



Dissertação de Mestrado

Autofunções e Frequências de Vibração do Modelo Euler-Bernoulli para Vigas Não-Clássicas.

Dionéia Migotto

PPGMat

Santa Maria, RS, Brasil

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Autofunções e Frequências de Vibração do Modelo Euler-Bernoulli para Vigas Não-Clássicas.

Dionéia Migotto

Dissertação realizada sob a orientação da Prof^a. Dr^a. Rosemaira Dalcin Copetti, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da USFM, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Santa Maria, RS, Brasil
2011

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação:

**Autofunções e Frequências de Vibração do
Modelo Euler-Bernoulli para Vigas Não-Clássicas.**

elaborada por
Dionéia Migotto

Como requisito parcial para a obtenção do título de
MESTRE EM MATEMÁTICA

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof^a. Dr^a. Rosemaira Dalcin Copetti - Orientadora, UFSM

Prof. Dr. Júlio C. R. Claeysen, UFRGS

Prof. Dr. Antonio Carlos Lyrio Bidel, UFSM

Santa Maria, 18 de julho de 2011.

Dedicatória

*Aos meus pais, por todo amor, carinho que sempre tiveram por mim,
pela confiança e apoio sempre demonstrado;*

*À minha orientadora Prof^a. Dr^a. Rosemaira Dalcin Copetti pelo incentivo,
dedicação, compreensão e carinho.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me dar à vida, saúde e força para que eu pudesse realizar este trabalho tão sonhado.

Aos meus pais Dionér e Iara, pois com muito esforço garantiram que eu tivesse uma boa formação acadêmica, por todo amor e confiança que sempre tiveram por mim.

Agradeço em especial minha orientadora professora Rosemaira Dalcin Copetti, por suas ações docentes, pela sua paciência, carinho, amizade e disponibilidade dispensados durante a elaboração desta dissertação.

Ao PPGMat e aos professores do programa que ministraram as aulas durante o curso, emprestando seus saberes. Agradeço ao Prof. Dr. Antonio Carlos Lyrio Bidel pelas correções realizadas no texto e pelo carinho durante essa etapa de minha vida.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, a minha amiga Daniela de Rosso Tolfo pelo apoio e ajuda com o programa Maple.

Ao meu namorado Michel, pelo constante incentivo e por toda paciência, compreensão e carinho demonstrado.

À Universidade Federal de Santa Maria e a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para o meu sucesso.

Resumo

Este trabalho apresenta uma metodologia para determinar as autofunções e as frequências de um modelo Euler-Bernoulli para vigas elásticas que podem incluir amortecimento e dispositivos localizados num ponto intermediário ou nos extremos da viga. As autofunções ou modos de vibração da viga são obtidos usando uma base de solução gerada pela solução dinâmica de uma equação diferencial de quarta ordem, através de uma formulação matricial em blocos para as condições de contorno e de compatibilidade. O uso da base dinâmica tem sido frequentemente utilizada para reduzir os cálculos na obtenção dos modos e das frequências. Respostas forçadas são obtidas usando o método de Galerkin, modificando a análise modal clássica com a inclusão de novas condições de ortogonalidade entre os modos que são adequadas para problemas com amortecimento viscoso ou com condições de contorno não-clássicas.

Palavras-chave: Viga Euler-Bernoulli, Frequências Naturais e Modos de Vibração, Base Dinâmica, Condições de Contorno Não-Clássicas, Método de Galerkin.

Abstract

This paper presents a methodology for determining eigenfunctions and frequencies of the Euler-Bernoulli model for elastic beams that can include damping and devices located at intermediate or end points of the beam. The eigenfunctions or vibration modes of the beam are obtained by using solution basis generated by the dynamic solution of a fourth-order differential equation, through a block matrix formulation of the boundary and compatibility conditions. The use of the dynamic basis has been often used to reduce the calculations in obtaining the modes and frequencies. Forced responses are obtained with the Galerkin method by modifying the classical modal analysis with the inclusion of new conditions of orthogonality between modes that are suitable for problems with viscous damping or non-classical boundary conditions.

Keywords: Euler-Bernoulli Beam, Natural Frequency and Vibration Modes, Dynamic Basis, Non-Classical Boundary Conditions, Galerkin method.

Sumário

1	Introdução	18
1.1	Contextualização do Problema	19
1.2	Objetivos e Justificativa	20
1.3	Revisão Bibliográfica	21
1.4	Organização do Trabalho	23
1.5	Contribuição do Trabalho	24
2	Equação da Viga Euler-Bernoulli	25
2.1	Introdução	25
2.2	Modelos Matemáticos para a Equação da Viga	25
2.2.1	Euler-Bernoulli	25
2.2.2	Vlasov	26
2.2.3	Timoshenko	26
2.3	Equações de Lagrange	27
2.4	Princípio de Hamilton	29
2.5	Equação de Euler-Bernoulli	32
2.6	Condições de Contorno Clássicas	34
2.6.1	Viga com extremidade Fixa:	35
2.6.2	Viga com extremidade Livre:	35
2.6.3	Viga com extremidade Apoiada:	36
2.6.4	Viga com extremidade Deslizante:	36
2.7	Condições de Contorno Não-clássicas	38
2.7.1	Viga com uma mola anexada na extremidade $x = 0$:	38
2.7.2	Viga com um amortecedor anexado na extremidade $x = 0$:	38
2.7.3	Viga com uma massa anexada na extremidade $x = 0$:	39
3	Modelos de Vigas Euler-Bernoulli	40
3.1	Introdução	40
3.2	Um Modelo de Viga Euler-Bernoulli Segmentada com Dispositivos Anexados em um Ponto Intermediário e em $x=L$	40
3.2.1	Descrição do modelo	40
3.2.2	Análise modal	42

3.2.3	Formulação em blocos	44
3.2.4	A Base fundamental	46
3.2.5	Simulações - Modelo de viga Euler-Bernoulli segmentada com dispositivos anexados em um ponto intermediário e em $x=L$	48
3.3	Um Modelo de Viga Euler-Bernoulli com Amortecimento Viscoso e Dispositivos Anexados em $x=L$	55
3.3.1	Descrição do modelo	55
3.3.2	Resposta Forçada	57
3.3.3	Simulações - Modelo de viga Euler-Bernoulli com amortecimento viscoso e dispositivos anexados em $x=L$	62
4	Conclusão	68

Lista de Símbolos

A	Área da seção transversal
a_{ik}, a_i, a_0	Coefficientes funções de t, q_1, q_n
B	Matriz de contorno
C	Coefficiente de amortecimento
$\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{K}$	Operadores diferenciais
E	Módulo elástico de Young
EI	Rigidez flexural
$f(t)$	Vetor de forças externas
F	Força externa
f	Força Ativa
$\sum f$	Somatório das forças ativas
G	Módulo de elasticidade transversal
$h(t)$	Resposta impulso evolutiva
h', h'', h'''	Derivada espacial de h
i	Unidade complexa
I	Matriz identidade
J, I	Momento de inércia
k_G	Coefficiente de cisalhamento
K	Coefficiente de rigidez
L, l	Comprimento
M	Coefficiente de massa
m	Massa
q_i	Coordenadas generalizadas
\dot{q}_i	Velocidades generalizadas
r	Vetor posição
t	Tempo
T, T_1, T_2	Energia cinética
V	Energia Potencial
W_{nc}	Trabalho virtual

w	Deslocamento
α	Atrito viscoso
β	Atrito material
δr	Varição do vetor posição
$\delta(t)$	Função delta de Dirac
Δ	Determinante característico
λ, β	Autovalores
Φ, Ψ	Matrizes modais
ρ	Densidade linear

Lista de Figuras

2.1	Elemento diferencial para viga Euler-Bernoulli	33
2.2	Viga fixa em $x = 0$	35
2.3	Viga livre em $x = 0$	35
2.4	Viga apoiada em $x = 0$	36
2.5	Viga deslizante em $x = 0$	36
2.6	Viga fixa-livre	37
2.7	Viga livre-apoiada	38
2.8	Viga com mola em $x = 0$	38
2.9	Viga com amortecedor em $x = 0$	38
2.10	Viga com massa em $x = 0$	39
3.1	Viga fixa-livre com dispositivos em $x=L$	41
3.2	Primeiro modo de vibração - (a), (b), (c): (<i>linha pontilhada</i>) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (<i>linha contínua</i>) viga fixa com dispositivos anexados.	52
3.3	Primeiro modo de vibração - (d), (e), (f): (<i>linha pontilhada</i>) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (<i>linha contínua</i>) viga fixa com dispositivos anexados.	52
3.4	Segundo modo de vibração - (a), (b), (c): (<i>linha pontilhada</i>) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (<i>linha contínua</i>) viga fixa com dispositivos anexados.	53
3.5	Segundo modo de vibração - (d), (e), (f): (<i>linha pontilhada</i>) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (<i>linha contínua</i>) viga fixa com dispositivos anexados.	53
3.6	Terceiro modo de vibração - (a), (b), (c): (<i>linha pontilhada</i>) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (<i>linha contínua</i>) viga fixa com dispositivos anexados.	53
3.7	Terceiro modo de vibração - (d), (e), (f): (<i>linha pontilhada</i>) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (<i>linha contínua</i>) viga fixa com dispositivos anexados.	54
3.8	Quarto modo de vibração - (a), (b), (c): (<i>linha pontilhada</i>) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (<i>linha contínua</i>) viga fixa com dispositivos anexados.	54

3.9	Quarto modo de vibração - (d), (e), (f): (<i>linha pontilhada</i>) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (<i>linha contínua</i>) viga fixa com dispositivos anexados	54
3.10	Viga fixa em $x=0$ e com dispositivos em $x=L$	55
3.11	Primeiro e segundo modos de vibração da viga com e sem dispositivos em $x=L$ - Parte real	63
3.12	Terceiro e quarto modos de vibração da viga com e sem dispositivos em $x=L$ - Parte real	63
3.13	Primeiro e segundo modos de vibração da viga com dispositivos em $x=L$ - Parte imaginária	64
3.14	Terceiro e quarto modos de vibração da viga com dispositivos em $x=L$ - Parte imaginária	64
3.15	Primeiro e segundo modos de vibração da viga com $M=30$, $C=4$ e $K=8$ e sem dispositivos em $x=L$ - Parte real	66
3.16	Terceiro e quarto modos de vibração da viga com $M=30$, $C=4$ e $K=8$ e sem dispositivos em $x=L$ - Parte real	66
3.17	Primeiro e segundo modos de vibração da viga com $M=30$, $C=4$ e $K=8$ em $x=L$ - Parte imaginária	67
3.18	Terceiro e quarto modos de vibração da viga com $M=30$, $C=4$ e $K=8$ em $x=L$ - Parte imaginária	67

Lista de Tabelas

3.1	Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 0, \beta_M = 0$	49
3.2	Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 0.5, \beta_M = 1.0$	49
3.3	Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 1.5, \beta_M = 8.0$	49
3.4	Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 3.0, \beta_M = 10.0$	49
3.5	Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 5.0, \beta_M = 0$	50
3.6	Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 0, \beta_M = 10.0$	50
3.7	Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 8.0, \beta_M = 15.0$	50
3.8	Autovalores (λ) da viga com amortecimento viscoso e dispositivos em x=L	62

Capítulo 1

Introdução

O estudo de vibrações tem sido objeto de várias pesquisas [3, 24, 30, 36, 41], mais recentemente [23, 34, 40, 43, 45, 47], devido a sua importância em várias áreas do conhecimento, como por exemplo, em projeto de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas, sistemas de controle, cabos de linhas de transmissão, eixos rotores de turbo de máquinas, pás de turbinas, ventiladores, bombas, asas de aeronaves, pórticos, pontes, automóveis, entre outros. Em particular, para o estudo de vibrações em vigas, vários métodos e modelos matemáticos têm sido desenvolvidos. Modelos matemáticos relativamente simples, podem ser usados com resultados bastante satisfatórios, como é o caso de vibrações em vigas modeladas pela teoria de Euler-Bernoulli, [4, 19, 25, 28, 29, 39, 40, 47, 50].

Vibrações em sistemas podem ocorrer devido a forças externas, ditas vibrações forçadas ou mesmo na ausência de forças externas, ditas vibrações livres. Vibração livre é aquela que ocorre quando o sistema vibra somente devido a uma perturbação inicial, matematicamente, devido as condições iniciais não nulas do problema de valor inicial ou devido a uma excitação do tipo impulso. A resposta do problema homogêneo devido a vibração livre é denominada solução homogênea, solução estacionária ou solução transiente. Quando se avalia vibrações mecânicas a solução homogênea é a principal característica a ser investigada, pois a partir dela obtém-se as frequências, os fatores de amortecimento e os modos de vibração.

Existem diferentes tipos de vibrações que são experimentadas todos os dias. Seus efeitos são tanto desejáveis quanto indesejáveis. Dentre os indesejáveis citam-se os ruídos, interferências em equipamentos ou máquinas, aceleração no desgaste, redução na vida útil, etc. Apesar de seus efeitos danosos, a vibração pode ser utilizada a favor em várias aplicações industriais e de consumo. As aplicações de equipamentos vibratórios aumentaram consideravelmente nos últimos anos. Por exemplo, a vibração aparece em esteiras transportadoras, tremonhas, peneiras compactadores, máquinas de lavar, escovas de dentes elétricas, brocas odontológicas, relógios, unidades de massagem elétrica, bate estacas, etc. Além destas, tem-se, por exemplo, instrumentos de corda são instrumentos musicais cuja fonte primária de som é a vibração.

Sempre que a frequência natural de vibração de uma máquina ou estrutura coincidir com a frequência da excitação externa ocorre um fenômeno conhecido como ressonância, tendo como consequência em deflexões excessivas e falhas. A literatura está repleta de relatos de falhas de sistemas causados por ressonância e vibração excessiva de componentes do sistema, [43, 41, 36, 30].

Neste trabalho considera-se dois modelos de vigas Euler-Bernoulli de comprimento L . O primeiro modelo é uma viga bi-segmentada com um dispositivo tipo mola anexado num ponto intermediário da viga. No outro, considera-se a viga com amortecimento viscoso, e na extremidade $x = L$ da viga, anexa-se dispositivos tipo massa, mola e amortecedor.

Para avaliar as características de vibração do sistema, um procedimento importante é investigar as frequências naturais e os modos de vibração. As frequências e os modos de vibração da viga são obtidos através do método modal, que gera uma equação diferencial de quarta ordem, cuja solução é escrita em termos da solução fundamental, solução de um problema de valor inicial. As condições iniciais do problema reduzem o número de constantes necessárias para expressar os modos de vibração, [5, 7].

Problemas com amortecimento são importantes de ser considerados na análise de vibrações uma vez que o amortecimento está presente em praticamente todos os sistemas mecânicos. Neste trabalho consideramos vigas com amortecimento viscoso.

Uma vez que a obtenção das frequências naturais, do amortecimento e dos modos de vibração, os chamados parâmetros modais, são praticamente impossíveis de serem obtidos experimentalmente, devido por exemplo ao alto custo, é cada vez mais importante a obtenção de bons modelos matemáticos e teorias que nos forneçam resultados cada vez mais precisos.

O estudo é realizado a partir de uma formulação em blocos, introduzida por Tsukazan, [48]. Esta formulação permite escrever o problema de autovalores de maneira compacta. A solução da equação modal é escrita em termos da base dinâmica, [5, 7] gerada pela solução de uma equação diferencial de quarta ordem.

1.1 Contextualização do Problema

Toda análise dinâmica, independente de seu grau de sofisticação, tem sua base no estudo do mais elementar modelo de sistema oscilatório, o sistema massa-mola de 1 grau de liberdade, cuja solução é a conhecida onda harmônica. Vibrações livres de sistemas de vários graus de liberdade podem ser dadas como superposição de sistemas harmônicos elementares, [43].

O estudo de vibrações começa a despertar interesse a partir da descoberta dos primeiros instrumentos musicais, provavelmente o ápitio ou o tambor. Por vibração ou oscilação, entende-se como sendo qualquer movimento repetitivo.

Um dos primeiros aparatos criados para o estudo de vibrações, o sismógrafo, foi

inventado pelo chinês Zhang Heng em 132 d.C, diante da necessidade de desenvolver um instrumento para medir, com alguma precisão a intensidade de terremotos.

Galileu Galilei (1564-1642) é considerado o fundador da ciência experimental moderna. No século XVII d.C. os fundamentos da filosofia e da ciência moderna foram lançados. Galileu teve a idéia de estudar o comportamento de um pêndulo simples observando os movimentos pendulares de uma lâmpada em uma igreja de Pisa. Em *Discourses concerning two new sciences*, publicado em 1638, Galileu descreveu a dependência entre a frequência, a vibração e o comprimento de um pêndulo simples, juntamente com o fenômeno da ressonância. Com base em seus experimentos, publicou, em 1590, o famoso tratado “De Motu Gravium” que representa o início da dinâmica como conhecemos. Com essa publicação, Galileu estabelece os fundamentos da dinâmica e modifica a compreensão dos fenômenos naturais observados, até então explicados por Aristóteles (384-322 a.C), [43].

Joseph Sauveur (1653-1716) na França, e John Wallis (1616-1703) na Inglaterra observaram, independentemente, o fenômeno de forma modais e constataram que certos pontos de uma corda esticada em vibração permanecem sem movimento algum e outros pontos intermediários apresentam grandes movimentos.

A vibração de vigas delgadas apoiadas e fixas foram estudadas pela primeira vez em 1744 por Leonard Euler (1707-1783) e em 1751 por Daniel Bernoulli (1700-1782). Desta forma a abordagem ficou conhecida como a teoria de Euler-Bernoulli ou da viga delgada.

1.2 Objetivos e Justificativa

Este trabalho apresenta uma metodologia para determinar as frequências naturais e os modos de vibração de vigas tipo Euler-Bernoulli segmentadas ou não, com ou sem amortecimento viscoso com condições de contorno clássicas ou não-clássicas, usando a base dinâmica.

A expansão modal é uma técnica usada para análise transiente de sistemas. Porém, ela é limitada a sistemas clássicos que possuem a propriedade dos modos normais, [9, 13]. Para sistemas não clássicos, que incluem efeito de amortecimento, ou não simétricos, ou ainda com condições de contorno não clássicas esta técnica não é geralmente aplicada pois, os modos não são necessariamente ortogonais.

A maioria das atividades humanas envolve vibração de uma forma ou de outra. Por exemplo, ouvimos porque nossos tímpanos vibram, e vemos porque as ondas de luz sofrem vibração. A respiração está associada à vibração dos pulmões, e andar envolve movimento oscilatório ou periódico de pernas e mãos. Falamos devido ao movimento oscilatório da laringe e da língua. Estes são exemplos de vibrações desejáveis. Mas vibrações também podem causar desconforto as pessoas. Por exemplo, a vibração e o ruído gerados por motores, a vibração em painéis, em rodas dos

carros, e tantas outras. Mesmo no caso de vibrações desejáveis, elas precisam ser controláveis, caso contrário podem se tornar indesejáveis.

Resolver problemas que envolvem amortecimento pode ser um enorme desafio, pois os sistemas mecânicos podem dissipar energia de formas diferentes. O mais comum é considerar um modelo de amortecedor com amortecimento viscoso.

O objetivo principal deste trabalho é determinar as frequências e os modos de vibração de sistemas modelados pela teoria de Euler Bernoulli usando a análise modal. Uma base composta pela resposta dinâmica e suas derivadas até terceira ordem é usada para escrever a solução da equação diferencial ordinária de quarta ordem que descreve a forma dos modos.

A solução dinâmica ou resposta fundamental, solução de uma equação diferencial de quarta ordem com condições iniciais impulsivas, tem sido utilizada em vários trabalhos [1, 2, 10, 12, 15, 21, 22, 31, 32, 33, 35, 49, 48] modeladas tanto pela teoria de Euler Bernoulli como Timoshenko.

Este trabalho justifica-se pela necessidade de desenvolvimento de pesquisas que permitam investigar o comportamento de sistemas que envolvem vibrações, com isso será possível diminuir o nível de vibração excessivo dos sistemas mecânicos o que pode comprometer o correto funcionamento destes, além de prejudicar o conforto humano e diminuir a vida útil do sistema.

1.3 Revisão Bibliográfica

Os primeiros estudos da área de vibração concentraram seus esforços no entendimento dos fenômenos naturais e no desenvolvimento de teorias matemáticas para descrever a vibração de sistemas físicos.

A literatura sobre as teorias de vigas, formulação Euler-Bernoulli, é muito vasta e por este motivo alguns poucos livros ou artigos serão citados.

De acordo com Timoshenko, (1878-1972), o estudo da vibração de viga teve início no século XVIII com trabalhos de membros da família Bernoulli e Leonard Euler (1707-1783). Em 1744, Euler publicou o livro "Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes". Nesse livro, Euler obtém a solução da equação diferencial do movimento transversal da vibração de vigas prismáticas, bem como as frequências naturais e os modos de vibração de vigas em balanço, simplesmente apoiada, bi-engastada e de extremidades livres.

Mais recentemente, em Inman [30], encontra-se o equacionamento do modelo de viga de Euler-Bernoulli e suas frequências com aplicações em casos clássicos. Da literatura, [30], obtém-se a equação diferencial de quarta ordem que rege uma viga engastada-livre e as condições de contorno para esses casos.

Gürgöze [25] apresenta dois métodos para determinar as frequências e os modos de vibração de uma viga multisegmentadas com amortecimento viscoso. No primeiro método a equação característica do modelo é reduzida usando as condições

de contorno. O segundo método é referido na literatura como método da matriz de transferência.

No trabalho de Naguleswaran [39] é considerado um modelo de viga bi-segmentada com condições de contorno clássicas em ambas as extremidades. Para este modelo foi obtido as três primeiras frequências naturais, a sensibilidade e os modos de vibração considerando-se diferentes áreas da seção transversal.

Em Chang et al. [4] a Transformada de Laplace é usada para determinar os autovalores de uma viga simples uniforme, considerando massas, molas e amortecedores viscosos localizados no centro da viga.

No trabalho de Sorrentino et al. [47] as frequências e os modos de vibração de uma viga com amortecimento não-proporcional são obtidos por uma formulação de espaço de estado junto com a técnica da matriz de transferência.

O método de separação de variáveis é usado por Friswell e Lees [19] para obter os autovalores de uma viga bi-segmentada não homogênea, amortecida, sem dispositivos intermediários, com condições de contorno apoiada nas duas extremidades.

No trabalho [25] Gürögze usa o método de Dunkerley para determinar a frequência fundamental de uma viga com dois segmentos, sem amortecimento, com dispositivos anexados num ponto intermediário e num dos extremos da viga.

Yang and Wu [50] apresenta uma forma fechada e exata para a resposta transiente de um sistema não clássico. É realizada uma expansão das autofunções usando uma formulação ao espaço de estado.

A resposta dinâmica, solução de uma equação diferencial de quarta ordem com condições iniciais impulsivas, tem sido utilizada em vários trabalhos para determinar as frequências e os modos de vibração de vigas modeladas tanto pela teoria de Euler Bernoulli como Timoshenko. A base gerada pela resposta dinâmica e suas derivadas até terceira ordem é usada para escrever a solução da equação de Euler-Bernoulli ou Timoshenko. Esta metodologia, introduzida por [5, 6, 7] é usada em vários trabalhos relacionados [8, 9, 10] entre outros.

Tsukazan [48] introduz uma formulação matricial em blocos para determinar os modos e as frequências naturais de vigas Euler Bernoulli bi-segmentada. A formulação em blocos e a base dinâmica têm sido usadas também para vigas multi-segmentadas e com condições de contorno intermediárias, [15, 14, 16, 18].

No trabalho de Gallicchio [21] são estabelecidas fórmulas analíticas para obter a resposta livre de sistemas vibratórios e estender a aplicabilidade da análise modal com a utilização da resposta impulso matricial e da matriz de transferência.

Usando uma formulação matricial Giaretta [22] obtém a função de Green relativa a vibração transversal de vigas descritas pela equação de Euler-Bernoulli com a influência de uma força axial e condições de contorno clássicas.

No trabalho de Jacomini [31] é realizada uma abordagem analítica para o cálculo modal para diversos tipos de vigas com propriedades da seção transversal contínuas sujeitas a condições de contorno clássicas e não-clássicas.

Juver [32] obtém as frequências naturais e os modos de vibração de vigas Euler-Bernoulli com seção transversal quadrática ou linear. A seção transversal variável ocasiona que a equação diferencial apresenta uma singularidade espacial num extremo devido a rigidez EI da viga ser variável espacialmente.

Em Bidel [2], a resposta de sistemas invariantes no tempo e sistemas fracamente não lineares de ordem arbitrária é caracterizada em termos do comportamento dinâmico de um eixo rotor flexível modelado através da equação de Euler-Bernoulli com condições de contorno genéricas e desacopladas.

No trabalho de Klein [33] são abordados os modelos estruturais de Euler-Bernoulli e de Timoshenko com condições de contorno não-clássicas utilizando a teoria de semi-grupos de operadores fortemente contínuos. Uma expansão assintótica é realizada para a equação característica dos autovalores no caso de condições de contorno clássicas.

Já no trabalho de Aseka [1] foi obtida a resposta de sistemas dinâmicos com amortecimento viscoelástico. Também foi analisado o modelo de Timoshenko com inércia rotatória e materiais viscoelásticos.

Reyes, [46] realiza um estudo sobre vibrações de uma viga elástica não-linear de Timoshenko sobre a influência de força axial e com uso do método espectral de Galerkin.

1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho está dividido em quatro (4) capítulos.

No Capítulo 1, é apresentada a introdução deste trabalho. A seguir, é descrito o contexto geral referente ao assunto em questão, é definido os objetivos e justificativas para o tema escolhido, a seguir faz-se uma breve revisão bibliográfica de trabalhos que utilizam a base dinâmica como metodologia.

No capítulo 2, são apresentados os principais modelos matemáticos usados para modelar vigas. Obtém-se a equação da viga através da teoria de Euler Bernoulli utilizando o princípio de Hamilton. Apresentamos condições de contorno clássicas e não-clássicas.

No capítulo 3, é descrita a metodologia utilizada na obtenção das frequências naturais e dos modos de vibração de dois modelos estudados. O primeiro modelo descreve uma viga Euler-Bernoulli com dois segmentos, sem amortecimento, com dispositivos anexados num ponto intermediário da viga e na extremidade $x = L$. O segundo modelo considera uma viga com atrito viscoso e dispositivos tipo mola, massa e amortecedor anexados no extremo $x = L$ da viga. Uma vez que o problema envolve amortecimento viscoso e condições de contorno não-clássicas, a análise modal clássica, não é aplicável diretamente para obtenção de respostas forçadas. São obtidas novas condições de ortogonalidade para obtenção da resposta forçada.

No capítulo 4, são apresentadas as conclusões da dissertação.

1.5 Contribuição do Trabalho

A base dinâmica tem sido utilizada em vários trabalhos, [1, 2, 10, 12, 15, 21, 22, 31, 32, 33, 49, 48], entre outros, para obter as frequências e os modos de vibração de vigas. A contribuição principal desta dissertação é a validação desta metodologia utilizada nos problemas apresentados, problemas de vigas modeladas através da teoria de Euler-Bernoulli, consideradas não-clássicas por incluírem amortecimento viscoso, e condições de contorno não-clássicas. Além disso, para escrever a resposta forçada de um problema não clássico é obtida uma condição de ortogonalidade entre os modos de vibração diferente daquela onde a análise modal convencional é aplicável.

Capítulo 2

Equação da Viga Euler-Bernoulli

2.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados três modelos principais de equações para vigas que aparecem na literatura, [30, 36], quando estudamos vibração transversal de vigas. Faz-se uma breve descrição das hipóteses que devem ser consideradas em cada um desses modelos.

Uma vez que todo fenômeno de vibração, envolve energia potencial elástica associada a deformação elástica que o corpo sofre, energia cinética associada a massa ou elementos inerciais e associada aos amortecedores que dissipam energia mecânica sob forma de calor, neste capítulo serão introduzidas as equações de Lagrange e o princípio de Hamilton. O princípio de Hamilton, conhecido na literatura, [20, 34, 37], como Princípio da Mínima Ação, estabelece que dentre todas as trajetórias possíveis no espaço de configuração, o sistema “escolhe” aquela de mínima energia, por isso o princípio de Hamilton também é conhecido como princípio da mínima ação.

2.2 Modelos Matemáticos para a Equação da Viga

Existem três modelos principais usados para estudar vibrações de uma viga: Euler-Bernoulli, Timoshenko e Vlasov . Abaixo encontra-se uma breve descrição desses modelos.

2.2.1 Euler-Bernoulli

Para obter a equação da viga segundo a teoria de Euler-Bernoulli, algumas hipóteses devem ser consideradas:

- A dimensão da seção transversal é pequena comparada com o seu comprimento;
- Existência de uma linha neutra onde a viga não sofre nem tração nem compressão;

- A viga é de material elástico e homogêneo;
- As seções planas permanecem planas após a deformação e a curvatura da viga é assumida pequena;
- São desconsideradas as deformações por cisalhamento e inércia rotacional.

A equação neste caso é dada por, [30, 34, 36]

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (2.1)$$

onde

- w : deslocamento transversal
- $m = \rho A$: distribuição de massa
- ρ : densidade linear
- A : área da seção transversal
- E : módulo de elasticidade de Young
- I : momento de inércia.

2.2.2 Vlasov

No modelo de Vlasov o efeito causado pela força de cisalhamento continua sendo desprezado, como no modelo de Euler-Bernoulli, porém considera-se o efeito da inércia rotacional. Neste caso a equação (2.1) é dada por

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \quad (2.2)$$

2.2.3 Timoshenko

Neste modelo dois efeitos negligenciados no modelo da viga de Euler-Bernoulli, são considerados: a inércia rotacional que se refere a energia cinética produzida pela rotação da viga, causada pelo momento fletor e a deformação de cisalhamento causada pela força de cisalhamento. As seções transversais planas permanecem planas, mas não necessariamente perpendiculares ao eixo longitudinal da viga, pois há um giro da seção em relação a essa perpendicular, ocasionado pelo cisalhamento.

A equação da viga de Timoshenko é dada por, [30, 34, 36]

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho I \left(1 + \frac{E}{k_G G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k_G G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0, \quad (2.3)$$

onde

- k_G : coeficiente de cisalhamento
- G : módulo de elasticidade transversal

Nos casos em que as dimensões da viga não são pequenas em comparação com o comprimento da viga (vigas curtas), o modelo de Timoshenko é o mais indicado.

Neste trabalho será utilizado o modelo de Euler-Bernoulli para vigas. A modelagem matemática do sistema é obtida a partir da modelagem física. Para isso, deve-se utilizar técnicas estudadas em dinâmica dos corpos rígidos. A seguir, serão estudadas as equações de Lagrange e o Princípio de Hamilton para obter as Equações de Euler-Bernoulli, [20].

2.3 Equações de Lagrange

Para obter as equações de Lagrange, é necessário encontrar uma expressão para a energia cinética como função do tempo t , das coordenadas generalizadas q_i e das velocidades generalizadas \dot{q}_i ($i = 1, \dots, n$) [20]. O sistema de coordenadas generalizadas é qualquer, uma vez que o lagrangiano é uma função escalar e portanto deve ser invariante perante transformações de coordenadas. Sua forma geral é:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \dot{r}_v^2 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial r_v}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i + a_0, \quad (2.4)$$

aqui os coeficientes a_{ik} , a_i , a_0 são funções de t, q_1, \dots, q_n definidas pelas equações

$$a_{ik} = \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \frac{\partial r_v}{\partial q_k} \quad (i, k = 1, \dots, n), \quad (2.5)$$

$$a_i = \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \frac{\partial r_v}{\partial t} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.6)$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\frac{\partial r_v}{\partial t} \right)^2. \quad (2.7)$$

Da equação (2.4), a energia cinética de um sistema holonômico, sistemas nos quais as partículas dependem somente das coordenadas e do tempo, é uma função de segundo grau nas velocidades generalizadas

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (2.8)$$

onde

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i, \quad T_0 = a_0. \quad (2.9)$$

No caso do sistema scleronomico, no qual somente restrições estacionárias são impostas, r_v e q_i são independentes do tempo, logo,

$$\frac{\partial r_v}{\partial t} = 0 \quad (v = 1, \dots, N).$$

Das equações (2.6) e (2.7),

$$a_0 = 0, \quad a_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

e

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k.$$

Assim a energia cinética para um sistema scleronomico aparece na forma de uma função homogênea de segundo grau das velocidades generalizadas.

O sistema linear homogêneo

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \lambda_k = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.10)$$

para

$$\det(a_{ik})_i^n = 0, \quad (2.11)$$

tem solução não nula.

Multiplicando a equação (2.10) por λ_i , somando com respeito a i de 1 até n e utilizando a fórmula (2.5) temos

$$0 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \lambda_i \lambda_k = \sum_{i,k=1}^n \left(\sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \frac{\partial r_v}{\partial q_k} \right) \lambda_i \lambda_k = \sum_{v=1}^N m_v \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \right)^2 \quad (2.12)$$

portanto

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial r_v}{\partial q_i} = 0 \quad (v = 1, \dots, N). \quad (2.13)$$

Essas N equações podem ser substituídas por $3N$ equações escalares

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_v}{\partial q_i} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_v}{\partial q_i} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_v}{\partial q_i} \lambda_i = 0 \quad (v = 1, \dots, N). \quad (2.14)$$

2.4 Princípio de Hamilton

Sejam v_1, v_2, \dots, v_n as coordenadas generalizadas para um sistema de n graus de liberdade. O movimento de qualquer partícula do sistema pode ser descrito em função das coordenadas escolhidas. Para uma partícula de massa m , vetor posição r , medido da origem do sistema coordenado para esta partícula é dado por [34],

$$r = x(t)i + y(t)j + z(t)k. \quad (2.15)$$

onde

$$x = x(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad (2.16)$$

$$y = y(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad (2.17)$$

$$z = z(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad (2.18)$$

$$r = r(v_1, v_2, \dots, v_n). \quad (2.19)$$

Da segunda Lei de Newton podemos escrever

$$F + \Sigma f = m\ddot{r}. \quad (2.20)$$

onde a soma de F e Σf é a resultante de todas as forças externas atuando no sistema.

Integrando os dois lados da equação (2.20) de r_1 até r_2 , obtemos

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr + \Sigma f \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} m\ddot{r} \cdot dr. \quad (2.21)$$

onde $\Delta \mathbf{r}$ representa o vetor entre duas partículas, e o (\cdot) um produto escalar. O trabalho realizado pela força externa é dado por

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr. \quad (2.22)$$

O termo do lado direito da equação (2.21) é

$$\int_{r_1}^{r_2} m\ddot{r} \cdot dr = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{r} \cdot \frac{dr}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{r} \cdot \dot{r}) dt = \frac{1}{2} m \dot{r} \cdot \dot{r} \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (2.23)$$

A energia cinética da partícula é dada por

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r} \cdot \dot{r} \quad (2.24)$$

A equação (2.21) agora vem a ser

$$W_{1 \rightarrow 2} + \Sigma \int_{r_1}^{r_2} f \cdot d\Delta r = T_2 - T_1. \quad (2.25)$$

Uma equação similar pode ser escrita para cada partícula do sistema. Quando todas as equações são adicionadas, considerando que a força agindo da partícula A para a partícula B é igual e oposta a força atuando da B para A , o trabalho total realizado pelas forças internas é zero.

A energia cinética total do sistema é a soma da energia cinética de cada partícula, o trabalho total é a soma do trabalho realizado por todas as forças externas.

O princípio geral do trabalho e energia vem a ser

$$W_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1. \quad (2.26)$$

De (2.26) temos que o trabalho e a energia cinética em qualquer instante são funcionais das coordenadas generalizadas.

Cada coordenada generalizada é função do tempo, e como tal, variações em cada coordenada generalizada podem ser definidas entre os tempos t_1 e t_2 . As variações $\delta v_1, \delta v_2, \dots, \delta v_n$, satisfazem

$$\delta v_k(t_1) = \delta v_k(t_2) = 0 \quad k = 1 : n, \quad (2.27)$$

A variação do vetor posição é

$$\delta r = r(v_1 + \delta v_1, v_2 + \delta v_2, \dots, v_n + \delta v_n) - r(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{\partial r}{\partial v_1} \delta v_1 + \frac{\partial r}{\partial v_2} \delta v_2 + \dots + \frac{\partial r}{\partial v_n} \delta v_n. \quad (2.28)$$

Tomando o produto escalar na equação (2.20) com a variação do vetor posição, segue que

$$F \cdot \delta r + (\Sigma f \cdot \delta \Delta r) = m \ddot{r} \cdot \delta r. \quad (2.29)$$

A variação no trabalho, usando a definição da equação (2.22) é

$$\delta W = F \cdot \delta r. \quad (2.30)$$

O trabalho definido na equação (2.30) é denominado de trabalho virtual.

Derivando $\dot{r} \cdot \delta r$ com respeito a t , obtém-se

$$\frac{d}{dt}(\dot{r} \cdot \delta r) = \ddot{r} \cdot \delta r + \dot{r} \cdot \frac{d}{dt}(\delta r). \quad (2.31)$$

A ordem da variação e da diferenciação podem ser trocadas, isto é, $\delta(dy) = d(\delta y)$. Logo a equação (2.26) pode ser escrita na forma

$$\ddot{r} \cdot \delta r = \frac{d}{dt}(\dot{r} \cdot \delta r) - \dot{r} \cdot \delta \dot{r}, \quad (2.32)$$

e

$$\delta(\dot{r} \cdot \dot{r}) = \delta \dot{r} \cdot \dot{r} + \dot{r} \cdot \delta \dot{r} = 2\dot{r} \cdot \delta \dot{r}. \quad (2.33)$$

Substituindo (2.33) em (2.32) e depois na equação (2.28)

$$\delta W + (\Sigma f) \cdot \delta \Delta r = m \frac{d}{dt}(\dot{r} \cdot \delta r) - \delta \left(\frac{1}{2} m \dot{r} \cdot \dot{r} \right). \quad (2.34)$$

A variação da energia cinética para a partícula é

$$\delta T = \delta \left(\frac{1}{2} m \dot{r} \cdot \dot{r} \right), \quad (2.35)$$

logo a equação (2.34) torna-se

$$\delta T + \delta W + (\Sigma f \cdot \delta \Delta r) = m \frac{d}{dt}(\dot{r} \cdot \delta r). \quad (2.36)$$

A equação (2.36) é escrita para uma única partícula. Uma equação similar pode ser escrita para cada partícula do sistema. Adicionando todas as equações tem-se que

$$\delta T + \delta W = \Sigma m_i \frac{d}{dt}(\dot{r}_i \cdot \delta r_i). \quad (2.37)$$

O trabalho virtual total das forças entre as partículas é zero.

Forças externas atuando no sistema podem ser conservativas (mola, gravidade) ou não conservativas (amortecedor). O trabalho realizado pelas forças conservativas pode ser determinado a partir da energia potencial, $V(v_1, v_2, \dots, v_n)$, tal que $\delta W = -\delta V$.

O trabalho virtual total é

$$\delta W = \delta W_{nc} - \delta V. \quad (2.38)$$

onde δW_{nc} é o trabalho realizado por todas as forças não conservativas. Assim a equação (2.33) pode ser escrita na forma

$$\delta T - \delta V + \delta W_{nc} = m \frac{d}{dt}(\dot{r} \cdot \delta r). \quad (2.39)$$

Integrando a equação (2.39) em t, variando em t_1 e t_2 , tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc}) dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d}{dt}(\dot{r} \cdot \delta r) dt = m r \cdot \delta r \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (2.40)$$

As variações nas coordenadas generalizadas são definidas de modo que sejam iguais a zero em t_1 e t_2 . Portanto o lado direito da equação (2.40) é zero, e

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc}) dt = 0. \quad (2.41)$$

o funcional Lagrangiano é definido como sendo

$$L = T - V \quad (2.42)$$

de modo que a equação definida em (2.41) torna-se

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc}) dt = 0. \quad (2.43)$$

Equação (2.43) é o Princípio estendido de Hamilton.

Se todas as forças são conservativas, $\delta W_{nc} = 0$ e a equação (2.43) é escrita da forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0. \quad (2.44)$$

Se a ordem da variação e integração podem ser permutadas, a equação (2.44) é dada por

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (2.45)$$

o qual é referido na literatura como Princípio de Hamilton, [34].

2.5 Equação de Euler-Bernoulli

Para obter as equações da viga de Euler-Bernoulli, será utilizado o Princípio de Hamilton, [30, 34, 36].

A energia potencial para a viga de Euler-Bernoulli de comprimento L , é dada por

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (2.46)$$

a energia cinética para o elemento diferencial é

$$dT = \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.47)$$

e a energia cinética total da viga é dada pela equação

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (2.48)$$

Aplicando o Princípio de Hamilton, equação (2.45) tem-se que

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx - \delta \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] dt = 0. \quad (2.49)$$

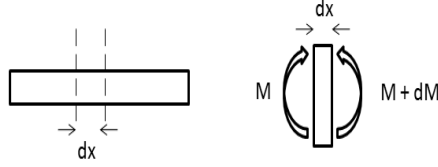


Figura 2.1: Elemento diferencial para viga Euler-Bernoulli

Considerando que, no termo de (2.49), a ordem entre a variação e a integral possa ser trocada, obtém-se

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \right] dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) dx \right] dt \quad (2.50)$$

Trocando a ordem na integração da equação (2.50) e integrando por partes em relação a t , segue que

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \right] dt = \int_0^L \rho A \left[\left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right\}_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dt \right] dx \quad (2.51)$$

O termo da variação em t_1 e t_2 é igual a zero. Trocando novamente a ordem da integração, segue:

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \right] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx dt \quad (2.52)$$

Agora considere o termo da energia potencial, e sendo que a ordem da variação pode ser trocada temos

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) dx dt. \quad (2.53)$$

Aplicando integração por partes para a variável espacial, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_{x=0}^{x=L} dt \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \delta w \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w dx \right\} dt, \end{aligned} \quad (2.54)$$

Substituindo as equações (2.52) e (2.54) em (2.49) obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\left(E(L)I(L) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) \right) \left(\delta \frac{\partial w}{\partial x}(L, t) \right) \right] \right\} dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\left(E(0)I(0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) \right) \left(\delta \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) \right) \right] \right\} dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) (L, t) \delta w(L, t) \right] \right\} dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) (0, t) \delta w(0, t) \right] \right\} dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \delta w dx dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Aplicando o Lema de Dubois-Reymond, [34], onde cada termo da equação (2.55) deve ser zero independentemente, vem que

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \tag{2.56}$$

a qual é referida como Equação de Euler-Bernoulli para vigas.

Decorrem naturalmente do Princípio de Hamilton as condições de contorno

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) (0, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w(0, t) = 0 \tag{2.57}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) (L, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w(L, t) = 0 \tag{2.58}$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) (0, t) = 0 \tag{2.59}$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) (L, t) = 0 \tag{2.60}$$

Duas condições de contorno são necessárias em cada extremidade da viga. A geometria do problema, define estas condições.

2.6 Condições de Contorno Clássicas

Condições de contorno clássicas, [3, 30], são aquelas condições que surgem naturalmente a partir da dedução da equação quando é considerada uma viga de comprimento L , sem nenhum dispositivo anexado nas extremidades da viga. Para isto devemos considerar:

a) A deflexão:

$$w(., t) \quad (2.61)$$

b) O giro

$$\frac{\partial w}{\partial x}(., t) \quad (2.62)$$

c) O momento Fletor

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(., t) \quad (2.63)$$

d) A força de Cisalhamento

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) |_{(., t)} \quad (2.64)$$

Em todos os casos à seguir, consideramos a viga com condições de contorno aplicadas na extremidade $x = 0$. Analogamente tem-se as condições de contorno em $x = L$.

2.6.1 Viga com extremidade Fixa:



Figura 2.2: Viga fixa em $x = 0$

• Deflexão:

$$w(0, t) = 0 \quad (2.65)$$

e

• Giro:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0. \quad (2.66)$$

2.6.2 Viga com extremidade Livre:

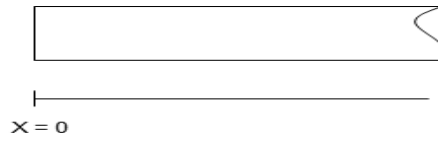


Figura 2.3: Viga livre em $x = 0$

- Momento Fletor:

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad (2.67)$$

e

- Força de cisalhamento:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{(0,t)} = 0. \quad (2.68)$$

2.6.3 Viga com extremidade Apoiada:

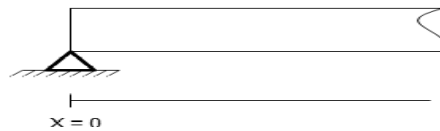


Figura 2.4: Viga apoiada em $x = 0$

- Deflexão:

$$w(0, t) = 0 \quad (2.69)$$

e

- Momento Fletor:

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0. \quad (2.70)$$

2.6.4 Viga com extremidade Deslizante:

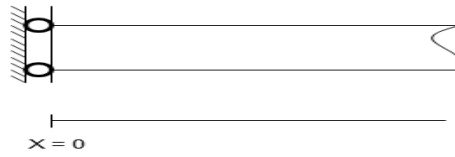


Figura 2.5: Viga deslizante em $x = 0$

- Giro:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (2.71)$$

e

- Força de cisalhamento:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{(0,t)} = 0. \quad (2.72)$$

A fim de ilustração, consideremos alguns exemplos de vigas com condições de contorno clássicas:

- O movimento transversal para uma viga fixa-livre de comprimento L , tem condições de contorno em $x = 0$ e em $x = L$ dadas por:

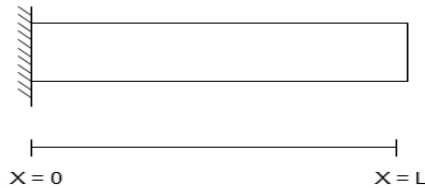


Figura 2.6: Viga fixa-livre

$$x = 0 : \quad w(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0. \quad (2.73)$$

$$x = L : \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{(L,t)} = 0. \quad (2.74)$$

- O movimento transversal para uma viga livre-apoiada, conforme Figura (2.7) tem condições de contorno em $x = 0$ e em $x = L$ dadas por:

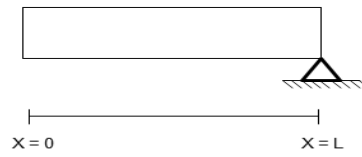


Figura 2.7: Viga livre-apoiada

$$x = 0 : \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{(0,t)} = 0. \quad (2.75)$$

$$x = L : \quad w(L, t) = 0 \quad \text{e} \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0. \quad (2.76)$$

2.7 Condições de Contorno Não-clássicas

Condições de contorno não clássicas, [30, 34, 36], surgem naturalmente a partir de princípios físicos quando considera-se, por exemplo, uma massa, uma mola ou um amortecedor anexados em um dos extremos da viga. Nos casos a seguir, considera-se alguns exemplos de vigas com condições de contorno não clássicas na extremidade $x = 0$ da viga.

2.7.1 Viga com uma mola anexada na extremidade $x = 0$:

Na figura (2.8), temos uma mola anexada na extremidade $x = 0$ da viga.

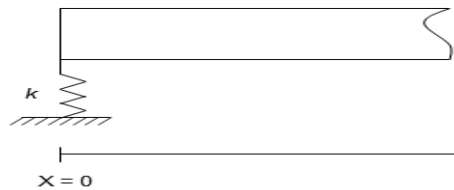


Figura 2.8: Viga com mola em $x = 0$

As condições de contorno não clássicas são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{(0,t)} = -kw(0, t) \quad (2.77)$$

e

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0. \quad (2.78)$$

2.7.2 Viga com um amortecedor anexado na extremidade $x = 0$:

Na figura (2.9), temos uma viga com um amortecedor anexado na extremidade $x = 0$.

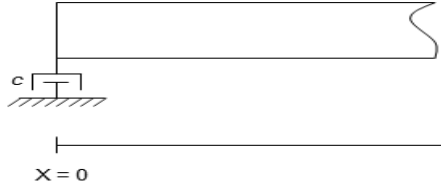


Figura 2.9: Viga com amortecedor em $x = 0$

Neste caso as condições de contorno não clássicas são

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{(0,t)} = -c \frac{\partial w}{\partial t} (0,t) \quad (2.79)$$

e

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (0,t) = 0. \quad (2.80)$$

2.7.3 Viga com uma massa anexada na extremidade $x = 0$:

Na figura (2.10), apresenta uma viga com uma massa anexada em $x = 0$.

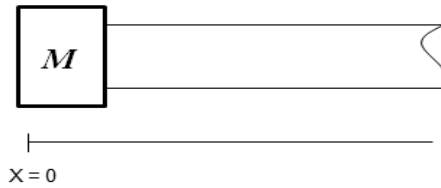


Figura 2.10: Viga com massa em $x = 0$

As condições de contorno não clássicas são

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{(0,t)} = -M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (0,t) \quad (2.81)$$

e

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (0,t) = 0. \quad (2.82)$$

Capítulo 3

Modelos de Vigas Euler-Bernoulli

3.1 Introdução

Neste capítulo, são obtidos os modos de vibração para dois modelos de vigas Euler-Bernoulli. No primeiro, considera-se uma viga Euler-Bernoulli de comprimento L fixa em $x = 0$, bi-segmentada com um dispositivo num ponto intermediário da viga e uma massa anexada na extremidade $x = L$. São comparados os modos de vibração da viga sem dispositivos anexados e com os dispositivos de rigidez e massa anexados. No segundo modelo é considerada uma viga Euler-Bernoulli fixa em $x = 0$ com amortecimento viscoso e dispositivos, tais como massa, mola e amortecimento, anexados no extremo $x = L$ da viga. São comparados os modos de vibração da viga sem amortecimento, com e sem dispositivos anexados. Nos dois modelos utilizamos uma metodologia em blocos para as condições de contorno e a matriz base de soluções. O uso da base dinâmica para escrever a solução da equação modal, simplifica os cálculos na obtenção das frequências. O método utilizado é descrito no primeiro modelo. Por este motivo, omitimos seu desenvolvimento no segundo modelo.

3.2 Um Modelo de Viga Euler-Bernoulli Segmentada com Dispositivos Anexados em um Ponto Intermediário e em $x=L$

3.2.1 Descrição do modelo

Considera-se uma viga de Euler-Bernoulli de comprimento L , bi-segmentada com um dispositivo no ponto intermediário da viga, [25] como mostra na Figura (3.1). O movimento flexural da viga é representado por $w_j(t, x)$ com $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1 : 2$.

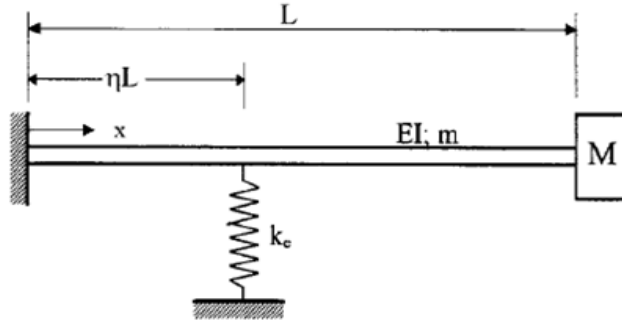


Figura 3.1: Viga fixa-livre com dispositivos em $x=L$

Aqui M denota o valor da massa anexada na extremidade livre e K_e é o coeficiente de rigidez anexado em $x = x = \eta L$, $0 < \eta < 1$. Em cada segmento da viga, tem-se, segundo a teoria de Euler-Bernoulli discutida no capítulo anterior, as equações:

$$\mathcal{M}_1 \frac{\partial^2 w_1(t, x)}{\partial t^2} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial w_1(t, x)}{\partial t} + \mathcal{K}_1 w_1(t, x) = 0 \quad (3.1)$$

e

$$\mathcal{M}_2 \frac{\partial^2 w_2(t, x)}{\partial t^2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial w_2(t, x)}{\partial t} + \mathcal{K}_2 w_2(t, x) = 0 \quad (3.2)$$

onde \mathcal{M}_j , \mathcal{C}_j e \mathcal{K}_j , $j = 1, 2$ são os coeficientes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, sendo

$$\mathcal{M}_1 = m_1 = \rho_1 A_1 \quad e \quad \mathcal{M}_2 = m_2 = \rho_2 A_2 \quad (3.3)$$

$$\mathcal{K}_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[k_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \quad e \quad \mathcal{K}_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[k_2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]. \quad (3.4)$$

Considera-se neste trabalho o caso particular da viga com seções uniformes. Neste caso, o operador \mathcal{K}_j com k_j constante é dado por,

$$\mathcal{K}_1 = k_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} = E_1 I_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \quad (3.5)$$

e

$$\mathcal{K}_2 = k_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} = E_2 I_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{M}_1 = m_1, \quad \mathcal{M}_2 = m_2 \quad (3.7)$$

onde, para $j = 1, 2$,

- E_j , denota módulo de elasticidade de Young,
- I_j , denota o momento de inércia,
- $m_j = \rho_j A_j$, sendo que ρ_j denota a densidade linear e A_j a área da seção transversal.

3.2.2 Análise modal

Mesmo na ausência de forças externas um sistema ainda é capaz de vibrar, devido as condições iniciais impostas a ele. Vibrações livres são obtidas supondo

$$w_1 = e^{\lambda t} X_1(x) \text{ e } w_2 = e^{\lambda t} X_2(x) \quad (3.8)$$

que substituindo nas equações homogêneas (3.1) e (3.2)

$$\mathcal{M}_1 \frac{\partial^2 w_1(t, x)}{\partial t^2} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial w_1(t, x)}{\partial t} + \mathcal{K}_1 w_1(t, x) = 0 \quad (3.9)$$

e

$$\mathcal{M}_2 \frac{\partial^2 w_2(t, x)}{\partial t^2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial w_2(t, x)}{\partial t} + \mathcal{K}_2 w_2(t, x) = 0 \quad (3.10)$$

resulta,

$$(\mathcal{M}_1 \lambda^2 + \mathcal{C}_1 \lambda + \mathcal{K}_1) X_1(x) = 0 \quad (3.11)$$

e

$$(\mathcal{M}_2 \lambda^2 + \mathcal{C}_2 \lambda + \mathcal{K}_2) X_2(x) = 0 \quad (3.12)$$

Da equação da viga Euler-Bernoulli

$$\rho A \ddot{w}_1 + EI w_1''' = 0 \quad (3.13)$$

$$\rho A \ddot{w}_2 + EI w_2''' = 0 \quad (3.14)$$

usando (3.8) tem-se

$$X_1^{(iv)}(x) - \varepsilon_1^4 X_1(x) = 0 \quad (3.15)$$

e

$$X_2^{(iv)}(x) - \varepsilon_2^4 X_2(x) = 0 \quad (3.16)$$

onde ε_1 e ε_2 são dependentes de λ e dados por

$$\varepsilon_1^2 = -\frac{\rho_1 A_1}{E_1 I_1} \lambda^2 \text{ e } \varepsilon_2^2 = -\frac{\rho_2 A_2}{E_2 I_2} \lambda^2. \quad (3.17)$$

A solução para (3.15) e (3.16) em cada segmento pode ser escrita como combinação linear de uma base

$$X_1(x) = d_{11} \phi_{11}(x) + d_{21} \phi_{21}(x) + d_{31} \phi_{31}(x) + d_{41} \phi_{41} = \psi_1(x) d_1 \quad (3.18)$$

e

$$X_2(x) = d_{12} \phi_{12}(x) + d_{22} \phi_{22}(x) + d_{32} \phi_{32}(x) + d_{42} \phi_{42} = \psi_2(x) d_2 \quad (3.19)$$

onde as bases de soluções para cada segmento são dadas por

$$\psi_1 = \psi_1(x, \lambda) = [\phi_{11}(x), \phi_{21}(x), \phi_{31}(x), \phi_{41}(x)] \quad (3.20)$$

e

$$\psi_2 = \psi_2(x, \lambda) = [\phi_{12}(x), \phi_{22}(x), \phi_{32}(x), \phi_{42}(x)], \quad (3.21)$$

são base de soluções para (3.9) e (3.10), respectivamente em cada segmento. d_j é o vetor coluna com componentes d_{1j} , d_{2j} , d_{3j} , d_{4j} , e

$$d_j = \begin{bmatrix} d_{1j} \\ d_{2j} \\ d_{3j} \\ d_{4j} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A base de soluções ψ_j , nas equações (3.15) e (3.16) depende do parâmetro λ correspondente a vibração livre.

Condições de contorno genéricas, clássicas ou não-clássicas, em $x = 0$ e $x = L$ podem ser escritas na forma [48]

$$\begin{aligned} A_{11}X_1(0) + B_{11}X_1'(0) + C_{11}X_1'' + D_{11}X_1'''(0) &= 0, \\ A_{12}X_1(0) + B_{12}X_1'(0) + C_{12}X_1''(0) + D_{12}X_1'''(0) &= 0, \\ A_{21}X_2(L) + B_{21}X_2'(L) + C_{21}X_2''(L) + D_{21}X_2'''(L) &= 0, \\ A_{22}X_2(L) + B_{22}X_2'(L) + C_{22}X_2''L + D_{22}X_2'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Impondo condições de continuidade intermediárias para o ponto $x = x_j$ podemos escrever de modo geral a seguinte formulação, para X_j , $j = 1 : 2$,

$$\begin{aligned} E_{11}^{(j)}X_j(x_j) + F_{11}^{(j)}X_j'(x_j) + G_{11}^{(j)}X_j''(x_j) + H_{11}^{(j)}X_j'''(x_j) &= \\ E_{12}^{(j)}X_{j+1}(x_j) + F_{12}^{(j)}X_{j+1}'(x_j) + G_{12}^{(j)}X_{j+1}''(x_j) + H_{12}^{(j)}X_{j+1}'''(x_j), & \\ E_{21}^{(j)}X_j(x_j) + F_{21}^{(j)}X_j'(x_j) + G_{21}^{(j)}X_j''(x_j) + H_{21}^{(j)}X_j'''(x_j) &= \\ E_{22}^{(j)}X_{j+1}(x_j) + F_{22}^{(j)}X_{j+1}'(x_j) + G_{22}^{(j)}X_{j+1}''(x_j) + H_{22}^{(j)}X_{j+1}'''(x_j), & \\ E_{31}^{(j)}X_j(x_j) + F_{31}^{(j)}X_j'(x_j) + G_{31}^{(j)}X_j''(x_j) + H_{31}^{(j)}X_j'''(x_j) &= \\ E_{32}^{(j)}X_{j+1}(x_j) + F_{32}^{(j)}X_{j+1}'(x_j) + G_{32}^{(j)}X_{j+1}''(x_j) + H_{32}^{(j)}X_{j+1}'''(x_j), & \\ E_{41}^{(j)}X_j(x_j) + F_{41}^{(j)}X_j'(x_j) + G_{41}^{(j)}X_j''(x_j) + H_{41}^{(j)}X_j'''(x_j) &= \\ E_{42}^{(j)}X_{j+1}(x_j) + F_{42}^{(j)}X_{j+1}'(x_j) + G_{42}^{(j)}X_{j+1}''(x_j) + H_{42}^{(j)}X_{j+1}'''(x_j), \quad j = 1 : 2. & \end{aligned} \quad (3.24)$$

É possível resolver o problema usando uma formulação matricial em blocos, tanto para as condições de contorno em $x = 0$, $x = L$, em um ponto intermediário da viga, $x = x_j$ como para a base de soluções.

3.2.3 Formulação em blocos

Para a viga considerada, com dois segmentos, as condições de contorno não clássicas do problema espacial nos pontos $x = x_0 = 0$ e $x = x_2 = L$ de acordo com (3.23) são dadas por

$$X_1(0) = X_1''(0) = 0, \quad X_2(L) = 0, \quad EIX_2'''(L) - M\lambda^2 X_2(L) = 0. \quad (3.25)$$

e as condições de continuidade para o ponto $x = x_1$ de acordo com (3.24), são:

$$\begin{aligned} X_1(x_1) &= X_2(x_1) \\ X_1'(x_1) &= X_2'(x_1) \\ k_2^{-1}k_1 X_1''(x_1) &= X_2''(x_1) \\ k_2^{-1}k_1(X_1''')(x_1) - k_2^{-1}K_e X_1(x_1) &= X_2'''(x_1). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Introduzindo a formulação em blocos, [48] os blocos correspondentes as condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$ são dados respectivamente por:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

e

$$B_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -M\lambda^2 & 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Para uma mola anexada no ponto intermediário, $x = x_j$ com constante de rigidez K_e a formulação matricial em blocos é dada por

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2^{-1}k_1 & 0 \\ -k_2^{-1}K_e & 0 & 0 & k_2^{-1}k_1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

e

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A matriz base de soluções também pode ser escrita na forma matricial em blocos por

$$\phi_j(x) = \begin{bmatrix} \phi_{1j}(x) & \phi_{2j}(x) & \phi_{3j}(x) & \phi_{4j}(x) \\ \phi'_{1j}(x) & \phi'_{2j}(x) & \phi'_{3j}(x) & \phi'_{4j}(x) \\ \phi''_{1j}(x) & \phi''_{2j}(x) & \phi''_{3j}(x) & \phi''_{4j}(x) \\ \phi'''_{1j}(x) & \phi'''_{2j}(x) & \phi'''_{3j}(x) & \phi'''_{4j}(x) \end{bmatrix}, \quad j = 1 : 2 \quad (3.31)$$

onde

$$[\phi_{11}(x), \phi_{21}(x), \phi_{31}(x), \phi_{41}(x)] \quad \text{e} \quad [\phi_{12}(x), \phi_{22}(x), \phi_{32}(x), \phi_{42}(x)]$$

são bases de soluções para o primeiro e segundo segmentos, respectivamente. As linhas com derivadas em (3.31) são devido as equações (3.23) e (3.24).

Assim a matriz das condições de contorno, contendo as matrizes em blocos nos pontos $x = 0$, $x = x_j$ e $x = L$, e a matriz das bases de soluções contendo as matrizes em blocos nos pontos $x = 0$, $x = x_j$ e $x = L$, são dadas, respectivamente por

$$B = \begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{11} & -B_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_L \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

e

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(0) & 0 \\ \phi_1(x_1) & 0 \\ 0 & \phi_2(x_1) \\ 0 & \phi_2(L) \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Usando (3.31) para expandir os quatro blocos da matriz base de soluções acima, temos

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11}(0) & \phi_{21}(0) & \phi_{31}(0) & \phi_{41}(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi'_{11}(0) & \phi'_{21}(0) & \phi'_{31}(0) & \phi'_{41}(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi''_{11}(0) & \phi''_{21}(0) & \phi''_{31}(0) & \phi''_{41}(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi'''_{11}(0) & \phi'''_{21}(0) & \phi'''_{31}(0) & \phi'''_{41}(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{11}(x_1) & \phi_{21}(x_1) & \phi_{31}(x_1) & \phi_{41}(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi'_{11}(x_1) & \phi'_{21}(x_1) & \phi'_{31}(x_1) & \phi'_{41}(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi''_{11}(x_1) & \phi''_{21}(x_1) & \phi''_{31}(x_1) & \phi''_{41}(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi'''_{11}(x_1) & \phi'''_{21}(x_1) & \phi'''_{31}(x_1) & \phi'''_{41}(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{12}(x_1) & \phi_{22}(x_1) & \phi_{32}(x_1) & \phi_{42}(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi'_{12}(x_1) & \phi'_{22}(x_1) & \phi'_{32}(x_1) & \phi'_{42}(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi''_{12}(x_1) & \phi''_{22}(x_1) & \phi''_{32}(x_1) & \phi''_{42}(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi'''_{12}(x_1) & \phi'''_{22}(x_1) & \phi'''_{32}(x_1) & \phi'''_{42}(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{12}(L) & \phi_{22}(L) & \phi_{32}(L) & \phi_{42}(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi'_{12}(L) & \phi'_{22}(L) & \phi'_{32}(L) & \phi'_{42}(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi''_{12}(L) & \phi''_{22}(L) & \phi''_{32}(L) & \phi''_{42}(L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi'''_{12}(L) & \phi'''_{22}(L) & \phi'''_{32}(L) & \phi'''_{42}(L) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

A substituição das soluções das equações

$$\mathcal{M}_j \frac{\partial^2 w_j(t, x)}{\partial t^2} + \mathcal{C}_j \frac{\partial w_j(t, x)}{\partial t} + \mathcal{K}_j w_j(t, x) = 0, \quad j = 1 : 2 \quad (3.35)$$

dadas respectivamente por (3.18) e (3.19), nas respectivas equações de quarta ordem

$$X_j^{(iv)}(x) - \varepsilon_j^4 X_j(x) = 0, \quad j = 1 : 2 \quad (3.36)$$

junto com as condições de contorno, geram um sistema algébrico, que pode ser escrito na forma matricial como

$$B\Phi d = 0 \quad \text{onde } U = B\Phi. \quad (3.37)$$

Soluções não-nulas para

$$B\Phi d = 0$$

são obtidas quando

$$\det(U) = 0 \quad (3.38)$$

3.2.4 A Base fundamental

A base clássica ou espectral de Euler-Bernoulli para a equação de quarta ordem,

$$X^{(iv)}(x) - \varepsilon^4 X(x) = 0 \quad (3.39)$$

onde

$$\varepsilon^4 = -\frac{\rho A}{EI} \lambda^2 \quad (3.40)$$

é construída usando as raízes $\pm\varepsilon$, $\pm i\varepsilon$ do polinômio característico $s^4 - \varepsilon^4 = 0$, neste caso dada por

$$\Psi = [\sin(\varepsilon x), \cos(\varepsilon x), \sinh(\varepsilon x), \cosh(\varepsilon x)]. \quad (3.41)$$

Pode-se escolher, convenientemente uma base que produz um maior número de zeros na matriz (3.34), com o objetivo de simplificar a resolução do sistema $B\Phi d = 0$.

Para isto, escolhemos como base $h(x)$ e suas derivadas até terceira ordem, isto é, $[h(x), h'(x), h''(x), h'''(x)]$ onde $h(x)$ é a solução fundamental do problema de valor inicial, [11]

$$h^{(iv)}(x) - \varepsilon^4 h(x) = 0, \quad (3.42)$$

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0, \quad h''(0) = 0, \quad h'''(0) = 1,$$

com $\varepsilon^4 = -\frac{\rho A}{EI} \lambda^2$.

Nestas condições $h(x)$ tem a seguinte representação

$$h(x) = \frac{\sinh(\varepsilon x) - \sin(\varepsilon x)}{2\varepsilon^3} \quad (3.43)$$

$h(x)$ é dependente do parâmetro ε , que depende de λ na equação de quarta ordem

$$X^{(iv)}(x) - \varepsilon^4 X(x) = 0, \quad \varepsilon^4 = -\frac{\rho A}{EI} \lambda^2. \quad (3.44)$$

A base

$$\Phi = [h(x), h'(x), h''(x), h'''(x)] \quad (3.45)$$

é denominada base dinâmica.

Para descrever a solução no primeiro segmento $X_1(x)$ consideramos

$$\Phi_1(x, \varepsilon_1) = [h(x, \varepsilon_1), h'(x, \varepsilon_1), h''(x, \varepsilon_1), h'''(x, \varepsilon_1)], \quad \varepsilon_1^4 = -\frac{\rho_1 A_1}{E_1 I_1} \lambda^2,$$

para o segundo segmento $X_2(x)$ tomamos a base transladada

$$\Phi_2(x, \varepsilon_2) = [h(x-x_1, \varepsilon_2), h'(x-x_1, \varepsilon_2), h''(x-x_1, \varepsilon_2), h'''(x-x_1, \varepsilon_2)], \quad \varepsilon_2^4 = -\frac{\rho_2 A_2}{E_2 I_2} \lambda^2.$$

O modo $X(x)$ é então dado por

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & 0 \leq x \leq x_1 \\ X_2(x), & x_1 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Para representar a matriz (3.34) em termos da base dinâmica usamos a notação

$$\phi_{jk}^{(i-1)}(x) = h^{(j+i-2)}(x - x_{k-1}, \varepsilon), \quad i, j = 1 : 4, \quad k = 1 : 2. \quad (3.46)$$

Das condições de contorno do problema de valor inicial (3.42), juntamente com (3.46) o primeiro bloco em (3.33) é dado por

$$\phi_1(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

usando a mesma notação nos outros blocos obtém-se que a matriz (3.34) tem um número maior de zeros. Usando (3.46), segue

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h(x-x_1) & h'(x-x_1) & h''(x-x_1) & h'''(x-x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h'(x-x_1) & h''(x-x_1) & h'''(x-x_1) & h^{(iv)}(x-x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h''(x-x_1) & h'''(x-x_1) & h^{(iv)}(x-x_1) & h^{(v)}(x-x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h'''(x-x_1) & h^{(iv)}(x-x_1) & h^{(v)}(x-x_1) & h^{(vi)}(x-x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h(x-x_1) & h'(x-x_1) & h''(x-x_1) & h'''(x-x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h'(x-x_1) & h''(x-x_1) & h'''(x-x_1) & h^{(iv)}(x-x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h''(x-x_1) & h'''(x-x_1) & h^{(iv)}(x-x_1) & h^{(v)}(x-x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h'''(x-x_1) & h^{(iv)}(x-x_1) & h^{(v)}(x-x_1) & h^{(vi)}(x-x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h(L-x_1) & h'(L-x_1) & h''(L-x_1) & h'''(L-x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h'(L-x_1) & h''(L-x_1) & h'''(L-x_1) & h^{(iv)}(L-x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h''(L-x_1) & h'''(L-x_1) & h^{(iv)}(L-x_1) & h^{(v)}(L-x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h'''(L-x_1) & h^{(iv)}(L-x_1) & h^{(v)}(L-x_1) & h^{(vi)}(L-x_1) \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

3.2.5 Simulações - Modelo de viga Euler-Bernoulli segmentada com dispositivos anexados em um ponto intermediário e em $x=L$

As simulações abaixo referem-se ao modelo dado na Figura (3.1), para uma viga uniforme, de modo que

$$\varepsilon^4 = -\frac{1}{EI}\rho A\lambda^2 = -\frac{m}{EI}\lambda^2. \quad (3.49)$$

Foram utilizados os valores dos parâmetros $L = 1$, $\eta = \frac{1}{2}$, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = 0$, $EI = (7 \times 10^7) \frac{(0.05 \times 0.05^3)}{12} \frac{N}{m^2}$ e $m = 0.675 \frac{kg}{m}$ dados em [27] e para diversos valores de α_{Ke} e β_M dados em [25], onde $\alpha_{Ke} = \frac{K_e^m}{EI}$ e $\beta_M = \frac{M}{m}$.

Nas Tabelas (3.1) - (3.7) tem-se as cinco (5) primeiras frequências da viga ε_j , $j = 1 : 5$ calculadas pelo método proposto neste trabalho e a frequência fundamental da viga, ε_1 , calculada por [25].

Na Tabela (3.1) temos os valores de ε_j , $j = 1 : 5$ obtidos quando fizemos $\alpha_{Ke} = 0$ e $\beta_M = 0$.

A Tabela (3.2) temos os valores de ε_j , $j = 1 : 5$ obtidos quando fizemos $\alpha_{Ke} = 0.5$ e $\beta_M = 1.0$.

Na Tabela (3.3) temos os valores de ε_j , $j = 1 : 5$ obtidos quando fizemos $\alpha_{Ke} = 1.5$ e $\beta_M = 8.0$.

A Tabela (3.4) se refere aos resultados para $\alpha_{Ke} = 3.0$ e $\beta_M = 10.0$.

A Tabela (3.5) se refere aos resultados para $\alpha_{Ke} = 5.0$ e $\beta_M = 0$.

A Tabela (3.6) se refere aos resultados para $\alpha_{Ke} = 0$ e $\beta_M = 10.0$.

A Tabela (3.7) se refere aos resultados para $\alpha_{Ke} = 8.0$ e $\beta_M = 15.0$.

As Tabelas (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) e (3.6) apresentam na primeira coluna as cinco (5) primeiras frequências naturais do problema (ε_j , $j=1,2, \dots,5$), obtidas neste trabalho. Na segunda coluna tem-se a frequência fundamental da viga obtida por Gürgöze, [25]. Quando comparadas as frequências fundamentais, observa-se excelente concordância.

Os resultados mostrados nas Tabelas (3.5) e (3.7) estão representados em todas as figuras nos gráficos (d) e (f), respectivamente. Observa-se que para $\alpha_{Ke} = 5.0$ e $\beta_M = 0$ os modos de vibração da viga comportam-se como os modos de uma viga fixa-livre. Para $\beta_M = 8.0$ e $\alpha_{Ke} = 15.0$ os modos de vibração da viga comportam-se como os modos de uma viga fixa-fixa.

j	Método Proposto	[25]
1	1.875104069	1.875104
2	4.694091092	–
3	7.854756506	–
4	10.99538272	–
5	14.13668691	–

Tabela 3.1: Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 0$, $\beta_M = 0$

j	Método Proposto	[25]
1	1.253102075	1.253102
2	4.035052521	–
3	7.134227098	–
4	10.26803395	–
5	13.38647078	–

Tabela 3.2: Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 0.5$, $\beta_M = 1.0$

j	Método Proposto	[25]
1	0.7861137428	0.786114
2	3.954062645	–
3	7.077693321	–
4	10.21676489	–
5	13.34698348	–

Tabela 3.3: Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 1.5$, $\beta_M = 8.0$

j	Método Proposto	[25]
1	0.7527451668	0.752745
2	3.963772833	–
3	7.076294603	–
4	10.21620157	–
5	13.35412515	–

Tabela 3.4: Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 3.0$, $\beta_M = 10.0$

j	Método Proposto
1	1.955310946
2	4.718615315
3	7.854761807
4	10.99713927
5	14.15332787

Tabela 3.5: Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 5.0$, $\beta_M = 0$

j	Método Proposto	[25]
1	0.7357819194	0.735782
2	3.938465833	
3	7.075615372	
4	10.21620157	
5	13.35304501	

Tabela 3.6: Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 0$, $\beta_M = 10.0$

j	Método Proposto
1	0.7034355231
2	4.001117219
3	7.075111045
4	10.21650647
5	13.35550918

Tabela 3.7: Valores de ε_j para $\alpha_{ke} = 8.0$, $\beta_M = 15.0$

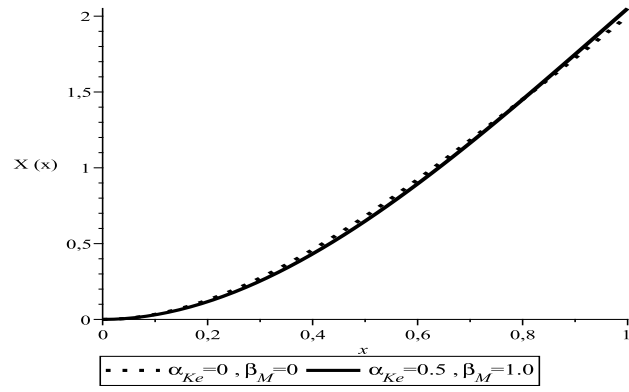
Em todas as figuras abaixo segue-se a sequência das tabelas descritas a seguir:

- Figura(a) associada a Tabela (3.2);
- Figura(b) associada a Tabela (3.3);
- Figura(c) associada a Tabela (3.4);
- Figura(d) associada a Tabela (3.5);
- Figura(e) associada a Tabela (3.6);
- Figura(f) associada a Tabela (3.7).

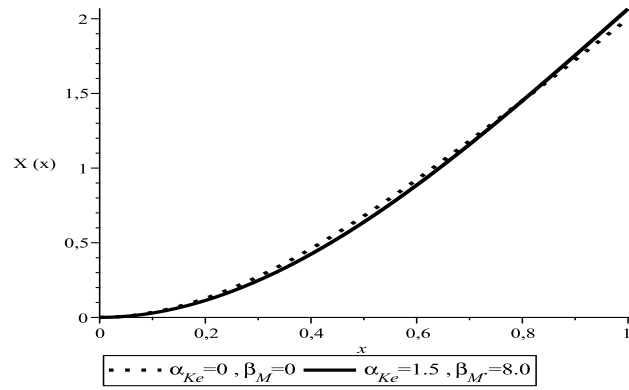
Nas figuras a seguir, Figuras (3.2) e (3.3) tem-se representado o primeiro modo de vibração da viga, Figuras (3.4) e (3.5) tem-se o segundo modo de vibração, Figuras (3.6) e (3.7) tem-se o terceiro modo de vibração e nas Figuras (3.8) e (3.9) tem-se o quarto modo de vibração, nas quais a linha pontilhada, ilustra os resultados para $\alpha_{Ke} = 0$ e $\beta_M = 0$, ou seja, para a viga fixa livre sem dispositivos anexados. A linha contínua representa o primeiro modo de vibração da viga com dispositivos anexados, para diversos valores de α_{Ke} e β_M .

A linha contínua representa a viga com dispositivos anexados com valores: Nas Figuras (3.2)(a), (3.4)(a), (3.6)(a) e (3.8)(a), $\alpha_{Ke} = 0.5$ e $\beta_M = 1$, (3.2)(b), (3.4)(b), (3.6)(b) e (3.8)(b), $\alpha_{Ke} = 1.5$ e $\beta_M = 8.0$, (3.2)(c), (3.4)(c), (3.6)(c) e (3.8)(c) $\alpha_{Ke} = 3.0$ e $\beta_M = 10.0$, (3.3)(d), (3.5)(d), (3.7)(d) e (3.9)(d), $\alpha_{Ke} = 5.0$ e $\beta_M = 0$, (3.3)(e), (3.5)(e), (3.7)(e) e (3.9)(e), $\alpha_{Ke} = 0$ e $\beta_M = 10.0$ e em (3.3)(f), (3.5)(f), (3.7)(f) e (3.9)(f) $\alpha_{Ke} = 8.0$ e $\beta_M = 15.0$.

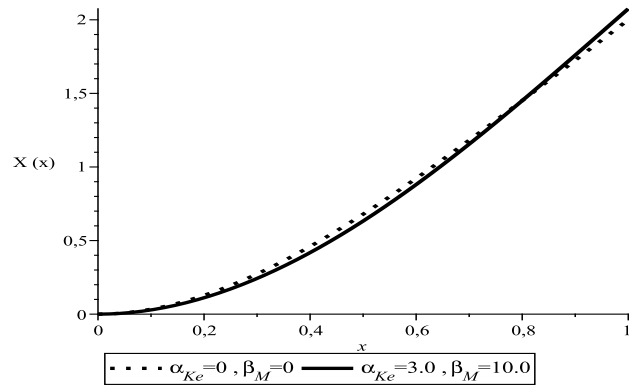
Nas Figuras (3.3)(d), (3.5)(d), (3.7)(d) e (3.9)(d) a linha pontilhada ilustra o primeiro, segundo, terceiro e quarto modos de vibração, respectivamente para $\alpha_{Ke} = 0$ e $\beta_M = 0$, e a linha contínua representa os mesmos modos para $\alpha_{Ke} = 5.0$ e $\beta_M = 0$. Observa-se uma pequena diferença no primeiro modo de vibração, Figura (3.3)(d). Nas Figuras (3.5)(d), (3.7)(d) e (3.9)(d) tem-se, respectivamente, o segundo, terceiro e quarto modos de vibração. Observa-se que são praticamente idênticos.



(a)

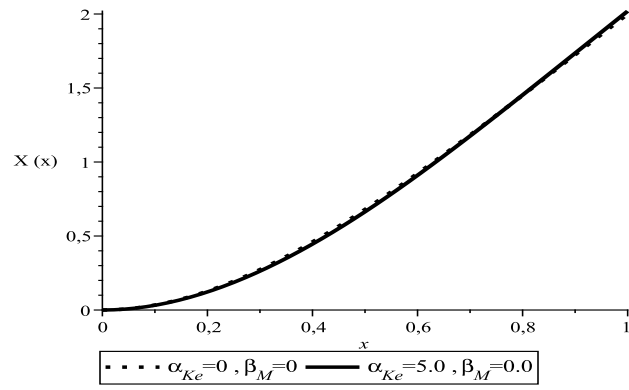


(b)

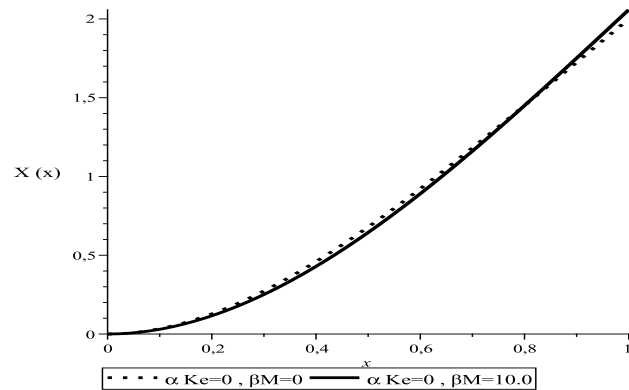


(c)

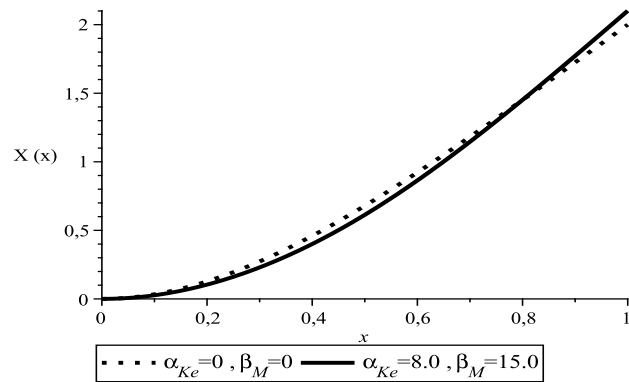
Figura 3.2: Primeiro modo de vibração - (a), (b), (c): (*linha pontilhada*) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (*linha contínua*) viga fixa com dispositivos anexados.



(d)



(e)



(f)

Figura 3.3: Primeiro modo de vibração - (d), (e), (f): (*linha pontilhada*) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (*linha contínua*) viga fixa com dispositivos anexados.

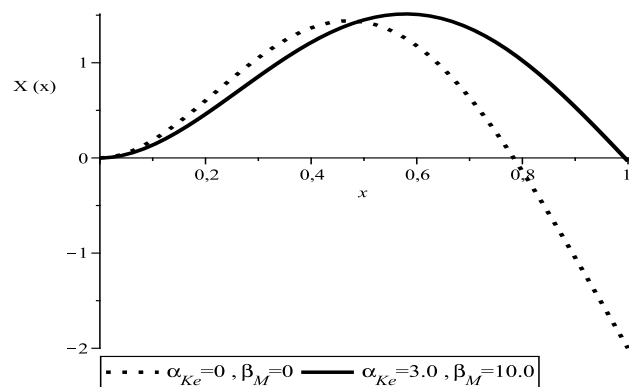
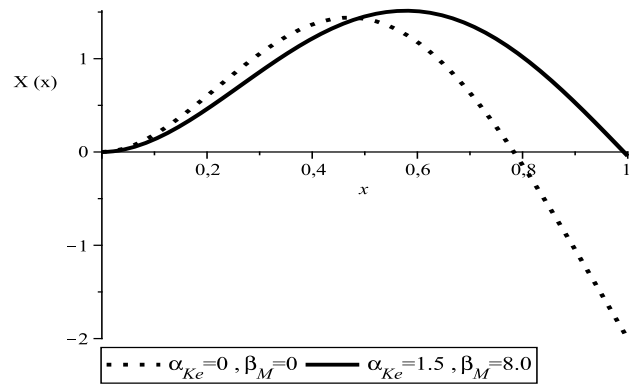
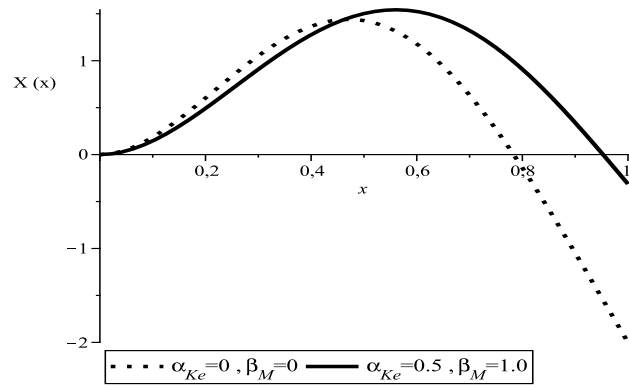
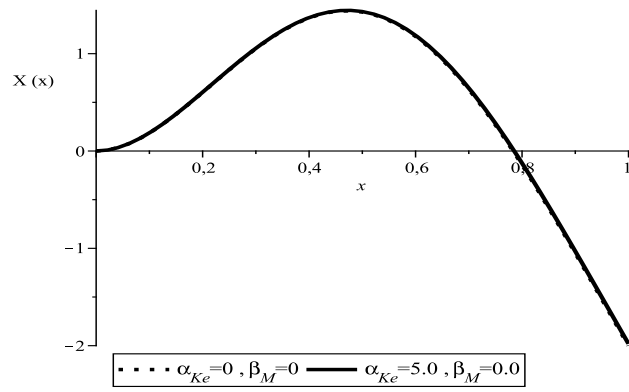
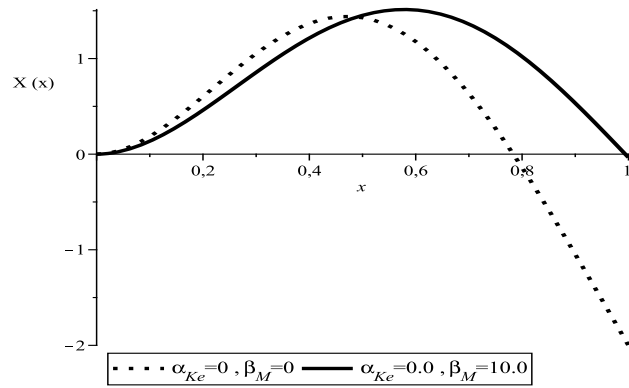


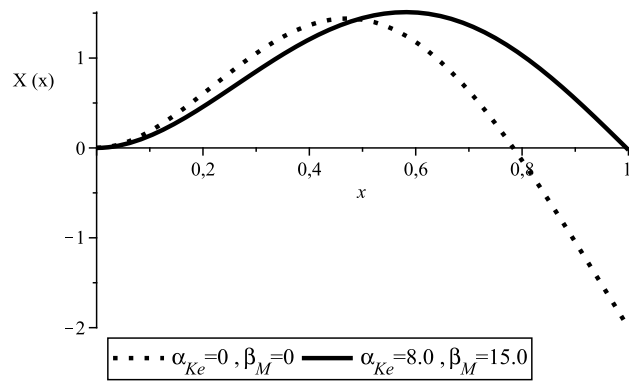
Figura 3.4: Segundo modo de vibração - (a), (b), (c): (*linha pontilhada*) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (*linha contínua*) viga fixa com dispositivos anexados.



(d)

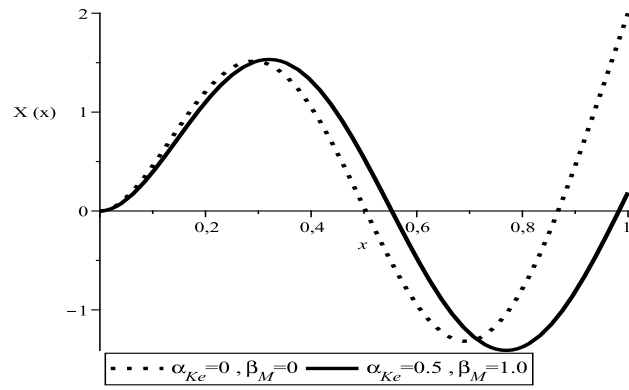


(e)

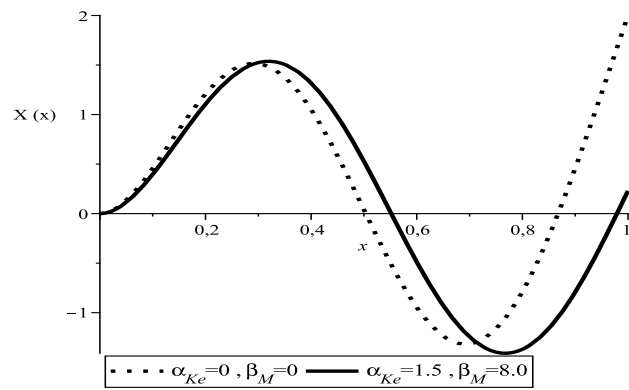


(f)

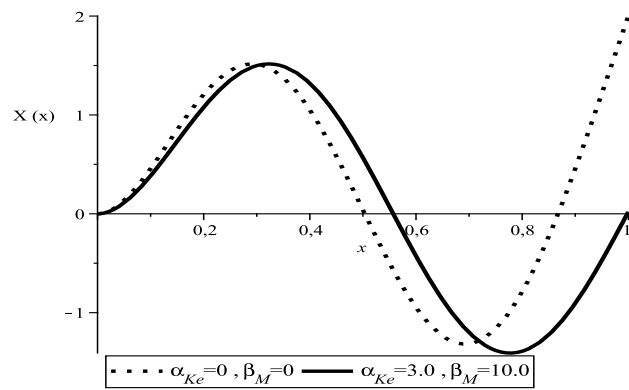
Figura 3.5: Segundo modo de vibração - (d), (e), (f): (*linha pontilhada*) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (*linha contínua*) viga fixa com dispositivos anexados.



(a)

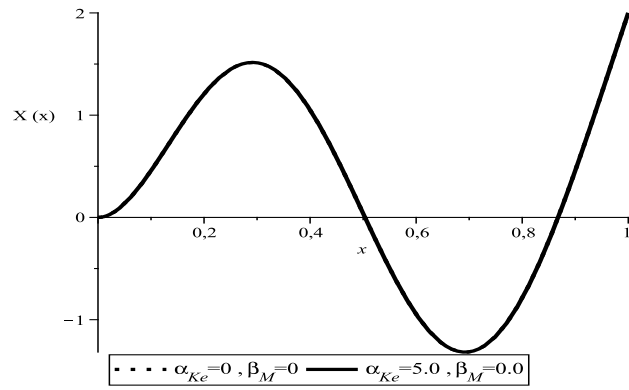


(b)

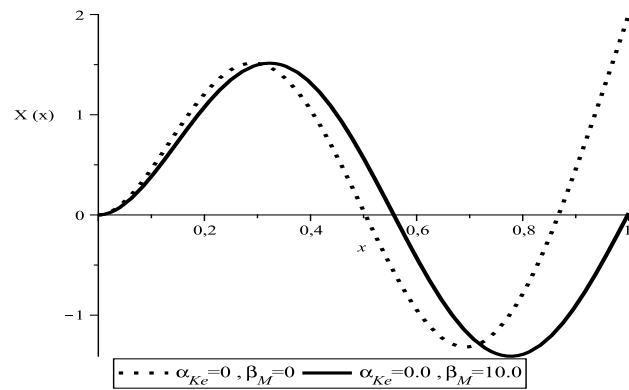


(c)

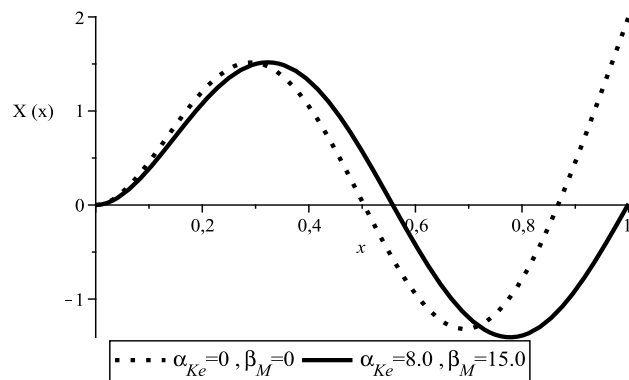
Figura 3.6: Terceiro modo de vibração - (a), (b), (c): (*linha pontilhada*) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (*linha contínua*) viga fixa com dispositivos anexados.



(d)

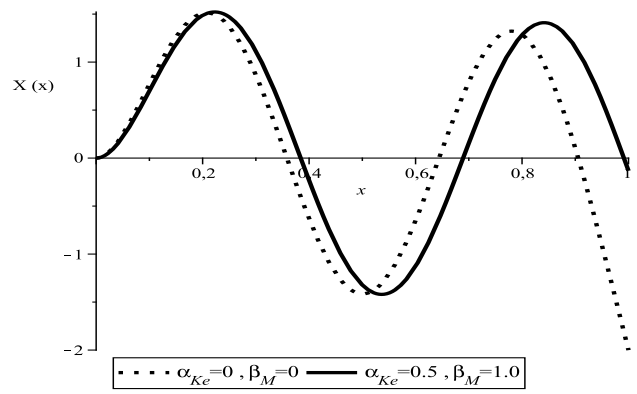


(e)

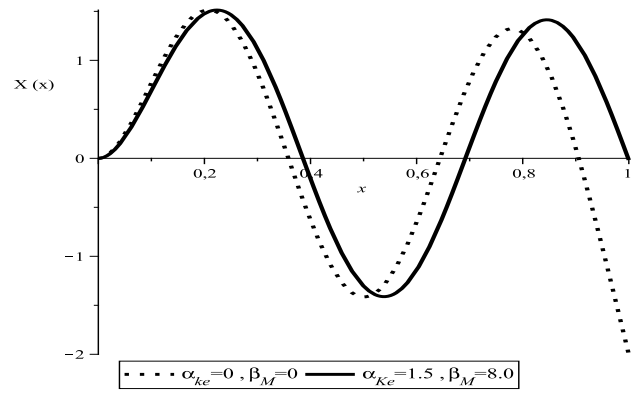


(f)

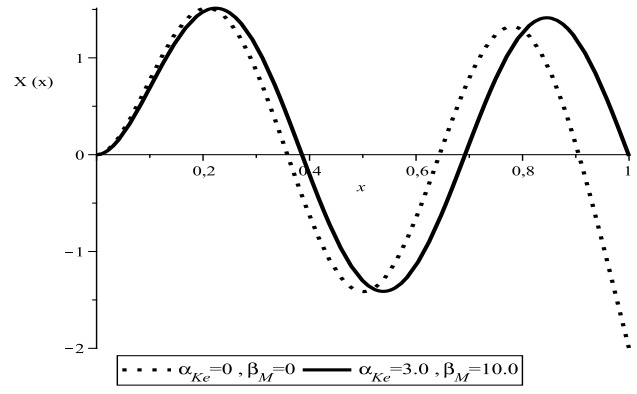
Figura 3.7: Terceiro modo de vibração - (d), (e), (f): (*linha pontilhada*) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (*linha contínua*) viga fixa com dispositivos anexados.



(a)

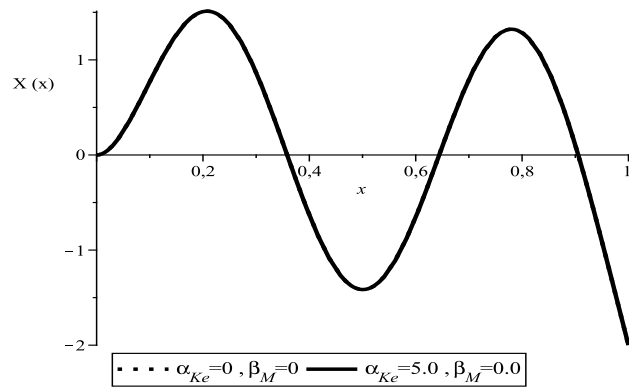


(b)

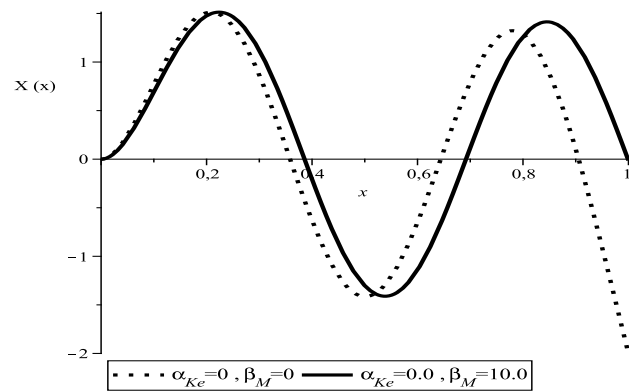


(c)

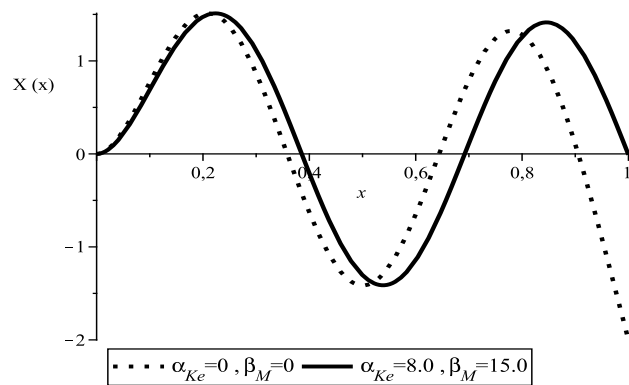
Figura 3.8: Quarto modo de vibração - (a), (b), (c): (*linha pontilhada*) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (*linha contínua*) viga fixa com dispositivos anexados.



(d)



(e)



(f)

Figura 3.9: Quarto modo de vibração - (d), (e), (f): (*linha pontilhada*) viga fixa-livre sem dispositivos anexados; (*linha contínua*) viga fixa com dispositivos anexados

3.3 Um Modelo de Viga Euler-Bernoulli com Amortecimento Viscoso e Dispositivos Anexados em $x=L$

3.3.1 Descrição do modelo

Considera-se aqui uma viga com amortecimento viscoso fixa em $x = 0$ e de comprimento L . Na viga é anexado na extremidade $x = L$, dispositivos tipo massa, mola e amortecedor, [50], conforme Figura (3.10).

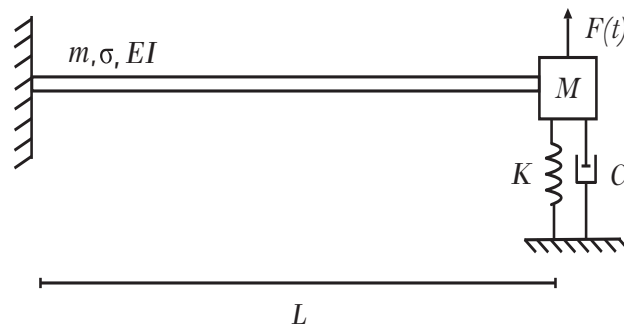


Figura 3.10: Viga fixa em $x=0$ e com dispositivos em $x=L$

O deslocamento transversal da viga $w(t, x)$, incluindo o efeito do amortecimento é dado por

$$\mathcal{M} \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} + \mathcal{C} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} + \mathcal{K} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (3.50)$$

onde

m	massa por unidade de comprimento
$\rho A = m$	ρ : densidade linear, A : área da seção transversal
E	módulo de Young
I	momento de inércia
σ	amortecimento viscoso
$w(x, t)$	deslocamento transversal da viga
x	variável espacial
t	variável temporal
M	massa anexada em $x = L$
K	mola anexada em $x = L$
C	constante de amortecimento em $x = L$
$F(t)$	força externa

As condições de contorno referentes ao problema são

$$\begin{aligned} w(t, 0) &= 0, & w_x(t, 0) &= 0, \\ w_{xx}(t, L) &= 0, & EIw_{xxx}(t, L) &= Mw_{tt}(t, L) + Cw_t(t, L) + Kw(t, L), \end{aligned}$$

onde a massa, M , a constante de amortecimento viscoso C e a constante de rigidez da mola K , representam os dispositivos anexados na extremidade $x = L$ da viga.

Vibrações livres podem ser obtidas assumindo que as soluções para (3.50) são da forma

$$w(t, x) = e^{\lambda t} X(x), \quad x \in [0, L],$$

obtém-se uma equação diferencial ordinária de quarta ordem dada por

$$X^{(iv)}(x) - \varepsilon^4 X(x) = 0, \quad x \in [0, L], \quad (3.51)$$

onde

$$\varepsilon^4 = -(\alpha + \lambda\beta)\lambda, \quad \alpha = \frac{\sigma}{EI} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{m}{EI},$$

e com condições de contorno dadas por

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & X'(0) &= 0, \\ X''(L) &= 0, & EIX'''(L) &= (M\lambda^2 + C\lambda + K)X(L). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Usando a mesma metodologia da seção anterior, escrevemos a solução para (3.51) em termos da base dinâmica [5, 7, 18],

$$\Phi(x) = [h(x) \ h'(x) \ h''(x) \ h'''(x)], \quad (3.53)$$

isto é,

$$X(x) = c_1 h(x) + c_2 h'(x) + c_3 h''(x) + c_4 h'''(x) = \Phi(x) \mathbf{C}, \quad (3.54)$$

onde \mathbf{C} é um vetor de ordem (4×1) de componentes c_1, c_2, c_3, c_4 , e $h(x)$ é denominada solução fundamental, solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} h^{(iv)}(x) - \varepsilon^4 h(x) &= 0, \\ h(0) &= 0, \quad h'(0) = 0, \quad h''(0) = 0, \quad h'''(0) = 1. \end{aligned} \quad (3.55)$$

As condições de contorno da viga em $x = 0$ e as condições iniciais da equação que envolve a solução fundamental (3.55), implicam que $c_3 = c_4 = 0$ e portanto a equação modal (3.54) fica reduzida a

$$X(x) = c_1 h(x) + c_2 h'(x).$$

Condições de contorno clássicas ou não-clássicas podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} A_{11}X(0) + B_{11}X'(0) + C_{11}X''(0) + D_{11}X'''(0) &= 0, \\ A_{12}X(0) + B_{12}X'(0) + C_{12}X''(0) + D_{12}X'''(0) &= 0, \\ A_{21}X(L) + B_{21}X'(L) + C_{21}X''(L) + D_{21}X'''(L) &= 0, \\ A_{22}X(L) + B_{22}X'(L) + C_{22}X''(L) + D_{22}X'''(L) &= 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Uma formulação matricial em blocos para as matrizes das condições de contorno B_0 em $x = 0$, B_L em $x = L$, e para a matriz da base de soluções Φ dada por (3.53), pode ser escrita na forma

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 M - \lambda C - K & 0 & 0 & EI \end{pmatrix}$$

e

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} h(x) & h'(x) & h''(x) & h'''(x) \\ h'(x) & h''(x) & h'''(x) & \epsilon^4 h(x) \\ h''(x) & h'''(x) & \epsilon^4 h(x) & \epsilon^4 h'(x) \\ h'''(x) & \epsilon^4 h(x) & \epsilon^4 h'(x) & \epsilon^4 h''(x) \end{pmatrix}$$

ou

$$B = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_L \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi(0) \\ \Phi(L) \end{pmatrix},$$

onde $\Phi(0)$ e $\Phi(L)$ são as matrizes da base de soluções em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, e as matrizes 0 , denotam matrizes nulas de ordem (2×4) .

Substituindo (3.54) em (3.56), obtemos um sistema linear dependente de λ

$$\mathcal{U}(\lambda)\mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (3.57)$$

para o vetor $\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ de ordem (4×1) .

A matriz $U = B\Phi$ é de ordem (4×4) , B é a matriz que carrega informações acerca das condições de contorno de ordem (4×8) e Φ é a matriz formada pela base de soluções nos extremos $x = 0$ e $x = L$, de ordem (8×4) .

Resolvendo $U = B\Phi$, em $x = 0$ e $x = L$, obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ h''(L) & h'''(L) & \epsilon^4 h(L) & \epsilon^5 h'(L) \\ L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} L_1 &= -(\lambda^2 M + \lambda C + K)h(L) + EIh'''(L), \\ L_2 &= -(\lambda^2 M + \lambda C + K)h'(L) + \epsilon EIh(L), \\ L_3 &= -(\lambda^2 M + \lambda C + K)h''(L) + \epsilon EIh'(L), \\ L_4 &= -(\lambda^2 M + \lambda C + K)h'''(L) + \epsilon EIh''(L). \end{aligned}$$

Soluções não nulas para (3.57) são obtidas a partir da equação característica

$$\det(\mathcal{U}) = 0.$$

3.3.2 Resposta Forçada

A resposta forçada para problema dado pela figura (3.10), com $\sigma = 0$, $C = K = 0$, se reduz ao cálculo da solução da equação

$$EIw_{xxxx}(x, t) + m\ddot{w}(x, t) = F(t), \quad (3.58)$$

onde \ddot{w} é a derivada segunda de $w(x, t)$ em relação ao tempo e $F(t)$ é uma força externa aplicada em $x = L$ e as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0, & \tilde{w}_x(0, t) &= 0, \\ w_{xx}(L, t) &= 0, & EIw_{xxx}(L, t) &= M\ddot{w}(x, t). \end{aligned} \quad (3.59)$$

O problema dado pela equação (3.58) pode ser escrito na forma

$$\mathcal{M}w_{tt} + \mathcal{K}w = f(t, x) \quad (3.60)$$

onde os operadores diferenciais espaciais \mathcal{M} , \mathcal{K} e f são expressos por

$$\mathcal{M} = m, \quad \mathcal{K} = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \quad f(t, x) = F(t). \quad (3.61)$$

Uma vez que o problema é não-clássico devido a massa M anexada na extremidade $x = L$ da viga, ou seja, tem-se um problema com condições de contorno não clássicas, a análise modal convencional não é diretamente aplicável. Neste caso, torna-se necessário estabelecer relações de ortogonalidade para as autofunções, que desacoplam a equação original do sistema.

A equação modal associada a equação homogênea em (3.58) é dada por

$$X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0, \quad (3.62)$$

onde

$$\beta^4 = -\frac{m}{EI} \lambda^2 \quad (3.63)$$

e com condições de contorno dadas por

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & X'(0) &= 0, \\ X''(L) &= 0, & EIX'''(L) &= M\lambda^2 X(L). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Considere-se as equações modais para os modos X_i e X_j , respectivamente,

$$X_i^{(iv)}(x) - \beta_i^4 X_i(x) = 0, \quad \beta_i^4 = -\frac{m}{EI} \lambda_i^2 \quad (3.65)$$

e

$$X_j^{(iv)}(x) - \beta_j^4 X_j(x) = 0, \quad \beta_j^4 = -\frac{m}{EI} \lambda_j^2. \quad (3.66)$$

Multiplicando a equação (3.65) por $X_j(x)$, a equação (3.66) por $X_i(x)$, integrando ambas as equações de 0 a L e usando as condições de contorno em $x = 0$ (3.64), segue-se

$$X_j(L)X_i'''(L) + \int_0^L X_i''(x)X_j''(x)dx - \beta_i^4 \int_0^L X_i(x)X_j(x)dx = 0, \quad (3.67)$$

$$X_i(L)X_j'''(L) + \int_0^L X_j''(x)X_i''(x)dx - \beta_j^4 \int_0^L X_i(x)X_j(x)dx = 0. \quad (3.68)$$

Usando a condição de contorno $EIX_k'''(L) = M\lambda_k^2 X_k(L)$, $k = i, j$ nas equações (3.67) e (3.68), tem-se depois de algumas manipulações algébricas a relação de ortogonalidade entre os modos que deve ser usadas para desacoplar o problema (3.60) com condições de contorno (3.59)

$$\int_0^L X_i(x)X_j(x) dx + \frac{M}{m}X_i(L)X_j(L) = 0, \quad i \neq j \quad (3.69)$$

Supondo uma solução aproximada para a equação (3.58) pelo método de Galerkin, tem-se

$$w(t, x) = \sum_{r=1}^n \eta_r(t)X_r(x) \quad (3.70)$$

onde, $X_r(x)$ são os modos da viga fixa com massa anexada na extremidade $x = L$. Substituindo (3.70) em (3.58) com $F(t) = f(t, x)$, obtemos

$$EI \sum_{r=1}^n \eta_r(t)X_r^{(iv)}(x) + m \sum_{r=1}^n \ddot{\eta}_r(t)X_r(x) = f(t, x). \quad (3.71)$$

Define-se o produto interno

$$\langle X_i, X_j \rangle = \int_0^L X_i X_j dx + \frac{M}{m}X_i(L)X_j(L), \quad (3.72)$$

então

$$\langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} \|X_i(x)\|^2, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (3.73)$$

onde

$$\|X_i\|^2 = \int_0^L X_i^2(x) dx + \frac{M}{m}(X_i(L))^2. \quad (3.74)$$

Tomando o produto interno (3.72) em (3.71), tem-se

$$\sum_{i=1}^n \left[\langle EI\eta_i(t)X_i^{(iv)}(x), X_j(x) \rangle + \langle m\ddot{\eta}_i(t)X_i(x), X_j(x) \rangle \right] = \langle f(t, x), X_j(x) \rangle, \quad (3.75)$$

ou, equivalentemente

$$\sum_{i=1}^n (EI\beta_i^4\eta_i + m\ddot{\eta}_i) \langle X_i, X_j \rangle = \langle f(t, x), X_j(x) \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad (3.76)$$

De (3.73), tem-se

$$EI\beta_i^4\eta_i + m\ddot{\eta}_i = \frac{\langle f(t, x), X_i(x) \rangle}{\langle X_i(x), X_i(x) \rangle} = \frac{\langle f(t, x), X_i(x) \rangle}{\|X_i\|^2}, \quad (3.77)$$

ou

$$\ddot{\eta}_i + \frac{EI\beta_i^4}{m}\eta_i = \frac{\langle f(t, x), X_i(x) \rangle}{m\|X_i\|^2}. \quad (3.78)$$

Pela substituição de (3.63),

$$\beta_i^4 = -\frac{m}{EI}\lambda^2, \quad (3.79)$$

em (3.78), obtém-se

$$\ddot{\eta}_i - \lambda_i^2\eta_i = G(t, x), \quad (3.80)$$

onde

$$G(t, x) = \frac{\langle f(t, x), X_i(x) \rangle}{m\|X_i\|^2} = G_i(t) \quad (3.81)$$

e

$$\langle f(t, x), X_i(x) \rangle = \int_0^L f(t, x)X_i(x)dx + \frac{M}{m}f(t, L)X_i(L)dx. \quad (3.82)$$

Com a hipótese de frequências naturais, $\omega = \lambda i$, tem-se de (3.80) e (3.81) que

$$\ddot{\eta}_i + \omega^2\eta_i = G(t, x) = G_i(t). \quad (3.83)$$

A solução da equação diferencial (3.83) com condições iniciais nulas, isto é, $\eta(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 0$, é dada em termos de uma convolução, [5, 7], isto é,

$$\eta_i(t) = \int_0^t h_i(t - \tau)G_i(\tau) d\tau, \quad (3.84)$$

onde

$$h_i(t) = \frac{\text{sen}(w_i t)}{w_i}, \quad w_i^2 = -\lambda_i^2 \quad (3.85)$$

é a solução dinâmica ou resposta impulso, solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \ddot{h}_i(t) + \omega^2 h_i(t) &= 0, \\ h_i(0) &= 0, \quad \dot{h}_i(0) = 1. \end{aligned}$$

Desta forma a resposta forçada, $w(t, x)$, para o problema dado na equação (3.58) com $F(t) = f(t, x)$ é obtida substituindo (3.84) em (3.70), e dada por

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t h_i(t - \tau) G_i(\tau) d\tau \right) X_i(x) \quad (3.86)$$

ou

$$w(t, x) = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n h_i(t - \tau) G_i(\tau) \right) d\tau X_i(x). \quad (3.87)$$

Usando o produto interno dado na equação (3.72) e a equação (3.81), tem-se

$$G_i(\tau) = \frac{\int_0^L f(\tau, \xi) X_i(\xi) d\xi + \frac{M}{m} f(\tau, L) X_i(L)}{m \|X_i\|^2}. \quad (3.88)$$

Substituindo (3.88) em (3.87) segue

$$w(t, x) = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n h_i(t - \tau) \frac{\int_0^L f(\tau, \xi) X_i(\xi) d\xi + \frac{M}{m} f(\tau, L) X_i(L)}{m \|X_i(\xi)\|^2} \right) d\tau X_i(x) \quad (3.89)$$

A função delta de Dirac, satisfaz a seguinte propriedade: [36]

$$\int_0^L f(x) \delta(x - L) dx = f(L). \quad (3.90)$$

Usando a propriedade dada na equação (3.90) o termo $\frac{M}{m} f(\tau, L) X_i(L)$ na equação (3.89) pode ser escrito na forma

$$\frac{M}{m} f(\tau, L) X_i(L) = \int_0^L \frac{M}{m} f(\tau, \xi) X_i(\xi) \delta(\xi - L) d\xi, \quad (3.91)$$

que substituído na equação (3.89), produz

$$w(t, x) = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n h_i(t - \tau) \frac{\int_0^L (1 + \frac{M}{m} \delta(\xi - L)) f(\tau, \xi) X_i(\xi) d\xi}{m \|X_i(\xi)\|^2} \right) d\tau X_i(x) \quad (3.92)$$

ou

$$w(t, x) = \int_0^t \int_0^L \sum_{i=1}^n \frac{h_i(t - \tau) X_i(\xi) X_i(x) [1 + \frac{M}{m} \delta(\xi - L)]}{m \|X_i(\xi)\|^2} f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (3.93)$$

A equação (3.60),

$$\mathcal{M}\ddot{w} + \mathcal{K}w = f(t, x) \quad (3.94)$$

tem solução, [5, 7, 13]

$$w(t, x) = \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (3.95)$$

Comparando as equações (3.93) e (3.95), tem-se que

$$h(t - \tau, x, \xi) = \sum_{i=1}^n \frac{h_i(t - \tau) X_i(x) X_i(\xi) \left[1 + \frac{M}{m} \delta(\xi, L)\right]}{m \|X_i(\xi)\|^2}. \quad (3.96)$$

A função $h(t, x, \xi)$ é conhecida como resposta impulso ou função de Green de valor inicial.

3.3.3 Simulações - Modelo de viga Euler-Bernoulli com amortecimento viscoso e dispositivos anexados em $x=L$

Foram realizadas simulações para determinar as frequências e os modos de vibração para o modelo dado na Figura (3.10), variando os valores de M , C e K .

Parâmetros da viga usados nas simulações: $EI = 1$, $\rho A = 16$ e $\sigma = 1.6$. Valores para os dispositivos anexados em $x = L$: $M = 4$, $C = 4$, $K = 8$. Todos os parâmetros utilizados são adimensionais, [50].

Para efeitos de validação, apresenta-se na Tabela (3.8) os resultados para os primeiros cinco (5) autovalores, λ , obtidos através do método proposto e para os autovalores obtidos por [50].

Nas Figuras (3.11) e (3.12), têm-se os quatro primeiros modos de vibração da viga fixa em $x = 0$ e com dispositivos em $x = L = 1$, juntamente com os respectivos modos de vibração da viga fixa-livre clássica, ou seja, sem dispositivos anexados. Observa-se que os dispositivos anexados em $x = L$ retardam o comportamento dos modos com relação aos modos da viga sem dispositivos.

Nas Figuras (3.13) e (3.14), apresentam-se a parte imaginária dos quatro primeiros modos de vibração, $X_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, da viga fixa em $x = 0$ e com dispositivos em $x = L = 1$.

	Método Proposto	[50]
1	-0.27051682+1.14514090i	-0.2705+1.1451i
2	-0.13567314+4.49296000i	-0.1357+4.4930i
3	-0.08964396+13.25855386i	-0.0896+13.2586i
4	-0.07271319+26.88747089i	-0.0727+26.8877i
5	-0.06472743+45.42932818i	-0.0647+45.4297i

Tabela 3.8: Autovalores (λ) da viga com amortecimento viscoso e dispositivos em $x=L$

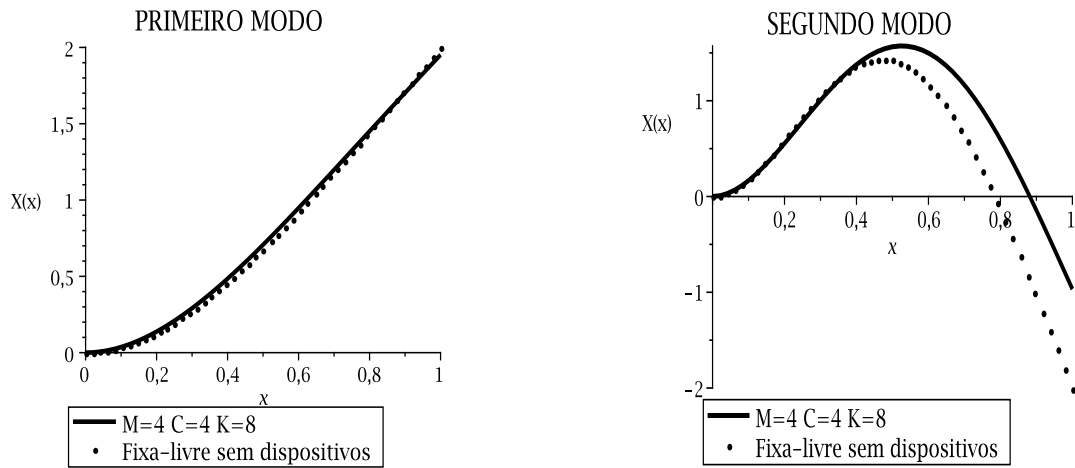


Figura 3.11: Primeiro e segundo modos de vibração da viga com e sem dispositivos em $x=L$ - Parte real

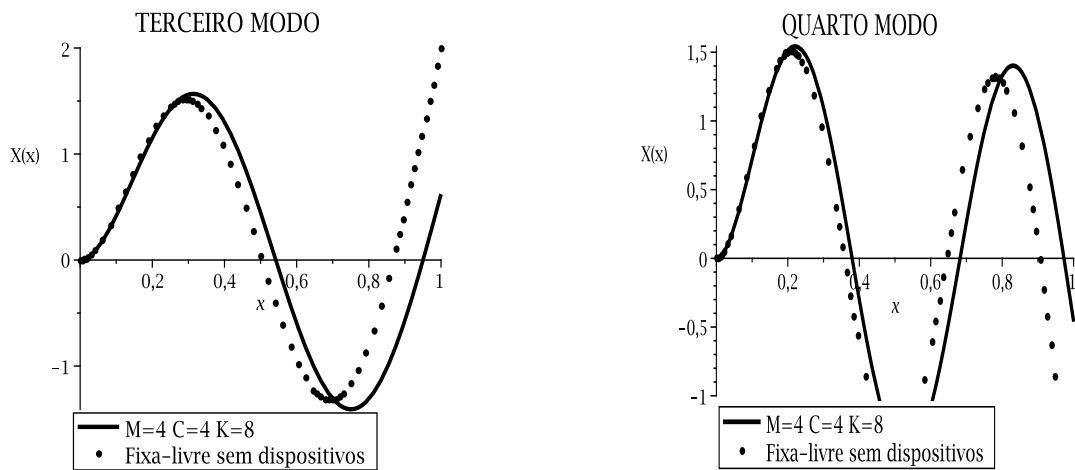


Figura 3.12: Terceiro e quarto modos de vibração da viga com e sem dispositivos em $x=L$ - Parte real

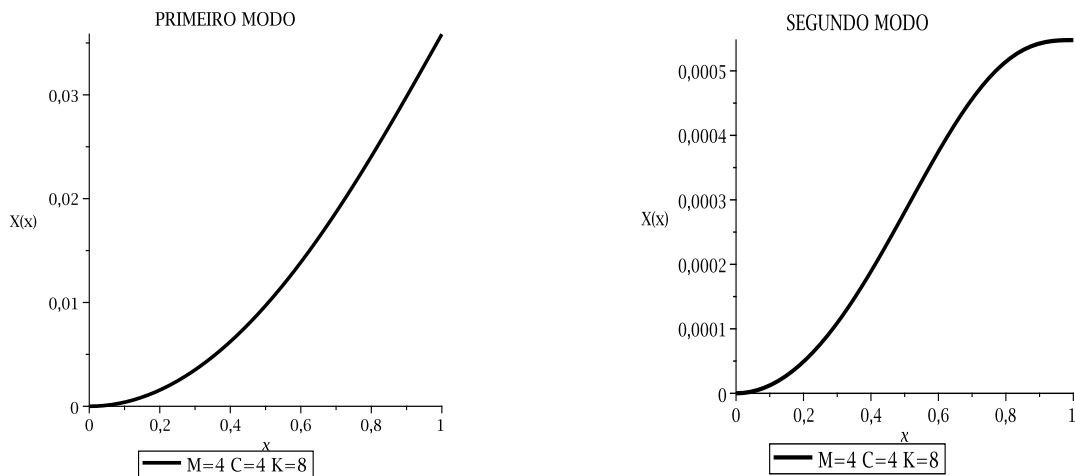


Figura 3.13: Primeiro e segundo modos de vibração da viga com dispositivos em $x=L$ - Parte imaginária

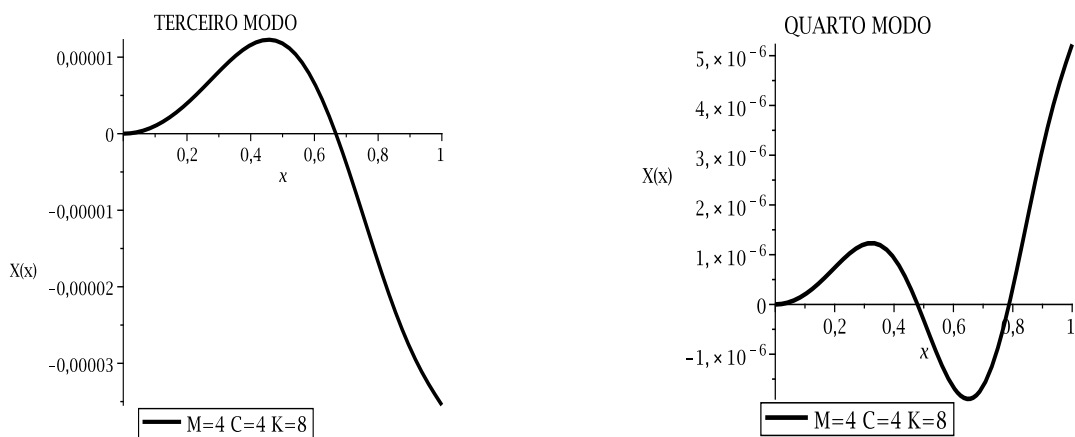


Figura 3.14: Terceiro e quarto modos de vibração da viga com dispositivos em $x=L$ - Parte imaginária

Foram realizadas simulações para diversos valores de M , C e K , com o objetivo de avaliar o comportamento dos modos de vibração em relação a estes dispositivos anexados na extremidade $x = L$ da viga.

Apresenta-se aqui, os resultados para $M = 30$, $C = 4$ e $K = 8$. Para fins de validação, embora estes resultados não estão disponibilizados em [50], observa-se nas figuras (3.15) e (3.16) que os modos têm o comportamento esperado.

Os quatro autovalores, correspondentes aos quatro primeiros modos são
 $\lambda_1 = -0.06476546996 + 0.5666461333i$, $\lambda_2 = -0.05094727345 + 3.973643584i$,
 $\lambda_3 = -0.05032691917 + 12.61974556i$ e $\lambda_4 = -0.05016047242 + 26.19166263i$,
respectivamente.

Nas figuras (3.15) e (3.16) têm-se os primeiros quatro modos de vibração da viga fixa em $x = 0$ e com dispositivos $M = 30$, $C = 4$ e $K = 8$ em $x = L$ juntamente com os primeiros quatro modos de vibração da viga fixa-livre clássica (sem dispositivos anexados). Observa-se que os modos de vibração, a partir do segundo, de uma viga fixa em $x = 0$ e com dispositivos anexados em $x = L$ ($M = 30$, $C = 4$ e $K = 8$) têm comportamento semelhante aos modos de vibração de uma viga fixa-fixa ou fixa apoiada.

Nas figuras (3.17) e (3.18) têm-se a parte imaginária dos primeiros quatro modos de vibração da viga fixa em $x = 0$ e com dispositivos $M = 30$, $C = 4$ e $K = 8$ em $x = L$.

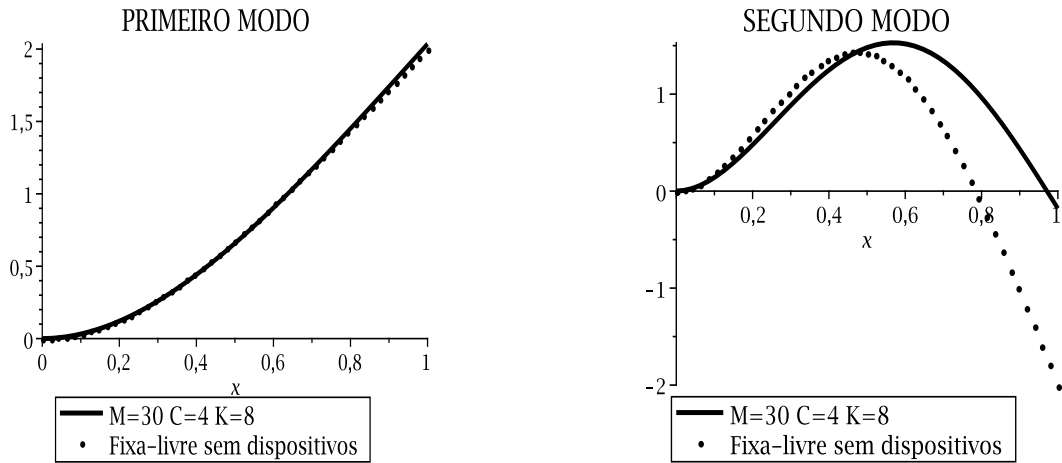


Figura 3.15: Primeiro e segundo modos de vibração da viga com $M=30$, $C=4$ e $K=8$ e sem dispositivos em $x=L$ - Parte real

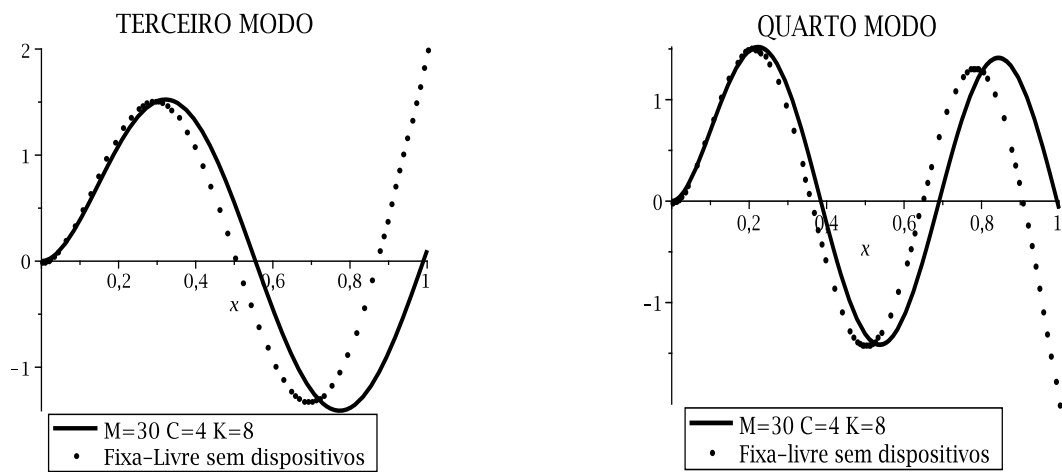


Figura 3.16: Terceiro e quarto modos de vibração da viga com $M=30$, $C=4$ e $K=8$ e sem dispositivos em $x=L$ - Parte real

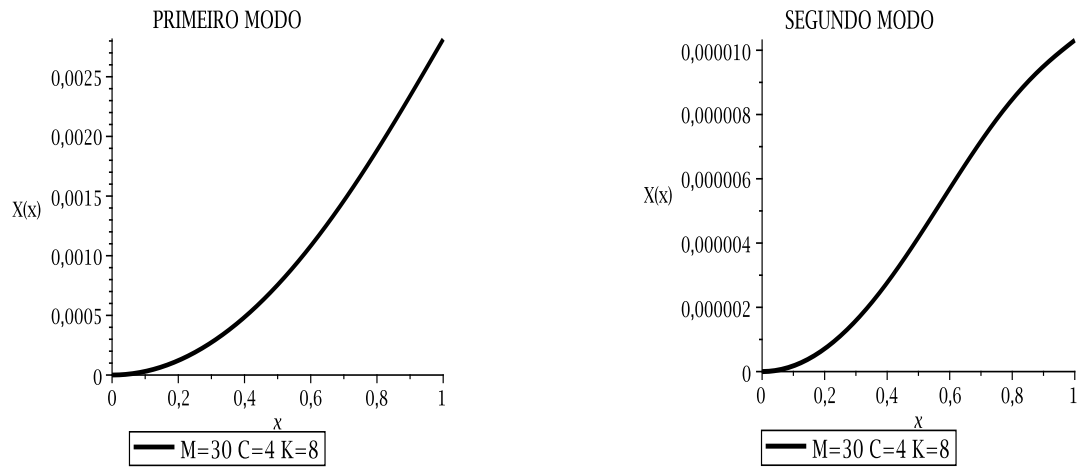


Figura 3.17: Primeiro e segundo modos de vibração da viga com $M=30$, $C=4$ e $K=8$ em $x=L$ - Parte imaginária

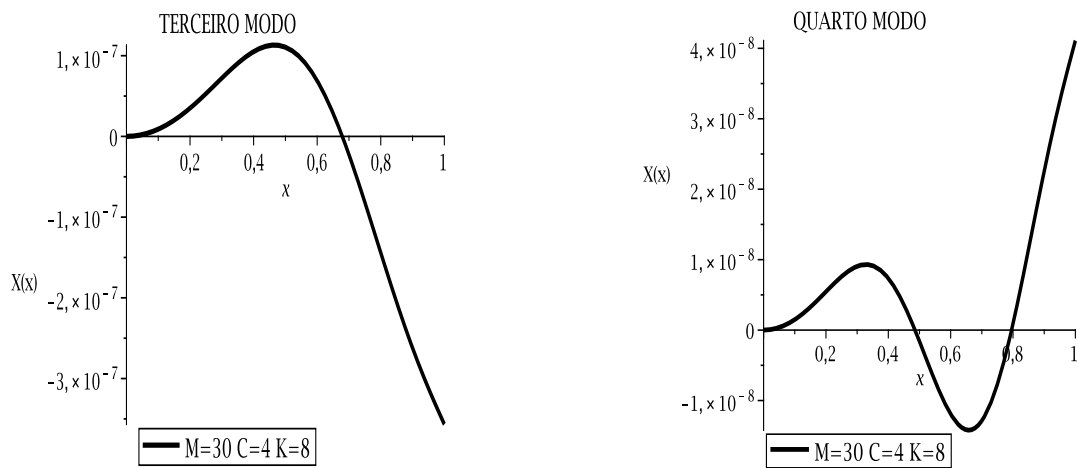


Figura 3.18: Terceiro e quarto modos de vibração da viga com $M=30$, $C=4$ e $K=8$ em $x=L$ - Parte imaginária

Capítulo 4

Conclusão

Existem três modelos principais para descrever a dinâmica de vigas: Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko. Neste trabalho, o Princípio de Hamilton é usado para obter a equação da viga de Euler-bernoulli.

Neste trabalho, foram obtidas as frequências e as autofunções de vigas Euler-Bernoulli consideradas não-clássicas, por incluírem amortecimento viscoso ou condições de contorno não-clássicas.

A análise modal foi utilizada para determinar as autofunções ou modos de vibração da viga, os quais são solução de uma equação diferencial de quarta ordem. Esta solução, foi escrita em termos da base dinâmica, gerada pela solução dinâmica da equação diferencial de quarta ordem correspondente. Este cálculo foi realizado através de uma formulação matricial em blocos para as condições de contorno e de compatibilidade. Nos problemas abordados neste trabalho, o uso da base dinâmica reduziu os cálculos na obtenção dos modos e das frequências.

O método de Galerkin foi utilizado para encontrar respostas forçadas de problemas não-clássicos. Uma vez que a análise modal clássica não é aplicável a problemas que envolvam amortecimento ou condições de contorno não clássicas, foram obtidas novas condições de ortogonalidade entre os modos de vibração.

Foram realizadas simulações com o objetivo de comparar os resultados obtidos para as frequências usando a metodologia descrita neste trabalho com os resultados da literatura. Além disso, observou-se o comportamento dos modos de vibração de uma viga fixa em $x = 0$, para diversos valores dos dispositivos anexados num ponto intermediário e no extremo $x = L$ da viga. Dependendo dos valores destes dispositivos, os modos de vibração, a partir do segundo, podem apresentar o comportamento dos modos de vibração de uma viga fixa-fixa ou fixa-apoiada.

Este trabalho permitiu estender a aplicabilidade da metodologia que usa a análise modal, uma formulação matricial em blocos e a base dinâmica para escrever a solução da equação modal de modelos descritos pela teoria de Euler-Bernoulli para vigas. Os resultados encontrados são excelentes quando comparados com a literatura.

Nas simulações, foi utilizado o software Maple 10.

Referências Bibliográficas

- [1] Aseka, E. H. **Estudo de vigas viscoelásticas e sistemas com parâmetros concentrados com amortecimento viscoelástico utilizando a base dinâmica gerada pela resposta impulso**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 2008.
- [2] Bidel, A. C. L. **Respostas periódicas em sistemas lineares e fracamente não-lineares não ressonantes e comportamento de sistemas rotativos com o uso da base dinâmica**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSM, Santa Maria, RS, Brasil, 2003.
- [3] Bishop, R. E. D. and Johnson, D. C. **The mechanics of vibration**, Cambridge, New York, 1960
- [4] Chang, T. -P., Chang, F.-I. and Liu, M.-F. On the eigenvalues of a viscously damped simple beam carrying point masses and springs, **Journal of Sound and Vibration**, vol.240, no.4, pp. 769-778, 2001.
- [5] Claeysen, J. R. and Tsukazan, T., Dynamic solutions of linear matrix differential equations, **Quarterly of Applied Mathematics XLVIII**, (1), 1990.
- [6] Claeysen, J. R. On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using the dynamical matrix solution, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 140(1), pp. 73-84, 1990.
- [7] Claeysen, J. C. R., Canahualpa, G. and Jung, C. A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations, **Applied Numerical Mathematics**, vol.30(1), pp. 65-78, 1999.
- [8] Claeysen J. C., Chiwiacouski, L. D., and Suazo, G. C., The impulse response in the symbolic computing of modes for beams and plates, **Applied Numerical Mathematics**, vol. 40, pp. 1129-135, 2002.
- [9] Claeysen, J.R. and Soder R.A., A dynamical basis for computing modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 259(4), pp. 986-990, 2003.

- [10] Claeysen, J. C., Ferreira, I. M. and Copetti, R. D., Decomposition of forced responses in vibrating systems, **Applied Numerical Mathematics** vol.47, 391-405, 2003.
- [11] Claeysen, J. C. R. and Tsukazan T. A dynamic basis for computing the modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, **Journal of Sound and Vibration**, vol.259, no.4, pp.986-990, 2003.
- [12] Costa, S. N. J. **O modelo de Timoshenko em vigas elásticas, estruturas offshore e nanotubos de carbono através da resposta fundamental**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 2006.
- [13] Copetti, R. D. **Sistemas concentrados e distribuídos através da análise modal adjunta**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSM, Santa Maria, RS, Brasil, 2002.
- [14] Copetti, R. D., Claeysen, J. R. and Tsukazan, T. A triple-span Euler-Bernoulli beam with damping, **6th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications**, 2006.
- [15] Copetti, R. D., Claeysen, J. C. R. and Tsukazan, T. Modal formulation of segment Euler-Bernoulli beams, **Mathematical Problems in Engineering**, doi 10.1155/2007/36261, 2007.
- [16] Copetti, R. D., Claeysen, J. R. and Tsukazan, T. Dynamical response of a forced viscous append cantilever beam, **9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications**, 2010.
- [17] Copetti, R. D. e Migotto, D. A base fundamental em vigas Euler-Bernoulli com dois segmentos, **Anais do CNMAC**, vol.3, ISSN 1984 - 820X, 2010.
- [18] Copetti, R. D., Migotto, D. e Tolfo, D. R. Sobre a resposta dinâmica de uma viga com amortecimento, **Mecânica Computacional**, Vol XXIX, pp. 4247-4254, 2010.
- [19] Friswell, M. I. and Lees, A. W. The modes of non-homogeneous damped beams, **Journal of Sound and Vibration**, vol.242, no.2, pp. 355-361, 2001.
- [20] Gantamacher, F. **Lectures in analytical mechanics**, Mir Publissers, Moscow, 1970.
- [21] Gallicchio, E. D. **Sistemas vibratórios: um enfoque através da solução dinâmica e da matriz de transferencia**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 1999.

- [22] Giareta, M. K. **Vibrações forçadas com força axial num modelo de Euler- Bernoulli para vigas**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 2001.
- [23] Ginsberg, J. **Mechanical and structural vibrations**, John Wiley, New York, 2002.
- [24] Gorman, D. **Free vibration analysis of beams and shafts**, John Wiley, New York, 1995.
- [25] Gürgöze, M. On the eigenfrequencies of cantilevered beams carrying a tip mass and spring-mass in-span, **Int. J. Mech. Sci.**, vol. 38, no. 12, pp. 1295-1306, 1996.
- [26] Gürgöze, M. On the sensitivities of the eigenvalues of a viscously damped cantilever carrying a tip mass, **Journal of Sound and Vibration**, vol.216, no.2, pp. 215-225, 1998.
- [27] Gürgöze, M. and Erol, H. On the frequency response function of a damped cantilever simply supported in-span and carrying a tip mass, **Journal of Sound and Vibration**, vol.255, no.3, pp. 489-500, 2002.
- [28] Gürgöze, M. and Erol, H. Dynamic response of a viscously damped cantilever with a viscous end condition, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 298, no. 4, pp. 132-153, 2006.
- [29] Gürgöze, M. and Erol, H. On the eigencharacteristics of multi-step beams carrying a tip mass subjected to non-homogeneous external viscous damping, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 272, pp. 1113-1124, 2004.
- [30] Inman, D. J. **Engineering vibration**, Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [31] Jacomini, N. **Abordagem analítica para vibrações transversais de vigas multi-segmentadas com seção transversal contínua**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 2002.
- [32] Juver, J. R. B., **Modos em vigas com seção transversal com variação linear**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 2002.
- [33] Klein, V. **Um estudo evolutivo e espectral dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 2006.
- [34] Kelly, S. G. **Advanced vibration analysis**, Taylor & Francis Group, New York, 2007.

- [35] Moraes, I. F., **Uma metodologia unificada no domínio tempo para sistemas concentrados, discretos e distribuídos**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSM, Santa Maria, RS, Brasil, 2002.
- [36] Meirovitch, L. **Analytical methods in vibrations**, Motor Engineer, Londres, 1967.
- [37] Meirovitch, L. **Elements of vibration analysis**, McGraw-Hill, EUA, 1975.
- [38] Naguleswaran, S. Transverse vibrations of on Euler-Bernoulli uniform beam carrying two particles in-span, **International Journal of Mechanical Sciences**, vol.43, pp. 2737-2752, 2001.
- [39] Naguleswaran S. Natural frequencies, sensitivity and mode shape details of an Euler-Bernoulli beam with one-step change in cross-section and with ends on classical supports, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 252, n 4, pp. 751-767, 2002.
- [40] Naguleswaran, S. Vibration of an Euler-Bernoulli beam of elastic end supports and with up to three step changes in cross-section, **International Journal of Mechanical Sciences**, vol. 44, pp. 2541-2555, 2002.
- [41] Newland, D. E. **Mechanical vibration analysis and computation**, Britânia, USA, 1936.
- [42] Oliveto, G. Santini, A. and Tripodi, E. Complex modal analysis of a flexural vibrating beam with viscous end conditions, **Journal of Sound Vibration**, vol.200, no.3, pp. 327-345, 1997.
- [43] Rao, S. S. **Vibration of continuous systems**, John Wiley, New Jersey, 2007.
- [44] Rao, S. S. **Vibrações mecânicas**, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2008.
- [45] Rosa, M. A., Bellés P. M. and Maurizi, M. J. Free vibrations of stepped beams with intermediate elastic supports, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 181, no.5, pp. 905-910, 1995.
- [46] Reyes, R. J. R., **Um modelo de Timoshenko não linear para uma viga elástica com força axial**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 2009.
- [47] Sorrentino, S., Marchesiello, S. and Piombo, B. A. D. A new analytical technique for vibration analysis of non-proportionally damped beams, **Journal of Sound and Vibration**, vol.265, no.4, pp. 765-782, 2003.

- [48] Tsukazan, T. The use of dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section, **Journal of Sound and Vibration**, vol.281, no.3-5, pp. 1175-1185, 2005.
- [49] Viêlmo, S. E. **Integração semi-lagrangeana num modelo oceano-atmosfera e ajuste geostrófico no domínio tempo**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 2005.
- [50] Yang, B. and Wu X. Transient response of one-dimensional distributed systems: a closed form eigenfunction expansion realization, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 208(5), pp. 763-776, 1997.