

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O TEOREMA DE CAUCHY EM EQUAÇÕES DE
NAVIER-STOKES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Arlindo Dutra Carvalho Junior

SANTA MARIA, RS, BRASIL

2013

**O TEOREMA DE CAUCHY EM EQUAÇÕES DE
NAVIER-STOKES**

Arlindo Dutra Carvalho Junior

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de
Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria
(UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk

Santa Maria, RS, Brasil

2013

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**A comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado**

O TEOREMA DE CAUCHY EM EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

elaborada por

Arlindo Dutra Carvalho Junior

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

João Paulo Lukaszczyk, Dr.

(Presidente/Orientador)

Airam Teresa Zago Romcy Sausen, Dra.(UNIJUÍ)

Maurício Fronza da Silva, Dr.(UFSM)

Santa Maria, 08 de março de 2013

Dedicatória

À minha mãe.

AGRADECIMENTOS

À todos que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação pessoal e profissional, desde a pré-escola até aqui.

Agradeço principalmente à minha mãe, que mesmo tendo saído da escola aos 12 anos, em função da necessidade de trabalhar com os seus pais, nunca mediu esforços para me apoiar nos estudos. E que felicitou-me quando coleí grau em Matemática dizendo:

- Parabéns meu filho, vais realizar o meu sonho de ser Professora...

Epígrafe

(Balada do Louco)

...Eu juro que é melhor

Não ser o normal

Se eu posso pensar que Deus sou eu...

“Arnaldo Baptista / Rita Lee ”

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

O TEOREMA DE CAUCHY EM EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

AUTOR: ARLINDO DUTRA CARVALHO JUNIOR

ORIENTADOR: JOÃO PAULO LUKASZCZYK

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 08 de março de 2013.

Neste trabalho é apresentado o Teorema de Cauchy em sua forma clássica e tem por objetivo enfraquecer suas hipóteses, proporcionando uma aplicação mais vantajosa na mecânica do contínuo. A metodologia empregada é axiomática, ou seja, são apresentados conceitos básicos com vistas ao desencadeamento lógico das demonstrações que foram realizadas nos teoremas principais para atingir os objetivos dessa dissertação. O resultado principal é o teorema 14, onde obedecer a uma lei de balanço, é condição necessária e suficiente para que um Fluxo de Cauchy seja Fracamente Balanceado.

Palavras-Chave: Mecânica do Contínuo, Equações de Navier-Stokes, Teorema de Cauchy.

ABSTRACT

Master Course Dissertation
Graduation Program in Mathematics
Universidade Federal de Santa Maria

THE CAUCHY'S THEOREM IN NAVIER-STOKES EQUATIONS

AUTHOR: ARLINDO DUTRA CARVALHO JUNIOR

ADVISER: JOÃO PAULO LUKASZCZYK

Defense Place and Date: Santa Maria, March 08th, 2013

This work presents the Cauchy's theorem in its classical form, and aims to weaken their hypotheses, providing a more advantageous use in continuum mechanics. The methodology is axiomatic, that is, basic concepts are presented aiming to triggering logical statements that were made in the main theorems to achieve the objectives of this dissertation. The main result is Theorem 14, where a law of balance is followed necessary and sufficient condition for a Cauchy Flow be Weakly Balanced.

Keywords: Continuum Mechanics, Navier-Stokes Equations, Cauchy's Theorem.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Conceitos Iniciais | 7 |
| 1.1 | Definições Importantes | 7 |
| 1.2 | Lemas Técnicos | 12 |
| 1.3 | Teoremas Técnicos | 15 |
| 2 | Euler e Navier-Stokes | 17 |
| 2.1 | Introdução | 17 |
| 2.2 | Euler e Navier-Stokes | 17 |
| 2.3 | Dedução das Equações | 18 |
| 2.4 | O Clássico Teorema de Cauchy | 22 |
| 2.5 | Conservação de Massa e Fluido Incompressível | 27 |
| 2.6 | Conservação do Momento | 30 |
| 2.7 | Equação de Euler | 31 |
| 2.8 | Equação de Navier-Stokes | 33 |
| 3 | O Teorema de Cauchy na Mecânica dos Fluidos | 35 |
| 3.1 | Introdução | 35 |
| 3.2 | Propriedades da Densidade | 35 |
| 3.3 | Linearidade da Densidade | 47 |
| 3.4 | O Teorema de Cauchy na Física Clássica: Alguns Contra-Exemplos | 70 |

Notação

1- \mathbb{R}^n é o Espaço Euclidiano n-dimensional, com a norma $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2- Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n (n \leq 3)$ com fronteira $\partial\Omega$ regular.

3- R é uma região aberta e limitada do espaço n-dimensional, com fronteira ∂R regular.

4- $B(x, \delta)$ é a bola aberta centrada em x e raio δ .

5- $B[x, \delta]$ é a bola fechada centrada em x e raio δ .

6- $D_r(x, \mathbf{n})$ é um disco orientado de raio r , centrado em x e vetor normal unitário \mathbf{n} .

7- $R_r = \{x \in R : R \supset B[x, r]\}$.

8- $S^{n-1} = \{n \in \mathbb{R}^n : |n| = 1\}$, para a esfera de raio 1.

9- \mathbf{n}, \mathbf{m} e \mathbf{p} são vetores pertencentes a S^{n-1} .

10- $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é o espaço das transformações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m . Em particular $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

11- Dado $a \in \mathbb{R}^m; b \in \mathbb{R}^n; q, n \in \mathbb{N}$. Definimos a transformação linear $a \otimes b \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$, por

$$(a \otimes b)(u) = (b.u)a$$

Além disso, se $m = n$ então escrevemos

$$(a \wedge b)(u) = (a \otimes b)(u) - (b \otimes a)(u) = (b.u)a - (a.u)b$$

12- $L^p(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\|g\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Introdução

Nesta dissertação apresentada a forma Clássica do Teorema de Cauchy, e terá por objetivo enfraquecer suas hipóteses para obter outros resultados similares, que são mais vantajosos nas aplicações físicas. Para isso, será abordado a dedução das Equações de Euler e Navier-Stokes, já que essas equações surgem da aplicação do teorema citado anteriormente.

As leis de balanço da Física Clássica tem a seguinte forma:

$$\int_{\partial B} f(x, n(x)) dA_x + \int_B b(x) dV_x = 0 \quad (1)$$

onde $n(x)$ é unidade normal para a fronteira de B (∂B) em B . Na mecânica f representa força de superfície por unidade de área na ∂B , será visto que este fato está ligado a conservação de massa e de momento, que utiliza-se para fazer a dedução das Equações de Euler e de Navier-Stokes. Na termodinâmica f dá o fluxo de calor por unidade de área em B através da sua fronteira. Nesse trabalho, será abordada a mecânica do contínuo, onde será analisado o Teorema de Cauchy na sua forma clássica, revisando os conceitos de suas hipóteses e discutindo sobre os resultados que já foram obtidos através dele, bem como, analisando o significado da função densidade $f(x, n(x))$.

O Matemático Augustin Louis Cauchy estabeleceu em 1823 o que é provavelmente o mais importante teorema da mecânica do contínuo, ele provou isso com $f(x, n)$ definido para cada x em uma região R aberta e todas as unidades do vetor n estão contínuas em x , se $b(x)$ é uniformemente limitado em R , e se (1) é satisfeito para cada suficientemente boa região de B em R , então $f(x, n)$ deverá necessariamente ser linear em n , isto é:

$$f(x, n) = T(x)n \quad (2)$$

onde $T(x)$ é uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$, o contradomínio de f . Onde f é

uma força de superfície, o campo T é chamado tensor de tensão, seu valor $T(x)$ em x é uma transformação linear do $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Além disso, Cauchy provou que se f é balanceado por momento, ou seja, que satisfaz a forma integral:

$$\int_{\partial B} (y - x) \wedge f(x, n(y)) dA_y + \int_B (y - x) \wedge b(y) dV_y \quad (3)$$

para cada sólido $B \subset R$, então $T(x)$ é linear e simétrica.

Diz-se em estudos recentes nos fundamentos da mecânica, baseado nos teóricos que estão referenciados, que o conceito fundamental não é a função f , mas sim, a força total por unidade de área, como segue:

$$F(S) = \int_S f(x, \mathbf{n}) dA_x \quad (4)$$

sendo S uma superfície orientável. Com isso, verifica-se que a densidade f é uma grandeza obtida através da derivada da força total em relação a medida da área de Lebesgue.

Então é pertinente fazermos dois questionamentos.

i) Existe alguma hipótese fisicamente razoável que se possa atribuir a F e que gere como consequência a continuidade da f ?

ii) Há uma lei de balanço que possa estabelecer a linearidade da f , pelo menos quase sempre?

Para responder a essas duas questões será apresentada a definição de Fluxo de Cauchy, que é uma função vetorial com a propriedade de aditividade contável e de área limitada, cujo domínio é a coleção de todos os planos orientados, elementos de superfície em R .

Para primeira questão, mostraremos que uma condição necessária e suficiente para que f seja uma função contínua da posição é que F tenha densidade média uniforme, vista no teorema 10.

A segunda pergunta será respondida ao mostrar que para um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado, que veremos na definição 16 e teorema 11, existe uma densidade linear quase sempre.

Esta dissertação está dividida em três capítulos, que serão descritos abaixo de maneira sucinta:

No primeiro capítulo, constam as definições preliminares e resultados matemáticos para serem consultados isoladamente quando necessários.

No segundo capítulo, serão deduzidas as equações de Euler e de Navier-Stokes. Para isso, considera-se algumas hipóteses matemáticas bastante fortes como no teorema do transporte supomos a existência de um difeomorfismo ϕ , também precisamos da Equação da Conservação da Massa para fluidos incompressíveis, do Clássico Teorema de Cauchy que é empregado para a dedução da Equação de Conservação do Momento, além disso, considerar que a densidade ρ é uma função que possui derivadas contínuas, para pode-se aplicar este teorema.

No terceiro e último capítulo, apresenta-se alguns teoremas com o enfraquecimento de certas hipóteses do Clássico Teorema de Cauchy, onde obtem-se resultados similares. Além desses resultados principais, incluí-se alguns exemplos, onde em um desses, é retirado uma hipóteses de um teorema e verificamos a não validade do resultado, como era esperado. Ou seja, considera-se que a densidade f não é uma função contínua da posição do Teorema de Cauchy e concluí-se que a densidade não é necessariamente linear. Também, é apresentado o conceito de função geradora, além de um exemplo de uma Função Geradora que não é linear. Concluí-se com a definição de Função Fracamente Linear e é citado um exemplo de uma Função Geradora para um Fluxo de Cauchy Equilibrado que não é Fracamente Linear.

Capítulo 1

Conceitos Iniciais

Neste primeiro capítulo estão as noções gerais, ou seja, os conceitos que serão utilizados no decorrer do trabalho e nos resultados principais. Para referir-se a eles durante as demonstrações realizadas, dividimos este capítulo em três seções, onde contém definições, lemas e teoremas, respectivamente, com isso, faremos as devidas referências nos resultados futuros.

Após alguns desses primeiros resultados, foram feitas observações ou comentários afim de explicar melhor algumas consequências em que serão utilizadas em alguns resultados posteriores.

1.1 Definições Importantes

As seguintes definições são de extrema importância, e servem como base para que possa ser entendido os resultados e demonstrações referentes ao Teorema de Cauchy, com isso, em muitos resultados futuros retornaremos a este capítulo para buscar esses conceitos.

Definição 1 Dizemos que uma família Σ de subconjuntos de X é uma σ - álgebra se forem satisfeitas as seguintes condições:

i) $\emptyset \in \Sigma$

ii) Para todo $E \in \Sigma$, $X \setminus E \in \Sigma$

iii) Para toda sequência $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$

Onde os elementos de Σ são chamados de conjuntos mensuráveis, bem como μ é uma medida em X , sendo que a propriedade 3 – b) é chamada de σ -aditividade ou aditividade

contável. Além disso, também é importante dizer que uma medida definida numa σ -álgebra de Borel é chamada de Medida de Borel, ou ainda, Função de Borel.

Definição 2 Chamamos de σ -álgebra de Borel em \mathbb{R}^n a σ -álgebra gerada pela família de abertos de \mathbb{R}^n . Sendo seus elementos os Conjuntos de Borel, também chamados de Borelianos.

Observação Dizemos que um conjunto de Borel é a menor σ -álgebra que contém todos os abertos e fechados de \mathbb{R}^n .

Conjuntos obtidos por uniões ou intersecções enumeráveis de conjuntos abertos e fechados são exemplos de conjuntos de Borel. Agora, será definido o que vem a ser medida. Utilizaremos algumas convenções para dizer quando uma dada função f assume valores em $[0, \infty]$. Assim, por razões técnicas afirmaremos que $[0, \infty] = [0, \infty) \cup \infty$, atribuindo um outro sentido matemático para o símbolo ∞ .

Para esses argumentos, é levado em conta questões matemáticas relativas à Teoria da Medida. Em outras palavras, estamos falando em comprimento, área e volume infinitos. Portanto, cabe explicitar algumas questões que vão ao encontro dessa abordagem com as definições que se seguem.

Definição 3 Chamamos de Espaço de Medida ao terno (X, Σ, μ) , onde:

- 1- X é um conjunto
- 2- Σ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X
- 3- $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ é uma função que tem as seguintes propriedades:

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta em Σ , então: $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_n)$

Definição 4 Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ possui medida nula se, existe um conjunto $E \subset \Sigma$, tal que $A \subset E$ e $\mu(E) = 0$.

Em virtude da definição acima, diremos que uma determinada propriedade acerca dos elementos do conjunto X vale quase sempre, abreviadamente q.s, se o conjunto dos pontos onde a propriedade não vale é um conjunto de medida nula.

Definição 5 Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida, dizemos que uma medida μ é finita se ela não assume o valor ∞ . Por outro lado, dizemos que μ é σ -finita se existe sequência E_n em Σ tal que:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n = X \text{ e } \mu(E_n) < \infty$$

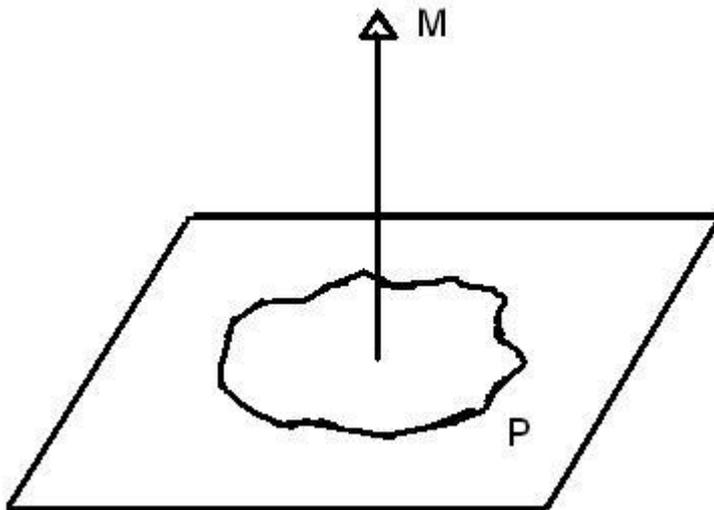
Definição 6 Sejam μ e λ duas medidas definidas numa σ -álgebra Σ , dizemos que λ é absolutamente contínua com relação à medida μ , o qual denotaremos por $\lambda < \mu$, se para todo $E \in \Sigma$ com $\mu(E) = 0$ implica que $\lambda(E) = 0$.

Definição 7 (Derivada Material) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , chama-se Derivada Material de f , ao longo de um caminho de classe C^1 o número real dado por:

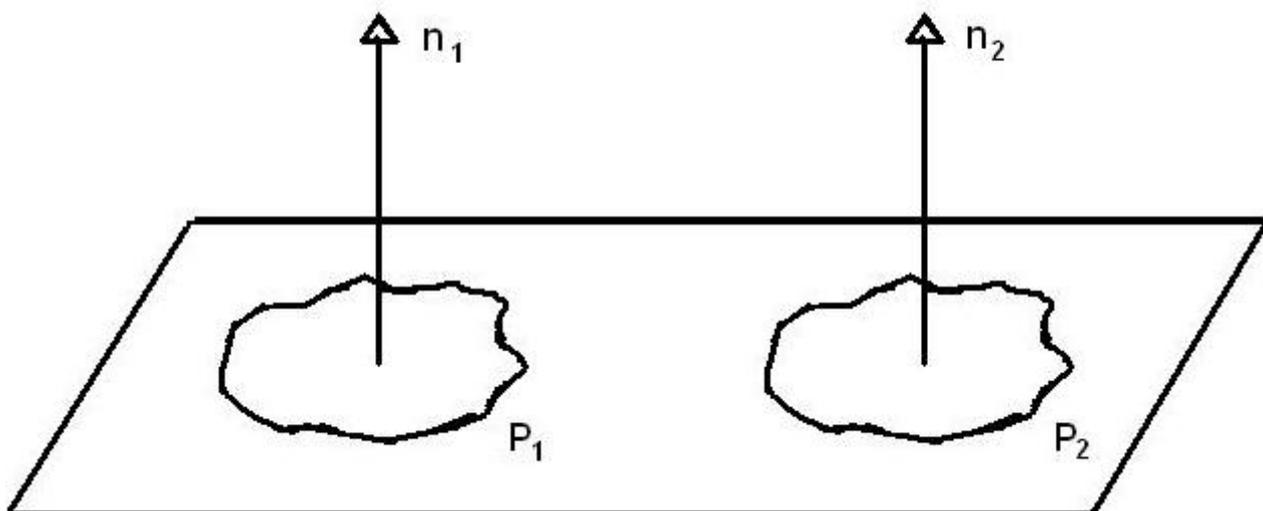
$$\frac{Df}{Dt}(x, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f \right) (x, t) \quad (1.1)$$

onde x é um ponto do caminho e v é a derivada do caminho.

Definição 8 (CPO) Chamamos de Conjunto Plano Orientado ao par $S = (P, \mathbf{n})$, onde $P \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto de Borel contido em um plano e \mathbf{n} é um vetor normal unitário ao plano.



Definição 9 Dizemos que os CPO's, $S_1 = (P_1, \mathbf{n}_1)$ e $S_2 = (P_2, \mathbf{n}_2)$, são compatíveis quando P_1 e P_2 estão no mesmo plano e $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$.



Definição 10 Uma sequência (S_k) de CPO's tende regularmente para S , se S_k é compatível com S para todo $k \in \mathbb{N}$ e se a área da diferença simétrica $(S - S_k) \cup (S_k - S)$ tende a zero quando $k \rightarrow \infty$.

Definição 11 Um CPO (S, n) é dito poligonal se S é uma região poligonal plana fechada.

Definição 12 (CPO Regular) Um CPO (S, n) é dito regular se S é fechado no plano e existe uma sequência (S_k) de CPO's poligonais e uma constante $k_0 > 0$ tais que (S_k) tende a S regularmente e $p(S_k) < k_0$, para todo k , onde p denota o perímetro.

Obs: Usamos S ao invés de P nas definições acima com o mesmo significado, apenas para simplificar a notação.

Definição 13 Dizemos que S é um elemento de superfície de um conjunto aberto limitado, $R \subset \mathbb{R}^3$, quando S é um CPO contido em R .

Definição 14 Sejam $R \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado e

$$G : \{ \text{Elementos de Superfície de } R \} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dizemos que G é limitada por área, se existe $c > 0$ tal que $|G(S)| \leq cA(S)$ para todo elemento de superfície S , sendo $A(S)$ a área de S .

Definição 15 (Fluxo de Cauchy) Sejam $R \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e $F : \{ \text{Elementos de Superfície de } R \} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que F é um Fluxo de Cauchy se:

(CI) F é limitado por área.

(CII) F é aditiva em elementos de superfície compatíveis, ou seja:

$$F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) + F(S_2)$$

onde S_1 e S_2 são elementos de superfície compatíveis e disjuntos.

Definição 16 (Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado) Um Fluxo de Cauchy F é dito Fracamente Balanceado se $|F(\partial B)| \leq cV(B)$, onde B é um sólido qualquer e $V(B)$ é o volume.

Definição 17 (Densidade Média) Chamamos de Densidade Média a função $f_r : R_r \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por:

$$f_r(x, \mathbf{n}) = \frac{F(D_r(x, \mathbf{n}))}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} \quad (1.2)$$

onde $R_r = \{x \in R; B[x, r] \subset R\}$

Da definição (1.2) temos que:

$$F(D_r(x, \mathbf{n})) = A(D_r(x, \mathbf{n}))f_r(x, \mathbf{n})$$

Por outro lado, da definição 9 temos que:

$$|F(D_r(x, \mathbf{n}))| \leq c|A(D_r(x, \mathbf{n}))|$$

Obtendo:

$$|A(D_r(x, \mathbf{n}))f_r(x, \mathbf{n})| \leq c|A(D_r(x, \mathbf{n}))|$$

Ou seja:

$$|f_r(x, \mathbf{n})| \leq c \quad (1.3)$$

Desta forma, temos que a função densidade média é limitada para todo r .

Definição 18 (Densidade Média Uniforme) F tem densidade média uniforme quando dado $A \subset R$ compacto a família $f_r(\cdot, \mathbf{n})$ com r suficientemente pequeno é uniformemente de Cauchy em A quando $r \rightarrow 0$, isto é, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in A$ e $\forall \mathbf{n} \subset S^2$.

$$0 < r_1, r_2 < \delta \implies |f_{r_1}(x, \mathbf{n}) - f_{r_2}(x, \mathbf{n})| < \epsilon.$$

Definição 19 (Par de Densidade) Ao par (x, \mathbf{n}) chamamos par de densidade se existe o limite:

$$f(x, \mathbf{n}) = \lim_{r \rightarrow 0} f_r(x, \mathbf{n}) \quad (1.4)$$

Se f está definida sobre o conjunto de pares de densidade, então f é a densidade do fluxo F , como também temos que x é ponto de densidade. Assim, se para todo \mathbf{n} temos que (x, \mathbf{n}) é um par de densidade, então dizemos que F tem densidade quase sempre, isto é, se todo $x \in \mathbb{R}$ é ponto de densidade.

Definição 20 Seja F um Fluxo de Cauchy com densidade f . Dizemos que f é linear em x se, x é um ponto de densidade e se, a função $\mathbf{n} \mapsto f(x, \mathbf{n})$ é uma restrição de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a esfera unitária S^2 , ou seja:

$$f(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n} \quad (1.5)$$

Definição 21 Dizemos que F é balanceado por momento se, dado $x \in R$ e qualquer sequência de cubos (B_k) , com $x \in B_k, \forall k \in \mathbb{N}$ e $V(B_k) \rightarrow 0$ se existir o limite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{MF_x(\partial B_k)}{V(B_k)} = 0 \quad (1.6)$$

Onde MF_x é o Momento de F sobre x definido na página 50.

Definição 22 Dizemos que um elemento e superfície S é uma seção transversal quando o conjunto P é a interseção não-vazia da região R com um plano.

1.2 Lemas Técnicos

Lema 1 (Propriedade do Determinante) Seja (a_{ij}) uma matriz $n \times n$, onde $a_{ij} = a_{ij}(t)$. Denote $(a_{ij}^{k'})_{n \times n}$ a matriz derivada na k -ésima linha, então:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\det(a_{ij})_{n \times n}] = \sum_{k=1}^n \det(a_{ij}^{k'})_{n \times n} \quad (1.7)$$

Observação: Esta demonstração é feita por indução, na ordem n da matriz. Como este resultado será utilizado na demonstração do teorema do transporte na versão 3X3, será

simplificada a parte computacional deste lema, para isso apresentaremos apenas a passagem da indução de $n = 2$ para $n = 3$. O caso geral é feito seguindo os mesmos passos dos resultados apresentados abaixo.

Para $n = 2$ temos que $\det(a_{ij})_{2 \times 2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\det(a_{ij})_{2 \times 2}] &= a_{11} \frac{\partial}{\partial t} a_{12} + a_{22} \frac{\partial}{\partial t} a_{11} - a_{12} \frac{\partial}{\partial t} a_{21} - a_{21} \frac{\partial}{\partial t} a_{12} \\ &= a_{22} \frac{\partial}{\partial t} a_{11} - a_{21} \frac{\partial}{\partial t} a_{12} + a_{11} \frac{\partial}{\partial t} a_{12} - a_{12} \frac{\partial}{\partial t} a_{21} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} a_{11} & \frac{\partial}{\partial t} a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{21} & \frac{\partial}{\partial t} a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \det(a'_{ij})_{2 \times 2} + \det(a''_{ij})_{2 \times 2} \\ &= \sum_{k=1}^2 \det(a^{k'}_{ij})_{2 \times 2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Para $n = 3$ temos que:

$$\begin{aligned} \det(a_{ij})_{3 \times 3} &= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ \det(a_{ij})_{3 \times 3} &= a_{11} \Delta_{11} - a_{12} \Delta_{12} + a_{13} \Delta_{13} \end{aligned}$$

Disto, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\det(a_{ij})_{3 \times 3}] &= \frac{\partial}{\partial t} (a_{11} \Delta_{11} - a_{12} \Delta_{12} + a_{13} \Delta_{13}) \\ &= \Delta_{11} \frac{\partial}{\partial t} a_{11} - \Delta_{12} \frac{\partial}{\partial t} a_{12} + \Delta_{13} \frac{\partial}{\partial t} a_{13} + \\ &+ a_{11} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} a_{22} & \frac{\partial}{\partial t} a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} a_{21} & \frac{\partial}{\partial t} a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} a_{21} & \frac{\partial}{\partial t} a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &+ a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{32} & \frac{\partial}{\partial t} a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{31} & \frac{\partial}{\partial t} a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{31} & \frac{\partial}{\partial t} a_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^3 \det(a'_{ij})_{3 \times 3} \tag{1.10}
\end{aligned}$$

portanto o lema é valido para $n = 3$.

Lema 2 *Sejam F um Fluxo de Cauchy, (S_k) uma seqüência de elementos de superfície que tende regularmente para S , então $F(S_k) \rightarrow F(S)$ quando $k \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Note que, podemos escrever $S_k = (S_k - S) \cup (S_k \cap S)$ e $S = (S - S_k) \cup (S_k \cap S)$ e calcular o fluxo F para cada um desses elementos de superfície. Usando a definição 15 de Fluxo de Cauchy, segue que $F(S_k) = F(S_k - S) + F(S_k \cap S)$ e $F(S) = F(S - S_k) + F(S_k \cap S)$. Agora, calculando $F(S_k) - F(S)$, usando a desigualdade triangular e, novamente, a definição 15, obtém-se:

$$F(S_k) - F(S) = F(S_k - S) - F(S - S_k)$$

$$0 \leq |F(S_k) - F(S)| \leq |F(S_k - S)| + |F(S - S_k)| \leq c[A(S_k - S) + A(S - S_k)]$$

$$0 \leq |F(S_k) - F(S)| \leq cA[(S_k - S) \cup (S - S_k)]$$

agora, fazendo $k \rightarrow \infty$, temos pela definição 7, que a área da diferença simétrica do lado direito da igualdade acima tende a zero.

Logo, $F(S_k) \rightarrow F(S)$ quando $k \rightarrow \infty$.

Lema 3 *Sejam A , B e C Conjuntos de Borel não-vazios tais que $A \cap B = C$. Se C é um conjunto de medida nula, isto é, $m(C) = 0$, então:*

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \tag{1.11}$$

Demonstração: Note que podemos escrever, $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$, obtendo assim uma união disjunta, então pela (definição 3, item 3-b), a medida de uma união disjunta é $m(A \cup B) = m(A - B) + m(B - A) + m(A \cap B)$, agora, utilizando a hipótese de que $m(C) = 0$ e $A \cap B = C$, concluímos que $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ como queríamos demonstrar.

1.3 Teoremas Técnicos

Teorema 1 (Teorema de Gauss) *Seja $\tau : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 através de uma superfície orientada $\partial\Omega$, e \mathbf{n} o vetor normal unitário e exterior à superfície $\partial\Omega$. Então:*

$$\int_{\partial\Omega} \tau \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau dV \quad (1.12)$$

Demonstração: Veja [12].

Teorema 2 (Teorema de Schwarz) *Se $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ então, para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$ e $x \in U$, tem-se:*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \quad (1.13)$$

Demonstração: Veja [8], páginas 67 - 68.

Teorema 3 *Seja Ω uma família de abertos de \mathbb{R}^n . Se μ é uma medida complexa de Borel em \mathbb{R}^n , então:*

- a) μ é diferenciável q.s;
- b) $D\mu \in L^1(\mathbb{R}^n)$;
- c) Para todo conjunto de Borel E

$$\mu(E) = \mu_s + \int_E (D\mu)(x) dx \quad (1.14)$$

onde $\mu_s \perp m$ e $(D\mu_s)(x) = 0$ q.s.

Demonstração: Veja [11], páginas 166 - 168.

Teorema 4 (Radon-Nikodym) *Sejam μ e λ medidas σ -finitas definidas numa σ -álgebra Σ de subconjuntos de X e suponha que $\lambda \ll \mu$, isto é, λ é absolutamente contínua com relação a μ . Então existe uma função não-negativa $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \Sigma \quad (1.15)$$

Sendo f única q.s em $[\mu]$

Demonstração: Veja [11], páginas 128 - 132.

Teorema 5 (Teorema de Fubini) *Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ abertos e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ então:*

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) dy dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy \quad (1.16)$$

Demonstração: Veja [11], páginas 150 - 151.

Capítulo 2

Euler e Navier-Stokes

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta um pouco sobre a parte histórica de Euler, Navier e Stokes bem como, as equações da Conservação da Massa e do Momento que irão culminar no objetivo principal deste capítulo que é, a Dedução das Equações de Euler e Navier-Stokes.

As equações de Conservação de Massa e de Momento permitem descrever a dinâmica de um fluido incompressível. A primeira tem como característica o divergente do campo de velocidades ser nulo. A outra nos dá a expressão de uma equação diferencial parcial não-linear, que é muito conhecida por suas aplicações que é a Equação de Navier-Stokes. Esta, concebe a viscosidade do fluido como parte do sistema, já na Equação de Euler, será apenas considerado o fluido ideal.

2.2 Euler e Navier-Stokes

Os matemáticos e físicos Leonhard Paul Euler, Claude Louis Marie Henri Navier e George Gabriel Stokes, são muitos famosos pelas suas contribuições na matemática, e em muitas outras áreas como na mecânica dos fluidos. Navier e Stokes deram seu nome a um sistema de equações muito importante na mecânica dos fluidos que tem várias aplicações.

Agora descreveremos um pouco de cada um deles separadamente.

Leonhard Paul Euler nasceu no dia 15 de abril de 1707 em Basileia, Suíça. Estudou na Universidade de Basileia, orientado pelo também matemático Johann Bernoulli. Euler fez importantes descobertas no campo da matemática, em diferentes áreas, como no cálculo,

nos grafos, também no campo das terminologias e notações que são empregadas até hoje, como as de função. Ele foi um dos dois mais prolíficos matemáticos de todos os tempos, se toda sua obra fosse reunida, obteria dentre 60 à 80 volumes. Ele faleceu em 18 de setembro de 1738, aos 76 anos na cidade de São Petesburgo, na Rússia.

Nascido em 10 de fevereiro de 1785, na cidade de Dijon, França, o matemático e físico Claude Louis Marie Henri Navier entrou para *École Polytechnique* no ano de 1802, sendo aluno de Charles Fourier. Após, estudou na *École Nationale des Ponts et Chaussées* em 1804, desenvolvendo problemas de engenharia relativos à construção de pontes, alguns anos mais tarde foi nomeado professor, em 1830. No ano de 1831 assumiu como professor de cálculo e mecânica na *École Polytechnique*, sucedeu a Augustin Louis Cauchy então exilado. Dentre muitos trabalhos, suas contribuições estão principalmente realizadas com a teoria da elasticidade geral. Entretanto, sua maior contribuição é na mecânica dos fluidos com as equações de Navier-Stokes.

O matemático e físico Irlandês George Gabriel Stokes, se distinguiu pelas suas contribuições na dinâmica de fluidos. Ele iniciou seus estudos na Trinity College Dublin, após mudou-se para a Inglaterra em 1835 e ingressou na Faculdade de Bristol em Bristol. Em 1849 tornou-se professor de matemática em Cambridge, após, em 1851 foi eleito para a Royal Society, e ganhou a medalha de Rumford daquela sociedade em 1852. Dentre suas contribuições na mecânica dos fluidos, na óptica e na física matemática se distinguiu pelo Teorema de Stokes e as Equações de Navier-Stokes, sendo este o último nome agregado a conservação de momento. Stokes, diferentemente de Navier, considerou as forças de atração e repulsão entre moléculas quando publicou o seu artigo em 1822, quando as equações de movimento para fluidos não viscosos.

2.3 Dedução das Equações

A trajetória descrita por uma partícula, no espaço material, pode ser expressa através de uma curva contínua em $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3$. Então, seja Ω_0 a região do espaço ocupada por uma porção de um fluido e seja $\phi(x, t)$ uma função fluxo, tal que para todo $x_0 \in \Omega_0$ a curva $t \mapsto \phi(x_0, t)$ indique a posição que a partícula ocupa no espaço em cada instante de tempo. Podemos determinar a velocidade $v(x, t)$ da partícula, no instante t , ocupando a posição

x , por:

$$v(\phi(x_0, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(x_0, t) \quad (2.1)$$

ou seja, a velocidade sobre a trajetória nada mais é que a sua derivada em um de seus pontos.

Com esse fato vamos deduzir alguns conceitos que serão importantes para a dedução das Equações de Navier-Stokes.

Teorema 6 (Teorema do Transporte) *Sejam $\phi : \Omega \times (0, T) \longrightarrow \Omega \times (0, T)$ um difeomorfismo, f uma função regular definida em $\Omega \times (0, T)$ e $\Omega_t = \phi(\Omega_0, t)$ uma região onde se pode aplicar o Teorema da Divergência, então:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \mathbf{div} v \right) (x, t) dx \quad (2.2)$$

Demonstração: Seja $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado, tal que a sua fronteira seja suficientemente regular. Será feita uma mudança de variáveis, $x = \phi_t(y)$, então, na integral do lado esquerdo em (2.2) uma integral independente do tempo, isto é:

Como supomos $x = \phi_t(y)$, temos $dx = J(y, t) dy$.

Neste caso, trabalhamos com instante de tempo $t = 0$, logo:

$$J(y, 0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Então, não é preciso tomar o valor absoluto do determinante jacobiano na mudança de variáveis da integral (2.2), como a integral é independente da variável t , obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} f(\phi_t(y), t) J(y, t) dy \quad (2.3)$$

Pela derivada do produto e pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos:

$$= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} [f(\phi_t(y, t), t)] J(y, t) dy + \int_{\Omega_0} f(\phi_t(y, t), t) \frac{\partial J}{\partial t} (y, t) dy \quad (2.4)$$

Pela definição de derivada material, obtemos:

$$= \int_{\Omega_0} \frac{Df}{Dt}(\phi_t(y), t) J(y, t) dy + \int_{\Omega_0} f(\phi(y, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(y, t) dy \quad (2.5)$$

Calculando a derivada do Jacobiano, em relação à variável temporal para resolver a segunda integral acima, obtemos:

$$\frac{\partial J}{\partial t}(y, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

Utilizando o Lema 1, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} = & \sum_{k=1}^3 \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial t \partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial t \partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial t \partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^3 \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t \partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial t \partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial t \partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{k=1}^3 \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial t \partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial t \partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial t \partial y_3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora, usando o Teorema de Schwarz e a regra da cadeia na equação anterior, obtemos:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t \partial y_j}(y, t) = \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(y, t) = \frac{\partial}{\partial y_j} [v_i(\phi(y, t), t)] = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial \phi_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_j} \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) na equação matricial anterior, que é igual a $\frac{\partial J}{\partial t}$, obtemos:

$$\begin{aligned} = & \sum_{k=1}^3 \det \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{k=1}^3 \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t \partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial t \partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial t \partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^3 \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t} \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial y_3}{\partial t} \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} = \\
& = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \\
& + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \\
& + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} = \\
& = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} J + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} 0 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} 0 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} 0 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} J + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} 0 + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} 0 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} 0 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} J = \\
& = J \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)
\end{aligned}$$

Então, finalmente obtemos:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \mathbf{div} v \quad (2.7)$$

Foi omitido, para simplificar a notação, que o jacobiano e a sua respectiva derivada são calculadas no ponto (y, t) , e o $\mathbf{div} v$ é calculado no ponto $\phi((y, t), t)$. Agora, terminaremos de calcular a segunda integral em (2.5), sendo:

$$\int_{\Omega_0} f(\phi(y, t)) \frac{\partial J}{\partial t}(y, t) dy = \int_{\Omega_0} f(\phi(y, t)) [(\mathbf{div} v)(\phi(y, t), t)] J(y, t) dy \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.5) e retomando a variável $x = \phi_t(y)$, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \mathbf{div} v \right) (x, t) dx \quad (2.9)$$

concluindo a demonstraçãõ.

2.4 O Clássico Teorema de Cauchy

Teorema 7 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado, suponha que $s : \bar{\Omega} \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função contínua em $x \in \bar{\Omega}$. Além disso, seja $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função limitada que satisfaz a lei do balanço*

$$\int_{\partial\Omega} s(x, \mathbf{n}(x)) dA_x + \int_{\Omega} f(x) dV_x = 0$$

onde $\mathbf{n}(x)$ é o vetor normal exterior a Ω no ponto $x \in \partial\Omega$, então $s(x, \mathbf{n})$ é linear em \mathbf{n} .

Isto é,

$$s(x, n) = S(x)\mathbf{n}$$

onde $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear.

Demonstração: A fim de estender a hipótese de Cauchy a todo vetor de \mathbb{R}^3 consideremos a função:

$$s(u, x) = \begin{cases} |u|s\left(\frac{u}{|u|}, x\right), & \text{se } u \neq 0 \\ 0, & \text{se } u = 0 \end{cases}$$

onde o parâmetro t foi omitido para simplificar a notação.

Será demonstrado que para todo x da região de escoamento, a função $s(u, x)$ definida anteriormente é linear em \mathbf{n} . Para isso, consideremos um ponto x_0 interior a região de escoamento, os vetores unitários u_1 e u_2 linearmente independentes, e os escalares $\epsilon, \delta > 0$ e suficientemente pequenos. Agora consideremos os planos Π_1 que passa por x_0 com normal u_1 , Π_2 que também passa por x_0 com normal u_2 e Π_3 que passa por $x_0 + \epsilon u_3$ com normal $u_3 = -(u_1 + u_2)$.

Seja R a região limitada por os planos citados acima e pelos planos Π_4 e Π_5 paralelos com normais $u_4 = m$ e $u_5 = -m$ com distância δ de x_0 . Observe a (2.1):

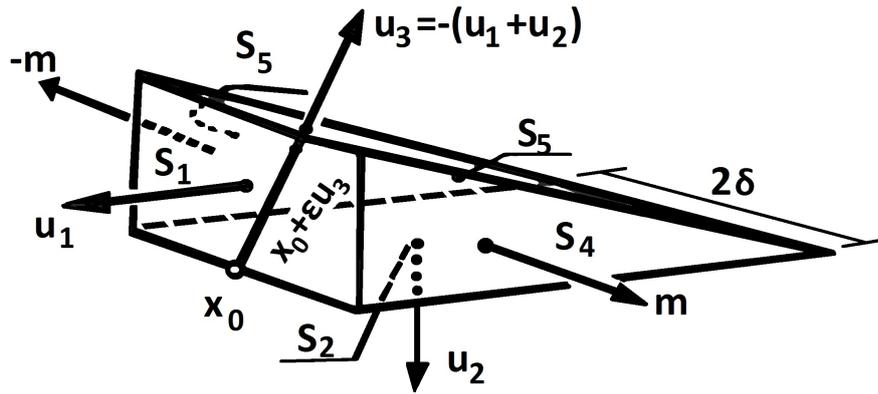


Figura 2.1: Interseção de Π_1, Π_2, Π_3

Então a fronteira da região R é dada por:

$$\partial R = \bigcup_{i=1}^5 S_i \quad (2.10)$$

onde S_i é a face de R cujo vetor normal é u_i com $i = 1, \dots, 5$.

Se na figura anterior for feito um corte transversal por um plano Π paralelo a u_1 e u_2 , obtem-se a figura (2.2):

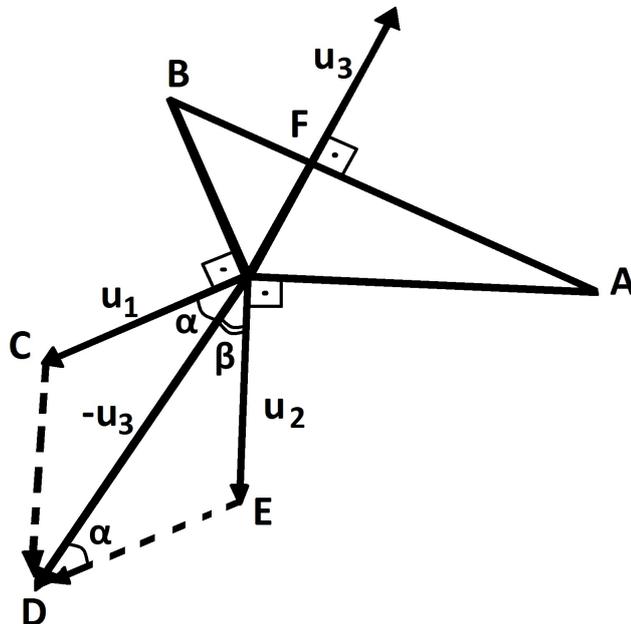


Figura 2.2: Corte da figura 2.1

Como o ângulo $\frac{\Pi}{2} + \beta$ é externo ao triângulo AOF , conclui-se que $\widehat{OAB} = \beta$. O ângulo $\frac{\Pi}{2} + \alpha$ é externo ao triângulo OBF , obtem-se $\widehat{OBF} = \alpha$. Logo os triângulos AOB

e OCD são semelhantes, ou seja:

$$\Delta AOB \sim \Delta OCD$$

Portanto,

$$\frac{|u_1|}{OB} = \frac{|u_2|}{OA} = \frac{|u_3|}{AB} \quad (2.11)$$

Implicando que:

$$\frac{|u_1|}{OB \cdot 2\alpha} = \frac{|u_2|}{OA \cdot 2\alpha} = \frac{|u_3|}{AB \cdot 2\alpha} \quad (2.12)$$

então, se α_i denota a área da superfície S_1 , teremos:

$$\frac{|u_1|}{\alpha_1} = \frac{|u_2|}{\alpha_2} = \frac{|u_3|}{\alpha_3} \quad (2.13)$$

Isolando α_i , $i = 1, \dots, 5$ em função de α_3 obtem-se:

$$\alpha_1 = \frac{|u_1|}{|u_3|}\alpha_3 \quad e \quad \alpha_2 = \frac{|u_2|}{|u_3|}\alpha_3 \quad e \quad \alpha_4 = \alpha_5 = \frac{\alpha_3}{2\delta} \frac{|\epsilon u_3|}{2} = \frac{\epsilon |u_3|}{4\delta} \alpha_3 \quad (2.14)$$

O volume da região R é dado por:

$$Vol(R) = \frac{\epsilon |u_3|}{4\delta} \alpha_3 2\delta = \frac{\epsilon |u_3|}{2} \alpha_3 \quad (2.15)$$

Por outro lado,:

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} s(n, x) dS_x &= \sum_{i=1}^5 \int_{S_i} s(n, x) dS_x \\ &= \sum_{i=1}^5 \left(\int_{S_i} s_1(n, x) dS_x, \int_{S_i} s_2(n, x) dS_x, \int_{S_i} s_3(n, x) dS_x \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde s_j , $j = 1, 2, 3$ é a componente j de s .

Como s é contínua em x por hipótese, temos que cada uma de suas componentes s_j também são. Aplicando o Teorema do Valor Médio para integrais a cada uma de suas componentes, no vetor $\frac{u_i}{|u_i|}$ relativo à face S_i e considerando $x_i^j \in S_i$ o ponto onde o Teorema é válido, obtemos:

$$\left| \sum_{i=1}^5 \left(s_1\left(\frac{u_i}{|u_i|}, x_i^1\right)\alpha_1, s_2\left(\frac{u_i}{|u_i|}, x_i^2\right)\alpha_2, s_3\left(\frac{u_i}{|u_i|}, x_i^3\right)\alpha_3 \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^5 s\left(\frac{u_i}{|u_i|}, x_i^*\right)\alpha_i \right| \leq k \frac{\epsilon |u_3|}{2} \alpha_3 \quad (2.17)$$

onde $x_i^* = (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$.

Substituindo em (2.17) os valores de α_i calculados em (2.14) obtemos:

$$\left| \sum_{i=1}^2 s\left(\frac{u_i}{|u_i|}, x_i^*\right) \frac{|u_i|}{|u_3|} \alpha_3 + s\left(\frac{u_3}{|u_3|}, x_3^*\right)\alpha_3 + s(m, x_4^*) \frac{\epsilon |u_3|}{4\delta} \alpha_3 + s(-m, x_5^*) \frac{\epsilon |u_3|}{4\delta} \alpha_3 \right| \leq k \frac{\epsilon |u_3|}{2} \alpha_3 \quad (2.18)$$

Abrindo o somatório e multiplicando ambos os membros da desigualdade anterior por $\frac{4\delta}{|u_3|\alpha_3}$ obtemos:

$$\left| s\left(\frac{u_1}{|u_1|}, x_1^*\right) \frac{4\delta |u_1|}{|u_3|^2} + s\left(\frac{u_2}{|u_2|}, x_2^*\right) \frac{4\delta |u_2|}{|u_3|^2} + s\left(\frac{u_3}{|u_3|}, x_3^*\right) \frac{4\delta |u_3|}{|u_3|^2} + s(m, x_4^*)\epsilon + s(-m, x_5^*)\epsilon \right| \leq 2k\delta\epsilon \quad (2.19)$$

$$\left| \frac{4\delta}{|u_3|^2} \left(|u_1|s\left(\frac{u_1}{|u_1|}, x_1^*\right) + |u_2|s\left(\frac{u_2}{|u_2|}, x_2^*\right) + |u_3|s\left(\frac{u_3}{|u_3|}, x_3^*\right) \right) + \epsilon [s(m, x_4^*) + s(-m, x_5^*)] \right| \leq 2k\delta\epsilon \quad (2.20)$$

Conforme foi definida a função s temos:

$$\left| \frac{4\delta}{|u_3|^2} [s(u_1, x_1^*) + s(u_2, x_2^*) + s(u_3, x_3^*)] + \epsilon [s(m, x_4^*) + s(-m, x_5^*)] \right| \leq 2k\delta\epsilon \quad (2.21)$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$ na equação acima, obtemos:

$$|\epsilon[s(m, x_4^*) + s(-m, x_5^*)]| = 0 \quad (2.22)$$

Como $\epsilon > 0$, implica:

$$s(m, x_4^*) = -s(-m, x_5^*) \quad (2.23)$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, temos $x_4^* \rightarrow x_0$ e $x_5^* \rightarrow x_0$ portanto:

$$s(m, x_0) = -s(-m, x_0) \quad \forall m \in \mathbb{R}^3 \quad (2.24)$$

Em (2.21) fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ depois $\delta \rightarrow 0$ obtemos:

$$s(u_1, x_1^*) + s(u_2, x_2^*) + s(u_3, x_3^*) = 0 \quad (2.25)$$

ou seja, isolando obtemos:

$$s(-(u_1 + u_2), x_3^*) = -s(u_1, x_1^*) - s(u_2, x_2^*) \quad (2.26)$$

Agora, fazendo $\delta \rightarrow 0$ na equação acima, obtemos:

$$s(-(u_1 + u_2), x_0) = -s(u_1, x_0) - s(u_2, x_0) \quad (2.27)$$

De (2.24) temos:

$$s((u_1 + u_2), x_0) = s(u_1, x_0) + s(u_2, x_0) \quad (2.28)$$

logo, s é aditiva para vetores $L.I.$

Mostraremos que dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $s(\alpha u, x) = \alpha s(u, x)$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$. Consideremos 3 casos para $\alpha \in \mathbb{R}$ e aplicaremos a definição da função s .

$$\begin{aligned}
\alpha = 0 &\Rightarrow s(0, \alpha, x) = s(0, x) = 0 = 0 \cdot s(u, x) \\
\alpha > 0 &\Rightarrow s(\alpha u, x) = |\alpha u| s\left(\frac{\alpha u}{|\alpha u|}, x\right) = \alpha |u| = s\left(\frac{u}{|u|}, x\right) = \alpha s(u, x) \\
\alpha < 0 &\Rightarrow s(\alpha u, x) = |\alpha u| s\left(\frac{\alpha u}{|\alpha u|}, x\right) = \alpha |u| = s\left(-\frac{u}{|u|}, x\right) = \\
&= -|\alpha| |u| s\left(\frac{u}{|u|}, x\right) = -|\alpha| s(u, x) = \alpha s(u, x)
\end{aligned}$$

Agora, mostraremos que s é aditiva para vetores não necessariamente L.I. Suponhamos u_1 e u_2 vetores L.D. Assim $u_2 = ku_1$ com $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
s(u_1 + u_2, x) &= s(u_1 + ku_1, x) = s((1+k)u_1, x) = (1+k)s(u_1, x) = \\
&= s(u_1, x) + ks(u_1, x) = s(u_1, x) + s(ku_1, x) = \\
&= s(u_1, x) + s(u_2, x)
\end{aligned}$$

Mostraremos que existe uma função matricial $S(x, t)$. Se $B = e_1, e_2, e_3$ é base canônica do \mathbb{R}^3 então existe uma matriz $S(x, t)$ que representa a transformação linear s , logo:

$$s(x, t, \mathbf{n}) = S(x, t)\mathbf{n} \quad (2.29)$$

concluindo a demonstração do teorema.

2.5 Conservação de Massa e Fluido Incompressível

Nesta seção teremos como resultado principal a equação da continuidade para fluidos incompressíveis. Para encontrá-la admite-se o princípio da conservação de massa, que é.

“A massa de um fluido varia no interior de uma região Ω , em relação ao tempo, igualmente ao fluxo do fluido através da fronteira $\partial\Omega$ de Ω ”.

Isto será expresso matematicamente através de uma lei empírica da física:

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (2.30)$$

onde ρ é a densidade, M a massa e V é o volume.

Com isso, define-se a massa de uma porção de fluido, numa região Ω e num instante de tempo t por:

$$M(t) = \int_{\Omega} \rho(x, t) dx \quad (2.31)$$

Neste caso a massa é considerada constante, e a hipótese de que ela se conserva se traduz na seguinte equação:

$$\int_{\Omega_0} \rho(x, 0) dx = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx \quad (2.32)$$

Assim a taxa de variação de massa em relação ao tempo é:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx = 0 \quad (2.33)$$

pois a massa é constante.

Por outro lado, supondo que a densidade ρ é uma função de classe C^∞ , aplicaremos o teorema do transporte na equação anterior, obtendo:

$$\int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_0} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{div} v \right) (x, t) dx = 0 \quad (2.34)$$

A continuidade da função densidade pode ser justificada fisicamente, por que ela nos informa sobre a compacidade da substância de que é feito um corpo. Além disso, se Ω é um aberto ocupado pelo fluido no instante t , então existe um Ω_0 aberto, e por um teorema da análise no \mathbb{R}^n a imagem inversa é contínua, ou seja, $\phi(\Omega_0) = \Omega$ e ϕ_t é contínua. Como a integral (2.34) é nula, a função integrando é identicamente nula, disto segue a equação abaixo, denominada *equação da conservação da massa*.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{div} v = 0 \quad (2.35)$$

Utilizando a definição de derivada material e também a identidade vetorial:

$$\mathbf{div}(\rho v) = \nabla \rho \cdot v + \rho \mathbf{div} v \quad (2.36)$$

Com isso, podemos escrever (2.36) como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot v + \rho \mathbf{div} v = 0 \quad (2.37)$$

Agora, utilizando (2.36) e (2.37) obtém-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho v) = 0 \quad (2.38)$$

Assim, obtemos que (2.38) e (2.35) são equivalentes, ou seja:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{div} v = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho v) \quad (2.39)$$

sendo denominada como *equação da continuidade*. Além disso, para que o volume de qualquer porção de fluido seja preservado pelo fluxo, deve ser satisfeito que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx = 0 \quad (2.40)$$

Agora aplicando o teorema do transporte na equação anterior, obtêm-se que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx = \int_{\Omega_0} \mathbf{div} v dx = 0 \quad (2.41)$$

Como a integral é nula em todos os pontos de Ω_0 , concluímos que:

$$\mathbf{div} v = 0 \quad (2.42)$$

A recíproca é verdadeira, ou seja, se vale (2.22) e (2.20), o fluido é *incompressível*.

2.6 Conservação do Momento

A Física Clássica diz de forma empírica que a quantidade de momento linear é tal que: $P = mv$, onde P é a quantidade de momento, m é a massa do corpo e v é a velocidade. Além disso, a densidade é uma função de classe C^∞ e a velocidade do fluido é uma função contínua, podemos chegar que tal relação pode ser expressa por:

$$P = \int_{\Omega_t} \rho(x, t)v(x, t)dx \quad (2.43)$$

Forças agindo em Ω_t :

i) Forças externas: Seja $\rho f(x, t)$ a densidade de volume de forças externas atuando na região Ω_t .

Neste caso $F(t) = \int_{\Omega_t} \rho f(x, t)dx$ forne a força atual em Ω_t no instante de tempo t .

ii) Forças internas: Desprezando o atrito e outros tipos de forças do movimento das partículas, denotaremos $\tau(x, t, n)$ o campo de tensões das forças de contato que atuam por unidade de área em uma superfície perpendicular ao vetor normal unitário n .

Então a força do restante do fluido sobre o fluido que ocupa a região Ω_t , delimitada pela superfície $\partial\Omega$, cujo vetor normal unitário exterior é n , é dada por: $F(t) = \int_{\partial\Omega_t} \tau(x, t, \mathbf{n})dS_x$.

Pelo Teorema de Cauchy, se o fluido satisfaz a Segunda Lei de Newton, o campo de tensões τ depende linearmente da normal unitária exterior da superfície $\partial\Omega$, ou seja, existe uma função matricial $S(x, t)$ tal que:

$$\tau(x, t, \mathbf{n}) = S(x, t)\mathbf{n}. \quad (2.44)$$

Observação: Como $\tau = Sn$, devemos ter $\partial\Omega_t$ superfície orientável, caso contrário o teorema de Cauchy não faria sentido.

Com isso, a Segunda Lei de Newton pode ser representada como:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho v dx = \int_{\Omega_t} \rho f dx + \int_{\partial\Omega_t} S \mathbf{n} dS_x \quad (2.45)$$

Aplicando o Teorema do Transporte no lado esquerdo da igualdade e utilizando o Teorema de Gauss na integral de superfície que aparece no segundo membro, obtemos:

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{D}{Dt}(\rho v) + (\rho v) \mathbf{div} v \right) dx = \int_{\Omega_t} \rho f dx + \int_{\Omega_t} \mathbf{Div} S dx \quad (2.46)$$

Pela continuidade do integrando:

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{D}{Dt}(\rho v) + (\rho v) \mathbf{div} v - \rho v - \mathbf{Div}(S) \right) = 0 \quad (2.47)$$

Disto, temos que:

$$\frac{D}{Dt}(\rho v) + (\rho v) \mathbf{div} v - \rho v - \mathbf{Div}(S) = 0 \quad (2.48)$$

Então, pela equação da conservação de massa (2.35) e utilizando que

$$\frac{D(\rho v)}{Dt} = \frac{D(\rho)}{Dt} v + \rho \frac{D(v)}{Dt}$$

encontramos:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f + \mathbf{Div} S \quad (2.49)$$

que é a *Equação da Conservação do Momento*.

2.7 Equação de Euler

Nesta seção serão feitas algumas hipóteses adicionais, com isso será deduzida a Equação de Euler a partir de fluidos não-viscosos. Suponhamos que as forças internas atuam apenas

perpendicularmente à superfície $\partial\Omega_t$. Desprezando o atrito e a viscosidade do fluido, tem-se que o vetor $\mathbf{S}\mathbf{n}$ é paralelo ao normal unitário \mathbf{n} . Para representar esta situação física e geometricamente dizemos que existe uma função contínua $p(x, t)$ de modo que:

$$S(x, t) = -p(x, t)I \quad (2.50)$$

onde I é a matriz identidade e p é a pressão exercida em $\partial\Omega_t$, na posição x , no instante de tempo t . O sinal negativo na equação (2.50) é o resultado matemático que traduz a situação física sobre a superfície de contato.

Além disso, suponha que o fluido é incompressível, então, usando as equações da conservação de massa e da conservação do momento, podemos escrever a Equação de Euler, de um fluido cujo $\mathbf{div}v = 0$, para isso calcula-se o $\mathbf{Div}S$ obtendo:

$$\mathbf{Div}S = (\mathbf{div}l_1, \mathbf{div}l_2, \mathbf{div}l_3)^T \quad (2.51)$$

$$\mathbf{Div}S = \left(-\frac{\partial p}{\partial x_1}, -\frac{\partial p}{\partial x_2}, -\frac{\partial p}{\partial x_3} \right) \quad (2.52)$$

omitimos, por simplicidade, os argumentos (x, t) . Se substituirmos este resultado na equação (2.49), obtemos:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f - \nabla p \quad (2.53)$$

Agora, usando a definição de derivada material, obtemos:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v \nabla)v = \rho f - \nabla p \quad (2.54)$$

$$\mathbf{div}v = 0$$

que é conhecida como Equação de Euler para fluidos não-viscosos e incompressíveis.

A equação anterior está associada a segunda lei de Newton, ou seja, o lado esquerdo da igualdade representa o produto da massa pela aceleração e o lado direito, a resultante das forças que atuam sobre o fluido, dividida em forças internas e externas. Na equação

surge o termo não-linear $\rho(v\nabla)v$, tal termo é devido a descrição Euleriana e representa a variação da velocidade no ponto x , que é ocupado por partículas possivelmente diferentes a cada instante.

2.8 Equação de Navier-Stokes

Para trabalharmos com fluidos newtonianos, devemos determinar um formato para matriz S de modo que inclua a viscosidade nos cálculos. Suponhamos inicialmente que a matriz em questão ficará em determinada fisicamente de acordo com a equação:

$$S = -pI + \mu'(\mathbf{div}v)I + \mu(G + G^T) \quad (2.55)$$

onde μ e μ' são constantes associadas a viscosidade do fluido e dependem da temperatura, a matriz G é tal que cada uma de suas linhas é o gradiente em cada uma das direções v_1 , v_2 , v_3 respectivamente, ou seja:

$$G = \begin{bmatrix} \nabla v_1 \\ \nabla v_2 \\ \nabla v_3 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Agora, vamos calcular o $\mathbf{Div}S$ e substituir na equação (2.55), como estamos trabalhando com fluidos incompressíveis temos $\mathbf{div}v = 0$, logo:

$$\mathbf{Div}S = -\nabla p + \mu\mathbf{Div}(G + G^t) \quad (2.57)$$

Mas, $\mathbf{Div}(G + G^t) = \Delta v$, então:

$$\mathbf{Div}S = -\nabla p + \mu\Delta v \quad (2.58)$$

Substituindo (2.58), na equação da conservação do momento (2.49), encontraremos o sistema de equações:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f - \nabla p + \mu\Delta v \quad (2.59)$$

$$\mathbf{div} = 0$$

conhecido como *Equação de Navier-Stokes para fluidos viscosos e incompressíveis*.

Capítulo 3

O Teorema de Cauchy na Mecânica dos Fluidos

3.1 Introdução

Este capítulo contém os resultados mais importantes deste trabalho, todos baseados no Clássico Teorema de Cauchy (teorema 7). Apresentamos algumas propriedades não triviais da densidade, onde enfraquecemos as hipóteses do teorema 7. Também apresenta-se uma nova versão do Teorema de Cauchy e o teorema 13, onde verificamos que um Fluxo de Cauchy obedecer a uma lei de balanço, é condição necessária e suficiente para que esse Fluxo seja Fracamente Balanceado. Conclui-se este capítulo com alguns exemplos, o exemplo 2 mostra que se no teorema 12 tirarmos a hipótese da continuidade, não teremos a linearidade da f . Após definirmos função geradora e função fracamente linear, nos exemplos 3 e 4 citamos uma função geradora que não é linear e uma função geradora para um Fluxo de Cauchy Equilibrado que não é Fracamente Linear, respectivamente.

3.2 Propriedades da Densidade

Teorema 8 *Sejam F um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado, $S \subset R$ um elemento regular de superfície, então $F(S) = -F(-S)$ e a função $x \mapsto F(S + x)$ é contínua.*

Demonstração: Notemos que $F(S + x)$ será calculada nos pontos x , onde $S + x$ será um elemento de superfície, tal que $S + x \subset R$. Como S é regular, então, para todo $x \in A$ que pertence ao domínio da função $x \mapsto F(S + x)$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset A$,

pois pequenos deslocamentos de $S + x$ ainda resultarão em um elemento de superfície contido em R . Sendo $S \subset R$ um elemento de superfície poligonal, ou seja, $S = (P, \mathbf{n})$, dado $x \in A$, $\epsilon > 0$, definimos os sólidos B_1 , B_2 , B por:

$$B_1 = \bigcup_{a \in [0, \epsilon]} (P + a\mathbf{n})$$

$$B_2 = \bigcup_{a \in [0, \epsilon]} (P - a\mathbf{n})$$

$$B = B_1 \cup B_2$$

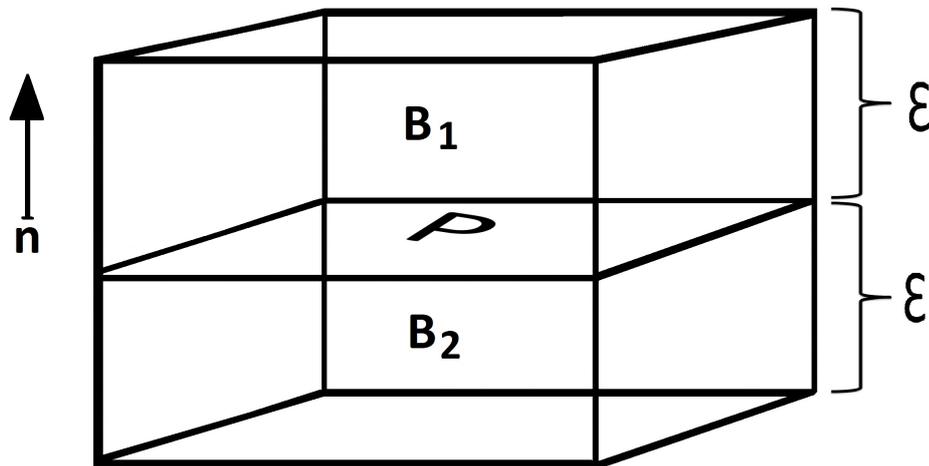


Figura 3.1: Cubo

Notemos que $-S$ e S são faces de B_1 e B_2 , respectivamente, de acordo como aponta o vetor normal \mathbf{n} . As únicas faces de B_1 e B_2 que não coincidem com nenhuma face de B são $-S$ e S , de onde obtemos a seguinte igualdade:

$$F(\partial B_1) + F(\partial B_2) - F(\partial B) = F(S) + F(-S) \quad (3.1)$$

Agora utilizaremos a desigualdade triangular, a hipótese que F é um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado e a construção do sólido onde: $V(B_1) = A(P)\epsilon$; $V(B_2) = A(P)\epsilon$ e $V(B) = A(P)2\epsilon$ em (3.1), obtendo:

$$\begin{aligned}
|F(S) + F(-S)| &= |F(\partial B_1) + F(\partial B_2) - F(\partial B)| \\
&\leq |F(\partial B_1)| + |F(\partial B_2)| + |F(\partial B)| \\
&\leq cV(B_1) + cV(B_2) + cV(B) \\
&= c[A(P)\epsilon + A(P)\epsilon + A(P)2\epsilon] \\
&\leq c[4\epsilon A(P)]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora em (3.2), fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
|F(S) + F(-S)| &\leq 0 \\
|F(S) + F(-S)| &= 0 \\
F(S) + F(-S) &= 0 \\
F(S) &= -F(-S)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Agora, vamos mostrar que a função $x \mapsto F(S+x)$ é contínua. Antes disso, mostraremos algumas afirmações que serão úteis para prova desse resultado.

Afirmção 1: Para $x \in A$ e $y \in B(x, \delta) \subset A$, tal que $(y-x) \cdot \mathbf{n}_s = 0$ os elementos de superfície $S+x$ e $S+y$ são compatíveis.

Consideremos, $x \in A$ e $y \in B(x, \delta) \subset A$, tal que $(y-x) \cdot \mathbf{n}_s = 0$, seja S um *CPO*, mostraremos que $S+x$ e $S+y$ estão no mesmo plano, já que eles possuem mesmo vetor normal, então serão compatíveis. Ou seja, vamos mostrar que dados $q_1 \in S+x$ e $q_2 \in S+y$ vale $(q_1 - q_2) \cdot \mathbf{n}_s = 0$. Podemos escrever, $q_1 = s_1 + x$ e $q_2 = s_2 + y$ com s_1, s_2 pertencentes a S . Então:

$$(q_1 - q_2) \cdot \mathbf{n}_s = ((s_2 - s_1) + (y - x)) \cdot \mathbf{n}_s = (s_2 - s_1) \cdot \mathbf{n}_s + (y - x) \cdot \mathbf{n}_s = 0 + 0 = 0.$$

Afirmção 2: Sejam S_i um elemento de superfície, para $i = 1, 2, \dots, n$. Então $\sum_{i=1}^n F(S_i) \leq cp(S)|x-y|$.
Pela definição (11), temos $|F(S_i)| \leq cA(S_i)$. E usando a desigualdade triangular obtemos:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^n F(S_i) \right| &\leq \sum_{i=1}^n |F(S_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^n cA(S_i) \\
&\leq c \sum_{i=1}^n \text{BASE}(S_i) \text{ALTURA}(S_i) \\
&\leq c|x - y|p(S)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

concluindo a afirmação 2.

Agora, utilizando a afirmação 1 e a definição (14), obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
|F(S + x) - F(S + y)| &\leq |F(S + x)| + |F(S + y)| \\
&\leq cA(S + x) + cA(S + y) \\
&\leq c[A(S + x) + A(S + y)]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Esta relação coloca a norma do fluxo em função das áreas, então podemos majorar seu valor por $A(\widehat{S})$ como sendo a área formada entre os elementos poligonais de superfície $S + x$ e $S + y$ que também será um elemento poligonal de superfície. De onde segue que:

$$\begin{aligned}
A(S + x) + A(S + y) &\leq A(\widehat{S}) \\
&\leq |x - y|p(S)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Observemos que, sempre é possível fazer a majoração de $S + x$ e $S + y$ independentemente da forma poligonal. Agora, substituindo (3.6) em (3.5), mostraremos que vale o seguinte resultado:

$$|F(S + x) - F(S + y)| \leq c|x - y|p(S) \tag{3.7}$$

Agora, tomando $y \in B(x, \delta) \subset A$, tal que $(y - x) \cdot \mathbf{n}_s > 0$ e consideremos o sólido B de acordo com a figura 3.2, cujas faces superior e inferior são $-S + x$, $S + y$ respectivamente e cujas faces laterais são S_1, S_2, \dots, S_n com $n \in \mathbb{N}$. Assim, obtemos:

$$F(\partial B) = F(S + y) + F(-S + x) + \sum_{i=1}^n F(S_i) \tag{3.8}$$

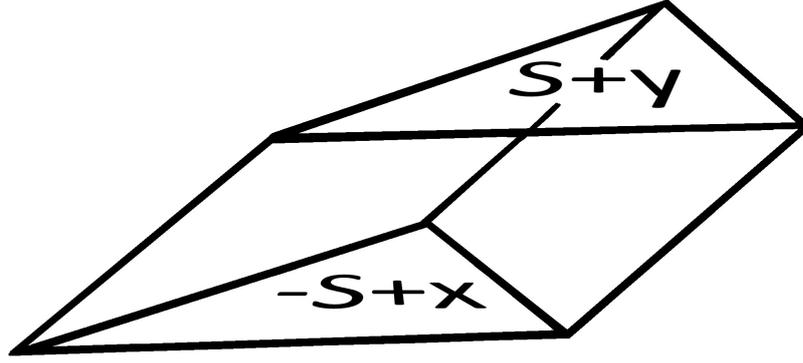


Figura 3.2: Cunha

Observamos que para o caso $(y - x) \cdot \mathbf{n}_s < 0$ este resultado também é válido. Utilizaremos a afirmação 2, a definição 16, e a desigualdade triangular, obtendo:

$$\begin{aligned}
 |F(\partial B)| &\leq cV(B) \\
 |F(S + y) + F(-S + x) + \sum_{i=1}^n F(S_i)| &\leq cA(S)|x - y| \\
 |F(S + y) + F(-S + x)| - \left| \sum_{i=1}^n F(S_i) \right| &\leq cA(S)|x - y| \\
 |F(S + y) + F(-S + x)| &\leq cA(S)|x - y| + \left| \sum_{i=1}^n F(S_i) \right| \\
 |F(S + y) + F(-S + x)| &\leq cA(S)|x - y| + c|x - y|p(S) \\
 |F(S + y) + F(-S + x)| &\leq c|x - y|[A(S) + p(S)] \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Sabemos, da definição de elemento regular de superfície que $-S + x = -(S + x)$ e pela primeira parte da prova deste teorema, temos que vale a igualdade $F(S + x) = -F(-S + x)$. Então, a equação (3.9) fica determinada por:

$$|F(S + y) - F(S + x)| \leq c|x - y|[A(S) + p(S)] \tag{3.10}$$

Concluindo assim, por (3.10) que (3.8) é válida para todo $y \in B(x, \delta) \subset A$, mostrando que essas desigualdades são sempre satisfeitas quando S é um elemento poligonal de superfície.

Para finalizar, usaremos a hipótese de que S é um elemento regular de superfície, então pela definição 12, existe uma sequência (S_k) de elementos poligonais de superfície, tais que, S_k tende regularmente para S , e $p(S_k) < k_0$. Assim, pelo lema 2, tem-se que $F(S_k) \rightarrow F(S)$ e ainda deste teorema, pela primeira parte, S satisfaz $F(S) = -F(-S)$.

Além disso, seja $x \in D(S)$, onde $D(S) = \{x \in \mathbb{R}^3 : S + x \subset R\}$ tome $y \in B(x, \delta) \subset D(S)$, como S e S_k são compatíveis, notemos que $S_k \subset S \Rightarrow D(S) \subset D(S_k)$ e $B(x, \delta) \subset D(S_k)$. De fato, seja $z \in D(S)$, então $S + z$ é um elemento regular de superfície de R , como $S_k \subset S$, então $S_k + z \subset R$, logo $z \in D(S_k)$, concluindo que se, $B(x, \delta) \subset D(S)$, então $B(x, \delta) \subset D(S_k)$, o que implica, da equação (3.10) que:

$$\begin{aligned} |F(S_k + y) - F(S_k + x)| &\leq c|x - y|[A(S_k) + p(S_k)] \\ &\leq c|x - y|[A(S) + k_0] \\ &\leq \alpha|x - y| \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Como (S_k) tende regularmente para S , então tomando $z \in B(x, \delta)$ implica a convergência regular de $(S_k + z)$ para $S + z$. Então, pelo lema 2, $F(S_k + z) \rightarrow F(S + z)$, logo, para todo $x \in A$, temos:

$$|F(S + y) - F(S + x)| \leq \alpha|x - y| \tag{3.12}$$

demonstrando, portanto que a função $x \rightarrow F(S + x)$ é contínua.

Teorema 9 (Propriedades da Densidade Média) *Seja F um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado, então a função:*

$$\begin{aligned} f_r : R_r \times S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, r, \mathbf{n}) &\longmapsto f_r(x, \mathbf{n}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

é contínua, separadamente, em cada uma das suas variáveis independentes. Além disso, para todo $x \in R_r$ e para qualquer par de vetores unitários \mathbf{m}, \mathbf{n} tem-se:

$$|f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{n})| \leq c\theta(2 + r) \tag{3.14}$$

onde $r \in \mathbb{R}$ e θ é o ângulo entre os vetores \mathbf{m}, \mathbf{n} .

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que f_r é uma função contínua da posição, isto é, para todo, $x \in R_r$ a função $x \mapsto f_r(x, \mathbf{n})$ é contínua. Para isso, consideremos o disco orientado $D_r(x, \mathbf{n})$, com raio r , centrado em x e normal unitária \mathbf{n} , se este disco é um elemento regular de superfície, pelo teorema 9, para todo $y \in R_r$, $D_r(x, \mathbf{n}) + y \subset R_r$ é um elemento de superfície e a função $x \rightarrow F(D_r(x, \mathbf{n}) + y)$ é contínua, agora utilizando a definição (17), nota-se que f_r é separadamente uma função contínua de posição, pois é o quociente de funções contínuas de posição, já que a área do disco é constante, então f_r é contínua de posição.

Agora, mostraremos que f_r é contínua em r , escreveremos D_r para denotar $D_r(x, \mathbf{n})$, considerando uma sequência qualquer de números reais (δ_k) , de modo que se $\delta_k \rightarrow 0$, então $D_{r+\delta_k} \rightarrow D_r$. Então utilizando o lema (2) segue que $F(D_{r+\delta_k}) \rightarrow F(D_r)$, quando $\delta_k \rightarrow 0$, ou seja, obtemos a continuidade da função $r \rightarrow F(D_r)$ e, novamente pela definição (14), concluimos que a função $r \rightarrow f_r(x, \mathbf{n})$ é contínua.

Finalmente mostraremos a continuidade da função $\mathbf{n} \mapsto f_r(x, \mathbf{n})$, para isso consideremos os discos orientados com centro em $x \in R_r$ e raios r que são elementos regulares de superfície denotados $D(\mathbf{m})$ e $D(\mathbf{n})$ por simplicidade. Além disso, esses elementos serão escolhidos de forma que os vetores unitários, \mathbf{m} e \mathbf{n} formem um ângulo $\theta < \frac{\pi}{2}$, de acordo com a figura 3.3.

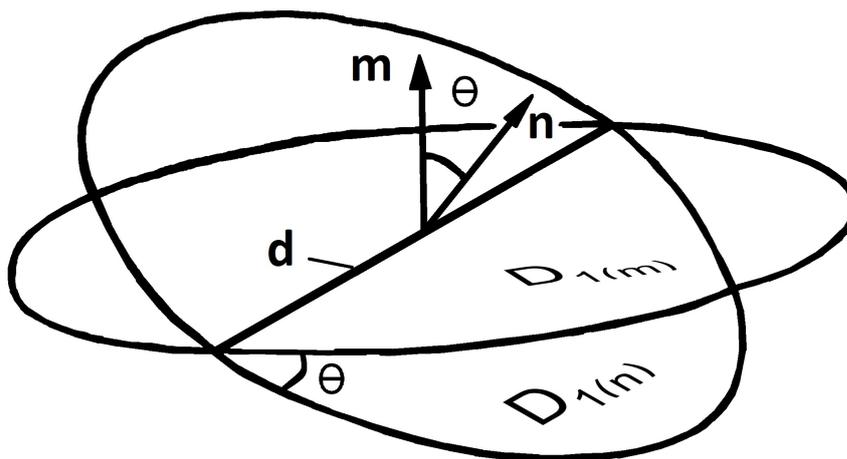


Figura 3.3: Discos Orientados

Com esta construção temos $D(\mathbf{m}) \cap D(\mathbf{n}) \neq \phi$, denotemos esta intersecção por $d =$ diâmetro dos discos e, denotemos os subelementos $D_1(\mathbf{m})$, $D_2(\mathbf{m})$, $D_1(\mathbf{n})$, $D_2(\mathbf{n})$ de $D(\mathbf{m})$

e $D(\mathbf{n})$ respectivamente delimitados por d . Agora será dividida a circunferência de cada um dos discos em $2k$ arcos de mesmo comprimento, assim d será uma diagonal comum dos dois polígonos inscritos em $D(\mathbf{m})$ e $D(\mathbf{n})$ de acordo com a figura 3.4.

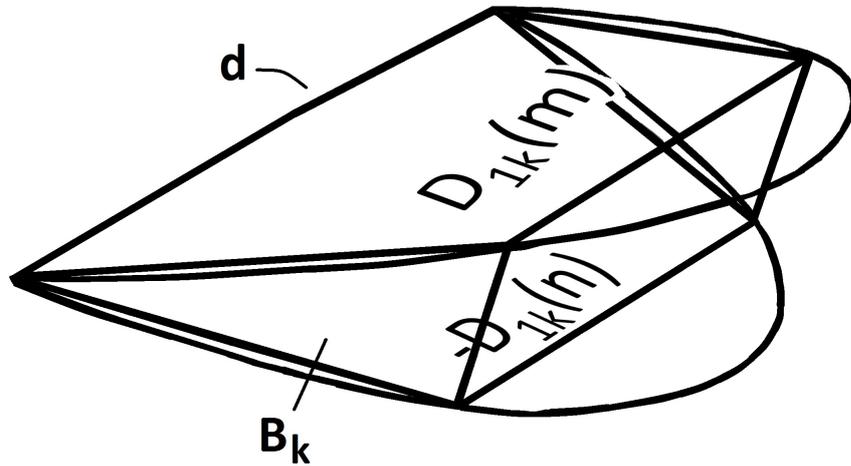


Figura 3.4: Cunha B_k

Com essa divisão teremos as poligonais P_1 em $D(\mathbf{m})$ e P_2 em $D(\mathbf{n})$. Notemos que em cada uma dessas poligonais obtemos os subelementos $D_{1k}(\mathbf{m})$, $D_{2k}(\mathbf{m})$ em P_1 e $D_{1k}(\mathbf{n})$, $D_{2k}(\mathbf{n})$ em P_2 . Denotaremos $p = m, n$ e $D_{ik}(p)$ com $i = 1, 2$ e $k \in \mathbb{N}$, como esses subelementos são delimitados por d , temos $P_i \cap D_i(p) = D_{ik}(p)$. Aplicando o lema (2) obtemos:

$$F(D_{ik}(p)) \rightarrow F(D_i(p)) \quad (3.15)$$

para $i = 1, 2$ e $k \in \mathbb{N}$, quando $k \rightarrow \infty$.

Agora consideremos o sólido B_k acima em formato de cunha, fixemos $n \in \mathbb{N}$, neste caso os elementos de superfície $D_{ik}(m)$, $D_{ik}(n)$ e S_1, S_2, \dots, S_n são faces de B_k . Analisando o volume da cunha formada por $D_1(m)$ e $D_1(n)$, pelo $V(\text{esfera}) = 4\pi r^3$ como $\theta < \frac{\pi}{2}$, segue que $V(\text{cunha}) = \frac{2}{3}r^3\theta$, então:

$$V(B_k) \leq \frac{2}{3}r^3\theta \leq \frac{\pi}{2}r^3\theta \quad (3.16)$$

Como as faces laterais deste sólido são $k + 1$ poligonais (2 triângulos e $k - 1$ paralelogramos) dados por S_1, S_2, \dots, S_n . Utilizando regra de três notamos que a área do fuso

formada por $D_1(m)$ e $D_1(n)$ é $2r^2\theta$, ou seja:

$$\sum_{i=1}^k A(S_i) = \frac{\pi}{2}r^2 + \frac{\pi}{2}r^2 + 2r^2\theta = r^2(\pi + 2\theta) \leq \pi r^2\theta \quad (3.17)$$

Temos que:

$$F(\partial B) = F(D_{1k}(m)) + F(-D_{1k}(n)) + \sum_{i=1}^k F(S_i) \quad (3.18)$$

como $|F(\partial B_k)| \leq cV(B_k)$, utilizando, pelo teorema 8 que $F(-D_{1k}(n)) = -F(D_{1k}(n))$ e a desigualdade triangular, obtemos:

$$|F(D_{1k}(m)) - F(D_{1k}(n))| - \left| \sum_{i=1}^k F(S_i) \right| \leq cV(B_k) \quad (3.19)$$

Agora utilizando (3.16) e (3.17) obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} |F(D_{1k}(m)) - F(D_{1k}(n))| &\leq \frac{1}{2}\pi r^3\theta c + c\pi r^2\theta \\ &\leq \frac{1}{2}\pi r^2\theta c(2+r) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Aplicando (3.15) na desigualdade anterior, obtem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} |F(D_1(m)) - F(D_1(n))| &\leq \frac{1}{2}\pi r^3\theta c + c\pi r^2\theta \\ &\leq \frac{1}{2}\pi r^2\theta c(2+r) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Note que os elementos $D_{2k}(m)$ e $D_{2k}(n)$ satisfazem a mesma desigualdade, ou seja:

$$\begin{aligned} |F(D_2(m)) - F(D_2(n))| &\leq \frac{1}{2}\pi r^3\theta c + c\pi r^2\theta \\ &\leq \frac{1}{2}\pi r^2\theta c(2+r) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Agora escreveremos $D(m)$ e $D(n)$ como uma união disjunta de elementos de superfície, depois aplicaremos a propriedade (CII) da definição (15), obtendo:

$$\begin{aligned} D(m) &= (D_1(m) - D_2(m)) \cup (D_2(m) - D_1(m)) \cup d \\ F(D(m)) &= F(D_1(m) + D_2(m)) + F(D_2(m) - D_1(m)) + F(d) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
D(n) &= (D_1(n) - D_2(n)) \cup (D_2(n) - D_1(n)) \cup d \\
F(D(n)) &= F(D_1(n) - D_2(n)) + F(D_2(n) - D_1(n)) + F(d)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Subtraindo $F(D(m)) - F(D(n))$ tomando a norma e utilizando a desigualdade triangular, obtem-se:

$$\begin{aligned}
|F(D(m)) - F(D(n))| &\leq |F(D_1(m) - F(D_1(n))| + |F(D_2(m) - F(D_2(n))| \\
&\leq \pi r^2 \theta c(2 + r)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Como $A(D(m)) = A(D(n)) = \pi r^2$, dividiremos a equação anterior por este valor, chegando que:

$$\frac{|F(D(m)) - F(D(n))|}{\pi r^2} \leq \theta c(2 + r) \tag{3.26}$$

Utilizando a definição de Densidade Média, obtemos a prova da continuidade da função $n \mapsto f_r(x, n)$, para um ângulo θ agudo, pois:

$$\left| \frac{F(D(m))}{\pi r^2} - \frac{F(D(n))}{\pi r^2} \right| = |f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{n})| \leq \theta c(2 + r) \tag{3.27}$$

Agora consideremos o caso em que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Seja \mathbf{p} um vetor unitário, gerado pelos vetores \mathbf{m} , \mathbf{n} de forma que θ_1 é o ângulo entre \mathbf{m} , \mathbf{p} e θ_2 é o ângulo entre \mathbf{p} , \mathbf{n} , de forma que $\theta_1 = \theta_2$, notemos que para esses ângulos vale a desigualdade anterior, isto é:

$$\begin{aligned}
|f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{n})| &= |f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{p}) + f_r(x, \mathbf{p}) - f_r(x, \mathbf{n})| \\
&\leq |f_r(x, \mathbf{m}) - f_r(x, \mathbf{p})| + |f_r(x, \mathbf{p}) - f_r(x, \mathbf{n})| \\
&\leq 2c\theta(2 + r)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 10 (Propriedades da Densidade) *Seja F um Fluxo de Cauchy com densidade f , então para cada elemento de superfície S temos: $F(S) = \int_S f(x, \mathbf{n}_s) dA_x$. Além disso, se F é fracamente balanceado então $f(x, \mathbf{n}_s)$ existe quase sempre para $x \in R$.*

Demonstração: A prova da primeira parte decorre do teorema de Radon-Nikodym pois F é absolutamente contínua em relação a f , assim como o fato de que $f(x, \mathbf{n}_\pi)$ existe quase sempre para $x \in \Pi$ onde Π é uma secção transversal e $f(\cdot, \mathbf{n}_\pi) \in L^1(\Pi)$.

Agora se F é Fracamente Balanceado, pelo teorema anterior, temos a continuidade da função $r \mapsto f_r(x, n)$. Será verificado que todo ponto $x \in R$ é de densidade, ou seja, existe o limite da definição (19) e para todo vetor \mathbf{n} , o par (x, \mathbf{n}) é um par de densidade.

Considerando $n_0 \in S^2$, $r \in \mathbb{R}$, $r' \in \mathbb{Q}$, definidos da seguinte forma.

$$R(n_0) = \{x \in R; \lim_{r \rightarrow 0} f_r(x, n_0) = f(x, n_0)\}$$

$$R'(n_0) = \{x \in R; r' \in \mathbb{Q} \lim_{r' \rightarrow 0} f_{r'}(x, n_0) = f(x, n_0)\}$$

Defina $f(\cdot, \mathbf{n}_x) : R(n) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem-se $R(n_0) \subset R'(n_0)$. Como $r \mapsto f_r(x, \mathbf{n})$ é uma função contínua, então $R'(n) = R(n)$.

Seja $R > 0$ com $R_r \neq \emptyset$, (basta r ser pequeno o suficiente). Desde que $\forall q < r$ vale $R_r \subset R_q$ e como $x \mapsto f_\lambda(x, \mathbf{n})$ é contínua em R_λ então $f_q(\cdot, \mathbf{n})$ é contínua em $R_r \subset R_q$ tem-se: $R = \bigcup_{r>0} R_r$.

$$\text{Afirmação: } R = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_{\frac{1}{k}}$$

Como $\{R_{\frac{1}{k}} : k \in \mathbb{N}\} \subset \{R_r : r > 0\}$, então: $\bigcup_{k=1}^{\infty} R_{\frac{1}{k}} \subset \bigcup_{r>0} R_r = R$.

Por outro lado, dado $x \in R = \bigcup_{r>0} R_r$ então $x \in R_{r_0}$ para algum R_{r_0} . Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_0} < r_0$ implica que $R_{r_0} \subset R_{\frac{1}{k_0}}$. Então $x \in R_{\frac{1}{k_0}}$ portanto $x \in R_{\frac{1}{k}}$. Portanto $\bigcup_{r>0} R_r \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_{\frac{1}{k}}$. Assim:

$$R = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_{\frac{1}{k}} \quad (3.29)$$

Como $f(\cdot, \mathbf{n}_\pi) \in L^1(\Pi)$ para cada secção transversal, decorre do Teorema de Fubini que $V(R - R(n)) = 0$. Concluindo que $f(x, \mathbf{n}_s)$ existe quase sempre para $x \in R$.

Teorema 11 *Seja F um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) F tem densidade média uniforme;
- (ii) F tem densidade f em todos os pontos e é uma função contínua da posição.

Demonstração: Supondo que F tem densidade média uniforme, dados $x \in R$, $n \in S^2$, $f_r(x, n)$ é uma função de Cauchy em $r > 0$ então existe $\lim_{r \rightarrow 0} f_r(x, \mathbf{n}) = f(x, \mathbf{n})$.
Portando F tem densidade f em todo ponto $x \in R$ e $\forall n \in S^2$.

A continuidade de $x \mapsto f(x, n)$ decorre da desigualdade.

$$\begin{aligned}
|f(x, n) - f(x', n)| &\leq |f(x, n) - f_r(x, n) + f_r(x, n) - f_r(x', n) + f_r(x', n) - f(x', n)| \\
&\leq |f(x, n) - f_r(x, n)| + |f_r(x, n) - f_r(x', n)| + |f_r(x', n) - f(x', n)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Quando $r \rightarrow 0$, pelo limite visto anteriormente, e da continuidade da função $f_r(\cdot, \mathbf{n})$ de acordo com o teorema 9, verifica-se que f é uma função contínua da posição.

Reciprocamente, seja F um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado que tem densidade f e $x \mapsto f(x, \mathbf{n})$ é uma função contínua da posição, então, pela definição da densidade média, obtém-se:

$$|f(x, \mathbf{n}) - f_r(x, \mathbf{n})| = \left| f(x, \mathbf{n}) - \frac{F(D_r(x, \mathbf{n}))}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} \right| \quad (3.31)$$

Agora, utilizando o teorema das propriedades da densidade, conclui-se que, a equação anterior fica:

$$\left| \frac{\int_{D_r(x, \mathbf{n})} f(x, \mathbf{n}) dA_y}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} - \frac{\int_{D_r(x, \mathbf{n})} f(y, \mathbf{n}) dA_y}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} \right| = \left| \frac{\int_{D_r(x, \mathbf{n})} (f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})) dA_y}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} \right| \quad (3.32)$$

Agora utilizaremos a desigualdade triangular para integrais e a propriedade de supremo, ou seja, $|f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})| \leq \sup_{y \in D_r(x)} |f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})|$, encontramos:

$$\begin{aligned}
|f(x, \mathbf{n}) - f_r(x, \mathbf{n})| &\leq \frac{\int_{D_r(x, \mathbf{n})} \sup_{y \in D_r(x)} |f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})|}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} dA_y \\
&\leq \sup_{y \in D_r(x)} |f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})|
\end{aligned} \quad (3.33)$$

Agora, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}
|f_{r_1}(x, \mathbf{n}) - f_{r_2}(x, \mathbf{n})| &= |f_{r_1}(x, \mathbf{n}) - f(x, \mathbf{n}) + f(x, \mathbf{n}) - f_{r_2}(x, \mathbf{n})| \\
&\leq |f_{r_1}(x, \mathbf{n}) - f(x, \mathbf{n})| + |f(x, \mathbf{n}) - f_{r_2}(x, \mathbf{n})| \\
&\leq \sup_{y \in D_{r_1}(x, \mathbf{n})} |f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})| + \sup_{y \in D_{r_2}(x, \mathbf{n})} |f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})| \\
&\leq 2 \sup_{y \in D_r(x, \mathbf{n})} |f(x, \mathbf{n}) - f(y, \mathbf{n})| \\
&< \epsilon
\end{aligned} \tag{3.34}$$

onde $r = \max\{r_1, r_2\}$, desde que $|x - y| < r_1, r_2 < \delta$.

Desde que $f(\cdot, \mathbf{n})$ é uniformemente contínua em cada conjunto da forma R_l com $l > 0$ e dado um compacto $K \subset R$ existe $r > 0$ tal que $K \subset R_r$ então F tem densidade média uniforme.

3.3 Linearidade da Densidade

Definição 23 (Linearidade) *Seja F um Fluxo de Cauchy com densidade f . Dizemos que f é linear em x , se x é um ponto de densidade e a função*

$$f(x, \cdot) : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tem a forma $f(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n}$ para todo $n \in S^2$, onde $T(x) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear.

Exemplo 1: (Fluxo de Cauchy sem Densidade Linear e que não é Fracamente Balanceado)

Fixado $u \neq 0$, $u \in \mathbb{R}^3$, com elemento de superfície $S \subset R$ defina:

$$\begin{aligned}
F : S \subset R &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
S &\longrightarrow F(S)
\end{aligned}$$

onde $F(S) = A(S)(u \cdot n_s)n_s$.

Verifiquemos que F é um Fluxo de Cauchy.

(i) F é limitado por área.

$$|F(S)| = |A(S)(u \cdot n_s)n_s| \leq A(S)|u \cdot n_s||n_s| \leq A(S)|u||n_s| = |u|A(S).$$

agora basta tomar $K = |u|$.

(ii) Dados S_1 e S_2 elementos de superfície compatíveis em R .

$$\begin{aligned} F(S_1 \cup S_2) &= A(S_1 \cup S_2)(u \cdot n_{S_1 \cup S_2})n_{S_1 \cup S_2} = (A(S_1) + A(S_2))(u \cdot n_{S_1 \cup S_2})n_{S_1 \cup S_2} \\ &= A(S_1)(u \cdot n_{S_1 \cup S_2})n_{S_1 \cup S_2} + A(S_2)(u \cdot n_{S_1 \cup S_2})n_{S_1 \cup S_2} \\ &= F(S_1) + F(S_2) \end{aligned}$$

Tem-se $f(x, \mathbf{n}) = (u \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ para todo $x \in R$ e $\mathbf{n} \in S^2$, pois:

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_r(x, \mathbf{n}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(D_r(x, \mathbf{n}))}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A(D_r(x, \mathbf{n}))(u \cdot \mathbf{n})n}{A(D_r(x, \mathbf{n}))} = (u \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Como $f(x, \mathbf{n}) = (u \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ é uma constante ele não é linear, ou seja, não pode ser escrito como $f(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n}$.

Agora mostraremos que F não é Fracamente Balanceado.

Para isso, considere um cubo $B \subset R$ de lado $\epsilon > 0$ com um par de faces paralelas perpendiculares a u , desta forma o vetor normal a estas faces designadas por S_1 e S_2 será $\mathbf{n}_{S_1} = \frac{u}{|u|}$ e $\mathbf{n}_{S_2} = \frac{-u}{|u|}$ respectivamente. Observe que as demais faces, (S_3, S_4, S_5, S_6) tem vetor normal perpendicular a u , ou seja, tem produto interno $u \cdot \mathbf{n}_{S_i} = 0$, para $i = 3, 4, 5, 6$.

Conforme exposto anteriormente temos:

$$\begin{aligned}
\frac{F(\partial B)}{V(B)} &= \frac{\sum_{i=1}^6 F(S_i)}{\epsilon^3} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^6 A(S_i)(u \cdot \mathbf{n}_{S_i})\mathbf{n}_{S_i}}{\epsilon^3} \\
&= \frac{1}{\epsilon} \left[\left(u \cdot \frac{u}{|u|} \right) \frac{u}{|u|} + \left(u \cdot \left(-\frac{u}{|u|} \right) \right) \left(-\frac{u}{|u|} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\epsilon} (u + u) \\
&= \frac{2u}{\epsilon}
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos que:

$$\frac{|F(\partial B)|}{V(B)} = \frac{2|u|}{\epsilon} \tag{3.35}$$

Agora, dado $k > 0$ seja $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{2|u|}{k}$, neste caso o cubo B satisfaz:

$$\frac{|F(\partial B)|}{V(B)} = \frac{2|u|}{\epsilon} > k \tag{3.36}$$

O que representa a negação de $F(\partial B)$ ser limitada por volume, logo F não é fracamente balanceado.

Os próximos dois teoremas irão mostrar que ser Fracamente Balanceado é condição suficiente para existência da linearidade f em todo ponto, sobretudo, se f é uma função contínua e linear em quase todo ponto. Então o que foi visto no exemplo anterior é uma negação do próximo teorema, pois mostra que uma função f sem Densidade Linear não é Fracamente Balanceada. Antes definiremos Momento de F sobre x .

Seja F um Fluxo de Cauchy e $x \in \mathbb{R}^3$, defina:

$$\begin{aligned}
MF_x(S) : S \subset R &\longrightarrow L(\mathbb{R}^3) \\
S &\longrightarrow MF_x(S)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

onde S é um elemento de superfície e $MF_x(S) = \int_S (y - x) \wedge f(y, \mathbf{n}_S) dA_y$ é uma transformação linear, pela definição de Linearidade ocorre:

$$\begin{aligned} \int_S (y - x) \wedge f(y, \mathbf{n}_S) dA_y : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\longrightarrow \left(\int_S (y - x) \wedge f(y, \mathbf{n}_S) dA_y \right) u \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pelo item (11) da notação, obtemos:

$$\begin{aligned} MF_x(S)(u) &= \int_S (y - x) \wedge f(y, \mathbf{n}_S)(u) dA_y \\ &= \int_S [((y - x) \otimes f(y, \mathbf{n}_S))(u) - f(y, \mathbf{n}_S) \otimes (y - x)](u) dA_y \\ &= \int_S [(f(y, \mathbf{n}_S) \cdot u)(y - x) - ((y - x) \cdot u)f(y, \mathbf{n}_S)] dA_y \end{aligned} \quad (3.39)$$

Denominamos MF_x o Momento de F sobre x .

Teorema 12 (Teorema de Cauchy) *Seja F um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado. Assumindo que:*

i) F tem densidade em todo ponto;

ii) A densidade f é uma função contínua da posição.

Então f é linear em cada ponto de R . Além disso, se F é balanceado por momento, então f é linear e simétrica em todos os pontos de R .

Demonstração: Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal do \mathbb{R}^3 . Seja $x \in R$ vamos construir um triedro com um vértice em x e os demais vértices em pontos nas retas $x + te_1$, com $t \in \mathbb{R}$ e $i = 1, 2, 3$ caracterizados pela intersecção no plano ortogonal a \mathbf{n} , distante $h > 0$ de x . Com \mathbf{n} um vetor normal unitário, que ao tomarmos o produto interno com os vetores da base canônica do \mathbb{R}^3 , satisfaça a desigualdade:

$$\mathbf{n}e_i > 0 \quad (3.40)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Agora, deslocaremos a partir de x , h unidades na direção do vetor \mathbf{n} , assim obteremos um plano Π que passa pelo ponto $P = x + h\mathbf{n}$, cujo vetor normal é \mathbf{n} interceptando os eixos coordenados nos pontos P_1, P_2, P_3 , veja a figura 3.5:

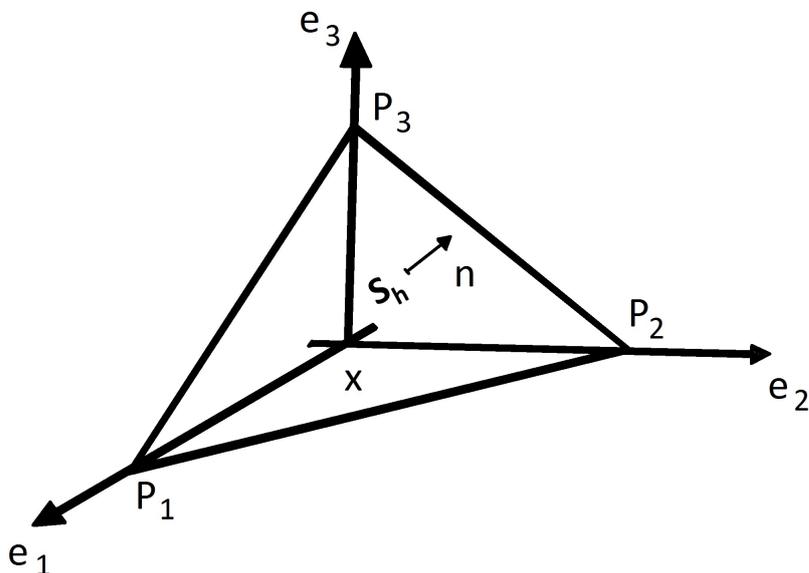


Figura 3.5: Tetraedro de Cauchy

Observemos que para $h > 0$ pequeno, este tetraedro, denotado B_h , é um sólido dentro de R .

Também, seja S_h a face de B_h ortogonal a \mathbf{n} e S_{ih} as faces de B_h ortogonais a $-e_i$ com $i = 1, 2, 3$. Então os elementos de superfície serão $S_1 = (S_{1h}, -e_2)$, $S_2 = (S_{2h}, -e_1)$, $S_3 = (S_{3h}, -e_3)$, $S_4 = (S_h, \mathbf{n})$.

Para encontrar as áreas associadas a cada conjunto subjacente dos elementos de superfície vistos anteriormente, vamos determinar os pontos P_1, P_2, P_3 .

Seja Π o plano que contém S_h . Π é caracterizado por $(P - P_h) \cdot \mathbf{n} = 0$ onde P é um ponto geral de Π e $P_h = x + h\mathbf{n}$ é um ponto conhecido de Π .

Sejam $P_i = x + t_i e_i$ os demais vértices do tetraedro B_h onde $x_i \in \mathbb{R}$, como $P_i \in \Pi$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(P_i - P_h)\mathbf{n} &= 0 \\
((x + t_i e_i) - (x + h\mathbf{n})) &= 0 \\
(t_i e_i \mathbf{n}) - (h\mathbf{n}\mathbf{n}) &= 0 \\
t_i e_i \mathbf{n} &= h \\
t_i &= \frac{h}{e_i \mathbf{n}} \\
t_i &= \frac{h}{\mathbf{n}_i}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Logo $P_1 = x + \frac{h}{\mathbf{n}_1} e_1$, $P_2 = x + \frac{h}{\mathbf{n}_2} e_2$ e $P_3 = x + \frac{h}{\mathbf{n}_3} e_3$.

Agora, calculando as áreas dos elementos de superfície, obtemos:

$$\begin{aligned}
A(S_h) &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{P_1 P_3} \times \overrightarrow{P_1 P_2}| = \frac{h^2}{2\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3} \\
A(S_{1h}) &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{X P_2} \times \overrightarrow{X P_3}| = \frac{h^2}{2\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3} = \mathbf{n}_1 A(S_h) \\
A(S_{2h}) &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{X P_3} \times \overrightarrow{X P_1}| = \frac{h^2}{2\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3} = \mathbf{n}_2 A(S_h) \\
A(S_{3h}) &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{X P_2} \times \overrightarrow{X P_1}| = \frac{h^2}{2\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2} = \mathbf{n}_3 A(S_h) \\
A(S_{ih}) &= \mathbf{n}_i A(S_h)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Notemos que, o volume desse tetraedro depende de h , então o sólido B_h pode ser tão pequeno quando se queira, ou seja, faremos $h \rightarrow 0$. Como F é um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado, e utilizando o teorema das propriedades da densidade, encontraremos:

$$|F(\partial B_h)| = |F(S_h) + \sum_{i=1}^3 F(S_{ih})| \tag{3.43}$$

Dividiremos a equação anterior por $A(S_h)$.

$$\begin{aligned}
\frac{|F(\partial B_h)|}{A(S_h)} &= \left| \frac{F(S_h)}{A(S_h)} + \frac{\sum_{i=1}^3 F(S_{ih})}{A(S_h)} \right| \\
&= \left| \frac{1}{A(S_h)} \int_{S_h} f(x, \mathbf{n}) dA_x + \frac{1}{A(S_h)} \sum_{i=1}^3 \int_{S_{ih}} f(x, -e_1) dA_x \right| \\
&= \left| \frac{1}{A(S_h)} \int_{S_h} f(x, \mathbf{n}) dA_x - \frac{1}{A(S_h)} \sum_{i=1}^3 \int_{S_{ih}} f(x, e_1) dA_x \right|
\end{aligned}$$

Como f é contínua na posição x , então uma versão do teorema do valor médio diz que:

$$\frac{|F(\partial B_h)|}{A(S_h)} = \left| \frac{1}{A(S_h)} \int_{S_h} f(x, \mathbf{n}) dA_x - f(x, \mathbf{n}) \right| \quad (3.44)$$

Por outro lado,

$$\frac{|F(\partial B_h)|}{A(S_h)} \leq k \frac{V(B_h)}{A(S_h)} = \frac{1}{3} k \frac{A(S_h)h}{A(S_h)} = \frac{kh}{3} \quad (3.45)$$

Analisando as duas equações anteriores, obtemos:

$$\left| \frac{1}{A(S_h)} \int_{S_h} f(x, \mathbf{n}) dA_x - f(x, \mathbf{n}) \right| \leq \frac{kh}{3} \quad (3.46)$$

Tomando o limite quando $h \rightarrow 0$ vamos obter:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A(S_h)} \int_{S_h} f(x, \mathbf{n}) dA_x &\rightarrow f(x, \mathbf{n}) \\
\frac{\mathbf{n}_i}{A(S_{ih})} \int_{S_h} f(x, \mathbf{n}) dA_x &\rightarrow \mathbf{n}_i f(x, e_i).
\end{aligned} \quad (3.47)$$

Utilizando que, quando $h \rightarrow 0$ tem-se:

$$|F(S_h) + \sum_{i=1}^3 F(S_{ih})| = 0 \quad (3.48)$$

Então,

$$\begin{aligned} f(x, \mathbf{n}) &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i f(x, e_i) \\ f(x, \mathbf{n}) &= \sum_{i=1}^3 (\mathbf{n} \cdot e_i) f(x, e_i) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Agora, consideremos o caso em que $\mathbf{n}e_i < 0$ para $i = 1, 2, 3$. A demonstração será análoga, onde deve-se substituir e_i por $-e_i$, com a mesma figura anterior.

Se tivermos $\mathbf{n}e_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Então \mathbf{n} estará em algum plano coordenado, neste caso, será construída uma sequência $(\mathbf{n}_k) \subset S^2$ para $i = 1, 2, 3$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{n}_k = \mathbf{n}$ e $\mathbf{n}_k \cdot e_i \neq 0$.

Assim, (3.49) é válida para todo \mathbf{n}_k , e como $\mathbf{n} \rightarrow f(x, \mathbf{n})$ é uma função contínua, então (3.49) continua valendo para todo \mathbf{n}_k com $k \in \mathbb{N}$, visto que:

$$f(x, \mathbf{n}_k) = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{n}_k \cdot e_i) f(x, e_i) \quad (3.50)$$

Agora, tomando o limite quando $k \rightarrow 0$ na equação anterior verificamos, da continuidade da f em \mathbf{n} e da continuidade do produto interno, que:

$$f(x, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{n} \cdot e_i) f(x, e_i) \quad (3.51)$$

Com isso definimos:

$$\begin{aligned} T(x) : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longmapsto T(x) \cdot v = \sum_{i=1}^3 (v \cdot e_i) f(x, e_i) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Mostraremos que $T(x)$ é linear.

De fato, dados $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
T(x)(\alpha u + v) &= \sum_{i=1}^3 ((\alpha u + v) \cdot e_i) f(x, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^3 (\alpha u \cdot e_i) f(x, e_i) + \sum_{i=1}^3 (v \cdot e_i) f(x, e_i) \\
&= \alpha T(x)u + T(x)v
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Logo $f(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n}$, mostrando que f é linear em cada ponto de R .

Agora vamos supor que F é balanceado por momento, definição 21, e mostraremos que f é simétrica em todos os pontos de R .

Dados $x \in \mathbb{R}^n$, e $B \subset R$ um sólido qualquer, de (3.39) temos que:

$$MF_x(\partial B)(z) = \int_{\partial B} [(f(y, \mathbf{n}_S) \cdot z)(y - x) - ((y - x) \cdot z)f(y, \mathbf{n}_S)] dA_y \tag{3.54}$$

Mostraremos que:

$$MF_x(\partial B) = I^T - I \tag{3.55}$$

Onde:

$$I = \int_{\partial B} (f(y, \mathbf{n}_S) \otimes (y - x)) dA_y \tag{3.56}$$

sendo \mathbf{n}_S o normal unitário exterior a ∂B em S .

Logo:

$$\begin{aligned}
I(z) &= \int_{\partial B} ((y - x) \cdot z) f(y, \mathbf{n}_S) dA_y \\
I(e_1) &= \int_{\partial B} (y_1 - x_1) f(y, \mathbf{n}_S) dA_y \\
I(e_2) &= \int_{\partial B} (y_2 - x_2) f(y, \mathbf{n}_S) dA_y \\
I(e_3) &= \int_{\partial B} (y_3 - x_3) f(y, \mathbf{n}_S) dA_y
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Seja, $J = \int_{\partial B} (y - x) \otimes (f(y, \mathbf{n}_s) dA_y)$, sendo \mathbf{n}_s o normal unitário exterior a ∂B em y .

Então:

$$\begin{aligned}
 J(z) &= \int_{\partial B} ((f(y, \mathbf{n}_s) \cdot z)(y - x) dA_y \\
 J(e_1) &= \int_{\partial B} (f_1(y, \mathbf{n}_s)(y - x) dA_y \\
 J(e_2) &= \int_{\partial B} (f_2(y, \mathbf{n}_s)(y - x) dA_y \\
 J(e_3) &= \int_{\partial B} (f_3(y, \mathbf{n}_s)(y - x) dA_y
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Com isso, notemos que $MF_x(\partial B) = J - I$.

Então, resta mostrar que $J = I^T$.

A matriz I na base canônica é:

$$I = \begin{bmatrix} \int_{\partial B} (y_1 - x_1)(f_1(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_2 - x_2)(f_1(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_3 - x_3)(f_1(y, \mathbf{n}_s) dA_y \\ \int_{\partial B} (y_1 - x_1)(f_2(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_2 - x_2)(f_2(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_3 - x_3)(f_2(y, \mathbf{n}_s) dA_y \\ \int_{\partial B} (y_1 - x_1)(f_3(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_2 - x_2)(f_3(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_3 - x_3)(f_3(y, \mathbf{n}_s) dA_y \end{bmatrix}$$

Assim como a J na base canônica é:

$$I = \begin{bmatrix} \int_{\partial B} (y_1 - x_1)(f_1(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_1 - x_1)(f_2(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_1 - x_1)(f_3(y, \mathbf{n}_s) dA_y \\ \int_{\partial B} (y_2 - x_2)(f_1(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_2 - x_2)(f_2(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_2 - x_2)(f_3(y, \mathbf{n}_s) dA_y \\ \int_{\partial B} (y_3 - x_3)(f_1(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_3 - x_3)(f_2(y, \mathbf{n}_s) dA_y & \int_{\partial B} (y_3 - x_3)(f_3(y, \mathbf{n}_s) dA_y \end{bmatrix}$$

Portanto, obtemos que $J = I^T$.

Ou seja:

$$MF_x(\partial B) = I^T - I \quad (3.59)$$

Mas, foi demonstrado anteriormente que f é linear, ou seja, $f(y, \mathbf{n}_y) = T(y)\mathbf{n}(y)$. No entanto, agora mostraremos a seguinte igualdade:

$$[T(y)\mathbf{n}(y)] \otimes (y - x) = T(y)[\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)] \quad (3.60)$$

De fato,

$$[\mathbf{n}(y)] \otimes (y - x)(z) = (y - x) \cdot (z)T(y)\mathbf{n}(y) \quad (3.61)$$

E, por outro lado:

$$T(y)[\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)](z) = T(y)[((y - x) \cdot (z))\mathbf{n}(y)] = ((y - x) \cdot (z))T(y)\mathbf{n}(y) \quad (3.62)$$

Pois, $[(y - x) \cdot (z)]$ é um escalar, então pode passar multiplicando a transformação $T(y)$.

Então, de (3.61) e (3.62), fica válida a igualdade (3.60) que queríamos demonstrar. Agora, utilizando a linearidade da f e a igualdade (3.60), obtêm-se:

$$\begin{aligned} f(y, \mathbf{n}_y) \otimes (y - x) &= T(y)\mathbf{n}(y) \otimes (y - x) \\ &= T(y)[\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)] \\ &= [T(y) - T(x) + T(x)][\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)] \\ &= T(x)[\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)] + [T(y) - T(x)][\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Com isso, a integral (3.56), fica da seguinte forma:

$$I = T(x) \underbrace{\int_{\partial B} \mathbf{n}(y) \otimes (y - x) dA_y}_{I_1} + \underbrace{\int_{\partial B} [T(y) - T(x)][\mathbf{n}(y) \otimes (y - x)] dA_y}_{I_2} \quad (3.64)$$

Assim:

$$\begin{aligned}
I_1(z) &= T(x) \int_{\partial B} [(y-x) \cdot (z)] \mathbf{n}(y) dA_y \\
&= T(x) \left(\int_{\partial B} [(y-x) \cdot (z)] \mathbf{n}_1(y) dA_y; \int_{\partial B} [(y-x) \cdot (z)] \mathbf{n}_2(y) dA_y; \int_{\partial B} [(y-x) \cdot (z)] \mathbf{n}_3(y) dA_y \right)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Onde, $\mathbf{n}(y) = (\mathbf{n}_1(y), \mathbf{n}_2(y), \mathbf{n}_3(y))$.

Em cada uma das 3 integrais coordenadas em (3.65), será usado o Teorema de Gauss (teorema 2) com: $T_1 = ((y-x) \cdot z, 0, 0)$, $T_2 = (0, (y-x) \cdot z, 0)$, $T_3 = (0, 0, (y-x) \cdot z)$, na primeira, segunda e terceira integrais respectivamente, resultando em:

$$\begin{aligned}
I_1(z) &= T(x) \left(\int_B \operatorname{div} T_1 dy; \int_B \operatorname{div} T_2 dy; \int_B \operatorname{div} T_3 dy \right) \\
&= T(x) \left(\int_B z_1 dy; \int_B z_2 dy; \int_B z_3 dy \right) \\
&= T(x)(z)V(B)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Logo, de (3.66), concluímos que:

$$I_1 = T(x)V(B) \tag{3.67}$$

Para a integral $I_2(u)$, supomos B um cubo de aresta $\epsilon > 0$, contendo x . Então:

$$\begin{aligned}
|I_2(z)| &= \left| \int_{\partial B} [T(y) - T(x)] [\mathbf{n}(y) \otimes (y-x)](z) dA_y \right| \\
&= \left| \int_{\partial B} [T(y) - T(x)] [(y-x) \cdot z] \mathbf{n}(y) dA_y \right| \\
&\leq |z| \int_{\partial B} |T(y) - T(x)| |y-x| |\mathbf{n}(y)| dA_y \\
&\leq |z| \int_{\partial B} \sup_{y \in B} \{|T(y) - T(x)|\} \sqrt{3} \epsilon dA_y
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Na integral (3.68), utilizamos o fato de que se x e y estão no cubo, então: $|y-x| \leq \sqrt{3}\epsilon$.

$$\begin{aligned}
|I_2(z)| &= |z| \sup_{y \in B} \{|T(y) - T(x)|\} \sqrt{3} \epsilon \int_{\partial B} dA_y \\
&= |z| \sup_{y \in B} \{|T(y) - T(x)|\} \sqrt{3} \epsilon 6 \epsilon^2 \\
&= |z| \sup_{y \in B} \{|T(y) - T(x)|\} 6 \sqrt{3} V(B)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

De (3.69) concluímos que:

$$|I_2| = \sup_{|z|=1} |I_2(z)| \leq \sup_{y \in B} \{|T(y) - T(x)|\} 6 \sqrt{3} V(B) \tag{3.70}$$

Como F é Balanceado por Momento $\lim_{V(B) \rightarrow \infty} \frac{MF_x(\partial B)}{V(B)} = 0$. Com isso, utilizando (3.55) e (3.67) obtem-se que:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{MF_x(\partial B)}{V(B)} - [T^T(x) - T(x)] \right| &= \left| \frac{I^T - I}{V(B)} - [T^T(x) - T(x)] \right| \\
&= \left| \frac{(I_1 + I_2)^T - (I_1 + I_2)}{V(B)} - [T^T(x) - T(x)] \right| \\
&= \left| \frac{I_1^T + I_2^T - I_1 + I_2}{V(B)} - T^T(x) + T(x) \right| \\
&= \left| T(x)^T \frac{I_2^T}{V(B)} - T(x) - \frac{I_2}{V(B)} - T^T(x) + T(x) \right| \\
&= \left| \frac{I_2^T - I_2}{V(B)} \right|
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Observando que $|I_2^T| = |I_2|$, pois I_2 é uma transformação linear de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 , então, retornando a (3.71) utilizando a igualdade (3.70), conclui-se que:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{I_2^T - I_2}{V(B)} \right| &\leq \frac{|I_2^T| + |I_2|}{V(B)} \\
&= \frac{2|I_2|}{V(B)} \\
&\leq \frac{12\sqrt{3}V(B)}{V(B)} \sup_{y \in B} \{|T(y) - T(x)|\} \\
&= 12\sqrt{3} \sup_{y \in B} \{|T(y) - T(x)|\}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Notemos que, quando $\epsilon \rightarrow 0$ então $V(B) \rightarrow 0$ e $y \rightarrow x$, pois y e x pertencem ao cubo B e $T(y) \rightarrow T(x)$ pois T é uma transformação linear e contínua.

Portanto:

$$\left| \frac{MF_x(\partial B)}{V(B)} - [T^T(x) - T(x)] \right| \rightarrow 0 \quad (3.73)$$

quando $V(B) \rightarrow 0$.

Agora, utilizando a hipótese de que F é Balanceado por Momento, ou seja, $\lim_{V(B) \rightarrow \infty} \frac{MF_x(\partial B)}{V(B)} = 0$, da unicidade do limite e de (3.73), implica:

$$\begin{aligned} T^T(x) - T(x) &= 0 \\ T^T(x) &= T(x) \end{aligned} \quad (3.74)$$

isso conclui que f é simétrica em todos os pontos de R .

Observação 1: Note que quando F é um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado com valores em \mathbb{R}^3 se (i) e (ii) do teorema 12 valem e f é simétrica em cada ponto de R então F é Balanceado por Momento, pois, neste caso, $T^T(x) = T(x)$ e, por (3.73), obtem-se que:

$$\lim_{V(B) \rightarrow \infty} \frac{MF_x(\partial B)}{V(B)} = 0 \quad (3.75)$$

Corolario 1 *Seja F um Fluxo de Cauchy Fracamente Balanceado com densidade média uniforme. Então a densidade f é linear em cada ponto de R , e se além disso, F tem valores em \mathbb{R}^3 e é Balanceado por Momento implica que f é linear e simétrica em cada ponto de R .*

Demonstração: Consequência direta dos teoremas 11 e 12.

Teorema 13 *Seja F um Fluxo de Cauchy. Então F obedece a lei do balanço clássica se, e somente se, F é fracamente balanceado.*

Demonstração: Dizemos que a densidade f do fluxo de Cauchy F obedece uma lei de balanço clássica quando:

$$\int_{\partial B} f(x, \mathbf{n}(x)) dA_x + \int_B b(x) dV_x = 0 \quad (3.76)$$

para todo corpo B onde $n(x)$ é o vetor normal unitário exterior a ∂B no ponto x e b é uma função limitada e integrável em R .

Desde que F tem densidade f então, pelo teorema 11 das propriedades da densidade, e por (3.76) mostra-se que:

$$\begin{aligned} |F(\partial B)| &= \left| \int_{\partial B} f(x, \mathbf{n}(x)) dA_x \right| \\ &= \left| - \int_B b(x) dV_x \right| \\ &\leq \int_B |b(x)| dV_x \\ &\leq \int_B k dV_x \\ &= kV(B) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Logo, $|F(\partial B)| \leq kVol(B)$, ou seja, F é fracamente balanceado.

Por outro lado, se supormos F fracamente balanceado.

Considerando $n = 1$ na definição 15. Denote: $\beta = \left\{ \bigcup_{i=1}^k B_i; B_i \text{ é um sólido e } k \in \mathbb{N} \right\}$.

Observe que a fronteira de $B \subset \beta$ é a união finita de faces poligonais então:

$$F(\partial B) = \sum_{i=1}^q F(S_i) \quad (3.78)$$

onde S_i é face de B .

Dados $B, C \in \beta$ com $V(B \cap C) = 0$ então $B \cap C$ deve ser a união finita de regiões poligonais P_1, P_2, \dots, P_q e um número finito de conjuntos planos de área nula (pontos e segmentos). Sejam, S_1, S_2, \dots, S_q os elementos de superfície orientados por ∂B que tem P_1, P_2, \dots, P_q como conjunto subjacente. Então:

$$F(\partial(B \cup C)) - F(\partial B) - F(\partial C) = - \sum_{i=1}^q [F(S_i) + F(-S_i)] = 0 \quad (3.79)$$

Isto pode ser facilmente visto, de uma forma mais geral em dimensão 2, como motiva a figura 3.6:

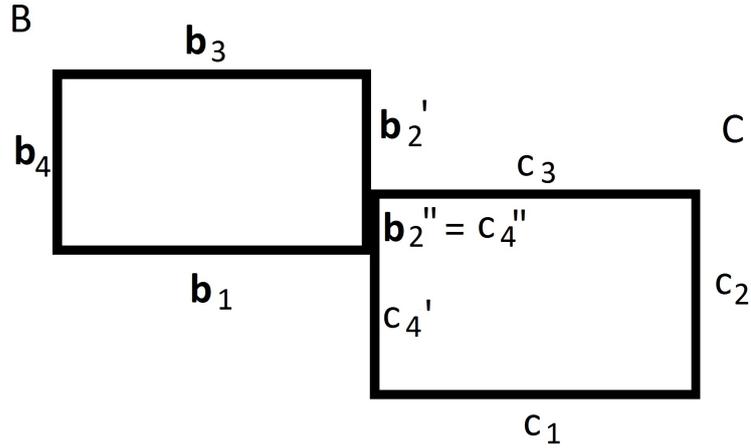


Figura 3.6: Retângulos com $V(B \cap C) = 0$

Pois, pela sua construção:

$$b_2 = b_2' + b_2'' \quad (3.80)$$

$$c_4 = c_4' + c_4'' \quad (3.81)$$

$$c_4'' = b_2'' \quad (3.82)$$

$$F(\partial B) = F(b_1) + F(b_2) + F(b_3) + F(b_4) \quad (3.83)$$

$$F(\partial C) = F(c_1) + F(c_2) + F(c_3) + F(c_4) \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} F(\partial(B \cup C)) &= F(b_1) + F(b_3) + F(b_4) + F(c_1) \\ &+ F(c_2) + F(c_3) + F(b_2') + F(c_4') \end{aligned} \quad (3.85)$$

Logo:

$$\begin{aligned}
F(\partial(B \cup C)) - F(\partial B) - F(\partial C) &= F(b'_2) + F(c'_4) - F(b_2) - F(c_4) \\
&= F(b'_2) + F(c'_4) - [F(b'_2) + F(b''_2)] - [F(c'_4) + F(c''_4)] \\
&= -F(b''_2) - F(c''_4) \\
&= -F(b''_2) - F(-b''_2) \\
&= -F(b''_2) + F(b''_2) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Defina agora a função:

$$\begin{aligned}
F_* : \beta &\longrightarrow \mathbb{R} \\
B &\longrightarrow F(\partial B)
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Isto é, F_* essencialmente é o Fluxo de Cauchy F restrito aos elementos de β .

F_* tem as seguintes propriedades:

$F_*(B \cup C) = F_*(B) + F_*(C)$ quando $V(B \cap C) = 0$ devido a (3.79). Pois:

$$F_*(B \cup C) = F(\partial(B \cup C)) = F(\partial B) + F(\partial C) = F_*(B) + F_*(C) \tag{3.88}$$

Caso B seja somente um sólido então:

$$|F_*(B)| = |F(\partial B)| \leq kV(B) \tag{3.89}$$

pois F é Fracamente Balanceado.

Como $B = B_1 \cup B_2$ onde B_1, B_2 são sólidos então:

$$|F_*(B)| = |F_*(B_1 \cup B_2)| = |F(\partial(B_1 \cup B_2))| \tag{3.90}$$

Aqui dividiremos em 2 casos:

i) $V(B_1 \cap B_2) = 0$

Neste caso:

$$\begin{aligned}
|F(\partial B)| &= |F(\partial(B_1 \cup B_2))| \\
&= |F(\partial B_1) + F(\partial B_2)| \\
&\leq |F(\partial B_1)| + |F(\partial B_2)| \\
&\leq kV(B_1) + kV(B_2) \\
&= k(V(B_1) + V(B_2)) \\
&= k(V(B_1) \cup V(B_2)) \\
&= kV(B)
\end{aligned} \tag{3.91}$$

ii) $V(B_1 \cap B_2) \neq 0$

Neste caso, $B_1 \cup B_2 = B_1 \cup (B_2 - B_1)$ sendo a última uma união disjunta. Logo:

$$\begin{aligned}
|F(\partial B)| &= |F(\partial(B_1 \cup (B_2 - B_1)))| \\
&= |F(\partial B_1) + F(\partial(B_2 - B_1))| \\
&\leq |F(\partial B_1)| + |F(\partial(B_2 - B_1))| \\
&\leq kV(B_1) + kV(B_2 - B_1) \\
&= k(V(B_1) + V(B_2)) \\
&= k(V(B_1) \cup V(B_2 - B_1)) \\
&= kV(B)
\end{aligned} \tag{3.92}$$

O caso $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, se reduz ao caso anterior.

Seja: $Q(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x_i - y_i \leq \delta, i = 1, 2, 3\}$. uma caixa com centro em x e comprimento δ .

Seja: $P_n = \{x \in \mathbb{R}^3; x_i = k_i 2^{-n}; \text{onde } x = (x_1, x_2, x_3)\}$

Seja: $\Omega_n = \{Q(x, 2^{-n}); x \in P_n\}$ o conjunto das caixa centradas em elementos de P_n e comprimento 2^{-n} .

Dado $A \subset \mathbb{R}^3$, defina: $P_n(A) = \{x \in P_n; Q(x, 2^{-n}) \subset A\}$.

Seja: $\widehat{Q}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^3; 0 \leq y_i - x_i \leq \delta, i = 1, 2, 3\}$ a qual denotaremos de semi-caixa centrada nos pontos de P_n com comprimento 2^{-n} .

Para $B \in \beta$ o volume total das caixas $Q(x, 2^{-n})$ que interceptam ∂B e tem $x \in P_n$ pode ser limitado por 2^{-n} vezes uma constante que depende de B e não depende de n , pois $V(Q(x, 2^{-n})) = (2^{-n})^3$ já que, $Q(x, 2^{-n})$ é um cubo de lado 2^{-n} em \mathbb{R}^3 .

Podemos escrever B da seguinte forma:

$$B = \left[\bigcup_{x \in P_n(B)} Q(x, 2^{-n}) \right] \cup \left[\bigcup_r Q(x, 2^{-n}) \cap B \right] \quad (3.93)$$

onde $r = x \in P_n$ $Q(x, 2^{-n}) \cap \partial B \neq \emptyset$

$$F_*(B) = F_*\left(\bigcup_{x \in P_n(B)} Q(x, 2^{-n})\right) + F_*\left(\bigcup_r Q(x, 2^{-n}) \cap B\right) \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} |F_*(B) - F_*\left(\bigcup_{x \in P_n(B)} Q(x, 2^{-n})\right)| &= |F_*\left(\bigcup_r Q(x, 2^{-n}) \cap B\right)| \\ &\leq KV\left(\bigcup_r Q(x, 2^{-n}) \cap B\right) \\ &\leq KV\left(\bigcup_r Q(x, 2^{-n})\right) \\ &\leq KK_B(2^{-n})^3 \\ &= K_B(2^{-n}) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Com isso, e utilizando a propriedade (3.89) concluimos que:

$$|F_*(B) - \sum_{x \in P_n(B)} F_*(Q(x, 2^{-n}))| \leq K_B 2^{-n} \quad (3.96)$$

Agora, seja $C_c(\mathbb{R}) = \{f : R \rightarrow \mathbb{R} \text{ } f \text{ é contínua e } \text{sup}(f) \text{ é compacto}\}$ o espaço das funções contínuas de valores reais em R com suporte compacto, equipadas com a norma do supremo. Seja:

$$\text{sup}(f) = \overline{\{x \in D(f) : f(x) \neq 0\}} \quad (3.97)$$

Agora defina:

$$\wedge_n g = \sum_{x \in P_n(B)} g(x) F_*(Q(x, 2^{-n})) \quad (3.98)$$

para $n = 1, 2, \dots$ e $g \in C_c(\mathbb{R})$.

Logo:

$$\begin{aligned}
|\wedge_n g| &= \sum_{x \in P_n(R)} |g(x)| |F_*(Q(x, 2^{-n}))| \\
&\leq \sup_{x \in R} |g(x)| \sum_{x \in P_n(R)} |F_*(Q(x, 2^{-n}))| \\
&= \sup_{x \in R} |g(x)| F_* \bigcup_{x \in P_n(R)} Q(x, 2^{-n}) \\
&\leq \sup_{x \in R} |g(x)| KV \left(\bigcup_{x \in P_n(R)} Q(x, 2^{-n}) \right) \\
&\leq \sup_{x \in R} |g(x)| KV(R) \tag{3.99}
\end{aligned}$$

portanto da equação anterior \wedge_n é um funcional linear, contínuo de $C_c(\mathbb{R})$, pois $|\wedge_n g| \leq c|g|$.

Mas de (3.89), da continuidade uniforme da $g \in C_c(\mathbb{R})$ e da aditividade de F_* implica que existe:

$$\wedge g = \lim_{n \rightarrow \infty} \wedge_n g \tag{3.100}$$

e define um funcional linear contínuo em $C_c(R)$.

Assim, pelo teorema da Representação de Riesz [11] página 169, existe uma única real Medida de Borel regular μ , tal que:

$$\wedge g = \int_R g d\mu \tag{3.101}$$

para todo $g \in C_c(R)$.

Agora iremos mostrar que μ satisfaz:

$$F(\partial B) = \mu(B) \tag{3.102}$$

$$|\mu(D)| \leq KV(D) \tag{3.103}$$

Escolha uma caixa Δ em R e para cada inteiro $k > 0$ seja $g_k \in C_c(\mathbb{R})$ uma função não negativa, limitada por 1, com $g_k(x) = 1$ para todo $x \in \Delta$, e com suporte em uma caixa Δ' que é concentrica com Δ e tem volume $V(\Delta) + \frac{1}{k}$, conforme figura 3.7.

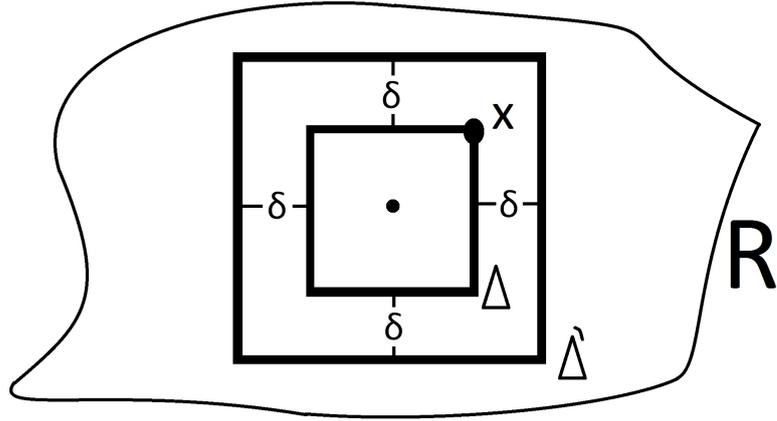


Figura 3.7: Caixa concêntrica

Então, quando $k \rightarrow \infty$, g_k tende pontualmente para função característica de Δ , denotada por χ_Δ , onde:

$$\chi_\Delta(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in \Delta \\ 0 & : \quad x \in R - \Delta \end{cases}$$

$$\wedge g_k = \int_R g_k d\mu \longrightarrow \int_R \chi_\Delta d\mu = \mu(\Delta) \quad (3.104)$$

Além disso:

$$\begin{aligned} |F_*(\Delta) - \wedge_n g_k| &= |F_*(\Delta) - \sum_{x \in P_n(R)} g_k(x) F_\Delta(Q(x, 2^{-n}))| \\ &= |F_*(\Delta) - \sum_{x \in P_n(R)} F_\Delta(Q(x, 2^{-n}))| \\ &\leq K_\Delta 2^{-n} \\ &\leq \frac{2C}{k} \end{aligned} \quad (3.105)$$

neste caso $g_k(x) = 1$, para todo n suficientemente grande.

Assim:

$$\begin{aligned} |F_* \Delta - \wedge g_k| &= |F_* \Delta - \wedge_n g_k + \wedge_n g_k - \wedge g_k| \\ &\leq |F_* \Delta - \wedge_n g_k| + |\wedge_n g_k - \wedge g_k| \\ &< \frac{2C}{k} + \frac{2C}{k} \\ &= \frac{4C}{k} \end{aligned} \quad (3.106)$$

Logo:

$$\wedge g_k \longrightarrow F_*(\Delta) \quad (3.107)$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Por (3.104) e (3.107), da unicidade do limite fica:

$$F_*(\Delta) = \mu(\Delta) \quad (3.108)$$

Desde que $\widehat{Q}(x, \delta) = \bigcup_{n=2}^{\infty} Q\left(x + \delta - \frac{\delta}{n}, \delta - \frac{\delta}{n}\right)$ alguma semi-caixa com fecho em R e de (3.108) obtem-se:

$$\begin{aligned} \mu(\widehat{Q}(x, \delta)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(Q\left(x + \delta - \frac{\delta}{n}, \delta - \frac{\delta}{n}\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_*\left(Q\left(x + \delta - \frac{\delta}{n}, \delta - \frac{\delta}{n}\right)\right) \\ &= F_*(Q(x + \delta, \delta)) \\ &= \mu(Q(x + \delta, \delta)) \\ &\leq kV(Q(x + \delta, \delta)) \\ &\leq kV(Q(x, \delta)) \end{aligned} \quad (3.109)$$

Assim, de (3.89) e de (3.108) conclui-se que:

$$|\mu(\widehat{Q}(x, \delta))| = KV(Q(x, \delta)) \quad (3.110)$$

Da estrutura dos conjuntos abertos na reta real (e no \mathbb{R}^n temos que todo aberto de \mathbb{R}^3 pode ser escrito como união enumerável disjunta de cubos, neste caso de semi-caixas. Isto é, dado $D \subset R$ aberto existem semi-caixas $\widehat{Q}_n \subset R$, com $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widehat{Q}_n$. Logo:

$$\begin{aligned} |\mu(D)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\widehat{Q}_n) \\ &\leq K \sum_{n=1}^{\infty} V(\widehat{Q}_n) \\ &= KV(D) \end{aligned} \quad (3.111)$$

pela teoria da medida, este resultado deve valer para todo conjunto de Borel em R . Portanto vale (3.103).

Dado $B \in \beta$ com $\mu(\partial B) = 0$, como $B = \overset{\circ}{B} \cup \partial B$, implica que:

$$\mu(B) = \mu(\overset{\circ}{B}) + \mu(\partial B) \quad (3.112)$$

Como $\overset{\circ}{B}$ é um aberto, então existem caixas do tipo $\widehat{Q}(x_i, 2^{-m})$ onde $x_i \in P_m$ para todo $i = 1, 2, \dots$ tais que $\overset{\circ}{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \widehat{Q}(x_i, 2^{-m})$, portanto:

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(\overset{\circ}{B}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\widehat{Q}(x_i, 2^{-m})) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} F_*(Q(x_i + 2^{-m}, 2^{-m})) \\ &= F_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q(x_i + 2^{-m}, 2^{-m})\right) \\ &= F_*(B) \\ &= F(\partial B) \end{aligned} \quad (3.113)$$

concluindo (3.102).

Pelo teorema de Radon-Nikodym existe uma função integrável e limitada b em R tal que:

$$\mu(D) = - \int_D b(x) dV_x \quad (3.114)$$

pois, (3.111) significa que $\mu(D) \leq kL(D)$, onde $L(D)$ representa a medida do volume de Lebesgue de D . Assim é satisfeita $\mu \ll L$ que é hipótese fundamental do teorema de Radon-Nikodym.

Agora utilizando (3.113) e o teorema (11), obtemos:

$$\begin{aligned} F(\partial B) &= - \int_B b(x) dV_x \quad (3.115) \\ F(\partial B) + \int_B b(x) dV_x &= 0 \\ \int_{\partial B} f(x, \mathbf{n}(x)) dA_x + \int_B b(x) dV_x &= 0 \end{aligned}$$

Logo F obedece uma lei de balanço.

3.4 O Teorema de Cauchy na Física Clássica: Alguns Contra-Exemplos

O objetivo deste capítulo é responder, algumas questões deixadas em aberto no artigo [5].

Como será observado, no primeiro exemplo, mostra-se que a hipótese de continuidade não pode ser removida do Teorema 12 sem afetar sua validade. Para resolver este exemplo precisamos de mais algumas definições:

Definição 24 (Função Geradora) *Uma função geradora tem o seguinte formato:*

$$\begin{aligned} g : R \times S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \mathbf{n}) &\longrightarrow g(x, \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (3.116)$$

com $g(\cdot, n_\pi) \in L^1(\Pi)$, isto é: $\int_{\Pi} |g(x, n_\pi)| dA_x < \infty$. Onde Π é uma secção transversal de R com vetor normal n_π e g uma função limitada, isto é, existe $k > 0$ tal que $|g(x, n_\pi)| \leq k$ para todo $x \in R$ e para todo $\mathbf{n} \in S^2$.

Defina:

$$\begin{aligned} F : S \subset R &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ S &\longrightarrow F(S) \end{aligned} \quad (3.117)$$

através de $F(S) = \int_S g(x, n_s) dA_x$, F está bem definida, pois $g \in L^1(\Pi)$.

Mostraremos que F é um Fluxo de Cauchy:

i) F é limitada por área:

$$|F(S)| = \left| \int_S g(x, n_s) dA_x \right| \leq \int_S |g(x, n_s)| dA_x \leq \int_S k dA_x = kA(S) \quad (3.118)$$

ii) F é aditiva em elementos de superfície compatíveis, ou seja, $F(S_1 \cup F(S_2)) = F(S_1) + F(S_2)$, onde S_1 e S_2 são elementos de superfície compatíveis e disjuntos.

$$F(S_1 \cup S_2) = \int_{S_1 \cup S_2} g(x, n_{S_1 \cup S_2}) dA_x = \int_{S_1} g(x, n_{S_1}) dA_x + \int_{S_2} g(x, n_{S_2}) dA_x = F(S_1) + F(S_2) \quad (3.119)$$

Com isso, também concluímos que um exemplo de função geradora é a densidade f de F do teorema 11.

Definição 25 (Função Geradora) Dizemos que a função geradora g é linear para $x \in R$ quando a função:

$$\begin{aligned} g(x, \cdot) : S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{n} &\longrightarrow g(x, \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (3.120)$$

é a restrição a S^2 de uma transformação linear de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 .

Definição 26 (Fluxo de Cauchy Equilibrado) Dizemos que um Fluxo de Cauchy F é equilibrado quando $F(\partial B) = 0$ para todo sólido $B \subset R$.

Observação 2: Note que todo Fluxo de Cauchy Equilibrado é Fracamente Balanceado.

Dado um sólido $B \subset R$ tem-se $F(\partial B) = 0$, pois, por hipótese F é um Fluxo de Cauchy Equilibrado. Logo:

$$0 = |F(\partial B)| < 1V(B)$$

Assim vale, $|F(\partial B)| < KV(B)$, com $K = 1$, ou seja, F é Fracamente Balanceado.

Exemplo 2: Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base canônica do \mathbb{R}^3 , R um cubo centrado em 0 com vetores normais exteriores as faces de \bar{R} paralelas a e_i , $i = 1, 2, 3$.

Defina,

$$\begin{aligned} g : R \times S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \mathbf{n}) &\longrightarrow g(x, \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (3.121)$$

Por,

$$g(x, \mathbf{n}) = \begin{cases} e_2 \cdot n & : x_2 \leq 0 \text{ e } x_1 \geq 0 \\ (e_1 + e_2) \cdot n & : x_2 > 0 \text{ e } x_1 > x_2 \\ 0 & : \text{ em qualquer outra situação} \end{cases}$$

i) $g(x, \bullet)$ é linear para $x \in R$.

$$g(x, \alpha \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) = \begin{cases} e_2 \cdot (\alpha \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) & : x_2 \leq 0 \text{ e } x_1 > 0 \\ (e_1 + e_2) \cdot (\alpha \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) & : x_2 > 0 \text{ e } x_1 > x_2 \\ 0 & : \text{ em qualquer outra situação} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha e_2 \cdot \mathbf{n}_1 + e_2 \cdot \mathbf{n}_2 & : x_2 \leq 0 \text{ e } x_1 > 0 \\ \alpha (e_1 + e_2) \cdot \mathbf{n}_1 + (e_1 + e_2) \cdot \mathbf{n}_2 & : x_2 > 0 \text{ e } x_1 > x_2 \\ 0 & : \text{ em qualquer outra situação} \end{cases}$$

$$= \alpha g(x, \mathbf{n}_1) + g(x, \mathbf{n}_2)$$

ii) g é uma função geradora para um Fluxo de Cauchy Equilibrado F .

Dados $x \in R$ e $n \in S^2$, tem-se:

$$|e_2 \cdot n| \leq |e_2| |n| = 1$$

$$|(e_1 + e_2) \cdot n| \leq |e_1 + e_2| |n| = |e_1 + e_2| = \sqrt{2}$$

Logo, $|g(x, \mathbf{n})| \leq \sqrt{2}$.

$g \in L^1(\bullet, \mathbf{n}_\pi)$, pois, qualquer secção transversal Π de R é um retângulo e:

$$\int_{\Pi} |g(x, \mathbf{n}_\pi)| dA_x \leq \int_{\Pi} \sqrt{2} dA_x = \sqrt{2} A(\Pi) < \infty \quad (3.122)$$

Seja o Fluxo de Cauchy F definido por $F(S) = \int_S g(x, n_s) dA_x$. Mostraremos que $F(\partial B) = 0$.

Se B é um sólido no cubo R então, na situação mais geral, ele forma intersecção com as três regiões usadas na definição da função g .

A integral de superfície $F(\partial B) = \int_{\partial B} g(x, \mathbf{n}_{\partial B}) dA_x$ se dividirá em uma soma de 3 integrais de superfícies $\partial B_1, \partial B_2, \partial B_3$ conforme as 3 regiões usadas na definição da g com $\partial B_1 \cup \partial B_2 \cup \partial B_3 = \partial B$.

De acordo com o Teorema da Divergência tem-se:

$$\int_{\partial B_1} g(x, \mathbf{n}_{\partial B_1}) dA_x = \int_{\partial B_1} e_2 \cdot \mathbf{n}_{\partial B_1} dA_x = \int_{\partial B_1} \text{div}(e_2) dA_x = 0 \quad (3.123)$$

$$\int_{\partial B_2} g(x, \mathbf{n}_{\partial B_2}) dA_x = \int_{\partial B_2} (e_1 + e_2) \cdot \mathbf{n}_{\partial B_2} dA_x = \int_{\partial B_2} \text{div}(e_1 + e_2) dA_x = 0 \quad (3.124)$$

$$\int_{\partial B_3} g(x, \mathbf{n}_{\partial B_3}) dA_x = \int_{\partial B_1} 0 dA_x = 0 \quad (3.125)$$

Então, utilizando a definição de Fluxo de Cauchy e as 3 expressões anteriores, tem-se que $F(\partial B) = \int_{\partial B} g(x, \mathbf{n}_{\partial B}) dA_x = 0$, logo o Fluxo de Cauchy F é Equilibrado.

iii) f tem densidade quase sempre.

De acordo com o teorema 11 existe a função densidade $f(x, \mathbf{n})$ quase sempre para $x \in R$.

Este diz que $F(S) = \int_S f(x, n_s) dA_x$, como neste caso temos $F(S) = \int_S g(x, n_s) dA_x$, por resultado de teoria da medida e integração, $f \equiv g$ quase sempre para $x \in R$, pois, podemos definir f em todos os pontos de R com valor de g nestes pontos.

iv) F não é uma função contínua da posição.

Para $x = (t, 0, 0)$ com $t > 0$ tem-se $f(x, \mathbf{n}) = e_2 \cdot \mathbf{n}$.

Com $x = (t, 0, 0)$ e $t > 0$ tem-se $f(x, \mathbf{n}) = (e_1 + e_2) \cdot \mathbf{n}$.

Quando $t \rightarrow 0$ tem limites diferentes em $(0, 0, 0)$, logo, não é contínua neste ponto, portanto não é contínua da posição.

v) f não é linear ao longo de x_3 .

Para $x = (0, 0, t)$ e $t \in \mathbb{R}$ tem-se:

$f(0, 0, t) = e_2 \cdot \mathbf{n} \neq 0$ que não é linear pois é uma função constante não nula.

Este exemplo mostra que no teorema 13 de Cauchy se tirarmos a hipótese de continuidade ii) não teremos a linearidade da f .

Exemplo 3: Considere um cubo R como no exemplo 1. Seja a função:

$$\begin{aligned} \hat{n} : R(-l, l) &\longrightarrow S^2 \\ t &\longrightarrow \hat{n}(t) \end{aligned} \quad (3.126)$$

$$\text{Onde } \hat{n}(t) = \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{t}{l} \right) \right); \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{t}{l} \right) \right); 0 \right)$$

Defina:

$$\begin{aligned} g : R \times S^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \mathbf{n}) &\longrightarrow g(x, \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (3.127)$$

Onde

$$g(x, \mathbf{n}) = \begin{cases} e_1 \cdot \mathbf{n} & : \mathbf{n} \notin f_m(\hat{n}) \\ 0 & : \mathbf{n} \in f_m(\hat{n}) \quad e \quad x \cdot e_1 = \hat{n}^{-1}(\mathbf{n}) \\ e_1 \cdot \mathbf{n} & : \mathbf{n} \in f_m(\hat{n}) \quad e \quad x \cdot e_1 \neq \hat{n}^{-1}(\mathbf{n}) \end{cases}$$

i) g é limitada, pois:

$$|g(x, \mathbf{n})| \leq |e_1 \cdot \mathbf{n}| |e_1| |\mathbf{n}| = 1 \cdot 1 = 1$$

ii) g é uma Função Geradora para um Fluxo de Cauchy F .

Seja Π uma secção transversal de R e n_Π um vetor normal.

$g(\cdot, n_\Pi) \in L^1(\Pi)$ pois $g(\cdot, n_\Pi) = 0$ somente em uma parte quando $n_\Pi \cdot e_3$.

$g(\cdot, n_\Pi) = 0$ em um segmento vertical e nos demais pontos $g(\cdot, n_\Pi)$ assume um valor constante.

Portanto g é uma função geradora para um Fluxo de Cauchy F através de:

$$F(S) = \int_S g(x, n_s) dA_x \quad (3.128)$$

para todo elemento de superfície S .

iii) F é um Fluxo de Cauchy Equilibrado.

Pois dado um sólido $B \subset R$ tem-se:

$$F(\partial B) = \int_{\partial B=S} g(x, n_s) dA_x = \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} g(x, n_{S_i}) dA_x \quad (3.129)$$

onde S_i com $i = 1, 2, 3$ são as superfícies laterais do sólido B dentro de cada uma das regiões que compõem o domínio de g e de forma análoga ao exemplo 1, mostra-se que:

$$\int_{S_i} g(x, n_{S_i}) dA_x = 0 \quad (3.130)$$

para todo $i = 1, 2, 3$.

Logo, $F(\partial B) = 0$, ou seja, F é um Fluxo de Cauchy Equilibrado.

iv) g não é linear.

Dado $x \in R$ a função $\mathbf{n} \rightarrow g(x, \mathbf{n})$ não é contínua.

De fato, seja $t_0 = x_0 \cdot \mathbf{n}_0$, onde n_o é tal que $x \cdot e_1 = \widehat{n}^{-1}(\mathbf{n}_0)$, logo $g(x, \mathbf{n}_0) = 0$

Para os demais $\mathbf{n} \in S^2$ tem-se $g(x, \mathbf{n}) = e_1 \cdot \mathbf{n} \neq 0$.

Como g não é contínua e vai de $\mathbb{R}_6 \rightarrow \mathbb{R}$ então não é linear.

Definição 27 (Função Fracamente Linear) A função $g : R \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita fracamente linear se existe $T : R \rightarrow R$ tal que para todo $\mathbf{n} \in S^2$ existe $R_*(\mathbf{n}) \subset R$ tal que $V(R - R_*(\mathbf{n})) = 0$ e $g(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n}$ para todo $x \in R_*(\mathbf{n})$.

Exemplo 4: Uma função geradora para um Fluxo de Cauchy Equilibrado que não é Fracamente Linear.

Existe um subconjunto H de qualquer quadrado aberto tal que é não mensurável a Lebesgue e tem no máximo 2 pontos de interseção com cada linha reta (Veja Sierpinski 1920).

Defina:

$$\begin{aligned} g : R \times S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^n & (3.131) \\ (x, \mathbf{n}) &\longrightarrow g(x, \mathbf{n}) \end{aligned}$$

Por:

$$g(x, \mathbf{n}) = \begin{cases} g(x, e_1) = 0 & : x \in G \\ g(x, e_1) = 1 & : x \notin G \\ g(x, \mathbf{n}) = e_1 \cdot \mathbf{n} & : \mathbf{n} \neq e_1 \forall x \in R \end{cases}$$

onde R é o cubo do exemplo 2 e G a interseção de $H \times (-l, l)$ com $H \subset (-l, l) \times (-l, l)$.

Da definição de g vemos que $g(\cdot, e_1) = 1$ com exceção de no máximo duas linhas paralelas a e_3 .

Além desta $g(\cdot, e_1)$ não é mensurável em R pois G não é um conjunto mensurável. Tem-se que g é outra Função Geradora para o Fluxo de Cauchy Equilibrado do exemplo 2.

Suponhamos que g é Fracamente Linear.

Então para $\mathbf{n} \neq e_1$ tem-se $g(x, \mathbf{n}) = e_1 \cdot \mathbf{n} = T(x)\mathbf{n}$ para todo $x \in R_*(\mathbf{n}) \implies T(x) = e_1$ para todo $x \in R'$ com $V(R - R') = 0$.

Por outro lado, $g(x, e_1) = T(x)e_1 = e_1e_1 = 1$ para todo $x \in R_*(e_1) \cap R'$.

Mas da definição da g obtemos que:

$R_*(e_1) \cap R' \subset R - G$ pois $g(x, e_1) = 1$ se $x \notin G$.

$$\implies G \subset R - (R_*(e_1) \cap R') = (R - R_*(e_1)) \cup (R - R').$$

Como, $R - (R_*(e_1))$ e $R - R'$ são mensuráveis com volume 0, então G tem volume 0, sendo mensurável, contradizendo a hipótese de G não mensurável.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R., Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975.
- [2] BRÉZIS, H., Análisis Funcional - Teoría y Aplicaciones. Madrid: Alianza Editorial, 1984.
- [3] FEIJÓO, R. A., Introdução a Mecânica del Contínuo. Rio de Janeiro: Notas de Aula, 1977.
- [4] FOX, R. W.; McDONALD, A. T., Introdução a Mecânica dos Fluidos. Rio de Janeiro: Guanabara, 1985.
- [5] GURTIN, M. E.; MARTINS, L. C., Cauchy's Theorem in Classical Physics. Arch. Rat. Mech. Anal. 60 (305-324), 1976.
- [6] KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis with Applications. United States of America: Wiley Classics Library, 1978.
- [7] LIMA, E. L., Análise Real. Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 1985.
- [8] LIMA, E. L., Curso de Análise. Volume 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [9] MELO, S. T.; NETO, F. M., Mecânica do Fluidos e Equações Diferenciais. Rio de Janeiro: IMPA, 2000.
- [10] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E. A., A Integral de Lebesgue. Rio de Janeiro: Instituto Federal, 1989.
- [11] RUDIN, Walter., Real and Complex Analysis. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [12] SWOKOWSKI, E. W., Cálculo com Geometria Analítica. Volume 2. São Paulo: Makron Books, 1994.