UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SOLUÇÕES FRACAS DE EQUAÇÕES DE FLUIDO EM MEIOS POROSOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Rubens Vilhena Bettinardi

Santa Maria, RS, Brasil
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação de Mestrado

SOLUÇÕES FRACAS DE EQUAÇÕES DE FLUIDO EM MEIOS POROSOS

elaborada por
Rubens Vilhena Bettinardi

Como requesito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

João Paulo Lukaszczyk, Dr.
(Presidente / Orientador)

Marcio Violante Ferreira, Dr.(UFSM)

Maurício Fronza da Silva, Dr.(UFSM)

Santa Maria, 21 de dezembro de 2009

Agradecimentos

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSM que se empenharam em implantar o curso de mestrado nesta universidade.

Ao Professor Dr. João Paulo Lukaszczyk que com bastante competência, dedicação e principalmente paciência orientou-me no mestrado, o meu muito obrigado.

Ao Professor Dr. Fidelis Bittencourt pela disponibilidade em ajudar na diagramação final deste trabalho, também o meu muito obrigado.

À minha família e de modo especial à Mara Lucia e Tereza Raquel pelo apoio e incentivo, e compreensão por todo tempo em que precisei estar ausente, e à minha irmã Emerentina e à minha madrinha Maria de Lourdes por me ajudarem a encarar meus limites não como barreiras mas como balizas que indicam o caminho a seguir.

E à Irmã Laurita que exorcizou meus traumas ensinando-me que dividir também é uma das quatro operações aritméticas.

Resumo

Neste trabalho estudamos equações que regem escoamentos laminares em meios porosos granulares (não consolidados) sujeitos a um campo de forças externas.

Numa primeira parte apresentamos os significados físicos e alguma interpretação dos diversos elementos da equação e uma dedução, em linhas gerais, desta.

Numa segunda parte, conhecendo-se a porosidade do sistema, utilizamos o método de Faedo-Galerkin em espaços de Sobolev para obter resultados de existência de soluções fracas.

Palavras-Chaves: equações de Navier-Stokes; formulação variacional; espaços de Sobolev; meio poroso.

Abstract

In this work we study equations that describe laminar flow through a rigid isotropic granular (non consolidated) porous medium subjected to a external force field.

Firstly we present the meaning of the many phisical terms of the equation and some interpretation, also a general deduction of this equation is presented.

Secondly, knowing the system porosity and using Faedo-Galerkin method we obtain results of existence of weak solutions in Sobolev spaces.

Keywords: equations of Navier-Stokes, varying form, Sobolev space, porous media.

Notação

Abaixo estão relacionadas algumas das notações utilizadas nesta dissertação.

1. $\mathbb{R}^n$, Espaço Euclidiano com norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, e $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

2. Ω , um aberto do $\mathbb{R}^n$

3. $\overline{\Omega}$, o fecho de Ω

4. $\partial\Omega$, a fronteira de Ω

5. $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, o operador Laplaciano

6. $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \text{grad}$, o operador gradiente

7. $C^k(\Omega)$, conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $k-$vezes continuamente diferenciáveis em Ω

8. $C_0^k(\Omega)$ conjunto das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω com suporte compacto, isto é, é o conjunto dos campos escalares $\psi \in C^k(\Omega)$ que se anulam fora de um subconjunto compacto de Ω.

9. $C^\infty(\Omega) = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$, funções infinitamente diferenciáveis em Ω

10. $C_0^\infty(\Omega)$ conjunto das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto, isto é, é o conjunto dos campos escalares ψ infinitamente diferenciáveis definidos em Ω que se anulam fora de um subconjunto compacto de Ω.

11. $D(\Omega)$ ou $D\left(\overline{\Omega}\right)$, espaço das funções C^∞ em Ω ou respectivamente em $\overline{\Omega}$ com divergente nulo

12. $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ com $\alpha_i \in \mathbb{N}$

13. u_t denota a derivada, no tempo, de u

14. $L^p(\Omega)$ denota o espaço de todas classes de equivalência das funções mensuráveis (imagem em $\mathbb{R}$) cuja p-ésima potência do valor absoluto são integráveis ou

essencialmente limitadas, para a medida de Lebesgue $dx = dx_1 \dots dx_n$ com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \ , \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

ou

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess \ |u(x)| = \inf \{K \geq 0 : |u(x)| \leq K \ \ q.s.\text{em } \Omega\} \ , \text{ quando } p = \infty.$$

Normalmente denotaremos $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|$ pois esta é a norma mais usada no texto. (Conforme [1], páginas 22-24). Para funções u com valores vetoriais dizemos que $u \in (L^p(\Omega))^n$ quando cada componente de u for uma função de $L^p(\Omega)$.

15. (u, v) , produto interno.

16. Sendo A espaço Banach, A' seu dual, e $\phi \in A'$, indica-se os valores de ϕ num ponto $v \in A$ por $\phi(v) = \langle \phi, v \rangle_{A', \ A}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A', \ A}$ é uma forma bilinear que descreve o que se chama de produto de dualidade em $A' \times A$

17. O espaço de Sobolev de ordem m, p é definido como

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in L^p(\Omega) \text{ tais que } \exists g_\alpha = D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ com} \\ \displaystyle\int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi, \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \\ \text{onde } |\alpha| \leq m \in \mathbb{N}, \ 1 \leq p < \infty \end{array} \right\}$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ define-se a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Quando $p = 2$, escrevemos $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. E se $m = 1$ e $p = 2$, tem-se $W^{m,p}(\Omega) = H^1(\Omega)$, e

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{|u|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\Omega)}^2}$$

e em particular, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, conforme [1] páginas 44-45.

18. $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja $W_0^{m,p}(\Omega)$ é um completamento na norma de $W^{m,p}(\Omega)$, do espaço de todas funções $C_0^\infty(\Omega)$, com suporte compacto em Ω . E quando $p = 2$, $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$, ou em outras palavras, $H_0^m(\Omega)$ é formado tomando-se a união de $C_0^\infty(\Omega)$ com todos os *limites* das seqüências de Cauchy de $C_0^\infty(\Omega)$ *quer estes limites estejam ou não* em $C_0^\infty(\Omega)$.

19. $V = \left\{u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d : \text{ div } u \equiv 0\right\}$

20. $H = \left\{u \in \left(L^2(\Omega)\right)^d \ : \text{ div } u \equiv 0 \text{ e } u \cdot \overrightarrow{N}\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0\right\}$

21. $A \hookrightarrow B$ denota que o espaço funcional A está continuamente imerso no espaço funcional B

22. $A \overset{c}{\hookrightarrow} B$ denota que o espaço funcional A está compactamente imerso no espaço funcional B.

23. $C_B^j(\Omega) = \{u \in C^j(\Omega) : D^\alpha u \text{ é limitada em } \Omega \text{ para } |\alpha| \leq j \in \mathbb{N}\}$, (cfe [1], página 95).

24. $L(E, F)$ designa o espaço linear de todas transformações lineares entre os espaços lineares E e F .

25. $\mathcal{L}(E, F)$ designa o espaço linear normado de todas transformações lineares limitadas entre os espaços lineares normados E e F .

Introdução

As equações de fluido em meios porosos podem ser interpretadas como uma complexificação das equações de Navier-Stokes onde a porosidade faz o papel de uma perturbação nos fluxos incompressíveis. Abordaremos alguns resultados sobre existência e unicidade de solução para um sistema de equações diferenciais parciais deduzido no artigo de Prieus Du Plessis e Masliyah [15] que modela o fluxo de um fluido viscoso e incompressível num meio poroso do tipo granular (não consolidado).

O estudo destas equações relaciona-se com a ocorrência na natureza de depósitos de petróleo que podem eventualmente se encontrar em regiões com um material poroso do tipo granular (não consolidado) e de que vários filtros utilizados em laboratórios e processos industriais são baseados em materiais porosos deste tipo.

As equações a serem estudadas são as seguintes:

$$\begin{array}{c}\text{forma}\\ \text{vetorial}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\rho u_t+\rho u\cdot\nabla\left(\dfrac{u}{n}\right)-\mu\Delta u+n\nabla p+\mu F\left(n\right)u=\rho n g \quad \text{em } Q_{T,}\\ div\ u=0 \quad \text{em } Q_{T,}\\ u\left(x,0\right)=u_0(x)\ \ ,\ \ \forall x\in\Omega,\\ u\left(x,t\right)=0\ \ ,\ \ \forall t\in\left(0,T\right)\ ,\forall x\in\partial\Omega.\end{array}\right. \tag{1}$$

ou

$$
\begin{array}{c}\text{forma}\\ \text{escalar}\end{array}
\begin{cases}
\rho \dfrac{\partial u^i}{\partial t} + \rho \displaystyle\sum_{j=1}^{d} u^j . \dfrac{\partial \left(\frac{u^i}{n} \right)}{\partial x_j} - \mu \Delta u^i + n \dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \mu F(n) u^i = \rho n g^i, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{para} \;\; i = 1, ..., d. \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial u^i}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{em } Q_T, \\
u^i(x, 0) = u_0^i(x) \;\;, \;\; \forall x \in \Omega, \\
u^i(x, t) = 0 \;\;, \;\; \forall t \in (0, T) \;\;, \forall x \in \partial\Omega.
\end{cases}
\tag{2}
$$

Aqui, são utilizadas as seguintes notações:

- o cilindro $Q_T = \Omega \times (0, T)$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d = 2$ ou 3, é um domínio limitado; Ω representa a região granular ocupada pelo fluido onde fisicamente se dá o escoamento. Denota-se $\partial\Omega$ a fronteira de Ω.

- $u(x,t) = \left(u^1, \ldots, u^d\right) \in \mathbb{R}^d$, ($d = 2, 3$), denota a velocidade do fluido em um ponto $x = (x_1, x_2, ..., x_d) \in \Omega$, $t \in [0, T]$.

- $p(x,t)$ é a pressão hidrostática no ponto x e instante t. Por razões de unicidade, suporemos que em cada instante de tempo a pressão tem média integral nula, isto é, $\displaystyle\int_{\Omega} p(x,t)\, dx = 0, \forall t \in [0, T]$

- $\mu > 0$ é uma constante correspondendo à viscosidade do fluido.

- $\rho > 0$ é a densidade do fluido, a qual, sem perda de generalidade no caso de fluidos homogêneos, ao longo de todo este trabalho vamos supor constante e igual a um.

- $n(x,t) \in \mathbb{R}_+$ é a porosidade do meio poroso granular, isto é, em termos intuitivos é o volume de espaço vazio dividido pelo volume total de uma porção de Ω na vizinhança de x. A porosidade assume valores entre zero e um, podendo ter valores distintos em diferentes pontos do espaço e instantes do tempo. Quando a porosidade se torna nula, o meio material é puramente sólido e pode assim ser excluído da região de escoamento; quando a porosidade é igual a um em uma certa subregião de Ω, é porque de fato nesta região não há material poroso e sim uma cavidade que permite livre circulação do fluido. Portanto, podemos sempre supor $0 < n\,(x,t) \leq 1$.

- F representa uma força de atrito, decorrente da presença do meio poroso granular, cuja porosidade é z. Suporemos que F satisfaz $\lim\limits_{z\to 1} F\,(z) = 0$ e $\lim\limits_{z\to 0} F\,(z) = \infty$; o que é consistente fisicamente.
- $g(x,t)$ é um campo de forças externas, o qual é suposto conhecido.

Nas equações acima, em coordenadas cartesianas, temos os operadores

$$\Delta u = (\Delta u^1, ..., \Delta u^d) \quad \text{ e } \quad (u \cdot \nabla u)^i = \sum_{j=1}^{d} u^j \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \tag{3}$$

(conforme [38], página 09). No termo $(u \cdot \nabla u)^i$ o ponto "$\cdot$ " representa o operador convecção. O sistema acima (1) é deduzido das equações clássicas de Navier-Stokes, fazendo-se médias integrais em volumes pequenos, onde as variáveis u e p são médias macroscópicas da velocidade e pressão reais das partículas do fluido. Para maiores detalhes, veja a referência [15].

Queremos ressaltar que estas equações são diferentes daquelas que modelam escoamentos em meios porosos consolidados, equações estas que são usualmente conhecidas como as equações dos meios porosos ("porous media equation"). Estas últimas estão associadas a meios porosos consolidados, nos quais a velocidade e a pressão são acopladas por uma relação chamada Lei de Darcy (ou suas variantes).

Neste trabalho, estaremos interessados em discutir a existência de soluções do sistema (1) quando a porosidade do meio granular é conhecida a priori, isto é, $n = n(x,t)$ é uma função dada com certas propriedades (veja Teorema 3.4 na página 84).

Finalmente, queremos destacar que, como é usual em trabalhos envolvendo estimativas em equações diferenciais parciais, também neste trabalho C denotará uma constante positiva genérica dependendo somente de Ω e dos dados do problema e que poderá mudar de passo a passo. Somente nos casos em que for necessário distinguir certas constantes ou tornar mais claro a argumentação é que utilizaremos outras letras para denotar constantes.

Sumário

Capítulo 1

Preliminares Gerais

Neste capítulo apresenta-se alguns resultados básicos e definições utilizados, geralmente, no estudo de equações diferenciais parciais, bem como alguns lemas importantes para obtermos resultados de existência de soluções fracas.

Lema 1.1 *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *então*

$$a.b \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \tag{1.1}$$

Lema 1.2 *Se* $a, b \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ *então*

$$a.b \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \tag{1.2}$$

Lema 1.3 *Sejam* $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Se* $a, b > 0$ *então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.3}$$

As demonstrações dos lemas anteriores podem ser encontradas em [9] e [16].

Observação 1.4 Supondo $\alpha > 0$, com as mesmas hipóteses do lema anterior vale a desigualdade

$$ab \leq \frac{a^p}{p\alpha^p} + \alpha^q \frac{b^q}{q} \tag{1.4}$$

De fato, basta aplicar a desigualdade (1.3) para $u, v > 0$ e depois fazer $u = \frac{a}{\alpha}$ e $v = \alpha b$.

Definição 1.5 (de suporte de uma função). O suporte de uma função escalar f definida no espaço métrico M, denotado por $supp(f)$, é o fecho do conjunto $\{x \in M \ ; \ f(x) \neq 0\}$. Assim, se f for uma função real com domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, o suporte de f é o menor conjunto fechado $K_f \subseteq \Omega$ tal que $f(x) = 0, \forall x \notin K_f$. Em outras palavras, o fecho do complementar dos zeros da função f é o seu "suporte", isto é,

$$K_f = supp(f) = \overline{(\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\})} = \overline{f^{-1}(\{0\}^c)}$$

(Conforme [1], página 2; e/ou [17], página 147).

Definição 1.6 Diz-se que um *aberto limitado* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ($d = 2, 3$), *é bem regular*, quando sua fronteira Γ for uma variedade indefinidamente diferenciável de dimensão $d-1$, estando Ω localmente de um mesmo lado de Γ. (Ver detalhes em [37], página 81).

Observação 1.7 Referiremos ao subconjunto do espaço das funções C^∞ com suporte compacto em Ω , denotando-o por $C_0^\infty(\Omega)$, isto é, o conjunto $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ tem como elementos os campos escalares Ψ infinitamente diferenciáveis que junto com suas derivadas de todas as ordens, assumem valores não-nulos apenas em algum conjunto compacto $K \subset \Omega$.

Observação 1.8 $C_0(M)$ denota a coleção de todas $f \in C(M)$ com suporte supp(f) compacto.
No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, escrevemos

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \ e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

para denotar os vetores da base canônica, e

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \ y = (y_1, \ldots, y_n) \text{ e } z = (z_1, \ldots, z_n)$$

indicarão os pontos do espaço.

O operador diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad (1 \leq i \leq n)$$

será escrito como D_i, e se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é um multi-índice (onde os $\alpha_i's$ são inteiros não negativos), D^α será definido como o operador diferenciação

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \qquad , \quad \text{onde } |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Para uma função escalar f definida em Ω , indica-se com

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f \qquad , \text{onde } \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \ldots \frac{\partial}{\partial x_j}}_{\alpha_j \text{ vezes}}$$

$$\text{com} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

quando existirem as derivadas parciais explicitadas (e na ordem indicada) em cada ponto de Ω. Assim como por exemplo quando $\alpha = (1, 0, 1)$ tem-se

$$D^{(1,0,1)} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^0 \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^1 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$$

Caso $|\alpha| = 0$ então $D^\alpha f = f$, isto é, D^α é a identidade.
Para inteiros $m \geq 0$, $C^m(\Omega)$ designará a coleção de todas as funções $f \in C(\Omega)$ tais que $D^\alpha f \in C(\Omega)$ para qualquer multi-índice α com $|\alpha| \leq m$.

Definição 1.9 Um espaço *vetorial* (= *linear*) normado é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\|\cdot\|$ é uma norma em E.

Definição 1.10 Sejam X e Y espaços lineares normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear (não distinguiremos entre os símbolos de norma em X e em Y). Diz-se que T é uma transformação linear *limitada* se existir alguma constante positiva k tal que, para todo ponto $x \in X$,

$$\|Tx\| \leq k \|x\|$$

Neste caso $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ onde $\mathcal{L}(X, Y)$ é um subespaço de $L(X, Y)$.

Definição 1.11 Seja E um espaço vetorial normado sobre um corpo $\mathbb{K}$.
(i) Dizemos que um funcional linear $T : E \to \mathbb{R}$ é *contínuo* se satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x) \quad \text{quando} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

(ii) A coleção de todos funcionais lineares $T : E \to \mathbb{R}$ contínuos é chamada de espaço *dual topológico* de E que será denotado por E'. O espaço dual algébrico de E contém o dual topológico E'. Como estamos principalmente interessados em análise, daqui para frente os termos espaço dual referir-se-á ao dual topológico.
(iii) O dual topológico de E' se denota por E'' e será denominado de *bidual* de E.

Lema 1.12 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear. T é uma transformação linear limitada se e somente se T for contínua.*

Para a demonstração, veja [5] , páginas 183 e 238.

Definição 1.13 (de espaço dual). Seja X um espaço normado sobre o corpo $\mathbb{K}$. O conjunto $B(X, \mathbb{K})$ é chamado de *espaço dual* de X e será denotado por X' . X' é também chamado de *espaço adjunto* ou *espaço conjugado* de X. Os elementos de X' são chamados de funcionais lineares limitados definidos em X.

Observação 1.14 Para transformações lineares a limitação equivale a continuidade, via Lema (1.12).

Lema 1.15 *Sejam X_1, X_2 subespaços normados de um espaço de Banach X , com $X_1 \subset X_2$. Então $X_2' \subset X_1'$.*

Demonstração. Ora $X_1' = \{f : X_1 \to \mathbb{K} \,;\, f \textit{ linear e contínuo}\}$ e $X_2' = \{g : X_2 \to \mathbb{K} \,;\, g \textit{ linear e contínuo}\}$, daí quando se toma $g \in X_2'$ tem-se que $g : X_2 \to \mathbb{K}$ *, linear e contínuo, mas como* $X_1 \subset X_2$ *também obtém-se que* $g|_{X_1} : X_1 \to \mathbb{K}$ *, linear e contínuo, ou seja* $g|_{X_1} \in X_1'$ *. Consequentemente vale dizer que* $X_2' \subset X_1'$ *.*

■

Observação 1.16 Dizemos que uma propriedade P vale "*quase sempre*" (denotando-se isto abreviadamente por $q.s.$) se o único subconjunto onde P não vale tem medida de Lebesgue nula.

Definição 1.17 (de função característica). A função característica $\mathcal{X}_E$ de um conjunto $E \subseteq \Omega$ é definida por

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ , se } x \in E \\ 0 \text{ , se } x \notin E \end{cases}$$

Definição 1.18 Uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita mensurável se pode ser representada quase sempre como um limite de uma seqüência $\{\varphi_n\}$ de funções escada que convergem quase sempre em Ω .

Definição 1.19 Um conjunto E limitado, $E \subseteq \Omega$, é mensurável quando sua função característica $\mathcal{X}_E$ for mensurável. A medida de E , denotada por $\mu(E)$, é definida por $\mu(E) = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{X}_E(x)\, dx$.

Definição 1.20 Uma função mensurável $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dita ser integrável a Lebesgue sobre um conjunto mensurável Ω em $\mathbb{R}^n$ se

$$\int_\Omega |f(x)|\, dx < \infty$$

Observação 1.21 Sejam B um espaço de Banach com norma denotada por $\|.\|_B$, A um conjunto mensurável em $\mathbb{R}^n$ e f uma função arbitrária definida quase sempre de A em B. Dizemos que f é uma função mensurável integrável sobre A se e somente se $\|f(.)\|_B$ é integrável (a Lebesgue) em A , pois

$$\left\| \int_A f(t)dt \right\|_B \leq \int_A \|f(t)\|_B\, dt$$

Definição 1.22 (de espaços $L^p(\Omega)$).

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ mensurável e } |u|^p \in L^1(\Omega) \right\}, \text{ para } 1 \leq p < \infty;$$

e

$$L^{\infty}(\Omega)=\left\{u:\Omega\subseteq\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R};\exists\lambda\in\mathbb{R}_{+}^{*},\quad m\left(\{x\in\Omega:|u(x)|>\lambda\}\right)=0\right\}$$

são espaços de Banach, respectivamente com as normas

$$\|u\|_{L^{p}(\Omega)}=\left[\int_{\Omega}|u(x)|^{p}\,dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

para $1\leq p<\infty$ e

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}=\sup_{\Omega}ess\,|u(x)|=\inf\left\{\lambda\geq 0;\ m\left(\{x\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^{n}:|u(x)|>\lambda\}\right)=0\right\}$$

quando $p=\infty$.
Em particular, para $p=2$, tem-se que $L^{2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto escalar $(u,v)=\displaystyle\int_{\Omega}u(x).v(x)\,dx$.

Definição 1.23 Sejam $-\infty\leq a<b\leq\infty$. Dizemos que $L^{p}(a,b,B)$ é o espaço vetorial (das classes de equivalência) das funções f mensuráveis definidas sobre $]a,b[$ com imagem em B tais que $\|f(.)\|_{B}\in L^{p}(a,b)$. O espaço $L^{p}(a,b,B)$ é um espaço de Banach relacionado com a norma

$$\|f;L^{p}(a,b,B)\|=\begin{cases}\left\{\displaystyle\int_{a}^{b}\|f(t)\|_{B}^{p}\,dt\right\}^{\frac{1}{p}} & ,\text{ se }\ 1\leq p<\infty\\ \displaystyle\sup_{t\in]a,b[}ess\,\|f(t)\|_{B} & ,\text{ se }\ p=\infty\end{cases}$$

Analogamente, se $f\in L^{p}(c,d,B)$ para todos c,d com $a<c<d<b$, então escreve-se $f\in L_{loc}^{p}(a,b;B)$, e , no caso, $p=1$, dizemos que f é localmente integrável. (Conforme [1], página 179).

Definição 1.24 Uma aplicação $f:X\rightarrow Y$ de espaços métricos é chamada de *homeomorfismo*, e os *espaços* X e Y são *homeomorfos,* se (1^{o}) f é bijetiva, (2^{o}) f é contínua, e (3^{o}) a aplicação inversa f^{-1} é contínua.

Definição 1.25 Uma aplicação $f : X \to Y$ que transforma cada conjunto aberto $A \subset X$ num subconjunto aberto $f(A) \subset Y$ chama-se uma *aplicação aberta*. Daí, uma aplicação contínua aberta bijetiva é um homeomorfismo. (Conforme [44], página 193).

Definição 1.26 (Imersão Contínua). Dizemos que o espaço normado X está imerso continuamente no espaço normado Y, e indica-se esta *imersão* por $X \hookrightarrow Y$, contanto que

(i) X é um subespaço vetorial de Y ;
(ii) o operador identidade I definido de X em Y por $Ix = x$, $\forall x \in X$ é contínuo.

Note que, como I é um operador linear limitado, a condição (ii) significa que $\forall x \in X$ tem-se

$$\|x\|_Y \leq M \ \|x\|_X$$

para uma certa constante $M > 0$. Em outras palavras, a *imersão (ou injeção)* de X em Y é contínua quando:

(i') $X \subset Y$, ou seja, X é um subespaço vetorial de Y ;
(ii') $\exists M \geq 0$ tal que $\|x\|_Y \leq M. \|x\|_X$, $\forall x \in X$.

(Conforme [1], página 09).

Observação 1.27 Em certas circunstâncias a exigência (i') da Definição 1.26 pode ser enfraquecida de modo aceitar como "imersão"certas transformações lineares canônicas de X em Y . (Veja [1], página 09).

Definição 1.28 (i) Um subconjunto A de um espaço métrico completo M é chamado de *pré-compacto* (ou *relativamente compacto*) se seu fecho é compacto, ou seja, se qualquer seqüência de pontos em A contém uma subseqüência de Cauchy convergente em M.
(ii) Sejam X e Y espaços normados, e f um operador de X em Y. Diz-se que f é um *operador compacto* se $f(A)$ for pré-compacto em Y quando A é limitado em X , ou seja, para cada seqüência limitada $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ a seqüência $\{f(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ é

pré-compacta em Y .
(iii) Sejam X e Y espaços de Banach. Diz-se que um *operador* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é *compacto* se $T(B_E)$ é relativamente compacto na **topologia forte**, onde

$$B_E = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$$

(Conforme [33], página 244; [1], página 09; [31], página 233; e [9], página 89).

Definição 1.29 (Imersão Compacta) Sejam X e Y espaços de Banach, $X \subset Y$. Diz-se que X é *imerso compactamente* em Y, se o operador *imersão* $I : X \to Y$ é compacto, e denota-se isto por $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$, ou seja, quando a imagem dos limitados de X, pelo operador I, são conjuntos relativamente compactos de Y, isto é, conjuntos cujos fechos são compactos em Y, ou ainda, quando seqüências limitadas em X são levadas por I em seqüências da sua imagem que possuem subseqüências convergentes em Y.
(Conforme [1], página 09; ou [16], página 239).

Observação 1.30 Chamamos de espaço pré-hilbertiano um espaço com produto interno. (Conforme [23], página 26).

Definição 1.31 (de conjunto denso). Um subconjunto S de um espaço normado X é denso em X se, e só se, cada $x \in X$ é limite de uma seqüência de elementos de S . (Conforme [1], página 04).

Notação 1.32 Quando

$$\begin{aligned} u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto (u_1(x), \ldots, u_m(x)) \end{aligned}$$

costuma-se, por exemplo, dizer que $u \in L^2(\Omega)$ subentendo-se que

$$u \in \left(L^2(\Omega)\right)^m = L^2(\Omega) \times \cdots \times L^2(\Omega)$$

isto é, que $u_i(x) \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, m$. Além disso, neste caso, é consagrado o (ab)uso de linguagem dizer que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \equiv \|u\|_{(L^2(\Omega))^m} = \left[\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \|u_i(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Logo, como é usual no estudo de equações associadas às equações de Navier-Stokes, simplifica-se a notação de modo que nem sempre distinguiremos notacionalmente funções escalares de funções a valores vetoriais a menos que seja preciso para evitar confusão; em geral a situação estará clara dependendo do contexto.

Proposição 1.33 *(Desigualdade de Hölder). Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, com $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e vale a seguinte desigualdade:*

$$\int_\Omega |uv| \, dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |v(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} = \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)} = \|u\|_p \cdot \|v\|_q$$

Demonstração. Veja [9] , página 56.

■

Teorema 1.34 *Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções reais integráveis à Lebesgue em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Então*

a) $\displaystyle\int_\Omega [\alpha u(x) + \beta v(x)] \, dx = \alpha \int_\Omega u(x) dx + \beta \int_\Omega v(x) dx$, *para constantes* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) se $u(x) \leq v(x)$ para quase todo $x \in \Omega$, então $\displaystyle\int_\Omega u(x) dx \leq \int_\Omega v(x) dx$

c) se $u(x)$ é limitada inferior e superiormente pelos números m e M, então

$\displaystyle m\mu(\Omega) \leq \int_\Omega u(x) dx \leq M\mu(\Omega)$, *onde μ é a medida de Lebesgue;*

d) $|u|$ também é integrável, e $\displaystyle\left| \int_\Omega u(x) dx \right| \leq \int_\Omega |u(x)| \, dx$

Demonstração. Ver [36], páginas: 47,49,62 e 79; ou [44], páginas 80-81.

■

Teorema 1.35 *(da convergência dominada de Lebesgue).Seja* $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ *uma seqüência de funções mensuráveis e suponha que* $u_k(x) \leq v\,(x)$ *q.s. para cada* k *, onde* v *é uma função integrável. Suponha que* $u\,(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x)$ *q.s. então* u *é integrável e*

$$\int_\Omega u(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_k(x)$$

Demonstração. Ver [36], página 69; ou [44], páginas 81-82.

■

Observação 1.36 O método de Riesz para definir a integral de Lebesgue é equivalente ao método original de Lebesgue, conforme [36], páginas 86-94.

Proposição 1.37 *(Relação entre os espaços* $L^{p\prime}s$*). Se* $\mu\,(\Omega) < \infty$ *e* $0 < q < p < \infty$*, então* $L^p\,(\Omega) \subset L^q\,(\Omega)$ *e existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{L^p(\Omega)}$ *para toda* $u \in L^p\,(\Omega)$*.*

Demonstração. Veja [12], páginas 197-198.

■

Observação 1.38 (Desigualdade de Cauchy-Buniakovsky-Schwarz). Em qualquer espaço H com produto interno, o produto interno e a norma satisfazem

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\| \quad , \ \forall u, v \in H$$

Para o espaço $L^2\,(\Omega)$, a desigualdade de Cauchy-Buniakovsky-Schwarz toma a forma

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \left(\int_\Omega |u\,(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega |v\,(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Esta expressão é obtida considerando-se a desigualdade mais forte (a desigualdade de Hölder(1.33), para $p = 2 = q$)

$$\int_\Omega |uv|\,dx \leq \left(\int_\Omega |u\,(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega |v\,(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

e o Teorema (1.34, item d), a saber:

$$\left|\int_{\Omega} uvdx\right| \leq \int_{\Omega} |uv|\, dx$$

(Conforme [12] , página 212).

Definição 1.39 Sejam X e Y espaços de Hilbert tais que
(i) $X \subset Y$
(ii) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C\, \|x\|_X \quad , \ \forall x \in X$$

isto é, a associação $I : X \longrightarrow Y$ é contínua, (por isto pode-se dizer que X está imerso continuamente em Y); e se além disso,
(iii) se X também for denso em Y, X está imerso densamente em Y. A correspondência $x = Ix$ dos elementos de X em Y é referida como uma injeção densa e contínua de X em Y. (Cfe [42], página 100).

Notação 1.40 Dado um espaço vetorial normado X e o seu dual $X^{'} = \mathcal{L}\,(X, \mathbb{K})$, (onde $\mathbb{K}$ pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), define-se produto de dualidade como o funcional bilinear

$$X^{'} \times X \ni (f, v) \longrightarrow f\,(v) \overset{def}{=} \langle f, v\rangle_{X',\ X} \in \mathbb{K}$$

pois pela definição de adição de funções o produto de dualidade é linear em relação à primeira variável, e considerando-se a linearidade dos funcionais f também é linear com relação à segunda variável, ou seja é linear em relação a cada uma das variáveis separadamente e tem imagem em $\mathbb{K}$ com a propriedade segundo a qual para cada escalar fixo em $\mathbb{K}$, e uma vez fixado um dos argumentos no produto de dualidade resultará numa forma linear em relação ao outro argumento, e vice-versa. O símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pode ser encarado como uma aplicação bilinear de $X^{'} \times X$ em $\mathbb{K}$. (Cfe [41], página 189).

Proposição 1.41 *Sejam V e H espaços de Hilbert tais que $V \hookrightarrow H$ densamente . Então $H^{'} \hookrightarrow V^{'}$ densamente.*

Demonstração. Veja [4], páginas 48-49.

$\blacksquare$

Teorema 1.42 *(Representação de Riesz-Frechet). Seja X um espaço de Hilbert e $f : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo, ou seja $f \in X^{'}$, então existe um único elemento $y \in X$ tal que*

$$\langle f, x\rangle = (y, x) \quad , \quad \forall x \in X$$

onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto escalar em X . Além disso se verifica $\|y\|_X = \|f\|_{X'}$

Demonstração. Veja [9], página 81.

$\blacksquare$

Observação 1.43 (i) Sejam E um espaço normado e o dual topológico de $E^{'}$, ou seja o bidual $E^{''}$. Considere-se a transformação

$$\begin{aligned} J : E &\to E^{''} \\ v \to I_v : \quad & E^{'} \quad \to \quad \mathbb{R} \\ & l \in E^{'} \;\to\; I_v\left(l\right) := l(v) \end{aligned}$$

Repare que I_v é um funcional linear, e como vale dizer que

$$|I_v\left(l\right)| = |lv| \leq \|l\|_{E'} \|v\|_E$$

daí decorre a continuidade de I_v . Além disso,

$$\|I_v\|_{E''} \leq \|v\|_E \qquad , \ \forall v \in E$$

A aplicação J é uma isometria entre E e um subespaço de $E^{''}$, usualmente denominada de *identificação* (injeção) *canônica,* pois sendo uma aplicação sobre um subespaço de $E^{''}$, e como muitas vezes $J\left(E\right)$ é identificado com E , (a menos de uma isometria), e neste caso E é considerado como um subespaço de $E^{''}$ por um abuso de linguagem, visto que J é de fato uma $\mathbb{R}-$transformação linear injetora tal que

$$E \simeq J\left(E\right) \subset E^{''},$$

(conforme [11], página 293).
(ii) Em particular quando existe um outro espaço A de Banach tal que $E^{'} = A$ então

$$E \subset E^{''} = A^{'}.$$

(iii) Quando o operador J é sobrejetor, os espaços E e $E^{''}$ são reflexivos. (Conforme [9], páginas 39 e 43; ou [43], páginas 213-214; ou [39], página 92).

Observação 1.44 Identifica-se $\left(L^2(\Omega)\right)^{'} \cong L^2(\Omega)$, (conforme [1], página 39; ou [9], páginas 61 e 81-82).

Observação 1.45 Se f é um funcional linear contínuo com domínio num espaço de Hilbert X, usa-se a seguinte notação para seu valor num ponto $v \in X$:

$$f(v) = \langle f, v \rangle_{X',\, X} \quad , \quad f \in X^{'} \;\text{ e }\; v \in X \tag{1.5}$$

Como f é um operador limitado em X, pode-se usar a definição de norma de operador para definir norma dos elementos em $X^{'}$. De fato, como $X^{'}$é munido com a norma

$$\|f\|_{X'} = \sup_{v \in X} \left\{ \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_X} \quad , v \neq 0 \right\} = \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_X} \tag{1.6}$$

sempre se tem

$$\left| \langle f, v \rangle_{X',\, X} \right| \leq \|f\|_{X'} \cdot \|v\|_X \tag{1.7}$$

Segundo o Teorema de Representação de Riesz-Frechet, (Teorema 1.42), para qualquer $f \in X^{'}$, existe um único $v_f \in X$ tal que

$$\langle f, v \rangle_{X',\, X} = (v_f, v)_X \quad , \; \forall v \in X \tag{1.8}$$

onde $(\cdot,\cdot)_X$ é o produto interno em X. Estabelecendo-se de outro modo, existe uma correspondência injetora e sobrejetora dos elementos de X com os elementos de $X^{'}$. Se introduzir-se um operador K para descrever esta correspondência, pode-se escrever

$$f = Kv_f \tag{1.9}$$

Além disso, também pelo Teorema 1.42, tem-se que $\|v_f\|_X = \|f\|_{X'}$, ou seja K é uma isometria de X em $X^{'}$; assim K preserva distância: $\|v_f - v_g\|_X = \|f - g\|_{X'}$. Dizemos que K é a isometria canônica de X sobre $X^{'}$. Das relações (1.8) e (1.9) tem-se que

$$(v_f, v)_X = \langle Kv_f, v\rangle \quad , \ \forall v \in X \tag{1.10}$$

Como também é possível encontrar um funcional linear $Kv \in X^{'}$ associado a v, o espaço dual $X^{'}$ também é um espaço com produto interno relativo ao produto interno

$$(f, g)_{X'} = \left(K^{-1}f, K^{-1}g\right)_X \quad , \ \forall f, g \in X^{'} \tag{1.11}$$

analogamente, a norma

$$\|f\|_{X'} = \sqrt{(f, f)_{X'}} \tag{1.12}$$

é exatamente a norma de operador definida na Equação 1.6. Para ver isto, repare que fazendo-se $f = Kv$ em 1.6, para um elemento v fixado,

$$\frac{\langle f, v\rangle}{\|v\|_X} = \frac{\langle Kv, v\rangle}{\|v\|_X} = \frac{(v, v)_X}{\|v\|_X} = \sqrt{(v, v)_X} = \sqrt{(K^{-1}f, K^{-1}f)_X} = \|f\|_{X'}$$

Agora, como qualquer espaço de Hilbert é reflexivo, temos que

$$\left(X^{'}\right)^{'} = X \tag{1.13}$$

visto que cada elemento $v \in X$ gera um funcional linear contínuo em $E^{'}$. Consequentemente em correspondência com

$$\|v\|_X = \sup_{\substack{f \in X^{'} \\ f \neq 0}} \frac{|\langle f, v\rangle|}{\|f\|_{X'}} \tag{1.14}$$

É natural identificar-se X com seu dual $X^{'}$; daí identifica-se K com a aplicação identidade. Ou seja, o produto interno $(w, v)_X$ em X deve ser identificado com a forma bilinear $\langle f, v\rangle$ em $X^{'} \times X$. Neste caso o espaço X é chamado de espaço pivô, denominação justificável pois de sua escolha dependerá a possibilidade de estender o produto interno de modo único. (Cfe [42], página 101).

Teorema 1.46 *Sejam X e Y espaços de Hilbert tais que X está densamente imerso em Y e denotemos por $X^{'}$ e $Y^{'}$ os duais respectivos de X e Y. Então existe uma aplicação linear contínua $\Pi^{'}$ de $Y^{'}$ em $X^{'}$ tal que $\Pi^{'}Y^{'}$ é denso em $X^{'}$; ou seja $Y^{'}$ está densamente imerso em $X^{'}$.*

Demonstração. Ver [42], páginas 100-101.

■

Observação 1.47 Uma aplicação importante do Teorema 1.46 é quando se identifica H com seu dual $H^{'}$; isto é, quando se escolhe H como espaço pivô,

$$H \cong H^{'}$$

E, no caso de admitirmos que V é um subespaço densamente imerso de H , então $V \subset H$ e tanto V quanto H são (ou podem ser identificados como) subespaços densamente imersos em $H^{'}$, daí teremos

$$V \subset H \cong H^{'} \subset V^{'} \tag{1.15}$$

Além disso, se R_v é um funcional definido diretamente por

$$R_v\,(w) = (w, v) \quad , \ \forall w \in H$$

isto sugere a descrição da correspondência introduzida pelo operador $R : H \longrightarrow H'$ tal que $Rv = R_v$, e daí $\langle Rv, w\rangle = (w, v)$ descrevendo o produto de dualidade de $H^{'} \times H$. E como H foi escolhido como pivô, $H^{'}$identifica-se como um subespaço de $V^{'}$ e o produto de dualidade de $V^{'} \times V$ é identificado com a única extensão de $\langle R_v, w\rangle_{H',\ H}$ pois assim $\langle R_v, w\rangle_{V',\ V}$ onde $v \in V$ é um elemento fixado, coincide com (R_v, w) sempre que $R_v \in H$ e $w \in V$. (Ver [42], página 101; [41], página 557; [4], página 49; [9], página 82).

Proposição 1.48 *(Desigualdade de Lyapunov para interpolação). Sejam* $1 \leq p \leq q \leq r$ *e* $0 \leq \lambda \leq 1$ *com*

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$$

Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ *então também* $f \in L^q(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda} \cdot \|f\|_{L^r(\Omega)}^{1-\lambda}$$

Demonstração. Escolhendo-se $p_1 = \frac{p}{\lambda q}$ e $p_2 = \frac{r}{(1-\lambda)q}$ obtém-se que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$. Como

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|^q \, dx = \int_\Omega |f(x)|^{q+\lambda q-\lambda q} \, dx = \int_\Omega |f(x)|^{(1-\lambda)q} \cdot |f(x)|^{(1-\lambda)q} \, dx$$

e daí, aplicando-se a desigualdade de Hölder (1.33) para

$$|u(x)| = |f(x)|^{\lambda q} \quad \text{e} \quad |v(x)| = |f(x)|^{(1-\lambda)q}$$

tem-se que

$$\int_\Omega |f(x)|^q \, dx \leq \left(\int_\Omega \left| |f(x)|^{\lambda q} \right|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \left(\int_\Omega \left| |f(x)|^{(1-\lambda)q} \right|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\int_\Omega |f(x)|^q \, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^{\lambda q p_1} \, dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \left(\int_\Omega |f(x)|^{(1-\lambda)q p_2} \, dx \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\int_\Omega |f(x)|^q \, dx \leq \left[\left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\lambda q} \cdot \left[\left(\int_\Omega |f(x)|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \right]^{(1-\lambda)q}$$

ou seja

$$\|f\|_{L^q(\Omega)}^q \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda q} \cdot \|f\|_{L^r(\Omega)}^{(1-\lambda)q}$$

e agora, extraindo-se a raiz $q - \textit{ésima}$ resulta

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda} \cdot \|f\|_{L^r(\Omega)}^{(1-\lambda)}$$

$\blacksquare$

Proposição 1.49 *(2ª Desigualdade de interpolação). Sejam* $1 \leq p \leq q \leq r$ *,* $1 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \infty$ *, e* $0 \leq \lambda \leq 1$ *com*

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} \tag{1.16}$$

e

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{1-\lambda}{\alpha} \tag{1.17}$$

Se

$$f \in L^{\gamma}\left(a, b, L^{p}\left(\Omega\right)\right) \cap L^{\alpha}\left(a, b, L^{r}\left(\Omega\right)\right)$$

então

$$f \in L^{\beta}\left(a, b, L^{q}\left(\Omega\right)\right)$$

e vale

$$\|f\|_{L^{\beta}(a,b,L^{q}(\Omega))} \leq \|f\|^{\lambda}_{L^{\gamma}(a,b,L^{p}(\Omega))} \cdot \|f\|^{(1-\lambda)}_{L^{\alpha}(a,b,L^{r}(\Omega))}$$

Demonstração. Ora,

$$f \in L^{\alpha}\left(a, b, L^{p}\left(\Omega\right)\right) \cap L^{\gamma}\left(a, b, L^{r}\left(\Omega\right)\right)$$

significa que

$$f :]a, b[\to L^{p}\left(\Omega\right) \quad \text{e} \quad f :]a, b[\to L^{r}\left(\Omega\right)$$

de modo que é válido dizer

$$f\left(t\right)|_{t \in]a,b[} \in L^{p}\left(\Omega\right) \cap L^{r}\left(\Omega\right) \text{ , com } \|f\left(t\right)\|_{L^{p}(\Omega) \cap L^{r}(\Omega)} \in L^{\alpha}\left(a, b\right) \cap L^{\gamma}\left(a, b\right)$$

repare que $f\left(t\right)$, junto com a condição (1.16) satisfaz às hipóteses da proposição anterior (1.48) de cuja aplicação pode-se concluir

$$\|f\left(t\right)\|_{L^{q}(\Omega)} \leq \|f\left(t\right)\|^{\lambda}_{L^{p}(\Omega)} \cdot \|f\left(t\right)\|^{(1-\lambda)}_{L^{r}(\Omega)} \tag{1.18}$$

Tomando-se a potência "$\beta > 0$" em ambos os membros da inequação (1.18), e desde que a função potência é não–decrescente, pode-se escrever:

$$\|f\left(t\right)\|^{\beta}_{L^{q}(\Omega)} \leq \|f\left(t\right)\|^{\lambda\beta}_{L^{p}(\Omega)} \cdot \|f\left(t\right)\|^{(1-\lambda)\beta}_{L^{r}(\Omega)}$$

a seguir integrando-se em relação a variável t no intervalo $]a,b[$ vem:

$$\int_a^b \|f(t)\|_{L^q(\Omega)}^{\beta} dt \leq \int_a^b \|f(t)\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda\beta} \cdot \|f(t)\|_{L^r(\Omega)}^{(1-\lambda)\beta} dt$$

agora, destacando-se que podemos aplicar a desigualdade de Hölder (proposição 1.33) no segundo membro da desigualdade acima, com $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$, teremos algo do tipo

$$\int_a^b |u(t) \cdot v(t)| \, dt \leq \left(\int_a^b |u(t)|^{p_1} dt \right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \left(\int_a^b |v(t)|^{p_2} dt \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

assim tomando-se $|u(t)| = \|f(t)\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda\beta}$ e $|v(t)| = \|f(t)\|_{L^r(\Omega)}^{(1-\lambda)\beta}$ na desigualdade acima obtém-se

$$\int_a^b \|f(t)\|_{L^q(\Omega)}^{\beta} dt \leq \left(\int_a^b \left| \|f(t)\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda\beta} \right|^{p_1} dt \right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \left(\int_a^b \left| \|f(t)\|_{L^r(\Omega)}^{(1-\lambda)\beta} \right|^{p_2} dt \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

ou seja

$$\int_a^b \|f(t)\|_{L^q(\Omega)}^{\beta} dt \leq \left(\int_a^b \|f(t)\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda\beta p_1} dt \right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \left(\int_a^b \|f(t)\|_{L^r(\Omega)}^{(1-\lambda)\beta p_2} dt \right)^{\frac{1}{p_2}} \tag{1.19}$$

observe que para definirmos p_1 e p_2 pode-se estabelecer que $0 < \lambda < 1$, tal que

$$\begin{cases} \lambda\beta p_1 = \gamma \\ \\ (1-\lambda)\beta p_2 = \alpha \end{cases} \tag{1.20}$$

e

$$\begin{cases} \frac{1}{p_1} = \frac{\lambda\beta}{\gamma} \\ \\ \frac{1}{p_2} = \frac{(1-\lambda)\beta}{\alpha} \end{cases} \tag{1.21}$$

pois

$$1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{\lambda\beta}{\gamma} + \frac{(1-\lambda)\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\frac{\gamma}{\lambda}} + \frac{\beta}{\frac{\alpha}{(1-\lambda)}}$$

o que equivale à relação da hipótese

$$\tfrac{1}{\beta} = \tfrac{\lambda}{\gamma} + \tfrac{(1-\lambda)}{\alpha}$$

Agora, substituindo-se as relações (1.20) e (1.21) adequadamente em (1.19), vem:

$$\int_a^b \|f(t)\|_{L^q(\Omega)}^{\beta} dt \leq \left(\int_a^b \|f(t)\|_{L^p(\Omega)}^{\gamma} dt\right)^{\frac{\lambda\beta}{\gamma}} \cdot \left(\int_a^b \|f(t)\|_{L^r(\Omega)}^{\alpha} dt\right)^{\frac{(1-\lambda)\beta}{\alpha}}$$

ou

$$\int_a^b \|f(t)\|_{L^q(\Omega)}^{\beta} dt \leq \left[\left(\int_a^b \|f(t)\|_{L^p(\Omega)}^{\gamma} dt\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\lambda\beta} \cdot \left[\left(\int_a^b \|f(t)\|_{L^r(\Omega)}^{\alpha} dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{(1-\lambda)\beta}$$

extraindo-se a raiz $\beta{-}ésima$ em ambos os membros da inequação acima, (lembrando-se que a função raiz $\beta - ésima$ é não-decrescente), segue-se que

$$\left(\int_a^b \|f(t)\|_{L^q(\Omega)}^{\beta} dt\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left[\left(\int_a^b \|f(t)\|_{L^p(\Omega)}^{\gamma} dt\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\lambda} \cdot \left[\left(\int_a^b \|f(t)\|_{L^r(\Omega)}^{\alpha} dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{(1-\lambda)}$$

ou seja

$$\|f\|_{L^{\beta}(a,b,L^q(\Omega))} \leq \|f\|_{L^{\gamma}(a,b,L^p(\Omega))}^{\lambda} \cdot \|f\|_{L^{\alpha}(a,b,L^r(\Omega))}^{(1-\lambda)}$$

■

Observação 1.50 No caso de p, r, α ou γ ser igual a ∞, para aplicação das proposições anteriores (1.48) e (1.49) adota-se a convenção usual, ou seja, faz-se $\frac{1}{\infty} = 0$.

Definição 1.51 (de derivada parcial fraca (ou distribuicional)). Sejam $u(x,t)$, $g(x,t) \in L^p(\Omega)$ onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que g_j é a j-ésima derivada parcial fraca de u quando

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_{\Omega} g_j \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega) \quad , \ (\ j = 1, \ldots, n)$$

Ou de modo mais geral, se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é um multi-índice (onde os $\alpha_i's$ são inteiros não negativos), diz-se que g é a $\alpha - ésima$ derivada parcial fraca de u , escrevendo-se $D^{\alpha}\ u = g$ desde que

$$\int_{\Omega} uD^{\alpha}\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g\varphi dx \quad , \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Se não existir uma função tal como g , então u não possui uma $\alpha - \acute{e}sima$ derivada parcial no sentido fraco. (Conforme [16], páginas 242-243).

Definição 1.52 (de espaço de Sobolev). O espaço das funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas fracas de ordem menor ou igual a m também pertencem a $L^p(\Omega)$, onde $m \in \mathbb{N}$, com $1 \leq p \leq \infty$, é o que se chama de um espaço de Sobolev, denotado por $W^{m,p}(\Omega)$. Usando a notação de multi-índice para α , denota-se estes espaços por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u : \ D^{\alpha}u \in L^p(\Omega) \, ; \forall \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}$$

os quais são espaços de Banach , com a norma definida por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para cada $u \in \ W^{m,p}(\Omega)$, se $1 \leq p < \infty$, e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sup_{0 \leq |\alpha| \leq m} ess \, \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

para $p = \infty$.

Notação 1.53 Em particular $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Quando $p = 2$,

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$

é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)$$

(Conforme [1], páginas 44-45; e [46], página 04).

Proposição 1.54 *(Desigualdade de Poincaré-Friedrichs). Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, então*

$$|v|_{(L^2(\Omega))^n} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^n}$$

onde C_Ω é uma constante que só depende de Ω.

Demonstração. Veja [37], página 91.

■

Observação 1.55 O fecho do espaço das funções $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ será denotado por $W_0^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$ escreve-se $H_0^m(\Omega)$, e se $m = 1$ obtém-se o espaço de dimensão infinita $H_0^1(\Omega)$. Em $H_0^1(\Omega)$ podemos utilizar a norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{d} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e desta forma, teremos que $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ são equivalentes devido à desigualdade de Poincaré-Friedrichs.

Ora, como (em particular, nesta dissertação estaremos usando) as normas

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{3} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

e

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2} = \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega)}$$

repare que se $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 =$$

$$= \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{3} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e como pela desigualdade de Poincaré (Proposição 1.54), vale dizer que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c^2 \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

vem

$$\frac{1}{1+c^2} \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left(1+c^2\right) \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

ou seja

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1+c^2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

onde a constante c depende apenas de Ω . (Conforme [37], página 92).

Observação 1.56 Dado $d \in \mathbb{N}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $(d = 2, 3)$, é um conjunto aberto limitado, com a propriedade de $\partial\Omega$ ser suficientemente regular (neste caso, lipschitziana), consideraremos os seguintes espaços funcionais:

$$\mathcal{V} = \left\{ u = \left(u^1, \ldots, u^d\right) \in \left(C_0^\infty(\Omega)\right)^d : \operatorname{div} u \equiv 0 \right\}$$

$$V = \left\{ u = \left(u^1, \ldots, u^d\right) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d : \operatorname{div} u \equiv 0 \right\}$$

onde cada $u_i : \Omega \to \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, d)$ e $\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u_d}{\partial x_d}$. O espaço dual de V denota-se por V'.

$$H = \left\{ u = \left(u^1, \ldots, u^d\right) \in \left(L^2(\Omega)\right)^d : \operatorname{div} u \equiv 0 \ \text{ e } \ u \cdot \overrightarrow{N}\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0 \right\}$$

e

$$H^\perp = \left\{ u = \left(u^1, \ldots, u^d\right) \in \left(L^2(\Omega)\right)^d : u \equiv \nabla p \ \text{ para algum } p \in H^1(\Omega) \right\}$$

Aqui, $H^\perp$ denota o ortogonal de H no sentido de $\left(L^2(\Omega)\right)^d$; nas expressões acima, $\operatorname{div} u \equiv 0$ e ∇p são entendidas no sentido de distribuições; $u \cdot \overrightarrow{N}\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0$ denota o traço normal de u sobre $\partial\Omega$ (conforme notação usada em [46], nas páginas 13-16), onde $u \cdot \overrightarrow{N}\Big|_{\partial\Omega}$ é a derivada de u na direção do vetor unitário normal $\overrightarrow{N}$ externo a $\partial\Omega$ calculada nos pontos da fronteira $\partial\Omega$.

Definição 1.57 Dados $1 \leq p < \infty$, $T > 0$ e um espaço de Banach B, com norma denotada por $\|.\|_B$, define-se

$$L^p(0,T,B)=\left\{u:]0,T[\rightarrow B;\ \int_0^T \|u(t)\|_B^p\,dt<\infty\right\}$$

Definição 1.58 (Convergência em espaços de Banach). Dado B um espaço de Banach, $X\in B$ e $(X_n)\subset B$ uma seqüência, dizemos que:

(i) X_n converge para X se X_n converge para X *na* norma de B
(ou converge fortemente) quando $n\rightarrow\infty$;
(ii) X_n converge fraco para X se $\forall f\in B'$ tem-se $f(X_n)\rightarrow f(X)$
quando $n\rightarrow\infty$, cuja notação é $X_n\rightharpoonup X$;
(iii) X_n converge fraco* para X se e só se para um outro espaço de Banach A ,
e tal que o seu dual $A'\equiv B$, tivermos que $\forall a\in A,\quad \langle a,X_n\rangle\rightarrow\langle a,X\rangle$
quando $n\rightarrow\infty$, cuja notação é $X_n\underset{*}{\rightharpoonup} X$
ou equivalentemente
sendo A um espaço de Banach e o seu dual $A'\equiv B$
$X_n\underset{*}{\rightharpoonup} X$ se e só se $\forall a\in A,\quad X_n(a)\underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} X(a)$

(Conforme [31] , páginas 99 e 106 ; ou [5], páginas 44, 231 e 248).

Definição 1.59 Um "setor cônico" Γ em $\mathbb{R}^n$ é a intersecção de uma bola com um cone a partir do seu centro:

$$\Gamma=\{y\mid\ y=x+t\zeta\ ;\ 0\leq t\leq\rho\ ;\ \zeta\in\sigma\}$$

onde σ é um subconjunto relativamente aberto da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Chamamos x de vértice e ρ de raio de Γ. O ângulo sólido ω de Γ é a "área"(medida $(n-1)-$dimensional) de σ. Um conjunto aberto $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ tem a *propriedade do cone* (ou satisfaz á condição do cone) se existirem números positivos ρ,ω tais que qualquer $x\in\Omega$ é vértice de um setor cônico $\Gamma\subset\Omega$ de raio ρ e ângulo sólido ω, isto é, quando qualquer que seja o ponto $x\in\Omega$ tomado como vértice de um cone $\Gamma_\rho(x)$ com raio fixo ρ, se pode orientar este cone $\Gamma_\rho(x)$ de modo que todos seu pontos estejam em Ω.

Teorema 1.60 *(Imersão de Sobolev). Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, satisfazendo a* propriedade do cone, *onde j, m são inteiros não negativos e $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$. Então:*

1. Se $mp < n$ com $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$ então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$ e, portanto,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

2. Se $mp = n$ então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$ com $p \leq q < \infty$ e, portanto,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ com } p \leq q \leq \infty.$$

   Porém, se $p = 1$ então $m = n$, e neste caso a imersão anterior vale até $q = \infty$ e mais ainda
$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

3. Se $mp > n$ então
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

Demonstração. Veja [1], página 97.

■

Definição 1.61 Se $1 \leq p < n$
$$p^* := \frac{np}{n-p}$$
é o conjugado de Sobolev de p.

Observação 1.62 Note que $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, se $p^* > p$.

Definição 1.63 (Constante de imersão). Uma imersão da forma

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow X$$

onde X é um espaço de Banach de funções definidas sobre Ω , é válida para um conjunto Ω que possui a propriedade do cone, só quando existe uma constante de imersão associada a $W^{m,p}(\Omega) \to X$, isto é, pode-se escolher uma constante K tal que a desigualdade
$$\|u\|_X \leq K. \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

é satisfeita para todos elementos $u \in W^{m,p}(\Omega)$, e a escolha de K depende apenas de Ω , da dimensão n e dos diversos parâmetros do cone **C** que são invariantes sob movimentos rígidos de **C**. (Conforme [1], página 97).

Observação 1.64 (i) Repare quando $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, com $n \leq 3$, e como $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$, ou seja,

$$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$$

onde $m = 1$, $p = 2$. Resulta da aplicação do teorema (1.60) que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ pois

$$2 = p \leq q \leq \frac{np}{n - mp} = \frac{3 \cdot 2}{3 - 1 \cdot 2} = 6$$

(ii) Em geral, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ é um conjunto aberto e regular, conforme [46] das páginas 159 a 161, tem-se:

1°) $d = 2 \Rightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $1 \leq q < \infty$, isto é, para $u \in H_0^1(\Omega)$ tem-se $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C. \|\nabla u\|$

2°) $d = 3 \Rightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, isto é, para $u \in H_0^1(\Omega)$, tem-se $\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq C. \|\nabla u\|$

3°) se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ for limitado então $H_0^1(\Omega) \cap L^d(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ para $d = 2, 3$ visto que $L^6(\Omega) \subset L^3(\Omega)$ pela proposição (1.37).

Teorema 1.65 *(Rellich-Kondrachov) Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,aberto, limitado e de classe C^1. Então,*

1. se $p < n$, tem-se que

   $$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \ , \forall q \in [1, p^*[$$

   onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

2. se $p = n$, tem-se que

   $$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$$

3. se $p > n$, tem-se que

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C\left(\overline{\Omega}\right).$$

Demonstração. Veja [9], página 169.

■

O seguinte resultado de compacidade é o bem conhecido Lema de Aubin-Lions (referências: [46] , página 271; ou [34], página 57).

Lema 1.66 *Sejam X_0, X, e X_1 três espaços de Banach tais que $X_0 \subset X \subset X_1$, com imersões contínuas, X_i reflexivo para $i = 0, 1$ e a imersão $X_0 \hookrightarrow X$ compacta. Sejam $T > 0$ um número real fixo, e α_0, α_1 dois números reais tais que $\alpha_i > 1$, para $i = 0, 1$. Então o espaço*

$$A = \left\{ v \in L^{\alpha_0}(0, T, X_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{\alpha_1}(0, T, X_1) \right\}$$

equipado com a norma

$$\|v\|_A = \|v\|_{L^{\alpha_o}(0,T,X_o)} + \|v'\|_{L^{\alpha_1}(0,T,X_1)}$$

a qual o torna um espaço de Banach, está imerso compactamente em $L^{\alpha_o}(0, T, X)$.

Demonstração. Veja [46], páginas 271-273.

■

Definição 1.67 Sejam X e Y dois espaços normados e tais que existe um operador linear injetor L aplicando X em $L(X) \subset Y$, neste caso diz-se que L é um *isomorfismo* de X com imagem em Y. Se L for injetor e sobrejetor os dois espaços são ditos *isomórficos.* (Cfe [5], página 5).

Observação 1.68 Sejam X e Y dois espaços normados e tais que existe um operador linear injetor L aplicando X sobre Y , com a propriedade $\|L(x)\|_Y = \|x\|_X$ para todo $x \in X$, então L é chamado de um *isomorfismo isométrico* entre X e Y, e X e Y são ditos *isometricamente isomorfos*, o que é denotado por $X \cong Y$. Tais espaços muitas vezes são identificados pois têm estruturas idênticas e diferem apenas pela natureza de seus elementos. (Cfe [1], página 04).

Passemos agora a recordar certos resultados que são importantes na teoria clássica das equações de Navier-Stokes, e que também nos serão fundamentais. Inicialmente temos o seguinte resultado clássico de *De Rham*:

Proposição 1.69 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*, (*$d = 2, 3$ *), um aberto e* $f = \{f_1, f_2, ..., f_d\}$*, com* $f_i \in D'(\Omega)$*,* $i = 1, ..., d$*. Uma condição necessária e suficiente para que* $f = \nabla p$ *para alguma* p *em* $D'(\Omega)$*, é que*

$$\langle f, v \rangle = 0, \ \forall v \in C_o^{\infty}(\Omega)$$

com $div\, v \equiv 0$*, onde* $D'(\Omega)$ *é o conjunto das distribuições definidas em* Ω*.*

Demonstração. Ver proposição 1.1 em [46], página 14.

■

Além disso, vale a seguinte:

Proposição 1.70 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*, (*$d = 2, 3$*), um aberto limitado com fronteira Lipschitz.*

1. Se uma distribuição p tem todas suas primeiras derivadas $D^i p$ em $L^2(\Omega)$, então $p \in L^2(\Omega)$ e vale
$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}.$$

2. Se uma distribuição p tem todas suas primeiras derivadas $D^i p$ em $H^{-1}(\Omega)$, então $p \in L^2(\Omega)$ e vale
$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \|\nabla p\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Em ambos os casos, se Ω é um aberto qualquer, então $p \in L^2_{loc}(\Omega)$.

Notação 1.71 Relativa à proposição (1.70) tem-se que :

$$L^2(\Omega)/\,\mathbb{R} = \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p(x)dx = 0 \right\}$$

Demonstração. (da proposição 1.70) Ver proposição 1.2 em [46], páginas 14-15.

$\blacksquare$

Observação 1.72 Denota-se por $W_0^{s,p}(\Omega)$ ao fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço $W^{s,p}(\Omega)$ $(s \geq 0)$. Para $s < 0$ define-se

$$W^{s,p}(\Omega) = \left[W_0^{-s,p'}(\Omega)\right]' \quad , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Note que os espaços $W^{s,p}(\Omega)$ com $s < 0$ são duais dos espaços que têm $C_0^\infty(\Omega)$ como subconjuntos densos, daí eles são espaços de distribuições sobre Ω. Em particular pode-se dizer que

$$\left(H_0^{-1}(\Omega)\right)' = \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)' = W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$$

(Conforme [1], página 206).

Observação 1.73 O item 2 da Proposição (1.70) implica que o operador gradiente ∇ é um isomorfimo de $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ em sua imagem $\operatorname{Im}(\nabla) \subset (H^{-1}(\Omega))^n$. De fato, o operador

$$\begin{aligned} \nabla : L^2(\Omega)/\mathbb{R} &\to \operatorname{Im}(\nabla) \subset (H^{-1}(\Omega))^n \\ p &\longmapsto \nabla p \end{aligned}$$

é injetivo, pois

$$p_1 \neq p_2 \Rightarrow \nabla p_1 \neq \nabla p_2$$

senão teríamos

$$\nabla p_1 = \nabla p_2 \Leftrightarrow \nabla (p_1 - p_2) = 0 \Leftrightarrow p_1, p_2 \in \text{mesma classe de } L^2(\Omega)/\mathbb{R}$$

Lembrando-se que como Ω é limitado tem-se

$$L^2(\Omega)/\mathbb{R} = \left\{p \in L^2(\Omega), \int_\Omega p(x)\,dx = 0\right\},$$

isto é, este conjunto é isomórfico ao subespaço $A^\perp$ de $L^2(\Omega)$ ortogonal ao conjunto A das funções constantes, pois para $c \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$(c, p) = \int_\Omega c.p(x)\,dx = c\int_\Omega p(x)\,dx = 0$$

onde

$$A^{\perp} = \left\{p \in L^2(\Omega) : (f,p) = 0, \forall f \in A\right\}$$

Além disso, se considerarmos que

$$\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \nabla\,(\alpha p_1 + \beta p_2) = \alpha \nabla p_1 + \beta \nabla p_2$$

vale dizer que ∇ também é linear. Logo, até aqui temos que ∇ é uma bijeção linear com relação à sua própria imagem $\mathrm{Im}\,(\nabla)$, e por isso, sabe-se que existe a aplicação inversa ∇^{-1} dada por

$$\nabla^{-1} : \nabla\,(\,L^2(\Omega)/\,\mathbb{R}) \subset H^{-1}(\Omega) \to L^2(\Omega)/\,\mathbb{R}$$
$$f \mapsto \nabla^{-1}\,(f) = p$$

e de acordo com o item 2 da proposição (1.70) acima, para $p \in L^2(\Omega)/\,\mathbb{R}$ com $\nabla p = f \in H^{-1}(\Omega)$ tem-se que

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c.\,\|\nabla p\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

ou seja

$$\|\nabla^{-1}\,(f)\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c.\,\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

concluí-se que ∇^{-1} é um operador limitado, e consequentemente pelo lema (1.12) também é contínuo. Assim, pelo corolário II.6 da página 19 de [9], temos que a aplicação ∇ também é contínua, e daí

$$\nabla \text{ é um isomorfismo de } L^2(\Omega)/\,\mathbb{R} \text{ em } \nabla\left(L^2(\Omega)/\,\mathbb{R}\right) \subset H^{-1}(\Omega)$$

isto é, na imagem da aplicação ∇ em $H^{-1}(\Omega)$, conforme definição (1.67) acima.
Afirmação 1. $L^2(\Omega)/\,\mathbb{R}$ é um conjunto fechado.
Repare que se tomarmos qualquer seqüência (p_n) em $L^2(\Omega)/\,\mathbb{R}$ tal que $p_n \underset{L^2(\Omega)}{\to} g$ teremos que

$$(p_n, c) = 0 \quad , \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

mas como

$$0=\lim_{n\to\infty}(p_n,\ c)\underset{\bigstar}{=}\left(\lim_{n\to\infty}p_n,c\right)=(g,c)\ \ ,\ \forall c\in\mathbb{R}\text{ e }g\in\ L^2(\Omega)\big/\,\mathbb{R}$$

onde ($\bigstar$) se refere à continuidade do produto interno pela aplicação do lema 3.2-2 da página 138 de [29]. Logo $L^2(\Omega)/\,\mathbb{R}$ é um conjunto fechado.
Além disso, consideremos a
Afirmação 2:

$$h_n\in\operatorname{Im}(\nabla)\ \ ,h_n\to h\in H^{-1}(\Omega)\Longrightarrow h\in\operatorname{Im}(\nabla)$$

De fato, suponhamos que

$$h_n=\nabla(p_n)\,,p_n\in\ L^2(\Omega)\big/\,\mathbb{R}$$

Ora h_n é de Cauchy em $H^{-1}(\Omega)$, segue-se que (p_n) é de Cauchy em $L^2(\Omega)/\,\mathbb{R}$, pelo item 2 da proposição (1.70), daí existe $f\in\ L^2(\Omega)/\,\mathbb{R}$ tal que $p_n\to f$. Mas como o operador ∇ é contínuo tem-se que

$$h_n=\nabla(p_n)\to h=\nabla f$$

consequentemente $h\in\operatorname{Im}(\,L^2(\Omega)/\,\mathbb{R})$. Portanto, a imagem deste operador linear ∇ é fechada.

Lema 1.74 *Sejam* $m\in\mathbb{N}$ *e*

$$v:\Omega\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$$

um campo vetorial e

$$p:\Omega\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$$

um campo escalar de classe $C^k(\Omega)$, $k\geq 1$, *então vale dizer que*

$$\operatorname{div}(pv)=p\operatorname{div}v+v\cdot\nabla p$$

Demonstração. Ver [35], página 232.

$\blacksquare$

Proposição 1.75 *(Teorema de Gauss-Green ou da Divergência em espaços de Sobolev). Sejam P, Q, R funções de $H^1(\Omega)$ num domínio regular $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ que se situa do mesmo lado de sua fronteira $\partial\Omega$.Então*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \int_{\partial\Omega} [PN_x + QN_y + RN_z] \, dS$$

onde $\overrightarrow{N}$ é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$ e $\overrightarrow{N}$ $=(N_x, N_y, N_z)$. E se

$$F(p) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)), \quad p = (x,y,z) \in \Omega$$

podemos escrever o resultado acima na forma vetorial

$$\int_\Omega \operatorname{div} \overrightarrow{F} dV = \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Demonstração. Ver [28], páginas 101-103.

$\blacksquare$

Proposição 1.76 *(Identidades de Green em espaços de Sobolev). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, ($d = 2, 3$), um domínio regular onde vale o Teorema da Divergência e sejam $\varphi, \psi \in H^2(\Omega)$, onde $\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{N}}$ é a derivada direcional na direção da normal unitária externa $\overrightarrow{N}$, então valem as seguintes identidades :*

$$\int_\Omega (\psi \triangle \varphi + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi) \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \overrightarrow{N}} dS_x \tag{1.22}$$

(é deduzida quando aplicado ao campo vetorial $F = \varphi\nabla\psi$); e

$$\int_\Omega (\psi \triangle \varphi - \varphi \triangle \psi) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \overrightarrow{N}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \overrightarrow{N}} \right) dS_x \tag{1.23}$$

(é deduzida quando aplicado aos campos vetoriais $F = \varphi\nabla\psi$ e $G = \psi\nabla\varphi$).

Demonstração. Ver **[28],** página 103.

$\blacksquare$

Observação 1.77 A proposição 1.76 anterior vale para funções vetoriais da seguinte forma: sejam

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ e } \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n), n \in \mathbb{N}$$

então

$$\int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\varphi dx = -\int_\Omega \psi \cdot \triangle\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \psi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial \overrightarrow{N}} dS_x$$

onde o ponto "$\cdot$"denota o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$ e convencionando-se as notações

$$\nabla\psi \cdot \nabla\varphi = \sum_{i=1}^{n} \nabla\psi_i \cdot \nabla\varphi_i$$

$$\Delta\varphi \cdot \psi = \sum_{i=1}^{n} \Delta\varphi_i \cdot \psi_i$$

repare que para cada componente i tem-se

$$\int_\Omega \nabla\psi_i \cdot \nabla\varphi_i dx = -\int_\Omega \psi_i \cdot \triangle\varphi_i dx + \int_{\partial\Omega} \psi_i \cdot \frac{\partial\varphi_i}{\partial \overrightarrow{N}} dS_x$$

daí somando-se em i

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \nabla\psi_i \cdot \nabla\varphi_i dx = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot \triangle\varphi_i dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot \frac{\partial\varphi_i}{\partial \overrightarrow{N}} dS_x$$

obtém-se

$$\int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\varphi dx = -\int_\Omega \psi \cdot \triangle\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \psi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial \overrightarrow{N}} dS_x$$

Observação 1.78 Para definir um operador adjunto T^* de T considera-se inicialmente um operador linear e limitado $T : X \to Y$, onde X e Y são espaços normados. A seguir, toma-se qualquer funcional linear limitado g definido em Y , isto é, g está definido para qualquer $y \in Y$. Fazendo-se $y = Tx$ obtém-se um funcional definido em X, digamos f tal que

$$f(x) = g(Tx) \quad , \text{com} \;\; x \in X \tag{1.24}$$

Note que f é linear, pois g e T são lineares. Além disso, f é limitado visto que pela definição de norma de uma aplicação linear contínua tem-se

$$|f(x)| = |g(Tx)| \leq \|g\| . \|Tx\| \leq \|g\| . \|T\| . \|x\|$$

Daí, tomando-se o supremo sobre todos os $x \in X$, com $\|x\| \leq 1$, obtemos a desigualdade

$$\|f\| \leq \|g\| . \|T\| \tag{1.25}$$

o que mostra que $f \in X'$, onde X' é o espaço dual de X conforme definição em (1.13). Por hipótese, $g \in Y'$. Logo, para a variável $g \in Y'$, a fórmula (1.24) define um operador de Y' em X', o qual é chamado de operador adjunto de T e é denotado por T^*. Conseqüentemente tem-se que

$$\begin{gathered} X \xrightarrow{T} Y \\ X' \xleftarrow{T^*} Y' \end{gathered} \tag{1.26}$$

Repare que T^* é um operador definido em Y', enquanto que o operador T, dado originalmente, foi definido em X. (Cfe [29], páginas 231-232). Isto motiva a seguinte

Definição 1.79 (Operador Adjunto). Seja $T : X \to Y$ um operador linear e limitado, onde X e Y são espaços normados. Então o operador adjunto $T^* : Y' \to X'$ de T é definido por

$$f(x) = (T^*g)(x) = g(Tx) \qquad , \quad \left(f \in X'\right) \text{ e } \left(g \in Y'\right)$$

onde X' e Y' são os espaços duais de X e Y, respectivamente. (Cfe [29], página 232).

Proposição 1.80 *(Norma do operador Adjunto). O operador adjunto T^* da definição (1.79) é linear e limitado, e*

$$\|T^*\| = \|T\|$$

Demonstração. *Veja [29], páginas 232-234.*

■

Definição 1.81 Seja $T : E \to E$ um operador linear limitado, onde E é um espaço de Hilbert. Diz-se que T é auto-adjunto se $T^* = T$, isto é,

$$(Tu, v) = (u, Tv) \qquad , \ \forall u, v \in E$$

(Conforme [9], página 96).

Definição 1.82 (de espaço separável). Diz-se que um espaço métrico E é *separável* se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso.

Proposição 1.83 *Seja E um espaço métrico separável e seja F um* subespaço fechado *de E . Então F também é separável.*

Demonstração. (i) *Caso F seja enumerável, isto é, equipotente a algum subconjunto de $\mathbb{N}^*$, e como por hipótese vale dizer que qualquer ponto $x \in F$ é limite de uma seqüência de pontos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F , então*

$$x,\ x_n \in F = \bigcup_{x_n \to x \in F} \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \overline{F}$$

ou seja o próprio conjunto F é denso em si mesmo, segue-se que F é separável.

(ii) *Caso F seja não enumerável tem-se que $F \neq \emptyset \iff \exists u \in F$* . Considere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência enumerável e densa em E, que possui uma subseqüência $u_{n_k} \to u$, visto que $u \in F \subset E$. Seja $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais positivos com $r_m \to 0$.

Afirmação 01. $\exists\,(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que

$$B\,(u_n; r_m) \cap F \neq \emptyset.$$

De fato, se o contrário fosse verdade, então teríamos

$$\forall\,(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Longrightarrow B\,(u_n; r_m) \cap F = \emptyset \tag{1.27}$$

Ora, como $u_{n_k} \to u$, tem-se que $\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k > k_0 \Longrightarrow u_{n_k} \in B\left(u; \frac{1}{3m}\right) \Big\backslash \{u\}$$

e além disso

$$u \in B\left(u; \frac{1}{3m}\right) \subseteq B\left(u_{n\ k}; \frac{1}{m}\right)$$

logo

$$B\left(u_{n\ k}; \frac{1}{m}\right) \cap F \neq \emptyset$$

o que contradiz (1.27), quando se toma $n = n_k$ e $r_m = \frac{1}{m}$. Assim, a afirmação 01 é verdadeira. Repare que $X = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um subconjunto enumerável e denso de E, daí $J = X \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para cada par $(u_n; m) \in J$ tal que

$$F \cap B\left(u_{n_k}; \frac{1}{m}\right) \neq \emptyset,$$

usando-se a afirmação 01, pode-se escolher um elemento de $F \cap B\left(u_n; \frac{1}{m}\right)$. Estes elementos assim selecionados formam um subconjunto Y enumerável de F .

Afirmação 02. Y é denso em F .

Seja $u \in F$. Dado $\epsilon > 0$, escolhem-se $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \left(\frac{2}{\epsilon}\right)$ e um elemento $u_{n_k} \in X$ tal que

$$\|u_{n_k} - u\| < \frac{1}{m}.$$

Ora, como

$$u \in B\left(u_{n_k}; \frac{1}{m}\right) \cap F \neq \emptyset$$

podemos dizer pela afirmação 01 que $F \cap B\left(u_n; \frac{1}{m}\right)$ contém um elemento $a_{m,n_k} \in Y$. Logo,

$$\|u_{n_k} - a_{m,n_k}\| \leq \|u_{n_k} - u\| + \|u - a_{m,n_k}\| < \frac{2}{m} < \epsilon$$

Como ϵ foi escolhido arbitrário, isto mostra que Y é denso em F . Logo, a afirmação 02 é verdadeira. Portanto, obtemos que Y é um subconjunto enumerável e denso em F , o que significa (por definição) que F é *separável.*

■

Proposição 1.84 $L^p(\Omega)$ *é separável para* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Veja [9], página 62.

■

Observação 1.85 $L^2(\Omega)$ é separável decorre da proposição anterior quando $p = 2$.

Proposição 1.86 *$W^{m,p}(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Veja [1], página 47.

$\blacksquare$

Observação 1.87 Quando $m = 1$ e $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ é separável como decorrência da proposição anterior. O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em

$$H^1(\Omega) = \left\{ u : D^\alpha u \in \left(L^2(\Omega)\right)^d : \forall \alpha \text{ tal que } [\alpha] \leq 1 \right\} =$$

$$= \left\{ u : \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \exists g_\alpha \in \left(L^2(\Omega)\right)^d, \text{ tal que } \int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi \right\}$$

é denotado por $W_0^{1,2}(\Omega)$ ou por $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$, e sendo $H^1(\Omega)$ separável concluí-se que pela proposição (1.83) que $H_0^1(\Omega)$ também é separável. Além disso, repare que sendo

$$V = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \operatorname{div} u \equiv 0 \right\} \subset H_0^1(\Omega),$$

segue-se pelo mesmo argumento que V é separável.

Teorema 1.88 *(da base). Seja $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ um sistema ortonormal de um espaço E* pré-hilbertiano, *onde A é um conjunto de índices. São equivalentes as propriedades enumeradas a seguir:*

1. *Para todo $x \in E$,temos $x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha$, [isto é,a família $(x_\alpha e_\alpha)_{\alpha \in A}$ é somável tem por soma x].*

2. *Para quaisquer $x, y \in E$, temos $(x|y) = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \overline{y_\alpha}$ (identidade de Parseval).*

3. *Para todo $x \in E$,temos que $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2$ (igualdade de Bessel).*

4. *O conjunto das combinações lineares finitas dos* $e_\alpha, \alpha \in A$,*é denso em* E, *isto é, dados* $x \in E$ *e* $\epsilon > 0$,*existe uma combinação* $\sum_{\alpha \in F} \lambda_\alpha e_\alpha$ *linear finita tal que*

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in F} \lambda_\alpha e_\alpha \right\| < \epsilon.$$

5. *Todo funcional linear contínuo* $f : E \to \mathbb{C}$ *que é nulo sobre todos os* $e_\alpha, \alpha \in A$, *é identicamente nulo.*

Demonstração. (do teorema da base). Veja [23] , página 39.

■

Definição 1.89 (de base de um espaço vetorial). Um conjunto linearmente independentes de vetores com a propriedade de que qualquer vetor pode ser expresso como combinação linear de algum subconjunto é chamado de *base* para o espaço vetorial. (Veja [5], página 4 ; e/ou [11], página 268).

Definição 1.90 (de *base hilbertiana*). Se um sistema $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ortonormal satisfaz as propriedades equivalentes de 1) a 5) do teorema (1.88), dizemos que ele é um sistema ortonormal completo ou uma *base hilbertiana* (ou, simplesmente base – não confundir com "base algébrica"!), de E. (Veja [23] , páginas 38-39).

Observação 1.91 *Assim em outras palavras,* dizemos que uma *base hilbertiana* é qualquer sucessão (e_i) de elementos de E tais que: $(e_i, e_j) = \delta_{ij} =$ (delta de Kronecker) e o espaço vetorial gerado pelos (e_i) seja denso em E . Logo, qualquer $x \in E$ pode ser escrito como

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\, e_n \quad \text{com} \quad |x|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$$

e ser denso em E significa que existe uma seqüência de elementos do subespaço gerado por $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ que converge para x .

Observação 1.92 Uma base algébrica em um espaço vetorial V é um conjunto de vetores $B = \{\ b_i : i \in I\ \}$,(onde I um conjunto de índices), linearmente independentes tais que $span\,(B) = V$ e tais que qualquer vetor $u \in V$ pode ser escrito de modo *único* como uma combinação linear *finita* de elementos de B. (Veja [9], página 86; ou [11], página 256).

Observação 1.93 Note que uma combinação linear é sempre uma soma finita, o que significa que mesmo quando existe um número infinito de vetores na base, nunca poderemos expressar um vetor como soma infinita _ a questão é que as somas infinitas não têm significado a não ser que se introduza a noção de "limite de uma seqüência de vetores". (Repare que, em virtude da definição de combinação linear, na definição de base algébrica não é permitido trabalhar-se com somas infinitas). (Veja [5], página 04; ou [11], páginas 255-256 e 268).

Teorema 1.94 *Sejam A um espaço de Hilbert separável e $T : A \to A$ um operador linear compacto e autoadjunto, então A admite uma base hilbertiana formada por autovetores de T.*

Demonstração. Veja [9], página 97.

■

Observação 1.95 Denotaremos por P a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em H.

Lema 1.96 *O operador*

$$-P\triangle : V \cap H^2(\Omega) \to H$$

define em $V \subset H$ um operador simétrico, definido positivo, com operador inverso $(-P\triangle)^{-1} : H \to H$ compacto.

Demonstração. Veja [2], página 08.

■

Proposição 1.97 *O operador $-P\triangle$ possui uma seqüência de autovalores $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots ; \lambda_i \to \infty$ e as correspondentes autofunções $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ formam um conjunto ortonormal completo em H .*

Demonstração. Veja [2], página 12.

■

Proposição 1.98 *A seqüência das funções* $\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)$ *forma um conjunto ortonormal* completo *em* V*, e para cada* $f \in V$ *a sequência* $(P_i f)$ converge *para* f *em* V*.*

Demonstração. Veja [2], página 14.

■

Observação 1.99 Considerando-se

$$V = \left\{ u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d : \ \text{div} \ u \equiv 0 \right\} \subset \left(H_0^1(\Omega)\right)^d$$

e pela aplicação da proposição (1.83), juntamente com a observação (1.91) pode-se tomar $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ como uma base de V e com a qual se pode construir o subespaço m-dimensional $V_m = [v_1, \ldots, v_m] \subset V$, onde v_i $(i = 1, \ldots, m)$ são as $m's$ primeiras funções da base de V. Se além disso $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ for uma base constituída pelos autovetores do operador $-P\triangle$, (veja proposição (1.98)), então também será a base espectral que é hilbertiana, ortonormal tanto em V quanto em $L^2(\Omega)$ com a devida adaptação tendo em vista as proposições anteriores (1.97) e (1.98). Observe que dado $v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$, o operador definido por

$$P_m : \left(H_0^1(\Omega)\right)^d \to V_m \subset \left(H_0^1(\Omega)\right)^d$$

$$v \longmapsto P_m(v) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$$

é autoadjunto. De fato,

$$\forall u, v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d, \ u = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i v_i \ \ , \text{e} \ \ v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i \ \ , \text{com} \ \ (\alpha_i; \beta_i) \in \mathbb{R}^2$$

tem-se que

$$\langle u; P_m(v) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i v_i; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i; \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i \right\rangle = \langle P_m(u); v \rangle$$

Observação 1.100 Para estudar a existência de solução do problema (1) via método de Faedo-Galerkin, iremos considerar um problema variacional associado e a partir deste, considera-se um problema aproximado ambientado num espaço $m-$dimensional, onde construir-se-ão as soluções aproximadas

$$u_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x)$$

do problema (1) , pertencentes ao subespaço

$$[v_1,\ldots,v_m]=V_m\subset V$$

onde $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset V$ é a base espectral hilbertiana ortonormal *tanto* em V *quanto* em $L^2(\Omega)$ constituída pelos autovetores do operador $-P\triangle$ referido na proposição (1.97). Obtém-se os coeficientes $c_{i,m}(t)$ pela utilização de um teorema de existência de solução para um sistema de equações diferenciais ordinárias, e com isto então a existência de "soluções aproximadas" u_m ; a seguir considerar-se-á a passagem ao limite na dimensão m. Como veremos esta passagem ao limite ocorre no caso não-linear, por isso precisaremos de algumas propriedades de convergência forte de sequência e estas serão obtidas pelos *métodos de compacidade.*

Observação 1.101 (Forma Trilinear b). Na formulação variacional (3.6, página 75) do problema dado em (1, página ix), onde $u\in V$, e com $v,w\in H_0^1(\Omega)$, aparece a seguinte forma trilinear dada por:

$$b(u,v,w)=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}u^i\frac{\partial v^j}{\partial x_i}w^j\,dx \tag{1.28}$$

(conforme [46], páginas 161-162,), para a qual apresentaremos algumas propriedades úteis para estabelecer um teorema de existência de solução.

Lema 1.102 . *Sejam* $d=2,3$ *e* $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ *qualquer conjunto aberto, limitado e regular, e sejam* $u\in V$, $v\in H_0^1(\Omega)$. *Então,* $b(u,v,v)=0$. *Além disso, para* $u\in V$, *e para* $v,w\in H_0^1(\Omega)$, *tem-se que*

$$b(u,v,w)=-b(u,w,v)\,.$$

Demonstração. Seguiremos os passos da demonstração do Lema 1.1 da página 163 da referência [46]. Para mostrar que $b(u,v,v)=0$, basta verificar esta igualdade para $v\in\mathcal{V}$, (pois $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em

$$W^{1,2}(\Omega)=H^1(\Omega),$$

ou seja, o fecho das funções que estão em $C_0^\infty(\Omega)$ e que possuem divergente nulo), e

$$v\in C_0^\infty(\Omega)$$

Ora, usando-se (1.28) tem-se

$$b(u,v,v)=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}u^i\frac{\partial v^j}{\partial x_i}v^j dx=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\frac{1}{2}u^i\frac{\partial\left(v^j\right)^2}{\partial x_i}dx \tag{1.29}$$

e quando tomamos

$$\widehat{w}=\left(0,0,\ldots,\underbrace{\frac{u^i\cdot\left(v^j\right)}{2}}_{i\text{-ésima posição}},0,\ldots,0\right)$$

e se aplicarmos o teorema da divergência (1.75),

$$\int_\Omega \operatorname{div}\widehat{w}dx=\int_{\partial\Omega}\widehat{w}\cdot\overrightarrow{n}dS_x$$

para cada $j=1,\ldots,3$ ter-se-á

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\frac{1}{2}u^i\frac{\partial\left(v^j\right)^2}{\partial x_i}dx=\int_{\partial\Omega}u^i\frac{\left(v^j\right)^2}{2}n^i dS_x=0 \tag{1.30}$$

pois no segundo membro da equação (1.30) tem-se que u^i e v^j anulam-se na fronteira $\partial\Omega$. Por outro lado, no primeiro membro da equação (1.30), usando a regra da derivada de um produto pode-se escrever

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial\left(u^i\right)}{\partial x_i} \cdot \frac{\left(v^j\right)^2}{2} + u^i \cdot \frac{\partial\left(\frac{\left(v^j\right)^2}{2}\right)}{\partial x_i} \right) dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u^i \frac{\left(v^j\right)^2}{2} \right) dx = 0$$

ou seja

$$\int_\Omega u^i \cdot \frac{\partial\left(\frac{\left(v^j\right)^2}{2}\right)}{\partial x_i} dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial\left(u^i\right)}{\partial x_i} \cdot \left(v^j\right)^2 dx$$

para cada $j = 1, \ldots, 3$. Agora, somando-se em i e j , vem:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u^i \cdot \frac{\partial\left(\frac{\left(v^j\right)^2}{2}\right)}{\partial x_i} dx = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial\left(u^i\right)}{\partial x_i} \cdot \left(v^j\right)^2 dx \tag{1.31}$$

a troca de ordem em (1.31) entre os simbolos $\sum$ e $\int$ é possível, pois trata-se de uma soma finita, daí o primeiro membro de (1.31) pode ser escrito como

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u^i \cdot \frac{\partial\left(\frac{\left(v^j\right)^2}{2}\right)}{\partial x_i} dx = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{3} u^i \cdot \frac{\partial\left(\frac{\left(v^j\right)^2}{2}\right)}{\partial x_i} \right] dx \tag{1.32}$$

Logo, considerando-se as equações (1.30) , (1.31) e (1.32), pode-se reescrever a equação (1.29) também como

$$b\left(u, v, v\right) = -\tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \tfrac{\partial\left(u^i\right)}{\partial x_i} \cdot \left(v^j\right)^2 dx = -\tfrac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left(v^j\right)^2 \cdot \tfrac{\partial\left(u^i\right)}{\partial x_i} dx$$

$$b\left(u, v, v\right) = -\frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \left(v^j\right)^2 . \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\left(u^i\right)}{\partial x_i} dx \tag{1.33}$$

ou seja,

$$b\left(u, v, v\right) = -\frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \left(v^j\right)^2 . \underbrace{\operatorname{div} u}_{=0} dx = 0$$

pois $u \in \mathcal{V}$. Portanto,

$$b\left(u, v, v\right) = 0 \tag{1.34}$$

Além disso, considerando a linearidade de b, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= b\left(u, v + w, v + w\right) = b\left(u, v, v + w\right) + b\left(u, w, v + w\right) \\ &= b\left(u, v, v\right) + b\left(u, v, w\right) + b\left(u, w, v\right) + b\left(u, w, w\right) \end{aligned}$$

$$0 = b\left(u, v, v\right) + b\left(u, v, w\right) + b\left(u, w, v\right) + b\left(u, w, w\right)$$

e tendo em vista (1.34), mutatis mutantes, tem-se que $b\left(u, v, v\right) = 0 = b\left(u, w, w\right)$, conseqüentemente

$$b\left(u, v, w\right) = -b\left(u, w, v\right) \tag{1.35}$$

■

Lema 1.103 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ um conjunto aberto, limitado e regular. Sejam*

$$u_m\left(x, t\right) = \sum_{j=1}^{m} c_{j,m}\left(t\right) v_j\left(x\right)$$

tal que $\left(v_i\right)_{i \in \mathbb{N}} \subset V$, onde os coeficientes $c_{j,m}\left(t\right)$, $\left(j = 1, \ldots, m\right)$ são funções reais do tipo $c_{j,m} : \left[0, \tau_m\right[\rightarrow \mathbb{R}$, e

$$n : Q_T = \Omega \times \left(0, T\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma função satisfazendo

$$0 < n_0 \leq n\left(x, t\right) < 1, \forall \left(x, t\right) \in \overline{Q_T}$$

com

$$\nabla n \in L^2\left(0, T, L^\infty\left(\Omega\right)\right).$$

Então,

$$b\left(u_m, \frac{u_m}{n}, \frac{u_m}{n}\right) = 0.$$

Demonstração. Basta verificar que u_m e $\frac{u_m}{n}$ satisfazem às hipóteses do Lema 1.102 anterior. Vamos mostrar que

$$u_m \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d \tag{1.36}$$

Ora, se

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} c_{j,m}(t)\, v_j(x)$$

onde $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset V$, logo

$$u_m \in V \subset \left(H_0^1(\Omega)\right)^d.$$

A prova de

$$\frac{u_m}{n} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d \tag{1.37}$$

segue do fato que

$$u_m \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d \cap L^2(\Omega)$$

e como $n = n(x,t)$ com $0 < n_0 \leq n < 1$ tem-se que

$$\int_\Omega \left\| \frac{u_m}{n} \right\|^2 dx \leq \frac{1}{n_0} \int_\Omega \|u_m\|^2 dx < \infty \Longleftrightarrow \frac{u_m}{n} \in \left(L^2(\Omega)\right)^d$$

E além disto, vale a afirmação:

$$\text{se } n = n(x,t),\ n \in C^1(\Omega) \text{ e } u_m \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d \text{ então } \nabla\left(\frac{u_m}{n}\right) \in \left(L^2(\Omega)\right)^d$$

Ora, se

$$\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right) \in \left(L^2(\Omega)\right)^d \Leftrightarrow \nabla\left(\frac{u_m^i}{n}\right) \in L^2(\Omega)$$

e considerando que

$$\nabla\left(\frac{u_m^i}{n}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_m^i}{n}\right); \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_m^i}{n}\right); \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{u_m^i}{n}\right)\right)$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_m^i}{n}\right) = \frac{\frac{\partial u_m^i}{\partial x_j} n - u_m^i \frac{\partial n}{\partial x_j}}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{\partial u_m^i}{\partial x_j} - \frac{1}{n^2} u_m^i \frac{\partial n}{\partial x_j}$$

para $j = 1, 2, 3$, segue que

$$\nabla\left(\frac{u_m^i}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial u_m^i}{\partial x_1}; \frac{\partial u_m^i}{\partial x_2}; \frac{\partial u_m^i}{\partial x_3}\right) - \frac{u_m^i}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial x_1}; \frac{\partial n}{\partial x_2}; \frac{\partial n}{\partial x_3}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\nabla\left(u_m^i\right) - \frac{u_m^i}{n^2}\nabla n$$

notando-se que

$$\int_\Omega \left\|\nabla\left(\frac{u_m^i}{n}\right)\right\|^2 dx = \int_\Omega \left\|\frac{1}{n}\nabla\left(u_m^i\right) - u_m^i\frac{1}{n^2}\nabla n\right\|^2 dx$$

$$\leq 2\int_\Omega \left\|\frac{1}{n}\nabla\left(u_m^i\right)\right\|^2 dx + 2\int_\Omega \left\|u_m^i\frac{1}{n^2}.\nabla n\right\|^2 dx \leq$$

$$\leq 2\int_\Omega \frac{1}{\left(n_0\right)^2}.\left\|\nabla\left(u_m^i\right)\right\|^2 dx + 2\int_\Omega \frac{1}{\left(n_0\right)^4}.\left\|u_m^i.\nabla n\right\|^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{2}{\left(n_0\right)^2}\cdot\int_\Omega \left\|\nabla\left(u_m^i\right)\right\|^2 dx + \frac{2}{\left(n_0\right)^4}\cdot\int_\Omega \left|u_m^i\right|^2 dx.\int_\Omega \left|\nabla n\right|^2 dx$$

e como

$$\frac{2}{\left(n_0\right)^2}.\left\|\nabla\left(u_m^i\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\left(n_0\right)^4}\cdot\left\|u_m^i\right\|_{L^2(\Omega)}^2\cdot\left\|\nabla\left(n\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 < \infty$$

tem-se que

$$\nabla\left(\frac{u_m^i}{n}\right) \in L^2\left(\Omega\right)$$

para $j = 1, 2, 3$ ou seja

$$\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right) \in \left(L^2\left(\Omega\right)\right)^d$$

por conseguinte

$$\frac{u_m}{n} \in \left(W^{1,2}\left(\Omega\right)\right)^d = \left(H^1\left(\Omega\right)\right)^d$$

Agora, repare que a porosidade $n\left(x,t\right)$ do meio poroso granular satisfaz

$$0 < n_0 \leq n\left(x,t\right) < 1, \forall\left(x,t\right) \in \overline{Q_T}$$

e como

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x)$$

onde $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ é tal que

$$v_i(x)|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \;\; u_m(x,t)|_{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\cdot 0 = 0$$

logo

$$\left.\frac{u_m(x,t)}{n(x,t)}\right|_{\partial\Omega} = \frac{u_m(x,t)|_{\partial\Omega}}{n(x,t)|_{\partial\Omega}} = 0$$

portanto

$$\frac{u_m}{n} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d, \forall t \in [0,T[$$

Consequentemente isto mostra que $u = u_m \in V$, e $v = \frac{u_m}{n} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d$, o que permite chegar ao resultado desejado aplicando-se o Lema 1.102 anterior.

■

Observações.

(i) $C_0^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto, isto é,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega)\,; \exists K_f \subset \Omega \text{ tal que } K_f = supp(f)\ \}$$

(ii) Considerando-se que $(H^1(\Omega), d)$ é um espaço métrico não vazio, o fecho do conjunto $C_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$ é o conjunto $\overline{X} = H_0^1(\Omega)$ das funções de $M = H^1(\Omega)$ que são "aderentes" a $X = C_0^\infty(\Omega)$, isto é,

$$f \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \iff \quad \forall\epsilon > 0,\; B(f;\epsilon) \cap C_0^\infty(\Omega) \neq \emptyset.$$

(iii) Seja (M,d) um espaço métrico não vazio. O fecho de um conjunto $X \subset M$ em M é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos de M que são aderentes a X , isto é,

$$a \in \overline{X} \subset M \iff \forall\epsilon > 0, B(a;\epsilon) \cap X \neq \emptyset$$

(iv) $\overline{X} = W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $X = C_0^{\infty}(\Omega)$ em $M = W^{m,p}(\Omega)$. Em particular, $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ quando $p = 2$.

Teorema 1.104 *.(Carathéodory). Seja f definida numa vizinhança*

$$R = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1};\ |x-\xi| \leq \alpha\ ,\ |t-\tau| \leq \beta\right\}$$

de um ponto fixo $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $(d = 2, 3\ )$, com α e β números reais positivos. Suponha que f é mensurável em t para cada x fixado, contínua em x para cada t fixado. Se existir uma função m integrável à Lebesgue no intervalo $|t-\tau| \leq \beta$ tal que

$$|f(x,t)| \leq m(t), (x,t) \in R$$

Então existe uma solução φ da equação dada por

$$x' = f(x,t)$$

a menos de um conjunto de medida nula em algum intervalo$|t-\tau| \leq \widehat{\beta}$, $\left(\widehat{\beta} > 0\right)$, satisfazendo $\varphi(\tau) = \xi$.

Demonstração. Ver [13], página 43, teorema 1.1 do capítulo 2.

■

Lema 1.105 *(Gronwall). Seja $f(t)$ uma função absolutamente contínua, não negativa em $[0,T]$,que satisfaz, para quase todo t, a seguinte desigualdade diferencial*

$$f^{'}(t) \leq \phi(t) . f(t) + \psi(t)$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções integráveis, não negativas em $[0,T]$. Então:

$$f(t) \leq \exp\left(\int_0^t \phi(s)\, ds\right)\left[f(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds\right]$$

para todo $0 \leq t \leq T$. E, em particular, se

$$f'(t) \leq \phi(t) . f(t) \quad e \quad f(0) = 0$$

então $f(t) = 0$, $\forall t \in [0,T]$.

Demonstração. Veja [16], páginas 556-557.

$\blacksquare$

Uma generalização do resultado acima é o seguinte lema, onde uma versão pode ser encontrada em [21], na página 656.

Lema 1.106 *(Gronwall_3) Sejam $\Phi(t), \Psi(t)$, e $f(t)$ funções reais suaves não negativas, definidas para todo $t \in [0,T]$ onde $T \geq 0$. Suponhamos que $M > 0$, e que*

$$\begin{cases} \Phi'(t) + \Psi(t) \leq \widehat{g}(\Phi(t), t) + f(t), & \text{para } t \in [0,T] \\ \Phi(0) = \Phi_o \end{cases} \tag{1.38}$$

com

$$\begin{aligned} \widehat{g} : [0,M] \times [0,T] &\to \mathbb{R} \\ (\xi, t) &\longmapsto \widehat{g}(\xi, t) \end{aligned}$$

é uma função contínua e não negativa satisfazendo

$$|\widehat{g}(\xi_1, t) - \widehat{g}(\xi_2, t)| \leq C(t) \cdot |\xi_1 - \xi_2| \quad e \quad \widehat{g}(0,t) = 0 \tag{1.39}$$

onde $C(t)$ é uma funçao não negativa satisfazendo

$$\int_0^T C(t)\, dt < \infty \ .$$

Então vale

$$\Phi(t) \leq F(t) = \left[\exp\left(\int_0^t C(r)\, dr\right)\right] \cdot \left[\Phi(0) + \int_0^t f(s)\, ds\right] \tag{1.40}$$

para $t \in [0,T]$. Além disso também, se $\widehat{g}$ for não decrescente na primeira variável, então

$$\int_0^t \Psi(s) ds \leq \widetilde{F}(t) \tag{1.41}$$

onde

$$\widetilde{F}(t) = \Phi_o + \int_0^t \left[\widehat{g}(F(s), s) + f(s)\right] ds \tag{1.42}$$

Demonstração. Como Ψ é uma função não negativa, da primeira equação de (1.38) vem:

$$\Phi'(t) \leq \widehat{g}(\Phi(t), t) + f(t) \tag{1.43}$$

Considerando-se que o conjunto $supp(\Phi)$ é mensurável pois é um conjunto fechado (conforme [44], página 59, teorema 12), observe que para $r, s \in supp(\Phi)$ tem-se que

$$\frac{d}{ds}\left(\Phi(s)\exp\left(-\int_0^s \frac{\widehat{g}(\Phi(r), r)}{\Phi(r)}dr\right)\right) =$$

$$= \Phi^{'}(s)\exp\left(-\int_0^s \frac{\widehat{g}(\Phi(r), r)}{\Phi(r)}dr\right) + \Phi(s)\frac{d}{ds}\left[\exp\left(-\int_0^s \frac{\widehat{g}(\Phi(r), r)}{\Phi(r)}dr\right)\right]$$

mas como

$$\tfrac{d}{ds}\left(\exp\left(-\int_0^s \tfrac{\widehat{g}(\Phi(r),r)}{\Phi(r)}dr\right)\right) = \exp\left(-\int_0^s \tfrac{\widehat{g}(\Phi(r),r)}{\Phi(r)}dr\right)\tfrac{d}{ds}\left(-\int_0^s \tfrac{\widehat{g}(\Phi(r),r)}{\Phi(r)}dr\right)$$

onde

$$-\frac{\widehat{g}(\Phi(s), s)}{\Phi(s)} = \frac{d}{ds}\left(-\int_0^s \frac{\widehat{g}(\Phi(r), r)}{\Phi(r)}dr\right)$$

daí

$$\frac{d}{ds}\left(\Phi(s)\exp\left(-\int_0^s \frac{\widehat{g}(\Phi(r), r)}{\Phi(r)}dr\right)\right) =$$

$$= \Phi^{'}(s)\exp\left(-\int_0^s \frac{\widehat{g}(\Phi(r), r)}{\Phi(r)}dr\right) + \Phi(s)\left(-\frac{\widehat{g}(\Phi(s), s)}{\Phi(s)}\right)\exp\left(-\int_0^s \frac{\widehat{g}(\Phi(r), r)}{\Phi(r)}dr\right)$$

ou seja

$$\tfrac{d}{ds}\left(\Phi(s)\exp\left(-\int_0^s \tfrac{\widehat{g}(\Phi(r),r)}{\Phi(r)}dr\right)\right) = \left(\Phi'(s) - \widehat{g}(\Phi(s), s)\right)\exp\left(-\int_0^s \tfrac{\widehat{g}(\Phi(r),r)}{\Phi(r)}dr\right) \tag{1.44}$$

a inequação (1.43) permite dizer que

$$\Phi'(s) - \widehat{g}(\Phi(s), s) \leq f(s) \tag{1.45}$$

assim considerando-se (1.45), a partir de (1.44) obtemos a seguinte inequação

$$\frac{d}{ds}\left(\Phi(s)\exp\left(-\int_0^s \frac{\widehat{g}(\Phi(r), r)}{\Phi(r)}dr\right)\right) \leq f(s)\exp\left(-\int_0^s \frac{\widehat{g}(\Phi(r), r)}{\Phi(r)}dr\right) \tag{1.46}$$

que ao se integrar de 0 até t , vem:

$$\begin{aligned}\Phi(t)\exp\left(-\int_0^t \tfrac{\widehat{g}(\Phi(r),r)}{\Phi(r)}dr\right)-\Phi(0)&\leq\\ \leq\int_0^t\left(f(s)\exp\left(-\int_0^s \tfrac{\widehat{g}(\Phi(r),r)}{\Phi(r)}dr\right)\right)ds&\\ \leq\int_0^t f(s)\,ds&\end{aligned}$$

ou seja

$$\Phi(t)\exp\left(-\int_0^t \frac{\widehat{g}(\Phi(r),r)}{\Phi(r)}dr\right)\leq\Phi(0)+\int_0^t f(s)\,ds$$

o que equivale a

$$\Phi(t)\leq\exp\left(\int_0^t \frac{\widehat{g}(\Phi(r),r)}{\Phi(r)}dr\right)\left(\Phi(0)+\int_0^t f(s)\,ds\right)\tag{1.47}$$

Lembrando-se que conforme hipótese (1.39) tem-se que $\widehat{g}=\widehat{g}(\xi,t)$ é uma função lipschitziana na variável ξ para t fixado, assim considerando-se $\xi_1>0$ e fazendo-se $\xi_2=0$, teremos

$$\frac{|\widehat{g}(\xi_1,t)|}{\xi_1}\leq C(t)$$

porém sendo $\widehat{g}$ não negativa , isto equivale dizer

$$\frac{\widehat{g}(\xi_1,t)}{\xi_1}\leq C(t)\tag{1.48}$$

Substituindo-se (1.48) em (1.47) para majorar, tem-se que

$$\Phi(t)\leq F(t)=\exp\left(\int_0^t C(r)dr\right)\cdot\left(\Phi(0)+\int_0^t f(s)\,ds\right)\tag{1.49}$$

donde

$$\Phi(t)\leq\exp\left(\|C\|_{L^1(0,T)}\right)\left(\Phi(0)+\|f\|_{L^1(0,T)}\right)\tag{1.50}$$

para $t\in supp(\Phi)$. Repare que para $t\notin supp(\Phi)$, isto é, quando t é tal que $\Phi(t)=0$ a inequação (1.50) também vale. E além disso, se $\widehat{g}$ for não-decrescente na primeira variável, visto que por (1.49) tem-se que

$$\Phi\left(t\right) \leq F(t) \Rightarrow \widehat{g}\left(\Phi\left(t\right),t\right) \leq \widehat{g}\left(F(t),t\right) \tag{1.51}$$

e observando-se (1.38) e (1.51) pode-se escrever

$$\Phi'\left(t\right) + \Psi\left(t\right) \leq \widehat{g}\left(\Phi\left(t\right),t\right) + f\left(t\right) \leq \widehat{g}\left(F(t),t\right) + f\left(t\right) \tag{1.52}$$

e ao integrar-se a desigualdade dada em (1.52) tem-se

$$\int_0^t \Phi'\left(s\right) ds + \int_0^t \Psi\left(s\right) ds \leq$$

$$\leq \int_0^t \widehat{g}\left(\Phi(s),s\right) ds + \int_0^t f\left(s\right) ds \leq \int_0^t \widehat{g}\left(F(s),s\right) ds + \int_0^t f\left(s\right) ds$$

e como $\Phi\left(t\right)$ e $\Psi\left(t\right)$ são não-negativas, e valendo a hipótese (1.51) vem:

$$\Phi\left(t\right) - \Phi\left(0\right) + \int_0^t \Psi\left(s\right) ds \leq \int_0^t \widehat{g}\left(F(s),s\right) ds + \int_0^t f\left(s\right) ds$$

além disso também

$$\int_0^t \Psi\left(s\right) ds \leq$$

$$\leq \Phi\left(t\right) + \int_0^t \Psi\left(s\right) ds \leq \Phi\left(0\right) + \int_0^t \widehat{g}\left(F(s),s\right) ds + \int_0^t f\left(s\right) ds$$

tem-se

$$\int_0^t \Psi\left(s\right) ds \leq \widetilde{F}(t) \tag{1.53}$$

$\forall t \in [0,T]$, onde

$$\widetilde{F}(t) = \Phi\left(0\right) + \int_0^t \widehat{g}\left(F(s),s\right) ds + \int_0^t f\left(s\right) ds \tag{1.54}$$

■

Capítulo 2

Equações de Fluido Aplicadas em Meios Porosos

2.1 Introdução

Neste capítulo introduz-se alguns tópicos padrões da mecânica dos fluidos. Os fenômenos relacionados às partículas refletem-se nas propriedades observáveis e mensuráveis da matéria graças ao emaranhamento que ocorre entre os níveis microscópicos e macroscópicos.

Interessa-nos discutir a existência de soluções do sistema

$$\begin{cases} \rho u_t + \rho u \cdot \nabla \left(\dfrac{u}{n}\right) - \mu \Delta u + n \nabla p + \mu F(n)\, u = \rho n g \quad \text{em } Q_{T,} \\ div\ u = 0 \quad \text{em } Q_{T,} \\ u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad \forall x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 \quad , \quad \forall t \in (0,T) \quad , \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

na situação na qual a porosidade do meio granular é conhecida a priori, assim iremos apenas fazer um esboço das idéias físicas subjacentes para obter o modelo descrito em (2.1).

Por meio poroso entenderemos como sendo um material consistindo de uma matriz sólida com vazios interconectados. A matriz sólida pode ser rígida ou sofrer pequenas deformações. A interconexão dos vazios (poros) permite o fluxo de um ou mais fluidos através do material. Na situação mais simples (com uma única fase fluida) os vazios estão saturados só por um fluido. No fluxo de duas fases, um líquido e um gás compartilham o mesmo espaço vazio.

Num meio poroso natural a distribuição dos poros em relação à forma e ao tamanho é irregular. Exemplos de meios naturais são praias de areia, arenitos, calcários, pão de centeio, madeiras, e o pulmão humano. Na escala dos poros (isto é, na escala microscópica) as quantidades de escoamento (velocidade, pressão, etc) são evidentemente irregulares. Mas em experimentos típicos, as quantidades de interesse são medidas através de áreas que atravessam muitos poros, e tais quantidades (macroscópicas) espacialmente avaliadas variam de uma maneira regular em relação ao espaço e ao tempo, daí serem acessíveis para o tratamento teórico.

A abordagem será feita segundo a hipótese do meio contínuo físico, assim o meio poroso real multifásico é substituído por um meio contínuo fictício: uma substância sem estrutura, no qual a qualquer ponto pode-se associar variáveis cinemáticas, dinâmicas e parâmetros que são funções contínuas das coordenadas espaciais do ponto e do tempo. Na mecânica do contínuo supõe-se que se pode associar uma partícula de matéria a cada ponto da região do espaço ocupada pelo corpo, e associar quantidades de campo tais como densidade, velocidade, e etc, a estas partículas. Justifica-se este procedimento porque estende até certo grau as teorias da mecânica estatística dos gases, líquidos e sólidos, mas principalmente por depender do seu sucesso em descrever e prever o comportamento mecânico do material como um todo. (Cfe [45], página 02).

Tratar de escoamento através de uma estrutura porosa é essencialmente uma questão de distância – a distância entre processo solucionador do problema e a estrutura real do escoamento. Quando a distância é pequena, o observador apenas vê um ou dois canais, ou uma ou duas cavidades abertas ou fechadas. Neste caso é possível usar a mecânica dos fluidos convencional para descrever o que ocorre num ponto qualquer do espaço ocupado pelo fluido ou pelo sólido. Quando a distância é grande tal que existem muitos canais e cavidades no campo de visão da solução do problema, as complexidades dos caminhos do escoamento fogem da abordagem convencional. Neste limite, as medidas globais e médias volumétricas (por exemplo, permeabilidade, condutividade, etc.) são úteis para descrever o escoamento e simplificar sua descrição. Como os engenheiros tentam modelar os meios porosos na escala decrescente dos poros, o problema tende a ficar entre os extremos considerados acima. Nesta faixa intermediária, o desafio não é apenas descrever rigorosamente a estrutura dos poros mas também otimizar os elementos de escoamento que os compõem. As estruturas de escoamento resultantes são os meios porosos projetados.

A maneira usual para deduzir as leis que governam as variáveis macroscópicas é começar com as equações padrões obedecidas pelos fluidos e obter as equações macroscópicas avaliando-se estas variáveis através de médias sobre os volumes e áreas contidos nos muitos caminhos formados pelos poros. Há dois modos de se calcular a média: o estatístico e o espacial. Na abordagem espacial a variável macroscópica define-se como uma média adequada sobre um volume elementar representativo (VER) suficientemente grande. Esta operação produz o valor daquela variável no centróide do VER. Admite-se que o resultado independe do tamanho do VER. A escala do comprimento do VER é muito maior do que a escala dos poros, mas consideravelmente menor do que a escala de comprimento aplicada ao domínio do escoamento macroscópico. Na abordagem estatística a média é tomada sobre um conjunto de possíveis estruturas porosas que sejam macroscopicamente equivalentes. Uma dificuldade que surge é que normalmente a informação estatística sobre o conjunto tem que ser baseada num único exemplo, e isto só é possível se admitirmos que há homogeneidade estatística.

Se estivermos interessados apenas em deduzir as relações existentes entre as quantidades médias espaciais, e não em suas flutuações, os resultados obtidos usando-se qualquer uma dessas abordagens serão os mesmos. Logo, nesta situação, pode-se bem usar a abordagem mais simples, a saber, a baseada sobre os VER.

As variáveis e parâmetros do contínuo fictício, avaliados sobre um VER, permitem descrever o fluxo, e outros fenômenos dentro de um domínio do meio poroso, através de equações diferenciais parciais. Tais equações descrevem o que acontece em cada ponto no espaço físico e a cada instante físico de tempo.(Cfe [6], páginas 24-25).

Observação 2.1 Numa camada porosa, um canal ou tubo com paredes rígidas impermeáveis geralmente tem um aumento da porosidade à medida que se próxima das paredes, porque as partículas sólidas são incapazes de se acomodar eficientemente como em qualquer outro lugar diferente por causa da presença das paredes. Experimentos mostram que a porosidade é uma função oscilante amortecida da distância às paredes, variando de um valor próximo da unidade na parede para um valor maior que zero no interior do núcleo distante cinco diâmetros das paredes. Como conseqüência a velocidade do escoamento paralelo à parede cresce á medida que se aproxima da parede, atingindo um valor máximo antes da parede para então se reduzir a zero (para satisfazer à condição de não deslizamento).

2.2 Conceitos Básicos

2.2.1 Sobre a Descrição do Movimento do Fluido

Dado um sistema retangular de coordenadas cartesianas com origem O e uma base de vetores $\widehat{e_i}$, todos movimentos serão movimentos relativos a este sistema fixo de referência, a menos que se estabeleça diferente. O tempo é medido a partir do tempo de referência fixado $t = 0$. Supõe-se que em $t = 0$ uma região fixada do espaço $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3$, que pode ser finita ou infinita em extensão, é ocupada por matéria continuamente distribuída; isto é, supõe-se que cada ponto $X = (X^1, X^2, X^3) \in \Omega_0$ é ocupado por uma partícula de matéria. O material dentro de Ω_0 forma um corpo que é denotado por $\mathcal{B}$. Assim, em outras palavras, diz-se que o vetor-posição X, relativo a O, é um rótulo de um ponto típico de Ω_0. Então as componentes X^i de X, no sistema de coordenadas escolhido, são as coordenadas da posição ocupada por uma partícula de $\mathcal{B}$ em $t = 0$. Cada ponto da região Ω_0 corresponde a uma partícula do corpo $\mathcal{B}$, e $\mathcal{B}$ é o conjunto de todas estas partículas. O conjunto das posições das partículas de $\mathcal{B}$ num dado tempo t específico é o que se chama de uma configuração de $\mathcal{B}$. A configuração de $\mathcal{B}$ no tempo de referência $t = 0$, é o que se chama de configuração de referência, enquanto que sua configuração no tempo t é a sua configuração atual em t.

O conjunto de coordenadas (X^1, X^2, X^3) ou, o vetor posição X, referido a eixos cartesianos fixos, de um ponto de Ω_0 determina univocamente uma partícula do corpo $\mathcal{B}$ e o próprio ponto X pode ser considerado como um rótulo pelo qual a partícula pode ser identificada a qualquer instante de tempo. Frequentemente nos referiremos a esta partícula como sendo a partícula X. Ao se escolher Ω_t , não se está restringindo-se apenas a esta configuração ocupada pelo corpo no seu atual movimento, embora muitas vezes seja conveniente tomar Ω_t para ser a configuração ocupada pelo corpo em algum instante que se toma como a origem da escala dos tempos. As coordenadas X^i servem como rótulos dos parâmetros identificadores das partículas de $\mathcal{B}$ a qualquer tempo; daí, uma partícula específica manterá sempre os mesmos valores de X^i por todo o movimento. Por outro lado as coordenadas x^i identificam pontos do espaço que em geral serão ocupados por partículas distintas em diferentes tempos.

Definição 2.2 Seja uma porção de fluido (líquido ou gás) que, no instante $t = 0$, ocupa uma região do espaço $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3$. Abstratamente uma configuração de referência é o fecho de um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira secionalmente regular. Uma configuração de Ω_0 é uma aplicação $\phi : \Omega_0 \to \mathbb{R}^3$ que é suficientemente regular, preserva a orientação, e é invertível. Os pontos denotados por $X = (X^1, X^2, X^3) \in \Omega_0$ são chamados de pontos materiais, enquanto que os pontos em $\mathbb{R}^3$ denotados por $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ são chamados de pontos espaciais. Diz-se que $x = \phi(X)$.

Observação 2.3 Supõe-se que o material que ocupa a região Ω_0 em $t = 0$ move-se de tal modo que num tempo subsequente t ocupará uma nova região Ω_t do espaço $\mathbb{R}^3$, e que o material estará também continuamente distribuído em Ω_t. Isto é o que chama de um movimento do corpo $\mathcal{B}$, representado por uma família de configurações dependente do tempo, descrita como $x = \phi(X, t)$. Este é um aspecto essencial da mecânica dos fluidos, onde se supõe que se pode identificar partículas individuais do corpo $\mathcal{B}$, isto é, admite-se que se pode identificar um ponto de Ω_t (denotado aqui por x) pelo seu vetor-posição x, que está ocupado pela partícula que estava em $X \in \Omega_0$ no instante inicial $t = 0$. Daí o movimento de $\mathcal{B}$ pode ser descrito especificando a dependência das posições x das partículas de $\mathcal{B}$ no tempo t em relação às suas posições $X \in \Omega_0$ no tempo $t = 0$, isto é, por equações da forma

$$x = \phi(X, t) \quad , \forall \ X \in \Omega_0 \quad \text{e} \quad \text{com} \quad x \in \Omega_t \tag{2.2}$$

para todo $X \in \Omega_0$, com $x \in \Omega_t$. Além disso, admite-se que as funções

$$\phi^i \left(X^1, X^2, X^3, t\right)$$

são diferenciáveis em relação a X^1, X^2, X^3 , e a t tantas vezes quantas forem necessárias. Às vezes considera-se apenas duas configurações do corpo $\mathcal{B}$, uma configuração inicial e uma configuração final. Em particular, a aplicação da configuração inicial para a final é chamada de uma deformação do corpo $\mathcal{B}$. Admite-se que o jacobiano

$$J = \det\left(\partial\phi^i/\partial X^j\right)\ ,\ i,j = 1,2,3 \tag{2.3}$$

existe em cada ponto de Ω_t , e que

$$J > 0 \tag{2.4}$$

O significado físico destas hipóteses é que o material do corpo não pode autopenetrar-se, e que o material que ocupa um volume finito não nulo em Ω_t não pode ser comprimido para se reduzir a um ponto ou expandido para um volume infinito durante o movimento. A hipótese (2.4) implica que (2.2) tem inversa única que fornece a posição inicial da partícula ou as coordenadas materiais da partícula que agora está numa posição x qualquer e no instante de tempo t, isto é,

$$X = \phi^{-1}(x,t) \tag{2.5}$$

A posição de uma partícula típica P, no instante atual t, é dada por suas coordenadas cartesianas (x_P^1, x_P^2, x_P^3), mas, conforme exposto acima, P continua ser identificada também pelas coordenadas (X_P^1, X_P^2, X_P^3) que indicavam sua posição em Ω_0 . As coordenadas (X_P^1, X_P^2, X_P^3) são conhecidas como coordenadas materiais (ou lagrangeanas), pois conjuntos distintos destas coordenadas referem-se a partículas materiais distintas. As coordenadas (x_P^1, x_P^2, x_P^3) são conhecidas como coordenadas espaciais (ou eulerianas), desde que conjuntos distintos destas indicam pontos distintos do espaço. Os valores de x fornecidos pela equação (2.2) para um valor de X fixado são aqueles pontos do espaço que a partícula ocupou durante o movimento. Reciprocamente, os valores de fornecidos pela equação (2.5) para um valor de x fixado identificam quais as partículas que estão passando através do ponto x durante o movimento.

Suponha-se que alguma quantidade q varia ao longo de cada ponto de um corpo $\mathcal{B}$, no espaço e a cada instante de tempo. Daí, pode-se dizer que a quantidade q é uma função ou de t e de suas coordenadas materiais X^i ou de t e de suas coordenadas espaciais x^i. Logo

$$q = \Psi(X,t) = \psi(x,t) \tag{2.6}$$

Se X^i e t são consideradas como variáveis independentes então (a função) Ψ é dita ser uma descrição material desta quantidade q ; e se x^i e t são usadas então (a função) ψ correspondente é dita ser uma descrição espacial de q. Cada uma destas descrições pode ser facilmente transformada noutra usando-se (2.2)ou (2.5). A descrição material $\Psi(X,t)$ tem uma correspondente descrição espacial $\psi(x,t)$ relacionada por

$$\Psi\left(\phi^{-1}(x,t),t\right) = \psi(x,t) \tag{2.7}$$

ou

$$\psi(\phi(X,t),t) = \Psi(X,t) \tag{2.8}$$

pois usando-se as equações (2.5) e (2.6) vem

$$\Psi\left(\phi^{-1}(x,t),t\right) = \Psi(X,t) = \psi(x,t)$$

e analogamente com as equações (2.2) e (2.6) tem-se

$$\psi(\phi(X,t),t) = \psi(x,t) = \Psi(X,t)$$

Observação 2.4 Quando para cada $a \in \Omega_0$ tem-se uma curva $t \longmapsto \phi(a,t)$ que descreve a trajetória da partícula que ocupa a posição a no instante $t = 0$, isto é o que se chama de descrição lagrangeana do movimento. E, assim se pode dar a velocidade do ponto material X que ocupa a posição x no instante t, definida por

$$V(X,t) = (\partial/\partial t)\,\phi(X,t) \tag{2.9}$$

e associá-la com um vetor que se emana a partir do ponto $x = \phi(X,t)$.

Observação 2.5 Quando a velocidade é vista como uma função de (x,t), denotada por $v(x,t)$, é chamada de velocidade espacial. Isto é o que se chama de descrição euleriana do movimento.

Observação 2.6 A velocidade de uma partícula que se registra para cada ponto de um corpo $\mathcal{B}$, ao longo do espaço e a cada instante de tempo pode ser uma função ou de t e de suas coordenadas materiais X^i ou também de t e de suas coordenadas espaciais x^i. Portanto, a velocidade de uma partícula específica ao ser avaliada num mesmo instante de tempo t seja pela descrição material V, seja pela descrição euleriana v do movimento, satisfaz

$$V\left(X,t\right)=v\left(x,t\right) \quad \text{, onde} \quad x=\phi\left(X,t\right) \tag{2.10}$$

Se ϕ tem componentes $\phi_1,\phi_2,$ e ϕ_3 , isto é, quando

$$\phi\left(X,t\right)=\left(\phi_1\left(X,t\right),\phi_2\left(X,t\right),\phi_3\left(X,t\right)\right)$$

e como

$$V\left(X,t\right)=\left(V_1\left(X,t\right),V_2\left(X,t\right),V_3\left(X,t\right)\right)$$

então $V=\left(V_1,V_2,V_3\right)$, onde

$$V_i=\partial\phi_i/\partial t$$

para $(i=1,2,3)$. Note que a relação

$$v\left(\phi\left(a,t\right),t\right)=\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(a,t\right) \quad , a\in\Omega_0 \tag{2.11}$$

é imediata, pois pelas definições acima tem-se que

$$v\left(\phi\left(a,t\right),t\right)=V\left(a,t\right)=\left(\partial/\partial t\right)\phi\left(a,t\right)$$

Observação 2.7 (Aceleração e Derivadas Materiais). A aceleração material de um movimento $\phi\left(X,t\right)$ é definida por

$$A(X,t)=\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\left(X,t\right)=\frac{\partial V}{\partial t}\left(X,t\right) \tag{2.12}$$

e como $V\left(X,t\right)=v\left(x,t\right)=v\left(\phi\left(X,t\right),t\right)$, onde $x=\phi\left(X,t\right)$, então pela regra da cadeia vem

$$\frac{\partial V}{\partial t}\left(X,t\right)=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v\left(\phi\left(X,t\right),t\right)}{\partial\phi_j}\frac{\partial\phi_j}{\partial t}\left(X,t\right)+\frac{\partial v\left(\phi\left(X,t\right),t\right)}{\partial t}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v\,(x,t)}{\partial \phi_j} V_j\,(X,t) + \frac{\partial v\,(x,t)}{\partial t}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot v_j\,(x,t) + \frac{\partial v\,(x,t)}{\partial t}$$

logo

$$\frac{\partial V}{\partial t}\,(X,t) = \frac{\partial v}{\partial t}\,(x,t) + \sum_{j=1}^{3} v_j\,(x,t)\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,(x,t)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla_x v, \tag{2.13}$$

isto é,

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j.\frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Daí, de modo geral, se $Q\,(X,t)$ é uma quantidade material função de (X,t) e $q\,(x,t)$ é a mesma quantidade material só que agora expressa como uma função de (x,t) , então a regra da cadeia fornece o que se chama de derivada material, a saber

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} + v \cdot \nabla q \quad , \text{ isto é } \frac{\partial Q_i}{\partial t} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + v_j.\frac{\partial q_i}{\partial x_j} \tag{2.14}$$

onde o operador ∇ é definido relativo às coordenadas espaciais x_i isto é

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

e o ponto "$\cdot$" indicado no termo $v \cdot \nabla q$ representa um operador cujos argumentos são v e ∇q . A segunda forma apresentada em (2.14) acima, é a da notação indicial. O segundo membro da equação em (2.14) é o que se chama de derivada material de q e é denotada por Dq/Dt para indicar a taxa de variação de q quando se segue uma dada partícula. Assim

$$Dq/Dt = \overset{\bullet}{q}$$

é a derivada de q com respeito a t, mantendo-se X fixo, enquanto que $\partial q/\partial t$ é a derivada de q em relação a t mantendo-se x fixo, ou seja a derivada material leva em conta que o fluído move-se e que as posições das partículas do fluído variam com o tempo. Em particular, a aceleração é dada por

$$\overset{\bullet}{v} = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} \; .$$

Além disso, é da equação (2.14) que também se motiva a notação para o operador de convecção

$$[v \cdot \nabla q]^i = [(v \cdot \nabla)\, q]^i = \sum_{j=1}^{3} v_j \cdot \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \tag{2.15}$$

usada na dedução da equação de Navier-Stokes dada em (2.23), e análoga à citada em (3), (conforme [3], páginas de 1 a 6).

2.2.2 Particularidades da notação

Observação 2.8 (Comentário 1 sobre a notação). A aplicação do operador ∇ no termo w quando $w^j : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se faz por analogia ao que se faz quando se considera cada componente w^j na expressão

$$w = \left(w^1, w^2, w^3\right) = \sum_{j=1}^{3} w^j \widehat{e}_j$$

onde $\{\widehat{e}_k\}_{k=1,2,3}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$, pois se operarmos formalmente sem(ou antes de) dar significado "vetorial"aos termos ∇w^j , então pela linearidade do operador ∇ tem-se

$$\nabla w = \nabla\left(w^1, w^2, w^3\right) = \nabla\left(\sum_{j=1}^{3} w^j \widehat{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{3} \nabla w^j \widehat{e}_j = \left(\nabla w^1, \nabla w^2, \nabla w^3\right) \tag{2.16}$$

Observação 2.9 (Comentário 2 sobre a notação). O produto interno em $L^2(\Omega)$, dado por $(\nabla w_1, \nabla w_2)$ onde cada componente

$$w_q^j : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \;\; \text{de} \quad w_q = \left(w_q^1, w_q^2, w_q^3\right) = w_q^1 \widehat{e}_1 + w_q^2 \widehat{e}_2 + w_q^3 \widehat{e}_3 \;\; , \;\; q = 1, 2$$

com $\{\widehat{e}_k\}_{k=1,2,3}$ sendo a base canônica do $\mathbb{R}^3$, será considerado tal que

$$\nabla w_q = \nabla\left(w_q^1, w_q^2, w_q^3\right) = \nabla\left(\sum_{j=1}^{3} w_q^j \widehat{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{3} \nabla w_q^j \widehat{e}_j = \left(\nabla w_q^1, \nabla w_q^2, \nabla w_q^3\right)$$

assim

$$(\nabla w_1, \nabla w_2) = \sum_{j=1}^{3}\left(\int_{\Omega}\left(\nabla w_1^j,\ \nabla w_2^j\right) dx\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\nabla w_1^j, \nabla w_2^j\right) \tag{2.17}$$

onde no último termo acima (,) indica o produto interno em $L^2(\Omega)$.

Observação 2.10 (Comentário 3 sobre a notação). A aplicação do operador $w_1 \cdot \nabla$ no termo $w_1 \cdot \nabla w_2$ se faz considerando cada componente de

$$w_q = \left(w_q^1, w_q^2, w_q^3\right) = w_q^1 \widehat{e}_1 + w_q^2 \widehat{e}_2 + w_q^3 \widehat{e}_3 \quad , \quad q = 1, 2$$

onde $\{\widehat{e}_k\}_{k=1,2,3}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Ao aplicarmos este operador formalmente (isto é, visando-se prioritariamente à forma sem importar-se com o significado do seu conteúdo) nota-se que usando-se (2.16) tem-se

$$\begin{aligned} \nabla w_2 &= \nabla\left(w_2^1, w_2^2, w_2^3\right) = \nabla\left(w_2^1 \widehat{e}_1 + w_2^2 \widehat{e}_2 + w_2^3 \widehat{e}_3\right) \\ &= \left(\nabla w_2^1,\ \nabla w_2^2,\ \nabla w_2^3\right) \end{aligned}$$

que é só uma notação conveniente para ∇w_2, pois quer-se entender a princípio que $(\nabla w_2^1, \nabla w_2^2, \nabla w_2^3) \notin \mathbb{R}^9$. Além disso, o operador de convecção $w_1 \cdot \nabla w_2$ também não é um "produto interno" de $w_1 \in \mathbb{R}^3$ pelo operador ∇w_2 pois conforme (2.15) temos que

$$(w_1 \cdot \nabla w_2)^i = \sum_{j=1}^{3} w_1^j \cdot \frac{\partial w_2^i}{\partial x_j}$$

enquanto que se inadvertidamente o estivéssemos tratando tal como um produto interno em $\mathbb{R}^3$, resultaria:

$$\begin{aligned} A &= ((w_1^1, w_1^2, w_1^3) \cdot (\nabla w_2^1, \nabla w_2^2, \nabla w_2^3))^i \\ &= (w_1^1.\nabla w_2^1 + w_1^2.\nabla w_2^2 + w_1^3.\nabla w_2^3)^i \end{aligned}$$

ou seja

$$A = \left(\sum_{j=1}^{3} w_1^j.\nabla w_2^j \right)^i$$

prosseguindo formalmente

$$A = \left(\begin{array}{c} w_1^1.\left(\frac{\partial w_2^1}{\partial x_1}\widehat{e}_1 + \frac{\partial w_2^1}{\partial x_2}\widehat{e}_2 + \frac{\partial w_2^1}{\partial x_3}\widehat{e}_3\right) + w_1^2.\left(\frac{\partial w_2^2}{\partial x_1}\widehat{e}_1 + \frac{\partial w_2^2}{\partial x_2}\widehat{e}_2 + \frac{\partial w_2^2}{\partial x_3}\widehat{e}_3\right) + \\ +w_1^3.\left(\frac{\partial w_2^3}{\partial x_1}\widehat{e}_1 + \frac{\partial w_2^3}{\partial x_2}\widehat{e}_2 + \frac{\partial w_2^3}{\partial x_3}\widehat{e}_3\right) \end{array} \right)^i$$

$$= \left(\begin{array}{c} \widehat{e}_1.\left(w_1^1.\frac{\partial w_2^1}{\partial x_1} + w_1^2.\frac{\partial w_2^2}{\partial x_1} + w_1^3.\frac{\partial w_2^3}{\partial x_1}\right) + \widehat{e}_2.\left(w_1^1.\frac{\partial w_2^1}{\partial x_2} + w_1^2.\frac{\partial w_2^2}{\partial x_2} + w_1^3.\frac{\partial w_2^3}{\partial x_2}\right) + \\ +\widehat{e}_3.\left(w_1^1.\frac{\partial w_2^1}{\partial x_3} + w_1^2.\frac{\partial w_2^2}{\partial x_3} + w_1^3.\frac{\partial w_2^3}{\partial x_3}\right) \end{array} \right)^i$$

$$= \left(\left(\sum_{j=1}^{3} w_1^j.\frac{\partial w_2^j}{\partial x_1} \right) \widehat{e}_1 + \left(\sum_{j=1}^{3} w_1^j. \cdot \frac{\partial w_2^j}{\partial x_2} \right) \widehat{e}_2 + \left(\sum_{j=1}^{3} w_1^j.\frac{\partial w_2^j}{\partial x_3} \right) \widehat{e}_3 \right)^i$$

segue-se que

$$A = \left\langle \left(\sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} w_1^j.\frac{\partial w_2^j}{\partial x_k} \right) \widehat{e}_k \right),\ \widehat{e}_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{3} w_1^j.\frac{\partial w_2^j}{\partial x_i}$$

onde agora $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ representa o produto interno em $\mathbb{R}^3$. Portanto,

$$\sum_{j=1}^{3} w_1^j.\frac{\partial w_2^j}{\partial x_i} \neq \sum_{j=1}^{3} w_1^j.\frac{\partial w_2^i}{\partial x_j} = (w_1 \cdot \nabla w_2)^i$$

2.2.3 Sobre a Formulação em Volume de Controle

As leis básicas que se aplicam em mecânica dos fluidos podem ser formuladas em termos de sistemas (infinitesimais ou finitos), onde a massa é fixa, ou em termos de volumes de controle , onde a região é que é fixada. No primeiro caso, as equações resultantes são equações diferenciais; no último, podemos chamá-las equações globais, pois governam o comportamento macroscópico do escoamento. O método do sistema focaliza a atenção sobre uma quantidade identificável de massa. Os limites do sistema separam-no do meio exterior, podendo ser fixos ou móveis, porém a massa não os atravessa. Nos estudos básicos da mecânica faz-se uso extensivo do corpo livre (isto é, do método do sistema).

O método do volume de controle baseia-se na descrição euleriana onde as propriedades de um escoamento qualquer num certo ponto no espaço são dadas em função do tempo, daí as propriedades de um campo de escoamento serão descritas como funções de coordenadas espaciais e do tempo. Isto é uma conseqüência da suposição de que os fluidos podem ser tratados como meios contínuos.

Como o sistema pode sofrer distorção e deformação, contínuas na maioria das vezes é extremamente difícil identificar e acompanhar uma mesma massa de fluido durante todo tempo (o que é uma necessidade na aplicação da formulação do sistema).

Na maioria das vezes é o efeito do fluido, como um todo, sobre certo objeto ou estrutura que importa mais do que o movimento de uma dada massa de fluido. Assim é mais conveniente aplicar as leis básicas a um volume fixo no espaço, isto é, utilizar uma análise de volume de controle.

Definição 2.11 Volume de controle é um volume arbitrário no espaço através do qual o fluido escoa. O contorno geométrico do volume de controle é chamado de superfície de controle. A superfície de controle pode ser real ou imaginária, estar em repouso ou em movimento.

A relação entre a formulação (em termos de taxa de variação) para qualquer propriedade extensiva do sistema e a formulação de volume de controle da propriedade intensiva correspondente (propriedade extensiva por unidade de massa) se baseia em tratar o fluxo de massa usando um processo limite envolvendo um sistema e um volume de controle que coincidem num certo instante de tempo. Assim as quantidades de fluxo nas regiões de sobreposição e nas regiões que cercam o volume de controle são formuladas de modo aproximado, e o processo limite é aplicado para obter resultados exatos. A equação final relaciona a taxa de variação da propriedade extensiva arbitrária para um sistema com as variações, em relação ao tempo, dessa propriedade associada com o volume de controle. (Ver [18] páginas 95-103).

O critério universal para selecionar um volume de controle para um meio poroso tem que se basear nas características mensuráveis de qualquer meio poroso e que detemine para qualquer meio poroso dado, um intervalo de avaliação dos volumes dentro do qual estas características permaneçam mais ou menos constantes. Assim, no presente modelo, escolheu-se definir o volume de controle elementar V_0 através do conceito da porosidade, que se considerou a propriedade básica da matriz porosa. (Cfe [6], páginas 19-20).

Definição 2.12 Um Volume Elementar Representativo (**VER**) é definido como um volume de controle elementar V_0, que é pequeno o suficiente para ser considerado como um volume elementar, no cálculo, mas suficientemente grande para ser estatisticamente representativo do meio poroso, contendo tanto material fluido quanto sólido em proporções médias localmente exatas.

Fisicamente num **VER** o caminho médio percorrido pelas moléculas do fluido entre duas colisões sucessivas é no mínimo da ordem de grandeza das próprias moléculas deste fluido.

Se n é a fração de vazios (= porosidade), o volume de vazios V_n é dado por

$$V_n = nV_0 \tag{2.18}$$

Para um meio isotrópico a "porosidade superficial" (i. é. a fração da soma das áreas vazias pela área total de uma secção transversal típica onde ocorre o escoamento) usualmente é igual à porosidade volumétrica do meio poroso, deste modo fica assegurada a interconexão do espaço dos vazios, ou seja: dois pontos quaisquer dentro do espaço de poros efetivo podem ser conectados por uma curva inteiramente contida nele. (Cfe [6], página 22; e [7]).

A média integral de uma propriedade ϕ extensiva (isto é, volumetricamente aditiva) do fluido dentro de VER, é definida como

$$\langle \phi \rangle \equiv \frac{1}{V_0} \int_{V_n} \phi dV \tag{2.19}$$

A média integral intrínseca associada a esta propriedade ϕ do fluído é a média volumétrica $\langle\phi\rangle_n$ relacionada apenas com a fase do fluido contido no **VER**, isto é,

$$\langle\phi\rangle_n = \frac{\langle\phi\rangle}{n} \tag{2.20}$$

pois se

$$\langle\phi\rangle \equiv \frac{1}{V_0}\int_{V_n}\phi dV \text{ e } \frac{1}{V_0} = \frac{n}{V_n}$$

então

$$\langle\phi\rangle \equiv \frac{n}{V_n}\int_{V_n}\phi dV = n\left(\frac{1}{V_n}\int_{V_n}\phi dV\right) = n\cdot\langle\phi\rangle_n$$

ou seja o fluído em **VER** ocupa um volume exatamente igual a V_n.

Em qualquer ponto dentro de V_n , o desvio de ϕ a partir da média integral intrínseca $\langle\phi\rangle_n$ é definido por

$$\overline{\phi} = \phi - \langle\phi\rangle_n \tag{2.21}$$

2.3 Considerações sobre o Modelo e as Hipóteses Físicas

Como todo modelo matemático este também é uma simplificação do problema real da ação física e dos corpos envolvidos visando manipulação matemática ou numérica, mas que geralmente ainda mostra uma boa correlação dos resultados obtidos com o que acontece na realidade.

2.3.1 Hipóteses Simplificadoras Adotadas

HS1) O meio poroso é idealizado como contínuo: infinitamente divisível com distribuição contínua de matéria. As propriedades do fluido são medidas através de quantidades extensivas que são funções suficientemente regulares pois os efeitos macroscópicos (ou seja, possíveis de perceber e medir) representam as médias das ações de muitas moléculas e átomos, em vez de um conglomerado de corpos minúsculos e discretos. (Isto decorre da impossibilidade de se descrever exatamente a geometria das superfícies sólidas que limitam internamente o domínio de escoamento dentro do meio poroso).

HS2) O material poroso é rígido, estacionário, e localmente isotrópico em relação às médias das propriedades geométricas. A microestrutura do meio poroso é granular, formada por um agregado não consolidado de partículas separadas, distinta do esponjoso (que é consolidado). A porosidade definida em termos de um VER é uma função contínua da posição e tempo.

HS3) O fluido que atravessa o meio poroso está sujeito às seguintes restrições:
R1: Consiste de uma única fase com propriedades físicas constantes;
R2: Escoamento laminar sem divisão local do tipo de escoamento (dentro dos poros.), e só tem influência de forças de corpo devido à gravidade.
R3: A condição de não-deslizamento se aplica a todas interfaces fluido-sólido (o fluído se agarra às paredes dos grãos).

2.3.2 Hipóteses Físicas

HF1) Conservação de massa em V_n :

$$\nabla q = 0 \tag{2.22}$$

HF2) Transporte de momento localmente dentro de V_n :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} v + \rho \left(v \cdot \nabla \right) v = \rho g - \nabla p + \mu \nabla^2 v \rho \frac{\partial}{\partial t} v + \rho \left(v \cdot \nabla \right) v = \rho g - \nabla p + \mu \nabla^2 v \tag{2.23}$$

(que é a equação de Navier-Stokes), onde

$$\nabla^2 u = \Delta u = (\Delta u^1, ..., \Delta u^d)$$

e

$$(u \cdot \nabla u)^i = \sum_{j=1}^{d} u^j \frac{\partial u^i}{\partial x_j}$$

Geralmente normaliza-se esta equação adotando-se $\rho = 1$.

2.3.3 Propriedades das Médias Integrais

O seguinte conjunto de regras pode ser estabelecido para as médias volumétricas (cfe [14]), com ϕ denotando uma entidade poliádica de ordem mínima ou superior.

(Essencialmente decorrem das propriedades da integral).

1. $\langle\phi\rangle = n\langle\phi\rangle_n$;

2. $\langle\phi_1 + \phi_2\rangle = \langle\phi_1\rangle + \langle\phi_2\rangle$;

3. $\langle\alpha\phi\rangle = \alpha\langle\phi\rangle$, $\alpha =$ constante;

4. $\langle\phi_1\phi_2\rangle_n = \langle\phi_1\rangle_n\langle\phi_2\rangle_n +$ $\langle\overline{\phi_1}\ \overline{\phi_2}\rangle_n$;

5. $\langle\nabla\phi\rangle = \nabla\langle\phi\rangle + \frac{1}{V_0}\int_{S_{fs}} v\phi dS$;

6. $\langle\nabla\phi\rangle = n\nabla\langle\phi\rangle_n + \frac{1}{V_0}\int_{S_{fs}} v\overline{\phi} dS$;

7. $\langle\nabla\cdot\phi\rangle = \nabla\cdot\langle\phi\rangle + \frac{1}{V_0}\int_{S_{fs}} v\phi dS$;

8. Se o integrando numa integral de superfície contém a velocidade como um fator explícito, a integral sobre a interface fluido-sólido estacionária é nula.

Exemplo 2.13 Vamos mostrar a regra 4. Repare que

$$\langle\phi_i\rangle_n = \frac{1}{V_n}\int_{V_n}\phi_i dx = k_i = \text{constante}\ , \quad i = 1,2 \tag{2.24}$$

como $\overline{\phi} = \phi - \langle\phi\rangle_n$, então

$$\begin{aligned}\langle\overline{\phi_1\phi_2}\rangle_n &= \frac{1}{V_n}\int_{V_n}\left(\phi_1 - \langle\phi_1\rangle_n\right)\left(\phi_2 - \langle\phi_2\rangle_n\right)dx \\ &= \frac{1}{V_n}\int_{V_n}\left(\phi_1\phi_2 - \langle\phi_1\rangle_n\ \phi_2 - \phi_1\langle\phi_2\rangle_n + \langle\phi_1\rangle_n\ \langle\phi_2\rangle_n\right)dx\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\langle\overline{\phi_1\phi_2}\rangle_n = &\left\{\frac{1}{V_n}\int_{V_n}\phi_1(x)\,\phi_2(x))dx\right\} - \langle\phi_1\rangle_n\left\{\frac{1}{V_n}\int_{V_n}\phi_2(x)\,dx\right\} + \\ &- \langle\phi_2\rangle_n\left\{\frac{1}{V_n}\int_{V_n}\phi_1(x)\,dx\right\} + \langle\phi_1\rangle_n\langle\phi_2\rangle_n\left\{\frac{1}{V_n}\int_{V_n}1dx\right\}\end{aligned}$$

e como por definição temos que

$$\langle\phi_1\phi_2\rangle_n = \tfrac{1}{V_n}\int_{V_n}\phi_1\left(x\right)\phi_2\left(x\right))dx,$$

$$\langle\phi_2\rangle_n = \tfrac{1}{V_n}\int_{V_n}\phi_2\left(x\right)dx,$$

$$\langle\phi_1\rangle_n = \tfrac{1}{V_n}\int_{V_n}\phi_1\left(x\right)dx,$$

$$V_n = \int_{V_n} 1dx.$$

segue-se que

$$\langle\overline{\phi_1\phi_2}\rangle_n = \langle\phi_1\phi_2\rangle_n - \langle\phi_1\rangle_n\langle\phi_2\rangle_n - \langle\phi_2\rangle_n\langle\phi_1\rangle_n + \langle\phi_1\rangle_n\langle\phi_2\rangle_n$$

portanto

$$\langle\phi_1\phi_2\rangle_n = \langle\phi_1\rangle_n\langle\phi_2\rangle_n + \langle\overline{\phi_1\phi_2}\rangle_n$$

Observação 2.14 A vazão específica q (também chamada de velocidade de filtragem) é uma variável comumente utilizada para designar a vazão através de um meio poroso e será utilizada aqui como uma variável na avaliação das equações calculadas via média integral. Sua relação com as velocidades médias é dada por

$$q = \langle v\rangle = n\langle v\rangle_n \tag{2.25}$$

A porosidade volumétrica (isto é, a porosidade) de um meio poroso num ponto é igual ao valor médio da porosidade areal direcional naquele ponto. Da mesma forma que a porosidade volumétrica independe da direção, a porosidade areal também independe da direção. (conforme [6],Bear, J. -"Dynamics of Fluids in Porous Media" páginas 22, e 121)

Observação 2.15 Para simplificar a notação as médias integrais intrínsecas da velocidade e da pressão , a saber $\langle v\rangle_n$ e $\langle p\rangle_n$ serão denotadas respectivamente por v_n e p_n .

2.3.4 Linhas Gerais da Dedução das Equações

As equações clássicas de Navier-Stokes aqui têm suas variáveis consideradas em média, para ressaltar que elas são calculadas via médias integrais em volumes pequenos (a integração num certo sentido, é um processo de média generalizado), para obtermos as equações que descrevem o escoamento de fluidos em meios porosos.

Definimos:

$$q(x,t) \equiv \frac{1}{V_0}\int_{V_n} v dV \tag{2.26}$$

onde V_n é um volume de controle centrado em x no instante de tempo t. Um procedimento semelhante através de médias integrais volumétricas usando-se a relação (2.25) e a equação de Navier-Stokes (2.23) toma a forma seguinte

$$\begin{gathered}\rho\tfrac{\partial}{\partial t}q + \rho\left(q\cdot\nabla\right)\left(\tfrac{q}{n}\right) + n\nabla p_n - n\rho g - \mu\nabla^2 q + \\ +\rho\nabla\cdot\left(n\langle\overline{v}\ \overline{v}\rangle_n\right) - \tfrac{1}{V_0}\int_{S_{fs}}\left(-\overline{p}\ v + \mu v\cdot\nabla v\right)dS = 0\end{gathered} \tag{2.27}$$

A equação acima ainda precisa ser transformada de modo que seja de uso prático. Temos

- o termo $\rho\nabla\cdot\left(n\langle\overline{v}\ \overline{v}\rangle_n\right)$ será desprezado, sendo importante apenas nos casos de grandes gradientes das velocidades médias em meios porosos. Uma possível explicação é que nestes casos, as partículas finas de um meio não consolidado poderiam ser removidas de suas posições deixando uma cavidade no local, e eventualmente ao serem arrastadas causariam o colapso do meio poroso, fenômeno conhecido como erosão interna (piping).

- a quantidade $\overline{v}$ é a diferença vetorial entre a velocidade real v num ponto no interior de V_n e a velocidade avaliada como média integral sobre V_n dentro do **VER** (**V**olume **E**lementar **R**epresentativo) em torno do ponto;

- A avaliação do termo

$$\frac{1}{V_0}\int_{S_{fs}}\left(-\overline{p}\ v + \mu v\cdot\nabla v\right)dS$$

é sujeita a uma descrição dos gradientes da velocidade real nas superfícies porosas. Esta, por sua vez, assegura uma descrição bastante precisa da microestrutura porosa; após algumas modelagens pode ser escrito como $\mu F\,(n)\,q$.

- A quantidade $\overline{p}$ é a diferença entre a pressão em um ponto dentro do volume vazio e a pressão avaliada via média integral sobre V_n ao longo do **VER** em torno desse ponto. O termo envolvendo $\overline{p}$ é considerado, juntamente com o termo devido ao atrito, como parte de uma integral de superfície. Isso permite a avaliação dos efeitos de atrito nas secções transversais dos poros, numa fase posterior da análise.

- v é o vetor normal que aponta para dentro da superfície;

Assim considerando-se que

$$\rho\nabla\cdot\left(n\langle\overline{v}\ \overline{v}\rangle_n\right)=0 \tag{2.28}$$

e

$$-\mu F\,(n)\,q=\frac{1}{V_0}\int_{S_{fs}}\left(-\overline{p}\ v+\mu v\cdot\nabla v\right)dS \tag{2.29}$$

a equação de Navier-Stokes (2.27) toma a forma

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}q+\rho\,(q\cdot\nabla)\left(\frac{q}{n}\right)+n\nabla p-\rho n g-\mu\bigtriangleup q+\mu F\,(n)\,q=0 \tag{2.30}$$

Observação 2.16 As equações acima modelam escoamentos diferentes das que normalmente são chamadas de “equações de meio porosos”. Estas últimas são associadas a fluxos em meios porosos consolidados, nos quais a velocidade e a pressão estão relacionadas (geralmente pela lei de Darcy, ou uma de suas variantes).

Capítulo 3

Existência de Soluções Fracas

3.1 Introdução

A partir da equação (2.30), adotaremos a notação $u \equiv q$, para propor o problema com um nome de variável mais usual na literatura em EDP's, e assim obtemos nosso conjunto de equações a resolver

$$\begin{cases} \rho u_t + \rho\,(u \cdot \nabla)\left(\dfrac{u}{n}\right) - \mu \Delta u + n \nabla p + \mu F\,(n)\, u = \rho n g \quad \text{em } Q_{T,} \\ div\ u = 0 \quad \text{ em } Q_T = \Omega \times (0,T) \\ u\,(x,0) = u_o(x) \ \ , \ \forall x \in \Omega, \\ u\,(x,t) = 0 \ \ , \ \forall t \in (0,T) \ \ , \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

onde os operadores div, ∇ e Δ referem-se apenas às variáveis espaciais.

Em geral, uma das idéias básicas da Análise é decompor funções arbitrárias em termos de outras mais simples, com objetivo de encontrar propriedades daquelas funções a partir das "componentes"que as representem. Com um objetivo análogo, estabeleceremos a existência de uma solução fraca usando o método das soluções aproximadas de Faedo-Galerkin. A idéia é (sempre que possível) buscar num espaço de Sobolev adequado uma formulação variacional equivalente ao problema diferencial - contínuo para o qual se quer uma solução u , e desta forma obter uma segunda caracterização de u que se constrói pela sua atuação como argumento de termos da forma $f(u)$ em produtos escalares definidos pela integral de Lebesgue

$$\langle f(u), \varphi \rangle = \int_\Omega f(u) \varphi dx$$

sobre uma classe de funções φ acessórias suaves, onde f é uma aplicação que caracteriza a EDP tendo como domínio e imagem espaços adequados de funções. Em outras palavras, u será descrita por uma coleção de médias ponderadas onde as funções peso $\varphi(x)$ pertencem a um certo conjunto $\mathcal{D}(E)$. Como uma aplicação G que associa a qualquer elemento φ de um espaço linear V um número escalar $G(\varphi)$ do corpo E é chamado de funcional sobre V , e desde que seja possível dotar $\mathcal{D}(E)$ facilmente de uma estrutura de espaço linear então esta segunda caracterização permitirá idealmente descrever u como um funcional linear sobre o espaço $\mathcal{D}(E)$ das funções acessórias $\varphi(x)$. Evidentemente, se a representação funcional de u fizer sentido, as funções $\varphi(x)$ precisam ser escolhidas adequadamente para ter propriedades desejáveis. E para isto, examina-se um problema análogo definido num espaço de dimensão finita $k \in \mathbb{N}$, tal que existe uma solução u_k para o mesmo, de modo que a solução u_k seja uma aproximação (num sentido a especificar) da solução do problema diferencial. Em seguida, descobrir estimativas capazes de limitar u_k independentemente de k, estendendo-a a todo intervalo $[0, T[$. E finalmente, que se possa mostrar a existência de uma subseqüencia de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge (num sentido específico) para a solução u de (3.1), verificando as condições iniciais e de contorno ou na pior das hipóteses, uma solução da formulação variacional. Após obtermos a formulação variacional, por simplicidade, ainda dividiremos a demonstração da existência de soluções nas etapas:

1- Construção de soluções aproximadas em subespaços de dimensão finita;

2- Estimativas a priori (para mostrar que a família $\{u_m\}$ das soluções aproximadas é limitada em V independente de m, seguindo-se a existência de uma subseqüência $\{u_{m_k}\}$ fracamente convergente);

3- Passagem ao limite nas soluções aproximadas (e mostrar que o limite fraco é uma solução do problema);

4- Condição inicial.

3.2 Formulação Variacional Geral do Problema

A primeira etapa será passar da descrição do problema (3.1), chamada formulação clássica para uma outra formulação, dita fraca ou variacional geral , ou também aproximação abstrata de Galerkin (3.27). A idéia geral desta teoria de existência de soluções de uma EDP de interesse em u, é tentar reescrever a EDP usando uma função teste φ, de tal forma que quaisquer que sejam as derivadas em u que se apresentem na equação, elas acabem sendo "transferidas" via integração por partes, para φ. Nesta nova descrição poderemos buscar solução menos exigente quanto à regularidade, pois ao se encontrar a solução da equação integral, que frequentemente não precisa ser necessariamente tão diferenciável quanto na formulação clássica, também obter-se-á as chamadas soluções fracas da EDP original. Assim a tarefa de encontrar a solução deve se tornar um pouco mais fácil, pois estaremos procurando-a num espaço mais amplo que $C^1\left(0,T,C^2\left(\Omega\right)\right)$, isto é, em $L^2\left(0,T,V\right)$, com a vantagem de que todas funções possíveis de estar em $C^1\left(0,T,C^2\left(\Omega\right)\right)$, também pertencerão ao espaço $L^2\left(0,T,V\right)$, onde

$$V=\left\{u\left(\cdot,t\right)\in\left(H_0^1\left(\Omega\right)\right)^d:\text{div }\;u\equiv 0\;\right\}$$

Assim, saber em que sentido vale a igualdade

$$\rho u_t+\rho\left(u\cdot\nabla\right)\left(\frac{u}{n}\right)-\mu\Delta u+n\nabla p+\mu F\left(n\right)u=\rho n g$$

em Q_T equivale a dar a definição da solução u da equação em questão. Repare que do significado físico de div $u\equiv 0$ representar a taxa de expansão por unidade de volume do fluido tem-se que não está havendo expansão nem compressão em Ω , isto é, os volumes são preservados em Q_T. Das condições

$$\begin{aligned}&u\left(x,0\right)=u_0(x)\quad,\quad\forall x\in\Omega,\\&u\left(x,t\right)=0\quad,\quad\forall t\in\left(0,T\right)\;,\forall x\in\partial\Omega.\end{aligned}$$

e como não há perda de massa para o exterior de Ω através da fronteira $\partial\Omega$ pois o fluxo está confinado a Ω a solução u também deve ser elemento de

$$H=\left\{u\in\left(L^2\left(\Omega\right)\right)^d\;\;:\;\;\text{div }\;u\equiv 0\;\;\text{e}\;\;\;u\cdot\overrightarrow{N}\Big|_{\partial\Omega}\equiv 0\right\}$$

Além disso, as escolhas de ρ , n , e g também ajudam estabelecer o espaço onde será encontrada a solução u do problema (3.1). Considera-se aqui o caso em que $\rho = 1$, daí a primeira equação de (3.1) toma a forma seguinte:

$$u_t + u \cdot \nabla \left(\frac{u}{n}\right) - \mu \Delta u + n \nabla (p) + \mu F(n) u = ng \tag{3.2}$$

Lembrando-se das convenções de notação (3), a pressão p pode ser eliminada do mesmo modo como se faz nas equações de Navier-Stokes, que para tanto usa-se o produto interno de $L^2(\Omega)$ por uma função $v \in V$ que opera com todos termos da equação (3.2), (previamente dividida por n), ou seja, partindo-se da equação seguinte

$$\left[\left(\frac{u_t}{n}\right) + \frac{u}{n} \cdot \nabla \left(\frac{u}{n}\right)\right] - \mu \frac{\Delta u}{n} + \nabla p + \frac{\mu}{n} F(n) u = g \tag{3.3}$$

e observando-se que $\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'n - un'}{n^2} = \frac{u'}{n} - \frac{un'}{n^2}$ tem-se que:

$$\frac{u'}{n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right) + \frac{un'}{n^2} \tag{3.4}$$

segue-se que ao substituir-se (3.4) em (3.3) vem:

$$\left[\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right) + \frac{un'}{n^2}\right) + \frac{u}{n} \cdot \nabla \left(\frac{u}{n}\right)\right] - \mu \frac{\Delta u}{n} + \nabla p + \mu F(n) \frac{u}{n} = g \tag{3.5}$$

e a seguir fazendo-se a aplicação do produto interno em $L^2(\Omega)$ dos termos da equação acima por uma função

$$v \in V = \left\{ v = \left(v^1, \ldots, v^d\right) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d : \text{ div } v \equiv 0 \right\}$$

vem:

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{u}{n}\right), v\right) + \left(\tfrac{un'}{n^2}, v\right) + \left(\left(\tfrac{u}{n} \cdot \nabla \left(\frac{u}{n}\right)\right), v\right) + \\ &- \left(\mu \tfrac{\Delta u}{n}, v\right) + (\nabla p, v) + \left(\mu F(n) \tfrac{u}{n}, v\right) = \langle g, v \rangle \end{aligned} \tag{3.6}$$

Agora como μ =constante, repare que

$$-\left(\mu \frac{\Delta u}{n}, v\right) = -\mu \left(\Delta u, \frac{v}{n}\right) \tag{3.7}$$

Afirmação 01.Quando u e v são funções escalares vale dizer:

$$-\mu\left(\Delta u, \frac{v}{n}\right) \equiv \mu\left[\left(\nabla u\ ,\ v \cdot \nabla\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \left(\nabla u, \frac{\nabla v}{n}\right)\right] \tag{3.8}$$

Demonstração. (da afirmação 01). Enfatiza-se que estamos considerando que as funções u e v são funções reais. Note que por hipótese temos

$$v|_{\partial\Omega} \equiv 0 \text{ e } n \in]0,1[$$

Assim,

$$\psi = \frac{v}{n} \Rightarrow \psi|_{\partial\Omega} \equiv 0$$

Logo, se tomarmos $\varphi = u$ e $\psi = \frac{v}{n}$ como argumentos na identidade de Green (1.22, página 31), teremos

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{v}{n}\right) \triangle\, u + \nabla\left(\frac{v}{n}\right) \nabla u\right] dx = \int_{\partial\Omega} \frac{v}{n} \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}} dS_x = 0$$

ou seja

$$-\int_\Omega \left[\left(\frac{v}{n}\right) \triangle\, u\right] dx = \int_\Omega \left[\nabla\left(\frac{v}{n}\right) \nabla u\right] dx \tag{3.9}$$

e usando-se a relação (3.7), que é válida também caso u e v sejam funções escalares, tem-se que

$$\left(\frac{\Delta u}{n}, v\right) = \left(\Delta u, \frac{v}{n}\right)$$

e pela comutatividade do produto interno segue-se que

$$-\int_\Omega \frac{v}{n} \triangle\, u dx =$$

$$= -\left(\frac{v}{n}, \Delta u\right) = -\left(\Delta u, \frac{v}{n}\right) = -\left(\frac{\triangle u}{n}, v\right) = -\int_\Omega \frac{\triangle u}{n} v dx$$

daí considerando-se (3.9) vem

$$-\int_\Omega \frac{\triangle u}{n} v dx = \int_\Omega \nabla\left(\frac{v}{n}\right) \nabla u\ dx \tag{3.10}$$

Agora sendo u e v funções reais, note que

$$\nabla\left(\frac{v}{n}\right)=\frac{1}{n}\nabla v-\frac{v}{n^2}\nabla n=\frac{\nabla v}{n}-v\frac{\nabla n}{n^2}. \tag{3.11}$$

Além disso, como

$$\nabla_x\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{\nabla n}{n^2} \tag{3.12}$$

daí substituindo (3.11) em (3.10), segue-se que

$$-\int_\Omega \frac{\triangle u}{n}v\ dx=$$

$$\begin{aligned}&=\int_\Omega \nabla\left(\frac{v}{n}\right)\nabla u\ dx=\int_\Omega\left(\frac{\nabla v}{n}-v\frac{\nabla n}{n^2}\right)\nabla u\ dx\\&=\int_\Omega \frac{\nabla v}{n}\nabla u\ dx+\int_\Omega v\left(-\frac{\nabla n}{n^2}\right)\nabla u\ dx\end{aligned}$$

e depois considerando (3.12) teremos

$$-\int_\Omega \frac{\triangle u}{n}vdx=\int_\Omega \frac{\nabla v}{n}\cdot\nabla udx+\int_\Omega v\left(\nabla\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\nabla udx \tag{3.13}$$

$$-\int_\Omega \frac{\triangle u}{n}vdx=\int_\Omega \frac{\nabla(v)}{n}\cdot\nabla(u)\,dx+\int_\Omega (v\nabla)\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\nabla udx \tag{3.14}$$

onde nas equações acima $v\left(\nabla\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ ou $(v\nabla)\left(\frac{1}{n}\right)$ representam um produto de escalar por vetor, e a operação indicada com "$\cdot$"é a operação produto interno em $\mathbb{R}^d$, e como $\mu=constante$, tem-se

$$-\mu\int_\Omega \frac{v}{n}\triangle u\ dx=\mu\int_\Omega (v\nabla)\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\nabla u\ dx+\mu\int_\Omega \frac{\nabla(v)}{n}\cdot\nabla(u)\,dx \tag{3.15}$$

ou ainda equivalentemente usando-se a notação de produto interno em $L^2(\Omega)$

$$-\mu\left(\triangle u,\frac{v}{n}\right)=-\mu\left(v,\frac{\triangle u}{n}\right)=\mu\left[\left((v\nabla)\left(\frac{1}{n}\right),\nabla u\right)+\left(\frac{\nabla v}{n},\nabla u\right)\right] \tag{3.16}$$

onde se destaca que o operador de convecção $v\cdot\nabla\left(\frac{1}{n}\right)$ neste caso se reduziu ao produto da função escalar v pelo vetor $\nabla\left(\frac{1}{n}\right)$. Portanto, a afirmação 01 é válida.

$\blacksquare$

Afirmação 02**.** Quando u e v são funções vetoriais vale dizer:

$$-\mu\left(\Delta u, \frac{v}{n}\right) = \mu\left[b\left(\nabla\left(\frac{1}{n}\right); u\ ,\ v\right) + \left(\nabla u, \frac{\nabla v}{n}\right)\right] \tag{3.17}$$

onde b é a forma trilinear

$$b\left(w_1, w_2, w_3\right) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} w_1^i \frac{\partial w_2^j}{\partial x_i} w_3^j dx$$

definida conforme a observação (1.101, página 40).

Demonstração. (da afirmação 02). Sejam $u = (u^1, u^2, u^3)$ e $v = (v^1, v^2, v^3)$ com

$$u^i : Q_T \to \mathbb{R}, v^i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

onde $i = 1, 2, 3$. Considerando-se a notação dada pela equação (3, página xi) a saber $\triangle u = (\triangle u^1, \triangle u^2, \triangle u^3)$, e também a comutatividade do produto interno em $L^2(\Omega)$ tem-se

$$\begin{aligned}
(v, \triangle u) &= \int_\Omega \left(v^1, v^2, v^3\right) \cdot \left(\triangle u^1, \triangle u^2, \triangle u^3\right) dx \\
&= \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega v^j \triangle u^j dx = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \left(\triangle u^j\right) v^j dx, \\
(v, \triangle u) &= (\triangle u, v) \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

daí, teremos

$$\left(\frac{v}{n}, \triangle u\right) = \left(v, \frac{\triangle u}{n}\right)$$

Repare que se $\widehat{u}$ e $\widehat{v}$ forem funções reais, então pela afirmação 01 também pode-se escrever:

$$-\mu\left(\Delta\widehat{u}, \frac{\widehat{v}}{n}\right) = \mu\left[\left(\nabla\widehat{u}\ ,\ \widehat{v}\nabla\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \left(\nabla\widehat{u}, \frac{\nabla\widehat{v}}{n}\right)\right] \tag{3.19}$$

daí, lembrando-se que como u^j, e v^j são campos escalares, podemos aplicar esta equação acima (3.19) para os casos quando $\widehat{u} = u^j$, e $\widehat{v} = v^j$, isto é,

$$\int_\Omega v \frac{\triangle u}{n} dx = -\left(\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\nabla v^j}{n} \ \nabla u^j \ dx + \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \left(\left(v^j \nabla \right) \left(\frac{1}{n} \right) \right) \nabla u^j \ dx \right) \tag{3.20}$$

Observamos que

$$\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\nabla v^j}{n} \ \nabla u^j \ dx = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \left(\frac{\nabla v^j}{n}, \nabla u^j \right)_{\mathbb{R}^3} \ dx = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\nabla v^j}{n}, \nabla u^j \right)_{L^2(\Omega)}$$

onde

$$\left(\frac{\nabla v^j}{n}, \nabla u^j \right)_{\mathbb{R}^3} \ \text{e} \ \left(\frac{\nabla v^j}{n}, \nabla u^j \right)_{L^2(\Omega)}$$

indicam os produtos internos em $\mathbb{R}^3$ e em $L^2(\Omega)$ respectivamente. Assim, pela equação (2.17, página 62) tem-se

$$\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\nabla v^j}{n} \ \nabla u^j \ dx = \left(\frac{\nabla v}{n}, \nabla u \right) \tag{3.21}$$

Agora, examinando-se o segundo somatório de (3.20) tem-se :

$$\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \left(\left(v^j \nabla \right) \left(\tfrac{1}{n} \right) \right) \nabla u^j dx = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \left(\left(\left(v^j \nabla \right) \left(\tfrac{1}{n} \right) \right), \nabla u^j \right)_{\mathbb{R}^3} dx$$
$$= \sum_{j=1}^{3} \left(\left(v^j \nabla \right) \left(\tfrac{1}{n} \right), \nabla u^j \right)_{L^2(\Omega)} = \left(v \cdot \nabla \left(\tfrac{1}{n} \right), \nabla u \right)$$

além disso vale notar que

$$\begin{aligned} \left(v \cdot \nabla \left(\tfrac{1}{n} \right), \nabla u \right) &= \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \left(\left(v^j \nabla \right) \left(\tfrac{1}{n} \right) \right) \left(\nabla u^j \right) dx = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \nabla \left(\tfrac{1}{n} \right) \left(\nabla u^j \right) v^j dx \\ \left(v \cdot \nabla \left(\tfrac{1}{n} \right), \nabla u \right) &= \left(\nabla \left(\tfrac{1}{n} \right) \cdot \nabla u, v \right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

ou de outra maneira, também tem-se que

$$\sum_{j=1}^{d}\int_{\Omega}\left(v^j\nabla_x\right)\left(\tfrac{1}{n}\right)\nabla u^j dx = \left(v\cdot\nabla\left(\tfrac{1}{n}\right),\nabla u\right)$$

$$= \int_{\Omega}\left(v^1\nabla_x\right)\left(\tfrac{1}{n}\right)\nabla u^1 dx + \cdots + \int_{\Omega}\left(v^d\nabla_x\right)\left(\tfrac{1}{n}\right)\nabla u^d dx$$

$$= \int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{d} v^1\tfrac{\partial\left(\frac{1}{n}\right)}{\partial x_k}\tfrac{\partial u^1}{\partial x_k}dx + \cdots + \int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{d} v^d\tfrac{\partial\left(\frac{1}{n}\right)}{\partial x_k}\tfrac{\partial u^d}{\partial x_k}dx$$

$$= \sum_{j=1}^{d}\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{d} v^j\tfrac{\partial\left(\frac{1}{n}\right)}{\partial x_k}\tfrac{\partial u^j}{\partial x_k}dx$$

$$= \sum_{j,k=1}^{d}\int_{\Omega}\tfrac{\partial\left(\frac{1}{n}\right)}{\partial x_k}\tfrac{\partial u^j}{\partial x_k}v^j dx$$

$$= \sum_{j,k=1}^{d}\int_{\Omega}\left(\nabla\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)\tfrac{\partial u^j}{\partial x_k}v^j dx$$

onde se tem finalmente uma expressão que se pode relacionar com a forma trilinear apresentada na observação (1.101), o que permite escrever

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega}\left(v^j\nabla_x\right)\left(\frac{1}{n}\right)\nabla u^j dx = \left(\nabla\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\nabla u, v\right) = b\left(\nabla\left(\frac{1}{n}\right), u, v\right) \tag{3.23}$$

Agora conforme as convenções de notação listadas na equação (3), usando-se (3.21) e (3.23) tem-se que

$$-\mu\left(\Delta u,\frac{v}{n}\right) = -\mu\cdot(-1)\cdot\sum_{j=1}^{3}\left(\int_{\Omega}\frac{\nabla v^j}{n}\nabla u^j\ dx + \int_{\Omega}\left(v^j\nabla_x\right)\left(\frac{1}{n}\right)\nabla u^j\ dx\right)$$
$$= \mu\left[\left(\frac{\nabla v}{n},\nabla u\right) + \left((v\cdot\nabla)\left(\frac{1}{n}\right),\nabla u\right)\right]$$

ou seja

$$-\mu\left(\Delta u,\frac{v}{n}\right) = \mu\left[\left(\frac{\nabla v}{n},\nabla u\right) + \left((v\cdot\nabla)\left(\frac{1}{n}\right),\nabla u\right)\right]$$

portanto a afirmação 02 é verdadeira.

$\blacksquare$

Afirmação 03. $(\nabla p, v) = 0$, com $v \in V$ e $p(x)$ escalar.

Demonstração. (da afirmação 03). De fato, conforme a notação usada em

$$pv = \left(pv^1, pv^2, pv^3\right)$$

e considerando-se o lema (1.74) temos que

$$\operatorname{div}_x (pv) = p \operatorname{div}_x v + v\nabla_x p$$

Integrando-se sobre Ω em ambos os membros da equação acima teremos

$$\int_\Omega \operatorname{div}(pv)\, dx = \int_\Omega p \operatorname{div} v dx + \int_\Omega v\nabla p dx = \int_\Omega v\nabla p dx \tag{3.24}$$

porque $\operatorname{div}_x v = 0$ se $v \in V$. Por outro lado, o primeiro membro da equação (3.24) acima, pelo teorema de Gauss (1.75) pode ser reescrito como

$$\int_\Omega \operatorname{div}(pv)\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (pv)}{\partial \overrightarrow{n}} dS_x = \int_{\partial\Omega} pv \cdot \overrightarrow{n}\, dS_x = 0 \tag{3.25}$$

pois por hipótese,

$$v|_{\partial\Omega} \equiv 0 \Leftrightarrow v_j|_{\partial\Omega} \equiv 0 \ , \ j = 1, 2, 3$$

e a última integral na equação (3.25) se anula. Consequentemente, considerando-se (3.24) e (3.25) obtemos

$$\int_\Omega v\nabla p dx = 0 = (v, \nabla p)$$

que é o resultado desejado.

$\blacksquare$

Assim considerando-se a validade das afirmações 02 e 03 podemos reescrever a equação (3.6) na seguinte forma vetorial

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right), v\right) + \left(\frac{n'u}{n^2}, v\right) + \left(\left(\left(\frac{u}{n} \cdot \nabla\right)\left(\frac{u}{n}\right)\right), v\right) + \mu\left(\frac{\nabla v}{n}, \nabla u\right) + \\ \\ +\mu\left((v \cdot \nabla)\left(\frac{1}{n}\right), \nabla u\right) + \left(\mu F(n)\frac{u}{n}, v\right) = \langle g, v\rangle \end{cases}$$

ou ainda na seguinte forma escalar

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left(\frac{u^{i}}{n}.v^{i}\right)dx+\int_{\Omega}\left(\frac{n'u^{i}}{n^{2}}.v^{i}\right)dx+\sum_{j=1}^{d}\int_{\Omega}\frac{u^{j}}{n}.\frac{\partial\left(\frac{u^{i}}{n}\right)}{\partial x_{j}}.v^{i}dx+\\
&+\mu\sum_{j=1}^{d}\int_{\Omega}\left(\frac{1}{n}.\frac{\partial v^{i}}{\partial x_{j}}.\frac{\partial u^{i}}{\partial x_{j}}\right)dx+\mu\sum_{j=1}^{d}\int_{\Omega}v^{j}.\frac{\partial\left(\frac{1}{n}\right)}{\partial x_{j}}.\frac{\partial u^{i}}{\partial x_{j}}dx+\\
&+\int_{\Omega}\left(\mu F(n)\frac{u^{i}}{n}.v^{i}\right)dx=\langle g^{i},v^{i}\rangle
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Desta forma chegamos à formulação fraca geral para o problema (3.1), a qual corresponde a resolver:

$$
\begin{cases}
\text{Determinar } u(x,t) \text{ tal que}\\
\left(\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u}{n}\right),v\right)+\left(\dfrac{n'u}{n^{2}},v\right)+\left(\left(\left(\dfrac{u}{n}\cdot\nabla\right)\left(\dfrac{u}{n}\right)\right),v\right)+\\
+\mu\left(\dfrac{\nabla(v)}{n},\nabla(u)\right)+\mu\left((v\cdot\nabla)\left(\dfrac{1}{n}\right),\nabla(u)\right)+\\
+\mu\left(F(n)\dfrac{u}{n},v\right)=\langle g,v\rangle \quad , \quad \forall v\in V \quad \text{em } D'(0,T)\\
u(0)=u_{0}\in H.
\end{cases}
\tag{3.27}
$$

onde as funções $g = g(x,t)$, $n(x,t)$ e u_0 provêem dos dados, e para que façam sentido busca-se uma solução do problema (3.1) com $g \in L^2(0,T,V'), n(x,t)$ e $u_0 \in H$ sejam coerentes com os dados, e para isto devemos encontrar u satisfazendo $u \in L^2(0,T,V)$.

Observação 3.1 Para obter esta formulação fraca inicialmente considerou-se que $g(t) \in (L^2(\Omega))^d$, linear e contínua, mas depois pode-se generalizar mais colocando-se a hipótese de que $g(t) \in V'$, i. e.,

$$
g(t)\in L^{2}(0,T,V')\Leftrightarrow\int_{0}^{T}\|g(t)\|_{V'}^{2}\,dt<\infty
$$

pois: $V \subset L^2(\Omega)$ e pelo lema (1.15) temos que $V' \supset (L^2(\Omega))'$ daí segue-se pelo

Teorema de representação Riesz-Fréchet que

$$V' \supset \left(\left(L^2(\Omega)\right)^d\right)' \cong \left(L^2(\Omega)\right)^d \supset V$$

daí neste contexto o produto interno $(g(t), v)$ significa uma aplicação do funcional

$$g(t) \in \left(\left(L^2(\Omega)\right)^d\right)' \subset V'$$

no elemento $v \in V$, procedimento representado no diagrama abaixo, (onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V',V}$ foi definido na Observação (1.40, página 11),

$$\begin{aligned} g(t) &: V \subset L^2(\Omega) \to \mathbb{R} \\ v &\mapsto (g(t))(v) = \langle g(t), v \rangle_{V',\,V} = (g(t), v)_{(L^2(\Omega))^d} \end{aligned}$$

onde se realiza a submersão de $\left(L^2(\Omega)\right)^d$ em V', (conforme [9] , Nota 1 das páginas 81-82). Repare que aqui v é a variável enquanto que t está fixo. O funcional $g(t)$ desempenha o mesmo papel de um funcional linear T_A em V dado por

$$\begin{aligned} T_A &: V \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle T_A\,,\ x \rangle_{V',\,V} \ . \end{aligned}$$

Observação 3.2 $g = g(x,t)$ é um campo de forças externas cuja imagem está em $\mathbb{R}^d$, $(d = 2, 3)$, definido por

$$g_j(t) : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ x \mapsto (g_j(t))(x) = g_j(x,t),\ j = 1, \ldots, d.$$

Logo $g_j(t) \in V'$, onde $g_j(t)$ denota uma função real que será aplicada em $x \in \Omega$ para um valor fixado de t.

Observação 3.3 Para que as expressões dos outros termos da equação (3.27) tenham sentido exigiu-se que $v \in L^2(0, T, V)$, pois todas as demais integrais envolvidas precisam ser finitas. Dizer que "$\forall v \in V$ em $D'(0,T)$" na equação (3.27) significa que estamos buscando uma solução $u(x,t)$ válida no sentido de distribuição. Repare que "se uma solução é clássica , ela também pode ser encarada como sendo uma solução no sentido fraco", assim tomando-se $v \in V$ em $D'(0,T)$ estamos encarando as funções no sentido mais geral (isto é, no sentido fraco) de distribuição no tempo, pois as derivadas clássicas constituem-se um caso particular de derivadas fracas. (Conforme [25], pág.19).

O resultado principal é o seguinte teorema que fornece condições para existência de soluções para o problema (3.27).

Teorema 3.4 *(Existência). Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, *(*$d = 2, 3$*), um aberto limitado com fronteira regular,* $u_0 \in H$, $g \in L^2(0, T, V')$ *. Seja* $n : Q_T = \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo:*

$$\begin{array}{l} 0 < n_0 \leq n(x,t) < 1 \quad \forall (x,t) \in \overline{Q_T} \\ n' \in L^2\left(0, T, L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right) \\ n' \in L^1(0, T, L^\infty(\Omega)) \\ \nabla n \in L^2(0, T, L^\infty(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, L^3(\Omega)) \end{array} \tag{3.28}$$

Ou então as duas últimas condições podem ser substituídas por:

$$\begin{array}{l} n' \in L^\infty\left(0, T, L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right) \;\; \textit{com norma pequena.} \\ \nabla n \in L^\infty(0, T, L^3(\Omega)) \;\; \textit{com norma pequena.} \end{array} \tag{3.29}$$

Seja $F : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo:*

$$0 < F(n(x,t)) \leq F_0 < \infty \quad \forall (x,t) \in Q_T \tag{3.30}$$

Então existe pelo menos uma função $u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ *satisfazendo (3.27).*

Observação 3.5 Em dimensão dois, as condições em n' e ∇n podem ser substituídas por:

$$\begin{array}{l} n' \in L^2(0, T, L^p(\Omega)) \;\; \text{para algum } p > 1. \\ n' \in L^1(0, T, L^\infty(\Omega)) \\ \nabla n \in L^2(0, T, L^\infty(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, L^p(\Omega)) \;\; \text{para algum } p > 2 \end{array}$$

Ou então as duas últimas podem ser substituídas por:

$$n' \in L^{\infty}\left(0, T, L^{p}\left(\Omega\right)\right) \text{ para algum } p > 1, \text{com norma pequena.}$$
$$\nabla n \in L^{\infty}\left(0, T, L^{p}\left(\Omega\right)\right) \text{ para algum } p > 2, \text{ com norma pequena.}$$

Observação 3.6 A condição $n' \in L^{2}\left(0, T, L^{\frac{3}{2}}\left(\Omega\right)\right)$ em (3.28) garante que a formulação variacional (3.27) faz sentido, isto é, que a segunda parcela é finita. Aqui, na verdade, bastaria $n' \in L^{2}_{loc}\left(0, T, L^{\frac{3}{2}}\left(\Omega\right)\right)$, (cfe Definição 1.23). Esta condição também garante que $u(t) \to u_0$ em V' quando $t \to 0$. A pequenez dos dados acima depende somente de n_0 e da constante de viscosidade μ do fluído, pequenez esta que será precisada no decorrer da demonstração.

Para demonstrarmos o Teorema (3.4) acima, tem-se que exibir uma solução fraca para o problema. Primeiramente mostraremos após uma definição adequada, a existência de uma solução aproximada do problema (3.27) em dimensão finita.

3.3 Problema Aproximado - Solução Local

Nesta etapa define-se o problema num espaço de dimensão finita conveniente que chamaremos de Problema Aproximado (PA), e daí mostra-se que esse PA possui solução u_m local (no sentido de que coincide com $u(x)$ neste espaço de dimensão finita conveniente). A existência desta solução aproximada está associada a resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias combinado com as condições iniciais e de contorno, solução assegurada por aplicação do Teorema de Carathéodory (Teorema 1.104). Os espaços de Sobolev $H^{m}\left(\Omega\right)$ são espaços de Hilbert separáveis, isto é, $H^{m}\left(\Omega\right)$ possui um subconjunto denso e enumerável de modo que qualquer elemento de $H^{m}\left(\Omega\right)$ pode ser aproximado por uma seqüência de elementos deste subconjunto. Como

$$V = \left\{u \in \left(H^{1}_{0}\left(\Omega\right)\right)^{d} : \text{ div } u \equiv 0\right\} \subset \left(H^{1}_{0}\left(\Omega\right)\right)^{d}$$

então pela Proposição (1.83), juntamente com a Observação 1.91 pode-se tomar $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ como uma base de V e construir-se o subespaço m-dimensional

$$V_m = [v_1, \ldots, v_m] \subset V$$

onde $v_j \ (j = 1, \ldots, m)$ são as $m's$ primeiras funções da base de V.

Para que o problema variacional apresentado em 3.27 faça sentido procurar-se-á soluções aproximadas da forma

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x) \quad , \text{com} \quad (x,t) \in Q_T \tag{3.31}$$

e onde $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ é a base espectral (hilbertiana, ortonormal tanto em V quanto em $L^2(\Omega)$), isto é, uma base constituída pelos autovetores do operador $-P\triangle$ (veja Proposição 1.98). Além disso, veremos que os coeficientes $c_{i,m}(t)$, $(i = 1, \ldots, m)$ serão funções reais (obtidas pela utilização de um teorema de existência de solução para um sistema de equações diferenciais ordinárias), e definidas em algum intervalo $[0, \tau_m[$, satisfazendo condições iniciais adequadas. Agora, como a primeira equação do problema 3.27 é linear em v, será satisfeita para toda $v \in V_m$ quando for satisfeita para cada $v_j \ (j = 1, \ldots, m)$, assim também deve ocorrer com a aproximação $u_m(x,t)$. Substituindo-se a expressão 3.31 no lugar de u e v por v_j nas equações de 3.27 encontra-se a formulação fraca para o problema (3.27) modelada em cada V_m , com o seguinte aspecto:

$$\begin{cases} \text{Achar } u_m(x,t) \text{ tal que} \\ \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}\right), v_j\right) + \left(\frac{n' u_m}{n^2}, v_j\right) + \left(\left(\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\right)\left(\dfrac{u_m}{n}\right)\right), v_j\right) + \\ +\mu\left(\frac{\nabla(v_j)}{n}, \nabla(u_m)\right) + \mu\left((v_j\cdot\nabla)\left(\frac{1}{n}\right), \nabla(u_m)\right) + \\ +\mu\left(F(n)\frac{u_m}{n}, v_j\right) = \langle g, v_j\rangle \quad , \ \forall v_j \in V_m \ \text{ em } D'(0,T) \ , \ j = 1, \ldots, m \\ u_m(0) = u_{0,m} \in H. \end{cases} \tag{3.32}$$

onde $u_{0,m} \to u_0$ em H quando $m \to \infty$. Note que $u_{0,m}$ é a projeção de $u_0 \in H$ sobre o subespaço V_m, onde $u_{0,m} \in V_m$. Isto significa mostrar que existe uma função

$$u_m : \Omega \times [0, \tau_m[\to V_m$$

para algum $\tau_m > 0$, que satisfaz ao problema variacional aproximado (3.32), que é o problema (3.27) traduzido para o subespaço $m-$dimensional V_m.

Observação 3.7 (1) Repare que $u(x,0) = u_0(x), \forall x \in \Omega$ e como

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x)$$

é natural propor que

$$u_m(0) = u_m(x,0) = u_{0,m}(x) = u_m(x,t)|_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(0) \cdot v_i(x) \qquad (3.33)$$

onde as funções $c_{i,m}(t)$, $(i = 1, \ldots, m)$, são do tipo $c_{i,m} : [0, \tau_m[\subset [0,T] \to \mathbb{R}$ e tais que a função $u_{0,m}$ definida em (3.33) satisfaça às condições iniciais do problema variacional aproximado (3.32), assim para a $i - \acute{e}sima$ componente de $u_{0,m}$ tem-se que $c_{i,m}(0) = \widetilde{c}_{i,m} \in \mathbb{R}$ e além disso de modo que se possa obter

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(0) \cdot v_i(x) = u_0(x) \in H$$

Note que $u_m(x,t)$ não satisfaz aos dados iniciais de (3.27), pois u_m está definida num espaço de dimensão finita V_m.
(2) De modo mais geral, podemos escolher $u_{0,m} \in V_m \subset H$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} u_{0,m} = u_0 \text{ em } H$$

(conforme [46], página 283).

A idéia do método é construir aproximações $u_m(x,t)$, via funções coordenadas $v_j(x)$ com $(j = 1, \ldots, m)$, para a solução $u(x,t)$. Cada uma destas aproximações $u_m(x,t)$ é uma combinação linear das $v_j's$ e representa a solução incógnita projetada num subespaço m-dimensional $V_m = [v_1, \ldots, v_m] \subset V$.

Observação 3.8 Repare que se encararmos a equação (3.5) a saber

$$\left[\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{n}\right)+\frac{un'}{n^2}\right)+\frac{u}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u}{n}\right)\right]-\mu\frac{\Delta u}{n}+\nabla p+\mu F\left(n\right)\frac{u}{n}=g \tag{3.34}$$

em forma de operador tal como

$$Lu\left(x,t\right)-g=0$$

as soluções aproximadas $u_m\left(x,t\right)$ terão um erro residual $Lu_m\left(x,t\right)-g$ não necessariamente nulo a menos que a solução verdadeira u ocorra de pertencer ao espaço V_m (para algum valor particular de m), e se assim fosse, as suas componentes em V_m deveriam se anular: o que significaria que a equação original (3.34) é válida no subespaço $V_m\subset V$.

No sentido de obtermos uma solução aproximada de Galerkin em V_m adaptaremos o procedimento indicado em [46] (páginas 283 a 284). Substituindo-se (3.31) na primeira equação de (3.32) vem

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n(x,t)}\sum_{i=1}^{m}c_{i,m}\left(t\right)v_i\left(x\right)\right),v_j\left(x\right)\right)+\left(\frac{n'}{n^2}\sum_{i=1}^{m}c_{i,m}\left(t\right)v_i\left(x\right),v_j\left(x\right)\right)\\+\left(\left(\frac{1}{n(x,t)}\sum_{i=1}^{m}c_{i,m}\left(t\right)v_i\left(x\right)\right)\cdot\nabla\left(\frac{1}{n(x,t)}\sum_{k=1}^{m}c_{k,m}\left(t\right)v_k\left(x\right)\right),v_j\left(x\right)\right)+\\+\mu\left(\frac{\nabla(v_j(x))}{n(x,t)},\nabla\left(\frac{1}{n(x,t)}\sum_{i=1}^{m}c_{i,m}\left(t\right)v_i\left(x\right)\right)\right)+\\+\mu\left(\left(\left(v_j\left(x\right)\right)\cdot\nabla\right)\left(\frac{1}{n(x,t)}\right),\nabla\left(\frac{1}{n(x,t)}\sum_{i=1}^{m}c_{i,m}\left(t\right)v_i\left(x\right)\right)\right)+\\+\mu\left(\left(\frac{F(n)}{n(x,t)}\sum_{i=1}^{m}c_{i,m}\left(t\right)v_i\left(x\right)\right),v_j\left(x\right)\right)=\left(g,v_j\left(x\right)\right)\quad,\ \text{para}\ \ j=1,\ldots,m\end{array}\right. \tag{3.35}$$

e a seguir destacando-se cada um dos termos obtidos, tem-se

$$A_1 = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n(x,t)} \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x) \right), v_j(x) \right)$$

$$A_2 = \left(\frac{n'}{n^2} \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x), v_j(x) \right)$$

$$A_3 = \left(\left(\frac{1}{n(x,t)} \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x) \right) \cdot \nabla \left(\frac{1}{n(x,t)} \sum_{k=1}^{m} c_{k,m}(t)\, v_k(x) \right), v_j(x) \right)$$

$$A_4 = \mu \left(\frac{\nabla(v_j(x))}{n(x,t)}, \nabla \left(\frac{1}{n(x,t)} \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x) \right) \right)$$

$$A_5 = \mu \left(\left((v_j(x)) \cdot \nabla \right) \left(\frac{1}{n(x,t)} \right), \nabla \left(\frac{1}{n(x,t)} \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x) \right) \right)$$

$$A_6 = \mu \left(\left(\frac{F(n)}{n(x,t)} \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x) \right), v_j(x) \right)$$

$$A_7 = (g, v_j(x))$$

Repare que

$$\begin{aligned} A_1 = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n(x,t)} \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x) \right), v_j(x) \right) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{c'_{i,m}(t).n - c_{i,m}(t).n'}{n^2} v_i(x), v_j(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} c'_{i,m}(t) \,. \left(\frac{v_i(x)}{n}, v_j(x) \right) - \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t) \,. \left(\frac{n'}{n^2} v_i(x), v_j(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} c'_{i,m}(t) \,.\alpha_{i,j}(t) - A_2 \end{aligned}$$

note que aqui estamos representando por $c'_{i,m}$ e n' as derivadas em relação a t, assim obtém-se

$$A_1 + A_2 = \sum_{i=1}^{m} c'_{i,m}(t) \,.\alpha_{i,j}(t) \quad , \quad \text{para} \;\; j = 1, \ldots, m \tag{3.36}$$

onde

$$\alpha_{i,j}(t) = \left(\frac{v_i(x)}{n}, v_j(x) \right) \quad , \quad \text{com } i, j = 1, \ldots, m \tag{3.37}$$

A seguir considerando o termo indicado como A_3 na equação (3.35), vem

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \left(\left(\frac{1}{n(x,t)}\sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, v_i(x)\right) \cdot \nabla\left(\frac{1}{n(x,t)}\sum_{k=1}^{m} c_{k,m}(t)\, v_k(x)\right), v_j(x)\right) \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\, \frac{v_i(x)}{n(x,t)}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} c_{k,m}(t)\, \nabla \frac{v_k(x)}{n(x,t)}\right), v_j(x)\right)
\end{aligned}
$$

logo

$$A_3 = \sum_{i,k=1}^{m} c_{i,m}(t)\,.\gamma_{i,k,j}(t)\,.c_{k,m}(t) \quad , \quad \text{para} \ \ j = 1, \ldots, m \tag{3.38}$$

onde $c_{i,m}$ e $c_{k,m}$ são funções reais de t e

$$\gamma_{i,k,j}(t) = \left(\frac{v_i(x)}{n(x,t)} \cdot \nabla \frac{v_k(x)}{n(x,t)}, v_j(x)\right) \tag{3.39}$$

Agora

$$
\begin{gathered}
A_4 + A_5 + A_6 = \\
= \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\,.\mu. \left[\begin{array}{c}
\left(\frac{\nabla(v_j(x))}{n(x,t)}, \nabla\left(\frac{1}{n(x,t)} v_i(x)\right)\right) + \\
+\left(\left((v_j(x)) \cdot \nabla\right)\left(\frac{1}{n(x,t)}\right), \nabla\left(\frac{1}{n(x,t)} v_i(x)\right)\right) + \\
+\left(\left(\frac{F(n)}{n(x,t)} v_i(x)\right), v_j(x)\right)
\end{array}\right]
\end{gathered}
$$

chamando-se

$$\beta_{i,j}(t) = \mu. \left(\begin{array}{c}
\left(\frac{\nabla(v_j(x))}{n(x,t)}, \nabla\left(\frac{1}{n(x,t)} v_i(x)\right)\right) + \\
+\left(\left((v_j(x)) \cdot \nabla\right)\left(\frac{1}{n(x,t)}\right), \nabla\left(\frac{1}{n(x,t)} v_i(x)\right)\right) + \\
+\left(\left(\frac{F(n)}{n(x,t)} v_i(x)\right), v_j(x)\right)
\end{array}\right) \tag{3.40}$$

tem-se

$$A_4 + A_5 + A_6 = \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t)\,.\beta_{i,j}(t) \quad , \quad \text{para} \ \ j = 1, \ldots, m. \tag{3.41}$$

Considerando agora o último termo destacado na equação (3.35), temos

$$A_7 = (g, v_j(x)) = \delta_j(t) \quad , \quad \text{para} \ \ j = 1, \ldots, m \tag{3.42}$$

Conseqüentemente a partir das considerações feitas na Observação (3.7) e junto com as equações (3.36), (3.38), (3.41), e (3.42) pode-se reescrever abreviadamente a equação (3.35) e obter-se o sistema não linear de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \left[\alpha_{i,j}(t) . c'_{i,m}(t) + \beta_{i,j}(t).c_{i,m}(t) + \sum_{k=1}^{m} c_{i,m}(t) . \gamma_{i,k,j}(t) . c_{k,m}(t) \right] = \delta_j(t) \\ \hfill \forall t \in]0, \tau_m[\subset [0,T] \\ c_{j,m}(0) = \widetilde{c}_{j,m} \quad , \quad \text{para} \ \ j = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{3.43}$$

Vejamos os resultados auxiliares importantes antes de prosseguir na busca de uma solução aproximada de Galerkin em V_m.

Lema 3.9 *Seja a matriz $A = (\alpha_{i,j}(t))$, onde $\alpha_{i,j}(t)$ é dado conforme a equação (3.37). A é inversível.*

Demonstração. (do lema 3.9). De fato, a matriz A é não singular pois para $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, m)$ se

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{v_1(x)}{n}, v_1(x)\right) & \cdots & \left(\frac{v_m(x)}{n}, v_1(x)\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{v_1(x)}{n}, v_m(x)\right) & \cdots & \left(\frac{v_m(x)}{n}, v_m(x)\right) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

isto equivale a dizer

$$\begin{cases} \left(\frac{v_1(x)}{n}, v_1(x)\right) .\lambda_1 + & \ldots & + \left(\frac{v_m(x)}{n}, v_1(x)\right) .\lambda_m & = & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{v_1(x)}{n}, v_m(x)\right) .\lambda_1 & \cdots & + \left(\frac{v_m(x)}{n}, v_m(x)\right) .\lambda_m & = & 0 \end{cases}$$

usando as propriedades do produto escalar em $L^2(\Omega)$, vem:

$$\begin{cases} \left(\lambda_1 . \frac{v_1(x)}{n}, v_1(x)\right) + & \ldots & + \left(\lambda_m . \frac{v_m(x)}{n}, v_1(x)\right) & = & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\lambda_1 . \frac{v_1(x)}{n}, v_m(x)\right) & \cdots & + \left(\lambda_m . \frac{v_m(x)}{n}, v_m(x)\right) & = & 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} \left(\lambda_1.\frac{v_1(x)}{n} + \cdots + \lambda_m.\frac{v_m(x)}{n}, v_1(x)\right) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\lambda_1.\frac{v_1(x)}{n} + \cdots + \lambda_m.\frac{v_m(x)}{n}, v_m(x)\right) & = & 0 \end{cases}$$

Mas como $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de $V_m \subset L^2(\Omega) \cap V$, então o primeiro argumento dos produtos escalares indicados acima, a saber

$$\left(\lambda_1.\frac{v_1(x)}{n} + \cdots + \lambda_m.\frac{v_m(x)}{n}, v_i(x)\right) = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, m$$

é ortogonal em relação a todos os vetores v_i com i variando $i = 1, \ldots, m$ assim neste caso

$$\lambda_1.\frac{v_1(x)}{n} + \cdots + \lambda_m.\frac{v_m(x)}{n} = \overrightarrow{O}$$

Além disso, como $0 < n_0 \leq n(x,t) \leq 1$ tem-se que

$$\lambda_1.v_1(x) + \cdots + \lambda_m.v_m(x) = n.\overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}$$

Conseqüentemente $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ visto que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é um conjunto $L.I.$, portanto a matriz A é invertível, (cfe [22], página 29).

$\blacksquare$

Observação 3.10 A matriz $A = (\alpha_{i,j}(t))$, onde $\alpha_{i,j}(t)$ é dado conforme a equação (3.37), sendo não singular assim o é também sua transposta pois

$$I_n = (I_n)^T = \left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T A^T,$$

e além disso $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Sem perda de generalidade no intuito de simplificar a notação, ilustremos o problema (3.43) quando $m = 2$. Assim, partindo-se de

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \left[\alpha_{i,j}(t) . c'_{i,2}(t) + \beta_{i,j}(t) . c_{i,2}(t) + \sum_{k=1}^{2} c_{i,2}(t) . \gamma_{i,k,j}(t) . c_{k,2}(t) \right] = \delta_j(t) \\ \\ c_{i,2}(0) = \widetilde{c}_{i,2} \qquad , \qquad \text{para} \;\; j = 1, 2 \end{cases} \tag{3.45}$$

quando $j = 1$, e $m = 2$ são fixados, tem-se para cada parcela do primeiro membro da equação acima

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \left[\alpha_{i,1}(t) . c'_{i,2}(t) \right] &= \alpha_{1,1}(t) . c'_{1,2}(t) + \alpha_{2,1}(t) . c'_{2,2}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}(t) & \alpha_{2,1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_{1,2}(t) \\ c'_{2,2}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \left[\beta_{i,j}(t) . c_{i,2}(t) \right] &= \beta_{1,1}(t) . c_{1,2}(t) + \beta_{2,1}(t) . c_{2,2}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \beta_{1,1}(t) & \beta_{2,1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,2}(t) \\ c_{2,2}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \left[\sum_{k=1}^{2} c_{i,2}(t) . \gamma_{i,k,1}(t) . c_{k,2}(t) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left[c_{i,2}(t) . \gamma_{i,1,1}(t) . c_{1,2}(t) + c_{i,2}(t) . \gamma_{i,2,1}(t) . c_{2,2}(t) \right]$$

$$= \left[c_{1,2}(t) . \gamma_{1,1,1}(t) . c_{1,2}(t) + c_{1,2}(t) . \gamma_{1,2,1}(t) . c_{2,2}(t) \right] +$$

$$+ \left[c_{2,2}(t) . \gamma_{2,1,1}(t) . c_{1,2}(t) + c_{2,2}(t) . \gamma_{2,2,1}(t) . c_{2,2}(t) \right]$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\sum_{k=1}^{2} c_{i,2}(t)\,.\gamma_{i,k,1}(t)\,.c_{k,2}(t)\right]=$$

$$=c_{1,2}(t)\,.\left[\gamma_{1,1,1}(t)\,.c_{1,2}(t)+\gamma_{1,2,1}(t)\,.c_{2,2}(t)\right]+$$

$$+c_{2,2}(t)\,.\left[\gamma_{2,1,1}(t)\,.c_{1,2}(t)+\gamma_{2,2,1}(t)\,.c_{2,2}(t)\right]$$

ou ainda

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\sum_{k=1}^{2} c_{i,2}(t)\,.\gamma_{i,k,1}(t)\,.c_{k,2}(t)\right]=$$
$$=\begin{pmatrix} c_{1,2}(t) & c_{2,2}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_{1,1,1}(t)\,.c_{1,2}(t)+\gamma_{1,2,1}(t)\,.c_{2,2}(t)\\ \\ \gamma_{2,1,1}(t)\,.c_{1,2}(t)+\gamma_{2,2,1}(t)\,.c_{2,2}(t)\end{pmatrix}$$

logo

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\sum_{k=1}^{2} c_{i,2}(t)\,.\gamma_{i,k,1}(t)\,.c_{k,2}(t)\right]=$$
$$=\begin{pmatrix} c_{1,2}(t) & c_{2,2}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_{1,1,1}(t) & \gamma_{1,2,1}(t)\\ \gamma_{2,1,1}(t) & \gamma_{2,2,1}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{1,2}(t)\\ c_{2,2}(t)\end{pmatrix} \tag{3.48}$$

considerando-se as expressões matriciais em (3.46), (3.47) e (3.48), a equação (3.45) para $j=1$ pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix}\alpha_{1,1}(t) & \alpha_{2,1}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c'_{1,2}(t)\\ c'_{2,2}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_{1,1}(t) & \beta_{2,1}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{1,2}(t)\\ c_{2,2}(t)\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix} c_{1,2}(t) & c_{2,2}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_{1,1,1}(t) & \gamma_{1,2,1}(t)\\ \gamma_{2,1,1}(t) & \gamma_{2,2,1}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{1,2}(t)\\ c_{2,2}(t)\end{pmatrix}=\delta_1 \tag{3.49}$$

Analogamente, para $j = 2$ e $m = 2$ fixados encontra-se

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,2}(t) & \alpha_{2,2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,2}^{'}(t) \\ c_{2,2}^{'}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1,2}(t) & \beta_{2,2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,2}(t) \\ c_{2,2}(t) \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} c_{1,2}(t) & c_{2,2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,1,2}(t) & \gamma_{1,2,2}(t) \\ \gamma_{2,1,2}(t) & \gamma_{2,2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,2}(t) \\ c_{2,2}(t) \end{pmatrix} = \delta_2 \tag{3.50}$$

Agora, adotando-se a notação matricial para os termos envolvidos nas equações de (3.45) vem:

$$\left(A^T\right)^{(k)} = \left(k - \acute{e}sima \text{ linha de } A^T\right) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,k}(t) & \alpha_{2,k}(t) \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

$$\left(B^T\right)^{(k)} = \left(k - \acute{e}sima \text{ linha de } B^T\right) = \begin{pmatrix} \beta_{1,k}(t) & \beta_{2,k}(t) \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

$$\tag{3.53}$$

$$M_k = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1,k}(t) & \gamma_{1,2,k}(t) \\ \gamma_{2,1,k}(t) & \gamma_{2,2,k}(t) \end{pmatrix} \quad , \quad Y(t) = \begin{pmatrix} c_{1,2}(t) \\ c_{2,2}(t) \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

$$\tag{3.55}$$

$$Y^{'}(t) = \begin{pmatrix} c_{1,2}^{'}(t) \\ c_{2,2}^{'}(t) \end{pmatrix}$$

daí repare que cada uma das equações (3.49), e (3.50) representa as linhas da seguinte equação matricial

$$\begin{pmatrix} \left(A^T\right)^{(1)} \\ \left(A^T\right)^{(2)} \end{pmatrix} . \; Y^{'}(t) \; + \begin{pmatrix} \left(B^T\right)^{(1)} \\ \left(B^T\right)^{(2)} \end{pmatrix} . \; Y(t) \; +$$
$$+ \begin{pmatrix} (Y(t))^T M_1(t) Y(t) \\ (Y(t))^T M_2(t) Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

ou seja o problema apresentado em (3.45) tem sua representação matricial dada por

$$\begin{gathered}[A(t)]^T \,.\, Y'(t) \ + [B(t)]^T \,.\, Y(t) \ + \\ + \begin{pmatrix} (Y(t))^T M_1(t)\, Y(t) \\ (Y(t))^T M_2(t)\, Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{3.56}$$

Considerando-se o Lema (3.9, página 91) e a Observação (3.10, página 92), pode-se multiplicar pela matriz $\left(A^T\right)^{-1}$ todos os termos da equação (3.56) e isolando-se o termo $Y'(t)$ obtém-se a equação seguinte:

$$\begin{gathered}Y'(t) \ = -\left([A(t)]^T\right)^{-1} . [B(t)]^T \,.\, Y(t) \ + \\ -\left([A(t)]^T\right)^{-1} . \begin{pmatrix} (Y(t))^T M_1(t)\, Y(t) \\ (Y(t))^T M_2(t)\, Y(t) \end{pmatrix} + \\ + \left([A(t)]^T\right)^{-1} . \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{3.57}$$

renomeando as matrizes

$$\begin{gathered}C(t) = -\left([A(t)]^T\right)^{-1} . [B(t)]^T \\ L(t) = \left(-[A(t)]^{-1}\right) \\ G(t) = \left([A(t)]^T\right)^{-1} . \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{3.58}$$

e substituindo (3.58) na equação (3.57) obtemos

$$Y'(t) \ = C(t).\ Y(t) \ + L(t). \begin{pmatrix} (Y(t))^T M_1(t)\, Y(t) \\ (Y(t))^T M_2(t)\, Y(t) \end{pmatrix} + G(t) \tag{3.59}$$

uma forma matricial de EDO's equivalente à representação para o sistema não linear de equações diferenciais dado em (3.45, página 93), que é uma forma normal do tipo

$$Y'(t) = f\left(Y(t), t\right) \tag{3.60}$$

onde

$$f\left(Y, t\right) = C(t).\ Y \ + L(t). \begin{pmatrix} Y^T M_1\left(t\right) Y \\ Y^T M_2\left(t\right) Y \end{pmatrix} + G(t) \tag{3.61}$$

Mas como

$$u_2\left(x, t\right) = c_{1,2}\left(t\right).v_1\left(x\right) + c_{2,2}\left(t\right).v_2\left(x\right)$$

e para $t \in [0, \tau_2[\subset [0, T]$ tem-se que

$$u_2\left(x, 0\right) = c_{1,2}\left(0\right).v_1\left(x\right) + c_{2,2}\left(0\right).v_2\left(x\right) = \widetilde{c}_{1,2}.v_1\left(x\right) + \widetilde{c}_{2,2}.v_2\left(x\right)$$

isto significa que

$$Y(t)|_{t=0} = Y(0) = \begin{pmatrix} c_{1,2}\left(0\right) \\ c_{2,2}\left(0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{1,2} \\ \widetilde{c}_{2,2} \end{pmatrix} = Y_0 \tag{3.62}$$

isto é, para $i = 1, 2$ temos que $c_{i,2}\left(0\right)$ são as componentes da solução aproximada $u_2\left(x, t\right)$ relativa à base $\left\{v_1\left(x\right), v_2\left(x\right)\right\}$ do espaço $V_{2.}$ Conseqüentemente as equações (3.60) e (3.62) constituem o PVI abaixo

$$\begin{cases} Y'(t) = f\left(Y(t), t\right) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{3.63}$$

Note que como $M_1\left(t\right)$ e $M_2\left(t\right)$ são integráveis a Lebesgue em $L^1\left(0, T\right)$ daí a função $M\left(t\right)$ em

$$\left|Y^T M\left(t\right) Y\right| = \max\left\{\left|Y^T M_1\left(t\right) Y\right|, \left|Y^T M_2\left(t\right) Y\right|\right\}$$

também é integrável a Lebesgue em $L^1\left(0, T\right)$.
Por outro lado, a função $f\left(Y, t\right)$ dada em (3.61) está definida em qualquer vizinhança

$$R = \left\{(Y, t) \in \mathbb{R}^3 : \|Y - \xi\| \leq \alpha\ ,\ |t - \tau| \leq \beta\right\}$$

de um ponto fixo $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^3$. Além disso satisfaz às condições:

(i) $f(Y,t)$ é uma função mesurável na variável t para cada Y fixado, pois os termos das matrizes

$$C(t), L(t), M_1(t), M_2(t), \text{e } G(t)$$

são integráveis a Lebesgue em $L^1(0,T)$;
(ii) $f(Y,t)$ é contínua em Y para cada valor fixado de t devido ao formato de f em (3.61);
(iii) existe uma função

$$h(t) = |C(t)|.(\alpha + \|\xi\| + 1) + 2.(\alpha + \|\xi\| + 1)^2.|L(t)|.|M(t)| + |G(t)|$$

integrável à Lebesgue no intervalo $|t-\tau| \leq \beta$ tal que

$$|f(Y,t)| \leq h(t) \quad \text{para} \quad (Y,t) \in R$$

considerando que

$$\|Y-\xi\| \leq \alpha \Rightarrow \|Y\| \leq \alpha + \|-\xi\| \leq \alpha + \|\xi\| + 1$$

observe que

$$|f(Y,t)| = \left| C(t).\ Y \ + L(t). \begin{pmatrix} Y^T M_1(t) Y \\ Y^T M_2(t) Y \end{pmatrix} + G(t) \right|$$

$$\leq \left| C(t).\ Y \ \right| + \left| L(t). \begin{pmatrix} Y^T M_1(t) Y \\ Y^T M_2(t) Y \end{pmatrix} \right| + |G(t)|$$

Ou seja,

$$|f(Y,t)| \leq |C(t)|.\left| \ Y \ \right| + |L(t)|.\left| \begin{pmatrix} Y^T M_1(t) Y \\ Y^T M_2(t) Y \end{pmatrix} \right| + |G(t)|$$

e agora tomando-se

$$\left|Y^T M(t) Y\right| = \max\left\{\left|Y^T M_1(t) Y\right|, \left|Y^T M_2(t) Y\right|\right\}$$

pode-se escrever

$$|f\,(Y,t)| \leq |C(t)|\,.\left|\ Y\ \right| + 2\,|L(t)|\,.\left|Y^T M\,(t)\,Y\right| + |G(t)|$$

$$\leq |C(t)|\,.\left|\ Y\ \right| + 2.\,|L(t)|\,.\left|Y^T\right|.\,|M\,(t)|\,|Y| + |G(t)|$$

donde se segue que

$$\begin{aligned} |f\,(Y,t)| &\leq |C(t)|\,.\left|\ Y\ \right| + 2.\,|Y|^2\,.\,|L(t)|\,.\,|M\,(t)| + |G(t)| \\ &\leq |C(t)|\,.\,(\alpha + \|\xi\| + 1) + 2.\,(\alpha + \|\xi\| + 1)^2\,.\,|L(t)|\,.\,|M\,(t)| + |G(t)| \end{aligned}$$

Note que como as condições (i), (ii) e (iii) acima são as da hipótese do Teorema de Carathédory (Teorema 1.104, página 47), então é assegurado que existe uma solução φ da equação $Y^{'}(t) = f\,(Y(t),t)$ a menos de um conjunto de medida nula em algum intervalo $|t-\tau| \leq \widehat{\beta}$, $(\widehat{\beta} > 0)$ satisfazendo a $\varphi\,(\tau) = \xi$.
Portanto acabamos de mostrar que existe uma solução $\begin{pmatrix} c_{1,2}\,(t) \\ c_{2,2}\,(t) \end{pmatrix}$ para o sistema de EDO's oriundo do problema (3.43) quando $m = 2$, ao concluirmos que existe a solução do PVI (3.63).
Deste modo é possível estabelecer este resultado para cada m, isto é, a partir do sistema não linear de equações diferenciais (3.43) poder-se-á obter um PVI análogo ao encontrado em (3.63), com uma solução maximal definida em algum intervalo $[0, t_m]$. Se $t_m < T$, então $|u_m\,(t)|$ deve tender para $+\infty$ á medida que $t \to t_m$: as estimativas a priori mostrarão que isto não ocorre e por conseguinte $t_m = T$.(Cfe [46], página 284).

Assim a primeira equação de (3.32) é uma soma algébrica de produtos escalares em $L^2\,(\Omega)$, da qual se origina um sistema com m equações diferenciais ordinárias não-lineares para as funções $c_{j,m}$: uma para cada $j = 1, \ldots, m$, admitindo pelo menos uma solução definida no intervalo $[0, T]$.

3.4 Estimativas a priori

Nesta etapa estabeleceremos algumas estimativas sobre u_m (chamadas estimativas "a priori" sobre u) para mostrar que a sequência das aproximações $\{u_m\}$ pertence a bolas fixadas (isto é, independentes de m) em certos espaços normados, e de modo que a partir destas estimativas se possa efetuar a "passagem ao limite". Também com estas estimativas podemos tomar a solução u_m que está definida, em princípio, num intervalo $[0, \tau_m]$ e prolongá-la no intervalo $[0, T]$, e a seguir na próxima etapa, finalmente considerar-se-á a passagem ao limite na dimensão m, para estender o resultado para dimensão infinita.
Recorde-se que para o problema variacional apresentado em (3.27) estamos procurando soluções aproximadas da forma

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} c_{i,m}(t) \cdot v_i(x)$$

onde $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ é a base espectral (hilbertiana, ortonormal tanto em V quanto em $L^2(\Omega)$), isto é, uma base constituída pelos autovetores do operador $-P\triangle$. (Veja proposição (1.98), página 39). Considerando-se o subespaço m-dimensional

$$V_m = [v_1, \ldots, v_m] \subset V,$$

onde

$$v_i \ , \ (i = 1, \ldots, m)$$

são as $m's$ primeiras funções da base de V, e fazendo-se

$$v = v_j \ ,$$

para cada

$$v_j \in V_m \ ,$$

recorde-se que a formulação fraca (3.32) modelada em V_m tem o seguinte aspecto

$$\begin{cases} \text{Achar } u_m\left(x,t\right) \text{ tal que} \\ \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}\right), v_j\left(x\right)\right) + \left(\frac{n' u_m}{n^2}, v_j\left(x\right)\right) + \left(\left(\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla_x\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right), v_j\left(x\right)\right) + \\ +\mu\left(\nabla_x\left(u_m\right), \frac{\nabla_x\left(v_j(x)\right)}{n}\right) + \mu\left(\nabla_x\left(u_m\right), \left(v_j\left(x\right)\cdot\nabla_x\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \\ +\mu\left(F\left(n\right)\frac{u_m}{n}, v_j\left(x\right)\right) = \langle g, v_j(x)\rangle \quad , \quad \forall v_j\left(x\right)\in V_m \quad \text{em } D'\left(0,T\right) \\ u_m\left(0\right) = u_{0,m}\in H. \end{cases} \tag{3.64}$$

mas se multiplicarmos a primeira equação do sistema (3.64) por

$$c_{j,m} = c_{j,m}\left(t\right) \ ,$$

e usarmos as propriedades de produto interno em $L^2\left(\Omega\right)$ pode-se escrever

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}\right), c_{j,m}\left(t\right)v_j\right) + \left(\frac{n' u_m}{n^2}, c_{j,m}\left(t\right)v_j\right) + \left(\left(\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla_x\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right), c_{j,m}\left(t\right)v_j\right) + \\ &+\mu\left(\nabla_x\left(u_m\right), \frac{\nabla_x\left(c_{j,m}(t)v_j\right)}{n}\right) + \mu\left(\nabla_x\left(u_m\right), \left(c_{j,m}\left(t\right)v_j\cdot\nabla_x\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \\ &+\mu\left(F\left(n\right)\frac{u_m}{n}, c_{j,m}\left(t\right)v_j\right) = \langle g, c_{j,m}\left(t\right)v_j\rangle \end{aligned} \tag{3.65}$$

e agora fazendo-se a soma sobre j , variando $j = 1, \ldots, m$ teremos:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}\right), u_m\left(x,t\right)\right) + \left(\frac{n' u_m}{n^2}, u_m\left(x,t\right)\right) + \left(\left(\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla_x\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right), u_m\left(x,t\right)\right) + \\ &+\mu\left(\nabla_x\left(u_m\right), \frac{\nabla_x\left(u_m(x,t)\right)}{n}\right) + \mu\left(\nabla_x\left(u_m\right), \left(u_m\left(x,t\right)\cdot\nabla_x\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \\ &+\mu\left(F\left(n\right)\frac{u_m}{n}, u_m\left(x,t\right)\right) = \langle g, u_m(x,t)\rangle \end{aligned} \tag{3.66}$$

Afirmação 01.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}\right),u_m\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n'}{n^2}u_m,u_m\right) \tag{3.67}$$

Demonstração. Ora

$$\frac{d}{dt}\left(w\left(t\right),w\left(t\right)\right)=\left(w'\left(t\right),w\left(t\right)\right)+\left(w\left(t\right),w'\left(t\right)\right)=2\left(w'\left(t\right),w\left(t\right)\right) \tag{3.68}$$

daí

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{\sqrt{n}},\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right),\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right)\right]=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right),\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right)$$

Repare que poderíamos ter derivado direto a partir da última expressão do encadeamento de igualdades acima, mas usa-se a propriedade de existência de inversos multiplicativos antes de derivar para melhor compararmos com o 1° e 2° termos do lado esquerdo da equação 3.66, assim

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right),\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}.\sqrt{n}\right),\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\left(\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}\right)\right)\sqrt{n}+\frac{u_m}{n}\frac{n'}{2\sqrt{n}},\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right)$$

ou seja

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2=\left(\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}\right)\right)\sqrt{n},\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{u_m}{n}\frac{n'}{\sqrt{n}},\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right)$$

portanto

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}\right),u_m\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n'}{n^2}u_m,u_m\right).$$

■

Logo, a partir de equação (3.67) temos

$$\left(\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}\right)\right),u_m\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2-\frac{1}{2}\left(\frac{n'}{n^2}u_m,u_m\right) \tag{3.69}$$

e substituindo esta equação (3.69) na equação (3.66), vem:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+\frac{1}{2}\left(\frac{n'}{n^2}u_m,u_m\right)+\left(\left(\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right),u_m\right)+$$

$$+\mu\left(\nabla\left(u_m\right),\frac{\nabla(u_m)}{n}\right)+\mu\left(\nabla\left(u_m\right),\left(u_m\cdot\nabla\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right)+$$

$$+\mu\left(F\left(n\right)\frac{u_m}{n},u_m\right)=\langle g,u_m\rangle$$

ou seja

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+\left(\frac{n'}{n^2}u_m,u_m\right)+2\left(\left(\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right),u_m\right)+\\&+2\mu\left(\nabla\left(u_m\right),\frac{\nabla(u_m)}{n}\right)+2\mu\left(\nabla\left(u_m\right),\left(u_m\cdot\nabla\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\\&+2\mu\left(F\left(n\right)\frac{u_m}{n},u_m\right)=\langle g,u_m\rangle\end{aligned}\tag{3.70}$$

note que o terceiro termo do primeiro membro da equação (3.70), é tal que

$$2\left(\left(\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right),u_m\right)=$$

$$=2\int_\Omega\left(\left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right).u_m.dx=2\int_\Omega\left(\left(u_m\cdot\nabla\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right).\frac{u_m}{n}.dx$$

$$=2.b\left(u_m,\frac{u_m}{n},\frac{u_m}{n}\right)=0\tag{3.71}$$

pelo lema (1.103) e, considerando que o quarto termo da esquerda da equação (3.70) pode ser escrito como

$$2\mu\left(\nabla\left(u_m\right),\frac{\nabla\left(u_m\right)}{n}\right)=2\mu\int_\Omega\nabla\left(u_m\right)\frac{\nabla\left(u_m\right)}{n}dx=2\mu\int_\Omega\frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}}\frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}}dx$$

$$2\mu\left(\nabla\left(u_m\right),\frac{\nabla\left(u_m\right)}{n}\right)=2\mu\left\|\frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\tag{3.72}$$

além disso, o sexto termo da esquerda da equação (3.70) pode ser escrito como

$$2\mu\left(F(n)\frac{u_m}{n},u_m\right)=$$

$$=2\mu\int_\Omega F(n)\frac{u_m}{n}u_m dx=2\mu\int_\Omega\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m dx$$

$$=2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.73}$$

assim substituindo as equações (3.71) , (3.72) e (3.73) em (3.70), vem:

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\left\|\tfrac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+2\mu\left\|\tfrac{\nabla_x(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+2\mu\left\|\sqrt{\tfrac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}=\\&=2\langle g,u_m\rangle-\left(\tfrac{n'}{n^2}u_m,u_m\right)-2\mu\left(\nabla_x(u_m),(u_m\cdot\nabla_x)\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)\end{aligned} \tag{3.74}$$

3.4.1 Majorações para $\langle g,u_m\rangle_{V'V}$

Repare que, por hipótese (ver observação 3.1, na página 82), tem-se que

$$g\in L^2(0,T,V')\Rightarrow g(t)\in V',\forall t\in[0,T],$$

isto é,

$$\begin{aligned}g(t):V&\to\mathbb{R}\\v&\longmapsto\langle g(t),v\rangle_{V'V}\end{aligned}$$

dai como $g(t)$ é um funcional linear limitado tem-se que:

$$|\langle g(t),u_m\rangle_{V'V}|\leq\|g(t)\|_{V'}\cdot\|u_m\|_V=\|g(t)\|_{V'}\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.75}$$

agora, usando-se o lema (1.2), vem:

$$|\langle g, u_m \rangle_{V'V}| \leq$$

$$\leq \|g(t)\|_{V'} . \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq a \|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4a} \|g(t)\|^2_{V'}$$

$$\leq \|g(t)\|_{V'} . \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq a \left\| \frac{\nabla (u_m)}{\sqrt{n}} . \sqrt{n} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4a} \|g(t)\|^2_{V'}$$

como $\sqrt{n} < 1$, teremos:

$$|\langle g, u_m \rangle_{V'V}| \leq \|g(t)\|_{V'} . \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq a \left\| \frac{\nabla (u_m)}{\sqrt{n}} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4a} \|g(t)\|^2_{V'} \tag{3.76}$$

daí usando esta majoração dada pela inequação (3.76), obtemos a partir da equação (3.74) a seguinte inequação

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} \left\| \tfrac{u_m}{\sqrt{n}} \right\|^2 + 2\mu \left\| \tfrac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mu \left\| \sqrt{\tfrac{F(n)}{n}} u_m \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2a \left\| \tfrac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ + \tfrac{1}{2a} \|g(t)\|^2_{V'} - \left[\left(\tfrac{n'}{n^2} u_m, u_m \right) + 2\mu \left(\nabla(u_m), (u_m \cdot \nabla) \left(\tfrac{1}{n} \right) \right) \right] \end{aligned} \tag{3.77}$$

e majorando-se a partir do segundo membro da inequação (3.77), vem

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} \left\| \tfrac{u_m}{\sqrt{n}} \right\|^2 + 2\mu \left\| \tfrac{\nabla_x(u_m)}{\sqrt{n}} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mu \left\| \sqrt{\tfrac{F(n)}{n}} u_m \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2a \left\| \tfrac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ + \tfrac{1}{2a} \|g(t)\|^2_{V'} + \left| \left(\tfrac{n'}{n^2} u_m, u_m \right) \right| + 2\mu \left| \left(\nabla(u_m), (u_m \cdot \nabla) \left(\tfrac{1}{n} \right) \right) \right| \end{aligned} \tag{3.78}$$

Observação 3.11 Enfatizemos que, como é usual em trabalhos envolvendo estimativas em equações diferenciais parciais, também aqui usar-se-á a letra C para denotar uma constante positiva genérica dependendo somente de Ω e dos dados do problema, que inclusive poderá mudar de passo a passo. Somente nos casos em que for necessário distinguir certas constantes ou tornar mais claro a argumentação é que utilizaremos outras letras para denotar constantes.

Com objetivo de usar desigualdades do tipo de Gronwall (lemas (1.105) e (1.106)) temos que majorar as duas últimas parcelas da inequação acima (3.78). Isto pode ser feito de duas maneiras distintas.

3.4.2 Majorações para $\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right)$

(I) Suponhamos que $n'(x,t) \in L^1(0,T,L^\infty(\Omega))$, isto é,

$$\int_0^T \|n'(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\, dt < \infty$$

e considerando-se fixo $t \in [0,T]$, tem-se que

$$|n'(x,t)| \leq \|n'(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

daí neste caso tem-se

$$\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right) = \int_\Omega \frac{n'(x,t)}{(n(x,t))^2}.u_m(x,t).u_m(x,t)\, dx$$

$$\leq \int_\Omega \frac{\|n'(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}}{n(x,t)}.\frac{|u_m(x,t)|^2}{n(x,t)}dx \leq \frac{\|n'(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}}{n_0}\int_\Omega \left|\frac{u_m(x,t)}{\sqrt{n(x,t)}}\right|_{\mathbb{R}^d}^2 dx$$

ou seja

$$\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right) \leq \frac{1}{n_0}.\|n'(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\left\|\frac{u_m(x,t)}{\sqrt{n(x,t)}}\right\|^2 \tag{3.79}$$

(**relacionar-se-á com a condição de integrabilidade associada com desigualdade de Gronwall**).

(II) E se supormos que $n'(x,t) \in L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)$, isto é,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|n'(\cdot,t)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} < \infty$$

e quando se fixa $t \in [0,T]$, tem-se $n'(\cdot,t) \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, assim

$$\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right) = \int_\Omega \frac{n'(x,t)}{(n(x,t))^2}.\left|u_m(x,t)\right|^2_{\mathbb{R}^d}\ .dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{n_0}\int_\Omega n'.\left|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right|^2_{\mathbb{R}^d} dx$$

como $n'(x,t) \leq |n'(x,t)|$, então usando a desigualdade de Hölder vem:

$$\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n_0}\left(\int_\Omega |n'|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.\left(\int_\Omega \left|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right|^{2\times 3} dx\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{n_0}\left\|n'(\cdot,t)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^6(\Omega)}$$

Assim

$$\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right) \leq \frac{1}{n_0}\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}\cdot\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^6(\Omega)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n_0^2}\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}\cdot\left\|u_m\right\|^2_{L^6(\Omega)}$$

Agora, vale lembrar que de acordo com a definição (1.63, página 24) e a observação (1.64, item (ii), subitem 2) tem-se que

$$\left\|u_m\right\|_{L^6(\Omega)} \leq C_1\cdot\left\|\nabla(u_m)\right\|_{L^2(\Omega)}$$

portanto

$$\frac{1}{n_0^2}\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}\cdot\left\|u_m\right\|^2_{L^6(\Omega)} \leq \frac{C_1^2}{n_0^2}\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}\cdot\left\|\nabla u_m\right\|^2$$

e por outro lado

$$\left\|\nabla u_m\right\|_{L^2(\Omega)} = \left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\sqrt{n}\right\| \leq \left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|$$

conseqüentemente

$$\left(\frac{n'}{n^2}u_m, u_m\right) \leq \frac{C_1^2}{n_0^2}\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \leq C\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \qquad (3.80)$$

(**associar-se-á ao emprego de norma pequena**).

3.4.3 Majorações para $\left(u_m \cdot \nabla\left(\frac{1}{n}\right), \nabla\left(u_m\right)\right)$

Note que este é um dos fatores do último termo no segundo membro da inequação (3.78, página 105), e como $\nabla\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{\nabla(n)}{n^2}$ vale dizer que

$$\left(u_m \cdot \nabla\left(\frac{1}{n}\right), \nabla\left(u_m\right)\right) = -\left(\nabla\left(u_m\right), u_m \cdot \frac{\nabla\left(n\right)}{n^2}\right)$$

(I) Supondo-se que $\nabla n \in L^\infty\left(0, T, L^3(\Omega)\right)$, e indicando-se como $n' = \frac{\partial n}{\partial t}$ tem-se que

$$\left\|n'\left(\cdot, t\right)\right\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} = \sup \underset{t\in]0,T[}{ess} \left\|n'\left(\cdot, t\right)\right\|_{L^3(\Omega)} < \infty$$

Agora considerando-se fixo $t \in [0, T]$, e como

$$u_m \cdot \nabla\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{u_m \cdot \nabla\left(n\right)}{n^2} \in L^2(\Omega),\ \nabla u_m \in L^2(\Omega)$$

obtém-se a inequação seguinte ao usar a desigualdade de Hölder

$$\begin{gathered}\left|\left(u_m \cdot \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right), \nabla\left(u_m\right)\right)\right| = \\ = \left|-\left(\nabla u_m, \tfrac{u_m \cdot \nabla(n)}{n^2}\right)\right| \leq \left\|\nabla u_m\right\|_{L^2(\Omega)} \cdot \left\|\tfrac{u_m \cdot \nabla(n)}{n^2}\right\|_{L^2(\Omega)}\end{gathered} \qquad (3.81)$$

e como $0 < n_0 \leq n < 1$ segue-se de (3.81)

$$\left|\left(u_m \cdot \nabla\left(\frac{1}{n}\right), \nabla\left(u_m\right)\right)\right| \leq \left\|\nabla u_m\right\|_{L^2(\Omega)} \cdot \frac{1}{n_0^2} \cdot \left\|u_m \cdot \nabla\left(n\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \qquad (3.82)$$

mas considerando-se que

$$\left\|u_m \cdot \nabla\left(n\right)\right\|_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \left(\int_\Omega |u_m \cdot \nabla(n)|^2_{\mathbb{R}^d} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega \left(|u_m|_{\mathbb{R}^d} \cdot |\nabla(n)|_{\mathbb{R}^d} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\| |u_m|_{\mathbb{R}^d} \cdot |\nabla(n)|_{\mathbb{R}^d} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

pois

$$|u_m \cdot \nabla(n)|^2_{\mathbb{R}^d} =$$

$$= \left| \left(u_m^1 \tfrac{\partial n}{\partial x_1}, \ldots, u_m^d \tfrac{\partial n}{\partial x_d} \right) \right|^2_{\mathbb{R}^d} \leq |u_m|^2_{\mathbb{R}^d} \cdot |\nabla n|^2_{\mathbb{R}^d}$$

assim da inequação (3.82) obtemos:

$$\left| \left(u_m \cdot \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right), \nabla(u_m) \right) \right| \leq \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \cdot \left(\tfrac{1}{n_0^2} \cdot \left\| |u_m|_{\mathbb{R}^d} \cdot |\nabla n|_{\mathbb{R}^d} \right\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

a seguir usando o lema (1.2, página 1), pode-se escrever

$$\left| \left(u_m \cdot \nabla\left(\frac{1}{n}\right), \nabla u_m \right) \right| \leq a. \|\nabla u_m\|^2 + \frac{1}{4an_0^4} \left\| |u_m|_{\mathbb{R}^d} \cdot |\nabla n|_{\mathbb{R}^d} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.83}$$

mas $1 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}}$, daí da inequação (3.83) obtém-se a seguinte

$$\left| \left(u_m \cdot \nabla\left(\frac{1}{n}\right), \nabla u_m \right) \right| \leq a. \left\| \frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4an_0^4} \left\| |u_m|_{\mathbb{R}^d} \cdot |\nabla n|_{\mathbb{R}^d} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.84}$$

Agora ao aplicarmos a desigualdade de Hölder no segundo termo do membro à direita da inequação dada em (3.84) vem:

$$\left| \left(u_m \nabla\left(\frac{1}{n}\right), \nabla u_m \right) \right| \leq a. \left\| \frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \tag{3.85}$$

$$+ \frac{1}{4a.n_0^4} \left(\int_\Omega |\nabla n|^{2p} \, dx \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_\Omega |u_m|^{2q} \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Esta escolha das potências p e q depende dos espaços de funções onde vamos estudar a solução da EDP em questão, e tem haver com o grau de regularidade adequada que se pode obter ao usarmos as imersões de Sobolev.

Determinação das potências p e q

Pela proposição (1.37), temos que

$$\text{se } \mu(\Omega) < \infty \text{ então } L^p(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega), \text{para } p > p'$$

daí

$$L^\infty(\Omega) \subset \cdots \subset L^6(\Omega) \subset \cdots \subset L^3(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega) \tag{3.86}$$

Considerando-se que

$$\|u_m \nabla(n)\|^2_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \left\{ \left[\int_\Omega |u_m \nabla(n)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 = \int_\Omega |u_m \nabla(n)|^2 \, dx$$

e usando-se a desigualdade de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz (1.38) no integrando, e em seguida a de Hölder (1.33, pág. 9) tem-se que

$$\|u_m \nabla(n)\|^2_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \int_\Omega |u_m \nabla(n)|^2 \, dx \leq \int_\Omega |u_m|^2 . |\nabla(n)|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \left[\int_\Omega \left(|u_m|^2\right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega \left(|\nabla(n)|^2\right)^q dx \right]^{\frac{1}{q}}$$

daí

$$\|u_m \nabla(n)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \left[\int_{\Omega} \left(|u_m|^{2p}\right) dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\Omega} \left(|\nabla (n)|^{2q}\right) dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left\{\left[\int_{\Omega} |u_m|^{2p} dx\right]^{\frac{1}{2p}}\right\}^2 . \left\{\left[\int_{\Omega} |\nabla (n)|^{2q} dx\right]^{\frac{1}{2q}}\right\}^2$$

$$\leq \|u_m\|^2_{L^{2p}(\Omega)} . \|\nabla (n)\|^2_{L^{2q}(\Omega)}$$

logo

$$\|u_m \nabla (n)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_m\|_{L^{2p}(\Omega)} . \|\nabla (n)\|_{L^{2q}(\Omega)}$$

Na majoração do segundo têrmo da direita da inequação (3.84) tem-se

$$\|\nabla (n)\, u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla (n)\|^2_{L^{2p}(\Omega)} . \|u_m\|^2_{L^{2q}(\Omega)} \tag{3.87}$$

que precisam ser comparados com os têrmos da esquerda da inequação (3.78). Assim, usando o item 1 do teorema (1.60) temos:

- $p = 2 = \left(\begin{array}{l} \text{que é o expoente das potências das funções mensuráveis} \\ \text{consideradas no termo em } \left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|_{L^2(\Omega)} \text{ presente no membro} \\ \text{da esquerda da inequação (3.80)} \end{array}\right)$
- $n = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $j, m \in \mathbb{Z}_+$, tais que $(j + m) = \left(\begin{array}{l} \text{número de derivadas relacionado com} \\ \text{o gradiente presente no têrmo } \left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|_{L^2(\Omega)} \\ \text{na inequação (3.80)} \end{array}\right)$

assim $(j + m) = 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (j, m) = (1, 0) \\ \text{ou} \\ (j, m) = (0, 1) \end{array}\right.$,

e sendo

$$p \leq q \leq \frac{np}{n - mp} \Leftrightarrow 2 \leq q \leq \frac{(3).(2)}{3 - m.(2)}$$

tem-se:

$$\text{caso } 1 : (j, m) = (1, 0) \Rightarrow 2 \leq q \leq \frac{6}{3 - 1.(0)} = 2$$

daí $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,2}(\Omega)$, (não há vantagem nesta imersão trivial).

$$\text{caso 2} : (j,m) = (0,1) \Rightarrow 2 \leq q \leq \frac{6}{3-1.(2)} = 6$$

logo

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{0,q}(\Omega) = L^q(\Omega)$$

para $2 \leq q \leq 6$, e obtendo-se imersões contínuas $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, conforme definição (1.26). Além disso, como $\partial\Omega$ é suficientemente regular (de classe C^1), Ω satisfaz à condição do cone (1.59, página 23), daí dada uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$, existe uma constante de imersão C associada a $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ tal que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \tag{3.88}$$

Porém, como ainda se tem que

$$\begin{cases} u \in W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) \text{ , conforme (Notação 1.53)} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

então vale dizer que $u \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Como as normas em $H_0^1(\Omega)$ e em $H^1(\Omega)$ são equivalentes, conforme observação (1.55). Segue-se:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_S \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{, para } 2 \leq q \leq 6 \tag{3.89}$$

Assim, se fizermos $u = u_m$ na inequação (3.89), teremos:

$$\|u_m\|_{L^q(\Omega)} \leq C_S \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \text{ , para } \ 2 \leq q \leq 6 \tag{3.90}$$

e como vale (3.86) conclui-se que o máximo grau de integrabilidade possível para u_m será quando $u_m \in L^6(\Omega)$. Agora, ao retornarmos à inequação (3.87), exigir-se-á que o valor de $2q$ seja igual a 6, pois só assim conseguiremos o menor valor para p, e obter-se ainda uma imersão de Sobolev, adequada para u_m. Logo, da inequação (3.87), por comparação tem-se que o valor de q será $q = 3$, pois:

$$\|\nabla(n)\, u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla(n)\|^2_{L^{2p}(\Omega)} \cdot \|u_m\|^2_{L^{2q}(\Omega)} = \left[\|\nabla(n)\|_{L^{2p}(\Omega)}\right]^2 \cdot \left[\|u_m\|_{L^6(\Omega)}\right]^2$$

e como

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{3}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{p}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow p=\frac{3}{2}$$

resulta

$$\left\|\nabla\left(n\right)u_m\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left\|\nabla\left(n\right)\right\|^2_{L^3(\Omega)} \cdot \left\|u_m\right\|^2_{L^6(\Omega)} \tag{3.91}$$

ou

$$\left\|\nabla\left(n\right)u_m\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left[\left(\int_\Omega \left|\nabla\left(n\right)\right|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \cdot \left[\left(\int_\Omega \left|u_m\right|^6 dx\right)^{\frac{1}{6}}\right]^2$$

Agora substituindo-se (3.91) na inequação (3.84), vem:

$$\left|\left(u_m\nabla\left(\frac{1}{n}\right),\nabla u_m\right)\right| \leq a.\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4an_0^4}\left\|\nabla\left(n\left(\cdot,t\right)\right)\right\|^2_{L^3(\Omega)} \cdot \left\|u_m\right\|^2_{L^6(\Omega)} \tag{3.92}$$

a seguir, usando-se a inequação (3.90) para outra vez majorar-se na inequação acima (3.92), vem

$$\left|\left(u_m\nabla\left(\tfrac{1}{n}\right),\nabla u_m\right)\right| \leq a.\left\|\tfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{4an_0^4}C_S^2\left\|\nabla\left(n\left(\cdot,t\right)\right)\right\|^2_{L^3(\Omega)} \cdot \left\|\nabla\left(u_m\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq a \cdot \left\|\tfrac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{4an_0^4}C_S^2\left\|\nabla\left(n\left(\cdot,t\right)\right)\right\|^2_{L^3(\Omega)} \cdot \left\|\tfrac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e como $\sqrt{n}<1$, teremos:

$$\left|\left(u_m\nabla\left(\tfrac{1}{n}\right),\nabla u_m\right)\right| \leq a\left\|\tfrac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{4an_0^4}C_S^2\left\|\nabla\left(n\left(\cdot,t\right)\right)\right\|^2_{L^3(\Omega)}\left\|\tfrac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

ou ainda, em outras palavras

$$\left|\left(u_m\nabla\left(\frac{1}{n}\right),\nabla u_m\right)\right| \leq a\left\|\frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \tag{3.93}$$

$$+\frac{C_S^2}{4an_0^4}\left\|\nabla\left(n\right)\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}\left\|\frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

(associar-se-á ao emprego de norma pequena).

(II) Suponhamos que $\nabla n \in L^2(0,T,L^\infty(\Omega))$, isto é, para cada $t \in [0,T]$, tem-se

$$\nabla n\,(\cdot,t) \in L^\infty(\Omega) \quad \text{e} \qquad \int_0^T |\nabla n\,(\cdot,t)|^2_{L^\infty(\Omega)}\,dt < \infty$$

E como

$$\left|\left(u_m \nabla\left(\frac{1}{n}\right), \nabla u_m\right)\right| = \left|-\left(\nabla\,(u_m)\,, \frac{\nabla\,(n)}{n^2} u_m\right)\right| \leq$$

$$\leq \int_\Omega \left|\nabla\,(u_m)\,\frac{\nabla\,(n)}{n^2} u_m\right| dx \leq \frac{\|\nabla n\,(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}}{n_0^2} \int_\Omega |\nabla\,(u_m)\,u_m|\,dx$$

usando a desigualdade de Hölder , vem:

$$\left|\left(u_m \nabla\left(\frac{1}{n}\right), \nabla u_m\right)\right| \leq \frac{\|\nabla n\,(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}}{n_0^2} \int_\Omega |\nabla\,(u_m)\,u_m|\,dx \leq$$

$$\leq \frac{\|\nabla n\,(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}}{n_0^2} \left(\int_\Omega |\nabla\,(u_m)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_m|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou seja

$$\left|\left(u_m \nabla\left(\frac{1}{n}\right), \nabla u_m\right)\right| \leq \left(\int_\Omega |\nabla\,(u_m)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{\|\nabla n\,(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}}{n_0^2} \left(\int_\Omega |u_m|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

e usando o lema (1.2, página 1), vem:

$$\left|\left(u_m \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right), \nabla u_m\right)\right| \leq a \left\|\tfrac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{4a}\left(\tfrac{\|\nabla n(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}}{n_0^2}\right)^2 \left\|\tfrac{u_m}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e como $\sqrt{n} < 1$, teremos:

$$\left|\left(u_m \nabla\left(\frac{1}{n}\right), \nabla u_m\right)\right| \leq a \left\|\frac{\nabla\,(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\|\nabla n\,(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{4a \cdot n_0^4} \left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (3.94)$$

(**relacionar-se-á com a condição de integrabilidade associada com a desigualdade de Gronwall**).

Agora no sentido de majorarmos convenientemente os últimos termos da inequação (3.78, página 105), primeiramente utilizamos (3.80, página 108) e (3.93, página 113).

Assim dada a inequação

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+2\mu\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq 2a\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+$$
$$+\frac{1}{2a}\left\|g\left(t\right)\right\|^2_{V'}+\left|\left(\frac{n'}{n^2}u_m,u_m\right)\right|+2\mu\left|\left(\nabla\left(u_m\right),\left(u_m\cdot\nabla_x\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| \tag{3.95}$$

vem:

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+2\mu\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2+2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2\leq$$
$$\leq 2a\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2+\frac{1}{2a}\left\|g\left(t\right)\right\|^2_{V'}+\frac{C_1^2}{n_0^2}\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}\left\|\frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+$$
$$+2\mu\left(a.\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2+\frac{1}{4an_0^4}C_S^2\left\|\nabla\left(n\right)\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}\cdot\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2\right)$$

daí

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2+$$
$$+\left[2\left(\mu-a-a\mu\right)-\frac{C_1^2}{n_0^2}\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}-\frac{\mu}{2an_0^4}C_S^2\left\|\nabla\left(n\right)\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}\right]\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2+$$
$$+2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2\leq\frac{1}{2a}\left\|g\left(t\right)\right\|^2_{V'} \tag{3.96}$$

Logo, se impormos

$$K=2\left(\mu-a-a\mu\right)-\frac{C_1^2}{n_0^2}\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}-\frac{\mu}{2an_0^4}C_S^2\left\|\nabla\left(n\right)\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}>0 \tag{3.97}$$

e para isso fazemos

$$2\left(\mu-a-a\mu\right)>\frac{C_1^2}{n_0^2}\left\|n'\right\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega)\right)}+\frac{\mu}{2an_0^4}C_S^2\left\|\nabla\left(n\right)\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))} \tag{3.98}$$

de modo que se tome $a > 0$ e tal que

$$\mu - a - a\mu > 0 \ \Leftrightarrow \mu > a\left(1+\mu\right) \Leftrightarrow a < \frac{\mu}{1+\mu} \tag{3.99}$$

e por isso, neste caso as normas de ∇n e n' devem ser pequenas o suficiente para que a inequação (3.98) seja válida (aqui está a justificativa da condição de pequenez exigida na hipótese do teorema (3.4, página 84)). Daí deveremos ter

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + K.\left\|\frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mu\left\|\sqrt{\frac{F\left(n\right)}{n}}u_m\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2a}\left\|g\left(t\right)\right\|^2_{V'} \tag{3.100}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + K.\left\|\frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2a}\left\|g\left(t\right)\right\|^2_{V'} \tag{3.101}$$

e integrando-se de 0 até t com $t \leq T$, vem

$$\int_0^t \tfrac{d}{dt}\left\|\tfrac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 dt + K.\int_0^t \left\|\tfrac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \leq \tfrac{1}{2a}\int_0^t \left\|g\left(t\right)\right\|^2_{V'} dt$$

ou seja

$$\left\|\tfrac{u_m(t)}{\sqrt{n}}\right\|^2 - \left\|\tfrac{u_m(0)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + K.\int_0^t \left\|\tfrac{\nabla(u_m(t))}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \leq \tfrac{1}{2a}\int_0^t \left\|g\left(t\right)\right\|^2_{V'} dt$$

mas

$$\frac{1}{2a}\int_0^t \left\|g\left(t\right)\right\|^2_{V'} dt \leq \frac{1}{2a}\left\{\left[\int_0^T \left\|g\left(t\right)\right\|^2_{V'} dt\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2 = \frac{1}{2a}\left\|g\right\|^2_{L^2\left(0,T,V'\right)}$$

então

$$\left\|\frac{u_m\left(t\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + K.\int_0^t \left\|\frac{\nabla\left(u_m\left(t\right)\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \leq \frac{1}{2a}\left\|g\right\|^2_{L^2\left(0,T,V'\right)} + \left\|\frac{u_m\left(0\right)}{\sqrt{n}}\right\|^2 \leq C$$

Consequentemente obtemos:

$$\frac{u_m}{\sqrt{n}} \in L^\infty\left(0,T,L^2\left(\Omega\right)\right) \quad \text{e} \quad \frac{\nabla\left(u_m\right)}{\sqrt{n}} \in L^2\left(0,T,L^2\left(\Omega\right)\right)$$

ou seja

$$u_m \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H) \tag{3.102}$$

uniformemente num conjunto limitado, isto é, sem depender de m.
De forma semelhante, se usarmos (3.79, página 106) e (3.94, página 114) em (3.78, página 105), obteremos:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\mu\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
\leq 2a\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2a}\left\|g(t)\right\|^2_{V'} + \frac{1}{n_0}.\left\|n'(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\left\|\frac{u_m(x,t)}{\sqrt{n(x,t)}}\right\|^2 + \\
+2\mu a\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\mu\|\nabla n(.,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2a.n_0^4}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{gathered} \tag{3.103}$$

ou seja

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + (2\mu - 2a - 2\mu a)\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
\leq \frac{1}{2a}\left\|g(t)\right\|^2_{V'} + \left(\frac{1}{n_0}.\left\|n'(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{\mu\|\nabla n(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2a.n_0^4}\right)\cdot\left\|\frac{u_m(x,t)}{\sqrt{n(x,t)}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{gathered} \tag{3.104}$$

Escolhendo-se $a > 0$ tal que $K = 2(\mu - a - \mu a) > 0$, isto é,

$$\frac{\mu}{1+\mu} > a > 0 \tag{3.105}$$

daí obtemos:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + K\left\|\frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 + 2\mu\left\|\sqrt{\frac{F(n)}{n}}u_m\right\|^2 \leq \\
\leq \frac{1}{2a}\left\|g(t)\right\|^2_{V'} + \left(\frac{1}{n_0}\cdot\left\|n'(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{\mu\|\nabla n(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2a\cdot n_0^4}\right)\cdot\left\|\frac{u_m(x,t)}{\sqrt{n(x,t)}}\right\|^2
\end{gathered} \tag{3.106}$$

Descartando-se o terceiro termo no primeiro membro da inequação (3.106) acima, e fazendo-se

$$C = \max\left\{\frac{1}{2a}, \frac{1}{n_0}, \frac{\mu}{2a\cdot n_0^4}\right\} \tag{3.107}$$

vem:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\left\|\tfrac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 + K\left\|\tfrac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|^2 \leq C\cdot\|g\,(t)\|_{V'}^2 + \\
&+C\cdot\left(\tfrac{1}{n_0}.\,\|n'(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \tfrac{\mu\|\nabla n(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{2a\cdot n_0^4}\right)\cdot\left\|\tfrac{u_m(x,t)}{\sqrt{n(x,t)}}\right\|^2
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Com a finalidade de aplicar o Lema (1.106, página 48) e examinando-se a inequação (3.108), note que

$$\begin{cases}
\Phi\,(t) = \left\|\tfrac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \geq 0 \Rightarrow \Phi'\,(t) = \tfrac{d}{dt}\left\|\tfrac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi\,(t)|_{t=0} = \left\|\tfrac{u_m(.,0)}{\sqrt{n(.,0)}}\right\|^2 = \Phi_0 \\
\Psi\,(t) = K\left\|\tfrac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
f\,(t) = C.\,\|g\,(t)\|_{V'}^2 \\
\widehat{g}\,(\Phi\,(t)\,,t) = C.\left(\tfrac{1}{n_0}.\,\|n'(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \tfrac{\mu\|\nabla n(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{2a.n_0^4}\right).\left[\left\|\tfrac{u_m(x,t)}{\sqrt{n(x,t)}}\right\|^2\right]
\end{cases} \tag{3.109}$$

e considerando que

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \xi = \left\|\tfrac{u_m(x,t)}{\sqrt{n(x,t)}}\right\|^2 \in L^2(0,T) \Rightarrow \exists M > 0,\ \text{tal que } \xi \in [0,M] \\
&(ii) \quad \gamma\,(t) = C.\left(\tfrac{1}{n_0}.\,\|n'(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \tfrac{\mu\|\nabla n(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{2a.n_0^4}\right)
\end{aligned}$$

Neste caso observe-se que $\widehat{g}\,(\Phi\,(t)\,,t)$ é da forma

$$\widehat{g}\,(\Phi\,(t)\,,t) = \gamma(t)\cdot\Phi\,(t) \tag{3.110}$$

onde $\gamma\,(t)$ é uma função integrável, e não negativa em $[0,T]$, e além disso

$$\widehat{g}(\xi,t) = \gamma\,(t)\,.\xi$$

é lipschitziana (e não-decrescente) na variável ξ para t fixado, e com

$$\widehat{g}(0,t)=0.$$

Daí, desprezando-se o termo $\Psi\,(t)$ na inequação (1.38, página 48) tem-se

$$\Phi'\,(t)\leq\gamma(t)\cdot\Phi\,(t)+f\,(t) \tag{3.111}$$

e deste modo Φ satisfaz em particular à hipótese do Lema (1.105, página 47), e conseqüentemente pela aplicação deste mesmo lema pode-se concluir

$$\Phi\,(t)\leq\exp\left(\int_0^t\gamma\,(s)\,ds\right)\left[\Phi\,(0)+\int_0^t f\,(s)\,ds\right]\qquad\text{para todo }\;0\leq t\leq T \tag{3.112}$$

E também, em particular, se

$$\Phi'\,(t)\leq\gamma(t)\cdot\Phi\,(t)\quad\text{e}\;\;\Phi\,(0)=0 \tag{3.113}$$

logo

$$\Phi\,(t)\equiv0\;,\;\;\forall t\in[0,T] \tag{3.114}$$

Por conseguinte vale

$$\Phi\,(t)\leq F\,(t,\;\Phi_0)=\widetilde{F}(t)=\left[\exp\left(\int_0^t\gamma\,(r)\,dr\right)\right]\cdot\left[\Phi\,(0)+\int_0^t f\,(s)\,ds\right] \tag{3.115}$$

para $t\in[0,T]$.

E, além disso considerando que $\widehat{g}$ é não decrescente na primeira variável conforme salientado em (3.109), então também tem-se que

$$\int_0^t \Psi(s)ds \leq \widetilde{F}\,(t) \tag{3.116}$$

$$\text{onde } F\,(t,\Phi_0) = \Phi_0 + \int_0^t \left[\widehat{g}\,(F\,(s)\,,s) + f\,(s)\right] ds$$

$$= \Phi_0 + \int_0^t \left[\gamma\,(s)\,F\,(s) + f\,(s)\right] ds \tag{3.117}$$

Repare que sendo

$$F(t) = \left[\exp\left(\int_0^t \gamma\,(r)\,dr\right)\right]\cdot\left[\Phi\,(0) + \int_0^t f\,(s)\,ds\right]$$

então

$$F^{'}(t) = \exp\left(\int_0^t \gamma\,(r)\,dr\right)\left\{\begin{array}{c}\left[\gamma\,(t) - \gamma\,(0)\,.0 + \int_0^t \frac{\partial(\gamma(r))}{\partial t}dr\right].\left[\Phi\,(0) + \int_0^t f\,(s)\,ds\right] + \\ + \left[0 + f\,(t) - f\,(0)\,.0 + \int_0^t \frac{\partial f(s)}{\partial t}ds\right]\end{array}\right\}$$

$$F^{'}(t) = \exp\left(\int_0^t \gamma\,(r)\,dr\right).\left\{\gamma\,(t)\,.\left[\Phi\,(0) + \int_0^t f\,(s)\,ds\right] + f\,(t)\right\} \geq 0$$

pois γ, $\Phi\,(0)\,,\, f$ são não negativas, logo $F(t)$ também é não-decrescente em t, (isto também pode ser verificado na expressão (3.115). Daí

$$\left\|\frac{u_m\,(\cdot,t)}{\sqrt{n\,(\cdot,t)}}\right\|^2 \leq F\,(t) \leq F\,(T)\,,\ \ \forall t \in [0,T] \tag{3.118}$$

mas como

$$1 < \frac{1}{\sqrt{n\,(\cdot,t)}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} \tag{3.119}$$

tem-se que

$$F(t) \geq \left\| \frac{u_m(\cdot, t)}{\sqrt{n(\cdot, t)}} \right\|^2 = \int_\Omega \frac{|u_m(x,t)|^2}{n(x,t)} dx \geq \int_\Omega \|u_m(x,t)\|^2 dx \tag{3.120}$$

ou seja

$$F(t) \geq \int_\Omega |u_m(x,t)|^2 dx \tag{3.121}$$

e como $F([0,T])$ é compacto obtém-se que

$$\frac{u_m}{\sqrt{n}} \in L^\infty \big(0, T, L^2(\Omega)\big) \tag{3.122}$$

e ainda pela inequação (3.121) também se pode dizer que $\displaystyle\int_\Omega \|u_m(x,t)\|^2 dx < \infty$, portanto

$$u_m \in L^\infty \big(0, T, L^2(\Omega)\big) \tag{3.123}$$

Agora sendo $K > 0$, pois assim foi exigido em (3.105), vem:

$$\Psi(t) = K \left\| \frac{\nabla(u_m)}{\sqrt{n}} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = K \int_\Omega \frac{|\nabla(u_m)|^2}{n} dx \geq K \int_\Omega |\nabla(u_m)|^2 dx$$

tem-se que

$$\frac{1}{K}\Psi(t) \geq \int_\Omega |\nabla(u_m)|^2 dx = \|\nabla(u_m)\|^2 \tag{3.124}$$

daí, integrando-se esta inequação acima (3.124) em relação ao tempo $t \in [0,T]$, vem:

$$\frac{1}{K}\left[\int_0^t \Psi(s)\, ds\right] \geq \int_0^t \|\nabla(u_m(\cdot, s))\|^2 ds \tag{3.125}$$

e usando-se (3.116) a saber, $\int_0^t \Psi(s)ds \leq \widetilde{F}(t)$, e o fato de $\widetilde{F}([0,T])$ ser compacto acarreta $\widetilde{F}(t)\Big|_{t\in[0,T]} < \infty$, assim obtemos:

$$\infty > \frac{1}{K}\, \widetilde{F}(t)\Big|_{t\in[0,T]} \geq \frac{1}{K}\left[\int_0^t \Psi(s)\, ds\right] \geq \int_0^t \|\nabla(u_m(\cdot, s))\|^2 ds$$

ou seja

$$u_m \in L^2(0, T, V) \tag{3.126}$$

e além disso

$$\int_0^t K \left\| \frac{\nabla u_m(\cdot,s)}{\sqrt{n(\cdot,s)}} \right\|^2 ds \leq \widetilde{F}(t)\Big|_{t\in[0,T]} < \infty \Leftrightarrow \frac{\nabla u_m}{\sqrt{n}} \in L^2\left(0,T,L^2(\Omega)\right) \qquad (3.127)$$

e considerando-se (3.126) também se pode dizer que $u_m \in L^2(0,T,V)$. Daqui obtemos a existência de uma subseqüência, (que sem perda de generalidade, será denotada por u_m) que converge fraco em $L^2(0,T,V)$ e considerando-se (3.121) e (3.122) também converge fraco* em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$.

Para facilitar o estudo da convergência, definiremos agora os seguintes operadores de modo análogo ao procedimento encontrado em ([46], página 162) a saber:

- dados $u, v \in H_0^1(\Omega)$ temos a forma linear contínua

$$\begin{array}{l} B(u,v) : V \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad w \longmapsto \langle B(u,v), w\rangle_{V'V} = b(u,v,w) \\ \text{onde } b(u,v,w) \text{ é a forma trilinear da observação (1.101)} \\ \text{em particular, neste contexto denota-se } B(u) \equiv B(u,u) \end{array} \qquad (3.128)$$

- dado $u \in H_0^1(\Omega)$ tem-se

$$\begin{array}{l} A_1(u) : V \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad v \longmapsto \langle A_1(u), v\rangle_{V'V} = \mu\left(\frac{\nabla(v)}{n}, \nabla(u)\right) \end{array} \qquad (3.129)$$

- dado $u \in H_0^1(\Omega)$ tem-se

$$\begin{array}{l} A_2(u) : V \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad v \longmapsto \langle A_2(u), v\rangle_{V'V} = \mu\left((v\cdot\nabla)\left(\frac{1}{n}\right), \nabla(u)\right) \end{array} \qquad (3.130)$$

- dado $u \in H_0^1(\Omega)$ tem-se

$$\begin{array}{l} A_3(u) : V \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad v \longmapsto \langle A_3(u), v\rangle_{V'V} = \mu\left(F(n)\frac{u}{n}, v\right) \end{array} \qquad (3.131)$$

dado $u \in H_0^1(\Omega)$ tem-se

$$
\begin{aligned}
&A(u) : V \to \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad v \longmapsto \langle A(u), v\rangle_{V'V} = \langle A_1(u), v\rangle + \langle A_2(u), v\rangle + \langle A_3(u), v\rangle
\end{aligned}
\tag{3.132}
$$

Note que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V',\, V}$ denota o produto de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V',\, V}$, isto é, um funcional bilinear definido no produto cartesiano $V' \times V$, (cfe [42], página 97; ou [41], página 189), e já mencionado na Observação (3.1, página 3.1).
Para passar o limite na forma trilinear precisamos como nas equações clássicas de Navier-Stokes, de uma convergência forte em $L^2(0, T, L^2(\Omega))$. Conseguiremos isto utilizando-se o Lema de Aubin-Lions(1.66). Para isto precisamos mostrar a seguinte

Afirmação

$$u'_m \in L^{\frac{4}{3}}\left(0, T, V'\right) \tag{3.133}$$

Demonstração. De fato, a formulação variacional obtida em (3.32, na página 86) para cada V_m , a saber:

$$\left(\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{u_m}{n}\right), v\right) + \left(\tfrac{n' u_m}{n^2}, v\right) + \left(\left(\left(\tfrac{u_m}{n} \cdot \nabla\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right), v\right) + \mu\left(\tfrac{\nabla(v)}{n}, \nabla(u_m)\right) +$$

$$+\mu\left((v \cdot \nabla)\left(\tfrac{1}{n}\right), \nabla(u_m)\right) + \mu\left(F(n)\tfrac{u_m}{n}, v\right) = \langle g, v\rangle, \qquad \forall v \in V_m$$

pode ser reescrita da seguinte forma também

$$\left(\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{u_m}{n}\right), v\right) = \langle g, v\rangle - \left(\tfrac{n' u_m}{n^2}, v\right) - \left(\left(\left(\tfrac{u_m}{n} \cdot \nabla\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right), v\right) - \mu\left(\tfrac{\nabla(v)}{n}, \nabla(u_m)\right) +$$

$$-\mu\left((v \cdot \nabla)\left(\tfrac{1}{n}\right), \nabla(u_m)\right) - \mu\left(F(n)\tfrac{u_m}{n}, v\right) \ , \qquad \forall v \in V_m$$

mas

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}\right), v\right) = \left(\frac{u'_m \cdot n - u_m \cdot n'}{n^2}, v\right) = \left(\frac{u'_m}{n}, v\right) - \left(\frac{n'}{n^2} u_m, v\right)$$

logo

$$\left(\frac{u_m^{'}}{n},v\right)=\langle g,v\rangle-\left(\left(\left(\tfrac{u_m}{n}\cdot\nabla\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right),v\right)-\mu\left(\tfrac{\nabla(v)}{n},\nabla\left(u_m\right)\right)+$$

$$-\mu\left(\left(v\cdot\nabla\right)\left(\tfrac{1}{n}\right),\nabla\left(u_m\right)\right)-\mu\left(F\left(n\right)\tfrac{u_m}{n},v\right),\qquad\forall v\in V_m \tag{3.134}$$

Assim usando a nomenclatura dada para os operadores definidos em (3.129), (3.130), (3.131), (3.132) e (3.128), teremos

$$\begin{aligned}
\langle A_1u_m,v\rangle &= \mu\left(\tfrac{\nabla(v)}{n},\nabla\left(u_m\right)\right)\\
\langle A_2u_m,v\rangle &= \mu\left(\left(v\cdot\nabla\right)\left(\tfrac{1}{n}\right),\nabla\left(u_m\right)\right)\\
\langle A_3u_m,v\rangle &= \mu\left(F\left(n\right)\tfrac{u_m}{n},v\right)\\
\langle Au_m,v\rangle &= \langle A_1u_m,v\rangle+\langle A_2u_m,v\rangle+\langle A_3u_m,v\rangle\\
\left\langle B\left(\frac{u_m}{n}\right),v\right\rangle &= \left(\left(\left(\tfrac{u_m}{n}\cdot\nabla\right)\left(\frac{u_m}{n}\right)\right),v\right)
\end{aligned} \tag{3.135}$$

logo a equação (3.134) toma o aspecto seguinte

$$\left\langle\frac{u_m'}{n},v\right\rangle=\left\langle g-Au_m-B\left(\frac{u_m}{n}\right),v\right\rangle\quad,\quad\forall v\in V_m \tag{3.136}$$

Isto é, a partir de (3.136), tem-se que

$$\frac{u_m'}{n}=g-Au_m-B\left(\frac{u_m}{n}\right)\equiv T\quad\text{ em }V_m' \tag{3.137}$$

onde T é uma aplicação do tipo $T:V_m\subset V\to\mathbb{R}$. Para definirmos a equação acima em V' utilizamos a projeção ortogonal $P_m:H_0^1\to V_m$ da seguinte forma:

$$\left(\frac{u_m'}{n},v\right)=\left(T,P_mv\right)\quad,\quad\forall v\in H_0^1\left(\Omega\right) \tag{3.138}$$

Observando que se $v\in H_0^1\left(\Omega\right)$ então $nv\in H_0^1\left(\Omega\right)$, pois usando-se a equação (3.138), tem-se:

$$(u'_m, v) = \left(u'_m, \tfrac{nv}{n}\right) = \left(\tfrac{u'_m}{n}, nv\right) = (T, P_m(nv)) = (nP^*_m T, v) \tag{3.139}$$

onde P^*_m é o operador adjunto de P_m . Assim, utilizando-se também o fato de P_m ser operador auto-adjunto, conforme Observação 1.99 , tem-se que

$$u'_m = nP_m\left(g - Au_m - B\left(\frac{u_m}{n}\right)\right) \text{ em } H^{-1}(\Omega) = \left(H^1_0(\Omega)\right)' \tag{3.140}$$

Para mostrar que $u'_m \in L^{\frac{4}{3}}(0, T, V')$, vamos examinar as diversas parcelas da equação (3.140) acima. Primeiramente observemos que como $V \subset H^1_0(\Omega)$, tem-se pelo Lema 1.15 que $H^{-1}(\Omega) \subset V'$.

Ora, $nP_m g \in L^2(0, T, V')$ pois como $n_0 \leq n < 1$ então

$$\langle nP_m g, v\rangle_{V'V} = \langle g, P_m(nv)\rangle_{V'V} \leq \|g\|_{V'}\|P_m(nv)\|_V \leq \|g\|_{V'}\|v\|_V$$

Aqui utilizamos o fato de que $\|P_m v\|_V \leq \|v\|_V$. Empregaremos a forma alternativa $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|$ para calcular $\|A\|$, (cfe [5] , páginas 184-185).
Vamos mostrar que

$$nP_m Au_m \in L^2(0, T, V')$$

De fato, $A_1 u_m \in L^2(0, T, V')$ onde

$$\langle A_1 u_m, v\rangle_{V'V} = \mu\left(\frac{\nabla(v)}{n}, \nabla(u_m)\right) \ , \ v \in V$$

note que

$$\langle nP_m A_1 u_m, v\rangle_{V'V} = \langle A_1 u_m, nP_m v\rangle_{V'V}$$

e além disso

$$\|nP_m v\|_V \leq \|P_m v\|_V \leq \|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\left|\frac{\nabla(nP_m v)}{n}\right|^2 \leq \frac{1}{n_0^2}|\nabla(nP_m v)|^2 \leq \frac{1}{n_0^2}|\nabla(P_m v)|^2 \leq \frac{1}{n_0^2}|\nabla(v)|^2$$

por isto, examinaremos a ação de $A_1 u_m$ sobre os elementos $v \in V$. Assim

$$\|A_1 u_m\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} |\langle A_1 u_m, v\rangle| = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \mu \left(\tfrac{\nabla(v)}{n}, \nabla(u_m) \right)$$

$$\leq \tfrac{\mu}{n_0} \sup_{\|v\|_V \leq 1} (\nabla v, \nabla u_m) \leq \tfrac{\mu}{n_0} \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|\nabla v\| \cdot \|\nabla u_m\|$$

logo

$$\|A_1 u_m\|_{V'} \leq \tfrac{\mu}{n_0} \|\nabla u_m\|$$

elevando ao quadrado

$$\|A_1 u_m\|_{V'}^2 \leq \tfrac{\mu^2}{n_0^2} \|\nabla u_m\|^2$$

integrando no tempo

$$\int_0^T \|A_1 u_m\|_{V'}^2 \, dt \leq \tfrac{\mu^2}{n_0^2} \int_0^T \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt$$

extraindo-se a raiz quadrada

$$\|A_1 u_m\|_{L^2(0,T,V')} \leq C \|\nabla u_m\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} < \infty$$

tendo em vista (3.126, na página 121), e portanto concluímos que

$$A_1 u_m \in L^2(0,T,V')$$

Note que $A_2 u_m \in L^2(0,T,V')$ onde

$$\langle A_2 u_m, v\rangle_{V'V} = \mu \left((v \cdot \nabla) \left(\frac{1}{n} \right), \nabla(u_m) \right)$$

Ora, sendo

$$\|A_2 u_m\|_{V'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle A_2 u_m, v\rangle_{V'V}|$$

tem-se

$$\int_0^T \|A_2 u_m\|_{V'}^2 \, dt \leq C_1 \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left| \left((v \cdot \nabla) \left(\tfrac{1}{n} \right), \nabla(u_m) \right) \right|^2 dt$$

assim

$$\int_0^T \|A_2 u_m\|_{V'}^2 \, dt \le C_1 \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \le 1} \left| \int_\Omega (\nabla (u_m)) \left((v \cdot \nabla) \left(\frac{1}{n} \right) \right) dx \right|^2 dt$$

$$\le C_1 \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \le 1} \left[\int_\Omega |\nabla (u_m)| \cdot \left| (v \cdot \nabla) \left(\frac{1}{n} \right) \right| dx \right]^2 dt$$

considerando-se que

$$\left| (v \cdot \nabla) \left(\tfrac{1}{n} \right) \right| = \left| \left(\tfrac{-1}{n^2} \right) \right| \left| \left(v_1 \tfrac{\partial n}{\partial x_1}, \ldots, v_d \tfrac{\partial n}{\partial x_d} \right) \right|$$

$$\left| \tfrac{\partial n}{\partial x_k} \right| \le |\nabla n|_{\mathbb{R}^d}$$

tem-se

$$\left| (v \cdot \nabla) \left(\frac{1}{n} \right) \right| \le \left(\frac{1}{n^2} \right) \cdot |\nabla n|_{\mathbb{R}^d} \cdot |v|_{\mathbb{R}^d} \le \frac{1}{n_0^2} |v|_{\mathbb{R}^d} \cdot |\nabla n|_{\mathbb{R}^d}$$

daí

$$\int_0^T \|A_2 u_m\|_{V'}^2 \, dt \le \frac{C_1}{n_0^2} \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \le 1} \left[\int_\Omega |\nabla (u_m)| \cdot |v|_{\mathbb{R}^d} \cdot |\nabla n|_{\mathbb{R}^d} \; dx \right]^2 dt$$

aplicando Hölder no espaço com $p = 2,\ q = 6,\ r = 3 \quad , \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1 \right)$, vem

$$\int_0^T \|A_2 u_m\|_{V'}^2 \, dt \le$$

$$\le \tfrac{C_1}{n_0^2} \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \le 1} \left[\left(\int_\Omega |\nabla (u_m)|^2 \; dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|_{\mathbb{R}^d}^6 \cdot \; dx \right)^{\frac{1}{6}} \left(\int_\Omega |\nabla n|_{\mathbb{R}^d}^3 \; dx \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 dt$$

ou seja

$$\int_0^T \|A_2 u_m\|_{V'}^2 \, dt \le \frac{C_1}{n_0^2} \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \le 1} \|\nabla (u_m)\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot \|v\|_{L^6(\Omega)}^2 \cdot \|\nabla n\|_{L^3(\Omega)}^2 \, dt$$

agora tendo em vista a Observação (1.64, item i: na página 25) e a Proposição (1.37, na página 10), pode-se tomar uma constante $k > 0$ de modo que

$$\|v\|_{L^6(\Omega)} \leq k \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq k$$

a penúltima inequação fica com o seguinte aspecto

$$\int_0^T \|A_2 u_m\|_{V'}^2 \, dt \leq \tfrac{C_1 \cdot k}{n_0^4} \int_0^T \|\nabla (u_m)\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot \|\nabla n\|_{L^3(\Omega)}^2 \, dt$$

fazendo-se $C = \frac{C_1 \cdot k}{n_0^4}$ e aplicando-se Hölder no tempo segue-se

$$\int_0^T \|A_2 u_m\|_{V'}^2 \, dt \leq C \cdot \|\nabla n\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 \cdot \int_0^T \|\nabla (u_m)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt$$

$$\|A_2 u_m\|_{L^2(0,T,V')} \leq C \cdot \|\nabla n\|_{L^\infty(0,T,L^3(\Omega))}^2 \cdot \|\nabla (u_m)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 < \infty$$

pois isto é assegurado por (3.28, da página 84) e (3.102, na página 117). Portanto vale dizer que

$$A_2 u_m \in L^2 (0, T, V').$$

Além disso, repare que

$$A_3 u_m \in L^2 (0, T, V')$$

onde

$$\langle A_3 u_m, v \rangle_{V'V} = \mu \left(\frac{F(n)}{n} u_m, v \right)$$

pois:

$$\int_0^T \|A_3 u_m\|_{V'}^2 \, dt \leq C \int_0^T \sup_{\|v\|_V \; = \; \|\nabla v\| \leq 1} \left| \left(\tfrac{F(n)}{n} u_m, v \right) \right|^2 dt$$

$$\leq C \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left[\left(\tfrac{F_0}{n_0} \left| \int_\Omega u_m v \; dx \right| \right) \right]^2 dt$$

ou seja

$$\int_0^T \|A_3 u_m\|_{V'}^2\, dt \leq C \left(\tfrac{F_0}{n_0}\right)^2 \cdot \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left[\left(\int_\Omega |u_m v| \ dx\right)\right]^2 dt$$

$$\leq C_1 \cdot \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left[\left(\int_\Omega |u_m| \cdot |v| \ dx\right)\right]^2 dt$$

aplicando Hölder no espaço

$$\int_0^T \|A_3 u_m\|_{V'}^2\, dt \leq C_1 \cdot \textstyle\int_0^T \displaystyle\sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left[\left(\int_\Omega |u_m|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega |v|^2 \ dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 dt$$

$$\leq C_1 \cdot \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left(\int_\Omega |u_m|^2 \ dx\right) \cdot \left(\int_\Omega |v|^2 \ dx\right) dt$$

e usando-se Poincaré-Friedrichs

$$\int_0^T \|A_3 u_m\|_{V'}^2\, dt \leq C_1 \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt$$

$$\leq C_2 \cdot \int_0^T \sup_{\|\nabla v\| \leq 1} \left(\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \ dt$$

logo

$$\textstyle\int_0^T \|A_3 u_m\|_{V'}^2\, dt \leq C_2 \cdot \int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla (u_m)|^2 \, dx\right) dt$$

$$\leq C \textstyle\int_0^T \|\nabla (u_m)\|^2\, dt < \infty.$$

Assim

$$A u_m \in L^2 (0, T, V')$$

Vamos mostrar que

$$\frac{u_m}{n} \cdot \nabla \left(\frac{u_m}{n}\right) = B \left(\frac{u_m}{n}\right) \in L^{\frac{4}{3}} \left(0, T, V'\right)$$

De fato, consideremos os seguintes argumentos.

(1°) Em vista da condição 1.37 do Lema (1.103, página 43), a saber

$$\frac{u_m}{n} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d$$

e para $t \in]0, T[$ tem-se

$$\int_0^T \left\| \left(\frac{u_m}{n}\right)(\cdot, t) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt < \infty$$

ou seja

$$\tfrac{u_m}{n} \in L^2\left(0, T, \left(H_0^1(\Omega)\right)^d\right) \tag{3.141}$$

Repare que citando uma conseqüência das imersões de Sobolev, a saber o segundo subitem do item (ii) da Observação (1.64, página 25) tem-se que para

$$n \leq 3 \Rightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$$

e combinado com a Definição 1.63 existe uma constante C tal que

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.142}$$

Assim, aplicando-se a inequação (3.142) quando $u = \left(\frac{u_m}{n}\right)(\cdot, t)$ tem-se que

$$\left\| \left(\frac{u_m}{n}\right)(\cdot, t) \right\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq C^2 \left\| \left(\frac{u_m}{n}\right)(\cdot, t) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

logo

$$\frac{u_m}{n} \in L^2\left(0, T, L^6(\Omega)\right) \tag{3.143}$$

Além disso, de (3.141) e desde que

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

vale escrever

$$\infty > \int_0^T \left\| \left(\frac{u_m}{n}\right)(\cdot, t) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \left\| \nabla \left(\frac{u_m}{n}\right)(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

e pela desigualdade de Poincaré-Friedrichs (Proposição 1.54, página 21) segue-se

$$\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right)\in L^2\left(0,T,L^2\left(\Omega\right)\right) \tag{3.144}$$

(2°) A partir da relação dada em (3.122), a saber

$$\frac{u_m}{\sqrt{n}}\in L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right)\Leftrightarrow \sup_{0\le t\le T}\left\{\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|_{L^2(\Omega)}\right\}<\infty$$

Daí, como

$$\sqrt{n_0}\cdot\left\|\frac{u_m}{n}\right\|_{L^2(\Omega)}\le\left\|\sqrt{n}\cdot\frac{u_m}{n}\right\|_{L^2(\Omega)}=\left\|\frac{u_m}{\sqrt{n}}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

segue-se que

$$\frac{u_m}{n}\in L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right) \tag{3.145}$$

(3°) Ora, das relações (3.145) e (3.143) tem-se que

$$\frac{u_m}{n}\in L^\infty\left(0,T,L^2\left(\Omega\right)\right)\cap L^2\left(0,T,L^6\left(\Omega\right)\right)$$

Assim, repare que estamos diante do caso

$$1\le p=2\le q\le r=6$$
$$1\le\alpha=2\le\beta\le\gamma=\infty$$

para aplicação da Proposição (1.49, página 16), donde se pode escrever que

$$\frac{u_m}{n}\in L^\beta\left(0,T,L^q\left(\Omega\right)\right)$$

se satisfeitas forem as condições da hipótese desta Proposição 1.49, e para $0\le\lambda\le 1$ tem-se que

$$\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{r}\Leftrightarrow\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{2}+\frac{1-\lambda}{6}=\frac{2\lambda+1}{6}\qquad\Leftrightarrow\qquad q=\frac{6}{2\lambda+1}$$

e

$$\frac{1}{\beta}=\frac{\lambda}{\gamma}+\frac{1-\lambda}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\beta}=\frac{\lambda}{\infty}+\frac{1-\lambda}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\beta}=\frac{1-\lambda}{2}\Leftrightarrow\beta=\frac{2}{1-\lambda}$$

logo

$$\frac{u_m}{n} \in L^{\frac{2}{1-\lambda}}\left(0, T, L^{\frac{6}{2\lambda+1}}(\Omega)\right) \text{ , com } 0 \leq \lambda < 1 \tag{3.146}$$

Note que sendo

$$q(\lambda) = \frac{6}{2\lambda+1} \Rightarrow q'(\lambda) = \frac{-6\cdot(2)}{(2\lambda+1)^2} < 0$$

e

$$\beta(\lambda) = \frac{2}{1-\lambda} \Rightarrow \beta'(\lambda) = \frac{-2\cdot(-1)}{(1-\lambda)^2} > 0$$

$q(\lambda)$ e $\beta(\lambda)$ são funções monótonas para todo $\lambda \in [0,1[$ assumindo todos os valores intermediários respectivamente nos intervalos $[2,6]$ e $[2,+\infty[$.

Mostremos agora que a forma linear contínua

$$\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right) = B\left(\frac{u_m}{n}\right) \in L^{\frac{4}{3}}(0,T,V')$$

Ora,

$$\left\|\tfrac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{V'} \leq \sup_{\|v\|_V \leq 1}\left|\left\langle \tfrac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right), v\right\rangle_{V'V}\right|$$

$$\leq \sup_{\|v\|_V \leq 1}\left|\left(\tfrac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right), v\right)\right|$$

e como

$$\|w\cdot\nabla w\|_{\mathbb{R}^d} = \left\|\left(w_1\tfrac{\partial w}{\partial x_1},\ldots,w_d\tfrac{\partial w}{\partial x_d}\right)\right\|_{\mathbb{R}^d} \leq \|(w_1,\ldots,w_d)\|_{\mathbb{R}^d}\cdot\|\nabla w\|_{\mathbb{R}^d}$$

pode-se escrever

$$\left\|\tfrac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{V'} \leq \sup_{\|v\|_V \leq 1}\left\|\tfrac{u_m}{n}\right\|_{L^\alpha(\Omega)}\cdot\left\|\nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{L^\beta(\Omega)}\cdot\|v\|_{L^\gamma(\Omega)} \tag{3.147}$$

onde $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1$ e de modo que se tenha

$$\|v\|_{L^\gamma(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|v\|_V \leq C\cdot 1 = C$$

escolhe-se $\alpha = 3$, $\beta = 2$ e $\gamma = 6$. No sentido de usar-se o resultado apresentado em

(3.146) devemos achar λ tal que

$$\frac{6}{1+2\lambda} = \alpha = 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

logo $\frac{2}{1-\lambda}\Big|_{\lambda=\frac{1}{2}} = 4$. Assim,

$$\frac{u_m}{n} \in L^4\left(0, T, L^3(\Omega)\right)$$

A partir de (3.147) e das escolhas feitas acima para α, β e γ obtém-se a inequação abaixo

$$\left\|\tfrac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{V'} \leq C \cdot \left\|\tfrac{u_m}{n}\right\|_{L^3(\Omega)} \cdot \left\|\nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}$$

Agora elevando-se ambos os membros da inequação anterior à potência $\frac{4}{3}$ e a seguir integrando-se para $t \in [0, T[$, vem:

$$\int_0^T \left\|\tfrac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{V'}^{\frac{4}{3}} \, dt \leq C \cdot \int_0^T \left\|\tfrac{u_m}{n}\right\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{4}{3}} \cdot \left\|\nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{3}} dt$$

aplicando-se Hölder no tempo na inequação acima, vem

$$\int_0^T \left\|\tfrac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{V'}^{\frac{4}{3}} \, dt \leq C \cdot \left[\int_0^T \left\|\tfrac{u_m}{n}\right\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{4}{3}p} \cdot dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^T \left\|\nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{3}q} dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e escolhendo-se $q = \frac{3}{2}$ e $p = 3$ obtém-se

$$\int_0^T \left\|\tfrac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{V'}^{\frac{4}{3}} \, dt \leq C \cdot \left[\int_0^T \left\|\tfrac{u_m}{n}\right\|_{L^3(\Omega)}^{4} \cdot dt\right]^{\frac{1}{3}} \left[\int_0^T \left\|\nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{2} dt\right]^{\frac{2}{3}}$$

ou seja

$$\left\|\frac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\frac{u_m}{n}\right)\right\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T,V')} \leq$$

$$\leq C \cdot \left\|\tfrac{u_m}{n}\right\|_{L^4(0,T,\ L^3(\Omega))}^{\frac{4}{3}} \cdot \left\|\nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right)\right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^{\frac{4}{3}} = \widetilde{C} < \infty$$

portanto

$$B\left(\frac{u_m}{n}\right) = \frac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\frac{u_m}{n}\right) \in L^{\frac{4}{3}}\left(0, T, V'\right) \tag{3.148}$$

Desta forma, acabamos de mostrar a afirmação (3.133, da página 123).

$\blacksquare$

Retornando-se à equação 3.140 , a saber

$$u'_m = nP_m\left(g - Au_m - B\left(\frac{u_m}{n}\right)\right)$$

daí

$$|u'_m|_{V'} = \left|nP_m\left(g - Au_m - B\left(\frac{u_m}{n}\right)\right)\right|_{V'}$$

e como $n \leq 1$ pode-se escrever

$$|u'_m|_{V'} \leq \left|P_m\left(g - Au_m - B\left(\frac{u_m}{n}\right)\right)\right|_{V'}$$

mas considerando-se que

$$\begin{aligned} P_m : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow V_m \subset V \subset H_0^1(\Omega) \\ v &\longmapsto P_m(v) \end{aligned}$$

vem

$$|u'_m|_{V'} \leq \left|g - Au_m - B\left(\frac{u_m}{n}\right)\right|_{V'}$$

e pela desigualdade generalizada, temos:

$$|u'_m|_{V'} \leq |g|_{V'} + |Au_m|_{V'} + \left|B\left(\frac{u_m}{n}\right)\right|_{V'}$$

elevando-se à potência $\left(\frac{4}{3}\right)$ obtemos

$$|u'_m|_{V'}^{\frac{4}{3}} \leq C_1 \cdot \left(|g|_{V'}^{\frac{4}{3}} + |Au_m|_{V'}^{\frac{4}{3}} + \left|B\left(\frac{u_m}{n}\right)\right|_{V'}^{\frac{4}{3}}\right)$$

E, agora, integrando-se de 0 a T , vem:

$$\int_0^T |u'_m|_{V'}^{\frac{4}{3}}\, dt \leq$$

$$\leq C_1 \left(\int_0^T |g|_{V'}^{\frac{4}{3}} \, dt + \int_0^T |Au_m|_{V'}^{\frac{4}{3}} \, dt + \int_0^T \left| B\left(\frac{u_m}{n}\right)\right|_{V'}^{\frac{4}{3}} dt \right)$$
$$\leq C \cdot \left(\int_0^T |g|_{V'}^{2} \, dt + \int_0^T |Au_m|_{V'}^{2} \, dt + \int_0^T \left| B\left(\frac{u_m}{n}\right)\right|_{V'}^{\frac{4}{3}} dt \right) \leq K < \infty$$

ou seja

$$\int_0^T |u_m'|_{V'}^{\frac{4}{3}} \, dt \leq K < \infty$$

Desta forma, independente de m obtemos uma bola com raio K finito no espaço $L^{\frac{4}{3}}(0, T, V')$, tal que

$$u_m^{'} \in B_K \subset L^{\frac{4}{3}}(0, T, V') \tag{3.149}$$

Agora, com os resultados obtidos nas expressões (3.149) acima e (3.102, página 117), a saber

$$u_m \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$$
$$u_m^{'} \in L^{\frac{4}{3}}(0, T, V')$$

verificaremos se os espaços $X_0 = V$, $X = H$ e $X_1 = V'$ satisfazem às hipóteses do Lema de Aubin-Lions (Lema 1.66, página 26) antes de aplicá-lo. Note que

$$V,\ H \text{ e } V^{'} \text{ são espaços de Banach} \tag{3.150}$$

pois são espaços normados completos. A seguir consideremos as seguintes afirmações:

Afirmação

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^{'} \tag{3.151}$$

Demonstração. (da afirmação 3.151). Repare que

(i) Desde que

$$V \subset \left(H_0^1(\Omega)\right)^d \subset \left(H^1(\Omega)\right)^d \subset \left(L^2(\Omega)\right)^d$$

tem-se que

$$V = \left\{ u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d \cap \left(L^2(\Omega)\right)^d : \ \text{div } u = 0 \right\} \subset H$$

pois

$$u \in V \subset \left(H_0^1(\Omega)\right)^d \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow u \cdot \overrightarrow{N}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Logo V é um subespaço de H, devido à definição de H dada na Observação (1.56, página 22).

(ii) Tomando-se um elemento arbitrário $u \in V$, tem-se que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Agora, pela desigualdade de Poincaré-Friedrichs (Proposição 1.54), e pelas normas usadas em $H_0^1(\Omega)$ e em V vale dizer que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \cdot \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega)} = C_\Omega \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = C_\Omega \cdot \|u\|_V$$

E, como

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \|u(x,\cdot)\|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_H$$

obtém-se que

$$\|u\|_H \leq C_\Omega \cdot \|u\|_V$$

(iii) Afirmação

$$V \hookrightarrow H \tag{3.152}$$

De fato, isto é conseqüência dos itens (i) e (ii) anteriores junto com a Definição (1.26, página 7).

(iv) Através do Teorema de Representação de Riesz-Frechet (Teorema 1.42, página 12), pode-se identificar H e H', (ou seja fazendo de H o espaço pivô, veja Observação 1.47, página 15), isto é, existe um isomorfismo isométrico

$$\begin{aligned} R : H &\longrightarrow H' \\ v &\longmapsto R_v : H \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad w \longmapsto \int v \cdot w \end{aligned}$$

onde

$$\|v\|_H = |R_v(w)| = \|R_v\|_{H'} \cdot \underbrace{\|w\|_H}_{=1} \Rightarrow \|v\|_H = \|R_v\|_{H'}$$

(v) Repare que $H' \hookrightarrow V'$ decorre da Proposição (1.41, página 11), assim pode-se considerar a aplicação contínua $S : H^{'} \longrightarrow V^{'}$ onde

$$\begin{cases} H^{'}\text{é subespaço de } V^{'} \\ \exists M \geq 0, \ \ \|f\|_{V'} \leq M \cdot \|f\|_{H'} \quad , \forall f \in H^{'} \end{cases}$$

(vi) Como $H \equiv H^{'} \hookrightarrow V^{'}$, é válido estabelecer-se a transformação contínua $T : H \longrightarrow V^{'}$ obtida através de uma composição de funções contínuas , ou seja fazendo-se $T = S \circ R$.
(vii) Desta forma tendo em vista os itens (iv), (v) e (vi) acima, e apesar de que H não é algebricamente um subespaço de $V^{'}$, mas respaldando-se na Observação (1.27, página 7) pode-se "enxergar"

$$H \longrightarrow V^{'}$$

como uma "imersão" contínua.
Portanto os itens (iii) e (vii) permitem concluir a afirmação 3.151, ou seja

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^{'}$$

■

Afirmação

$$V \text{ e } V^{'} \text{ são } \textit{reflexivos} \tag{3.153}$$

Demonstração. (da afirmação 3.153). De fato, sendo V e $V^{'}$ espaços de Banach onde as normas definem-se através dos respectivos produtos internos, V e $V^{'}$ são espaços de Hilbert. E como conseqüência do Teorema de Representação de Riesz (Teorema 1.42) todo espaço de Hilbert é reflexivo. (Veja [5], páginas 212-214; ou [31], página 78).

■

Afirmação

$$V \overset{c}{\hookrightarrow} H \tag{3.154}$$

Demonstração. (da afirmação 3.154). Para mostrar isto apresentaremos os seguintes itens:
(i)

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \tag{3.155}$$

Ora

$$\begin{cases} \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx = \int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \|\nabla_x u\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ \\ \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \equiv \|\nabla_x u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \|\nabla_x u\|^2\, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx \end{cases}$$

Além disso pela desigualdade de Poincaré-Friedrichs (1.54, página 21) existe uma constante $\widetilde{C}_\Omega \geq 0$ tal que

$$\int_\Omega |u(x)|^2\, dx \leq \left(\widetilde{C}_\Omega\right)^2 \cdot \int_\Omega \|\nabla_x u\|^2\, dx = \left(\widetilde{C}_\Omega\right)^2 \cdot \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

(repare que $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ é equipado da norma herdada de $W^{1,2}(\Omega)$, segundo a Observação 1.55, página 21). A partir de dos resultados acima pode-se escrever

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \left[\left(\widetilde{C}_\Omega\right)^2 + 1\right] \cdot \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

fazendo-se $C_\Omega = \sqrt{\left(\widetilde{C}_\Omega\right)^2 + 1}$, obtém-se

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad , \quad \text{com } C_\Omega \geq 0$$

e como $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ também, concluímos pela Definição (1.26, página 7), que $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $H^1(\Omega)$.
(ii) $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$
De fato, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema 1.65 , pág. 25) temos que

$$W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \quad , \quad 1 \leq q \leq \frac{n \cdot p}{1 - k \cdot p}$$

e como neste caso $k = 1$, $p = 2$ e $n = 3$ tem-se que $\frac{n \cdot p}{1-k \cdot p} = \frac{3\cdot(2)}{1-(1)\cdot(2)} = 6$, segue-se que

$$W^{k,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \quad , \quad 1 \leq q \leq 6 \qquad (\bigstar)$$

Note que se $n = d = 2$ e com $k = 1$, $p = 2$, isto é, $p = n$ então pelo Teorema 1.65 teríamos

$$H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$$

Agora considerando-se o resultado obtido no item (i) anterior, e tomando-se $q = 2$ em (★) vem

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

onde $H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, e $L^2(\Omega)$ são espaços de Banach tais que podemos definir os operadores T contínuo e S compacto tais que

$$H_0^1(\Omega) \xrightarrow{T} H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad H^1(\Omega) \xrightarrow{S} L^2(\Omega)$$

e usar a Proposição VI.3 ([9], página 90) para concluir que o operador composto $S \circ T$ é compacto, e portanto

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \tag{3.156}$$

(iii) $V \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$

Repare que V é subespaço de $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^d$, e como as normas em V e $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ são iguais tem-se que

$$V \hookrightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

Agora considerando o resultado obtido no item (ii) anterior, vem:

$$V \hookrightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

daí, de acordo com a Proposição VI.3 ([9], página 90; ou [31], páginas 233-234) pode-se concluir que

$$V \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \tag{3.157}$$

(iv) $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$

Repare que

$$H=\left\{u\in\left(L^{2}\left(\Omega\right)\right)^{d}\ :\ \text{div }\ u\equiv 0\ \text{ e }\ u\cdot\overrightarrow{N}\Big|_{\partial\Omega}\equiv 0\right\}\subset\left(L^{2}\left(\Omega\right)\right)^{d}$$

$$V=\left\{u\in\left(H_{0}^{1}\left(\Omega\right)\right)^{d}:\ \text{div }\ u\equiv 0\right\}\subset\left(H_{0}^{1}\left(\Omega\right)\right)^{d}\subset\left(H^{1}\left(\Omega\right)\right)^{d}\subset\left(L^{2}\left(\Omega\right)\right)^{d}$$

Como conseqüência de (3.157) no item (iii) anterior, tem-se que

Dada $\left(x_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada qualquer em $V\subset\left(L^{2}\left(\Omega\right)\right)^{d}$

então existe uma subseqüência $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente em $L^{2}\left(\Omega\right)$

Ora, levando-se em conta que $V\hookrightarrow H$, conforme resultado obtido no item (iii) da demonstração da Afirmação 3.151, vem:

$$x_{n_k}\in V\Longrightarrow x_{n_k}\in H\quad,\quad\forall n_k\in\mathbb{N}$$

em virtude de que $V\subset H$ como subespaço de H, além de utilizar-se da mesma norma herdada de $L^{2}\left(\Omega\right)$. Conseqüentemente $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge em H pois este também é Banach, ou seja o limite de $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ também pertence a H. Assim obtivemos que
"$\left(x_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada qualquer em V, tal que existe $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ subseqüência $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente em H"
portanto pela Definição (1.29, página 8) significa que

$$V\overset{c}{\hookrightarrow}H$$

■

Agora, que já está verificado a validade das Afirmações 3.150, 3.151, 3.153 e 3.154, e sendo $T>0$ um número real fixo, bem como considerando-se que os dois números reais $\alpha_0=2$, $\alpha_1=\frac{3}{2}$ são tais que $\alpha_i>1$ para $i=0,1$ temos que se cumprem as hipóteses do Lema de Aubin-Lions (Lema 1.66, página 26), donde se pode concluir pelo mesmo que o espaço

$$A = \left\{ w \in L^2(0,T,V) \quad , \quad \frac{dw}{dt} \in L^{\frac{4}{3}}(0,T,V') \right\}$$

é equipado com a norma

$$\|w\|_A = \|w\|_{L^2(0,T,V)} + \left\| \frac{dw}{dt} \right\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T,V')}$$

que o torna um espaço de Banach, e que também está imerso compactamente *em* $L^2(0,T,H)$. Ou seja, agora pode-se dizer que dada uma seqüência $(u_m) \subset A$ limitada implica que é possível obter-se uma subseqüência de (u_m), denotada por

$$(u_{m_k}) \subset L^2(0,T,H),$$

fortemente convergente (ou seja compactamente imersa) em $L^2(0,T,L^2(\Omega))$, isto é,

$$u_{m_k} \to u \quad \text{forte em } L^2(0,T,H) \tag{3.158}$$

3.5 Passagem ao Limite

Para passar o limite em m na formulação variacional, multiplicamos (3.32) por uma função $\phi \in C^1([0,T])$ com $\phi(T) = 0$ e integramos em t:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{u_m}{n}, v_i\right)\phi(t)\,dt + \int_0^T \left(\tfrac{n'}{n^2}u_m, v_i\right)\phi(t)\,dt + \int_0^T \left(\tfrac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\tfrac{u_m}{n}\right), v_i\right)\phi(t)\,dt \\
&+\mu\int_0^T \left(\nabla(u_m), v_i\cdot\nabla\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)\phi(t)\,dt + \mu\int_0^T \left(\nabla(u_m), \nabla(v_i)\tfrac{1}{n}\right)\phi(t)\,dt \\
&+\mu\int_0^T \left(\tfrac{F(n)}{n}u_m, v_i\right)\phi(t)\,dt = \int_0^T \langle g, v_i\rangle\phi(t)\,dt,\ \forall v_i \in V_m.
\end{aligned} \tag{3.159}$$

Integrando por partes o primeiro termo do lado esquerdo da equação 3.159, obtemos:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}, v_i\right)\phi(t)\,dt = \left(\frac{u_m}{n}, v_i\right)\phi(t)\Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \left(\frac{u_m}{n}, v_i\right)\phi'(t)\,dt$$

$$= \left(\frac{u_m(\cdot,T)}{n(\cdot,T)}, v_i\right)\underbrace{\phi(T)}_{=0} - \left(\frac{u_m(\cdot,0)}{n(\cdot,0)}, v_i\right)\phi(0) - \int_0^T \left(\frac{u_m(\cdot,t)}{n(\cdot,t)}, \phi'(t)\, v_i\right) dt$$

e como $u_m(\cdot,0) \equiv u_{0,m}$ (cfe Observação 3.7, página 87), segue-se que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{u_m}{n}, v_i\right)\phi(t)\, dt = -\left(\frac{u_{0,m}(\cdot,0)}{n(\cdot,0)}, v_i\right)\phi(0) - \int_0^T \left(\frac{u_m(\cdot,t)}{n(\cdot,t)}, \phi'(t)\, v_i\right) dt \tag{3.160}$$

substituindo-se a expressão do segundo membro da equação 3.160 no lugar do primeiro termo do lado esquerdo da equação 3.159 vem:

$$-\int_0^T \left(\tfrac{u_m}{n}, \phi'(t)\, v_i\right) dt - \left(\tfrac{u_{0,m}}{n(0)}, \phi(0)\, v_i\right) + \underbrace{\int_0^T \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), \phi(t)\, v_i\right) dt}_{\star} +$$

$$+\mu\int_0^T \left(\nabla(u_m), v_i\cdot\nabla\left(\tfrac{1}{n}\right)\phi(t)\right) dt + \mu\int_0^T \left(\nabla(u_m), \phi(t)\,\nabla(v_i)\,\tfrac{1}{n}\right) dt +$$

$$+\int_0^T \left(\tfrac{n'}{n^2}u_m, \phi(t)\, v_i\right) dt + \mu\int_0^T \left(\tfrac{F(n)}{n}u_m, \phi(t)\, v_i\right) dt = \int_0^T \langle g, \phi(t)\, v_i\rangle\, dt \quad \forall v_i \in V_m \tag{3.161}$$

Agora, das limitações em (3.102, página 117), obtemos a subseqüência $(u_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente no espaço de Hilbert $L^2(0,T,V)$ e converge fraco* no espaço de Banach $L^\infty(0,T,H)$. E pelo lema de Aubin-Lions em (ver 3.158, página 141), obtemos que $u_{m_i} \to u$ em $L^2(0,T,H)$. Assim a passagem do limite nos termos lineares é fácil e justificada pelas convergências: $u_{0,m} \to u_0$ em $L^2(\Omega)$, $u_m \to u$ fraco em $L^2(0,T,V)$ e $u_m \to u$ forte em $L^2(0,T,L^2(\Omega))$. A convergência do termo não linear (isto é, o terceiro no lado esquerdo da equação 3.161) é justificada pelo seguinte lema:

Lema 3.12 *Se u_m converge fraco para u em $L^2(0,T,V)$ e fortemente em $L^2(0,T,H)$ então para qualquer função vetorial v com componentes em $C^1(Q_T)$ temos:*

$$I_m = \int_0^T \left(\frac{u_m}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), \phi(t)\, v\right) dt \quad \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \quad I = \int_0^T \left(\frac{u}{n}\cdot\nabla\left(\frac{u}{n}\right), \phi(t)\, v\right) dt$$

Demonstração. Repare que pelo Lema (1.102, página 40)

$$I_m = \int_0^T \left(\frac{u_m}{n} \cdot \nabla \left(\frac{u_m}{n} \right), \phi(t)\, v \right) dt = -\int_0^T \left(\frac{u_m}{n} \cdot \nabla (v), \phi(t) \frac{u_m}{n} \right) dt$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{3} \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \left(\frac{u_m}{n} \right)_i \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j) \left(\frac{u_m}{n} \right)_j dxdt$$

analogamente

$$I = \int_0^T \left(\frac{u}{n} \cdot \nabla \left(\frac{u}{n} \right), \phi(t)\, v \right) dt = -\int_0^T \left(\frac{u}{n} \cdot \nabla (v), \phi(t) \frac{u}{n} \right) dt$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{3} \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \left(\frac{u}{n} \right)_i \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j) \left(\frac{u}{n} \right)_j dxdt$$

Assim

$$|I_m - I| = \sum_{i,j=1}^{3} \left| \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{u_m}{n} \right)_i \left(\frac{u_m}{n} \right)_j - \left(\frac{u_m}{n} \right)_i \left(\frac{u}{n} \right)_j + \\ + \left(\frac{u_m}{n} \right)_i \left(\frac{u}{n} \right)_j - \left(\frac{u}{n} \right)_i \left(\frac{u}{n} \right)_j \end{array} \right] dxdt \right|$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \left| \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \left\{ \left(\frac{u_m}{n} \right)_i \left[\left(\frac{u_m}{n} \right)_j - \left(\frac{u}{n} \right)_j \right] + \left(\frac{u}{n} \right)_j \left[\left(\frac{u_m}{n} \right)_i - \left(\frac{u}{n} \right)_i \right] \right\} dxdt \right|$$

Considerando-se parte da hipótese 3.28 (do Teorema 3.4, página 84) assegura que

$$0 < n_0 \leq n(x,t) < 1 \quad , \quad \forall (x,t) \in \overline{Q_T} \tag{3.162}$$

e visto que $v \in C^1(Q_T)$ implica $\left| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right| \leq c_{i,j} \leq \widehat{c}$, segue-se da aplicação do item "d"do Teorema 1.34 (ver página 9) e depois da desigualdade de Hölder no espaço, (Proposiçao 1.33, página 9) vem:

$$|I_m - I| \leq \frac{\widehat{c}}{(n_0)^2} \sum_{i,j=1}^{3} \left| \int_0^T \phi(t) \int_\Omega \left\{ \begin{array}{c} (u_m)_i \left[(u_m)_j - (u)_j \right] + \\ + (u)_j \left[(u_m)_i - (u)_i \right] \end{array} \right\} dxdt \right|$$

$$\leq \widetilde{c} \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^T \left| \phi(t) \left\{ \int_\Omega \left[(u_m)_i (u_m - u)_j + (u)_j (u_m - u)_i \right] dx \right\} dt \right|$$

ou seja

$$|I_m - I| \leq \widetilde{c}\sum_{i,j=1}^{3} \int_0^T |\phi(t)| \left[\begin{array}{c} \|(u_m)_i\|_{L^2(\Omega)} \left\|(u_m - u)_j\right\|_{L^2(\Omega)} + \\ + \left\|(u)_j\right\|_{L^2(\Omega)} \|(u_m - u)_i\|_{L^2(\Omega)} \end{array} \right] dt$$

e como $\|(w)_i\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w\|_{L^2(\Omega)}$ tem-se

$$|I_m - I| \leq \widetilde{c} \int_0^T |\phi(t)| \left[\|u_m\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_m - u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_m - u\|_{L^2(\Omega)}\right] dt$$

Agora aplicando-se a desigualdade de Hölder no tempo

$$\begin{array}{c} |I_m - I| \leq \widetilde{c}\left(\int_0^T |\phi(t)| \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u_m - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot dt\right)^{\frac{1}{2}} + \\ +\widetilde{c}\left(\int_0^T |\phi(t)| \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u_m - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot dt\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

considerando-se que $u_m \to u$ forte em $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ e que $\phi \in C^1([0, T])$ temos que

$$\begin{array}{c} \left(\int_0^T |\phi(t)| \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot dt\right)^{\frac{1}{2}} < k_1 < \infty \\ \left(\int_0^T |\phi(t)| \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot dt\right)^{\frac{1}{2}} < k_2 < \infty \end{array}$$

e como

$$\left(\int_0^T \|u_m - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|u_m - u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$$

segue-se

$$|I_m - I| \leq (\widetilde{c} \cdot k_1 + \widetilde{c} \cdot k_2) \|u_m - u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \quad \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \; 0$$

Portanto $I_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} I$, ou seja $\displaystyle\int_0^T \left(\frac{u_m}{n} \cdot \nabla\left(\frac{u_m}{n}\right), \phi(t) v\right) dt$ converge para $\displaystyle\int_0^T \left(\frac{u}{n} \cdot \nabla\left(\frac{u}{n}\right), \phi(t) v\right) dt$ quando $m \to \infty$.

■

Observação 3.13 Vamos mostrar abaixo as convergências de cada uma das demais parcelas do lado esquerdo da equação (3.161).

(i)
$$\underbrace{\int_0^T \left(\frac{u_m}{n}, \phi'(t)\, v_i\right) dt}_{=I_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\int_0^T \left(\frac{u}{n}, \phi'(t)\, v_i\right) dt}_{=I}$$

pois considerando-se a expressão em 3.162 tem-se

$$|I_m - I| = \left|\int_0^T \left(\tfrac{u_m-u}{n}; \phi'(t)\, v_i\right) dt\right| \leq \tfrac{1}{n_0}\left|\int_0^T \int_\Omega (u_m - u)\, \phi'(t)\, v_i \cdot dxdt\right|$$

aplicando-se o item "d" do Teorema (1.34, página 9), vem

$$|I_m - I| \leq \frac{1}{n_0}\int_0^T \int_\Omega |u_m - u| \cdot |\phi'(t)| \cdot |v_i|\, dxdt$$

e pela desigualdade de Hölder no espaço

$$|I_m - I| \leq \tfrac{1}{n_0}\int_0^T |u_m - u|_{L^2(\Omega)} \cdot |\phi'(t)|_{L^2(\Omega)} \cdot |v_i|_{L^2(\Omega)}\, dt$$

mas como

$$\phi \in C^1([0,T]) \Longrightarrow |\phi'(t)|_{t\in[0,T]} \leq k_3 < \infty \tag{3.163}$$

e a função vetorial v tem componentes em $C^1(Q_T)$, vale dizer

$$|v_i|_{L^2(\Omega)} \leq k_4 = 3\left[1 + \sup_{1\leq i\leq 3} |v_i|_{L^2(\Omega)}\right] \tag{3.164}$$

daí

$$|I_m - I| \leq \tfrac{k_3}{n_0}\int_0^T |u_m - u|_{L^2(\Omega)}\, k_4 dt$$

$$|I_m - I| \leq \tfrac{k_3}{n_0} k_4\int_0^T |u_m - u|_{L^2(\Omega)} \cdot 1dt$$

aplicando-se em

$$\int_0^T |u_m - u|_{L^2(\Omega)} \cdot 1 \cdot dt$$

a desigualdade de Hölder (Proposição 1.33) no tempo onde a função constante igual a 1 é um dos argumentos, vem:

$$|I_m - I| \leq$$

$$\leq \tfrac{k_3 \cdot k_4}{n_0} \cdot \|u_m - u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \cdot \left(\int_0^T 1^2 \cdot dt\right)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{k_3 \cdot k_4}{n_0} \cdot \|u_m - u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \cdot \sqrt{T}$$

e como

$$\frac{k_{3 \cdot k_4}}{n_0} \cdot \|u_m - u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \cdot \sqrt{T} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

tem-se que $|I_m - I| \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$, pois $T > 0$ é um número real fixo. Portanto

$$\int_0^T \left(\frac{u_m}{n}, \phi'(t)\, v_i\right) dt \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left(\frac{u}{n}, \phi'(t)\, v_i\right) dt$$

(ii)

$$\underbrace{\left(\frac{u_{0,m}}{n(\cdot,0)}, \phi(0)\, v_i\right)}_{= I_m} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} \underbrace{\left(\frac{u_o}{n(\cdot,0)}, \phi(0)\, v_i\right)}_{= I}$$

Ora, considerando-se 3.162 tem-se

$$|I_m - I| = \left|\left(\tfrac{u_{0,m}}{n(\cdot,0)} - \tfrac{u_0}{n(\cdot,0)}, \phi(0)\, v_i\right)\right| = \left|\int_\Omega \left(\tfrac{u_{0,m} - u_0}{n(\cdot,0)}\right) \cdot \phi(0) \cdot v_i \cdot dx\right|$$

$$|I_m - I| \leq \tfrac{1}{n_0} \int_\Omega \left|u_{0,m} - u_0\right| \cdot |\phi(0)| \cdot |v_i| \cdot dx$$

Lembrando-se que a função vetorial v tem componentes em $C^1(Q_T)$, vale afirmar o que estabeleceu em 3.164, assim

$$|I_m - I| \leq \tfrac{k_4 \cdot |\phi(0)|}{n_0} \cdot \int_\Omega |u_{0,m} - u_0| \cdot 1 \cdot dx$$

$$|I_m - I| \leq \tfrac{k_4 \cdot |\phi(0)|}{n_0} \cdot \left|u_{0,m} - u_0\right|_{L^2(\Omega)} \cdot \left(\int_0^T 1^2 \cdot dt\right)^{\frac{1}{2}} \text{ , onde } 0 < T < \infty$$

após aplicar a desigualdade de Hölder no espaço, e tendo em vista o item 2 da Observação (3.7, página 87), temos que

$$|I_m - I| \leq \tfrac{k_4 \cdot |\phi(0)| \cdot \sqrt{T}}{n_0} \cdot |u_{0,m} - u_0|_{L^2(\Omega)} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

portanto segue-se que

$$\left(\frac{u_{0,m}}{n(\cdot,0)},\phi(0)\,v_i\right)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\left(\frac{u_0}{n(\cdot,0)},\phi(0)\,v_i\right)$$

(iii) $\underbrace{\int_0^T\left(\frac{n'}{n^2}u_m,\phi(t)\,v_i\right)dt}_{=I_m}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\underbrace{\int_0^T\left(\frac{n'}{n^2}u,\phi(t)\,v_i\right)dt}_{=I}$

Ora, segundo a expressão 3.102, da página 117, temos que u_m é limitada no espaço de Banach $L^\infty(0,T,H)$, daí pelo item (iii) da Definição (1.58, página 23) tem-se que u_m converge fraco-estrela para u , isto é, $u_m \underset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T,H)$.
Repare que $H' \equiv H$, e

$$\left[L^1(0,T,H)\right]' \equiv L^\infty\left(0,T,H'\right) \equiv L^\infty(0,T,H)$$

assim a convergência fraco-estrela acima significa que $\forall F \in L^1(0,T,H)$ devemos ter:

$$F(u_m) \to F(u) \quad \text{quando } m \to \infty, (\text{em } \mathbb{R})$$

mas pelo Teorema de Representação de Riesz-Fréchet (Teorema 1.42, página 12), tem-se que

$$\begin{aligned}F(u_m) &= \int_0^T \langle F(\cdot,t), u_m(\cdot,t)\rangle_{H'H}\cdot dt = \int_0^T (F(\cdot,t), u_m(\cdot,t))\cdot dt\\ &= \int_0^T\int_\Omega (F(x,t)\cdot u_m(x,t))\cdot dxdt\end{aligned}$$

logo, na integral $I_m = \int_0^T \left(\frac{n'}{n^2}u_m,\phi(t)\,v_i\right)dt$, devemos considerar

$$F(x,t) = \frac{n'(x,t)\cdot\phi(t)\cdot v_i(x)}{[n(x,t)]^2}$$

Afirmação. $F \in L^1(0,T,H)$

De fato,

$$\int_0^T |F(\cdot,t)|_H \cdot dt = \int_0^T \left(\int_\Omega \left| \frac{n'(x,t) \cdot \phi(t) \cdot v_i(x)}{[n(x,t)]^2} \right|^2 \cdot dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot dt \tag{$\bigstar$}$$

e agora como $n' \in L^1(0,T,L^\infty(\Omega))$ que é uma das hipóteses do Teorema (3.4, página 84), tem-se que

$$|n'(x,t)| \leq |n'(\cdot,t)|_{L^\infty(\Omega)} \Longrightarrow |n'(x,t)|^2 \leq |n'(\cdot,t)|^2_{L^\infty(\Omega)} \tag{$\bigstar\bigstar$}$$

Lembrando-se de 3.162 , e usando-se ($\bigstar\bigstar$) na relação ($\bigstar$) acima vem:

$$\int_0^T |F(\cdot,t)|_H \cdot dt \leq \tfrac{1}{(n_0)^2} \int_0^T |n'(\cdot,t)|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |\phi(t)|^2 \cdot |v_i(x)|^2 \cdot dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot dt$$

Além disso como

$$\phi \in C^1([0,T]) \Longrightarrow \left| \phi(t)|_{t \in [0,T]} \right| \leq c_1 < \infty \tag{3.165}$$

vale dizer que

$$\begin{aligned} \int_0^T |F(\cdot,t)|_H \cdot dt &\leq \tfrac{c_1}{(n_0)^2} \int_0^T |n'(\cdot,t)|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |v_i(x)|^2 \cdot dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot dt \\ &\leq \tfrac{c_1}{(n_0)^2} \int_0^T |n'(\cdot,t)|_{L^\infty(\Omega)} \cdot |v_i|_{L^2(\Omega)} \cdot dt \end{aligned}$$

ou seja

$$\int_0^T |F(\cdot,t)|_H \cdot dt \leq \tfrac{c_1}{(n_0)^2} \cdot |v_i|_{L^2(\Omega)} \cdot \int_0^T |n'(\cdot,t)|_{L^\infty(\Omega)} \cdot dt < \infty$$

logo, é verdade a afirmação. Portanto, tem-se que

$$\int_0^T \left(\frac{n'}{n^2} u_m, \phi(t) v_i \right) dt \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left(\frac{n'}{n^2} u, \phi(t) v_i \right) dt$$

(iv) $\int_0^T \left(\frac{F(n)}{n} u_m, \phi(t) v_i \right) dt \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left(\frac{F(n)}{n} u, \phi(t) v_i \right) dt$

Ora

$$
\begin{aligned}
|I_m - I| &= \left| \int_0^T \left(\frac{F(n)}{n} (u_m - u)\,, \phi\,(t)\, v_i \right) dt \right| \\
&= \left| \int_0^T \int_\Omega \frac{F(n)}{n} \cdot (u_m - u) \cdot \phi\,(t) \cdot v_i \cdot dxdt \right|
\end{aligned}
$$

aplicando-se o item "d" do Teorema (1.34, página 9) vem

$$
|I_m - I| \leq \int_0^T \int_\Omega \left| \frac{F(n)}{n} \right| \cdot \|u_m - u\| \cdot |\phi\,(t)| \cdot \|v_i\| \cdot dxdt
$$

mas por hipótese do Teorema (3.4, página 84), tem-se que

$$
0 < n_{_0} \leq n(x,t) < 1 \quad , \ \forall (x,t) \in \overline{Q_T}
$$

e a função $F : (0,1) \to \mathbb{R}$ *satisfaz*

$$
0 < F\,(n(x,t)) \leq F_0 < \infty \ \ , \ \forall (x,t) \in Q_T
$$

logo

$$
|I_m - I| \leq \tfrac{F_0}{n_0} \cdot \int_0^T \int_\Omega \|u_m - u\| \cdot \|\phi\,(t) \cdot v_i\| \cdot dxdt
$$

e após aplicar a desigualdade de Hölder no espaço

$$
|I_m - I| \leq \frac{F_0}{n_0} \cdot \int_0^T \|u_m - u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\phi\,(t) \cdot v_i\|_{L^2(\Omega)} \cdot dt
$$

por outro lado lembrando-se que a função vetorial v tem componentes em $C^1(Q_T)$, ainda vale afirmar a expressão (3.164, página 145), e além disso como também (3.165, 148) vale, tem-se que

$$
|I_m - I| \leq \tfrac{F_0 \cdot c_1 \cdot k_4}{n_0} \cdot \int_0^T \|u_m - u\|_{L^2(\Omega)} \cdot 1 \cdot dt
$$

agora, usando-se a desigualdade de Hölder no tempo na integral acima, e considerando que $T > 0$ é um real fixo, vem

$$|I_m - I| \leq \tfrac{F_0 \cdot c_1 \cdot k_4}{n_0} \cdot \|u_m - u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \cdot \sqrt{T} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Portanto,

$$\int_0^T \left(\frac{F(n)}{n} u_m, \phi(t)\, v_i \right) dt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left(\frac{F(n)}{n} u, \phi(t)\, v_i \right) dt$$

(v) $\displaystyle\int_0^T \left(\nabla(u_m), \phi(t)\, \nabla(v_i)\, \tfrac{1}{n} \right) dt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left(\nabla(u), \phi(t)\, \nabla(v_i)\, \tfrac{1}{n} \right) dt$

Por definição

$$u_m \to u \quad \text{fraco em } L^2(0,T,V) \quad \text{se somente se}$$

$$\widetilde{F} \in \left[L^2(0,T,V) \right]' \implies \widetilde{F}(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{F}(u)$$

Sejam

$$\widetilde{F} : L^2(0,T,V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \quad \longmapsto \quad \int_0^T \left(\nabla(w), \phi(t)\, \nabla(v_i)\, \tfrac{1}{n} \right) dt$$

e

$$F(x,t) = \nabla(v_i(x)) \cdot \phi(t) \cdot \frac{1}{n(x,t)}$$

Daí, consideremos a seguintes afirmações:

Afirmação 01. $F \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$

Ora, considerando-se as expressões em (3.162, página 143) e em (3.165, página 148) tem-se que

$$|F(x,t)|^2_{\mathbb{R}^3} = |\nabla v_i(x)|^2_{\mathbb{R}^3} \cdot |\phi(t)|^2_{\mathbb{R}} \cdot \left| \frac{1}{n(x,t)} \right|^2_{\mathbb{R}} \leq \frac{c_1^2}{n_0^2} \cdot |\nabla(v_i(x))|^2_{\mathbb{R}^3}$$

daí integrando-se a desigualdade acima no espaço, segue-se

$$\int_\Omega |F(x,t)|^2_{\mathbb{R}^3}\, dx \leq \tfrac{c_1^2}{n_0^2} \cdot \int_\Omega |\nabla(v_i(x))|^2_{\mathbb{R}^3}\, dx$$

ou seja

$$|F(\cdot,t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{c_1^2}{n_0^2} \cdot |\nabla v_i|^2_{L^2(\Omega)}$$

agora integrando-se a desigualdade acima em relação à variável $t \in [0,T]$, vem

$$\int_0^T |F(\cdot,t)|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \leq \tfrac{c_1^2}{n_0^2} \cdot |\nabla v_i|^2_{L^2(\Omega)} \cdot \int_0^T dt = \tfrac{c_1^2}{n_0^2} \cdot |\nabla v_i|^2_{L^2(\Omega)} \cdot T < \infty$$

portanto $F \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, e é verdadeira a Afirmação 01.
Afirmação 02. $\widetilde{F} \in [L^2(0,T,V)]'$
De fato, como $F \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ pela Afirmação 01, segue-se que

$$\left|\widetilde{F}(w)\right| = \left|\int_0^T \left(\nabla(w), \phi(t)\nabla(v_i)\frac{1}{n}\right) dt\right| < \infty \text{ },\forall w \in L^2(0,T,V)$$

ou seja $\widetilde{F} \in [L^2(0,T,V)]'$. Conseqüentemente pela definição de convergência fraca obtém-se o resultado

$$\int_0^T \left(\nabla(u_m), \phi(t)\nabla(v_i)\frac{1}{n}\right) dt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left(\nabla(u), \phi(t)\nabla(v_i)\frac{1}{n}\right) dt$$

(vi) $\displaystyle\int_0^T \left(\nabla(u_m), v_i \cdot \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right)\phi(t)\right) dt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left(\nabla(u), v_i \cdot \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right)\phi(t)\right) dt$
Aqui também utiliza-se convergência fraca em $L^2(0,T,V)$ para obter este resultado. Repare que o espaço de Hilbert $L^2(0,T,V)$ também é um espaço de Banach. E segundo o item (ii) da Definição (1.58, página 23), tem-se que

$$u_m \to u \quad \text{fraco em } L^2(0,T,V) \quad \text{se e sòmente se}$$

$$\forall\ \widetilde{F} \in \left[L^2(0,T,V)\right]' \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{F}(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{F}(u)$$

Sejam

$$\begin{aligned} \widetilde{F} : L^2(0,T,V) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w \quad &\longmapsto \int_0^T \left(\nabla(w), v_i \cdot \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right)\phi(t)\right) dt \end{aligned}$$

note que $\nabla\left(\frac{1}{n}\right)\in\mathbb{R}^d$, $\phi(t)\in\mathbb{R}$, e $v_i\in\mathbb{R}^d$

$$F(x,t)=v_i\cdot\nabla\left(\frac{1}{n}\right)\phi(t)\in\mathbb{R}^d$$

Daí, consideremos a seguintes afirmações:
Afirmação 01. $F\in L^2\left(0,T,L^2(\Omega)\right)$
De fato,

$$|F(x,t)|^2_{\mathbb{R}^d}=\left|v_i\cdot\nabla\left(\frac{1}{n}\right)\phi(t)\right|^2_{\mathbb{R}^d}$$

lembrando-se que

$$v_i\cdot\nabla\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{-1}{n^2}\right)\left(v_i^1\frac{\partial n}{\partial x_1},\ldots,v_i^d\frac{\partial n}{\partial x_d}\right)$$

e além disso $\left|\frac{\partial n}{\partial x_k}\right|\leq|\nabla n|_{\mathbb{R}^d}$ tem-se que

$$\begin{aligned}|F(x,t)|^2_{\mathbb{R}^d}&=\left|\left(\tfrac{-1}{n^2}\right)\left(v_i^1\tfrac{\partial n}{\partial x_1},\ldots,v_i^d\tfrac{\partial n}{\partial x_d}\right)\right|^2_{\mathbb{R}^d}\cdot|\phi(t)|^2_{\mathbb{R}}\\&\leq\tfrac{c_1^2}{n_0^4}\,|\nabla n(x,t)|^2_{\mathbb{R}^d}\,|v_i|^2_{\mathbb{R}^d}\end{aligned}$$

após usar as expressões dadas em (3.162) e em (3.165). Agora, fazendo-se $\frac{c_1^2}{n_0^4}=C$, e a seguir integrando-se no espaço a inequação acima vem

$$\int_\Omega|F(x,t)|^2_{\mathbb{R}^d}\,dx\leq C\int_\Omega|\nabla n(\cdot,t)|^2_{\mathbb{R}^d}\,|v_i|^2_{\mathbb{R}^d}\,dx$$

e tendo em vista a hipótese 3.28 do Teorema (3.4, página 84), tem-se que

$$\begin{gathered}\nabla n\in L^2\left(0,T,L^\infty(\Omega)\right)\ \Leftrightarrow\\\left(\forall t\in[0,T[\ \Rightarrow t\longmapsto\nabla n(\cdot,t)\in L^\infty(\Omega)\ \text{ e }\int_0^T\|\nabla n(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\,dt<\infty\right)\end{gathered}\tag{3.166}$$

segue-se que

$$\int_\Omega|F(x,t)|^2_{\mathbb{R}^d}\,dx\leq C\,\|\nabla n(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega|v_i(x)|^2\,dx\leq Ck_4^2\,\|\nabla n(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}$$

onde usou-se a inequação (3.164, página 145), assim

$$\|F(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ck_4^2 \|\nabla n(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2$$

agora, integrando-se no tempo

$$\int_0^T |F(\cdot,t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq Ck_4^2 \int_0^T \|\nabla n(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 dt$$

ou

$$\|F\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq Ck_4^2 \|\nabla n\|_{L^2(0,T,L^\infty(\Omega))}^2 < \infty$$

conseqüentemente $F \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, e portanto a Afirmação 01 é verdadeira.
Afirmação 02. $\widetilde{F} \in [L^2(0,T,V)]'$
De fato, como $F \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ decorre da Afirmação 01, segue-se que

$$\left|\widetilde{F}(w)\right| = \left|\int_0^T \left(\nabla(w), \left(v_i \cdot \nabla\left(\frac{1}{n}\right)\right)\phi(t)\right) dt\right| < \infty \text{ ,} \forall w \in L^2(0,T,V)$$

ou seja

$$\widetilde{F} \in \left[L^2(0,T,V)\right]'$$

Conseqüentemente pela definição de convergência fraca obtém-se o resultado

$$\int_0^T \left(\nabla(u_m), v_i \cdot \nabla\left(\frac{1}{n}\right)\phi(t)\right) dt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left(\nabla(u), \nabla\left(\frac{1}{n}\right)\phi(t)\, v_i\right) dt$$

Desta forma, considerando-se a aplicação do Lema (3.12, página 142), combinada com os argumentos apresentados acima na Observação 3.13 quando se passa ao limite para $m \to \infty$ na equação (3.161, página 142) obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \left(\tfrac{u}{n}, \phi'(t)\, v_i\right) dt - \left(\tfrac{u_0}{n(0)}, \phi(0)\, v_i\right) + \int_0^T \left(\tfrac{u}{n} \cdot \nabla\left(\tfrac{u}{n}\right), \phi(t)\, v_i\right) dt+ \\
&+\mu \int_0^T \left(\nabla(u), v_i \cdot \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right) \phi(t)\right) dt + \mu \int_0^T \left(\nabla(u), \phi(t)\, \nabla(v_i)\, \tfrac{1}{n}\right) dt+ \\
&+\int_0^T \left(\tfrac{n'}{n^2} u, \phi(t)\, v_i\right) dt + \mu \int_0^T \left(\tfrac{F(n)}{n} u, \phi(t)\, v_i\right) dt = \\
&= \int_0^T \langle g, \phi(t)\, v_i \rangle\, dt \quad \forall v_i \in V_m
\end{aligned}
\tag{3.167}
$$

Como (v_i) é denso em V, pode-se trocar v_i por qualquer $v \in V$, e assim vemos também que u satisfaz:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \left(\tfrac{u}{n}, \phi'(t)\, v\right) dt - \left(\tfrac{u_0}{n(0)}, \phi(0)\, v\right) + \int_0^T \left(\tfrac{u}{n} \cdot \nabla\left(\tfrac{u}{n}\right), \phi(t)\, v\right) dt+ \\
&+\mu \int_0^T \left(\nabla(u), v \cdot \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right) \phi(t)\right) dt + \mu \int_0^T \left(\nabla(u), \phi(t)\, \nabla(v)\, \tfrac{1}{n}\right) dt+ \\
&+\int_0^T \left(\tfrac{n'}{n^2} u, \phi(t)\, v\right) dt + \mu \int_0^T \left(\tfrac{F(n)}{n} u, \phi(t)\, v\right) dt = \\
&= \int_0^T \langle g, \phi(t)\, v \rangle\, dt \quad , \ \forall v \in V
\end{aligned}
\tag{3.168}
$$

Em particular, sendo $\phi \in C_0^\infty(]0,T[)$, (e com isto $\phi(0) = 0$), neste caso a segunda parcela do lado esquerdo da equação (3.168) acima anula-se pois

$$\left(\frac{u_0}{n(0)}, \phi(0)\, v\right) = \left(\frac{u_0}{n(0)}, 0\right) = 0$$

de modo que a equação (3.168) fica com o aspecto seguinte

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \left(\tfrac{u}{n}, \phi'(t)\, v\right) dt + \int_0^T \left(\tfrac{u}{n} \cdot \nabla\left(\tfrac{u}{n}\right), \phi(t)\, v\right) dt+ \\
&+\mu \int_0^T \left(\nabla(u), \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right) \phi(t)\, v\right) dt + \mu \int_0^T \left(\nabla(u), \phi(t)\, \nabla(v)\, \tfrac{1}{n}\right) dt+ \\
&+\int_0^T \left(\tfrac{n'}{n^2} u, \phi(t)\, v\right) dt + \mu \int_0^T \left(\tfrac{F(n)}{n} u, \phi(t)\, v\right) dt = \int_0^T \langle g, \phi(t)\, v\rangle\, dt \quad , \quad \forall v \in V
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{-\int_0^T \left(\frac{u}{n}, \phi'(t)\, v\right) dt + \int_0^T \left(\frac{n'}{n^2} u, \phi(t)\, v\right) dt+}_{(\bigstar)} \\
&+\int_0^T \left(\tfrac{u}{n} \cdot \nabla\left(\tfrac{u}{n}\right), \phi(t)\, v\right) dt + \mu \int_0^T \left(\nabla(u), v \cdot \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right) \phi(t)\right) dt+ \\
&+\mu \int_0^T \left(\nabla(u), \phi(t)\, \nabla(v)\, \tfrac{1}{n}\right) dt+ \\
&+\mu \int_0^T \left(\tfrac{F(n)}{n} u, \phi(t)\, v\right) dt = \int_0^T \langle g, \phi(t)\, v\rangle\, dt \quad , \quad \forall v \in V
\end{aligned}
\tag{3.169}
$$

Mas repare que

$$
\int_0^T \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{u}{n}, \phi(t)\, v\right) dt = \left(\tfrac{u(\cdot,T)}{n(\cdot,T)}, \underbrace{\phi(T)\, v}_{=0}\right) - \left(\tfrac{u(\cdot,0)}{n(\cdot,0)}, \underbrace{\phi(0)\, v}_{=0}\right) = 0 \tag{3.170}
$$

enquanto que por outro lado também vale dizer que

$$
\int_0^T \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{u}{n}, \phi(t)\, v\right) dt = \int_0^T \left(\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{u}{n}\right), \phi(t)\, v\right) dt + \int_0^T \left(\tfrac{u}{n}, v \cdot \tfrac{d}{dt}(\phi(t))\right) dt \tag{3.171}
$$

logo combinando as equações (3.170) e (3.171) acima obtém-se

$$
\int_0^T \left(\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{u}{n}\right), \phi(t)\, v\right) dt = -\int_0^T \left(\tfrac{u}{n}, v \cdot \tfrac{d}{dt}(\phi(t))\right) dt \tag{3.172}
$$

conseqüentemente a primeira parcela do lado esquerdo da equação (3.169) destacada em (★) acima, pode reescrever-se como

$$\begin{gathered}
\int_0^T \left(\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{u}{n}\right), \phi(t)\, v\right) dt + \int_0^T \left(\tfrac{n'}{n^2} u, \phi(t)\, v\right) dt + \\
+ \int_0^T \left(\tfrac{u}{n} \cdot \nabla\left(\tfrac{u}{n}\right), \phi(t)\, v\right) dt + \mu \int_0^T \left(\nabla(u), v \cdot \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right) \phi(t)\right) dt + \\
+ \mu \int_0^T \left(\nabla(u), \phi(t)\, \nabla(v)\, \tfrac{1}{n}\right) dt + \mu \int_0^T \left(\tfrac{F(n)}{n} u, \phi(t)\, v\right) dt = \\
= \int_0^T \langle g, \phi(t)\, v\rangle\, dt \quad , \quad \forall v \in V
\end{gathered} \tag{3.173}$$

o que significa que u satisfaz ao sistema (3.27, página 82), no sentido de distribuições em t.

3.6 Condição Inicial

Falta mostrar que u satisfaz $u(0) = u_0$. Para isto multiplicamos a primeira equação da formulação fraca dada em (3.27, página 82), por $\phi \in C^1([0,T])$ com $\phi(T) = 0$ e integramos em t obtendo:

$$\begin{gathered}
- \int_0^T \left(\tfrac{u}{n}, \phi'(t)\, v\right) dt - \left(\tfrac{u(0)}{n(0)}, \phi(0)\, v\right) + \\
+ \int_0^T \left(\tfrac{u}{n} \cdot \nabla\left(\tfrac{u}{n}\right), \phi(t)\, v\right) dt + \mu \int_0^T \left(\nabla(u), v \cdot \nabla\left(\tfrac{1}{n}\right) \phi(t)\right) dt + \\
+ \mu \int_0^T \left(\nabla(u), \phi(t)\, \nabla(v)\, \tfrac{1}{n}\right) dt + \int_0^T \left(\tfrac{n'}{n^2} u, \phi(t)\, v_i\right) dt + \\
+ \mu \int_0^T \left(\tfrac{F(n)}{n} u, \phi(t)\, v\right) dt = \int_0^T \langle g, \phi(t)\, v\rangle\, dt \quad , \quad \forall\, v \in V
\end{gathered} \tag{3.174}$$

Comparando a equação (3.168, página 154) com a equação (3.174) acima, vemos que:

$$\left(\tfrac{u(0)}{n(0)}, v \cdot \phi(0)\right) = \left(\tfrac{u_0}{n(0)}, v \cdot \phi(0)\right) \quad , \ \forall v \in V$$

ou seja

$$\left(\frac{u(0) - u_0}{n(0)}, v \cdot \phi(0)\right) = 0 \quad \forall v \in V$$

ou equivalententemente

$$\left(\tfrac{u(0)-u_0}{n(0)} \cdot \phi(0), v\right) = 0 \quad \forall v \in V$$

e como V é denso em H então

$$\tfrac{u(0)-u_0}{n(0)} \cdot \phi(0) = 0 \quad \text{em} \quad H$$

Escolhendo-se ϕ tal que $\phi(0) = 1$ obtém-se que

$$u(0) = u_0 \ \text{ em } \ H$$

Finaliza-se aqui, a aplicação do método de Faedo-Galerkin pelo qual se obteve a existência de uma solução do problema apresentado sob a forma de formulação fraca geral (3.27, página 82), relacionado ao problema original (3.1, página 72), conforme Observação (3.3, página 83).

3.7 Recuperação da Pressão

A pressão é recuperada de forma semelhante aquela feita para a equação de Navier-Stokes clássica (veja por exemplo [46], página 307). Utilizando-se a notação definida em (3.135, página 124), sejam:

$$U(t) = \int_0^t \tfrac{u(s)}{n(s)} ds \ ; \ G(t) = \int_0^t g(s)\, ds \ ; \ \alpha(t) = \int_0^t Au(s)\, ds \ ; \ \beta(t) = \int_0^t B\left(\tfrac{u(s)}{n(s)}\right) ds$$

Se u é solução de

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{u}{n}\right) = g - Au - B\left(\tfrac{u}{n}\right) \tag{3.175}$$

então U, G, α e $\beta \in C([0,T], V')$. Integrando (3.175) em relação a t, vem

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left(\frac{u}{n}\right) ds = \int_0^t g(\cdot, s)\, ds - \int_0^t Au(\cdot, s)\, ds - \int_0^t B\left(\frac{u(\cdot,s)}{n(\cdot,s)}\right) ds$$

ou seja

$$\frac{u(\cdot,t)}{n(\cdot,t)} - \frac{u(\cdot,0)}{n(\cdot,0)} = G(t) - \alpha(t) - \beta(t)$$

assim obtemos:

$$F(t) = G(t) - \alpha(t) - \beta(t) - \frac{u(t)}{n(t)} + \frac{u_0}{n(0)} = 0$$

Agora aplicando $v \in V$ temos:

$$\langle F(t), v\rangle = 0\ ,\ \forall v \in V$$

Utilizando-se a seguir a Proposição (1.69, página 27), obtemos que existe uma distribuição P tal que :

$$F(t) = \nabla P(t)$$

Note que $F(t) \in V' \subset H^{-1}(\Omega)$ então de acordo com o item 2 da Proposição (1.70,.página 27), tem-se que $P \in L^2(\Omega)$.
Logo se

$$\exists\ P(t) \in L^2(\Omega)\ ;\ \forall t \in [0,T] \quad \text{com } \nabla P(t) = F(t)$$

isto significa que:

$$\frac{u(t)}{n(t)} - \frac{u_0}{n(0)} + \alpha(t) + \beta(t) + \nabla P(t) = G(t) \tag{3.176}$$

Como o operador ∇ é um isomorfismo de $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ em $H^{-1}(\Omega)$, (veja Observação 1.73, página 28), então:

$$\nabla P \in C\left([0,T], H^{-1}(\Omega)\right)$$

Afirmação

$$P \in C\left([0,T], L^2(\Omega)\right) \tag{3.177}$$

De fato, conforme o item 2 da Proposição (1.70, página 27), tem-se que

$$\text{dado } t \in [0,T], \nabla P \in H^{-1}(\Omega) \Longrightarrow P(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$$

$$\text{e além disso } \|P(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c \cdot \|\nabla P(\cdot,t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \qquad (\bigstar)$$

Mas como

$$\nabla P \in C\left([0,T], H^{-1}(\Omega)\right)$$

equivale a dizer

$$t_0 \in [0,T] \ , \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall t \text{ com}$$

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\nabla P(t) - \nabla P(t_0)\|_{H^{-1}(\Omega)} < c \cdot \epsilon$$

pela linearidade do operador ∇. Daí, a equivalência acima pode ser reescrita como

$$t_0 \in [0,T] \ , \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall t \text{ com}$$

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\nabla (P(t) - P(t_0))\|_{H^{-1}(\Omega)} < c \cdot \epsilon$$

Agora, utilizando ($\bigstar$) acima, vem:

$$\left\|\widehat{P}(\cdot,t)\right\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c \cdot \left\|\nabla \ \widehat{P} \ (\cdot,t)\right\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

onde $\widehat{P} \ (\cdot,t) = P(\cdot,t) - P(\cdot,t_0)$, e a seguir usando a linearidade de ∇ vem

$$\|P(\cdot,t) - P(\cdot,t_0)\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c \cdot \left\|\nabla \ \widehat{P} \ (\cdot,t)\right\|_{H^{-1}(\Omega)} =$$

$$= c \cdot \|\nabla (P(\cdot,t) - P(\cdot,t_0))\|_{H^{-1}(\Omega)} < c^2 \cdot \epsilon$$

como as normas $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}}$ e $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ são as mesmas, conseqüentemente obtemos

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall t \text{ com}$$

$$0 < |t - t_0| < \delta \Longrightarrow \|P(t) - P(t_0)\|_{L^2(\Omega)} < c^2 \cdot \epsilon$$

ou seja

$$P \in C\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$$

Portanto, é válida a Afirmação.
Isto nos permite diferenciar (3.176) no sentido de distribuições e obter:

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{u}{n}\right) + Au + B\left(\tfrac{u}{n}\right) + \nabla \tfrac{\partial P}{\partial t} = g$$

Escrevendo $\frac{\partial P}{\partial t} = p$ obtemos:

$$\tfrac{(u)'}{n} + \tfrac{u}{n} \cdot \nabla\left(\tfrac{u}{n}\right) - \mu \tfrac{\Delta u}{n} + \nabla p + \mu \tfrac{F(n)}{n} u = g$$

Capítulo 4

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi o de aplicar o método de Faedo-Galerkin em espaços de Sobolev para provar a existência de soluções fracas para as equações de Navier-Stokes adaptadas em meios porosos semelhantes às soluções existentes para as equações clássicas de Navier-Stokes.

A principal dificuldade foi manipular a perturbação introduzida pela porosidade, bem como detalhar a aplicação do teorema de existência e unicidade de Carathéodory para provar a existência de soluções fracas em dimensão finita.

Sugere-se para trabalhos futuros obter resultados de unicidade e regularidade.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R.A., *Sobolev Spaces.* New York: Academic Press, 1975.

[2] ANTONELLO, S.B., *Estimativas do Erro nas Aproximações de Galerkin para as Equações de Navier-Stokes.* Dissertação de Mestrado.UFRGS, 2002.

[3] ATKIN, R.J. ; FOX, N., An Introduction to the Theory of Elasticity. New York: Dover, 2005.

[4] AUBIN, J.P., *Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems.* New York: Dover, 2007.

[5] BACHMAN ,G.; NARICI, L., *Functional Analysis.* New York: Dover, 2000.

[6] BEAR, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media.* New York: Dover, 1988.

[7] BEAR, J.; BACHMAT, Y., *On the equivalence of areal and volumetric averages in transport phenomena in porous media.* Advances in Water Resources. 1983. Vol.**6.** March, p.59-62.

[8] BOLDRINI, J. L. ; LUKASZCZYK, J. P., *Fluxos Incompressíveis em Meios Porosos não Consolidados.* Tese de Doutorado em Matemática Aplicada. IMECC-UNICAMP, 1996.

[9] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones.* Madrid: Aliança Editorial S.A., 1984.

[10] BUENO, H. P., *Álgebra Linear - Um Segundo Curso.* Rio de Janeiro: Textos Universitários - SBM, 2006.

[11] BURTON, D. M, *Introduction to Modern Abstract Algebra.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1967.

[12] CHAE, S. B., *Lebesgue Integration.* 2nd ed.. New York: Springer-Verlag, 1995.

[13] CODDINGTON, E.A. ; LEVINSON, N., *Theory of Ordinary Differential Equations.* New York: McGraw-Hill, 1977.

[14] DU PLESSIS, J. P. ; MASLIYAH, J. H., 1988, *Mathematical Modelling of Flow Through Consolidated Isotropic Porous Media*, Transport in Porous Media **3**, p.145-161.

[15] DU PLESSIS, J. P. ; MASLIYAH, J. H., 1991, *Flow Through Isotropic Granular Porous Media. Transport in Porous Media.* Number **6**, p.207-221.

[16] EVANS, L. C.; *Partial Differential Equations.* Berkeley, CA: Berkeley Mathematics Lecture Notes, 1993.

[17] FLEMING, W. H., *Functions of Several Variables.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1966.

[18] FOX, R.W.; McDONALD, A.T.; PRITCHARD, P.J., *Introdução à Mecânica dos Fluidos.* 6^a ed.. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[19] FRIEDMAN, A. , *Advanced Calculus.* New York: Holt, Rinehart and Winston, 1971.

[20] HALE, J. K., *Ordinary Differential Equations.* New York: R.E. Krieger Publishing Company, Inc.,1980.

[21] HEYWOOD, J.G. , *The Navier-Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions.* USA: Indiana University Journal, Vol. 29, Number 5, 1980, p. 639-681.

[22] HOFFMAN, K. ; KUNZE, R., *Álgebra Linear.* 2^a ed.. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1979.

[23] HÖNIG, C. S. , *Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville.* São Paulo: E.Blücher, 1978.

[24] HÖNIG, C. S., *A Integral de Lebesgue e suas Aplicações.* Rio de Janeiro: IMPA,. XI° Colóquio Brasileiro de Matemática , 1977.

[25] HOUNIE, J., *Teoria Elementar das Distribuições.* Rio de Janeiro: IMPA, XII° Colóquio Brasileiro de Matemática, 1979

[26] IÓRIO, V. de M., *EDP – Um Curso de Graduação.* Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 1991.

[27] IÓRIO Jr, R.; IÓRIO, V. de M., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução.* Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 1988.

[28] KESAVAN, S., Topics in Functional Analysis and Applications. New Delhi: New Age Publishers, 1989.

[29] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: John Wiley, 1978.

[30] LADYZHENSKAYA, O. A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow.* 2nd Ed..New York: Gordon and Breach, 1969.

[31] LAX, P. D., *Functional Analysis.* New York: Wiley-Interscience, 2002.

[32] LIMA, E. L., *Curso de Análise.* 2^a ed.,Volume 2. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 1976.

[33] LIMA, E. L., *Espaços Métricos.* 1^a ed.. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 1976.

[34] LIONS, J.L. , *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires.* Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969

[35] MARSDEN, J. E. ; TROMBA, A. J., *Vector Calculus.* 3th edition. New York: W. H. Freeman, 1988.

[36] MEDEIROS, L. A. ; MELLO, E. A., *A Integral de Lebesgue.* Paraíba: Editora Universitária.

[37] MEDEIROS, L. A. ; MIRANDA, M.M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro: Notas de Aula, 1989.

[38] MELO, S.T. ; MOURA NETO, F., *Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais.* Rio de Janeiro: IMPA, 18° Colóquio Brasileiro de Matemática , 1991

[39] MOURA, C. A. de , *Análise Funcional para Aplicações - Posologia.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2002.

[40] NIKOLSKY, S. M. - *A Course of Mathematical Analysis.* Moscow: Mir Publishers, 1987.

[41] ODEN, J. T. ; DEMKOWICZ ,L. F., Applied Functional Analysis. Boca Raton: CRC Press, 1996.

[42] ODEN, J. T. ; REDDY , J. N., *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements.* New York: John Wiley, 1976.

[43] RIESZ, F. ; SZÖKEFALVI-NAGY, B., *Functional Analysis.* New York: Dover, 1990.

[44] ROYDEN, H.L., *Real Analysis.*2th edition. NewYork: MacMillan Publishing Co., 1968.

[45] SPENCER, A. J. M., *Continuum Mechanics.* New York: Dover, 2004.

[46] TEMAM, R., *Navier-Stokes Equations – Theory and Numerical Analysis.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, (1979).

[47] TRÉNOGUINE, V., *Analyse Fonctionnelle.* Moscou: Éditions Mir, 1985.