



Dissertação de Mestrado

**FORMULAÇÃO UNIFICADA PARA
MODELOS CINÉTICOS DERIVADOS DA
EQUAÇÃO DE BOLTZMANN COM
CONDIÇÕES DE CONTORNO
GENERALIZADAS**

Cinara Ewerling da Rosa

PPGMat

Santa Maria, RS, Brasil

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**FORMULAÇÃO UNIFICADA PARA
MODELOS CINÉTICOS DERIVADOS DA
EQUAÇÃO DE BOLTZMANN COM
CONDIÇÕES DE CONTORNO
GENERALIZADAS †**

Cinara Ewerling da Rosa

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Rosenei Felipe Knackfuss, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da USFM, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Santa Maria, RS, Brasil

2012

†Trabalho financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**FORMULAÇÃO UNIFICADA PARA MODELOS CINÉTICOS
DERIVADOS DA EQUAÇÃO DE BOLTZMANN COM
CONDIÇÕES DE CONTORNO GENERALIZADAS**

elaborada por

Cinara Ewerling da Rosa

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Rosenei Felipe Knackfuss, Dr.
(Orientador)

Ivanilda Basso Aseka, Dr^a. (UFSM)

Daniela Buske, Dr^a. (UFPel)

Santa Maria, 28 de Fevereiro de 2012.

Agradecimentos

Na conclusão desta etapa de minha vida é necessário lembrar que além do esforço individual, demais pessoas me auxiliaram para que o objetivo fosse alcançado. Dessa forma, agradeço primeiramente a Deus, minha força e refúgio para todos os momentos.

Aos meus pais, Luiz e Ivalete que sempre me incentivaram na concretização deste sonho me oferecendo a oportunidade para estudar. Ao meu maninho Samuca e minha irmã e amiga Suiane que dividiu essa caminhada comigo, longe de casa, e que sempre acrescentou em nossas longas conversas baseada em trocas de conhecimento e apoio.

Ao meu namorado que apesar da distância nunca faltou amor, amizade, carinho e principalmente apoio para me ajudar a superar as dificuldades quando elas surgiram.

Aos meus amigos e colegas, em especial, Graci, Lórens e Marcos, pela cumplicidade, pelos momentos de descontração e ajuda nos estudos, mesmo não estando na mesma área de pesquisa.

Aos professores(as) da UFSM, que me serviram como guias neste aprendizado profissional nas aulas do Curso do Mestrado como também nas aulas da graduação. Em especial, ao meu orientador Rosenei Felipe Knackfuss, por sua compreensão, ensinamentos e acompanhamento na elaboração deste trabalho, sempre com muita paciência e amizade. Não poderia deixar de citar o nome da professora Luciane Flores Jacobi pelo comprometimento e auxílio no estudo estatístico do trabalho.

Aos funcionários da UFSM, principalmente à secretária do PPGMat Andréia, pela disponibilidade e atenção.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido no decorrer do curso.

A todos que contribuíram de alguma maneira nesta conclusão de meu sonho.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

FORMULAÇÃO UNIFICADA PARA MODELOS CINÉTICOS DERIVADOS DA EQUAÇÃO DE BOLTZMANN COM CONDIÇÕES DE CONTORNO GENERALIZADAS

AUTORA: CINARA EWERLING DA ROSA
ORIENTADOR: ROSENEI FELIPPE KNACKFUSS
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 28 de fevereiro de 2012.

Neste trabalho, são apresentados resultados numéricos obtidos a partir da linguagem FORTRAN para quantidades físicas de interesse como perfil de velocidade, perfil fluxo de calor, taxa fluxo de partícula, taxa fluxo de calor e componente tensor de pressão. O fluxo gasoso ocorre na direção paralela a superfície que o gás está confinado devido a um gradiente constante de pressão e um gradiente constante de temperatura que são representados pelo Problema de Poiseuille e Problema *Creep* Térmico respectivamente. Além disso, também considera-se o Problema de Couette onde o gás se move a partir do movimento das placas em sentidos opostos. A fim de descrever a interação gás-superfície utiliza-se o núcleo de Cercignani-Lampis, que ao contrário do núcleo de espalhamento de Maxwell tem dois coeficientes de acomodação para representar as propriedades físicas do gás, deixando esta interação mais próxima da realidade. A partir da simplificação da Equação de Boltzmann tem-se a teoria cinética para a dinâmica de gases rarefeito, que é desenvolvida analiticamente em uma abordagem unificada para o Modelo BGK, Modelo S, Modelo Gross-Jackson (GJ) e Modelo MRS. Dessa maneira, busca-se o modelo que mais se aproxima da veracidade, comparando os valores numéricos gerados pelos modelos e a Equação Linearizada de Boltzmann através de análises numéricas, gráficas e de matemática estatística com o procedimento da variância de dois fatores de Friedman por postos. Uma versão analítica do método de ordenadas discretas (ADO) é usada para resolver os Problemas de Poiseuille, *Creep* Térmico e Couette para duas placas paralelas infinitas com constituições químicas diferentes para Condições de Contorno de Cercignani-Lampis.

Palavras-Chave: Dinâmica de Gases Rarefeitos. Núcleo de Cercignani-Lampis. Modelos cinéticos. Método de Ordenadas Discretas.

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Federal University of Santa Maria

UNIFIED FORMULATION FOR KINETIC MODELS DERIVATIVES OF BOLTZMANN EQUATION WITH GENERALIZED BOUNDARY CONDITIONS

AUTHOR: CINARA EWERLING DA ROSA
ADVISOR: ROSENEI FELIPPE KNACKFUSS

Date and Location of Defense: Santa Maria, February 28, 2012.

In this paper, we present numerical results obtained from the FORTRAN language for physical quantities of interest such as velocity profile, profile, heat flow rate, particle flow rate, heat flux and pressure tensor component. The gas flow occur in the direction parallel to the surface the gas is confined because of a constant gradient of pressure and a constant gradient of temperature are represented by Poiseuille Problem and Problem Creep Thermal, respectively. It also considers the Couette Problem where the gas moves from the motion of the plates in opposite directions. In order to describe the gas-surface interaction we use the kernel of Cercignani-Lamp, which as opposed to core scattering Maxwell has two accommodation coefficients to represent the physical properties of gas, leaving this interaction closer to reality. From the simplification of the Boltzmann equation has the kinetic theory for rarefied gas dynamics, which is developed analytically in a unified approach to the BGK Model, S Model, Gross-Jackson (GJ) Model and MRS Model. Thus, we seek to model that most closely approximates the veracity, comparing the numerical values generated by the models and the linearized Boltzmann equation through numerical analysis, graphics and mathematical statistics with the procedure of the variance of two factors made by Friedman. A version of the analytical method of discrete ordinates (ADO) is used to solve the problems of Poiseuille, Creep Thermal and Couette for two plates infinte paralelas with different chemical constitutions Boundary Conditions for the Cercignani-Lampis.

Keywords: The dynamics of rarefied gases. Cercignani-Lamp Kernel. Kinetic models. Method of Discrete Ordinates.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Intervalo do número de Knudsen | 25 |
| 1.2 | Interação gás-superfície [24] | 34 |
| 3.1 | Escoamento de um gás em um canal plano | 48 |
| 5.1 | Disposição espacial das superfícies do canal: eixo transladado | 70 |
| 5.2 | Problema de Poiseuille: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_p a partir das Tabelas 5.7 e 5.8 | 72 |
| 5.3 | Problema de Poiseuille: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_p a partir das Tabelas 5.9 e 5.10 | 73 |
| 5.4 | Problema de Poiseuille: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{u}_p a partir da Tabela 5.12 | 77 |
| 5.5 | Problema de Poiseuille: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{u}_p a partir da Tabela 5.13 | 77 |
| 5.6 | Problema de Poiseuille: variação da largura do canal com Gás Neônio para Modelo MRS e $\epsilon = \epsilon_t$ | 80 |
| 5.7 | Problema de Poiseuille: \mathbf{q}_p para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Neônio para Modelo MRS e $\epsilon = \epsilon_t$ | 81 |
| 5.8 | Problema de Poiseuille: \mathbf{u}_p para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Neônio para Modelo MRS e $\epsilon = \epsilon_t$ | 82 |
| 5.9 | Problema <i>Creep</i> Térmico: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_t a partir das Tabelas 5.24 e 5.25 | 86 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.10 | Problema <i>Creep</i> Térmico: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_t a partir das Tabelas 5.26 e 5.27 | 87 |
| 5.11 | Problema <i>Creep</i> Térmico: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{u}_t a partir das Tabelas 5.29 e 5.30 | 91 |
| 5.12 | Problema <i>Creep</i> Térmico: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{u}_t a partir das Tabelas 5.31 e 5.32 | 91 |
| 5.13 | Problema <i>Creep</i> Térmico: variação da largura do canal com Gás Argônio para Modelo MRS e $\epsilon = \epsilon_t$ | 94 |
| 5.14 | Problema <i>Creep</i> Térmico: \mathbf{q}_t para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Argônio para Modelo MRS e $\epsilon = \epsilon_t$ | 95 |
| 5.15 | Problema <i>Creep</i> Térmico: \mathbf{u}_t para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Argônio para Modelo MRS e $\epsilon = \epsilon_t$ | 96 |
| 5.16 | Problema de Couette: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_c a partir das Tabelas 5.45 e 5.46 | 100 |
| 5.17 | Problema de Couette: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_c a partir das Tabelas 5.47 e 5.48 | 102 |
| 5.18 | Problema de Couette: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{u}_c a partir das Tabelas 5.49 e 5.50 | 104 |
| 5.19 | Problema de Couette: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_c a partir das Tabelas 5.51 e 5.52 | 105 |
| 5.20 | Problema de Couette: variação da largura do canal com Gás Xenônio para Modelo MRS e $\epsilon = \epsilon_t$ | 108 |
| 5.21 | Problema de Couette: \mathbf{q}_c para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Xenônio para Modelo MRS e $\epsilon = \epsilon_t$ | 109 |
| 5.22 | Problema de Couette: \mathbf{u}_c para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Xenônio para Modelo MRS e $\epsilon = \epsilon_t$ | 110 |
| A.1 | Regiões de rejeição: teste bilateral(esquerda) e unilateral(direita) [38] | 124 |

Lista de Tabelas

| | | |
|------|--|----|
| 3.1 | Valores dos parâmetros para cada equação modelo | 44 |
| 3.2 | Problemas da dinâmica de gases rarefeitos | 48 |
| 5.1 | Valores definidos para casos não experimentais | 67 |
| 5.2 | Valores definidos experimentalmente para gases nobres | 67 |
| 5.3 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(\tau)$ para Caso “A” | 68 |
| 5.4 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{u}_p(\tau)$ para Caso “A” | 68 |
| 5.5 | Problema de Poiseuille: \mathbf{Q}_p para Caso “A” | 69 |
| 5.6 | Problema de Poiseuille: \mathbf{U}_p para Caso “A” | 69 |
| 5.7 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” com $\epsilon = \epsilon_p$ | 70 |
| 5.8 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” com $\epsilon = \epsilon_t$ | 71 |
| 5.9 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “C” com $\epsilon = \epsilon_p$ | 71 |
| 5.10 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “C” com $\epsilon = \epsilon_t$ | 72 |
| 5.11 | Problema de Poiseuille: Soma dos Postos (R_j) para $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ | 74 |
| 5.12 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” | 76 |
| 5.13 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “C” | 76 |
| 5.14 | Problema de Poiseuille: Soma dos Postos (R_j) para $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ | 77 |
| 5.15 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Neônio para diferentes larguras do canal. | 79 |
| 5.16 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Neônio para diferentes larguras do canal. | 79 |

| | | |
|------|---|----|
| 5.17 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Neônio para $2a = 1$ | 80 |
| 5.18 | Problema de Poiseuille: $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Neônio para $2a = 1$ | 81 |
| 5.19 | Problema de Poiseuille: Modelo MRS com ϵ_t para $2a = 1.0(X)$ | 82 |
| 5.20 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{q}_t(\tau)$ para Caso “A” | 83 |
| 5.21 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{u}_t(\tau)$ para Caso “A” | 83 |
| 5.22 | Problema <i>Creep</i> Térmico: \mathbf{Q}_t para Caso “A” | 83 |
| 5.23 | Problema <i>Creep</i> Térmico: \mathbf{U}_t para Caso “A” | 84 |
| 5.24 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” com $\epsilon = \epsilon_p$ | 84 |
| 5.25 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” com $\epsilon = \epsilon_t$ | 85 |
| 5.26 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “C” com $\epsilon = \epsilon_p$ | 85 |
| 5.27 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “C” com $\epsilon = \epsilon_t$ | 86 |
| 5.28 | Problema <i>Creep</i> Térmico: Soma dos Postos (R_j) para $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ | 87 |
| 5.29 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” com $\epsilon = \epsilon_p$ | 89 |
| 5.30 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” com $\epsilon = \epsilon_t$ | 89 |
| 5.31 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “C” com $\epsilon = \epsilon_p$ | 90 |
| 5.32 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “C” com $\epsilon = \epsilon_t$ | 90 |
| 5.33 | Problema <i>Creep</i> Térmico: Soma dos Postos (R_j) para $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ | 91 |
| 5.34 | Problema <i>Creep</i> Térmico: Modelo MRS com ϵ_t para $2a = 1.0(X)$ | 93 |
| 5.35 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Argônio para diferentes larguras do canal. | 93 |
| 5.36 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Argônio para diferentes larguras do canal. | 94 |
| 5.37 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Argônio para $2a = 1$ | 95 |
| 5.38 | Problema <i>Creep</i> Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Argônio para $2a = 1$ | 96 |
| 5.39 | Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(\tau)$ para Caso “A” | 97 |
| 5.40 | Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(\tau)$ para Caso “A” | 97 |
| 5.41 | Problema de Couette: \mathbf{Q}_c para Caso “A” | 98 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.42 | Problema de Couette: \mathbf{U}_c para Caso “A” | 98 |
| 5.43 | Problema de Couette: \mathbf{P}_{xy} para Caso “D” | 98 |
| 5.44 | Problema de Couette: \mathbf{P}_{xy} para Caso “A” | 99 |
| 5.45 | Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” com $\epsilon = \epsilon_p$ | 99 |
| 5.46 | Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” com $\epsilon = \epsilon_t$ | 100 |
| 5.47 | Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “C” com $\epsilon = \epsilon_p$ | 101 |
| 5.48 | Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “C” com $\epsilon = \epsilon_t$ | 101 |
| 5.49 | Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” com $\epsilon = \epsilon_p$ | 103 |
| 5.50 | Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” com $\epsilon = \epsilon_t$ | 103 |
| 5.51 | Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “C” com $\epsilon = \epsilon_p$ | 104 |
| 5.52 | Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “C” com $\epsilon = \epsilon_t$ | 105 |
| 5.53 | Problema de Couette: Soma dos Postos (R_j) para $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ | 106 |
| 5.54 | Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Xenônio para diferentes larguras do canal. | 107 |
| 5.55 | Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Xenônio para diferentes larguras do canal. | 107 |
| 5.56 | Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Xenônio para $2a = 1$ | 108 |
| 5.57 | Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Xenônio para $2a = 1$ | 109 |
| 5.58 | Problema de Couette: Modelo MRS com ϵ_t para $2a = 1.0(X)$ | 110 |
| 5.59 | Problema de Couette: \mathbf{P}_{xy} para Modelo MRS com ϵ_t para $2a = 1.0(X)$ | 110 |
| 5.60 | Modelos Cinéticos Rejeitados para cada quantidade física de interesse. | 113 |
| A.1 | Probabilidades associadas com a cauda superior da distribuição normal | 127 |

Lista de Abreviações

| | |
|------------|----------------------------------|
| ADO | Método de Ordenadas Discretas |
| BGK | Modelo de Bhatnagar-Gross-Krook |
| DGR | Dinâmica de Gases Rarefeitos |
| EB | Equação de Boltzmann |
| ELB | Equação Linearizada de Boltzmann |
| GJ | Modelo de Gross Jackson |

Lista de Símbolos

| | |
|-------------------------------|--|
| a | Comprimento característico |
| \mathbf{c} | Vetor velocidade |
| $F(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$ | Núcleo de espalhamento sintético |
| F_r | Teste de Friedman |
| $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ | Função distribuição de partícula |
| $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ | Distribuição Maxwelliana absoluta |
| $f_n(c, c')$ | Aproximações sintéticas |
| gl | Graus de liberdade |
| H_0 | Hipótese Nula |
| H_1 | Hipótese Alternativa |
| h | Perturbação causada a Maxwelliana absoluta |
| $I_0(w)$ | Função de Bessel modificada |
| $J(ff_*)$ | Operador de colisão |
| K | Gradiente de velocidade |
| K_i | Gradiente de temperatura na direção i |
| K_n | Número de Knudsen |
| $K(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ | Núcleo de espalhamento |
| k | Número de colunas |
| k_B | Constante de Boltzmann |
| k_c | Gradiente constante de concentração |
| k_p | Gradiente constante de pressão |
| k_t | Gradiente constante de temperatura |
| l | Livre Caminho Médio |
| m | Massa molecular de partícula gasosa |
| N | Número de linhas |
| $n(t, \mathbf{r})$ | Densidade |
| n_0 | Densidade de equilíbrio |
| \mathbf{n} | Vetor unitário normal à superfície |
| $P(t, \mathbf{r})$ | Pressão |
| $P_{ij}(t, \mathbf{r})$ | Tensor de Pressão |
| P_n | Polinômio de Legendre |
| P_n^m | Função normalizada de Legendre |
| P_{xy} | Componente tensor de pressão |
| P_r | Número de Prandtl |
| p_0 | Pressão |

| | |
|-------------------------------|---|
| Q | Taxa fluxo de calor |
| $\mathbf{q}(t, \mathbf{r})$ | Fluxo de calor |
| $q(\tau)$ | Perfil fluxo de calor |
| R_j | Soma dos postos |
| R_1 | Condição controle |
| R_i | Gradiente de densidade na direção i |
| R_u | Conjunto de condições |
| $R(\mathbf{v}' : \mathbf{v})$ | Núcleo de espalhamento Cercignani-Lampis |
| \mathbf{r} | Vetor posição |
| $S(\mathbf{c})$ | Termo fonte |
| $T(\tau)$ | Perturbação de temperatura |
| T_0 | Temperatura constante |
| T_w | Temperatura da superfície |
| t | Tempo |
| U | Taxa fluxo de partícula |
| $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ | Velocidade |
| $u(\tau)$ | Perfil de Velocidade |
| u_w | Velocidade das placas |
| V_a | Velocidade peculiar na direção a |
| \mathbf{V} | Velocidade peculiar |
| \mathbf{v} | Velocidade molecular |
| \mathbf{v}_n | Componente normal da velocidade |
| \mathbf{v}_t | Vetor bidimensional da velocidade |
| x^* | Variável espacial |
| <i>Letras gregas</i> | |
| α | Nível de significância |
| α_n | Coefficiente de acomodação da energia cinética |
| α_t | Coefficiente de acomodação tangencial |
| τ_0 | Diâmetro de colisão das partículas |
| \mathcal{L} | Operador de colisão |
| ϵ_t | Livre caminho médio com a condutividade térmica |
| ϵ_p | Livre caminho médio com a viscosidade |
| $\nu(c)$ | Frequência de colisão das partículas |
| $\delta_{n,n'}$ | Delta de Kronecker |
| δ | Temperatura adimensional da parede |
| ξ_k | Ponto de quadratura |
| τ | Variável espacial adimensional |
| ν_j | Constante de separação |
| μ_* | Viscosidade |
| λ_* | Condutividade Térmica |
| χ^2 | Teste qui-quadrado |
| ϖ_k | Peso de quadratura |

Sumário

| | |
|---|-----------|
| INTRODUÇÃO | 16 |
| 1 FUNDAMENTOS DA DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS | 23 |
| 1.1 O Número de Knudsen | 23 |
| 1.2 A função de distribuição | 25 |
| 1.3 A equação de Boltzmann | 26 |
| 1.4 A Equação Linearizada de Boltzmann | 28 |
| 1.5 O Núcleo de Espalhamento | 30 |
| 1.6 O Livre caminho médio | 31 |
| 1.7 A Condição de Contorno | 33 |
| 2 AS EQUAÇÕES MODELO | 37 |
| 2.1 As Equações Modelo | 37 |
| 2.2 Quantidades Físicas | 42 |
| 3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA | 43 |
| 3.1 Definição do problema | 43 |
| 3.2 Formulação vetorial do problema | 44 |
| 3.3 Problemas da dinâmica de gases rarefeitos | 48 |
| 3.3.1 Problema de Poiseuille | 49 |
| 3.3.2 Problema <i>Creep</i> Térmico | 50 |
| 3.3.3 Problema de Couette | 50 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4 | SOLUÇÃO EM ORDENADAS DISCRETAS | 52 |
| 4.1 | Solução Geral | 52 |
| 4.1.1 | Solução Particular | 53 |
| 4.1.2 | Solução Homogênea | 53 |
| 4.2 | Condição de Contorno | 58 |
| 4.2.1 | Problema de Poiseuille e <i>Creep</i> Térmico | 59 |
| 4.2.2 | Problema de Couette | 60 |
| 4.3 | Sistema Linear | 61 |
| 4.4 | Grandezas Físicas | 62 |
| 4.4.1 | Problema de Poiseuille | 62 |
| 4.4.2 | Problema <i>Creep</i> Térmico | 63 |
| 4.4.3 | Problema de Couette | 63 |
| 5 | ASPECTOS COMPUTACIONAIS E RESULTADOS NUMÉRICOS | 65 |
| 5.1 | Considerações gerais | 65 |
| 5.2 | Problemas da dinâmica de gases rarefeitos | 67 |
| 5.2.1 | Problema de Poiseuille | 68 |
| 5.2.2 | Problema <i>Creep</i> Térmico | 82 |
| 5.2.3 | Problema de Couette | 96 |
| | CONCLUSÃO | 111 |
| | REFERÊNCIAS | 114 |
| A | ANÁLISE DE VARIÂNCIA POR POSTOS | 123 |
| A.1 | Testes de hipóteses | 123 |
| A.2 | Escolha do teste estatístico | 124 |
| A.3 | Análises de variância de dois fatores de Friedman por postos | 125 |

INTRODUÇÃO

Atualmente, vivemos uma evolução tecnológica intensa na busca da facilidade e comodismo do cotidiano. Isso é mais perceptível ao nos depararmos com reportagens que revelam o progresso da miniaturização, como por exemplo, “Microcâmera tem o tamanho de um grão de sal” [85], onde relata a utilização desta inovação na fabricação de endoscópios descartáveis para realização de cirurgias de alta precisão e na eliminação de retrovisores dos carros. Além disso, nos deparamos com esta evolução, simplesmente ao pensar na história de um simples celular ou até mesmo de um computador, onde a poucos anos atrás eram extremamente grandes, pesados e com valor financeiro alto.

Alguns aparelhos já atingiram um bom tamanho que equilibra a portabilidade e praticidade, como por exemplo, o caso do celular. Dessa maneira, o desafio agora, apenas muda de foco, ou seja, manter o tamanho do aparelho com uma maior capacidade de inserção de funcionalidades [22]. Esse objetivo é mais claro quando observamos o menor consumo de energia desses aparelhos. Mas, para compreendermos esta evolução e o que envolve o desenvolvimento da miniaturização é necessário entender inicialmente alguns conceitos básicos.

Na natureza, tem-se que a matéria é dividida em três principais estados físicos: sólido, líquido e gasoso. Quando a substância apresenta-se no estado líquido ou gasoso é denotado por fluido. De maneira mais formal, tem-se que um fluido é definido como uma substância que se deforma continuamente, quando submetida a uma força tangencial constante [29].

A característica mais marcante dos fluidos é a sua facilidade em deformação pois, não possuem forma própria, ao contrário dos sólidos [51]. Essa facilidade proporciona o movimento, no qual seus estudos dão origem à área de Mecânica dos Fluidos. Esse campo de estudo é dividido em dois ramos: estática dos fluidos que envolve substâncias estacionárias e dinâmica dos fluidos que considera as substâncias em movimento sob a ação de forças [71].

As moléculas de ar e água são fluidos que possuem movimento contínuo e aleatório. Na fase líquida há fortes forças de coesão e de repulsão entre as moléculas onde apresenta

uma superfície livre, enquanto que o gases se expandem para ocupar todo o recipiente que os contém [37]. Além disso, líquidos são difíceis de comprimir enquanto que gases são facilmente comprimidos.

Os estudos mais antigos relatados referente à mecânica dos fluidos surgiram na Grécia Antiga por intermédio de Arquimedes de Siracusa (282 - 212 a.C.) que formulou o conceito do empuxo, o Princípio de Arquimedes⁴. Muito tempo depois, com o surgimento do cálculo diferencial e integral o estudo relacionado à mecânica de fluidos começou a evoluir. Em virtude disso, a mecânica dos fluidos moderna teve início no século XVIII, com dois grandes físicos e matemáticos: Daniel Bernoulli (1700 - 1782) e Leonardo Euler (1707 - 1783) [37] no qual aplicaram as leis de Newton, formuladas para corpos rígidos, aos líquidos.

O estudo dos fluidos é amplo e está relacionado com quase todo o trabalho humano. A sua aplicação é muitas vezes intuitiva, como na antiguidade no qual conceitos de aerodinâmica eram empregados para transformar hastes de madeira em flechas longilíneas, com pontas em forma de cunha [72]. Hoje, a aplicação está presente nas mais diversas áreas do conhecimento, tais como:

- Meteorologia: tornados, tempestades, fenômenos climáticos e furacões;
- Transportes: automóveis, trens, navios, aviões, foguetes e submarinos;
- Industrialização: energia elétrica, bombas, ventiladores, máquinas que precisam ser lubrificadas sendo que o lubrificante é um fluido;
- Meio ambiente: combustão, irrigação, controle de inundação, abastecimento de água, disposição de esgoto, poluição atmosférica, movimento de projetis, oleodutos e gasodutos.

O fluxo de fluidos esta presente no avanço tecnológico relacionado a miniaturização conforme destacado anteriormente, onde de forma mais específica, a mecânica dos fluidos aborda aplicações envolvendo sistemas microeletromecânicos (**MEMS**), microsistemas tecnológicos (**MST**) e sistemas nanoeletrônicos (**NEMS**) [62, 67] que vem evoluindo no decorrer dos anos por ser aplicável em diversas áreas, tais como:

- Medicina: marcapasso do coração, microbombas implantáveis capacitados para diagnosticar ou administrar pequenas doses de medicamentos, como por exemplo, a insulina nos

⁴Princípio de Arquimedes: Um corpo completo ou parcialmente imerso em um fluido receberá a ação de uma força para cima igual ao peso do fluido que o corpo desloca, ou seja, quando um objeto flutua, seu peso é igual ao empuxo que nele atua [45].

diabéticos [69, 84];

- Automotivo: acelerômetro de airbag, giroscópios, sensores de pressão, temperatura e de injeção eletrônica [46, 79];
- Aeronáutica: sensores para medir a altitude, controlar sistemas hidráulicos e de identificação de turbulência [87];
- Indústria: microrreatores de hidrogenação conduzida, cabeçotes de leitura ou gravação em discos rígidos de computadores, cabeçotes de impressoras, células de microcombustível e microtrocaadores de calor para a refrigeração de microchips [90];
- Aeroespacial: equipamentos de vácuo [87], aerodinâmica espacial [41] e mecânica de aerossóis [81, 82].

Entretanto, quando desenvolve-se microsistemas, ou seja, sistemas em pequena escala, é necessário tomar alguns cuidados, pois dentre outras situações, tem-se que a aproximação contínua pode não ser válida, fazendo com que os efeitos da superfície sejam mais importantes do que as forças de campo, tais como a viscosidade, compressibilidade e forças intermoleculares [62]. Em virtude disso, as equações de Navier-Stokes⁵ nem sempre poderão ser aplicáveis, já que sua modelagem se dá apenas em um meio contínuo [92].

É necessário também, ao trabalhar em microescala, considerar para o movimento de líquidos os efeitos eletrocinéticos [77] e efeito mecânico polar [89], já para o fluxo de gases considera-se o estado de rarefação que, em geral, é utilizado para resolução de problemas de dinâmica de gases rarefeitos (**DGR**) [64, 87]. Nesse sentido, utiliza-se o parâmetro adimensional conhecido como número de Knudsen para caracterizar os fluidos gasosos. O número de Knudsen divide o gás em três principais estados [87], são eles: regime hidrodinâmico, de transição e molecular livre.

Nesse momento, surge o questionamento de que se as equações de Navier-Stokes são modeladas apenas para o regime contínuo, ou seja, no regime hidrodinâmico, como será abordado os demais estados do gás? Em virtude disso, utiliza-se a Equação de Boltzmann⁶ (**EB**)

⁵As equações de Navier-Stokes, inicialmente, foram derivadas por M. Navier em 1827 e S.D. Poisson em 1831, onde baseavam-se em considerações relacionadas a forças intermoleculares. Logo após, em 1843 por B. de Saint Venant e em 1945 por G.G. Stokes as mesmas equações foram derivadas sem as hipóteses iniciais. As derivações foram fundamentadas a partir de que tensões normais e de cisalhamento [71].

⁶A Equação de Boltzmann é conhecida como equação do transporte e foi publicada em 1872 por Ludwig Boltzmann (1844 - 1906) considerado, por muitos, como um dos criadores da mecânica estatística devido a maior parte de suas publicações serem na área de termodinâmica e teoria cinética [83].

para modelar os problemas da **DGR**, pois esta equação abrange qualquer estado do gás, inclusive o contínuo, e tem a função de descrever estatisticamente a distribuição de partículas em um gás, isto é, seu estudo é utilizado para determinar quantidades físicas como calor e massa quando o gás é transportado [48].

Contudo, a **EB**, mesmo com a grande evolução computacional, ainda se mostra de difícil resolução pois é uma equação diferencial parcial não linear com sete variáveis independentes e que contem um complexo operador de colisão. Nesse sentido, a fim de possibilitar o trabalho com a equação foram desenvolvidos métodos de simplificação, no qual, inicialmente visa uma versão linearizada. Mas, o trabalho com a Equação Linearizada de Boltzmann (**ELB**), conhecida como equação do transporte integro diferencial, ainda é muito restrito devido ao seu núcleo sintético.

Diversos estudos [20, 11, 32, 33, 40] foram desenvolvidos visando uma simplificação da equação integro diferencial, mas para isso era necessário manter as características matemáticas e físicas fundamentais da **EB** [48]. Dessa maneira, foram definidas diversas equações modelo, onde o termo integral de colisão é simplificado, entre esses modelos podem ser citados:

- **Modelo BGK** proposto por Bhatnagar, Gross e Krook [63];
- **Modelo S** proposto por Shakhov [28, 87];
- **Modelo Gross-Jackson (Modelo GJ)** proposto por Gross e Jackson [25] e abordado por Scherer [23];
- **Modelo MRS** proposto por Garcia e Siewert [14];
- **Modelo CLF** proposto por Cercignani, Loyalka e Ferziger [5, 50] e abordado por Siewert e Williams [17, 64];
- **Modelos CES e CEBS** proposto por Barichello e Siewert [4];
- **Modelo de McCormack** proposto por McCormack [36].

A maioria dos trabalhos que abordam os modelos cinéticos, apresentam um foco individual, ou seja, estudam equações modelo separadamente. Para uma melhor metodologia de estudo, propõe-se neste trabalho uma alternativa de descrever quatro modelos cinéticos unificadamente, que foi proposto inicialmente por Garcia em 2006 [14] para três modelos. Essa proposta define um núcleo de espalhamento geral no qual possui parâmetros que conforme sua escolha descrevem um modelo cinético em particular. Dessa maneira, tem-se a possibilidade de

a partir de um único desenvolvimento analítico, mais elaborado, reproduzir um maior número de resultados numéricos, visando assim, comparações e análises entre os modelos.

Para termos a possibilidade de reproduzir resultados numéricos de grandezas físicas de interesse, inicialmente deve-se definir um canal por onde irá ocorrer o fluxo de gás, que neste estudo será caracterizado por duas placas paralelas e não simétricas. Assim, é necessário observar que a escolha dessa superfície irá interferir no fluxo gasoso, dessa maneira, deve-se considerar ainda as condições de contorno para caracterizar esta ação juntamente com a **EB** simplificada.

A condição de contorno mais utilizada atualmente é a de Maxwell, pela sua simplicidade. Contudo, esta condição de contorno esta longe de representar condições reais, já que possui apenas um coeficiente de acomodação, ou seja, define apenas uma propriedade física do gás. No entanto, o gás possui mais de uma propriedade física, isto é, necessita-se uma condição de contorno no qual de a possibilidade de utilizarmos mais de uma propriedade do gás. Pensando nisso, será trabalhado com uma condição de contorno mais elaborada, a do núcleo de Cercignani-Lampis. Essa condição apresenta dois coeficientes de acomodação, o tangencial e o normal, que em algum momento no decorrer do trabalho será adaptado para representar, experimentalmente, as propriedades físicas de três gases nobres: Argônio (Ar), Neônio (Ne) e Xenônio (Xe).

Para enfim, concluir o problema do nosso estudo, ainda é necessário definir o que irá provocar o movimento do gás, se é um gradiente de pressão, gradiente de temperatura ou até mesmo algum movimento da superfície, que serão representados na parte não homogênea da equação íntegro-diferencial ou na parte não homogênea da Condição de Contorno de Cercignani-Lampis. Nesse sentido, serão abordados três problemas clássicos da **DGR**: Problema de Poiseuille⁷, Problema *Creep* Térmico e Problema de Couette⁸.

A partir da definição do problema é necessário ainda escolher o método de resolução, sendo que no decorrer dos anos, quando aborda-se os métodos determinísticos, nota-se que

⁷Jean Louis Marie Poiseuille (1799 - 1869), nascido em Paris, foi médico fisiologista e físico que estudava o escoamento em microtubos, com diâmetros inferiores a 0.2mm. Suas publicações abordavam assuntos referentes ao coração e a circulação sanguínea, onde discutia bombeamento do coração, o escoamento do sangue nas veias e nos vasos capilares e a resistência a este movimento. Esse conhecimento possibilitou entender a circulação de água em tubulações, desenvolvendo as importantes leis de fluxo laminar de fluidos viscosos em tubos cilíndricos. Definiu a Lei de Poiseuille, onde mostrou que em um regime laminar a velocidade média é proporcional a perda. Assim, formulou uma expressão matemática para a taxa de fluxo laminar de fluidos em tubos circulares [37].

⁸Maurice Alfred Marie Couette (1858 - 1943), nascido em Tours na França, foi o primeiro cientista a fazer medições precisas de viscosidade para os fluidos, utilizando sua invenção, um viscosímetro cilíndrico. Também, mostrou experimentalmente a validade, em muitos casos, da aplicação da condição de aderência de um fluido viscoso nas paredes do recipiente [1].

diversos métodos foram estudados, destacando-se entre outros:

- o método de solução aproximada *two-stream* proposto por Schwarzschild e Schuster [2, 53];
- o método dos harmônicos esféricos proposto por Jeans [49];
- o método de ordenadas discretas proposto por Wick e Chandrasekhar [39, 78];
- o método de Case proposto por Case [54];
- o método exato de solução proposto por Sharipov [31];
- o método de ordenadas discretas analítico proposto por Barichello e Siewert [12, 16].

Dentre os citados, o método de ordenadas discretas (**ADO**) deriva do modelo proposto por Wick e Chandrasekhar, o qual difere pelo esquema de quadratura do tipo *half-range*, além da determinação das constantes de separação a partir da resolução de um problema de autovalores. Embora, o método **ADO** seja mais simples, ele se mostra muito eficiente nos problemas de **DGR**, como para transferência radioativa e transporte de nêutrons [3, 12, 13, 18, 23, 48, 56, 57, 58, 60, 70], além de o método ter uma fácil implementação computacional e de rápido processamento de resultados numéricos.

Na proposta de alcançar os objetivos relatados no decorrer desta discussão apresenta-se os capítulos que abordam os temas da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** mostra um estudo inicial sobre o conceito de **DGR**, introduzindo o Número de Knudsen, **EB** e sua linearização. Além disso, inicia-se um dos tópicos de destaque desse trabalho, que são as condições de contorno generalizadas conhecidas como Condições de Contorno de Cercignani-Lampis. Todo o estudo tem referências bibliográficas sendo que quando necessário é trabalhado com maior detalhe alguns conceitos fundamentais;
- **Capítulo 2:** realiza-se uma análise sob as equações modelo: **Modelo BGK**, **Modelo S**, **Modelo GJ** e **Modelo MRS** a fim de detalhar o desenvolvimento unificado analítico que será desenvolvido no decorrer do trabalho. Ainda, são introduzidos ao leitor as quantidades físicas de interesse, como perfil fluxo de calor, perfil de velocidade e taxas de fluxo de calor, de partícula e o componente tensor de pressão;
- **Capítulo 3:** é apresentado ao leitor os problemas propostos em cima dos modelos cinéticos para Condições de Contorno de Cercignani-Lampis, são eles: Problema de

Poiseuille, Problema *Creep* Térmico e Problema de Couette. Além disso, desenvolve-se a formulação vetorial, obtendo a solução analítica no qual aplica-se nas condições de contorno e nas quantidades físicas de interesse para cada problema separadamente;

- **Capítulo 4:** aplica-se o método analítico de ordenadas discretas no problema vetorial proposto obtendo um sistema linear de equações com o objetivo de encontrar as constantes arbitrárias computacionalmente para substituir e assim calcular as grandezas físicas de interesse que também terão sua formulação em ordenadas discretas;
- **Capítulo 5:** obtém-se resultados numéricos para os problemas propostos onde estes valores serão comparados por meio de análises de tabelas, gráficos e da estatística para definir o modelo que mais se aproxima da veracidade comparando-se com os valores numéricos da **ELB**, encontrados na literatura.

Capítulo 1

FUNDAMENTOS DA DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS

Neste capítulo, será introduzido um parâmetro adimensional definido como número de Knudsen (K_n). Esse parâmetro divide o gás em regimes de escoamento, no qual, auxilia na utilização correta das equações de Navier-Stokes, que neste caso, podem ser utilizadas somente quando o regime está em um meio contínuo [87]. Nesse caminho, busca-se a alternativa da equação do transporte, conhecida como a **EB**, que pode ser trabalhada em todo regime do gás. Contudo a **EB** é não linear e possui uma integral de colisão com grande dificuldade de desenvolvimento analítico, o que restringe a utilização dessa equação integro-diferencial. Com o objetivo de ampliar o trabalho com a **EB** propõe-se um método de linearização que irá simplificar a integral de colisão a partir de um núcleo de espalhamento.

Além disso, é necessário destacar a interação gás-superfície representado, neste estudo, pelo núcleo de Cercignani-Lampis, que impõe condições de contorno à função de distribuição e, delimita de maneira mais próxima com a realidade do fluxo gasoso nas superfícies sólidas.

Dessa forma, o foco deste capítulo, consiste em produzir uma base teórica referente a **DGR** através da **EB** e sua linearização, condições de contorno e grandezas físicas de interesse.

1.1 O Número de Knudsen

O estudo da dinâmica de gases rarefeitos pode ser feita através da análise de um parâmetro adimensional, conhecida como número de Knudsen (K_n). O número de Knudsen

é definida pela razão entre o livre caminho médio l , que é a distância percorrida por uma molécula sem sofrer colisão e um comprimento característico de escoamento a , como por exemplo, a largura de um canal [8, 64],

$$K_n = \frac{l}{a}. \quad (1.1)$$

Segundo Sharipov e Seleznev [87], o valor que o parâmetro (K_n) assume tem pelo menos três tratamentos possíveis para o estado do gás:

- (i) Regime Hidrodinâmico: quando $K_n \leq 10^{-2}$;
- (ii) Regime de Transição : quando $10^{-2} < K_n < 10$;
- (iii) Regime Molecular Livre: quando $10 \leq K_n$.

No regime hidrodinâmico ou contínuo, o livre caminho médio é pequeno e consequentemente o meio gasoso pode ser considerado como meio contínuo. Assim, isso induz a utilização das equações de Navier-Stokes¹, equações clássicas da hidrodinâmica aplicadas no escoamento de um gás.

No regime de transição, meio no qual o gás permanece com mais frequência, as interações do gás com a superfície se destacam, já que o livre caminho médio e o comprimento característico do fluxo têm a mesma ordem. No regime molecular livre, as colisões das moléculas do gás com a

¹Segundo Landau [27], a equação de movimento de Navier-Stokes representa o princípio físico básico de conservação de massa, momento e energia, no qual juntamente com as equações de continuidade e energia formam a base da Mecânica dos Meios Contínuos onde, em geral, modelam o escoamento de fluidos. As equações de Navier-Stokes, na ausência de forças externas, podem ser escritas como:

- i Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t'} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{U}) = 0,$$

onde ϱ e \mathbf{U} representam a densidade de massa e velocidade do gás, respectivamente.

- ii Equação de balanço de momento de Navier-Stokes:

$$\varrho \frac{D\mathbf{U}}{Dt'} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{U} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}),$$

onde P , μ , ζ representam pressão do gás, coeficiente de viscosidade cisalhante do gás e coeficiente de viscosidade volumétrica, respectivamente.

- iii Equação de balanço de energia:

$$\varrho \frac{D\epsilon}{Dt'} = \varrho \frac{\partial \zeta}{\partial t'} - \nabla \cdot \mathbf{Q} - P(\nabla \cdot \mathbf{U}) + \Phi,$$

onde ϵ , Φ , \mathbf{Q} , ζ , representam a energia interna específica do gás, função de dissipação, vetor fluxo de calor e calor produzido no elemento volume do gás, respectivamente.

superfície são mais frequentes do que entre as moléculas, com isso, o movimento das moléculas é considerado independente uma das outras. Em ambos os regimes, transição e molecular livre, o gás não é considerado como um meio contínuo, e sim um conjunto de partículas, onde não usa-se as equações de Navier-Stokes. Em virtude disso, introduz-se uma nova área de estudos, a teoria cinética dos gases, descrita pela **EB** que da origem ao campo de pesquisa da **DGR**. O estado do gás a partir do número de Knudsen (K_n) e a aplicação das Equações de Navier-Stokes e **EB** conforme seu regime são representados na Figura 1.1.



Figura 1.1: Intervalo do número de Knudsen

Além disso, é necessário ressaltar que a **EB** pode ser utilizada em meio contínuo. Segundo Williams [64], a equação de Navier-Stokes pode ser obtida a partir da **EB**. Sendo que, a diferença entre as equações Navier Stokes e **EB** [64] é que na primeira as incógnitas são as propriedades físicas do fluido (densidade, temperatura e pressão) enquanto que na segunda, a incógnita é a função de distribuição de partículas, que deve ser integrada para que se conheça as características do fluido.

1.2 A função de distribuição

Para a teoria cinética dos gases, um gás monoatômico é descrito em termos de função de distribuição ($f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$), onde esse termo fornece a posição (\mathbf{r}) e velocidade molecular (\mathbf{v}) em um determinado instante de tempo.

Desta forma, as expressões para todas as macrocaracterísticas de um gás podem ser encontradas nas Refs. [43, 87]. Todas as propriedades macroscópicas de um gás podem ser resolvidas por meio da função distribuição tais como:

(i) Densidade:

$$n(t, \mathbf{r}) = \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad (1.2)$$

(ii) Velocidade:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{n(t, \mathbf{r})} \int \mathbf{v} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad (1.3)$$

(iii) Fluxo de calor:

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{r}) = \frac{m}{2} \int V^2 \mathbf{V} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad (1.4)$$

(iv) Pressão:

$$P(t, \mathbf{r}) = \frac{m}{3} \int V^2 f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad (1.5)$$

(v) Tensor de pressão:

$$P_{ij}(t, \mathbf{r}) = m \int V_i V_j f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad (1.6)$$

(vi) Temperatura:

$$T(t, \mathbf{r}) = \frac{m}{3k_B n(t, \mathbf{r})} \int V^2 f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad (1.7)$$

sendo que

- m é a massa molecular;
- k_B é a constante de Boltzmann;
- V_a é a velocidade peculiar na direção a ;
- \mathbf{V} é a velocidade peculiar dada por

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}(t, \mathbf{r}). \quad (1.8)$$

As Eqs.(1.3),(1.5) e (1.7) satisfazem a equação de estado de um gás ideal [87]

$$P(\mathbf{r}) = n(t, \mathbf{r}) k_B T(\mathbf{r}). \quad (1.9)$$

1.3 A equação de Boltzmann

Com a intenção de descrever problemas matemáticos envolvendo a **DGR** utiliza-se a função de distribuição de um gás que satisfaz a **EB**. Uma ferramenta poderosa na análise dos fenômenos de transporte e seus estudos envolvem uma das mais importantes áreas das equações diferenciais parciais.

A equação de transporte de Boltzmann é definida como uma equação integro-diferencial-parcial não linear que envolve sete variáveis independentes. Essa equação foi desenvolvida em 1872 pelo alemão Ludwig Boltzmann [55] em seus estudos de teoria cinética, no qual visa determinar uma evolução na função de distribuição. Pode-se citar vários estudos relacionados a equação integro-diferencial referentes a existência, unicidade, comportamento de soluções, sua derivação e propriedades [6, 7, 9, 43, 66, 86].

A **EB** é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}f + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}f = J(ff_*), \quad (1.10)$$

sendo que

- $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ é a função distribuição;
- t é o tempo;
- \mathbf{r} é o vetor posição;
- \mathbf{v} é a velocidade molecular;
- $J(ff_*)$ é o operador de colisão.

Este operador de colisão define a taxa de variação temporal da função de distribuição devido as colisões moleculares e é expressa por

$$J(ff_*) = \int \int \int W(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*; \mathbf{v}', \mathbf{v}'_*)(f'f'_* - ff_*)d\mathbf{v}'d\mathbf{v}'_*d\mathbf{v}_*, \quad (1.11)$$

onde

- W é a função frequência de espalhamento diferencial para a colisão entre dois corpos;
- $f' = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}')$ e $f_* = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_*)$ são funções distribuição correspondente ao argumento \mathbf{v} ;
- $(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*)$ é a velocidade antes das colisões;
- $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*)$ é a velocidade depois das colisões.

O operador de colisão desta equação possui uma resolução extremamente complexa mesmo utilizando recursos computacionais, o que torna o desenvolvimento analítico da **EB** muito limitada. A fim de tornar mais amplo o trabalho com a equação integro-diferencial foi desenvolvido o método de linearização da Eq.(1.10), onde destaca-se que isso é possível já que o gás rarefeito está sujeito a pequenas perturbações.

1.4 A Equação Linearizada de Boltzmann

Considera-se a **ELB** unidimensional em um estado estacionário, ou seja, situações fracamente fora do estado de equilíbrio f_0 . A função de distribuição relativa a pequenas perturbações ($|h| \ll 1$) é escrita da forma [64]

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})[1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{v})] \quad (1.12)$$

sendo que h é a perturbação causada a $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ que é a função distribuição Maxwelliana local descrita por

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = n_\infty(x, z) \left[\frac{m}{2\pi k_B T_\infty(x, z)} \right]^{3/2} \exp \left[- \frac{m}{2k_B T_\infty(x, z)} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \right], \quad (1.13)$$

em que

- $\mathbf{r} = (x, y, z)$ é o vetor de coordenadas espaciais;
- m é a massa molecular;
- k_B é a constante de Boltzmann;
- $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ é o vetor velocidade molecular;
- n_∞ é a densidade;
- T_∞ é a temperatura.

Aqui, as funções n_∞ , T_∞ e u são funções lineares de x e z , ou seja,

$$n_\infty(x, z) = n_0(1 + R_x x + R_z z), \quad (1.14)$$

$$T_\infty(x, z) = T_0(1 + K_x x + K_z z) \quad (1.15)$$

e

$$\mathbf{u}(x) = Kx, \quad (1.16)$$

sendo que

- n_0 é a densidade de equilíbrio das partículas de gás;

- T_0 é a temperatura constante de referência;
- K é o gradiente de velocidade na direção x ;
- R_i com $i = x, z$ é o gradiente de densidade na direção i ;
- K_i com $i = x, z$ é o gradiente de temperatura na direção i .

Partindo-se da linearização proposta na Eq.(1.12) a função distribuição f será determinada em termos de perturbação h conforme os seguintes passos [60, 64]:

- Substitui-se a Eq.(1.12) na Eq.(1.10);
- Negligencia-se os termos de ordem $O(h^2)$;
- Considera-se as propriedades de simetria, da função frequência de colisão entre átomos;
- Faz-se uma adimensionalização da forma

$$c = v \left[\frac{m}{2k_B T_0} \right]^{1/2} \quad (1.17)$$

e

$$K_0 = K \left[\frac{m}{2k_B T_0} \right]^{1/2}. \quad (1.18)$$

Obtem-se, então, a equação de balanço

$$S(\mathbf{c}) + c_x \frac{\partial}{\partial x^*} h(x^*, \mathbf{c}) = \tau_0^2 n_0 \pi^{1/2} \mathcal{L} h(x^*, \mathbf{c}), \quad (1.19)$$

onde

- τ_0 é o diâmetro de colisão das partículas do gás;
- $c(2k_B T_0/m)^{1/2}$ é a magnitude da velocidade das partículas;
- $S(\mathbf{c})$ é o termo fonte;
- x^* é a variável espacial;
- \mathcal{L} é o operador de colisão.

Este operador de colisão é expresso por

$$\mathcal{L}h(x^*, \mathbf{c}) = -\nu(c)h(x^*, \mathbf{c}) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} K(\mathbf{c}', \mathbf{c})h(x^*, \mathbf{c}')dc_z dc_y dc_x, \quad (1.20)$$

em que

- $K(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ é o núcleo de espalhamento;
- $\nu(c)$ é a frequência de colisão das partículas gasosas dado por

$$\nu(c) = \frac{2c^2 + 1}{c} \int_0^c e^{-x^2} dx + e^{-c^2}. \quad (1.21)$$

Reescrevendo o vetor velocidade em termos de coordenadas esféricas $(c, \arccos \mu, \chi)$, assume-se que

$$c_x = c\mu, \quad c_y = c(1 - \nu^2)^{1/2} \sin \chi, \quad c_z = c(1 - \nu^2)^{1/2} \cos \chi, \quad (1.22)$$

pode-se reescrever a Eq.(1.19) da forma

$$S(\mathbf{c}) + c\mu \frac{\partial}{\partial x^*} h(x^*, \mathbf{c}) = \tau_0^2 n_0 \pi^{1/2} \mathcal{L}h(x^*, \mathbf{c}), \quad (1.23)$$

no qual o operador de colisão é dado por

$$\mathcal{L}h(x^*, \mathbf{c}) = -\nu(c)h(x^*, \mathbf{c}) + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2} K(\mathbf{c}', \mathbf{c})h(x^*, \mathbf{c}')d\chi' d\mu' dc'. \quad (1.24)$$

1.5 O Núcleo de Espalhamento

Segundo Pekeris e Alterman [91], o núcleo de espalhamento dado pela Eq.(1.24) é proposto a partir de uma expansão em termos de polinômio de Legendre. Utilizando o teorema da adição dos harmônicos esféricos, escreve-se o núcleo de espalhamento da forma

$$K(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{2n+1}{2} \right) (2 - \delta_{0,m}) P_n^m(\mu') P_n^m(\mu) k_n(c', c) \cos m(\chi' - \chi), \quad (1.25)$$

sendo que as funções de Legendre normalizadas são

$$P_n^m(\mu) = \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} P_n(\mu), \quad m \leq n \quad (1.26)$$

e $P_n(\mu)$ são os polinômios de Legendre, tais que

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = \left(\frac{2}{2n+1} \right) \delta_{n,n'} \quad (1.27)$$

onde $\delta_{n,n'}$ representa o delta de Kronecker.

1.6 O Livre caminho médio

Para introduzir a questão de adimensionalização da **ELB**, usa-se o livre caminho médio l , que é a distância percorrida por uma partícula sem sofrer colisão [43]. Define-se a variável adimensional $\tau = x^*/l$ e considera-se a Eq.(1.23) na sua forma homogênea, ou seja,

$$c\mu \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, \mathbf{c}) = \epsilon \mathcal{L} h(\tau, \mathbf{c}), \quad (1.28)$$

onde o operador \mathcal{L} é dado pela Eq.(1.24) e

$$\epsilon = \tau_0^2 n_0 \pi^{1/2} l. \quad (1.29)$$

Pode-se calcular o livre caminho médio de duas maneiras, através da viscosidade ou condutividade térmica. Segundo Loyalka e Hickey [52], em termos de viscosidade (μ_*), o livre caminho médio é dado por

$$l = l_p = \frac{\mu_*}{p_0} \left(\frac{2k_B T_0}{m} \right)^{1/2}, \quad (1.30)$$

ou ainda, conforme Loyalka e Ferziger [50], em termos de condutividade térmica (λ_*) é definido por

$$l = l_t = \frac{4\lambda_*}{5n_0 k_B} \left(\frac{m}{2k_B T_0} \right)^{1/2}, \quad (1.31)$$

em que

- T_0 é a temperatura (constante);
- m é a massa molecular;
- k_B é a constante de Boltzmann;
- $p_0 = n_0 k T_0$ é a pressão.

Através da definição dada por Pekeris e Alterman [91] temos que a viscosidade é da forma

$$\mu_* = \frac{8(2mk_B T_0)^{1/2}}{15\pi\tau_0^2} \int_0^\infty e^{-c^2} b(c) c^6 dc \quad (1.32)$$

e a condutividade térmica é dada por

$$\lambda_* = \frac{4k(2k_B T_0/m)^{1/2}}{3\pi\tau_0^2} \int_0^\infty e^{-c^2} a(c) c^6 dc, \quad (1.33)$$

onde, as funções $b(c)$ e $a(c)$ são soluções da equação de Chapman-Enskog para, respectivamente, a viscosidade e para a condutividade térmica [4, 64]. Estas expressões satisfazem equações integrais definidas por

$$\nu(c)c^2 b(c) - \int_0^\infty e^{-c^2} b(c') k_2(c', c) c'^4 dc' = c^2 \quad (1.34)$$

e

$$\nu(c)ca(c) - \int_0^\infty e^{-c^2} a(c') k_1(c', c) c'^3 dc' = c \left(c^2 - \frac{5}{2} \right), \quad (1.35)$$

com a condição de normalização

$$\int_0^\infty e^{-c^2} a(c) c^4 dc = 0. \quad (1.36)$$

Desta forma, substituindo as Eqs.(1.30), (1.32) e (1.34) na Eq.(1.29) obtém-se em termos de viscosidade

$$\epsilon = \epsilon_p = \frac{16}{15}\pi^{-1/2} \int_0^\infty e^{-c^2} b(c) c^6 dc \quad (1.37)$$

e, substituindo as Eqs.(1.31), (1.33) e (1.35) na Eq.(1.29) obtém-se em termos de condutividade térmica

$$\epsilon = \epsilon_t = \frac{16}{15}\pi^{-1/2} \int_0^\infty e^{-c^2} a(c) c^6 dc. \quad (1.38)$$

No próximo capítulo, verifica-se que os valores ϵ_p e ϵ_t dados pelas Eqs.(1.37) e (1.38) irão assumir diferentes valores conforme o modelo cinético e irão ser fundamentais para encontrar os resultados numéricos.

1.7 A Condição de Contorno

Uma das áreas de maior importância para o estudo de gases está em sua delimitação, ou seja, no caminho que o gás percorre e sua limitação com sua superfície. Assim, os átomos dos gases ficam concentrados dentro do limite imposto e ao manter contato com a superfície são refletidos.

A interação gás-superfície que aparece na maioria dos trabalhos [11, 17, 19, 57] por ser mais prático nos cálculos é conhecida como difuso-especular, que foi desenvolvida por Maxwell. A reflexão difusa estabelece que não há direção preferencial para a velocidade das partículas espalhadas, além de não depender da velocidade das moléculas antes da colisão. Ainda, o modelo de Maxwell possui apenas um coeficiente de acomodação para definir todas as propriedades físicas do gás [32], sendo que na prática tem-se conhecimento que cada propriedade do gás possui seu próprio coeficiente de acomodação.

Como cada gás possui mais de uma propriedade física relevante, a interação gás-superfície necessita de no mínimo dois coeficientes de acomodação. Em virtude de buscar uma interação do gás com a superfície mais voltada para a realidade, neste trabalho, utiliza-se as Condições de Contorno de Cercignani-Lampis [61]. Essas condições de fronteira são descritas como generalizadas já que abrange dois coeficientes de acomodação que descrevem as propriedades físicas do gás, ou seja, uma melhor descrição física para fenômenos de transporte de gases. Mesmo disponibilizando resultados mais coerentes com a realidade, são poucos os resultados com as condições de contorno generalizadas, o motivo é atribuído a alta complexidade matemática que o núcleo de Cercignani-Lampis possui.

Geralmente, a função de distribuição é definida pelo núcleo de espalhamento $\mathbf{R}(\mathbf{v}' : \mathbf{v})$ [8], que delimita a forma de interação que ocorre entre o gás e a superfície sólida e é expresso por

$$|v_n|f(\mathbf{v}) = \int_{v'_n < 0} |v'_n| \mathbf{R}(\mathbf{v}' : \mathbf{v}) f(\mathbf{v}') d\mathbf{v}', \quad v_n > 0 \quad (1.39)$$

onde as variáveis ilustradas na Figura 1.2 [24] são denominadas como

- \mathbf{v}' : a velocidade molecular da partícula de incidência;
- \mathbf{v} : a velocidade molecular da partícula de reflexão;
- \mathbf{n} : o vetor unitário normal à superfície;

- v_n : uma componente normal da velocidade \mathbf{v} e \mathbf{n} , ou seja,

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.40)$$

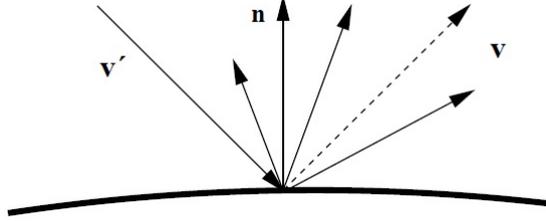


Figura 1.2: Interação gás-superfície [24]

Além disso, de acordo com Cercignani [8], o núcleo de espalhamento precisa satisfazer as seguintes propriedades :

- (i) Condição de normalização:

$$\int_{v'_n < 0} \mathbf{R}(\mathbf{v}' : \mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1. \quad (1.41)$$

- (ii) Não-negatividade:

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}' : \mathbf{v}) \geq 0. \quad (1.42)$$

- (iii) Relação de reciprocidade:

$$|v'_n| \exp\left[-\frac{mv'^2}{2k_B T_w}\right] \mathbf{R}(\mathbf{v}' : \mathbf{v}) = |v'_n| \exp\left[-\frac{mv'^2}{2k_B T_w}\right] \mathbf{R}(-\mathbf{v}' : -\mathbf{v}), \quad (v_n > 0, v'_n < 0), \quad (1.43)$$

onde T_w é a temperatura da superfície sólida.

O núcleo de Cercignani-Lampis descrito para coordenadas retangulares, em termos da velocidade adimensional (c) definido na Eq.(1.17), é dado por

$$R_l(\mathbf{v}' : \mathbf{v}) = \frac{m^2 v_n}{2\pi \alpha_{n_l} \alpha_{t_l} (2 - \alpha_{t_l}) (k_B T_w)^2} \exp\left[-\frac{m[v_n^2 + (1 - \alpha_{n_l})v_n'^2]}{2k_B T_w \alpha_{n_l}} - \frac{m[\mathbf{v}_t - (1 - \alpha_{t_l})\mathbf{v}'_t]^2}{2k_B T_w \alpha_{t_l} (2 - \alpha_{t_l})}\right] \hat{I}_0\left(\frac{(1 - \alpha_{n_l})^{1/2} m v_n v'_n}{\alpha_{n_l} k_B T_w}\right) \quad (1.44)$$

onde $l = 1, 2$ define as placas inferior e superior do canal. Note que dessa forma, o núcleo de Cercignani-Lampis representa placas heterogêneas, ou seja, paredes da superfície com propriedades físicas diferentes.

Além disso, para fins computacionais

$$\widehat{I}_0(w) = I_0(w)e^{-w}, \quad (1.45)$$

sendo $I_0(w)$ é a função de Bessel modificada, definida como

$$I_0(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w \cos \Phi} d\Phi, \quad (1.46)$$

e

- \mathbf{v}_t : é o vetor bidimensional de velocidade tangencial;
- \mathbf{v}_n : é a componente normal da velocidade \mathbf{v} .

Nota-se que o núcleo dado pela Eq.(1.44) possui dois parâmetros que segundo Sharipov e Seleznev [87] são definidos como:

- (α_{t_l}) : coeficiente de acomodação tangencial para $l = 1, 2$ que possui uma variação em $0 \leq \alpha_{t_l} \leq 2$;
- (α_{n_l}) : coeficiente de acomodação da energia cinética devido a componente normal da velocidade para $l = 1, 2$ que possui uma variação em $0 \leq \alpha_n \leq 1$.

Ainda, é importante destacar que o núcleo de Cercignani-Lampis pode ser considerado como um caso geral do núcleo difuso-especular já que quando $\alpha_t = 1$ e $\alpha_n = 1$, o núcleo torna-se difuso e quando $\alpha_t = 0$ e $\alpha_n = 0$, o núcleo coincide com o núcleo especular [32]. Uma análise mais detalhada de casos especiais referente a coeficientes de acomodação e o núcleo de espalhamento para o núcleo de Cercignani-Lampis é discutido por Siewert na Ref. [21].

Da mesma forma como a **EB**, as interações gás-superfície também devem ser linearizadas e adimensionalizadas para o vetor velocidade, assim como a **EB**. Para a condição de contorno cujo o núcleo de espalhamento é proposto por Cercignani-Lampis dado pela Eq.(1.44), em termos da adimensionalização para o vetor velocidade (c) escreve-se em coordenadas retangulares para placas diferentes [21] como

$$h(-a, c_x, c_y, c_z) = 2\alpha_{t_1} u_{w_1} c_y + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty h(-a, -c'_x, c'_y, c'_z) R_1(-c'_x, c'_y, c'_z : c_x, c_y, c_z) dc'_x dc'_y dc'_z \quad (1.47)$$

e

$$h(a, -c_x, c_y, c_z) = 2\alpha_{t_2} u_{w_2} c_y + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty h(a, c'_x, c'_y, c'_z) R_2(c'_x, c'_y, c'_z : -c_x, c_y, c_z) dc'_x dc'_y dc'_z, \quad (1.48)$$

onde

$$R_l(c'_x, c'_y, c'_z : c_x, c_y, c_z) = \frac{2c'_x}{\pi\alpha_{n_l}\alpha_{t_l}(2 - \alpha_{t_l})} T(c'_y : c_y) S(c'_x : c_x) T(c'_z : c_z) \quad (1.49)$$

com

$$T(x : z) = \exp\left[\frac{-[(1 - \alpha_{t_l})z - x]^2}{\alpha_{t_l}(2 - \alpha_{t_l})}\right] \quad (1.50)$$

e

$$S(x : z) = \exp\left[\frac{-[(1 - \alpha_{n_l})^{1/2}z - x]}{\alpha_{n_l}}\right] \widehat{I}_0\left[\frac{2(1 - \alpha_{n_l})^{1/2}|xz|}{\alpha_{n_l}}\right]. \quad (1.51)$$

para $c_x \in (0, \infty)$, $c_y, c_z \in (-\infty, \infty)$ e \widehat{I}_0 dado pela Eq.(1.45). Além disso, temos a parte não homogênea da condição de contorno no qual é dado pelos parâmetros u_{w_1} e u_{w_2} que representa a velocidade das placas 1 e 2 respectivamente.

Capítulo 2

AS EQUAÇÕES MODELO

Devido a **ELB** possuir uma estrutura ainda muito complexa de se trabalhar, segundo Cercignani [6], uma alternativa para desmembrar esta equação é fazer uso das chamadas equações modelo, ou seja, equações cinéticas que definem uma expressão simplificada para desenvolver o núcleo de espalhamento da **ELB** em termos de uma perturbação, sem perder as características físicas do processo de colisão.

Em virtude disso, neste capítulo será trabalhado as equações modelo de uma forma analítica unificada, além de, introduzir as quantidades físicas de interesse.

2.1 As Equações Modelo

No capítulo anterior, simplificou-se a **EB** a partir de uma linearização, ou seja, obteve-se a **ELB**. Em virtude disso, a **ELB** possui um núcleo de espalhamento ($K(\mathbf{c}', \mathbf{c})$) dado pela Eq.(1.25). Contudo, esse núcleo mostra-se ainda muito complexo já que possui a descontinuidade das derivadas de $k_n(c', c)$ em $c' = c$. A fim de simplificar o tratamento com a **ELB** tanto na forma analítica como numérica desenvolve-se, o núcleo de espalhamento ($K(\mathbf{c}', \mathbf{c})$) a partir de um truncamento [4] de sua expansão, que visa manter as suas características e é denotado pelas equações cinéticas. Essas equações podem ser agrupadas considerando a frequência de colisão (ν) dada pela Eq.(1.21), ou seja, caso a frequência de colisão seja constante, variável ou além disso, considerando-se uma mistura de gases. Vejamos:

- (i) Frequência de colisão constante: **Modelo BGK** [63], **Modelo S** [28, 87], **Modelo GJ** [25] e **Modelo MRS** [14];

(ii) Frequência de colisão variável: **Modelo CLF** [17, 64], **Modelo CES** [4] e **Modelo CEBS** [4];

(iii) Mistura de dois gases: **Modelo McCormack** [36].

Neste trabalho, será desenvolvida as equações modelo definidas em (i), ou seja, com frequência de colisão constante. Logo, pode-se escrever o núcleo de espalhamento sintético [4] da forma

$$F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n (2n+1)(2-\delta_{0,m}) P_n^m(\mu') P_n^m(\mu) f_n(c', c) \cos m(\chi' - \chi), \quad (2.1)$$

onde substituímos o termo $k_n(c', c)$ por aproximações sintéticas $f_n(c', c)$ para $n \leq N$. Segundo Barichello e Siewert [4] as componentes $f_n(c', c)$ foram determinandas para o **Modelo BGK** como um caso particular do **Modelo CES**. Nesse mesmo caminho, Siewert e Sharipov [35] obtiveram essas componentes de maneira unificada para o **Modelo BGK** e **Modelo S**. Além disso, nos trabalhos [23, 25] as aproximações foram definidas para o **Modelo GJ** e para o **Modelo MRS** obteve-se essas componentes a partir do **Modelo McCormack** [36] no qual para o modelo de esferas rígidas foi utilizado uma única espécie de gás. Conforme as Refs. [14, 23] o núcleo de espalhamento sintético podem ser aplicados simultaneamente e são descritos por

$$F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = 1 + 2(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}) + \frac{2}{3} \left(c'^2 - \frac{3}{2} \right) \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) + \beta M(\mathbf{c}', \mathbf{c}) + \varpi N(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) \quad (2.2)$$

onde

$$M(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) = \frac{4}{5} (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}) \left(c'^2 - \frac{5}{2} \right) \left(c^2 - \frac{5}{2} \right), \quad (2.3)$$

$$N(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) = 2 \left[(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c})^2 - \frac{1}{3} c'^2 c^2 \right] \quad (2.4)$$

e

$$\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c} = c' c \sum_{m=0}^1 (2 - \delta_{0,m}) P_1^m(\mu') P_1^m(\mu) \cos m(\chi' - \chi). \quad (2.5)$$

Segundo Garcia [14], para descrever matematicamente cada modelo cinético, **Modelo BGK**, **Modelo S**, **Modelo GJ**, além do **Modelo MRS** [48] considera-se os seguintes parâmetros:

(i) Para o **Modelo BGK**:

$$\beta = 0 \quad \text{e} \quad \varpi = 0; \quad (2.6)$$

(ii) Para o **Modelo S**:

$$\beta = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \varpi = 0; \quad (2.7)$$

(iii) Para o **Modelo GJ**:

$$\beta = \frac{5}{9} \quad \text{e} \quad \varpi = \frac{1}{3}; \quad (2.8)$$

(iv) E para o **Modelo MRS**:

$$\beta = 1 - \left(\frac{16}{15}\right)2^{1/2} \quad \text{e} \quad \varpi = 1 - \left(\frac{8}{5}\right)2^{1/2}. \quad (2.9)$$

Conforme Garcia e Siewert [14], para reescrever a Eq.(2.1) na forma da Eq.(2.2), deve-se escolher $f_n(c', c)$ como

$$f_0(c', c) = 4\pi^{-1/2} \left[1 + \frac{2}{3} \left(c'^2 - \frac{3}{2} \right) \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \right], \quad (2.10)$$

$$f_1(c', c) = \frac{8}{3} c' c \pi^{-1/2} \left[1 + \frac{2}{5} \beta \left(c'^2 - \frac{5}{2} \right) \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) \right], \quad (2.11)$$

$$f_2(c', c) = \frac{16}{15} \pi^{-1/2} \varpi c'^2 c^2 \quad (2.12)$$

e

$$f_n(c', c) = 0, \quad n > 2. \quad (2.13)$$

Segundo Barichello e Siewert [4], as componentes das funções $f_n(c', c)$ para $n = 0$ e 1 satisfazem as condições integrais, que são consequencias das condições de conservação de massa, momento e energia,

$$\nu(c) = \int_0^\infty e^{-c'^2} f_0(c', c) c'^2 dc', \quad (2.14)$$

$$\nu(c)c = \int_0^\infty e^{-c'^2} f_1(c', c) c'^3 dc' \quad (2.15)$$

e

$$\nu(c)c^2 = \int_0^\infty e^{-c'^2} f_0(c', c) c'^4 dc'. \quad (2.16)$$

Dessa forma, aplicando-se as Eqs.(2.10) e (2.11) nas Eqs.(2.14)–(2.16) observa-se que $\nu(c) = 1$, que é a frequência de colisão (constante) do **Modelo BGK**, **Modelo S**, **Modelo GJ** e **Modelo MRS**. Além disso, usando as Eqs.(2.10)–(2.13) nas Eqs.(1.34)–(1.36) obtém-se as funções de Chapman-Enskog para cada modelo, ou seja,

(i) Para o **Modelo BGK**, tem-se

$$b(c) = 1 \quad (2.17)$$

e

$$a(c) = \left(c^2 - \frac{5}{2} \right); \quad (2.18)$$

(ii) Para o **Modelo S**, tem-se

$$b(c) = 1 \quad (2.19)$$

e

$$a(c) = \frac{3}{2} \left(c^2 - \frac{5}{2} \right); \quad (2.20)$$

(iii) Para o **Modelo GJ**, tem-se

$$b(c) = \frac{3}{2} \quad (2.21)$$

e

$$a(c) = \frac{9}{4} \left(c^2 - \frac{5}{2} \right); \quad (2.22)$$

(iv) E, para o **Modelo MRS**, tem-se

$$b(c) = \frac{5}{8} 2^{-1/2} \quad (2.23)$$

e

$$a(c) = \frac{15}{16} 2^{-1/2} \left(c^2 - \frac{5}{2} \right). \quad (2.24)$$

Assim, a partir das Eqs.(1.37) e (1.38) tem-se:

(i) Para o **Modelo BGK**:

$$\epsilon_p = 1 \quad \text{e} \quad \epsilon_t = 1; \quad (2.25)$$

(ii) Para o **Modelo S**:

$$\epsilon_p = 1 \quad \text{e} \quad \epsilon_t = \frac{3}{2}; \quad (2.26)$$

(iii) Para o **Modelo GJ**:

$$\epsilon_p = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \epsilon_t = \frac{9}{4}; \quad (2.27)$$

(iv) Para o **Modelo MRS**:

$$\epsilon_p = \frac{5}{16} 2^{1/2} \quad \text{e} \quad \epsilon_t = \frac{15}{32} 2^{1/2}. \quad (2.28)$$

Destaca-se, neste momento, que segundo Barichello e Siewert [4] para a **ELB** tem-se

$$\epsilon_p = 0.449027806 \dots \quad \text{e} \quad \epsilon_t = 0.679630049 \dots \quad (2.29)$$

Além disso, o número de Prandtl [4], freqüentemente utilizado na teoria cinética é dado por

$$Pr = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_t}. \quad (2.30)$$

Dessa forma, substituindo a Eq.(2.29) na Eq.(2.30), tem-se

$$Pr = 0.660694457 \dots \quad (2.31)$$

Note que este valor é próximo a $2/3$, no qual normalmente é usado na teoria cinética [6]. A partir das Eqs.(2.25)–(2.28), tem-se que o **Modelo BGK** possui $Pr = 1$, já para o **Modelo S**,

Modelo GJ e **Modelo MRS** tem-se $Pr = 2/3$, ou seja, o **Modelo BGK** está em desvantagem sobre os demais modelos embora todos possuam a frequência de colisão constante [87]. Em virtude disso, o **Modelo S**, **Modelo GJ** e **Modelo MRS** estão em maior concordância com a teoria cinética.

2.2 Quantidades Físicas

Agora que já foi formulada a equação modelo a partir da Eq.(2.2) e as condições de Contorno de Cercignani-Lampis dadas pelas Eqs.(1.47) e (1.48), falta calcular as quantidades físicas de interesse. São elas: perfil de velocidade e perfil fluxo de calor, além das taxas de fluxo de partícula e fluxo de calor, conforme [18].

Define-se como perfil de velocidade a expressão dada por

$$u(\tau) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{c}'^2} h(\tau, c_x, c_y, c_z) c_x dc_x dc_y dc_z \quad (2.32)$$

e como perfil fluxo de calor a seguinte expressão

$$q(\tau) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{c}'^2} \left(\mathbf{c}^2 - \frac{5}{2} \right) h(\tau, c_x, c_y, c_z) c_x dc_x dc_y dc_z. \quad (2.33)$$

Além disso, tem-se para taxa de fluxo de partícula e taxa fluxo de calor, respectivamente,

$$U = \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a u(\tau) d\tau \quad (2.34)$$

e

$$Q = \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a q(\tau) d\tau. \quad (2.35)$$

Introduz-se ainda, o componente tensor de pressão dado por

$$P_{xy} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{c}^2} h(\tau, c_x, c_y, c_z) c_x c_y dc_x dc_y dc_z. \quad (2.36)$$

Capítulo 3

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo apresenta-se uma formulação matemática unificada das equações modelo derivada da **ELB**, para esferas rígidas, mencionadas no capítulo anterior. Além disso, associa-se a estes modelos alguns problemas clássicos da dinâmica de gases rarefeitos, são eles: Problema de Poiseuille, Problema *Creep* Térmico e Problema de Couette. Considera-se as condições de contorno de Cercignani-Lampis e as expressões de Chapman-Enskog que definem o livre caminho médio para a condutividade térmica e para a viscosidade. Ainda, trabalha-se com as grandezas físicas de interesse para cada problema proposto.

3.1 Definição do problema

Para encontrar a formulação analítica das grandezas físicas de interesse num canal plano parte-se dos modelos cinéticos derivados da **ELB**, com Condições de Contorno de Cercignani-Lampis.

Assim, tem-se a equação cinética

$$c_x \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, \mathbf{c}) + \epsilon h(\tau, \mathbf{c}) = \epsilon \pi^{-3/2} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{c'^2} h(\tau, \mathbf{c}') F(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) dc'_x dc'_y dc'_z + S(\mathbf{c}) \quad (3.1)$$

onde o núcleo de espalhamento, $F(\mathbf{c}' : \mathbf{c})$, é dado por

$$F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = 1 + 2(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}) + \frac{2}{3} \left(c'^2 - \frac{3}{2} \right) \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) + \beta M(\mathbf{c}', \mathbf{c}) + \varpi N(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) \quad (3.2)$$

onde

$$M(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) = \frac{4}{5}(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}) \left(c'^2 - \frac{5}{2} \right) \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) \quad (3.3)$$

e

$$N(\mathbf{c}' : \mathbf{c}) = 2 \left[(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c})^2 - \frac{1}{3} c'^2 c^2 \right] \quad (3.4)$$

Define-se ainda, o termo de fonte, dado por

$$S(\mathbf{c}) = -c_y(k_P + k_T(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 - 5/2)) \quad (3.5)$$

sendo que k_P é o gradiente constante de pressão e k_T é o gradiente constante de temperatura.

Além disso, ϵ é um valor que depende do livre caminho médio baseado na viscosidade ou na condutividade térmica, obtida pelas Eqs.(1.37) e (1.38), respectivamente, e são definidos conforme o modelo cinético. Nota-se também que os parâmetros β e ϖ possuem valores específicos, dependendo da mesma forma que o caminho livre médio do modelo cinético escolhido. A partir da Tabela 3.1 tem-se os valores para cada modelo cinético específico.

Tabela 3.1: Valores dos parâmetros para cada equação modelo

| Modelo Cinético | β | ϖ | ϵ_p | ϵ_t |
|-------------------|----------------------|--------------------|-----------------|------------------|
| Modelo BGK | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Modelo S | 1/3 | 0 | 1 | 3/2 |
| Modelo GJ | 5/9 | 1/3 | 3/2 | 9/4 |
| Modelo MRS | $1 - (16/15)2^{1/2}$ | $1 - (8/5)2^{1/2}$ | $(5/16)2^{1/2}$ | $(15/32)2^{1/2}$ |

A Condição de Contorno de Cercignani-Lampis [18] é utilizado no processo de interação entre o gás e a parede que é definido em termos dos coeficientes de acomodação normal (α_n) e tangencial (α_t) e é expresso pelas Eqs.(1.47) e (1.48) complementadas pelas Eqs.(1.49)–(1.51).

A formulação analítica das grandezas físicas de interesse são dadas pelas Eqs.(2.32)–(2.36).

3.2 Formulação vetorial do problema

Ao analisar as equações que descrevem as grandezas físicas de interesse nota-se que são definidas a partir de momentos da função $h(\tau, \mathbf{c})$. Além disso, deve-se escrever a **ELB** em uma forma vetorial utilizando equações auxiliares, em vez de utilizar a Eq.(3.1) para resolução do

problema original. Dessa maneira, define-se as seguintes equações auxiliares:

$$h_1(\tau, c_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(c_y, c_z) h(\tau, c_x, c_y, c_z) dc_y dc_z \quad (3.6)$$

e

$$h_2(\tau, c_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(c_y, c_z) h(\tau, c_x, c_y, c_z) dc_y dc_z \quad (3.7)$$

em que

$$\phi_1(c_y, c_z) = (c_y/\pi) e^{-(c_y^2+c_z^2)} \quad (3.8)$$

e

$$\phi_2(c_y, c_z) = (c_y/(2^{1/2}\pi))(c_y^2 + c_z^2 - 2)e^{-(c_y^2+c_z^2)}. \quad (3.9)$$

O processo segue da seguinte forma: multiplica-se a Eq.(3.1) por $\phi_1(c_y, c_z)$ e integra-se para todo c_y e c_z .

Considera-se $c_x = \xi$ e obtém-se

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} h_1(\tau, \xi) + \epsilon h_1(\tau, \xi) = \epsilon \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} [k_{11}(\xi', \xi) h_1(\tau, \xi') + k_{12}(\xi', \xi) h_2(\tau, \xi')] d\xi' + s_1(\xi) \quad (3.10)$$

onde

$$k_{11}(\xi', \xi) = 1 + \frac{2\beta}{5} \left(\xi^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\xi'^2 - \frac{1}{2} \right) + 2\varpi \xi' \xi, \quad (3.11)$$

$$k_{12}(\xi', \xi) = \frac{2^{3/2}\beta}{5} \left(\xi^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (3.12)$$

e

$$s_1(\xi) = -\frac{1}{2} \left[k_P + k_T \left(\xi^2 - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Analogamente, multiplica-se $\phi_2(c_y, c_z)$ pela Eq.(3.1) e integra-se para todo c_x e c_z . Considera-se $c_x = \xi$ e obtém-se

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} h_2(\tau, \xi) + \epsilon h_2(\tau, \xi) = \epsilon \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} [k_{21}(\xi', \xi) h_1(\tau, \xi') + k_{22}(\xi', \xi) h_2(\tau, \xi')] d\xi' + s_2(\xi) \quad (3.14)$$

onde

$$k_{21}(\xi', \xi) = \frac{2^{3/2}\beta}{5} \left(\xi'^2 - \frac{1}{2} \right), \quad (3.15)$$

$$k_{22}(\xi', \xi) = \frac{4\beta}{5} \quad (3.16)$$

e

$$s_2(\xi) = \frac{2^{1/2}}{2} k_T. \quad (3.17)$$

Logo, reescreve-se as Eqs.(3.10) e (3.14) em uma expressão vetorial da forma

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}(\tau, \xi) + \epsilon \mathbf{H}(\tau, \xi) = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi') \mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{H}(\tau, \xi') d\xi' + \mathbf{S}(\xi). \quad (3.18)$$

Aqui,

$$\Psi(\xi) = \pi^{-1/2} e^{-\xi^2}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{H}(\tau, \xi) = \begin{bmatrix} h_1(\tau, \xi) \\ h_2(\tau, \xi) \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{K}(\xi', \xi) = \begin{bmatrix} k_{11}(\xi', \xi) & k_{12}(\xi', \xi) \\ k_{21}(\xi', \xi) & k_{22}(\xi', \xi) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

e

$$\mathbf{S}(\xi) = \begin{bmatrix} s_1(\xi) \\ s_2(\xi) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Realizando as mesmas operações para as condições de contorno expressas pelas Eqs.(1.47) e (1.48), isto é, multiplica-se as equações por $\phi_1(c_y, c_z)$ e em seguida por $\phi_2(c_y, c_z)$ e integrando-se sobre todo c_x e c_z , segue a partir da notação já proposta que a Eq.(1.47) é escrita como

$$h_1(-a, \xi) = \alpha_{t_1} u_{w_1} - (\alpha_{t_1} - 1) \int_0^{\infty} h_1(-a, -\xi') f_1(\xi', \xi) d\xi' \quad (3.23)$$

e

$$h_2(-a, \xi) = -(\alpha_{t_1} - 1)^3 \int_0^{\infty} h_2(-a, -\xi') f_1(\xi', \xi) d\xi'. \quad (3.24)$$

E, para a Eq.(1.48) como

$$h_1(a, -\xi) = \alpha_{t_2} u_{w_2} - (\alpha_{t_2} - 1) \int_0^{\infty} h_1(a, \xi') f_2(\xi', \xi) d\xi' \quad (3.25)$$

e

$$h_2(a, -\xi) = -(\alpha_{t_2} - 1)^3 \int_0^\infty h_2(a, \xi') f_2(\xi', \xi) d\xi'. \quad (3.26)$$

Da mesma forma, reescreve-se as Eqs.(3.23)–(3.26) nas expressões vetoriais

$$\mathbf{H}(-a, \xi) = \alpha_{t_1} u_{w_1} \mathbf{\Omega} + \mathbf{A}_1 \int_0^\infty \mathbf{H}(-a, -\xi') f_1(\xi', \xi) d\xi' \quad (3.27)$$

e

$$\mathbf{H}(a, -\xi) = \alpha_{t_2} u_{w_2} \mathbf{\Omega} + \mathbf{A}_2 \int_0^\infty \mathbf{H}(a, \xi') f_2(\xi', \xi) d\xi' \quad (3.28)$$

onde

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_{t_l}) & 0 \\ 0 & (1 - \alpha_{t_l})^3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

e

$$f_l(\xi', \xi) = \frac{2\xi'}{\alpha_{n_l}} \exp \left[\frac{-[(1 - \alpha_{n_l})^{1/2} \xi - \xi']^2}{\alpha_{n_l}} \right] \widehat{I}_0 \left[\frac{2(1 - \alpha_{n_l})^{1/2} \xi \xi'}{\alpha_{n_l}} \right] \quad (3.31)$$

para $\xi, \xi' \in (0, \infty)$, $l = 1, 2$ e \widehat{I}_0 dado pela Eq.(1.45).

Ainda, das Eqs.(2.32) e (2.33), as quantidades físicas de interesse, em termos da solução \mathbf{H} , para o perfil de velocidade e fluxo de calor são reescritas na forma matricial, respectivamente, por

$$u(\tau) = \int_{-\infty}^\infty \Psi(\xi) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{H}(\tau, \xi) d\xi \quad (3.32)$$

e

$$q(\tau) = \int_{-\infty}^\infty \Psi(\xi) \begin{bmatrix} \xi^2 - 1/2 & 2^{1/2} \end{bmatrix} \mathbf{H}(\tau, \xi) d\xi. \quad (3.33)$$

Além disso, da Eq.(2.36) o componente tensor de pressão é descrito vetorialmente por

$$P_{xy} = \pi^{1/2} \int_{-\infty}^\infty \Psi(\xi) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{H}(\tau, \xi) d\xi. \quad (3.34)$$

Portanto, ao trabalhar com o problema formulado pela equação cinética dada pela Eq.(3.1), as equações básicas serão escritas em termos de $\mathbf{H}(\tau, \xi)$, definida pela formulação vetorial dada pela Eq.(3.18), com a condição de contorno dado pelas Eqs.(3.27) e (3.28). Falta, ainda, detalhar o termo de fonte $S(\mathbf{c})$, que será desenvolvido na próxima seção de problemas

da dinâmica de gases rarefeitos.

3.3 Problemas da dinâmica de gases rarefeitos

Nas seções anteriores, tratou-se da solução de uma forma geral. Agora, será trabalhado, a parte não-homogênea, $S(\mathbf{c})$ o qual, diferencia os problemas clássicos da **DGR**. Será dado ênfase aos seguintes problemas: Problema de Poiseuille, Problema *Creep* Térmico e Problema de Couette.

Para isso é necessário considerar dois reservatórios contendo o mesmo gás rarefeito interligados por duas placas paralelas de comprimento l e largura $x \in [-a, a]$ tal que $l \gg a$, conforme a Figura 3.1.

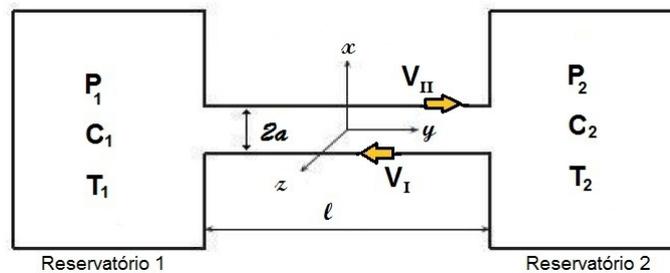


Figura 3.1: Escoamento de um gás em um canal plano

O fluxo do gás dentro dos reservatórios ocorre devido a uma pressão (P_i), concentração molar (C_i) e temperatura (T_i), para $i = 1, 2$, sendo que $P_1 > P_2$, $C_1 > C_2$ e $T_1 > T_2$, para que ocorra movimento do gás (apenas na direção y paralela as placas) [3]. Além disso, pode ocorrer fluxo de gás a partir do movimento das placas (V_I e V_{II}).

Nota-se que, devido o gradiente de pressão (k_P), temperatura (k_T), concentração (k_C) ou velocidade das placas (u_w) ocorre fenômenos de transeferência de massa, transferência de calor e difusão, sendo que dependendo a situação descreve-se um problema da **DGR**, que está definido na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Problemas da dinâmica de gases rarefeitos

| | Transferência de massa | Transferência de calor | Difusão |
|-------|------------------------|------------------------|--------------|
| k_P | Fluxo de Poiseuille | Efeito mecanocalórico | Barodifusão |
| k_T | <i>Creep</i> Térmico | | Efeito Soret |
| k_C | | Efeito Dufour | |
| u_w | Fluxo de Couette | | |

Neste trabalho será abordado os problemas de transferência de massa definidos pelo Problema de Poiseuille, Problema *Creep* Térmico e Problema de Couette.

3.3.1 Problema de Poiseuille

Para o Problema de Poiseuille, que é um problema clássico da **DGR**, considera-se a situação de um gás rarefeito confinado entre duas placas paralelas infinitas, não necessariamente compostas pela mesma composição química. As paredes estão separadas por uma distância $2a$, localizadas em $\tau = a$ e $\tau = -a$, no qual, o gás está fluindo na direção y , da região de maior pressão para a região de menor pressão, devido a um gradiente constante de pressão (k_P).

Dessa forma, conforme as Refs. [19, 65] tem-se que o termo de fonte da Eq.(3.1) é

$$S(\mathbf{c}) = -k_P c_y. \quad (3.35)$$

Note que, o gás não sofre movimento a partir do gradiente constante de temperatura, ou seja, $k_T = 0$.

A partir das Eqs.(3.13) e (3.17), tem-se que a Eq.(3.22) é reescrita como

$$\mathbf{S}(\xi) = -k_P \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Além disso, assume-se que as placas não realizam movimento. Em virtude disso, as condições de contorno dadas pelas Eqs.(3.27) e (3.28) podem ser reescritas de uma forma homogênea, já que, $u_{w_l} = 0$ para $l = 1, 2$, ou seja,

$$\mathbf{H}(-a, \xi) = \mathbf{A}_1 \int_0^\infty \mathbf{H}(-a, -\xi') f_1(\xi', \xi) d\xi' \quad (3.37)$$

e

$$\mathbf{H}(a, -\xi) = \mathbf{A}_2 \int_0^\infty \mathbf{H}(a, \xi') f_2(\xi', \xi) d\xi' \quad (3.38)$$

onde

$$\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_{t_l}) & 0 \\ 0 & (1 - \alpha_{t_l})^3 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

e

$$f_l(\xi', \xi) = \frac{2\xi'}{\alpha_{n_l}} \exp \left[\frac{-[(1 - \alpha_{n_l})^{1/2}\xi - \xi']^2}{\alpha_{n_l}} \right] \widehat{I}_0 \left[\frac{2(1 - \alpha_{n_l})^{1/2}\xi\xi'}{\alpha_{n_l}} \right] \quad (3.40)$$

para $\xi, \xi' \in (0, \infty)$, $l = 1, 2$ e \widehat{I}_0 é dado pela Eq.(1.45).

3.3.2 Problema *Creep* Térmico

Para o Problema *Creep* Térmico tem-se uma situação muito semelhante ao Problema de Poiseuille, no qual se distingue apenas o fato de o gás se movimentar a partir de um gradiente constante de temperatura (k_T), no qual, esse fenômeno ocorre nas proximidades da parede. Normalmente o problema está relacionado a pequenas partículas gasosas que fluem na direção em que a temperatura decresce [26].

Assim, das Refs.[19, 65] tem-se que o termo de fonte da Eq.(3.1) é dado por

$$S(\mathbf{c}) = -c_y(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 - 5/2)k_T. \quad (3.41)$$

Da mesma forma do problema de Poiseuille, nota-se que, o gás não sofre movimento a partir do gradiente constante de pressão, ou seja, $k_P = 0$.

A partir das Eqs.(3.13) e (3.17), tem-se que a Eq.(3.22) é reescrita como

$$\mathbf{S}(\xi) = -\frac{k_T}{2} \begin{bmatrix} \xi^2 - 1/2 \\ 2^{1/2} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Ainda, análogo ao Problema de Poiseuille, assume-se que as placas não realizam movimento. Consequentemente, as condições de fronteira dadas pelas Eqs.(3.27) e (3.28) podem ser reescritas de uma maneira homogênea, já que, $u_{w_l} = 0$ para $l = 1, 2$, ou seja, são dadas pelas Eqs.(3.37) e (3.38).

3.3.3 Problema de Couette

Para o Problema de Couette considera-se uma situação no qual o surgimento do escoamento de um gás rarefeito decorre a partir do movimento das placas em sentido oposto. Esse movimento é realizado entre duas placas paralelas infinitas com uma distância $2a$ localizadas em $\tau = a$ e $\tau = -a$, no qual o gás está fluindo na direção y positivo e negativo, respectivamente,

com uma velocidade [60]. A velocidade da placa é representado nas condições de contorno por u_{wl} com $l = 1, 2$. Em virtude disso, as Condições de Contorno de Cercignani-Lampì são condições não-homogêneas que são dadas na sua forma geral pelas Eqs.(3.27) e (3.28).

Assim, de [65] tem-se que o termo de fonte da Eq.(3.1) é

$$S(\mathbf{c}) = 0. \quad (3.43)$$

Como o gás movimenta-se a partir da velocidade das placas, não sofre movimento a partir do gradiente constante de pressão e nem do gradiente constante de temperatura, ou seja, a temperatura e pressão são constantes representados por $k_P = 0$ e $k_T = 0$.

A partir das Eqs.(3.13) e (3.17), tem-se que a Eq.(3.22) é reescrita como

$$\mathbf{S}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Capítulo 4

SOLUÇÃO EM ORDENADAS DISCRETAS

No início da década de 40 foi proposto o método de ordenadas discretas por Wick e Chandrasekhar [73] para solucionar problemas relativos a teoria do transporte. Este método consiste basicamente na aproximação do termo integral da equação de transporte a partir de uma fórmula de quadratura numérica, transformando a equação íntegro-diferencial em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Contudo, esse método, computacionalmente, mostra dificuldades, já que exige o cálculo das constantes de separação como raízes de um polinômio.

Em uma reformulação do método de Wick e Chandrasekhar, Barichello e Siewert [12] tornaram o método viável em termos computacionais, mantendo as características originais do método de ordenadas discretas. Nessa reformulação, as constantes de separação podem ser encontradas a partir de um problema de autovalores e o esquema de quadratura pode ser arbitrário do tipo *half-range* no qual a integral é avaliada apenas na metade do seu domínio.

Neste capítulo, será apresentada a versão analítica do método de ordenadas discretas (**ADO**), para a resolução do problema de quantidades físicas de interesse para o **Modelo BGK**, **Modelo S**, **Modelo GJ** e **Modelo MRS**.

4.1 Solução Geral

A solução geral do problema pode ser proposto da seguinte forma

$$\mathbf{H}(\tau, \xi) = \mathbf{H}^h(\tau, \xi) + \mathbf{H}^p(\tau, \xi), \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{H}^h(\tau, \xi)$ é a solução homogênea e $\mathbf{H}^p(\tau, \xi)$ é a solução particular. Estas soluções serão encontradas no decorrer do trabalho.

4.1.1 Solução Particular

Considerando-se apenas o termo de fonte da Eq.(3.18), torna-se necessário determinar uma solução particular para o problema a ser resolvido.

Para o Problema de Poiseuille e *Creep* Térmico propõe-se uma solução da forma

$$\mathbf{H}^p(\tau, \xi) = \mathbf{B}\tau^2 + \mathbf{C}\tau\xi + \mathbf{D}\xi^2 + \mathbf{E}\xi + \mathbf{F} \quad (4.2)$$

em que \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} e \mathbf{F} são vetores 2×1 com componentes constantes.

Substituindo-se então a Eq.(4.2) na Eq.(3.18) e usando a Eq.(3.36) para o Problema de Poiseuille tem-se a solução particular dada por

$$\mathbf{H}^p(\tau, \xi) = k_P \begin{bmatrix} \epsilon \frac{(1-\varpi)\tau^2}{2} - \tau\epsilon + \frac{(5-4\beta)\xi^2}{5\epsilon(1-\beta)} \\ \frac{2^{1/2}\beta}{5\epsilon(1-\beta)} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Para o problema *Creep* Térmico, de forma analoga, substitui-se a Eq.(4.2) na Eq.(3.18), usando a Eq.(3.42) obtém-se a solução particular dada por

$$\mathbf{H}^p(\tau, \xi) = \frac{k_T}{2\epsilon(\beta - 1)} \begin{bmatrix} \xi^2 \\ 2^{1/2} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Além disso, note que o problema de Couette é homogêneo, ou seja, tem-se que

$$\mathbf{H}^p(\tau, \xi) = 0. \quad (4.5)$$

4.1.2 Solução Homogênea

Substituindo-se a Eq.(3.18) na Eq.(4.1), encontra-se a solução homogênea, $\mathbf{H}^h(\tau, \xi)$ que deve satisfazer a equação

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}^h(\tau, \xi) + \epsilon \mathbf{H}^h(\tau, \xi) = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi') \mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{H}^h(\tau, \xi') d\xi'. \quad (4.6)$$

A princípio, reescreve-se esta equação para metade do seu domínio

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}^h(\tau, \xi) + \epsilon \mathbf{H}^h(\tau, \xi) = \\ \epsilon \int_0^\infty [\Psi(\xi') \mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{H}^h(\tau, \xi') + \Psi(-\xi') \mathbf{K}(-\xi', \xi) \mathbf{H}^h(\tau, -\xi')] d\xi'. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Observa-se que a Eq.(3.19) é dada por uma função par, ou seja,

$$\Psi(-\xi) = \Psi(\xi), \quad (4.8)$$

em consequência, reescreve-se a Eq.(4.7) da seguinte forma

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}^h(\tau, \xi) + \epsilon \mathbf{H}^h(\tau, \xi) = \epsilon \int_0^\infty \Psi(\xi') [\mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{H}^h(\tau, \xi') + \mathbf{K}(-\xi', \xi) \mathbf{H}^h(\tau, -\xi')] d\xi'. \quad (4.9)$$

A seguir, defini-se um esquema de quadratura para o intervalo $[0, \infty)$ e discretiza-se a integral da Eq.(4.9) que terá a equação resultante dada por

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}^h(\tau, \xi) + \epsilon \mathbf{H}^h(\tau, \xi) = \epsilon \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) [\mathbf{K}(\xi_k, \xi) \mathbf{H}^h(\tau, \xi_k) + \mathbf{K}(-\xi_k, \xi) \mathbf{H}^h(\tau, -\xi_k)], \quad (4.10)$$

onde ξ_k e w_k são os conjuntos dos N pontos de quadratura e N pesos obtidos para o intervalo $[0, \infty)$. Dessa forma, assume-se $\xi = \pm \xi_i$ na Eq.(4.10) para $i = 1, \dots, N$ e obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \pm \xi_i \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}^h(\tau, \pm \xi_i) + \epsilon \mathbf{H}^h(\tau, \pm \xi_i) = \\ \epsilon \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) [\mathbf{K}(\xi_k, \pm \xi_i) \mathbf{H}^h(\tau, \xi_k) + \mathbf{K}(-\xi_k, \mp \xi_i) \mathbf{H}^h(\tau, -\xi_k)]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Propõe-se soluções para a Eq.(4.11) da seguinte forma exponencial

$$\mathbf{H}^h(\tau, \xi) = \Phi(\nu, \xi) e^{-\epsilon \tau / \nu}, \quad (4.12)$$

na qual considera-se

$$\Phi(\nu, \xi) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\nu, \xi) \\ \Phi_2(\nu, \xi) \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Dessa forma, substituindo a Eq.(4.12) na Eq.(4.11) obtém-se,

$$\left(1 \mp \frac{\xi_i}{\nu}\right) \Phi(\nu, \pm \xi_i) = \epsilon \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) [\mathbf{K}(\xi_k, \pm \xi_i) \mathbf{H}^h(\tau, \xi_k) + \mathbf{K}(-\xi_k, \mp \xi_i) \mathbf{H}^h(\tau, -\xi_k)] \quad (4.14)$$

para $i = 1, \dots, N$.

Na qual escrevendo-se da forma matricial, obtém-se

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{\nu} \mathbf{M}\right) \Phi_+(\nu) = \mathbf{W}(+, +) \Phi_+(\nu) + \mathbf{W}(-, +) \Phi_-(\nu) \quad (4.15)$$

e

$$\left(\mathbf{I} + \frac{1}{\nu} \mathbf{M}\right) \Phi_-(\nu) = \mathbf{W}(+, -) \Phi_+(\nu) + \mathbf{W}(-, -) \Phi_-(\nu), \quad (4.16)$$

onde

- \mathbf{I} é dada pela matriz identidade com dimensão $2N \times 2N$;
- \mathbf{M} é dada pela matriz diagonal com dimensão $2N \times 2N$ dada por

$$\mathbf{M} = \text{diag} \{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N \}; \quad (4.17)$$

- $\Phi_{\pm}(\nu)$ é dada pela matriz

$$\Phi_{\pm}(\nu) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\nu, \pm \xi_1) \\ \dots \\ \Phi_1(\nu, \pm \xi_N) \\ \Phi_2(\nu, \pm \xi_1) \\ \dots \\ \Phi_2(\nu, \pm \xi_N) \end{bmatrix}; \quad (4.18)$$

- $\mathbf{W}(\pm, \pm)$ é uma matriz $2N \times 2N$ dada por

$$[\mathbf{W}(\pm, \pm)]_{i,j} = w_j \Psi(\xi_j) \mathbf{K}(\pm \xi_j, \pm \xi_i), \quad (4.19)$$

para $i, j = 1, \dots, N$. Além disso, tem-se que w_j são os pesos da quadratura, $\Psi(\xi_j)$ é definido pela Eq.(3.19) e $\mathbf{K}(\pm \xi_j, \pm \xi_i)$ é a matriz dada pela Eq.(3.21).

Nota-se que o núcleo de espalhamento é dada pela matriz $\mathbf{K}(\xi', \xi)$, essa matriz se comparada a outros problemas de gases rarefeitos é mais complexa porém engloba o desenvolvimento para quatro modelos cinéticos citados neste trabalho, o **Modelo BGK**, **Modelo S**, **Modelo GJ** e **Modelo MRS**.

Contudo, pode-se simplificar o núcleo de espalhamento a partir da propriedade de simetria em relação a ξ e ξ' para a matriz $\mathbf{K}(\xi', \xi)$, ou seja,

$$\mathbf{K}(\xi', \xi) = \mathbf{K}(-\xi', -\xi) \quad (4.20)$$

e

$$\mathbf{K}(-\xi', \xi) = \mathbf{K}(\xi', -\xi). \quad (4.21)$$

Em consequência, a simetria na matriz $\mathbf{W}(\pm, \pm)$ que é dada pela Eq.(4.19) é conservada, portanto

$$\mathbf{W}(+, +) = \mathbf{W}(-, -) \quad (4.22)$$

e

$$\mathbf{W}(-, +) = \mathbf{W}(+, -). \quad (4.23)$$

E ainda, nesse caminho, usa-se a mesma notação de [57], ou seja,

$$\mathbf{W}_+ = \mathbf{W}(+, +) = \mathbf{W}(-, -) \quad (4.24)$$

e

$$\mathbf{W}_- = \mathbf{W}(-, +) = \mathbf{W}(+, -). \quad (4.25)$$

Logo, com a propriedade de simetria aplicada na matriz $\mathbf{K}(\xi', \xi)$, o problema de autovalores será mais simples que o obtido em [36], com o **Modelo McCormack**, o qual trabalha com a mistura de gases.

A partir das Eqs.(4.24) e (4.25) reescreve-se as Eqs.(4.15) e (4.16) como

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_+(\nu) = \mathbf{W}_+ \Phi_+(\nu) + \mathbf{W}_- \Phi_-(\nu) \quad (4.26)$$

e

$$\left(\mathbf{I} + \frac{1}{\nu}\mathbf{M}\right)\Phi_{-}(\nu) = \mathbf{W}_{-}\Phi_{+}(\nu) + \mathbf{W}_{+}\Phi_{-}(\nu). \quad (4.27)$$

Neste momento, considere

$$\mathbf{U} = \Phi_{+}(\nu) + \Phi_{-}(\nu). \quad (4.28)$$

Manipulando algebricamente as Eqs.(4.26) e (4.27) e usando a Eq.(4.28) obtém-se um problema de autovalores dado por

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}, \quad (4.29)$$

onde

$$\mathbf{A} = (\mathbf{W}_{+} - \mathbf{W}_{-} - \mathbf{I})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{W}_{+} + \mathbf{W}_{-} - \mathbf{I})\mathbf{M}^{-1}, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{U} \quad (4.31)$$

e os autovalores

$$\lambda = \frac{1}{\nu^2}, \quad (4.32)$$

note que neste caso, λ_j é um conjunto de autovalores reais definidos pela Eq.(4.29), agora conhecido, e em consequência as constantes de separação (ν) determinam as possíveis soluções definidas na Eq.(4.12) que são pares positivos e negativos, considera-se apenas as raízes positivas. Além disso, da Eq.(4.29) tem-se que as constantes de separação (ν_j) geram um conjunto $2N$ e os autovetores ($\mathbf{X}(\nu_j)$) um conjunto $2N$.

A partir das Eqs.(4.26) e (4.27) obtém-se as soluções elementares

$$\Phi_{+}(\nu_j) = \frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{I} - \nu_j(\mathbf{W}_{+} + \mathbf{W}_{-} - \mathbf{I})\mathbf{M}^{-1}]\mathbf{X}(\nu_j) \quad (4.33)$$

e

$$\Phi_{-}(\nu_j) = \frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{I} + \nu_j(\mathbf{W}_{+} + \mathbf{W}_{-} - \mathbf{I})\mathbf{M}^{-1}]\mathbf{X}(\nu_j). \quad (4.34)$$

Agora que já foram calculadas as constantes de separação (ν_j) e as soluções elementares ($\Phi_{+}(\nu_j)$ e $\Phi_{-}(\nu_j)$), o problema de ordenadas discretas da parte homogênea da solução pode ser

escrito usando o princípio da superposição da seguinte forma

$$\mathbf{H}_{\pm}^h(\tau) = \sum_{j=1}^{2N} \left[A_j \Phi_{\pm}(\nu_j) e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j \Phi_{\mp}(\nu_j) e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j} \right], \quad (4.35)$$

onde A_j e B_j são os coeficientes de superposição, as chamadas constantes arbitrárias.

Os problemas de gases rarefeitos são conservativos, em virtude disso, um dos autovalores dados por Eq.(4.29) tende a zero quando N tende ao infinito. Dessa forma, negligencia-se a constante de separação entre as ν_j de maior valor e reescreve-se a Eq.(4.35) como

$$\mathbf{H}_{\pm}^h(\tau) = A_1 \Phi^1 + B_1 \Phi_{\pm}^2(\tau) + \sum_{j=2}^{2N} \left[A_j \Phi_{\pm}(\nu_j) e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j \Phi_{\mp}(\nu_j) e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j} \right], \quad (4.36)$$

sendo que as soluções exatas Φ^1 de dimensão $2N \times 1$ definida por um vetor de N componentes é da forma

$$\Phi^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

e a solução $\Phi_{\pm}^2(\tau)$ de dimensão $2N \times 1$ definida por um vetor de N componentes

$$\Phi_{\pm}^2(\tau) = \begin{bmatrix} \epsilon\tau \mp \left(\frac{\xi}{1-\varpi} \right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Portanto, encontrada a solução homogênea do problema pode-se escrever a solução geral como

$$\mathbf{H}_{\pm}(\tau) = \mathbf{H}_{\pm}^p(\tau) + A_1 \Phi^1 + B_1 \Phi_{\pm}^2(\tau) + \sum_{j=2}^{2N} \left[A_j \Phi_{\pm}(\nu_j) e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j \Phi_{\mp}(\nu_j) e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j} \right], \quad (4.39)$$

sendo que $\mathbf{H}_{\pm}^p(\tau)$ é dado pela Eq.(4.3) para o Problema de Poiseuille, Eq.(4.4) para o Problema *Creep* Térmico e Eq.(4.5) para Problema de Couette.

4.2 Condição de Contorno

Na seção no qual foi definido a proposta de estudo, cada problema possui suas propriedades particulares, em virtude disso, cada problema proposto também possui a sua forma de escrever a condição de contorno.

4.2.1 Problema de Poiseuille e *Creep* Térmico

Devido a semelhança das características dos Problemas de Poiseuille e *Creep* Térmico, o desenvolvimento das ordenadas discretas será abordado simultaneamente para as condições de contorno. Primeiramente, da Eq.(4.1) as condições de contorno dadas pelas Eqs.(3.37) e (3.38) são escritas para $\xi > 0$ da forma

$$\mathbf{H}^h(-a, \xi) - \mathbf{A}_1 \int_0^\infty \mathbf{H}^h(-a, -\xi') f_1(\xi', \xi) d\xi' = \mathbf{R}_1(\xi) \quad (4.40)$$

e

$$\mathbf{H}^h(a, -\xi) - \mathbf{A}_2 \int_0^\infty \mathbf{H}^h(a, \xi') f_2(\xi', \xi) d\xi' = \mathbf{R}_2(\xi) \quad (4.41)$$

sendo \mathbf{A}_l e $f_l(\xi', \xi)$ dado pelas Eqs.(3.39) e (3.40), respectivamente.

A partir disto, defini-se um esquema de quadratura para o intervalo $[0, \infty)$ e discretiza-se a integral da Eqs.(4.40) e (4.41) que terá a equação resultante dada por

$$\mathbf{H}^h(-a, \xi) - \mathbf{A}_1 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{H}^h(-a, -\xi_k) f_1(\xi_k, \xi) = \mathbf{R}_1(\xi) \quad (4.42)$$

e

$$\mathbf{H}^h(a, -\xi) - \mathbf{A}_2 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{H}^h(a, \xi_k) f_2(\xi_k, \xi) = \mathbf{R}_2(\xi) \quad (4.43)$$

onde ξ_k e w_k são os conjuntos dos N pontos de quadratura e N pesos obtidos para o intervalo $[0, \infty)$. Além disso, assume-se $\xi = \pm \xi_i$.

Nesse caminho, da Eq.(4.1) e fazendo uso das Eqs.(3.37) e (3.38) pode-se verificar as equações para \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 como

$$\mathbf{R}_1(\xi) = \mathbf{A}_1 \int_0^\infty \mathbf{H}^p(-\tau, -\xi') f_1(\xi', \xi) d\xi' - \mathbf{H}^p(-\tau, \xi) \quad (4.44)$$

e

$$\mathbf{R}_2(\xi) = \mathbf{A}_2 \int_0^\infty \mathbf{H}^p(\tau, \xi') f_2(\xi', \xi) d\xi' - \mathbf{H}^p(\tau, -\xi) \quad (4.45)$$

com \mathbf{A}_l e $f_l(\xi', \xi)$ dado pelas Eqs.(3.39) e (3.40), respectivamente.

Mais uma vez, introduzindo o esquema de quadratura para o intervalo $[0, \infty)$ e discretizando-

se a integral da Eqs.(4.44) e (4.45) que terá a equação resultante dada por

$$\mathbf{R}_1(\xi) = \mathbf{A}_1 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{H}^p(-\tau, -\xi_k) f_1(\xi_k, \xi) - \mathbf{H}^p(-\tau, \xi) \quad (4.46)$$

e

$$\mathbf{R}_2(\xi) = \mathbf{A}_2 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{H}^p(\tau, \xi_k) f_2(\xi_k, \xi) - \mathbf{H}^p(\tau, -\xi) \quad (4.47)$$

onde ξ_k e w_k são os conjuntos dos N pontos de quadratura e N pesos obtidos para o intervalo $[0, \infty)$. Analogamente, assume-se $\xi = \pm \xi_i$ nas Eqs.(4.46) e (4.47) para $i = 1, \dots, N$.

Logo, as Condições de Contorno de Cercignani-Lampis para o Problema de Poiseuille e Problema *Creep* Térmico são dadas por

$$\mathbf{R}_1(\xi_i) = \mathbf{A}_1 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{H}^p(-\tau, -\xi_k) f_1(\xi_k, \xi_i) - \mathbf{H}^p(-\tau, \xi_i) \quad (4.48)$$

e

$$\mathbf{R}_2(\xi_i) = \mathbf{A}_2 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{H}^p(\tau, \xi_k) f_2(\xi_k, \xi_i) - \mathbf{H}^p(\tau, -\xi_i) \quad (4.49)$$

onde $\mathbf{H}^p(\tau, \xi_i)$ é dado pelas Eqs.(4.3) e (4.4) para o Problema de Poiseuille e Problema *Creep* Térmico, respectivamente.

4.2.2 Problema de Couette

Utizando-se o mesmo processo desenvolvido anteriormente, da Eq.(4.1) as condições de contorno dadas pelas Eqs.(3.27) e (3.28) são escritas para $\xi > 0$ da forma homogênea pelas Eqs.(4.42) e (4.43).

Portanto, partindo da Eq.(4.1) e fazendo uso das Eqs.(3.27) e (3.28) encontra-se as expressões definidas para o Problema de Couette de \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 como

$$\mathbf{R}_1(\xi) = \alpha_{t_1} u_{w_1} \mathbf{\Omega} + \mathbf{A}_1 \int_0^\infty \mathbf{H}^p(-\tau, -\xi') f_1(\xi', \xi) d\xi' - \mathbf{H}^p(-\tau, \xi) \quad (4.50)$$

e

$$\mathbf{R}_2(\xi) = \alpha_{t_2} u_{w_2} \mathbf{\Omega} + \mathbf{A}_2 \int_0^\infty \mathbf{H}^p(\tau, \xi') f_2(\xi', \xi) d\xi' - \mathbf{H}^p(\tau, -\xi) \quad (4.51)$$

com \mathbf{A}_l , $\mathbf{\Omega}$ e $f_l(\xi', \xi)$ dado pelas Eqs.(3.32), (3.29) e (3.31), respectivamente.

Como o problema fluxo de Couette é homogêneo tem-se pela Eq.(4.5) que

$$\mathbf{H}^p(\tau, \xi) = 0, \quad (4.52)$$

ou seja, pode-se simplificar as condições de contorno de Cercignani-Lampis reescrevendo as Eqs.(4.50) e (4.51) como

$$\mathbf{R}_1(\xi) = \alpha_{t_1} u_{w_1} \mathbf{\Omega} \quad (4.53)$$

e

$$\mathbf{R}_2(\xi) = \alpha_{t_2} u_{w_2} \mathbf{\Omega}. \quad (4.54)$$

onde $\mathbf{\Omega}$ é dado pela Eq.(3.29).

4.3 Sistema Linear

Uma vez calculadas as soluções exatas, o próximo passo é determinar os $4N$ coeficientes $A_1, B_1, A_j, B_j, j = 2, \dots, 2N$ da Eq.(4.36). Para isso, é necessário substituir a Eq.(4.39) nas Eqs.(4.42) e (4.43) e obter um sistema de equações diferenciais ordinárias $4N \times 4N$

$$\begin{aligned} A_1 \left[\mathbf{\Phi}^1 - \mathbf{A}_1 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{\Phi}^1 f_1(\xi_k, \xi_i) \right] + B_1 \left[\mathbf{\Phi}_+^2(-\tau) - \mathbf{A}_1 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{\Phi}_-^2(-\tau) f_1(\xi_k, \xi_i) \right] + \\ \sum_{j=2}^{2N} \left[A_j \left[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) - \mathbf{A}_1 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{\Phi}_-(\nu_j) f_1(\xi_k, \xi_i) \right] + \right. \\ \left. B_j \left[\mathbf{\Phi}_-(\nu_j) - \mathbf{A}_1 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{\Phi}_+ f_1(\xi_k, \xi_i) \right] e^{-2\epsilon a/\nu_j} \right] = \mathbf{R}_1(\xi_i) \end{aligned} \quad (4.55)$$

e

$$\begin{aligned} A_1 \left[\mathbf{\Phi}^1 - \mathbf{A}_2 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{\Phi}^1 f_2(\xi_k, \xi_i) \right] + B_1 \left[\mathbf{\Phi}_-^2(\tau) - \mathbf{A}_2 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{\Phi}_+^2(\tau) f_2(\xi_k, \xi_i) \right] + \\ \sum_{j=2}^{2N} \left[A_j \left[\mathbf{\Phi}_-(\nu_j) - \mathbf{A}_2 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{\Phi}_+(\nu_j) f_2(\xi_k, \xi_i) \right] e^{-2\epsilon a/\nu_j} + \right. \\ \left. B_j \left[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) - \mathbf{A}_2 \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{\Phi}_- f_2(\xi_k, \xi_i) \right] \right] = \mathbf{R}_2(\xi_i) \end{aligned} \quad (4.56)$$

para $i = 1, \dots, n$, onde \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 são dados pelas Eqs.(4.48) e (4.49) para o Problema de Poiseuille e Problema *Creep* Térmico e pelas Eqs.(4.53) e (4.54) para o Problema de Couette.

4.4 Grandezas Físicas

Como foram definidas as soluções de $\mathbf{H}(\pm\tau, \pm\xi)$, pode-se agora, encontrar as grandezas físicas de interesse em ordenadas discretas, conforme o problema a ser resolvido.

4.4.1 Problema de Poiseuille

- Perfil de velocidade: substitui-se a Eq.(4.39) na Eq.(3.32) obtendo-se

$$u_p(\tau) = k_p \left[\frac{\epsilon(1 - \varpi)\tau^2}{2} + \frac{5 - 4\beta}{10\epsilon(1 - \beta)} \right] + A_1 + B_1\epsilon\tau + \sum_{j=2}^{2N} [A_j e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{V}(\nu_j); \quad (4.57)$$

- Perfil de fluxo de calor: substitui-se a Eq.(4.39) na Eq.(3.33) obtendo-se

$$q_p(\tau) = \frac{k_p}{2\epsilon(1 - \beta)} + \sum_{j=2}^{2N} [A_j e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{Y}(\nu_j); \quad (4.58)$$

- Taxa de fluxo de partículas: substitui-se a Eq.(4.57) na Eq.(2.34) obtendo-se

$$U_p = k_p \left[\frac{\epsilon(1 - \varpi)a}{6} + \frac{5 - 4\beta}{10\epsilon(1 - \beta)} \right] + \frac{A_1}{a} + \frac{1}{2\epsilon a^2} \sum_{j=2}^{2N} \nu_j (A_j + B_j) (1 - e^{-2a\epsilon\nu_j}) \mathbf{V}(\nu_j); \quad (4.59)$$

- Taxa de fluxo de calor: substitui-se a Eq.(4.58) na Eq.(2.35) obtendo-se

$$Q_p = \frac{k_p}{2a\epsilon(1 - \beta)} + \frac{1}{2\epsilon a^2} \sum_{j=2}^{2N} \nu_j (A_j + B_j) (1 - e^{-2a\epsilon\nu_j}) \mathbf{Y}(\nu_j), \quad (4.60)$$

no qual $\mathbf{V}(\nu_j)$ e $\mathbf{Y}(\nu_j)$ são definidas por

$$\mathbf{V}(\nu_j) = \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} [\Phi_+(\nu_j) + \Phi_-(\nu_j)] \quad (4.61)$$

e

$$\mathbf{Y}(\nu_j) = \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) \begin{bmatrix} \xi_k^2 - \frac{1}{2} & 2^{1/2} \end{bmatrix} [\Phi_+(\nu_j) + \Phi_-(\nu_j)]. \quad (4.62)$$

4.4.2 Problema *Creep* Térmico

- Perfil de velocidade: substitui-se a Eq.(4.39) na Eq.(3.32) obtendo-se

$$u_t(\tau) = \frac{k_t}{4\epsilon(\beta - 1)} + A_1 + B_1\epsilon\tau + \sum_{j=2}^{2N} [A_j e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{V}(\nu_j); \quad (4.63)$$

- Perfil de fluxo de calor: substitui-se a Eq.(4.39) na Eq.(3.33) obtendo-se

$$q_t(\tau) = \frac{5k_p}{4\epsilon(\beta - 1)} + \sum_{j=2}^{2N} [A_j e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{Y}(\nu_j); \quad (4.64)$$

- Taxa de fluxo de partículas: substitui-se a Eq.(4.63) na Eq.(2.34) obtendo-se

$$U_t = \frac{k_t}{4a\epsilon(\beta - 1)} + \frac{A_1}{a} + \frac{1}{2\epsilon a^2} \sum_{j=2}^{2N} \nu_j (A_j + B_j) (1 - e^{-2a\epsilon\nu_j}) \mathbf{V}(\nu_j); \quad (4.65)$$

- Taxa de fluxo de calor: substitui-se a Eq.(4.64) na Eq.(2.35) obtendo-se

$$Q_t = \frac{5k_p}{4a\epsilon(\beta - 1)} + \frac{1}{2\epsilon a^2} \sum_{j=2}^{2N} \nu_j (A_j + B_j) (1 - e^{-2a\epsilon\nu_j}) \mathbf{Y}(\nu_j). \quad (4.66)$$

Tem-se que $\mathbf{V}(\nu_j)$ e $\mathbf{Y}(\nu_j)$ são dadas pelas Eqs. (4.61) e (4.62) respectivamente.

4.4.3 Problema de Couette

- Perfil de velocidade: substitui-se a Eq.(4.39) na Eq.(3.32) obtendo-se

$$u_c(\tau) = A_1 + B_1\epsilon\tau + \sum_{j=2}^{2N} [A_j e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{V}(\nu_j); \quad (4.67)$$

- Perfil de fluxo de calor: substitui-se a Eq.(4.39) na Eq.(3.33) obtendo-se

$$q_c(\tau) = \sum_{j=2}^{2N} [A_j e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{Y}(\nu_j); \quad (4.68)$$

- Taxa de fluxo de partículas: substitui-se a Eq.(4.67) na Eq.(2.34) obtendo-se

$$U_c = \frac{A_1}{2a} + \frac{B_1 \epsilon}{4} + \frac{1}{2\epsilon a^2} \sum_{j=2}^{2N} \nu_j (A_j e^{-a\epsilon/\nu_j} + B_j) (1 - e^{-a\epsilon/\nu_j}) \mathbf{V}(\nu_j); \quad (4.69)$$

- Taxa de fluxo de calor: substitui-se a Eq.(4.68) na Eq.(2.35) obtendo-se

$$Q_c = \frac{1}{2\epsilon a^2} \sum_{j=2}^{2N} \nu_j (A_j e^{-a\epsilon/\nu_j} + B_j) (1 - e^{-a\epsilon/\nu_j}) \mathbf{V}(\nu_j); \quad (4.70)$$

- Componente tensor de pressão: substitui-se a Eq.(4.39) na Eq.(3.34) obtendo-se

$$P_{xy} = \frac{B_1 \pi^{1/2}}{2(\varpi - 1)} \quad (4.71)$$

Tem-se que $\mathbf{V}(\nu_j)$ e $\mathbf{Y}(\nu_j)$ são dadas pelas Eqs. (4.61) e (4.62) respectivamente.

Capítulo 5

ASPECTOS COMPUTACIONAIS E RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1 Considerações gerais

Na busca de resultados numéricos relacionado às quantidades físicas de interesse para cada problema da dinâmica de gases rarefeitos utiliza-se a implementação computacional baseada na linguagem FORTRAN.

Primeiramente, deve-se definir o esquema de quadratura juntamente com a versão analítica do método de ordenandas discretas (**ADO**). A fim de calcular integrais no intervalo $[1, \infty)$, usa-se a seguinte transformação não-linear

$$u(\xi) = e^{-\xi} \tag{5.1}$$

para mapear os pontos ξ no intervalo $[0, \infty)$ sob $u \in [0, 1]$. Em seguida, utiliza-se o esquema de quadratura Gauss-Legendre [47] mapeado linearmente no intervalo $[0, 1]$.

A partir da definição do esquema de quadratura parte-se para o próximo passo no qual utiliza-se a subrotina RG retirado do pacote EISPACK [10]. Essa subrotina auxilia na determinação dos autovalores e autovetores que são definidas na Eq.(4.29). Em seguida, calcula-se as constantes de separação definidas na Eq.(4.32) e ainda as soluções elementares dadas nas Eqs.(4.33) e (4.34).

Por fim, é necessário obter os valores das constantes arbitrárias para a solução em

ordenadas discretas. Através da eliminação gaussiana busca-se a resolução do sistema algébrico linear dado pelas Eqs.(4.55) e (4.56). Para esse passo, utiliza-se as subrotinas DGECCO e DGECL do pacote matemático LINPACK [42].

Considerações referente a execução do programa e conseqüentemente confiabilidade dos resultados podem ser detalhados:

- O aumento do número de pontos de quadratura do método da **ADO** destaca um maior número de dígitos conservados, ou seja, oferecem uma convergência numérica [48]. O FORTRAN disponibiliza dezesseis dígitos significativos. Para este trabalho, será considerado a convergência numérica de cinco dígitos, para isso escolhe-se $N = 60$. Eventualmente será considerado apenas quatro dígitos de convergência numérica em função dos valores de comparação terem esta precisão. Para este caso, pode-se considerar $N = 45$.
- Todos os resultados obtidos para cada problema da **DGR** derivam da execução de um único programa individualmente, ou seja, neste trabalho foram desenvolvidos três programas referentes ao Problema de Poiseuille, Problema *Creep* Térmico e Problema de Couette, tornando os resultados numéricos de grande confiabilidade. Esse programa viabiliza a execução do resultado desejado a partir de simples escolhas, não precisando oferecer nenhum tipo de conhecimento dos parâmetros referentes a cada modelo. Dessa forma, o programa desenvolvido se mostra de fácil e rápida execução.
- O tempo de execução do programa para cada resultado desejado, considerando $N=60$ é rápido pois utilizando uma máquina Desktop Acer Aspire 5740 (Intel Core i3 processor 330M, 2.13GHz, 4GB Memory e 320GB HDD), o tempo computacional não incluindo o tempo gasto para obter os pontos de quadratura e realizar as opções de modelo e parâmetros é estimado numa média inferior a 1 segundo, sendo que esse tempo permanece caso os pontos de quadratura forem $N \leq 90$.

Detendo-se a notação das tabelas, tem-se que o símbolo **ELB**[X] corresponde à valores obtidos na literatura “X” para a Equação de Boltzmann Linearizada com condições de contorno de Cercignani-Lampis. Quando utiliza-se, nas tabelas, valores como $(-Y)$ e (Y) representam respectivamente, 10^{-Y} e 10^Y .

5.2 Problemas da dinâmica de gases rarefeitos

A partir desse momento, apresenta-se os resultados numéricos das grandezas físicas de interesse conforme a escolha do problema da **DGR** com diferentes valores para coeficientes de acomodação tangencial (α_t) e normal (α_n) com Condições de Contorno de Cercignani-Lampis. Além disso, outros parâmetros são escolhidos, como por exemplo, a largura do canal ($2a$), a posição normalizada que ocorre o fenômeno, o livre caminho médio com a condutividade térmica (ϵ_t) e a viscosidade (ϵ_p). Ainda, quando refere-se ao Problema de Couette tem-se também a velocidade das placas (u_{w_1}) e (u_{w_2}).

Os valores escolhidos para gerar os resultados numéricos das grandezas físicas são fornecidos nas Tabelas 5.1 e 5.2. Para a Tabela 5.1 são sugeridos valores não experimentais na viabilização dos resultados, para que em alguns momentos seja possível realizar comparações com resultados da literatura.

Tabela 5.1: Valores definidos para casos não experimentais

| Caso | α_{t_1} | α_{n_1} | α_{t_2} | α_{n_2} | u_{w_1} | u_{w_2} | $2a^1$ |
|------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------|-----------|--------|
| “A” | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 1.0 | -1.0 | 1.0(X) |
| “B” | 0.25 | 0.50 | 0.75 | 0.25 | 1.0 | -2.0 | 1.0(X) |
| “C” | 0.50 | 0.75 | 0.25 | 0.25 | 0.0 | 1.0 | 2.0(X) |
| “D” | 1.00 | 0.50 | 1.00 | 0.50 | 1.0 | -1.0 | 1.0(X) |

¹ Quando não for mencionado o valor (X) assume-se $X = 0$.

Já para Tabela 5.2 será considerado parâmetros obtidos experimentalmente para três gases nobres: Argônio (Ar), Neônio (Ne) e Xenônio (Xe). O valor do coeficiente de acomodação tangencial (α_{t_1}) para placa 1 é formulado em termos de valores experimentais obtidos por Lord [76]. Para a placa 2 o valor do coeficiente (α_{t_2}) é reproduzido por Sharipov [34] que baseia-se no trabalho experimental de Porodnov [88]. Para o coeficiente de acomodação da energia cinética devido a componente normal da velocidade (α_{n_1}) e (α_{n_2}) não encontra-se resultados experimentais na literatura, contudo tem-se valores de coeficiente de acomodação térmica presente no trabalho de Thomas [59], que será adaptado para este trabalho no formato de coeficiente de acomodação (α_{n_1}) e (α_{n_2}).

Tabela 5.2: Valores definidos experimentalmente para gases nobres

| Gás | α_{t_1} | α_{n_1} | α_{t_2} | α_{n_2} | u_{w_1} | u_{w_2} |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------|-----------|
| Argônio | 0.67 | 0.44 | 0.916 | 0.222 | 1.0 | -2.0 |
| Neônio | 0.31 | 0.178 | 0.849 | 0.082 | 1.0 | -0.5 |
| Xenônio | 0.95 | 0.77 | 1.014 | 0.68 | 1.0 | -1.0 |

Destaca-se que os valores disponibilizados para a velocidade das placas (u_{w_1} e u_{w_2}) nas Tabelas 5.1 e 5.2 somente será considerado para o Problema de Couette. Além disso, assume-se os valores do gradiente para o Problema de Poiseuille como $k_P = 1$ e Problema *Creep* Térmico como $k_T = 1$.

5.2.1 Problema de Poiseuille

A fim de viabilizar a confiabilidade dos resultados, nas Tabelas 5.3 à 5.6 apresentam-se perfil de fluxo de calor ($\mathbf{q}_p(\tau)$), perfil de velocidade ($\mathbf{u}_p(\tau)$), taxa fluxo de calor (\mathbf{Q}_p) e taxa de velocidade de partícula (\mathbf{U}_p), respectivamente, para o Problema de Poiseuille.

Tabela 5.3: Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(\tau)$ para **Caso “A”**.

| τ/a | BGK | S | GJ | MRS |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0.0 | 1.918540(-1) | 2.406295(-1) | 2.563188(-1) | 2.243093(-1) |
| 0.2 | 1.890548(-1) | 2.371338(-1) | 2.520085(-1) | 2.218620(-1) |
| 0.4 | 1.802806(-1) | 2.262477(-1) | 2.386145(-1) | 2.142169(-1) |
| 0.6 | 1.641485(-1) | 2.065108(-1) | 2.144434(-1) | 2.002658(-1) |
| 0.8 | 1.369112(-1) | 1.739924(-1) | 1.749297(-1) | 1.770472(-1) |
| 1.0 | 7.771619(-2) | 1.068938(-1) | 9.413066(-2) | 1.287593(-1) |

Observa-se que os coeficientes de acomodação tangencial e normal para o **Caso “A”** possuem o mesmo valor, ou seja, considera-se placas iguais que são representados por $\alpha_t = \alpha_{t_1} = \alpha_{t_2}$ e $\alpha_n = \alpha_{n_1} = \alpha_{n_2}$.

Tabela 5.4: Problema de Poiseuille: $\mathbf{u}_p(\tau)$ para **Caso “A”**.

| τ/a | BGK | S | GJ | MRS |
|----------|------------|-----------|-----------|------------|
| 0.0 | -1.766740 | -1.777590 | -1.747696 | -1.865738 |
| 0.2 | -1.756142 | -1.766801 | -1.736937 | -1.854961 |
| 0.4 | -1.723594 | -1.733678 | -1.703828 | -1.821988 |
| 0.6 | -1.666329 | -1.675437 | -1.645286 | -1.764479 |
| 0.8 | -1.576855 | -1.584542 | -1.552849 | -1.676204 |
| 1.0 | -1.413465 | -1.419021 | -1.377678 | -1.523931 |

Dessa forma, é viável a comparação dos resultados para as grandezas físicas de interesse no caso do **Modelo BGK** com o trabalho [56] e **Modelo S** a partir da referência [18] quando $\epsilon = \epsilon_p$. Conseqüentemente, em virtude do programa desenvolvido ser unificado para as quatro equações modelo, obtém-se a validação de resultados dos demais modelos abordados neste

trabalho, **Modelo GJ** e **Modelo MRS**, além da validação dos valores numéricos para placas diferentes e ainda a inclusão dos resultados gerados a partir do parâmetro $\epsilon = \epsilon_t$.

Tabela 5.5: Problema de Poiseuille: Q_p para **Caso "A"**.

| X | BGK | S | GJ | MRS |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| -2 | 1.408981 | 1.423000 | 1.333130 | 1.614881 |
| -1 | 8.268522(-1) | 8.780440(-1) | 8.374059(-1) | 9.789039(-1) |
| 0 | 3.256784(-1) | 4.110242(-1) | 4.268669(-1) | 3.988118(-1) |
| 1 | 6.225335(-2) | 9.292892(-2) | 9.793930(-2) | 8.324750(-2) |
| 2 | 6.945731(-3) | 1.065782(-2) | 1.097454(-2) | 1.007132(-2) |

Tabela 5.6: Problema de Poiseuille: U_p para **Caso "A"**.

| X | BGK | S | GJ | MRS |
|-----|------------|-----------|-----------|------------|
| -2 | -5.011569 | -5.014219 | -4.811311 | -5.436839 |
| -1 | -3.942165 | -3.951889 | -3.799182 | -4.290919 |
| 0 | -3.334088 | -3.352483 | -3.290480 | -3.532844 |
| 1 | -4.554131 | -4.565036 | -4.557101 | -4.599352 |
| 2 | -19.49650 | -19.50102 | -19.50306 | -19.50153 |

Nas Tabelas 5.7 à 5.19 são apresentados os valores das grandezas físicas de interesse referente ao Problema de Poiseuille para os quatro modelos cinéticos abordados: **Modelo BGK**, **Modelo S**, **Modelo GJ**, **Modelo MRS** e eventualmente utiliza-se valores da **ELB** [15].

É necessário observar que na maioria dos trabalhos e até o momento para melhor explorar a simetria das superfícies trabalha-se com o eixo x no centro do canal. Isso decorre do fato das placas serem homogêneas e conseqüentemente a posição do gás no canal ser igual em módulo do centro da placa até sua extremidade. Em função disso, as tabelas marcam apenas valores da metade de cima do canal utilizando-se do ponto τ/a (veja Tabelas 5.3 e 5.4).

Como o trabalho proposto disponibiliza o uso de coeficientes de acomodação diferentes, ou seja, abrange superfícies heterogêneas, a simetria discutida não ocorre e por conveniência propõe-se a mudança de um sistema de coordenadas para outro. Nesse sentido, utiliza-se o recurso da translação do eixo x para a extremidade de baixo do canal, ou seja, em cima da parede 2, esse novo eixo será denotado por x' e será representando na tabela por valores de η . Dessa forma, o centro do canal para uma placa homogênea é dado no ponto $y = 0.0$ e as extremidades em a e $-a$, enquanto que para uma placa heterogênea o centro é dado em $\eta = 0.5$

e as extremidades em $\eta = 0.0$ e $\eta = 1.0$. Essa localização espacial pode ser verificada na Figura 5.1 dada a seguir:

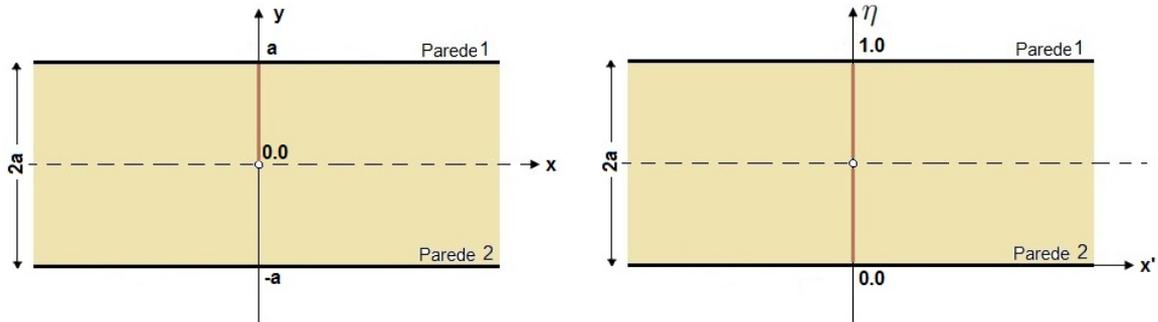


Figura 5.1: Disposição espacial das superfícies do canal: eixo transladado

Considera-se a grandeza física perfil fluxo de calor para resultados numéricos abordados nas Tabelas 5.7 à 5.10, sendo que considera-se as superfícies do canal diferentes, no qual, em termos analíticos faz com que considera-se os coeficientes de acomodação tanto tangencial (α_{t_1}) e (α_{t_2}) como normal (α_{n_1}) e (α_{n_2}) diferentes. Além disso, a largura do canal e o parâmetro de livre caminho médio (ϵ) dados pela viscosidade (ϵ_p) e condutividade térmica (ϵ_t) também define-se diferente a cada tabela.

Tabela 5.7: Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para Caso “B” com $\epsilon = \epsilon_p$.

| η | BGK $\epsilon = \epsilon_p$ | S $\epsilon = \epsilon_p$ | GJ $\epsilon = \epsilon_p$ | MRS $\epsilon = \epsilon_p$ | ELB[15] |
|--------|---------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|----------------|
| 0.0 | 1.2476(-1) | 1.6431(-1) | 1.6755(-1) | 1.6094(-1) | 9.5650(-2) |
| 0.1 | 1.6794(-1) | 2.1408(-1) | 2.2612(-1) | 1.9959(-1) | 1.3997(-1) |
| 0.2 | 1.8637(-1) | 2.3631(-1) | 2.5250(-1) | 2.1695(-1) | 1.5862(-1) |
| 0.3 | 1.9565(-1) | 2.4770(-1) | 2.6602(-1) | 2.2615(-1) | 1.6819(-1) |
| 0.4 | 1.9851(-1) | 2.5121(-1) | 2.7000(-1) | 2.2957(-1) | 1.7148(-1) |
| 0.5 | 1.9583(-1) | 2.4780(-1) | 2.6553(-1) | 2.2804(-1) | 1.6941(-1) |
| 0.6 | 1.8763(-1) | 2.3752(-1) | 2.5262(-1) | 2.2168(-1) | 1.6197(-1) |
| 0.7 | 1.7320(-1) | 2.1965(-1) | 2.3041(-1) | 2.0997(-1) | 1.4839(-1) |
| 0.8 | 1.5069(-1) | 1.9228(-1) | 1.9668(-1) | 1.9157(-1) | 1.2678(-1) |
| 0.9 | 1.1546(-1) | 1.5066(-1) | 1.4582(-1) | 1.6301(-1) | 9.2457(-2) |
| 1.0 | 4.1982(-2) | 6.8671(-2) | 4.6411(-2) | 1.0616(-1) | 1.9727(-2) |

Tabela 5.8: Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “B”** com $\epsilon = \epsilon_t$.

| η | BGK $\epsilon = \epsilon_t$ | S $\epsilon = \epsilon_t$ | GJ $\epsilon = \epsilon_t$ | MRS $\epsilon = \epsilon_t$ | ELB[15] |
|--------|---------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|----------------|
| 0.0 | 1.2476(-1) | 1.2419(-1) | 1.2479(-1) | 1.2120(-1) | 9.5650(-2) |
| 0.1 | 1.6794(-1) | 1.7568(-1) | 1.8673(-1) | 1.5952(-1) | 1.3997(-1) |
| 0.2 | 1.8637(-1) | 1.9795(-1) | 2.1398(-1) | 1.7596(-1) | 1.5862(-1) |
| 0.3 | 1.9565(-1) | 2.0929(-1) | 2.2804(-1) | 1.8444(-1) | 1.6819(-1) |
| 0.4 | 1.9851(-1) | 2.1284(-1) | 2.3253(-1) | 1.8744(-1) | 1.7148(-1) |
| 0.5 | 1.9583(-1) | 2.0963(-1) | 2.2862(-1) | 1.8579(-1) | 1.6941(-1) |
| 0.6 | 1.8763(-1) | 1.9965(-1) | 2.1630(-1) | 1.7956(-1) | 1.6197(-1) |
| 0.7 | 1.7320(-1) | 1.8207(-1) | 1.9453(-1) | 1.6819(-1) | 1.4839(-1) |
| 0.8 | 1.5069(-1) | 1.5471(-1) | 1.6075(-1) | 1.5015(-1) | 1.2678(-1) |
| 0.9 | 1.1546(-1) | 1.1213(-1) | 1.0852(-1) | 1.2156(-1) | 9.2457(-2) |
| 1.0 | 4.1982(-2) | 2.3757(-2) | 1.1835(-1) | 6.1550(-2) | 1.9727(-2) |

Nota-se que os valores para o **Modelo BGK** e para a **ELB** são repetidos nas Tabelas 5.7 e 5.8, isso decorre do fato de ϵ ser um parâmetro de adimensionalização da **EB**, ou seja, para a **ELB** não considera-se o valor de ϵ parametrizado. Já para o **Modelo BGK** o motivo dá-se de $\epsilon = \epsilon_t = \epsilon_p = 1$. O mesmo irá ocorrer nas Tabelas 5.9 e 5.10.

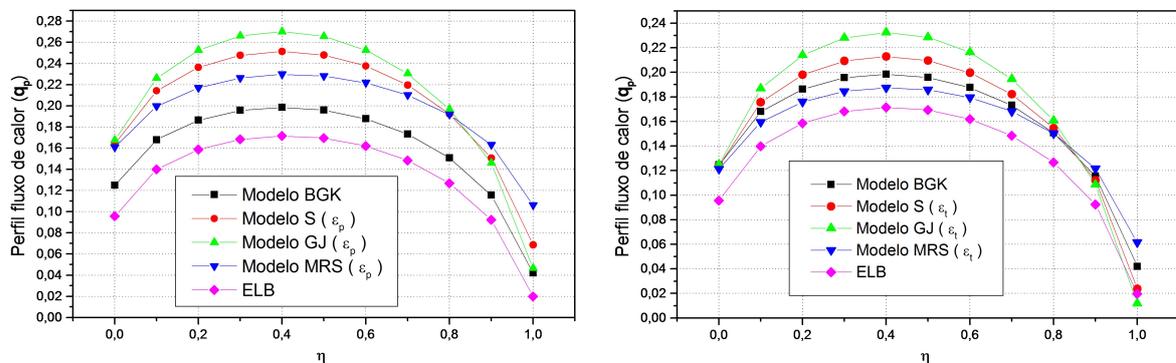
Tabela 5.9: Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “C”** com $\epsilon = \epsilon_p$.

| η | BGK $\epsilon = \epsilon_p$ | S $\epsilon = \epsilon_p$ | GJ $\epsilon = \epsilon_p$ | MRS $\epsilon = \epsilon_p$ | ELB[15] |
|--------|---------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|----------------|
| 0.0 | 2.7700(-1) | 3.7381(-1) | 4.0969(-1) | 3.2441(-1) | -1.9451(-2) |
| 0.1 | 2.7924(-1) | 3.7699(-1) | 4.1301(-1) | 3.2695(-1) | 1.1373(-1) |
| 0.2 | 2.7914(-1) | 3.7703(-1) | 4.1239(-1) | 3.2741(-1) | 1.6753(-1) |
| 0.3 | 2.7664(-1) | 3.7384(-1) | 4.0771(-1) | 3.2575(-1) | 1.9740(-1) |
| 0.4 | 2.7155(-1) | 3.6722(-1) | 3.9871(-1) | 3.2182(-1) | 2.1371(-1) |
| 0.5 | 2.6354(-1) | 3.5681(-1) | 3.8495(-1) | 3.1538(-1) | 2.2063(-1) |
| 0.6 | 2.5203(-1) | 3.4199(-1) | 3.6566(-1) | 3.0600(-1) | 2.1962(-1) |
| 0.7 | 2.3604(-1) | 3.2174(-1) | 3.3957(-1) | 2.9296(-1) | 2.1026(-1) |
| 0.8 | 2.1376(-1) | 2.9414(-1) | 3.0437(-1) | 2.7490(-1) | 1.8979(-1) |
| 0.9 | 1.8097(-1) | 2.5487(-1) | 2.5476(-1) | 2.4882(-1) | 1.5061(-1) |
| 1.0 | 1.1234(-1) | 1.8107(-1) | 1.6213(-1) | 1.9945(-1) | 5.2614(-2) |

Tabela 5.10: Problema de Poiseuille: $q_p(-a + 2a\eta)$ para **Caso “C”** com $\epsilon = \epsilon_t$.

| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB[15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | |
| 0.0 | 2.7700(-1) | 3.0219(-1) | 3.3321(-1) | 2.5602(-1) | -1.9451(-1) |
| 0.1 | 2.7924(-1) | 3.0419(-1) | 3.3498(-1) | 2.5788(-1) | 1.1373(-1) |
| 0.2 | 2.7914(-1) | 3.0327(-1) | 3.3317(-1) | 2.5784(-1) | 1.6753(-1) |
| 0.3 | 2.7664(-1) | 3.9934(-1) | 3.2761(-1) | 2.5586(-1) | 1.9740(-1) |
| 0.4 | 2.7155(-1) | 2.9214(-1) | 3.1799(-1) | 2.5176(-1) | 2.1371(-1) |
| 0.5 | 2.6354(-1) | 2.8124(-1) | 3.0374(-1) | 2.4528(-1) | 2.2063(-1) |
| 0.6 | 2.5203(-1) | 2.6589(-1) | 2.8389(-1) | 2.3592(-1) | 2.1962(-1) |
| 0.7 | 2.3604(-1) | 2.4487(-1) | 2.5690(-1) | 2.2288(-1) | 2.1026(-1) |
| 0.8 | 2.1376(-1) | 2.1587(-1) | 2.1989(-1) | 2.0459(-1) | 1.8979(-1) |
| 0.9 | 1.8097(-1) | 1.7363(-1) | 1.6644(-1) | 1.7753(-1) | 1.5061(-1) |
| 1.0 | 1.1234(-1) | 8.9549(-2) | 6.0825(-2) | 1.2324(-1) | 5.2614(-2) |

Pode-se observar que para as Tabelas 5.7 à 5.10, os valores numéricos para o perfil fluxo de calor tem maior valor absoluto para o **Modelo GJ** quando comparado com os demais modelos abordados aplicado em cada ponto η . O **Modelo BGK** considerando ϵ_p e **Modelo MRS** para ϵ_t tem menor valor em módulo. Nesse sentido, tem-se que o modelo cinético que mais aproxima seus resultados numéricos da **ELB**, isto é, que comparado aos modelos cinéticos é o que apresenta os menores valores absolutos, ou seja, é o **Modelo BGK** para ϵ_p e **Modelo MRS** para ϵ_t , sendo que este último se compararmos ambos os modelos é o que possui menor valor absoluto, o que significa que é o que mais se aproxima dos valores da **ELB**. Na busca da confirmação dessa conclusão foi elaborado as Figuras 5.2 e 5.3, no qual visualmente a concordância dos modelos cinéticos é diagnosticada. Utiliza-se a Tabela 5.7 e 5.8 na Figura

Figura 5.2: Problema de Poiseuille: comparação dos modelos cinéticos para q_p a partir das Tabelas 5.7 e 5.8

5.2 e Tabela 5.9 e 5.10 na Figura 5.3 no qual aborda o parâmetro $\epsilon = \epsilon_t$ no lado direito e $\epsilon = \epsilon_p$ no lado esquerdo da Figura, sendo que o direito mostra uma concordância maior entre

os modelos cinéticos propostos em ambas as figuras geradas. Analisa-se ainda que o **Modelo MRS** quando $\epsilon = \epsilon_t$ é o que mais está próximo do perfil da **ELB**.

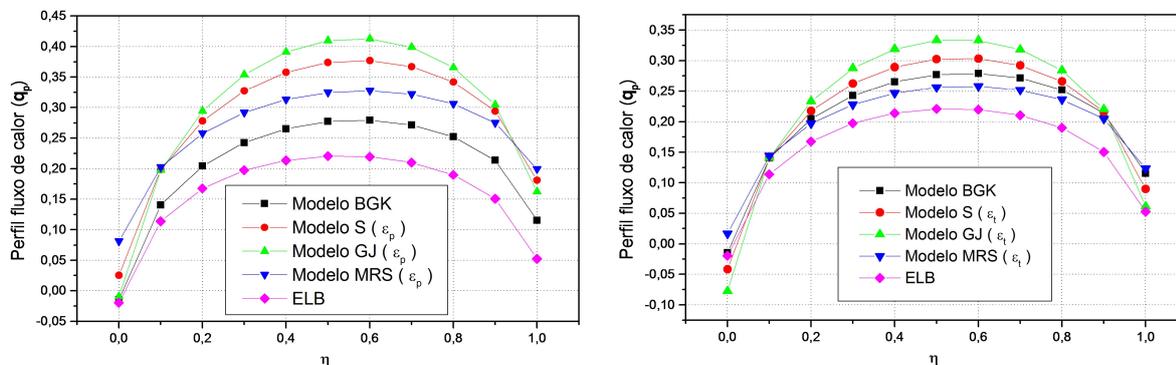


Figura 5.3: Problema de Poiseuille: comparação dos modelos cinéticos para $\mathbf{q_p}$ a partir das Tabelas 5.9 e 5.10

Visando ainda, uma análise mais precisa para a decisão do modelo mais próximo a **ELB** busca-se o recurso da matemática estatística já que esta área proporciona ferramentas que padronizam e formalizam o processo para obter conclusões [68]. Mais precisamente, será utilizado os resultados da estatística não-paramétrica através da análise de variância de dois fatores de Friedman por postos, discutido no anexo A.

Considera-se como hipótese nula (H_0), a hipótese do **Modelo BGK**, **Modelo S**, **Modelo GJ**, **Modelo MRS** e **ELB** não terem diferença entre si, enquanto que a hipótese alternativa (H_1) a dos modelos cinéticos, incluindo a **ELB**, que diferem significativamente entre si.

Seja $\alpha = 0.05$, o nível de significância. O procedimento no uso das análises de variância de dois fatores de Friedman por postos consiste em primeiramente considerar os escores em uma tabela de dupla entrada tendo N linhas (sujeitos) e k colunas (condições ou variáveis), isso já está pronto, basta analisar as Tabelas 5.9 e 5.10. Tem-se então, que $N = 11$ é o número de posições no canal em cada um dos modelos cinéticos que totalizam $k = 8$. Em seguida deve-se atribuir postos aos dados de cada linha de 1 a k e então somá-los em cada coluna, esse procedimento será desenvolvido, para todos os casos, com auxílio do software especializado Mathematica® e tem-se o resultado, para este caso, na Tabela 5.11.

Tabela 5.11: Problema de Poiseuille: Soma dos Postos (R_j) para $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$.

| | BGK | S | | GJ | | MRS | | ELB |
|-----------------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|
| | $\epsilon = \epsilon_p = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | |
| Caso “B” | 35 | 76 | 40 | 82 | 58 | 66 | 28 | 11 |
| Caso “C” | 36 | 77 | 45 | 85 | 52 | 63 | 27 | 11 |

A hipótese nula de que não havia diferença entre os modelos cinéticos² foi rejeitada devido $p = 0.0$, que foi obtida através do software Mathematica® e portanto, conclui-se que há uma diferença entre os modelos cinéticos. Contudo, mesmo concluindo que há uma diferença, ainda não sabemos se há uma diferença entre os modelos cinéticos e a **ELB**. Para saber se ocorrem diferenças, devemos determinar as comparações múltiplas para todos os modelos cinéticos e a **ELB**.

Será considerado o nível de significância igual a 5%, conforme utilizado inicialmente para encontrar os valores das somas dos postos. Primeiramente, vamos trabalhar com $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para o **Caso “B”** no qual iremos determinar a diferença entre os modelos cinéticos e a **ELB**. Então,

$$|R_{\mathbf{BGK}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |35 - 31| = 4,$$

$$|R_{\mathbf{S}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |76 - 31| = 45,$$

$$|R_{\mathbf{S}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |40 - 31| = 9,$$

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |82 - 31| = 51,$$

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |58 - 31| = 27,$$

$$|R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |66 - 31| = 35$$

e

$$|R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |28 - 31| = 3.$$

Dessa forma, encontra-se as diferenças críticas usando a Eq.(A.2). Como $\alpha = 0.05$ e $k = 8$, para obter o valor de z , calculamos

$$\frac{\alpha}{k(k-1)} = \frac{0.05}{(8)(7)} = 0.000893. \quad (5.2)$$

²É necessário observar que quando refere-se aos modelos cinéticos das hipóteses nula ou alternativa está sendo incluído, nestes casos, a **ELB**, ou seja, não está sendo afirmado que há diferença da **ELB** com os demais modelos mas sim que algum dos modelos, podendo ser a **ELB** é diferente dos demais.

Consultando a Tabela A.1 do Apêndice A, encontramos (após interpolações) que $z_{0.000893} = 3.17$. A diferença crítica então é

$$c = z_{\alpha/k(k-1)} \sqrt{\frac{Nk(k+1)}{6}} = 3.17 \sqrt{\frac{(11)(8)(9)}{6}} = 36.42. \quad (5.3)$$

Qualquer diferença que exceda $c = 36.42$ indicará uma diferença significativa entre o modelo cinético e a **ELB**. Como somente as diferenças da $R_{\mathbf{ELB}}$ com o $R_{\mathbf{S}_{\epsilon_p}}$ ($c = 45$) e $R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_p}}$ ($c = 51$) excedem a diferença crítica, concluímos que somente a diferença entre os **Modelo S** e **Modelo GJ** para $\epsilon = \epsilon_p$ com a **ELB** são significantes. Note que $R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_p}}$, apesar de grande ($c = 35$), não é uma magnitude grande o suficiente para nos permitir concluir que **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_p$ e **ELB** são diferentes quando usamos o nível de significância que escolhemos.

Para a análise do $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para o **Caso "C"** a partir da Tabela 5.11 obtém-se que as diferenças dos modelos cinéticos

$$|R_{\mathbf{S}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |77 - 31| = 46 > 36.42$$

e

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |85 - 31| = 54 > 36.42$$

são os que excedem o valor de c . Em virtude disso, a diferença do **Modelo S** e **Modelo GJ** para $\epsilon = \epsilon_p$ com a **ELB** é significativa.

Para resultados obtidos nas Tabelas 5.12 e 5.13 considera-se a grandeza física perfil de velocidade, sendo que considera-se as placas heterogêneas, ou seja, com coeficientes de acomodação tangencial (α_{t_1}) e (α_{t_2}) e normal (α_{n_1}) e (α_{n_2}) diferentes. Além disso, a largura do canal também define-se diferente a cada tabela e o parâmetro de livre caminho médio (ϵ) oscila entre viscosidade (ϵ_p) e condutividade térmica (ϵ_t) e em virtude da observação feita anteriormente de que os valores numéricos para o **Modelo BGK** e **ELB** são os mesmos, esses valores serão abordados em uma única tabela, vejamos:

Tabela 5.12: Problema de Poiseuille: $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “B”**.

| η | BGK | S | GJ | | MRS | | ELB [15] | |
|--------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------|-------------------------|
| | $\epsilon = \epsilon_p = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | | $\epsilon = \epsilon_t$ |
| 0.0 | -1.5989 | -1.6063 | -1.6519 | -1.5760 | -1.6253 | -1.6876 | -1.7226 | -1.6963 |
| 0.1 | -1.7037 | -1.7132 | -1.7727 | -1.6863 | -1.7513 | -1.7921 | -1.8386 | -1.8392 |
| 0.2 | -1.7491 | -1.7598 | -1.8250 | -1.7326 | -1.8037 | -1.8402 | -1.8918 | -1.8981 |
| 0.3 | -1.7661 | -1.7775 | -1.8436 | -1.7500 | -1.8222 | -1.8597 | -1.9116 | -1.9177 |
| 0.4 | -1.7603 | -1.7720 | -1.8345 | -1.7442 | -1.8132 | -1.8559 | -1.9033 | -1.9051 |
| 0.5 | -1.7334 | -1.7450 | -1.7995 | -1.7171 | -1.7788 | -1.8304 | -1.8688 | -1.8624 |
| 0.6 | -1.6855 | -1.6966 | -1.7387 | -1.6687 | -1.7187 | -1.7834 | -1.8081 | -1.7894 |
| 0.7 | -1.6152 | -1.6253 | -1.6504 | -1.5973 | -1.6312 | -1.7141 | -1.7201 | -1.6845 |
| 0.8 | -1.5186 | -1.5276 | -1.5304 | -1.4985 | -1.5115 | -1.6195 | -1.6016 | -1.5427 |
| 0.9 | -1.3867 | -1.3940 | -1.3680 | -1.3618 | -1.3471 | -1.4925 | -1.4447 | -1.3508 |
| 1.0 | -1.1682 | -1.1733 | -1.1022 | -1.1251 | -1.0630 | -1.2954 | -1.2065 | -1.0242 |

Tabela 5.13: Problema de Poiseuille: $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “C”**.

| η | BGK | S | GJ | | MRS | | ELB [15] | |
|--------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------|-------------------------|
| | $\epsilon = \epsilon_p = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | | $\epsilon = \epsilon_t$ |
| 0.0 | -4.8594 | -4.8831 | -5.1133 | -4.8451 | -5.0846 | -5.0142 | -5.2151 | -3.2072 |
| 0.1 | -4.8905 | -4.9146 | -5.1523 | -4.8755 | -5.1226 | -5.0474 | -5.2562 | -4.0688 |
| 0.2 | -4.9069 | -4.9311 | -5.1719 | -4.8912 | -5.1417 | -5.0654 | -5.2774 | -4.5847 |
| 0.3 | -4.9086 | -4.9326 | -5.1720 | -4.8920 | -5.1415 | -5.0681 | -5.2785 | -4.9639 |
| 0.4 | -4.8951 | -4.9187 | -5.1520 | -4.8776 | -5.1217 | -5.0552 | -5.2593 | -5.2334 |
| 0.5 | -4.8657 | -4.8887 | -5.1113 | -4.8471 | -5.0813 | -5.0262 | -5.2191 | -5.4020 |
| 0.6 | -4.8193 | -4.8414 | -5.0484 | -4.7992 | -5.0187 | -4.9801 | -5.1569 | -5.4725 |
| 0.7 | -4.7540 | -4.7749 | -4.9609 | -4.7316 | -4.9313 | -4.9154 | -5.0709 | -5.4439 |
| 0.8 | -4.6661 | -4.6855 | -4.8445 | -4.6401 | -4.8137 | -4.8294 | -4.9579 | -5.3099 |
| 0.9 | -4.5472 | -4.5648 | -4.6888 | -4.5144 | -4.6533 | -4.7156 | -4.8108 | -5.0507 |
| 1.0 | -4.3526 | -4.3680 | -4.4360 | -4.2983 | -4.3758 | -4.5422 | -4.5918 | -4.5117 |

Ao analisar os resultados obtidos para perfil de velocidade nas Tabelas 5.12 e 5.13, nota-se que o **Modelo MRS** apresenta valores de $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ significativamente maiores em módulo do que os demais modelos para cada ponto η considerando tanto o parâmetro de viscosidade como de condutividade térmica, sendo que este tem maior valor absoluto. Mas isso não ocorre quando o **Modelo MRS** é comparado a **ELB** pois os valores são menores em módulo considerando ϵ_t quando $0.0 < \eta < 0.5$ referente a Tabela 5.12 e quando $0.1 < \eta < 1.0$ referente a Tabela 5.13 para $\eta \in N$.

A partir das Tabelas 5.12 e 5.13 gerou-se as Figuras 5.4 e 5.5, respectivamente, no qual pode-se comparar visualmente os modelos cinéticos abordados neste trabalho. Nota-se que, utilizando o parâmetro $\epsilon = \epsilon_t$ (Lado direito da Figura) os perfis estão mais próximos do que os

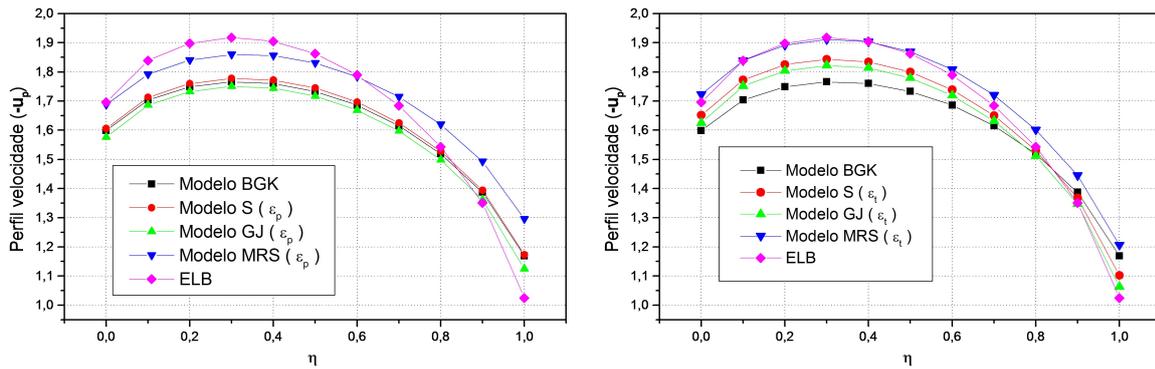


Figura 5.4: Problema de Poiseuille: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{u}_p a partir da Tabela 5.12

perfis com parâmetro $\epsilon = \epsilon_p$ (Lado esquerdo da Figura). Mas isso não auxilia no aumento de concordância do **Modelo MRS** que diverge em até um dígito dos demais modelos abordados. Contudo, visualmente, observa-se que o **Modelo MRS** com ϵ_t dentre os modelos cinéticos é o que mais se aproxima dos valores da **ELB**, isso comprova-se ao analisar os valores da Tabela 5.12 para $\eta = 0, 1$ no qual atinge três dígitos significativos de concordância.

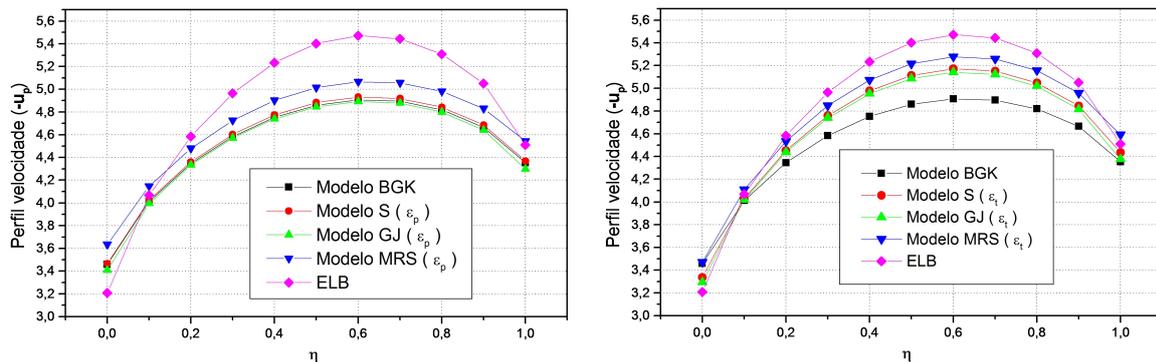


Figura 5.5: Problema de Poiseuille: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{u}_p a partir da Tabela 5.13

Busca-se, mais uma vez, o recurso da matemática estatística para uma análise da melhor comparação dos modelos cinéticos com a **ELB**. Será considerado o nível de significância igual a 5%, utilizado inicialmente para encontrar os valores da soma dos postos. Além disso, a construção do problema e o cálculo para o valor de c é análogo ao realizado anteriormente na Eq.(5.3). A soma dos postos é dado da Tabela 5.14, vejamos:

Tabela 5.14: Problema de Poiseuille: Soma dos Postos (R_j) para $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$.

| | BGK | | S | | GJ | | MRS | | ELB |
|----------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----|-----|
| | $\epsilon = \epsilon_p = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | | |
| Caso "B" | 70 | 59 | 47 | 83 | 62 | 26 | 18 | 31 | |
| Caso "C" | 74 | 63 | 31 | 85 | 43 | 45 | 16 | 39 | |

Como $p = 0.0$, a hipótese nula de que não havia diferença entre os modelos foi rejeitada e então conclui-se que há uma diferença entre os modelos cinéticos. De forma análoga ao caso de $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$, ainda não se sabe se há diferença entre os modelos cinéticos e a **ELB**, e então vamos determinar as comparações múltiplas para todos os modelos cinéticos e a **ELB**.

Primeiramente, vamos trabalhar com $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para o **Caso “B”** no qual iremos determinar a diferença entre os modelos cinéticos e a **ELB**. Então,

$$|R_{\mathbf{BGK}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |70 - 31| = 39 > 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{S}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |59 - 31| = 28 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{S}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |47 - 31| = 16 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |83 - 31| = 52 > 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |62 - 31| = 31 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |26 - 31| = 5 < 36.42 = c,$$

e

$$|R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |18 - 31| = 13 < 36.42 = c.$$

Observa-se que dois modelos cinéticos excedem o valor de c e então indicam uma diferença significativa entre o modelo e a **ELB**. Como somente as diferenças de $R_{\mathbf{ELB}}$ com o $R_{\mathbf{BGK}}$ ($c = 39$) e $R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_p}}$ ($c = 52$) excedem a diferença crítica, concluímos que somente a diferença entre as condições **Modelo BGK** e **Modelo GJ** para $\epsilon = \epsilon_p$ com a **ELB** são significantes. Note que $R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_t}}$, apesar de grande ($c = 31$), não é uma magnitude grande o suficiente para nos permitir concluir que **Modelo GJ** para $\epsilon = \epsilon_t$ e **ELB** são diferentes quando usamos o nível de significância que escolhemos.

É necessário, ainda, analisar $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para o **Caso “C”** sendo que a partir da Tabela 5.14 obtém-se que a diferença do modelo cinético

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |85 - 39| = 46 > 36.42$$

é o que excede o valor de c . Logo, a diferença do **Modelo GJ** para $\epsilon = \epsilon_p$ com a **ELB** é significativa.

Em virtude desta análise, o qual pode-se rejeitar pelo menos um modelo cinético, além da análise de tabelas e gráficos conclui-se assim como para o perfil fluxo de calor que o modelo que melhor se aproxima da **ELB** é o **Modelo MRS** com $\epsilon = \epsilon_t$ para o perfil de velocidade.

Logo, para estudar o comportamento dos perfis em uma melhor análise utiliza-se o **Modelo MRS** já que é o que está mais coerente com a originalidade dos resultados da **ELB**. Portanto, será desenvolvida as Tabelas 5.15 e 5.16, o qual estuda o comportamento dos perfis do gás nobre Neônio quando tem-se um canal com diferentes larguras (a).

Tabela 5.15: Problema de Poiseuille: $\mathbf{q}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Neônio para diferentes larguras do canal.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|------------------------------------|---------------|--------------|--------------|--------------|
| η | $2a = 5$ | $2a = 2$ | $2a = 1$ | $2a = 0.1$ |
| 0.0 | 3.581903(-1) | 2.591278(-1) | 1.942316(-1) | 5.173702(-2) |
| 0.1 | 3.534869(-1) | 2.546105(-1) | 1.911865(-1) | 5.150106(-2) |
| 0.2 | 3.452645(-1) | 2.480941(-1) | 1.870192(-1) | 5.112963(-2) |
| 0.3 | 3.330189(-1) | 2.393599(-1) | 1.816331(-1) | 5.061729(-2) |
| 0.4 | 3.158916(-1) | 2.280644(-1) | 1.748795(-1) | 4.995470(-2) |
| 0.5 | 2.924814(-1) | 2.136818(-1) | 1.665354(-1) | 4.912734(-2) |
| 0.6 | 2.604598(-1) | 1.953910(-1) | 1.562600(-1) | 4.811282(-2) |
| 0.7 | 2.157102(-1) | 1.718353(-1) | 1.435046(-1) | 4.687532(-2) |
| 0.8 | 1.500570(-1) | 1.405191(-1) | 1.272883(-1) | 4.535103(-2) |
| 0.9 | 4.310246(-2) | 9.575623(-2) | 1.054501(-1) | 4.339945(-2) |
| 1.0 | -2.273915(-1) | 7.874193(-3) | 6.724971(-2) | 4.037107(-2) |

Tabela 5.16: Problema de Poiseuille: $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Neônio para diferentes larguras do canal.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|------------------------------------|------------|-----------|---------------|---------------|
| η | $2a = 5$ | $2a = 2$ | $2a = 1$ | $2a = 0.1$ |
| 0.0 | -12.031251 | -3.611634 | -1.638191 | -1.854231(-1) |
| 0.1 | -11.724836 | -3.534038 | -1.611421 | -1.846895(-1) |
| 0.2 | -11.314666 | -3.436263 | -1.578155 | -1.836307(-1) |
| 0.3 | -10.799507 | -3.317839 | -1.538193 | -1.822357(-1) |
| 0.4 | -10.177299 | -3.178031 | -1.491224 | -1.804851(-1) |
| 0.5 | -9.444762 | -3.015725 | -1.436785 | -1.783490(-1) |
| 0.6 | -8.596614 | -2.829199 | -1.374166 | -1.757811(-1) |
| 0.7 | -7.623862 | -2.615654 | -1.302231 | -1.727072(-1) |
| 0.8 | -6.509407 | -2.370013 | -1.218955 | -1.689952(-1) |
| 0.9 | -5.212625 | -2.080884 | -1.119891 | -1.643540(-1) |
| 1.0 | -3.502242 | -1.689351 | -9.829107(-1) | -1.574348(-1) |

Ao analisar as Tabelas 5.15 e 5.16 verifica-se que quanto menor a largura tem-se que

o perfil fluxo de calor é menor. O mesmo se dá para o perfil de velocidade sendo este com uma queda em módulo mais acentuada, conforme comprova-se em $\eta = 0.0$ onde para $2a = 5$ tem-se -12.031251 e para $2a = 0.1$ o valor é de $-1.854231(-1)$. Para uma melhor análise desenvolve-se a Figura 5.6.

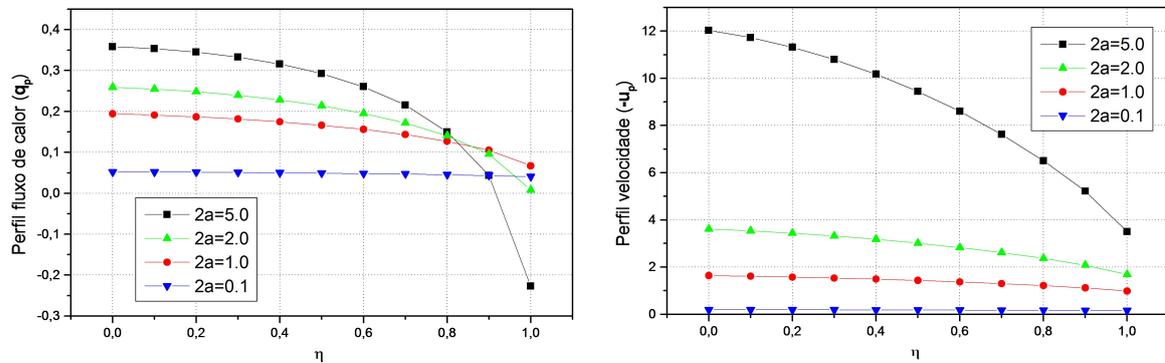


Figura 5.6: Problema de Poiseuille: variação da largura do canal com Gás Neônio para **Modelo MRS** e $\epsilon = \epsilon_t$

Comprova-se assim, o que foi analisado nos valores das tabelas, os perfis de velocidade e de fluxo de calor no canal são maiores em módulo em canais mais largos, ou seja, para $2a = 5$. Note que trabalha-se com os valores em módulo pois os valores negativos e positivos definem a dissipação do fluxo do calor e o sentido da velocidade do gás [45], o qual não é nosso objetivo de estudo.

Além disso, desenvolve-se as Tabelas 5.17 e 5.18 que analisam os perfis fluxo de calor e de velocidade inicialmente a partir da variação do coeficiente de acomodação normal (α_n) para o gás Neônio e em seguida para a variação do coeficiente tangencial (α_t) desse mesmo gás.

Tabela 5.17: Problema de Poiseuille: $\mathbf{q_p}(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Neônio para $2a = 1$.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|---|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| η | $\alpha_t = \text{Ne}$ | | $\alpha_n = \text{Ne}$ | |
| | $\alpha_n = \text{Ar}$ | $\alpha_n = \text{Xe}$ | $\alpha_t = \text{Ar}$ | $\alpha_t = \text{Xe}$ |
| 0.0 | 1.845284(-1) | 1.728219(-1) | 1.798784(-1) | 1.688393(-1) |
| 0.1 | 1.819550(-1) | 1.705896(-1) | 1.783968(-1) | 1.680246(-1) |
| 0.2 | 1.781963(-1) | 1.671141(-1) | 1.757399(-1) | 1.659784(-1) |
| 0.3 | 1.731612(-1) | 1.623064(-1) | 1.718338(-1) | 1.626347(-1) |
| 0.4 | 1.667046(-1) | 1.560217(-1) | 1.665533(-1) | 1.578752(-1) |
| 0.5 | 1.586051(-1) | 1.480364(-1) | 1.597023(-1) | 1.515098(-1) |
| 0.6 | 1.485215(-1) | 1.380042(-1) | 1.509743(-1) | 1.432375(-1) |
| 0.7 | 1.359011(-1) | 1.253624(-1) | 1.398692(-1) | 1.325643(-1) |
| 0.8 | 1.197536(-1) | 1.091009(-1) | 1.254873(-1) | 1.185989(-1) |
| 0.9 | 9.789366(-2) | 8.698886(-2) | 1.058410(-1) | 9.936860(-2) |
| 1.0 | 5.945567(-2) | 4.793455(-3) | 7.105493(-2) | 6.507679(-2) |

Destaca-se que não foi acrescentado os valores de α_t e α_n para o Neônio simultaneamente na Tabela 5.17 pois já temos disponibilizados esses valores nas Tabelas 5.15 e 5.16. O mesmo procedimento será adotado na Tabela 5.18.

Ainda, a partir da Tabela 5.17 obtém-se a Figura 5.7. Nota-se que no lado esquerdo da figura é fixado o coeficiente de acomodação tangencial (α_t) variando o coeficiente de acomodação normal (α_n) e no lado direito varia-se α_n e fixa o α_t . Verifica-se que em ambos os

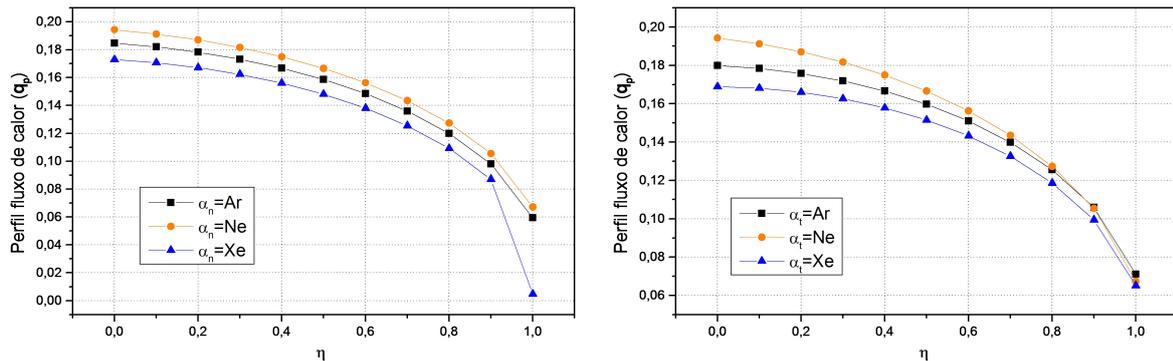


Figura 5.7: Problema de Poiseuille: \mathbf{q}_p para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Neônio para **Modelo MRS** e $\epsilon = \epsilon_t$

casos de variação dos coeficientes de acomodação, os perfis fluxo de calor possuem uma grande concordância, sendo que fica mais acentuada quando fixa-se α_n , principalmente na extremidade do canal superior. Já, se considerar esta mesma extremidade ao fixar α_t nota-se que é a parte do canal o qual demonstra a maior variabilidade do perfil.

Tabela 5.18: Problema de Poiseuille: $\mathbf{u}_p(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Neônio para $2a = 1$.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| η | $\alpha_t = \mathbf{Ne}$ | | $\alpha_n = \mathbf{Ne}$ | |
| | $\alpha_n = \mathbf{Ar}$ | $\alpha_n = \mathbf{Xe}$ | $\alpha_t = \mathbf{Ar}$ | $\alpha_t = \mathbf{Xe}$ |
| 0.0 | -1.625320 | -1.611637 | -1.210974 | -9.848867(-1) |
| 0.1 | -1.599574 | -1.586637 | -1.199770 | -9.798513(-1) |
| 0.2 | -1.567205 | -1.554905 | -1.181941 | -9.680841(-1) |
| 0.3 | -1.528026 | -1.516258 | -1.157334 | -9.494467(-1) |
| 0.4 | -1.481734 | -1.470396 | -1.125686 | -9.236910(-1) |
| 0.5 | -1.427871 | -1.416860 | -1.086587 | -8.904190(-1) |
| 0.6 | -1.365729 | -1.354937 | -1.039395 | -8.490030(-1) |
| 0.7 | -1.294171 | -1.283476 | -9.830677(-1) | -7.984165(-1) |
| 0.8 | -1.211162 | -1.200419 | -9.157377(-1) | -7.368142(-1) |
| 0.9 | -1.112228 | -1.101231 | -8.332889(-1) | -6.601259(-1) |
| 1.0 | -9.750906(-1) | -9.633344(-1) | -7.152482(-1) | -5.481095(-1) |

A partir da Tabela 5.18 gera-se a Figura 5.8. Observa-se que para o perfil de velocidade

a análise é semelhante ao do perfil de fluxo de calor, ou seja, fixa-se o coeficiente de acomodação tangencial e varia-se os valores do coeficiente de acomodação normal para o lado esquerdo da figura, enquanto que para o lado direito varia-se o α_n e fixa-se o α_t . Nota-se que a variação do coeficiente de acomodação normal, ou seja, o lado esquerdo da figura, o perfil não sofre variação já para o lado direito da figura os perfis estão significativamente mais dispersos, sendo que o gás Neônio é o perfil que se desloca mais rápido.

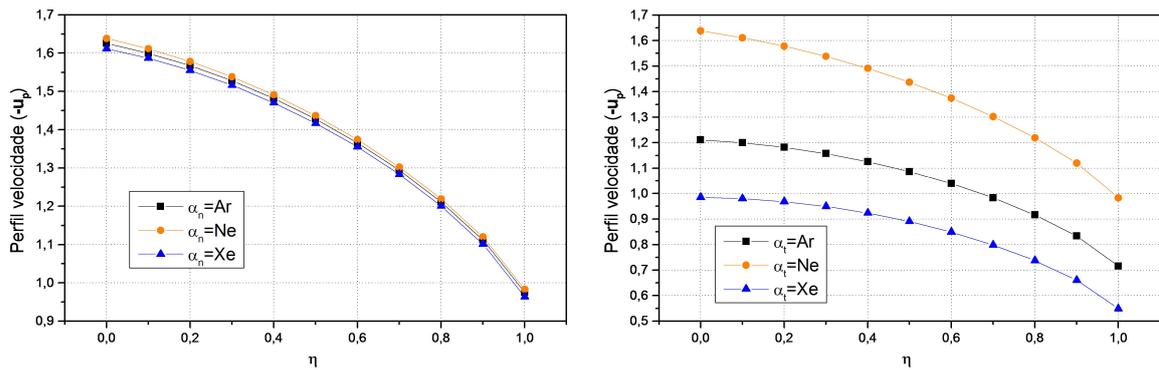


Figura 5.8: Problema de Poiseuille: \mathbf{u}_p para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Neônio para **Modelo MRS** e $\epsilon = \epsilon_t$

Além disso, tem-se a possibilidade de viabilizar resultados referentes as taxas de fluxo de calor \mathbf{Q}_p e de fluxo de partícula \mathbf{U}_p conforme a Tabela 5.19.

Tabela 5.19: Problema de Poiseuille: **Modelo MRS** com ϵ_t para $2a = 1.0(X)$.

| X | \mathbf{Q}_p | | | \mathbf{U}_p | |
|----|----------------|--------------|--------------|----------------|------------|
| | Ar | Ne | Xe | Ar | Xe |
| -2 | 1.411364 | 1.673885 | 1.331107 | -3.782530 | -3.290320 |
| -1 | 8.018181(-1) | 9.828545(-1) | 7.404743(-1) | -2.701154 | -2.226243 |
| 0 | 3.025079(-1) | 3.436820(-1) | 2.852281(-1) | -2.170853 | -1.723001 |
| 1 | 6.079766(-2) | 5.890314(-2) | 6.215794(-2) | -4.130255 | -3.656969 |
| 2 | 7.063392(-3) | 6.522314(-3) | 7.362757(-3) | -26.559069 | -26.063294 |

Aqui, pode-se observar que a medida que a largura do canal aumenta, os valores numéricos obtidos são cada vez menores para \mathbf{Q}_p enquanto que são cada vez maiores para \mathbf{U}_p , neste caso, com um aumento muito mais significativo.

5.2.2 Problema *Creep* Térmico

É necessário, mais uma vez, a certificação dos resultados numéricos para as grandezas físicas de interesse, sendo que neste momento trata-se do Problema *Creep* Térmico. Nas Tabelas

5.20 à 5.23 usa-se parâmetros abordados para o **Caso “A”** no qual os coeficientes de acomodação tangencial ($\alpha_t = \alpha_{t_1} = \alpha_{t_2}$) como o normal ($\alpha_n = \alpha_{n_1} = \alpha_{n_2}$) são iguais.

Tabela 5.20: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{q}_t(\tau)$ para **Caso “A”**.

| τ/a | BGK | S | GJ | MRS |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0.0 | -8.324107(-1) | -1.054961 | -1.066472 | -1.065627 |
| 0.2 | -8.262728(-1) | -1.046342 | -1.056434 | -1.058946 |
| 0.4 | -8.069264(-1) | -1.019378 | -1.025052 | -1.038024 |
| 0.6 | -7.709593(-1) | -9.700305(-1) | -9.677112(-1) | -9.996600(-1) |
| 0.8 | -7.092343(-1) | -8.875782(-1) | -8.721502(-1) | -9.353756(-1) |
| 1.0 | -5.732521(-1) | -7.153601(-1) | -6.727738(-1) | -8.012333(-1) |

Na literatura, tem-se resultados numéricos para as grandezas físicas apenas considerando placas iguais para **Modelo BGK** [56] e **Modelo S** [18] quando $\epsilon = \epsilon_p$. Como o programa que gera resultados numéricos é unificado, fica confortável afirmar que os valores para placas diferentes é confiável além de os demais modelos (**Modelo GJ** e **Modelo MRS**) fornecerem valores corretos.

Tabela 5.21: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{u}_t(\tau)$ para **Caso “A”**.

| τ/a | BGK | S | GJ | MRS |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0.0 | 1.817431(-1) | 2.308391(-1) | 2.442293(-1) | 2.176936(-1) |
| 0.2 | 1.798898(-1) | 2.282867(-1) | 2.410882(-1) | 2.158813(-1) |
| 0.4 | 1.740981(-1) | 2.203564(-1) | 2.313540(-1) | 2.102288(-1) |
| 0.6 | 1.635198(-1) | 2.060530(-1) | 2.138947(-1) | 1.999508(-1) |
| 0.8 | 1.458836(-1) | 1.827199(-1) | 1.856933(-1) | 1.829591(-1) |
| 1.0 | 1.088709(-1) | 1.358984(-1) | 1.300193(-1) | 1.482410(-1) |

Em virtude disso, os resultados numéricos apresentados para perfil de fluxo de calor ($\mathbf{q}_t(\tau)$), perfil de velocidade ($\mathbf{u}_t(\tau)$), taxa fluxo de calor (\mathbf{Q}_t) e taxa de velocidade de partícula (\mathbf{U}_t), respectivamente, para o Problema *Creep* Térmico são considerados corretos.

Tabela 5.22: Problema *Creep* Térmico: \mathbf{Q}_t para **Caso “A”**.

| X | BGK | S | GJ | MRS |
|-----|---------------|--------------|---------------|---------------|
| -2 | -7.387158 | -7.460666 | -7.023077 | -8.372315 |
| -1 | -4.357962 | -4.627533 | -4.375897 | -5.191079 |
| 0 | -1.534744 | -1.933542 | -1.928168 | -1.994035 |
| 1 | -2.360873(-1) | 3.458333(-1) | -3.480459(-1) | -3.423139(-1) |
| 2 | -2.486069(-2) | 3.720775(-2) | -3.723036(-2) | -3.716688(-2) |

Tabela 5.23: Problema *Creep* Térmico: \mathbf{U}_t para **Caso “A”**.

| X | BGK | S | GJ | MRS |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| -2 | 1.408979 | 1.423000 | 1.333130 | 1.614881 |
| -1 | 8.268520(-1) | 8.780440(-1) | 8.374059(-1) | 9.789039(-1) |
| 0 | 3.256784(-1) | 4.110242(-1) | 4.268669(-1) | 3.988118(-1) |
| 1 | 6.225334(-2) | 9.292892(-2) | 9.793930(-2) | 8.324750(-2) |
| 2 | 6.945731(-3) | 1.065782(-2) | 1.097454(-2) | 1.007132(-2) |

Note que $\mathbf{Q}_p = \mathbf{U}_t$ de acordo com as Tabelas 5.19 e 5.23. Essa igualdade é conhecida como a relação de Onsager [30, 33, 80] e é mais uma ferramenta que auxilia na veracidade dos valores.

Seguindo a mesma linha utilizada para o Problema de Poiseuille, desenvolve-se as Tabelas 5.24 à 5.27 para o perfil fluxo de calor o qual considera-se as paredes dos canais diferentes, ou seja, em termos analíticos tem-se que α_{t_1} , α_{t_2} , α_{n_1} e α_{n_2} assumem valores diferentes, valores os quais são escolhidos a fim de comparação com resultados da **ELB**.

Tabela 5.24: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “B”** com $\epsilon = \epsilon_p$.

| η | BGK $\epsilon = \epsilon_p$ | S $\epsilon = \epsilon_p$ | GJ $\epsilon = \epsilon_p$ | MRS $\epsilon = \epsilon_p$ | ELB[15] |
|--------|--------------------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------|
| 0.0 | -6.8621(-1) | -8.7153(-1) | -8.4894(-1) | -9.1765(-1) | -4.9562(-1) |
| 0.1 | -7.8615(-1) | -1.0005 | -9.9696(-1) | -1.0231 | -6.0885(-1) |
| 0.2 | -8.2906(-1) | -1.0585 | -1.0640 | -1.0706 | -6.5389(-1) |
| 0.3 | -8.5145(-1) | -1.0893 | -1.0999 | -1.0961 | -6.7729(-1) |
| 0.4 | -8.6000(-1) | -1.1010 | -1.1138 | -1.1063 | -6.8698(-1) |
| 0.5 | -8.5695(-1) | -1.0963 | -1.1085 | -1.1036 | -6.8559(-1) |
| 0.6 | -8.4250(-1) | -1.0754 | -1.0845 | -1.0882 | -6.7331(-1) |
| 0.7 | -8.1513(-1) | -1.0365 | -1.0396 | -1.0590 | -6.4832(-1) |
| 0.8 | -7.7078(-1) | -9.7492(-1) | -9.6827(-1) | -1.0122 | -6.0574(-1) |
| 0.9 | -6.9925(-1) | -8.7864(-1) | -8.5677(-1) | -9.3869(-1) | -5.3296(-1) |
| 1.0 | -5.4748(-1) | -6.8584(-1) | -6.3304(-1) | -7.9167(-1) | -3.5897(-1) |

Quando analisa-se a Tabela 5.24 para $\epsilon = \epsilon_p$ nota-se que o modelo cinético que possui o maior valor absoluto esta no **Modelo GJ** quando $\eta = 0.4$ mas, o modelo que possui a maior quantidade de valores com maior valor absoluto encontra-se no **Modelo MRS**. Já o modelo que possui o menor valor absoluto é o **Modelo BGK** e consequentemente é o que mais se aproxima dos valores da **ELB**.

Tabela 5.25: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “B”** com $\epsilon = \epsilon_t$.

| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB [15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | |
| 0.0 | -6.8621(-1) | -6.6850(-1) | -6.4807(-1) | -7.0294(-1) | -4.9562(-1) |
| 0.1 | -7.8615(-1) | -7.8315(-1) | -7.8307(-1) | -7.9213(-1) | -6.0885(-1) |
| 0.2 | -8.2906(-1) | -8.3264(-1) | -8.4186(-1) | -8.3040(-1) | -6.5389(-1) |
| 0.3 | -8.5145(-1) | -8.5865(-1) | -8.7320(-1) | -8.5039(-1) | -6.7729(-1) |
| 0.4 | -8.6000(-1) | -8.6874(-1) | -8.8585(-1) | -8.5812(-1) | -6.8698(-1) |
| 0.5 | -8.5695(-1) | -8.6542(-1) | -8.8276(-1) | -8.5565(-1) | -6.8559(-1) |
| 0.6 | -8.4250(-1) | -8.4889(-1) | -8.6413(-1) | -8.4321(-1) | -6.7331(-1) |
| 0.7 | -8.1513(-1) | -8.1735(-1) | -8.2785(-1) | -8.1950(-1) | -6.4832(-1) |
| 0.8 | -7.7078(-1) | -7.6609(-1) | -7.6840(-1) | -7.8103(-1) | -6.0574(-1) |
| 0.9 | -6.9925(-1) | -6.8330(-1) | -6.7201(-1) | -7.1895(-1) | -5.3296(-1) |
| 1.0 | -5.4748(-1) | -5.0694(-1) | -4.6578(-1) | -5.8760(-1) | -3.5897(-1) |

Contudo, não pode-se fazer esta mesma análise na Tabela 5.25 para $\epsilon = \epsilon_t$ pois os valores oscilam entre dois modelos cinéticos já que os maiores e menores valores absoluto estão no **Modelo GJ** e **Modelo MRS**. Para o **Modelo GJ** os maiores valores em módulo estão na parte central do canal enquanto que os menores valores estão nas extremidades e para o **Modelo MRS** ocorre o inverso, possuindo os menores valores em módulo na região central e os maiores próximos as paredes.

Tabela 5.26: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “C”** com $\epsilon = \epsilon_p$.

| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB [15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | |
| 0.0 | -6.5777(-1) | -8.7098(-1) | -8.0302(-1) | -9.9673(-1) | -4.0853(-1) |
| 0.1 | -8.7856(-1) | -1.1722 | -1.1574 | -1.2180 | -6.4779(-1) |
| 0.2 | -9.6712(-1) | -1.3060 | -1.3140 | -1.3170 | -7.2735(-1) |
| 0.3 | -1.0117 | -1.3863 | -1.4076 | -1.3767 | -7.6791(-1) |
| 0.4 | -1.0466 | -1.4345 | -1.4632 | -1.4128 | -7.8928(-1) |
| 0.5 | -1.0611 | -1.4591 | -1.4910 | -1.4316 | -7.9876(-1) |
| 0.6 | -1.0631 | -1.4631 | -1.4945 | -1.4353 | -7.9889(-1) |
| 0.7 | -1.0525 | -1.4463 | -1.4733 | -1.4236 | -7.8924(-1) |
| 0.8 | -1.0259 | -1.4040 | -1.4218 | -1.3932 | -7.6564(-1) |
| 0.9 | -9.7248(-1) | -1.3226 | -1.3234 | -1.3341 | -7.1502(-1) |
| 1.0 | -8.3138(-1) | -1.1255 | -1.0849 | -1.1909 | -5.5350(-1) |

Consegue-se afirmar que o modelo cinético com menor valor absoluto assumindo $\epsilon = \epsilon_p$ é o **Modelo BGK** na Tabela 5.29 onde é o modelo em maior concordância com a **ELB**. Além disso, o maior valor absoluto oscila entre **Modelo GJ** na parte central e **Modelo MRS**

próximo as superfícies extremas. Ao verificar a Tabela 5.27 continua destacando-se o **Modelo GJ** e o **Modelo MRS** pois aparecem como o maior e menor valor absoluto respectivamente, sendo que os valores ficam bem definidos na região central do canal, variando para demais modelos na extremidades.

Tabela 5.27: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “C”** com $\epsilon = \epsilon_t$.

| η | BGK $\epsilon = \epsilon_t$ | S $\epsilon = \epsilon_t$ | GJ $\epsilon = \epsilon_t$ | MRS $\epsilon = \epsilon_t$ | ELB [15] |
|--------|---------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|-----------------|
| 0.0 | -6.5777(-1) | -6.0860(-1) | -5.5647(-1) | -7.0400(-1) | -4.0853(-1) |
| 0.1 | -8.7856(-1) | -8.6826(-1) | -8.6207(-1) | -8.9211(-1) | -6.4779(-1) |
| 0.2 | -9.6712(-1) | -9.7146(-1) | -9.8204(-1) | -9.6812(-1) | -7.2735(-1) |
| 0.3 | -1.0117 | -1.0296 | -1.0486 | -1.0116 | -7.6791(-1) |
| 0.4 | -1.0466 | -1.0629 | -1.0859 | -1.0370 | -7.8928(-1) |
| 0.5 | -1.0611 | -1.0789 | -1.1033 | -1.0497 | -7.9876(-1) |
| 0.6 | -1.0631 | -1.0806 | -1.1042 | -1.0518 | -7.9889(-1) |
| 0.7 | -1.0525 | -1.0675 | -1.0880 | -1.0431 | -7.8924(-1) |
| 0.8 | -1.0259 | -1.0355 | -1.0493 | -1.0207 | -7.6564(-1) |
| 0.9 | -9.7248(-1) | -9.7150(-1) | -9.7223(-1) | -9.7560(-1) | -7.1502(-1) |
| 1.0 | -8.3138(-1) | -8.0132(-1) | -7.6498(-1) | -8.5682(-1) | -5.5350(-1) |

Na busca de uma melhor interpretação dos dados das tabelas acima será elaborada as Figuras 5.9 e 5.10 e conseqüentemente será realizada uma análise conclusiva relacionado ao modelo que mais concorda com os valores da **ELB**. As figuras são dispostas de tal forma que o lado direito apresenta os modelos cinéticos com parâmetro $\epsilon = \epsilon_t$ e o lado esquerdo $\epsilon = \epsilon_p$. Além disso, a Figura 5.9 refere-se as Tabelas 5.24 e 5.25 enquanto que a Figura 5.10 refere-se as Tabelas 5.26 e 5.27. Nota-se que os modelos cinéticos quando considerado $\epsilon = \epsilon_t$ tem uma ótima

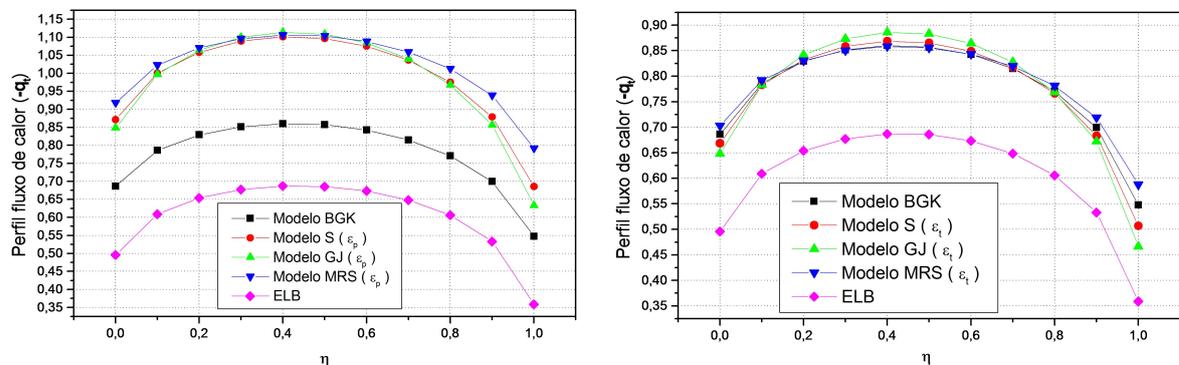


Figura 5.9: Problema *Creep* Térmico: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_t a partir das Tabelas 5.24 e 5.25

concordância. Contudo, pode-se observar que o **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_t$, principalmente no centro do canal, é o que mais se aproxima do perfil da **ELB**.

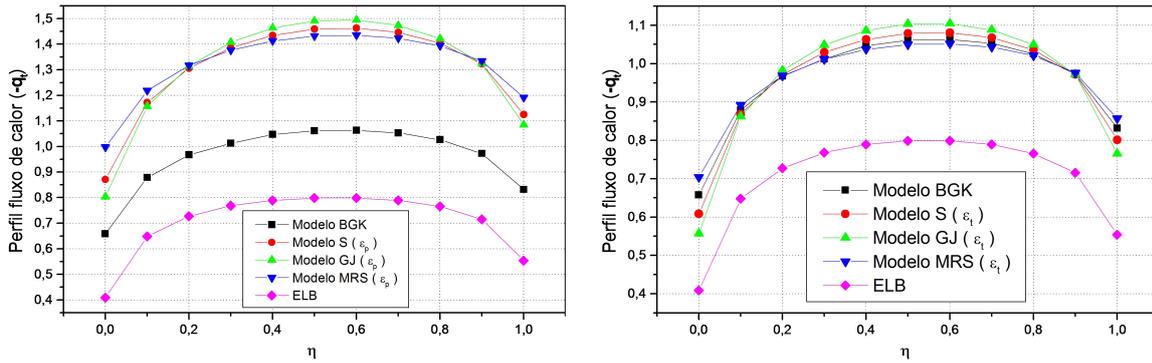


Figura 5.10: Problema *Creep* Térmico: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_t a partir das Tabelas 5.26 e 5.27

A partir do mesmo procedimento de matemática estatística desenvolvido para o Problema de Poiseuille será trabalhado o Problema *Creep* Térmico com a finalidade de uma melhor análise da concordância dos modelos cinéticos. Considera-se o nível de significância de 5%, para encontrar os valores da soma dos postos que é dado na Tabela 5.28. E ainda, para encontrar o valor de c , o método é análogo fazendo-se uso da Eq.(5.3).

Tabela 5.28: Problema *Creep* Térmico: Soma dos Postos (R_j) para $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$.

| | BGK | | S | | GJ | | MRS | | ELB |
|-----------------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----|-----|
| | $\epsilon = \epsilon_p = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | | |
| Caso “B” | 65 | 29 | 63 | 25 | 59 | 15 | 52 | 88 | |
| Caso “C” | 63 | 24 | 60 | 19 | 55 | 23 | 64 | 88 | |

Mais uma vez, tem-se que $p = 0.0$, ou seja, a hipótese nula foi rejeitada e isso nos faz interpretar que há uma diferença entre os modelos cinéticos comparado-os entre si. Contudo, ainda não é possível afirmar se os modelos diferem da **ELB**. Para resolver esta questão, determina-se as comparações múltiplas para todos os modelos cinéticos e a **ELB**.

Inicialmente, trabalha-se com $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para o **Caso “B”**, sendo que determina-se a diferença entre os modelos cinéticos e a **ELB**. Assim,

$$|R_{\mathbf{BGK}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |65 - 88| = 23 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{S}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |29 - 88| = 59 > 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{S}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |63 - 88| = 25 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |25 - 88| = 63 > 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |59 - 88| = 29 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |15 - 88| = 73 > 36.42 = c,$$

e

$$|R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |52 - 88| = 36 < 36.42 = c.$$

Para o **Caso “C”** tem-se que as diferenças são:

$$|R_{\mathbf{BGK}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |63 - 88| = 25 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{S}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |24 - 88| = 64 > 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{S}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |60 - 88| = 28 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |19 - 88| = 69 > 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |55 - 88| = 33 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |23 - 88| = 65 > 36.42 = c,$$

e

$$|R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |64 - 88| = 24 < 36.42 = c.$$

Nota-se que três modelos excedem o valor de c para o **Caso “B”** e **Caso “C”**, ou seja, os **Modelo S**, **Modelo GJ** e **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_p$ comparados com a **ELB** possuem diferença significativa.

A partir desta análise, pode-se rejeitar três modelos cinéticos, são eles, **Modelo S**, **Modelo GJ** e **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_p$. Ainda com o auxílio gráfico, conclui-se então que para o perfil fluxo de calor que o modelo que melhor se aproxima da **ELB** é o **Modelo MRS** com $\epsilon = \epsilon_t$.

Agora, desenvolve-se as Tabelas 5.29 e 5.32 o qual considera-se a grandeza física perfil de velocidade (u_t) para placas diferentes. Além disso, os valores da largura do canal variam e o parâmetro do livre caminho médio definindo-se entre viscosidade ($\epsilon = \epsilon_p$) e condutividade térmica ($\epsilon = \epsilon_t$).

Tabela 5.29: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “B”** com $\epsilon = \epsilon_p$.

| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB[15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | |
| 0.0 | 1.2439(-1) | 1.5845(-1) | 1.5938(-1) | 1.6054(-1) | 9.7457(-2) |
| 0.1 | 1.5707(-1) | 2.0046(-1) | 2.0950(-1) | 1.9188(-1) | 1.3162(-1) |
| 0.2 | 1.7224(-1) | 2.2057(-1) | 2.3352(-1) | 2.0697(-1) | 1.4631(-1) |
| 0.3 | 1.8091(-1) | 2.3217(-1) | 2.4731(-1) | 2.1582(-1) | 1.5444(-1) |
| 0.4 | 1.8512(-1) | 2.3770(-1) | 2.5371(-1) | 2.2031(-1) | 1.5828(-1) |
| 0.5 | 1.8557(-1) | 2.3805(-1) | 2.5374(-1) | 2.2113(-1) | 1.5863(-1) |
| 0.6 | 1.8243(-1) | 2.3341(-1) | 2.4764(-1) | 2.1843(-1) | 1.5568(-1) |
| 0.7 | 1.7540(-1) | 2.2346(-1) | 2.3503(-1) | 2.1196(-1) | 1.4914(-1) |
| 0.8 | 1.6356(-1) | 2.0713(-1) | 2.1467(-1) | 2.0089(-1) | 1.3807(-1) |
| 0.9 | 1.4453(-1) | 1.8166(-1) | 1.8344(-1) | 1.8307(-1) | 1.2008(-1) |
| 1.0 | 1.0554(-1) | 1.3214(-1) | 1.2399(-1) | 1.4729(-1) | 8.1818(-2) |

Ao considerar apenas a Tabela 5.29 tem-se que o menor valor absoluto é dado pelo **Modelo BGK** enquanto que o **Modelo GJ** é o que mais concentra os maiores valores absoluto sendo que nas duas extremidades do canal o que possui o maior valor em módulo é o **Modelo MRS**.

Tabela 5.30: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “B”** com $\epsilon = \epsilon_t$.

| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB[15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | |
| 0.0 | 1.2439(-1) | 1.2454(-1) | 1.2527(-1) | 1.2437(-1) | 9.7457(-2) |
| 0.1 | 1.5707(-1) | 1.6355(-1) | 1.7268(-1) | 1.5228(-1) | 1.3162(-1) |
| 0.2 | 1.7224(-1) | 1.8169(-1) | 1.9482(-1) | 1.6527(-1) | 1.4631(-1) |
| 0.3 | 1.8091(-1) | 1.9203(-1) | 2.0744(-1) | 1.7277(-1) | 1.5444(-1) |
| 0.4 | 1.8512(-1) | 1.9693(-1) | 2.1333(-1) | 1.7654(-1) | 1.5828(-1) |
| 0.5 | 1.8557(-1) | 1.9724(-1) | 2.1350(-1) | 1.7720(-1) | 1.5863(-1) |
| 0.6 | 1.8243(-1) | 1.9312(-1) | 2.0814(-1) | 1.7487(-1) | 1.5568(-1) |
| 0.7 | 1.7540(-1) | 1.8424(-1) | 1.9684(-1) | 1.6932(-1) | 1.4914(-1) |
| 0.8 | 1.6356(-1) | 1.6953(-1) | 1.7834(-1) | 1.5974(-1) | 1.3807(-1) |
| 0.9 | 1.4453(-1) | 1.4623(-1) | 1.4941(-1) | 1.4406(-1) | 1.2008(-1) |
| 1.0 | 1.0554(-1) | 9.9429(-2) | 9.2620(-2) | 1.1132(-1) | 8.1818(-2) |

Quando analisa-se a Tabela 5.30 verifica-se que os maiores valores em módulo continua concentrado no **Modelo GJ**. Contudo, o menor valor em módulo encontra-se no **Modelo MRS** e em virtude disso, tem-se que é o que mais se aproxima do perfil da **ELB**.

Tabela 5.31: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “C”** com $\epsilon = \epsilon_p$.

| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB[15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | |
| 0.0 | 1.0896(-1) | 1.4378(-1) | 1.3123(-1) | 1.6634(-1) | 7.7233(-2) |
| 0.1 | 1.7935(-1) | 2.3947(-1) | 2.4709(-1) | 2.3228(-1) | 1.4448(-1) |
| 0.2 | 2.1095(-1) | 2.8575(-1) | 3.0336(-1) | 2.6392(-1) | 1.6979(-1) |
| 0.3 | 2.3031(-1) | 3.1515(-1) | 3.3889(-1) | 2.8404(-1) | 1.8334(-1) |
| 0.4 | 2.4229(-1) | 3.3372(-1) | 3.6096(-1) | 2.9693(-1) | 1.9054(-1) |
| 0.5 | 2.4882(-1) | 3.4396(-1) | 3.7262(-1) | 3.0430(-1) | 1.9359(-1) |
| 0.6 | 2.5070(-1) | 3.4687(-1) | 3.7514(-1) | 3.0684(-1) | 1.9335(-1) |
| 0.7 | 2.4797(-1) | 3.4253(-1) | 3.6860(-1) | 3.0455(-1) | 1.8987(-1) |
| 0.8 | 2.3986(-1) | 3.2993(-1) | 3.5177(-1) | 2.9665(-1) | 1.8233(-1) |
| 0.9 | 2.2383(-1) | 3.0585(-1) | 3.2081(-1) | 2.8069(-1) | 1.6817(-1) |
| 1.0 | 1.8504(-1) | 2.5179(-1) | 2.5367(-1) | 2.4284(-1) | 1.3289(-1) |

Tabela 5.32: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “C”** com $\epsilon = \epsilon_t$.

| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB[15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | |
| 0.0 | 1.0896(-1) | 1.0074(-1) | 9.1280(-2) | 1.1792(-1) | 7.7233(-2) |
| 0.1 | 1.7935(-1) | 1.8568(-1) | 1.9405(-1) | 1.7586(-1) | 1.4448(-1) |
| 0.2 | 2.1095(-1) | 2.2362(-1) | 2.3976(-1) | 2.0174(-1) | 1.6979(-1) |
| 0.3 | 2.3031(-1) | 2.4651(-1) | 2.6679(-1) | 2.1759(-1) | 1.8334(-1) |
| 0.4 | 2.4229(-1) | 2.6025(-1) | 2.8250(-1) | 2.2745(-1) | 1.9054(-1) |
| 0.5 | 2.4882(-1) | 2.6726(-1) | 2.8998(-1) | 2.3291(-1) | 1.9359(-1) |
| 0.6 | 2.5070(-1) | 2.6853(-1) | 2.9048(-1) | 2.3459(-1) | 1.9335(-1) |
| 0.7 | 2.4797(-1) | 2.6412(-1) | 2.8405(-1) | 2.3253(-1) | 1.8987(-1) |
| 0.8 | 2.3986(-1) | 2.5307(-1) | 2.6940(-1) | 2.2607(-1) | 1.8233(-1) |
| 0.9 | 2.2383(-1) | 2.3230(-1) | 2.4261(-1) | 2.1305(-1) | 1.6817(-1) |
| 1.0 | 1.8504(-1) | 1.8408(-1) | 1.8206(-1) | 1.8087(-1) | 1.3289(-1) |

De maneira semelhante verifica-se que tanto na Tabela 5.31 e 5.32 tem-se que o **Modelo GJ** é o que possui os maiores valores em módulo. Já para analisar o menor valor absoluto, tem-se o **Modelo BGK** considerando $\epsilon = \epsilon_p$ e o **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_t$.

A partir da análise das Tabelas 5.31 e 5.32 parte-se para uma conclusão visual, a partir das Figuras 5.11 e 5.12, mais uma vez as figuras ao lado direito são para $\epsilon = \epsilon_t$ e para o lado esquerdo os valores para $\epsilon = \epsilon_p$. Observe que, como os valores do **Modelo BGK** para ambos os parâmetros são iguais, essa curva nos auxilia na análise final, pois consegue-se detectar facilmente que o **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_t$ é o que mais está se aproximando da **ELB** já que o **Modelo BGK** no lado esquerdo das figuras é o que mais se aproxima da **ELB** enquanto que

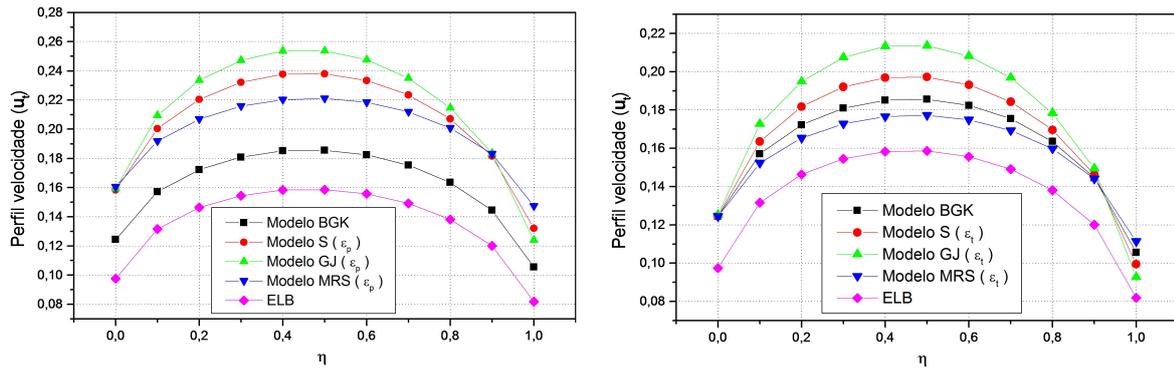


Figura 5.11: Problema *Creep* Térmico: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{u}_t a partir das Tabelas 5.29 e 5.30

para o lado direito com os mesmos valores deste modelo, nota-se que o **Modelo MRS** é o que mais se aproxima.

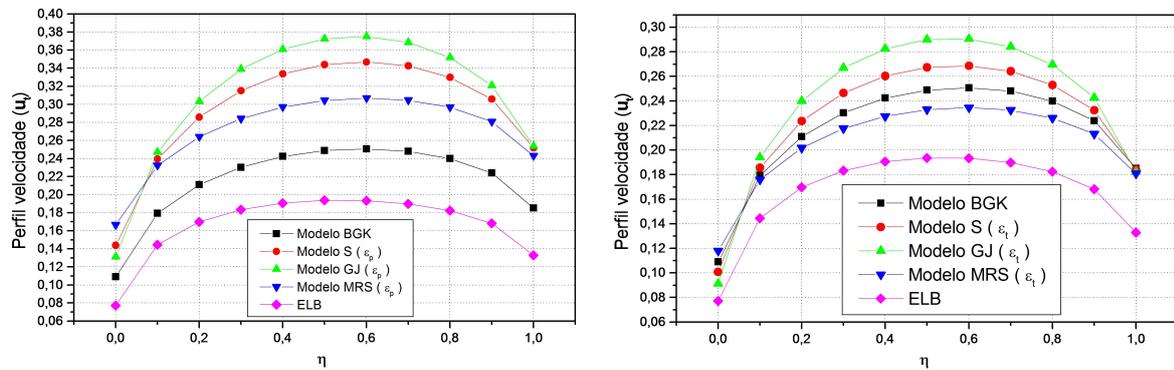


Figura 5.12: Problema *Creep* Térmico: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{u}_t a partir das Tabelas 5.31 e 5.32

Mais uma vez, busca-se por meio da estatística não-paramétrica através da análise de variância de dois fatores de Friedman por postos analisar o modelo cinético que mais se aproxima da **ELB**. Considera-se 5% o nível de significância e a soma dos postos é dado pela Tabela 5.33.

Tabela 5.33: Problema *Creep* Térmico: Soma dos Postos (R_j) para $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$.

| | BGK | S | | GJ | | MRS | | ELB |
|-----------------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----|
| | $\epsilon = \epsilon_p = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | |
| Caso "B" | 34 | 75 | 43 | 85 | 52 | 71 | 25 | 11 |
| Caso "C" | 36 | 76 | 43 | 85 | 50 | 70 | 25 | 11 |

Destaca-se que para determinar o valor crítico c o caso é análogo a partir da Eq.(5.3), ou seja, $c = 36.42$. Além disso, tem-se mais uma vez que $p = 0.0$ e então rejeita-se a hipótese nula e conclui-se que há diferença entre os modelos cinéticos, mas ainda não pode-se confirmar se

há diferença entre os modelos e a **ELB**, para isso será determinado as comparações múltiplas para todos os modelos cinéticos e a **ELB**.

Considera-se primeiramente $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para o **Caso “B”** no qual as diferenças que excedem o valor crítico são:

$$|R_{S_{\epsilon_p}} - R_{ELB}| = |75 - 11| = 64 > 36.42 = c,$$

$$|R_{GJ_{\epsilon_p}} - R_{ELB}| = |85 - 11| = 74 > 36.42 = c,$$

$$|R_{GJ_{\epsilon_t}} - R_{ELB}| = |52 - 11| = 41 > 36.42 = c$$

e

$$|R_{MRS_{\epsilon_p}} - R_{ELB}| = |71 - 11| = 60 > 36.42 = c.$$

Pode-se ainda analisar o **Caso “C”**, no qual as diferenças que excedem o valor crítico são:

$$|R_{S_{\epsilon_p}} - R_{ELB}| = |76 - 11| = 65 > 36.42 = c,$$

$$|R_{GJ_{\epsilon_p}} - R_{ELB}| = |85 - 11| = 74 > 36.42 = c,$$

$$|R_{GJ_{\epsilon_t}} - R_{ELB}| = |50 - 11| = 39 > 36.42 = c$$

e

$$|R_{MRS_{\epsilon_p}} - R_{ELB}| = |70 - 11| = 59 > 36.42 = c.$$

Logo, para ambos os caso tem-se que quatro modelos cinéticos excedem o valor de c e consequentemente indicam uma diferença significativa entre os modelos e a **ELB**.

Portanto, o teste estatístico matemático rejeita os seguintes modelos cinéticos: **Modelo S** e **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_p$, além disso, recusa-se o **Modelo GJ** para ϵ_p e ϵ_t .

Em consequência, temos assim como para o Problema de Poiseuille que a partir da análise estatística, das Tabelas e Figuras tanto para o perfil fluxo de calor como para o perfil de velocidade que o **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_t$ para o Problema *Creep* Térmico é o modelo que mais se aproxima da **ELB**.

Inicialmente iremos gerar a Tabela 5.34 para as Taxas de fluxo de calor e velocidade da partícula para o **Modelo MRS** com $\epsilon = \epsilon_t$. Aqui detectamos mais um índice da veracidade dos resultados pois, como relatou-se anteriormente, é necessário que $\mathbf{Q}_p = \mathbf{U}_t$, e isso ocorre se

compararamos a Tabela 5.34 com a Tabela 5.19.

Tabela 5.34: Problema *Creep* Térmico: **Modelo MRS** com ϵ_t para $2a = 1.0(X)$.

| X | Q_t | | Ar | U_t | |
|----|---------------|---------------|--------------|--------------|--------------|
| | Ne | Xe | | Ne | Xe |
| -2 | -8.210608 | -7.122477 | 1.411364 | 1.673885 | 1.331107 |
| -1 | -4.835102 | -4.099006 | 8.018181(-1) | 9.828545(-1) | 7.404743(-1) |
| 0 | -1.590397 | -1.437618 | 3.025079(-1) | 3.436820(-1) | 2.852281(-1) |
| 1 | -2.363380(-1) | -2.322906(-1) | 6.079766(-2) | 5.890314(-2) | 6.215794(-2) |
| 2 | -2.486282(-2) | -2.482161(-2) | 7.063392(-3) | 6.522314(-3) | 7.362757(-3) |

Agora, iremos proceder uma análise mais completa dos perfis a partir do **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_t$ devido sua coerência com a **ELB**. Para esse estudo, considera-se o gás nobre Argônio para gerar as Tabelas 5.35 e 5.36 o qual representa o perfil fluxo de calor e perfil de velocidade, respectivamente, para um canal de placas diferentes.

Tabela 5.35: Problema *Creep* Térmico: $q_t(-a + 2a\eta)$ do Gás Argônio para diferentes larguras do canal.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|------------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| η | $2a = 5$ | $2a = 2$ | $2a = 1$ | $2a = 0.1$ |
| 0.0 | -7.049017(-1) | -6.461719(-1) | -5.627869(-1) | -1.818936(-1) |
| 0.1 | -1.025143 | -8.462301(-1) | -6.881681(-1) | -2.007162(-1) |
| 0.2 | -1.111936 | -9.243844(-1) | -7.447261(-1) | -2.106315(-1) |
| 0.3 | -1.151126 | -9.664567(-1) | -7.772344(-1) | -2.167954(-1) |
| 0.4 | -1.168991 | -9.877049(-1) | -7.941747(-1) | -2.202081(-1) |
| 0.5 | -1.173749 | -9.935595(-1) | -7.986816(-1) | -2.212571(-1) |
| 0.6 | -1.168991 | -9.853970(-1) | -7.915554(-1) | -2.200311(-1) |
| 0.7 | -1.147494 | -9.615902(-1) | -7.718156(-1) | -2.164381(-1) |
| 0.8 | -1.105379 | -9.163480(-1) | -7.360803(-1) | -2.100862(-1) |
| 0.9 | -1.013252 | -8.336556(-1) | -6.753863(-1) | -1.999674(-1) |
| 1.0 | -6.754888(-1) | -6.238119(-1) | -6.724971(-2) | -1.808916(-1) |

Tabela 5.36: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Argônio para diferentes larguras do canal.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|-----------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| η | $2a = 5$ | $2a = 2$ | $2a = 1$ | $2a = 0.1$ |
| 0.0 | 1.429530(-1) | 1.268927(-1) | 1.056271(-1) | 3.355555(-2) |
| 0.1 | 2.381019(-1) | 1.813888(-1) | 1.386224(-1) | 3.794600(-2) |
| 0.2 | 2.707230(-1) | 2.045115(-1) | 1.539648(-1) | 4.025016(-2) |
| 0.3 | 2.877250(-1) | 2.175130(-1) | 1.628990(-1) | 4.167550(-2) |
| 0.4 | 2.962874(-1) | 2.241485(-1) | 1.675146(-1) | 4.245448(-2) |
| 0.5 | 2.987845(-1) | 2.257534(-1) | 1.685780(-1) | 4.267569(-2) |
| 0.6 | 2.957354(-1) | 2.226397(-1) | 1.662777(-1) | 4.236316(-2) |
| 0.7 | 2.862928(-1) | 2.143410(-1) | 1.603583(-1) | 4.149129(-2) |
| 0.8 | 2.676025(-1) | 1.993090(-1) | 1.499630(-1) | 3.996943(-2) |
| 0.9 | 2.314466(-1) | 1.733679(-1) | 1.328303(-1) | 3.756104(-2) |
| 1.0 | 1.251076(-1) | 1.131854(-1) | 9.690421(-2) | 3.304276(-2) |

Nota-se que, a partir das Tabelas 5.35 e 5.36, quanto maior a largura do canal maior em módulo é o perfil fluxo de calor e o perfil fluxo de velocidade. Além disso, para a Tabela 5.36 descreve-se uma queda acentuada em módulo dos valores, ou seja, quanto mais largo o canal, maior é o perfil de velocidade do gás. Pode-se verificar esta análise mais detalhadamente na Figura 5.13.

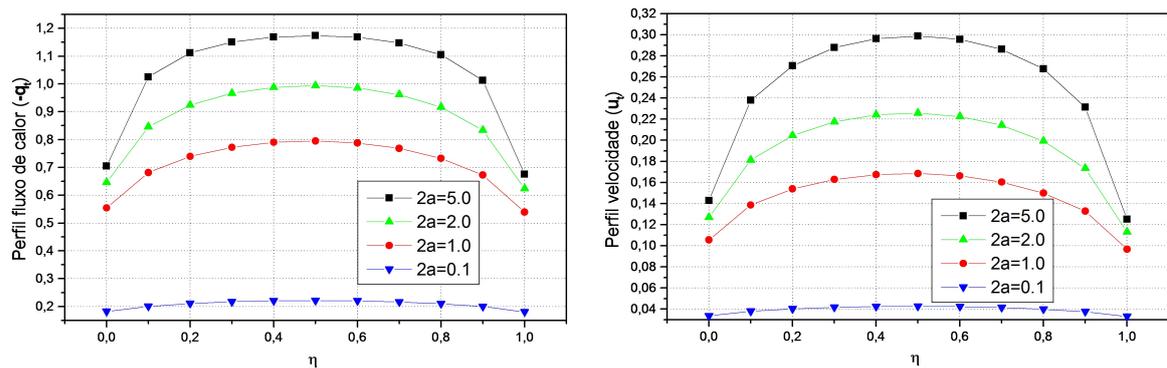


Figura 5.13: Problema *Creep* Térmico: variação da largura do canal com Gás Argônio para **Modelo MRS** e $\epsilon = \epsilon_t$

Analisa-se ainda as Tabelas 5.37 e 5.38 que representam os perfis fluxo de calor e velocidade, respectivamente, sendo que inicialmente mantem-se o coeficiente tangencial (α_t) para o gás Argônio variando-se o coeficiente de acomodação normal (α_n). Em seguida, mantem-se o coeficiente normal desse mesmo gás e varia-se o coeficiente tangencial.

Tabela 5.37: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{q}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Argônio para $2a = 1$.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|-----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| η | $\alpha_t = \text{Ar}$ | | $\alpha_n = \text{Ar}$ | |
| | $\alpha_n = \text{Ne}$ | $\alpha_n = \text{Xe}$ | $\alpha_t = \text{Ne}$ | $\alpha_t = \text{Xe}$ |
| 0.0 | 5.627869(-1) | 5.449220(-1) | 6.704458(-1) | 5.294488(-1) |
| 0.1 | 6.881681(-1) | 6.744613(-1) | 7.673154(-1) | 6.626466(-1) |
| 0.2 | 7.447261(-1) | 7.330510(-1) | 8.093827(-1) | 7.230916(-1) |
| 0.3 | 7.772344(-1) | 7.669168(-1) | 8.318815(-1) | 7.582267(-1) |
| 0.4 | 7.941747(-1) | 7.848223(-1) | 8.413648(-1) | 7.770598(-1) |
| 0.5 | 7.986816(-1) | 7.900223(-1) | 8.401074(-1) | 7.829527(-1) |
| 0.6 | 7.915554(-1) | 7.833756(-1) | 8.284431(-1) | 7.768198(-1) |
| 0.7 | 7.718156(-1) | 7.639262(-1) | 8.051182(-1) | 7.577332(-1) |
| 0.8 | 7.360803(-1) | 7.282874(-1) | 7.666012(-1) | 7.223125(-1) |
| 0.9 | 6.753863(-1) | 6.674404(-1) | 7.039028(-1) | 6.615140(-1) |
| 1.0 | 6.724971(-2) | 5.339786(-1) | 5.704680(-1) | 5.277255(-1) |

Note que, os valores de α_t e α_n para o gás Argônio já está sendo apresentado na Tabelas 5.35 e conseqüentemente não será repetido na Tabela 5.37. O caso é análogo para a Tabela 5.38. Gera-se a partir da Tabela 5.37 a Figura 5.14, o qual no lado esquerdo da figura está fixado o coeficiente de acomodação tangencial (α_t) com variação do coeficiente de acomodação normal (α_n) e no lado direito esta fixado o coeficiente de acomodação normal (α_n) variando-se o coeficiente tangencial (α_t). Verifica-se que ao fixar α_t o coeficiente normal não altera o perfil fluxo de calor, tendo apenas uma brusca diferença no extremo superior do canal quando $\alpha_n = \text{Ne}$. Já ao fixar α_n tem-se que o perfil está um mais disperso onde o perfil considerando o coeficiente tangencial do gás Xenônio é o que possui o menor fluxo de calor. Além disso, pode-se observar que quando os gases estão concentrados na área central do canal eles possuem um maior fluxo de calor de quando eles estão nas extremidades.

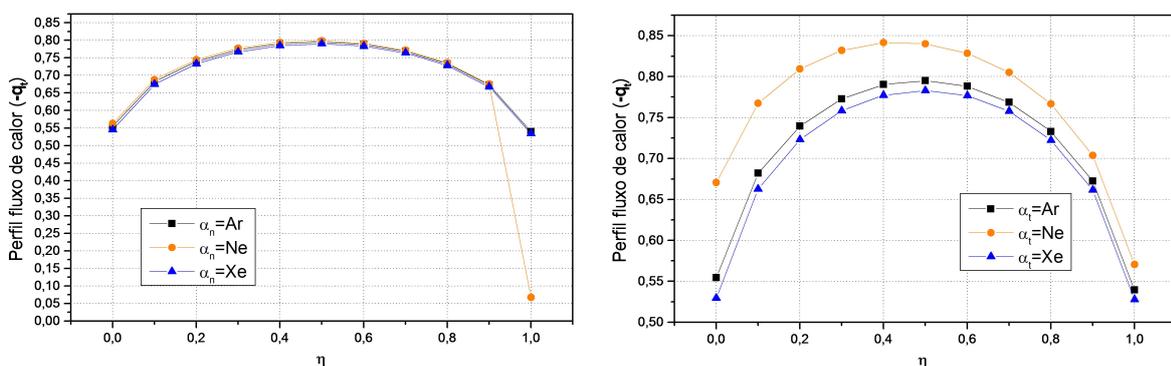
Figura 5.14: Problema *Creep* Térmico: \mathbf{q}_t para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Argônio para **Modelo MRS** e $\epsilon = \epsilon_t$

Tabela 5.38: Problema *Creep* Térmico: $\mathbf{u}_t(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Argônio para $2a = 1$.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|-----------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| η | $\alpha_t = \mathbf{Ar}$ | | $\alpha_n = \mathbf{Ar}$ | |
| | $\alpha_n = \mathbf{Ne}$ | $\alpha_n = \mathbf{Xe}$ | $\alpha_t = \mathbf{Ne}$ | $\alpha_t = \mathbf{Xe}$ |
| 0.0 | 1.167743(-1) | 9.462199(-2) | 1.257498(-1) | 9.073974(-2) |
| 0.1 | 1.466157(-1) | 1.302631(-1) | 1.532809(-1) | 1.272315(-1) |
| 0.2 | 1.603232(-1) | 1.469992(-1) | 1.658694(-1) | 1.443755(-1) |
| 0.3 | 1.681200(-1) | 1.568943(-1) | 1.729378(-1) | 1.545197(-1) |
| 0.4 | 1.718952(-1) | 1.629721(-1) | 1.762201(-1) | 1.599662(-1) |
| 0.5 | 1.723240(-1) | 1.637419(-1) | 1.763307(-1) | 1.615694(-1) |
| 0.6 | 1.695590(-1) | 1.617481(-1) | 1.733833(-1) | 1.595556(-1) |
| 0.7 | 1.633112(-1) | 1.559699(-1) | 1.670910(-1) | 1.536751(-1) |
| 0.8 | 1.527211(-1) | 1.455375(-1) | 1.566030(-1) | 1.430421(-1) |
| 0.9 | 1.355472(-1) | 1.281339(-1) | 1.397277(-1) | 1.252947(-1) |
| 1.0 | 9.989812(-2) | 9.137199(-2) | 1.048698(-1) | 8.780361(-2) |

Obtem-se a Figura 5.15 a partir da Tabela 5.38, observa-se que o desenvolvimento da figura é semelhante a figura gerada para o perfil fluxo de calor, ou seja, para o lado esquerdo fixa-se α_t e varia-se α_n e para o lado direito mantém α_n e varia-se α_t . Aqui, nota-se que em ambos os casos, fixando-se tanto o α_n ou α_t tem-se que os gases diferem, mas muito pouco, onde o gás com os coeficientes de variação do Xenônio é o mais lento e mais uma vez, observa-se que os gases são mais velozes no centro do canal.

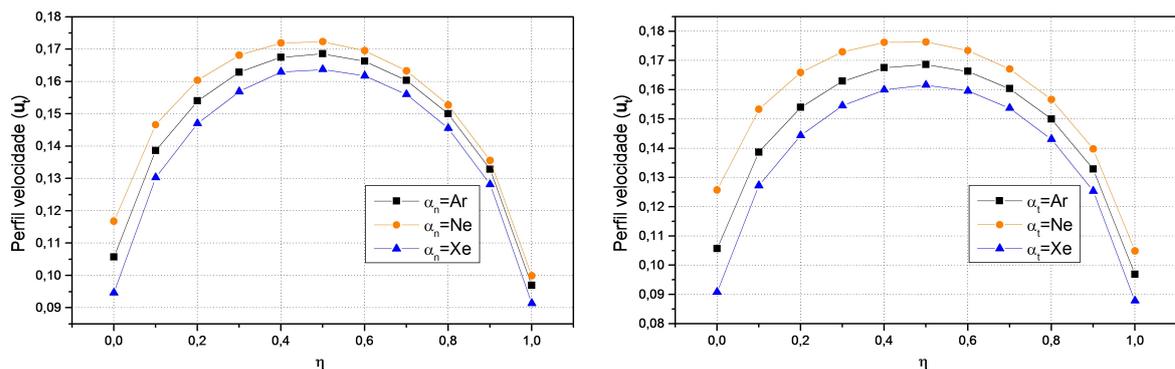


Figura 5.15: Problema *Creep* Térmico: \mathbf{u}_t para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Argônio para **Modelo MRS** e $\epsilon = \epsilon_t$

5.2.3 Problema de Couette

Busca-se para o Problema de Couette, assim como nos problemas anteriores, a veracidade dos resultados numéricos para as quantidades físicas de interesse. Considera-se nas Tabelas 5.39 à 5.42 os parâmetros definidos para o **Caso "A"** que estão disponíveis na Tabela 5.1, note que

para este problema a velocidade das placas u_w será considerada.

Tabela 5.39: Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(\tau)$ para **Caso “A”**.

| τ/a | BGK | S | GJ | MRS |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0.0 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.2 | 5.537417(-3) | 6.383073(-3) | 7.744904(-3) | 4.276923(-3) |
| 0.4 | 1.143220(-2) | 1.308180(-2) | 1.585037(-2) | 8.775675(-3) |
| 0.6 | 1.818182(-2) | 2.053075(-2) | 2.481072(-2) | 1.379901(-2) |
| 0.8 | 2.679122(-2) | 2.959705(-2) | 3.561574(-2) | 1.993671(-2) |
| 1.0 | 4.248871(-2) | 4.481701(-2) | 5.372000(-2) | 3.003264(-2) |

Como nos casos anteriores, deve-se observar que os coeficientes de acomodação tangencial e normal para o **Caso “A”** possuem o mesmo valor, ou seja, para o Problema de Couette considera-se a anti-simetria das placas, o que significa em termos analíticos que possuem os coeficientes de acomodação iguais.

Tabela 5.40: Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(\tau)$ para **Caso “A”**.

| τ/a | BGK | S | GJ | MRS |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0.0 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.2 | -4.173979(-2) | -4.195212(-2) | -4.208718(-2) | -4.037107(-2) |
| 0.4 | -8.419431(-2) | -8.460648(-2) | -8.506161(-2) | -8.114219(-2) |
| 0.6 | -1.283585(-1) | -1.289403(-1) | -1.301811(-1) | -1.228566(-1) |
| 0.8 | -1.762423(-1) | -1.769276(-1) | -1.800643(-1) | -1.665673(-1) |
| 1.0 | -2.383022(-1) | -2.388559(-1) | -2.490852(-1) | -2.173762(-1) |

Para este problema, os resultados numéricos para as grandezas físicas de interesse serão confrontados com o trabalho [56] para o **Modelo BGK**. Note que na são poucos os resultados numéricos envolvendo o Problema de Couette com condições de contorno de Cercignani-Lampis, e quando possuem resultados são para placas iguais, o qual gera uma comparação com resultados da literatura restrita. Em virtude dos demais modelos abordados neste trabalho, **Modelo S**, **Modelo GJ** e **Modelo MRS**, serem implementados em um único programa pode-se validar os valores numéricos para placas diferentes.

Tabela 5.41: Problema de Couette: \mathbf{Q}_c para **Caso “A”**.

| X | BGK | S | GJ | MRS |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| -2 | 1.700480(-1) | 1.702762(-1) | 2.292934(-1) | 9.110443(-2) |
| -1 | 7.649576(-2) | 7.750149(-2) | 9.821897(-2) | 4.643519(-2) |
| 0 | 1.626907(-2) | 1.809911(-2) | 2.179052(-2) | 1.215754(-2) |
| 1 | 3.537455(-4) | 4.890106(-4) | 4.801830(-4) | 4.384793(-4) |
| 2 | 5.628552(-7) | 7.928571(-7) | 7.370799(-7) | 8.911456(-7) |

Além disso, nestas tabelas está sendo considerado o parâmetro $\epsilon = \epsilon_p$ apenas de uma forma opcional, já que para o **Modelo BGK** tem-se a opção de utilizar também ϵ_t pois $\epsilon = \epsilon_p = \epsilon_t = 1$. Contudo no decorrer do estudo será incluído também os resultados gerados para o parâmetro $\epsilon = \epsilon_t$.

Tabela 5.42: Problema de Couette: \mathbf{U}_c para **Caso “A”**.

| X | BGK | S | GJ | MRS |
|----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| -2 | -4.338560(-1) | -4.339067(-1) | -5.509382(-1) | -2.761687(-1) |
| -1 | -2.445556(-1) | -2.447809(-1) | -2.821628(-1) | -1.855388(-1) |
| 0 | -1.092005(-1) | -1.096461(-1) | -1.113854(-1) | -1.035594(-1) |
| 1 | -3.267069(-2) | -3.270622(-2) | -3.251616(-2) | -3.313087(-2) |
| 2 | -4.734013(-3) | -4.733788(-3) | -4.733117(-3) | -4.735568(-3) |

Para o Problema de Couette também será reproduzido resultados numéricos para o componente tensor de pressão (\mathbf{P}_{xy}). Para esta grandeza física não se tem na literatura resultados numéricos de comparação com o **Caso “A”**. Para a veracidade desta grandeza física o resultado numérico será comparado com o trabalho [56] para o **Modelo BGK** com valores modificados, conforme o **Caso “D”** com $\epsilon = \epsilon_p$, opcionalmente, o qual verifica-se na Tabela 5.43, já os valores para o **Caso “A”** encontram-se na Tabela 5.44.

Tabela 5.43: Problema de Couette: \mathbf{P}_{xy} para **Caso “D”**.

| X | BGK | S | GJ | MRS |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| -2 | 9.913980(-1) | 9.913980(-1) | 9.900027(-1) | 9.930278(-1) |
| -1 | 9.257968(-1) | 9.257894(-1) | 9.182920(-1) | 9.360224(-1) |
| 0 | 6.007292(-1) | 6.005436(-1) | 5.948196(-1) | 6.130832(-1) |
| 1 | 1.473125(-1) | 1.472598(-1) | 1.471973(-1) | 1.474471(-1) |
| 3 | 1.768859(-3) | 1.768851(-3) | 1.768843(-3) | 1.768866(-3) |

Observe o aumento do canal para o componente tensor de pressão da Tabela 5.43, nota-se que os valores para os quatro modelos estão em grande concordância conforme o canal aumenta,

ou seja, para $2a = 1.0(1)$ atinge-se três casas de concordância e quando $2a = 1.0(3)$, tem-se sete casas de concordância (0.0017688).

Tabela 5.44: Problema de Couette: \mathbf{P}_{xy} para **Caso “A”**.

| X | BGK | S | GJ | MRS |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| -2 | 3.323709(-1) | 3.323709(-1) | 3.322125(-1) | 3.325548(-1) |
| -1 | 3.245862(-1) | 3.245852(-1) | 3.235914(-1) | 3.258899(-1) |
| 0 | 2.717611(-1) | 2.717111(-1) | 2.700157(-1) | 2.749332(-1) |
| 1 | 1.133066(-1) | 1.132567(-1) | 1.131952(-1) | 1.134360(-1) |
| 2 | 1.677765(-2) | 1.677653(-2) | 1.677531(-2) | 1.677864(-2) |

A partir das Tabelas 5.45 à 5.48 verifica-se os resultados numéricos da grandeza física perfil fluxo de calor. Os parâmetros escolhidos estão definidos na Tabela 5.1 para o **Caso “B”** e **Caso “C”**. Nota-se que nesses casos os coeficiente de acomodação são diferentes pois considera-se as superfícies do canal diferentes. Também, defini-se para cada caso, a largura do canal e o parâmetro de livre caminho médio (ϵ) dados pela viscosidade (ϵ_p) e condutividade térmica (ϵ_t).

Tabela 5.45: Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “B”** com $\epsilon = \epsilon_p$.

| η | BGK $\epsilon = \epsilon_p$ | S $\epsilon = \epsilon_p$ | GJ $\epsilon = \epsilon_p$ | MRS $\epsilon = \epsilon_p$ | ELB[15] |
|--------|--------------------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------|
| 0.0 | -5.1421(-2) | -5.5227(-2) | -6.7875(-2) | -3.5608(-2) | -3.3402(-2) |
| 0.1 | -3.3279(-2) | -3.7598(-2) | -4.6480(-2) | -2.4183(-2) | -2.3114(-2) |
| 0.2 | -2.3359(-2) | -2.7133(-2) | -3.3774(-2) | -1.7256(-2) | -1.6319(-2) |
| 0.3 | -1.5623(-2) | -1.8580(-2) | -2.3320(-2) | -1.1603(-2) | -1.0703(-2) |
| 0.4 | -8.9099(-3) | -1.0933(-2) | -1.3945(-2) | -6.5570(-3) | -5.7162(-3) |
| 0.5 | -2.6479(-3) | -3.6912(-3) | -5.0669(-3) | -1.7761(-3) | -1.0070(-3) |
| 0.6 | 3.5702(-3) | 3.5078(-3) | 3.7351(-3) | 2.9887(-3) | 3.7257(-3) |
| 0.7 | 1.0146(-2) | 1.1021(-2) | 1.2873(-2) | 7.9845(-3) | 8.8020(-3) |
| 0.8 | 1.7634(-2) | 1.9335(-2) | 2.2906(-2) | 1.3546(-2) | 1.4647(-2) |
| 0.9 | 2.7144(-2) | 2.9415(-2) | 3.4942(-2) | 2.0325(-2) | 2.2024(-2) |
| 1.0 | 4.4446(-2) | 4.6300(-2) | 5.5055(-2) | 3.1421(-2) | 3.4485(-2) |

Tabela 5.46: Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “B”** com $\epsilon = \epsilon_t$.

| η | BGK $\epsilon = \epsilon_t$ | S $\epsilon = \epsilon_t$ | GJ $\epsilon = \epsilon_t$ | MRS $\epsilon = \epsilon_t$ | ELB[15] |
|--------|---------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|----------------|
| 0.0 | -5.1421(-2) | -5.9696(-2) | -7.2447(-2) | -3.9263(-2) | -3.3402(-2) |
| 0.1 | -3.3279(-2) | -3.8766(-2) | -4.7301(-2) | -2.5395(-2) | -2.3114(-2) |
| 0.2 | -2.3359(-2) | -2.7354(-2) | -3.3506(-2) | -1.7736(-2) | -1.6319(-2) |
| 0.3 | -1.5623(-2) | -1.8419(-2) | -2.2642(-2) | -1.1768(-2) | -1.0703(-2) |
| 0.4 | -8.9099(-3) | -1.0656(-2) | -1.3204(-2) | -6.5911(-3) | -5.7162(-3) |
| 0.5 | -2.6479(-3) | -3.4245(-3) | -4.4390(-3) | -1.7579(-3) | -1.0070(-3) |
| 0.6 | 3.5702(-3) | 3.7345(-3) | 4.1975(-3) | 3.0507(-3) | 3.7257(-3) |
| 0.7 | 1.0146(-2) | 1.1270(-2) | 1.3235(-2) | 8.1509(-3) | 8.8020(-3) |
| 0.8 | 1.7634(-2) | 1.9795(-2) | 2.3376(-2) | 1.3978(-2) | 1.4647(-2) |
| 0.9 | 2.7144(-2) | 3.0536(-2) | 3.5996(-2) | 2.1403(-2) | 2.2024(-2) |
| 1.0 | 4.4446(-2) | 5.0109(-2) | 5.8792(-2) | 3.4784(-2) | 3.4485(-2) |

Embora os modelos possuem valores numéricos muito próximos, pode-se concluir que nas Tabelas 5.45 e 5.46 o **Modelo GJ** possui o maior valor absoluto enquanto que **Modelo MRS** o menor valor absoluto. Além disso, tem-se que o valor do **Modelo BGK** é o mesmo para ambas as tabelas já que $\epsilon = \epsilon_t = \epsilon_p$, note que isso irá nos auxiliar na comparação da Figura 5.16 geradas por essas Tabelas.

A disposição da Figura 5.16 é análogo a dos problemas anteriores, com valores de ϵ_p a esquerda e valores de ϵ_t a direita. Nota-se agora, que os modelos cinéticos tem uma ótima concordância e o mais visível, pela primeira vez, temos um encontro dos modelos no centro do canal se dispersando nas extremidades do mesmo, tendo um comportamento semelhante ao considerar as placas simétricas, mas isso não ocorre já que uma placa tem velocidade de $u_{w_1} = 1.0$ e outra $u_{w_2} = -2.0$. Além disso, pode-se verificar que o **Modelo GJ** se destaca ao se afastar um pouco dos demais modelos.

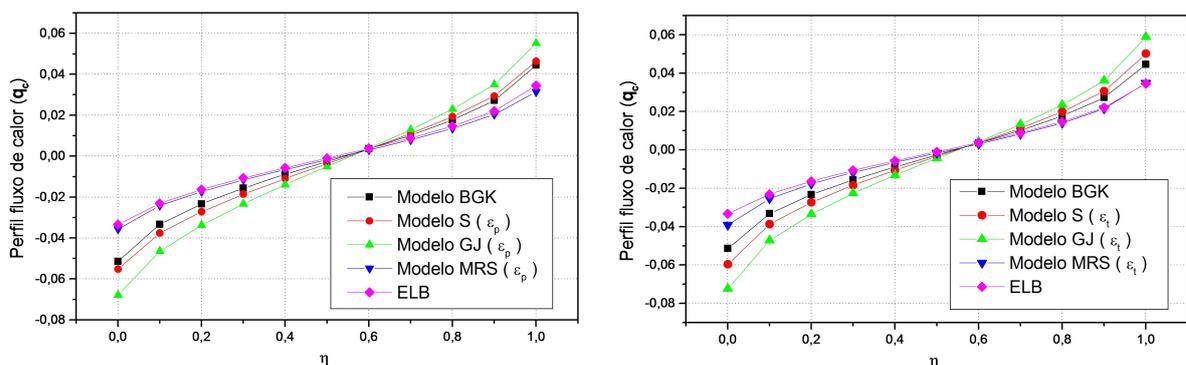


Figura 5.16: Problema de Couette: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_c a partir das Tabelas 5.45 e 5.46

Agora vamos analisar ainda a Tabela 5.47 para o **Caso “C”**. Neste caso, temos que apenas uma das placas possui velocidade $u_{w_2} = 1.0$ enquanto que a outra é nula $u_{w_1} = 0.0$.

Tabela 5.47: Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “C”** com $\epsilon = \epsilon_p$.

| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB [15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | |
| 0.0 | 1.3134(-2) | 1.3985(-2) | 1.6427(-2) | 9.7839(-3) | 8.1009(-3) |
| 0.1 | 6.9315(-3) | 7.9371(-3) | 9.4350(-3) | 5.5485(-3) | 4.3638(-3) |
| 0.2 | 4.1127(-3) | 4.7927(-3) | 5.7612(-3) | 3.3386(-3) | 2.5670(-3) |
| 0.3 | 2.0718(-3) | 2.3359(-3) | 2.8653(-3) | 1.6387(-3) | 1.3515(-3) |
| 0.4 | 3.4854(-4) | 1.6296(-4) | 2.9178(-4) | 1.5472(-4) | 4.0016(-4) |
| 0.5 | -1.2802(-3) | -1.9332(-3) | -2.2036(-3) | -1.2603(-3) | -4.7282(-4) |
| 0.6 | -2.9803(-3) | -4.1121(-3) | -4.8169(-3) | -2.7161(-3) | -1.4207(-3) |
| 0.7 | -4.9316(-3) | -6.5469(-3) | -7.7623(-3) | -4.3294(-3) | -2.6134(-3) |
| 0.8 | -7.4103(-3) | -9.4936(-3) | -1.1350(-2) | -6.2732(-3) | -4.2942(-3) |
| 0.9 | -1.1023(-2) | -1.3489(-2) | -1.6212(-2) | -8.9124(-3) | -6.9070(-3) |
| 1.0 | -1.9226(-2) | -2.1501(-2) | -2.5888(-2) | -1.4153(-2) | -1.2114(-2) |

Tabela 5.48: Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “C”** com $\epsilon = \epsilon_t$.

| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB [15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | |
| 0.0 | 1.3134(-2) | 1.4144(-2) | 1.6315(-2) | 1.0117(-2) | 8.1009(-3) |
| 0.1 | 6.9315(-3) | 7.5096(-3) | 8.7227(-3) | 5.3366(-3) | 4.3638(-3) |
| 0.2 | 4.1127(-3) | 4.4876(-3) | 5.2375(-3) | 3.1552(-3) | 2.5670(-3) |
| 0.3 | 2.0718(-3) | 2.2942(-3) | 2.7274(-3) | 1.5833(-3) | 1.3515(-3) |
| 0.4 | 3.4854(-4) | 4.4870(-4) | 6.3302(-4) | 2.6168(-4) | 4.0016(-4) |
| 0.5 | -1.2802(-3) | -1.3133(-3) | -1.3473(-3) | -9.8127(-4) | -4.7282(-4) |
| 0.6 | -2.9803(-3) | -3.1609(-3) | -3.4554(-3) | -2.2703(-3) | -1.4207(-3) |
| 0.7 | -4.9316(-3) | -5.3069(-3) | -5.9586(-3) | -3.7396(-3) | -2.6134(-3) |
| 0.8 | -7.4103(-3) | -8.0630(-3) | -9.2510(-3) | -5.5959(-3) | -4.2942(-3) |
| 0.9 | -1.1023(-2) | -1.2098(-2) | -1.4139(-2) | -8.2971(-3) | -6.9070(-3) |
| 1.0 | -1.9226(-2) | -2.1243(-2) | -2.5133(-2) | -1.4399(-3) | -1.2114(-2) |

Os valores numéricos para o perfil fluxo de calor para as Tabelas 5.47 e 5.48 possuem, mais uma vez, os maiores valores absolutos quando trata-se do **Modelo GJ** e os menores valores absolutos para o **Modelo MRS**. Sendo que se comparados, o maior e menor valor absoluto desses modelos encontra-se quando considera-se $\epsilon = \epsilon_t$, ou seja, estão na Tabela 5.48. Como a **ELB** possui os valores numéricos muito baixo, tem-se que o **Modelo MRS** com $\epsilon = \epsilon_t$ é que mais se aproxima dele. Vamos realizar esta mesma análise na Figura 5.17 que é gerada a partir das Tabelas 5.47 e 5.48, sendo que no lado direito encontra-se os valores $\epsilon = \epsilon_t$ e do lado esquerdo os valores para $\epsilon = \epsilon_p$.

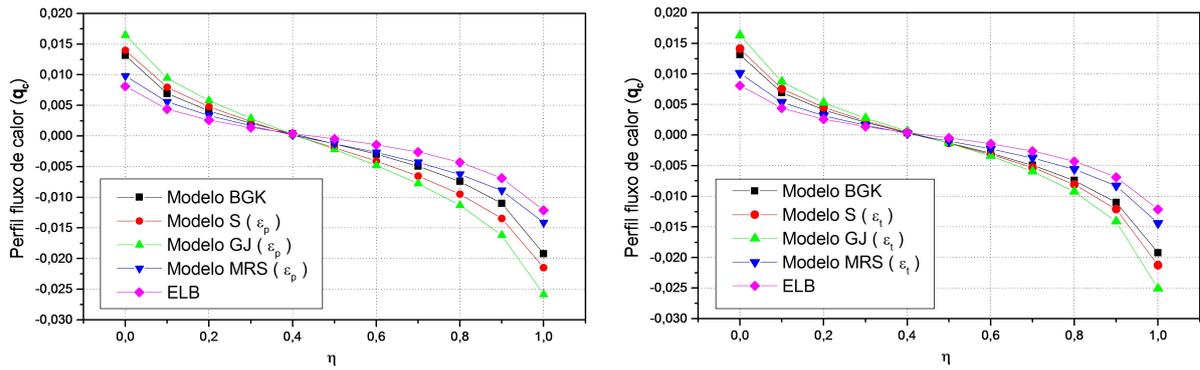


Figura 5.17: Problema de Couette: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_c a partir das Tabelas 5.47 e 5.48

Observa-se mais uma vez a concordância entre os modelos cinéticos para o perfil fluxo de calor. Contudo, verifica-se que o **Modelo MRS** é o que mais está próximo ao perfil da **ELB** sendo difícil visualizar qual dos caminhos livres é o mais próximo, o da viscosidade ou da condutividade térmica. Isso apenas é visível quando observa-se atentamente a **ELB** e o **Modelo MRS** quando $0.6 < \eta < 0.9$ e então conclui-se que o **Modelo MRS** para ϵ_t é o mais próximo da **ELB**.

Em virtude de uma conclusão mais precisa, ira-se mais uma vez, utilizar-se da matemática estatística a partir estatística não-paramétrica através da análise de variância de dois fatores de Friedman por postos, vide anexo A.

Considera-se $\alpha = 0.05$ o nível de significância e $N = 11$ o número de posições no canal em cada um dos modelos cinéticos que totalizam $k = 8$. Tem-se também, a hipótese nula (H_0) que define-se como que os modelos cinéticos não tem diferença entre si, enquanto que a hipótese alternativa (H_1) é de que os modelos cinéticos diferem entre si significativamente.

A partir de cálculos realizados pelo software especializado Mathematica® tem-se que para o **Caso “B”** que $p = 0.71524 > 0.05$ e que para o **Caso “C”** que $p = 0.77628 > 0.05$, ou seja, como o valor do posto é maior do que o nível de significância, a hipótese nula não é rejeitada e isso implica que os modelos cinéticos não diferem entre si, o que confirma a concordância visualizada nas Figuras 5.16 e 5.17, o qual consegue-se escolher o **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_t$ apenas quando analisa-se as Tabelas 5.47 e 5.48 e as figuras detalhadamente.

Considera-se, agora, a grandeza física perfil de velocidade nas Tabelas 5.49 e 5.50. Lembra-se que tanto para o **Caso “B”** como para o **Caso “C”** têm-se que as placas são heterogêneas e a velocidade das placas tem sentido oposto. Além disso, tem-se que os valores numéricos do **Modelo BGK** repetem-se nas Tabelas devido $\epsilon = \epsilon_t = \epsilon_p$.

Tabela 5.49: Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “B”** com $\epsilon = \epsilon_p$.

| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB[15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | |
| 0.0 | -1.0296 | -1.0286 | -1.0120 | -1.0623 | -7.7030(-1) |
| 0.1 | -1.0996 | -1.0985 | -1.0906 | -1.1188 | -8.8870(-1) |
| 0.2 | -1.1532 | -1.1522 | -1.1468 | -1.1671 | -9.7373(-1) |
| 0.3 | -1.2024 | -1.2016 | -1.1974 | -1.2132 | -1.0515 |
| 0.4 | -1.2496 | -1.2490 | -1.2453 | -1.2582 | -1.1261 |
| 0.5 | -1.2958 | -1.2955 | -1.2921 | -1.3027 | -1.1993 |
| 0.6 | -1.3420 | -1.3420 | -1.3388 | -1.3472 | -1.2724 |
| 0.7 | -1.3889 | -1.3891 | -1.3863 | -1.3921 | -1.3465 |
| 0.8 | -1.4376 | -1.4380 | -1.4361 | -1.4380 | -1.4233 |
| 0.9 | -1.4904 | -1.4909 | -1.4911 | -1.4861 | -1.5065 |
| 1.0 | -1.5588 | -1.5592 | -1.5670 | -1.5420 | -1.6204 |

Tabela 5.50: Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “B”** com $\epsilon = \epsilon_t$.

| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB[15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | |
| 0.0 | -1.0296 | -9.0649(-1) | -8.9291(-1) | -9.3715(-1) | -7.7030(-1) |
| 0.1 | -1.0996 | -9.9708(-1) | -9.9317(-1) | -1.0124 | -8.8870(-1) |
| 0.2 | -1.1532 | -1.0661 | -1.0641 | -1.0766 | -9.7373(-1) |
| 0.3 | -1.2024 | -1.1296 | -1.1280 | -1.1378 | -1.0515 |
| 0.4 | -1.2496 | -1.1906 | -1.1887 | -1.1975 | -1.1261 |
| 0.5 | -1.2958 | -1.2506 | -1.2481 | -1.2566 | -1.1993 |
| 0.6 | -1.3420 | -1.3103 | -1.3073 | -1.3156 | -1.2724 |
| 0.7 | -1.3889 | -1.3710 | -1.3675 | -1.3753 | -1.3465 |
| 0.8 | -1.4376 | -1.4338 | -1.4304 | -1.4362 | -1.4233 |
| 0.9 | -1.4904 | -1.5015 | -1.4995 | -1.4999 | -1.5065 |
| 1.0 | -1.5588 | -1.5895 | -1.5957 | -1.5743 | -1.6204 |

Ao analisar as Tabelas 5.49 e 5.50 conclui-se alguns resultados diferentes aos obtidos nos problemas anteriores. Para a Tabela 5.49 tem-se que o **Modelo MRS** é o de maior valor absoluto e o **Modelo GJ** é o que possui menor valor absoluto. E para a Tabela 5.50, o **Modelo BGK** maior valor absoluto e o **Modelo GJ** é o que possui menor valor absoluto. Portanto, o modelo cinético que melhor se aproxima da **ELB** que possui os menores valores numéricos absolutos é o **Modelo GJ** com $\epsilon = \epsilon_t$. Essa conclusão pode ser verificada quando gera-se a Figura 5.18, onde o lado esquerdo possui os valores da Tabela 5.49 e os valores da direita os da Tabela 5.50.

Nota-se que o **Modelo MRS** para ϵ_t que vinha se destacando como modelo cinético que mais se aproxima da **ELB** para os problemas proposto, no caso do perfil velocidade no

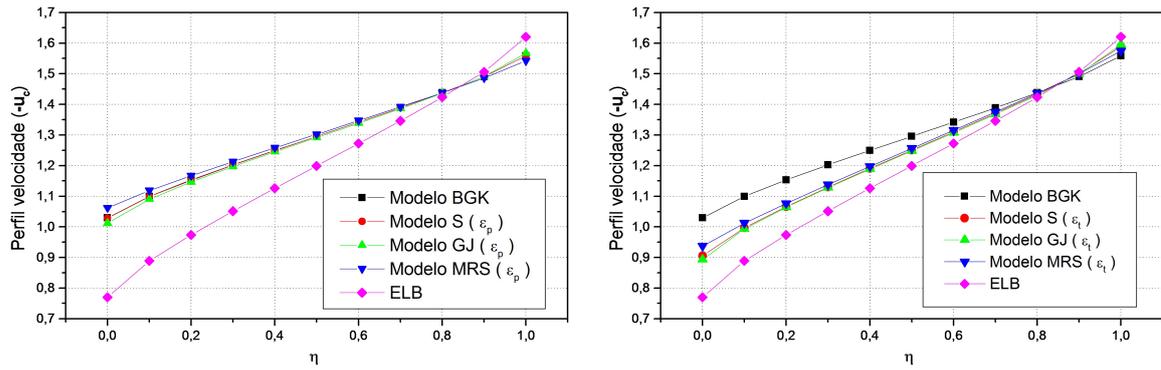


Figura 5.18: Problema de Couette: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{u}_c a partir das Tabelas 5.49 e 5.50

Problema de Couette se mostrou uma das opções menos adequadas. Vamos verificar se isso se confirma nas Tabelas 5.51 e 5.52 que trata do **Caso “C”**.

Tabela 5.51: Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “C”** com $\epsilon = \epsilon_p$.

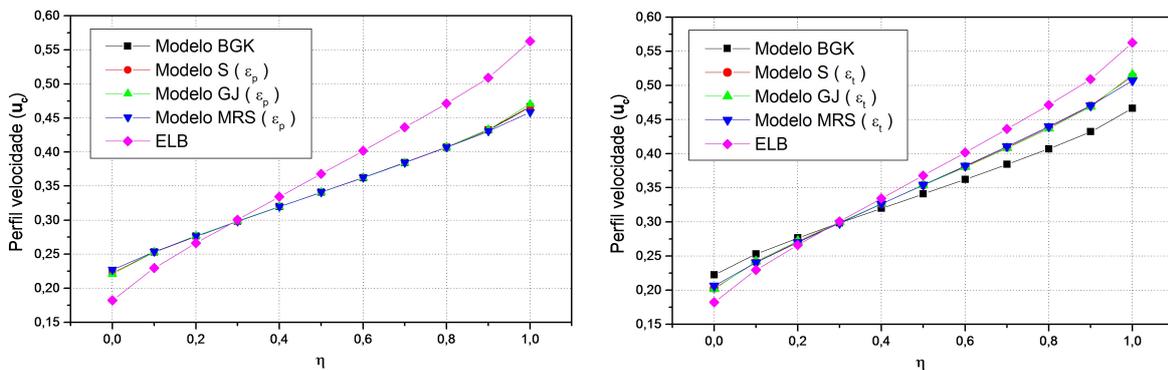
| η | BGK | S | GJ | MRS | ELB[15] |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------|
| | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | |
| 0.0 | 2.2242(-1) | 2.2220(-1) | 2.2037(-1) | 2.2687(-1) | 1.8206(-1) |
| 0.1 | 2.5276(-1) | 2.5249(-1) | 2.5297(-1) | 2.5329(-1) | 2.2961(-1) |
| 0.2 | 2.7633(-1) | 2.7614(-1) | 2.7678(-1) | 2.7612(-1) | 2.6601(-1) |
| 0.3 | 2.9834(-1) | 2.9827(-1) | 2.9873(-1) | 2.9803(-1) | 3.0057(-1) |
| 0.4 | 3.1973(-1) | 3.1978(-1) | 3.1993(-1) | 3.1955(-1) | 3.3446(-1) |
| 0.5 | 3.4092(-1) | 3.4110(-1) | 3.4092(-1) | 3.4095(-1) | 3.6815(-1) |
| 0.6 | 3.6226(-1) | 3.6257(-1) | 3.6208(-1) | 3.6244(-1) | 4.0193(-1) |
| 0.7 | 3.8409(-1) | 3.8454(-1) | 3.8382(-1) | 3.8424(-1) | 4.3613(-1) |
| 0.8 | 4.0699(-1) | 4.0756(-1) | 4.0682(-1) | 4.0665(-1) | 4.7135(-1) |
| 0.9 | 4.3215(-1) | 4.3281(-1) | 4.3260(-1) | 4.3034(-1) | 5.0923(-1) |
| 1.0 | 4.6649(-1) | 4.6709(-1) | 4.7053(-1) | 4.5866(-1) | 5.6248(-1) |

Ao analisar os resultados obtidos para perfil de velocidade nas Tabelas 5.51 e 5.52, confirma-se que o **Modelo GJ** e **Modelo MRS** apresentam valores de $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ significativamente menores em módulo do que os demais modelos para alguns pontos η considerando tanto o parâmetro de viscosidade como de condutividade térmica, sendo que estes modelos oscilam em quem tem o menor valor absoluto. Dessa forma, o **Modelo GJ** e o **Modelo MRS** são os que mais se aproxima da **ELB**, onde destaca-se nas extremidades o **Modelo GJ** e no centro do canal o **Modelo MRS**. Isso confirma-se na Figura 5.19, no qual destaca-se que no lado esquerdo, com valores de $\epsilon = \epsilon_p$ e no lado direito para valores de $\epsilon = \epsilon_t$.

Tabela 5.52: Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ para **Caso “C”** com $\epsilon = \epsilon_t$.

| η | BGK $\epsilon = \epsilon_t$ | S $\epsilon = \epsilon_t$ | GJ $\epsilon = \epsilon_t$ | MRS $\epsilon = \epsilon_t$ | ELB[15] |
|--------|---------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|----------------|
| 0.0 | 2.2242(-1) | 2.0254(-1) | 2.0134(-1) | 2.0605(-1) | 1.8206(-1) |
| 0.1 | 2.5276(-1) | 2.4074(-1) | 2.4187(-1) | 2.4022(-1) | 2.2961(-1) |
| 0.2 | 2.7633(-1) | 2.7072(-1) | 2.7176(-1) | 2.6979(-1) | 2.6601(-1) |
| 0.3 | 2.9834(-1) | 2.9894(-1) | 2.9959(-1) | 2.9826(-1) | 3.0057(-1) |
| 0.4 | 3.1973(-1) | 3.2646(-1) | 3.2663(-1) | 3.2626(-1) | 3.3446(-1) |
| 0.5 | 3.4092(-1) | 3.5377(-1) | 3.5344(-1) | 3.5411(-1) | 3.6815(-1) |
| 0.6 | 3.6226(-1) | 3.8123(-1) | 3.8040(-1) | 3.8208(-1) | 4.0193(-1) |
| 0.7 | 3.8409(-1) | 4.0923(-1) | 4.0794(-1) | 4.1041(-1) | 4.3613(-1) |
| 0.8 | 4.0699(-1) | 4.3839(-1) | 4.3681(-1) | 4.3950(-1) | 4.7135(-1) |
| 0.9 | 4.3215(-1) | 4.7016(-1) | 4.6874(-1) | 4.7018(-1) | 5.0923(-1) |
| 1.0 | 4.6649(-1) | 5.1326(-1) | 5.1556(-1) | 5.0695(-1) | 5.6248(-1) |

Além disso, tem-se que para os valores de ϵ_p que o modelo com maiores valores em módulo é o **Modelo MRS** enquanto que para ϵ_t é o **Modelo BGK**. Confirma-se então que, o **Modelo MRS** que nos demais problemas era o modelo que mais se aproxima da **ELB**, neste perfil de velocidade é um dos que menos se aproximam.

Figura 5.19: Problema de Couette: comparação dos modelos cinéticos para \mathbf{q}_c a partir das Tabelas 5.51 e 5.52

Contudo, quando utiliza-se do recurso da matemática estatística tem-se que para o **Caso “C”** que $p = 0.07768 > 0.05$, ou seja, não tem diferença entre os modelos cinéticos. Já para o **Caso “B”** tem-se que $p = 0.00005$ e como é menor que o nível de significância $\alpha = 0.05$ pode-se rejeitar a hipótese nula e isso implica que há diferença entre os modelos cinéticos. A partir disso, desenvolve-se a Tabela 5.53 com a soma dos postos.

Tabela 5.53: Problema de Couette: Soma dos Postos (R_j) para $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$.

| | BGK | S | GJ | MRS | ELB | | | |
|-----------------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------|----|----|
| | $\epsilon = \epsilon_p = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | | | |
| Caso "B" | 34.5 | 36 | 59 | 47 | 69 | 25.5 | 51 | 74 |

Trabalha-se inicialmente determinando-se a diferença entre os modelos cinéticos e a **ELB**. Então,

$$|R_{\mathbf{BGK}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |34.5 - 74| = 39.5 > 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{S}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |36 - 74| = 38 > 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{S}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |59 - 74| = 15 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |47 - 74| = 27 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{GJ}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |69 - 74| = 5 < 36.42 = c,$$

$$|R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_p}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |25.5 - 74| = 48.5 > 36.42 = c,$$

e

$$|R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_t}} - R_{\mathbf{ELB}}| = |51 - 74| = 23 < 36.42 = c.$$

Observa-se que três modelos cinéticos excedem o valor de c e então indicam uma diferença significativa entre o modelo e a **ELB**. Como somente as diferenças da $R_{\mathbf{ELB}}$ com o $R_{\mathbf{BGK}}$ ($c = 39.5$), $R_{\mathbf{S}_{\epsilon_p}}$ ($c = 36$) e $R_{\mathbf{MRS}_{\epsilon_p}}$ ($c = 25.5$) excedem a diferença crítica, conclui-se que somente a diferença entre as condições **Modelo BGK**, **Modelo S** e **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_p$ com a **ELB** são significantes.

Quando analisa-se apenas as tabelas e as figuras para perfil de velocidade conclui-se que o **Modelo GJ** para $\epsilon = \epsilon_t$ é o que melhor se aproxima dos valores numéricos da **ELB**. Contudo, com o resultado estatístico conclui-se que para o **Caso "C"** os modelos não diferem e que para o **Caso "B"** alguns modelos diferem, mas que o **Modelo S** com ϵ_t , **Modelo GJ** e **Modelo MRS** com ϵ_t não diferem significativamente entre si. Em virtude disso, e como para o perfil fluxo de calor o modelo cinético escolhido é o **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_t$, pode-se concluir que o **Modelo MRS** para ϵ_t é uma escolha adequada e que se aproxima significativamente dos valores da **ELB** tanto para o perfil fluxo de calor como para o perfil de velocidade.

Logo, utiliza-se o **Modelo MRS** com ϵ_t para estudar o comportamento dos perfis em

uma melhor análise, já que este é o mais coerente com a originalidade dos resultados da **ELB**. Portanto, será desenvolvida as Tabelas 5.54 e 5.55, o qual estuda o comportamento dos perfis do gás nobre Xenônio quando tem-se um canal com diferentes larguras (a).

Tabela 5.54: Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Xenônio para diferentes larguras do canal.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|---|---------------|---------------|---------------|---------------|
| η | $2a = 5$ | $2a = 2$ | $2a = 1$ | $2a = 0.1$ |
| 0.0 | -2.837728(-2) | -4.832668(-2) | -5.898103(-2) | -3.459556(-2) |
| 0.1 | -1.128177(-2) | -2.671856(-2) | -3.723985(-2) | -2.561334(-2) |
| 0.2 | -6.328463(-3) | -1.715908(-2) | -2.528797(-2) | -1.861714(-2) |
| 0.3 | -3.566387(-3) | -1.048519(-2) | -1.597049(-2) | -1.222588(-2) |
| 0.4 | -1.645642(-3) | -5.071281(-3) | -7.868436(-3) | -6.130906(-3) |
| 0.5 | -4.521216(-5) | -1.713896(-4) | -2.768468(-4) | -1.639325(-4) |
| 0.6 | 1.550941(-3) | 4.722309(-3) | 7.309792(-3) | 5.802767(-3) |
| 0.7 | 3.457629(-3) | 1.011649(-2) | 1.539629(-2) | 1.189690(-2) |
| 0.8 | 6.191106(-3) | 1.675284(-2) | 2.468502(-2) | 1.828664(-2) |
| 0.9 | 1.108683(-2) | 2.624513(-2) | 3.658803(-2) | 2.528041(-2) |
| 1.0 | 2.799844(-2) | 4.768933(-2) | 5.822315(-2) | 3.425805(-2) |

Ao observar a Tabela 5.54 tem-se que o fluxo de calor na parte inferior é negativo enquanto que na parte superior do canal o fluxo do gás é positivo, sendo que o canal mais estável, ou seja, que sofre o menor fluxo de calor é o que tem o canal de maior largura enquanto que o de maior fluxo de calor é quando tem-se $2a = 1.0$, não sendo o canal de menor largura considerado.

Tabela 5.55: Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Xenônio para diferentes larguras do canal.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|---|---------------|---------------|---------------|---------------|
| η | $2a = 5$ | $2a = 2$ | $2a = 1$ | $2a = 0.1$ |
| 0.0 | 8.320485(-1) | 6.750856(-1) | 5.192994(-1) | 8.545643(-2) |
| 0.1 | 6.419884(-1) | 5.141458(-1) | 3.909798(-1) | 5.274067(-2) |
| 0.2 | 4.738783(-1) | 3.743751(-1) | 2.799996(-1) | 2.382905(-2) |
| 0.3 | 3.103000(-1) | 2.399012(-1) | 1.737272(-1) | -3.931812(-3) |
| 0.4 | 1.485964(-1) | 1.078144(-1) | 6.964988(-2) | -3.113060(-2) |
| 0.5 | -1.236335(-2) | -2.327975(-2) | -3.349946(-2) | -5.808695(-2) |
| 0.6 | -1.733123(-1) | -1.543614(-1) | -1.366402(-1) | -8.504293(-2) |
| 0.7 | -3.349849(-1) | -2.864088(-1) | -2.406908(-1) | -1.122406(-1) |
| 0.8 | -4.984912(-1) | -4.208097(-1) | -3.469145(-1) | -1.399995(-1) |
| 0.9 | -6.664735(-1) | -5.604554(-1) | -4.578139(-1) | -1.689079(-1) |
| 1.0 | -8.561894(-1) | -7.211169(-1) | -5.859669(-1) | -2.016176(-1) |

Já para a Tabela 5.55 verifica-se que quanto maior a largura do canal tem-se que o perfil de velocidade é maior e quanto menor a largura do canal tem-se que o perfil de velocidade tende a diminuir e se estabilizar. Para uma melhor análise gera-se a Figura 5.20.

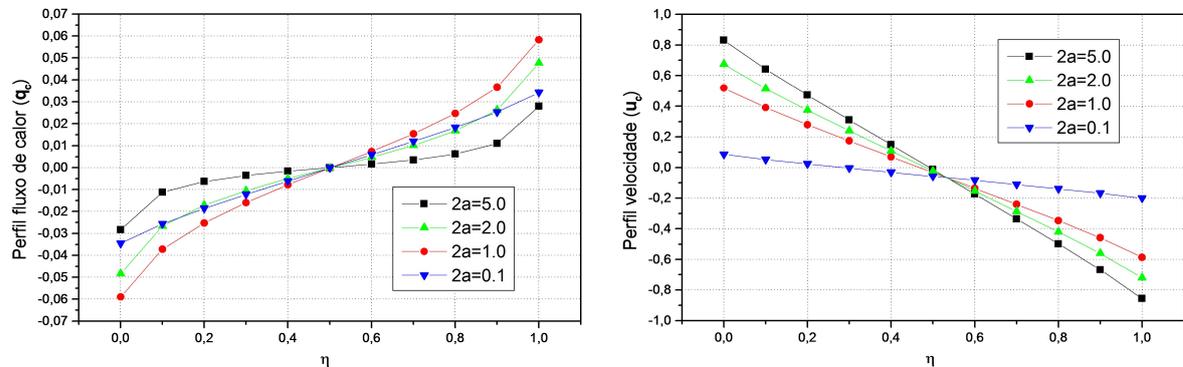


Figura 5.20: Problema de Couette: variação da largura do canal com Gás Xenônio para **Modelo MRS** e $\epsilon = \epsilon_t$

O que foi analisado para as Tabelas 5.54 e 5.55 confirma-se na Figura 5.20. Além disso, consegue-se ainda verificar que em ambos os perfis, fluxo de calor e velocidade, se anulam no centro do canal. Dessa forma, explica-se os valores numéricos fisicamente pelo fato de o perfil fluxo de calor para perder ou ganhar calor precisa se estabilizar ou para o perfil velocidade mudar o sentido é necessário que o gás estacione [45].

Além disso, desenvolve-se as Tabelas 5.56 e 5.57 que analisam os perfis fluxo de calor e de velocidade, onde na primeira tabela considera-se o perfil fluxo de calor no qual varia-se o coeficiente de acomodação normal (α_n) para o gás Xenônio e em seguida para a variação do coeficiente tangencial (α_t) desse mesmo gás.

Tabela 5.56: Problema de Couette: $\mathbf{q}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Xenônio para $2a = 1$.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| η | $\alpha_t = \mathbf{Xe}$ | | $\alpha_n = \mathbf{Xe}$ | |
| | $\alpha_n = \mathbf{Ar}$ | $\alpha_n = \mathbf{Ne}$ | $\alpha_t = \mathbf{Ar}$ | $\alpha_t = \mathbf{Ne}$ |
| 0.0 | -5.978473(-2) | -6.063683(-2) | -4.761648(-2) | -2.864621(-2) |
| 0.1 | -3.787839(-2) | -3.848731(-2) | -3.022795(-2) | -1.833308(-2) |
| 0.2 | -2.584507(-2) | -2.633803(-2) | -2.065863(-2) | -1.265319(-2) |
| 0.3 | -1.647385(-2) | -1.689013(-2) | -1.319897(-2) | -8.227387(-3) |
| 0.4 | -8.334992(-3) | -8.696991(-3) | -6.715881(-3) | -4.384796(-3) |
| 0.5 | -7.191414(-4) | -1.042101(-3) | -6.466564(-4) | -7.926092(-4) |
| 0.6 | 6.881046(-3) | 6.585364(-3) | 5.411548(-3) | 2.786838(-3) |
| 0.7 | 1.497057(-2) | 1.469183(-2) | 1.186003(-2) | 6.589445(-3) |
| 0.8 | 2.425015(-2) | 2.397761(-2) | 1.925578(-2) | 1.094155(-2) |
| 0.9 | 3.612631(-2) | 3.584556(-2) | 2.871664(-2) | 1.649668(-2) |
| 1.0 | 5.768548(-2) | 5.735772(-2) | 4.587061(-2) | 2.654108(-2) |

Destaca-se que não foi acrescentado os valores de α_t e α_n para o Xenônio simultaneamente na Tabela 5.56 pois já temos disponibilizados esses valores nas Tabelas 5.54 e 5.55. O mesmo procedimento será adotado na Tabela 5.57.

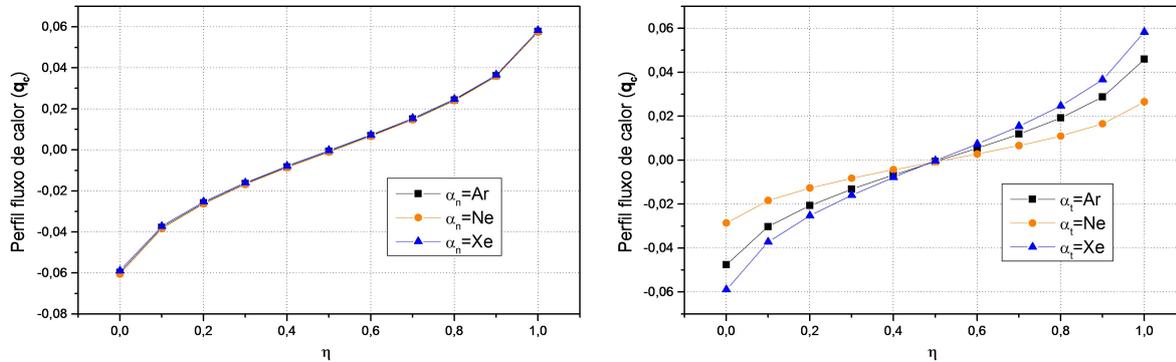


Figura 5.21: Problema de Couette: \mathbf{q}_c para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Xenônio para **Modelo MRS** e $\epsilon = \epsilon_t$

Nota-se que para a Tabela 5.56 os valores são extremamente pequenos, sendo que quando fixa-se o coeficiente de acomodação tangencial esses valores são pequenos e muito próximos entre si. Comprova-se esta análise na Figura 5.21 no qual quase não aparece distinção na variação do coeficiente de energia cinética.

Tabela 5.57: Problema de Couette: $\mathbf{u}_c(-\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\eta)$ do Gás Xenônio para $2a = 1$.

| Modelo MRS com ϵ_t | | | | |
|-----------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| η | $\alpha_t = \mathbf{Xe}$ | | $\alpha_n = \mathbf{Xe}$ | |
| | $\alpha_n = \mathbf{Ar}$ | $\alpha_n = \mathbf{Ne}$ | $\alpha_t = \mathbf{Ar}$ | $\alpha_t = \mathbf{Ne}$ |
| 0.0 | 5.203673(-1) | 5.216765(-1) | 2.759438(-1) | -2.178392(-1) |
| 0.1 | 3.917670(-1) | 3.926383(-1) | 1.748219(-1) | -2.769971(-1) |
| 0.2 | 2.806436(-1) | 2.813010(-1) | 8.753715(-2) | -3.279313(-1) |
| 0.3 | 1.742754(-1) | 1.747904(-1) | 4.019390(-3) | -3.766172(-1) |
| 0.4 | 7.013235(-2) | 7.054695(-2) | -7.773596(-2) | -4.242449(-1) |
| 0.5 | -3.305986(-2) | -3.271633(-2) | -1.587393(-1) | -4.714136(-1) |
| 0.6 | -1.362237(-1) | -1.359283(-1) | -2.397231(-1) | -5.185564(-1) |
| 0.7 | -2.402781(-1) | -2.400104(-1) | -3.214173(-1) | -5.661033(-1) |
| 0.8 | -3.464836(-1) | -3.462232(-1) | -4.048238(-1) | -6.146423(-1) |
| 0.9 | -4.573348(-1) | -4.570549(-1) | -4.919246(-1) | -6.653336(-1) |
| 1.0 | -5.853605(-1) | -5.849943(-1) | -5.926679(-1) | -7.239924(-1) |

A partir da Tabela 5.57 gera-se a Figura 5.22. Verifica-se assim como para o perfil fluxo de calor que em ambos os casos de variação dos coeficientes de acomodação, os perfis fluxo de velocidade possuem uma grande concordância, sendo que fica mais acentuada quando fixa-se α_t onde a diferença de velocidade dos gases é praticamente nula. Já, se fixarmos α_n nota-se

uma pequena variância o qual o gás Xenônio é o gás com fluxo mais rápido e o gás Neônio é o de menor velocidade.

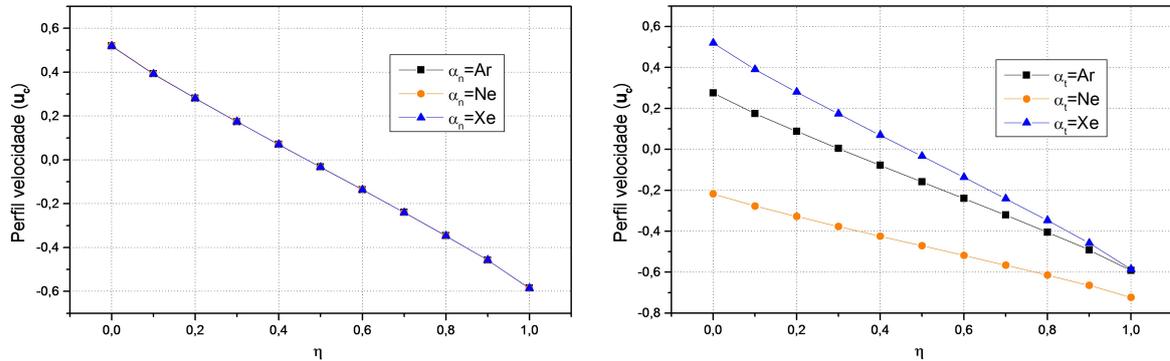


Figura 5.22: Problema de Couette: \mathbf{u}_c para variação dos coeficientes de acomodação com Gás Xenônio para **Modelo MRS** e $\epsilon = \epsilon_t$

Além disso, tem-se a possibilidade de viabilizar resultados referentes as taxas de fluxo de calor \mathbf{Q}_p e de fluxo de partícula \mathbf{U}_p conforme a Tabela 5.58 e ainda para o componente tensor de pressão \mathbf{P}_{xy} na Tabela 5.59.

Tabela 5.58: Problema de Couette: **Modelo MRS** com ϵ_t para $2a = 1.0(X)$.

| X | \mathbf{Q}_c | | | \mathbf{U}_c | |
|----|----------------|--------------|--------------|----------------|---------------|
| | Ar | Ne | Xe | Ar | Ne |
| -2 | 2.226898(-1) | 8.006034(-2) | 3.541440(-1) | -25.857338 | -60.290985 |
| -1 | 9.884130(-2) | 3.275481(-2) | 1.556156(-1) | -2.836808 | -6.044789 |
| 0 | 1.678216(-2) | 8.032606(-3) | 2.208865(-2) | -3.660137(-1) | -5.903047(-1) |
| 1 | 2.514070(-4) | 2.234689(-4) | 2.502238(-4) | -4.611962(-2) | -5.291175(-2) |
| 2 | 3.482549(-7) | 3.656156(-7) | 3.264159(-7) | -4.947210(-3) | -5.032698(-2) |

Tabela 5.59: Problema de Couette: \mathbf{P}_{xy} para **Modelo MRS** com ϵ_t para $2a = 1.0(X)$.

| X | Ar | Ne | Xe |
|----|--------------|--------------|--------------|
| -2 | 6.270572(-1) | 2.928959(-1) | 9.52987(-1) |
| -1 | 5.931198(-1) | 2.852269(-1) | 8.769069(-1) |
| 0 | 3.969567(-1) | 2.298512(-1) | 5.080445(-1) |
| 1 | 9.796125(-2) | 8.290134(-2) | 1.036775(-1) |
| 2 | 1.157738(-2) | 1.133396(-2) | 1.165336(-2) |

CONCLUSÃO

No presente trabalho alguns problemas de fluxo de gases foram investigados a partir de modelos cinéticos derivados da **EB**. Atualmente, o avanço computacional vem aumentando significativamente, mas esse progresso ainda não nos auxilia a resolver a **EB** na sua forma exata [24] e conseqüentemente, a maneira mais prática de aproximar soluções são através da resolução de equações modelo.

Encontram-se trabalhos na literatura nos quais estuda-se individualmente as equações modelo com Condições de Contorno de Cercignani-Lampis, como **Modelo BGK** em [56] e **Modelo S** no artigo [18]. Quando refere-se a metodologia de resolver unificadamente as equações modelo encontra-se na literatura apenas trabalhos envolvendo condições de contorno de Maxwell, são eles [23, 48]. Visando a praticidade e deficiência em resultados mais próximos da realidade, estudou-se o desenvolvimento analítico unificado de quatro equações modelo para Condições de Contorno de Cercignani-Lampis, são eles: **Modelo BGK**, **Modelo S**, **Modelo GJ** e **Modelo MRS** no qual para validação destes resultados foram utilizados comparações com os resultados existentes na literatura individualmente já citados.

Cabe salientar que os objetivos deste trabalho foram alcançados pois apresenta-se resultados numéricos para grandezas físicas de interesse como perfil fluxo de calor, perfil de velocidade, taxa de fluxo de calor, taxa fluxo de partícula e componente tensor de pressão para três problemas da dinâmica de gases rarefeitos, são eles: Problema de Poiseuille, Problema *Creep* Térmico e Problema de Couette que foram obtidos pelo método **ADO**. Esse método, mostrou-se de grande eficiência já que nos possibilitou a resolução de uma variedade de problemas, principalmente quando trata-se o desenvolvimento unificado das equações modelo.

De modo geral, os quatro modelos cinéticos estudados mostraram-se uma boa alternativa, tanto na concordância entre eles, no qual pode-se observar mais especificamente quando analisa-se a matemática estatística, e quando refere-se a aproximação ao núcleo de colisão da **ELB**. Além disso, o principal objetivo foi alcançado, sendo possível eleger o melhor modelo entre

todas as situações propostas no decorrer de todo o trabalho, claro se comparado com a **ELB**. Portanto, o melhor desempenho para o problema proposto com Condições de Contorno de Cercignani-Lampis foi o **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_t$, ou seja, **Modelo MRS** com o parâmetro de livre caminho médio dado pela condutividade térmica.

Destaca-se ainda, que outros objetivos foram inteiramente alcançados, como a obtenção de novos resultados numéricos na literatura, principalmente neste caso, os valores para o Problema de Couette, nos quais não existiam na literatura valores numéricos de nenhuma equação modelo para placas diferentes. Isso decorre em virtude do Problema de Couette ser homogêneo, ou seja, do seu termo fonte ser igual a zero e da Condição de Contorno de Cercignani-Lampis, em geral ser também considerada homogênea. Logo, este problema foi resolvido acrescentado uma parte não homogênea na condição de contorno, onde fisicamente isso é possível, basta analisarmos que o fluxo de gás ocorre devido ao movimento das placas.

Outras conclusões a partir deste trabalho foram obtidas, são as seguintes:

- O método de **ADO** possibilitou obter-se uma precisão de até sete dígitos significativos com $N=45$, isto é, uma ótima convergência a partir do método **ADO**;
- O programa é de fácil implementação, utilização e de grande agilidade, sem exigir conhecimentos específicos do usuário, como por exemplo, a escolha apenas do modelo cinético, dos coeficientes de acomodação e da largura do canal;
- Confirmou-se a relação de Onsager, no qual $\mathbf{Q}_p = \mathbf{U}_t$, basta verificar as Tabelas 5.19 e 5.34;
- Segundo o número de Prandtl [4] tem-se que o **Modelo BGK** é o modelo que não está de acordo com a teoria cinética pois $P_r = 1$ e por isso está em desvantagem em relação aos demais modelos estudados [87]. Porém isso não foi comprovado neste estudo, sendo que quando considerou-se, principalmente $\epsilon = \epsilon_p$, o **Modelo BGK** teve uma ótima concordância com os demais modelos;
- O canal onde ocorre o fluxo de gás foi analisado de forma completa, isto é, foram obtidos resultados numéricos de uma extremidade a outra da superfície em virtude de considerar placas com propriedades físicas diferentes. Isso, nos trabalhos atuais não era necessário já que como as placas eram homogêneas elas eram simétricas e bastava apenas a análise da metade superior ou inferior do canal;

- Verificou-se que o **Modelo GJ**, na maioria dos casos, foi o modelo que apresentou o pior desempenho dentre os modelos, principalmente quando considerado $\epsilon = \epsilon_p$ na comparação com os valores numéricos da **ELB**;
- Utilizou-se o recurso da matemática estatística para cada quantidade física de interesse, onde era definido para cada modelo se ele possuía diferença significativa com a **ELB**. Somente no Problema de Couette para o perfil de velocidade do **Caso “C”** e no perfil fluxo de calor nenhum modelo foi rejeitado, ou seja, foi o problema no qual os modelos apresentaram maior concordância;
- Salieta-se ainda que de uma forma geral os modelos que foram rejeitados em alguma quantidade física de interesse estão na Tabela 5.60.

Tabela 5.60: Modelos Cinéticos Rejeitados para cada quantidade física de interesse.

| | BGK | | S | | GJ | | MRS | |
|----------------------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--|
| | $\epsilon = \epsilon_p = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | $\epsilon = \epsilon_p$ | $\epsilon = \epsilon_t$ | |
| q_p | - | X | - | X | - | - | - | |
| u_p | X | - | - | X | - | - | - | |
| q_t | - | X | - | X | - | X | - | |
| u_t | - | X | - | X | X | X | - | |
| q_c | - | - | - | - | - | - | - | |
| u_c | X | X | - | - | - | X | - | |

Logo, tem-se que dois modelos cinéticos destacaram-se a partir da matemática estatística, são eles, **Modelo S** e **Modelo MRS** para $\epsilon = \epsilon_t$ que não foram rejeitados por nenhuma quantidade física e o **Modelo S** e o **Modelo GJ** para ϵ_p como os modelo mais rejeitados. Essa afirmação confirma a conclusão de que o **Modelo MRS** para ϵ_t é o modelo que mais se aproxima da **ELB** e que o **Modelo GJ** é o pior modelo, se ainda for considerado a análise gráfica.

- A influência do parâmetro ϵ é destacado, ou seja, quando toma-se o parâmetro $\epsilon = \epsilon_t$ obtém-se resultados numéricos das grandezas físicas muito mais próximos aos valores da **ELB** e também observou-se os modelos tinham uma maior concordância entre si quando utilizado o parâmetro de livre caminho médio para condutividade térmica, pode-se verificar isso na Tabela 5.60, no qual os modelos rejeitados eram os que consideraram ϵ_p ;
- Para o Problema de Poiseuille e Problema *Creep* Térmico, o centro do canal é que possui

os maiores valores numéricos absolutos se considerarmos o perfil fluxo de calor e perfil de velocidade. Já para o Problema de Couette, os maiores valores numéricos para os perfis ocorrem nas extremidades do canal, o que fisicamente é esperado já que o que provoca o fluxo de gás é o movimento das placas;

- Analisando o Problema de Couette para o perfil fluxo de calor tem-se que na proximidade do centro do canal o fluxo é praticamente nulo (chegando a se anular em uma determinada posição próxima ao centro do canal), sendo que aumenta conforme se aproxima das extremidades do canal. Quando analisa-se o perfil de velocidade este perfil não se anula no centro do canal mas sim, na metade superior do canal ($\eta = 0.8$) ou na metade inferior do canal ($\eta = 0.3$).

Ao utilizarmos valores experimentais, ou seja, os valores referentes aos gases nobres Argônio, Neônio e Xenônio para os coeficientes de acomodação obtemos valores numéricos que são passíveis de análise. Como por exemplo, observou-se que quando o canal aumenta de tamanho tanto o perfil fluxo de calor como o perfil velocidade aumentam. Tem-se também que quando fixa-se, principalmente o coeficiente de acomodação tangencial, os perfis não sofrem bruscas oscilações, ou seja, tem uma grande concordância.

Parte das conclusões obtidas nesse trabalho foi apresentada no XXXII CILAMCE - Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, com publicação de resumo e trabalho completo nos anais do congresso [74, 75].

Nesse sentido, para trabalhos futuros propõe-se o estudo de diferentes métodos de quadratura para formulações de soluções em ordenadas discretas da **ELB**.

REFERÊNCIAS

- [1] GIUSTERI G.G.; MUSESTI A. *Dispense del corso di Dinamica dei fluidi*. Università Cattolica del Sacro Cuore, 2010.
- [2] SCHUSTER A. Radiation through a foggy atmosphere. *Astrophysics*, 21:1–, 1905.
- [3] TRES A. *O modelo de McCormack no escoamento de gases rarefeitos*. PhD thesis, Dissertação de Mestrado do Programa de Pós graduação em Matemática, UFSM, Santa Maria, Brasil, 2011.
- [4] C.E. BARICHELLO, L.B.; SIEWERT. Some comments on modeling de linearized boltzmann equation. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 77:43–59, 2003.
- [5] CERCIGNANI C. The method of elementary solutions for kinetic models with velocity-dependent collision frequency. *Annals of Physics*, 40:469–481, 1966.
- [6] CERCIGNANI C. *Mathematical Methods in Kinetic Theory*, volume I. Plenum Press, New York, 1969.
- [7] CERCIGNANI C. *Theory and Application of the Boltzmann Equation*. Scottish Academic, Endinburgh e London, 1975.
- [8] CERCIGNANI C. *The Boltzmann Equation and its Applications*, volume I. Springer-Verlag, 1988.
- [9] CERCIGNANI C. *Rarefied Gas Dynamics, From Basic Concepts to Actual Calculations*, volume I. University Press, Cambridge, 2000.
- [10] SMITH B.T.; BOYLE J.M.; DONGARRA J.J.; GARBOW B.S.; IKEBE Y.; KLEMA V.C.; MOLER C.B. *Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide*, volume I. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

- [11] BARICHELLO L.B.; CAMARGO M.; RODRIGUES P.; SIEWERT C.E. Unified solutions to classical flow problems based on the bgk model. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 52:517–534, 2001.
- [12] BARICHELLO L.B.; SIEWERT C.E. A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 62:665–675, 1999.
- [13] GARCIA R.D.M.; SIEWERT C.E. The mccormack model of gas mixture: Plane couette flow. *Physical of Fluids*, 17:037102(1), 2005.
- [14] GARCIA R.D.M.; SIEWERT C.E. The linearized boltzmann equation: sound-wave propagation in a rarefied gas. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 57:94–122, 2006.
- [15] GARCIA R.D.M.; SIEWERT C.E. The linearized boltzmann equation with cercignani-lampis boundary conditions: Basic flow problems in a plane channel. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 28:387–396, 2009.
- [16] SIEWERT C.E. A concise and accurate solution to chandrasekhar’s basic problem in radiative transfer. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 64:109, 2000.
- [17] SIEWERT C.E. Kramers problem for a variable collision frequency model. *European Journal of Applied Mathematics*, 12:179–191, 2001.
- [18] SIEWERT C.E. Generalized boundary conditions for the s-model kinetic equations basic to flow in a plane channel. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 72:75–88, 2002.
- [19] SIEWERT C.E. Poiseuille, thermal creep and couette flow: results based on the ces model of the linearized boltzmann equation. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 21:579–, 2002.
- [20] SIEWERT C.E. Two half-space problems based on a synthetic-kernel model of the linearized boltzmann equation. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 75:21–38, 2002.

- [21] SIEWERT C.E. Viscous-slip, thermal-slip and temperature-jump coefficients as defined by linearized boltzmann equation and the cercignani-lampis boundary condition. *Physical of Fluids*, 15:1696, 2003.
- [22] mas limites da miniaturização estão no horizonte CHIPS cada vez menores são o caminho. *Site Inovação Tecnológica*, 01 2008. Retirado do site dia 31/08/2011.
- [23] SCHERER C.S. *Modelos Cinéticos da Equação Linearizada de Boltzmann e um Problema de Transferência de Calor em Microescala*. PhD thesis, Dissertação de Mestrado do Programa de Pós graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 2005.
- [24] KALEMPA D. *Modelagem numérica de propagação de ondas em gases rarefeitos*. PhD thesis, Tese de doutorado ao Programa de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, UFPR, Curitiba, Brasil, 2009.
- [25] GROSS E.P.; JACKSON E.A. Kinetic models and the linearized boltzmann equation. *The Physics of Fluids*, 2:432–441, 1959.
- [26] KENNARD E.H. *Kinetic Theory of Gases*, volume I. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 1938.
- [27] LANDAU L.D.; LIFSHITZ E.M. *Fluid Mechanics*, volume I. Pergamon, New York, 1989.
- [28] SHAKHOV E.M. *Method of investigation of rarefied gas flows*, volume I. Nauka, Moscow, 1974.
- [29] BRUNETTI F. *Mecânica dos Fluidos*. Pearson, Prentice Hall, 2ed, 1999.
- [30] SHARIPOV F. Onsanger-casimir reciprocity relations for opengaseous systems at arbitrary rarefaction. ii. application of the theory for single gas. *Physica A*, 203:457–, 1994.
- [31] SHARIPOV F. Rarefied gas flow through a long rectangular channel. *Journal of Vacuum Science and Technology A*, 17:3062–, 1999.
- [32] SHARIPOV F. Application of the cercignani scattering kernel to calculation of rarefied gas flows.i.plane flow between two parallel plates. *Europen Journal of Mechanics B/Fluids*, 21:113–123, 2002.
- [33] SHARIPOV F. Application of the cercignani scattering kernel to calculation of rarefied gas flows.ii.slip and jump coefficients. *Europen Journal of Mechanics B/Fluids*, 22:133–143, 2003.

- [34] SHARIPOV F. Data on the velocity slip and temperature jump coefficients. *In 5th Annual International Conference on Thermal and Mechanical Simulation Experiments in Micro-Electronics and Micro-Systems*, pages 243–249, 2004.
- [35] SIEWERT C.E.; SHARIPOV F. Model equations in rarefied gas dynamics: Viscous-slip and thermal slip coefficients. *Physical of Fluids*, 14:4123–4129, 2002.
- [36] MCCORMACK F.J. Construction of linearized kinetic models for gaseous mixtures and molecular gases. *The Physics of Fluids*, 16:2095–2105, 1973.
- [37] WHITE F.M. *Mecânica dos fluidos*. Mc Graw-Hill, Rio de Janeiro, 2002.
- [38] FONSECA J.S.; MARTINS G.A. *Curso de Estatística*, volume I. Atlas, São Paulo, 1996.
- [39] WICK G.C. Uber ebene diffusions problem. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 120:702–, 1943.
- [40] ZOU Q.; HOU S.; DOOLEN G.D. Analytical solutions of the lattice boltzmann bgk model. *Journal of Statistical Physics*, 81:319–334, 1995.
- [41] FAN J.; BOYD I.D.; CAI C.P.; HENNIGHAUSEN K.; CANDLER G.V. Computation of rarefied gas flows around a naca 0012 airfoil.
- [42] DONGARRA J.J.; BUNCH J.R.; MOLER C.B.; STEWART G.W. *User's Guide*, volume I. Society for Industrial and Applied Mathematics-SIAM, Philadelphia, 1979.
- [43] FERZIGER J.H.; KAPER H.G. *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*, volume I. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972.
- [44] BOULOS P.; CAMARGO I. *Geometria Analítica um tratamento vetorial*, volume II. Makron Books do Brasil, 1986.
- [45] HALLIDAY D.; RESNICK R.; WALKER J. *Fundamentos de Física 2*, volume II. LTC, 1976.
- [46] MULLER-FIEDLER R.; AXTEN E.; ERNEST P.; SCHIE J. Inertial sensors for automotive safety systems. *MST News*, 3:10–13, 2007.
- [47] BURDEN R.L.; FAIRES J.D. *Numerical Analysis*, volume I. Brooks/Cole Publishing, Boston, 1997.

- [48] PROLO FILHO J.F. *A Equação de Boltzmann e a Modelagem de Fluidos em Micro e Macroescala*. PhD thesis, Dissertação de Mestrado do Programa de Pós graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 2007.
- [49] JEANS J.H. The equations of radiative transfer of energy. *Mon.Not.Royal Astron. SOc.*, 78:28–, 1917.
- [50] LOYALKA S.K.; FERZIGER J.H. Model dependence of the slip coefficient. *The Physics of Fluids*, 10:1833–1938, 1967.
- [51] CENGEL Y.U.; CIMBALA J.M. *Mecânica dos Fluidos - Fundamentos e Aplicações*. McGraw Hill, 2006.
- [52] LOYALKA S.K.; HICKEY K. A plane poiseuille flow: near continuum results for a rigid sphere gas. *Physica A*, 160:395–408, 1989.
- [53] SCHWARZSCHILD K. Ueber das gleichgewicht der sonnenetmosphäre. *Göttinger Nachrichten Math.-Phys.Klasse*, 1906.
- [54] CASE K.M. Elementary solutions of the transport equation and their applications. *Annals of Physics*.
- [55] BOLTZMANN L. *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*, volume I. Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften, 1872.
- [56] KNACKFUSS R.F.; BARICHELLO L.B. Surface effects in rarefied gas dynamics: an analysis based on the cercignani-lampis boundary condition. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 25:113–129, 2006.
- [57] SCHERER C.S.; BARICHELLO L.B. An analytical approach to the unified solution of kinetic equations in rarefied gas dynamics.i.flow problems. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 60:70–115, 2009.
- [58] SCHERER C.S.; PROLO FILHO J.F.; BARICHELLO L.B. An analytical approach to the unified solution of kinetic equations in rarefied gas dynamics.iii.evaporation and condensation problems. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 61:95–117, 2010.
- [59] THOMAS L.B. *A Collection of Some Controlled Surface Thermal Accommodation Coefficient Measurements*, volume I. Academic Press-Brundin, C.L.

- [60] CABRERA L.C. *Derivação e solução de equação modelo da dinâmica de gases rarefeitos*. PhD thesis, Dissertação de Mestrado do Programa de Pós graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 2003.
- [61] CERCIGNANI C.; LAMPIS M. Kinetic models for gas-surface interaction. *Transport Theory Sthatistical Physics*, 1:101–114, 1971.
- [62] GAD-ELHAK M. *The MEMS Handbook: introduction and fundamentals*. CRC Press, 2006.
- [63] BHATNAGAR P.L.; GROSS E.P.; KROOK M.A. A model for collision processes in gases. *Physical Review*, 94:511–525, 1954.
- [64] WILLIAMS M.M.R. *Mathematical methods in particle transport theory*, volume I. Butterworth-London, 1971.
- [65] WILLIAMS M.M.R. A review of the rarefied gas dynamics theory associated with some classical problems in flow and heat transfer. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 52:500–516, 2001.
- [66] KOGAN M.N. *Rarefied Gas Dynamics*, volume I. Plenum, New York, 1969.
- [67] ROSTAMI A.A.; MUJUMDAR A.S.; SANIEI N. Flow and heat transfer for gas flowing in microchannels: a review.
- [68] SIEGEL S.; CASTELLAN JR N.J. *Estatística não paramétrica para ciências do comportamento*, volume II. Bookman, Porto Alegre: Artmed, 2006.
- [69] LIU L.; CAOS W.; WU J.; WEN W.; CHANG D.C.; SHENG P. Desing and integration of an all-in-one biomicrofluid. *Biomicrofluidics*, 2:1–8, 2008.
- [70] RODRIGUES P. *Dinâmica de Gases Rarefeitos e Transferência Radiativa: AAplicações em Geometria Cilíndrica*, school = Tese de doutorado do Programa de Pós graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, year = 2003,. PhD thesis.
- [71] FOX R.W.; MCDONALD A.T.; PRITCHARD P.J. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. LTC Editora, Rio de Janeiro, 1998.
- [72] MOTA M.B.; BRAICK P.R. *História das cavernas ao Terceiro Milênio*, volume único. Moderna LTDA, 2ed, 2006.

- [73] GARCIA R.D.M. Métodos para solução da equação de transporte de partículas integro-diferencial. *Escola de Verão em Teoria de Transporte de Partículas Neutrais*, 2002.
- [74] ROSA C.E.; KNACKFUSS R.F. An unified formulation for the kinetics models in the poiseuille flow based on the cercignani-lampis boundary condition. *Books of ABSTRACTS - XXXII CILAMCE - Iberian Latin-American Congress on Computacional Methods in Engineering*, page 78, 2011.
- [75] ROSA C.E.; KNACKFUSS R.F. An unified formulation for the kinetics models in the poiseuille flow based on the cercignani-lampis boundary condition. *Anais Proceedings - XXXII CILAMCE - Iberian Latin-American Congress on Computacional Methods in Engineering*, 2011.
- [76] LORD R.G. Tangential momentum accommodation coeficients of rare gases on polycrystalline metal surfaces. *Program Astronautics and Aeronautics*, 51:531–538, 1977.
- [77] HUNTER R.J. *Zeta Potential in Colloid Science Principles and applications*. Academic, 1981.
- [78] CHANDRASEKHAR S. *Radiative Transfer*. Oxford University Press, London, 1950.
- [79] KRUEGER S. Sensores for mobility. *MST News*, 3:6–10, 2007.
- [80] LOYALKA S.K. Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect i. *J. Chem, Phys.*, 55:4497–, 1971.
- [81] WILLET L.; HASHIMI S.; TOMPSON R.V.; LOYALKA S.K. Effect of surface heterogeneities on condensation on an aerosol particle. *J. of Aerosol Sciences*, 30:669–675, 1999.
- [82] WILLIAMS M.M.R.; LOYALKA S.K. *Aerosol Science: Theory and Praticitce, With Special Applications to the Nuclear Industry*, volume I. Pergamon Press, Oxford, 1992.
- [83] DAHMEN S.R. Ludwig boltzmann: vida e obra. *Gazeta de Física*, pages 16–22, 2006.
- [84] BAAL T. Biomicrotechnology. *MST News*, 1:05–08, 2004.
- [85] MICROCÂMERA tem o tamanho de um grão de sal. *Site Inovação Tecnológica*, 03 2011. Retirado do site dia 31/08/2011.
- [86] CHAPMAN S.; COWLING T.G. *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, volume 3. Cambridge University Press, London, 1970.

- [87] SHARIPOV F.; SELEZNEV V. Data on internal rarefied gas flows. *Journal Physical and Chemical Reference Data*, 27:657–706, 1998.
- [88] PORODNOV B.T.; SUETIN P.E.; BORISOV S.F.; AKINSHIN V.D. Experimental investigation of rarefied gas flow in different channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 64:417–437, 1974.
- [89] STOKES V.K. *Theories of FLuids with Microstructure*. Springer, 1984.
- [90] KACAC S.; VASILIEV L.; BAYAZITOGU Y.; YENER Y. *Microscale Heat Transfer: Fundamentals and Applications*.
- [91] PEKERIS C.L.; ALTERMAN Z. Solution of the boltzmann-hilbert integral equation ii. the coefficients of viscosity and heat conduction. *Proc. Natl. Acad. Science*, 43:998–1007, 1957.
- [92] WANG M.; LAN X.; LI Z. Analyses of gas flow in micro and nonachannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51:3630–3641, 2008.

Apêndice A

ANÁLISES DE VARIÂNCIA DE DOIS FATORES DE FRIEDMAN POR POSTOS

A estatística moderna tem uma função central: a inferência estatística, no qual relaciona-se a dois tipos de problemas: estimação de parâmetros populacionais e testes de hipóteses. É nesse último que estamos interessados.

A.1 Testes de hipóteses

Em muitas situações para tomar uma decisão sobre uma determinada hipótese precisa-se ter um procedimento objetivo para aceitar ou rejeitar a hipótese.

Quando trabalha-se no campo da estatística, formula-se hipóteses sobre um elemento amostral que são submetidas a determinados testes. A Hipótese Nula (H_0) é a hipótese estatística a ser testada e é representada por uma igualdade e a Hipótese Alternativa (H_1) representada por uma desigualdade que é a conclusão encontrada quando a Hipótese Nula é rejeitada.

Pode ocorrer dois tipos de erros quando se testa uma hipótese estatística, são eles:

- Erro Tipo I: quando rejeita-se a Hipótese Nula quando ela é verdadeira;
- Erro Tipo II: quando aceita a Hipótese Nula quando ela é falsa.

Ambos os tipos de erros estão associados com uma probabilidade, ou seja, para o Erro Tipo I tem-se a probabilidade α e é denominado por nível de significância, já o Erro Tipo II é representado pela probabilidade β .

Note que o nível de significância deve estar fixado antes do início do teste já que α participa do processo de aceitação ou rejeição da Hipótese Nula. Os valores para o nível de significância são baixos e estão em torno de 1% a 10% [38] no quais são mais usuais 0.05 e 0.01, de acordo com a importância prática dos resultados.

Após definir as hipóteses e o nível de significância deve-se determinar o valor amostral. E em seguida decidir o teste estatístico apropriado. Após isso, ainda é necessário definir a região de rejeição para o teste estatístico, ou seja, definir a região da distribuição amostral nula.

A região de rejeição, segundo Siegel, consiste de um conjunto de possíveis valores que sejam tão extremos que, quando H_0 é verdadeira, a probabilidade α do valor observado da amostra estar entre eles é muito pequena. Além disso, a natureza da região de rejeição é afetada pela Hipótese Alternativa. Utiliza-se o teste unilateral quando H_1 indica o sentido da diferença e caso contrário utiliza-se o teste bilateral. Pode-se verificar na Figura A.1 as regiões de rejeição para os testes unilaterais e bilaterais e como as duas regiões diferem uma da outra, contudo não alteram o tamanho. Observe que a área hachurada na Figura A.1 é a região de rejeição para $\alpha = 0.05$.

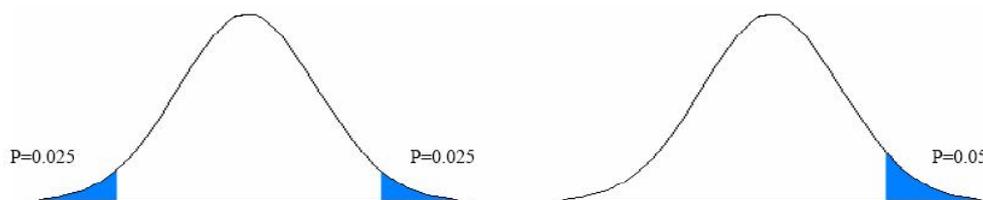


Figura A.1: Regiões de rejeição: teste bilateral(esquerda) e unilateral(direita) [38]

Portanto, para finalizar deve-se tomar a decisão final, verificando se o valor obtido no teste estatístico pertence ou não a região de rejeição.

A.2 Escolha do teste estatístico

As primeiras técnicas de inferências foram as paramétricas, no qual faziam muito boas suposições sobre a natureza das populações. Por outro lado, uma técnica recente, a estatística não-paramétrica é considerada, por muitos, um dos campos mais importantes da estatística

pelo fato das técnicas poderem ser utilizadas com uma frequência maior em diversas áreas como ciências físicas, biológicas, sociais e na comunicação [68] e é essa técnica que iremos nos focar.

Testes de posto ou teste de ordenação são exemplos de técnicas não-paramétricas, ou seja, essas técnicas não precisam ter seu foco voltado a um valor numérico. Outras vantagens de se trabalhar com métodos de estatística não-paramétrica são de que se pode trabalhar com o mínimo de suposições, muitos métodos rápidos e proporciona o trabalho com amostras de pequenas dimensões.

Conforme Siegel [68], quando os dados de k amostras combinadas estão pelo menos em uma escala ordinal, a análise de variância de dois fatores de Friedman por postos é usada para testar a hipótese nula de que as k amostras tenham sido extraídas da mesma população.

A.3 Análises de variância de dois fatores de Friedman por postos

O procedimento da análise de variância de dois fatores de Friedman por postos é dado da seguinte maneira:

1. Considera-se uma tabela de duas entradas, ou seja, com N linhas que representam os sujeitos ou conjuntos combinados de sujeitos e k colunas que são representadas por várias condições.
2. São definidos postos para os dados do teste, isto é, deve-se atribuir postos para os dados de cada linha de 1 a k . Detalhadamente, tem-se que cada linha possui escores que distribuídos separadamente, ou seja, os postos em qualquer linha tem variação de 1 até k , com k condições sendo estudadas. Conforme Siegel [68], o teste de Friedman calcula a probabilidade de que coluna de postos diferentes tenham origem da mesma população, ou seja, as k variáveis tenham a mesma mediana.
3. Calcula-se a soma dos postos para cada coluna (R_j).
4. Determina-se o valor da estatística dado pela seguinte equação

$$F_r = \left[\frac{12}{Nk(k+1)} \sum_{j=1}^k R_j^2 \right] - 3N(k+1) \quad (\text{A.1})$$

onde

- N é o número de linhas (sujeitos);
- k é o número de colunas (condições);
- R_j é a soma dos postos na j -ésima coluna

Note que $\sum_{j=1}^k$ é a soma dos quadrados das somas dos postos sobre todas as condições.

Essa equação, denotado por Teste de Friedman, determina se os totais dos postos para cada condição diferem consideravelmente dos valores esperados em função do acaso.

5. Para determinar a probabilidade de ocorrência, quando H_0 é verdadeiro, defini-se o método a partir dos tamanhos de N e k :
 - a Para N e k pequenos, observa-se a Tabela A.1 que fornece valores críticos selecionados de F_r ;
 - b Para N e/ou k maiores do que os usados na Tabela A.1, a probabilidade associada pode ser determinada por meio da distribuição χ^2 que pode ser encontrado na tabela dos anexos das referências [38, 68] com $gl = k - 1$ onde gl é denominado graus de liberdade.
6. Analisa-se então a probabilidade fornecida pelo método dado no item anterior, caso seja menor ou igual a α , tem-se que H_0 é rejeitada.
7. Caso tem-se que H_0 for rejeitada utiliza-se comparações múltiplas para assim determinar quais diferenças entre as condições e uma condição modelo são significantes. Para esse teste utiliza-se a seguinte equação

$$|R_1 - R_u| \geq z_{\alpha/k(k-1)} \sqrt{\frac{Nk(k+1)}{6}} \quad (\text{A.2})$$

onde

- R_1 é a condição controle, ou seja, é a condição as quais cada uma das outras condições será comparada;
- R_u para $u = 2, 3, \dots, k$ é o conjunto de condições;
- $z_{\alpha/k(k-1)}$ obtido pela Tabela A.1

Segundo Siegel [68], o teste de análise de variância de dois fatores de Friedman por postos para dados normalmente distribuídos, tem o poder-eficiência, quando comparados com

