89	3400,162416
K91	0,769627	L91	-0,638494	P91	2617,205294	Q91	-3154,723588

Solução do Sistema de Equações Normais:

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{u}$$

Novo Vetor das Coordenadas Ajustadas  $\mathbf{x}^a$ :

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x} + \mathbf{x}^o$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0,002116 \\ 0,004637 \\ 0,002629 \\ 0,006226 \\ 0,003396 \\ 0,006867 \\ 0,004119 \\ 0,008122 \\ 0,003252 \\ 0,008684 \\ -0,000666 \\ 0,002911 \\ -0,005009 \\ -0,003553 \\ -0,003631 \\ -0,004463 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} 10053,134014 \\ 9975,058752 \\ 10162,494292 \\ 9935,266664 \\ 10208,701008 \\ 9873,656046 \\ 10407,126935 \\ 9745,194907 \\ 10339,209263 \\ 9640,923702 \\ 10096,967951 \\ 9801,172122 \\ 9885,518535 \\ 9940,209629 \\ 9951,398378 \\ 10040,320624 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^a = \begin{bmatrix} 10053,136130 \\ 9975,063389 \\ 10162,496921 \\ 9935,272890 \\ 10208,704404 \\ 9873,662913 \\ 10407,131054 \\ 9745,203029 \\ 10339,212514 \\ 9640,932386 \\ 10096,967285 \\ 9801,175033 \\ 9885,513526 \\ 9940,206076 \\ 9951,3947470 \\ 10040,316161 \end{bmatrix} \quad (\text{m})$$

### 3ª ITERAÇÃO – (4ª ETAPA)

QUADRO 6.6 - VALORES OBSERVADOS E CALCULADOS (3ª ITERAÇÃO)

Ponto	Coordenadas x (m)      y (m)		Nova distância (m)	Rumo	Azimute	Ângulo calculado	Novo ângulo externo (° ' ")
1	10000,000	10000,000	58,696	64,859 SE	115,140	-14,533	165,466129
2	10053,136	9975,063	116,374	70,006 SE	109,993	-5,146	174,853210
3	10162,496	9935,272	77,012	36,869 SE	143,130	33,136	213,136382
4	10208,704	9873,662	236,379	57,081 SE	122,918	-20,211	159,788606
5	10407,131	9745,203	124,439	33,078 SW	213,078	90,160	270,160217
6	10339,212	9640,932	290,448	56,515 NW	303,484	90,405	270,405287
7	10096,967	9801,175	253,065	56,675 NW	303,325	-0,159	179,840744
8	9885,513	9940,206	119,843	33,348 NE	33,348	-269,976	270,023468
9	9951,394	10040,316	63,149	50,325 SE	129,674	96,326	276,325957

Coeficientes (pontos a vante)							
K12	0,905269	L12	-0,424840	P12	1351,066093	Q12	-2878,916618
K23	0,939730	L23	-0,341917	P23	1007,416401	Q23	-2768,797998
K34	0,600000	L34	-0,800000	P34	4475,516815	Q34	-3356,637577
K45	0,839442	L45	-0,543449	P45	1963,766285	Q45	-3033,348262
K56	-0,545794	L56	-0,837920	P56	-5224,876679	Q56	-3403,316447
K67	-0,834038	L67	0,551707	P67	-2013,557335	Q67	3043,975289

K78	-0,835568	L78	0,549387	P78	-1999,454459	Q78	3040,991076
K89	0,549729	L89	0,835343	P89	5166,716956	Q89	3400,153115
K91	0,769685	L91	-0,638424	P91	2616,646411	Q91	-3154,634768

Solução do Sistema de Equações Normais:

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{u}$$

Novo Vetor das Coordenadas Ajustadas  $\mathbf{x}^a$ :

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x} + \mathbf{x}^o$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0,003014 \\ 0,006508 \\ 0,002581 \\ 0,005432 \\ 0,002127 \\ 0,005135 \\ 0,001367 \\ 0,004051 \\ 0,002241 \\ 0,003479 \\ -0,000697 \\ -0,000866 \\ -0,004266 \\ -0,006204 \\ -0,004806 \\ -0,005851 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

$$\mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} 10053,136130 \\ 9975,063389 \\ 10162,496921 \\ 9935,272890 \\ 10208,704404 \\ 9873,662913 \\ 10407,131054 \\ 9745,203029 \\ 10339,212514 \\ 9640,932386 \\ 10096,967285 \\ 9801,175033 \\ 9885,513526 \\ 9940,206076 \\ 9951,394747 \\ 10040,316161 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

$$\mathbf{x}^a = \begin{bmatrix} 10053,139144 \\ 9975,069897 \\ 10162,499503 \\ 9935,278322 \\ 10208,706531 \\ 9873,668047 \\ 10407,132421 \\ 9745,207079 \\ 10339,214756 \\ 9640,935865 \\ 10096,966588 \\ 9801,174167 \\ 9885,509260 \\ 9940,199872 \\ 9951,389940 \\ 10040,310310 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

Interrompe-se as iterações ou chamado truncamento do processo, já que o vetor  $\mathbf{x}$  está muito baixo, na casa dos milímetros. Essa é uma



opção do pesquisador, pois o sistema poderá seguir sendo calculado e tenderá a zero, se não houver nenhuma perturbação que afete o sistema.

#### 6.4 COMPARAÇÃO DA VARIÂNCIA DA UNIDADE PESO A *PRIORI* COM A VARIÂNCIA DA UNIDADE PESO A *POSTERIORI*.

Para se obter os dados necessários para os controles de qualidade como um todo bem como para os controles por ponto deve-se seguir o procedimento em seqüência:

a) Vetor de Resíduos

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \ell$$

sendo a matriz  $\mathbf{A}$ , o vetor  $\mathbf{x}$  e vetor  $\ell$  resultado da última iteração. Este vetor é fundamental para obtenção da variância da unidade peso a *posteriori*.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0,003014 \\ 0,006508 \\ 0,002581 \\ 0,005432 \\ 0,002127 \\ 0,005135 \\ 0,001367 \\ 0,004051 \\ 0,002241 \\ 0,003479 \\ -0,000697 \\ -0,000866 \\ -0,004266 \\ -0,006204 \\ -0,004806 \\ -0,005851 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

$$\ell = \begin{bmatrix} 0,001531\text{m} \\ 0,001681\text{m} \\ 0,001471\text{m} \\ 0,002096\text{m} \\ -0,000074\text{m} \\ -0,002283\text{m} \\ -0,002153\text{m} \\ 0,000082\text{m} \\ 0,001532\text{m} \\ 6,843646'' \\ 25,335002'' \\ -0,243330'' \\ 0,762825'' \\ 0,562706'' \\ -24,188680'' \\ -2,540936'' \\ 29,263492'' \\ -35,773126'' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0,001496\text{m} \\ 0,001642\text{m} \\ 0,001437\text{m} \\ 0,0020482\text{m} \\ -0,000073\text{m} \\ -0,002230\text{m} \\ -0,002103\text{m} \\ 0,000080\text{m} \\ 0,001497'' \\ -1,381138'' \\ -0,888409'' \\ 0,139088'' \\ -0,985194'' \\ -1,167917'' \\ 1,463774'' \\ 1,689060'' \\ 1,902451'' \\ -0,750114'' \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}
 2,500 & 1,951 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 1,951 & 10,275 & & & & & & \\
 \dots & & 1,679 & -0,516 & & & & \\
 \dots & & -0,516 & 3,612 & & & & \\
 \dots & & & & 2,511 & 0,140 & & \\
 \dots & & & & 0,140 & 1,155 & & \\
 \dots & & & & & & 1,054 & 0,197 \\
 \dots & & & & & & 0,140 & 1,115
 \end{bmatrix} (m^2)$$

d) Vetor dos valores observados ajustados

$$\ell^a = \ell^b + \mathbf{v}$$

sendo  $\ell^b$  os valores observados no campo

$$\ell^a = \begin{bmatrix}
 58,696496m \\
 116,374642m \\
 77,012437m \\
 236,379048m \\
 124,439927m \\
 290,448770m \\
 253,065897m \\
 119,843080m \\
 63,149497m \\
 164,083090^\circ \\
 173,957763^\circ \\
 213,275538^\circ \\
 158,803200^\circ \\
 268,992144^\circ \\
 271,875779^\circ \\
 181,530510^\circ \\
 271,917790^\circ \\
 275,585780^\circ
 \end{bmatrix}$$

e) MVC dos valores observados ajustados

$$\Sigma \ell^a = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T$$

Esta matriz será simétrica de ordem 18x18, importante para a obtenção do MVC dos resíduos.

f) MVC dos resíduos

$$\Sigma_v = \hat{\sigma}_o^2 \mathbf{P}^{-1} - \Sigma \ell^a$$

Esta matriz será simétrica de ordem 18x18, importante posteriormente para a aplicação do teste *data snooping* que aponta os erros nas observações colhidas no campo.

g) Teste qui-quadrado da forma quadrática dos resíduos

Este teste verifica a qualidade do ajustamento e é uma comparação da variância da unidade peso *a priori*, convencionalmente igual a 1, com a variância da unidade peso *a posteriori* obtida no processo. Verifica-se que a forma quadrática  $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$  tem distribuição  $\chi^2$  com (n-u) graus de liberdade (GEMAEL, 1994, p. 123).

1) Enunciação das hipóteses

$$H_0 : \sigma_o^2 = \hat{\sigma}_o^2$$

$$H_a : \sigma_o^2 \neq \hat{\sigma}_o^2$$

2) Estatística do teste

$$\chi^{*2} = \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} (n-u) \sim \chi_{(n-u)}^2$$

$$\chi^{*2} = \frac{2,205}{1} (18-16) = 4,41$$

3) Estatísticas teóricas

$$\chi^2 \text{ teórico com } \alpha = 5\% = 0,05$$

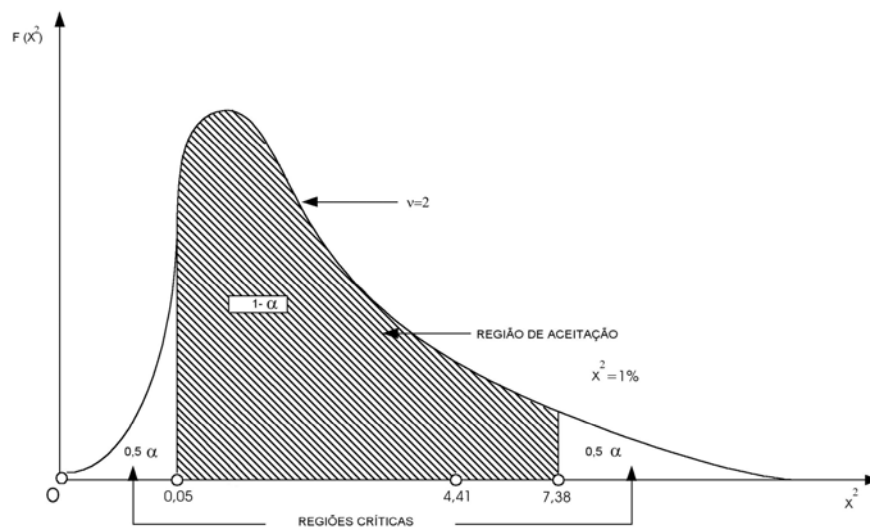
$$0,5\alpha = 0,025 \rightarrow \chi_{2;0,025}^2 = 0,05$$

$$1 - 0,5\alpha = 0,975 \rightarrow \chi_{2;0,975}^2 = 7,38$$

#### 4) Teste da hipótese $H_0$

Como  $0,05 < \chi^2 < 7,38$ , a hipótese  $H_0$  não é rejeitada ao nível de significância  $\alpha=5\%$ .

FIGURA 6.3 – DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES QUI-QUADRADO PARA O TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DOS RESÍDUOS



### 6.5 LOCALIZAÇÃO DE ERROS NAS OBSERVAÇÕES PELO TESTE DATA SNOOPING DE BAARDA

#### 1) Enunciação da hipótese básica $H_0$

$H_0$  : nenhum erro existe na observação  $\ell_i$

Rejeita-se  $H_0$  se  $|w_i| > K$

$K$  é um valor crítico conforme o nível de confiança específico:

$$1 - \alpha = 95\% \Rightarrow K = 1,96 \quad e$$

$$1 - \alpha = 99\% \Rightarrow K = 2,57$$

2) Estatística do teste

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{\ell_i} \sqrt{r_i}}, \text{ para } i=1,2,3,\dots,18$$

As estatísticas  $w_i$ ,  $i = 1,2,3,\dots,9$ , são referentes às distancias e as estatísticas  $w_i$ ,  $i = 10,11,12,\dots,18$ , são referentes aos ângulos.

$w_1 = 2,22$	$w_2 = 2,10$	$w_3 = 2,02$	$w_4 = -2,12$	$w_5 = -2,12$	$w_6 = -2,05$
$w_7 = -2,15$	$w_8 = 2,10$	$w_9 = 2,00$	$w_{10} = -0,60$	$w_{11} = -0,37$	$w_{12} = 0,06$
$w_{13} = 0,40$	$w_{14} = 0,49$	$w_{15} = 0,60$	$w_{16} = 0,68$	$w_{17} = 0,76$	$w_{18} = -0,36$

3) Teste da hipótese básica  $H_0$

$|w_i| < 2,57$  para  $i=1,2,3,\dots,18$ ; logo, a hipótese  $H_0$  não é rejeitada ao nível de significância  $\alpha=1\%$ . Isto significa que neste nível de significância as observações não têm erros significativos.

$|w_i| > 1,96$  para  $i=1,2,3,\dots,9$ ; logo, a hipótese  $H_0$  é rejeitada ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ .

$|w_i| < 1,96$  para  $i=10,11,12,\dots,18$ ; logo, a hipótese  $H_0$  não é rejeitada ao nível de significância  $\alpha = 5\%$  (note-se que os ângulos foram corrigidos antes do ajustamento).

## 6.6 PARÂMETROS DA ELIPSE DOS ERROS, ELIPSE DE CONFIANÇA, CÍRCULO DO ERRO DE POSIÇÃO E CÍRCULO DO ERRO MÉDIO

Os parâmetros calculados permitem análise do comportamento do desvio padrão de cada ponto do polígono. Estes parâmetros permitem a construção de figuras geométricas que ilustram o comportamento das coordenadas dos pontos, o que pode ser observado no quadro (6.6) e figura (6.2).

Os dados obtidos permitem a seguinte análise:

- a) os valores de desvio padrão estiveram baixos, importando em valores aceitáveis, segundo a norma INCRA (2003, p. 6);
- b) a inclinação das elipses demonstram um desvio padrão sempre maior em y do que em x;
- c) as diversas formas de representar a precisão têm suas vantagens e desvantagens, que foram tratadas no capítulo anterior.

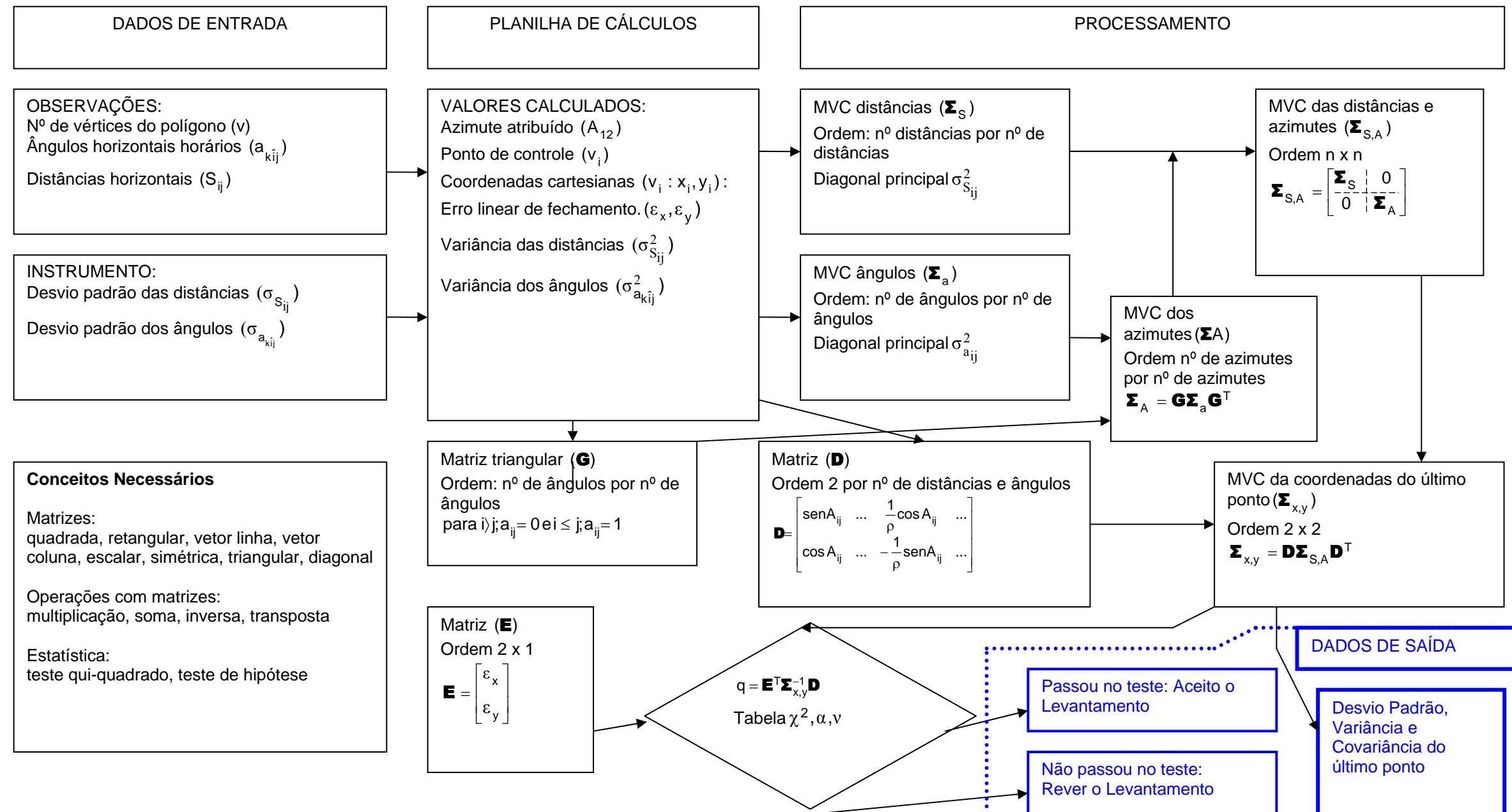
QUADRO 6.7 – PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DAS ESTIMAÇÕES POR PONTO

Elipse dos erros (probabilidade = 39%)			
Ponto	Semi-eixo a (mm)	Semi-eixo b (mm)	Ângulo de orientação $\gamma$ (°''')
2	3,6466	2,9471	87° 05' 51,3725"
3	6,5137	3,9475	83° 49' 15,7542"
4	7,7357	4,4508	80° 36' 12,3688"
5	10,8370	4,7351	75° 06' 14,0240"
6	10,3620	4,5148	71° 08' 58,1384"
7	6,1168	3,9374	71° 45' 45,0768"
8	5,0253	3,3772	87° 53' 44,7088"
9	3,5837	2,9746	79° 00' 43,2395"
Elipse de Confiança (probabilidade = 95%)			
Ponto	Semi-eixo a (mm)	Semi-eixo b (mm)	Ângulo de orientação $\gamma$ (°''')
2	8,7518	7,0730	87° 05' 51,3725"
3	15,6329	9,4740	83° 49' 15,7542"
4	18,5657	10,6818	80° 36' 12,3688"
5	26,0088	11,3643	75° 06' 14,0240"
6	24,8687	10,8355	71° 08' 58,1384"
7	14,6804	9,4499	71° 45' 45,0768"
8	12,0606	8,1053	87° 53' 44,7088"
9	8,6009	7,1390	79° 00' 43,2395"
Ponto	Raio do círculo do erro de posição (mm)	Raio do círculo de erro médio (mm)	
2	4,6886	3,3153	
3	7,6165	5,3857	
4	8,9247	6,3107	
5	11,8263	8,3625	
6	11,3028	7,9923	
7	7,2745	5,1439	
8	6,0547	4,2813	
9	4,6574	3,2933	

## 6.7 PROPOSTA DE ORGANIZAÇÃO DE ALGORITMO

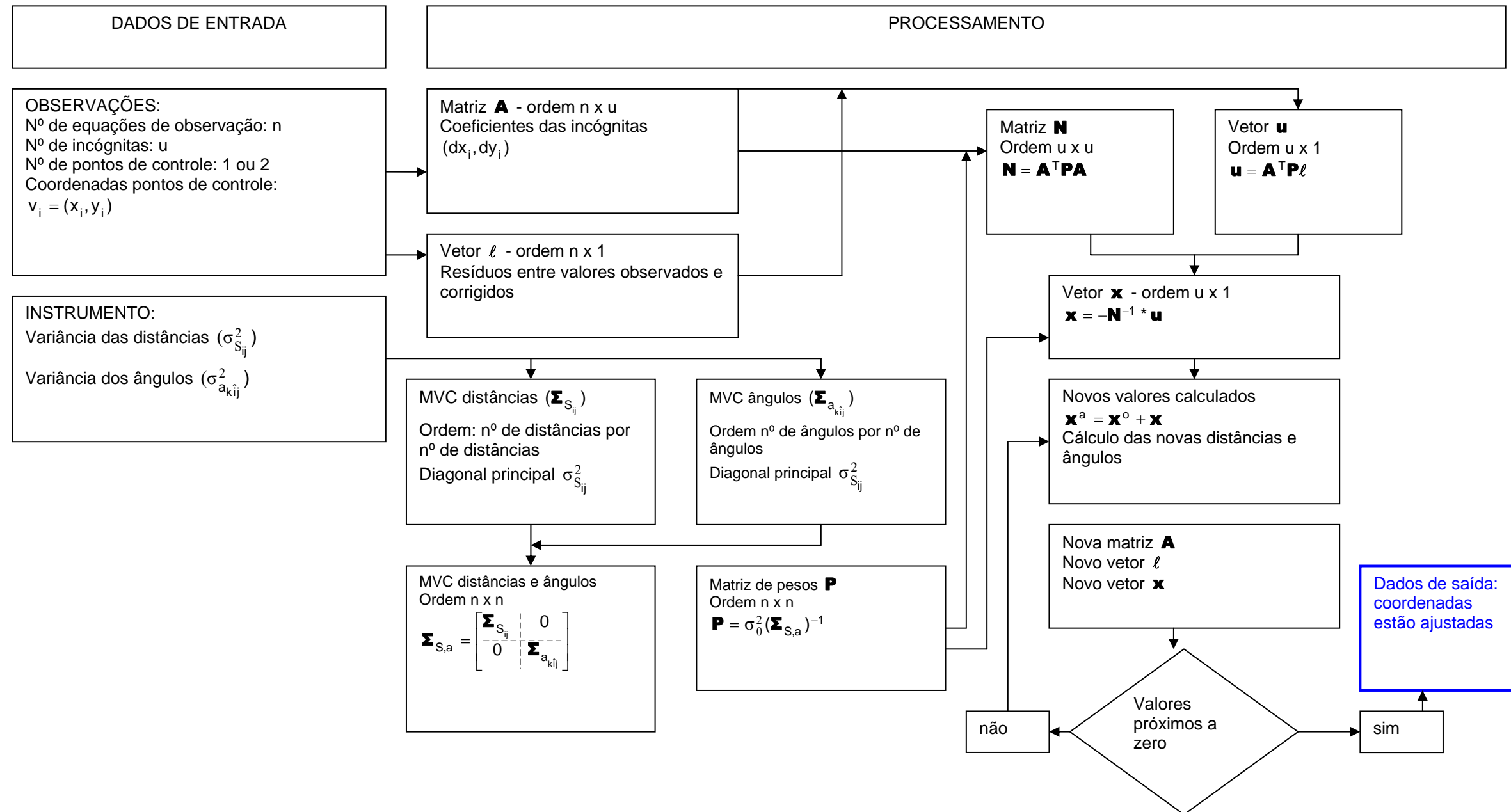
Uma proposta para direcionamento de algoritmo está expresso nos quadros (6.8), (6.9) e (6.10).

QUADRO 6.8 - FLUXOGRAMA DO TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DO ERRO DE FECHAMENTO

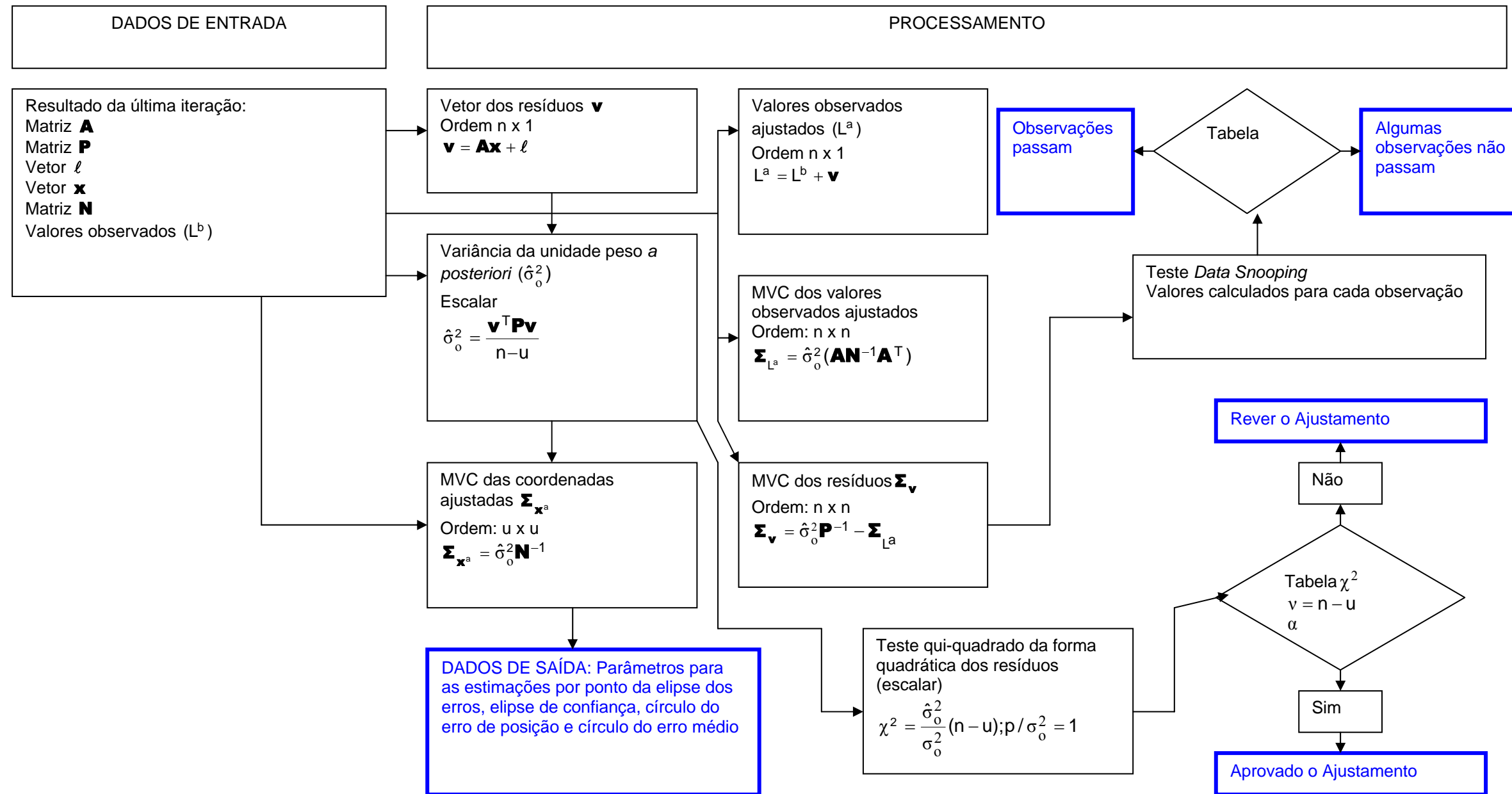




QUADRO 6.9 – FLUXOGRAMA DO AJUSTAMENTO PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS



QUADRO 6.10 – FLUXOGRAMA DO TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DOS RESÍDUOS, MVC DAS COORDENADAS AJUSTADAS E TESTE *DATA SNOOPING*



## 7 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

O presente estudo estabeleceu o desenvolvimento teórico de equações e avaliação estatística em atualidade nas universidades brasileiras.

O teste qui-quadrado da forma quadrática do erro de fechamento aplicado ao último ponto da linha poligonal topográfica pode constituir-se uma rotina de avaliação e aceitação do levantamento, sendo um controle que avalia conjuntamente erros angulares e lineares, contrapondo a forma tradicional de avaliar em separado os erros em distâncias e ângulos.

Da mesma forma, no ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, os ângulos e distâncias são trabalhados em um procedimento conjunto, diferente da compensação qualquer que seja o método empregado. O uso da compensação dos erros linear e angular realiza-se em etapas. A primeira compensação do erro linear conduzirá a novas distâncias, importando em novos ângulos e assim sucessivamente. Ao tratarmos os erros linear e angular separadamente, haverá sempre o problema do “fechamento”.

O ajustamento pelo método dos mínimos quadrados com o emprego das equações de observação obtidas por variação de coordenadas, em condições normais, deve apresentar convergência ou estabilização dos parâmetros após algumas iterações. Um comportamento adverso nos dados como: convergência seguida de divergência ou valores que se repetem ora em um sentido ora em outro indefinidamente, significam problemas nos procedimentos ou na coleta de dados.

Deve-se considerar ajustada e procede-se ao truncamento do processo de ajustamento de uma linha poligonal somente quando o vetor dos resíduos esteja estabilizado, fixado um certo número de casas decimais, a critério do técnico.

A primeira etapa de ajustamento produziu um vetor  $X$  com valores altos que alteraram a geometria espacial do polígono. Esta pequena rotação do polígono deve ser resultado de, no presente estudo ter sido usado apenas um ponto de controle.

O teste qui-quadrado na forma quadrática dos resíduos é um indicador da qualidade do ajustamento, que é uma razão entre a variância da unidade peso *a posteriori* e a variância da unidade peso *a priori*, multiplicado pelos graus de liberdade. Um valor fora da região de aceitação neste teste significa a necessidade de mais iterações, pois os resíduos ainda são elevados.

Os elementos geométricos calculados após o ajustamento (elipse dos erros, elipse de confiança, podária, círculo do erro de posição e círculo médio de posição) estimam e referenciam espacialmente cada ponto de estação da poligonal. Os pontos que apresentarem estimativas acima do aceitável devem ser repetidos, sem que seja necessária a repetição do levantamento como um todo.

Para a localização das observações que poderiam abrigar erros foi usado o teste *data snooping* de Baarda, que estabelece valores limite para aceitação das observações, a partir dos dados obtidos na matriz variância-covariância dos resíduos. Valores das observações que excederem aos calculados no teste merecem ser revistos ou as medições devem ser repetidas.

O estudo dos erros das observações classifica estes em 3 tipos, o que em condições práticas é difícil de ser identificado. No trabalho realizado, repetido uma vez identificou-se um erro angular alto, resultado da não perfeita orientação entre os eixos do instrumento, desvios que podem ser minimizados via calibração. Para reduzir a proporções mínimas os erros sistemáticos instrumentais recomenda-se como prática habitual o uso da medição das direções angulares em ambas as posições da luneta. E também a observância do tempo necessário para a estabilização da temperatura do instrumento ao ambiente, antes das

medições; além de calibração periódica, ou mais freqüente, quando o instrumento sofre transporte em condições inseguras ou trabalho em condições extremas de temperatura.

O método desenvolvido neste trabalho exige operações com matrizes de elevada ordem, que não podem ser reproduzidos em calculadoras comuns e nem na forma expressa. Para tanto, importante futuramente a atenção por parte da informática no sentido de introduzir os procedimentos com previsão de todos os casos de entrada de dados, observância o sinal algébrico, cálculos de distâncias e ângulos a partir de coordenadas e vice-versa e seleção dos dados de saída importantes no processo.

Importante a repetição de trabalhos no plano topográfico (planimétrico e altimétrico) e geodésico para testar a convergência do método, uso do método dos mínimos quadrados obtidos das equações de condição e método combinado, explorar a opção de usar dois ou mais pontos de controle e o uso de equipamentos de marcas e modelos diferentes.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), NBR13133. **Execução de Levantamento Topográfico - procedimentos**. Rio de Janeiro, maio 1994. 35 p.

ASSUNÇÃO, V. S. *et al.* **Comparação de métodos e softwares voltados ao ajustamento de poligonais topográficas**. EPUSP – Departamento de Transportes – Laboratório de Topografia e Geodésia. Disponível em <http://www.cartografia.org.br>. Acesso em 24 junho 2004.

BENNING, W. **Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen**. Heidelberg: H. Wichmann, 2002.

BRASIL. **Lei nº 10267 de 28 de agosto de 2001**. Altera dispositivos das Leis nº 4947, de 6 de abril de 1966, nº 5868, de 12 de dezembro de 1972, nº 6015, de 31 de dezembro de 1973, nº 6739, de 5 de dezembro de 1979, nº 9393, de 19 de dezembro de 1996, e dá outras providências. Diário Oficial nº 166 – Seção 1, Brasília, 29 de agosto de 2001.

COSTA NETO, P. L. O. **Estatística**. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por Mínimos Quadrados**. 2ª ed. Curitiba: Imprensa Universitária da UFPR, 2004.

DIN. **DIN 55 350**: Teil 13: Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik. Begriffe zur Genauigkeit von Ermittlungsverfahren und Ermittlungsergebnisse, Berlin, 1987.

DZIERZEGE, A.; R. SCHERRER. **Measuring with Electronic Total Station**, *Survey Review*, v. 37, n. 287, Jan. 2003, p. 55-65.

FARRER, H. *et al.* **Algoritmos Estruturados (Programação Estruturada de Computadores)**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 259 p., 1989.

GEMAEL, C. **Introdução ao Ajustamento de Observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: Ed. da UFPR, 1994.

GODOY, R. **Topografia**. Piracicaba: ESALQ-USP, 6ª ed., 199 p. 1980.

GRIPP JUNIOR, J. **Ajustamento de observações**. Apostila do Curso de Engenharia de Agrimensura, 1994.

INSTITUTO NACIONAL DE COLONIZAÇÃO E REFORMA AGRÁRIA. **Normas Técnicas para Georreferenciamento de Imóveis Rurais**. Brasília, Novembro, 2003. 42 p.

JONG, C. D. *et al.* **Hydrography**. Delft: Delph University Press, 1. ed., 2002.

KAVOURAS, M. **On the detection of outliers and the determination of reliability in geodetic networks**. Department of surveying engineering. Technical Report, nº 87, University of New Brunswick, Fredericton, Canada, 1982.

MAIA, T. C. B. **Estudo e Análise de Poligonais segundo a NBR 13.133 e o Sistema de Posicionamento Global**. 1999. 177 f. Dissertação (Mestrado em Transportes) - Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, 1999.

MARQUES, G. G. M. **Comparação da Precisão das Coordenadas Planas Locais e Áreas Superficiais Levantadas pelo Método de Caminhamento Perimétrico, usando os Métodos Tradicionais de Levantamento.** 2002, 115 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2002.

MÔNICO, J. F. G.; SILVA E. F. **Controle de Qualidade em Levantamentos no Contexto da Lei nº 10267 de 28 de agosto de 2001.** In: UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA. CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS. **Novos Desenvolvimentos em Ciências Geodésicas.** Série em Ciências Geodésicas, Curitiba: Imprensa Universitária, v. 3, p. 69-84, 2003, 495p.

MORAES, C. V. **Aplicação do Ajustamento às Poligonais.** 1997. 162 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1997.

MORAES, C. V. **Análise de erros grosseiros e confiabilidade de redes geodésicas.** Cartografia e Cadastro, Lisboa, nº 8, p.77-86, 1998.

MORAES, C. V. **Aprimoramento da Concepção do Modelo Geodésico para a Caracterização de Extremas no Espaço Geométrico.** 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2001.

MORAES, C. V. **Topografia I.** Departamento de Engenharia Rural. Universidade Federal de Santa Maria. Notas de aula de disciplina, 2004

MOREIRA, A. P. **Comportamento dos Erros Linear e Angular em Levantamentos Topográficos Associados.** 1994. 134 f. Dissertação



(Mestrado em Engenharia Agrícola) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 1994.

NIEMEIER, W. **Ausgleichsrechnung:** eine Einführung für Studierende und Praktiker des Vermessungs- und Geoinformationswesens. Berlin: W. de Gruyter, 2002.

SCHMIDT, H. Was ist Genauigkeit? Zum Einfluss systematischer Abweichung auf Mess- und Ausgleichungsergebnisse. **Vermessungswesen und Raumordnung.** Bonn, v. 59, n. 4, S. 212-228, 1997.

SCHMIDT, H. **Meßunsicherheit und Vermessungstoleranz bei Ingenieurvermessungen.** Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Nr. 51, 1994.

TORGE, W. **Geodesy.** 3<sup>rd</sup> ed. Berlin, New York: de Gruyter, 2001.

U.S. Department of Commerce. Coast and Geodetic Survey. **Definitions of terms used in geodetic and other surveys.** Special Publications, n° 42, Washington, D.C., 1948.

VANÍČEK, P.; KRAKIWSKY, E. J. **Geodesy: The concepts.** 2. ed., North Holland Publishing, 1986.

VERESS, S. A. **Measures of accuracy for analysis and design of survey.** Surveying and Mapping. Washington D.C. vol. XXXIII, n° 4, dez. 1973.

VUOLO, J. R. **Fundamentos da teoria de erros**. São Paulo: E. Blücher, 1992.

WENDERLEIN, W. Zum Begriff Genauigkeit in der Geodäsie. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 95, n. 4, p. 147-148, 1988.

WOLF, P. R. **Horizontal position adjustment**. Surveying and mapping, Washington D.C., vol. XXIX, n. 4, p. 635-644, dez/1969.

### **OBRAS CONSULTADAS**

BRASIL. **Decreto nº 4449 de 30 de outubro de 2002**. Regulamenta a Lei nº 10267 de 28 de agosto de 2001. Disponível em: <<http://www.incra.gov.br>> Acesso em 11 de outubro de 2004.

BRUM, C. R. de. **Análise de Aspectos Normativos para levantamentos com GPS**. 2004. 122 f. Dissertação (Mestrado em Geomática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2004.

CORSEUIL, C. W. **Reconstituição de uma Poligonal Topográfica pelo Sistema de Posicionamento Global**. 2001. 66 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2001.

FARRET, J. C. **O Efeito do Multicaminhamento Estático nas Medidas da Fase das Portadoras GPS**. 2000. 132 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2000.

HUMES, A. F. P. C. *et al.* **Noções de Cálculo Numérico**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1984.

MARQUES, J. M. **Introdução ao MatLab**. Curitiba: [s.n.], 1995.

STORK, L.; LOPES, S. J.; LÚCIO, A. D. **Introdução à Experimentação**. Santa Maria: Ed. UFSM, 2003.

STORK, L.; LOPES, S. J. **Experimentação II**. Santa Maria: Ed. UFSM, 1998.

KOOGAN LARROUSE. **Pequeno Dicionário Ilustrado**. Rio de Janeiro: Larrouse do Brasil, 1979, 1644 p.

## **ANEXOS**

DADOS DE EXPORTAÇÃO DO INSTRUMENTO UTILIZADO

OBRA:MARIO OPERADOR:MARIO DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 6:52: 4  
INSTRUMENTO:TC307 NUMERO DE SERIE:686630  
EST:1 HI: 1.660 ----- E=  
10000.000 N= 10000.000 H= 100.000 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 6:59:42  
RE :9 AZRE: 0.0005 ----- E= 0  
N= 0 ----- DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 7: 2:19  
COD:[P ][0 ][0 ][0 ][0 ][0 ]  
PV :R1 HZ=359.5959 VT= 90.2613 DI= 63.150 HP= 1.500 PPM=13  
MM=0 E= 10000.000 N= 10063.149 H= 99.679 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 7:  
7:37  
PV :2 HZ=165.2742 VT= 90.2312 DI= 58.699 HP= 1.500 PPM=13  
MM=0 E= 10014.735 N= 9943.182 H= 99.764 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
7:11: 1  
OBRA:1 OPERADOR: DATA:00/00/00 HORA:00:00:00  
INSTRUMENTO: NUMERO DE SERIE:000000  
EST:2 HI: 1.670 ----- E=  
10014.735 N= 9943.182 H= 99.764 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 7:22: 7  
RE :1 AZRE:359.5958 ----- E=  
0 N= 0 ----- DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 7:24:23  
PV :R2 HZ= 0.0001 VT= 89.3901 DI= 58.693 HP= 1.950 PPM=13  
MM=0 E= 10014.735 N= 10001.873 H= 100.293 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
7:26: 0  
PV :3 HZ=174.5039 VT= 90.3405 DI= 116.384 HP= 1.500 PPM=13  
MM=0 E= 10025.193 N= 9827.275 H= 98.781 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
7:32:35  
OBRA:1 OPERADOR: DATA:00/00/00 HORA:00:00:00  
INSTRUMENTO: NUMERO DE SERIE:000000  
EST:3 HI: 1.610 ----- E=  
10025.193 N= 9827.275 H= 98.781 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 7:43:23  
RE :2 AZRE:359.5959 ----- E=  
0 N= 0 ----- DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 7:46: 7  
PV :3R HZ= 0.0001 VT= 89.3808 DI= 116.369 HP= 1.500 PPM=13  
MM=0 E= 10025.194 N= 9943.641 H= 99.632 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
7:46:27  
PV :4 HZ=213.0804 VT= 92.3840 DI= 77.093 HP= 1.500 PPM=13  
MM=0 E= 9983.099 N= 9762.786 H= 95.335 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
7:52:26  
OBRA:1 OPERADOR: DATA:00/00/00 HORA:00:00:00  
INSTRUMENTO: NUMERO DE SERIE:000000  
EST:4 HI: 1.620 ----- E=  
9983.099 N= 9762.786 H= 95.335 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 7:59: 3  
RE :3 AZRE:359.5958 ----- E=  
0 N= 0 ----- DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 8: 1:45

PV :5            HZ= 0.0000 VT= 87.3803 DI= 77.077 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 9983.099 N= 9839.798 H= 98.637 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 8:  
 2:19  
 PV :R4            HZ= 0.0000 VT= 87.3804 DI= 77.077 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 9983.099 N= 9839.797 H= 98.636 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 8:  
 2:56  
 PV :5            HZ=159.4710 VT= 91.1933 DI= 236.439 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 10064.773 N= 9540.969 H= 89.988 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 8:  
 7:35  
 OBRA:1    OPERADOR:    DATA:00/00/00 HORA:00:00:00  
 INSTRUMENTO:    NUMERO DE SERIE:000000  
 EST:5            HI: 1.620 ----- E=  
 10064.773 N= 9540.969 H= 89.988 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 8:18:20  
 RE :4            AZRE:359.5958 ----- E=  
 0 N=            0 ----- DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 8:19: 9  
 PV :R5            HZ= 0.0000 VT= 88.4631 DI= 236.431 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 10064.774 N= 9777.346 H= 95.165 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
 8:19:56  
 PV :6            HZ=270.0928 VT= 87.3709 DI= 124.546 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 9940.335 N= 9541.311 H= 95.283 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
 8:26:51  
 OBRA:1    OPERADOR:    DATA:00/00/00 HORA:00:00:00  
 INSTRUMENTO:    NUMERO DE SERIE:000000  
 EST:6            HI: 1.650 ----- E=  
 9940.335 N= 9541.311 H= 95.283 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 8:37: 9  
 RE :5            AZRE:359.5954 ----- E=  
 0 N=            0 ----- DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 8:37:38  
 PV :R6            HZ= 0.0002 VT= 92.3402 DI= 124.567 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 9940.336 N= 9665.753 H= 89.854 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
 8:39: 7  
 PV :7            HZ=270.2437 VT= 89.5708 DI= 290.451 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 9649.892 N= 9543.391 H= 95.681 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
 8:45:21  
 OBRA:1    OPERADOR:    DATA:00/00/00 HORA:00:00:00  
 INSTRUMENTO:    NUMERO DE SERIE:000000  
 EST:7            HI: 1.610 ----- E=  
 9649.892 N= 9543.391 H= 95.681 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 8:55:24  
 RE :6            AZRE: 0.0001 ----- E=            0  
 N=            0 ----- DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 8:55:59  
 PV :R7            HZ= 0.0003 VT= 90.0737 DI= 290.452 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 9649.895 N= 9833.842 H= 95.153 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
 8:56:42  
 PV :8            HZ=179.5024 VT= 88.4540 DI= 253.126 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 9650.598 N= 9290.326 H= 101.268 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 9:  
 2:50

OBRA:1 OPERADOR: DATA:00/00/00 HORA:00:00:00  
 INSTRUMENTO: NUMERO DE SERIE:000000  
 EST:8 HI: 1.620 ----- E=  
 9650.598 N= 9290.326 H= 101.268 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 9:15:12  
 RE :7 AZRE:359.5954 ----- E=  
 0 N= 0 ----- DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 9:15:55  
 PV :R8 HZ= 0.0001 VT= 91.2001 DI= 253.137 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 9650.599 N= 9543.394 H= 95.501 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
 9:16:41  
 PV :9 HZ=270.0048 VT= 91.0422 DI= 119.866 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 9530.753 N= 9290.354 H= 99.145 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
 9:21:13  
 OBRA:1 OPERADOR: DATA:00/00/00 HORA:00:00:00  
 INSTRUMENTO: NUMERO DE SERIE:000000  
 EST:9 HI: 1.580 ----- E=  
 9530.753 N= 9290.354 H= 99.145 DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 9:29:20  
 RE :8 AZRE:359.5954 ----- E=  
 0 N= 0 ----- DATA: 7/ 2/ 4 HORA: 9:29:55  
 PV :R9 HZ= 0.0002 VT= 89.0641 DI= 119.855 HP= 1.500 PPM=13  
 MM=0 E= 9530.755 N= 9410.194 H= 101.085 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
 9:30:36  
 PV :10-1 HZ=276.2003 VT= 89.3216 DI= 63.149 HP= 1.950 PPM=13  
 MM=0 E= 9467.992 N= 9297.321 H= 99.285 DATA: 7/ 2/ 4 HORA:  
 9:36:48

ADJUSTMENT COMPUTATIONS (ACESSO INTERNET DIA 06/10/04)

-----  
 AJUSTE MÁRIO  
 -----

Number of Control Stations - 1  
 Number of Unknown Stations - 9  
 Number of Distance observations - 9  
 Number of Angle observations - 9  
 Number of Azimuth observations - 1

\*\*\*\*\*  
 Initial approximations for unknown stations  
 \*\*\*\*\*

Station	X	Y
b	10,057.80	9,989.81
c	10,173.76	9,979.97
d	10,234.46	9,932.57
e	10,459.56	9,860.42
f	10,421.25	9,742.02
g	10,145.55	9,833.41
h	9,905.12	9,912.38
i	9,942.55	10,026.22

Control Stations

Station	X	Y	Sx	Sy
a	10,000.00	10,000.00	0.001	0.001

\*\*\*\*\*  
 Distance Observations  
 \*\*\*\*\*

Station	Station	Distance
a	b	58.695
b	c	116.373
c	d	77.011
d	e	236.377
e	f	124.440
f	g	290.451
g	h	253.068
h	i	119.843
i	a	63.148

\*\*\*\*\*  
 Angle Observations  
 \*\*\*\*\*

Station Backsighted	Station Occupied	Station Foresighted	Angle
i	a	b	165°27'51.22"
a	b	c	174°50'46.22"



b	c	d	213°08'11.22"
c	d	e	159°47'18.22"
d	e	f	270°09'36.22"
e	f	g	270°24'43.22"
f	g	h	179°50'29.22"
g	h	i	270°00'55.22"
h	i	a	276°20'09.22"

\*\*\*\*\*

Azimuth Observations

\*\*\*\*\*

Station Occupied	Station Sighted	Azimuth
a	b	100°00'00"

Notice: Matrices are written to the file C:\Documents and Settings\Administrador\Meus documentos\mario\DISSERT\OUTROS\polmario.MAT

\*\*\*\*\*

Adjusted stations

\*\*\*\*\*

Station	X	Y	Standard error ellipse computed					t
			Sx	Sy	Su	Sv		
a	10,000.00	10,000.00	0.000	0.000	0.000	0.000	45.00°	
b	10,057.80	9,989.81	0.001	0.004	0.004	0.000	10.00°	
c	10,173.76	9,979.98	0.002	0.014	0.014	0.000	6.11°	
d	10,234.46	9,932.58	0.006	0.019	0.020	0.002	17.00°	
e	10,459.56	9,860.45	0.013	0.041	0.043	0.002	17.70°	
f	10,421.27	9,742.05	0.023	0.038	0.044	0.005	31.60°	
g	10,145.56	9,833.42	0.016	0.016	0.022	0.006	45.39°	
h	9,905.13	9,912.37	0.009	0.009	0.012	0.003	132.33°	
i	9,942.55	10,026.22	0.002	0.005	0.006	0.000	24.54°	

\*\*\*\*\*

Adjusted Distance Observations

\*\*\*\*\*

Station Occupied	Station Sighted	Distance	V
a	b	58.695	0.0000
b	c	116.373	0.0000
c	d	77.011	0.0000
d	e	236.377	0.0000
e	f	124.440	0.0000
f	g	290.451	-0.0000
g	h	253.068	-0.0000
h	i	119.843	-0.0000
i	a	63.148	0.0000

\*\*\*\*\*

Adjusted Angle Observations

\*\*\*\*\*

Station Backsighted	Station Occupied	Station Foresighted	Angle	V
i	a	b	165°27'53.40"	2.181"
a	b	c	174°50'45.74"	-0.482"
b	c	d	213°08'04.48"	-6.741"
c	d	e	159°47'11.86"	-6.363"
d	e	f	270°09'22.30"	-13.925"
e	f	g	270°24'41.89"	-1.332"
f	g	h	179°50'36.89"	7.668"
g	h	i	270°01'10.80"	15.580"
h	i	a	276°20'12.65"	3.434"

\*\*\*\*\*

#### Adjusted Azimuth Observations

\*\*\*\*\*

Station Occupied	Station Sighted	Azimuth	V
a	b	100°00'00"	0.0"

\*\*\*\*\*

#### Adjustment Statistics

\*\*\*\*\*

Iterations = 2  
Redundancies = 3

Reference Variance = 0.00000000

Reference So = ±0.0001

Convergence!