



Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Pontos Helicoidais e Vértices de Darboux de Curvas no Espaço Euclidiano

Pedro André Pires Machado [†]

Mestrado em Matemática - Santa Maria - RS

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Claudia Candida Pansonato

[†]Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES.

Pontos Helicoidais e Vértices de Darboux de Curvas no Espaço Euclidiano

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Pedro André Pires Machado** e aprovada pela comissão julgadora.

Santa Maria, 11 de março de 2010.

Prof^a. Dr^a. Claudia Candida Pansonato.
Orientadora

Banca examinadora:

Prof^a. Dr^a. Claudia Candida Pansonato

Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa

Prof^a. Dr^a. Rosane Rossato Binotto

Prof. Dr. Ari João Aiolfi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFSM, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

“Dedico este trabalho à minha esposa Tanise e à Professora Claudia”

Agradecimentos

Agradeço à professora Claudia Candida Pansonato pela dedicação e competência na orientação deste trabalho.

Agradeço à CAPES pela concessão da bolsa.

Agradeço ao Departamento de Matemática e à Coordenação do Mestrado em Matemática pela formação e pelo apoio.

Agradeço aos grupos responsáveis pelos projetos \LaTeX e \MiKTeX por disponibilizarem gratuitamente os softwares que garantiram a qualidade gráfica deste trabalho.

Agradeço à minha esposa, minha família e meus amigos pelo amor que têm por mim, pois no amor reside o alimento da alma.

Resumo

O presente trabalho destina-se a um estudo sobre pontos helicoidais (*twistings*) e vértices de Darboux de curvas no espaço euclidiano n -dimensional. Pontos helicoidais são pontos de aplainamento (*flattening*) da indicatriz tangente da curva. Mostramos que nestes pontos a curva tem maior contato com alguma hélice generalizada. No caso de curvas no espaço tridimensional, estabelecemos uma relação entre pontos helicoidais e vértices de Darboux. Obtemos também uma versão do teorema dos quatro vértices para curvas fechadas no espaço envolvendo tais pontos.

Abstract

The main aim of this work is a study about twistings points and Darboux vertices of n -space curves. We define the concept of twisting of a n -space curve as flattening point of its tangent indicatrix and show that is equivalent to having higher order of contact with some generalized helix. In the three dimensional case we establish a relation between twisting points and Darboux vertices. We also obtain a version of the four vertex theorem for space closed curves involving such points.

Sumário

Introdução	9
1 Curvas no \mathbb{R}^n	12
1.1 Equações de Frenet e curvaturas em \mathbb{R}^n	13
1.2 Curvas no \mathbb{R}^3	17
2 Contato	20
2.1 Contato entre curvas e subvariedades	21
2.2 Contato entre curvas e hiperplanos	22
2.2.1 Contato entre curvas e planos no espaço	24
2.3 Contato entre curvas e esferas	25
2.3.1 Contato entre curvas e esferas no espaço	27
2.3.2 Contato entre curvas planas e círculos	29
2.4 Contato entre duas curvas	32
3 Pontos helicoidais e hélices generalizadas	35
3.1 A indicatriz tangente de uma curva	35
3.2 Hélices generalizadas e pontos helicoidais	37
4 Envelopes e Desdobramentos	45
4.1 Envelopes	45
4.2 Desdobramentos	48
4.2.1 Desdobramentos versais de tipo $A_1(m \geq 1)$	52
4.2.2 Desdobramentos versais de tipo $A_2(m \geq 2)$	53
5 Pontos helicoidais e vértices de Darboux	59
5.1 O conceito de vetor de Darboux em \mathbb{R}^3	59

5.2	Indicatrizes esféricas e vértice de Darboux em \mathbb{R}^3	60
5.3	Pontos helicoidais e vértices de Darboux em \mathbb{R}^n	70
6	Resultados globais para curvas fechadas no espaço	78
6.1	Curvas (q, p) no toro	79
6.2	Pontos helicoidais sobre curvas fechadas	85
6.3	Uma outra versão do teorema dos quatro vértices	87
6.3.1	Exemplos	100
	Conclusão	104
	Referências Bibliográficas	104

Introdução

O presente trabalho destina-se a um estudo sobre pontos helicoidais (*twistings*) e vértices de Darboux de curvas no espaço euclidiano n -dimensional.

Um ponto de aplainamento (*flattening*) de uma curva no espaço \mathbb{R}^n é um ponto em que a curva tem um contato de ordem maior ou igual a $n + 1$ com seu hiperplano osculador. No caso de curvas no \mathbb{R}^3 , estes pontos coincidem com os pontos de torção nula. O número mínimo de tais pontos sobre curvas fechadas no espaço constitui um objeto de pesquisa dentro da geometria diferencial de curvas.

Em [4], S.I.R. Costa obtém uma família de curvas fechadas sobre o toro no \mathbb{R}^3 com torção nunca nula. Em [5] é mostrado que curvas com curvatura e torção nunca nulas devem entrar pelo menos duas vezes dentro de seu fecho convexo. Por outro lado, curvas com curvatura nunca nula e que ficam no bordo de seu fecho convexo têm pelo menos quatro pontos de torção nula [21]. Esta é uma versão espacial do clássico teorema dos quatro vértices que estabelece que toda curva plana fechada simples tem pelo menos quatro vértices (pontos extremos da função curvatura) [15].

Um ponto helicoidal sobre uma curva no espaço \mathbb{R}^n é um ponto de aplainamento da sua indicatriz tangente. Este conceito foi introduzido em [20]. Em tais pontos a curva tem maior ordem de contato com alguma hélice generalizada. Em [25] é mostrado que, no caso de curvas em \mathbb{R}^3 , tais pontos coincidem com os chamados vértices de Darboux, que são definidos como os pontos críticos da indicatriz de Darboux da curva [8]. Os vértices de Darboux também aparecem numa outra versão do teorema dos quatro vértices devida a E. Heil [11] que estabelece para uma curva regular fechada no \mathbb{R}^3 a seguinte desigualdade

$$V + K + D \geq 4,$$

onde D denota o número de vértices de Darboux, K e V denotam o número de

mudanças de sinal da curvatura e da torção, respectivamente.

Este trabalho está disposto da seguinte forma. No capítulo 1 é feito um resumo de alguns conceitos e resultados envolvendo curvas e suas curvaturas em \mathbb{R}^n , a principal referência utilizada foi [9]. No capítulo 2 estudamos o conceito de contato entre duas subvariedades. Os conceitos de *ponto de aplainamento* e *vértice* são obtidos através da análise do contato entre curvas e hiperplanos e curvas e hiperesferas, respectivamente. Trabalhando em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 obtemos alguns resultados sobre o contato entre curvas e planos e curvas e esferas (círculos no plano) e concluímos o capítulo estudando o contato entre duas curvas. No capítulo 3 definimos a indicatriz tangente de uma curva e , de acordo com [20], definimos os pontos helicoidais como sendo os pontos de aplainamento da indicatriz tangente da curva. Analisando o contato entre curvas e hélices generalizadas em \mathbb{R}^n , obtemos também que nos pontos helicoidais a curva tem um contato de ordem maior ou igual a $n + 2$ com alguma hélice generalizada (num ponto qualquer a ordem de contato é pelo menos $n + 1$) [20]. Para curvas com curvatura não nula no espaço encontramos a relação entre os pontos helicoidais e a aplicação $\frac{\tau}{k}$, onde k e τ são, respectivamente, a curvatura e a torção da curva. No capítulo 4 estudamos o conceito de envelope (envoltória) de uma família de curvas. Com o objetivo de estudar a estrutura local dos envelopes relacionamos alguns resultados de [1] que dizem respeito ao conceito de *desdobramento* (*unfolding*) de uma família de aplicações. No capítulo 5 introduzimos os conceitos de vértices de Darboux. Utilizando a interpretação cinemática do triedro de Frenet iniciada por Darboux [7] e descrita em [8] obtemos o conceito de eixo de Darboux, que é o eixo instantâneo de rotação do triedro de Frenet. Além disto, relacionamos algumas propriedades sobre indicatrizes esféricas de uma curva no espaço. Um importante resultado deste capítulo é que os vértices de Darboux e os pontos helicoidais coincidem para curvas com curvatura não nula no espaço. Observamos que o conceito de eixo de Darboux só faz sentido em espaços de dimensão ímpar. Porém, mesmo neste caso, nem sempre os vértices de Darboux e os pontos helicoidais coincidem (Teorema 5). No capítulo 6 estudamos alguns resultados globais para curvas fechadas no espaço. Primeiramente analisamos as curvas (q, p) no toro e obtemos as condições para que estas curvas nunca anulem a torção [4] (ou seja, não tenham nenhum ponto de aplainamento). Posteriormente estudamos alguns resultados que dizem respeito ao número mínimo de pontos helicoidais de uma curva fechada no espaço. Por fim, baseando-se em [11], estudamos uma versão do teorema dos quatro vértices para curvas no espaço que

relaciona vértices de Darboux (extremos de $\frac{\tau}{k}$), pontos de aplainamento ordinário (mudança de sinal da torção) e pontos de inflexão (mudança de sinal de k) de uma curva fechada.

Capítulo 1

Curvas no \mathbb{R}^n

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos básicos da geometria diferencial de curvas no \mathbb{R}^n . Em 1.1 apresentamos as equações de Frenet para curvas em \mathbb{R}^n e em 1.2 obtemos expressões específicas para curvas em \mathbb{R}^3 . As principais referências utilizadas foram [9] e [3].

Uma curva parametrizada em \mathbb{R}^n é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável (classe C^{n+1}), onde I é um intervalo da reta. A curva α é chamada regular se $|\alpha'(t)| \neq 0, \forall t \in I$. Todas as curvas tratadas neste trabalho são regulares.

Dado $t \in I$, o comprimento de arco de uma curva regular parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ a partir do ponto t_0 é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt.$$

Dizemos que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é parametrizada por comprimento de arco (p.c.a.) se, para cada $t_0, t_1 \in I$, com $t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco de α , de t_0 a t_1 , é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Observamos que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é p.c.a. se, e somente se $|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in I$. Além disso, se α não for p.c.a poderemos sempre reparametrizá-la por comprimento de arco.

Utilizaremos s para denotar o parâmetro comprimento de arco.

1.1 Equações de Frenet e curvaturas em \mathbb{R}^n

Seja I um intervalo de \mathbb{R} e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável regular parametrizada pelo comprimento de arco s . $\mathbf{v}_1(s) = \frac{d}{ds}(\alpha(s))$ denotará o vetor unitário tangente a α . Como $\mathbf{v}_1(s) \cdot \mathbf{v}_1(s) = 1$, então

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_1(s) \cdot \mathbf{v}_1(s)) = 2\mathbf{v}_1(s) \cdot \frac{d}{ds}\mathbf{v}_1(s).$$

Definimos a primeira curvatura k_1 de α por

$$k_1(s) = \left| \frac{d\mathbf{v}_1(s)}{ds} \right|.$$

Se $k_1(s) \neq 0$ e $n \geq 3$, $\forall s \in I$, definimos

$$\mathbf{v}_2(s) = \frac{1}{k_1(s)} \left(\frac{d\mathbf{v}_1(s)}{ds} \right),$$

de modo que $\mathbf{v}_2(s)$ é um vetor unitário passando por $\alpha(s)$ e perpendicular a $\mathbf{v}_1(s)$ em $\alpha(s)$. Temos então (considerando $\frac{d}{ds} = ')$

$$\mathbf{v}_1'(s) = k_1(s)\mathbf{v}_2(s).$$

Como $|\mathbf{v}_2(s)| = 1$, então

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_2(s) \cdot \mathbf{v}_2(s)) = 2\mathbf{v}_2(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_2(s)).$$

Além disto,

$$\mathbf{v}_1(s) \cdot \mathbf{v}_2(s) = 0,$$

então,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_1(s) \cdot \mathbf{v}_2(s)) = \mathbf{v}_1'(s) \cdot \mathbf{v}_2(s) + \mathbf{v}_1(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_2(s)) \\ &= \mathbf{v}_1(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_2(s)) + \mathbf{v}_2(s) \cdot k_1(s)\mathbf{v}_2(s) = \mathbf{v}_1(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_2(s)) + k_1(s). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{v}_2(s)) = -k_1(s)\mathbf{v}_1(s) + \text{vetor perpendicular a } \mathbf{v}_1(s) \text{ e } \mathbf{v}_2(s).$$

Definimos a segunda função curvatura k_2 de α por

$$k_2(s) = \left| \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_2(s)) + k_1(s)\mathbf{v}_1(s) \right|.$$

Se $k_2(s) \neq 0 \forall s$ e $n \geq 4$, definimos $\mathbf{v}_3(s)$ tal que

$$\mathbf{v}_3(s) = \frac{1}{k_2(s)} \left[\frac{d}{ds}(\mathbf{v}_2(s)) + k_1(s)\mathbf{v}_1(s) \right],$$

de modo que $\mathbf{v}_3(s)$ é um vetor unitário perpendicular a $\mathbf{v}_1(s)$ e a $\mathbf{v}_2(s)$. Assim,

$$\mathbf{v}'_2(s) = -k_1(s)\mathbf{v}_1(s) + k_2(s)\mathbf{v}_3(s).$$

Suponhamos que para $j \leq n$ obtemos j vetores ortonormais $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j$ que passam por α no ponto s e $(j-1)$ funções curvatura k_1, \dots, k_{j-1} que não se anulam, tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1(s) &= k_1(s)\mathbf{v}_2(s) \\ \mathbf{v}'_2(s) &= -k_1(s)\mathbf{v}_1(s) + k_2(s)\mathbf{v}_3(s) \\ &\vdots \\ \mathbf{v}'_{j-1}(s) &= -k_{j-2}(s)\mathbf{v}_{j-2}(s) + k_{j-1}(s)\mathbf{v}_j(s). \end{aligned}$$

Então,

$$\mathbf{v}_j(s) \cdot \mathbf{v}_j(s) = 1 \Rightarrow 0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_j(s) \cdot \mathbf{v}_j(s)) = 2\mathbf{v}_j(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_j(s)).$$

Para $i < j$ temos

$$\mathbf{v}_i(s) \cdot \mathbf{v}_j(s) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_i(s) \cdot \mathbf{v}_j(s)) = \mathbf{v}_j(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_i(s)) + \mathbf{v}_i(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_j(s)).$$

Portanto

$$\mathbf{v}'_j(s) = -k_{j-1}(s)\mathbf{v}_{j-1}(s) + \text{vetor perpendicular a } \mathbf{v}_1(s), \mathbf{v}_2(s), \dots, \mathbf{v}_j(s). \quad (1.1)$$

Se $j < n$ definimos

$$k_j(s) = \left| \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_j(s)) + k_{j-1}(s)\mathbf{v}_{j-1}(s) \right|,$$

e se $k_j(s) \neq 0 \forall s$, temos

$$\mathbf{v}_{j+1}(s) = \frac{1}{k_j(s)} \left[\frac{d}{ds}(\mathbf{v}_j(s)) + k_{j-1}(s)\mathbf{v}_{j-1}(s) \right],$$

e portanto,

$$\mathbf{v}'_j(s) = -k_{j-1}(s)\mathbf{v}_{j-1}(s) + k_j(s)\mathbf{v}_{j+1}(s).$$

Se $j = n$ então somente o vetor nulo é perpendicular a $\mathbf{v}_1(s), \dots, \mathbf{v}_n(s)$ e a equação (1.1) fica

$$\mathbf{v}'_n(s) = -k_{n-1}(s)\mathbf{v}_{n-1}(s).$$

Observamos que o referencial de Frenet $\{\mathbf{v}_1(s), \dots, \mathbf{v}_j(s)\}$ com $j < n$, nada mais é do que o conjunto de vetores obtido a partir de $\{\alpha'(s), \alpha''(s), \dots, \alpha^{(j)}(s)\}$ através do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, quando estes vetores são linearmente independentes.

No caso particular em que $j = n - 1$, ou seja, em que todas as curvaturas até a ordem $(n - 2)$ não se anulam e, portanto, são positivas, podemos definir a $(n - 1)$ curvatura com sinal tomando $\mathbf{v}_{j+1}(s) = \mathbf{v}_n(s)$ como sendo o único campo unitário ortogonal a $\mathbf{v}_1(s), \dots, \mathbf{v}_{n-1}(s)$ tal que $\{\mathbf{v}_1(s), \dots, \mathbf{v}_n(s)\}$ é uma base positivamente orientada de \mathbb{R}^n e então

$$k_{n-1}(s) = (\mathbf{v}'_{n-1}(s) + k_{n-2}(s)\mathbf{v}_{n-2}(s)) \cdot \mathbf{v}_n(s) = \mathbf{v}'_{n-1}(s) \cdot \mathbf{v}_n(s).$$

Quando não houver menção em contrário, todas as curvas consideradas neste trabalho terão as $(n - 2)$ curvaturas não nulas. Além disso, o conjunto de curvas que têm esta propriedade forma um subconjunto aberto e denso de mergulhos de \mathbb{R} em \mathbb{R}^n com a topologia de Whitney [10]. Estas curvas são denominadas *genéricas*.

Consideremos agora $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ genérica com parâmetro qualquer t . A proposição a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para o anulamento da última curvatura de α .

Proposição 1. O conjunto $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(n)}(t)\}$ é linearmente dependente se, e somente se $k_{n-1}(t) = 0$.

Demonstração. Seja s o parâmetro por comprimento de arco, assim

$$|\alpha'(t)| = \frac{ds}{dt}.$$

Observamos que o conjunto $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(n)}(t)\}$ é linearmente dependente se, e somente se

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(n)}(t)) = 0.$$

Como

$$\mathbf{v}_1(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|},$$

então, utilizando as equações de Frenet e escrevendo a_{ij} para $a_{ij}(t)$ e $\mathbf{v}_1(s)$ para $\mathbf{v}_1(s(t))$, temos

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= |\alpha'(t)|\mathbf{v}_1(s) = a_{11}\mathbf{v}_1(s) \\ \alpha''(t) &= \frac{da_{11}}{dt}\mathbf{v}_1(s) + a_{11}\frac{d\mathbf{v}_1(s)}{dt} = \frac{da_{11}}{dt}\mathbf{v}_1(s) + a_{11}\frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{v}_1(s)}{ds} \\ &= \frac{da_{11}}{dt}\mathbf{v}_1(s) + a_{11}^2k_1(s)\mathbf{v}_2(s) = a_{21}\mathbf{v}_1(s) + a_{22}\mathbf{v}_2(s) \\ \alpha'''(t) &= \frac{da_{21}}{dt}\mathbf{v}_1(s) + a_{21}\frac{d\mathbf{v}_1(s)}{dt} + \frac{da_{22}}{dt}\mathbf{v}_2(s) + a_{22}\frac{d\mathbf{v}_2(s)}{dt} \\ &= a_{31}\mathbf{v}_1(s) + a_{32}\mathbf{v}_2(s) + a_{11}a_{22}k_2(s)\mathbf{v}_3(s) = a_{31}\mathbf{v}_1(s) + a_{32}\mathbf{v}_2(s) + a_{33}\mathbf{v}_3(s) \\ &\vdots \\ \alpha^{(j)}(s) &= a_{j1}\mathbf{v}_1(s) + a_{j2}\mathbf{v}_2(s) + \dots + a_{11}^j k_1(s)k_2(s)\dots k_{j-1}(s)\mathbf{v}_j(s) \\ &= a_{j1}\mathbf{v}_1(s) + a_{j2}\mathbf{v}_2(s) + \dots + a_{jn}\mathbf{v}_j(s) \\ &\vdots \\ \alpha^{(n)}(s) &= a_{n1}\mathbf{v}_1(s) + a_{n2}\mathbf{v}_2(s) + \dots + a_{11}^n k_1(s)k_2(s)\dots k_{n-1}(s)\mathbf{v}_n(s) \\ &= a_{n1}\mathbf{v}_1(s) + a_{n2}\mathbf{v}_2(s) + \dots + a_{nn}\mathbf{v}_n(s) \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^n(t)) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

com

$$a_{jj} = (|\alpha'|)^j k_1(s)k_2(s)\dots k_{j-1}(s).$$

Assim,

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^n(t)) = (|\alpha'(t)|)^{\frac{n(n+1)}{2}} k_1^{n-1}(s)k_2^{n-2}(s)\dots k_{n-1}(s).$$

Desta forma, como $k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-2}(s)$ são não nulos e α é regular temos

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^n(t)) = 0 \Leftrightarrow k_{n-1}(s) = 0,$$

ou seja, $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^n(t)\}$ é linearmente dependente se, e somente se

$$k_{n-1}(s(t)) = 0.$$

□

1.2 Curvas no \mathbb{R}^3

Nesta subsecção obteremos alguns resultados específicos para o caso tridimensional que serão utilizados no decorrer do trabalho. Primeiramente vamos fixar algumas notações:

i) $\mathbf{v}_1(s), \mathbf{v}_2(s)$ e $\mathbf{v}_3(s)$ serão conhecidos, respectivamente, por *tangente* ($\mathbf{t}(s)$), *normal* ($\mathbf{n}(s)$) e *binormal* ($\mathbf{b}(s)$) à curva α no ponto s .

ii) $k_1(s)$ e $k_2(s)$ serão conhecidos respectivamente por *curvatura* ($k(s)$) e *torção* ($\tau(s)$) da curva α no ponto s .

iii) O plano que passa pela curva $\alpha(s)$ e é gerado por $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ é chamado de *plano normal* à curva no ponto $\alpha(s)$. O plano que passa pela curva $\alpha(s)$ e é gerado por $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ é chamado de *plano osculador* da curva no ponto $\alpha(s)$. O plano que passa pela curva $\alpha(s)$ e é gerado por $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ é chamado de *plano retificante* da curva no ponto $\alpha(s)$.

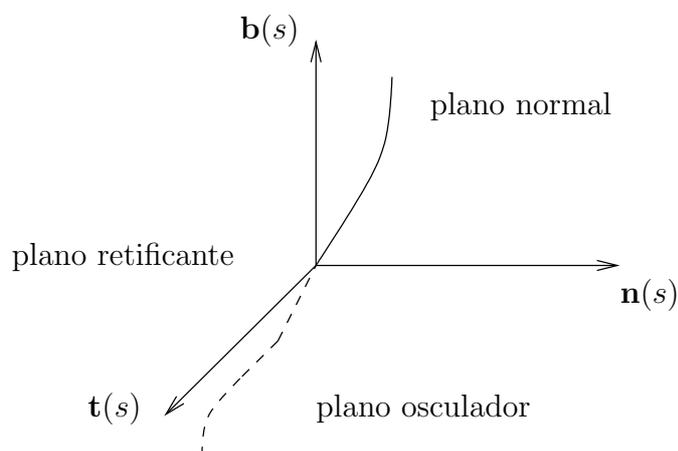


Figura 1.1: O triedro de Frenet e os planos retificante, normal e osculador

Vamos agora obter fórmulas para a curvatura e a torção de uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada com parâmetro qualquer.

Seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de α pelo comprimento de arco, ou seja,

$$\beta(s(t)) = \alpha(t).$$

Derivando esta expressão em relação a t obtemos

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha'(t),$$

onde $'$ denota a derivada com relação a t . Temos que

$$\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)| \quad \text{e} \quad \frac{d\beta}{ds} = \mathbf{t}(s).$$

Assim

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, \quad \text{e}$$

$$\alpha'' = \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{t} + \left(\frac{ds}{dt} \right) \mathbf{t}' = \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{t} + \left(\frac{ds}{dt} \right) \left(k \frac{ds}{dt} \mathbf{n} \right).$$

Deste modo,

$$\alpha' \times \alpha'' = \mathbf{t} \frac{ds}{dt} \times \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{t} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 (k \mathbf{n}) \right) = k \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \mathbf{b}.$$

Portanto

$$|\alpha' \times \alpha''| = k |\alpha'|^3 \Rightarrow k = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}. \quad (1.2)$$

Derivando α'' obtemos

$$\begin{aligned} \alpha''' &= \frac{d^3 s}{dt^3} \mathbf{t} + \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{t}' + \left(k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right)' \mathbf{n} + \left(\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{n}' \\ &= \left(\frac{d^3 s}{dt^3} - k^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \right) \mathbf{t} + \left(k' \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + 3k \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} \right) \mathbf{n} + k\tau \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Assim,

$$(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = \tau k \left(\frac{ds}{dt} \right)^6 k(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = \tau k^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^6 = \tau k^2 |\alpha'|^6.$$

Como $|\alpha' \times \alpha''|^2 = k^2 |\alpha'|^6$, então

$$\tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \times \alpha''|^2}. \quad (1.3)$$

Obtemos assim as fórmulas da curvatura e da torção de uma curva α não necessariamente p.c.a. em função das suas derivadas.

Capítulo 2

Contato

Neste capítulo introduziremos o conceito de contato entre duas subvariedades. Na seção 2.2 estudaremos o contato quando uma das subvariedades for uma curva parametrizada e a outra um hiperplano, e então será obtido o conceito de *ponto de aplainamento* de uma curva em \mathbb{R}^n . Na seção 2.3 estudaremos o contato entre curvas e hiperesferas e obteremos o conceito de *vértice* de uma curva em \mathbb{R}^n . Na seção 2.4 estudaremos o contato entre duas curvas. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [1] e [20].

A noção de contato entre subvariedades pode ser concebida, de forma intuitiva, como o grau de tangência entre elas. Sejam X e Y subvariedades com um ponto em comum P em \mathbb{R}^n . Dizemos que Y tem *contato de ordem k* com X em P se, para qualquer ponto Q em X , tem-se:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{d(Q, Y)}{(d(P, Q))^r} = \begin{cases} 0 & \text{se } r = 1, 2, \dots, k \\ c \neq 0 & \text{para } r = k + 1, \end{cases}$$

onde $d(Q, Y)$ representa a distância de Q até a subvariedade Y e $d(P, Q)$ a distância entre os pontos P e Q em X .

No que segue utilizaremos a notação $f : \mathbb{R}^m, Q \rightarrow \mathbb{R}^n, P$ para designar uma aplicação definida numa vizinhança de Q de modo que $f(Q) = P$.

Dadas duas subvariedades X e Y com um ponto P em comum, é sempre possível encontrar, nas vizinhanças de P , um mergulho $\psi : \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, P$ e uma submersão $\varphi : \mathbb{R}^n, P \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ tal que:

$$X = \psi(\mathbb{R}^m) \text{ e } Y = \varphi^{-1}(0).$$

A aplicação $\varphi \circ \psi : \mathbb{R}^m, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^p, 0$ é denominada *aplicação de contato* de X e Y em P . Montaldi [14] provou que o tipo de singularidade da aplicação $\varphi \circ \psi$ em 0 caracteriza totalmente o contato entre X e Y no ponto P independentemente da escolha das funções.

No decorrer do trabalho estaremos interessados em analisar os casos em que a subvariedade X coincide com uma curva regular em \mathbb{R}^n .

2.1 Contato entre curvas e subvariedades

Consideremos $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma curva diferenciável e $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma subvariedade definida localmente através da submersão $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ como $X = \varphi^{-1}(0)$. Temos então a definição

Proposição 2. *α e X têm contato de ordem k em $P = \alpha(t_0)$ se, e somente se a função vetorial de contato $h = (\varphi \circ \alpha) : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ satisfaz*

$$h(t_0) = h'(t_0) = \dots = h^{(k-1)}(t_0) = 0 \text{ e } h^{(k)}(t_0) \neq 0.$$

No caso em que X é uma hipersuperfície a função $h = (\varphi \circ \alpha)$ é uma função de I em \mathbb{R} .

Mencionaremos agora dois importantes resultados envolvendo contato entre curvas e subvariedades. As demonstrações destes resultados envolvem vários conceitos relacionados a K -equivalência e germes de aplicações que não serão abordados aqui. Para maiores detalhes ver [6].

Proposição 3. *Se a curva $\alpha \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tem contato de ordem k com uma subvariedade $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ no ponto $P = \alpha(t_0) \in X$, então existe uma curva β em X cujo contato com a curva α em P também é de ordem k .*

Proposição 4. *Se a curva $\alpha \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tem contato de ordem k com outra curva β definida sobre uma subvariedade $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ no ponto $P = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$, então o contato de α com a subvariedade X em P é de ordem no mínimo k .*

2.2 Contato entre curvas e hiperplanos

Consideremos agora o caso particular em que a subvariedade é um hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ definido pela equação:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} + \rho = 0,$$

onde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ é o vetor normal a H e $|\rho|$ representa a distância de H até a origem. Desta forma, H é determinado pela imagem inversa da submersão

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n + \rho, \text{ ou seja,} \\ H &= \varphi^{-1}(0). \end{aligned}$$

Analisando as singularidades da função composta $(\varphi \circ \alpha)$ poderemos determinar o contato entre uma curva diferenciável α e o hiperplano H . Aqui consideraremos uma curva diferenciável como uma imersão de classe C^{n+1} de \mathbb{R} em \mathbb{R}^n .

De fato, seja $t_0 \in I$ tal que $(\varphi \circ \alpha)(t_0) = 0$, assim, em $\alpha(t_0)$ o hiperplano H e a curva α têm um ponto de intersecção e, além disso, $\rho = \alpha(t_0) \cdot \mathbf{v}$. Vamos analisar o que ocorre quando a curva α tem contato de ordem n com o hiperplano H em $\alpha(t_0)$.

Observamos que

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \alpha)'(t_0) &= \mathbf{v} \cdot \alpha'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \alpha'(t_0) \\ (\varphi \circ \alpha)''(t_0) &= \mathbf{v} \cdot \alpha''(t_0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \alpha''(t_0) \\ (\varphi \circ \alpha)'''(t_0) &= \mathbf{v} \cdot \alpha'''(t_0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \alpha'''(t_0) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (\varphi \circ \alpha)^{(n-1)}(t_0) &= \mathbf{v} \cdot \alpha^{(n-1)}(t_0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \alpha^{(n-1)}(t_0). \end{aligned}$$

Se $\{\alpha'(t_0), \dots, \alpha^{(n-1)}(t_0)\}$ for L.I. então o conjunto $\{\alpha'(t_0), \dots, \alpha^{(n-1)}(t_0), \mathbf{v}\}$ determina uma base de \mathbb{R}^n .

O hiperplano gerado pelas $(n-1)$ derivadas de α em t_0 é denominado *hiperplano osculador* da curva em $\alpha(t_0)$. Como estamos considerando somente curvas genéricas, este hiperplano está bem definido.

Assim, H tem contato de ordem n com a curva α em $\alpha(t_0)$ se, e somente se

H é gerado por $\{\alpha'(t_0), \alpha''(t_0), \dots, \alpha^{(n-1)}(t_0)\}$ o que significa que H é o hiperplano osculador da curva no ponto $\alpha(t_0)$.

Quando analisamos o contato entre a curva α e o hiperplano H , as singularidades da aplicação de contato $(\varphi \circ \alpha)$ podem ser estudadas através da função

$$f_h(t) = \mathbf{v} \cdot \alpha(t),$$

denominada *função altura* de α na direção de \mathbf{v} . Assim, para analisar o contato entre uma curva α e o hiperplano H , basta estudarmos as singularidades da função f_h .

Definição 1. Dizemos que $P = \alpha(t_0)$ é um ponto de aplainamento da curva α se o contato do hiperplano osculador com a curva α em P é de ordem no mínimo $(n+1)$. Se o contato da curva α com o hiperplano osculador em P for de ordem igual a $(n+1)$ dizemos que P é um ponto de aplainamento ordinário.

Observamos que, se o hiperplano osculador tem contato de ordem $(n+1)$ com a curva α em $\alpha(t_0)$ temos, além das condições anteriores que

$$(\varphi \circ \alpha)^{(n)}(t_0) = \mathbf{v} \cdot \alpha^{(n)}(t_0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \alpha^{(n)}(t_0)$$

Logo $\alpha^{(n)}(t_0)$ está no hiperplano osculador e, portanto,

$$\det(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0), \dots, \alpha^{(n)}(t_0)) = 0.$$

Isto prova o seguinte resultado

Proposição 5. Um ponto $\alpha(t_0)$ é de aplainamento (*flattening*) se, e somente se

$$\det(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0), \dots, \alpha^{(n)}(t_0)) = 0,$$

onde $\alpha^{(i)}$ representa a i -ésima derivada de α .

Provamos na Proposição 1 do Capítulo 1 que $\{\alpha'(t_0), \alpha''(t_0), \dots, \alpha^{(n)}(t_0)\}$ é L.D. se, e somente se a última curvatura $k_{n-1}(t_0) = 0$. Por este resultado e pela Proposição 5 temos

Corolário 1. O ponto $\alpha(t_0)$ é um ponto de aplainamento da curva α se, e somente se

$$k_{n-1}(t_0) = 0.$$

2.2.1 Contato entre curvas e planos no espaço

Agora vamos estudar o hiperplano osculador de uma curva no caso tridimensional. Suponha que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja uma curva p.c.a. que nunca anule a curvatura em I . Seja $H_0 \subset \mathbb{R}^3$ um plano que tem \mathbf{v} como vetor normal unitário e cujo contato com a curva α no ponto $\alpha(s_0)$ é de ordem no mínimo 3, ou seja, H_0 é o plano osculador de α em $\alpha(s_0)$.

Desta forma, a função altura deve satisfazer

$$f'_h(s_0) = f''_h(s_0) = 0$$

Temos

$$\begin{aligned} f'_h(s_0) &= \mathbf{v} \cdot \alpha'(s_0) \\ f''_h(s_0) &= \mathbf{v} \cdot \alpha''(s_0) \\ f'''_h(s_0) &= \mathbf{v} \cdot \alpha'''(s_0) \\ f_h^{(iv)}(s_0) &= \mathbf{v} \cdot \alpha^{(iv)}(s_0) \end{aligned}$$

Assim

$$f'_h(s_0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \lambda \mathbf{n}(s_0) + \mu \mathbf{b}(s_0),$$

ou seja, \mathbf{v} está no plano normal a α em $\alpha(s_0)$.

$$\begin{aligned} f'_h(s_0) = f''_h(s_0) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda \mathbf{n}(s_0) + \mu \mathbf{b}(s_0)) k(s_0) \mathbf{n}(s_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ e } \mathbf{v} = \pm \mathbf{b}(s_0), \end{aligned}$$

como esperado, o vetor normal a H_0 está na direção do binormal de α em $\alpha(s_0)$. Além disso,

$$\begin{aligned} f'_h(s_0) = f''_h(s_0) = f'''_h(s_0) = 0 &\Leftrightarrow (\pm \mathbf{b}(s_0)) \cdot (k'(s_0) \mathbf{n}(s_0) + k(s_0) \mathbf{n}'(s_0)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tau(s_0) = 0, \end{aligned}$$

assim, $\alpha(s_0)$ é de aplainamento se, e somente se $\tau(s_0) = 0$ como visto no Corolário 1. Observamos que $\alpha(s_0)$ é um ponto de aplainamento ordinário se, e somente se

$$\begin{aligned}
\tau(s_0) = 0 \text{ e } f_h^{(iv)}(s_0) \neq 0 &\Leftrightarrow \tau(s_0) = 0 \text{ e } (\pm \mathbf{b}(s_0)) \cdot k(s_0) \mathbf{n}''(s_0) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \tau(s_0) = 0 \text{ e } \tau'(s_0) \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Observamos que, a partir da ordem 5, a ordem de contato com o plano osculador está diretamente relacionada com o anulamento das derivadas da torção de α no ponto $\alpha(s_0)$.

O número mínimo de pontos de aplainamento sobre uma curva fechada no espaço constitui um clássico objeto de estudo. Veremos na seção 6.1 que existem curvas (q, p) no toro que não têm nenhum ponto de aplainamento.

2.3 Contato entre curvas e esferas

Seja $\mathbb{S}_P \subset \mathbb{R}^n$ uma hipersfera de centro $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e passando por P . Sendo $U \neq P$, podemos representar \mathbb{S}_P através da imagem inversa da submersão:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = |x - U|^2 - |U - P|^2, \text{ ou seja,}$$

$$\mathbb{S}_P = \varphi^{-1}(0).$$

De modo análogo ao contato entre curvas e hiperplanos, vamos analisar as singularidades da função composta $(\varphi \circ \alpha)$ para determinar o contato entre uma curva α e a hipersfera \mathbb{S}_P .

Seja $t_0 \in I$ tal que $(\varphi \circ \alpha)(t_0) = 0$, assim, em t_0 a hipersfera \mathbb{S}_P e a curva α têm um ponto de intersecção determinado por $P = \alpha(t_0)$. Observamos que, ao analisar os anulamentos das derivadas da função $(\varphi \circ \alpha)$ em t_0 , o termo constante se anulará. Por isto, usualmente utilizamos a *função distância ao quadrado* sobre α em U definida por

$$f_d(t) = |\alpha(t) - U|^2,$$

e analisamos as singularidades desta função.

Chamamos de *hipersfera osculadora* de α em $\alpha(t_0)$ a hipersfera em \mathbb{R}^n que tem contato de ordem no mínimo $(n + 1)$ com a curva α em $\alpha(t_0)$.

Definição 2. O ponto em que α tem contato de ordem no mínimo $(n + 2)$ com a sua hipersfera osculadora é denominado *vértice* de α .

Observação. Para $n = 2$ esta definição coincide com a clássica definição de vértice de uma curva no plano. Neste caso a hipersfera osculadora é um círculo chamado círculo osculador.

Definição 3. Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ os vetores do referencial de Frenet de α . O $(i + 1)$ -subespaço gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1(t), \dots, \mathbf{v}_{i+1}(t)$ é chamado de $(i + 1)$ -subespaço osculador de α em t e a sua intersecção com a hipersfera osculadora de α será conhecida como a i -esfera osculadora de α em t .

Proposição 6. O contato entre a curva α e a $(k - 1)$ -esfera osculadora é de ordem no mínimo $(k + 1)$.

Demonstração. Consideremos α parametrizada pelo comprimento de arco. Os k vetores do referencial de Frenet de α em s_0 geram um k -plano que chamaremos de H_0^k . Deste modo, a $(k - 1)$ -esfera osculadora em $\alpha(s_0)$ é dada por

$$H_0^k \cap \mathbb{S}_0 = \mathbb{S}_0^{k-1},$$

onde \mathbb{S}_0 é a hipersfera osculadora de α em $\alpha(s_0)$. Assim poderemos definir \mathbb{S}_0^{k-1} como imagem inversa da submersão:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-(k-1)}$$

$$\varphi(x) = ((x - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{v}_{k+1}(s_0), \dots, (x - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{v}_n(s_0), |x - U|^2 - |U - \alpha(s_0)|^2),$$

onde $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são os vetores do referencial de Frenet. Pela Definição 2 a ordem de contato entre a curva α e \mathbb{S}_0^{k-1} em $\alpha(s_0)$ é determinada pelas singularidades da função

$$h(s) = ((\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{v}_{k+1}(s_0), \dots, (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{v}_n(s_0), |\alpha(s) - U|^2 - |U - \alpha(s_0)|^2).$$

Analisando as singularidades de h temos que

$$\begin{aligned} h'(s) &= (\mathbf{v}_1(s) \cdot \mathbf{v}_{k+1}(s_0), \dots, \mathbf{v}_1(s) \cdot \mathbf{v}_n(s_0), f'_d(s)) \\ h''(s) &= (\mathbf{v}'_1(s) \cdot \mathbf{v}_{k+1}(s_0), \dots, \mathbf{v}'_1(s) \cdot \mathbf{v}_n(s_0), f''_d(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h'''(s) &= (\mathbf{v}_1''(s) \cdot \mathbf{v}_{k+1}(s_0), \dots, \mathbf{v}_1''(s) \cdot \mathbf{v}_n(s_0), f_d'''(s)) \\
&\vdots \\
h^{(k)}(s) &= (\mathbf{v}_1^{(k-1)}(s) \cdot \mathbf{v}_{k+1}(s_0), \dots, \mathbf{v}_1^{(k-1)}(s) \cdot \mathbf{v}_n(s_0), f_d^{(k)}(s))
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{v}_1(s) = \alpha'(s)$ e, pelo que foi visto na demonstração da Proposição 1, segue que $[\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1'', \dots, \mathbf{v}_1^{(k-1)}] \subset [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k]$. Além disto, como \mathbb{S}_0 é a hipersfera osculadora de α em $\alpha(s_0)$ temos que

$$f_d'(s_0) = f_d''(s_0) = \dots = f_d^{(k)}(s_0) = 0.$$

Assim

$$h'(s_0) = h''(s_0) = \dots = h^{(k)}(s_0) = 0,$$

ou seja, o contato entre α e a $(k-1)$ -esfera osculadora é de ordem no mínimo $(k+1)$. \square

2.3.1 Contato entre curvas e esferas no espaço

Agora vamos estudar a hipersfera osculadora de α no caso tridimensional. Suponha que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja uma curva p.c.a. que nunca anule a curvatura em I . Seja $\mathbb{S}_0 \subset \mathbb{R}^3$ uma esfera com centro em U que tem contato de ordem no mínimo 4 com a curva α no ponto $\alpha(s_0)$.

Desta forma, a função distância ao quadrado $f_d(t) = |\alpha(t) - U|^2$ deve satisfazer

$$f_d'(s_0) = f_d''(s_0) = f_d'''(s_0) = 0$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f_d'(s_0) &= (\alpha(s_0) - U) \cdot \alpha'(s_0) = (\alpha(s_0) - U) \cdot \mathbf{t}(s_0) \\
\frac{1}{2}f_d''(s_0) &= 1 + k(s_0)(\alpha(s_0) - U) \cdot \mathbf{n}(s_0) \\
\frac{1}{2}f_d'''(s_0) &= k(s_0)(\alpha(s_0) - U)' \cdot \mathbf{n}(s_0) + k'(s_0)(\alpha(s_0) - U) \cdot \mathbf{n}(s_0) + \\
&\quad k(s_0)(\alpha(s_0) - U) \cdot \mathbf{n}'(s_0) \\
&= k(s_0)(\alpha(s_0) - U) \cdot (-k(s_0)\mathbf{t}(s_0) + \tau(s_0)\mathbf{b}(s_0)) + k'(s_0)(\alpha(s_0) - U) \cdot \mathbf{n}(s_0).
\end{aligned}$$

Assim

$$f'_d(s_0) = 0 \Leftrightarrow (\alpha(s_0) - U) \perp \mathbf{t}(s_0) \Leftrightarrow (\alpha(s_0) - U) = \lambda \mathbf{n}(s_0) + \mu \mathbf{b}(s_0),$$

ou seja, U está no plano normal a α em $\alpha(s_0)$.

$$\begin{aligned} f'_d(s_0) = f''_d(s_0) = 0 &\Leftrightarrow 0 = 1 + (\lambda \mathbf{n}(s_0) + \mu k(s_0) \mathbf{b}(s_0)) \cdot \mathbf{n}(s_0) \\ &\Leftrightarrow k(s_0) \neq 0 \text{ e } U = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \mathbf{n}(s_0) - \mu \mathbf{b}(s_0), \end{aligned}$$

para algum $\mu \in \mathbb{R}$. E por fim,

$$\begin{aligned} f'_d(s_0) = f''_d(s_0) = f'''_d(s_0) = 0 &\Leftrightarrow (\alpha(s_0) - U) \cdot (k'(s_0) \mathbf{n}(s_0) + \\ &k(s_0) \tau(s_0) \mathbf{b}(s_0) - k^2(s_0) \mathbf{t}(s_0)) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{k'(s_0)}{k(s_0)} + \mu \tau(s_0) k(s_0) = 0. \end{aligned}$$

Se $\tau(s_0) \neq 0$ temos

$$\mu = \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0) \tau(s_0)} \Leftrightarrow U = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \mathbf{n}(s_0) - \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0) \tau(s_0)} \mathbf{b}(s_0).$$

Neste caso \mathbb{S}_0 será a única esfera com contato de ordem no mínimo 4 com a curva α em $\alpha(s_0)$. Nestas condições, \mathbb{S}_0 será chamada de *esfera de curvatura* em $\alpha(s_0)$ e seu centro U será denominado *centro de curvatura esférica* da curva α em $\alpha(s_0)$.

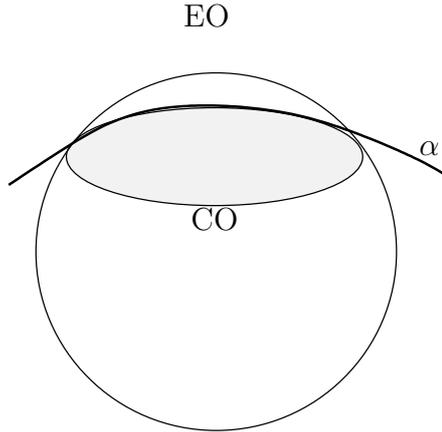


Figura 2.1: A esfera osculadora (EO) e o círculo osculador (CO) de α

Agora, se $\tau(s_0) = 0$, ou seja, $\alpha(s_0)$ é um ponto de aplainamento teremos

$$\begin{aligned} f'_d(s_0) = f''_d(s_0) = f'''_d(s_0) = 0 &\Leftrightarrow \tau(s_0) = k'(s_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow U = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\mathbf{n}(s_0) - \mu\mathbf{b}(s_0), \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, em $\alpha(s_0)$ existem infinitas esferas com contato de ordem maior ou igual a 4 com a curva α . Estas esferas contêm o círculo osculador da curva.

Aplicando a Proposição 6 para curvas em \mathbb{R}^3 temos

Proposição 7. *O contato entre a curva α e o círculo osculador em $\alpha(s_0)$ é de ordem no mínimo 3.*

Agora vamos estudar o contato entre curvas e círculos no plano.

2.3.2 Contato entre curvas planas e círculos

Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável p.c.a. e $U \in \mathbb{R}^2$ tal que $U \neq 0$. A função distância ao quadrado é dada por

$$f_d(s) = |\alpha(s) - U|^2.$$

Sejam $\mathbf{t}(s_0)$ e $\mathbf{n}(s_0)$ os vetores tangente e normal de α no ponto $\alpha(s_0)$. Pelas equações de Frenet

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n} \text{ e } \mathbf{n}' = -k\mathbf{t}.$$

Vamos analisar as singularidades da função $f_d(s)$ em s_0 .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f'_d(s_0) &= (\alpha(s_0) - U) \cdot \mathbf{t}(s_0) \\ \frac{1}{2}f''_d(s_0) &= 1 + k(s_0)(\alpha(s_0) - U) \cdot \mathbf{n}(s_0) \\ \frac{1}{2}f'''_d(s_0) &= k'(s_0)(\alpha(s_0) - U) \cdot \mathbf{n}(s_0) - k^2(s_0)(\alpha(s_0) - U) \cdot \mathbf{t}(s_0). \end{aligned}$$

Assim

$$f'_d(s_0) = 0 \Leftrightarrow (\alpha(s_0) - U) \perp \mathbf{t}(s_0) \Leftrightarrow (\alpha(s_0) - U) = \lambda\mathbf{n}(s_0),$$

ou seja, U está na direção da normal a α em $\alpha(s_0)$.

$$\begin{aligned} f'_d(s_0) = f''_d(s_0) = 0 &\Leftrightarrow 1 + k(s_0)(\alpha(s_0) - U) \cdot \mathbf{n}(s_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \lambda k(s_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow k(s_0) \neq 0 \text{ e } U = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \mathbf{n}(s_0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

E ainda,

$$\begin{aligned} f'_d(s_0) = f''_d(s_0) = f'''_d(s_0) = 0 &\Leftrightarrow (\alpha(s_0) - U) \cdot (k'(s_0) \mathbf{n}(s_0) - k^2(s_0) \mathbf{t}(s_0)) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{k'(s_0)}{k(s_0)} = 0 \\ &\Leftrightarrow k'(s_0) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Temos pela expressão (2.2) que α tem um círculo osculador em $\alpha(s_0)$ desde que $k(s_0) \neq 0$. O centro de curvatura de α em $\alpha(s_0)$ é determinado por

$$U = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \mathbf{n}(s_0),$$

onde $\rho = \frac{1}{|k(s_0)|}$ é conhecido como raio de curvatura. Pela expressão (2.3) temos que a curva tem contato de ordem 4 pelo menos com o círculo osculador se, e somente se $k'(s_0) = 0$. Assim, em vista da Definição 2, temos o resultado

Proposição 8. *A curva α tem vértice em $\alpha(s_0)$ se, e somente se $k'(s_0) = 0$.*

O lugar geométrico dos centros dos círculos osculadores é chamado de *evoluta* de α . Quando $k = 0$ a evoluta não está definida (deixa de ser conexa). Veremos no Capítulo 4 que os vértices de uma curva p.c.a. no plano correspondem a cúspides da sua evoluta.

Exemplo 2.1. Consideremos a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ no plano parametrizada por

$$\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

A fórmula da curvatura para uma curva plana $\beta(t) = (x(t), y(t))$ com parâmetro

qualquer t é ([1])

$$k_\beta = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Assim

$$k_\alpha(t) = \frac{ab}{(a^2 \sen^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

Vamos encontrar os vértices de α .

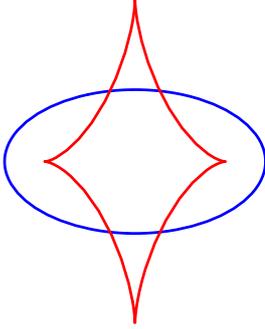


Figura 2.2: α e sua evoluta

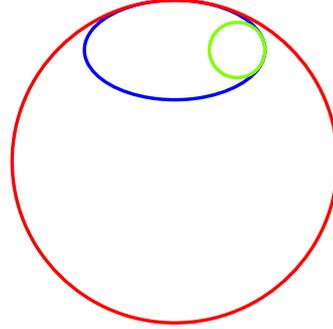


Figura 2.3: círculos osculadores de α em $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{dk_\alpha(t)}{dt} &= \frac{0 - \frac{3}{2}ab(a^2 \sen^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{1}{2}}(2a^2 \sen(t) \cos(t) - 2b^2 \sen(t) \cos(t))}{(a^2 \sen^2(t) + b^2 \cos^2(t))^3} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}ab(a^2 - b^2)2 \sen(t) \cos(t)}{(a^2 \sen^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}ab(a^2 - b^2) \sen(2t)}{(a^2 \sen^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned}$$

deste modo

$$\frac{dk_\alpha(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \sen(2t) = 0,$$

assim, os pontos de vértices de α são

$$(a, 0), (0, b), (-a, 0) \text{ e } (0, -b).$$

Nestes pontos a curva α tem contato de ordem 4 no mínimo com os círculos osculadores. Podemos visualizar isto na figura 2.3. A evoluta de α está representada na figura 2.2.

2.4 Contato entre duas curvas

Consideremos duas curvas regulares $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, sendo β representada localmente pela imagem inversa de uma submersão $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Queremos analisar o contato entre α e β num ponto em comum $P = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$. Pela Definição 2 precisamos analisar as singularidades da aplicação de contato $\psi = (f \circ \alpha)$ em P . Como α é regular temos que $\alpha'_i(t) \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, n+1$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha'_1(t_0) \neq 0$. Seja

$$\begin{aligned} \varphi & : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto (\phi \circ \alpha)(t), \end{aligned}$$

onde $\phi(x_1, \dots, x_n) = x_1$. Observamos que $\varphi(t) = \alpha_1(t)$. Como $\varphi'(t_0) \neq 0$, segue pelo teorema da função inversa que φ é difeomorfismo local em uma vizinhança de t_0 .

Considerando $\xi(t) = \alpha \circ \varphi^{-1}$ uma reparametrização de α temos que

$$t = \varphi \circ \varphi^{-1}(t) = \alpha_1 \circ \varphi^{-1}(t) = \xi_1(t),$$

onde $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_{n+1}(t))$. Então α pode ser representada localmente pela imersão

$$\begin{aligned} \xi & : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ t & \mapsto (t, G(t)). \end{aligned}$$

No caso da curva $\beta = f^{-1}(0)$ temos que esta pode ser representada localmente por meio da submersão

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (t, y) & \mapsto y - F(t). \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação de contato em t_0 será determinada por

$$f \circ \xi = G - F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}.$$

Assim, α e β tem contato de ordem $k + 1$ em t_0 se, e somente se

$$(G - F)(t_0) = (G - F)'(t_0) = \dots = (G - F)^k(t_0) = 0 \text{ e } (G - F)^{k+1}(t_0) \neq 0 \\ \Leftrightarrow G(t_0) = F(t_0), G'(t_0) = F'(t_0), \dots, G^k(t_0) = F^k(t_0) \text{ e } G^{k+1}(t_0) \neq F^{k+1}(t_0)$$

Como $\alpha(t) = (t, G(t))$ e $\beta(t) = (t, F(t))$ provamos o seguinte resultado.

Proposição 9. *Duas curvas regulares $X, Y \subset \mathbb{R}^{n+1}$ têm contato de ordem k em um ponto t_0 se, e somente se existem parametrizações $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de X e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de Y com $P = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$, $t_0 \in I \cap J$, tais que:*

$$\alpha^{(i)}(t_0) = \beta^{(i)}(t_0), \quad i = 1, \dots, k, \\ \alpha^{(k+1)}(t_0) \neq \beta^{(k+1)}(t_0).$$

Observamos que, se α e β têm contato de ordem $(k + 1)$ em t_0 então os conjuntos $\{\alpha'(t_0), \alpha''(t_0), \dots, \alpha^{(k)}(t_0)\}$ e $\{\beta'(t_0), \beta''(t_0), \dots, \beta^{(k)}(t_0)\}$ coincidem e portanto geram o mesmo referencial de Frenet $\{\mathbf{v}_1(t_0), \mathbf{v}_2(t_0), \dots, \mathbf{v}_k(t_0)\}$. Desta forma, se α e β têm contato de ordem $k + 1$ em t_0 então seus k -subespaços osculadores e suas $(k - 1)$ curvaturas coincidem. A recíproca deste resultado não é verdadeira. Tome, por exemplo, α e β em \mathbb{R}^2 parametrizadas por

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)) \text{ e } \beta(t) = (1 - \cos(t), \sin(t)),$$

temos que $\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \beta\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ assim, em $\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right)$ as curvas α e β têm um ponto de intersecção. Calculemos as curvaturas de α e β em t_0 :

$$k_\alpha(t_0) = \frac{\sin^2(t_0) + \cos^2(t_0)}{(\sin^2(t_0) + \cos^2(t_0))^{\frac{3}{2}}} = 1 = k_\beta(t_0)$$

mas

$$\alpha'(t_0) = (-\sin(t_0), \cos(t_0)) = \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \beta'(t_0) = (\sin(t_0), \cos(t_0)) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Portanto as curvaturas coincidem em $\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right)$ mas as retas tangentes não coincidem.

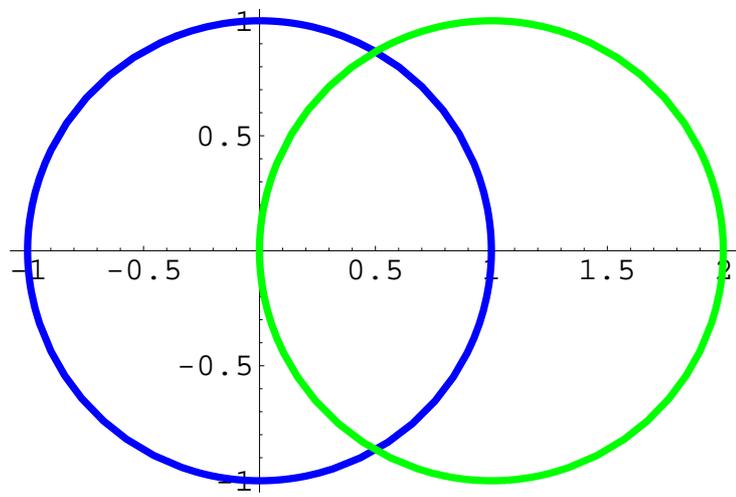


Figura 2.4: As curvas α e β

Capítulo 3

Pontos helicoidais e hélices generalizadas

Neste capítulo introduziremos o conceito de ponto helicoidal (twisting) de uma curva. Um ponto helicoidal é um ponto de aplainamento da indicatriz tangente da curva. Veremos que nestes pontos a curva terá um contato de ordem superior com alguma hélice generalizada. A principal referência utilizada foi [20].

3.1 A indicatriz tangente de uma curva

Vamos agora obter alguns resultados relacionados à indicatriz tangente de uma curva.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável regular p.c.a. de modo que a sua primeira curvatura não se anule. A curva α_T sobre a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ formada pelos vetores tangentes a α é denominada *indicatriz tangente de α* . Na figura 3.1 ilustramos uma hélice e sua indicatriz tangente.

No caso tridimensional, com $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\alpha_T : I \rightarrow \mathbb{S}^2$, podemos encontrar as fórmulas da curvatura(k_1) e da torção(τ_1) de α_T em função da curvatura(k) e da torção(τ) de α .

Como vimos nas expressões (1.2) e (1.3), a curvatura(k_1) e a torção(τ_1) da curva α_T são determinadas por

$$k_1 = \frac{|\alpha'_T \times \alpha''_T|}{|\alpha'_T|^3} \quad \text{e} \quad \tau_1 = \frac{(\alpha'_T \times \alpha''_T) \cdot \alpha'''_T}{|\alpha'_T \times \alpha''_T|^2}$$



Figura 3.1: A hélice $\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ e sua indicatriz tangente

Como α é p.c.a, $\alpha_T(s) = \alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$, então

$$\begin{aligned}\alpha'_T &= \mathbf{t}' = k\mathbf{n} \\ \alpha''_T &= (k\mathbf{n})' = -k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha'_T \times \alpha''_T = k\mathbf{n} \times (-k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}) = k^3\mathbf{b} + k^2\tau\mathbf{t} \Rightarrow |\alpha'_T \times \alpha''_T|^2 = k^6 + k^4\tau^2.$$

Deste modo

$$k_1^2 = \frac{k^2 + \tau^2}{k^2}. \quad (3.1)$$

Como

$$\alpha'''_T = (k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b})' = -3kk'\mathbf{t} + (k'' - k^3 - k\tau^2)\mathbf{n} + (2k'\tau + k\tau')\mathbf{b},$$

então

$$\begin{aligned}(\alpha'_T \times \alpha''_T) \cdot \alpha'''_T &= (k^3\mathbf{b} + k^2\tau\mathbf{t}) \cdot [-3kk'\mathbf{t} + (k'' - k^3 - k\tau^2)\mathbf{n} + (2k'\tau + k\tau')\mathbf{b}] \\ &= k^3(2k'\tau + k\tau') - 3k^3k'\tau = k^3(k\tau' - k'\tau),\end{aligned}$$

e, portanto

$$\tau_1 = \frac{k\tau' - k'\tau}{k(k^2 + \tau^2)}. \quad (3.2)$$

Obtemos assim as fórmulas da curvatura e da torção de α_T em função da curvatura e da torção de α .

3.2 Hélices generalizadas e pontos helicoidais

Uma *hélice generalizada* é uma curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que seus vetores tangentes formam um ângulo constante com algum vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Não é difícil mostrar que se α é uma hélice generalizada então sua indicatriz tangente está contida numa $(n-2)$ -esfera $\mathbb{S}_r^{n-2} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ de raio $r \leq 1$.

De fato, sejam α uma curva diferenciável regular p.c.a. e $\alpha_T(s) = \alpha'(s)$ a indicatriz tangente de α . Então o ângulo entre α_T e \mathbf{v} é constante e determinado por

$$\cos \theta = \frac{\alpha_T(s) \cdot \mathbf{v}}{|\alpha_T(s)| |\mathbf{v}|},$$

portanto

$$\alpha_T(s) \cdot \mathbf{v} = c, \quad \forall s \in I,$$

onde c é constante. Como vimos na seção 2.2 do Capítulo 2, esta é exatamente a equação de um hiperplano $H_{\mathbf{v}}$. Assim, a curva α_T está contida na intersecção entre um hiperplano $H_{\mathbf{v}}$ e a hipersfera \mathbb{S}^{n-1} , ou seja, α_T está na $(n-2)$ -esfera determinada por

$$\mathbb{S}_r^{n-2} = H_{\mathbf{v}} \cap \mathbb{S}^{n-1}.$$

Por outro lado, se β é uma curva em \mathbb{S}^{n-2} então β está num hiperplano $H_{\mathbf{v}}$. Integrando β vemos que ela é a indicatriz tangente de alguma hélice generalizada $\alpha \subset \mathbb{R}^n$.

Além disto, \mathbb{S}_r^{n-2} é de raio máximo ($r = 1$) se, e somente se $H_{\mathbf{v}}$ passa pela origem, ou seja

$$\alpha_T(s) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.3)$$

Como $(\alpha(s) \cdot \mathbf{v})' = \alpha'(s) \cdot \mathbf{v} + \alpha(s) \cdot \mathbf{v}'$ temos, em vista de (3.3), que \mathbb{S}^{n-2} é de raio máximo se, e somente se $(\alpha(s) \cdot \mathbf{v})' = 0$, isto é, $\alpha(s) \cdot \mathbf{v} = d$, onde d é constante.

Temos então o seguinte resultado.

Proposição 10. *Uma curva $\beta \subset \mathbb{S}^{n-1}$ é a indicatriz tangente de alguma hélice generalizada $\alpha \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se β está contida em uma $(n - 2)$ -esfera. Além disso, esta esfera tem raio máximo 1 se, e somente se a curva α está num hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$.*

Em vista da Proposição 10 as curvas em hiperplanos do \mathbb{R}^n podem ser vistas como um caso particular de hélice no \mathbb{R}^n . Observamos que no caso em que α é uma hélice no \mathbb{R}^3 , sua indicatriz tangente é um círculo como podemos visualizar na figura 3.1. A figura 3.2 ilustra algumas hélices em \mathbb{R}^3 .

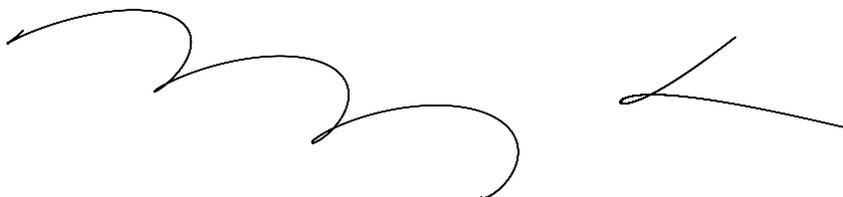


Figura 3.2: As hélices $\gamma(t) = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t - \sin t)$ e $\beta(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

Agora vamos estudar um resultado que caracteriza uma hélice generalizada por meio das derivadas de α .

Proposição 11. *A curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma hélice generalizada se, e somente se*

$$\det(\alpha''(s), \alpha'''(s), \dots, \alpha^{(n+1)}(s)) \equiv 0,$$

onde $\alpha^{(i)}$ representa a i -ésima derivada com respeito ao comprimento de arco de α .

Demonstração. Como vimos, α é hélice se, e somente se sua indicatriz tangente α_T está em um hiperplano $H_{\mathbf{v}}$, o que significa que a última curvatura de α_T é nula para todo $s \in I$. Pela Proposição 1 segue que

$$\det(\alpha'_T(s), \alpha''_T(s), \dots, \alpha_T^{(n)}(s)) \equiv 0,$$

e como $\alpha_T(s) = \alpha'(s)$, então temos que α é uma hélice se, e somente se

$$\det(\alpha''(s), \alpha'''(s), \dots, \alpha^{(n+1)}(s)) \equiv 0.$$

□

No caso de curvas em \mathbb{R}^3 podemos caracterizar as hélices de acordo com o seguinte resultado.

Proposição 12. *A curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ com curvatura não nula para todo $s \in I$ é uma hélice generalizada se, e somente se, a função $\left(\frac{\tau}{k}\right)$ é constante para todo $s \in I$, onde k e τ são, respectivamente, a curvatura e a torção de α .*

Demonstração. De fato, α é uma hélice se, e somente se sua indicatriz tangente α_T é uma curva plana. Assim, a torção τ_1 de α_T deve ser nula para todo $s \in I$. Pela expressão (3.2) temos

$$\tau_1 = \frac{k\tau' - k'\tau}{k(k^2 + \tau^2)}.$$

Como

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)' = \frac{\tau'k - k'\tau}{k^2},$$

então, α é uma hélice se, e somente se $\tau_1 = 0$, ou seja,

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)' = 0.$$

□

Da Proposição 12 segue que as curvas em \mathbb{R}^3 com curvatura e torção constantes formam uma classe particular de hélices no \mathbb{R}^3 .

Veremos na proposição a seguir que isto também ocorre para curvas em espaços de dimensão ímpar.

Proposição 13. *Se a curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ tem todas as curvaturas constantes e não nulas então α é uma hélice generalizada.*

Demonstração. De fato, sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2m+1}$ os vetores do referencial de Frenet e k_1, \dots, k_{2m} as curvaturas de α que são constantes. Consideremos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + b_3\mathbf{v}_3 + \dots + b_{2m+1}\mathbf{v}_{2m+1},$$

onde

$$b_{2i+1} = \frac{k_1 k_3 \dots k_{2i-1}}{k_2 k_4 \dots k_{2i}}.$$

Assim, \mathbf{v} é constante pois

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v}'_1 + (b_3 \mathbf{v}_3)' + \dots + (b_{2m+1} \mathbf{v}_{2m+1})' \\ &= \mathbf{v}'_1 + b_3 \mathbf{v}'_3 + \dots + b_{2m+1} \mathbf{v}'_{2m+1}. \end{aligned}$$

Para $i \leq m$ temos

$$\begin{aligned} b_{2i-1} \mathbf{v}'_{2i-1} + b_{2i+1} \mathbf{v}'_{2i+1} &= \frac{k_1 k_3 \dots k_{2i-3}}{k_2 k_4 \dots k_{2i-2}} (-k_{2i-2} \mathbf{v}_{2i-2} + k_{2i-1} \mathbf{v}_{2i}) \\ &\quad + \frac{k_1 k_3 \dots k_{2i-1}}{k_2 k_4 \dots k_{2i}} (-k_{2i} \mathbf{v}_{2i} + k_{2i+1} \mathbf{v}_{2i+2}) \\ &= -\frac{k_1 k_3 \dots k_{2i-3}}{k_2 k_4 \dots k_{2i-4}} \mathbf{v}_{2i-2} + \frac{k_1 k_3 \dots k_{2i-1}}{k_2 k_4 \dots k_{2i}} k_{2i+1} \mathbf{v}_{2i+2}, \end{aligned}$$

então, os termos consecutivos de \mathbf{v}' se cancelam e, portanto

$$\mathbf{v}' = 0.$$

Além disso, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 = 1$. Assim os vetores tangentes a α formam um ângulo constante com o vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2m+1}$, portanto α é uma hélice generalizada. □

Observamos que este resultado não é válido em espaços de dimensão par. Veremos no exemplo 3.1 deste capítulo uma curva em \mathbb{R}^4 que tem todas as curvaturas constantes e não nulas mas não é hélice generalizada.

Obteremos agora um resultado que relaciona o contato entre curvas no \mathbb{R}^n e hélices generalizadas.

Proposição 14. *Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva diferenciável regular p.c.a. então existe, para cada ponto $\alpha(s_0) = P$, alguma hélice generalizada $\gamma_P(s)$ cujo contato com α em P é de ordem no mínimo $(n+1)$. Além disso, se α_T tem um ponto de aplainamento em $\alpha_T(s_0)$ então a ordem de contato entre α e γ_P é pelo menos $(n+2)$.*

Demonstração. Se α é p.c.a., então $\alpha_T = \alpha'$. Seja H_P o hiperplano osculador de α_T em P . Como vimos, a intersecção de H_P com \mathbb{S}^{n-1} determina a $(n-2)$ -esfera

osculadora de α_T em P que denotaremos por \mathbb{S}_P^{n-2} .

Pela Proposição 6 do Capítulo 2 sabemos que o contato entre α_T e \mathbb{S}_P^{n-2} é de ordem no mínimo n em P . Logo, pela Proposição 3 existe uma curva $\beta \subset \mathbb{S}_P^{n-2}$ cujo contato com α_T é de ordem no mínimo n . Segue, pela Proposição 10, que β é a indicatriz tangente de alguma hélice generalizada $\gamma_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que passa por P . Como o contato entre β e α_T é de ordem pelo menos n , então o contato entre α e γ_P em P é de ordem pelo menos $(n+1)$. Se $\alpha_T(s_0)$ é um ponto de aplainamento de α_T então esta curva tem contato de ordem no mínimo $(n+1)$ com \mathbb{S}_P^{n-2} e portanto α tem contato de ordem no mínimo $(n+2)$ com a curva γ_P .

□

Observamos que a hélice γ_P não é única, pois a curva obtida na Proposição 3 não é única. Além disso, existe uma família de curvas em \mathbb{R}^3 tendo β como indicatriz tangente. Faremos agora a definição de ponto helicoidal.

Definição 4. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável regular p.c.a., o ponto $P = \alpha(s_0)$, com $s_0 \in I$, é dito ponto helicoidal (twisting) se, e somente se a indicatriz tangente $\alpha_T : I \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ de α tem um ponto de aplainamento em $\alpha_T(s_0)$. Quando $\alpha_T(s_0)$ é um ponto de aplainamento ordinário dizemos que $\alpha(s_0)$ é um ponto helicoidal ordinário.*

Para curvas no espaço com curvatura não nula o seguinte resultado caracteriza os pontos helicoidais.

Proposição 15. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva p.c.a. com curvatura nunca nula, o ponto $\alpha(s_0)$ é helicoidal se, e somente se*

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0) = 0;$$

além disso, $\alpha(s_0)$ é um ponto helicoidal ordinário se, e somente se

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0) = 0 \text{ e } \left(\frac{\tau}{k}\right)''(s_0) \neq 0.$$

Demonstração. De fato, $\alpha(s_0)$ é um ponto helicoidal se, e somente se $\alpha_T(s_0)$ é um ponto de aplainamento, ou seja, a torção de α_T (τ_1) é nula em s_0 .

Pela equação (3.2) temos

$$\tau_1(s_0) = \frac{k(s_0)\tau'(s_0) - k'(s_0)\tau(s_0)}{k(s_0)(k^2(s_0) + \tau^2(s_0))} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0) = 0. \quad (3.4)$$

Assim, $\alpha(s_0)$ é um ponto helicoidal se, e somente se

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0) = 0.$$

Quando $\alpha(s_0)$ é um ponto helicoidal ordinário, o ponto $\alpha_T(s_0)$ é um ponto de aplainamento ordinário, ou seja,

$$\tau_1(s_0) = 0 \quad \text{e} \quad \tau_1'(s_0) \neq 0,$$

assim, se $\tau_1(s_0) = 0$ temos

$$\tau_1'(s_0) = \frac{(k(s_0)\tau'(s_0) - k'(s_0)\tau(s_0))'}{k(s_0)(k^2(s_0) + \tau^2(s_0))} \neq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\tau}{k}\right)''(s_0) \neq 0. \quad (3.5)$$

□

Pela Proposição 5 do Capítulo 2 observamos que $\alpha(s_0)$ é um ponto helicoidal se, e somente se

$$\det(\alpha_T'(s_0), \dots, \alpha_T^n(s_0)) = \det(\alpha''(s_0), \dots, \alpha^{(n+1)}(s_0)) = 0. \quad (3.6)$$

Em vista da Proposição 14, dada uma curva α existe uma hélice generalizada γ cujo contato com α em $P = \alpha(t_0)$ é de ordem pelo menos $(n + 1)$. Se este contato for de ordem pelo menos $(n + 2)$ então as indicatrizes tangentes α_T e γ_T têm ordem de contato no mínimo $(n + 1)$ em $\alpha_T(s_0)$. Como γ_T está em uma $(n - 2)$ -esfera \mathbb{S}^{n-2} então esta é a $(n - 2)$ -esfera osculadora de α_T . Consequentemente α_T tem contato de ordem $(n + 1)$ pelo menos com seu hiperplano osculador em $\alpha(s_0)$, portanto, $\alpha_T(s_0)$ é um ponto de aplainamento de α_T , ou seja, $\alpha(s_0)$ é um ponto helicoidal de α . Temos então o resultado.

Teorema 1. *O ponto $\alpha(s_0)$ é um ponto helicoidal da curva α se, e somente se existe alguma hélice generalizada cuja ordem de contato com a curva α em $\alpha(s_0)$ é de ordem no mínimo $(n + 2)$.*

Por este resultado podemos concluir que todos os pontos de uma hélice generalizada em \mathbb{R}^n são helicoidais.

Uma questão natural que surge é relacionada ao número mínimo de pontos helicoidais sobre uma curva em \mathbb{R}^n . Vamos abordar esta questão na seção 6.2 do Capítulo 6 deste trabalho.

O exemplo a seguir mostra que em espaços de dimensão par podemos encontrar curvas fechadas sem nenhum ponto helicoidal.

Exemplo 3.1. A curva fechada $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^4$ parametrizada por

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\cos(s), \sin(s), \cos(2s), \sin(2s)),$$

tem todas as curvaturas constantes e não nulas mas não tem nenhum ponto helicoidal. Portanto γ não é uma hélice generalizada em \mathbb{R}^4 .

Tomando o seguinte referencial móvel

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (\cos(s), \sin(s), 0, 0), & \mathbf{u}_2 &= (-\sin(s), \cos(s), 0, 0), \\ \mathbf{u}_3 &= (0, 0, \cos(2s), \sin(2s)), & \mathbf{u}_4 &= (0, 0, -\sin(2s), \cos(2s)), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3), & \gamma'(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_4), & \gamma''(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_3) \\ \gamma'''(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{u}_2 - 8\mathbf{u}_4), & \gamma^{(iv)}(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{u}_1 + 16\mathbf{u}_3), & \gamma^{(v)}(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{u}_2 + 32\mathbf{u}_4). \end{aligned}$$

Assim,

$$\det(\gamma''(s), \gamma'''(s), \gamma^{(iv)}(s), \gamma^{(v)}(s)) = \begin{vmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-4}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{16}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{-8}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{32}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \frac{288}{25} \neq 0,$$

e, de acordo com a expressão (3.6), γ não tem nenhum ponto helicoidal. Os vetores do referencial de Frenet e as curvaturas de γ são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1(\mathbf{s}) &= \gamma'(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_4), \quad k_1(s) = |v_1'(s)| = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{5}} \\
\mathbf{v}_2(\mathbf{s}) &= \frac{1}{k_1(s)}\mathbf{v}_1'(s) = \frac{1}{\sqrt{17}}(-\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_3), \quad k_2(s) = |\mathbf{v}_2'(s) + k_1\mathbf{v}_1| = \frac{6}{\sqrt{85}} \\
\mathbf{v}_3(\mathbf{s}) &= \frac{1}{k_2(s)}(\mathbf{v}_2'(s) + k_1(s)\mathbf{v}_1(s)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_4), \quad k_3(s) = 2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$

Assim, as curvaturas de γ são constantes e não nulas para qualquer $s \in [0, 2\pi]$, mas γ não possui nenhum ponto helicoidal. Deste modo, concluímos que a Proposição 13 não se generaliza para espaços de dimensão par.

Capítulo 4

Envelopes e Desdobramentos

O objetivo deste capítulo é estudar a estrutura local do envelope de uma família de curvas. Isto permitirá, entre outras coisas, relacionar as singularidades destes envelopes com os pontos helicoidais de uma curva.

Uma das caracterizações de envelope é dada pelo conjunto discriminante de uma família de aplicações. Esta família pode ser vista como um desdobramento (unfolding) de uma função f . Na seção 4.2 estudaremos alguns resultados importantes destes desdobramentos. Como nosso objetivo é apenas aplicar estes resultados, as demonstrações serão omitidas e podem ser encontradas em [1] e [2].

4.1 Envelopes

No Capítulo 3 deste trabalho estudamos a evoluta de uma curva plana como sendo o lugar geométrico dos centros dos círculos osculadores. Uma outra forma de obtermos a evoluta de uma curva plana é analisando o comportamento das retas normais à curva. A análise deste comportamento resulta num conjunto chamado *conjunto discriminante*, ou *envelope* de uma família de aplicações. Nesta seção vamos estudar este conjunto e analisar seu comportamento geométrico através de um exemplo.

Dada uma aplicação diferenciável

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R},$$

utilizaremos $(t, x_1, x_2, \dots, x_m)$ como coordenadas de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e consideraremos F como uma família de funções de x parametrizadas por t . Escrevendo $F_t(x) = F(t, x)$, onde

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, suponhamos que, para cada t fixo, 0 é valor regular de F_t , ou seja, quando $F(t, \mathbf{x}) = 0$ para algum x_i tem-se $\frac{\partial F}{\partial x_i} \neq 0$. Assim, $C_t = F_t^{-1}(0)$ é uma $(m - 1)$ variedade parametrizada na vizinhança de cada ponto (para $m = 2$ uma curva e para $m = 3$ uma superfície).

Além disso, como 0 é valor regular de F_t então a diferencial $dF_t(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva para qualquer $\mathbf{x} \in F_t^{-1}(0)$, assim

$$dF_t(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial F_t}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \quad \frac{\partial F_t}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial F_t}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \right) \neq (0 \ 0 \ \cdots \ 0),$$

portanto existe x_i tal que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) \neq 0$, deste modo

$$dF(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(t, \mathbf{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial x_m}(t, \mathbf{x}) \right) \neq (0 \ 0 \ \cdots \ 0),$$

logo $F^{-1}(0)$ é localmente uma m -variedade parametrizada em \mathbb{R}^{m+1} .

Observamos que, para cada $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, o espaço tangente a $F^{-1}(0)$ é paralelo ao núcleo de $dF(t, \mathbf{x})$. Este espaço tangente é *vertical*, isto é, paralelo ao eixo t se, e somente se $(1, 0, 0, \dots, 0)$ pertence ao núcleo de $dF(t, \mathbf{x})$, ou seja, $\frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0$.

Quando $m = 2$ o conjunto D de pontos (t, \mathbf{x}) que satisfazem $F(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0$, é chamado *conjunto dobra* e a projeção deste conjunto no plano (x_1, x_2) é chamado *envelope*. Em geral temos a seguinte definição.

Definição 5. *O envelope, ou discriminante, da família F é o conjunto*

$$D_F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m; F(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0, \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

O conjunto dobra de F é determinado por

$$D = \left\{ (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; F(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0 \right\}$$

Observamos que D_F é a projeção por $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ do conjunto dobra D .

Para visualizar melhor os conceitos trabalhados acima vamos considerar a família de círculos unitários centrados no eixo x_1 do plano x_1x_2 . Cada círculo desta família tem como equação

$$(x_1 - t)^2 + x_2^2 = 1, \quad t \in \mathbb{R} \text{ fixo.}$$

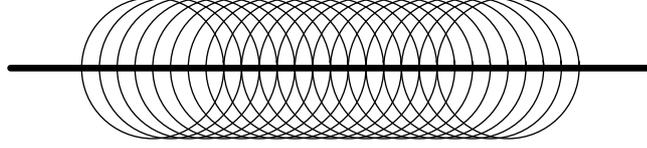


Figura 4.1: Família de círculos centrados em $(x_1, 0)$

Assim, cada círculo C_t da família é dado por $C_t = F_t^{-1}(0)$, onde

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x_1, x_2) &\mapsto (x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1. \end{aligned}$$

Dado $(x_1, x_2) \in C_t$ então $(x_1 - t)^2 + x_2^2 = 1$, além disso

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_t}{\partial x_1} = 2(x_1 - t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_t}{\partial x_2} = 2x_2, \quad \text{logo,} \\ \frac{\partial F_t}{\partial x_1} = \frac{\partial F_t}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 = t, \end{aligned}$$

mas estes pontos não pertencem a $F^{-1}(0)$, portanto 0 é valor regular de F_t , para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Como vimos, isto garante que $F^{-1}(0)$ seja localmente uma superfície parametrizada em \mathbb{R}^3 . Vamos encontrar o conjunto discriminante de F .

$$\begin{aligned} F(t, x_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x_1, x_2) = 0 &\Leftrightarrow -2(x_1 - t) = (x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = t \quad \text{e} \quad x_2 = \pm 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Por (4.1) segue que

$$D_F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = \pm 1, \text{ para algum } t \in \mathbb{R}\}.$$

O conjunto discriminante D_F pode ser visualizado na figura 4.1 como sendo as duas retas $(x_2 = \pm 1)$ que são tangentes a todos os círculos unitários centrados em $(x_1, 0)$.

Se $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t_0, x_0) \neq 0$, tem-se que D_F é localmente uma $(m-1)$ variedade parametrizada

de \mathbb{R}^m [1]. Os pontos em que $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t_0, x_0) = 0$ são conhecidos por *pontos de regressão*. Os resultados da próxima seção nos permitirão conhecer um pouco melhor a estrutura local dos envelopes numa vizinhança de um ponto de regressão.

4.2 Desdobramentos

Nesta seção vamos estudar os desdobramentos de uma função f . Como o principal objetivo deste capítulo é estabelecer ferramentas que serão úteis nos Capítulos 5 e 6 deste trabalho, não demonstraremos todos os resultados que serão enunciados. As demonstrações podem ser encontradas em [1] e [2].

Primeiramente vamos estabelecer os conceitos de A_k singularidade e jatos de uma função real. Dizemos que uma função real f é diferenciável se f possui derivadas de todas as ordens. A notação $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ indica que f está definida numa vizinhança de t_0 .

Definição 6. Dizemos que uma função diferenciável $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tem tipo A_k em t_0 se

$$\begin{aligned} f^{(i)}(t_0) &= 0, \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{e} \\ f^{(k+1)}(t_0) &\neq 0, \end{aligned}$$

onde $f^{(i)}$ indica a i -ésima derivada de f com relação a t .

Um resultado importante é que se f tem tipo A_k em t_0 , então existe um difeomorfismo h definido numa vizinhança de t_0 tal que $f(t) = g(h(t))$, onde $g(t) = \pm t^{k+1}$ [1]. Neste caso, dizemos que f é \mathfrak{R} -equivalente a g .

Observamos que, se $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva p.c.a. e $\alpha(s_0)$ um ponto de aplainamento de α então, pelo visto na seção 2.2.1 do Capítulo 2, a função altura f_h é no mínimo do tipo A_3 em s_0 . Pelo visto na seção 2.3 do Capítulo 2, se α tem um ponto de vértice em $\alpha(s_0)$ então a função distância ao quadrado f_d é no mínimo do tipo A_4 em s_0 .

Definição 7. Seja $k \geq 1$ inteiro, o k -jato com termo constante da função $f : \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é o polinômio

$$f(t_0) + j^k f(t_0) = f(t_0) + t f'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + \dots + \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(t_0).$$

Observamos que f tem tipo A_k em t_0 se, e somente se

$$j^k f(t_0) = 0 \text{ e } j^{k+1} f(t_0) \neq 0,$$

além disso, f tem tipo A_m , $m \geq k$, se e somente se

$$j^k f(t_0) = 0.$$

Agora vamos estudar o conceito de desdobramento de uma função real f .

Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (t_0, \mathbf{x}_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Podemos considerar F como uma família a n parâmetros de funções $F_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}, t_0 \longrightarrow \mathbb{R}$. Assim escrevemos

$$\begin{aligned} f = F_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto F(t, \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

A aplicação F é denominada *desdobramento a n parâmetros* de f .

O objetivo aqui é reduzir um desdobramento F a uma forma padrão quando a função f tem tipo A_k em t_0 . Para isto, precisaremos de algumas definições.

Definição 8. *Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (t_0, y_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a m parâmetros da função $g = G_{y_0}$. Sejam*

$$\begin{aligned} a &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (t_0, \mathbf{x}_0) \longrightarrow \mathbb{R} \\ b &: \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^m, y_0, \end{aligned}$$

aplicações diferenciáveis, onde $a(t, \mathbf{x}_0) = t$, com t numa vizinhança de t_0 . Então o desdobramento $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (t_0, \mathbf{x}_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ de $f = F_{\mathbf{x}_0}$ definido por

$$F(t, \mathbf{x}) = G(a(t, \mathbf{x}), b(\mathbf{x})),$$

é dito ser induzido de G . Se todos os desdobramentos de g são induzidos de G então dizemos que G é um desdobramento versal de g .

O teorema a seguir estabelece um critério que permite verificarmos a versalidade de um desdobramento.

Teorema 2. *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (t_0, \mathbf{x}_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a m parâmetros de $f = F_{\mathbf{x}_0}$, sendo f do tipo A_k em t_0 , $k \geq 1$. F é um desdobramento versal de f em t_0 se, e somente se, todo polinômio real $p(t)$ com grau menor ou igual a $k - 1$ pode ser escrito como combinação linear dos $k - 1$ jatos com termo constante de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0)$, $i = 1, 2, \dots, m$, em t_0*

$$p(t) = \sum_{i=1}^m c_i \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i}(t_0, \mathbf{x}_0) + j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) \right) (t_0) \right\},$$

onde cada c_i é um número real.

Para provar a versalidade das aplicações utilizaremos o seguinte corolário do Teorema 2.

Corolário 2. *Consideramos F e f como no Teorema 2. Escrevendo*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(t_0, \mathbf{x}_0) + j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) \right) (t_0) = \beta_{0i} + \beta_{1i}t + \beta_{2i}t^2 + \dots + \beta_{k-1,i}t^{k-1},$$

então F é versal se, e somente se a matriz $k \times m$ de coeficientes β_{ji} , tem posto k (isto só é possível se $m \geq k$).

Seja

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (0, 0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto t^{m+1} + x_1 + x_2t + \dots + x_mt^{m-1}, \end{aligned}$$

com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Considerando $g(t) = G(t, 0) = t^{m+1}$ observamos que g é de tipo A_m em $t_0 = 0$. Vamos verificar se G é um desdobramento versal de g em $t_0 = 0$.

Os $(m-1)$ -jatos com termo constante de $\frac{\partial G}{\partial x_i}(t, 0)$ em torno de 0 são dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_1}(0, 0) + j^{m-1} \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(t, 0) \right) (0) &= 1 \\ \frac{\partial G}{\partial x_2}(0, 0) + j^{m-1} \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}(t, 0) \right) (0) &= t \\ &\vdots \\ \frac{\partial G}{\partial x_m}(0, 0) + j^{m-1} \left(\frac{\partial G}{\partial x_m}(t, 0) \right) (0) &= t^{m-1} \end{aligned}$$

Assim, a matriz $m \times m$ de coeficientes tem posto m . Pelo Corolário 2, G é um desdobramento versal de g em 0. Considerando que a demonstração é análoga para $G(t, x) = -t^{m+1} + x_1 + x_2 t + \cdots + x_m t^{m-1}$ e $g(t) = -t^{m+1}$ temos o seguinte resultado

Proposição 16. *O desdobramento dado por*

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (0, 0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto \pm t^{m+1} + x_1 + x_2 t + \cdots + x_m t^{m-1}, \end{aligned}$$

é um desdobramento versal de $g(t) = \pm t^{m+1}$ no ponto $t_0 = 0$.

O desdobramento acima também é chamado de *miniversal*, pois o número de parâmetros é mínimo.

Seja F um desdobramento de f . Definimos o *conjunto zero* M_F por

$$M_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; F(t, x) = 0\}.$$

Suponhamos que F é um desdobramento versal a m parâmetros de $f = F_{x_0}$ em t_0 . Se $(t_0, x_0) \in M_F$ então (t_0, x_0) é um ponto regular da função $F(t, x)$, pois, pela versalidade de F , os termos constantes $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t_0, x_0)$ não são todos nulos. Assim, $M_F \cap U$ é uma variedade m -parametrizada em \mathbb{R}^{m+1} para alguma uma vizinhança U de (t_0, x_0) . Do mesmo modo, para um desbobramento versal G a m parâmetros de $g = G_{x_1}$ em t_1 , existe uma vizinhança V tal que $M_G \cap V$ é uma variedade m -parametrizada em \mathbb{R}^{m+1} . Temos então o seguinte resultado [1].

Proposição 17. *Com a notação acima, podemos escolher U e V de modo que exista um difeomorfismo $\phi : U \longrightarrow V$ satisfazendo*

i) $\phi(t, x) = (a(t, x), b(x))$, onde $a(t_0, x_0) = t_1$, $b(x_0) = x_1$.

ii) $\phi(M_F \cap U) = M_G \cap V$.

iii) b é difeomorfismo de $\pi(U)$ em $\pi(V)$, onde $\pi(t, x) = x$ é a projeção de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ em \mathbb{R}^m e $b(D_F \cap \pi(U)) = D_G \cap \pi(V)$.

Por este resultado concluímos que os conjuntos discriminantes D_F e D_G são localmente difeomorfos, ou seja, quaisquer desdobramentos versais a m parâmetros de uma função do tipo A_k têm a mesma estrutura local em cada ponto. Nas subseções 4.2.1 e 4.2.2 vamos analisar os casos $k = 1$ e $k = 2$, pois são estes casos que nos interessarão.

4.2.1 Desdobramentos versais de tipo $A_1(m \geq 1)$

Suponha que $f(t) = F_x(t)$ é uma função, onde

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (0, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, \mathbf{x}) \mapsto t^2 + x_1,$$

com $m \geq 1$. Temos,

$$f'(0) = 0 \text{ e } f''(0) = 2 \neq 0,$$

portanto f tem tipo A_1 em 0. Como $m \geq 1$, pela Proposição 16, F é um desdobramento versal de f em 0 para singularidade A_1 .

O conjunto discriminante de F é dado por

$$D_F = \{x \in \mathbb{R}^m; t^2 + x_1 = 2t = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^m; x_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}.$$

Assim, o conjunto D_F é um hiperplano em \mathbb{R}^m . Na figura 4.2 podemos visualizar M_F e D_F quando $m = 1, 2$.

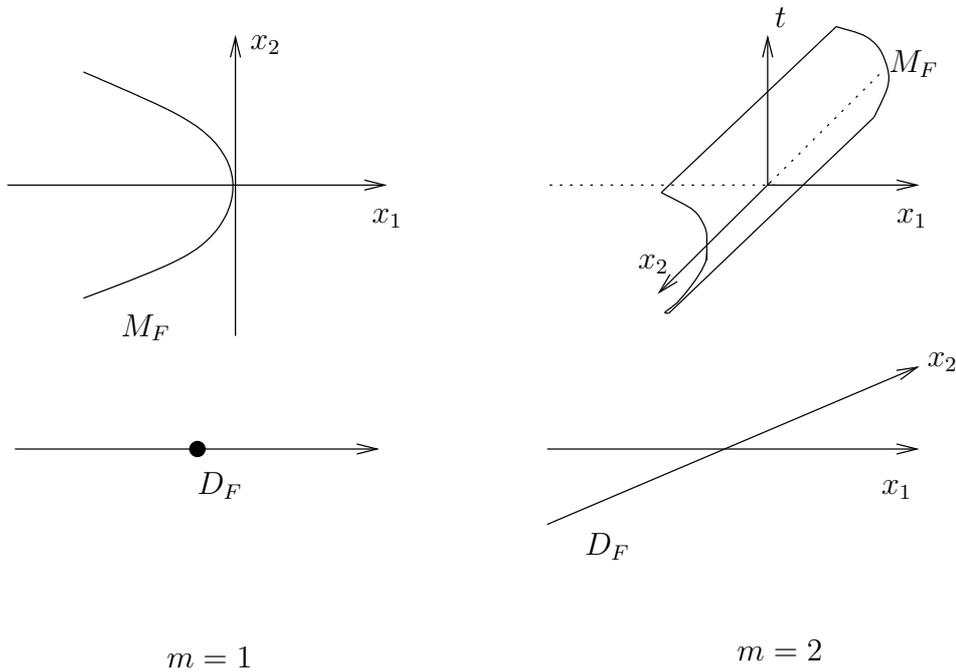


Figura 4.2: M_F e D_F quando $m = 1, 2$ e f é do tipo A_1

Além disso, dado qualquer desdobramento versal a m parâmetros G de $g = G_{y_1}$, onde g é de tipo A_1 em t_1 , então pela Proposição 17 o conjunto discriminante D_G é localmente difeomorfo a D_F nas vizinhanças de (t_1, y_1) e $(0, 0)$, respectivamente.

Assim, na vizinhança de (t_1, y_1) temos

- a) $m = 1 \Rightarrow D_G$ é localmente difeomorfo a um ponto em \mathbb{R} .
- b) $m = 2 \Rightarrow D_G$ é localmente difeomorfo a uma reta em \mathbb{R}^2 .
- c) $m = 3 \Rightarrow D_G$ é localmente difeomorfo a um plano em \mathbb{R}^3 .

4.2.2 Desdobramentos versais de tipo $A_2(m \geq 2)$

Suponha que $f(t) = F_x(t)$ é uma função, onde

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (0, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, \mathbf{x}) \mapsto t^3 + x_1 + x_2 t,$$

com $m \geq 2$. Em $t_0 = 0$ temos

$$f'(0) = f''(0) = 0 \text{ e } f'''(0) = 6 \neq 0,$$

portanto f tem tipo A_2 em 0. Como $m \geq 2$, pela Proposição 16, F é um desdobramento versal de f em 0 para singularidade A_2 .

O conjunto discriminante de F é dado por

$$\begin{aligned} D_F &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m; t^3 + x_1 + x_2 t = 3t^2 + x_2 = 0 \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m; x_1 = 2t^3, x_2 = -3t^2, \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m; 27x_1^2 + 4x_2^3 = 0 \} \end{aligned}$$

Vamos analisar a estrutura de D_F para $m = 2$ e $m = 3$. Quando $m = 2$ os pontos de D_F são parametrizados por

$$\beta(t) = (2t^3, -3t^2).$$

Observamos que, na vizinhança do ponto $t_0 = 0$, o vetor tangente de β não está definido ($\beta'(0) = (0, 0)$). Além disto, na vizinhança de 0 o vetor tangente de β muda de orientação, os pontos onde isto ocorre são conhecidos como *cúspides* de

uma curva. Na vizinhança de um ponto de cúspide não existe difeomorfismo entre a curva β e uma reta.

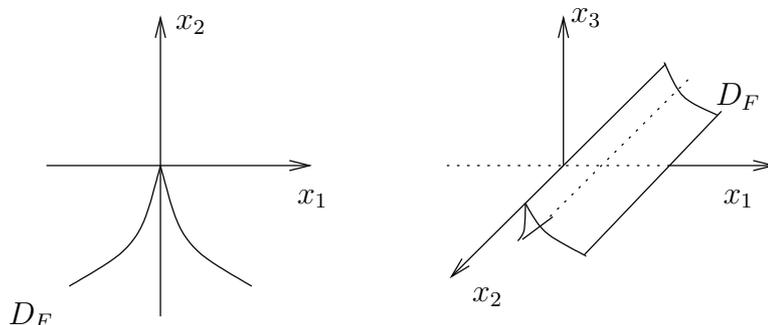


Figura 4.3: D_F quando $m = 2, 3$ e f é do tipo A_2

Quando $m = 3$ o conjunto D_F será um *eixo cuspidal*, ou seja, cada x_3 fixo determina um plano cuja intersecção com o conjunto D_F determina uma curva plana com um ponto de cúspide. Podemos visualizar este caso na figura 4.3.

Utilizando a Proposição 15 podemos concluir então que dado um desdobramento versal a m parâmetros G de $g = G_{y_1}$ onde g é do tipo A_2 em t_1 , o conjunto discriminante D_G é localmente difeomorfo a D_F na vizinhança de (t_1, y_1) e $(0, 0)$, respectivamente.

Portanto, na vizinhança de (t_1, y_1) temos

- a) $m = 2 \Rightarrow D_G$ é localmente difeomorfo a uma cúspide em \mathbb{R}^2 .
- b) $m = 3 \Rightarrow D_G$ é localmente difeomorfo a um eixo cuspidal em \mathbb{R}^3 .

Agora vamos aplicar os resultados obtidos nas subseções 4.2.1 e 4.2.2 para analisar a estrutura local do conjunto discriminante em um exemplo. Para isto, dada uma família $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (t_0, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ de aplicações diferenciáveis, para $m = 2$ ou $m = 3$, vamos seguir os passos

- i) Obter o discriminante D_F e os pontos de regressão de D_F .
- ii) Para os pontos $x_0 \in D_F$, analisar as condições de singularidade dos tipos A_1 e A_2 da aplicação $f = F_{x_0}$ no ponto t_0 , de modo que $(t_0, x_0) \in D$ (conjunto dobra).
- iii) Verificar se F é desdobramento versal de f em t_0 para singularidades A_1 e A_2 , e

então determinar quando D_F é difeomorfo a uma curva regular (plano em \mathbb{R}^3) ou a uma cúspide (eixo cuspidal em \mathbb{R}^3) baseando-se nos resultados obtidos nas subseções 4.2.1 e 4.2.2.

Exemplo 4.1. Considere a família de retas normais a uma curva p.c.a. $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Para cada $s \in \mathbb{R}$ a reta normal no ponto $\alpha(s)$ é determinada pelos pontos $x \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$(x - \alpha(s)) \cdot \alpha'(s) = 0.$$

Seja F a aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, x) &\longmapsto (x - \alpha(s)) \cdot \alpha'(s) \end{aligned}$$

Cada reta normal à curva α em $\alpha(s)$ é determinada por

$$C_s = F_s^{-1}(0).$$

A figura 4.2 mostra a família C_s para a curva que é o gráfico da função $\sin x$.

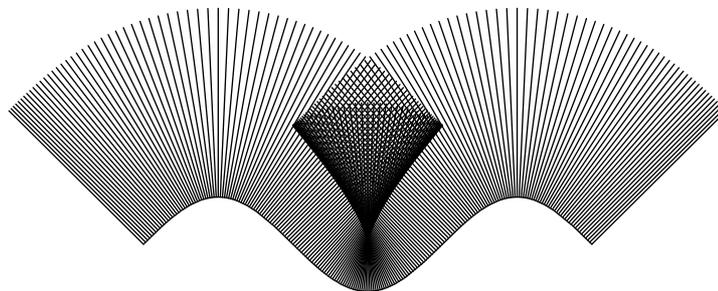


Figura 4.4: Família de retas normais ao gráfico de $\sin x$

i) Vamos agora encontrar o envelope desta família de retas. Vimos na seção 2.3.2 do Capítulo 2 a função distância ao quadrado dada por

$$f_d(s) = |\alpha(s) - x|^2,$$

para algum $x \in \mathbb{R}^2$. Observamos que, para cada x fixo, temos

$$F_x(s) = \frac{1}{2}f'_d(s) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_x}{\partial s}(s) = \frac{1}{2}f''_d(s).$$

Assim, pelo visto no item (2.2) da seção 2.3.2 o conjunto discriminante D_F é dado por

$$D_F = \{x \in \mathbb{R}^2; x = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s), \text{ com } k(s) \neq 0\},$$

onde $k(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ são a curvatura e o vetor normal, respectivamente, de α em $\alpha(s)$. Portanto D_F coincide com a evoluta da curva α .

Além disso, como

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial s^2}(s) = \frac{1}{2}f'''_d(s),$$

então pelo item (2.3) e pela Proposição 7 concluímos que os pontos de regressão são os pontos

$$\{x \in D_F; k'(s) = 0, \text{ para algum } s \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, são os pontos da evoluta que correspondem aos pontos de vértice de α .

ii) Agora vamos analisar as singularidades A_1 e A_2 de F_x nos pontos de D_F .

Se $x_0 \in D_F$, a aplicação $f = F_{x_0}$, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, satisfaz

$$f(s_0) = f'(s_0) = 0.$$

Agora, para que f seja do tipo A_1 em s_0 é necessário que $f''(s_0) \neq 0$. Assim, como vimos na seção 2.3.2, $f = f'_d$ é do tipo A_1 em s_0 se, e somente se

$$x_0 = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\mathbf{n}(s_0), \quad \text{onde } k(s_0) \neq 0 \text{ e } k'(s_0) \neq 0. \quad (4.2)$$

Para que f seja do tipo A_2 em s_0 é necessário que $f''(s_0) = 0$, e $f'''(s_0) \neq 0$, deste modo f é do tipo A_2 em s_0 se, e somente se

$$x_0 = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\mathbf{n}(s_0), \quad \text{onde } k(s_0) \neq 0, k'(s_0) = 0 \text{ e } k''(s_0) \neq 0. \quad (4.3)$$

Observamos que os pontos que satisfazem (4.3) fazem parte do conjunto de pontos de regressão de D_F .

iii) Agora vamos analisar a versalidade da F para singularidades A_1 e A_2 . Pelo Corolário 2 para singularidades do tipo A_1 devemos analisar a matriz 1×2

$$\nabla F(s, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(s, \mathbf{x}) \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(s, \mathbf{x}) \right) = (\alpha'_1(s) \quad \alpha'_2(s))$$

Como $\alpha'(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s)) \neq (0, 0)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, então F é versal para singularidades do tipo A_1 . Deste modo, como vimos em 4.2.1, nos pontos que satisfazem a expressão (4.2) a evoluta de α é localmente difeomorfa a uma reta em \mathbb{R}^2 .

Para singularidade do tipo A_2 , vamos analisar os 1-jatos com termo constante de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0)$ em torno de t_0 , com $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(s_0, \mathbf{x}_0) + j^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(s, \mathbf{x}_0) \right) (s_0) &= \alpha'_1(s_0) + \alpha''_1(s_0)s \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(s_0, \mathbf{x}_0) + j^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(s, \mathbf{x}_0) \right) (s_0) &= \alpha'_2(s_0) + \alpha''_2(s_0)s, \end{aligned}$$

onde $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$. Assim, a matriz dos coeficientes dos 1-jatos com termo constante é dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1(s_0) & \alpha'_2(s_0) \\ \alpha''_1(s_0) & \alpha''_2(s_0) \end{pmatrix}.$$

Observamos que as linhas da matriz acima são os vetores $\mathbf{t}(s_0)$ e $\mathbf{t}'(s_0) = k(s_0)\mathbf{n}(s_0)$. Como $\mathbf{x}_0 \in D_F$ então $k(s_0) \neq 0$, assim, o posto da matriz é 2. Pelo Corolário 2, F é versal para singularidades do tipo A_2 . Assim, como vimos em 4.2.2, nos pontos que satisfazem (4.3) a evoluta de α é localmente difeomorfa a uma cúspide em \mathbb{R}^2 .

Na figura 2.2 do exemplo 2.1 da seção 2.3 visualizamos a evoluta de uma elipse qualquer. A área mais escura visualizada na figura 4.5 determinada pelas retas normais à elipse é o envelope da família de retas normais à elipse que, como vimos, coincide com a sua evoluta. No exemplo 2.1 vimos que os pontos de vértice da elipse são

$$(a, 0), (0, b), (-a, 0) \text{ e } (0, -b).$$

Neste caso particular, o conjunto de pontos de regressão satisfaz (4.3), portanto, a evoluta da elipse é localmente difeomorfa a uma cúspide nas vizinhanças destes pontos. Nos demais pontos a evoluta da elipse satisfaz (4.2), portanto, é localmente difeomorfa a uma reta em \mathbb{R}^2 .

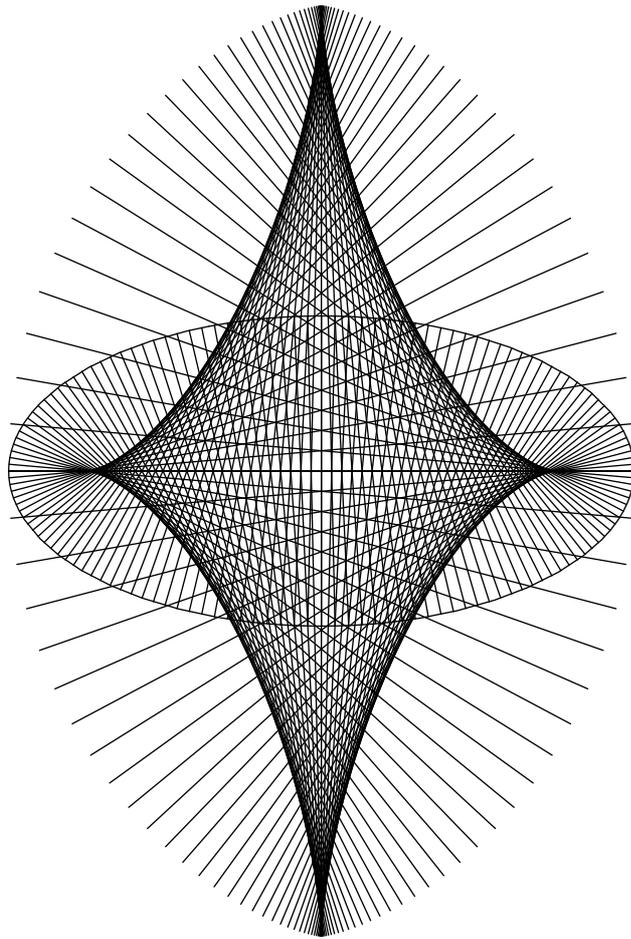


Figura 4.5: Família de retas normais à elipse

Capítulo 5

Pontos helicoidais e vértices de Darboux

Este capítulo será dedicado ao estudo de vértices e indicatriz de Darboux. Em 5.1 utilizaremos a interpretação cinemática do triedro de Frenet iniciada por Darboux [7] e descrita em [8] para obter o conceito de eixo de Darboux, além de relacionar algumas propriedades sobre indicatrizes esféricas de uma curva no espaço. Em 5.2 vamos estudar algumas propriedades de vértices de Darboux e a sua relação com os pontos helicoidais para curvas com curvatura não nula no espaço. Em 5.3 generalizaremos os conceitos de vetor e vértice de Darboux para curvas em \mathbb{R}^n . A principal referência utilizada nas seções 5.2 e 5.3 foi [25].

5.1 O conceito de vetor de Darboux em \mathbb{R}^3

Quando um ponto se move ao longo de uma curva α com curvatura nunca nula seu triedro de Frenet \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} transladado paralelamente até a origem define um movimento rígido em torno da origem chamado *movimento de Frenet*. Analisando o parâmetro s como o tempo, à cada instante s o triedro de Frenet é obtido por uma rotação. Pelas equações de Frenet temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

O eixo que mantém a direção fixa de um instante a outro é chamado de *eixo instantâneo de rotação*. O vetor que está na direção do eixo instantâneo de rotação é chamado de *vetor de rotação*.

Assim, podemos determinar o vetor de rotação $\tilde{\mathbf{d}}$ encontrando os autovetores da matriz

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix},$$

dada com respeito à base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ e denominada *matriz de Frenet* de α no ponto s .

$$M(s)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \det(M(s) - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ e } \lambda = \sqrt{-\tau^2(s) - k^2(s)}.$$

Como procuramos a direção que é mantida fixa, estamos considerando apenas os autovalores reais, ou seja, apenas o autovalor $\lambda = 0$, portanto estamos em busca do núcleo da transformação linear associada à matriz $M(s)$. O vetor

$$\tilde{\mathbf{d}} = k\mathbf{b} + \tau\mathbf{t},$$

está no núcleo de $M(s)$. Com isto definimos

Definição 9. *O vetor unitário dado por*

$$\mathbf{d} = \frac{\tilde{\mathbf{d}}}{|\tilde{\mathbf{d}}|} = \frac{k\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}}{(k^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}}$$

é chamado de vetor de Darboux da curva α .

5.2 Indicatrizes esféricas e vértice de Darboux em \mathbb{R}^3

Nesta seção vamos estudar algumas propriedades das indicatrizes (tangente, normal, binormal e de Darboux) e estudar o conceito de vértice de Darboux para curvas com curvatura não nula no espaço.

Consideremos uma curva γ diferenciável p.c.a. numa superfície $S \subset \mathbb{R}^3$. A curvatura geodésica(k_g) de γ é dada pela expressão

$$k_g = \left(\frac{d^2\gamma}{ds^2} \right) \cdot \left(\mathbf{N} \times \frac{d\gamma}{ds} \right), \quad (5.1)$$

onde \mathbf{N} é o vetor normal à superfície S e s o parâmetro comprimento de arco.

O resultado a seguir relaciona a curvatura geodésica da indicatriz tangente α_T de α com a função $\left(\frac{\tau}{k}\right)$, onde k é a curvatura e τ a torção de α .

Proposição 18. *A curvatura geodésica da indicatriz tangente $\alpha_T \subset \mathbb{S}^2$ de uma curva α com curvatura nunca nula é igual à função $\left(\frac{\tau}{k}\right)$.*

Demonstração. Sejam r o parâmetro comprimento de arco de α_T e s o parâmetro comprimento de arco de α . Então

$$\frac{dr}{ds} = |\alpha'_T| = |k\mathbf{n}| = |k|,$$

Como $k(s) > 0 \ \forall s$, então

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{k}.$$

Portanto

$$\frac{d\alpha_T}{dr} = \frac{d\alpha_T}{ds} \frac{ds}{dr} = \mathbf{n},$$

e ainda

$$\frac{d\mathbf{n}}{dr} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \frac{ds}{dr} = -\mathbf{t} + \left(\frac{\tau}{k}\right) \mathbf{b}.$$

Assim, por (5.1) a curvatura geodésica de α_T é dada por

$$k_g = \left(\frac{d\mathbf{n}}{dr} \right) \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{n}).$$

Como $\alpha_T \subset \mathbb{S}^2$ então $\mathbf{N} = \alpha_T$, portanto

$$k_g = \left(-\mathbf{t} + \left(\frac{\tau}{k}\right) \mathbf{b} \right) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \left(\frac{\tau}{k}\right).$$

□

Quando a curvatura geodésica de γ muda de sinal em um ponto $\gamma(s_0)$, ou seja

$$k_g(s_0) = 0 \quad \text{e} \quad k'_g(s_0) \neq 0,$$

dizemos que a curva tem um *ponto de inflexão esférica* em $\gamma(s_0)$.

Se α é uma curva p.c.a. com curvatura nunca nula, temos pela Proposição 18 que

$$k_g(s_0) = \left(\frac{\tau}{k}\right)(s_0) = 0 \Leftrightarrow \tau(s_0) = 0.$$

Além disto, se $\tau(s_0) = 0$ temos

$$k'_g(s_0) = \left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0) = 0 \Leftrightarrow \tau'(s_0) = 0.$$

Lembramos, da condição (2.1) da seção 2.2.1, que $\alpha(s_0)$ é um ponto de aplainamento ordinário de α se $\tau(s_0) = 0$ e $\tau'(s_0) \neq 0$. Com isso provamos o seguinte resultado.

Proposição 19. *Os pontos de aplainamento ordinário de uma curva α no espaço correspondem aos pontos de inflexão esférica de sua indicatriz tangente α_T .*

O conceito de indicatriz pode ser estendido para os vetores normal, binormal e de Darboux da curva α .

Definição 10. *As curvas esféricas α_N, α_B e α_D determinadas respectivamente pelos vetores \mathbf{n}, \mathbf{b} e \mathbf{d} da curva α são denominadas, respectivamente, indicatriz normal, indicatriz binormal e indicatriz de Darboux de α . Utilizaremos os resultados do Capítulo 4 para a demonstração.*

Observamos que, quando α tem um ponto de aplainamento ($\tau = 0$) α_D coincide com $\pm\alpha_B$. O seguinte resultado expressa algumas relações entre α_T, α_B e α_D .

Teorema 3. *Sejam $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável p.c.a. com curvatura nunca nula e α_T, α_B e α_D suas indicatrizes tangente, binormal e de Darboux. Então vale*

- 1) α_D e $-\alpha_D$ são o envelope da família de grandes círculos normais a α_T e α_B .
- 2) As cúspides de α_D correspondem aos pontos helicoidais ordinários de α .
- 3) Uma inflexão esférica de α_T corresponde a uma cúspide de α_B .

Demonstração. 1) e 2). Sejam $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável p.c.a., com triedro de Frenet $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, curvatura k nunca nula, e $\alpha_T \subset \mathbb{S}^2$ sua indicatriz tangente. Vamos encontrar o envelope da família de grandes círculos de \mathbb{S}^2 ortogonais a α_T .

Como

$$\alpha'_T(s) = \mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s),$$

a família de grandes círculos ortogonais a α_T é descrita por

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, \mathbf{x}) &\longmapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

i) Vamos encontrar o envelope desta família. Temos

$$\begin{aligned} F(s, \mathbf{x}) = 0 &\Rightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{n}(s) \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{b}(s) \\ \frac{\partial F}{\partial s}(s, \mathbf{x}) = 0 &\Rightarrow \mathbf{x} \cdot (-k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)) = 0, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} F(s, \mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial s}(s, \mathbf{x}) = 0 &\Rightarrow (\lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{b}(s)) \cdot (-k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)) = 0 \\ &\Rightarrow -k(s)\lambda + \mu\tau(s) = 0. \end{aligned}$$

Como $k(s) \neq 0$ temos da igualdade acima que $\lambda = \frac{\mu\tau(s)}{k(s)}$, assim

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \frac{\mu\tau(s)}{k(s)}\mathbf{t}(s) + \mu\mathbf{b}(s) &\Rightarrow \left(\frac{\mu\tau(s)}{k(s)}\right)^2 + (\mu)^2 = 1 \\ \Rightarrow \mu = \pm \frac{k(s)}{\sqrt{k^2(s) + \tau^2(s)}} \quad \text{e} \quad \lambda = \pm \frac{\tau(s)}{\sqrt{k^2(s) + \tau^2(s)}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$D_F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{S}^2; \mathbf{x} = \pm \left(\frac{\tau(s)\mathbf{t}(s) + k(s)\mathbf{b}(s)}{(k^2(s) + \tau^2(s))^{\frac{1}{2}}} \right) = \pm \alpha_D \right\}. \quad (5.2)$$

Assim, o envelope da família de grandes círculos normais a α_T é $\pm \alpha_D$. Pelas equações de Frenet $\alpha'_B = -\tau\mathbf{n}$ e, deste modo, a família de grandes círculos normais a α_B é a mesma que tomamos acima e, portanto, o envelope também é dado por $\pm \alpha_D$.

Os pontos de regressão são determinados pelos $\mathbf{x}_0 \in D_F$ tais que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s_0, \mathbf{x}_0) = 0, \text{ para algum } s_0 \in \mathbb{R},$$

assim

$$\pm \left(\frac{\tau(s)\mathbf{t}(s) + k(s)\mathbf{b}(s)}{(k^2(s) + \tau^2(s))^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot (-k'(s)\mathbf{t}(s) - k(s)\mathbf{t}'(s) + \tau'(s)\mathbf{b}(s) + \tau(s)\mathbf{b}'(s)) = 0,$$

deste modo,

$$\pm \left(\frac{\tau(s)k'(s) - k(s)\tau'(s)}{(k^2(s) + \tau^2(s))^{\frac{1}{2}}} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\tau}{k} \right)'(s) = 0, \quad (5.3)$$

ou seja, os pontos de regressão são os $\mathbf{x}_0 \in D_F$ tais que, para algum s , a aplicação $\left(\frac{\tau}{k}\right)$ tem um ponto crítico. Vimos na seção 3.2.2 que os pontos onde $\left(\frac{\tau}{k}\right)$ tem pontos críticos são os pontos helicoidais de α , deste modo, os pontos de regressão de D_F correspondem aos pontos helicoidais de α .

ii) Agora vamos analisar as singularidades A_1 e A_2 de F_x nos pontos de D_F .

Se $\mathbf{x}_0 \in D_F$, a aplicação $f = F_{\mathbf{x}_0}$, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, satisfaz

$$f(s_0) = f'(s_0) = 0.$$

Agora, para que f seja do tipo A_1 em s_0 é necessário que $f''(s_0) \neq 0$. Assim, f é do tipo A_1 em s_0 se, e somente se

$$\mathbf{x}_0 = \pm \left(\frac{\tau(s_0)\mathbf{t}(s_0) + k(s_0)\mathbf{b}(s_0)}{(k^2(s_0) + \tau^2(s_0))^{\frac{1}{2}}} \right) \text{ onde } \left(\frac{\tau}{k} \right)'(s_0) \neq 0 \quad (5.4)$$

Para que f seja do tipo A_2 em s_0 é necessário que $f''(s_0) = 0$ e $f'''(s_0) \neq 0$, deste modo, f é do tipo A_2 em s_0 se, e somente se

$$\mathbf{x}_0 = \pm \left(\frac{\tau(s_0)\mathbf{t}(s_0) + k(s_0)\mathbf{b}(s_0)}{(k^2(s_0) + \tau^2(s_0))^{\frac{1}{2}}} \right) \text{ com } \left(\frac{\tau}{k} \right)'(s_0) = 0 \text{ e } \left(\frac{\tau}{k} \right)''(s_0) \neq 0 \quad (5.5)$$

iii) Agora vamos analisar a versalidade da F para singularidades A_1 e A_2 . Observamos que a aplicação F é definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, assim, vamos analisar a versalidade

considerando uma parametrização local de \mathbb{S}^2 . Para isto, suponha que α esteja na posição padrão:

$$\alpha(s_0) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{t}(s_0) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{n}(s_0) = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(s_0) = (0, 0, 1).$$

A parametrização de \mathbb{S}^2 nas proximidades de $(1, 0, 0)$ é da forma

$$\phi(x_2, x_3) = \left(\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3 \right),$$

nesta parametrização local os vetores $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ ficam da forma

$$\mathbf{t}(s_0) = \phi(0, 0), \quad \mathbf{n}(s_0) = \phi(1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(s_0) = \phi(0, 1).$$

Portanto, nas proximidades de $(1, 0, 0)$ a aplicação F é dada por

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, x_2, x_3) &\longmapsto \left(\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3 \right) \cdot \mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_2}(s, \mathbf{x}) &= -\frac{x_2}{m} n_1(s) + n_2(s) \\ \frac{\partial F}{\partial x_3}(s, \mathbf{x}) &= -\frac{x_3}{m} n_1(s) + n_3(s), \end{aligned}$$

onde $m = \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}$ e $\mathbf{n}(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$.

Primeiramente vamos encontrar o ponto $\mathbf{x}_0 \in D_F$ tal que $(s_0, \mathbf{x}_0) \in D$. Como vimos na expressão (5.5), \mathbf{x}_0 é da forma

$$\mathbf{x}_0 = \pm \left(\frac{\tau(s_0)\mathbf{t}(s_0) + k(s_0)\mathbf{b}(s_0)}{(k^2(s_0) + \tau^2(s_0))^{\frac{1}{2}}} \right) = \phi \left(0, \frac{\pm k(s_0)}{(k^2(s_0) + \tau^2(s_0))^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Agora podemos analisar se F é desdobramento versal de $F_{\mathbf{x}_0}$ no ponto s_0 para singularidades A_1 e A_2 . Temos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(s_0, \mathbf{x}_0) \quad \frac{\partial F}{\partial x_3}(s_0, \mathbf{x}_0) \right) = (1 \quad 0) \neq (0 \quad 0)$$

Portanto, pelo Corolário 2 do Capítulo 4, F é desdobramento versal de F_{x_0} em s_0 para singularidades do tipo A_1 . Assim, nos pontos que satisfazem (5.4) o conjunto discriminante é localmente difeomorfo a uma curva regular em \mathbb{S}^2 .

Para singularidades do tipo A_2 temos que analisar os 1-jatos com termo constante de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(s, x_0)$, com $i = 2, 3$, em torno de s_0 , dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_2}(s_0, x_0) + j^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(s, x_0) \right) (s_0) &= 1 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3}(s_0, x_0) + j^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}(s, x_0) \right) (s_0) &= \frac{\pm(k^2(s_0) + \tau^2(s_0))s}{\tau(s_0)}, \end{aligned}$$

assim, a matriz dos coeficientes fica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\pm(k^2(s_0) + \tau^2(s_0))}{\tau(s_0)} \end{pmatrix}$$

Como $k(s_0) \neq 0$ então esta matriz tem posto 2 desde que $\tau(s_0) \neq 0$. Deste modo, pelo Corolário 2, F é desdobramento versal de F_{x_0} em s_0 para singularidades do tipo A_2 desde que $\alpha(0)$ não seja ponto de aplainamento. Portanto, os pontos que satisfazem (5.5), correspondentes aos pontos helicoidais ordinários de α (pela Proposição 15 do Capítulo 3) que não são pontos de aplainamento, são localmente difeomorfos a cúspides em \mathbb{S}^2 .

3) Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ como na demonstração do caso acima. Vamos considerar agora a seguinte família de círculos em \mathbb{S}^2

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, x) &\longmapsto x \cdot \mathbf{t}(s). \end{aligned}$$

i) Agora vamos encontrar o envelope desta família de círculos. Temos

$$\begin{aligned} F(s, x) = 0 &\Rightarrow x \perp \mathbf{t}(s) \Rightarrow x = \lambda \mathbf{n}(s) + \mu \mathbf{b}(s) \\ F(s, x) = \frac{\partial F}{\partial s}(s, x) = 0 &\Rightarrow x \cdot \mathbf{t}'(s) = k(s)(x \cdot \mathbf{n}(s)) = 0 \Rightarrow x = \mu \mathbf{b}(s), \end{aligned}$$

como $x \in \mathbb{S}^2$ o conjunto discriminante fica

$$D_F = \{x \in \mathbb{S}^2; x = \pm \mathbf{b}(s)\}. \quad (5.6)$$

Assim, a indicatriz binormal faz parte do conjunto discriminante de F . Temos que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s, x) = x \cdot \mathbf{t}''(s) = x \cdot (-k^2(s)\mathbf{t}(s) + k(s)\tau(s)\mathbf{b}(s)),$$

então os pontos de regressão são dados por

$$\{x = \pm \mathbf{b}(s); \tau(s) = 0, \text{ para algum } s \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, são os vetores binormais (ou o oposto deles) correspondentes aos pontos onde α é de aplainamento.

ii) Agora vamos analisar as singularidades A_1 e A_2 de F_x nos pontos de D_F .

Se $x_0 \in D_F$, a aplicação $f = F_{x_0}$, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, satisfaz

$$f(s_0) = f'(s_0) = 0. \quad (5.7)$$

Observamos que $f = f'_h$, onde f_h é a função altura. Assim, por (5.7) $f'_h(s_0) = f''_h(s_0) = 0$.

Agora, para que f seja do tipo A_1 em s_0 é necessário que $f'''_h(s_0) \neq 0$. Assim, pelo estudado na seção 2.2.1, f é do tipo A_1 em s_0 se, e somente se

$$x_0 = \pm \mathbf{b}(s_0) \text{ com } \tau(s_0) \neq 0. \quad (5.8)$$

Para que f seja do tipo A_2 em s_0 é necessário que $f'''_h(s_0) = 0$, e $f^{(iv)}_h(s_0) \neq 0$ deste modo, pela expressão (2.1) da seção 2.2.1, f é do tipo A_2 em s_0 se, e somente se

$$x_0 = \pm \mathbf{b}(s_0) \text{ com } \tau(s_0) = 0, \tau'(s_0) \neq 0. \quad (5.9)$$

iii) Agora vamos analisar a versalidade da F para singularidades A_1 e A_2 . Novamente, suponhamos que α esteja na posição padrão:

$$\alpha(s_0) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{t}(s_0) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{n}(s_0) = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(s_0) = (0, 0, 1).$$

A parametrização de \mathbb{S}^2 nas proximidades de $(0, 0, 1)$ é da forma

$$\phi(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right),$$

nesta parametrização local os vetores $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ ficam da forma

$$\mathbf{t}(s_0) = \phi(1, 0), \quad \mathbf{n}(s_0) = \phi(0, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(s_0) = \phi(0, 0).$$

Portanto, nas proximidades de $(0, 0, 1)$ a aplicação F é dada por

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, x_1, x_2) &\longmapsto \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right) \cdot \mathbf{t}(s) \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(s, \mathbf{x}) &= -\frac{x_1}{m} t_3(s) + t_1(s) \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(s, \mathbf{x}) &= -\frac{x_2}{m} t_3(s) + t_2(s), \end{aligned}$$

onde $m = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ e $\mathbf{t}(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$.

Primeiramente vamos encontrar o ponto $\mathbf{x}_0 \in D_F$ tal que $(s_0, \mathbf{x}_0) \in D$. Como vimos em (5.6), \mathbf{x}_0 é da forma

$$\mathbf{x}_0 = \pm \mathbf{b}(s_0) = \pm \phi(0, 0)$$

Agora podemos analisar se F é desdobramento versal de $F_{\mathbf{x}_0}$ em s_0 para singularidades A_1 e A_2 . Temos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(s_0, \mathbf{x}_0) \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(s_0, \mathbf{x}_0) \right) = (1 \quad 0) \neq (0 \quad 0)$$

Portanto, pelo Corolário 2, F é desdobramento versal de $F_{\mathbf{x}_0}$ em s_0 para singulari-

dados do tipo A_1 .

Assim, nos pontos que satisfazem (5.8) o conjunto discriminante é localmente difeomorfo a uma curva regular em \mathbb{S}^2 .

Para singularidades do tipo A_2 temos que analisar os 1-jatos com termo constante de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(s, \mathbf{x}_0)$, com $i = 1, 2$, em torno de s_0 , dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(s_0, \mathbf{x}_0) + j^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(s, \mathbf{x}_0) \right) (s_0) &= 1 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(s_0, \mathbf{x}_0) + j^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(s, \mathbf{x}_0) \right) (s_0) &= k(s_0), \end{aligned}$$

assim, a matriz dos coeficientes fica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k(s_0) \end{pmatrix}$$

como $k(s_0) \neq 0$ a matriz os jatos tem posto 2, portanto, pelo Corolário 2, F é versal para singularidade do tipo A_2 . Assim, os pontos que satisfazem (5.9) (pontos de D_F relativos aos pontos de aplainamento ordinário de α) são localmente difeomorfos a cúspides em \mathbb{S}^2 . Portanto, pela Proposição 19, os pontos de inflexão esférica de α_T correspondem a cúspides de α_B .

□

Segue do conceito de indicatriz de Darboux a definição a seguir.

Definição 11. *Vértice de Darboux de uma curva diferenciável p.c.a. α é o ponto $\alpha(s_0)$ onde a indicatriz de Darboux é estacionária, ou seja, $\alpha'_D(s_0) = 0$. Quando $\alpha'_D(s_0) = 0$ e $\alpha''_D(s_0) \neq 0$ dizemos que $\alpha(s_0)$ é um vértice de Darboux ordinário.*

Seja α uma curva p.c.a. com curvatura nunca nula. Considerando $w = (k^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}$ temos

$$\alpha'_D = \left(\frac{k}{w} \mathbf{b} + \frac{\tau}{w} \mathbf{t} \right)' = \frac{(k'w - kw')}{w^2} \mathbf{b} + \frac{(k\tau - k\tau')}{w} \mathbf{n} + \frac{(\tau'w - \tau w')}{w^2} \mathbf{t}.$$

Como

$$w' = \frac{kk' + \tau\tau'}{w},$$

então

$$\alpha'_D = \frac{(\tau k' - k\tau')}{w^3}(\tau \mathbf{b} - k\mathbf{t}),$$

assim, $\alpha(s_0)$ é um vértice de Darboux se, e somente se

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0) = 0,$$

além disso, se $\alpha(s_0)$ é um vértice de Darboux ordinário então $\alpha'_D(s_0) = 0$ e $\alpha''_D(s_0) \neq 0$. Então temos

$$\alpha''_D(s_0) = \left(\frac{(\tau k' - k\tau')}{w^3}\right)'(\tau \mathbf{b} - k\mathbf{t}) + \frac{(\tau k' - k\tau')}{w^3}(\tau \mathbf{b} - k\mathbf{t})',$$

portanto

$$\alpha'_D(s_0) = 0 \text{ e } \alpha''_D(s_0) \neq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\tau}{k}\right)'(s_0) = 0 \text{ e } \left(\frac{\tau}{k}\right)''(s_0) \neq 0.$$

Deste modo provamos o seguinte resultado.

Teorema 4. *Os vértices de Darboux (ordinários) de uma curva diferenciável p.c.a. com curvatura nunca nula em \mathbb{R}^3 coincidem com os pontos helicoidais (ordinários) da curva.*

Por este resultado e pelo item 2) do Teorema 5 temos que os vértices de Darboux ordinários correspondem aos pontos onde α_D tem cúspide. O Teorema 6, com certas condições sobre a curva α , pode ser generalizado para curvas com curvatura nula em finitos pontos. Em [25] podemos encontrar a demonstração deste resultado. Na próxima seção deste capítulo veremos que ele só é válido para curvas no espaço tridimensional.

5.3 Pontos helicoidais e vértices de Darboux em \mathbb{R}^n

Nosso objetivo agora é tentar generalizar para curvas em \mathbb{R}^n os conceitos de vértices de Darboux e pontos helicoidais. Para isto consideremos α uma curva diferenciável

p.c.a. genérica (isto é, as curvaturas k_1, \dots, k_{n-2} são não nulas) em \mathbb{R}^n . Como vimos, os vetores de Frenet de α são dados por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, onde

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_1(s) &= k_1(s)\mathbf{v}_2(s) \\ \mathbf{v}'_2(s) &= -k_1(s)\mathbf{v}_1(s) + k_2(s)\mathbf{v}_3(s) \\ &\vdots \\ \mathbf{v}'_n(s) &= -k_{n-1}(s)\mathbf{v}_{n-1}(s).\end{aligned}$$

Deste modo, a matriz de Frenet é dada por

$$M(s) = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrarmos o eixo instantâneo de rotação precisamos, como vimos anteriormente, encontrar os autovalores reais de $M(s)$. Observamos que $M(s)$ é anti-simétrica, ou seja

$$M^T = -M.$$

Neste caso, veremos que se M admitir autovalor real este autovalor deve ser zero, pois, dado \mathbf{v} o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de M , temos

$$\lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = (\lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = M\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (M^T \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (-M\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (-\lambda \mathbf{v}) = -\lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}),$$

assim,

$$\lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 0,$$

e portanto $\lambda = 0$. Se M tem autovalor zero os seus autovetores estarão no núcleo

da transformação linear associada, logo, M admitirá autovalor real se, e somente se, M for uma matriz singular. Agora vamos analisar quando M é singular. Para isto consideremos os casos:

i) n ímpar, neste caso

$$\det(M) = \det(M^T) = \det(-M) = (-1)^n \det(M) = -\det(M) \Rightarrow \det(M) = 0,$$

deste modo M é singular e portanto existe $\mathbf{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$M\mathbf{v} = 0,$$

ou seja, $\lambda = 0$ é autovalor de M .

Neste caso, faz sentido explorarmos os conceitos envolvendo vetor de Darboux e vértices de Darboux.

ii) n par, neste caso

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{vmatrix} = k_1^2 k_3^2 \cdots k_{n-1}^2.$$

Como k_1, k_3, \dots, k_{n-2} são não nulos (pois a curva é genérica) então M é singular apenas nos pontos de aplainamento ($k_{n-1} = 0$) e assim $\lambda = 0$ é autovalor de M nestes pontos. Neste caso, não é possível analisar os conceitos envolvendo vetor de Darboux e vértices de Darboux quando n é par. Deste modo, o conceito de vetor de Darboux se generaliza apenas quando n é ímpar.

Proposição 20. *O eixo de Darboux da curva $\alpha \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ no tempo s é determinado pelo núcleo da matriz de Frenet $M(s)$, dado com respeito à base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2m+1}$.*

Vamos agora determinar o eixo de Darboux. Seja $\alpha \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ uma curva genérica, deste modo suas curvaturas $k_1, k_2, \dots, k_{2m-1}$ são sempre não nulas. Além disso, a

última curvatura k_{2m} será nula apenas em pontos isolados (os pontos de aplainamento). Vamos analisar o eixo de Darboux da curva α .

Seja $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{2m+1}) \in \mathbb{R}^{2m+1}$. Vamos verificar quando $M \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, isto é,

$$\begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -k_{2m-1} & 0 & k_{2m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{2m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{2m} \\ a_{2m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned} k_1 a_2 &= 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ -k_1 a_1 + k_2 a_3 &= 0 \Rightarrow a_3 = \left(\frac{k_1}{k_2}\right) a_1 \\ &\vdots \\ -k_{2i-1} a_{2i-1} + k_{2i} a_{2i+1} &= 0 \Rightarrow a_{2i+1} = \left(\frac{k_{2i-1}}{k_{2i}}\right) a_{2i-1} = \left(\frac{k_1 k_3 \dots k_{2i-1}}{k_2 k_4 \dots k_{2i}}\right) a_1 \\ -k_{2i} a_{2i} + k_{2i+1} a_{2i+2} &= 0 \Rightarrow a_{2i+2} = 0, \text{ pois } a_{2i} = 0 \\ &\vdots \\ a_{2m} &= 0 \\ a_{2m+1} &= \left(\frac{k_1 k_3 \dots k_{2m-1}}{k_2 k_4 \dots k_{2m}}\right) a_1. \end{aligned}$$

Tomando $a_1 = k_2 k_4 \dots k_{2m}$ podemos definir

Definição 12. O vetor de Darboux da curva $\alpha \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ é dado por $\mathbf{d} = \frac{\tilde{\mathbf{d}}}{|\tilde{\mathbf{d}}|}$, onde

$$\tilde{\mathbf{d}} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_3 \mathbf{v}_3 + \dots + a_{2m+1} \mathbf{v}_{2m+1} \quad \text{e}$$

$$a_1 = k_2 k_4 \dots k_{2m}, \quad a_3 = \left(\frac{k_1}{k_2}\right) a_1, \dots, \quad a_{2m+1} = \frac{k_{2m-1}}{k_{2m}} a_{2m-1} = (k_1 k_3 \dots k_{2m-1}).$$

Como no caso de \mathbb{R}^3 os vértices de Darboux correspondem aos pontos onde a indicatriz de Darboux é estacionária.

Podemos notar que o núcleo da matriz de Frenet $M(s)$ tem dimensão 1. Deste modo, a imagem de $M(s)$ tem dimensão $2m$ e, sendo assim, a imagem da matriz M determina um hiperplano em \mathbb{R}^{2m+1} , em outras palavras, os vetores $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_{2m+1}$ geram um hiperplano em \mathbb{R}^{2m+1} . Vimos no Teorema 6 que os pontos helicoidais sempre coincidem com os vértices de Darboux para curvas em \mathbb{R}^3 . Vamos analisar se este resultado é válido para curvas em espaços de dimensão $(2m+1)$, com $m > 1$.

Observamos que, em um ponto de aplainamento $k_{2m} = 0$ e, portanto, $\tilde{\mathbf{d}} = (k_1 k_3 \dots k_{2m-1}) \mathbf{v}_{2m+1}$. Além disto, pelo visto na demonstração da Proposição 1 do Capítulo 1, temos que a derivada de ordem $2m$ de \mathbf{v}_1 , denotada por $\mathbf{v}_1^{(2m)}$, é da forma

$$\mathbf{v}_1^{(2m)} = b_1 \mathbf{v}_1 + b_2 \mathbf{v}_2 + \dots + b_{2m} \mathbf{v}_{2m} + k_1 k_2 \dots k_{2m} \mathbf{v}_{2m+1},$$

onde b_1, \dots, b_{2m} são dados em termos das curvaturas da curva e de suas derivadas. Sendo assim, nos pontos de aplainamento de α , $\mathbf{v}_1^{(2m)} \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2m}]$ e, novamente pela demonstração da Proposição 1, isto significa que \mathbf{d} é ortogonal ao hiperplano osculador da indicatriz tangente de α . Assim, quando \mathbf{d} é estacionário em um ponto, o vetor normal deste hiperplano também é estacionário, o que significa que a última curvatura da curva α_T é nula no ponto, ou seja, α tem um ponto helicoidal. Logo, nos pontos de aplainamento os vértices de Darboux e os pontos helicoidais coincidem.

Como no caso tridimensional, um vetor pertence ao eixo de Darboux da curva α se, e somente se é ortogonal ao hiperplano gerado pelas derivadas se seus vetores de Frenet: $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_{2m+1}$. Um vetor é ortogonal ao hiperplano osculador da indicatriz tangente de α se, e somente se é ortogonal ao hiperplano gerado por $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}''_1, \dots, \mathbf{v}_1^{(2m)}$. Quando estes hiperplanos coincidem (em \mathbb{R}^3 isto acontece em todos os pontos de α) o vetor de Darboux é normal ao hiperplano osculador da indicatriz tangente de α e assim os pontos helicoidais coincidirão com os vértices de Darboux. Desta forma, basta analisarmos quando estes hiperplanos coincidem, isto é,

$$[\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_{2m+1}] = [\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}''_1, \dots, \mathbf{v}_1^{(2m)}] \quad (5.10)$$

Utilizando as equações de Frenet podemos observar que

$$\begin{aligned} -k_1 \mathbf{v}_1 &= -k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_3 - k_2 \mathbf{v}_3 + \frac{k_2 k_4}{k_3} \mathbf{v}_5 - \frac{k_2 k_4}{k_3} \mathbf{v}_5 + \dots \\ &\quad + \frac{k_2 k_4 \dots k_{2m}}{k_3 k_5 \dots k_{2m-1}} \mathbf{v}_{2m+1} - \frac{k_2 k_4 \dots k_{2m}}{k_3 k_5 \dots k_{2m-1}} \mathbf{v}_{2m+1} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{v}'_2 + \frac{k_2}{k_3} \mathbf{v}'_4 + \frac{k_2 k_4}{k_3 k_5} \mathbf{v}'_6 + \dots + \frac{k_2 k_4 \dots k_{2m-2}}{k_1 k_3 \dots k_{2m-1}} \mathbf{v}'_{2m}.$$

Sendo assim $\mathbf{v}_1 \in [\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_{2m+1}]$ e pela expressão (5.10) temos que $\mathbf{v}_1 \in [\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}''_1, \dots, \mathbf{v}_1^{(2m)}]$. Como $[\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(2m+1)}] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}''_1, \dots, \mathbf{v}_1^{(2m)}]$, então o conjunto $\{\alpha', \dots, \alpha^{(2m+1)}\}$ é linearmente dependente e, pela Proposição 1, segue que $k_{2m} = 0$. Provamos assim que o vetor de Darboux é normal ao hiperplano osculador de α_T em um ponto $\alpha(s_0)$ se, e somente se $\alpha(s_0)$ é um ponto de aplainamento de α . Com isso mostramos o seguinte resultado.

Teorema 5. *Os pontos helicoidais e os vértices de Darboux de uma curva diferenciável em \mathbb{R}^{2m+1} nem sempre coincidem e se coincidem isto ocorre apenas em pontos isolados (pontos de aplainamento da curva).*

O resultado a seguir determina uma condição necessária e suficiente para que α tenha um vértice de Darboux em \mathbb{R}^{2m+1} .

Teorema 6. *A curva $\alpha \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ tem um vértice de Darboux em $\alpha(s_0)$ se, e somente se*

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' = \left(\frac{k_4}{k_3}\right)' = \dots = \left(\frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}\right)' = 0.$$

Demonstração. Seja \mathbf{d} o vetor de Darboux da curva α . Derivando \mathbf{d} com respeito ao comprimento de arco de α temos:

$$\mathbf{d}' = \left(\frac{\tilde{\mathbf{d}}}{|\tilde{\mathbf{d}}|}\right)' = \frac{\tilde{\mathbf{d}}'\lambda + \lambda'\tilde{\mathbf{d}}}{\lambda^2},$$

onde $\lambda = |\mathbf{d}|$. Desta forma,

$$\mathbf{d}' = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}'\lambda = -\lambda'\tilde{\mathbf{d}} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}' = \frac{-\lambda'}{\lambda}\tilde{\mathbf{d}} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}' \parallel \tilde{\mathbf{d}}$$

Assim α tem um vértice de Darboux em $\alpha(s_0)$ se, e somente se $\tilde{\mathbf{d}}'$ é proporcional a $\tilde{\mathbf{d}}$. Derivando $\tilde{\mathbf{d}}$ obtemos:

$$\tilde{\mathbf{d}}' = a'_1 \mathbf{v}_1 + a'_3 \mathbf{v}_3 + \dots + a'_{2m+1} \mathbf{v}_{2m+1} + a_1 \mathbf{v}'_1 + a_3 \mathbf{v}'_3 + \dots + a_{2m+1} \mathbf{v}'_{2m+1},$$

escrevendo $\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}'_1 + a_3 \mathbf{v}'_3 + \dots + a_{2m+1} \mathbf{v}'_{2m+1}$ temos

$$\mathbf{v} = a_1(k_1 \mathbf{v}_2) + a_3(-k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_4) + \dots + a_{2m+1}(-k_{2m} \mathbf{v}_{2m})$$

Os termos a_j são como na Definição 12 para $j = 1, 3, \dots, 2m + 1$, então

$$\begin{aligned} a_{2j+1}(-k_{2j} \mathbf{v}_{2j} + k_{2j+1} \mathbf{v}_{2j+2}) &= -\frac{k_{2j-1}}{k_{2j}} a_{2j-1} k_{2j} \mathbf{v}_{2j} + a_{2j+1} k_{2j+1} \mathbf{v}_{2j+2} \\ &= -k_{2j-1} a_{2j-1} \mathbf{v}_{2j} + a_{2j+1} k_{2j+1} \mathbf{v}_{2j+2}. \end{aligned}$$

Observando a seguinte soma

$$\begin{aligned} a_{2j-1} \mathbf{v}'_{2j-1} + a_{2j+2} \mathbf{v}'_{2j+2} &= a_{2j-1}(-k_{2j-2} \mathbf{v}_{2j-2} + k_{2j-1} \mathbf{v}_{2j}) \\ &\quad + a_{2j+1}(-k_{2j} \mathbf{v}_{2j} + k_{2j+1} \mathbf{v}_{2j+2}) \\ &= -a_{2j-1} k_{2j-2} \mathbf{v}_{2j-2} + a_{2j+1} k_{2j+1} \mathbf{v}_{2j+2}, \end{aligned}$$

vemos que os termos de \mathbf{v} cancelam-se um a um, deste modo

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\equiv 0, \text{ portanto} \\ \tilde{\mathbf{d}} &= a'_1 \mathbf{v}_1 + a'_3 \mathbf{v}_3 + \dots + a'_{2m+1} \mathbf{v}_{2m+1}. \end{aligned}$$

Assim, $\tilde{\mathbf{d}}'$ é proporcional a $\tilde{\mathbf{d}}$ em $\alpha(s_0)$ se, e somente se

$$\frac{a'_1}{a_1} = \frac{a'_3}{a_3} = \dots = \frac{a'_{2m+1}}{a_{2m+1}},$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{a'_1}{a_1} = \frac{a'_3}{a_3} &\Leftrightarrow \frac{a'_1}{a_1} = \frac{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' a_1 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right) a'_1}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right) a_1} = \frac{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)} + \frac{a'_1}{a_1} \Leftrightarrow \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' = 0 \\ &\vdots \\ \frac{a'_{2i-1}}{a_{2i-1}} = \frac{a'_{2i+1}}{a_{2i+1}} &\Leftrightarrow \frac{a'_{2i-1}}{a_{2i-1}} = \frac{\left(\frac{k_{2i}}{k_{2i-1}}\right)'}{\left(\frac{k_{2i}}{k_{2i-1}}\right)} + \frac{a'_{2i-1}}{a_{2i-1}} \Leftrightarrow \left(\frac{k_{2i}}{k_{2i-1}}\right)' = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\frac{a'_{2m-1}}{a_{2m-1}} = \frac{a'_{2m+1}}{a_{2m+1}} \Leftrightarrow \left(\frac{k_{2m}}{k_{2m-1}} \right)' = 0$$

Desta forma, α tem um vértice de Darboux em $\alpha(s_0)$ se, e somente se

$$\left(\frac{k_2}{k_1} \right)'(s_0) = \left(\frac{k_4}{k_3} \right)'(s_0) = \dots = \left(\frac{k_{2m}}{k_{2m-1}} \right)'(s_0) = 0. \quad (5.11)$$

□

É possível mostrar que a condição (5.11) não é genérica [10]. Logo, uma curva genérica em \mathbb{R}^{2m+1} com $m \geq 2$, não possui vértice de Darboux.

Capítulo 6

Resultados globais para curvas fechadas no espaço

Neste capítulo abordaremos alguns resultados globais sobre curvas em \mathbb{R}^3 envolvendo pontos de aplainamento (torção nula) e pontos helicoidais (vértices de Darboux).

O número mínimo de pontos de torção nula sobre uma curva fechada no espaço constitui um objeto clássico da teoria global de curvas. Na seção 6.1 estudaremos uma família de curvas sobre o toro que possui torção nunca nula. A referência utilizada nesta seção foi [5].

Em [5] é mostrado que curvas com curvatura e torção nunca nulas devem entrar pelo menos duas vezes dentro de seu fecho convexo. Por outro lado, curvas com curvatura nunca nula que ficam no bordo de seus fechos convexos têm pelo menos quatro pontos de torção nula [21]. Esta é uma versão espacial do clássico *teorema dos quatro vértices para curvas planas* que estabelece que toda curva fechada, plana e simples tem pelo menos quatro pontos extremos para sua curvatura (vértices) [15]. Este resultado será utilizado na seção 6.2 para garantir a existência de no mínimo 4 pontos helicoidais sobre curvas fechadas no espaço que não possuem tangentes paralelas [20].

Finalmente na seção 6.3 estudaremos uma outra versão do teorema dos 4 vértices para curvas no espaço devida a E. Heil [11] e que estabelece que se α é uma curva regular fechada então $V + K + D \geq 4$, onde D denota o número de vértices de Darboux, K e V denotam o número de mudanças de sinal da curvatura e da torção, respectivamente.

6.1 Curvas (q, p) no toro

O objetivo desta subseção é estudar algumas propriedades das curvas (q, p) no toro. Estas curvas foram estudadas em [4] e representam importantes exemplos de curvas fechadas que nunca anulam a torção em \mathbb{R}^3 .

Denominaremos curva regular fechada no \mathbb{R}^3 a uma imersão de classe C^4 de \mathbb{S}^1 em \mathbb{R}^3 , ou equivalentemente a uma função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que pode ser estendida a uma função periódica $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^4 com $\alpha'(t) \neq 0, \forall t$ e $\alpha(a) = \alpha(b), \dots, \alpha'''(a) = \alpha'''(b)$. Uma curva regular fechada é simples se ela não possui auto-intersecção, isto é, α é um mergulho de \mathbb{S}^1 em \mathbb{R}^3 .

Um toro T_a é gerado pela rotação ao redor do eixo z de um círculo unitário no plano yz centrado no ponto $(0, a, 0)$ (figura 6.1). Assim, a menos de homotetia, a discussão a seguir representa toros com a proporção a entre os raios do círculo geratriz e a distância do centro deste ao eixo de rotação.

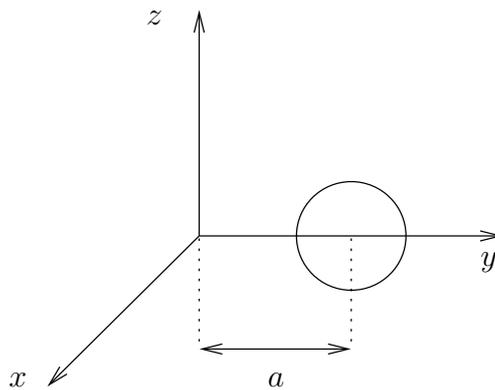


Figura 6.1: Círculo unitário que gera o toro T_a

Uma curva (q, p) no toro, onde $p, q \in \mathbb{N}^*$, é uma curva regular simples e fechada no toro que gira q vezes na direção longitudinal e p vezes na direção meridional. As curvas (q, p) no toro T_a podem ser parametrizadas por

$$\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t), \sin(nt)), \text{ onde } r = (a + \cos(nt)), n = \frac{p}{q}.$$

As figuras 6.2 e 6.3 são exemplos de curvas (q, p) no toro. Agora vamos analisar as condições necessárias para que a curva α não anule a torção.

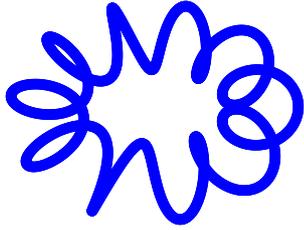


Figura 6.2: curva (1, 10) com $a = 3$

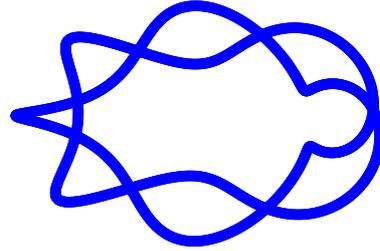


Figura 6.3: curva (2, 7) com $a = 5$

Para isto definiremos o seguinte referencial móvel

$$\mathbf{u}_1 = (\cos(t), \sin(t), 0), \quad \mathbf{u}_2 = (-\sin(t), \cos(t), 0) \text{ e } \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1).$$

Logo, $\mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}'_2 = -\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}'_3 = 0$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= r\mathbf{u}_1 + \sin(nt)\mathbf{u}_3 \\ \alpha'(t) &= r'\mathbf{u}_1 + r\mathbf{u}'_1 + (\sin(nt))'\mathbf{u}_3 + \sin(nt)\mathbf{u}'_3 \\ &= r'\mathbf{u}_1 + r\mathbf{u}_2 + n\cos(nt)\mathbf{u}_3 \\ \alpha''(t) &= r''\mathbf{u}_1 + r'\mathbf{u}'_1 + r'\mathbf{u}_2 + r\mathbf{u}'_2 - n^2\sin(nt)\mathbf{u}_3 \\ &= (r'' - r)\mathbf{u}_1 + 2r'\mathbf{u}_2 - n^2\sin(nt)\mathbf{u}_3 \\ \alpha'''(t) &= (r''' - r')\mathbf{u}_1 + (r'' - r)\mathbf{u}'_1 + 2r''\mathbf{u}_2 + 2r'\mathbf{u}'_2 - n^3\cos(nt)\mathbf{u}_3 \\ &= (r''' - 3r')\mathbf{u}_1 + (3r'' - r)\mathbf{u}_2 - n^3\cos(nt)\mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

Observamos que

$$r' = -n\sin(nt), \quad r'' = -n^2\cos(nt), \quad r''' = n^3\sin(nt).$$

Para que a torção da curva seja nula em um ponto $\alpha(t_0)$ é necessário que

$$\det(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0), \alpha'''(t_0)) = 0.$$

Assim, deve ocorrer

$$\begin{vmatrix} \alpha'_1(t_0) & \alpha''_1(t_0) & \alpha'''_1(t_0) \\ \alpha'_2(t_0) & \alpha''_2(t_0) & \alpha'''_2(t_0) \\ \alpha'_3(t_0) & \alpha''_3(t_0) & \alpha'''_3(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Utilizando o referencial móvel citado anteriormente teremos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha'_1(t) & \alpha''_1(t) & \alpha'''_1(t) \\ \alpha'_2(t) & \alpha''_2(t) & \alpha'''_2(t) \\ \alpha'_3(t) & \alpha''_3(t) & \alpha'''_3(t) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} r' & (r'' - r) & (r''' - 3r') \\ r & 2r' & (3r'' - r) \\ n \cos(nt) & -n^2 \sin(nt) & -n^3 \cos(nt) \end{vmatrix} \\ &= -2(r')^2 n^3 \cos(nt) + (r'' - r)(3r'' - r)n \cos(nt) - r(r''' - 3r')n^2 \sin(nt) - \\ &\quad 2r'(r''' - 3r')n \cos(nt) + r(r'' - r)n^3 \cos(nt) + r'(3r'' - r)n^2 \sin(nt) \\ &= \cos^3(nt)(n - n^3) + \cos^2(nt)(4an^3 + 2an) + \cos(nt)(2n^3(2 + n^2) - a^2n(n^2 - 1)) - \\ &\quad an^3(2 + n^2). \end{aligned}$$

Desta forma, $\det(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0), \alpha'''(t_0)) = 0$ se, e somente se $\cos(nt_0)$ é raiz do polinômio

$$P(x) = x^3(1 - n^2) + x^2(4an^2 + 2a) + x(2n^2(2 + n^2) - a^2(n^2 - 1)) - an^2(2 + n^2).$$

Como $-1 \leq \cos(nt_0) \leq 1$ então basta analisarmos as raízes do polinômio $P(x)$ que satisfazem $-1 \leq x \leq 1$. Queremos encontrar condições envolvendo a e n de modo que não existam raízes no intervalo $[-1, 1]$, deste modo encontraremos as condições para que a torção nunca se anule.

Temos que,

$$P(0) = -an^2(2 + n^2) < 0, \quad \forall a, n.$$

Portanto $P(1) < 0$ e $P(-1) < 0$ são condições necessárias para que $P(x)$ não tenha raízes em $[-1, 1]$. Calculando $P(1)$ temos

$$\begin{aligned} P(1) &= (1 - n^2) + (4an^2 + 2a) + (2n^2(2 + n^2) - a^2(n^2 - 1)) - an^2(2 + n^2) \\ &= (1 - n^2)a^2 + (-n^4 + 2n^2 + 2)a + 2n^4 + 3n^2 + 1. \end{aligned}$$

O discriminante e as raízes desta equação quadrática em função de a são dados por

$$\begin{aligned}\Delta &= n^4(n^4 + 4n^2 + 4) > 0, \forall n \text{ e} \\ a_1 &= -(n^2 + 1), \quad a_2 = \frac{2n^2 + 1}{(n^2 - 1)}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Observamos que se $n^2 < 1$ então $a_1 < 0$ e $a_2 < 0$. Como consideraremos os casos em que $a > 0$ segue que $P(1) > 0$. Para o caso em que $n = 1$ temos que $P(1)$ é um polinômio de grau 1 e $P(1) > 0$ para qualquer $a > 0$. Portanto analisaremos agora apenas os casos em que $n^2 > 1$.

Observamos que, neste caso, $P(1) < 0$ se, e somente se

$$a < -(n^2 + 1) \text{ e } a > \frac{2n^2 + 1}{(n^2 - 1)}.$$

Como $a > 0$ então $P(1) < 0$ se, e somente se,

$$\frac{2n^2 + 1}{(n^2 - 1)} < a.\tag{6.2}$$

O discriminante e as raízes de

$$P(-1) = (n^2 - 1)a^2 + (-n^4 + 2n^2 + 2)a - 2n^4 - 3n^2 - 1,$$

são dados por

$$\begin{aligned}\Delta &= n^4(n^4 + 4n^2 + 4) > 0, \forall n, \text{ e} \\ a_3 &= (n^2 + 1), \quad a_4 = \frac{-2n^2 - 1}{(n^2 - 1)}.\end{aligned}$$

Assim, $P(-1) < 0$ se e somente se,

$$\frac{-2n^2 - 1}{(n^2 - 1)} < a < n^2 + 1.$$

Novamente, como $a > 0$ então $P(-1) < 0$ se, e somente se,

$$a < n^2 + 1.\tag{6.3}$$

De (6.2) e (6.3) concluímos que uma condição necessária para que a torção seja não nula é que

$$\frac{2n^2 + 1}{(n^2 - 1)} < a < (n^2 + 1).$$

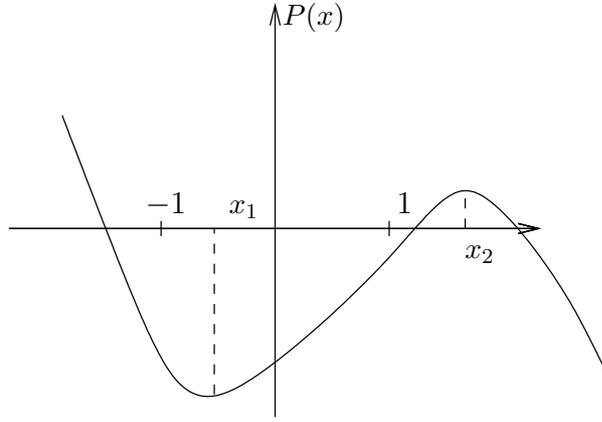


Figura 6.4: Gráfico de $P(x)$

Vamos verificar agora que esta condição é suficiente. Para isto consideremos o polinômio

$$P'(x) = 3x^2(1 - n^2) + 2x(4an^2 + 2a) + (2n^2(2 + n^2) - a^2(n^2 - 1)),$$

o discriminante e as raízes de $P'(x)$ são dados por

$$\begin{aligned} \Delta &= 4a^2(13n^4 + 22n^2 + 1) + 24n^2(n^2 + 2)(n^2 - 1) > 0, \quad \forall n, a, \text{ pois } n^2 > 1, \\ x_1 &= \frac{(4an^2 + 2a)}{3(n^2 - 1)} - \frac{\sqrt{\Delta}}{6(n^2 - 1)}, \quad x_2 = \frac{(4an^2 + 2a)}{3(n^2 - 1)} + \frac{\sqrt{\Delta}}{6(n^2 - 1)}, \end{aligned}$$

de modo que $x_1 < x_2$ e $x_2 > 1$ (figura 6.4).

Além disso,

$$P'(x) < 0 \text{ para } x < x_1 \tag{6.4}$$

$$P'(x) > 0 \text{ para } x_1 < x < x_2 \tag{6.5}$$

$$P'(x) > 0 \text{ para } x_2 < x, \tag{6.6}$$

Por (6.4), (6.5) e (6.6) x_1 e x_2 são respectivamente o mínimo e o máximo local de

$P(x)$. Assim, os valores máximos de $P(x)$ para $-1 \leq x \leq 1$ só podem ser $P(-1)$ ou $P(1)$. Portanto $P(-1) < 0$ e $P(1) < 0$ são condições suficientes para que as curvas (q, p) não tenham nenhum ponto de torção nula. Temos então o seguinte resultado.

Teorema 7. *As curvas (q, p) sobre o toro T_a parametrizadas por*

$$\alpha(t) = ((a + \cos(nt)) \cos(t), (a + \cos(nt)) \sin(t), \sin(nt)),$$

com $a > 1$ e $n = \frac{p}{q}$, têm torção nunca nula se, e somente se $n^2 > 1$ e

$$\frac{2n^2 + 1}{(n^2 - 1)} < a < (n^2 + 1).$$

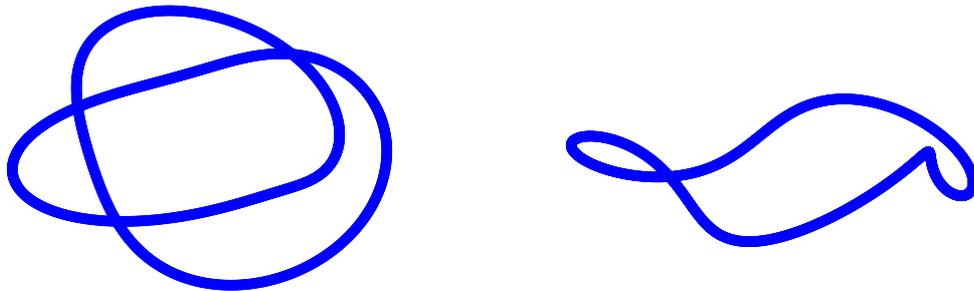


Figura 6.5: Curvas $(2, 3)$ e $(1, 3)$ com $a = 5$

Podemos encontrar muitos exemplos de curvas (q, p) sobre o toro que satisfazem esta desigualdade. Algumas curvas (q, p) que não anulam a torção são ilustradas nas figuras 6.2, 6.3 e 6.5 (curva $(1, 3)$ com $a = 5$).

Notamos que, a desigualdade do Teorema 7 nem sempre é satisfeita para todo valor de a . Por exemplo, tomando $n = \frac{3}{2}$ temos que $n^2 > 1$, mas não existe a que satisfaça a desigualdade:

$$\frac{22}{5} < a < \frac{13}{4}.$$

O corolário a seguir justifica este caso.

Corolário 3. *A curvas (q, p) sobre o toro não têm nenhum ponto de torção nula para algum toro T_a se, e somente se*

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 > 1 + \sqrt{3}.$$

Demonstração. De fato, pelo Teorema 7 temos que as curvas (q, p) não anulam torção $\Leftrightarrow n^2 > 1$ e

$$\frac{2n^2 + 1}{(n^2 - 1)} < a < (n^2 + 1),$$

assim n satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{2n^2 + 1}{(n^2 - 1)} < (n^2 + 1) &\Leftrightarrow 2n^2 + 1 < n^4 - 1 \Leftrightarrow n^4 - 2n^2 - 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (n^2 - (1 - \sqrt{3})) (n^2 - (1 + \sqrt{3})) > 0, \end{aligned}$$

como $n^2 > 1$ então

$$n^2 > 1 + \sqrt{3}.$$

□

A curva $(2, 3)$ no toro, ilustrada na figura 6.5, sempre tem pontos de torção nula para qualquer valor de a .

6.2 Pontos helicoidais sobre curvas fechadas

Como vimos no Capítulo 3, existem curvas em \mathbb{R}^4 que não possuem nenhum ponto helicoidal. No caso de curvas em \mathbb{R}^3 pode-se garantir o seguinte resultado.

Teorema 8. *Qualquer curva fechada com curvatura não nula em \mathbb{R}^3 tem pelo menos dois pontos helicoidais.*

Demonstração. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva fechada p.c.a. com curvatura k nunca nula e torção τ . Em vista da Proposição 15, temos que os pontos helicoidais são caracterizados como pontos críticos da função $\frac{\tau}{k}$. Além disto, $k \neq 0$, $\frac{\tau}{k}$ é contínua e periódica, logo, $\frac{\tau}{k}$ deve ter pelo menos um ponto de máximo e um de mínimo e, portanto, $\frac{\tau}{k}$ tem pelo menos dois pontos críticos. □

Vamos mostrar agora que curvas fechadas que não possuem tangentes paralelas com a mesma orientação têm pelo menos 4 pontos helicoidais. Para isto precisamos do seguinte resultado.

Proposição 21. *Pontos de torção nula de uma curva em \mathbb{S}^2 correspondem a pontos de vértice da curva plana dada por sua projeção estereográfica.*

Demonstração. Sejam $\mathbb{S}^2(C)$ a esfera unitária com centro $C = (0, 0, 1)$ e $\beta : I \rightarrow \mathbb{S}^2(C) - \{P\}$ uma curva p.c.a. em $\mathbb{S}^2 - \{P\}$, sendo $P = (0, 0, 2)$ o pólo norte de \mathbb{S}^2 . A projeção estereográfica $\pi : \mathbb{S}^2 - \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z} \right).$$

Vamos mostrar inicialmente que π^{-1} leva círculos do plano em círculos de \mathbb{S}^2 .

De fato, seja $C_S = \pi(S)$ um círculo no plano, vamos provar que S é um círculo de \mathbb{S}^2 . Se $Q = (x_1, y_1) \in C_S$ então Q satisfaz a equação da circunferência no plano

$$x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + d = 0, \quad (6.7)$$

substituindo $x_1 = \frac{2x}{2-z}$ e $y_1 = \frac{2y}{2-z}$ em (6.7) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{2x}{2-z} \right)^2 + \left(\frac{2y}{2-z} \right)^2 + a \left(\frac{2x}{2-z} \right) + b \left(\frac{2y}{2-z} \right) + d \\ &= \frac{4(x^2 + y^2)}{(2-z)^2} + \left(\frac{2ax + 2by}{2-z} \right) + d \\ &= \frac{4z + 2ax + 2by + d(2-z)}{2-z}. \end{aligned}$$

Como $z \neq 2$ então

$$2ax + 2by + (4-d)z + 2d = 0,$$

o que significa que S está contido em um plano. Então S é o resultado da intersecção entre um plano e \mathbb{S}^2 , ou seja, S é um círculo em \mathbb{S}^2 . Reciprocamente, trabalhando com π , obtemos que os círculos em \mathbb{S}^2 são levados por π em círculos de \mathbb{R}^2 .

Seja $\gamma = \pi(\beta)$. Se γ tem vértice em $\gamma(s_0)$ então γ tem contato de ordem pelo menos 4 com seu círculo osculador, que denotaremos por C_0 . Como π^{-1} é difeomorfismo então preserva a ordem de contato [6], desta forma, o contato entre β e $\pi^{-1}(C_0)$

é da mesma ordem do contato entre γ e C_0 , ou seja, o contato entre β e seu círculo osculador é de ordem 4 em $\beta(s_0)$. Portanto, em $\beta(s_0)$, o contato entre β e seu plano osculador é de ordem 4 pelo menos, o que significa que $\beta(s_0)$ é um ponto de torção nula de β .

Reciprocamente, se a torção de β é nula em $\beta(s_0)$ então o contato entre β e seu plano osculador em $\beta(s_0)$ é de ordem 4 pelo menos, portanto o contato entre β e seu círculo osculador, que denotaremos por C_1 , é de ordem 4 pelo menos. Assim, como π preserva a ordem de contato [6], então o contato entre a curva $\gamma = \pi(\beta)$ e seu círculo osculador $\pi(C_1)$ é de ordem 4 pelo menos, portanto, $\gamma(s_0)$ é um ponto de vértice. \square

Se α é uma curva fechada com curvatura nunca nula e sem nenhum par de tangentes paralelas com a mesma orientação então, sua indicatriz tangente α_T é uma curva regular simples e fechada em \mathbb{S}^2 . Considerando a projeção estereográfica π aplicada à curva α_T , temos que $\pi(\alpha_T)$ é uma curva plana simples e fechada. O teorema dos quatro vértices para curvas planas garante, então, que $\pi(\alpha_T)$ tem no mínimo quatro vértices, assim, pela Proposição 20, α_T tem no mínimo quatro pontos de torção nula, ou seja, α tem no mínimo quatro pontos helicoidais. Provamos então o seguinte resultado.

Teorema 9. *Qualquer curva fechada com curvatura não nula que não tenha nenhum par de tangentes paralelas com mesma orientação em \mathbb{R}^3 tem no mínimo quatro pontos helicoidais.*

6.3 Uma outra versão do teorema dos quatro vértices

Nesta seção veremos uma outra versão do teorema dos 4 vértices envolvendo pontos de mudança de sinal da curvatura, pontos de mudança de sinal da torção e vértices de Darboux. Para isto será necessário obter as equações de Frenet para curvas com pontos de curvatura nula.

O triedro de Frenet é sempre bem definido para curvas no espaço com curvatura positiva em todos os pontos (curvas genéricas), a dificuldade está em defini-lo quando a curva tem um ponto de curvatura nula, nestes pontos o vetor normal não está bem definido. Para que possamos defini-lo assumiremos que existe um campo normal contínuo ao longo da curva.

Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável p.c.a. com curvatura k e torção τ . Vamos supor que k se anula em um número finito de pontos. Quando $k(s) > 0$ a primeira equação de Frenet $\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$ define o vetor normal principal de α . Assumiremos então que existe um campo vetorial contínuo $\tilde{\mathbf{n}}$ ao longo de α tal que

$$\tilde{\mathbf{n}} = \pm \mathbf{n},$$

quando $k(s) > 0$ (um conjunto de condições suficientes para isto acontecer é dado em [17]). Trocando \mathbf{n} por $\tilde{\mathbf{n}}$ na primeira equação de Frenet obtemos

$$\mathbf{t}' = \tilde{k}\tilde{\mathbf{n}},$$

onde $\tilde{k}(s) = \pm k(s)$. Assim definimos $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{t}} \times \tilde{\mathbf{n}}$ onde $\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}}$. Usando este novo triedro de Frenet $\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{b}}$ obtemos as equações de Frenet

$$\begin{aligned}\mathbf{t}' &= \tilde{k}\tilde{\mathbf{n}} \\ \mathbf{n}' &= -\tilde{k}\tilde{\mathbf{t}} + \tau\tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{b}' &= -\tau\tilde{\mathbf{n}},\end{aligned}$$

onde $\tilde{k}, \tilde{\mathbf{n}}$ e $\tilde{\mathbf{b}}$ são definidos a menos de uma mudança de sinal.

Além disto, vamos admitir que τ e k nunca se anulam no mesmo ponto e que α não é uma curva plana.

Em resumo, vamos considerar que a curva α satisfaz as seguintes condições:

1. O número de pontos de curvatura nula de α é finito e os vetores normais a α podem ser localmente definidos como um campo contínuo de vetores.
2. A curvatura k e a torção τ de α nunca se anulam no mesmo ponto.
3. A curva α não é plana (τ não é identicamente nula).

Definição 13. O ponto $\alpha(s_0)$ da curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é de inflexão quando a curvatura de α muda de sinal em s_0 , ou seja,

$$k(s_0) = 0 \quad \text{e} \quad k'(s_0) \neq 0.$$

O resultado a seguir relaciona os pontos de inflexão de uma curva α com as cúspides da sua indicatriz tangente α_T .

Proposição 22. *As inflexões de α correspondem a cúspides da indicatriz tangente α_T .*

Demonstração. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável p.c.a. com curvatura k e torção τ satisfazendo os itens 1, 2 e 3 desta seção.

Consideremos a família

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, \mathbf{x}) &\longmapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}(s), \end{aligned}$$

onde s é o comprimento de arco. Agora vamos encontrar o envelope da família F . Temos

$$\begin{aligned} F(s, \mathbf{x}) = 0 &\Rightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{b}(s) \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}(s) \\ \frac{\partial F}{\partial s}(s, \mathbf{x}) = 0 &\Rightarrow \mathbf{x} \cdot (-\tau(s) \mathbf{n}(s)) = 0, \end{aligned}$$

portanto

$$F(s, \mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial s}(s, \mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mu = 0 \text{ ou } \tau(s) = 0$$

Deste modo, o envelope é dado por

$$D_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2; \mathbf{x} = \pm \mathbf{t}(s) \text{ ou } \mathbf{x} = \lambda \mathbf{t}(s) + \mu \mathbf{n}(s), \text{ com } \tau(s) = 0\}$$

Assim, a indicatriz tangente faz parte do envelope desta família. Como estamos interessados no estudo dos pontos da indicatriz tangente vamos analisar somente estes pontos. Para estudar a estrutura local da indicatriz tangente utilizaremos os resultados da seção 4.2.

Vamos analisar as singularidades A_1 e A_2 de F_x nos pontos da indicatriz tangente.

Se \mathbf{x}_0 é um ponto da indicatriz tangente, a aplicação $f = F_{\mathbf{x}_0}$, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, satisfaz

$$f(s_0) = f'(s_0) = 0.$$

Agora, para que f seja do tipo A_1 em s_0 é necessário que $f''(s_0) \neq 0$. Assim, f é do tipo A_1 em s_0 se, e somente se

$$x_0 = \pm \mathbf{t}(s_0), \quad \text{com } k(s_0) \neq 0. \quad (6.8)$$

Para que f seja do tipo A_2 em s_0 , é necessário que $f''(s_0) = 0$ e $f'''(s_0) \neq 0$. Assim, f é do tipo A_2 em s_0 se, e somente se

$$x_0 = \pm \mathbf{t}(s_0), \quad \text{com } k(s_0) = 0 \text{ e } k'(s_0) \neq 0. \quad (6.9)$$

Para garantirmos a correspondência entre cúspides da indicatriz tangente e pontos de inflexão de α precisamos analisar a versalidade do desdobramento F quando F tem tipo A_1 e A_2 .

Observamos que a aplicação F é determinada em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, assim, vamos analisar a versalidade considerando uma parametrização local de \mathbb{S}^2 . Para isto, suponhamos que α esteja na posição padrão:

$$\alpha(s_0) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{t}(s_0) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{n}(s_0) = (0, 1, 0) \text{ e } \mathbf{b}(s_0) = (0, 0, 1).$$

Uma parametrização de \mathbb{S}^2 nas proximidades de $(1, 0, 0)$ é da forma

$$\phi(x_2, x_3) = \left(\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3 \right).$$

Nesta parametrização local os vetores $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ ficam da forma

$$\mathbf{t}(s_0) = \phi(0, 0), \quad \mathbf{n}(s_0) = \phi(1, 0) \text{ e } \mathbf{b}(s_0) = \phi(0, 1).$$

Portanto, nas proximidades de $(1, 0, 0)$ a aplicação F é dada por

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, x_2, x_3) &\longmapsto \left(\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3 \right) \cdot \mathbf{b}(s) \end{aligned}$$

Temos

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(s, \mathbf{x}) = -\frac{x_2}{m} b_1(s) + b_2(s)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}(s, \mathbf{x}) = -\frac{x_3}{m}b_1(s) + b_3(s),$$

onde $m = \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}$ e $\mathbf{b}(s) = (b_1(s), b_2(s), b_3(s))$.

Vamos analisar se F é desdobramento versal de F_{x_0} para singularidades A_1 e A_2 . Temos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(s_0, \mathbf{x}_0) \quad \frac{\partial F}{\partial x_3}(s_0, \mathbf{x}_0) \right) = (0 \quad 1) \neq (0 \quad 0)$$

Portanto, pelo Corolário 2, F é desdobramento versal de F_{x_0} em s_0 para singularidades do tipo A_1 . Assim, nos pontos que satisfazem (6.8) a indicatriz tangente é localmente difeomorfa a uma curva regular.

Para singularidades do tipo A_2 temos que analisar os 1-jatos com termo constante de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(s, \mathbf{x}_0)$, com $i = 2, 3$, em torno de s_0 , dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_2}(s_0, \mathbf{x}_0) + j^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(s, \mathbf{x}_0) \right) (s_0) &= -\tau(s_0) \\ \frac{\partial F}{\partial x_3}(s_0, \mathbf{x}_0) + j^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}(s, \mathbf{x}_0) \right) (s_0) &= 1, \end{aligned}$$

assim, a matriz dos coeficientes fica

$$\begin{pmatrix} -\tau(s_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\tau(s_0) \neq 0$ (pois k e τ não se anulam no mesmo ponto), esta matriz tem posto 2. Assim, pelo Corolário 2, F é desdobramento versal de F_{x_0} em s_0 para singularidades do tipo A_2 . Portanto, os pontos da indicatriz tangente que satisfazem (6.9), correspondentes aos pontos de inflexão de α , são localmente difeomorfos a cúspides. \square

Observamos que os resultados do Teorema 5 da seção 5.2 também são válidos para curvas que satisfazem os itens 1, 2 e 3 desta seção. Assim, pela Proposição 22 e pelo Teorema 5, podemos enunciar o seguinte resultado.

Proposição 23. *Para uma curva α no espaço satisfazendo os itens 1, 2 e 3 desta seção vale:*

- a) As mudanças de sinal de k correspondem a cúspides da indicatriz tangente.
- b) As mudanças de sinal de τ correspondem a cúspides na indicatriz binormal.
- c) Os vértices de Darboux ordinários correspondem a cúspides da indicatriz de Darboux.

Observamos que são justamente estes pontos que aparecem na versão do teorema dos quatro vértices que demonstraremos nesta seção. Para esta demonstração precisaremos de alguns conceitos e resultados sobre curvas planas e curvas na esfera.

Definição 14. *Um arco espiral é uma curva plana com curvatura monótona de sinal constante.*

Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável, regular, plana, p.c.a. com curvatura monótona de sinal constante e $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ a evoluta de α . Assim

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{n}(s).$$

Observamos que β não contém qualquer segmento de reta pois, caso contrário, os normais a β teriam que coincidir num intervalo, o que contraria o fato de k ser monótona. Além disso,

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \alpha'(s) + \left(\frac{1}{k(s)} \right)' \mathbf{n}(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{n}'(s) \\ &= \mathbf{t}(s) + \frac{-k'(s)}{k^2(s)} \mathbf{n}(s) - \frac{1}{k(s)} k'(s) \mathbf{t}(s) \\ &= \frac{-k'(s)}{k^2(s)} \mathbf{n}(s), \end{aligned}$$

deste modo

$$|\beta'(s)| = \frac{|-k'(s)|}{k^2(s)} \neq 0.$$

Sendo assim, a distância entre dois pontos a, b de β é menor do que o comprimento de arco de β , ou seja,

$$d(a, b) = |b - a| < \int_{s_a}^{s_b} |\beta'(s)| ds, \quad \text{onde } \beta(s_a) = a \text{ e } \beta(s_b) = b. \quad (6.10)$$

Como k tem sinal constante podemos orientar α de modo que $k > 0$. Dados dois pontos quaisquer $s_1, s_2 \in I$, como $k > 0$ é monótona podemos supor que $k(s_1) > k(s_2)$. Denotamos por $C_1(a_1, r_1)$ e $C_2(a_2, r_2)$ os círculos osculadores de α em $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$, respectivamente, onde $a_i = \beta(s_i)$ e $r_i = \frac{1}{k(s_i)}$, $i = 1, 2$. Temos que $r_2 > r_1$, assim, por (6.10)

$$d(a_1, a_2) < \int_{s_1}^{s_2} |\beta'(s)| ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{1}{k(s)} \right)' ds = r_2 - r_1,$$

deste modo, dado $x \in C_1$, então $d(x, a_1) = r_1$. Pela desigualdade triangular e pela desigualdade acima temos

$$d(x, a_2) \leq d(x, a_1) + d(a_1, a_2) < r_1 + r_2 - r_1 = r_2.$$

Mostramos assim que o círculo C_1 está totalmente contido no interior do círculo C_2 . Além disto, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Quando os círculos osculadores de α estão contidos um no interior do outro sem se interceptarem dizemos que α tem a propriedade de *ninho* (*nesting*). Provamos assim o seguinte resultado.

Proposição 24. *Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um arco espiral então α tem a propriedade de ninho.*

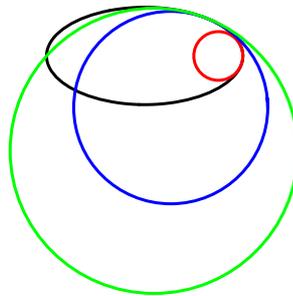


Figura 6.6: Círculos osculadores da elipse para $0 < t < \frac{\pi}{2}$

No exemplo 2.1 do Capítulo 2, a elipse $\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ tem a propriedade de ninho para os seguintes valores de t :

$$0 < t < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi, \quad \pi < t < \frac{3\pi}{2} \quad \text{e} \quad \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi.$$

Na figura 6.6 podemos visualizar a propriedade de ninho na elipse α quando $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

As curvas em \mathbb{S}^2 com curvatura geodésica monótona de sinal constante são chamadas de *arcos espirais em \mathbb{S}^2* . Veremos na Proposição 26 que estas curvas satisfazem uma propriedade em \mathbb{S}^2 parecida com a propriedade de ninho em \mathbb{R}^2 . Para isto precisamos do seguinte resultado.

Proposição 25. *A projeção esterográfica π transforma arcos espirais de \mathbb{S}^2 em arcos espirais de \mathbb{R}^2 .*

Demonstração. Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{S}^2 - \{P\}$ um arco espiral p.c.a. onde C é o centro e P o pólo norte da esfera unitária \mathbb{S}^2 . Então:

$$(\gamma(s) - C) \cdot (\gamma(s) - C) = 1. \quad (6.11)$$

Diferenciando (6.11) com relação a s duas vezes temos

$$(\gamma(s) - C) \cdot \left(\frac{d\gamma}{ds} \right) = 0 \quad (6.12)$$

$$(\gamma(s) - C) \cdot \left(\frac{d^2\gamma}{ds^2} \right) = -1. \quad (6.13)$$

Temos pelas equações de Frenet que

$$\frac{d\gamma}{ds} = \mathbf{t} \quad \text{e} \quad \frac{d^2\gamma}{ds^2} = k\mathbf{n},$$

onde k é a curvatura de γ . Observamos que a condição (6.13) implica que a curvatura k de γ é não nula. Além disso por (6.12) e (6.13) temos

$$(\gamma(s) - C) \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{k} \quad \text{e} \quad (\gamma(s) - C) \cdot \mathbf{t} = 0.$$

Assim,

$$\gamma(s) - C = -\frac{1}{k}\mathbf{n} + \lambda\mathbf{b}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $|\gamma(s) - C|^2 = 1$ então $\frac{1}{k^2} + \lambda^2 = 1$. Seja \mathbf{N} o vetor normal a \mathbb{S}^2 em $\gamma(s)$ dado por

$$\mathbf{N} = \frac{(\gamma - C)}{|\gamma - C|} = (\gamma - C).$$

A curvatura geodésica de α em s é determinada por

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{d^2\gamma}{ds^2} \cdot \left(\mathbf{N} \times \frac{d\gamma}{ds} \right) = k\mathbf{n} \cdot ((\gamma - C) \times \mathbf{t}) = -k(\gamma - C) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}) \\ &= k(\gamma - C) \cdot \mathbf{b} = k\lambda. \end{aligned}$$

Então

$$\lambda = \frac{k_g}{k} \Rightarrow (\gamma - C) = -\frac{1}{k}\mathbf{n} + \frac{k_g}{k}\mathbf{b}. \quad (6.14)$$

Derivando a equação (6.13) com relação a s e utilizando as equações de Frenet temos

$$(\gamma(s) - C) \cdot \left(-k^2\mathbf{t} + \frac{dk}{ds}\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b} \right) = 0 \quad (6.15)$$

Por (6.14) e (6.15) obtemos

$$\frac{dk}{ds} = \tau k_g k. \quad (6.16)$$

Como \mathbb{S}^2 tem raio 1 então a curvatura normal k_n de $\gamma \subset \mathbb{S}^2$ é ± 1 , dependendo da orientação escolhida. Além disso, de $k^2 = k_g^2 + k_n^2$ [3], temos

$$k^2 = k_g^2 + 1. \quad (6.17)$$

Derivando a equação (6.17) com relação a s temos

$$2k \frac{dk}{ds} = 2k_g \frac{dk_g}{ds}. \quad (6.18)$$

Assim, como k e k_g não se anulam, por (6.16) e (6.18) temos

$$\frac{dk_g}{ds} = 0 \Leftrightarrow \frac{dk}{ds} = 0 \Leftrightarrow \tau = 0.$$

Portanto, como k_g é monótona, $\frac{dk_g}{ds} \neq 0$ e assim γ não tem pontos de torção nula. Pela Proposição 20 temos que a projeção estereográfica $\pi : \mathbb{S}^2 - \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ leva pontos de torção nula de uma curva de $\mathbb{S}^2 - \{P\}$ em vértices de \mathbb{R}^2 . Assim, a curva $\pi(\gamma)$ não terá vértices, ou seja, a curvatura de $\pi(\gamma)$ será monótona. Além disso, $\pi(\gamma)$ tem curvatura nunca nula, pois, como π é difeomorfismo e leva círculos osculadores de γ

em círculos osculadores de $\pi(\gamma)$. Como γ tem círculos osculadores bem definidos em todos os pontos (pois $k \neq 0$), $\pi(\gamma)$ também terá círculos osculadores bem definidos em todos os pontos. Logo pela Definição 14, a curva $\pi(\gamma)$ é um arco espiral. \square

Seja γ um arco espiral em \mathbb{S}^2 , pelas Proposições 24 e 24 a curva $\pi(\gamma)$ satisfaz a propriedade de ninho, deste modo, os círculos osculadores de $\pi(\gamma)$ não se interceptam. Por este motivo e pela bijetividade da aplicação π^{-1} , os círculos osculadores de γ nunca se interceptam em \mathbb{S}^2 .

Seja $\gamma(s_0)$ um ponto da curva $\gamma \subset \mathbb{S}^2 - \{P\}$ e C seu círculo osculador. Sejam A e B as duas calotas em \mathbb{S}^2 determinadas por C (figura 6.7). Sabemos que $\pi(C)$ é um círculo em \mathbb{R}^2 . Como π é contínua, $\pi(A)$ está numa componente conexa deste círculo e $\pi(B)$ está na outra. Observamos que $B \cup C$ é compacto em \mathbb{S}^2 , como π é contínua, $\pi(B \cup C)$ é compacto em \mathbb{R}^2 . Logo $\pi(B)$ está contido no interior do círculo $\pi(C)$. Como π é difeomorfismo, $\pi(A)$ está contido no exterior do círculo $\pi(C)$.

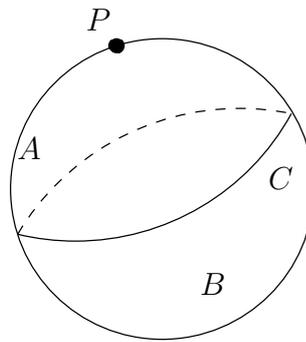


Figura 6.7: As calotas A e B determinadas por C

Por esta propriedade, aliada ao fato de $\pi(\gamma)$ satisfazer a propriedade de ninho, concluímos que os círculos osculadores de γ , além de não se interceptarem, estão dispostos em $\mathbb{S}^2 - \{P\}$ em uma ordem decrescente (ou crescente) de raios. Assim, temos que os círculos osculadores de γ satisfazem

Proposição 26. *Os círculos osculadores de um arco espiral de \mathbb{S}^2 têm a propriedade de ninho.*

Observamos que, se C é o maior círculo osculador de γ e C não é um grande círculo então, pela Proposição 26, todos os círculos osculadores de γ ficarão dispostos em ordem decrescente na menor calota determinada por C em \mathbb{S}^2 .

Precisamos de um último resultado antes de provarmos o teorema dos quatro vértices para curvas no espaço.

Proposição 27. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular fechada, então sua indicatriz tangente α_T não está contida em nenhuma semiesfera $\mathbb{S} \subset \mathbb{S}^2$.*

Demonstração. Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular fechada e $\alpha_T \subset \mathbb{S}^2$ sua indicatriz tangente. Suponha que α_T está em uma semiesfera $\mathbb{S} \subset \mathbb{S}^2$ que tem P como pólo. Então temos

$$P \cdot \alpha_T(s) > 0, \quad \forall s \in [a, b],$$

portanto,

$$\int_a^b P \cdot \alpha_T(s) ds > 0. \quad (6.19)$$

Como α é fechada temos

$$\alpha(b) - \alpha(a) = 0 \Rightarrow P \cdot (\alpha(b) - \alpha(a)) = 0.$$

Logo

$$0 = \int_a^b (P \cdot \alpha(s))' ds = \int_a^b P \cdot \alpha_T(s) ds,$$

o que é um absurdo por (6.19).

Assim, α_T não está contida em nenhuma semiesfera $\mathbb{S} \subset \mathbb{S}^2$. □

Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável p.c.a. fechada satisfazendo os itens 1, 2 e 3 do início desta seção com torção τ e curvatura k . Vamos considerar agora algumas notações sobre α :

V : número de mudanças de sinal de τ ;

K : número de mudanças de sinal de k ;

D : número de vértices de Darboux ordinários de α .

Vimos que, nos pontos onde $k \neq 0$ os vértices de Darboux coincidem com os pontos críticos de $\left(\frac{\tau}{k}\right)$ (também vimos que $\left(\frac{\tau}{k}\right)$ coincide com a curvatura geodésica da indicatriz tangente α_T). Observamos que nos pontos onde $k = 0$ o vetor de

Darboux está bem definido, neste caso, consideraremos os vértices de Darboux como sendo os pontos críticos de $\left(\frac{k}{\tau}\right)$, já que, pelo item 2 desta seção k e τ não se anulam simultaneamente. Com esta notação temos o seguinte resultado.

Teorema 10. *Para uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ fechada nas condições 1, 2 e 3 mencionadas anteriormente tem-se:*

$$K + V + D \geq 4.$$

Demonstração. Observamos que a torção (τ) de α é contínua e periódica, portanto, o número de vezes que τ muda de sinal é par, ou seja, V é par. Vamos demonstrar para os casos $K = 0$, $K = 1$ e $K \geq 2$ separadamente.

Caso 1.1. $K = 0, V = 0$. Neste caso devemos mostrar que $D \geq 4$.

Observamos que a curvatura k e a torção τ são periódicas e não mudam de sinal, portanto a função $\frac{\tau}{k}$ também é periódica e não muda de sinal. Deste modo, $\frac{\tau}{k}$ tem um número par de pontos críticos (considerando que os pontos onde $k = 0$ e $\tau \neq 0$ analisamos a função $\frac{k}{\tau}$), portanto D é par.

Se $\frac{\tau}{k}$ é constante, pela Proposição 11, a curva α representa uma hélice em \mathbb{R}^3 , deste modo, a indicatriz tangente α_T de α é um círculo em \mathbb{S}^2 . Como o caso $\tau \equiv 0$ não é considerado pelo item 3 então, pela Proposição 9, α_T não é um grande círculo. Portanto, pela Proposição 27, α não pode ser uma curva fechada, sendo assim, não podemos ter $\frac{\tau}{k}$ constante.

Como D é par, suponhamos agora que $D = 2$, então $\frac{\tau}{k}$ tem dois extremos que dividem α_T em dois arcos L_1 e L_2 , ambos com curvatura geodésica monótona não constante. Podemos orientar \mathbb{S}^2 de modo que a curvatura geodésica k_g de α_T não seja negativa. Chamando de k_1 a curvatura da curva α_T temos

$$k_1^2 = k_g^2 + 1.$$

Se tomarmos C_0 o círculo osculador a α_T no ponto onde k_g é de mínimo temos, pela igualdade anterior, que a curvatura k_1 de α_T também é mínima e C_0 é o maior dos círculos osculadores. Assim, pela Proposição 26 todos os círculos osculadores de L_1 e L_2 ficarão de um mesmo lado com relação a C_0 e, além disto, se C_0 não é um grande círculo, eles ficam do lado menor devido a monotonicidade de $\frac{\tau}{k}$. Assim, a imagem

de α_T estaria contida em um hemisfério e, pela Proposição 27, α não poderia ser uma curva fechada.

Concluimos então que $D \geq 4$ e portanto

$$K + V + D \geq 4.$$

Caso 1.2. $K = 0, V \geq 2$. Neste caso a função τ muda de sinal no mínimo duas vezes. Como k não muda de sinal então $\frac{\tau}{k}$, além de ser periódica, muda de sinal nos mesmos pontos onde τ muda de sinal e portanto, $\frac{\tau}{k}$ tem no mínimo dois extremos. Assim $D \geq 2$ e $K + V + D \geq 4$.

Caso 2. $K = 1, V = 0$. Neste caso devemos provar que $D \geq 3$. Sejam $\alpha(s_0)$ o ponto onde k muda de sinal e $\beta : [s_1, s_1 + r] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de α onde $\beta(s_1) = \alpha(s_0)$. Observamos que no arco $A = \beta(s_1, s_1 + r)$ a curvatura k não muda de sinal. Logo, próximo a s_1 e a $s_1 + r$, $\frac{\tau}{k}$ tende a $+\infty$ ou $\frac{\tau}{k}$ tende a $-\infty$. Assim, D é ímpar.

Vamos mostrar que não poderá ocorrer $D = 1, V = 0$. Com isso teremos $D \geq 3$ ou $D = 1$ e $V \geq 2$, o que significaria, em qualquer um destes casos, que $K + V + D \geq 4$.

De fato, se $D = 1$ e $V = 0$, considere P o ponto onde $\frac{\tau}{k}$ tem um extremo. O arco A é dividido por P em dois subarcos A_1 e A_2 com $\frac{\tau}{k}$ monótona. Se $\frac{\tau}{k} \rightarrow +\infty$ quando $s \rightarrow s_1$ (figura 6.7), então $\frac{\tau}{k}$ atinge mínimo em P . Assim, de modo análogo ao caso 1.1 todos os círculos osculadores à indicatriz tangente β_T ficam na menor calota determinada por C_P , onde C_P é o círculo osculador a β_T em P . Se $\frac{\tau}{k} \rightarrow -\infty$ quando $s \rightarrow s_1$ (figura 6.7), então k_g atinge máximo em P mas, como k_g é sempre negativa, o círculo osculador C_P é de raio máximo. Portanto, pela Proposição 26 todos os círculos osculadores ficam no menor hemisfério determinado por C_P . Desta forma, β_T fica num hemisfério, o que é impossível pela Proposição 27. Assim $D \geq 1$ e $K + V + D \geq 4$.

Caso 3. $K \geq 2$. Considerando um subarco entre sucessivas mudanças de sinal de k temos que este subarco contém um extremo de $\frac{\tau}{k}$ ou uma mudança de sinal de $\frac{\tau}{k}$ (que é uma mudança de sinal de τ). Como existem no mínimo dois destes subarcos então $V + D \geq 2$ e $V + K + D \geq 4$. Podemos visualizar este caso na figura 6.10 onde $\frac{\tau}{k}$ tem dois extremos, ou seja, $D = 2$. \square

Como consequência dos Teoremas 9 e 12 obtemos o seguinte corolário.

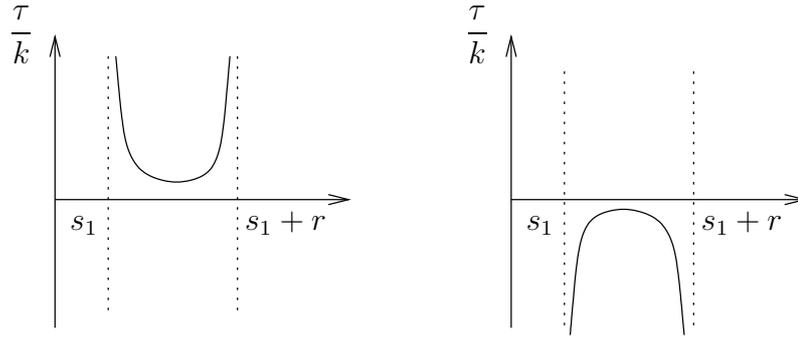


Figura 6.8: Possíveis gráficos de $\frac{\tau}{k}$ para o caso 2

Corolário 4. *As curvas (q, p) sobre o toro T_a com*

$$\frac{2n^2 + 1}{(n^2 - 1)} < a < (n^2 + 1),$$

possuem pelo menos 4 vértices de Darboux ordinários.

6.3.1 Exemplos

Nesta subseção ilustraremos alguns casos que aparecem na demonstração do Teorema 10 procurando relacionar K, V e D com as singularidades das indicatrizes tangente, binormal e de Darboux, como observado nos itens *a), b)* e *c)* da Proposição 23. Estudaremos os exemplos nos quais $K + V + D = 4$. Para isto consideraremos as curvas (q, p) no toro estudadas na seção 6.1 deste capítulo.

Consideraremos inicialmente a curva $(1, 2)$ no toro parametrizada por

$$\alpha(t) = ((a + \cos(2t)) \cos(t), (a + \cos(2t)) \sin(t), \sin(2t)), \quad \text{com } 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Figura 6.9: A curva $(1, 2)$ com $a = 4$ e sua indicatriz de Darboux

6.1. Se $a = 4$ temos pelo Teorema 7 que $K = V = 0$. Segue então do Corolário 4 que $D \geq 4$. Na figura 6.9, a indicatriz de Darboux tem 4 cúspides portanto, pela Proposição 23, $D = 4$.

6.2. Se $a = 5$ podemos observar na figura 6.10 que a indicatriz tangente da curva $(1, 2)$ apresenta dois pontos de cúspide. Além disto, o gráfico de $\frac{\tau}{k}$ nos mostra que esta aplicação tem dois extremos, portanto $D = 2$. Assim, $K = D = 2$ e $K + V + D = 4$.

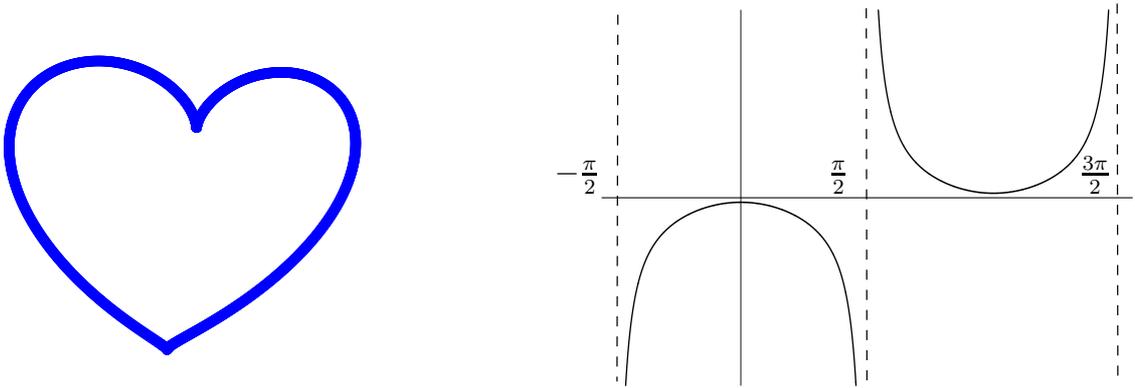


Figura 6.10: A indicatriz tangente e o gráfico de $\frac{\tau}{k}$ da curva $(1, 2)$ com $a = 5$

Agora consideremos a curva $(1, 1)$ o toro que pode ser visualizada na figura 6.11.

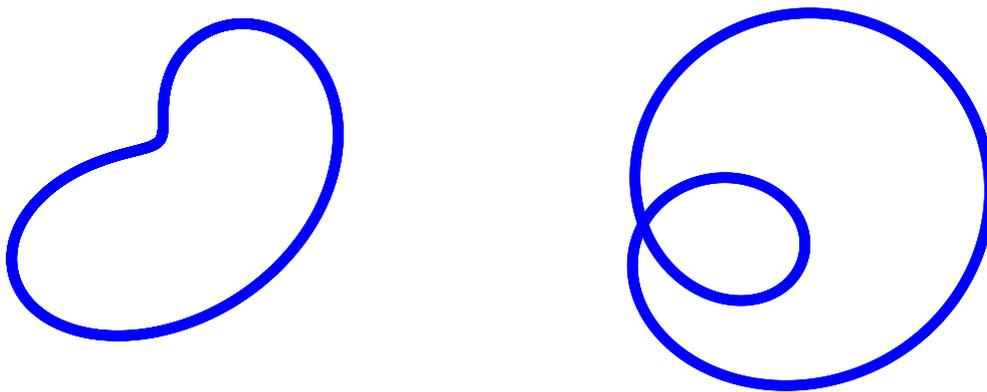


Figura 6.11: Curva $(1, 1)$ no toro com $a = 1$ e sua indicatriz tangente

6.3. Consideramos a curva $(1, 1)$ com $a = 1$, temos que $K = 0$ pois a indicatriz tangente neste caso não tem pontos de cúspide (figura 6.11). As indicatrizes binormal e de Darboux, como podemos observar na figura 6.12, apresentam dois pontos de cúspide, portanto $V = D = 2$ e $V + K + D = 4$.

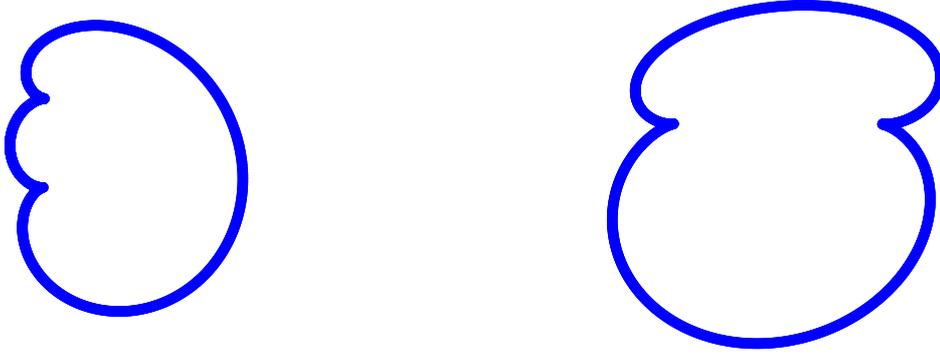


Figura 6.12: Indicatriz binormal e de Darboux da curva $(1, 1)$ com $a = 1$

6.4. Consideramos agora a curva $(1, 1)$ com $a = 2$ parametrizada por

$$\alpha(t) = (2 + \cos(t)) \cos(t), (2 + \cos(t)) \sin(t), \sin(t), \quad \text{com } \pi \leq t \leq 3\pi.$$

Podemos visualizar na figura 6.13 que a indicatriz tangente de α tem um ponto de cúspide, portanto $K = 1$. Observamos que, na parametrização desta curva, consideramos o intervalo $[\pi, 3\pi]$ já que a curvatura é nula em π , assim, como na demonstração do caso 2 do Teorema 10, temos que a curvatura não muda de sinal (figura 6.14). Como podemos visualizar na figura 6.13 a torção de α muda de sinal duas vezes, portanto $V = 2$. A indicatriz de Darboux (figura 6.14) tem um ponto de cúspide, portanto $D = 1$. Assim $V + K + D = 4$.

A tabela 6.1 relaciona os casos da demonstração do Teorema 10 com os exemplos vistos nesta seção.

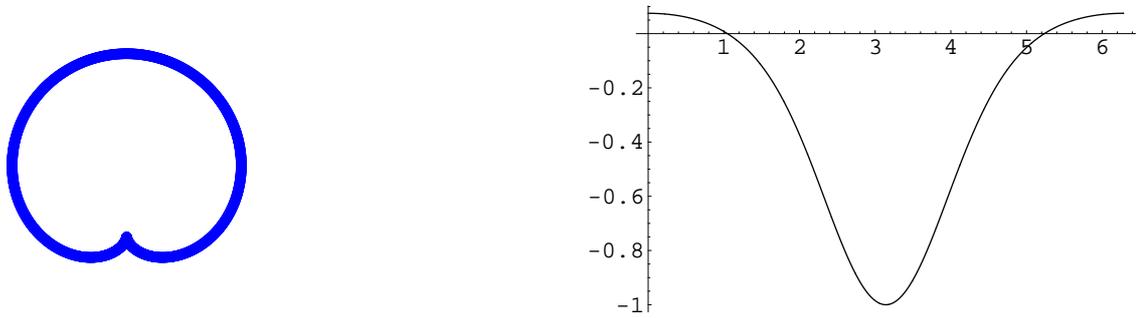


Figura 6.13: Indicatriz tangente e gráfico da torção da curva $(1, 1)$ com $a = 2$



Figura 6.14: Indicatriz de Darboux e gráfico da curvatura da curva $(1, 1)$ com $a = 2$

Caso	K	V	D	Exemplo
1.1	0	0	4	6.1
1.2	0	2	2	6.3
2	1	2	1	6.4
3	2	0	2	6.2

Tabela 6.1: Os casos do Teorema 10 e os exemplos da subseção 6.3.1.

Conclusão

Neste trabalho estudamos alguns resultados relativos a pontos helicoidais de curvas em \mathbb{R}^n e vimos a relação que existe entre estes pontos e os vértices de Darboux. Uma das principais contribuições do trabalho diz respeito às demonstrações do Teorema 3 do Capítulo 5 e da Proposição 23 do Capítulo 6. A análise destes resultados utilizou os conceitos de teoria de singularidades (estudados no Capítulo 4) e proporcionou uma visualização geométrica dos pontos helicoidais ordinários, dos vértices de Darboux e dos pontos de aplainamento ordinário de uma curva no espaço. Deste modo, foi possível relacionar o Teorema 10 (a versão do teorema dos quatro vértices no espaço estudada no trabalho) com o estudo das cúspides nas indicatrizes tangente, binormal e de Darboux.

Uma perspectiva de continuidade deste trabalho seria a extensão dos conceitos de ponto helicoidal e vértice de Darboux para curvas em variedades riemannianas.

Referências Bibliográficas

- [1] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J., *Curves and singularities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [2] BRÖCKER, T.; LANDER, L., *Differentiable germs and catastrophes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975, (London Math. Soc.Lecture Notes 17).
- [3] CARMO, M.P., *Differential geometry of curves and surfaces*,New Jersey, Editora Prentice-Hall, 1976.
- [4] COSTA, S. I. R., On closed twisted curves, *Proc. Amer. Math. Soc.*,v. 109 ,p. 205-214, 1990.
- [5] COSTA, S. I. R., Romero-Fuster, M.C., Nowhere vanishing torsion closed curves always hide twice, *Geometriae Dedicata*,v. 66 ,p. 1-14, 1997.
- [6] CODESAL, E. S., *Aplicaciones del contacto con p-esferas al estudio de invariantes conformes*.2003.128f. Tese (Doutorado em Matemática)- Universidade de Valência, Valência, 2003.
- [7] DARBOUX ,G.,*Leçons sur la théorie des surfaces*, Paris, Paris Gauthier- Villars, 1887, v.1, Cap.1.
- [8] FENCHEL, W., The differential geometry of closed space curves, *Bull. Am.Math. Soc.*, v. 57, p. 44-54, 1951.
- [9] GLUCK, H., Higher curvatures in Euclidian Space, *Amer Math. Monthly*, v. 73, p. 699-704, 1966.
- [10] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V., *Stable mappings and their singularities*, New York, Editora Springer- Verlag , 1973.

- [11] HEIL, E., A four-vertex theorem for space curves, *Mathematica Pannonica*, v. 10, p. 123-132, 1999.
- [12] KNESER, A., Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung geschlossener Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht-euklidischen Geometrie, *Festschrift H. Weber*, p. 170-180, 1912.
- [13] KREYSZIG, E., *Differential geometry*, New York, Editora Dover, 1991.
- [14] MONTALDI, J. A., On contact between submanifolds, *Michigan Math. J.*, v. 33, p. 195-199, 1986.
- [15] OSSERMAN, R., The four or more vertex theorem, *Amer. Math. Monthly*, v. 92, p. 332-337, 1985.
- [16] PANSONATO, C. C., Propriedades globais de curvas no espaço. 1995.121f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.
- [17] ROGEN, P., Principal normal indicatrices of closed space curves, *Geometriae Dedicata*, v. 74, p. 49-60, 1999.
- [18] ROMERO-FUSTER, M. C., Convexly generic curves in \mathbb{R}^3 , *Geometriae Dedicata*, v. 28, p. 7-29, 1988.
- [19] ROMERO-FUSTER, M. C.; SEDYKH, V. D., On the number of singularities, zero curvature points and vertices of a simple convex space curve, *J. Geom.* v. 52, p. 168-172, 1995.
- [20] ROMERO-FUSTER, C., SANABRIA-CODESAL E., Generalized helices, twistings and flattenings of curves in n-space, *Mat. Cont.* v. 17, p. 267-280, 1999.
- [21] SEDYKH, V. D., The theorem about four vertices of a convex space curve (in Russian), *Funktsional Anal. i Prilozhen* v. 26, p. 237-297, 1992.
- [22] SEGRE, B., Alcune proprietà differenziale in grande delle curve chiuse sghembe, *Rend. Mat.*, v. 6, p. 237-297, 1968.
- [23] TENEBLAT, K., *Introdução à geometria diferencial*, Brasília, Editora UnB, 1990.

- [24] URIBE-VARGAS, R., *Singularités symplectiques et de Contact en géométrie différentielle des Courbes et des Surfaces*.2001.188f. Tese (Doutorado em Matemática)- Universidade de Paris, Paris, 2001.
- [25] URIBE-VARGAS, R., On singularities, “Perestroikas” and differential geometry of space curves, *L’Enseignement Mathématique*, v.50, p. 69-101, 2004.