UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA

ENVOLVENTES PARA AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS E DE ÁLGEBRAS DE HOPF

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Márcio José Orofino do Nascimento

Santa Maria, RS, Brasil

2012

ENVOLVENTES PARA AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS E DE ÁLGEBRAS DE HOPF

por

Márcio José Orofino do Nascimento

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração em Matemática Pura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. João Roberto Lazzarin

Santa Maria, RS, Brasil
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação de Mestrado

Envolventes para ações parciais de grupos e de álgebras de Hopf

elaborada por

Márcio José Orofino do Nascimento

Como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

João Roberto Lazzarin, Dr. (UFSM)

(Presidente/Orientador)

Gastón Andrés Garcia, Dr. (University of Córdoba)

Daiana Aparecida da Silva Flôres, Dra. (UFSM)

Luciane Gobbi Tonet, Dra. (UFSM)

(Suplente)

Santa Maria, 01 de fevereiro de 2012.

DEDICATÓRIA

à minha amada esposa

Fernanda da Silva Schuster

AGRADECIMENTOS

A construção dos textos deste trabalho, a bem dizer, começou na graduação, quando do estudo de módulos e do produto tensorial, com o professor João Roberto Lazzarin. Também, no estudo dos demais tópicos dos dois primeiros capítulos, teve singular importância o seminário relativo ao estudo de álgebras de Hopf, ministrado pelo professor Dirceu Bagio.

Agradeço a orientação do professor João Roberto Lazzarin na elaboração deste trabalho, com suas sugestões na reclassificação dos exemplos, das definições e das proposições, na generalização de resultados, na apresentação dos textos e correções oportunas.

Agradeço as correções e os exemplos sugeridos pelo professor Gastón Andrés Garcia. Também, na revisão deste trabalho, agradeço as correções e sugestões apontadas pelas professoras Daiana Aparecida da Silva Flôres e Luciane Gobbi Tonet que muito contribuíram para uma melhor apresentação dos textos e diagramas.

Também quero deixar aqui meu muito obrigado aos meus professores e professoras do Departamento de Matemática e do PPGMAT desta Universidade que muito contribuíram em minha formação.

Finalmente, e em maior importância, agradeço à minha esposa Fernanda da Silva Schuster pela sua paciência, pelo seu apoio em minhas dificuldades, por suas palavras de incentivo, que nunca me faltaram, e por sua compreensão pela minha ausência nas muitas horas necessárias ao estudo da nobre ciência chamada Matemática. Muito obrigado Fernanda, por fazer parte de minha vida.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

ENVOLVENTES PARA AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS E DE ÁLGEBRAS DE HOPF

AUTOR: MÁRCIO JOSÉ OROFINO DO NASCIMENTO

ORIENTADOR: PROF. DR. JOÃO ROBERTO LAZZARIN

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 01 de fevereiro de 2012.

Baseados nos artigos “Associativity of crossed produts by partial actions, enveloping actions and partial representations” de M. Dokuchaev e R. Exel ([7]) e “Enveloping Actions for Partial Hopf Actions” de M.M.S. Alves e E. Batista ([3]), estabeleceremos condições para a existência de envolventes para ações parciais de grupo e ações parciais de álgebras de Hopf sobre álgebras. Os resultados principais são:

1. Toda ação parcial $\{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g : g \in G\}$ de um grupo G sobre uma álgebra associativa e unitária admite uma única ação envolvente se, e somente se, os ideais D_g são álgebras unitárias;

2. Toda ação parcial (à esquerda) de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra associativa e unitária tem uma envolvente, decorrendo daí que toda ação parcial (à esquerda) de Hopf é equivalente a ação parcial (à esquerda) induzida pela ação da envolvente;

3. Duas ações envolventes minimais de uma ação parcial de Hopf são isomorfas como H-módulos álgebras (à esquerda).

Palavras-chave: Envolventes ações parciais.

ABSTRACT

Master's Dissertation
Mathematics Post-Graduation Program
Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brazil

ENVELOPING FOR PARTIAL ACTIONS OF GROUPS AND HOPF ALGEBRAS

AUTHOR: MÁRCIO JOSÉ OROFINO DO NASCIMENTO

MASTERMIND: PROF. DR. JOÃO ROBERTO LAZZARIN

Date and Location of Defense: Santa Maria, February 01, 2012.

Based on the articles "Associativity of crossed produts by partial actions, enveloping actions and partial representations" of M. Dokuchaev and R. Exel ([7] and "Enveloping Actions for Partial Hopf Actions" of M.M.S. Alves and E. Batista ([3]), we will report conditions for the existence of enveloping actions of partial group actions and partial Hopf algebra actions. The main results are:

1. Every partial action $\{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g : g \in G\}$ of a group G on an unital associative algebra admits only one enveloping action if and only if, the ideals D_g are unital algebras;

2. Every left partial action of a Hopf algebra H on an unital associative algebra admits an enveloping action. Moreover, every left partial Hopf action is equivalent to a left partial action induced by the enveloping action;

3. Two miminal enveloping actions of a parcial Hopf action are isomorphic as left H-module algebras.

Keywords: Enveloping partial actions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo o estudo de ações parciais de grupo (sobre uma álgebra) e ações parciais de uma álgebra de Hopf (sobre uma álgebra) e suas respectivas envolventes. Uma ação envolvente de uma ação parcial de grupo nada mais é que uma ação (global) de grupo que, quando restrita a certos domínios parciais, torna-se exatamente a ação parcial de grupo inicial (ver [7]). Já existem na literatura diversos trabalhos que generalizam resultados clássicos de ações globais de grupo. O resultados destes trabalhos são “baixados” às ações parciais de grupo através da respectivas envolventes. Como exemplos, citamos o artigo [8], que reporta às ações parciais de grupo resultados clássicos da Teoria de Galois, e os artigos [9] e [10], que generalizam resultados bastante conhecidos para skew anéis de grupo e subanéis dos elementos invariantes de ações de grupo.

Podemos encontrar na literatura vários resultados que foram obtidos utilizando-se envolventes de ações parciais de álgebras de Hopf como, por exemplo, os que podemos encontrar em [2] e [4]. Estas possibilidades que as envolventes de ações parciais trazem, como ferramentas na obtenção de novos resultados e ou na generalização de resultados clássicos, motivou-nos a estudar as ações parciais de grupo sobre álgebras e as ações parciais de álgebras de Hopf sobre álgebras e suas respectivas envolventes. Começamos com o estudo dos seguintes pré-requisitos: produto tensorial, álgebra, coálgebra, biálgebra, álgebra de Hopf, notação sigma, produto de convolução e o dual algébrico de uma álgebra e de uma coálgebra (em particular, o dual algébrico de uma álgebra de Hopf). Devido a sua extensão, dividimos os pré-requisitos em dois capítulos iniciais preparatórios, sendo o primeiro capítulo destinado, principalmente, ao estudo do produto tensorial. Deixamos ainda, neste primeiro capítulo, a definição de álgebra com algumas observações pertinentes.

No segundo capítulo, expusemos o restante dos pré-requisitos. O leitor poderá observar que os assuntos destes dois capítulos iniciais estão interligados, sendo o assunto seguinte uma extensão dos anteriores. Procuramos demonstrar a maioria dos resultados expostos nos dois capítulos iniciais (e que são necessários ao estudo das ações "totais" e das ações parciais de álgebras de Hopf) que se destinam, principalmente, àqueles que não estão familiarizados com o conteúdo destes pré-requisitos.

O estudo da envolvente de uma ação parcial de grupo sobre uma álgebra é o assunto do terceiro capítulo que foi construído com auxílio dos artigos [7], [9] e [15]. Observamos que, com exceção da definição de álgebra, o estudo de ações parciais de grupo e sua envolvente prescinde dos pré-requisitos estudados nos dois primeiros capítulos. Começamos apresentando a definição de ação parcial de grupo (sobre uma álgebra), tendo como primeiro exemplo de ação parcial de grupo uma ação (global) de grupo (sobre uma álgebra). Mostra-se também que ao fazermos uma certa restrição dos automorfimos que compõem esta ação (global) de grupo, obtém-se uma outra ação parcial de grupo. Definida a envolvente de uma ação parcial de grupo, exibimos um exemplo de envolvente. A seguir, demonstramos o resultado principal deste capítulo que é a existência e a unicidade (a menos de equivalência) da envolvente de uma ação parcial de um grupo G sobre uma álgebra unitária A cujos ideais D_g, onde $g \in G$, são álgebras unitárias. Como uma aplicação de ações parciais de grupo temos o skew anel de grupo parcial. Verifica-se com um exemplo que o skew parcial não é, em geral, associativo. Mostra-se que uma condição suficiente para a associatividade do skew parcial é a existência da envolvente da ação parcial de grupo deste skew.

No capítulo 4, baseados nos textos do artigo [3], fizemos o estudo da ação parcial à esquerda de uma álgebra de Hopf sobre uma álgebra (que dizemos simplesmente ação parcial de uma álgebra de Hopf ou também ação parcial de Hopf) e sua envolvente. Apresentamos, inicialmente, a definição de ação de uma álgebra de Hopf sobre uma álgebra unitária, mostrando uma aplicação importante que decorre da mesma: o *produto smash*. Com a definição de ação parcial de Hopf, seguem-se definições, proposições e lemas que nos permitirão mostrar a existência da envolvente de uma ação parcial de Hopf. Da existência desta envolvente, segue-se que toda ação parcial de Hopf é induzida. Veremos ainda que, em geral, duas envolventes de uma ação parcial de Hopf não são isomorfas. Exemplificamos também as ações "totais" de Hopf e as ações parciais de Hopf. Com o conceito de envolvente minimal, concluímos posteriormente que existe uma única envolvente minimal para toda ação parcial de uma álgebra de Hopf, a menos de isomorfismo de H-módulos álgebras.

Capítulo 1

PRODUTO TENSORIAL E ÁLGEBRA

Dedicamos este primeiro capítulo (construído com base nos textos encontrados em [6],[13], [14] e [16]), inicialmente, ao estudo do produto tensorial. Apresentamos, a seguir, a definição de álgebra (associativa e unitária) com algumas observações pertinentes. No que se segue, dado um conjunto P com uma certa estrutura algébrica, 1_P denotará a unidade de P (caso a mesma exista). Ainda, para nós, salvo menção em contrário, um anel é sempre associativo.

1.1 Produto Tensorial

Iniciamos esta seção com a noção de módulo que está presente no estudo do produto tensorial.

Definição 1.1.1. *Seja R um anel com unidade 1_R. Diz-se que um conjunto não vazio M é um módulo à esquerda sobre R (ou um R-módulo à esquerda) se M é um grupo abeliano em relação a uma operação, que indicaremos por $+$, e está definida uma lei de composição externa que a cada par $(r, m) \in R \times M$ associa um elemento $rm \in M$, tal que, para todo $r_1, r_2 \in R$ e para todo $m_1, m_2, m \in M$, verificam-se:*

(i) $r_1(r_2m) = (r_1r_2)m$;

(ii) $r_1(m_1 + m_2) = r_1m_1 + r_1m_2$;

(iii) $(r_1 + r_2)m_1 = r_1 m_1 + r_2 m_1$;

(iv) $1_R m_1 = m_1$.

Observação 1.1.2. *De forma análoga, definimos um R-módulo à direita, considerando-se a multiplicação à direita por um elemento do anel R. Pode-se também definir módulo para anéis sem unidade. Neste caso, omite-se* ***(iv)*** *da definição acima. Dizemos que um conjunto não vazio M é um R-módulo, quando M é um R-módulo à esquerda, um R-módulo à direita e* $rm = mr$*, para quaisquer* $r \in R$ *e* $m \in M$.

Exemplo 1.1.3. *Todo grupo (aditivo) abeliano G pode ser considerado como um módulo à esquerda sobre o anel* $\mathbb{Z}$ *dos inteiros definindo a multiplicação de um inteiro n por um elemento* $g \in G$ *por:* $\underbrace{ng = g + \ldots + g}_{n \text{ parcelas}}$ *se* $n > 0$, $\underbrace{ng = (-g) + \ldots + (-g)}_{-n \text{ parcelas}}$ *se* $n < 0$ *e* $0g = 0$.

Observação 1.1.4. *Analogamente, todo grupo (aditivo) abeliano G é um* $\mathbb{Z}$*-módulo à direita com* $gn = ng$*, para quaisquer* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $g \in G$ *e, portanto, é um* $\mathbb{Z}$*-módulo.*

Definição 1.1.5. *Seja M um R-módulo à esquerda. Um subconjunto* $N \subseteq M$ *diz-se um R-submódulo (à esquerda) de M ou simplesmente um submódulo (à esquerda) se N é um subgrupo aditivo de M e é fechado em relação à multiplicação por escalares.*

Definição 1.1.6. *Sejam G um grupo (aditivo) abeliano e X um subconjunto de G. Dizemos que G é um grupo (aditivo) abeliano livre com base X se cada* $g \in G$ *tem uma única representação na forma* $g = \sum_{x \in X} m_x x$*, onde* $m_x \in \mathbb{Z}$ *e quase todos os* m_x *são nulos.*

Temos, de modo análogo ao conceito de transformações lineares entre espaços vetoriais (sobre um corpo), a definição de um homomorfismo de R-módulos à esquerda ou de uma função R-linear (à esquerda) que apresentamos a seguir.

Definição 1.1.7. *Sejam M e N dois R-módulos à esquerda. Uma função* $f : M \longrightarrow N$ *diz-se um homomorfismo de R-módulos à esquerda ou um R-homomorfismo à esquerda se, para todo* $m_1, m_2 \in M$ *e para todo* $\lambda \in R$*, valem:* $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ *e* $f(\lambda m_1) = \lambda f(m_1)$*. De modo análogo, definimos um homomorfismo de R-módulos à direita.*

O próximo teorema é conhecido como a propriedade universal que caracteriza o grupo abeliano livre de base X.

Teorema 1.1.8. *Seja G um grupo (aditivo) abeliano livre com base X. Consideremos H um grupo (aditivo) abeliano e f: $X \longrightarrow H$ uma função. Então existe um único homomorfismo (de $\mathbb{Z}$-módulos) $\tilde{f} : G \longrightarrow H$ com $\tilde{f}(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Como G e H são grupos (aditivos) abelianos, então os mesmos têm estrutura de $\mathbb{Z}$-módulos. Seja $g \in G$. Então $g = \sum\limits_{x \in X} m_x x$, com $m_x \in \mathbb{Z}$. Definamos $\tilde{f} : g \mapsto \sum\limits_{x \in X} m_x f(x)$. Temos que $\tilde{f}$ está bem definida, pois a expressão para cada $g \in G$ é única e apenas uma quantidade finita de m_x é não nula. É fácil ver que $\tilde{f}$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos.

Seja agora $\tilde{f}'$ homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, tal que $\tilde{f}'(x) = f(x)$, para todo $x \in X$. Então $m_x \tilde{f}'(x) = m_x \tilde{f}(x)$ e, com isso, $\sum\limits_{x \in X} \tilde{f}'(m_x x) = \sum\limits_{x \in X} \tilde{f}(m_x x)$. Logo $\tilde{f}'(\sum\limits_{x \in X} m_x x) = \tilde{f}(\sum\limits_{x \in X} m_x x)$. Isto mostra que $\tilde{f}' = \tilde{f}$. □

Teorema 1.1.9. *Dado um conjunto X, existe um grupo (aditivo) abeliano livre G que tem X como uma base.*

Demonstração. Seja $\{\mathbb{Z}_x : x \in X\}$ uma família de cópias de $\mathbb{Z}$. Consideremos o produto cartesiano $\prod\limits_{x \in X} \mathbb{Z}_x$. Seus elementos são da forma $(m_x)_{x \in X}$, com $m_x \in \mathbb{Z}$. O produto cartesiano $\prod\limits_{x \in X} \mathbb{Z}_x$ é um grupo abeliano com a operação de adição:

$$(m_x) + (m'_x) = (m_x + m'_x)_{x \in X}$$

Definamos $X' = \{(m^x_k)_{k \in X} : m^x_x = 1 \text{ e } m^x_k = 0, \text{ quando } k \neq x, \text{ com } x \in X\}$. Observemos que a aplicação $\rho : X' \longrightarrow X$ definida por $(m^x_k)_{k \in X} \mapsto x$ é uma bijeção. Seja G' o subgrupo de $\prod\limits_{x \in X} \mathbb{Z}_x$ gerado por X'. Logo todo elemento de G' é da forma $g = \sum\limits_{x \in X} \lambda_x (m^x_k)_{k \in X}$, com $\lambda_x \in \mathbb{Z}$. Observemos também que a expressão para cada $g \in G'$ é única. Temos que G' é um grupo (aditivo) abeliano com base X'. Substituímos cada $(m^x_k)_{k \in X}$ por x em G' e chamamos este novo conjunto de G. Definimos agora a adição óbvia neste novo conjunto, isto é, a adição pontual. Temos que G é um grupo (aditivo) abeliano livre com base X. □

Definição 1.1.10. *Um diagrama*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & D \arrow[d, "\theta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B \end{tikzcd}$$

comuta se $\alpha \circ \beta = \theta \circ \gamma$*; um diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "\beta"'] & \\ & C \\ B \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

comuta se $\alpha = \gamma \circ \beta$.

Dizemos que um diagrama composto de retângulos e triângulos comuta se cada um destes retângulos e triângulos comuta.

Definição 1.1.11. *Seja* R *um anel. Se* A *é um* R*-módulo à direita,* B *um* R*-módulo à esquerda e* G *um grupo (aditivo) abeliano, então uma* ***função R-biaditiva*** *é uma função* $f : A \times B \longrightarrow G$*, tal que, para quaisquer* $a, a' \in A$*,* $b, b' \in B$ *e* $r \in R$*, valem:*

(i) $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$*;*

(ii) $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$*;*

(iii) $f(ar, b) = f(a, rb)$.

Definição 1.1.12. *Um* ***produto tensorial*** *de um* R*-módulo à direita* A *por um* R*-módulo à esquerda* B *é um grupo (aditivo) abeliano que denotamos por* $A \otimes_R B$ *e uma função* R*-biaditiva* h *que satisfazem a seguinte* propriedade universal*:*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & A \otimes_R B \arrow[d, dotted, "f'"] \\ & G \end{tikzcd}$$

dados um grupo (aditivo) abeliano G e uma função R-biaditiva $f : A \times B \longrightarrow G$ arbitrários, existe um único homomorfismo (de $\mathbb{Z}$-módulos) f', tal que o diagrama acima comuta.

Observação 1.1.13. *Lemos $A \otimes_R B$ como A tensor B. Também usualmente se lê $A \otimes_R B$ como o produto tensorial de A por B, ficando subentendida a aplicação R-biaditiva h.*

Os próximos resultados seguem-se da propriedade universal descrita na Definição 1.1.12. Vejamos inicialmente a unicidade do produto tensorial.

Teorema 1.1.14. *Dois produtos tensoriais quaisquer de um R-módulo à direita A por um R-módulo à esquerda B são isomorfos (como $\mathbb{Z}$-módulos).*

Demonstração. Suponhamos que existam um segundo grupo (aditivo) abeliano X e uma função R-biaditiva $k : A \times B \longrightarrow X$ que também satisfazem a propriedade universal descrita na Definição 1.1.12. Temos:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "k"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, shift right, "k'"'] \\
& X \arrow[ur, shift right, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

onde k' e h' são homomorfismos (de $\mathbb{Z}$-módulos), tais que $k' \circ h = k \quad \text{e} \quad h' \circ k = h$.

Temos ainda o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, "id_{A \otimes_R B}"] \\
& A \otimes_R B &
\end{tikzcd}$$

Logo $id_{A \otimes_R B} \circ h = h = h' \circ k = h' \circ (k' \circ h) = (h' \circ k') \circ h$. Pela unicidade, segue-se que $h' \circ k' = id_{A \otimes_R B}$.

Temos também:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "k"'] & & X \arrow[dl, "id_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Logo $id_X \circ k = k = k' \circ h = k' \circ (h' \circ k) = (k' \circ h') \circ k$. Pela unicidade, segue-se que $k' \circ h' = id_X$.

Portanto $A \otimes_R B \cong X$. $\square$

Mostraremos agora a existência do produto tensorial.

Teorema 1.1.15. *O produto tensorial de um R-módulo à direita A por um R-módulo à esquerda B existe.*

Demonstração. Seja $F = F(A \times B)$ um grupo (aditivo) abeliano livre com base $A \times B$ (a existência deste grupo está assegurada pelo Teorema 1.1.9), isto é, F é o grupo cujos elementos são $\mathbb{Z}$ combinações lineares finitas de pares ordenados (a, b), com $a \in A$ e $b \in B$. Seja S o subgrupo de $F(A \times B)$ gerado por todos os elementos de uma das três formas a seguir:

(i) $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$, com $a, a' \in A$ e $b \in B$;

(ii) $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$, com $a \in A$ e $b, b' \in B$;

(iii) $(ar, b) - (a, rb)$, com $a \in A$, $b \in B$ e $r \in R$.

Temos que $\frac{F}{S}$ é um grupo (aditivo) abeliano e portanto um $\mathbb{Z}$-módulo com a adição definida por $[(a, b) + S] + [(a', b') + S] = [(a, b) + (a', b')] + S$ e multiplicação por escalar definida por $\lambda[(a, b) + S] = (\lambda(a, b)) + S$, com $\lambda \in \mathbb{Z}$. Denotemos o grupo quociente $\frac{F}{S}$ por $A \otimes_R B$ e a classe $(a, b) + S$ por $a \otimes b$. Seja a função $h : A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$ definida por $h(a, b) = a \otimes b$. Verifica-se facilmente que h é R-biaditiva.

Sejam G um grupo (aditivo) abeliano e $f : A \times B \longrightarrow G$ uma função R-biaditiva. Como F é livre sobre $A \times B$, então, pelo Teorema 1.1.8, existe um único homomorfismo (de $\mathbb{Z}$-módulos) $\varphi : F \longrightarrow G$ com $\varphi(a,b) = f(a,b)$, para todo (a,b) $\in A\times B$. Como f é R-biaditiva, então $S \subset Ker(\varphi)$. Logo φ induz um homomorfismo (de $\mathbb{Z}$-módulos) $f' : A \otimes_R B \longrightarrow G$ definido por $f' : \sum a_i \otimes b_i \mapsto \varphi(\sum(a_i, b_i))$. De fato, seja $\sum a_i \otimes b_i = \sum c_j \otimes d_j$. Então $\varphi(\sum(a_i,b_i) - \sum(c_j,d_j)) = 0$. Daí $\varphi(\sum(a_i,b_i)) - \varphi(\sum(c_j,d_j)) = 0$. Segue-se que $f'(\sum a_i \otimes b_i) = \varphi(\sum(a_i,b_i)) = \varphi(\sum(c_j,d_j)) = f'(\sum c_j \otimes d_j)$. Isto mostra que f' está bem definida. Mostra-se facilmente que f' é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos. Ainda $f' \circ h(a,b) = f'(a\otimes b) = \varphi(a,b) = f(a,b)$. Logo, $f' \circ h = f$.

Suponhamos agora que exista $g' : A \otimes_R B \longrightarrow G$ homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, tal que $g' \circ h = f$. Seja $\sum a_i \otimes b_i \in A \otimes_R B$. Temos que $g' \circ h(a_i, b_i) = f' \circ h(a_i,b_i)$. Segue-se que $g'(a_i \otimes b_i) = f'(a_i \otimes b_i)$ e daí $\sum g'(a_i \otimes b_i) = \sum f'(a_i \otimes b_i)$, o que implica $g'(\sum a_i \otimes b_i) = f'(\sum a_i \otimes b_i)$. Portanto $g' = f'$.

□

Observação 1.1.16. *Da demonstração do teorema anterior, segue-se que:*

(i) $(a_1 + a_2) \otimes b = (a_1 \otimes b) + (a_2 \otimes b)$*, para quaisquer* $a_1, a_2 \in A$ *e* $b \in B$*;*

(ii) $a \otimes (b_1 + b_2) = (a \otimes b_1) + (a \otimes b_2)$*, para quaisquer* $a \in A$ *e* $b_1, b_2 \in B$*;*

(iii) $ar \otimes b = a \otimes rb$*, para quaisquer* $a \in A$*,* $b \in B$ *e* $r \in R$*;*

(iv) $(0,b) = -[(0+0,b) - (0,b) - (0,b)] \in S$ *e* $(a,0) = -[(a,0+0) - (a,0) - (a,0)] \in S$*. Então* $0 \otimes b = a \otimes 0 = 0_{A\otimes_R B}$*;*

(v) $0_{A\otimes_R B} = -(a \otimes b) + a \otimes b$*. Por outro lado,* $(-a) \otimes b + a \otimes b = (-a+a) \otimes b = 0 \otimes b = 0_{A\otimes_R B}$*. Da unicidade do oposto, segue-se que* $-(a \otimes b) = (-a) \otimes b$*. Logo um elemento genérico de* $A \otimes_R B$ *é da forma* $\sum a_i \otimes b_i$*.*

Teorema 1.1.17. *Sejam* $f : A \longrightarrow A'$ *um homomorfismo de* R*-módulos à direita e* $g : B \longrightarrow B'$ *um homomorfismo de* R*-módulos à esquerda. Então existe um único homomorfismo (de* $\mathbb{Z}$*-módulos)* $h : A \otimes_R B \longrightarrow A' \otimes_R B'$ *com* $h(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$

Demonstração. A função $A \times B \longrightarrow A' \otimes_R B'$ definida por (a,b)$\mapsto f(a) \otimes g(b)$ é uma função R-biaditiva. Basta usar agora a propriedade universal descrita na Definição 1.1.12. □

A aplicação $A \otimes_R B \longrightarrow A' \otimes_R B'$ (homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos) com $a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$ é denotada por $f \otimes g$.

Teorema 1.1.18. *Sejam $f : A \longrightarrow A'$ e $f' : A' \longrightarrow A''$ homomorfismos de R-módulos à direita. Sejam $g : B \longrightarrow B'$ e $g' : B' \longrightarrow B''$ homomorfismos de R-módulos à esquerda. Então*

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

Demonstração. Temos que $f' \circ f : A \longrightarrow A''$ e $g' \circ g : B \longrightarrow B''$ são homomorfismos de R-módulos à direita e à esquerda respectivamente. Pelo teorema anterior, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) : A \otimes_R B \longrightarrow A'' \otimes_R B''$ definido por $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)(a \otimes b) = (f' \circ f)(a) \otimes (g' \circ g)(b)$. Temos também que:

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)(a \otimes b) = (f' \otimes g')(f(a) \otimes g(b)) = (f' \circ f)(a) \otimes (g' \circ g)(b)$$

Decorre da unicidade que $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$.

□

Definição 1.1.19. *Sejam R e S anéis. Um grupo (aditivo) abeliano B é um (R-S)-bimódulo, denotado por ${}_R B_S$, se B é um R-módulo à esquerda e um S-módulo à direita, onde*

$$r(bs) = (rb)s,$$

para quaisquer $r \in R$, $b \in B$ e $s \in S$.

Teorema 1.1.20. *Se A é um R-módulo à direita e B é um (R-S)-bimódulo, então $A \otimes_R B$ é um S-módulo à direita, onde $(\sum a_i \otimes b_i).s = \sum a_i \otimes (b_i s)$, para todo $s \in S$.*

Analogamente, se A é um (S-R)-bimódulo e B é um R-módulo à esquerda, então $A \otimes_R B$ é um S-módulo à esquerda, onde $s.(\sum a_i \otimes b_i) = \sum (sa_i) \otimes b_i$, para todo $s \in S$.

Demonstração. Para cada $s \in S$ fixo, a função $f_s : A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$ definida por $(a, b) \mapsto a \otimes (bs)$ é uma função R-biaditiva (basta usar as propriedades do produto tensorial e o fato de B ser um *(R-S)*-bimódulo). Então existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $f'_s : A \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B$, tal que $f'_s(a \otimes b) = a \otimes (bs)$. Defina $(\sum a_i \otimes b_i).s = \sum f'_s(a_i \otimes b_i)$. Temos que:

$$\begin{aligned}(\sum a_i \otimes b_i).(s_1 s_2) &= \sum f'_{s_1 s_2}(a_i \otimes b_i) = \sum a_i \otimes (b_i(s_1 s_2)) = \sum a_i \otimes ((b_i s_1) s_2) \\ &= \sum f'_{s_2}(a_i \otimes (b_i s_1)) = (\sum a_i \otimes (b_i s_1)).s_2 = (\sum f'_{s_1}(a_i \otimes b_i)).s_2 \\ &= ((\sum a_i \otimes b_i).s_1).s_2,\end{aligned}$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in S$.

Prova-se facilmente as demais propriedades de um S-módulo à direita.

Do mesmo modo, prova-se o caso análogo à esquerda. □

Exemplo 1.1.21. *Se R é um anel e B é um R-módulo à esquerda, então existe um R-isomorfismo (de R-módulos à esquerda) $R \otimes_R B \simeq B$ definido por $r \otimes b \mapsto rb$. Analogamente, se R é um anel e A é um R-módulo à direita, então existe um R-isomorfismo (de R-módulos à direita) $A \otimes_R R \cong A$ definido por $a \otimes r \mapsto ar$.*

De fato, pelo Teorema 1.1.20, temos que $R \otimes_R B$ é um R-módulo à esquerda. A função $R \times B \longrightarrow B$ definida por $(r, b) \mapsto rb$ é R-biaditiva. Pela definição de produto tensorial, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\theta : R \otimes_R B \to B$ definido por $r \otimes b \mapsto rb$. Ainda, decorre do Teorema 1.1.20 que θ é R-linear.

Definamos $\phi : b \mapsto 1_R \otimes b$. Sejam $r \in R$ e $b, b' \in B$. Temos que: $\phi(rb + b') = 1_R \otimes (rb + b') = (1_R \otimes rb) + (1_R \otimes b') = (1_R r \otimes b) + (1_R \otimes b') = r(1_R \otimes b) + (1_R \otimes b') = r\phi(b) + \phi(b')$. Isto mostra que ϕ é R-linear. Ainda:

(i) $\theta \circ \phi(b) = \theta(1_R \otimes b) = 1_R b = b$;

(ii) $\phi \circ \theta(\sum(r_i \otimes b_i)) = \sum \phi(r_i b_i) = \sum(1_R \otimes (r_i b_i)) = \sum(r_i \otimes b_i)$.

Portanto θ é um R-isomorfismo (de R-módulos à esquerda).

Do mesmo modo, mostra-se o caso análogo à direita.

Iremos estudar agora a comutatividade e a associatividade do produto tensorial.

Teorema 1.1.22. *Se R é anel comutativo, A é um R-módulo à direita e B um R-módulo à esquerda, então existe um R-isomorfismo (de R-módulos) $\tau : A \otimes_R B \longrightarrow B \otimes_R A$ definido por $a \otimes b \mapsto b \otimes a$.*

Demonstração. Seja R um anel comutativo. Verifica-se que se A é um R-módulo à direita, então A é um R-módulo à esquerda com $ra = ar$, para quaisquer $a \in A$ e $r \in R$. Segue-se que dados $r, s \in R$ e $a \in A$,

$$(ra)s = (ar)s = a(rs) = (rs)a = r(sa) = r(as).$$

Logo A é um *(R-R)*-bimódulo. Verifica-se também que B é um R-módulo à direita com $br = rb$, para quaisquer $b \in B$ e $r \in R$. Segue-se também que B é um *(R-R)*-bimódulo. Decorre do Teorema 1.1.20 que $A \otimes_R B$ é um R-módulo à esquerda e à direita simultaneamente. Ainda, seja $r \in R$. Temos que $r.(\sum a_i \otimes b_i) = \sum (ra_i) \otimes b_i = \sum a_i \otimes (rb_i) = \sum a_i \otimes (b_i r) = (\sum a_i \otimes b_i).r$. Portanto $A \otimes_R B$ é um R-módulo. Temos também que dados $r, s \in R$ vale:

$$\begin{aligned} r.((\sum a_i \otimes b_i).s) &= r.(\sum a_i \otimes (b_i s)) = \sum (ra_i) \otimes (b_i s) \\ &= (\sum (ra_i) \otimes b_i).s = (r.(\sum a_i \otimes b_i)).s. \end{aligned}$$

Logo $A \otimes_R B$ é *(R-R)*-bimódulo. Analogamente, concluímos que $B \otimes_R A$ é R-módulo e um *(R-R)*-bimódulo.

Verifica-se que a função $t : A \times B \longrightarrow B \otimes_R A$ definida por $(a, b) \mapsto b \otimes a$, onde $a \in A$ e $b \in B$, é R-biaditiva. Portanto, do Teorema 1.1.15, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\tau : A \otimes_R B \longrightarrow B \otimes_R A$, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dr, "t"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, "\tau"] \\ & B \otimes_R A & \end{tikzcd}$$

Verifica-se também que a função $q : B \times A \longrightarrow A \otimes_R B$ definida por $(b, a) \mapsto a \otimes b$, onde $a \in A$ e $b \in B$, é R-biaditiva. Decorre do Teorema 1.1.15 que existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\theta : B \otimes_R A \longrightarrow A \otimes_R B$, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} B \times A \arrow[rr, "\Pi'"] \arrow[drr, "q"'] & & B \otimes_R A \arrow[d, "\theta"] \\ & & A \otimes_R B \end{tikzcd}$$

Novamente, pelo Teorema 1.1.15, tem-se que $\theta \circ \tau = id_{A \otimes_R B}$ e que $\tau \circ \theta = id_{B \otimes_R A}$. Daí $A \otimes_R B \cong B \otimes_R A$ com $a \otimes b \mapsto b \otimes a$, ou seja, τ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos. Do Teorema 1.1.20, temos que τ é R-linear e, portanto, τ é um isomorfismo de R-módulos. $\square$

Para estudar a associatividade, consideremos:

Definição 1.1.23. *Sejam A um R-módulo à direita, B um (R-S)-bimódulo e C um S-módulo à esquerda. Uma* ***função triaditiva***

$$f : A \times B \times C \longrightarrow G,$$

onde G é um grupo (aditivo) abeliano, é uma função aditiva em cada uma das variáveis, tal que:

$$f(ar, b, c) = f(a, rb, c) \quad e \quad f(a, bs, c) = f(a, b, sc),$$

para quaisquer $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $r \in R$ e $s \in S$.

Definição 1.1.24. *Um* ***produto tensorial*** *de um R-módulo à direita A, um (R-S)-bimódulo B e um S-módulo à esquerda C é um grupo (aditivo) abeliano que denotamos por $A \otimes_R B \otimes_S C$ e uma função triaditiva h que satisfazem a seguinte propriedade universal:*

$$\begin{tikzcd} A \times B \times C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & A \otimes_R B \otimes_S C \arrow[d, dotted, "f'"] \\ & G \end{tikzcd}$$

dados um grupo (aditivo) abeliano G e uma função triaditiva $f : A \times B \times C \longrightarrow G$ arbitrários, existe um único homomorfismo (de $\mathbb{Z}$-módulos) f', tal que o diagrama acima comuta.

Observação 1.1.25. *Lemos $A \otimes_R B \otimes_S C$ como A tensor B tensor C. Usualmente também lemos esta expressão como o produto tensorial de A por B por C, ficando subentendida a aplicação triaditiva h.*

Teorema 1.1.26. *Existe o produto tensorial de um R-módulo à direita A, um (R-S)-bimódulo B e um S-módulo à esquerda C.*

Demonstração. Seja $F = F(A \times B \times C)$ um grupo (aditivo) abeliano com base $A \times B \times C$. Seja S o subgrupo de F gerado pelos seguintes elementos de uma das formas a seguir:

(i) $(a + a', b, c) - (a, b, c) - (a', b, c)$, onde $a, a' \in A$, $b \in B$ e $c \in C$;

(ii) $(a, b + b', c) - (a, b, c) - (a, b', c)$, onde $a \in A$, $b, b' \in B$ e $c \in C$;

(iii) $(a, b, c + c') - (a, b, c) - (a, b, c')$, onde $a \in A$, $b \in B$ e $c, c' \in C$;

(iv) $(ar, b, c) - (a, rb, c)$, onde $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e $r \in R$;

(v) $(a, bs, c) - (a, b, sc)$, onde $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e $s \in S$.

Temos que $\frac{F}{S}$ é um grupo (aditivo) abeliano e portanto um $\mathbb{Z}$-módulo com adição definida por $[(a, b, c) + S] + [(a', b', c') + S] = [(a, b, c) + (a', b', c')] + S$ e multiplicação por escalar definida por $\lambda[(a, b, c) + S] = (\lambda(a, b, c)) + S$, com $\lambda \in \mathbb{Z}$. Denotemos o grupo quociente $\frac{F}{S}$ por $A \otimes_R B \otimes_S C$ e a classe $(a, b, c) + S$ por $a \otimes b \otimes c$. Seja a função $h : A \times B \times C \longrightarrow A \otimes_R B \otimes_S C$ definida por $(a, b, c) \mapsto a \otimes b \otimes c$. Verifica-se facilmente que h é triaditiva.

Seguindo os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 1.1.15, concluímos o resultado. □

Observação 1.1.27. *Da demonstração do teorema anterior, temos que:*

(i) $(a_1 + a_2) \otimes b \otimes c = (a_1 \otimes b \otimes c) + (a_2 \otimes b \otimes c)$, *para quaisquer* $a_1, a_2 \in A$, $b \in B$ *e* $c \in C$;

(ii) *$a \otimes (b_1 + b_2) \otimes c = (a \otimes b_1 \otimes c) + (a \otimes b_2 \otimes c)$, para quaisquer $a \in A$, $b_1, b_2 \in B$ e $c \in C$;*

(iii) *$a \otimes b \otimes (c_1 + c_2) = (a \otimes b \otimes c_1) + (a \otimes b \otimes c_2)$, para quaisquer $a \in A$, $b \in B$ e $c_1, c_2 \in C$;*

(iv) *$ar \otimes b \otimes c = a \otimes rb \otimes c$, para quaisquer $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e $r \in R$;*

(v) *$a \otimes bs \otimes c = a \otimes b \otimes sc$, para quaisquer $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e $s \in S$;*

(vi) *um elemento genérico de $A \otimes_R B \otimes_S C$ é da forma $\sum a_i \otimes b_i \otimes c_i$.*

Teorema 1.1.28. *Sejam A um R-módulo à direita, B um $(R$-$S)$-bimódulo e C um S-módulo à esquerda. Então $(A \otimes_R B) \otimes_S C \cong A \otimes_R B \otimes_S C \cong A \otimes_R (B \otimes_S C)$ (como $\mathbb{Z}$-módulos) com $(a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes b \otimes c$ e $a \otimes b \otimes c \mapsto a \otimes (b \otimes c)$ respectivamente.*

Demonstração. Seja $f : A \times B \times C \longrightarrow (A \otimes_R B) \otimes_S C$ com $f(a, b, c) = (a \otimes b) \otimes c$. Verifica-se facilmente que f é triaditiva (basta usar as propriedades do produto tensorial).

Pela propriedade universal da Definição 1.1.24, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $f' : A \otimes_R B \otimes_S C \longrightarrow (A \otimes_R B) \otimes_S C$, tal que $f' \circ \pi = f$, onde $\pi : (a, b, c) \mapsto a \otimes b \otimes c$. Daí $f' : a \otimes b \otimes c \mapsto (a \otimes b) \otimes c$;

Consideremos a aplicação $g : (A \otimes_R B) \times C \longrightarrow A \otimes_R B \otimes_S C$ definida por $g(\sum a_i \otimes b_i, c) = \sum a_i \otimes b_i \otimes c$. Seja $\sum a_i \otimes b_i = \sum a'_j \otimes b'_j$. Logo $\sum (a_i, b_i) - \sum (a'_j, b'_j)$ é combinação $\mathbb{Z}$ linear de elementos de uma das três formas a seguir:

(i) $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$, com $a, a' \in A$ e $b \in B$;

(ii) $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$, com $a \in A$ e $b, b' \in B$;

(iii) $(ar, b) - (a, rb)$, com $a \in A$, $b \in B$ e $r \in R$.

Para cada $c \in C$ (c **fixo**), existe uma bijeção entre $A \times B$ e $A \times B \times \{c\}$ definida por $(a, b) \mapsto (a, b, c)$. Esta bijeção nos permite construir um grupo G (aditivo) abeliano livre com base $A \times B \times \{c\}$ (ver demonstração do Teo 1.1.9). Portanto $\sum (a_i, b_i, c) - \sum (a'_j, b'_j, c)$ é combinação $\mathbb{Z}$ linear de elementos de uma das três formas:

(i) $(a + a', b, c) - (a, b, c) - (a', b, c)$, com $a, a' \in A$ e $b \in B$;

(ii) $(a, b + b', c) - (a, b, c) - (a, b', c)$, com $a \in A$ e $b, b' \in B$;

(iii) $(ar, b, c) - (a, rb, c)$, com $a \in A$, $b \in B$ e $r \in R$.

Isto mostra que $\sum a_i \otimes b_i \otimes c = \sum a'_j \otimes b'_j \otimes c$, ou seja, g está bem definida. Mostra-se facilmente que g é S-biaditiva.

Pela propriedade universal da Definição 1.1.12, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $g' : (A \otimes_R B) \otimes_S C \longrightarrow A \otimes_R B \otimes_S C$, tal que $g' \circ \pi' = g$, onde $\pi' : (\sum a_i \otimes b_i, c) \mapsto (\sum a_i \otimes b_i) \otimes c$. Daí $g' : (a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes b \otimes c$. Utilizando a técnica da demonstração do Teorema 1.1.14, concluímos que $(A \otimes_R B) \otimes_S C \cong A \otimes_R B \otimes_S C$ com $(a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes b \otimes c$. Analogamente, temos que $A \otimes_R (B \otimes_S C) \cong A \otimes_R B \otimes_S C$ com $a \otimes (b \otimes c) \mapsto a \otimes b \otimes c$. $\square$

Observação 1.1.29. *Por indução, segue-se a associatividade do produto tensorial para o caso geral.*

1.2 Álgebra

Sejam K um anel comutativo com unidade e A um anel com unidade. Dizemos que A é uma álgebra associativa e unitária sobre K ou uma K-álgebra associativa e unitária quando A é um K-módulo e vale:

$$\lambda(a_1 a_2) = (\lambda a_1) a_2 = (a_1 \lambda) a_2 = a_1(\lambda a_2) = a_1(a_2 \lambda) = (a_1 a_2)\lambda,$$

para quaisquer $\lambda \in K$ e $a_1, a_2 \in A$.

Uma definição alternativa para uma K-álgebra associativa e unitária pode ser dada em termos de diagramas.

Definição 1.2.1. *Seja K um anel comutativo com unidade. Uma K-álgebra (ou uma álgebra sobre K) unitária e associativa é uma tripla (A, m, μ), onde A é um K-módulo, $m : A \otimes_K A \longrightarrow A$ e $\mu : K \longrightarrow A$ são funções K-lineares chamadas de multiplicação e unidade respectivamente, tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_K A \otimes_K A \arrow[r, "m \otimes id_A"] \arrow[d, "id_A \otimes m"'] & A \otimes_K A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes_K A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}$$

(I)

$$\begin{tikzcd}
K \otimes_K A \arrow[r, "\mu \otimes id_A"] \arrow[dr, "\psi \cong"'] & A \otimes_K A \arrow[d, "m"] & A \otimes_K K \arrow[l, "id_A \otimes \mu"'] \arrow[dl, "\cong \phi"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

(II)

Notemos que na definição acima foi usado o Teorema 1.1.17.

É comum fazemos referência a uma K-álgebra associativa e unitária (A, m, μ) simplesmente como uma K-álgebra associativa e unitária A, ficando subentendidas as funções K-lineares m e μ.

Observação 1.2.2. *Decorrem da definição acima:*

(i) *Como $m : A \otimes_K A \longrightarrow A$ é K-linear, segue-se que $m(\lambda(a_1 \otimes a_2)) = \lambda m(a_1 \otimes a_2) = \lambda(a_1.a_2) = \lambda(a_1 a_2)$, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ e $\lambda \in K$ (denotamos aqui $m(a_1 \otimes a_2)$ por $a_1.a_2$ ou simplesmente por $a_1 a_2$).*

nota: Como K é comutativo, basta supor, por exemplo, A um K-módulo à esquerda e definir $a\lambda = \lambda a$, para todo $a \in A$ e para todo $\lambda \in K$. Verifica-se que A é um K-módulo à direita e, portanto, um K-módulo.

(ii) *Como A é um K-módulo, então A é $(K$-$K)$-bimódulo.*

(iii) *Temos que, para todo $a \in A$, valem:*

$m \circ (\mu \otimes id_A)(1_K \otimes a) = m(\mu(1_K) \otimes a) = \mu(1_K).a;$

$m \circ (id_A \otimes \mu)(a \otimes 1_K) = m(a \otimes \mu(1_K)) = a.\mu(1_K);$

Ainda, pelo diagrama (II) da definição acima, temos que, para todo $a \in A$, valem:

$a = 1_K a = \psi(1_K \otimes a) = m \circ (\mu \otimes id_A)(1_K \otimes a) = \mu(1_K).a;$

$a = a 1_K = \phi(a \otimes 1_K) = m \circ (id_A \otimes \mu)(a \otimes 1_K) = a.\mu(1_K);$

Por isto, $\mu(1_K) = 1_A$.

Exemplo 1.2.3. *Sejam (A, m_A, μ_A) e (B, m_B, μ_B) K-álgebras unitárias e associativas. Então $A \otimes_K B$ é uma K-álgebra associativa e unitária com:*

$m_{A \otimes_K B} = (m_A \otimes m_B) \circ (id_A \otimes \tau \otimes id_B);$

$\mu_{A\otimes_K B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ \Phi,$

onde

$\tau : B \otimes_K A \longrightarrow A \otimes_K B$ *é* K*-linear definido por* $b \otimes a \mapsto a \otimes b$*, para todo* $a \in A$ *e para todo* $b \in B$ *(ver Teorema 1.1.22);*

$\Phi : K \longrightarrow K \otimes_K K$ *é* K*-linear definido por* $k \mapsto 1_K \otimes k (= k \otimes 1_K)$*, para todo* $k \in K$ *(ver Exemplo 1.1.21).*

De fato, temos que, para todo $a, a', a'' \in A$ *e para todo* $b, b', b'' \in B$*, valem:*

$$\begin{aligned}
m_{A\otimes_K B} \circ (id_{A\otimes_K B} \otimes m_{A\otimes_K B})(a \otimes b \otimes a' \otimes b' \otimes a'' \otimes b'') \\
&= m_{A\otimes_K B}(a \otimes b \otimes (m_{A\otimes_K B}(a' \otimes b' \otimes a'' \otimes b''))) \\
&= m_{A\otimes_K B}(a \otimes b \otimes a'a'' \otimes b'b'') = a(a'a'') \otimes b(b'b'');
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{A\otimes_K B} \circ (m_{A\otimes_K B} \otimes id_{A\otimes_K B})(a \otimes b \otimes a' \otimes b' \otimes a'' \otimes b'') \\
&= m_{A\otimes_K B}(m_{A\otimes_K B}(a \otimes b \otimes a' \otimes b') \otimes a'' \otimes b'') \\
&= m_{A\otimes_K B}(aa' \otimes bb' \otimes a'' \otimes b'') = (aa')a'' \otimes (bb')b'' \\
&= a(a'a'') \otimes b(b'b'').
\end{aligned}$$

Temos também que, para quaisquer $a \in A$, $b \in B$ *e* $\lambda \in K$*, valem:*

$$\begin{aligned}
m_{A\otimes_K B} \circ (\mu_{A\otimes_K B} \otimes id_{A\otimes_K B})(\lambda \otimes a \otimes b) \\
&= m_{A\otimes_K B}(\mu_A \otimes \mu_B(1_K \otimes \lambda) \otimes a \otimes b) \\
&= m_{A\otimes_K B}(1_A \otimes \lambda 1_B \otimes a \otimes b) = a \otimes \lambda b \\
&= (\lambda a) \otimes b = \lambda(a \otimes b);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{A\otimes_K B} \circ (id_{A\otimes_K B} \otimes \mu_{A\otimes_K B})(a \otimes b \otimes \lambda) \\
&= m_{A\otimes_K B}(a \otimes b \otimes (\mu_A \otimes \mu_B(1_K \otimes \lambda))) \\
&= m_{A\otimes_K B}(a \otimes b \otimes 1_A \otimes \lambda 1_B) \\
&= a \otimes (b\lambda) = (a \otimes b)\lambda = \lambda(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Da K*-linearidade das composições acima, segue-se que* $(A \otimes_K B, m_{A\otimes_K B}, \mu_{A\otimes_K B})$ *é uma* K*-álgebra.*

De agora em diante, salvo menção em contrário, toda K-álgebra (ou simplesmente, toda álgebra) será uma K-álgebra associativa e unitária.

Sejam A e B duas K-álgebras. Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de K-álgebras quando f for K-linear e tivermos $f(ab) = f(a)f(b)$, para quaisquer $a, b \in A$, e $f(1_A) = 1_B$.

Do mesmo modo que definimos uma K-álgebra em termos de diagramas, podemos definir um homomorfismo de K-álgebras (de modo equivalente à descrição acima) em termos de diagramas.

Definição 1.2.4. *Sejam (A, m_A, μ_A) e (B, m_B, μ_B) K-álgebras e $f : A \to B$ uma aplicação. Dizemos que f é um homomorfismo de K-álgebras se f é K-linear e os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_K A \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "f \otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \otimes_K B \arrow[r, "m_B"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] & \\
 & B \\
K \arrow[uu, "\mu_A"] \arrow[ur, "\mu_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.2.5. *Sejam A, B, C e D K-álgebras e $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$ homomorfismo de K-álgebras. Então $f \otimes g : A \otimes_K C \longrightarrow B \otimes_K D$ é um homomorfismo de K-álgebras.*

Do Teorema 1.1.17, segue-se que $f \otimes g$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos. Como A, B, C e D são K-álgebras, então $A \otimes_K C$, $B \otimes_K D$ são K-álgebras (ver Exemplo 1.2.3). Temos também que $f \otimes g$ é K-linear.

Afirmamos que:

(i) $(f \otimes g) \circ m_{A \otimes_K C} = m_{B \otimes_K D} \circ (f \otimes g) \otimes (f \otimes g)$;

(ii) $(f \otimes g) \circ \mu_{A \otimes_K C} = \mu_{B \otimes_K D}$.

De fato, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ e $c_1, c_2 \in C$, valem:

$$(f \otimes g) \circ m_{A \otimes_K C}(a_1 \otimes c_1 \otimes a_2 \otimes c_2) = f \otimes g(a_1 a_2 \otimes c_1 c_2) = f(a_1 a_2) \otimes g(c_1 c_2);$$

$$\begin{aligned} m_{B \otimes_K D} \circ ((f \otimes g) \otimes (f \otimes g))(a_1 \otimes c_1 \otimes a_2 \otimes c_2) \\ &= m_{B \otimes_K D}(f(a_1) \otimes g(c_1) \otimes f(a_2) \otimes g(c_2)) = f(a_1) f(a_2) \otimes g(c_1) g(c_2) \\ &= f(a_1 a_2) \otimes g(c_1 c_2). \end{aligned}$$

*Portanto, vale a igualdade **(i)**.*

Temos também que:

$$\begin{aligned} (f \otimes g) \circ \mu_{A \otimes_K C}(1_K) &= (f \otimes g) \circ (\mu_A \otimes \mu_C)(1_K \otimes 1_K) \\ &= f \otimes g(\mu_A(1_K) \otimes \mu_C(1_K)) = f \otimes g(1_A \otimes 1_C) \\ &= f(1_A) \otimes g(1_C); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{B \otimes_K D}(1_K) &= \mu_B \otimes \mu_D(1_K \otimes 1_K) = \mu_B(1_K) \otimes \mu_D(1_K) = 1_B \otimes 1_D \\ &= f(1_A) \otimes g(1_C). \end{aligned}$$

*Da K-linearidade das composições acima, obtemos o item **(ii)**.*

Capítulo 2

ÁLGEBRA DE HOPF

Neste capítulo, seguem-se os demais pré-requisitos necessários ao estudo da envolvente de uma ação parcial de Hopf. Apresentamos inicialmente as definições de coálgebra, biálgebra, álgebra de Hopf, exemplificando as mesmas. A seguir, apresentamos a notação sigma (ou notação de Sweedler) e algumas propriedades de coálgebras e álgebras de Hopf expressas com esta notação. Definimos o produto de convolução, mostrando que o mesmo define em $Hom(C, A)$ uma álgebra. A última seção é destinada ao estudo do dual algébrico H^* de uma álgebra de Hopf H. A construção deste capítulo baseia-se nos textos encontrados em [1], [6] e [16].

2.1 Coálgebra

Com a inversão das setas nos diagramas da definição de K-álgebras surge o conceito de uma K-coálgebra.

Definição 2.1.1. *Seja K um anel comutativo com unidade. Uma coálgebra sobre K (ou uma K-coálgebra) é uma tripla (C, Δ, ε), onde C é um K-módulo, $\Delta : C \longrightarrow C \otimes_K C$ e $\varepsilon : C \longrightarrow K$ são funções K-lineares chamadas de comultiplicação e counidade respectivamente, tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes_K C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes_K C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & C \otimes_K C \otimes_K C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \otimes_K C & C \otimes_K C \arrow[l, "\varepsilon \otimes id_C"'] \arrow[r, "id_C \otimes \varepsilon"] & C \otimes_K K \\ & C \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

É usual nos referirmos a uma K-coálgebra (C, Δ, ε) simplesmente como uma K-coálgebra C (ou ainda como uma coálgebra C), ficando subentendidas as funções K-lineares Δ e ε.

A definição de um homomorfismo de K-coálgebras decorre da inversão das setas na Definição 1.2.4.

Definição 2.1.2. *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ K-coálgebras. Então uma função K-linear $f : C \longrightarrow D$ é dita um homomorfismo de K-coálgebras se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes_K C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes_K D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K & \\ & D \arrow[ul, "\varepsilon_D"'] \\ C \arrow[uu, "\varepsilon_C"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Exemplo 2.1.3. *Sejam $\emptyset \neq S$ um conjunto e K um anel comutativo com unidade. Definamos $C = KS$ como o conjunto de somas formais finitas do tipo $x = \sum\limits_{s \in S} \lambda_s s$, onde $\lambda_s \in K$.*

Definimos em KS as seguintes operações:

(a) $\lambda x = \lambda \sum\limits_{s \in S} \lambda_s s = \sum\limits_{s \in s} (\lambda \lambda_s) s$;

(b) $x + y = \sum\limits_{s \in S} (\lambda_s + \lambda'_s) s$, *onde* $x = \sum\limits_{s \in S} \lambda_s s$ *e* $y = \sum\limits_{s \in S} \lambda'_s s$;

Temos que $C = KS$ é uma coálgebra com:

i. *comultiplicação $\Delta : C \longrightarrow C \otimes_K C$ definida por $\Delta(s) = s \otimes s$ que é estendida linearmente sobre todos os elementos de C, isto é, $\Delta(\sum\limits_{s \in S} \lambda_s s) = \sum\limits_{s \in S} \lambda_s \Delta(s) = \sum\limits_{s \in S} \lambda_s (s \otimes s)$;*

ii. *counidade $\varepsilon : C \longrightarrow K$ definida por $\varepsilon(s) = 1_K$ que é estendida linearmente sobre todos os elementos de C, isto é, $\varepsilon(\sum\limits_{s \in S} \lambda_s s) = \sum\limits_{s \in S} \lambda_s \varepsilon(s) = \sum\limits_{s \in S} \lambda_s$.*

*De fato, por **(a)** e **(b)** acima, temos que C é um K-módulo à esquerda. Como K é comutativo, segue-se que C é um K-módulo e, portanto, um (K-K)-bimódulo. Então, pelo Teorema 1.1.20, temos que $C \otimes_K C$ é um K-módulo.*

Notemos também que como S é uma base de C, então $S \hookrightarrow C$ via $s = 1_K s$, para todo $s \in S$. Daí temos que $\lambda(s \otimes s) = \lambda(1_K s \otimes s) = (\lambda s) \otimes s = (s\lambda) \otimes s = s \otimes (\lambda s) = s \otimes (s\lambda) = (s \otimes s)\lambda$, para todo $\lambda \in K$.

Verifica-se facilmente que Δ e ε são K-lineares.

Temos que:

$(id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(s) = (id_C \otimes \Delta)(s \otimes s) = s \otimes \Delta(s) = s \otimes (s \otimes s)$;

$(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta(s) = (\Delta \otimes id_C)(s \otimes s) = \Delta(s) \otimes s = (s \otimes s) \otimes s = s \otimes (s \otimes s)$;

$(\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta(s) = (\varepsilon \otimes id_C)(s \otimes s) = \varepsilon(s) \otimes s = 1_K \otimes s$;

$(id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta(s) = (id_C \otimes \varepsilon)(s \otimes s) = s \otimes \varepsilon(s) = s \otimes 1_K$.

Da K-linearidade das composições acima, segue-se que (C, Δ, ε) é uma K-coálgebra.

2.2 Biálgebra

Existem estruturas algébricas que são álgebras e coálgebras simultaneamente. Quando estas estruturas têm uma certa compatibilidade, dizemos que as mesmas são biálgebras.

Definição 2.2.1. *Dizemos que uma héptupla $(A, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra sobre um anel K comutativo com unidade quando:*

(i) (A, m, μ) *é uma K-álgebra;*

(ii) (A, Δ, ε) *é uma K-coálgebra;*

(iii) $\Delta : A \longrightarrow A \otimes_K A$ *e* $\varepsilon : A \longrightarrow K$ *são homomorfismos de K-álgebras.*

Exemplo 2.2.2. *Sejam G um grupo e K um anel comutativo com unidade. Definamos $H = KG$ como o conjunto de somas formais finitas do tipo $x = \sum_{g \in G} \lambda_g g$, onde $\lambda_g \in K$.*

Definimos em KG as seguintes operações:

(a) $\lambda x = \lambda \sum\limits_{g\in G} \lambda_g g = \sum\limits_{g\in G} (\lambda\lambda_g)g$;

(b) $x + y = \sum\limits_{g\in G} (\lambda_g + \lambda'_g)g$, *onde* $x = \sum\limits_{g\in G} \lambda_g g$ *e* $y = \sum\limits_{g\in G} \lambda'_g g$;

(c) $\lambda_g g.\lambda_h h = (\lambda_g\lambda_h)(gh)$.

Temos que $H = KG$ *é uma biálgebra (com unidade* $1_H = 1_K 1_G$*) sobre* K *com:*

i. *multiplicação* $m : H \otimes_K H \longrightarrow H$ *definida por* $m(\lambda_g g \otimes \lambda_h h) = (\lambda_g\lambda_h)(gh)$, *para quaisquer* λ_g, $\lambda_h \in K$ *e* $g, h \in G$;

ii. *unidade* $\mu : K \longrightarrow H$ *definida por* $\mu(\lambda) = \lambda 1_G$;

iii. *comultiplicação* $\Delta : H \longrightarrow H \otimes_K H$ *definida por* $\Delta(g) = g \otimes g$ *que é estendida linearmente sobre todos os elementos de* KG, *isto é,* $\Delta(\sum\limits_{g\in G} \lambda_g g) = \sum\limits_{g\in G} \lambda_g \Delta(g) = \sum\limits_{g\in G} \lambda_g (g \otimes g)$;

iv. *counidade* $\varepsilon : H \longrightarrow K$ *definida por* $\varepsilon(g) = 1_K$ *que é estendida linearmente sobre todos os elementos de* KG, *isto é,* $\varepsilon(\sum\limits_{g\in G} \lambda_g g) = \sum\limits_{g\in G} \lambda_g \varepsilon(g) = \sum\limits_{g\in G} \lambda_g$.

De fato, do Exemplo 2.1.3, temos que (H, Δ, ε) *é uma* K*-coálgebra. Temos também que* H *é uma* K*-álgebra com multiplicação* $m : H \otimes_K H \longrightarrow H, m(\lambda_g g \otimes \lambda_h h) = (\lambda_g\lambda_h)(gh)$ *(do item* ***(c)****) e com unidade* $\mu : K \longrightarrow H, \mu(\lambda) = \lambda 1_G$.

Observemos também que como G *é uma base de* H, *temos que* $G \hookrightarrow H$ *via* $g = 1_K g$, *para todo* $g \in G$. *Em particular,* $1_G = 1_K 1_G$.

Dizemos que KG *é uma álgebra de grupo.*

Devemos mostrar agora que:

$\Delta \circ m_H = m_{H\otimes_K H} \circ (\Delta \otimes \Delta)$;

$\Delta \circ \mu_H = \mu_{H\otimes_K H}$;

$\varepsilon \circ m_H = m_K \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)$;

$\varepsilon \circ \mu_H = \mu_K$,

onde $m_H = m$, $\mu_H = \mu$, m_K *é a multiplicação de* K *definida por* $\lambda_1 \otimes \lambda_2 \mapsto \lambda_1\lambda_2$, $\mu_K = id_K$ *é a unidade de* K, $m_{H\otimes_K H} = (m_H \otimes m_H) \circ (id_H \otimes \tau \otimes id_H)$ *e* $\mu_{H\otimes H} = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ \Phi$ *com* $\Phi : \lambda \mapsto 1_K \otimes \lambda$, *para todo* $\lambda \in K$ *(ver Exemplo 1.2.3).*

Sejam $g, h \in G$. Temos que:

$$\Delta \circ m_H(g \otimes h) = \Delta(gh) = gh \otimes gh;$$

$$\begin{aligned} m_{H\otimes_K H} \circ (\Delta \otimes \Delta)(g \otimes h) &= m_{H\otimes_K H}(\Delta(g) \otimes \Delta(h)) \\ &= m_{H\otimes_K H}((g \otimes g) \otimes (h \otimes h)) = gh \otimes gh; \end{aligned}$$

$$\Delta \circ \mu_H(\lambda) = \Delta(\lambda 1_G) = \lambda\Delta(1_G) = \lambda(1_G \otimes 1_G);$$

$$\mu_{H\otimes_K H}(\lambda) = (\mu_H \otimes \mu_H)(1_K \otimes \lambda) = 1_G \otimes (\lambda 1_G) = \lambda(1_G \otimes 1_G);$$

$$\varepsilon \circ m_H(g \otimes h) = \varepsilon(gh) = 1_K;$$

$$m_K \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)(g \otimes h) = m_K(\varepsilon(g) \otimes \varepsilon(h)) = m_K(1_K \otimes 1_K) = 1_K;$$

$$\varepsilon \circ \mu_H(\lambda) = \varepsilon(\lambda 1_G) = \lambda\varepsilon(1_G) = \lambda 1_K = \lambda;$$

$$\mu_K(\lambda) = \lambda.$$

Da K-linearidade das composições acima, temos que $\Delta : H \longrightarrow H \otimes_R H$ e $\varepsilon : H \longrightarrow K$ são homomorfismos de K-álgebras.

Logo KG é uma biálgebra sobre K.

2.3 Álgebra de Hopf

Definição 2.3.1. *Dizemos que uma biálgebra $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ sobre um anel K comutativo com unidade é uma álgebra de Hopf se existir uma função K-linear $S : H \longrightarrow H$, chamada de antípoda de H, tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} H \otimes_K H \arrow[d, "S \otimes id_H"] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mu o \varepsilon"] & H \otimes_K H \arrow[d, "id_H \otimes S"] \\ H \otimes_K H \arrow[r, "m"] & H & H \otimes_K H \arrow[l, "m"'] \end{tikzcd}$$

Exemplo 2.3.2. *$H = KG$ é uma álgebra de Hopf com antípoda $S(g) = g^{-1}$ que é estendida linearmente sobre todos os elementos de KG , isto é, $S(\sum_{g\in G} \lambda_g g) = \sum_{g\in G} \lambda_g S(g) = \sum_{g\in G} \lambda_g g^{-1}$.*

De fato, pelo Exemplo 2.2.2, temos que KG é uma biálgebra. Temos também *que:*

$$\begin{aligned}
m \circ (S \otimes id_H) \circ \Delta(\sum_{g \in G} \lambda_g g) &= m \circ (S \otimes id_H)(\sum_{g \in G} \lambda_g \Delta(g)) \\
&= m \circ (S \otimes id_H)(\sum_{g \in G} \lambda_g (g \otimes g)) = m(\sum_{g \in G}(S \otimes id_H)(\lambda_g g \otimes g)) \\
&= m(\sum_{g \in G} S(\lambda_g g) \otimes g) = \sum_{g \in G} m(\lambda_g g^{-1} \otimes g) \\
&= \sum_{g \in G}(\lambda_g 1_K)(g^{-1}g) = \sum_{g \in G} \lambda_g 1_G;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m \circ (id_H \otimes S) \circ \Delta(\sum_{g \in G} \lambda_g g) &= m \circ (id_H \otimes S)(\sum_{g \in G} \lambda_g \Delta(g)) \\
&= m \circ (id_H \otimes S)(\sum_{g \in G} \lambda_g (g \otimes g)) = m(\sum_{g \in G}(id_H \otimes S)(\lambda_g g \otimes g)) \\
&= m(\sum_{g \in G} \lambda_g g \otimes g^{-1}) = \sum_{g \in G} m(\lambda_g g \otimes g^{-1}) = \sum_{g \in G} \lambda_g 1_G;
\end{aligned}$$

$\mu \circ \varepsilon(\sum_{g \in G} \lambda_g g) = \mu(\sum_{g \in G} \lambda_g) = \sum_{g \in G} \lambda_g 1_G.$

Logo $H = KG$ é uma álgebra de Hopf.

Exemplo 2.3.3. *Seja H_4 o espaço vetorial de base $\beta = \{1, g, x, xg\}$ sobre um corpo K, onde $char(K) \neq 2$, isto é, K não contém um subcorpo isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Temos que H_4 é uma álgebra de Hopf chamada de álgebra de Sweedler de dimensão 4 com:*

(i) *estrutura de K-álgebra dada por:*

$(\lambda e)(\lambda' e') = (\lambda\lambda')(ee')$, *com* $\lambda, \lambda' \in K$, $e, e' \in \beta$, *onde* $g^2 = 1$, $x^2 = 0$ *e* $xg = -gx$;

(ii) *estrutura de K-coálgebra com comultiplicação Δ, onde $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\Delta(g) = g \otimes g$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, $\Delta(xg) = xg \otimes g + 1 \otimes xg$ e com counidade ε, onde $\varepsilon(1) = 1_K$, $\varepsilon(g) = 1_K$, $\varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(xg) = 0$;*

(iii) *antípoda S, onde $S(1) = 1$, $S(g) = g$, $S(x) = xg$ e $S(xg) = -x$.*

De fato, temos a seguinte a tabela de multiplicação:

	1	g	x	xg
1	1	g	x	xg
g	g	1	$-xg$	$-x$
x	x	$-gx$	0	0
xg	xg	x	0	0

Admitindo-se a distributividade da multiplicação em relação à adição em H_4, *obtemos uma função* K*-biaditiva* $f : H_4 \times H_4 \longrightarrow H_4$ *com* $f(\lambda e, \lambda' e') = (\lambda e)(\lambda' e') = (\lambda\lambda')(ee')$, *para quaisquer* $e, e' \in \beta$ *e* $\lambda, \lambda' \in K$. *Da propriedade universal do produto tensorial (ver Definição 1.1.12), existe uma única função* $\mathbb{Z}$*-linear* $m : H_4 \otimes H_4 \longrightarrow H_4$ *com* $\lambda e \otimes \lambda' e' \mapsto (\lambda\lambda')(ee')$. *Como* K *é um corpo, então* m *é* K*-linear. Seja* $\mu : K \longrightarrow H_4$ *definida por* $\mu(\lambda) = \lambda 1$. *Verifica-se que* m *e* μ *satisfazem a Definição 1.2.1. Portanto* H_4 *é uma* K*-álgebra.*

Dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in K$, *verifica-se facilmente que:*

$(id \otimes \Delta) \circ \Delta(\lambda_1 1 + \lambda_2 g + \lambda_3 x + \lambda_4 xg) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(\lambda_1 1 + \lambda_2 g + \lambda_3 x + \lambda_4 xg)$;

$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(\lambda_1 1 + \lambda_2 g + \lambda_3 x + \lambda_4 xg) = 1_K \otimes (\lambda_1 1 + \lambda_2 g + \lambda_3 x + \lambda_4 xg)$;

$(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(\lambda_1 1 + \lambda_2 g + \lambda_3 x + \lambda_4 xg) = (\lambda_1 1 + \lambda_2 g + \lambda_3 x + \lambda_4 xg) \otimes 1_K$.

Logo H_4 *é uma* K*-coálgebra.*

Da Observação 1.2.2 e do Exemplo 1.2.3, segue-se que $H_4 \otimes_K H_4$ *é uma álgebra com* $1_{H_4 \otimes_K H_4} = 1 \otimes 1$.

Sejam $u = \lambda_1 1 + \lambda_2 g + \lambda_3 x + \lambda_4 xg$ *e* $v = \lambda'_1 1 + \lambda'_2 g + \lambda'_3 x + \lambda'_4 xg$. *Temos que:*

$\Delta(u.v) = \lambda_1\lambda'_1(1 \otimes 1) + \lambda_1\lambda'_2(g \otimes g) + \lambda_1\lambda'_3(x \otimes 1 + g \otimes x) + \lambda_1\lambda'_4(xg \otimes g + 1 \otimes xg) + \lambda_2\lambda'_1(g \otimes g) + \lambda_2\lambda'_2(1 \otimes 1) - \lambda_2\lambda'_3(xg \otimes g + 1 \otimes xg) - \lambda_2\lambda'_4(x \otimes 1 + g \otimes x) + \lambda_3\lambda'_1(x \otimes 1 + g \otimes x) + \lambda_3\lambda'_2(xg \otimes g + 1 \otimes xg) + \lambda_4\lambda'_1(xg \otimes g + 1 \otimes xg) + \lambda_4\lambda'_2(x \otimes 1 + g \otimes x)$;

Por outro lado,

$\Delta(u).\Delta(v) = (\lambda_1(1 \otimes 1) + \lambda_2(g \otimes g) + \lambda_3(x \otimes 1 + g \otimes x) + \lambda_4(xg \otimes g + 1 \otimes xg))(\lambda'_1(1 \otimes 1) + \lambda'_2(g \otimes g) + \lambda'_3(x \otimes 1 + g \otimes x) + \lambda'_4(xg \otimes g + 1 \otimes xg)) = \lambda_1\lambda'_1(1 \otimes 1) + \lambda_1\lambda'_2(g \otimes g) + \lambda_1\lambda'_3(x \otimes 1 + g \otimes x) + \lambda_1\lambda'_4(xg \otimes g + 1 \otimes xg) + \lambda_2\lambda'_1(g \otimes g) + \lambda_2\lambda'_2(1 \otimes 1) - \lambda_2\lambda'_3(xg \otimes g + 1 \otimes xg) - \lambda_2\lambda'_4(x \otimes 1 + g \otimes x) + \lambda_3\lambda'_1(x \otimes 1 + g \otimes x) + \lambda_3\lambda'_2(xg \otimes g + 1 \otimes xg) + \lambda_4\lambda'_1(xg \otimes g + 1 \otimes xg) + \lambda_4\lambda'_2(x \otimes 1 + g \otimes x)$;

$\Delta(1) = 1 \otimes 1 = 1_{H_4 \otimes_K H_4}$;

Analogamente ao desenvolvimento da aplicação de Δ em $u.v \in H_4$, concluímos que $\varepsilon(u.v) = \varepsilon(u).\varepsilon(v)$;

$\varepsilon(1) = 1_K$;

Temos também:

$$
\begin{aligned}
m \circ & (S \otimes id) \circ \Delta(\lambda_1 1 + \lambda_2 g + \lambda_3 x + \lambda_4 xg) \\
&= m \circ (S \otimes id)(\lambda_1 1 \otimes 1 + \lambda_2 g \otimes g + \lambda_3 x \otimes 1 + \lambda_3 g \otimes x + \lambda_4 xg \otimes g + \lambda_4 1 \otimes xg) \\
&= m(\lambda_1 1 \otimes 1 + \lambda_2 g \otimes g + \lambda_3 xg \otimes 1 + \lambda_3 g \otimes x - (\lambda_4 x \otimes g) + \lambda_4 1 \otimes xg) \\
&= \lambda_1 1 + \lambda_2 1 + \lambda_3 xg - \lambda_3 xg - \lambda_4 xg + \lambda_4 xg = \lambda_1 1 + \lambda_2 1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m \circ & (id \otimes S) \circ \Delta(\lambda_1 1 + \lambda_2 g + \lambda_3 x + \lambda_4 xg) \\
&= m \circ (id \otimes S)(\lambda_1 1 \otimes 1 + \lambda_2 g \otimes g + \lambda_3 x \otimes 1 + \lambda_3 g \otimes x + \lambda_4 xg \otimes g + \lambda_4 1 \otimes xg) \\
&= m(\lambda_1 1 \otimes 1 + \lambda_2 g \otimes g + \lambda_3 x \otimes 1 + \lambda_3 g \otimes xg + \lambda_4 xg \otimes g - (\lambda_4 1 \otimes x)) \\
&= \lambda_1 1 + \lambda_2 1 + \lambda_3 x - \lambda_3 x + \lambda_4 x - \lambda_4 x = \lambda_1 1 + \lambda_2 1;
\end{aligned}
$$

$$\mu \circ \varepsilon(\lambda_1 1 + \lambda_2 g + \lambda_3 x + \lambda_4 xg) = \mu(\lambda_1 1_K + \lambda_2 1_K) = \lambda_1 1 + \lambda_2 1.$$

Logo $(H_4, m, \mu, \Delta, \varepsilon, S)$ é uma álgebra de Hopf (sobre o corpo K).

Observação 2.3.4. *Como a $char(K) \neq 2$, podemos tomar a base $\beta' = \{e_1, e_2, h_1, h_2\}$ para H_4, onde $e_1 = (1+g)/2$, $e_2 = (1-g)/2$, $h_1 = xe_1$, $h_2 = xe_2$. Usaremos esta base no Capítulo 4 para demonstrarmos que H_4 atua sobre si mesma.*

2.4 Notação Sigma

Em geral, a notação usada para operações de K-coálgebras não é concisa como a usada para operações de K-álgebras. A notação sigma é útil na simplificação de várias operações que envolvam K-coálgebras. Dados uma K-coálgebra (C, Δ, ε) e $c \in C$, escrevemos: $\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ que também é escrito simplesmente por $\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$.

Definição 2.4.1. *Seja (C, Δ, ε) uma K-coálgebra. Denotamos por*

$\Delta_1 = \Delta$ e, em geral, $\Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$, para $n \geq 2$, onde $I = id_C$ e $I^s = I \otimes I^{s-1}$, para $s \geq 1$.

Proposição 2.4.2. *Seja (C, Δ, ε) uma K-coálgebra. Então, para quaisquer $n \geq 2$ e $p \in \{0, \ldots, n-1\}$, vale:*

$$\Delta_n = (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1}.$$

Demonstração. A prova se faz por indução sobre n. Da definição de K-coálgebra, a equação acima vale para $n = 2$ e para todo $p \in \{0, 1\}$ (denotamos $I^0 \otimes \Delta = \Delta \otimes I^0 = \Delta$). Suponhamos, por indução, que $\Delta_n = (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1}$, para $p \in \{0, \ldots, n-1\}$. Equivalentemente, podemos supor que $\Delta_n = (I^{p-1} \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_{n-1}$, com $p \in \{1, \ldots, n\}$.

Queremos mostrar que $\Delta_{n+1} = (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_n$, para todo $p \in \{0, \ldots, n\}$.

Da hipótese de indução, da definição de K-coálgebra e do Teorema 1.1.18, temos que, para todo $p \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
(I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_n &= (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ (I^{p-1} \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= ((I^{p-1} \otimes I \otimes \Delta) \otimes I^{n-p}) \circ ((I^{p-1} \otimes \Delta) \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= \{[(I^{p-1} \otimes I \otimes \Delta) \circ (I^{p-1} \otimes \Delta)] \otimes (I^{n-p} \circ I^{n-p})\} \circ \Delta_{n-1} \\
&= \{(I^{p-1} \circ I^{p-1}) \otimes [(I \otimes \Delta) \circ \Delta] \otimes I^{n-p}\} \circ \Delta_{n-1} \\
&= \{(I^{p-1} \circ I^{p-1}) \otimes [(\Delta \otimes I) \circ \Delta] \otimes I^{n-p}\} \circ \Delta_{n-1} \\
&= \{[(I^{p-1} \otimes \Delta \otimes I) \circ (I^{p-1} \otimes \Delta)] \otimes I^{n-p}\} \circ \Delta_{n-1} \\
&= \{[(I^{p-1} \otimes \Delta \otimes I) \circ (I^{p-1} \otimes \Delta)] \otimes (I^{n-p} \circ I^{n-p})\} \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^{p-1} \otimes \Delta \otimes I \otimes I^{n-p}) \circ (I^{p-1} \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^{p-1} \otimes \Delta \otimes I^{n-p+1}) \circ \Delta_n.
\end{aligned}$$

Da relação demonstrada acima, segue-se que $(I^n \otimes \Delta) \circ \Delta_n = (I^{n-1} \otimes \Delta \otimes I) \circ \Delta_n = \ldots = (\Delta \otimes I^n) \circ \Delta_n$, sendo esta última expressão, por definição, igual a Δ_{n+1}.

Logo $\Delta_{n+1} = (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_n$, para todo $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$. □

De agora em diante, usaremos $\sum\limits_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes \ldots \otimes c_{(n+1)}$ para denotar qualquer uma das representações possíveis para $\Delta_n(c)$.

No caso $n = 2$, temos que:

$$\begin{aligned}
\Delta_2(c) &= (I \otimes \Delta)(\Delta(c)) = (I \otimes \Delta)(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes \Delta(c_{(2)}) \\
&= \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes (\sum_{(c_{(2)})} c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}}) = \sum_{(c)} \sum_{(c_{(2)})} c_{(1)} \otimes (c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}}) \\
&= \sum_{(c)} \sum_{(c_{(2)})} c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}},
\end{aligned}$$

que escrevemos simplesmente como $\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}}$.

$$\begin{aligned}
\Delta_2(c) &= (\Delta \otimes I)(\Delta(c)) = (\Delta \otimes I)(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = \sum_{(c)} \Delta(c_{(1)}) \otimes c_{(2)} \\
&= \sum_{(c)} (\sum_{(c_{(1)})} c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}}) \otimes c_{(2)} = \sum_{(c)} \sum_{(c_{(1)})} c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)},
\end{aligned}$$

que escrevemos simplesmente como $\sum c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)}$.

No caso $n = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta_3(c) &= (I \otimes I \otimes \Delta) \circ \Delta_2(c) = (I \otimes I \otimes \Delta)(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}) \\
&= \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)_{(1)}} \otimes c_{(3)_{(2)}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_3(c) &= (I \otimes \Delta \otimes I) \circ \Delta_2(c) = (I \otimes \Delta \otimes I)(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}) \\
&= \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}} \otimes c_{(3)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_3(c) &= (\Delta \otimes I \otimes I) \circ \Delta_2(c) = (\Delta \otimes I \otimes I)(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}) \\
&= \sum c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)};
\end{aligned}$$

Por analogia, temos também:

$$\begin{aligned}
\Delta_3(c) &= (I \otimes I \otimes \Delta) \circ \Delta_2(c) = (I \otimes I \otimes \Delta)(\sum c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)}) \\
&= \sum c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}};
\end{aligned}$$

$$\Delta_3(c) = (I \otimes \Delta \otimes I) \circ \Delta_2(c) = (I \otimes \Delta \otimes I)(\sum c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)})$$
$$= \sum c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)_{(1)}}} \otimes c_{(1)_{(2)_{(2)}}} \otimes c_{(2)};$$

$$\Delta_3(c) = (\Delta \otimes I \otimes I) \circ \Delta_2(c) = (\Delta \otimes I \otimes I)(\sum c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)})$$
$$= \sum c_{(1)_{(1)_{(1)}}} \otimes c_{(1)_{(1)_{(2)}}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)});$$

$$\Delta_3(c) = (I \otimes I \otimes \Delta) \circ \Delta_2(c) = (I \otimes I \otimes \Delta)(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}})$$
$$= \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)_{(1)}}} \otimes c_{(2)_{(2)_{(2)}}};$$

$$\Delta_3(c) = (I \otimes \Delta \otimes I) \circ \Delta_2(c) = (I \otimes \Delta \otimes I)(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}})$$
$$= \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)_{(1)}}} \otimes c_{(2)_{(1)_{(2)}}} \otimes c_{(2)_{(2)}};$$

$$\Delta_3(c) = (\Delta \otimes I \otimes I) \circ \Delta_2(c) = (\Delta \otimes I \otimes I)(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}})$$
$$= \sum c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}},$$

o que mostra que a notação sigma é bastante importante na simplificação de operações e obtenção de resultados referentes a coálgebras.

Vejamos alguns exemplos da aplicação da notação sigma.

Exemplo 2.4.3. *Seja (C, Δ, ε) uma K-coálgebra. Então*

(i) $c = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = \sum_{(c)} c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)})$, *para todo $c \in C$ (propriedade da counidade);*

(ii) $c = \sum \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)_{(1)}})c_{(2)_{(2)}} = \sum \varepsilon(c_{(1)_{(1)}})\varepsilon(c_{(1)_{(2)}})c_{(2)} = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)})c_{(3)}$, *para todo $c \in C$.*

De fato, da definição de K-coálgebra, temos que $(\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = \Psi$, onde $\Psi : C \longrightarrow K \otimes_K C$ definida por $c \mapsto 1_K \otimes c$ possui inversa $\Psi^{-1} : K \otimes_K C \longrightarrow C$ definida por $k \otimes c \mapsto kc$. Temos também que $(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \Upsilon$, onde $\Upsilon : C \longrightarrow C \otimes_K K$ dada por $c \mapsto c \otimes 1_K$ com inversa $\Upsilon^{-1} : C \otimes_K K \longrightarrow C$ definida por $c \otimes k \mapsto ck = kc$. Usando a notação sigma, segue-se:

$$c = \Psi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta(c) = \Psi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I)(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = \sum_{(c)} \Psi^{-1}(\varepsilon(c_{(1)}) \otimes c_{(2)})$$
$$= \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}, \text{ para todo } c \in C;$$

$$c = \Upsilon^{-1} \circ (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta(c) = \Upsilon^{-1} \circ (I \otimes \varepsilon)(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = \sum_{(c)} \Upsilon^{-1}(c_{(1)} \otimes \varepsilon(c_{(2)}))$$

$$= \sum_{(c)} c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}), \textit{ para todo } c \in C.$$

Logo $c = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = \sum_{(c)} c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)})$.

Definamos agora $f : C \times C \longrightarrow C$, *onde* $f(c_1, c_2) = \varepsilon(c_1)c_2$. *Desde que* ε *é* K*-linear, temos que* f *é* K*-biaditiva.*

Pela propriedade universal da Definição 1.1.12, existe um único homomorfismo (de $\mathbb{Z}$*-módulos)* $f' : C \otimes_K C \longrightarrow C$, *tal que* $f'(c_1 \otimes c_2) = \varepsilon(c_1)c_2$. *Ainda, como* K *é comutativo, então* f' *é homomorfismo de* K*-módulos (notemos que* $C \otimes_K C$ *é um* K*-módulo).*

Temos que:

$$\begin{aligned} \Delta_2(c) &= \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} = \sum c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)} \\ &= \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} f' \circ (I \otimes f')(\Delta_2(c)) &= f' \circ (I \otimes f')(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}) \\ &= \sum_{(c)} f' \circ (I \otimes f')(c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}) \\ &= \sum_{(c)} f'(c_{(1)} \otimes f'(c_{(2)} \otimes c_{(3)})) \\ &= \sum_{(c)} f'(c_{(1)} \otimes (\varepsilon(c_{(2)})c_{(3)})) = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)})c_{(3)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f' \circ (I \otimes f')(\Delta_2(c)) &= f' \circ (I \otimes f')(\sum c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)}) \\ &= \sum f' \circ (I \otimes f')(c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)}) \\ &= \sum f'(c_{(1)_{(1)}} \otimes f'(c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)})) \\ &= \sum f'(c_{(1)_{(1)}} \otimes (\varepsilon(c_{(1)_{(2)}})c_{(2)})) \\ &= \sum \varepsilon(c_{(1)_{(1)}})\varepsilon(c_{(1)_{(2)}})c_{(2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f' \circ (I \otimes f')(\Delta_2(c)) &= f' \circ (I \otimes f')(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}})\\ &= \sum f'(c_{(1)} \otimes f'(c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}}))\\ &= \sum f'(c_{(1)} \otimes (\varepsilon(c_{(2)_{(1)}})c_{(2)_{(2)}}))\\ &= \sum \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)_{(1)}})c_{(2)_{(2)}}.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos também que

$$\begin{aligned}f' \circ (I \otimes f')(\Delta_2(c)) &= f' \circ (I \otimes f')(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}})\\ &= f' \circ (I \otimes f')(\sum_{(c)} \sum_{(c_{(2)})} c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}})\\ &= f' \circ (I \otimes f')(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes (\sum_{(c_{(2)})} c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}}))\\ &= \sum_{(c)} f'(c_{(1)} \otimes \sum_{(c_{(2)})} f'(c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}}))\\ &= \sum_{(c)} f'(c_{(1)} \otimes (\sum_{(c_{(2)})} \varepsilon(c_{(2)_{(1)}})c_{(2)_{(2)}})).\end{aligned}$$

*Do item **(i)** acima, segue-se que esta última expressão é igual a*

$$\sum_{(c)} f'(c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}c &= \sum \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)_{(1)}})c_{(2)_{(2)}} = \sum \varepsilon(c_{(1)_{(1)}})\varepsilon(c_{(1)_{(2)}})c_{(2)}\\ &= \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)})c_{(3)}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.4.4. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então $\sum(S(h_{(2)})h_{(3)}) \otimes (S(h_{(1)})h_{(4)}) = \sum(S(h_{2(1)})h_{(2)_{(2)}}) \otimes (S(h_{(1)})h_{(3)})$.*

De fato, seja a aplicação $f = m^2 \circ (I \otimes \tau \otimes I) \circ (\tau \otimes I^2) \circ (S^2 \otimes I^2)$, onde m é a multiplicação de H, I é a identidade de H e $\tau : H \otimes_K H \longrightarrow H \otimes_K H$ é dada por $h \otimes h' \mapsto h' \otimes h$ (denotamos $m^2 = m \otimes m$, $I^2 = I \otimes I$ e $S^2 = S \otimes S$). Desde que

f seja K-linear, segue-se:

$$\begin{aligned}
m^2\circ&(I\otimes\tau\otimes I)\circ(\tau\otimes I^2)\circ(S^2\otimes I^2)(\Delta_3(h))\\
&= m^2\circ(I\otimes\tau\otimes I)\circ(\tau\otimes I^2)\circ(S^2\otimes I^2)(\sum h_{(1)}\otimes h_{(2)}\otimes h_{(3)}\otimes h_{(4)})\\
&= \sum m^2\circ(I\otimes\tau\otimes I)\circ(\tau\otimes I^2)(S(h_{(1)})\otimes S(h_{(2)})\otimes h_{(3)}\otimes h_{(4)})\\
&= \sum m^2\circ(I\otimes\tau\otimes I)(S(h_{(2)})\otimes S(h_{(1)})\otimes h_{(3)}\otimes h_{(4)})\\
&= \sum m^2(S(h_{(2)})\otimes h_{(3)}\otimes S(h_{(1)})\otimes h_{(4)}) = \sum (S(h_{(2)})h_{(3)})\otimes(S(h_{(1)})h_{(4)});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m^2\circ&(I\otimes\tau\otimes I)\circ(\tau\otimes I^2)\circ(S^2\otimes I^2)(\Delta_3(h))\\
&= m^2\circ(I\otimes\tau\otimes I)\circ(\tau\otimes I^2)\circ(S^2\otimes I^2)(\sum h_{(1)}\otimes h_{(2)_{(1)}}\otimes h_{(2)_{(2)}}\otimes h_{(3)})\\
&= \sum (S(h_{(2)_{(1)}})h_{(2)_{(2)}})\otimes(S(h_{(1)})h_{(3)}).
\end{aligned}$$

Observamos que a igualdade do exemplo acima decorre do fato de $\Delta_3(h) = \sum h_{(1)}\otimes h_{(2)}\otimes h_{(3)}\otimes h_{(4)} = \sum h_{(1)}\otimes h_{(2)_{(1)}}\otimes h_{(2)_{(2)}}\otimes h_{(3)}$.

Exemplo 2.4.5. *Seja H uma álgebra de Hopf com multiplicação m, unidade μ, comultiplicação Δ, counidade ε e antípoda S. Então $\varepsilon(h)1_H = \sum_{(h)} h_{(1)}S(h_{(2)}) = \sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)}$.*

De fato, temos:

$$\mu\circ\varepsilon(h) = \mu(\varepsilon(h)1_K) = \varepsilon(h)\mu(1_K) = \varepsilon(h)1_H;$$

$$\begin{aligned}
m\circ(I\otimes S)\circ\Delta(h) &= m\circ(I\otimes S)(\sum_{(h)} h_{(1)}\otimes h_{(2)})\\
&= \sum_{(h)} m\circ(I\otimes S)(h_{(1)}\otimes h_{(2)})\\
&= \sum_{(h)} m(h_{(1)}\otimes S(h_{(2)})) = \sum_{(h)} h_{(1)}S(h_{(2)});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m\circ(S\otimes I)\circ\Delta(h) &= m\circ(S\otimes I)(\sum_{(h)} h_{(1)}\otimes h_{(2)})\\
&= \sum_{(h)} m\circ(S\otimes I)(h_{(1)}\otimes h_{(2)})\\
&= \sum_{(h)} m(S(h_{(1)})\otimes h_{(2)}) = \sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)}.
\end{aligned}$$

Como $\mu\circ\varepsilon(h) = m\circ(I\otimes S)\circ\Delta(h) = m\circ(S\otimes I)\circ\Delta(h)$, para todo $h\in H$ (ver Definição 2.3.1), então $\varepsilon(h)1_H = \sum_{(h)} h_{(1)}S(h_{(2)}) = \sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)}$.

Exemplo 2.4.6. *Se C e D são K-coálgebras (isto é, se $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ são K-coálgebras), então $C \otimes_K D$ tem estrutura de K-coálgebra com:*

$$\Delta_{C\otimes_K D} = (id_C \otimes \tau \otimes id_D) \circ \Delta_C \otimes \Delta_D;$$

$$\varepsilon_{C\otimes_K D} = \gamma \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D),$$

onde

$\tau : C \otimes_K D \longrightarrow D \otimes_K C$ é K-linear com $c \otimes d \mapsto d \otimes c$, para todo $c \in C$ e $d \in D$ (definido no Teorema 1.1.22);

$\gamma : K \otimes_K K \longrightarrow K$ é K-linear com $k_1 \otimes k_2 \mapsto k_1 k_2$, para todo k_1, $k_2 \in K$ (definido no Exemplo 1.1.21).

De fato, sejam $c \in C$ e $d \in D$. Temos que:

$$\begin{aligned}
&(\Delta_{C\otimes_K D} \otimes id_{C\otimes_K D}) \circ \Delta_{C\otimes_K D}(c \otimes d)\\
&\quad= (\Delta_{C\otimes_K D} \otimes id_{C\otimes_K D}) \circ (id_C \otimes \tau \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)(c \otimes d)\\
&\quad= (\Delta_{C\otimes_K D} \otimes id_{C\otimes_K D}) \circ (id_C \otimes \tau \otimes id_D)(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes \sum_{(d)} d_{(1)} \otimes d_{(2)})\\
&\quad= (\Delta_{C\otimes_K D} \otimes id_{C\otimes_K D}) \circ (id_C \otimes \tau \otimes id_D)(\sum_{(c)} \sum_{(d)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(1)} \otimes d_{(2)})\\
&\quad= \sum_{(c)} \sum_{(d)} \Delta_{C\otimes_K D} \otimes id_{C\otimes_K D}(c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)})\\
&\quad= \sum_{(c)} \sum_{(d)} \Delta_{C\otimes_K D}(c_{(1)} \otimes d_{(1)}) \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}\\
&\quad= \sum_{(c)} \sum_{(d)} [\sum_{(c_{(1)})} \sum_{(d_{(1)})} c_{(1)_{(1)}} \otimes d_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes d_{(1)_{(2)}}] \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}\\
&\quad= \sum_{(c)} \sum_{(d)} \sum_{(c_{(1)})} \sum_{(d_{(1)})} c_{(1)_{(1)}} \otimes d_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes d_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} (= \star)\\
&\quad= (id_C \otimes \tau \otimes \tau \otimes id_D) \circ (id_C \otimes id_C \otimes \tau \otimes id_D \otimes id_D) \circ (\Delta_{C_2} \otimes \Delta_{D_2})(c \otimes d),
\end{aligned}$$

onde $\Delta_{C_2} = (\Delta_C \otimes id_C) \otimes \Delta_C$ e $\Delta_{D_2} = (\Delta_D \otimes id_D) \otimes \Delta_D$.

Analogamente, obtemos:

$$\begin{aligned}
&(id_{C\otimes_K D} \otimes \Delta_{C\otimes_K D}) \circ \Delta_{C\otimes_K D}(c \otimes d)\\
&\quad= \sum_{(c)} \sum_{(d)} \sum_{(c_{(2)})} \sum_{(d_{(2)})} c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes d_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}} \otimes d_{(2)_{(2)}} (= \star\star)\\
&\quad= (id_C \otimes \tau \otimes \tau \otimes id_D) \circ (id_C \otimes id_C \otimes \tau \otimes id_D \otimes id_D) \circ (\Delta_{C_2} \otimes \Delta_{D_2})(c \otimes d).
\end{aligned}$$

Notemos que $\star = \star\star$. *Isto decorre do fato de*

$$\Delta_{C_2}(c) = \sum_{(c)}\sum_{(c_{(1)})} c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)} = \sum_{(c)}\sum_{(c_{(2)})} c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}};$$

$$\Delta_{D_2}(d) = \sum_{(d)}\sum_{(d_{(1)})} d_{(1)_{(1)}} \otimes d_{(1)_{(2)}} \otimes d_{(2)} = \sum_{(d)}\sum_{(d_{(2)})} d_{(1)} \otimes d_{(2)_{(1)}} \otimes d_{(2)_{(2)}}.$$

Do Exemplo 2.4.3 (propriedade da counidade), temos que:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{C\otimes_K D}&\otimes id_{C\otimes_K D}) \circ \Delta_{C\otimes_K D}(c \otimes d)\\
&= \varepsilon_{C\otimes_K D} \otimes id_{C\otimes_K D}(\sum_{(c)}\sum_{(d)} c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)})\\
&= \sum_{(c)}\sum_{(d)} \varepsilon_{C\otimes_K D}(c_{(1)} \otimes d_{(1)}) \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}\\
&= \sum_{(c)}\sum_{(d)} \varepsilon_C(c_{(1)})\varepsilon_D(d_{(1)}) \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}\\
&= \sum_{(c)}\sum_{(d)} 1_K \otimes \varepsilon_C(c_{(1)})c_{(2)} \otimes \varepsilon_D(d_{(1)})d_{(2)}\\
&= 1_K \otimes \sum_{(c)} \varepsilon_C(c_{(1)})c_{(2)} \otimes \sum_{(d)} \varepsilon_D(d_{(1)})d_{(2)} = 1_K \otimes c \otimes d
\end{aligned}$$

e também

$$(id_{C\otimes_K D} \otimes \varepsilon_{C\otimes_K D}) \circ \Delta_{C\otimes_K D}(c \otimes d) = c \otimes d \otimes 1_K.$$

Da K*-linearidade das composições acima, segue-se que* $(C \otimes_K D, \Delta_{C\otimes_K D}, \varepsilon_{C\otimes_K D})$ *é uma* K*-coálgebra.*

Com o exemplo acima, conseguimos uma definição alternativa para biálgebras.

Proposição 2.4.7. *Sejam* (A, m_A, μ_A) *uma* K*-álgebra e* $(A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ *uma* K*-coálgebra. São equivalentes:*

1. Δ_A *e* ε_A *são homomorfismos de álgebras (sobre K);*

2. m_A *e* μ_A *são homomorfismos de coálgebras (sobre K).*

Demonstração. Mostremos inicialmente $1 \Rightarrow 2$.

Por hipótese, temos que $\Delta_A : A \longrightarrow A \otimes_K A$ e $\varepsilon_A : A \longrightarrow K$ são homomorfismos de K-álgebras. Logo valem:

(I.1) $\Delta_A \circ m_A = m_{A\otimes_K A} \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A)$, onde $m_{A\otimes_K A} = (m_A \otimes m_A) \circ (id_A \otimes \tau \otimes id_A)$;

(I.2) $\Delta_A \circ \mu_A = \mu_{A\otimes_K A}$, onde $\mu_{A\otimes_k A} = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Phi$ com $\Phi : k \mapsto 1_K \otimes k$, $k \in K$;

(I.3) $\varepsilon_A \circ m_A = m_K \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A)$;

(I.4) $\varepsilon_A \circ \mu_A = \mu_K$.

Devemos mostrar que $m_A : A\otimes_K A \longrightarrow A$ e $\mu_A : K \longrightarrow A$ são homomorfismos de K-coálgebras, isto é, que valem:

(II.1) $\Delta_A \circ m_A = (m_A \otimes m_A) \circ \Delta_{A\otimes_K A}$, onde $\Delta_{A\otimes_K A} = (id_A \otimes \tau \otimes id_A) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A)$;

(II.2) $\varepsilon_A \circ m_A = \varepsilon_{A\otimes_K A}$, onde $\varepsilon_{A\otimes_K A} = \gamma \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A)$ com $\gamma : k_1 \otimes k_2 \mapsto k_1 k_2$, para quaisquer $k_1, k_2 \in K$;

(II.3) $\Delta_A \circ \mu_A = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Delta_K$;

(II.4) $\varepsilon_A \circ \mu_A = \varepsilon_K$.

Do Exemplo 1.2.3, temos que $(A \otimes_K A, m_{A\otimes_K A}, \mu_{A\otimes_K A})$ é uma K-álgebra e do Exemplo 2.4.6, temos que $(A \otimes_K A, \Delta_{A\otimes_K A}, \varepsilon_{A\otimes_K A})$ é uma K-coálgebra.

Observemos ainda que $(K, m_K, \mu_K, \Delta_K, \varepsilon_K)$, onde $m_K(k_1 \otimes k_2) = k_1 k_2$, para quaisquer $k_1, k_2 \in K$, $\mu_K(k) = \varepsilon_K(k) = k$, $\Delta_K(k) = 1_K \otimes k$, para todo $k \in K$, é uma biálgebra. Para ver isso, basta tomar o grupo $G = \{1_K, .\}$ no Exemplo 2.2.2. Segue-se que $K := K\{1_K\}$ é uma biálgebra.

De **(I.1)**, temos que:

$$\begin{aligned}
\Delta_A \circ m_A &= m_{A\otimes_K A} \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A) \\
&= [(m_A \otimes m_A) \circ (id_A \otimes \tau \otimes id_A)] \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A) \\
&= (m_A \otimes m_A) \circ [(id_A \otimes \tau \otimes id_A) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A)] \\
&= (m_A \otimes m_A) \circ \Delta_{A\otimes_K A} \quad (\textit{logo} \quad \textit{vale} \quad \textbf{II.1});
\end{aligned}$$

Notando que $m_K = \gamma$, de **(I.3)**, temos que:

$$\varepsilon_A \circ m_A = m_K \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A) = \gamma \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A) = \varepsilon_{A\otimes_K A} \text{ (logo vale } \textbf{II.2}\text{);}$$

Notando que $\Phi = \Delta_K$, de **(I.2)**, temos que:

$$\Delta_A \circ \mu_A = \mu_{A\otimes_K A} = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Phi = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Delta_K \text{ (logo vale } \textbf{II.3}\text{);}$$

De **(I.4)**, temos que:

$$\varepsilon_A \circ \mu_A = \mu_K = \varepsilon_K \text{ (logo vale } \mathbf{II.4}\text{)}.$$

Mostremos $2 \Rightarrow 1$.

Por hipótese, valem **(II.1)**, **(II.2)**, **(II.3)** e **(II.4)**.

Por **(II.1)**, temos que:

$$\begin{aligned}\Delta_A \circ m_A &= (m_A \otimes m_A) \circ \Delta_{A \otimes_K A} \\ &= (m_A \otimes m_A) \circ [(id_A \otimes \tau \otimes id_A) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A)] \\ &= [(m_A \otimes m_A) \circ (id_A \otimes \tau \otimes id_A)] \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A) \\ &= m_{A \otimes_K A} \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A) \quad (logo \quad vale \quad \mathbf{I.1});\end{aligned}$$

Por **(II.3)**, temos que:

$$\Delta_A \circ \mu_A = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Delta_K = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Phi = \mu_{A \otimes_K A} \text{ (logo vale } \mathbf{I.2}\text{)};$$

Por **(II.2)**, temos que:

$$\varepsilon_A \circ m_A = \varepsilon_{A \otimes_K A} = \gamma \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A) = m_K \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A) \text{ (logo vale } \mathbf{I.3}\text{)};$$

Por **(II.4)**, temos que:

$$\varepsilon_A \circ \mu_A = \varepsilon_K = \mu_K \text{ (logo vale } \mathbf{I.4}\text{)}.$$ □

2.5 Produto de Convolução

Sejam A uma K-álgebra e C uma K-coálgebra. Mostraremos que $Hom(C, A) = \{f : C \longrightarrow A : f \quad \text{é} \quad K\text{-linear}\}$ com as operações definidas a seguir apresenta uma estrutura de K-álgebra. Este resultado será útil, em particular, para a demonstração da existência da envolvente de uma ação parcial (à esquerda) de uma álgebra de Hopf sobre uma álgebra.

Definição 2.5.1. *Sejam (A, m, μ) uma K-álgebra, (C, Δ, ε) uma K-coálgebra e $f, g \in Hom(C, A)$. Definimos o **produto de convolução** de f por g a seguinte composição: $f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$.*

Proposição 2.5.2. *$Hom(C, A)$ é uma K-álgebra com multiplicação $m_{Hom(C,A)}$: $Hom(C, A) \otimes Hom(C, A) \longrightarrow Hom(C, A)$ definida por $f \otimes g \mapsto f * g$ e unidade*

$\mu_{Hom(C,A)} : K \longrightarrow Hom(C, A)$ *definida por* $\lambda \mapsto \lambda(\mu \circ \varepsilon)$.

Demonstração. Primeiro observemos que se $f, g \in Hom(C, A)$, então $f * g \in Hom(C, A)$. Temos também que $Hom(C, A)$ é um K-módulo com $(f + g)(c) = f(c) + g(c)$ e $(\lambda f)(c) = \lambda f(c) = f(c)\lambda = (f\lambda)(c)$, para todo $f, g \in Hom(C, A)$, $\lambda \in K$ e $c \in C$.

Seja $c \in C$. Temos que, para todo $f, g, h \in Hom(C, A)$, valem:

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(c) &= m \circ [(f * g) \otimes h] \circ \Delta(c) = m \circ [(m \circ (f \otimes g) \circ \Delta) \otimes h] \circ \Delta(c) \\
&= m \circ [(m \circ (f \otimes g) \circ \Delta) \otimes h](\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}) \\
&= \sum_{(c)} m((m \circ (f \otimes g))(\sum_{(c_{(1)})} c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}}) \otimes h(c_{(2)})) \\
&= \sum_{(c)} m((\sum_{(c_{(1)})} m(f(c_{(1)_{(1)}}) \otimes g(c_{(1)_{(2)}}))) \otimes h(c_{(2)})) \\
&= \sum_{(c)} m((\sum_{(c_{(1)})} f(c_{(1)_{(1)}}) g(c_{(1)_{(2)}})) \otimes h(c_{(2)})) \\
&= \sum_{(c)} [(\sum_{(c_{(1)})} f(c_{(1)_{(1)}}) g(c_{(1)_{(2)}})) h(c_{(2)})] \\
&= \sum_{(c)} \sum_{(c_{(1)})} f(c_{(1)_{(1)}}) g(c_{(1)_{(2)}}) h(c_{(2)}) (= \star) \\
&= \sum_{(c)} \sum_{(c_{(1)})} m \circ (m \otimes id_A) \circ (f \otimes g \otimes h)(c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)}) \\
&= m \circ (m \otimes id_A) \circ (f \otimes g \otimes h)(\sum_{(c)} \sum_{(c_{(1)})} c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)}) \\
&= m \circ (m \otimes id_A) \circ (f \otimes g \otimes h) \circ \Delta_2(c);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f*(g*h)(c) &= m\circ[f\otimes(g*h)]\circ\Delta(c) = m\circ[f\otimes(m\circ(g\otimes h)\circ\Delta)](\Delta(c))\\
&= m\circ[f\otimes(m\circ(g\otimes h)\circ\Delta)](\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes c_{(2)})\\
&= \sum_{(c)} m(f(c_{(1)})\otimes(m(g\otimes h(\sum_{(c_{(2)})} c_{(2)_{(1)}}\otimes c_{(2)_{(2)}}))))\\
&= \sum_{(c)} m(f(c_{(1)})\otimes(\sum_{(c_{(2)})} m(g(c_{(2)_{(1)}})\otimes h(c_{(2)_{(2)}}))))\\
&= \sum_{(c)} m(f(c_{(1)})\otimes(\sum_{(c_{(2)})} g(c_{(2)_{(1)}})h(c_{(2)_{(2)}})))\\
&= \sum_{(c)}[f(c_{(1)})(\sum_{(c_{(2)})} g(c_{(2)_{(1)}})h(c_{(2)_{(2)}}))]\\
&= \sum_{(c)}\sum_{(c_{(2)})} f(c_{(1)})g(c_{(2)_{(1)}})h(c_{(2)_{(2)}})(=\star\star)\\
&= \sum_{(c)}\sum_{(c_{(2)})} m\circ(m\otimes id_A)\circ(f\otimes g\otimes h)(c_{(1)}\otimes c_{(2)_{(1)}}\otimes c_{(2)_{(2)}})\\
&= m\circ(m\otimes id_A)\circ(f\otimes g\otimes h)(\sum_{(c)}\sum_{(c_{(2)})} c_{(1)}\otimes c_{(2)_{(1)}}\otimes c_{(2)_{(2)}})\\
&= m\circ(m\otimes id_A)\circ(f\otimes g\otimes h)\circ\Delta_2(c).
\end{aligned}
$$

Logo $(f*g)*h = f*(g*h)$, para todo $f, g, h \in Hom(C, A)$.

Temos que $\mu\circ\varepsilon : C \longrightarrow A$ é K-linear, onde $\mu\circ\varepsilon(c) = \mu(\varepsilon(c)1_K) = \varepsilon(c)\mu(1_K) = \varepsilon(c)1_A$. Usando a propriedade da counidade (ver Exemplo 2.4.3), segue-se que, para todo $f \in Hom(C, A)$, valem:

$$
\begin{aligned}
f*(\mu\circ\varepsilon)(c) &= m\circ(f\otimes(\mu\circ\varepsilon))\circ\Delta(c) = m\circ(f\otimes(\mu\circ\varepsilon))(\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes c_{(2)})\\
&= \sum_{(c)} m(f(c_{(1)})\otimes\mu\circ\varepsilon(c_{(2)})) = \sum_{(c)} m(f(c_{(1)})\otimes\varepsilon(c_{(2)})1_A)\\
&= \sum_{(c)} f(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)})1_A = \sum_{(c)} f(c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}))\\
&= f(\sum_{(c)} c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)})) = f(c);
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(\mu\circ\varepsilon)*f(c) &= m\circ((\mu\circ\varepsilon)\otimes f)\circ\Delta(c) = m\circ((\mu\circ\varepsilon)\otimes f)(\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes c_{(2)})\\ &= \sum_{(c)} m(\mu\circ\varepsilon(c_{(1)})\otimes f(c_{(2)})) = \sum_{(c)} m(\varepsilon(c_{(1)})1_A\otimes f(c_{(2)}))\\ &= \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})1_A f(c_{(2)}) = \sum_{(c)} f(\varepsilon(c_{(1)})c_{(2)})\\ &= f(\sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}) = f(c).\end{aligned}$$

Isto mostra que $1_{Hom(C,A)} = \mu\circ\varepsilon$.

Definamos $\Theta : Hom(C,A)\times Hom(C,A) \longrightarrow Hom(C,A)$ por $(f,g)\mapsto f*g$. Temos que Θ é K-biaditiva. De fato, seja $c\in C$. Então

$$\begin{aligned}\Theta(f+g,h)(c) &= ((f+g)*h)(c) = (m\circ((f+g)\otimes h)\circ\Delta)(c)\\ &= (m\circ(f\otimes h+g\otimes h)\circ\Delta)(c) = m((f\otimes h+g\otimes h)(\Delta(c)))\\ &= m((f\otimes h)(\Delta(c)) + (g\otimes h)(\Delta(c)))\\ &= m\circ(f\otimes h)\circ\Delta(c) + m\circ(g\otimes h)\circ\Delta(c)\\ &= (f*h)(c) + (g*h)(c) = \Theta(f,h)(c) + \Theta(g,h)(c);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta(f,g+h)(c) &= (f*(g+h))(c) = (m\circ(f\otimes(g+h))\circ\Delta)(c)\\ &= (m\circ(f\otimes g+f\otimes h)\circ\Delta)(c) = m((f\otimes g+f\otimes h)(\Delta(c)))\\ &= m((f\otimes g)(\Delta(c)) + (f\otimes h)(\Delta(c)))\\ &= m\circ(f\otimes g)\circ\Delta(c) + m\circ(f\otimes h)\circ\Delta(c)\\ &= (f*g)(c) + (f*h)(c) = \Theta(f,g)(c) + \Theta(f,h)(c);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta(f\lambda,g)(c) &= m\circ(f\lambda\otimes g)\circ\Delta(c) = m\circ(f\otimes\lambda g)\circ\Delta(c) = f*(\lambda g)(c)\\ &= \Theta(f,\lambda g)(c).\end{aligned}$$

Segue-se da propriedade universal da Definição 1.1.12 que existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $m_{Hom(C,A)}$, tal que $m_{Hom(C,A)}(f\otimes g) = f*g$. Sendo K comutativo, temos que $Hom(C,A)$ é um *(K-K)*-bimódulo e, portanto, $Hom(C,A)\otimes_K Hom(C,A)$ é um K-módulo. Temos também que, para todo $c\in C$, vale:

$$\begin{aligned}
m_{Hom(C,A)}(\lambda(f\otimes g))(c) &= m_{Hom(C,A)}((\lambda f)\otimes g)(c) = ((\lambda f)*g)(c)\\
&= m\circ((\lambda f)\otimes g)\circ\Delta(c) = m\circ((\lambda f)\otimes g)(\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes c_{(2)})\\
&= \sum_{(c)} m((\lambda f(c_{(1)}))\otimes g(c_{(2)})) = \sum_{(c)} m(\lambda(f(c_{(1)})\otimes g(c_{(2)})))\\
&= \sum_{(c)} \lambda m(f(c_{(1)})\otimes g(c_{(2)})) = \lambda m(\sum_{(c)} f(c_{(1)})\otimes g(c_{(2)}))\\
&= \lambda(m\circ(f\otimes g)\circ\Delta)(c) = \lambda(f*g)(c)\\
&= \lambda m_{Hom(C,A)}(f\otimes g)(c).
\end{aligned}$$

Logo $m_{Hom(C,A)}$ é K-linear.

Definamos $\mu_{Hom(C,A)} : K \longrightarrow Hom(C,A)$ por $\lambda \mapsto \lambda(\mu\circ\varepsilon)$. Verifica-se sem dificuldades que a tripla $(Hom(C,A), m_{Hom(C,A)}, \mu_{Hom(C,A)})$ satisfaz a definição de K-álgebra. $\square$

Observamos que poderíamos ter obtido $(f*g)*h(c) = \star = \star\star = f*(g*h)(c)$. Isto decorre do fato de

$$\Delta_2(c) = \sum_{(c)}\sum_{(c_{(1)})} c_{(1)_{(1)}}\otimes c_{(1)_{(2)}}\otimes c_{(2)} = \sum_{(c)}\sum_{(c_{(2)})} c_{(1)}\otimes c_{(2)_{(1)}}\otimes c_{(2)_{(2)}},$$

no entanto preferimos enfatizar os detalhes da prova.

Observação 2.5.3. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Segue-se, do Exemplo 2.4.5, que a antípoda S é a inversa da id_H (identidade de H) com relação ao produto de convolução.*

2.6 Dual Algébrico de uma Álgebra e de uma Coálgebra

Seja H um K-espaço vetorial. Definimos o *dual algébrico* de H como o K-espaço vetorial $H^* = \{f : H \longrightarrow K : f \quad \text{é} \quad K-\text{linear}\}$.

Esta seção foi incluída nos pré-requesitos com vistas à demonstração da existência de uma ação parcial (à esquerda) do dual algébrico H^* de uma álgebra de Hopf

H sobre H, onde $dim(H) < +\infty$. Veremos que, na verdade, está ação parcial é uma ação "total" de H^* em H. O estudo desta seção também será útil na compreensão de um exemplo que sucede este resultado. Começamos com dois lemas que nos ajudarão a demonstrarmos que $(A \otimes_K B)^* \simeq A^* \otimes_K B^*$ (como K-espaços vetoriais) quando $dim(A) < +\infty$ e $dim(B) < +\infty$.

Lema 2.6.1. *Sejam A e B espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo K. Então:*

(i) *Se $\{a_1, \ldots, a_m\}$ é uma base de A e $b_1, \ldots, b_m$ são vetores de B, tais que $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i = 0$, então $b_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$;*

(ii) *Se $a_1, \ldots, a_n$ são vetores de A e $\{b_1, \ldots, b_n\}$ é uma base de B, tais que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i = 0$, então $a_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$;*

(iii) *Se $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é uma base de A e $\{f_1, \ldots, f_n\}$ uma base de B, então $\{e_i \otimes f_j : 1 \leq i \leq m \quad e \quad 1 \leq j \leq n\}$ é uma base de $A \otimes_K B$.*

Em particular, $dim(A \otimes_K B) = dim(A).dim(B)$.

Demonstração. Mostremos **(i)**. Seja $a \in A$. Então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$, tais que $a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m$. Definamos, para cada $k = 1, \ldots, m$ fixo, a aplicação $\Phi_k : A \times B \longrightarrow B$ com $(a, b) \mapsto \alpha_k b$. Dados $a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m, a' = \alpha'_1 a_1 + \ldots + \alpha'_m a_m \in A$, $b, b' \in B$ e $\alpha \in K$ valem:

$$\Phi_k(a + a', b) = \alpha_k b + \alpha'_k b = \Phi_k(a, b) + \Phi_k(a', b);$$

$$\Phi_k(a, b + b') = \alpha_k(b + b') = \alpha_k b + \alpha_k b' = \Phi_k(a, b) + \Phi_k(a, b') \text{ e ainda,}$$

$$\Phi_k(a\alpha, b) = (\alpha_1 \alpha a_1 + \ldots + \alpha_k \alpha a_k + \ldots + \alpha_m \alpha a_m, b) = (\alpha_k \alpha)b = \alpha_k(\alpha b) = \Phi_k(a, \alpha b).$$

Isto mostra que Φ_k é K-biaditiva, para todo $k = 1, \ldots, m$. Pela propriedade universal da Definição 1.1.12, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\Phi'_k : A \otimes_K B \longrightarrow B$ com $\Phi'_k(a \otimes b) = \alpha_k b$, para todo $k = 1, \ldots, m$. Ainda, como K é um corpo, segue-se que Φ'_k é K-linear, para todo $k = 1, \ldots, m$, e $A \otimes_K B$ é um K-espaço vetorial. Finalmente, suponhamos que $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i = 0$. Portanto $\Phi'_k(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i) = 0$.

Assim $0 = \Phi'_k(a_1 \otimes b_1) + \ldots + \Phi'_k(a_k \otimes b_k) + \ldots + \Phi'_k(a_m \otimes b_m) = 0b_1 + \ldots + 1b_k + \ldots + 0b_m$ e, portanto, $b_k = 0$, para todo $k = 1, \ldots, m$.

Analogamente, mostra-se **(ii)**.

Mostremos **(iii)**. Seja $x \in A \otimes_K B$. Então $x = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i$, com $a_i \in A$ e $b_i \in B$. Daí $a_i = \alpha_{i1}e_1 + \ldots + \alpha_{im}e_m$ e $b_i = \beta_{i1}f_1 + \ldots + \beta_{in}f_n$, com $i = 1, \ldots, r$, onde $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im}, \beta_{i1}, \ldots, \beta_{in} \in K$. Sendo assim, $x = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i = (\alpha_{11}e_1 + \ldots + \alpha_{1m}e_m) \otimes (\beta_{11}f_1 + \ldots + \beta_{1n}f_n) + \ldots + (\alpha_{r1}e_1 + \ldots + \alpha_{rm}e_m) \otimes (\beta_{r1}f_1 + \ldots + \beta_{rn}f_n) = (\alpha_{11}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{r1}\beta_{r1})(e_1 \otimes f_1) + \ldots + (\alpha_{11}\beta_{1n} + \ldots + \alpha_{r1}\beta_{rn})(e_1 \otimes f_n) + \ldots + (\alpha_{1m}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{rm}\beta_{r1})(e_m \otimes f_1) + \ldots + (\alpha_{1m}\beta_{1n} + \ldots + \alpha_{rm}\beta_{rn})(e_m \otimes f_n)$.

Isto mostra que $\{e_i \otimes f_j : 1 \leq i \leq m \quad \text{e} \quad 1 \leq j \leq n\}$ gera $A \otimes_K B$.

Sejam agora $\lambda_{ij} \in K$, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, tais que $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(e_i \otimes f_j) = 0$. Daí $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} e_i \otimes (\lambda_{ij}f_j) = \sum_{i=1}^{m} e_i \otimes (\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}f_j) = 0$. Do item **(i)**, temos que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}f_j = 0$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Como $\{f_j : j = 1, \ldots, n\}$ é uma base de B, então $\lambda_{ij} = 0$, para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

Isto mostra que $\{e_i \otimes f_j : 1 \leq i \leq m \quad \text{e} \quad 1 \leq j \leq n\}$ é linearmente independente.

Portanto $\{e_i \otimes f_j : 1 \leq i \leq m \quad \text{e} \quad 1 \leq j \leq n\}$ é uma base de $A \otimes_K B$. $\square$

Lema 2.6.2. *Seja V um K-espaço vetorial. Se $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ são linearmente independentes (LI), então existem $v_1, \ldots, v_n \in V$, tais que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ii} = 1_K$ e $\delta_{ij} = 0_K$, quando $i \neq j$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Em particular, temos que os $v_i's$ são linearmente independentes.*

Demonstração. Seja $\{f_1\} \subset V^*$ LI. Então, por definição, $f_1 \neq 0_{V^*}$. Logo existe $0_V \neq w_1 \in V$, tal que $f_1(w_1) \neq 0_K$. Tome $v_1 = \frac{w_1}{f_1(w_1)}$. Temos que $f_1(v_1) = 1_K$.

Suponhamos agora que $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset V^*$ é LI, tal que existem $v_1, \ldots, v_n \in V$ com $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$. A mostrar que se $\{f_1, \ldots, f_{n+1}\} \subset V^*$ é LI, então existem $w_1, \ldots, w_{n+1} \in V$, tais que $f_i(w_j) = \delta_{ij}$, para todo $i, j = 1, \ldots, n+1$.

Desde que $f_1, \ldots, f_{n+1}$ são LI, temos que $f_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} f_{n+1}(v_i)f_i \neq 0_{V^*}$. Então existe $0_V \neq v \in V$, tal que $f_{n+1}(v) - \sum\limits_{i=1}^{n} f_{n+1}(v_i)f_i(v) \neq 0_K$, ou seja, $f_{n+1}(v - \sum\limits_{i=1}^{n} v_i f_i(v)) \neq 0_K$.

Temos também que, para todo $j = 1, \ldots, n$ fixo, vale:

$f_j(v - \sum\limits_{i=1}^{n} v_i f_i(v)) = f_j(v) - \sum\limits_{i=1}^{n} f_j(v_i)f_i(v) = f_j(v) - f_j(v) = 0_K$ $(\star)$.

Tomemos $w_{n+1} = \frac{v - \sum\limits_{i=1}^{n} v_i f_i(v)}{f_{n+1}(v - \sum\limits_{i=1}^{n} v_i f_i(v))}$ e $wj = v_j - f_{n+1}(v_j)w_{n+1}$ com $j = 1, \ldots, n$.

Então

$f_j(w_{n+1}) = 0_K$, para todo $j = 1, \ldots, n$ (por $(\star)$) , $f_j(w_k) = f_j(v_k - f_{n+1}(v_k)w_{n+1}) = f_j(v_k) - f_{n+1}(v_k)\underbrace{f_j(w_{n+1})}_{=0_K} = f_j(v_k) = \delta_{jk}$, para todo $j, k = 1, \ldots, n$.

e também

$f_{n+1}(w_{n+1}) = 1_K$ e $f_{n+1}(w_j) = f_{n+1}(v_j - f_{n+1}(v_j)w_{n+1}) = f_{n+1}(v_j) - f_{n+1}(v_j)\underbrace{f_{n+1}(w_{n+1})}_{=1_K} = f_{n+1}(v_j) - f_{n+1}(v_j) = 0_K$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Caso $w_1, \ldots, w_{n+1}$ não fossem LI, então um destes vetores seria combinação linear dos demais. Suponhamos sem perda de generalidade que $w_1 = \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_{n+1}w_{n+1}$. Então $1_K = f_1(w_1) = f_1(\lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_{n+1}w_{n+1}) = 0_K$, o que é uma contradição. $\square$

Proposição 2.6.3. *Sejam A e B espaços vetoriais sobre um corpo K. Então a aplicação $\rho : A^* \otimes_K B^* \longrightarrow (A \otimes_K B)^*$ com $\rho(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b)$ é um monomorfismo de K-espaços vetoriais. Caso $dim(A) < +\infty$ e $dim(B) < +\infty$, então ρ é um isomorfismo de K-espaços vetoriais.*

Demonstração. Como K é um corpo, segue-se que $A^* \otimes_K B^*$ e $(A \otimes_K B)^*$ são K-espaços vetoriais. Definamos $\theta : A^* \times B^* \longrightarrow (A \otimes_K B)^*$ por $\theta(f, g)(\sum a_i \otimes b_i) = \sum f(a_i)g(b_i)$. Temos que dados $f, f' \in A^*$, $g, g' \in B^*$ e $\lambda \in K$ valem:

$$\begin{aligned}\theta(f + f', g)(\sum a_i \otimes b_i) &= \sum (f + f')(a_i)g(b_i) = \sum f(a_i)g(b_i) + \sum f'(a_i)g(b_i) \\ &= (\theta(f, g) + \theta(f', g))(\sum a_i \otimes b_i);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta(f, g + g')(\sum a_i \otimes b_i) &= \sum f(a_i)(g + g')(b_i) = \sum f(a_i)g(b_i) + \sum f(a_i)g'(b_i) \\ &= (\theta(f, g) + \theta(f, g'))(\sum a_i \otimes b_i);\end{aligned}$$

$$\theta(f\lambda, g)(\sum a_i \otimes b_i) = \sum f\lambda(a_i)g(b_i) = \sum f(a_i)\lambda g(b_i) = \theta(f, \lambda g)(\sum a_i \otimes b_i).$$

Portanto θ é K-biaditiva. Da Definição 1.1.12, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\rho : A^* \otimes_K B^* \longrightarrow (A \otimes_K B)^*$ definido por $\rho(f \otimes g)(a \otimes b) = \theta(f, g)(a \otimes b) = f(a)g(b)$. Naturalmente, ρ é K-linear.

Seja $x \in A^* \otimes_K B^*$. Daí $x = \sum\limits_{l=1}^{k} h_l \otimes j_l$, onde $h_l \in A^*$ e $j_l \in B^*$, para todo $l = 1, \ldots, k$. Decorre do Lema de Zorn (ver [12], página 211) que todo K-espaço vetorial tem uma base. Então existem $f_1, \ldots, f_m \in A^*$ linearmente independentes, tais que $h_l = \lambda_{l1} f_1 + \ldots + \lambda_{lm} f_m$ com $\lambda_{lr} \in K$, para todo $l = 1, \ldots, k$ e para todo $r = 1, \ldots, m$. Segue-se que $x = \sum\limits_{l=1}^{k}(\lambda_{l1} f_1 + \ldots + \lambda_{lm} f_m) \otimes j_l = \sum\limits_{l=1}^{k}[f_1 \otimes (\lambda_{l1} j_l) + \ldots + f_m \otimes (\lambda_{lm} j_l)] = f_1 \otimes (\lambda_{11} j_1) + \ldots + f_m \otimes (\lambda_{1m} j_1) + \ldots + f_1 \otimes (\lambda_{k1} j_k) + \ldots + f_m \otimes (\lambda_{km} j_k) = f_1 \otimes \underbrace{(\lambda_{11} j_1 + \ldots + \lambda_{k1} j_k)}_{=g_1} + \ldots + f_m \otimes \underbrace{(\lambda_{1m} j_1 + \ldots + \lambda_{km} j_k)}_{g_m} = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i \otimes g_i$.

Pelo Lema 2.6.2, existem $v_1, \ldots, v_m \in A$ linearmente independentes, tais que $f_r(v_s) = \delta_{rs}$, para todo $r, s = 1, \ldots, m$.

Suponhamos que $\rho(x) = 0$. Seja $v_r \in A$, com $r = 1, \ldots, m$ fixo e $b \in B$ arbitrário. Sendo assim, $0_K = \rho(x)(v_r \otimes b) = \rho(\sum\limits_{i=1}^{m} f_i \otimes g_i)(v_r \otimes b) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(v_r) g_i(b) = g_r(b)$. Então $g_r = 0$, para todo $r = 1, \ldots, m$. Logo $x = 0$ e, portanto, ρ é injetora.

Suponhamos agora que $dim(A) < +\infty$ e $dim(B) < +\infty$. Logo $dim(A^*) = dim(A)$, $dim(B^*) = dim(B)$ e $dim(A \otimes_K B)^* = dim(A \otimes_K B)$ (ver [12], página 114).

Do Lema 2.6.1, temos que $dim(A \otimes_K B)^* = dim(A \otimes_K B) = dim(A) dim(B) = dim(A^*) dim(B^*) = dim(A^* \otimes_K B^*)$.

Como ρ é injetora, segue-se do Teorema do Núcleo e Imagem (ver [11], página 71) que $dim(A^* \otimes_K B^*) = dim(\rho(A^* \otimes_K B^*))$. Logo $\rho(A^* \otimes_K B^*) = (A \otimes_K B)^*$.

Portanto ρ é um isomorfismo (de K-espaços vetoriais). □

Podemos ampliar os resultados acima para o caso 3 como descrito abaixo.

Observação 2.6.4. *Seja A um K-espaço vetorial. Temos que $\overline{\rho} : A^* \otimes_K A^* \otimes_K A^* \longrightarrow (A \otimes_K A \otimes_K A)^*$ com $\overline{\rho}(f \otimes g \otimes h)(a \otimes a' \otimes a'') = f(a)g(a')h(a'')$ está bem definida e é injetora. Para mostrar a boa definição de $\overline{\rho}$, basta tomar a função K-biaditiva $\theta : A^* \times (A^* \otimes_K A^*) \longrightarrow (A \otimes_K A \otimes_K A)^*$ definida por $\theta(f, g \otimes h) = m_K \circ [f \otimes (m_K \circ (g \otimes h))]$ e usar a propriedade universal da Definição 1.1.12. Para* *mostrar a injetividade, tome* $x \in A^* \otimes A^* \otimes A^*$. *Então* $x = \sum\limits_{l=1}^{k} g_l \otimes h_l \otimes j_l$ *com* $g_l, h_l, j_l \in A^*$, *para todo* $l = 1, \ldots, k$. *Como todo* K*-espaço vetorial tem uma base, então* $g_l = \lambda_{l1} f_1 + \ldots + \lambda_{ln} f_n$, $h_l = \alpha_{l1} f_1 + \ldots + \alpha_{ln} f_n$ *e* $j_l = \beta_{l1} f_1 + \ldots + \beta_{ln} f_n$, *para certos* $\lambda_{li}, \alpha_{li}, \beta_{li} \in K$, *com* $l = 1, \ldots, k$ *e* $i = 1, \ldots, n$, *e* $f_1, \ldots, f_n \in A^*$ *linearmente independentes. Usando as propriedades do produto tensorial, segue-se que* $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{r=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{n} \lambda_{irs} f_i \otimes f_r \otimes f_s$, *com* $\lambda_{irs} \in K$, *para todo* $i, r, s = 1, \ldots, n$. *Pelo Lema 2.6.2, temos que existem* $v_1, \ldots, v_n \in A$, *tais que* $f_i(v_r) = \delta_{ir}$, *para todo* $i, r = 1, \ldots, n$. *Suponhamos* $\overline{\rho}(x) = 0$. *Então* $\overline{\rho}(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{r=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{n} \lambda_{irs} f_i \otimes f_r \otimes f_s)(v_m \otimes v_t \otimes v_p) = 0_K$ *Logo* $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{r=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{n} \lambda_{irs} f_i(v_m) f_r(v_t) f_s(v_p) = \lambda_{mtp} = 0_K$, *para quaisquer* $m, t, p = 1, \ldots, n$. *Portanto* $x = 0$ *e daí* $\overline{\rho}$ *é injetora.*

Definição 2.6.5. *Sejam* U *e* V K*-espaços vetoriais,* $f \in V^*$ *e* $T : U \longrightarrow V$ *uma aplicação* K*-linear. A aplicação* K*-linear* $T^* : V^* \longrightarrow U^*$ *definida por* $T^*(f)(u) = f(T(u))$, *com* $u \in U$, *é chamada de transposta de* T.

Observemos que T^* *acima definida é* K*-linear, pois, dados* $f, g \in V^*$ *e* $\lambda \in K$, *temos que* $T^*(\lambda f + g)(u) = (\lambda f + g)(T(u)) = \lambda f(T(u)) + g(T(u)) = \lambda T^*(f)(u) + T^*(g)(u)$.

Proposição 2.6.6. *Seja* (C, Δ, ε) *uma* K*-coálgebra, onde* K *é um corpo. Então* (C^*, m, μ), *onde* $m = \Delta^* \circ \rho$ *e* $\mu = \varepsilon^* \circ \phi$ *com* $\phi : K \longrightarrow K^*$ *definida por* $\phi(\lambda)(\lambda') = \lambda\lambda'$, *para quaisquer* $\lambda, \lambda' \in K$, *é uma* K*-álgebra.*

Demonstração. Primeiramente notemos que $m = \Delta^* \circ \rho : C^* \otimes C^* \longrightarrow C^*$ e $\mu = \varepsilon^* \circ \phi : K \longrightarrow C^*$ são K-lineares. Vamos provar que m e μ satisfazem a Definição 1.2.1. Para isso considere $f, g \in C^*$. Temos que $m(f \otimes g) = \Delta^* \circ \rho(f \otimes g) = \rho(f \otimes g) \circ \Delta$. Seja $c \in C$. Então $m(f \otimes g)(c) = \rho(f \otimes g) \circ \Delta(c) = \rho(f \otimes g)(\sum\limits_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = \sum\limits_{(c)} f(c_{(1)}) g(c_{(2)}) = m_K \circ (f \otimes g) \circ \Delta(c) = f * g(c)$. Logo $m(f \otimes g) = f * g$.

Seja $\lambda \in K$. Daí $\mu(\lambda) = \varepsilon^* \circ \phi(\lambda) = \phi(\lambda) \circ \varepsilon$ Seja $c \in C$. Então $\mu(\lambda)(c) = \phi(\lambda) \circ \varepsilon(c) = \phi(\lambda)(\varepsilon(c)) = \lambda\varepsilon(c)$. Logo $\mu(\lambda) = \lambda\varepsilon$, onde $\varepsilon = \mu_K \circ \varepsilon = 1_{C^*}$.

Da Proposição 2.5.2, segue-se que (C^*, m, μ) é uma K-álgebra (associativa e unitária). $\square$

Proposição 2.6.7. *Seja* (A, m, μ) *uma* K*-álgebra, onde* K *é um corpo e* $dim(A) < +\infty$*. Então* $(A^*, \Delta, \varepsilon)$*, onde* $\Delta = \rho^{-1} \circ m^*$ *e* $\varepsilon = \Psi \circ \mu^*$ *com* $\Psi : K^* \longrightarrow K$ *definida por* $\Psi(f) = f(1_K)$*, é uma* K*-coálgebra.*

Demonstração. Primeiramente notemos que $\Delta = \rho^{-1} \circ m^* : A^* \longrightarrow A^* \otimes_K A^*$ e $\varepsilon = \Psi \circ \mu^* : A^* \longrightarrow K$ são K-lineares. Seja $f \in A^*$. Temos que $\Delta(f) = \rho^{-1} \circ m^*(f)$. Logo $\rho \circ \Delta(f) = m^*(f) = f \circ m$ e daí $\rho \circ \Delta(f)(\sum_r a_r \otimes a'_r) = f \circ m(\sum_r a_r \otimes a'_r)$.

Sejam $id = id_{A^*}$, $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$, $\Delta(g_i) = \sum_k g'_{i,k} \otimes g''_{i,k}$ e $\Delta(h_i) = \sum_j h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}$. Então

$$\rho \circ \Delta(f)(\sum_r a_r \otimes a'_r) = \rho(\sum_i g_i \otimes h_i)(\sum_r a_r \otimes a'_r) = f \circ m(\sum_r a_r \otimes a'_r).$$

Logo $\sum_r \sum_i g_i(a_r)h_i(a'_r) = \sum_r f(a_r a'_r) \quad (1);$

$(id \otimes \Delta) \circ \Delta(f) = \sum_i g_i \otimes \Delta(h_i) = \sum_i \sum_j g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j} \quad (2);$

$(\Delta \otimes id) \circ \Delta(f) = \sum_i \sum_k g'_{i,k} \otimes g''_{i,k} \otimes h_i \quad (3).$

Pela Observação 2.6.4, temos que $\overline{\rho} : A^* \otimes_K A^* \otimes_K A^* \longrightarrow (A \otimes_K A \otimes_K A)^*$ com $\overline{\rho}(f \otimes g \otimes h)(a \otimes a' \otimes a'') = f(a)g(a')h(a'')$ está bem definida. Aplicando $\overline{\rho}$ em (2) e (3), obtemos respectivamente:

$$\overline{\rho}(\sum_i \sum_j g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j})(\sum_r a_r \otimes a'_r \otimes a''_r) =$$

$$\sum_r \sum_i \sum_j g_i(a_r) h'_{i,j}(a'_r) h''_{i,j}(a''_r) = \sum_r \sum_i (g_i(a_r) \underbrace{\sum_j h'_{i,j}(a'_r) h''_{i,j}(a''_r))}_{\text{por } (1)}$$

$$= \underbrace{\sum_r \sum_i g_i(a_r) h_i(a'_r a''_r)}_{\text{por } (1)} = \sum_r f(a_r(a'_r a''_r));$$

$$\overline{\rho}(\sum_i \sum_k g'_{i,k} \otimes g''_{i,k} \otimes h_i)(\sum_r a_r \otimes a'_r \otimes a''_r) = \sum_r f(a_r(a'_r a''_r)).$$

Da injetividade de $\overline{\rho}$, segue-se que $\sum_i \sum_j g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j} = \sum_i \sum_k g'_{i,k} \otimes g''_{i,k} \otimes h_i$, isto é, $(id \otimes \Delta) \circ \Delta(f) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(f)$, para todo $f \in A^*$. Logo $(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$.

Seja $f \in A^*$. Temos que:

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(f) &= (\varepsilon \otimes id)(\sum_i g_i \otimes h_i) = \sum_i \varepsilon(g_i) \otimes h_i \\ &= \sum_i (\Psi \circ \mu^*(g_i)) \otimes h_i = \sum_i \Psi(\mu^*(g_i)) \otimes h_i = \sum_i \Psi(g_i \circ \mu) \otimes h_i \\ &= \sum_i (g_i \circ \mu(1_K)) \otimes h_i = \sum_i g_i(1_A) \otimes h_i = \sum_i 1_K \otimes g_i(1_A)h_i \\ &= 1_K \otimes \sum_i g_i(1_A)h_i.\end{aligned}$$

Seja $a \in A$. Então

$$(\sum_i g_i(1_A)h_i)(a) = \underbrace{\sum_i g_i(1_A)h_i(a) = f(1_A a)}_{\text{por } (1)} = f(a).$$

Logo $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(f) = 1_K \otimes f$, para todo $f \in A^*$.

$$\begin{aligned}(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(f) &= (id \otimes \varepsilon)(\sum_i g_i \otimes h_i) = \sum_i g_i \otimes \varepsilon(h_i) \\ &= \sum_i g_i \otimes (\Psi \circ \mu^*(h_i)) = \sum_i g_i \otimes \Psi(\mu^*(h_i)) = \sum_i g_i \otimes \Psi(h_i \circ \mu) \\ &= \sum_i g_i \otimes (h_i \circ \mu(1_K)) = \sum_i g_i \otimes h_i(1_A) = (\sum_i g_i h_i(1_A)) \otimes 1_K.\end{aligned}$$

Seja $a \in A$. Então

$$(\sum_i g_i h_i(1_A))(a) = \underbrace{\sum_i g_i(a)h_i(1_A) = f(a1_A)}_{\text{por } (1)} = f(a).$$

Logo $(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(f) = f \otimes 1_K$, para todo $f \in A^*$.

Portanto $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ satisfaz a Definição 2.1.1. $\square$

Não utilizamos a notação sigma no desenvolvimento de $\Delta(f)$, com $f \in A^*$, na demonstração acima, para evitarmos confusão. Demonstrado que $(\Delta \circ id) \circ \Delta(f) = (id \circ \Delta) \circ \Delta(f)$, para todo $f \in A^*$, utilizaremos a notação sigma na demonstração da próxima proposição.

Proposição 2.6.8. *Se H é uma biálgebra (sobre um corpo K) de dimensão finita, então H^* é uma biálgebra, denominada "biálgebra dual".*

Demonstração. Por hipótese, temos que $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra, onde

$dim(H) < +\infty$. Portanto $(H^*, m_{H^*}, \mu_{H^*}, \Delta_{H^*}, \varepsilon_{H^*})$ é uma K-álgebra e uma K-coálgebra com:

(i) $m_{H^*}(f \otimes j) = (\Delta^* \circ \rho)(f \otimes j) = \rho(f \otimes j) \circ \Delta = f * j$, para todo $f, j \in H^*$;

(ii) $\mu_{H^*}(\lambda) = \lambda 1_{H^*}$, com $\lambda \in K$ e $1_{H^*} = \mu_K \circ \varepsilon = \varepsilon$;

(iii) $\Delta_{H^*} = \rho^{-1} \circ m^*$;

(iv) $\varepsilon_{H^*} = \Psi \circ \mu^*$, onde $\Psi(\gamma) = \gamma(1_K)$, para todo $\gamma \in K^*$.

Do Exemplo 1.2.3 (ver definição de $m_{A \otimes_K B}$, onde A e B são K-álgebras) com a Observação 1.2.2 item **(i)** e do fato de H ser uma biálgebra, temos também que $\Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(g) = (\sum\limits_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)})(\sum\limits_{(g)} g_{(1)} \otimes g_{(2)}) = \sum\limits_{(h)} \sum\limits_{(g)} h_{(1)}g_{(1)} \otimes h_{(2)}g_{(2)}$, para todo $h, g \in H$.

Seja $f \in H^*$. Temos que $\Delta_{H^*}(f) = \rho^{-1} \circ m^*(f)$. Daí $\rho \circ \Delta_{H^*}(f) = m^*(f) = f \circ m$. Dados $h, g \in H$, segue-se que $\rho(\sum\limits_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)})(h \otimes g) = f \circ m(h \otimes g)$. Logo $\sum\limits_{(f)} f_{(1)}(h) f_{(2)}(g) = f(hg)$ $(\star)$.

Sejam $f, j \in H^*$ e $h, g \in H$. Então

$$\begin{aligned}
m_{H^*}(f \otimes j)(hg) &= \Delta^* \circ \rho(f \otimes j)(hg) = \rho(f \otimes j) \circ \Delta(hg) \\
&= \rho(f \otimes j)(\sum_{(h)} \sum_{(g)} h_{(1)}g_{(1)} \otimes h_{(2)}g_{(2)}) = \sum_{(h)} \sum_{(g)} \underbrace{f(h_{(1)}g_{(1)}) j(h_{(2)}g_{(2)})}_{\text{por } (\star)} \\
&= \sum_{(h)} \sum_{(g)} [\sum_{(f)} f_{(1)}(h_{(1)}) f_{(2)}(g_{(1)})][\sum_{(j)} j_{(1)}(h_{(2)}) j_{(2)}(g_{(2)})] \\
&= \sum_{(f)} \sum_{(j)} [\sum_{(h)} f_{(1)}(h_{(1)}) j_{(1)}(h_{(2)})][\sum_{(g)} f_{(2)}(g_{(1)}) j_{(2)}(g_{(2)})] \\
&= \sum_{(f)} \sum_{(j)} [(f_{(1)} * j_{(1)})(h)][(f_{(2)} * j_{(2)})(g)] \\
&= (\sum_{(f)} \sum_{(j)} m_K \circ ((f_{(1)} * j_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * j_{(2)})))(h \otimes g).
\end{aligned}$$

Logo $(f * j)(hg) = (\sum\limits_{(f)} \sum\limits_{(j)} m_K \circ ((f_{(1)} * j_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * j_{(2)})))(h \otimes g)$.

Por outro lado, temos também de ($\star$) que

$$(f*j)(hg) = \sum_{(f*j)} (f*j)_{(1)}(h)(f*j)_{(2)}(g)$$
$$= (\sum_{(f*j)} m_K \circ ((f*j)_{(1)} \otimes (f*j)_{(2)}))(h \otimes g).$$

Portanto

$$\sum_{(f)}\sum_{(j)} m_K \circ ((f_{(1)} * j_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * j_{(2)})) = \sum_{(f*j)} m_K \circ ((f*j)_{(1)} \otimes (f*j)_{(2)}).$$

Como $m_K : K \otimes_K K \longrightarrow K$ definida por $\lambda_1 \otimes \lambda_2 \mapsto \lambda_1\lambda_2$ é um isomorfismo, segue-se que

$$\sum_{(f)}\sum_{(j)} (f_{(1)} * j_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * j_{(2)}) = \sum_{(f*j)} (f*j)_{(1)} \otimes (f*j)_{(2)}.$$

Logo

$$\Delta_{H^*} \circ m_{H^*}(f \otimes j) = \Delta_{H^*}(f*j) = \sum_{(f*j)} (f*j)_{(1)} \otimes (f*j)_{(2)}$$
$$= \sum_{(f)}\sum_{(j)} (f_{(1)} * j_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * j_{(2)}).$$

Pelo Exemplo 1.2.3, temos que

$$m_{H^* \otimes_K H^*} \circ (\Delta_{H^*} \otimes \Delta_{H^*})(f \otimes j) = m_{H^* \otimes_K H^*}((\sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)}) \otimes (\sum_{(j)} j_{(1)} \otimes j_{(2)}))$$
$$= \sum_{(f)}\sum_{(j)} (f_{(1)} * j_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * j_{(2)}).$$

Portanto $\Delta_{H^*} \circ m_{H^*} = m_{H^* \otimes_K H^*} \circ (\Delta_{H^*} \otimes \Delta_{H^*})$.

Observemos também que $\Delta_{H^*}(f), \Delta_{H^*}(j) : H \otimes_K H \longrightarrow K \otimes_K K$, onde $K \otimes_K K$ é uma K-álgebra e $H \otimes_K H$ é uma K-coálgebra (conforme os Exemplos 1.2.3 e 2.4.6 respectivamente), o que nos permite definir o produto de convolução de $\Delta_{H^*}(f)$ por $\Delta_{H^*}(j)$, que denotamos por $\Delta_{H^*}(f) * \Delta_{H^*}(j)$ (por comodidade, usamos o mesmo símbolo $*$ usado no produto de convolução de f por j, com $f, j \in H^*$). Sejam $h, g \in H$. Então

$$\Delta_{H^*}(f) * \Delta_{H^*}(j)(h \otimes g) = m_{K \otimes_K K} \circ (\Delta_{H^*}(f) \otimes \Delta_{H^*}(j)) \circ \Delta_{H \otimes_K H}(h \otimes g),$$

onde $m_{K \otimes_K K} = (m_K \otimes m_K) \circ (id_K \otimes \tau' \otimes id_K)$ e $\Delta_{H \otimes_K H} = (id_H \otimes \tau \otimes id_H) \circ (\Delta \otimes \Delta)$.

Temos:

$$\begin{aligned}
\Delta_{H\otimes_K H}(h\otimes g) &= (id_H\otimes\tau\otimes id_H)\circ(\Delta\otimes\Delta)(h\otimes g)\\
&= (id_H\otimes\tau\otimes id_H)((\sum_{(h)} h_{(1)}\otimes h_{(2)})\otimes(\sum_{(g)} g_{(1)}\otimes g_{(2)}))\\
&= \sum_{(h)}\sum_{(g)} h_{(1)}\otimes g_{(1)}\otimes h_{(2)}\otimes g_{(2)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{H^*}(f)\otimes\Delta_{H^*}(j) &= (\sum_{(f)} f_{(1)}\otimes f_{(2)})\otimes(\sum_{(j)} j_{(1)}\otimes j_{(2)})\\
&= \sum_{(f)}\sum_{(j)} f_{(1)}\otimes f_{(2)}\otimes j_{(1)}\otimes j_{(2)}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\Delta_{H^*}(f)*\Delta_{H^*}(j)(h\otimes g) &= m_{K\otimes_K K}\circ(\Delta_{H^*}(f)\otimes\Delta_{H^*}(j))\circ\Delta_{H\otimes_K H}(h\otimes g)\\
&= m_{K\otimes_K K}(\sum_{(f)}\sum_{(j)}\sum_{(h)}\sum_{(g)} f_{(1)}(h_{(1)})\otimes f_{(2)}(g_{(1)})\otimes j_{(1)}(h_{(2)})\otimes j_{(2)}(g_{(2)}))\\
&= \sum_{(f)}\sum_{(j)}\sum_{(h)}\sum_{(g)} f_{(1)}(h_{(1)})j_{(1)}(h_{(2)})\otimes f_{(2)}(g_{(1)})j_{(2)}(g_{(2)})\\
&= \sum_{(f)}\sum_{(j)}(\sum_{(h)} f_{(1)}(h_{(1)})j_{(1)}(h_{(2)}))\otimes(\sum_{(g)} f_{(2)}(g_{(1)})j_{(2)}(g_{(2)}))\\
&= \sum_{(f)}\sum_{(j)} f_{(1)}*j_{(1)}(h)\otimes f_{(2)}*j_{(2)}(g),
\end{aligned}$$

sendo esta última expressão, conforme mostrado acima, igual a $\Delta_{H^*}(f*j)(h\otimes g)$.

Logo $\Delta_{H^*}(f*j)=\Delta_{H^*}(f)*\Delta_{H^*}(j)$, para todo $f,j\in H^*$.

Pela Observação 1.2.2 e pelo Exemplo 1.2.3, temos que $1_{H^*\otimes_K H^*}=\varepsilon\otimes\varepsilon$.

Por hipótese, ε é um homomorfismo de álgebras. Logo $\varepsilon(hg)=\varepsilon(h)\varepsilon(g)$, para todo $h,g\in H$. Temos:

$\Delta_{H^*}(\varepsilon)(h\otimes g)=\sum_{(\varepsilon)}\varepsilon_{(1)}(h)\otimes\varepsilon_{(2)}(g)$. Portanto $m_K(\sum_{(\varepsilon)}\varepsilon_{(1)}(h)\otimes\varepsilon_{(2)}(g))=\sum_{(\varepsilon)}\varepsilon_{(1)}(h)\varepsilon_{(2)}(g)=\varepsilon(hg)=\varepsilon(h)\varepsilon(g)$.

Por outro lado, $m_K\circ(\varepsilon\otimes\varepsilon)(h\otimes g)=\varepsilon(h)\varepsilon(g)$. Então

$m_K(\sum_{(\varepsilon)}\varepsilon_{(1)}(h)\otimes\varepsilon_{(2)}(g))=m_K(\varepsilon\otimes\varepsilon(h\otimes g))$.

Da injetividade de m_K, segue-se que

$\Delta_{H^*}(\varepsilon)(h\otimes g)=\sum_{(\varepsilon)}\varepsilon_{(1)}(h)\otimes\varepsilon_{(2)}(g)=\varepsilon\otimes\varepsilon(h\otimes g)$, para todo $h,g\in H$. Logo $\Delta_{H^*}(\varepsilon)=\varepsilon\otimes\varepsilon$.

Portanto Δ_{H^*} é um homomorfismo de K-álgebras.

Sejam $f,j\in H^*$. Como Δ é um homomorfismo de K-álgebras, temos que $\Delta(1_H)=1_H\otimes 1_H$. Segue-se que

$$\begin{aligned}\varepsilon_{H^*}(f*j)&=\Psi\circ\mu^*(f*j)=\Psi(\mu^*(f*j))\\&=\Psi((f*j)\circ\mu)=(f*j)\circ\mu(1_K)=f*j(1_H)=m_K\circ(f\otimes j)\circ\Delta(1_H)\\&=m_K\circ(f\otimes j)(1_H\otimes 1_H)=f(1_H)j(1_H)=\varepsilon_{H^*}(f)\varepsilon_{H^*}(j).\end{aligned}$$

Como ε é um homomorfismo de K-álgebras, temos que $\varepsilon(1_H)=1_K$. Logo $\varepsilon_{H^*}(1_{H^*})=\varepsilon_{H^*}(\varepsilon)=\varepsilon(1_H)=1_K$.

Logo ε_{H^*} é um homomorfismo de K-álgebras.

Portanto H^* é uma biálgebra. $\square$

Proposição 2.6.9. *Seja H uma álgebra de Hopf (sobre um corpo K) de dimensão finita com antípoda S. Então sua biálgebra dual H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda $S_{H^*}=S^*$.*

Demonstração. Seja $f\in H^*$. Temos que:

$$\begin{aligned}\mu_{H^*}\circ\varepsilon_{H^*}(f)&=\mu_{H^*}(\varepsilon_{H^*}(f))=\mu_{H^*}(f(1_H))=f(1_H)\mu_{H^*}(1_K)=f(1_H)1_{H^*}\\&=f(1_H)\varepsilon;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{H^*}\circ(id_{H^*}\otimes S^*)\circ\Delta_{H^*}(f)&=m_{H^*}\circ(id_{H^*}\otimes S^*)(\sum_{(f)}f_{(1)}\otimes f_{(2)})\\&=\sum_{(f)}m_{H^*}(f_{(1)}\otimes S^*(f_{(2)}))\\&=\sum_{(f)}m_{H^*}(f_{(1)}\otimes(f_{(2)}\circ S))\\&=\sum_{(f)}f_{(1)}*(f_{(2)}\circ S);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{H^*}\circ(S^*\otimes id_{H^*})\circ\Delta_{H^*}(f)&=m_{H^*}\circ(S^*\otimes id_{H^*})(\sum_{(f)}f_{(1)}\otimes f_{(2)})\\&=\sum_{(f)}(f_{(1)}\circ S)*f_{(2)}.\end{aligned}$$

Sendo H uma álgebra de Hopf, temos, pelo Exemplo 2.4.5, que $\varepsilon(h)1_H = \sum_{(h)} h_{(1)}S(h_{(2)}) = \sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)}$, para todo $h \in H$. Segue-se que, para quaisquer $h \in H$ e $f \in H^*$:

$$(\mu_{H^*} \circ \varepsilon_{H^*}(f))(h) = f(1_H)\varepsilon(h);$$

$$(m_{H^*} \circ (id_{H^*} \otimes S^*) \circ \Delta_{H^*}(f))(h) = \sum_{(f)} (f_{(1)} * (f_{(2)} \circ S))(h)$$
$$= \sum_{(f)} \sum_{(h)} f_{(1)}(h_{(1)}) f_{(2)}(S(h_{(2)})) = \sum_{(h)} \sum_{(f)} f_{(1)}(h_{(1)}) f_{(2)}(S(h_{(2)}))$$
$$= \sum_{(h)} f(h_{(1)}S(h_{(2)})) = f(\sum_{(h)} h_{(1)}S(h_{(2)})) = f(\varepsilon(h)1_H)$$
$$= \varepsilon(h)f(1_H) = f(1_H)\varepsilon(h);$$

$$(m_{H^*} \circ (S^* \otimes id_{H^*}) \circ \Delta_{H^*}(f))(h) = \sum_{(f)} ((f_{(1)} \circ S) * f_{(2)})(h)$$
$$= \sum_{(f)} \sum_{(h)} f_{(1)}(S(h_{(1)})) f_{(2)}(h_{(2)}) = \sum_{(h)} \sum_{(f)} f_{(1)}(S(h_{(1)})) f_{(2)}(h_{(2)})$$
$$= \sum_{(h)} f(S(h_{(1)})h_{(2)}) = f(\sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)}) = f(\varepsilon(h)1_H)$$
$$= \varepsilon(h)f(1_H) = f(1_H)\varepsilon(h).$$

Logo $\mu_{H^*} \circ \varepsilon_{H^*} = m_{H^*} \circ (id_{H^*} \otimes S^*) \circ \Delta_{H^*} = m_{H^*} \circ (S^* \otimes id_{H^*}) \circ \Delta_{H^*}$.

Portanto H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^*. □

Definição 2.6.10. *Seja A uma K-álgebra. Dizemos que $x \in A$ é um idempotente central em A quando $x^2 = x$ e $xa = ax$, para todo $a \in A$.*

Exemplo 2.6.11. *Sejam um grupo $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ base do K-espaço vetorial KG e a sua base dual $G^* = \{p_{g_i} : g_i \in G\}$, isto é, $p_{g_i}(g_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Então valem:*

(i) *$p_{g_i} * p_{g_i} = p_{g_i}$ e $p_{g_i} * p_{g_j} = 0$ quando $g_i \neq g_j$;*

(ii) *$\Delta_{KG^*}(p_{g_k}) = \sum_{i=1}^{n} p_{g_i} \otimes p_{g_i^{-1}g_k}$;*

(iii) *$\varepsilon_{KG^*}(p_{g_i}) = 1_K$ quando $g_i = 1_G$ e $\varepsilon_{KG^*}(p_{g_i}) = 0_K$ quando $g_i \neq 1_G$;*

(iv) *$S_{KG^*}(p_{g_i})(g_j) = 1_K$ quando $g_i = {g_j}^{-1}$ e $S_{KG^*}(p_{g_i})(g_j) = 0_K$ quando $g_i \neq {g_j}^{-1}$.*

De fato, seja $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \in KG$. *Então* $\Delta(x) = \Delta(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i g_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta(g_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (g_i \otimes g_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i g_i) \otimes g_i$. *Segue-se que* $p_{g_k} * p_{g_k}(x) = p_{g_k}(\lambda_1 g_1) p_{g_k}(g_1) + \ldots + p_{g_k}(\lambda_k g_k) p_{g_k}(g_k) + \ldots + p_{g_k}(\lambda_n g_n) p_{g_k}(g_n) = \lambda_k$. *Por outro lado, temos que* $p_{g_k}(x) = p_{g_k}(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i g_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_{g_k}(g_i) = \lambda_k$. *Logo* $p_{g_k} * p_{g_k} = p_{g_k}$, *para todo* $k = 1, \ldots, n$. *Suponhamos agora* $g_j \neq g_k$. *Segue-se que* $p_{g_j} * p_{g_k}(x) = p_{g_j} * p_{g_k}(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i g_i) = p_{g_j}(\lambda_1 g_1) p_{g_k}(g_1) + \ldots + p_{g_j}(\lambda_j g_j) p_{g_k}(g_j) + \ldots + p_{g_j}(\lambda_k g_k) p_{g_k}(g_k) + \ldots + p_{g_j}(\lambda_n g_n) p_{g_k}(g_n) = 0_K$. *Logo* $p_{g_j} * p_{g_k} = 0$ *quando* $g_j \neq g_k$.

Seja $f \in KG^*$. *Logo* $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_{g_i}$, *com* $\lambda_i \in K$. *Decorre do que vimos acima que* $(\sum\limits_{i=1}^{n} p_{g_i}) * f = (\sum\limits_{i=1}^{n} p_{g_i}) * (\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_{g_i}) = p_{g_1} * (\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_{g_i}) + \ldots + p_{g_n} * (\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_{g_i}) = \lambda_1 p_{g_1} + \ldots + \lambda_n p_{g_n} = f$. *Analogamente, temos que* $f * (\sum\limits_{i=1}^{n} p_{g_i}) = f$. *Então* $1_{KG^*} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{g_i}$. *Ainda,* $p_{g_i} * f = f * p_{g_i} (= \lambda_i p_{g_i})$, *para todo* $i = 1, \ldots, n$. *Logo* $KG^* = \{p_{g_i} : g_i \in G\}$ *é um conjunto de idempotentes centrais em* KG^* *dois a dois ortogonais.*

Sendo $\{p_{g_1}, \ldots, p_{g_n}\}$ *uma base de* KG^*, *segue-se do Lema 2.6.1 que* $\{p_{g_i} \otimes p_{g_j} : 1 \leq i, j \leq n\}$ *é uma base de* $KG^* \otimes_K KG^*$. *Logo* $\Delta_{KG*}(p_{g_k}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij} (p_{g_i} \otimes p_{g_j}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\lambda_{ij} p_{g_i}) \otimes p_{g_j}$, *com* $\lambda_{ij} \in K$. *Sejam agora* $g_r, g_s \in G$ *arbitrários. Logo* $p_{g_k}(g_r g_s) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_{g_i}(g_r) p_{g_j}(g_s) = \lambda_{rs}$. *Portanto* $\lambda_{rs} = 1_K$ *quando* $g_r g_s = g_k$ *e* $\lambda_{rs} = 0_K$ *quando* $g_r g_s \neq g_k$, *onde* $1 \leq r, s \leq n$, *ou seja,* $\lambda_{rs} = 1_K$ *quando* $g_s = {g_r}^{-1} g_k$ *e* $\lambda_{rs} = 0_K$ *quando* $g_s \neq {g_r}^{-1} g_k$, *onde* $1 \leq r, s \leq n$. *Então* $\Delta_{KG^*}(p_{g_k}) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{g_i} \otimes p_{{g_i}^{-1} g_k}$.

Temos também que $\varepsilon_{KG^*}(p_{g_i}) = p_{g_i}(1_K 1_G) = p_{g_i}(1_G)$. *Logo* $\varepsilon_{KG^*}(p_{g_i}) = 1_K$ *quando* $g_i = 1_G$ *e* $\varepsilon_{KG^*}(p_{g_i}) = 0_K$ *quando* $g_i \neq 1_G$.

Seja S *a antípoda de* KG. *Então* $S_{KG^*}(p_{g_i})(g_j) = S^*(p_{g_i})(g_j) = (p_{g_i} \circ S)(g_j) = p_{g_i}({g_j}^{-1})$. *Logo* $S_{KG^*}(p_{g_i})(g_j) = 1_K$ *quando* $g_i = {g_j}^{-1}$ *e* $S_{KG^*}(p_{g_i})(g_j) = 0_K$ *quando* $g_i \neq {g_j}^{-1}$.

Capítulo 3

A ENVOLVENTE DE UMA AÇÃO PARCIAL DE GRUPO

O estudo deste capítulo, com exceção da definição de álgebra, prescinde do estudo dos dois primeiros capítulos. São vistos os conceitos de ação parcial de grupo (sobre uma álgebra) e quais as condições (necessárias e suficientes) para a existência da envolvente de uma ação parcial de grupo. Acrescentamos neste estudo a definição do *skew anel de grupo parcial* e uma condição suficiente para que o mesmo tenha multiplicação associativa. Ainda, a partir deste capítulo, consideramos, em algumas ocasiões, que uma aplicação $f : A \longrightarrow B$, onde A e B são álgebras associativas (com ou sem unidade), é um homomorfismo de álgebras quando f for K-linear (isto é, f é um homomorfismo de K-módulos) e também satisfazer $f(ab) = f(a)f(b)$. Não exigimos que $f(1_A) = 1_B$, mesmo existindo as unidades de A e B. Este capítulo está baseado nos artigos [7], [9] e [15].

3.1 Ação parcial de grupo sobre uma álgebra

Começamos esta seção vendo o conceito de ação parcial de grupo sobre uma álgebra. Um primeiro exemplo de ação parcial de grupo é uma ação (global) de grupo sobre uma álgebra. Com esta mesma ação de grupo, construímos outra ação parcial de grupo a partir de uma certa restrição dos automorfimos que compõem esta ação (ver exemplo adiante). Apresentamos, a seguir, a definição de envolvente de uma ação parcial de grupo, exemplificando a mesma.

Definição 3.1.1. *Seja A uma K-álgebra. Dizemos que $\emptyset \neq I \subseteq A$ é um ideal de A se I é um K-módulo e $b.a \in I$ e $a.b \in I$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in I$.*

Definição 3.1.2. *Sejam G um grupo com unidade 1_G e A uma álgebra (não necessariamente com unidade). Uma **ação parcial** α de G sobre A é uma coleção de ideais D_g de A e uma coleção de isomorfismos de álgebras $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$, onde $g \in G$, tais que as seguintes condições valem:*

(i) *$D_{1_G} = A$ e $\alpha_{1_G} = id_A$;*

(ii) *$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$, para todo $g, h \in G$;*

(iii) *$\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$ e para todo $g, h \in G$.*

Observação 3.1.3. *Temos que $\alpha_{h^{-1}} = {\alpha_h}^{-1}$, para todo $h \in G$. De fato, seja $h \in G$. Da definição anterior, temos:*

$\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_h(x) = \alpha_{h^{-1}h}(x) = \alpha_{1_G}(x) = x$, *para todo* $x \in {\alpha_h}^{-1}(D_h \cap D_h) = D_{h^{-1}}$;

$\alpha_h \circ \alpha_{h^{-1}}(x) = \alpha_{hh^{-1}}(x) = \alpha_{1_G}(x) = x$, *para todo* $x \in {\alpha_{h^{-1}}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}}) = D_h$.

Exemplo 3.1.4. *Sejam G um grupo com unidade 1_G e B uma álgebra (não necessariamente com unidade). Uma **ação global** (ou simplesmente uma ação) β de G sobre B é uma coleção de automorfismos de álgebras $\beta_g : B \longrightarrow B$, com $g \in G$, tal que valem:*

(i) *$\beta_{1_G} = id_B$;*

(ii) *$\beta_g \circ \beta_h(x) = \beta_{gh}(x)$, para todo $x \in B$ e para todo $g, h \in G$.*

Observemos que ${\beta_g}^{-1} = \beta_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$. É fácil ver que toda ação global é uma ação parcial. Para isto, basta tomar $D_g = B$ e $\alpha_g = \beta_g$, para todo $g \in G$.

Exemplo 3.1.5. *Suponhamos que um grupo G atue sobre uma álgebra B pelos automorfismos $\beta_g : B \longrightarrow B$, com $g \in G$. Seja A um ideal de B. Consideremos*

$D_g = A \cap \beta_g(A)$ e α_g a restrição de β_g a $D_{g^{-1}}$. Então $\alpha = \{(D_g)_{g \in G}$ e $(\alpha_g : D_{g-1} \longrightarrow D_g)_{g \in G}\}$ é uma ação parcial de G sobre A.

De fato, temos que A, por definição, é uma K-subálgebra de B.

Devemos verificar que, para todo $g, h \in G$, valem:

(i) *D_g é um ideal de A;*

(ii) *$\alpha_g(D_{g^{-1}}) = D_g$;*

(iii) *$\alpha_{1_G} = id_A$ e $D_{1_G} = A$;*

(iv) *$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$;*

(v) *$\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.*

(i)

Seja $x \in \beta_g(A)$, com $g \in G$ fixo. Então existe $a \in A$, tal que $x = \beta_g(a)$. Seja $b \in B$. Como β_g é um automorfismo, então existe $b' \in B$, tal que $b = \beta_g(b')$. Segue-se que $xb = \beta_g(a)\beta_g(b') = \beta_g(ab')$. Como A é um ideal de B, temos que $ab' \in A$. Logo $xb \in \beta_g(A)$. Segue-se também que $bx \in \beta_g(A)$. Isto mostra que $\beta_g(A)$ é um ideal de B. Portanto, $D_g = A \cap \beta_g(A)$ é um ideal de A (interseção de ideais é um ideal e $D_g = A \cap \beta_g(A) \subseteq A$, para todo $g \in G$).

(ii)

Temos que $\alpha_g(D_{g^{-1}}) = \beta_g(A \cap \beta_{g^{-1}}(A)) \subseteq \beta_g(A) \cap \beta_g \circ \beta_{g^{-1}}(A) = \beta_g(A) \cap A = D_g$.

Por outro lado, seja $x \in D_g = A \cap \beta_g(A)$. Então existe $y \in A$, tal que $x = \beta_g(y)$. Logo $y = \beta_{g^{-1}}(x)$, com $x \in A$. Segue-se que $y \in A \cap \beta_{g^{-1}}(A) = D_{g^{-1}}$. Portanto $x \in \beta_g(D_{g^{-1}}) = \alpha_g(D_{g^{-1}})$ e, daí, $\alpha_g(D_{g^{-1}}) = D_g$, para todo $g \in G$.

(iii)

Temos que $D_{1_G} = A \cap \beta_{1_G}(A) = A \cap A = A$. Ainda, $\alpha_{1_G}(x) = \beta_{1_G}(x) = x$, para todo $x \in D_{1_G} = A$, ou seja, $\alpha_{1_G} = id_A$.

(iv)

Temos que $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq \alpha_g(D_{g^{-1}}) = D_g$.

Seja $x \in \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = \alpha_g((A \cap \beta_{g^{-1}}(A)) \cap (A \cap \beta_h(A))) = \alpha_g(A \cap \beta_{g^{-1}}(A) \cap \beta_h(A))$*. Então existe* $y \in A \cap \beta_{g^{-1}}(A) \cap \beta_h(A)$*, tal que* $x = \alpha_g(y)$*. Daí existem* $a, a' \in A$*, tais que* $y = \beta_{g^{-1}}(a)$ *e* $y = \beta_h(a')$*. Logo* $x = \alpha_g(y) = \alpha_g(\beta_{g^{-1}}(a)) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(a)) = a$ *e, portanto,* $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq A$*. Ainda,* $x = a = \beta_g(y) = \beta_g(\beta_h(a')) = \beta_{gh}(a')$*. Isto mostra que* $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq \beta_{gh}(A)$*. Portanto* $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq A \cap \beta_{gh}(A) = D_{gh}$*. Segue-se que* $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_g \cap D_{gh}$*.*

Seja agora $x \in D_g \cap D_{gh} = (A \cap \beta_g(A)) \cap (A \cap \beta_{gh}(A)) = A \cap \beta_g(A) \cap \beta_{gh}(A)$*. Então existem* $a, a' \in A$*, tais que* $x = \beta_g(a) = \beta_{gh}(a') = \beta_g(\beta_h(a'))$*, com* $x \in A$*. Como* β_g *é um automorfismo, segue-se que* $a = \beta_h(a')$*, com* $a, a' \in A$*. Logo* $a \in A \cap \beta_h(A) = D_h$*. Como* $x = \beta_g(a)$*, então* $a = \beta_{g^{-1}}(x)$*, com* $x \in A$*, e, portanto,* $a \in A \cap \beta_{g^{-1}}(A) = D_{g^{-1}}$*. Segue-se que* $x = \beta_g(a)$*, com* $a \in D_{g^{-1}} \cap D_h$*. Logo* $x \in \beta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h)$*, ou seja,* $D_g \cap D_{gh} \subseteq \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h)$*.*

(v)

Temos também que $\beta_g \circ \beta_h(x) = \beta_{gh}(x) = \alpha_{gh}(x)$*, para todo* $x \in D_{(gh)^{-1}} \cap D_{h^{-1}}$*. Ainda* $\beta_g \circ \beta_h(x) = \beta_g(\beta_h(x)) = \beta_g(\underbrace{\alpha_h(x)}_{\in D_h \cap D_{g^{-1}}}) = \alpha_g(\alpha_h(x))$*, para todo* $x \in D_{(gh)^{-1}} \cap D_{h^{-1}}$*. Logo* $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$*, para todo* $x \in D_{(gh)^{-1}} \cap D_{h^{-1}}$*.*

Seja $\emptyset \neq S \subseteq A$, onde A é uma álgebra. O K-submódulo de A gerado por $\{s_1.s_2.\ldots.s_n : s_1, s_2, \ldots, s_n \in S\}$ munido com as operações herdadas de A é um álgebra por si só. Tal álgebra é denominada **álgebra gerada** por S. Usaremos este tipo de construção na seguinte definição:

Definição 3.1.6. *Uma ação* β *de um grupo* G *sobre uma álgebra* B *é dita uma* ***ação envolvente*** *(ou simplesmente uma envolvente) de uma ação parcial* α *de* G *sobre uma álgebra* A *se existir um isomorfismo de álgebras* $\varphi : A \longrightarrow I$*, onde* I *é um ideal de* B*, tal que, para todo* $g \in G$*, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) $\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$*;*

(ii) $\varphi \circ \alpha_g(x) = \beta_g \circ \varphi(x)$*, para todo* $x \in D_{g^{-1}}$*;*

(iii) *B é gerada por* $\cup_{g \in G} \beta_g(\varphi(A))$*.*

Proposição 3.1.7. *Todo elemento da álgebra gerada por* $\cup_{g\in G}\beta_g(\varphi(A))$ *(da Definição 3.1.6) é da forma* $\sum\limits_i \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ *(soma finita).*

Demonstração. De fato, um elemento genérico da álgebra gerada por $\cup_{g\in G}\beta_g(\varphi(A))$ é da forma $\lambda^{(1)}\prod\limits_i \beta_{g_i{}^{(1)}}(\varphi(a_i{}^{(1)}))+\lambda^{(2)}\prod\limits_j \beta_{g_j{}^{(2)}}(\varphi(a_j{}^{(2)}))+\ldots+\lambda^{(n)}\prod\limits_r \beta_{g_r^{(n)}}(\varphi(a_r^{(n)}))$, onde $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\ldots,\lambda^{(n)}\in K$. Sejam $\lambda\in K$, $a_1,a_2\in A$ e $g_1,g_2\in G$. Como $\varphi(A)$ é um ideal de B, então $\beta_g(\varphi(A))$ é um ideal de B, para todo $g\in G$ (ver item (i) do exemplo 3.1.5). Em particular, $\beta_{g_1}(\varphi(A))$ é um ideal de B. Logo $\lambda\beta_{g_1}(\varphi(a_1))\beta_{g_2}(\varphi(a_2))=\beta_{g_1}(\varphi(\lambda a_1))\beta_{g_2}(\varphi(a_2))\in\beta_{g_1}(\varphi(A))$. Então existe $a_3\in A$, tal que $\lambda\beta_{g_1}(\varphi(a_1))\beta_{g_2}(\varphi(a_2))=\beta_{g_1}(\varphi(a_3))$, donde o resultado desejado. $\square$

Exemplo 3.1.8. *Consideremos* $G=\{1,g,g^2,g^3\}$ *um grupo e a* $\mathbb{R}$*-álgebra* $A=\mathbb{R}^2$. *Definamos* $\alpha=\{D_1=A; D_g=\mathbb{R}e_2; D_{g^2}=\{0\}; D_{g^3}=\mathbb{R}e_1; \alpha_1=id_A; \alpha_g: e_1\mapsto e_2; \alpha_{g^2}: 0\mapsto 0; \alpha_{g^3}: e_2\mapsto e_1\}$, *onde* $e_1=(1,0)$ *e* $e_2=(0,1)$. *Temos que* α *é uma ação parcial de* G *sobre* A. *Seja* $B=\mathbb{R}^4$. *Definamos* $\beta=\{\beta_1=id_B,\beta_g:\overline{e_1}\mapsto\overline{e_2},\overline{e_2}\mapsto\overline{e_3},\overline{e_3}\mapsto\overline{e_4},\overline{e_4}\mapsto\overline{e_1};\beta_{g^2}:\overline{e_1}\mapsto\overline{e_3},\overline{e_2}\mapsto\overline{e_4},\overline{e_3}\mapsto\overline{e_1},\overline{e_4}\mapsto\overline{e_2};\beta_{g^3}:\overline{e_1}\mapsto\overline{e_4},\overline{e_2}\mapsto\overline{e_1},\overline{e_3}\mapsto\overline{e_2},\overline{e_4}\mapsto\overline{e_3}\}$, *onde* $\{\overline{e_i}: i=1,\ldots,4\}$ *é a base canônica de* $\mathbb{R}^4$. *Temos que o par* (β,φ), *com* $\varphi: A\longrightarrow B$ *definido por* $e_1\mapsto\overline{e_1}, e_2\mapsto\overline{e_2}$, *é uma envolvente de* α.

De fato, verifica-se facilmente que A *é um* $\mathbb{R}$*-módulo com* $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$ *e* $\lambda(a_1,a_2)=(\lambda a_1,\lambda a_2)$, *para quaisquer* $\lambda,a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ *e uma* R*-álgebra com multiplicação* $m_A:(a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2)\mapsto(a_1b_1,a_2b_2)$. *Além disso,* A *tem unidade* $\mu_A: a\mapsto(a,a)$, *para todo* $a\in\mathbb{R}$.

Verifica-se também que $D_g=\mathbb{R}e_2$, $D_{g^2}=\{0\}$ *e* $D_{g^3}=\mathbb{R}e_1$ *são ideais (bilaterais) de* A.

É imediato que $\alpha_1,\alpha_g,\alpha_{g^2}$ *e* α_{g^3} *são isomorfismos de* $\mathbb{R}$*-álgebras. Devemos verificar que* $\alpha_h(D_{h^{-1}}\cap D_j)=D_h\cap D_{hj}$, *para todo* $h,j\in G$. *Observando que* $g^{-1}=g^3$, $(g^2)^{-1}=g^2$, *temos que:*

$\alpha_1(D_1\cap D_1)=D_1\cap D_1;$

$\alpha_1(D_1\cap D_g)=D_1\cap D_g;$

$\alpha_1(D_1\cap D_{g^2})=D_1\cap D_{g^2};$

$\alpha_1(D_1 \cap D_{g^3}) = D_1 \cap D_{g^3};$

$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_1) = D_g \cap D_g;$

$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_g) = \{0\} = D_g \cap D_{g^2};$

$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{g^2}) = \{0\} = D_g \cap D_{g^3};$

$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{g^3}) = D_g = D_g \cap D_1;$

$\alpha_{g^2}(D_{g^2} \cap D_j) = \{0\} = D_{g^2} \cap D_{g^2 j},$ *para todo* $j = 1, g, g^2, g^3;$

$\alpha_{g^3}(D_g \cap D_1) = D_{g^3} \cap D_{g^3};$

$\alpha_{g^3}(D_g \cap D_g) = D_{g^3} \cap D_1;$

$\alpha_{g^3}(D_g \cap D_{g^2}) = \{0\} = D_{g^3} \cap D_g;$

$\alpha_{g^3}(D_g \cap D_{g^3}) = \{0\} = D_{g^3} \cap D_{g^2};$

Devemos verificar agora que $\alpha_h \circ \alpha_j(x) = \alpha_{hj}(x)$, *para todo* $x \in D_{j^{-1}h^{-1}} \cap D_{j^{-1}}$, *onde* $h, j \in G$ *arbitrários. Temos que:*

$\alpha_1 \circ \alpha_1(x) = \alpha_1(x)$, *para todo* $x \in D_1 \cap D_1 = A$;

$\alpha_1 \circ \alpha_g(x) = \alpha_g(x)$, *para todo* $x \in D_{g^3} \cap D_{g^3}$;

$\alpha_1 \circ \alpha_{g^2}(x) = \alpha_{g^2}(x)$, *para todo* $x \in D_{g^2} \cap D_{g^2}$;

$\alpha_1 \circ \alpha_{g^3}(x) = \alpha_{g^3}(x)$, *para todo* $x \in D_g \cap D_g$;

$\alpha_g \circ \alpha_1(x) = \alpha_g(x)$, *para todo* $x \in D_{g^3} \cap D_1$;

$\alpha_g \circ \alpha_g(x) = \alpha_{g^2}(x)$, *para todo* $x \in D_{g^3 g^3} \cap D_{g^3} = D_{g^2} \cap D_{g^3} = \{0\}$;

$\alpha_g \circ \alpha_{g^2}(x) = \alpha_{g^3}(x)$, *para todo* $x \in D_{g^2 g^3} \cap D_{g^2} = \{0\}$;

$\alpha_g \circ \alpha_{g^3}(x) = \alpha_1(x)$, *para todo* $x \in D_{gg^3} \cap D_g = D_g$;

$\alpha_{g^2} \circ \alpha_1(x) = \alpha_{g^2}(x)$, *para todo* $x \in D_{g^2} \cap D_1 = \{0\}$;

$\alpha_{g^2} \circ \alpha_g(x) = \alpha_{g^3}(x)$, *para todo* $x \in D_{g^3 g^2} \cap D_{g^3} = D_g \cap D_{g^3} = \{0\}$;

$\alpha_{g^2} \circ \alpha_{g^2}(x) = \alpha_1(x)$, *para todo* $x \in D_1 \cap D_{g^2} = \{0\}$;

$\alpha_{g^2} \circ \alpha_{g^3}(x) = \alpha_{g^5}(x) = \alpha_g(x)$, *para todo* $x \in D_{gg^2} \cap D_g = \{0\}$;

$\alpha_{g^3} \circ \alpha_1(x) = \alpha_{g^3}(x)$, *para todo* $x \in D_g \cap D_1$;

$\alpha_{g^3} \circ \alpha_g(x) = \alpha_1(x)$, *para todo* $x \in D_{g^3 g} \cap D_{g^3} = D_{g^3}$;

$\alpha_{g^3} \circ \alpha_{g^2}(x) = \alpha_g(x)$, *para todo* $x \in D_{g^2 g} \cap D_{g^2} = \{0\}$;

$\alpha_{g^3} \circ \alpha_{g^3}(x) = \alpha_{g^2}(x)$, *para todo* $x \in D_{g^2} \cap D_g = \{0\}$.

Portanto α *é uma ação parcial de* G *sobre* A.

Temos também que B, *analogamente a* A, *é uma* $\mathbb{R}-$*álgebra (com unidade) e* $\beta_i \circ \beta_j = \beta_{ij}$, *para todo* $i, j = 1, g, g^2, g^3$. *Portanto* β *é uma ação global de* G *sobre* B.

Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ *com* $e_1 \mapsto \overline{e_1}, e_2 \mapsto \overline{e_2}$. *Verifica-se que* φ *é um isomorfismo de álgebras de* A *sobre* $\varphi(A) = \mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}$ *que é um ideal (bilateral) de* B. *Devemos verificar que, para todo* $h \in G$, *valem:*

(i) $\varphi(D_h) = \varphi(A) \cap \beta_h(\varphi(A))$;

(ii) $\varphi \circ \alpha_h(x) = \beta_h \circ \varphi(x)$, *para todo* $x \in D_{h^{-1}}$;

(iii) B *é gerada por* $\cup_{h \in G} \beta_h(\varphi(A))$.

Temos:

(i.1) $\varphi(D_1) = \varphi(A) = \varphi(A) \cap \beta_1(\varphi(A))$;

(i.2) $\varphi(D_g) = \varphi(\mathbb{R}e_2) = \mathbb{R}\overline{e_2}$; *por outro lado*, $\varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A)) = (\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}) \cap \beta_g(\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}) = (\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}) \cap (\mathbb{R}\overline{e_2} \oplus \mathbb{R}\overline{e_3}) = \mathbb{R}\overline{e_2}$;

(i.3) $\varphi(D_{g^2}) = \varphi(\{0\}) = \{0\}$; *por outro lado*, $\varphi(A) \cap \beta_{g^2}(\varphi(A)) = (\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}) \cap \beta_{g^2}(\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}) = (\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}) \cap (\mathbb{R}\overline{e_3} \oplus \mathbb{R}\overline{e_4}) = \{0\}$;

(i.4) $\varphi(D_{g^3}) = \varphi(\mathbb{R}e_1) = \mathbb{R}\overline{e_1}$; *Por outro lado*, $\varphi(A) \cap \beta_{g^3}(\varphi(A)) = (\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}) \cap \beta_{g^3}(\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}) = (\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}) \cap (\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_4}) = \mathbb{R}\overline{e_1}$;

(ii.1) $\varphi \circ \alpha_1(x) = \beta_1 \circ \varphi(x)$, *para todo* $x \in D_1 = A$;

(ii.2) $\varphi \circ \alpha_g(e_1) = \varphi(e_2) = \overline{e_2} = \beta_g(\overline{e_1}) = \beta_g \circ \varphi(e_1)$;

(ii.3) $\varphi \circ \alpha_{g^2}(0) = \beta_{g^2} \circ \varphi(0)$;

(ii.4) $\varphi \circ \alpha_{g^3}(e_2) = \varphi(e_1) = \overline{e_1} = \beta_{g^3}(\overline{e_2}) = \beta_{g^3} \circ \varphi(e_2)$;

(iii) *Temos também que B é uma álgebra gerada por $\cup_{h\in G}\beta_h(\varphi(A))$. De fato, temos*

$\beta_1(\varphi(A)) = \mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}; \beta_g(\varphi(A)) = \mathbb{R}\overline{e_2} \oplus \mathbb{R}\overline{e_3}$; $\beta_{g^2}(\varphi(A)) = \mathbb{R}\overline{e_3} \oplus \mathbb{R}\overline{e_4}$; $\beta_{g^3}(\varphi(A)) = \mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_4}$;

Obviamente, $(\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_2}) \cup (\mathbb{R}\overline{e_2} \oplus \mathbb{R}\overline{e_3}) \cup (\mathbb{R}\overline{e_3} \oplus \mathbb{R}\overline{e_4}) \cup (\mathbb{R}\overline{e_1} \oplus \mathbb{R}\overline{e_4})$ *gera B.*

3.2 A envolvente de uma ação parcial de grupo

Os dois lemas a seguir serão usados na prova da existência e da unicidade, a menos de equivalência (veja a definição de ações globais equivalentes adiante), da envolvente de uma dada ação parcial de um grupo G sobre uma álgebra unitária A cujos ideais D_g de A têm unidade.

Lema 3.2.1. *Seja A uma álgebra. Então, dados $x \in A$ e $\alpha = \{(D_g)_{g\in G}$ e $(\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g)_{g\in G}\}$ uma ação parcial de um grupo G sobre A, valem:*

(i) $\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = 1_g 1_{gh}$, *para todo $g, h \in G$;*

(ii) $\alpha_h(\alpha_g(x1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}) = \alpha_{hg}(x1_{g^{-1}h^{-1}})1_h$, *para todo $g, h \in G$ e para todo $x \in A$.*

Denotamos a unidade de D_g por 1_g que é um idempotente central em A. De fato, $1_g^2 = 1_g 1_g = 1_g$ e $a1_g = 1_g(a1_g) = (1_g a)1_g = 1_g a$, para todo $a \in A$.

Demonstração. Seja $x \in D_g \cap D_{gh}$. Temos que $x(1_g 1_{gh}) = (x1_g)1_{gh} = x1_{gh} = x$ e $(1_g 1_{gh})x = 1_g(1_{gh}x) = 1_g x = x$. Isto mostra que $1_g 1_{gh} = 1_{D_g \cap D_{gh}}$. Ainda, como $x \in D_g \cap D_{gh} = \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h)$, então existe $y \in D_{g^{-1}} \cap D_h$, tal que $x = \alpha_g(y)$. Segue-se que $x\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = \alpha_g(y)\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = \alpha_g(y(1_{g^{-1}}1_h)) = \alpha_g((y1_{g^{-1}})1_h) = \alpha_g(y1_h) = \alpha_g(y) = x$. Analogamente, temos que $\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)x = x$. Observemos que $\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) \in \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$. Da unicidade da unidade em $D_g \cap D_{gh}$, segue-se que $\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = 1_g 1_{gh}$, para todo $g, h \in G$.

Sejam $x \in A$ e $g, h \in G$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\alpha_h(\underbrace{\alpha_g(x1_{g^{-1}})}_{\in D_g} 1_{h^{-1}}) &= \alpha_h(\alpha_g(x1_{g^{-1}})1_g 1_{h^{-1}}) = \alpha_h(\alpha_g(x1_{g^{-1}}) \underbrace{\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}})}_{=1_g 1_{h^{-1}}}) \\
&= \alpha_h(\alpha_g(\underbrace{x1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}}}_{\in D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h^{-1}}})) = \alpha_{hg}(x1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}}) \\
&= \alpha_{hg}(x1_{g^{-1}h^{-1}}1_{g^{-1}}) = \alpha_{hg}(x1_{g^{-1}h^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}}1_{g^{-1}}) \\
&= \alpha_{hg}(x1_{g^{-1}h^{-1}})\alpha_{hg}(1_{g^{-1}h^{-1}}1_{g^{-1}}) = \underbrace{\alpha_{hg}(x1_{g^{-1}h^{-1}})}_{\in D_{hg}} 1_{hg}1_h \\
&= \alpha_{hg}(x1_{g^{-1}h^{-1}})1_h.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2.2. *Suponhamos que A seja uma álgebra que é uma soma (não necessariamente direta) de um número finito de ideais, onde cada um deles é uma álgebra com unidade. Então A é uma álgebra com unidade que é uma combinação das unidades destes ideais.*

Demonstração. Consideremos inicialmente o caso $A = I_1 + I_2$, onde I_1 e I_2 são ideais com unidade 1_{I_1} e 1_{I_2} respectivamente. Seja $a \in A$. Então existem $a_1 \in I_1$ e $a_2 \in I_2$, tais que $a = a_1 + a_2$. Logo

$$\begin{aligned}
(1_{I_1} + 1_{I_2} - 1_{I_1}1_{I_2})a &= (1_{I_1} + 1_{I_2} - 1_{I_1}1_{I_2})(a_1 + a_2) \\
&= 1_{I_1}a_1 + 1_{I_1}a_2 + 1_{I_2}a_1 + 1_{I_2}a_2 - 1_{I_1}1_{I_2}a_1 - 1_{I_1}1_{I_2}a_2 \\
&= a_1 + 1_{I_1}a_2 + 1_{I_2}a_1 + a_2 - 1_{I_2}a_1 - 1_{I_1}a_2 = a_1 + a_2 = a;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(1_{I_1} + 1_{I_2} - 1_{I_1}1_{I_2}) &= (a_1 + a_2)(1_{I_1} + 1_{I_2} - 1_{I_1}1_{I_2}) \\
&= a_1 1_{I_1} + a_2 1_{I_1} + a_1 1_{I_2} + a_2 1_{I_2} - a_1 1_{I_1}1_{I_2} - a_2 1_{I_1}1_{I_2} \\
&= a_1 + a_2 1_{I_1} + a_1 1_{I_2} + a_2 - a_1 1_{I_2} - a_2 1_{I_1} = a_1 + a_2 = a.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $1_{I_1} + 1_{I_2} - 1_{I_1}1_{I_2}$ é a unidade de $A = I_1 + I_2$.

O resultado segue-se por indução. □

Observação 3.2.3. *Notemos que a demonstração acima nos indica um método para se obter a expressão geral para a unidade de $A = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$, onde cada ideal*

I_j, com $j=1,2,\ldots,n$, tem unidade 1_{I_j}. Por exemplo, seja $A=I_1+I_2+I_3$. Então $1_A = 1_{(I_1+I_2)} + 1_{I_3} - 1_{(I_1+I_2)}1_{I_3} = 1_{I_1} + 1_{I_2} - 1_{I_1}1_{I_2} + 1_{I_3} - (1_{I_1} + 1_{I_2} - 1_{I_1}1_{I_2})1_{I_3} = 1_{I_1} + 1_{I_2} + 1_{I_3} - 1_{I_1}1_{I_2} - 1_{I_1}1_{I_3} - 1_{I_2}1_{I_3} + 1_{I_1}1_{I_2}1_{I_3}$. Isto nos sugere que a unidade de $A = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$ é:

i. $1_A = \sum\limits_{k=1}^{n} 1_{I_k} - \sum\limits_{1\le i<j}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}) + \sum\limits_{1\le i<j<l}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}1_{I_l}) - \ldots - \sum\limits_{1\le i<j<\ldots<r}^{n} \underbrace{(1_{I_i}1_{I_j}\ldots 1_{I_r})}_{(n-1)\quad fatores} + 1_{I_1}\ldots 1_{I_n}$, *quando n for ímpar;*

ii. $1_A = \sum\limits_{k=1}^{n} 1_{I_k} - \sum\limits_{1\le i<j}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}) + \sum\limits_{1\le i<j<l}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}1_{I_l}) - \ldots + \sum\limits_{1\le i<j<\ldots<r}^{n} \underbrace{(1_{I_i}1_{I_j}\ldots 1_{I_r})}_{(n-1)\quad fatores} - 1_{I_1}\ldots 1_{I_n}$, *quando n for par.*

De fato, suponhamos por indução que a unidade de $A = I_1+I_2+\ldots+I_n$, com n ímpar, é $\sum\limits_{k=1}^{n} 1_{I_k} - \sum\limits_{1\le i<j}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}) + \sum\limits_{1\le i<j<l}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}1_{I_l}) - \ldots - \sum\limits_{1\le i<j<\ldots<r}^{n} \underbrace{(1_{I_i}1_{I_j}\ldots 1_{I_r})}_{(n-1)\quad fatores} + 1_{I_1}\ldots 1_{I_n}$.

Mostraremos que a unidade de $A' = I_1 + I_2 + \ldots + I_n + I_{n+1}$ é $\sum\limits_{k=1}^{n+1} 1_{I_k} - \sum\limits_{1\le i<j}^{n+1} (1_{I_i}1_{I_j}) + \sum\limits_{1\le i<j<l}^{n+1} (1_{I_i}1_{I_j}1_{I_l}) - \ldots + \sum\limits_{1\le i<j<\ldots<r<s}^{n+1} \underbrace{(1_{I_i}1_{I_j}\ldots 1_{I_r}1_{I_s})}_{n\quad fatores} - 1_{I_1}\ldots 1_{I_n}1_{I_{n+1}}$.

Temos que $1_{A'} = 1_A + 1_{I_{n+1}} - 1_A 1_{I_{n+1}} = \sum\limits_{k=1}^{n} 1_{I_k} - \sum\limits_{1\le i<j}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}) + \sum\limits_{1\le i<j<l}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}1_{I_l}) - \ldots - \sum\limits_{1\le i<j<\ldots<r}^{n} \underbrace{(1_{I_i}1_{I_j}\ldots 1_{I_r})}_{(n-1)\quad fatores} + 1_{I_1}\ldots 1_{I_n} + 1_{I_{n+1}} - [\sum\limits_{k=1}^{n} 1_{I_k} - \sum\limits_{1\le i<j}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}) + \sum\limits_{1\le i<j<l}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}1_{I_l}) - \ldots - \sum\limits_{1\le i<j<\ldots<r}^{n} \underbrace{(1_{I_i}1_{I_j}\ldots 1_{I_r})}_{(n-1)\quad fatores} + 1_{I_1}\ldots 1_{I_n}]1_{I_{n+1}} =$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1_{I_k} + 1_{I_{n+1}}}_{=\sum_{k=1}^{n+1} 1_{I_k}} - [\underbrace{\sum_{1\le i<j}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}) + \sum_{k=1}^{n} 1_{I_k}1_{I_{n+1}}}_{=\sum_{1\le i<j}^{n+1}(1_{I_i}1_{I_j})}] + [\underbrace{\sum_{1\le i<j<l}^{n} (1_{I_i}1_{I_j}1_{I_l}) + \sum_{1\le i<j}^{n} (1_{I_i}1_{I_j})1_{I_{n+1}}}_{=\sum_{1\le i<j<l}^{n+1}(1_{I_i}1_{I_j}1_{I_l})}] -$$

$$\ldots + \underbrace{[1_{I_1}\ldots 1_{I_n} + \sum_{1\le i<j\ldots<r}^{n} (\underbrace{1_{I_i}1_{I_j}\ldots 1_{I_r}}_{(n-1)\quad fatores})1_{I_{n+1}}]}_{=\sum_{1\le i<j<\ldots<r<s}^{n+1} \underbrace{(1_{I_i}1_{I_j}\ldots 1_{I_r}1_{I_s})}_{n\quad fatores}} - 1_{I_1}\ldots 1_{I_n}1_{I_{n+1}}.$$

Analogamente, mostra-se o caso n par.

Definição 3.2.4. *Dizemos que duas ações (globais)* $\beta = \{(\beta_g : B \longrightarrow B)_{g\in G}\}$ *e* $\beta' = \{(\beta'_g : B' \longrightarrow B')_{g\in G}\}$ *são equivalentes quando existir um isomorfismo (de álgebras)* $\phi : B \longrightarrow B'$*, tal que* $\beta'_g \circ \phi = \phi \circ \beta_g$*, para todo* $g \in G$*.*

Teorema 3.2.5. *Seja* A *uma álgebra unitária. Então uma ação parcial* $\alpha = \{(D_g)_{g\in G} \quad e \quad (\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g)_{g\in G}\}$ *de um grupo* G *sobre* A *admite uma ação envolvente* β *se, e somente se, cada ideal* D_g *de* A *é uma álgebra unitária. Além disso,* β*, caso exista, é unica a menos de equivalência.*

Demonstração. Sejam $\alpha = \{(D_g)_{g\in G} \quad \text{e} \quad (\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g)_{g\in G}\}$ uma ação parcial do grupo G sobre uma álgebra unitária A e $\beta = \{(\beta_g : B \longrightarrow B)_{g\in G}\}$ sua envolvente. Por definição, existe um isomorfismo de álgebras $\varphi : A \longrightarrow \varphi(A)$, onde $\varphi(A)$ é um ideal de B, tal que $\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$, para todo $g \in G$. Desta forma $\beta_g(\varphi(A))$ e $\varphi(D_g)$ são ideais de B, para todo $g \in G$. Logo $\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A)) \in \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A)) = \varphi(D_g)$. Afirmamos que $1_{\varphi(D_g)} = \varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A))$. De fato, seja $x \in \varphi(D_g) = \varphi(A)\cap\beta_g(\varphi(A))$, com $g \in G$ fixo. Então existem $y, z \in A$, tais que $x = \varphi(y) = \beta_g(\varphi(z))$. Segue-se que $x\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A)) = \varphi(y)\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A)) = \varphi(y1_A)\beta_g(\varphi(1_A)) = \varphi(y)\beta_g(\varphi(1_A)) = \beta_g(\varphi(z))\beta_g(\varphi(1_A)) = \beta_g(\varphi(z1_A)) = \beta_g(\varphi(z)) = x$. Analogamente, temos que $\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A))x = x$, o que mostra $1_{\varphi(D_g)} = \varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A))$ e assim, $1_g = \varphi^{-1}(\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A))$. De fato, seja $x \in D_g$. Então existe um $y \in \varphi(D_g)$, tal que $x = \varphi^{-1}(y)$. Logo $x\varphi^{-1}(1_{\varphi(D_g)}) = \varphi^{-1}(y)\varphi^{-1}(1_{\varphi(D_g)}) = \varphi^{-1}(y1_{\varphi(D_g)}) = \varphi^{-1}(y) = x$. Temos também que $\varphi^{-1}(1_{\varphi(D_g)})x = x$. Isto mostra que $1_g = \varphi^{-1}(1_{\varphi(D_g)}) = \varphi^{-1}(\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A))$ e, portanto, cada ideal D_g de A é uma álgebra unitária.

Notemos que $\beta_g(\varphi(1_A))$ pode não estar em $\varphi(A)$ e, com isto, **não** podemos fazer $\varphi^{-1}(\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A))) = \varphi^{-1}(\varphi(1_A))\varphi^{-1}(\beta_g(\varphi(1_A)))$.

Reciprocamente, seja a ação parcial $\alpha = \{(D_g)_{g\in G} \quad \text{e} \quad (\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g)_{g\in G}\}$ de G sobre A, onde cada ideal D_g de A admite unidade 1_g. Então $D_g = A1_g$, para todo $g \in G$. De fato, seja $x \in A1_g$. Então $x = a1_g \in D_g$, para algum $a \in A$. Para todo $x \in D_g$, temos que $x = x1_g \in A1_g$.

Verifica-se sem dificuldades que o conjunto de todas as funções de G em A, denotado por $F = F(G, A)$, é uma K-álgebra (associativa e unitária) com as seguintes operações:

$(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$, para quaisquer $g \in G$ e $f_1, f_2 \in F$;

$(f_1 f_2)(g) = f_1(g) f_2(g)$, para quaisquer $g \in G$ e $f_1, f_2 \in F$;

$(\lambda f)(g) = \lambda f(g)$, para quaisquer $g \in G$, $\lambda \in K$ e $f \in F$.

Notemos que $f' : G \longrightarrow A$ definido por $f'(g) = 1_A$, para todo $g \in G$, é 1_F.

Sejam $f \in F$, $g \in G$ e denotemos $f(g)$ também por $f|_g$. Fixemos $g \in G$. Seja $\beta_g : F \longrightarrow F$ definido por $\beta_g(f)(h) = \beta_g(f)|_h = f(g^{-1}h)$, onde $h \in G$. Afirmamos que β_g é um automorfismo de álgebras. De fato, sejam $h \in G$, $f, f_1, f_2 \in F$ e $\lambda \in K$. Temos que:

$$\begin{aligned} \beta_g(f_1 + f_2)|_h &= (f_1 + f_2)(g^{-1}h) = f_1(g^{-1}h) + f_2(g^{-1}h) \\ &= \beta_g(f_1)|_h + \beta_g(f_2)|_h = (\beta_g(f_1) + \beta_g(f_2))|_h; \end{aligned}$$

$$\beta_g(\lambda f)|_h = (\lambda f)(g^{-1}h) = \lambda f(g^{-1}h) = \lambda \beta_g(f)|_h = (\lambda \beta_g(f))|_h;$$

$$\begin{aligned} \beta_g(f_1 f_2)|_h &= (f_1 f_2)(g^{-1}h) = f_1(g^{-1}h) f_2(g^{-1}h) = \beta_g(f_1)|_h \beta_g(f_2)|_h \\ &= (\beta_g(f_1)\beta_g(f_2))|_h. \end{aligned}$$

Isto mostra que, para cada $g \in G$, β_g é um homomorfismo de álgebras.

Seja $f' : G \longrightarrow A$ definido por $h \mapsto 1_A$, para todo $h \in G$. Temos que $\beta_g(f')|_h = f'(g^{-1}h) = 1_A = f'|_h$. Logo $\beta_g(1_F) = 1_F$.

Sejam $f \in F$ e $h \in G$ arbitrários. Tome $\beta_{g^{-1}}(f) \in F$. Então $\beta_g(\beta_{g^{-1}}(f))|_h = \beta_{g^{-1}}(f)(g^{-1}h) = f(g(g^{-1}h)) = f(h) = f|_h$. Daí $\beta_g(\beta_{g^{-1}}(f)) = f$, donde se segue que β_g é sobrejetiva, para todo $g \in G$.

Seja agora $f \in Ker(\beta_g)$. Então $\beta_g(f) = 0_F$ e, com isto, $\beta_g(f)|_h = 0_A$, ou seja, $f(g^{-1}h) = 0_A$, para todo $h \in G$. Suponhamos f não nula. Então existe um $h' \in G$, tal que $f(h') \neq 0_A$. Tome $h = gh'$. Daí $0_A \neq f(h') = f(g^{-1}h) = 0_A$, o que é uma contradição. Isto mostra que β_g é injetiva, para todo $g \in G$.

Logo β_g é um automorfismo de álgebras, para todo $g \in G$.

Seja $f \in F$ arbitrário. Temos que $\beta_{1_G}(f)|_h = f(1_G h) = f(h) = f|_h$. Logo $\beta_{1_G}(f) = f$, ou seja, $\beta_{1_G} = id_F$. Consideremos $g, h, j \in G$ e $f \in F$. Então $\beta_g \circ \beta_h(f)|_j = \beta_g(\beta_h(f))|_j = \beta_h(f)(g^{-1}j) = f(h^{-1}(g^{-1}j)) = f((h^{-1}g^{-1})j) = \beta_{gh}(f)|_j$.

Isto mostra que $\beta_g \circ \beta_h(f) = \beta_{gh}(f)$, para quaisquer $g, h \in G$ e $f \in F$. Logo $\beta = \{(\beta_g : F \longrightarrow F)_{g \in G}\}$ é uma ação (global) de G sobre F.

Seja a aplicação $\varphi : A \longrightarrow F$ definida por $\varphi(a)(g) = \alpha_{g^{-1}}(a1_g)$, para quaisquer $a \in A$ e $g \in G$ (notemos que, na construção de φ, usa-se a hipótese de que cada D_g tem unidade 1_g). Afirmamos que φ é um monomorfismo de álgebras. De fato, sejam $a, a_1, a_2 \in A$, $g \in G$ e $\lambda \in K$. Temos que:

$$\begin{aligned}\varphi(a_1 + a_2)|_g &= \alpha_{g^{-1}}((a_1 + a_2)1_g) = \alpha_{g^{-1}}(a_1 1_g + a_2 1_g)\\ &= \alpha_{g^{-1}}(a_1 1_g) + \alpha_{g^{-1}}(a_2 1_g) = \varphi(a_1)|_g + \varphi(a_2)|_g\\ &= (\varphi(a_1) + \varphi(a_2))|_g;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda a)|_g &= \alpha_{g^{-1}}((\lambda a)1_g) = \alpha_{g^{-1}}(\lambda(a1_g)) = \lambda\alpha_{g^{-1}}(a1_g) = \lambda\varphi(a)|_g\\ &= (\lambda\varphi(a))|_g;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(a_1 a_2)|_g &= \alpha_{g^{-1}}((a_1 a_2)1_g) = \alpha_{g^{-1}}(a_1 1_g a_2 1_g) = \alpha_{g^{-1}}(a_1 1_g)\alpha_{g^{-1}}(a_2 1_g)\\ &= \varphi(a_1)|_g \varphi(a_2)|_g = (\varphi(a_1)\varphi(a_2))|_g.\end{aligned}$$

Isto mostra que φ é um homomorfismo de álgebras.

Em particular, temos que:

$\varphi(1_A)|_g = \alpha_{g^{-1}}(1_A 1_g) = \alpha_{g^{-1}}(1_g) = 1_{g^{-1}}$. Seja $f \in \varphi(A)$. Então existe $a \in A$, tal que $f = \varphi(a)$. Logo $f\varphi(1_A) = \varphi(a)\varphi(1_A) = \varphi(a1_A) = \varphi(a) = f$. Analogamente, temos que $\varphi(1_A)f = f$. Isto mostra que $\varphi(1_A) = 1_{\varphi(A)} (\neq 1_F$, em geral).

Seja agora $a \in Ker(\varphi)$. Segue-se que $\varphi(a) = 0_F$ e, daí, $\varphi(a)|_g = 0_A$. Portanto $\alpha_{g^{-1}}(a1_g) = 0_A$. Da injetividade de $\alpha_{g^{-1}}$, temos que $a1_g = 0_A$, para todo $g \in G$. Tomemos $g = 1_G$. Então $a \underbrace{1_{1_G}}_{=1_A} = 0_A$, ou seja, $a = 0_A$. Isto mostra que φ injetiva.

Seja B a subálgebra de F gerada por $\cup_{g \in G}\beta_g(\varphi(A))$. Queremos mostrar que a restrição da ação β sobre B é uma envolvente da ação parcial α. Denotamos esta restrição pelo mesmo símbolo β. Primeiramente, observemos que $\beta = \{(\beta_g : B \longrightarrow B)_{g \in G}\}$ é uma ação (global) de G em B. De fato, pela Proposição 3.1.7, um elemento genérico de B é da forma $\sum\limits_i \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$. Seja $g \in G$ fixo. Temos que $\beta_g(\sum\limits_i \beta_{g_i}(\varphi(a_i))) = \sum\limits_i \beta_g(\beta_{g_i}(\varphi(a_i))) = \sum\limits_i \beta_{gg_i}(\varphi(a_i))$. Isto mostra que B é invariante sob a ação de β, isto é, $\beta_g(B) \subseteq B$, para todo $g \in G$. Seja agora $x = \sum\limits_i \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) \in B$. Tome $y = \sum\limits_i \beta_{g^{-1}g_i}(\varphi(a_i)) \in B$. Segue-se que $\beta_g(y) = \beta_g(\sum\limits_i \beta_{g^{-1}g_i}(\varphi(a_i))) = \sum\limits_i \beta_g(\beta_{g^{-1}g_i}(\varphi(a_i))) = \sum\limits_i \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) = x$ e, por isto, $B \subseteq \beta_g(B)$, para todo $g \in G$. Logo $\beta_g(B) = B$, para todo $g \in G$. Portanto $\beta = \{(\beta_g : B \longrightarrow B)_{g\in G}\}$ é uma ação (global) de G sobre B.

Mostremos que, dados $g \in G$ e $x \in D_{g^{-1}}$, $\varphi \circ \alpha_g(x) = \beta_g \circ \varphi(x)$, o que equivale a mostrar que, dados $g, h \in G$ e $x \in D_{g^{-1}}$, $\varphi \circ \alpha_g(x)|_h = \beta_g \circ \varphi(x)|_h$. Temos as seguintes equivalências:

$\varphi \circ \alpha_g(x)|_h = \beta_g \circ \varphi(x)|_h \Leftrightarrow \varphi(\alpha_g(x))|_h = \beta_g(\varphi(x))|_h \Leftrightarrow \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)1_h) = \varphi(x)(g^{-1}h) \Leftrightarrow \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)1_h) = \alpha_{h^{-1}g}(x1_{g^{-1}h})$.

Mostremos esta última igualdade. Como $x1_{g^{-1}h} \in D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h}$, então, da definição de ação parcial, temos que:

$$\begin{aligned}
\alpha_{h^{-1}g}(x1_{g^{-1}h}) &= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x1_{g^{-1}h})) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h})) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)\ \underbrace{\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h})}_{\text{Lema 3.2.1 (i)}}\ ) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)1_g1_h) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)1_h).
\end{aligned}$$

Mostremos que $\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$, para todo $g \in G$.

Seja $x \in \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$. Então existem $a, b \in A$, tais que $x = \varphi(a) = \beta_g(\varphi(b))$. Logo, para cada $h \in G$, vale: $\varphi(a)|_h = \beta_g(\varphi(b))|_h$ ou seja, $\alpha_{h^{-1}}(a1_h) = \varphi(b)|_{g^{-1}h}$, ou ainda, $\alpha_{h^{-1}}(a1_h) = \alpha_{h^{-1}g}(b1_{g^{-1}h})$. Tome $h = 1_G$. Segue-se que $\alpha_{1_G}(a1_{1_G}) = \alpha_g(b1_{g^{-1}})$, isto é, $a = \alpha_g(b1_{g^{-1}}) \in D_g$. Logo $x = \varphi(a) \in \varphi(D_g)$.

Seja agora $a \in D_g$. Devemos mostrar que existe $b \in A$, tal que $\varphi(a) = \beta_g(\varphi(b))$, para todo $g \in G$. Temos as seguintes equivalências:

$\varphi(a) = \beta_g(\varphi(b)) \Leftrightarrow \varphi(a)|_h = \beta_g(\varphi(b))|_h \Leftrightarrow \alpha_{h^{-1}}(a1_h) = \varphi(b)|_{g^{-1}h} \Leftrightarrow \alpha_{h^{-1}}(a1_h) = \alpha_{h^{-1}g}(b1_{g^{-1}h})$.

Mostremos que existe $b \in A$, tal que vale esta última igualdade. Tome

$b = \alpha_{g^{-1}}(a)$. Segue-se que:

$$\begin{aligned}
\alpha_{h^{-1}g}(b1_{g^{-1}h}) &= \alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}h}))\\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h})) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a))\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h}))\\
&= \alpha_{h^{-1}}(a1_g1_h) = \alpha_{h^{-1}}(a1_h).
\end{aligned}$$

Mostremos agora que $\varphi(A)$ é um ideal de B (note que $\varphi(A) \subseteq B$). Para isto, basta mostrar que, dados $a, b \in A$ e $g \in G$, então $\beta_g(\varphi(a))\varphi(b), \varphi(b)\beta_g(\varphi(a)) \in \varphi(A)$. Seja $h \in G$. Temos que:

$$\begin{aligned}
(\beta_g(\varphi(a))\varphi(b))|_h &= \beta_g(\varphi(a))|_h\varphi(b)|_h = \varphi(a)|_{g^{-1}h}\alpha_{h^{-1}}(b1_h)\\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(b1_h) = \underbrace{\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})1_{h^{-1}}}_{\text{Lema 3.2.1 (ii)}}\alpha_{h^{-1}}(b1_h)\\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_h)\alpha_{h^{-1}}(b1_h) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})b1_h)\\
&= \varphi(\alpha_g(a1_{g^{-1}})b)|_h.
\end{aligned}$$

Logo $\beta_g(\varphi(a))\varphi(b) = \varphi(\alpha_g(a1_{g^{-1}})b) \in \varphi(A)$. Analogamente, temos que $\varphi(b)\beta_g(\varphi(a)) \in \varphi(A)$.

Portanto $\beta = \{(\beta_g : B \longrightarrow B)_{g\in G}\}$ é uma envolvente de α.

Suponhamos agora que $\beta' = \{(\beta'_g : B' \longrightarrow B')_{g\in G}\}$ seja outra ação de G sobre uma álgebra B', tal que β' seja também uma envolvente de α. Então existe um monomorfismo (de álgebras) $\varphi' : A \longrightarrow B'$, tal que valem:

(i) $\varphi'(D_g) = \varphi'(A) \cap \beta'_g(\varphi(A))$, para todo $g \in G$;

(ii) $\varphi' \circ \alpha_g(x) = \beta'_g \circ \varphi'(x)$, para quaisquer $x \in D_{g^{-1}}$ e $g \in G$;

(iii) B' é gerada por $\cup_{g\in G}\beta'_g(\varphi'(A))$.

Como B' é gerada por $\cup_{g\in G}\beta'_g(\varphi'(A))$, então qualquer elemento de B' pode ser escrito da forma $\sum\limits_i \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))$.

Seja $\Phi : B' \longrightarrow B$ definida por $\beta'_{g_i}(\varphi'(a_i)) \mapsto \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ que estendemos linearmente.

Verifiquemos inicialmente se Φ está bem definida. Podemos ter, por exemplo, $\beta'_{g_1}(\varphi'(a_1)) + \beta'_{g_2}(\varphi'(a_2)) = \beta'_{g_3}(\varphi'(a_3))$. Surge a pergunta: $\beta_{g_1}(\varphi(a_1)) +$

$\beta_{g_2}(\varphi(a_2)) = \beta_{g_3}(\varphi(a_3))$? Temos que $\beta'_{g_1}(\varphi'(a_1)) + \beta'_{g_2}(\varphi'(a_2)) - \beta'_{g_3}(\varphi'(a_3)) = 0$, ou seja, $\beta'_{g_1}(\varphi'(a_1)) + \beta'_{g_2}(\varphi'(a_2)) + \beta'_{g_3}(\varphi'(-a_3)) = 0$. Devemos mostrar que $\beta_{g_1}(\varphi(a_1)) + \beta_{g_2}(\varphi(a_2)) + \beta_{g_3}(\varphi(-a_3)) = 0$. Portanto, mostrar que Φ está bem definida significa mostrar que se $\sum\limits_i \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i)) = 0$, então $\sum\limits_i \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) = 0$.

Suponhamos que $\sum\limits_i \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i)) = 0$. Sejam $h \in G$ e $a \in A$. Temos que $\sum\limits_i \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))\beta'_h(\varphi'(a)) = 0$, donde $\beta'_{h^{-1}}(\sum\limits_i \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))\beta'_h(\varphi'(a))) = \sum\limits_i \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) = 0$. Como $\varphi'(A)$ é um ideal de B', então $\beta'_g(\varphi'(A))$ é um ideal de B', para todo $g \in G$. Portanto $\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) \in \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(A)) \cap \varphi'(A) = \varphi'(D_{h^{-1}g_i}) = \varphi'(A1_{h^{-1}g_i}) = \varphi'(A)\varphi'(1_{h^{-1}g_i})$ que é um ideal de B' com unidade $\varphi'(1_{h^{-1}g_i})$ (a verificação é trivial).

Usando o item **(ii)** acima, segue-se que:

$$\begin{aligned}
\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) &= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a)\varphi'(1_{h^{-1}g_i}) = \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a1_{h^{-1}g_i}) \\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(1_{h^{-1}g_i}a) = \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(1_{h^{-1}g_i})\varphi'(a) \\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\underbrace{\varphi'(\alpha_{h^{-1}g_i}(1_{g_i^{-1}h}))}_{=\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(1_{g_i^{-1}h}))}\varphi'(a) \\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(1_{g_i^{-1}h}))\varphi'(a) = \beta'_{h^{-1}g_i} \circ \varphi'(a_i 1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\
&= \varphi' \circ \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) = \varphi'(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a).
\end{aligned}$$

Logo $\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) = \varphi'(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a)$ $(\star)$.

Analogamente, conclui-se que $\beta_{h^{-1}g_i}(\varphi(a_i))\varphi(a) = \varphi(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a)$ $(\star\star)$.

De $(\star)$ e $(\star\star)$, temos que: $0 = \sum\limits_i \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) = \sum\limits_i \varphi'(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a) = \varphi'(\sum\limits_i \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a)$. Como φ' é injetiva, então $\sum\limits_i \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a = 0$. Logo $0 = \varphi(\sum\limits_i \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a) = \sum\limits_i \varphi(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a) = \sum\limits_i \beta_{h^{-1}g_i}(\varphi(a_i))\varphi(a)$ e, portanto, $0 = \beta_h(\sum\limits_i \beta_{h^{-1}g_i}(\varphi(a_i))\varphi(a)) = \sum\limits_i \beta_{g_i}(\varphi(a_i))\beta_h(\varphi(a))$, para quaisquer $h \in G$ e $a \in A$. Denotemos a soma finita $\sum\limits_i \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ por $\sum\limits_{i=1}^s \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$. Daí $\sum\limits_{i=1}^s \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ anula $\beta_h(\varphi(A))$, para cada $h \in G$. Seja B_1 a álgebra gerada por $\cup_{g_i}\beta_{g_i}(\varphi(A))$, com $i = 1, \ldots, s$. Temos que $\sum\limits_{i=1}^s \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) \in B_1 = \beta_{g_1}(\varphi(A)) + \ldots + \beta_{g_s}(\varphi(A))$, onde cada ideal $\beta_{g_i}(\varphi(A))$ de B (e portanto de B_1) tem unidade $\beta_{g_i}(\varphi(1_A))$. Segue-se do Lema 3.2.2 que B_1 tem unidade 1_{B_1} que é uma combinação (finita) de $\beta_{g_i}(\varphi(1_A))$, com $i = 1, \ldots, s$. Logo $\sum\limits_{i=1}^s \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) = \sum\limits_{i=1}^s \beta_{g_i}(\varphi(a_i))1_{B_1} = 0$ e, por isto, Φ está bem definida.

Para concluirmos que Φ é um homomorfismo de álgebras, resta provarmos que $\Phi(\beta'_g(\varphi'(a))\beta'_h(\varphi'(b))) = \Phi(\beta'_g(\varphi'(a)))\Phi(\beta'_h(\varphi'(b)))$, para quaisquer $a, b \in A$ e $g, h \in G$.

De fato, observamos que $\varphi(a)\beta_g(\varphi(b)) \in \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A)) = \varphi(D_g)$, que é um ideal de B com unidade $\varphi(1_g)$. Segue-se do item **(ii)** acima que:

$$\begin{aligned}\varphi(a)\beta_g(\varphi(b)) &= \varphi(1_g)\varphi(a)\beta_g(\varphi(b)) = \varphi(1_g a)\beta_g(\varphi(b)) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(\varphi(1_g a))\varphi(b)) \\ &= \beta_g(\varphi \circ \alpha_{g^{-1}}(1_g a)\varphi(b)) = \beta_g(\varphi(\alpha_{g^{-1}}(1_g a)b)).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\beta_g(\varphi(a))\beta_h(\varphi(b)) &= \beta_g(\varphi(a)\beta_{g^{-1}h}(\varphi(b))) = \beta_g(\beta_{g^{-1}h}(\varphi(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}a)b))) \\ &= \beta_h(\varphi(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}a)b)).\end{aligned}$$

Do mesmo modo, temos que $\beta'_g(\varphi'(a))\beta'_h(\varphi'(b)) = \beta'_h(\varphi'(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}a)b))$.

Assim,

$$\begin{aligned}\Phi(\beta'_g(\varphi'(a))\beta'_h(\varphi'(b))) &= \Phi(\beta'_h(\varphi'(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}a)b))) \\ &= \beta_h(\varphi(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}a)b)) = \beta_g(\varphi(a))\beta_h(\varphi(b)) \\ &= \Phi(\beta'_g(\varphi'(a)))\Phi(\beta'_h(\varphi'(b))).\end{aligned}$$

Analogamente, temos que $\Phi' : B \longrightarrow B'$ definida por $\Phi'(\beta_{g_i}(\varphi(a_i)) = \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))$ que estendemos linearmente, está bem definida e determina um homomorfismo de álgebras.

Verifica-se também que $\Phi' \circ \Phi = id_{B'}$ e $\Phi \circ \Phi' = id_B$. Logo Φ é um isomorfismo de álgebras.

Temos que, para todo $g \in G$, valem:

(a) $\beta_g \circ \Phi(\sum\limits_i \beta'_{h_i}(\varphi'(a_i))) = \beta_g(\sum\limits_i \beta_{h_i}(\varphi(a_i))) = \sum\limits_i \beta_{gh_i}(\varphi(a_i))$;

(b) $\Phi \circ \beta'_g(\sum\limits_i \beta'_{h_i}(\varphi'(a_i))) = \Phi(\sum\limits_i \beta'_{gh_i}(\varphi'(a_i))) = \sum\limits_i \beta_{gh_i}(\varphi(a_i))$.

Portanto $\beta_g \circ \Phi = \Phi \circ \beta'_g$, para todo $g \in G$. Logo β e β' são equivalentes. $\square$

3.3 O skew anel de grupo parcial e o skew anel de grupo

Finalizamos este capítulo com uma aplicação de ações parciais com envolvente, que é a de fornecer skew anéis parciais associativos. Iniciamos apresentando o conceito de uma skew anel de grupo parcial.

Definição 3.3.1. *Dada uma ação parcial* $\alpha = \{(D_g)_{g\in G} \quad e \quad (\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g)_{g\in G}\}$ *de um grupo* G *sobre uma álgebra* A*, o* ***skew anel de grupo parcial*** *correspondente à ação* α*, denotado por* $A \star_\alpha G$*, é o conjunto de todas as somas formais finitas* $\{\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g : \quad a_g \in D_g\}$*, onde* δ_g *são símbolos que denotam elementos da base de* $A \star_\alpha G$*. Munimos este conjunto com a adição que é definida pontualmente e com a multiplicação dada por:* $(a_g\delta_g).(a_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)\delta_{gh}$.

Observação 3.3.2. *Notemos que:*

(a) $\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h \in D_{g^{-1}} \cap D_h$*. Segue da definição de ação parcial de grupo que* $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h) \in D_g \cap D_{gh} \subseteq D_{gh}$.

(b) *estão subentendidas a comutatividade da adição e a distributividade da multiplicação em relação à adição definidas acima. Ainda,* $A \star_\alpha G$ *tem estrutura de K-módulo à esquerda, com* $\lambda \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g = \sum\limits_{g\in G}(\lambda a_g)\delta_g$*, para* $\lambda \in K$*. Como* K *é comutativo, então que* $A \star_\alpha G$ *é um K-módulo. Verifica-se sem dificuldades que a função* $f : A \star_\alpha G \times A \star_\alpha G \longrightarrow A \star_\alpha G$ *definida por* $f(a_g\delta_g, a_h\delta_h) = (a_g\delta_g).(a_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)\delta_{gh}$ *é K-biaditiva.*

Pela propriedade universal da Definição 1.1.12, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$*-módulos (que chamamos multiplicação)* $m : A \star_\alpha G \otimes_K A \star_\alpha G \longrightarrow A \star_\alpha G$ *definida por* $a_g\delta_g \otimes a_h\delta_h \mapsto \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)\delta_{gh}$.

Exemplo 3.3.3. *Dada uma ação (global)* $\beta = \{(\beta_g : B \longrightarrow B)_{g\in G}\}$ *de um grupo* G *sobre uma álgebra* B*, o* ***skew anel de grupo (global)*** $B \star_\beta G$ *correspondente à ação* β *é o conjunto de todas as somas formais finitas* $\{\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g : \quad a_g \in B\}$*, onde* δ_g *são símbolos que denotam elementos da base de* $B \star_\beta G$*. Munimos este conjunto com a adição que é definida pontualmente e com a multiplicação que é dada por:* $(a_g\delta_g).(a_h\delta_h) = a_g\beta_g(a_h)\delta_{gh}$.

Segue-se do Exemplo 3.1.4 que todo skew anel de grupo é um skew anel de grupo parcial.

Observemos também que $B \star_\beta G$ é um anel associativo. De fato, sejam $b_g, b_h, b_j \in B$. Temos que:

$$\begin{aligned}[(b_g\delta_g).(b_h\delta_h)].(b_j\delta_j) &= [b_g\beta_g(b_h)\delta_{gh}].(b_j\delta_j) = (b_g\beta_g(b_h)\beta_{gh}(b_j))\delta_{(gh)j} \\ &= [b_g\beta_g(b_h)\beta_g(\beta_h(b_j))]\delta_{g(hj)} = [b_g\beta_g(b_h\beta_h(b_j))]\delta_{g(hj)} \\ &= (b_g\delta_g).(b_h\beta_h(b_j))\delta_{hj} = (b_g\delta_g).[(b_h\delta_h).(b_j\delta_j)].\end{aligned}$$

Em geral, o skew anel de grupo parcial $A\star_\alpha G$ não é associativo, como podemos ver num exemplo em [7], apresentado abaixo.

Exemplo 3.3.4. *Seja A um K-espaço vetorial com base $\{1, t, u, v\}$. Definimos a multiplicação em A por $u^2 = v^2 = uv = vu = tu = ut = t^2 = 0$, $tv = vt = u$ e $1a = a1 = 1$, para todo $a \in A$. Então A é uma K-álgebra associativa e unitária. Sejam o grupo $G = (\{1_G, g\}, .)$ e I o ideal de A gerado por v (notemos que da multiplicação definida nos elementos da base de A, segue-se que I é o K-subespaço vetorial (de A) gerado por v e u). Considere a ação parcial α de G sobre A dada por: $D_g = I$ e $\alpha_g : u \mapsto v, v \mapsto u$. (notemos também que da definição de G, temos que $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g$ e $D_{g^{-1}} = I$ e por definição $\alpha_{1_G} = id_A$ e $D_{1_G} = A$). Então o skew anel de grupo parcial $A \star_\alpha G$ não é associativo.*

De fato, sejam $a_1 = \lambda_1^1 1 + \lambda_2^1 t + \lambda_3^1 u + \lambda_4^1 v, a_2 = \lambda_1^2 1 + \lambda_2^2 t + \lambda_3^2 u + \lambda_4^2 v, a_3 = \lambda_1^3 1 + \lambda_2^3 t + \lambda_3^3 u + \lambda_4^3 v$, $\lambda_i^j \in K$, com $1 \leq i \leq 4$ e $1 \leq j \leq 3$. Verifica-se que:

$$\begin{aligned}a_1(a_2a_3) = (\lambda_1^1\lambda_1^2\lambda_1^3)1 &+ [\lambda_1^1(\lambda_1^2\lambda_2^3 + \lambda_2^2\lambda_1^3) + \lambda_2^1\lambda_1^2\lambda_1^3]t \\ &+ [\lambda_1^1(\lambda_1^2\lambda_3^3 + \lambda_2^2\lambda_4^3 + \lambda_3^2\lambda_1^3 + \lambda_4^2\lambda_2^3) \\ &+ \lambda_2^1(\lambda_1^2\lambda_4^3 + \lambda_4^2\lambda_1^3) + \lambda_3^1\lambda_1^2\lambda_1^3 \\ &+ \lambda_4^1(\lambda_1^2\lambda_2^3 + \lambda_2^2\lambda_1^3)]u \\ &+ [\lambda_1^1(\lambda_1^2\lambda_4^3 + \lambda_4^2\lambda_1^3) + \lambda_4^1\lambda_1^2\lambda_1^3]v = (a_1a_2)a_3.\end{aligned}$$

Logo A é uma K-álgebra associativa e unitária.

Seja $x = t\delta_{1_G} + u\delta_g$. Então

$$(x.x).x = \underbrace{(t\delta_{1_G}.t\delta_{1_G} + t\delta_{1_G}.u\delta_g + u\delta_g.t\delta_{1_G} + u\delta_g.u\delta_g)}_{=v\delta_g}(t\delta_{1_G} + u\delta_g) = 0;$$

$$x.(x.x) = (t\delta_{1_G} + u\delta_g).(t\delta_{1_G}.t\delta_{1_G} + t\delta_{1_G}.u\delta_g + u\delta_g.t\delta_{1_G} + u\delta_g.u\delta_g)$$
$$= (t\delta_{1_G} + u\delta_g).v\delta_g = u\delta_g.$$

No entanto, quando a ação parcial de grupo tem envolvente, o skew parcial herda a associatividade do skew da envolvente, como mostra o seguinte resultado:

Teorema 3.3.5. *Seja β uma ação de um grupo G sobre uma álgebra B que é uma envolvente de uma ação parcial α de G sobre uma álgebra A. Então o skew anel de grupo parcial $A \star_\alpha G$ tem uma cópia em $B \star_\beta G$, isto é, existe um monomorfismo de anéis $\gamma : A \star_\alpha G \longrightarrow B \star_\beta G$. Em particular, $A \star_\alpha G$ é associativo.*

Demonstração. Por hipótese, existe um monomorfismo de álgebras $\varphi : A \longrightarrow B$, tal que $\varphi \circ \alpha_g(x) = \beta_g \circ \varphi(x)$, para todo $x \in D_{g^{-1}}$. Definamos a aplicação $\gamma : A \star_\alpha G \longrightarrow B \star_\beta G$ por $\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g \mapsto \sum\limits_{g\in G} \varphi(a_g)\delta_g$. Temos que:

$$\begin{aligned}\gamma((a_g\delta_g).(a_h\delta_h)) &= \gamma(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)\delta_{gh}) = \varphi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h))\delta_{gh} \\ &= \beta_g \circ \varphi(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)\delta_{gh} = \beta_g(\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a_g))\varphi(a_h))\delta_{gh} \\ &= \beta_g(\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a_g)))\beta_g(\varphi(a_h))\delta_{gh} = \varphi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)))\beta_g(\varphi(a_h))\delta_{gh} \\ &= \varphi(a_g)\beta_g(\varphi(a_h))\delta gh = \varphi(a_g)\delta_g.\varphi(a_h)\delta_h = \gamma(a_g\delta_g).\gamma(a_h\delta_h)\end{aligned}$$

e, com isto, γ é um homomorfismo de anéis.

Seja agora $\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g$, tal que $\gamma(\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g) = 0$. Portanto $\sum\limits_{g\in G} \varphi(a_g)\delta_g = 0$. Como os δ_g's são elementos da base de $B \star_\beta G$, segue-se que $\varphi(a_g) = 0$, para todo $a_g \in D_g$. Sendo φ um monomorfismo de álgebras, temos que $a_g = 0$, para todo $g \in G$. Logo γ é um monomorfismo de anéis.

Desde que o skew global é associativo, segue-se que o parcial também é. $\square$

Capítulo 4

A ENVOLVENTE DE UMA AÇÃO PARCIAL DE HOPF

Este último capítulo, que tem por base o artigo [3], destina-se ao estudo da existência da envolvente de uma ação parcial à esquerda de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra A, fazendo-se presente, de modo constante, os pré-requisitos dos dois primeiros capítulos. Como tratamos aqui somente de ações ("total" ou parcial) à esquerda de álgebras de Hopf sobre uma álgebra, diremos simplesmente ação ("total" ou parcial) de uma álgebra de Hopf sobre uma álgebra ou ainda, ação ("total" ou parcial) de Hopf. Uma aplicação importante que decorre da ação de uma álgebra Hopf H sobre uma álgebra unitária A é o *produto smash* $A\#H$ que acrescentamos neste estudo. Veremos que da existência da envolvente de uma ação parcial de Hopf, decorre que toda ação parcial de Hopf é induzida e que, em geral, duas envolventes de uma ação parcial de Hopf não são isomorfas. Como último resultado, temos que toda ação parcial de uma álgebra de Hopf tem uma única envolvente minimal, a menos de isomorfismo de H-módulos álgebras. No que se segue, H denotará uma álgebra de Hopf com comultiplicação Δ e counidade ε.

4.1 Ação de uma álgebra de Hopf sobre uma álgebra

Apresentamos nesta seção a chamada ação ("total") de uma álgebra de Hopf sobre uma álgebra. Uma aplicação de ações de Hopf é o chamado *produto smash.* Em continuação ao Exemplo 2.3.3 e à Observação 2.3.4, temos um exemplo de uma ação de Hopf conhecida como ação adjunta (à esquerda). Mostramos também que $Hom(H, A)$ sofre uma ação (à esquerda) de H.

Definição 4.1.1. *Uma ação de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra A é uma aplicação K-linear $\alpha : H \otimes_K A \longrightarrow A$, com $\alpha(h \otimes a)$ denotado por $h \triangleright a$, tal que, para quaisquer $h, k \in H$ e $a, b \in A$, onde $\Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, valem:*

(i) $h \triangleright (ab) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b)$;

(ii) $1_H \triangleright a = a$;

(iii) $h \triangleright (k \triangleright a) = hk \triangleright a$;

(iv) $h \triangleright 1_A = \varepsilon(h)1_A$.

Dizemos, neste caso, que H atua (à esquerda) sobre A que é chamada de uma H-módulo álgebra (à esquerda).

Caso A seja uma álgebra não unitária, define-se uma ação de uma álgebra de Hopf H sobre A sem o item **(iv)** da definição acima.

Observação 4.1.2. *A definição acima nos diz que A é um H-módulo à esquerda. De fato, sejam $h, k \in H$ e $a, b \in A$. Temos da linearidade de α e das propriedades do produto tensorial que:*

$$(h+k) \triangleright a = \alpha((h+k) \otimes a) = \alpha(h \otimes a + k \otimes a) = \alpha(h \otimes a) + \alpha(k \otimes a) = h \triangleright a + k \triangleright a;$$

$$h \triangleright (a+b) = \alpha(h \otimes (a+b)) = \alpha(h \otimes a + h \otimes b) = \alpha(h \otimes a) + \alpha(h \otimes b) = h \triangleright a + h \triangleright b.$$

*Dos itens **(ii)** e **(iii)** da definição acima temos as demais propriedades de um H-módulo à esquerda.*

Dada uma ação α de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra A, podemos definir uma nova multiplicação em $A \otimes H$ $(= A \otimes_K H)$ que denotaremos por $A\#H$ (com esta nova multiplicação). Chamamos $A\#H$ de **produto smash** de A por H.

Definição 4.1.3. *Definamos em $A \otimes_K H$ o seguinte produto*

$$(a\#h).(b\#g) = \sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright b)\#h_{(2)}g,$$

*para $a, b \in A$, $h, g \in H$, onde $\Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}$. O K-módulo à esquerda $A \otimes_K H$ munido com esta multiplicação é chamado de **produto smash** de A por H e denotado por $A\#H$.*

Notemos que esta multiplicação está bem definida. De fato, sejam $a, b \in A$ e $h, g \in H$. Denotando ${id_H}^2 = id_H \otimes id_H$ e ${id_A}^2 = id_A \otimes id_A$, temos que:

$$\begin{aligned}
&(m_A \otimes id_H) \circ (id_A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ (id_A \otimes \tau \otimes {id_H}^2) \circ ({id_A}^2 \otimes \Delta \otimes id_H) \circ \\
&(id_A \otimes \tau^{-1} \otimes id_H)(a \otimes h \otimes b \otimes g) \\
&= (m_A \otimes id_H) \circ (id_A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ (id_A \otimes \tau \otimes {id_H}^2) \circ \\
&({id_A}^2 \otimes \Delta \otimes id_H)(a \otimes b \otimes h \otimes g) \\
&= (m_A \otimes id_H) \circ (id_A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ (id_A \otimes \tau \otimes {id_H}^2)(a \otimes b \otimes (\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \otimes g) \\
&= (m_A \otimes id_H) \circ (id_A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ (id_A \otimes \tau \otimes {id_H}^2)(\sum_{(h)} a \otimes (b \otimes h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \otimes g) \\
&= \sum_{(h)} (m_A \otimes id_H) \circ (id_A \otimes \alpha \otimes m_H)(a \otimes (h_{(1)} \otimes b) \otimes (h_{(2)} \otimes g)) \\
&= \sum_{(h)} (m_A \otimes id_H)((a \otimes (h_{(1)} \triangleright b)) \otimes h_{(2)}g) \\
&= \sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright b) \otimes h_{(2)}g = \sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright b)\#h_{(2)}g.
\end{aligned}$$

Desde que cada composição que constitui o produto smash está bem definida, tem-se que $(a\#h).(b\#g) = \sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright b)\#h_{(2)}g$ está bem definida.

Proposição 4.1.4. *O **produto smash** $A\#H$, definido acima, é uma álgebra associativa com unidade $1_A\#1_H$.*

Demonstração. Observemos inicialmente que vale a distributividade desta multiplicação em relação à adição. De fato, chamemos $\Omega = (m_A \otimes id_H) \circ (id_A \otimes \alpha \otimes m_H) \circ$

$(id_A \otimes \tau \otimes id_H \otimes id_H) \circ (id_A \otimes id_A \otimes \Delta \otimes id_H) \circ (id_A \otimes \tau^{-1} \otimes id_H)$. Sejam $a, b, c \in A$ e $h, g, e \in H$. Segue-se das propriedades do produto tensorial e da linearidade de Ω que:

$$\begin{aligned}(a\#h + b\#g).(c\#e) &= \Omega((a \otimes h + b \otimes g) \otimes (c \otimes e)) \\ &= \Omega((a \otimes h) \otimes (c \otimes e) + (b \otimes g) \otimes (c \otimes e)) \\ &= \Omega((a \otimes h) \otimes (c \otimes e)) + \Omega((b \otimes g) \otimes (c \otimes e)) \\ &= (a\#h).(c\#e) + (b\#g).(c\#e).\end{aligned}$$

Analogamente, vale a distributividade da multiplicação em relação à adição à esquerda.

Decorre do fato de Δ ser um homomorfismo de álgebras e da notação sigma (ver na seção 2.4) que:

$$\begin{aligned}[(a\#h).(b\#g)].(c\#e) &= [\sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright b)\#h_{(2)}g].(c\#e) \\ &= \sum_{(h)} \{[a(h_{(1)} \triangleright b)\#h_{(2)}g].(c\#e)\} \\ &= \sum_{(h)} \sum_{(h_{(2)}g)} a(h_{(1)} \triangleright b)((h_{(2)}g)_{(1)} \triangleright c)\#(h_{(2)}g)_{(2)}e \\ &= \sum_{(h)} \sum_{(h_{(2)})} \sum_{(g)} a(h_{(1)} \triangleright b)(h_{(2)_{(1)}}g_{(1)} \triangleright c)\#h_{(2)_{(2)}}g_{(2)}e \\ &= \sum_{(h)} \sum_{(h_{(1)})} \sum_{(g)} a(h_{(1)_{(1)}} \triangleright b)((h_{(1)_{(2)}}g_{(1)}) \triangleright c)\#h_{(2)}g_{(2)}e.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}(a\#h).[(b\#g).(c\#e)] &= (a\#h).[\sum_{(g)} b(g_{(1)} \triangleright c)\#g_{(2)}e] \\ &= \sum_{(g)} [(a\#h).(b(g_{(1)} \triangleright c)\#g_{(2)}e)] \\ &= \sum_{(g)} \sum_{(h)} [a(h_{(1)} \triangleright (b(g_{(1)} \triangleright c)))\#h_{(2)}g_{(2)}e] \\ &= \sum_{(g)} \sum_{(h)} [a \sum_{(h_{(1)})} [(h_{(1)_{(1)}} \triangleright b)(h_{(1)_{(2)}} \triangleright (g_{(1)} \triangleright c))]\#h_{(2)}g_{(2)}e] \\ &= \sum_{(h)} \sum_{(h_{(1)})} \sum_{(g)} a(h_{(1)_{(1)}} \triangleright b)((h_{(1)_{(2)}}g_{(1)}) \triangleright c)\#h_{(2)}g_{(2)}e.\end{aligned}$$

Logo

$$[(a\#h).(b\#g)].(c\#e) = (a\#h).[(b\#g).(c\#e)].$$

Verifica-se facilmente que:

$$\lambda[(a\#h).(b\#g)] = [\lambda(a\#h)].(b\#g) = [(a\#h)\lambda].(b\#g) = (a\#h).[\lambda(b\#g)]$$
$$= (a\#h).[(b\#g)\lambda] = [(a\#h).(b\#g)]\lambda,$$

para quaisquer $\lambda \in K$, $a \in A$ e $h \in H$.

Como Δ é um homomorfismo de álgebras, então $\Delta(1_H) = 1_{H\otimes_K H} = 1_H \otimes 1_H$. Segue-se que, para todo $a \in A$ e $h \in H$, vale:

$$(1_A\#1_H).(a\#h) = 1_A(1_H \triangleright a)\#1_H h = 1_A a\#h = a\#h.$$

Por outro lado, da propriedade da counidade (ver Exemplo 2.4.3), temos que:

$$\begin{aligned}(a\#h).(1_A\#1_H) &= \sum_{(h)} a(h_{(1)} \triangleright 1_A)\#h_{(2)}1_H \\ &= \sum_{(h)} a\varepsilon(h_{(1)})1_A\#h_{(2)} = \sum_{(h)} a\#\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} \\ &= a\#\sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} = a\#h.\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.1.5. *Seja H_4 a álgebra de Sweedler de dimensão 4 (que é uma álgebra de Hopf - ver Exemplo 2.3.3) com base $\beta' = \{e_1, e_2, h_1, h_2\}$ sobre o corpo K, tal que $char(K) \neq 2$. Então $h \triangleright k = \sum_{(h)} h_{(1)}kS(h_{(2)})$, com $h, k \in H_4$ é uma ação de H_4 (à esquerda) sobre si mesma.*

De fato, segue-se do Exemplo 2.3.3 e da Observação 2.3.4 que $\beta' = \{e_1, e_2, h_1, h_2\}$ é uma base de H_4 , onde $e_1 = (1 + g)/2$, $e_2 = (1 - g)/2$, $h_1 = xe_1$ e $h_2 = xe_2$ $(\star)$, sendo $\beta = \{1, g, x, xg\}$ uma base de H_4. Temos a seguinte tabela de multiplicação:

	e_1	e_2	h_1	h_2
e_1	e_1	0	0	h_2
e_2	0	e_2	h_1	0
h_1	h_1	0	0	0
h_2	0	h_2	0	0

Das relações $(\star)$*, temos que* $1 = e_1 + e_2$*,* $g = e_1 - e_2$ *e* $x = h_1 + h_2$*.*

Daí obtemos as seguintes expressões para Δ *sobre* β'*:*

$$\begin{aligned}\Delta(e_1) &= \Delta((1+g)/2) = (1\otimes 1 + g\otimes g)/2\\ &= [(e_1+e_2)\otimes(e_1+e_2) + (e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)]/2 = e_1\otimes e_1 + e_2\otimes e_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(e_2) &= \Delta((1-g)/2) = (1\otimes 1 - g\otimes g)/2\\ &= [(e_1+e_2)\otimes(e_1+e_2) - (e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)]/2 = e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(h_1) &= \Delta(xe_1) = \Delta(x)\Delta(e_1) = (x\otimes 1 + g\otimes x)(e_1\otimes e_1 + e_2\otimes e_2)\\ &= [(h_1+h_2)\otimes(e_1+e_2) + (e_1-e_2)\otimes(h_1+h_2)](e_1\otimes e_1 + e_2\otimes e_2)\\ &= (h_1\otimes e_1 + h_1\otimes e_2 + h_2\otimes e_1 + h_2\otimes e_2 + e_1\otimes h_1 + e_1\otimes h_2\\ &- e_2\otimes h_1 - e_2\otimes h_2)(e_1\otimes e_1 + e_2\otimes e_2)\\ &= h_1\otimes e_1 + e_1\otimes h_1 + h_2\otimes e_2 - e_2\otimes h_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(h_2) &= \Delta(xe_2) = \Delta(x)\Delta(e_2) = (x\otimes 1 + g\otimes x)(e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1)\\ &= [(h_1+h_2)\otimes(e_1+e_2) + (e_1-e_2)\otimes(h_1+h_2)](e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1)\\ &= h_1\otimes e_2 + e_1\otimes h_2 + h_2\otimes e_1 - e_2\otimes h_1.\end{aligned}$$

Obtemos também as seguintes expressões para ε *sobre* β'*:*

$\varepsilon(e_1) = \varepsilon((1+g)/2) = 1;$

$\varepsilon(e_2) = \varepsilon((1-g)/2) = 0;$

$\varepsilon(h_1) = \varepsilon(xe_1) = \varepsilon(x)\varepsilon(e_1) = 0;$

$\varepsilon(h_2) = \varepsilon(xe_2) = \varepsilon(x)\varepsilon(e_2) = 0.$

Ainda, obtemos as seguintes expressões para S *sobre* β'*:*

$S(e_1) = S((1+g)/2) = (1+g)/2 = e_1;$

$S(e_2) = S((1-g)/2) = (1-g)/2 = e_2;$

$S(h_1) = S(xe_1) = S(x(1+g)/2) = (xg-x)/2 = -x(1-g)/2 = -h_2;$

$S(h_2) = S(xe_2) = S(x(1-g)/2) = (xg+x)/2 = x(1+g)/2 = h_1.$

Denotemos $\sum\limits_{(h)} h_{(1)}kS(h_{(2)})$ *por* $h \triangleright k$*, com* $k, h \in H_4$*.*

Temos que:

$$
\begin{aligned}
m \circ (m \otimes S) \circ (id \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes id)(h \otimes k) & \\
&= m \circ (m \otimes S) \circ (id \otimes \tau)((\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \otimes k) \\
&= m \circ (m \otimes S) \circ (id \otimes \tau)(\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes (h_{(2)} \otimes k)) \\
&= \sum_{(h)} m \circ (m \otimes S)((h_{(1)} \otimes k) \otimes h_{(2)}) \\
&= \sum_{(h)} m(h_{(1)}k \otimes S(h_{(2)})) = \sum_{(h)} h_{(1)}kS(h_{(2)}) = h \triangleright k.
\end{aligned}
$$

Portanto $\alpha : H_4 \otimes_K H_4 \longrightarrow H_4$ *definida por* $\alpha(h \otimes k) = m \circ (m \otimes S) \circ (id \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes id)(h \otimes k) = \sum_{(h)} h_{(1)}kS(h_{(2)}) = h \triangleright k$ *é* K*-linear.*

Então

$$
\begin{aligned}
e_1 \triangleright e_1 &= m \circ (m \otimes S) \circ (id \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes id)(e_1 \otimes e_1) \\
&= m \circ (m \otimes S) \circ (id \otimes \tau)((e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \otimes e_1) \\
&= m \circ (m \otimes S) \circ (id \otimes \tau)(e_1 \otimes (e_1 \otimes e_1) + e_2 \otimes (e_2 \otimes e_1)) \\
&= m \circ (m \otimes S)((e_1 \otimes e_1) \otimes e_1 + ((e_2 \otimes e_1) \otimes e_2) \\
&= m(e_1 \otimes e_1 + 0 \otimes e_2) = e_1.
\end{aligned}
$$

Fazendo sucessivamente para os demais elementos de β'*, obtemos a seguinte tabela:*

$\triangleright$	e_1	e_2	h_1	h_2
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	0	0	h_1	h_2
h_1	$h_1 - h_2$	$h_2 - h_1$	0	0
h_2	0	0	0	0

Observemos que:

$$
\begin{aligned}
m \circ (\alpha \otimes \alpha) &\circ (id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta \otimes id \otimes id)(h \otimes k \otimes e) \\
&= m \circ (\alpha \otimes \alpha) \circ (id \otimes \tau \otimes id)((\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \otimes k \otimes e) \\
&= \sum_{(h)} m \circ (\alpha \otimes \alpha) \circ (id \otimes \tau \otimes id)(h_{(1)} \otimes (h_{(2)} \otimes k) \otimes e) \\
&= \sum_{(h)} m \circ (\alpha \otimes \alpha)((h_{(1)} \otimes k) \otimes (h_{(2)} \otimes e)) \\
&= \sum_{(h)} m(\alpha(h_{(1)} \otimes k) \otimes \alpha(h_{(2)} \otimes e)) \\
&= \sum_{(h)} \alpha(h_{(1)} \otimes k)\alpha(h_{(2)} \otimes e) \\
&= \sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright k)(h_{(2)} \triangleright e).
\end{aligned}
$$

Queremos mostrar que $h \triangleright (ke) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright k)(h_{(2)} \triangleright e)$, *para todo* $h, k, e \in H_4$.

Sejam $h = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 + \lambda_4 h_2$, $k = \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \lambda'_3 h_1 + \lambda'_4 h_2$ *e* $e = \lambda''_1 e_1 + \lambda''_2 e_2 + \lambda''_3 h_1 + \lambda''_4 h_2$, *com* $\lambda_i, \lambda'_i, \lambda''_i \in K$, *onde* $i = 1, 2, 3, 4$.

Temos que $ke = \lambda'_1 \lambda''_1 e_1 + \lambda'_2 \lambda''_2 e_2 + (\lambda'_2 \lambda''_3 + \lambda'_3 \lambda''_1) h_1 + (\lambda'_1 \lambda''_4 + \lambda'_4 \lambda''_2) h_2$.

Segue-se que:

$$
\begin{aligned}
h \triangleright ke = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 + \lambda_4 h_2) &\triangleright (\lambda'_1 \lambda''_1 e_1 + \lambda'_2 \lambda''_2 e_2 + (\lambda'_2 \lambda''_3 + \lambda'_3 \lambda''_1) h_1 \\
&+ (\lambda'_1 \lambda''_4 + \lambda'_4 \lambda''_2) h_2) \\
&= \lambda_1 \lambda'_1 \lambda''_1 e_1 + \lambda_1 \lambda'_2 \lambda''_2 e_2 + [\lambda_2(\lambda'_2 \lambda''_3 + \lambda'_3 \lambda''_1) + \lambda_3(\lambda'_1 \lambda''_1 - \lambda'_2 \lambda''_2)] h_1 \\
&+ [\lambda_2(\lambda'_1 \lambda''_4 + \lambda'_4 \lambda''_2) - \lambda_3(\lambda'_1 \lambda''_1 - \lambda'_2 \lambda''_2)] h_2.
\end{aligned}
$$

$$\sum_{(h)}(h_{(1)}\triangleright k)(h_{(2)}\triangleright e)=m\circ(\alpha\otimes\alpha)\circ(id\otimes\tau\otimes id)\circ(\Delta\otimes id\otimes id)(h\otimes k\otimes e)$$

$$=(\lambda_1\lambda_1'e_1+\lambda_1\lambda_2'e_2)(\lambda_1''e_1+\lambda_2''e_2)+(\lambda_1\lambda_3'h_1+\lambda_1\lambda_4'h_2)(\lambda_3''h_1+\lambda_4''h_2)$$

$$+(\lambda_2\lambda_1'e_1+\lambda_2\lambda_2'e_2)(\lambda_3''h_1+\lambda_4''h_2)+(\lambda_2\lambda_3'h_1+\lambda_2\lambda_4'h_2)(\lambda_1''e_1+\lambda_2''e_2)$$

$$+(\lambda_3\lambda_1'(h_1-h_2)+\lambda_3\lambda_2'(h_2-h_1))(\lambda_1''e_1+\lambda_2''e_2)+(\lambda_3\lambda_1'e_1+\lambda_3\lambda_2'e_2)(\lambda_1''(h_1-h_2)$$

$$+\lambda_2''(h_2-h_1))+(\lambda_4\lambda_1'(h_1-h_2)+\lambda_4\lambda_2'(h_2-h_1))(\lambda_3''h_1+\lambda_4''h_2)+(\lambda_4\lambda_3'h_1$$

$$+\lambda_4\lambda_4'h_2)(\lambda_1''(h_1-h_2)+\lambda_2''(h_2-h_1))$$

$$=\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''e_1+\lambda_1\lambda_2'\lambda_2''e_2+[\lambda_2(\lambda_2'\lambda_3''+\lambda_3'\lambda_1'')+\lambda_3(\lambda_1'\lambda_1''-\lambda_2'\lambda_2'')]h_1$$

$$+[\lambda_2(\lambda_1'\lambda_4''+\lambda_4'\lambda_2'')-\lambda_3(\lambda_1'\lambda_1''-\lambda_2'\lambda_2'')]h_2.$$

Logo $h\triangleright(ke)=\sum_{(h)}(h_{(1)}\triangleright k)(h_{(2)}\triangleright e)$.

$$1\triangleright h=m\circ(m\otimes S)\circ(id\otimes\tau)\circ(\Delta\otimes id)(1\otimes h)$$

$$=m\circ(m\otimes S)\circ(id\otimes\tau)(1\otimes(1\otimes h))=m\circ(m\otimes S)((1\otimes h)\otimes 1)$$

$$=m(h\otimes 1)=h.$$

$$h\triangleright(k\triangleright e)=(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3h_1+\lambda_4h_2)\triangleright[(\lambda_1'e_1+\lambda_2'e_2+\lambda_3'h_1+\lambda_4'h_2)$$

$$\triangleright(\lambda_1''e_1+\lambda_2''e_2+\lambda_3''h_1+\lambda_4''h_2)]=(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3h_1+\lambda_4h_2)\triangleright[\lambda_1'\lambda_1''e_1$$

$$+\lambda_1'\lambda_2''e_2+\lambda_2'\lambda_3''h_1+\lambda_2'\lambda_4''h_2+\lambda_3'\lambda_1''(h_1-h_2)+\lambda_3'\lambda_2''(h_2-h_1)]$$

$$=\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''e_1+\lambda_1\lambda_1'\lambda_2''e_2+(\lambda_2\lambda_2'\lambda_3''+\lambda_2\lambda_3'\lambda_1''-\lambda_2\lambda_3'\lambda_2''+\lambda_3\lambda_1'\lambda_1''$$

$$-\lambda_3\lambda_1'\lambda_2'')h_1+(\lambda_2\lambda_2'\lambda_4''-\lambda_2\lambda_3'\lambda_1''+\lambda_2\lambda_3'\lambda_2''-\lambda_3\lambda_1'\lambda_1''+\lambda_3\lambda_1'\lambda_2'')h_2.$$

$$hk\triangleright e=[(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3h_1+\lambda_4h_2)(\lambda_1'e_1+\lambda_2'e_2+\lambda_3'h_1+\lambda_4'h_2)]\triangleright(\lambda_1''e_1+\lambda_2''e_2$$

$$+\lambda_3''h_1+\lambda_4''h_2)$$

$$=[\lambda_1\lambda_1'e_1+\lambda_2\lambda_2'e_2+(\lambda_2\lambda_3'+\lambda_3\lambda_1')h_1+(\lambda_1\lambda_4'+\lambda_4\lambda_2')h_2]\triangleright(\lambda_1''e_1$$

$$+\lambda_2''e_2+\lambda_3''h_1+\lambda_4''h_2)$$

$$=\lambda_1\lambda_1'\lambda_1''e_1+\lambda_1\lambda_1'\lambda_2''e_2+(\lambda_2\lambda_2'\lambda_3''+\lambda_2\lambda_3'\lambda_1''-\lambda_2\lambda_3'\lambda_2''+\lambda_3\lambda_1'\lambda_1''$$

$$-\lambda_3\lambda_1'\lambda_2'')h_1+(\lambda_2\lambda_2'\lambda_4''-\lambda_2\lambda_3'\lambda_1''+\lambda_2\lambda_3'\lambda_2''-\lambda_3\lambda_1'\lambda_1''+\lambda_3\lambda_1'\lambda_2'')h_2.$$

Logo $h \triangleright (k \triangleright e) = hk \triangleright e$.

$$h \triangleright 1 = m \circ (m \otimes S) \circ (id \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes id)(h \otimes 1) = m \circ (m \otimes S) \circ (id \otimes \tau) \circ$$
$$(\Delta \otimes id)((\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 + \lambda_4 h_2) \otimes 1)$$
$$= \lambda_1 e_1 + \lambda_1 e_2 + \lambda_3 h_1 - \lambda_3 h_2 + \lambda_3 h_2 - \lambda_3 h_1 = \lambda_1(e_1 + e_2) = \lambda_1 1.$$

$$\varepsilon(h)1 = \varepsilon(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 + \lambda_4 h_2)1 = (\lambda_1 1_K)1 = \lambda_1 1.$$

Logo $h \triangleright 1 = \varepsilon(h)1$*, para todo* $h \in H_4$.

Portanto $\alpha : H_4 \otimes_K H_4 \longrightarrow H_4$ *definida por* $\alpha(h \otimes k) = \sum_{(h)} h_{(1)} k S(h_{(2)})$ *é uma ação de* H_4 *sobre si mesma.*

A ação dada por $h \triangleright k = \sum_{(h)} h_{(1)} k S(h_{(2)})$*, com* $h, k \in H_4$*, é chamada de ação adjunta (à esquerda).*

Definição 4.1.6. *Sejam A e B duas H-módulos álgebras (à esquerda). Dizemos que uma aplicação $\Phi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de H-módulos álgebras (à esquerda) quando Φ é um homomorfismo de álgebras e vale $\Phi(h \triangleright a) = h \triangleright \Phi(a)$, para quaisquer $h \in H$ e $a \in A$. Esta última condição nos diz que Φ é H-linear.*

Proposição 4.1.7. *Uma álgebra de Hopf H atua sobre a álgebra $Hom(H, A)$ por $(h \triangleright f)(k) = f(kh)$, onde $h, k \in H$ e $f \in Hom(H, A)$.*

Demonstração. Seja $j : H \times Hom(H, A) \longrightarrow Hom(H, A)$ definida por $j(h, f) = f_h$, onde $f_h(k) = f(kh)$, para todo $k \in H$. Para cada $h \in H$ e para cada $f \in Hom(H, A)$ fixos, temos que $f_h(\lambda k_1 + k_2) = f((\lambda k_1 + k_2)h) = f(\lambda k_1 h + k_2 h) = \lambda f(k_1 h) + f(k_2 h) = \lambda f_h(k_1) + f_h(k_2)$, onde $\lambda \in K$, $k_1, k_2 \in H$. Isto mostra que $f_h \in Hom(H, A)$. Temos também que, para quaisquer $h, h_1, h_2, k \in H$, $f, f_1, f_2 \in Hom(H, A)$ e $\lambda \in K$, valem:

$$\begin{aligned} j(h_1 + h_2, f)(k) &= f_{h_1 + h_2}(k) = f(k(h_1 + h_2)) = f(kh_1 + kh_2) \\ &= f(kh_1) + f(kh_2) = f_{h_1}(k) + f_{h_2}(k) = (f_{h_1} + f_{h_2})(k) \\ &= (j(h_1, f) + j(h_2, f))(k); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j(h, f_1 + f_2)(k) &= (f_1 + f_2)_h(k) = (f_1 + f_2)(kh) = f_1(kh) + f_2(kh) \\ &= f_{1h}(k) + f_{2h}(k) = (f_{1h} + f_{2h})(k) \\ &= (j(h, f_1) + j(h, f_2))(k); \end{aligned}$$

$$j(h\lambda, f)(k) = f_{h\lambda}(k) = f(k(h\lambda)) = f((kh)\lambda) = f(kh)\lambda = \lambda f(kh)$$
$$= (\lambda f)(kh) = (\lambda f)_h(k) = j(h, \lambda f)(k).$$

Isto mostra que j é K-biaditiva. Da Definição 1.1.12, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\alpha : H \otimes_K Hom(H, A) \longrightarrow Hom(H, A)$ com $\alpha(h \otimes f) = f_h$. Daí $\alpha(h \otimes f)(k) = f_h(k) = f(kh)$, para todo $h, k \in H$ e para todo $f \in Hom(H, A)$. Da comutatividade de K e da K-linearidade de f, segue-se que α é K-linear.

Denotemos $\alpha(h \otimes f)$ por $h \triangleright f$ e tratemos de mostrar que α é uma ação da álgebra de Hopf H sobre a álgebra (associativa e unitária) $Hom(H, A)$.

Sejam $h, k, r \in H$ e $f, g \in Hom(H, A)$. Como Δ e ε são homomorfismos de álgebras, segue-se que:

$$\begin{aligned}
(h \triangleright (f * g))(k) = (f * g)(kh) &= \sum_{(kh)} f((kh)_{(1)})g((kh)_{(2)}) \\
&= \sum_{(k)}\sum_{(h)} f(k_{(1)}h_{(1)})g(k_{(2)}h_{(2)}) = \sum_{(h)}\sum_{(k)} f(k_{(1)}h_{(1)})g(k_{(2)}h_{(2)}) \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(k)} (h_{(1)} \triangleright f)(k_{(1)})(h_{(2)} \triangleright g)(k_{(2)}) \\
&= \sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright f) * (h_{(2)} \triangleright g)(k) \\
&= (\sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright f) * (h_{(2)} \triangleright g))(k);
\end{aligned}$$

$$(1_H \triangleright f)(k) = f(k1_H) = f(k);$$

$$(h \triangleright (r \triangleright f))(k) = (r \triangleright f)(kh) = f((kh)r) = f(k(hr)) = (hr \triangleright f)(k);$$

$$\begin{aligned}
(h \triangleright 1_{Hom(H,A)})(k) &= (h \triangleright (\mu_A \circ \varepsilon))(k) = (\mu_A \circ \varepsilon)(kh) = \mu_A(\varepsilon(kh)) \\
&= \mu_A(\varepsilon(k)\varepsilon(h)) = \mu_A(\varepsilon(h)\varepsilon(k)) \\
&= \varepsilon(h)\mu_A \circ \varepsilon(k) = (\varepsilon(h)\mu_A \circ \varepsilon)(k) = (\varepsilon(h)1_{Hom(H,A)})(k).
\end{aligned}$$

Isto mostra que α é uma ação da álgebra de Hopf H sobre $Hom(H, A)$. $\square$

4.2 Ação parcial de uma álgebra de Hopf sobre uma álgebra

Começamos esta seção com a definição de ação parcial (à esquerda) de uma álgebra de Hopf sobre uma álgebra. Seguem-se exemplos de ações parciais. Com o estudo da seção 2.6, apresentamos também uma ação parcial do dual algébrico H^* de uma álgebra de Hopf H sobre H, onde $dim(H) < +\infty$. Verifica-se que esta ação parcial de H^* em H é, na verdade, uma ação total. Veremos também que podemos construir uma ação parcial de Hopf sobre um ideal à direita com unidade de uma H-módulo álgebra (à esquerda). Por fim, temos um exemplo de uma ação parcial de Hopf que também é uma ação "total" de Hopf.

Definição 4.2.1. *Uma ação parcial de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra A é uma aplicação K-linear $\alpha : H \otimes_K A \longrightarrow A$, com $\alpha(h \otimes a)$ denotado por $h \cdot a$, tal que, para quaisquer $h, g \in H$ e $a, b \in A$, onde $\Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, valem:*

(i) $h \cdot (ab) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b)$;

(ii) $1_H \cdot a = a$;

(iii) $h \cdot (g \cdot a) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot 1_A)((h_{(2)} g) \cdot a)$.

Dizemos também que H atua parcialmente (à esquerda) sobre A que é chamada de uma H-módulo álgebra parcial (à esquerda).

Exemplo 4.2.2. *Toda ação "total" de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra A é também uma ação parcial de H sobre A. De fato, sejam $h, k \in H$ e $a \in A$. Dos itens (i) e (iii) da Definição 4.1.1, segue-se que $h \triangleright (k \triangleright a) = h \triangleright (1_A(\underbrace{k \triangleright a}_{\in A})) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright 1_A)(h_{(2)} \triangleright (k \triangleright a)) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright 1_A)((h_{(2)} k) \triangleright a)$.*

Observação 4.2.3. *Seja α uma ação parcial de H sobre uma álgebra A. Se $h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$, com $h \in H$, então α é uma ação "total" de H sobre A. De fato, sejam*

$h, g \in H$ e $a \in A$. Da propriedade da counidade (ver Exemplo 2.4.3), temos que:

$$\begin{aligned} h \cdot (g \cdot a) &= \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot 1_A)((h_{(2)}g) \cdot a) = \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)}) 1_A((h_{(2)}g) \cdot a) \\ &= \sum_{(h)} \{(\varepsilon(h_{(1)}) h_{(2)} g) \cdot a\} = (\sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)}) h_{(2)} g) \cdot a = hg \cdot a. \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.4. *Consideremos uma ação parcial $\alpha = \{(D_g)_{g\in G} \quad e \quad (\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g)_{g\in G}\}$ de um grupo G sobre uma álgebra A (unitária e associativa). Suponhamos que cada D_g tem unidade 1_g. Daí $D_g = A1_g$. Então existe uma ação parcial da álgebra de grupo KG (que é uma álgebra de Hopf, ver Exemplo 2.3.2) sobre A que é definida sobre os elementos da base G de KG por $g \cdot a = \alpha_g(a1_{g^{-1}})$, com $g \in G$ e $a \in A$, e estendida linearmente sobre todos os elementos de KG, isto é, $(\sum_{g\in G} \lambda_g g) \cdot a = \sum_{g\in G} \lambda_g \alpha_g(a1_{g^{-1}})$, onde $\lambda_g \in K$.*

De fato, definamos $\pi : KG \times A \longrightarrow A$ por $\pi(\sum_{g\in G} \lambda_g g, a) = \sum_{g\in G} \lambda_g \alpha_g(a1_{g^{-1}})$. Verifica-se facilmente que π é K-biaditiva. Da Definição 1.1.12, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\alpha : KG \otimes_K A \longrightarrow A$ definido por $\alpha((\sum_{g\in G} \lambda_g g) \otimes a) = (\sum_{g\in G} \lambda_g g) \cdot a = \sum_{g\in G} \lambda_g \alpha_g(a1_{g^{-1}})$. Como K é um anel comutativo, então α é K-linear.

Sejam $a, b \in A$ e $g, h \in G$. Como $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\Delta(h) = h \otimes h$, temos que:

$$\begin{aligned} g \cdot (ab) &= \alpha_g((ab)1_{g^{-1}}) = \alpha_g(a1_{g^{-1}} b1_{g^{-1}}) = \alpha_g(a1_{g^{-1}})\alpha_g(b1_{g^{-1}}) = (g \cdot a)(g \cdot b) \\ &= \sum_{(g)} (g_{(1)} \cdot a)(g_{(2)} \cdot b); \end{aligned}$$

$$1_G \cdot a = \alpha_{1_G}(a1_{1_G{}^{-1}}) = id_A(a1_A) = a;$$

$$\begin{aligned} h \cdot (g \cdot a) &= \alpha_h((g \cdot a)1_{h^{-1}}) = \alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}) \\ &= \alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_g 1_{h^{-1}}) = \alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}}) \underbrace{\alpha_g(1_{g^{-1}} 1_{g^{-1}h^{-1}})}_{\text{Lema 3.2.1 (i)}}) \\ &= \alpha_h(\alpha_g(\underbrace{a1_{g^{-1}} 1_{g^{-1}h^{-1}}}_{\in D_{g^{-1}} \cap D_{(hg)^{-1}}})) = \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}} 1_{g^{-1}h^{-1}}) \\ &= \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}} 1_{g^{-1}h^{-1}} 1_{g^{-1}}) = \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}}) \underbrace{\alpha_{hg}(1_{g^{-1}h^{-1}} 1_{g^{-1}})}_{\text{Lema 3.2.1 (i)}} \\ &= \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}})1_{hg} 1_h = \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}})1_h = 1_h \alpha_{hg}(a1_{g^{-1}g^{-1}}) \\ &= \alpha_h(1_{h^{-1}})\alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}}) = \alpha_h(1_A 1_{h^{-1}})\alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}}) = (h \cdot 1_A)(hg \cdot a) \\ &= \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot 1_A)((h_{(2)}g) \cdot a). \end{aligned}$$

Com os resultados acima, verifica-se sem dificuldades que, para quaisquer $h, h' \in KG$ e $a, b \in A$, valem:

$$h\cdot(ab) = \sum_{(h)}(h_{(1)}\cdot a)(h_{(2)}\cdot b); \quad (1_K 1_G)\cdot a = a; \quad h\cdot(h'\cdot a) = \sum_{(h)}(h_{(1)}\cdot 1_A)((h_{(2)}h')\cdot a).$$

Portanto $\alpha : KG \otimes_K A \longrightarrow A$, satisfazendo

$$\alpha((\sum_{g\in G}\lambda_g g)\otimes a) = (\sum_{g\in G}\lambda_g g)\cdot a = \sum_{g\in G}\lambda_g \alpha_g(a1_{g^{-1}}),$$

é uma ação parcial de KG sobre A.

Proposição 4.2.5. *Seja H uma álgebra de Hopf (sobre um corpo K) de dimensão finita. Então o dual algébrico H^* de H atua parcialmente em H por $h^* \rightharpoonup h = \sum_{(h)} h^*(h_{(2)})h_{(1)}$ com $h^* \in H^*$ e $h \in H$. Além disso, H^* atua "totalmente" em H.*

Demonstração. Vimos na seção 2.6 que quando H tem dimensão finita, então o seu dual algébrico H^* é uma álgebra de Hopf.

Observemos que valem:

$(h^* + j^*) \rightharpoonup h = (h^* \rightharpoonup h) + (j^* \rightharpoonup h)$, para quaisquer $h^*, j^* \in H^*$ e $h \in H$;

$h^* \rightharpoonup (h + g) = (h^* \rightharpoonup h) + (h^* \rightharpoonup g)$, para quaisquer $h^* \in H^*$ e $h, g \in H$;

$h^* \rightharpoonup (\lambda h) = \lambda(h^* \rightharpoonup h) = h^*\lambda \rightharpoonup h$, para quaisquer $\lambda \in K$, $h^* \in H^*$ e $h \in H$.

De fato, sejam $h^*, j^* \in H^*$ e $h, g \in H$ e $\lambda \in K$. Temos que:

$$\begin{aligned}(h^* + j^*) \rightharpoonup h &= \sum_{(h)}(h^* + j^*)(h_{(2)})h_{(1)} = \sum_{(h)} h^*(h_{(2)})h_{(1)} + \sum_{(h)} j^*(h_{(2)})h_{(1)} \\ &= (h^* \rightharpoonup h) + (j^* \rightharpoonup h);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h^* \rightharpoonup (h + g) &= \sum_{(h+g)} h^*((h+g)_{(2)})(h+g)_{(1)} = \sum_{(h)} h^*(h_{(2)})h_{(1)} + \sum_{(g)} h^*(g_{(2)})g_{(1)} \\ &= (h^* \rightharpoonup h) + (h^* \rightharpoonup g);\end{aligned}$$

$$h^* \rightharpoonup (\lambda h) = \sum_{(h)} h^*(h_{(2)})\lambda h_{(1)} = \sum_{(h)}(h^*\lambda)(h_{(2)})h_{(1)} = h^*\lambda \rightharpoonup h.$$

Portanto a aplicação $\pi : H^* \times H \longrightarrow H$ dada por $\pi(h^*, h) = h^* \rightharpoonup h$ é K-biaditiva. Pela propriedade universal da Definição 1.1.12, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\alpha : H^* \otimes_K H \longrightarrow H$ com $\alpha(h^* \otimes h) = h^* \rightharpoonup h$. Como K é um corpo, então α é K-linear.

Usando o fato de Δ ser um homomorfismo de álgebras, a propriedade da counidade (ver Exemplo 2.4.3) e lembrando também que $h^*(hg) = \sum\limits_{(h^*)} h^*_{(1)}(h)h^*_{(2)}(g)$ (ver demonstração da Proposição 2.6.8), segue-se que, para quaisquer $h, g \in H$ e $h^*, j^* \in H^*$, valem:

$$\begin{aligned}
h^* \rightharpoonup hg &= \sum_{(hg)} h^*((hg)_{(2)})(hg)_{(1)} = \sum_{(h)}\sum_{(g)} h^*(h_{(2)}g_{(2)})h_{(1)}g_{(1)} \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(g)}\sum_{(h^*)} h^*_{(1)}(h_{(2)})h^*_{(2)}(g_{(2)})h_{(1)}g_{(1)} = \sum_{(h)}\sum_{(g)}\sum_{(h^*)} h^*_{(1)}(h_{(2)})h_{(1)}h^*_{(2)}(g_{(2)})g_{(1)} \\
&= \sum_{(h^*)}\sum_{(h)}\sum_{(g)} h^*_{(1)}(h_{(2)})h_{(1)}h^*_{(2)}(g_{(2)})g_{(1)} \\
&= \sum_{(h^*)}(\sum_{(h)} h^*_{(1)}(h_{(2)})h_{(1)})(\sum_{(g)} h^*_{(2)}(g_{(2)})g_{(1)}) = \sum_{(h^*)}(h^*_{(1)} \rightharpoonup h)(h^*_{(2)} \rightharpoonup g);
\end{aligned}$$

$$1_{H^*} \rightharpoonup h = \varepsilon \rightharpoonup h = \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(2)})h_{(1)} = \sum_{(h)} h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}) = h;$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{(h^*)}(h^*_{(1)} \rightharpoonup 1_H)(h^*_{(2)} * j^* \rightharpoonup h) = \sum_{(h^*)}\{(h^*_{(1)}(1_H)1_H)(\sum_{(h)} h^*_{(2)} * j^*(h_{(2)})h_{(1)})\} \\
&= \sum_{(h^*)}\{(h^*_{(1)}(1_H)1_H)(\sum_{(h)}\sum_{(h_{(2)})} h^*_{(2)}(h_{(2)_{(1)}})j^*(h_{(2)_{(2)}})h_{(1)})\} \\
&= \sum_{(h^*)}\sum_{(h)}\sum_{(h_{(2)})} h^*_{(1)}(1_H)1_H h^*_{(2)}(h_{(2)_{(1)}})j^*(h_{(2)_{(2)}})h_{(1)} \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(h_{(2)})}\sum_{(h^*)} h^*_{(1)}(1_H)h^*_{(2)}(h_{(2)_{(1)}})j^*(h_{(2)_{(2)}})h_{(1)} \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(h_{(2)})} h^*(h_{(2)_{(1)}})j^*(h_{(2)_{(2)}})h_{(1)} = \sum_{(h)}\sum_{(h_{(1)})} h^*(h_{(1)_{(2)}})j^*(h_{(2)})h_{(1)_{(1)}} \\
&= \sum_{(h)}\sum_{(h_{(1)})} h^*(h_{(1)_{(2)}})h_{(1)_{(1)}}j^*(h_{(2)}) = \sum_{(h)}(h^* \rightharpoonup h_{(1)})j^*(h_{(2)}) \\
&= \sum_{(h)} j^*(h_{(2)})(h^* \rightharpoonup h_{(1)}) = \sum_{(h)} h^* \rightharpoonup (j^*(h_{(2)})h_{(1)}) = h^* \rightharpoonup (\sum_{(h)} j^*(h_{(2)})h_{(1)}) \\
&= h^* \rightharpoonup (j^* \rightharpoonup h).
\end{aligned}$$

Portanto $h^* \rightharpoonup h = \sum\limits_{(h)} h^*(h_{(2)})h_{(1)}$, com $h^* \in H^*$ e $h \in H$, é uma ação parcial de H^* em H.

Temos ainda que $h^* \rightharpoonup 1_H = h^*(1_H)1_H = \varepsilon_{H^*}(h^*)1_H$, para todo $h^* \in H^*$. Da

Observação 4.2.3, segue-se que $h^* \rightharpoonup h = \sum\limits_{(h)} h^*(h_{(2)})h_{(1)}$, com $h^* \in H^*$ e $h \in H$, é uma ação "total" de H^* em H. $\square$

Lembremos que um subgrupo N de um grupo G é dito normal se $N^g = g^{-1}Ng = \{g^{-1}ng : n \in N\} \subseteq N$, para todo $g \in G$. Isto equivale a dizer que $N^g = N$, para todo $g \in G$. De fato, seja $n \in N$. Então $n' = gng^{-1} \in N^{g^{-1}} \subseteq N$. Logo $g^{-1}n'g \in N^g$, ou seja, $g^{-1}(gng^{-1})g = n \in N^g$. A recíproca é imediata.

Exemplo 4.2.6. *Seja N um subgrupo normal do grupo finito G. Seja $A = e_NKG$ o ideal de KG, onde $e_N = \frac{1}{|N|}\sum\limits_{n\in N} n$ e K é um corpo de característica zero. Então existe uma ação parcial da álgebra de Hopf KG^* sobre A que é definida sobre a base dual de G, $G^* = \{p_g : g \in G\}$, por $p_g \cdot (e_N x) = e_N(p_g \rightharpoonup e_N x)$, com $x \in G$.*

Notemos inicialmente que como $N \subseteq G \hookrightarrow KG$ via $g = 1_K g$ e KG tem definida a operação de adição, faz sentido definirmos $e_N = \frac{1}{|N|}\sum\limits_{n\in N} n$. Temos que existem $n_1, \ldots, n_l$ em G, tais que $N = \{n_1, \ldots, n_l\}$. Então podemos reescrever e_N como $\frac{1}{l}\sum\limits_{i=1}^{l} n_i$. Como N é subgrupo normal de G, então $e_N = \frac{1}{l}\sum\limits_{i=1}^{l} n_i$ é um idempotente central em KG. De fato, temos:

$$\begin{aligned} e_N e_N &= (\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} n_i)(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} n_i) = \frac{1}{l^2}(n_1 + \ldots + n_l)\sum_{i=1}^{l} n_i \\ &= \frac{1}{l^2}(\underbrace{n_1\sum_{i=1}^{l} n_i}_{=\sum_{i=1}^{l} n_i} + \ldots + \underbrace{n_l\sum_{i=1}^{l} n_i}_{=\sum_{i=1}^{l} n_i}) = \frac{1}{l^2} l \sum_{i=1}^{l} n_i = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} n_i = e_N; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_N g &= (\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} n_i)g = \frac{1}{l}(n_1 g + \ldots + n_l g) = \frac{1}{l}(gg^{-1}n_1 g + \ldots + gg^{-1}n_l g) \\ &= \frac{1}{l}(g\underbrace{(g^{-1}n_1 g + \ldots + g^{-1}n_l g)}_{=\sum_{i=1}^{l} n_i \quad , \textit{ pois} \quad N^g = N}) = g\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} n_i = g e_N, \end{aligned}$$

para todo $g \in G$.

Portanto e_N comuta com todo elemento de KG.

Por hipótese, K tem característica zero. Então existe uma cópia de $\mathbb{Q}$ em K. Como $\frac{1}{|N|} \in Q \hookrightarrow K$, segue-se que $e_N \in KG$. Logo $e_N KG \subset KG$.

Verifica-se sem dificuldades que $A = e_N KG$ é um ideal de KG com unidade e_N.

Sejam $G^* = \{p_g : g \in G\} \subseteq KG^*$ a base dual de G e $x \in G$. Vimos, no Exemplo 2.6.11, que $\Delta_{KG^*}(p_g) = \sum\limits_{g_i \in G} p_{g_i} \otimes p_{g_i^{-1}g}$. Do Exemplo 2.2.2, temos que $\Delta(x) = x \otimes x$. Da proposição anterior, segue-se que:

$$\begin{aligned} p_g \rightharpoonup (e_N x) &= \sum_{g_i \in G} (p_{g_i} \rightharpoonup e_N)(p_{g_i^{-1}g} \rightharpoonup x) = \sum_{g_i \in G} (p_{g_i} \rightharpoonup e_N) p_{g_i^{-1}g}(x) x \\ &= (p_{gx^{-1}} \rightharpoonup e_N)x = (p_{gx^{-1}} \rightharpoonup \frac{1}{|N|} \sum_{n \in N} n)x = \frac{1}{|N|} \sum_{n \in N} (p_{gx^{-1}} \rightharpoonup n)x \\ &= \frac{1}{|N|} \sum_{n \in N} p_{gx^{-1}}(n) n x. \end{aligned}$$

Esta última expressão é igual a $\frac{1}{|N|}g$ quando existir um $n \in N$, tal que $n = gx^{-1}$, ou seja, quando $gx^{-1} \in N$ e, caso contrário, igual a zero.

Definamos $p_g \cdot (e_N x) = e_N(p_g \rightharpoonup e_N x)$, com $x \in G$. Daí, quando $g = nx$ para algum $n \in N$, temos que $p_g \cdot (e_N x) = e_N \frac{1}{|N|} g = e_N \frac{n}{|N|} x = \frac{1}{|N|} \underbrace{e_N n}_{=e_N} x = \frac{1}{|N|} e_N x$ e, caso contrário, $p_g \cdot (e_N x) = 0$. Logo $f \cdot (e_N h) \in e_N KG$, para quaisquer $f \in KG^*$ e $h \in KG$. Do fato de e_N ser um idempotente central em KG, da proposição anterior e do Exemplo 2.6.11, temos que, para quaisquer $x, x', g, g' \in G$, valem:

$$\begin{aligned} p_g \cdot (e_N x e_N x') &= e_N(p_g \rightharpoonup e_N x e_N x') = e_N \sum_{g_i \in G} (p_{g_i} \rightharpoonup e_N x)(p_{g_i^{-1}g} \rightharpoonup e_n x') \\ &= \sum_{g_i \in G} e_N(p_{g_i} \rightharpoonup e_N x) e_N(p_{g_i^{-1}g} \rightharpoonup e_n x') \\ &= \sum_{g_i \in G} (p_{g_i} \cdot e_N x)(p_{g_i^{-1}g} \cdot e_N x'); \end{aligned}$$

$$1_{KG^*} \cdot e_N x = e_N(1_{KG^*} \rightharpoonup e_N x) = e_N(e_N x) = e_N x;$$

$$\begin{aligned} p_g \cdot (p_{g'} \cdot e_N x) &= p_g \cdot (e_N(p_{g'} \rightharpoonup e_N x)) = e_N[p_g \rightharpoonup (e_N(p_{g'} \rightharpoonup e_N x))] \\ &= e_N[\sum_{g_i \in G} (p_{g_i} \rightharpoonup e_N)(p_{g_i^{-1}g} \rightharpoonup (p_{g'} \rightharpoonup e_N x))] \\ &= \sum_{g_i \in G} e_N(p_{g_i} \rightharpoonup e_N) e_N(p_{g_i^{-1}g} * p_{g'} \rightharpoonup e_N x) \\ &= \sum_{g_i \in G} (p_{g_i} \cdot e_N)(p_{g_i^{-1}g} * p_{g'} \cdot e_N x). \end{aligned}$$

Segue-se que $f \cdot (e_N h) = e_N(f \rightharpoonup e_N h)$, com $f \in KG^*$ e $h \in KG$, é uma ação parcial de KG^* sobre A.

Seja $\{g_1, \ldots, g_m\}$ o conjunto completo de representantes de $N_g = \{ng : n \in N\}$, com $g \in G$. Assim $\frac{G}{N} = \{N_{g_1}, \ldots, N_{g_m}\}$ e então $\beta = \{e_N g_1, \ldots, e_N g_m\}$ é uma base de A. De fato, seja $y \in A = e_N KG$. Sendo G finito, então $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$. Logo $y = e_N \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_i$, com $\lambda_i \in K$. Como $\frac{G}{N} = \{N_{g_1}, \ldots, N_{g_m}\}$, então $y = \lambda_1 e_N g_1 + \ldots + \lambda_m e_N g_m + \underbrace{\lambda_{m+1} e_N g_{m+1}}_{=\lambda_{m+1} e_N g_k, 1 \leq k \leq m} + \ldots + \underbrace{\lambda_r e_N g_r}_{=\lambda_r e_N g_k, 1 \leq k \leq m} = \lambda'_1 e_N g_1 + \ldots + \lambda'_m e_N g_m$, para certos $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_m \in K$, o que mostra que β gera o K-espaço vetorial A.

Suponhamos que $\lambda_1 e_N g_1 + \ldots + \lambda_m e_N g_m = 0$. Então $\lambda_1 \sum_{i=1}^{l} n_i g_1 + \ldots + \lambda_m \sum_{i=1}^{l} n_i g_m = \lambda_1 n_1 g_1 + \ldots + \lambda_1 n_l g_1 + \ldots + \lambda_m n_1 g_m + \ldots + \lambda_m n_l g_m = 0$.

Notemos que cada um dos $n_i g_j$, com $i = 1, \ldots, l$ e $j = 1, \ldots, m$, é elemento distinto de G (procede do fato de $N_{g_j} \cap N_{g_k} = \emptyset$ quando $g_j \neq g_k$, com $j, k = 1, \ldots, m$). Desde que G é uma base de KG, segue-se que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Como $p_g \cdot (e_N g_i) = \frac{1}{|N|} e_N g_i$ quando $g g_i^{-1} \in N$ e $p_g \cdot (e_N g_i) = 0$ do contrário, para todo $i = 1, \ldots, m$, então a matriz da ação parcial de p_g relativa à base β (as colunas desta matriz quadrada são os coeficientes de $p_g \cdot (e_N g_i)$ relativos à base β) terá apenas uma entrada não nula $a_{ii} = \frac{1}{|N|}$ quando $g g_i^{-1} \in N$, pois $N_{g_j} \cap N_{g_k} = \emptyset$ quando $g_j \neq g_k$, com $j, k = 1, \ldots, m$.

Observemos também que $p_g \cdot e_N = p_g \cdot (e_N 1_G) = \frac{1}{|N|} e_N 1_G = \frac{1}{|N|} e_N$ quando $g \in N$ e zero do contrário. Por outro lado, $\varepsilon_{KG^*}(p_g) e_N = 1_K e_N = e_N$ quando $g = 1_G$ e $\varepsilon_{KG^*}(p_g) e_N = 0$ quando $g \neq 1_G$ (ver Exemplo 2.6.11). Logo, a não ser que $N = \{1_G\}$, temos que $p_g \cdot e_N \neq \varepsilon_{KG^*}(p_g) e_N$ quando $g \in N$.

Nosso próximo objetivo é provar que se uma álgebra de Hopf H age sobre uma álgebra B, então ela agirá parcialmente sobre qualquer ideal à direita com unidade de B. Antes, porém, vejamos algumas observações.

Seja $\beta = \{(\beta_g : B \longrightarrow B)_{g \in G}\}$ uma ação do grupo G sobre uma álgebra B. Seja A um ideal de B com unidade 1_A (que é um idempotente central em B). Vimos no Exemplo 3.1.5 que $D_g = A \cap \beta_g(A)$ é um ideal de A. Aqui D_g é um ideal de A com unidade $1_g = 1_A \beta_g(1_A)$ (que é um idempotente central em B). Seja α_g a restrição de β_g a $D_{g^{-1}}$. Vimos também no Exemplo 3.1.5 que a restrição da ação β a $(D_g)_{g \in G}$ induz uma ação parcial de grupo $\alpha = \{(D_g)_{g \in G}$ e $(\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow$

$D_g)_{g\in G}\}$ de G sobre A. Do Exemplo 4.2.4, temos que existe uma ação parcial da álgebra de grupo KG sobre A definida sobre os elementos básicos $g \in G$ de KG por $g \cdot a = \alpha_g(a1_{g^{-1}})$, onde $a \in A$, e estendida linearmente sobre todos os elementos de KG. Logo $\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = \beta_g(1_{g^{-1}}a) = \beta_g(1_A\beta_{g^{-1}}(1_A)a) = \beta_g(1_A\beta_{g^{-1}}(1_A))\beta_g(a) = \beta_g(1_A)1_A\beta_g(a) = 1_A\beta_g(1_A)\beta_g(a) = 1_A\beta_g(1_Aa) = 1_A\beta_g(a)$. Portanto podemos definir a ação parcial de KG sobre A como $g \cdot a = 1_A\beta_g(a)$ (ou $g \cdot a = \beta_g(a)1_A$). Disto provém a ideia para construir ações parciais induzidas no caso Hopf, a saber: tomar $h \triangleright a$ no lugar de $\beta_g(a)$.

Proposição 4.2.7. *Sejam H uma álgebra de Hopf que atua sobre a álgebra B e A um ideal à direita de B com unidade 1_A. Então H atua parcialmente (à esquerda) sobre A por: $h \cdot a = 1_A(h \triangleright a)$, onde $a \in A$ e $h \in H$. Tal ação será chamada de ação induzida (pela ação H sobre B).*

Demonstração. Sejam $a, b \in A$ e $h, k \in H$. Temos que:

$$h \cdot (ab) = 1_A(h \triangleright (ab)) = 1_A(\sum_{(h)} \underbrace{(h_{(1)} \triangleright a)}_{\in B} \underbrace{(h_{(2)} \triangleright b)}_{\in B}) = \sum_{(h)} \underbrace{1_A(h_{(1)} \triangleright a)}_{\in A}(h_{(2)} \triangleright b)$$
$$= \sum_{(h)} \underbrace{1_A(h_{(1)} \triangleright a)}_{\in A} \underbrace{1_A(h_{(2)} \triangleright b)}_{\in A} = \sum_{(h)}(h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b);$$

$$1_H \cdot a = 1_A(1_H \triangleright a) = 1_Aa = a;$$

$$h \cdot (k \cdot a) = h \cdot (1_A(k \triangleright a)) = 1_A(h \triangleright (1_A(k \triangleright a)))$$
$$= 1_A[\sum_{(h)} \underbrace{(h_{(1)} \triangleright 1_A)}_{\in B} \underbrace{(h_{(2)} \triangleright (k \triangleright a))}_{\in B}] = \sum_{(h)} \underbrace{1_A(h_{(1)} \triangleright 1_A)}_{\in A}((h_{(2)}k) \triangleright a)$$
$$= \sum_{(h)} \underbrace{1_A(h_{(1)} \triangleright 1_A)}_{\in A} \underbrace{1_A((h_{(2)}k) \triangleright a)}_{\in A} = \sum_{(h)}(h_{(1)} \cdot 1_A)((h_{(2)}k) \cdot a).$$

Portanto H atua parcialmente sobre A por $h \cdot a = 1_A(h \triangleright a)$, onde $a \in A$ e $h \in H$. □

No próximo exemplo, dados $v_1, \ldots, v_n \in V$, onde V é um K-espaço vetorial, denotamos o K-subespaço vetorial de V gerado por $v_1, \ldots, v_n$ como $< v_1, \ldots, v_n >$.

Exemplo 4.2.8. *Seja a álgebra de Hopf H_4 com a base $\{e_1, e_2, h_1, h_2\}$ (ver Exemplo 2.3.3 e Observação 2.3.4). Então o ideal $A :=< e_1+ < h_2 >>$ de $\overline{B} := H_4/ < h_2 >$ é uma H_4-módulo álgebra parcial. Além disso, A é uma H_4-módulo álgebra.*

De fato, segue-se da tabela de multiplicação (ver Exemplo 4.1.5) que $< h_2 >$ *é um ideal de* H_4*. Ficam bem definidas, portanto, as seguintes operações em* $\overline{B}$*:*

$(h+ < h_2 >) + (h'+ < h_2 >) = (h + h')+ < h_2 >$, *para todo* $h, h' \in H_4$*;*

$(h+ < h_2 >)(h'+ < h_2 >) = (hh')+ < h_2 >$, *para todo* $h, h' \in H_4$*;*

$\lambda(h+ < h_2 >) = (\lambda h)+ < h_2 >$, *para quaisquer* $\lambda \in K$ *e* $h \in H_4$*;*

$k \triangleright (h+ < h_2 >) = (k \triangleright h)+ < h_2 >$, *para todo* $h, k \in H_4$.

É fácil ver que $\overline{B}$ *é uma* K*-álgebra. Temos também que* $\overline{B}$ *é uma* H_4*-módulo álgebra com* $k \triangleright (h+ < h_2 >) = (k \triangleright h)+ < h_2 >$, *onde* $h, k \in H_4$*. De fato, sejam* $k = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 + \lambda_4 h_2$, h, $h' \in H_4$ *com* $h+ < h_2 >= h'+ < h_2 >$*. Daí,* $h - h' = \lambda h_2$ *para algum* $\lambda \in K$*. Segue-se que* $k \triangleright (h - h') = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 + \lambda_4 h_2) \triangleright (\lambda h_2) = \lambda_2 \lambda h_2 \in < h_2 >$*. Logo* $(k \triangleright h)+ < h_2 >= (k \triangleright h')+ < h_2 >$*.*

Como H_4 *atua sobre si mesma pela ação adjunta (ver Proposição 4.1.5), temos também que, para quaisquer* $h, k, j \in H_4$*, valem:*

$$\begin{aligned} h \triangleright [(k+ < h_2 >)(j+ < h_2 >)] &= h \triangleright [(kj)+ < h_2 >] = [h \triangleright (kj)]+ < h_2 > \\ &= [\sum_{(h)} (h_{(1)} \triangleright k)(h_{(2)} \triangleright j)]+ < h_2 > \\ &= \sum_{(h)} [(h_{(1)} \triangleright k)+ < h_2 >][(h_{(2)} \triangleright j)+ < h_2 >] \\ &= \sum_{(h)} [h_{(1)} \triangleright (k+ < h_2 >)][h_{(2)} \triangleright (j+ < h_2 >)]; \end{aligned}$$

$$1 \triangleright (h+ < h_2 >) = (1 \triangleright h)+ < h_2 >= h+ < h_2 >;$$

$$\begin{aligned} h \triangleright [k \triangleright (j+ < h_2 >)] &= h \triangleright [(k \triangleright j)+ < h_2 >] = [h \triangleright (k \triangleright j)]+ < h_2 > \\ &= (hk \triangleright j)+ < h_2 >= hk \triangleright (j+ < h_2 >); \end{aligned}$$

$$h \triangleright (1+ < h_2 >) = (h \triangleright 1)+ < h_2 >= (\varepsilon(h)1)+ < h_2 >= \varepsilon(h)(1+ < h_2 >),$$

onde $1+ < h_2 >$ *é a unidade de* $\overline{B}$*.*

Isto mostra que $\overline{B}$ *é uma* H_4*-módulo álgebra.*

Denotemos $h+ < h_2 >$ *por* $\overline{h}$*. Temos a seguinte tabela de multiplicação definida nos "geradores" de* $\overline{B}$*:*

	$\overline{e_1}$	$\overline{e_2}$	$\overline{h_1}$	$\overline{h_2}$
$\overline{e_1}$	$\overline{e_1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{e_2}$	$\overline{0}$	$\overline{e_2}$	$\overline{h_1}$	$\overline{0}$
$\overline{h_1}$	$\overline{h_1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{h_2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

Seja $\overline{h} \in \overline{B}$. *Logo* $\overline{h} = \overline{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 + \lambda_4 h_2} = \lambda_1\overline{e_1} + \lambda_2\overline{e_2} + \lambda_3\overline{h_1}$ *e, portanto,* $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{h_1}\}$ *gera* $\overline{B}$. *Suponhamos que* $\lambda_1\overline{e_1} + \lambda_2\overline{e_2} + \lambda_3\overline{h_1} = \overline{0}(= \overline{h_2})$. *Daí* $\overline{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1} = \overline{0}$ *e então* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 \in < h_2 >$, *o que implica* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 = \lambda_4 h_2$, *ou seja,* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 - \lambda_4 h_2 = 0$. *Como* $\{e_1, e_2, h_1, h_2\}$ *é uma base de* H_4, *concluímos que* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 (= \lambda_4) = 0$. *Segue-se que* $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{h_1}\}$ *é uma base de* $\overline{B}$.

Da tabela acima, temos que o K*-subespaço vetorial* $A := < \overline{e_1} >$ *de* $\overline{B}$ *é um ideal à direita de* $\overline{B}$ *com unidade* $\overline{e_1}$.

Obtemos também a seguinte tabela da ação da base de H_4 *sobre os "geradores" de* $\overline{B}$:

$\triangleright$	$\overline{e_1}$	$\overline{e_2}$	$\overline{h_1}$	$\overline{h_2}$
e_1	$\overline{e_1}$	$\overline{e_2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
e_2	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{h_1}$	$\overline{0}$
h_1	$\overline{h_1}$	$-\overline{h_1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
h_2	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

Como A *é um ideal à direita de* $\overline{B}$ *com unidade* $\overline{e_1}$, *então, da Proposição 4.2.7, temos que* H_4 *atua parcialmente sobre* A, *ou seja,* A *é uma* H_4*-módulo álgebra parcial. Esta ação parcial é dada por:*

$e_1 \cdot \overline{e_1} = \overline{e_1}(e_1 \triangleright \overline{e_1}) = \overline{e_1}$;

$e_2 \cdot \overline{e_1} = \overline{e_1}(e_2 \triangleright \overline{e_1}) = \overline{0}$;

$h_1 \cdot \overline{e_1} = \overline{e_1}(h_1 \triangleright \overline{e_1}) = \overline{0}$;

$h_2 \cdot \overline{e_1} = \overline{e_1}(h_2 \triangleright \overline{e_1}) = \overline{0}$.

Mostremos que esta ação de H_4 sobre A é "total", ou seja, A é uma H_4-módulo álgebra.

Seja $J =< e_2, h_1, h_2 >$. Da tabela de multiplicação em H_4, temos que:

$(\lambda_1 e_2 + \lambda_2 h_1 + \lambda_3 h_2)(\lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \lambda'_3 h_1 + \lambda'_4 h_2) = \lambda_1 \lambda'_2 e_2 + (\lambda_1 \lambda'_3 + \lambda_2 \lambda'_1) h_1 + \lambda_3 \lambda'_2 h_2 \in J$;

$(\lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \lambda'_3 h_1 + \lambda'_4 h_2)(\lambda_1 e_2 + \lambda_2 h_1 + \lambda_3 h_2) = \lambda'_2 \lambda_1 e_2 + \lambda'_2 \lambda_2 h_1 + (\lambda'_1 \lambda_3 + \lambda'_4 \lambda_1) h_2 \in J$.

Logo J é um ideal de H_4 e, portanto, H_4/J é uma K-álgebra. Além disso, $\{e_1 + J\}$ é uma base de H_4/J (a prova é análoga ao que foi feita para $H_4/ < h_2 >$ acima). Denotemos $h + J$ por $\widehat{h}$. Temos a seguinte tabela de multiplicação definida nos "geradores" de H_4/J:

	$\widehat{e_1}$	$\widehat{e_2}$	$\widehat{h_1}$	$\widehat{h_2}$
$\widehat{e_1}$	$\widehat{e_1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{e_2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{h_1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{h_2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$

Temos também que H_4/J é uma H_4-módulo álgebra via $h \triangleright (k+J) = (h \triangleright k) + J$, para todo $h, k \in H_4$ (de modo análogo ao que foi feito em $H_4/ < h_2 >$), com a seguinte tabela da ação da base de H_4 sobre os "geradores" de H_4/J:

$\triangleright$	$\widehat{e_1}$	$\widehat{e_2}$	$\widehat{h_1}$	$\widehat{h_2}$
e_1	$\widehat{e_1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
e_2	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
h_1	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
h_2	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$

Definamos $\Phi :< \overline{e_1} > \longrightarrow < \widehat{e_1} >$ por $\Phi(\lambda \overline{e_1}) = \lambda \widehat{e_1}$, com $\lambda \in K$. Verifica-se facilmente que Φ é um isomorfismo de álgebras. Temos também:

$\Phi((\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 + \lambda_4 h_2) \cdot \lambda \overline{e_1}) = \Phi(\lambda_1 \lambda \overline{e_1}) = \lambda_1 \lambda \widehat{e_1}$;

$(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 + \lambda_4 h_2) \triangleright \lambda\widehat{e_1} = \lambda_1\lambda\widehat{e_1}.$

Logo Φ *é* H_4*-linear.*

Afirmação: a ação de H_4 *em* A *é uma ação "total", ou seja,* A *é uma* H_4*-módulo álgebra.*

De fato, seja $h \in H_4$*. Observando que* $\widehat{e_1}$ *é a unidade de* $< \widehat{e_1} >$*, temos que:*

$\Phi(h \cdot \overline{e_1}) = h \triangleright \widehat{e_1} = \varepsilon(h)\widehat{e_1} = \Phi(\varepsilon(h)\overline{e_1})$*. Daí* $h \cdot \overline{e_1} = \varepsilon(h)\overline{e_1}$*. Segue-se, da Observação 4.2.3, que* A *é uma* H_4*-módulo álgebra.*

Notemos que Φ *é um isomorfismo de* H_4*-módulos álgebras (ver Definição 4.1.6).*

4.3 A envolvente de uma ação parcial de Hopf

Com os resultados que se seguem às próximas definições, mostraremos a existência da envolvente de uma ação parcial de Hopf.

Definição 4.3.1. *Sejam* A *e* B *duas* H*-módulos álgebras parciais, isto é, sejam as aplicações* K*-lineares* $\alpha : H \otimes_K A \longrightarrow A$ *e* $\alpha' : H \otimes_K B \longrightarrow B$ *da Definição 4.2.1. Dizemos que um homomorfismo de álgebras* $\theta : A \longrightarrow B$ *é um homomorfismo de* H*-módulos álgebras parciais se* $\theta(h \cdot a) = h \cdot \theta(a)$*, isto é,* $\theta(\alpha(h \otimes a)) = \alpha'(h \otimes \theta(a))$*, para quaisquer* $h \in H$ *e* $a \in A$*. Se* θ *é um isomorfismo (de álgebras), dizemos então que as ações parciais* α *e* α' *são equivalentes.*

Definição 4.3.2. *Sejam* B *uma* H*-módulo álgebra e* A *um ideal à direita de* B *com unidade* 1_A*. Dizemos que a ação parcial induzida de* H *sobre* A *é admissível se* $B = H \triangleright A$*.*

Esta ação parcial induzida de H *sobre* A *existe pela Proposição 4.2.7.*

Definição 4.3.3. *Seja* A *uma* H*-módulo álgebra parcial. Um par* (B, θ) *é uma ação envolvente para* A*, ou seja, um par* (B, θ) *é uma ação envolvente para a ação parcial de* H *sobre* A*, se:*

(i) B *é uma (não necessariamente unitária)* H*-módulo álgebra;*

(ii) *A aplicação* $\theta : A \longrightarrow B$ *é um monomorfismo de álgebras;*

(iii) *A sub-álgebra* $\theta(A)$ *é um ideal à direita de* B*;*

(iv) *A ação parcial de* H *sobre* A *é equivalente a ação parcial induzida de* H *sobre* $\theta(A)$*, ou seja,* $\theta(h \cdot a) = h \cdot \theta(a) = \theta(1_A)(h \triangleright \theta(a))$*, para quaisquer* $h \in H$ *e* $a \in A$*;*

(v) *A ação parcial induzida de* H *sobre* $\theta(A)$ *é admissível, isto é,* $B = H \triangleright \theta(A)$*.*

É costume nos referirmos a uma ação envolvente (B, θ) de uma H-módulo álgebra parcial A simplesmente como B.

Proposição 4.3.4. *Seja* $F(G, A)$ *a álgebra de todas as funções do grupo* G *sobre a álgebra* A*. Temos que as álgebras* $F(G, A)$ *e* $Hom(KG, A)$ *são isomorfas.*

Demonstração. Vimos, na demonstração do Teorema 3.2.5, que $F = F(G, A)$ é uma álgebra (associativa e unitária) com:

$(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$, para quaisquer $f_1, f_2 \in F$ e $g \in G$;

$(\lambda f_1)(g) = \lambda f_1(g)$, para quaisquer $f_1 \in F$, $\lambda \in K$ e $g \in G$;

$m_{F(G,A)}(f_1 \otimes f_2)(g) = (f_1 f_2)(g) = f_1(g) f_2(g)$, para quaisquer $f_1, f_2 \in F$ e $g \in G$;

$\mu_{F(G,A)}(\lambda) = \lambda f$, para todo $\lambda \in K$, onde $f(g) = 1_A$, para quaisquer $g \in G$.

Da Proposição 2.5.2, segue-se que $Hom(KG, A)$ é uma álgebra (associativa e unitária) com:

$(h_1 + h_2)(x) = h_1(x) + h_2(x)$, para quaisquer $h_1, h_2 \in Hom(KG, A)$ e $x \in KG$;

$(\lambda h_1)(x) = \lambda h_1(x)$, para quaisquer $h_1 \in Hom(KG, A)$, $\lambda \in K$ e $x \in KG$;

$m_{Hom(KG,A)}(h_1 \otimes h_2)(x) = (h_1 * h_2)(x)$, para quaisquer $h_1, h_2 \in Hom(KG, A)$ e $x \in KG$;

$\mu_{Hom(KG,A)}(\lambda) = \lambda(\mu_A \circ \varepsilon_{KG})$, para todo $\lambda \in K$.

Definamos $\varphi : F(G, A) \longrightarrow Hom(KG, A)$, que associa $f \in F(G, A)$ a aplicação $\varphi(f) : KG \longrightarrow A$, onde $\varphi(f)\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) = \sum_{g \in G} \lambda_g f(g)$, com $\lambda_g \in K$.

Afirmamos que φ é um isomorfismo de álgebras. De fato, temos que $\varphi(f) \in Hom(KG, A)$, para todo $f \in F(G, A)$. Além disso, valem:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f_1 + f_2)(\sum_{g\in G}\lambda_g g) &= \sum_{g\in G}\lambda_g(\lambda f_1 + f_2)(g) = \sum_{g\in G}\lambda_g\lambda f_1(g) + \sum_{g\in G}\lambda_g f_2(g) \\
&= \lambda\sum_{g\in G}\lambda_g f_1(g) + \sum_{g\in G}\lambda_g f_2(g) \\
&= \lambda\varphi(f_1)(\sum_{g\in G}\lambda_g g) + \varphi(f_2)(\sum_{g\in G}\lambda_g g) \\
&= (\lambda\varphi(f_1) + \varphi(f_2))(\sum_{g\in G}\lambda_g g),
\end{aligned}$$

o que mostra que φ é K-linear. Temos ainda:

$$[\varphi \circ m_{F(G,A)}(f_1 \otimes f_2)](\sum_{g\in G}\lambda_g g) = \varphi(f_1 f_2)(\sum_{g\in G}\lambda_g g) = \sum_{g\in G}\lambda_g f_1(g) f_2(g);$$

$$\begin{aligned}
&[m_{Hom(KG,A)} \circ (\varphi \otimes \varphi)(f_1 \otimes f_2)](\sum_{g\in G}\lambda_g g) = [m_{Hom(KG,A)}(\varphi(f_1) \otimes \varphi(f_2))](\sum_{g\in G}\lambda_g g) \\
&= (\varphi(f_1) * \varphi(f_2))(\sum_{g\in G}\lambda_g g) = (m_A \circ (\varphi(f_1) \otimes \varphi(f_2)) \circ \Delta_{KG})(\sum_{g\in G}\lambda_g g) \\
&= m_A \circ (\varphi(f_1) \otimes \varphi(f_2))(\sum_{g\in G}\lambda_g(1_K g \otimes 1_K g)) \\
&= m_A \circ (\varphi(f_1) \otimes \varphi(f_2))(\sum_{g\in G}(\lambda_g g \otimes 1_K g)) = \sum_{g\in G} m_A(\varphi(f_1)(\lambda_g g) \otimes \varphi(f_2)(1_K g)) \\
&= \sum_{g\in G} m_A((\lambda_g f_1(g)) \otimes (1_K f_2(g))) = \sum_{g\in G}\lambda_g f_1(g) f_2(g);
\end{aligned}$$

Então $\varphi \circ m_{F(G,A)} = m_{Hom(KG,A)} \circ (\varphi \otimes \varphi)$.

Seja $f = 1_{F(G,A)}$, isto é, $f(g) = 1_A$, para todo $g \in G$. Temos que:

$$\begin{aligned}
[(\varphi \circ \mu_{F(G,A)})(\lambda)](\sum_{g\in G}\lambda_g g) &= [\varphi(\lambda f)](\sum_{g\in G}\lambda_g g) = [\lambda\varphi(f)](\sum_{g\in G}\lambda_g g) \\
&= \lambda\sum_{g\in G}\lambda_g \underbrace{f(g)}_{=1_A} = \lambda\sum_{g\in G}(\lambda_g 1_A);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mu_{Hom(KG,A)}(\lambda)](\sum_{g\in G}\lambda_g g) &= \lambda(\mu_A \circ \varepsilon_{KG})(\sum_{g\in G}\lambda_g g) = \lambda\mu_A(\sum_{g\in G}\lambda_g) \\
&= \lambda\sum_{g\in G}(\lambda_g 1_A).
\end{aligned}$$

Portanto $\varphi \circ \mu_{F(G,A)} = \mu_{Hom(KG,A)}$.

Logo φ é um homomorfismo de álgebras.

Seja $f \in F(G,A)$, tal que $\varphi(f) = 0_{Hom(KG,A)}$. Temos que $\varphi(f)(\sum_{g\in G} \lambda_g g) = 0_A$. Então $\sum_{g\in G} \lambda_g f(g) = 0_A$. Suponhamos que $f \neq 0_{F(G,A)}$. Com isto, existe um $g \in G$, tal que $f(g) \neq 0_A$, donde se segue que $0_A = \varphi(f)(1_K g) = 1_K f(g) = f(g) \neq 0_A$, o que é contradição. Portanto φ é injetiva.

Seja $h \in Hom(KG,A)$. Tome $f \in F(G,A)$, tal que $f(g) = h(g)$, para todo $g \in G$. Logo $\varphi(f)(\sum_{g\in G} \lambda_g g) = \sum_{g\in G} \lambda_g f(g) = \sum_{g\in G} \lambda_g h(g) = h(\sum_{g\in G} \lambda_g g)$, o que implica $\varphi(f) = h$. Isto mostra que φ é sobrejetiva.

Segue-se que φ é um isomorfismo de álgebras. $\square$

O isomorfismo acima é conhecido como isomorfismo canônico de álgebras de $F(G,A)$ em $Hom(KG,A)$.

Na demonstração da existência da envolvente de uma ação parcial de grupo, consideramos a álgebra $F = F(G,A)$ (ver Teorema 3.2.5). Com a existência do isomorfismo canônico de álgebras de $F(G,A)$ em $Hom(KG,A)$, podemos considerar, no caso Hopf, a álgebra $Hom(H,A)$ no lugar de $F(G,A)$. Com esta ideia, mostraremos que toda ação parcial de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra A tem uma ação envolvente.

Lema 4.3.5. *Sejam A uma H-módulo álgebra parcial e $\varphi : A \longrightarrow Hom(H,A)$ uma aplicação dada por $\varphi(a)(h) = h \cdot a$. Então:*

(i) *φ é um monomorfismo de álgebras;*

(ii) *Se $h \in H$ e $a \in A$, então $\varphi(1_A) * (h \triangleright \varphi(a)) = \varphi(h \cdot a)$;*

(iii) *Se $h \in H$ e $a, b \in A$, então $\varphi(b) * (h \triangleright \varphi(a)) = \varphi(b(h \cdot a))$.*

Não exigimos que $\varphi(1_A) = 1_{Hom(H,A)} (= \mu_A \circ \varepsilon)$.

Demonstração. Temos que $\varphi(a) \in Hom(H,A)$, para todo $a \in A$. De fato, sejam

$h, k \in H$, $a \in A$ e $\lambda \in K$. Então:

$$\begin{aligned}
\varphi(a)(\lambda h + k) &= (\lambda h + k) \cdot a = \alpha((\lambda h + k) \otimes a) = \alpha((\lambda h) \otimes a + k \otimes a)\\
&= \alpha(\lambda(h \otimes a)) + \alpha(k \otimes a) = \lambda\alpha(h \otimes a) + \alpha(k \otimes a) = \lambda(h \cdot a) + k \cdot a\\
&= \lambda\varphi(a)(h) + \varphi(a)(k).
\end{aligned}$$

Sejam agora $\lambda \in K$ e $a, b \in A$. Logo:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda a + b)(h) &= h \cdot (\lambda a + b) = \alpha(h \otimes (\lambda a + b)) = \alpha(h \otimes (\lambda a) + h \otimes b)\\
&= \alpha(\lambda(h \otimes a)) + \alpha(h \otimes b) = \lambda\alpha(h \otimes a) + \alpha(h \otimes b) = \lambda(h \cdot a) + h \cdot b\\
&= \lambda\varphi(a)(h) + \varphi(b)(h) = (\lambda\varphi(a))(h) + \varphi(b)(h) = (\lambda\varphi(a) + \varphi(b))(h),
\end{aligned}$$

para todo $h \in H$. Logo $\varphi(\lambda a + b) = \lambda\varphi(a) + \varphi(b)$.

Temos ainda que, para todo $a, b \in A$ e $h \in H$, vale:

$$\begin{aligned}
\varphi(ab)(h) = h \cdot (ab) &= \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b)\\
&= \sum_{(h)} \varphi(a)(h_{(1)})\varphi(b)(h_{(2)}) = \varphi(a) * \varphi(b)(h);
\end{aligned}$$

Em particular, segue-se que $\varphi(1_A)$ é a unidade de $\varphi(A)$.

Seja $a \in A$, tal que $\varphi(a) = 0_{Hom(H,A)}$. Daí $\varphi(a)(h) = h \cdot a = 0_A$, para todo $h \in H$, em particular para $h = 1_H$. Portanto $a = 1_H \cdot a = 0_A$ e, por isto, φ é injetiva.

Mostremos o item **(iii)**. Sejam $h, k \in H$ e $a, b \in A$. Utilizando as Proposições 2.5.2 e 4.1.7, temos que:

$$\begin{aligned}
&\varphi(b(h \cdot a))(k) = k \cdot (b(h \cdot a)) = \sum_{(k)} (k_{(1)} \cdot b)(k_{(2)} \cdot (h \cdot a))\\
&= \sum_{(k)} \{(k_{(1)} \cdot b)[\sum_{(k_{(2)})} ({k_{(2)}}_{(1)} \cdot 1_A)(({k_{(2)}}_{(2)} h) \cdot a)]\}\\
&= \sum_{(k)} [(k_{(1)} \cdot b)(\sum_{(k_{(2)})} \varphi(1_A)({k_{(2)}}_{(1)})\varphi(a)({k_{(2)}}_{(2)} h))]\\
&= \sum_{(k)} [(k_{(1)} \cdot b)(\sum_{(k_{(2)})} \varphi(1_A)({k_{(2)}}_{(1)})(h \triangleright \varphi(a))({k_{(2)}}_{(2)}))]\\
&= \sum_{(k)} \varphi(b)(k_{(1)})(\varphi(1_A) * (h \triangleright \varphi(a)))(k_{(2)}) = \varphi(b) * (\varphi(1_A) * (h \triangleright \varphi(a)))(k)\\
&= (\varphi(b) * \varphi(1_A)) * (h \triangleright \varphi(a))(k) = \varphi(b) * (h \triangleright \varphi(a))(k).
\end{aligned}$$

O item **(ii)** segue-se tomando $b = 1_A$. $\square$

Vimos que $Hom(H,A)$ é uma H-módulo álgebra com $(h \triangleright f)(k) = f(kh)$, onde $f \in Hom(H,A)$ e $k, h \in H$. Ainda, $\varphi : A \longrightarrow Hom(H,A)$ é um monomorfismo de álgebras com $\varphi(a)(h) = h \cdot a$. Notemos que $\varphi(A)$ é uma subálgebra de $Hom(H,A)$ com $1_{\varphi(A)} = \varphi(1_A)$. Caso $\varphi(A)$ fosse um ideal à direita de $Hom(H,A)$, então, pela Proposição 4.2.7, teríamos uma ação parcial induzida de H sobre $\varphi(A)$ definida por $h \cdot \varphi(a) = \varphi(1_A) * (h \triangleright \varphi(a))$ com $h \in H$. Pelo lema acima, temos que $\varphi(1_A) * (h \triangleright \varphi(a)) = \varphi(h \cdot a)$. Daí, teríamos que $\varphi(h \cdot a) = h \cdot \varphi(a)$, e portanto, a ação parcial de H sobre A seria equivalente à ação parcial induzida de H sobre $\varphi(A)$. Mas $\varphi(A)$ pode não ser um ideal à direita de $Hom(H,A)$. Mostraremos adiante que $\varphi(A)$ é ideal à direita de uma certa subálgebra de $Hom(H,A)$.

Lema 4.3.6. *Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda S e B uma H-módulo álgebra, $x, y \in B$ e $h, k \in H$. Então:*

(i) $(h \triangleright x)y = \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (x(S(h_{(2)}) \triangleright y))$;

(ii) $(h \triangleright x)(k \triangleright y) = \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (x(S(h_{(2)})k \triangleright y))$.

Demonstração. Mostremos **(i)**. Utilizando a propriedade da counidade (ver Exemplo 2.4.5), temos que:

$$\sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (x(S(h_{(2)}) \triangleright y)) = \sum_{(h)} \sum_{(h_{(1)})} (h_{(1)_{(1)}} \triangleright x)(h_{(1)_{(2)}} \triangleright (S(h_{(2)}) \triangleright y))$$

$$= \sum_{(h)} \sum_{(h_{(2)})} (h_{(1)} \triangleright x)(h_{(2)_{(1)}} S(h_{(2)_{(2)}}) \triangleright y) = \sum_{(h)} \{(h_{(1)} \triangleright x)[\sum_{(h_{(2)})} (h_{(2)_{(1)}} S(h_{(2)_{(2)}}) \triangleright y)]\}$$

$$= \sum_{(h)} \{(h_{(1)} \triangleright x)[(\sum_{(h_{(2)})} h_{(2)_{(1)}} S(h_{(2)_{(2)}})) \triangleright y]\} = \sum_{(h)} \{(h_{(1)} \triangleright x)(\varepsilon(h_{(2)})1_H \triangleright y)\}$$

$$= (\sum_{(h)} h_{(1)} \varepsilon(h_{(2)}) \triangleright x)(1_H \triangleright y) = (h \triangleright x)y.$$

Tomando $k \triangleright y$ no lugar de y em **(i)**, segue-se que:

$$(h \triangleright x)(k \triangleright y) = \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (x(S(h_{(2)}) \triangleright (k \triangleright y))) = \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (x(S(h_{(2)})k \triangleright y)),$$

o que mostra **(ii)**. $\square$

Não podemos afirmar que $H \triangleright \varphi(A) \subseteq \varphi(A)$. Dito de outro modo, não podemos dizer que a restrição da ação de H (que atua em Hom(H,A)) à $\varphi(A)$ é uma ação de H sobre a álgebra (associativa e unitária) $\varphi(A)$. Observemos, entretanto, que $\varphi(A) \subseteq H \triangleright \varphi(A)$. De fato, para todo $a \in A$, temos que $\varphi(a) = 1_H \triangleright \varphi(a)$.

Proposição 4.3.7. *Seja* $\varphi : A \longrightarrow Hom(H, A)$ *definida por* $\varphi(a)(h) = h \cdot a$. *Consideremos o H-submódulo (à esquerda)* $B := H \triangleright \varphi(A)$ *de* $Hom(H, A)$. *Então:*

(i) B *é uma H-submódulo subálgebra (à esquerda) de* $Hom(H, A)$*;*

(ii) $\varphi(A)$ *é um ideal à direita de* B *com unidade* $\varphi(1_A)$.

Demonstração. Observemos que B é um H-submódulo de $Hom(H, A)$. De fato, sejam $x, y \in H \triangleright \varphi(A)$. Então existem $h_1, \ldots, h_n, k_1, \ldots, k_m \in H$ e $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in A$, tais que $x = h_1 \triangleright \varphi(a_1) + \ldots + h_n \triangleright \varphi(a_n)$ e $y = k_1 \triangleright \varphi(b_1) + \ldots + k_m \triangleright \varphi(b_m)$. Segue-se que:

$x + y = h_1 \triangleright \varphi(a_1) + \ldots + h_n \triangleright \varphi(a_n) + k_1 \triangleright \varphi(b_1) + \ldots + k_m \triangleright \varphi(b_m) \in H \triangleright \varphi(A)$.

$-x = -(h_1 \triangleright \varphi(a_1) + \ldots + h_n \triangleright \varphi(a_n)) = (-h_1) \triangleright \varphi(a_1) + \ldots + (-h_n) \triangleright \varphi(a_n) \in H \triangleright \varphi(A)$.

Portanto $H \triangleright \varphi(A)$ é um subgrupo aditivo de $Hom(H, A)$. Ainda:

$h \triangleright x = h \triangleright (h_1 \triangleright \varphi(a_1) + \ldots + h_n \triangleright \varphi(a_n)) = hh_1 \triangleright \varphi(a_1) + \ldots + hh_n \triangleright \varphi(a_n) \in H \triangleright \varphi(A)$.

Logo B é um H-submódulo de $Hom(H, A)$.

Como $B \subseteq Hom(H, A)$, então B herda as propriedades de $Hom(H, A)$. Temos também que:

$$\lambda(h \triangleright \varphi(a)) = h \triangleright \varphi(\lambda a) \in B, \text{ para quaisquer } \lambda \in K \text{ e } a \in A.$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{(h \triangleright \varphi(a)) * (k \triangleright \varphi(b))}_{\text{Lema 4.3.6 (ii)}} &= \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright \underbrace{(\varphi(a) * (S(h_{(2)})k \triangleright \varphi(b)))}_{\text{Lema 4.3.5 (iii)}} \\
&= \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright \varphi(a(S(h_{(2)})k \cdot b)) \in B,
\end{aligned}$$

para quaisquer $a, b \in A$.

Segue-se que B é uma H-submódulo subálgebra de $Hom(H, A)$.

O item **(ii)** acima decorre do Lema 4.3.5 **(iii)**. Além disso, $\varphi(1_A)$ é $1_{\varphi(A)}$. $\square$

Teorema 4.3.8. *Sejam A uma H-módulo álgebra parcial e $\varphi : A \longrightarrow Hom(H, A)$ a aplicação dada por $\varphi(a)(h) = h \cdot a$. Então $(B := H \triangleright \varphi(A), \varphi)$ é uma ação envolvente da ação parcial de H sobre A (dizemos também que (B, φ) é uma envolvente da H-módulo álgebra parcial A).*

Demonstração. De fato, pela proposição anterior, temos que B é uma H-módulo álgebra. Pelo Lema 4.3.5 **(i)**, segue-se que $\varphi : A \longrightarrow \varphi(A) \subseteq B$ é um monomorfismo de álgebras. Pela proposição anterior, a subálgebra $\varphi(A)$ de B é um ideal à direita de B com unidade $\varphi(1_A)$. Da Proposição 4.2.7, segue-se que H atua parcialmente sobre $\varphi(A)$ por $h \cdot \varphi(a) = 1_{\varphi(A)} * (h \triangleright \varphi(a)) = \varphi(1_A) * (h \triangleright \varphi(a))$. Por outro lado, pelo Lema 4.3.5 **(ii)**, concluímos que $\varphi(1_A) * (h \triangleright \varphi(a)) = \varphi(h \cdot a)$. Portanto $\varphi(h \cdot a) = h \cdot \varphi(a)$. Como $\varphi : A \longrightarrow \varphi(A)$ é um isomorfismo de álgebras, então a ação parcial de H sobre A é equivalente à ação parcial induzida de H sobre $\varphi(A)$ (ver Definição 4.3.1). Finalmente, como $B := H \triangleright \varphi(A)$, então a ação parcial induzida de H sobre $\varphi(A)$ é admissível (ver Definição 4.3.2). Logo (B, φ) é uma ação envolvente da ação parcial de H sobre A. $\square$

Da existência da envolvente (B, φ) de uma dada ação parcial de H sobre uma álgebra A, segue-se que toda ação parcial de H sobre A é equivalente a ação parcial induzida pela ação de H sobre B (ou ainda, que toda ação parcial de Hopf é equivalente a ação parcial induzida pela ação da envolvente). Dizemos, neste caso, que toda ação parcial de Hopf é induzida.

Proposição 4.3.9. *Sejam A uma H-módulo álgebra parcial e $\varphi : A \longrightarrow Hom(H, A)$ a aplicação dada por $\varphi(a)(h) = h \cdot a$. Então $\varphi(A)$ é ideal de $B := H \triangleright \varphi(A)$ se, e somente se, $h \cdot (k \cdot a) = \sum_{(h)} (h_{(1)} k \cdot a)(h_{(2)} \cdot 1_A)$, para quaisquer $a \in A$ e $h, k \in H$.*

Demonstração. De fato, vimos que $\varphi(k \cdot a) = \varphi(1_A) * (k \triangleright \varphi(a))$ (Lema 4.3.5 **(ii)**). Pela Proposição 4.3.7 **(ii)**, temos que $\varphi(1_A) * (k \triangleright \varphi(a)) \in \varphi(A)$. Supondo que $\varphi(A)$ é um ideal de B, segue-se que $\varphi(1_A) * (k \triangleright \varphi(a)) = [\varphi(1_A) * (k \triangleright \varphi(a))] * \varphi(1_A) = \varphi(1_A) * \underbrace{[(k \triangleright \varphi(1_A)) * \varphi(1_A)]}_{\in \varphi(A)} = (k \triangleright \varphi(a)) * \varphi(1_A)$. Portanto $h \cdot (k \cdot a) = \varphi(k \cdot a)(h) = ((k \triangleright \varphi(a)) * \varphi(1_A))(h) = \sum_{(h)} (k \triangleright \varphi(a))(h_{(1)}) \varphi(1_A)(h_{(2)}) = \sum_{(h)} \varphi(a)(h_{(1)} k) \varphi(1_A)(h_{(2)}) = \sum_{(h)} (h_{(1)} k \cdot a)(h_{(2)} \cdot 1_A)$, para quaisquer $a \in A$ e $h, k \in H$.

Reciprocamente, suponhamos que $h\cdot(k\cdot a)=\sum\limits_{(h)}(h_{(1)}k\cdot a)(h_{(2)}\cdot 1_A)$, para quaisquer $a\in A$ e $h,k\in H$. Temos que $((k\triangleright\varphi(a))*\varphi(1_A))(h)=\sum\limits_{(h)}(h_{(1)}k\cdot a)(h_{(2)}\cdot 1_A)$. Logo $((k\triangleright\varphi(a))*\varphi(1_A))(h)=h\cdot(k\cdot a)=\varphi(k\cdot a)(h)$ e, por isso, $(k\triangleright\varphi(a))*\varphi(1_A)=\varphi(k\cdot a)$ $(\star)$. Seja $b\in A$. Daí $[(k\triangleright\varphi(a))*\varphi(1_A)]*\varphi(b)=\varphi(k\cdot a)*\varphi(b)$, o que implica $(k\triangleright\varphi(a))*[\varphi(1_A)*\varphi(b)]=\varphi((k\cdot a)b)$ e então $(k\triangleright\varphi(a))*\varphi(1_A b)=\varphi((k\cdot a)b)$, ou seja, $(k\triangleright\varphi(a))*\varphi(b)=\varphi((k\cdot a)b)\in\varphi(A)$. Portanto $\varphi(A)$ é um ideal à esquerda de B. Como $\varphi(A)$ é um ideal à direita de B, então $\varphi(A)$ é um ideal (bilateral) de B com unidade $\varphi(1_A)$.

Ainda, desde que $(k\triangleright\varphi(a))*\varphi(1_A)=\varphi(k\cdot a)$ (por $(\star)$) e $\varphi(k\cdot a)=\varphi(1_A)*(k\triangleright\varphi(a))$, segue-se que $(k\triangleright\varphi(a))*\varphi(1_A)=\varphi(1_A)*(k\triangleright\varphi(a))$. Temos também que $\varphi(1_A)^2=\varphi(1_A)*\varphi(1_A)=\varphi(1_A1_A)=\varphi(1_A)$. Logo $\varphi(1_A)$ é um idempotente central em B. Portanto, $\varphi(A)=\varphi(1_A)*B=B*\varphi(1_A)$. De fato, $B*\varphi(1_A)\subseteq\varphi(A)$ decorre de $\varphi(A)$ ser ideal B e ainda, para todo $a\in A$, tem-se $\varphi(a)=\varphi(a)*\varphi(1_A)=[1_H\triangleright\varphi(a)]*\varphi(1_A)\in B*\varphi(1_A)$. A outra igualdade decorre da centralidade de $\varphi(1_A)$. $\square$

Vimos que a existência da envolvente $\beta=\{(\beta_g:B\longrightarrow B)_{g\in G}\}$ de uma dada ação parcial α de um grupo G sobre uma álgebra unitária A depende de cada ideal D_g ter unidade 1_g. A unicidade desta ação é obtida supondo existir uma outra ação $\beta'=\{(\beta'_g:B'\longrightarrow B')_{g\in G}\}$, que também é uma envolvente para α. Define-se então uma aplicação $\Phi:B'\longrightarrow B$ com $\beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))\mapsto\beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ que estendemos linearmente. Para ver que esta aplicação está bem definida devemos observar dois fatos: primeiro, para cada $g\in G$ a subálgebra $\beta_g(\varphi(A))$ é um ideal com unidade em B (o mesmo para $\beta'_g(\varphi'(A))$); segundo, a soma de um número finito de ideais com unidade é também um ideal com unidade que é uma combinação das unidades destes ideais.

Consideremos uma ação parcial de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra A e seja (B,θ) uma envolvente para esta ação parcial. Por definição, $\theta(A)$ é um ideal à direita de B. Se $h\in H$ for um elemento **grouplike** (dizemos que $h\in H$ é um elemento grouplike se $h\neq 0$ e $\Delta(h)=h\otimes h$), então o K-submódulo $h\triangleright\theta(A)$ do K-módulo $B:=H\triangleright\theta(A)$ é um ideal à direita de B. De fato, temos que, para todo $h\in H$ fixo, valem:

$h \triangleright \theta(a) + h \triangleright \theta(b) = h \triangleright (\theta(a) + \theta(b)) = h \triangleright \theta(a+b) \in h \triangleright \theta(A)$, para quaisquer $a, b \in A$;

$-(h \triangleright \theta(a)) = h \triangleright \theta(-a) \in h \triangleright \theta(A)$, para todo $a \in A$.

$\lambda(h \triangleright \theta(a)) = h \triangleright (\theta(\lambda a)) \in h \triangleright \theta(A)$, para quaisquer $\lambda \in K$ e $a \in A$.

Quando $h \in H$ for um elemento grouplike, segue-se que, para quaisquer $a, b \in A$ e $k \in H$,

$$\underbrace{(h \triangleright \theta(a))(k \triangleright \theta(b))}_{\text{Lema 4.3.6 (ii)}} = h \triangleright [\theta(a)(S(h)k \triangleright \theta(b))] = h \triangleright [\theta(a)\theta(1_A)(S(h)k \triangleright \theta(b))]$$

$$= h \triangleright [\theta(a)(S(h)k \cdot \theta(b))] = h \triangleright [\theta(a)\theta(S(h)k \cdot b)]$$

$$= h \triangleright \theta(a(S(h)k \cdot b)) \in h \triangleright \theta(A).$$

Em particular, temos que

$(h \triangleright \theta(a))(h \triangleright \theta(1_A)) = h \triangleright \theta(a(S(h)h \cdot 1_A)) = h \triangleright \theta(a(\varepsilon(h)1_H \cdot 1_A))$. (esta última igualdade resulta do Exemplo 2.4.5). Desde que $\varepsilon(h) = 1_K$, temos que esta última expressão é igual a $h \triangleright \theta(a)$.

Verifica-se assim que, somente impondo certas restrições sobre um elemento do **grouplike** (que por si só já é uma restrição), conseguimos mostrar que $h \triangleright \theta(1_A)$ é uma unidade à direita de $h \triangleright \theta(A)$. Isto nos sugere que podemos ter a não unicidade da envolvente de uma ação parcial de Hopf, conforme ilustra o exemplo abaixo.

Exemplo 4.3.10. *Seja o ideal à direita $A :=< \overline{e_1} >$ da H_4-módulo álgebra $\overline{B} := H_4/ < h_2 >$ (ver Exemplo 4.2.8). Então os pares (B, i) e (A, id_A) , onde $B := H_4 \triangleright A$ e $i : A \longrightarrow B$ é a inclusão de A em B, são duas envolventes da ação parcial de H_4 sobre A.*

De fato, vimos no Exemplo 4.2.8 que $A :=< \overline{e_1} >$ é uma H_4-módulo álgebra parcial. Pela tabela da ação de H_4 em $\overline{B}$, temos que $B =< \overline{e_1}, \overline{h_1} >$. Segue-se, da tabela de multiplicação em $\overline{B}$, que B é um ideal de $\overline{B}$ (e, portanto, uma álgebra). Da tabela da ação de H_4 em $\overline{B}$, verifica-se ainda que B é uma H_4-módulo álgebra.

Seja $i : A \longrightarrow B$ com $i(\lambda\overline{e_1}) = \lambda\overline{e_1}$. Como $i(A) = A$ é um ideal à direita de $\overline{B}$, segue-se que A é um ideal à direita de B. Portanto existe uma ação parcial (induzida) de H_4 sobre A dada por $h \cdot a = 1_A(h \triangleright a) = \overline{e_1}(h \triangleright a)$, onde $a \in A$. Temos *que* $i((\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 + \lambda_4 h_2) \cdot \lambda\overline{e_1}) = i(\lambda_1 \lambda \overline{e_1}) = \lambda_1 \lambda \overline{e_1} = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 h_1 + \lambda_4 h_2) \cdot i(\lambda \overline{e_1})$. *Logo a ação parcial de* H_4 *sobre* A *é equivalente a ação parcial induzida de* H_4 *sobre* $i(A) = A$. *Como* $B = H_4 \triangleright i(A)$, *então a ação parcial induzida de* H_4 *sobre* $i(A)$ *é admissível. Logo* (B, i) *satisfaz a Definição 4.3.3, sendo, portanto, uma envolvente para a ação parcial de* H_4 *sobre* A.

Vimos também no Exemplo 4.2.8 que A *é uma* H_4*-módulo álgebra. Logo* (A, id_A) *é também uma ação envolvente para a ação parcial de* H_4 *sobre* A. *Evidentemente,* A *e* B *não são isomorfas.*

Teorema 4.3.11. *Seja* (B', θ) *uma ação envolvente da* H*-módulo álgebra parcial* A. *Então a aplicação* $\Phi : B' \longrightarrow Hom(H, A)$ *definida por* $\Phi(\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)$, $n \geq 1$, *é um homomorfismo de* H*-módulos álgebras de* $B' := H \triangleright \theta(A)$ *sobre* $B := H \triangleright \varphi(A)$, *onde* φ *é a mesma aplicação do Lema 4.3.5.*

Demonstração. Temos que B' é , por hipótese, uma H-módulo álgebra e que $Hom(H, A)$ é uma H-módulo álgebra (ver Proposição 4.1.7). Ainda $B := H \triangleright \varphi(A)$ é uma H-módulo álgebra (ver Proposição 4.3.7 **(i)**).

Por hipótese, $\theta : A \longrightarrow B'$ é um monomorfismo de álgebras, onde $\theta(h \cdot a) = h \cdot \theta(a) = \theta(1_A)(h \triangleright \theta(a))$, para quaisquer $h \in H$ e $a \in A$, sendo $\theta(A)$ um ideal à direita de B' com unidade $\theta(1_A)$. Temos também que $B' = H \triangleright \theta(A)$. Logo um elemento genérico de B' é da forma $\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)$ com $n \geq 1$. Ainda $\varphi : A \longrightarrow Hom(H, A)$ com $\varphi(a)(h) = h \cdot a$ é um monomorfismo de álgebras pelo Lema 4.3.5 **(i)**.

Inicialmente, mostremos que Φ está bem definida. Para isso, devemos mostrar que se $\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i) = 0$, então $\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i) = 0$.

Suponhamos que $x = \sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i) = 0$. Então, para todo $k \in H$,

$$
\begin{aligned}
0 = \theta(1_A)(k \triangleright x) &= \theta(1_A)(k \triangleright \sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)) \\
&= \theta(1_A)(k \triangleright (h_1 \triangleright \theta(a_1) + \ldots + h_n \triangleright \theta(a_n))) \\
&= \theta(1_A)[k \triangleright (h_1 \triangleright \theta(a_1))] + \ldots + \theta(1_A)[k \triangleright (h_n \triangleright \theta(a_n))] \\
&= \theta(1_A)(kh_1 \triangleright \theta(a_1)) + \ldots + \theta(1_A)(kh_n \triangleright \theta(a_n)) = kh_1 \cdot \theta(a_1) + \ldots + kh_n \cdot \theta(a_n) \\
&= \theta(kh_1 \cdot a_1) + \ldots + \theta(kh_n \cdot a_n) = \theta(kh_1 \cdot a_1 + \ldots + kh_n \cdot a_n) = \theta(\sum_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i).
\end{aligned}
$$

Como θ é injetiva, segue-se que $\sum\limits_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i = 0$, para todo $k \in H$. Então

$$\begin{aligned}\Phi(x)(k) &= \Phi(\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i))(k) = \sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)(k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i)(kh_i) = \sum_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i = 0,\end{aligned}$$

para todo $k \in H$, e, portanto, $\Phi(x) = \Phi(\sum\limits_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i) = 0$, o que mostra a boa definição de Φ.

Por construção, Φ é K-linear. Sejam $h, k \in H$ e $a \in A$. Logo $\Phi(h \triangleright (k \triangleright \theta(a))) = \Phi(hk \triangleright \theta(a)) = hk \triangleright \varphi(a) = h \triangleright (k \triangleright \varphi(a)) = h \triangleright \Phi(k \triangleright \theta(a))$, o que mostra a H-linearidade de Φ.

Temos também que para quaisquer $a, b \in A$ e $h, k \in H$,

$$\begin{aligned}&\Phi(\underbrace{(h \triangleright \theta(a))(k \triangleright \theta(b))}_{\text{Lema 4.3.6 (ii)}}) = \Phi(\sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (\theta(a)(S(h_{(2)})k \triangleright \theta(b)))) \\ &= \Phi(\sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (\theta(a)\underbrace{\theta(1_A)(S(h_{(2)})k \triangleright \theta(b))}_{\text{Proposição 4.2.7}})) = \Phi(\sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (\theta(a)(S(h_{(2)})k \cdot \theta(b)))) \\ &= \Phi(\sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (\theta(a)\theta(S(h_{(2)})k \cdot b))) = \Phi(\sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (\theta(a(S(h_{(2)})k \cdot b)))) \\ &= \sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (\underbrace{\varphi(a(S(h_{(2)})k \cdot b))}_{\text{Lema 4.3.5 (iii)}}) = \underbrace{\sum_{(h)} h_{(1)} \triangleright (\varphi(a) * (S(h_{(2)})k \triangleright \varphi(b)))}_{\text{Lema 4.3.6 (ii)}} \\ &= (h \triangleright \varphi(a)) * (k \triangleright \varphi(b)).\end{aligned}$$

Como um elemento genérico de B é da forma $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)$, onde $n \geq 1$, temos que $\Phi : B' \longrightarrow B$ é sobrejetiva. Logo Φ é um homomorfismo (sobrejetor) de H-módulos álgebras de B' sobre B. $\square$

A injetividade de Φ seguirá sempre que $\Phi(\sum\limits_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)) = 0$ implicar $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i) = 0$, ou seja, sempre que $0 = \Phi(\sum\limits_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i))(k) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)(k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(a_i)(kh_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i$, para todo $k \in H$, então $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i) = 0$. Isto motiva a próxima definição.

Definição 4.3.12. *Seja A uma H-módulo álgebra parcial. Uma ação envolvente (B, θ) de A é minimal se dado H-submódulo M de B, tal que $\theta(1_A)M = 0$, então $M = 0$.*

Para demonstrarmos a proposição a seguir, necessitamos de um lema que garanta a existência de uma unidade à direita de um ideal (à direita) obtido pela soma de ideais à direita com unidade.

Lema 4.3.13. *Sejam $I_1, \ldots, I_n$ ideais à direita com unidades $1_{I_1}, \ldots, 1_{I_n}$ respectivamente. Então o ideal à direita $J = I_1 + \ldots + I_n$ tem unidade à direita que é uma combinação das unidades dos somandos.*

Demonstração. Análoga à demonstração do Lema 3.2.2. □

Proposição 4.3.14. *Sejam B uma KG-módulo álgebra e A um ideal à direita de B com unidade 1_A, tal que $B = KG \triangleright A$. Suponhamos que $\sum_{i=1}^{n} g_i \triangleright a_i$ com $g_i \in G$, $a_i \in A$ e $n \geq 1$ satisfaça:*

$$1_A(h \triangleright (\sum_{i=1}^{n} g_i \triangleright a_i)) = 0 \quad \text{, para todo} \quad h \in G$$

.

Então todo H-submódulo de B é nulo.

Demonstração. Por hipótese, para cada $h \in G$,

$$\begin{aligned} 0 = 1_A(h \triangleright (\sum_{i=1}^{n} g_i \triangleright a_i)) &= 1_A(h \triangleright (g_1 \triangleright a_1 + \ldots + g_n \triangleright a_n)) \\ &= 1_A(hg_1 \triangleright a_1 + \ldots + hg_n \triangleright a_n) = 1_A(hg_1 \triangleright a_1) + \ldots + 1_A(hg_n \triangleright a_n) \\ &= hg_1 \cdot a_1 + \ldots + hg_n \cdot a_n = \sum_{i=1}^{n} hg_i \cdot a_i. \end{aligned}$$

Seja $b \in A$. Pelo Lema 4.3.6 **(ii)**,

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} g_i \triangleright a_i)(h \triangleright b) &= (g_1 \triangleright a_1 + \ldots + g_n \triangleright a_n)(h \triangleright b)\\
&= (g_1 \triangleright a_1)(h \triangleright b) + \ldots + (g_n \triangleright a_n)(h \triangleright b)\\
&= g_1 \triangleright (a_1(g_1^{-1}h \triangleright b)) + \ldots + g_n \triangleright (a_n(g_n^{-1}h \triangleright b))\\
&= g_1 \triangleright (a_1 1_A(g_1^{-1}h \triangleright b)) + \ldots + g_n \triangleright (a_n 1_A(g_n^{-1}h \triangleright b))\\
&= g_1 \triangleright (a_1 \underbrace{(g_1^{-1}h \cdot b)}_{=0}) + \ldots + g_n \triangleright (a_n \underbrace{(g_n^{-1}h \cdot b)}_{=0}) = 0,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\sum_{i=1}^{n} g_i \triangleright a_i$ é um anulador à esquerda de B.

Observemos que, pelo Lema 4.3.6 **(ii)**, $(g_i \triangleright a_i)(h \triangleright b) = g_i \triangleright (\underbrace{a_i(g_i^{-1}h \triangleright b)}_{\in A}) \in g_i \triangleright A$. Logo $g_i \triangleright A$ é um ideal à direita de B. Ainda, pelo Lema 4.3.6,

$$\begin{aligned}
(h \triangleright b)(g_i \triangleright a) &= (g_i g_i^{-1}h \triangleright b)(g_i \triangleright a)\\
&= (g_i \triangleright (g_i^{-1}h \triangleright b))(g_i \triangleright a) = g_i \triangleright ((g_i^{-1}h \triangleright b)(g_i^{-1}g_i \triangleright a))\\
&= g_i \triangleright ((g_i^{-1}h \triangleright b)a) = g_i \triangleright \underbrace{(g_i^{-1}h \triangleright (\underbrace{b(h^{-1}g_i \triangleright a)}_{\in A}))}_{\in B} \in g_i \triangleright B
\end{aligned}$$

e portanto não temos a garantia de $g_i \triangleright A$ ser um ideal de B. Temos também que

$$(g_i \triangleright 1_A)(g_i \triangleright b) = g_i \triangleright (1_A(g_i^{-1}g_i \triangleright b)) = g_i \triangleright b;$$

$$(g_i \triangleright b)(g_i \triangleright 1_A) = g_i \triangleright (b(g_i^{-1}g_i \triangleright 1_A)) = g_i \triangleright b.$$

Logo $g_i \triangleright A$ é um ideal à direita de B com unidade $g_i \triangleright 1_A$ com $i = 1, \ldots, n$. Segue-se do lema anterior, $J = g_1 \triangleright A + \ldots + g_n \triangleright A$ tem unidade à direita 1_J que é uma combinação das unidades $g_1 \triangleright 1_A, \ldots, g_n \triangleright 1_A$. Como $g_1 \triangleright a_1 + \ldots + g_n \triangleright a_n \in g_1 \triangleright A + \ldots + g_n \triangleright A = J$, então:

$\sum_{i=1}^{n} g_i \triangleright a_i = (\sum_{i=1}^{n} g_i \triangleright a_i)1_J = 0$. Portanto $B = 0$ e, consequentemente, todo H-submódulo de B é nulo. □

Lema 4.3.15. *Seja $\varphi : A \longrightarrow Hom(H, A)$ definida por $\varphi(a)(h) = h \cdot a$ e considere o H-submódulo $B := H \triangleright \varphi(A)$ do H-módulo $Hom(H, A)$. Então (B, φ) é uma ação envolvente minimal de A.*

Demonstração. Um elemento genérico de B é da forma $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)$, com $n \geq 1$. Para todo $k \in H$, temos que

$$\begin{aligned} k \triangleright (\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)) &= k \triangleright (h_1 \triangleright \varphi(a_1) + \ldots + h_n \triangleright \varphi(a_n)) \\ &= k \triangleright (h_1 \triangleright \varphi(a_1)) + \ldots + k \triangleright (h_n \triangleright \varphi(a_n)) \\ &= kh_1 \triangleright \varphi(a_1) + \ldots + kh_n \triangleright \varphi(a_n) = \sum_{i=1}^{n} kh_i \triangleright \varphi(a_i). \end{aligned}$$

Suponhamos que $\varphi(1_A) * M = 0$, para todo H-submódulo M de B. Segue-se que

$$\begin{aligned} 0 =& \varphi(1_A) * (\sum_{i=1}^{n} kh_i \triangleright \varphi(a_i)) \\ &= \varphi(1_A) * (kh_1 \triangleright \varphi(a_1) + \ldots + kh_n \triangleright \varphi(a_n)) \\ &= \varphi(1_A) * (kh_1 \triangleright \varphi(a_1)) + \ldots + \varphi(1_A) * (kh_n \triangleright \varphi(a_n)) \\ &= \varphi(kh_1 \cdot a_1) + \ldots + \varphi(kh_n \cdot a_n) = \varphi(kh_1 \cdot a_1 + kh_n \cdot a_n) \\ &= \varphi(\sum_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i). \end{aligned}$$

Da injetividade de φ, temos que $\sum\limits_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i = 0$, para todo $k \in H$. Então $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)(k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(a_i)(kh_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i = 0$, para todo $k \in H$.

Portanto $\sum\limits_{i=i}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i) = 0$. Logo $B = 0$ e daí todo H-submódulo M de B é nulo. □

Com o último resultado abaixo, temos a unicidade (a menos de isomorfismo de H-módulos álgebras) da envolvente minimal de uma ação parcial de Hopf.

Teorema 4.3.16. *Toda H-módulo álgebra parcial A tem uma ação envolvente minimal* (1) *e duas ações envolventes minimais de A são isomorfas como H-módulos álgebras* (2)*. Além disso, se* (B', θ) *é uma ação envolvente de A, então existe um homomorfismo de H-módulos álgebras de B' sobre uma ação envolvente minimal de A* (3)*.*

Demonstração. A afirmação (1) decorre do lema anterior. Também do lema anterior e do Teorema 4.3.11, segue-se a afirmação (3). Mostremos a afirmação (2). Pelo lema anterior, temos que $(B := H \triangleright \varphi(A), \varphi)$ é uma ação envolvente minimal de A. Seja (B', θ) outra ação envolvente minimal de A. Pelo Teorema 4.3.11, $\Phi : B' = H \triangleright \theta(A) \longrightarrow B = H \triangleright \varphi(A)$ definida por $\Phi(\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)$ é um homomorfismo (sobrejetor) de H-módulos álgebras. Seja $\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)$, tal que $0 = \Phi(\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)$. Logo $\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)(k) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i)(kh_i) = \sum_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i = 0$, para todo $k \in H$. Então

$$
\begin{aligned}
0 &= \theta(\sum_{i=1}^{n} kh_i \cdot a_i) = \theta(kh_1 \cdot a_1 + \ldots + kh_n \cdot a_n) = \theta(kh_1 \cdot a_1) + \ldots + \theta(kh_n \cdot a_n) \\
&= kh_1 \cdot \theta(a_1) + \ldots + kh_n \cdot \theta(a_n) = \theta(1_A)(kh_1 \triangleright \theta(a_1)) + \ldots + \theta(1_A)(kh_n \triangleright \theta(a_n)) \\
&= \theta(1_A)(kh_1 \triangleright \theta(a_1) + \ldots + kh_n \triangleright \theta(a_n)) \\
&= \theta(1_A)(k \triangleright (h_1 \triangleright \theta(a_1)) + \ldots + k \triangleright (h_n \triangleright \theta(a_n))) \\
&= \theta(1_A)(k \triangleright (h_1 \triangleright \theta(a_1) + \ldots + h_n \triangleright \theta(a_n))) = \theta(1_A)(k \triangleright (\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i))),
\end{aligned}
$$

para todo $k \in H$.

Da minimalidade de (B', θ), temos que se $\theta(1_A)M = 0$, então $M = 0$, para todo H-submódulo M de B'. Tome $M = H \triangleright (\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i))$. Daí, $k \triangleright (\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)) = 0$, para todo $k \in H$. Tomando $k = 1_H$, segue-se que $\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i) = 0$.

Logo $\Phi : B' = H \triangleright \theta(A) \longrightarrow B = H \triangleright \varphi(A)$, $\Phi(\sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \theta(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} h_i \triangleright \varphi(a_i)$ é um isomorfismo de H-módulos álgebras. Portanto vale (2). $\square$

CONCLUSÃO

Vimos, no capítulo 1, que, da propriedade universal do produto tensorial, obtemos outras propriedades do mesmo, entre elas, a sua comutatividade e a associatividade. Com o produto tensorial, definimos uma álgebra (associativa e unitária).

No capítulo 2, com os axiomas de coálgebras, biálgebras e álgebras de Hopf, obtemos, através da notação sigma, algumas propriedades de coálgebras e de álgebras de Hopf. Definido o produto de convolução, temos que $Hom(C, A)$ é uma álgebra com o mesmo. Finalizando os pré-requisitos, concluímos que o dual algébrico de uma álgebra de Hopf (sobre um corpo) de dimensão finita é uma álgebra de Hopf.

O resultado principal, visto no capítulo 3, é a existência e a unicidade, a menos de equivalência, da envolvente de uma ação parcial de grupo sobre uma álgebra unitária se, e somente se, os ideais D_g tem unidade. Temos ainda que skew anel de grupo parcial não tem, em geral, multiplicação associativa. Com a existência da envolvente de uma ação parcial de grupo, temos a associatividade do skew parcial respectivo.

No capítulo 4, com uma ação de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra A, temos uma nova multiplicação em $A \otimes_K H$ que denotamos, com esta nova multiplicação, por $A\#H$ (o chamado produto smash de A por H). Concluímos pela existência da envolvente de uma ação parcial de Hopf. Com um exemplo, verifica-se a não unicidade da envolvente (de uma ação parcial de Hopf). Por fim, temos a existência e a unicidade de uma envolvente minimal de uma ação parcial de Hopf, a menos de isomorfismos de H-módulos álgebras.

REFERÊNCIAS

[1] Abe, E., *Hopf algebras - University of Cambridge,* 1977.

[2] Alves, M.M.S.; Batista, E., *Partial Hopf actions, partial invariants and a Morita context, Algebra and Discrete Mathematics, v.* 3 (2009) 1-19.

[3] Alves, M.M.S.; Batista, E., *Enveloping Actions for Partial Hopf Actions, Communications in Algebra v.*38, *Nr.* 8 (2010) 2872-2902.

[4] Alves, M.M.S.; Batista, E., *Globalization theorems for partial Hopf (co)actions and some of their applications, Contemporary Mathematics v.* 537 (2011) 13-30.

[5] Caenepeel, S.; Janssen, K., *Partial (co)actions of Hopf algebras and partial Hopf-Galois theory. Comm. Algebra* 36:2923-2946. (2008).

[6] Dascalescu, S.; Nastasescu, C.; Raianu, S., *Hopf Algebras, an introduction - New York,* 2001.

[7] Dokuchaev, M.; Exel, R., *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations, Trans. Amer. Math. Society* 357, *n. 5* (2005), 1931-1952.

[8] Dokuchaev, M.; Ferrero, M.; Paques, A., *Partial Galois theory of commutative ring; J. Pure Appl. Algebra* 208 (2007) 77-87.

[9] Ferrero, M.; Lazzarin,J., *Partial actions and partial skew group rings, Journal of Algebra,* 2010.

[10] Guzman, J.A.; Ferrero,M.; Lazzarin, J., *Partial actions and partial fixed rings, Comm. Algebra,* 2010.

[11] Hoffman, K.; Kunze, R., *Linear Algebra- Second Edition - Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey,* 1971.

[12] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications - New York - John Wiley & Sons,* 1978.

[13] Milles, F.C.P., *Anéis e Módulos - I.M.E da USP,* 1972.

[14] Rotman, Joseph J., *An introduction to homological algebra - 2ª edição - ed. New York,* 2009.

[15] Santos, E.R., *Ações parciais: sobre a associatividade do skew anel de grupo parcial, ação envolvente e contexto de Morita - dissertação do PPG em Mat. e Comp. Científica da UFSC,* 2010.

[16] Schneider, H.-J., *Lectures on Hopf Algebras - Notes by Sonia Natale - University of Córdoba,* 1994.