

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**VÉRTICES, CURVA FOCAL E SUPERFÍCIE
FOCAL DE CURVAS NO ESPAÇO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Carla Andréia Wolf

Santa Maria, RS, Brasil

2013

VÉRTICES, CURVA FOCAL E SUPERFÍCIE FOCAL DE CURVAS NO ESPAÇO

Carla Andréia Wolf

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Claudia Candida Pansonato

Santa Maria, RS, Brasil

2013

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**VÉRTICES, CURVA FOCAL E SUPERFÍCIE FOCAL DE
CURVAS NO ESPAÇO**

elaborada por
Carla Andréia Wolf

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr^a. Claudia Candida Pansonato
(Orientadora)

Prof. Dr^a. Roberta Godoi Wik Atique (USP-SÃO CARLOS)

Prof. Dr^a. Rosane Rossato Binotto (UFFS)

Santa Maria, 19 de março de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por dar força e ânimo para seguir em frente.

Agradeço à minha família e amigos por sempre estarem a disposição para ajudar em todos momentos.

Aos colegas pela convivência e experiências que adquirimos juntos.

Agradeço a professora Cláudia Candida Pansonato pela sua dedicação e paciência na orientação deste trabalho.

Agradeço ao Departamento de Matemática e a Coordenação do Programa de Pós- Graduação pela formação e apoio durante o curso.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

VÉRTICES, CURVA FOCAL E SUPERFÍCIE FOCAL DE CURVAS NO ESPAÇO

AUTORA: CARLA ANDRÉIA WOLF

ORIENTADORA: CLAUDIA CANDIDA PANSONATO

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 19 de março de 2013.

A superfície focal de uma curva γ no espaço euclidiano tridimensional é definida como o envelope dos planos normais a γ . A superfície focal de γ é singular ao longo de uma curva C_γ , chamada *curva focal* ou *evoluta generalizada*. Esta curva é dada pelos centros das esferas osculatrizes de γ . Neste trabalho estudamos a geometria da superfície focal, dando ênfase nas propriedades da curva focal. Estes conceitos podem ser generalizados para curvas em \mathbb{R}^{m+1} . A curva focal pode ser parametrizada em termos do referencial de Frenet da curva γ . Através desta parametrização, obtemos coeficientes chamados *curvaturas focais*. Obtemos então uma expressão relacionando as curvaturas euclidianas de γ com suas curvaturas focais. Definindo *vértice* de uma curva em \mathbb{R}^{m+1} como um ponto em que a curva tem contato de ordem pelo menos $m + 3$ com sua hipersfera oscultriz, são dadas condições necessárias e suficientes para um ponto de γ ser um vértice. Em tais pontos a superfície focal é localmente difeomorfa à *superfície rabo de andorinha*.

Palavras-chave: Vértices. Cáustica. Curva focal. Singularidades.

ABSTRACT

Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Universidade Federal de Santa Maria

VERTEX, FOCAL CURVE AND FOCAL SURFACE OF SPACE CURVES

AUTHOR: CARLA ANDRÉIA WOLF

ADVISOR: CLAUDIA CANDIDA PANSONATO

Date and Location of Defense: Santa Maria, March 19, 2013.

The focal surface of a curve γ in the Euclidean 3-space is defined as the envelope of the normal planes of γ . The focal surface of γ is singular along a curve C_γ , called the *focal curve* or *generalized evolute*. This curve is given by the centers of the osculating spheres of γ . In this work we study the geometry of the focal surface, focusing on the properties of the focal curve. These concepts can be generalized for curves in \mathbb{R}^{m+1} . The focal curve may be parametrized in terms of the Frenet frame of γ . Through this parametrization, we obtain coefficients called *focal curvatures*. It is then obtained a formula relating the Euclidean curvatures of γ with its focal curvatures. Defining a vertex of a curve in \mathbb{R}^{m+1} as a point at which the curve has at least $(m+3)$ -point contact with its osculating hypersphere, we give necessary and sufficient conditions for a point of γ to be a vertex. In such points the focal surface is locally diffeomorphic to the swallowtail surface.

Keywords: Vertex. Caustic. Focal Curve. Singularities.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
2	CURVAS EM \mathbb{R}^{m+1}	8
2.1	Equações de Frenet e curvaturas	8
2.2	Curvas no \mathbb{R}^3	12
3	CONTATO	15
3.1	Contato entre Curvas e Hiperplanos	15
3.1.1	Contato entre curvas no espaço e planos	17
3.2	Contato entre Curvas e Hiperesferas	18
3.2.1	Contato entre curvas no espaço e esferas	19
3.2.2	Contato entre curvas planas e círculos	20
3.3	Contato entre Curvas e k -planos e k -esferas	22
4	CURVAS FOCAIS	25
4.1	Curva Focal e Vértices	25
4.2	Curva focal e vértice de Darboux	38
5	ENVELOPES E DESDOBRAMENTOS	43
5.1	Envelopes	43
5.2	Desdobramentos	45
5.2.1	Desdobramento (p) versal	46
5.2.2	Crítério para a verificação da (p) versalidade	48
5.2.3	Aplicações	52
5.2.4	Desdobramento versal	54
5.2.5	Crítério para a verificação da versalidade	55
6	SUPERFÍCIE FOCAL	56
6.1	Geometria da Superfície Focal	56
6.2	Singularidades da Superfície Focal	58
	CONCLUSÃO	61
	REFERÊNCIAS	62

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O presente trabalho destina-se ao estudo da superfície focal e das propriedades da curva focal de curvas no espaço.

A superfície focal de uma curva γ em \mathbb{R}^3 é definida como o envelope dos planos normais a γ . A superfície focal de γ é singular ao longo de uma curva C_γ , chamada *curva focal* ou *evoluta generalizada*, conforme [15] e [11], respectivamente. Neste caso, a curva γ pode ser considerada como uma fonte de luz e o envelope de todos raios normais a γ é a *superfície focal* ou *cáustica* da curva γ . A intensidade de luz é muito mais concentrada na cáustica do que em outros pontos do espaço. Além disso, a cáustica é mais iluminada ao longo de seu eixo cuspidal, que é a curva focal de γ . Para uma curva plana, a curva focal é chamada de *evoluta* e é dada pelos centros dos círculos osculadores da curva γ . O conceito de curva focal pode ser generalizado para curvas em \mathbb{R}^{m+1} . Neste caso, a curva focal é dada pelos centros das hiperesferas osculatrizes de γ e pode ser parametrizada em termos do referencial de Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m\}$ da curva γ , como $C_\gamma(t) = (\gamma + c_1 \mathbf{n}_1 + \dots + c_m \mathbf{n}_m)(t)$. Os coeficientes c_1, \dots, c_m são funções diferenciáveis chamadas *curvaturas focais* de γ . Obtemos neste trabalho uma expressão relacionando as curvaturas euclidianas de γ com suas curvaturas focais.

Adotando a definição de *vértice* de uma curva em \mathbb{R}^{m+1} utilizada em R. Uribe-Vargas [15] como um ponto em que a curva tem contato de ordem pelo menos $m + 3$ com sua hiperesfera osculatriz, obtemos, em termos das curvaturas focais, condições necessárias e suficientes para um ponto de γ ser um vértice. Utilizando técnicas da teoria de singularidades no estudo de um *desdobramento* de uma função real [1], mostra-se que em tais pontos a superfície focal de uma curva no espaço γ é localmente difeomorfa à *superfície rabo de andorinha*.

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No capítulo 1 introduzimos conceitos da geometria diferencial local de curvas no \mathbb{R}^{m+1} . Obtemos também expressões para a curvatura e torção de curvas no espaço com parâmetro qualquer. As principais referências utilizadas foram [2], [13], [5]. No capítulo 2 estudamos o conceito de contato entre duas subvariedades. Obtemos os conceitos de *ponto de aplainamento* e *vértice* analisando o contato de curvas com hiperplanos e hiperesferas, respectivamente. Em \mathbb{R}^3 , analisamos o contato entre curvas e planos e curvas e esferas e, no \mathbb{R}^2 entre curvas e círculos. Finalizamos o capítulo estudando o contato entre curvas em \mathbb{R}^{m+1} e k -planos e k -esferas. As principais referências utilizadas foram [1] e [3]. No capítulo 3 estudamos a geome-

tria da curva focal. Generalizamos os resultados para curvas em \mathbb{R}^{m+1} e obtemos, em termos das curvaturas focais, condições necessárias e suficientes para um ponto ser de vértice [15]. Abordamos alguns resultados específicos para curvas em \mathbb{R}^3 envolvendo vértices de Darboux e suas relações com a curva focal. As principais referências utilizadas foram [14] e [15]. No capítulo 4 estudamos envelopes e desdobramentos de famílias de aplicações e utilizamos técnicas da teoria de singularidades para classificar os conjuntos discriminante e de bifurcação destas famílias. A principal referência utilizada foi [1]. Finalmente, no capítulo 5 aplicamos os resultados do capítulo 4 ao estudo da geometria da superfície focal de uma curva genérica γ em \mathbb{R}^3 , mostrando que nos pontos de vértice de γ a superfície focal é localmente difeomorfa à *superfície rabo de andorinha*.

Capítulo 2

CURVAS EM \mathbb{R}^{m+1}

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos da geometria diferencial de curvas em \mathbb{R}^{m+1} . Na subseção 1.1 são dadas as equações de Frenet para curvas em \mathbb{R}^{m+1} e em 1.2 são obtidas expressões específicas para curvas em \mathbb{R}^3 .

Uma curva parametrizada em \mathbb{R}^{m+1} é uma aplicação $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ diferenciável (C^{m+2}), sendo I um intervalo da reta. Se $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0, \forall t \in I$, a curva é chamada *regular*.

Dado $t \in I$, o parâmetro comprimento de arco de uma curva parametrizada $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ a partir do ponto t_0 é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

A curva γ é parametrizada pelo comprimento de arco se, $|\dot{\gamma}(t)| = 1, \forall t \in I$. Toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

Denotamos s para o parâmetro comprimento de arco. Uma curva parametrizada em \mathbb{R}^{m+1} é dita ser *boa* se o conjunto $\{\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dots, \gamma^{(m)}(t)\}$ é linearmente independente para $\forall t \in I$. Consideramos somente curvas *boas*.

2.1 Equações de Frenet e curvaturas

Seja I um intervalo de \mathbb{R} e $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco s .

Denotamos $\mathbf{t}(s) = \frac{d}{ds}(\gamma(s))$ o vetor tangente unitário a curva γ . Como $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1$ então

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s)) = 2\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s)) = 0.$$

Definimos a primeira curvatura $\kappa_1(s)$ de γ por

$$\kappa_1(s) = \left| \frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s)) \right|.$$

Se $\kappa_1(s) \neq 0, m \geq 2, \forall s \in I$, definimos

$$\mathbf{n}_1(s) = \frac{1}{\kappa_1(s)} \left(\frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s)) \right)$$

de modo que $\mathbf{n}_1(s)$ seja um vetor unitário passando por $\gamma(s)$ e perpendicular a $\mathbf{t}(s)$. Denotando a derivada por ' temos

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa_1(s)\mathbf{n}_1(s)$$

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_1(s) \cdot \mathbf{n}_1(s)) = 2\mathbf{n}_1(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_1(s)).$$

Como $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}_1(s) = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}_1(s)) \\ &= \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_1(s)) \cdot \mathbf{t}(s) + \mathbf{n}_1(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s)) \\ &= \mathbf{t}(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_1(s)) + \mathbf{n}_1(s) \cdot (\kappa_1(s)\mathbf{n}_1(s)) \\ &= \mathbf{t}(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_1(s)) + \kappa_1(s). \end{aligned}$$

Desta maneira,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{n}_1(s)) = -\kappa_1(s)\mathbf{t}(s) + \text{vetor perpendicular a } \mathbf{t}(s) \text{ e } \mathbf{n}_1(s).$$

Definimos a segunda função curvatura $\kappa_2(s)$ de γ por

$$\kappa_2(s) = \left| \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_1(s)) + \kappa_1(s)\mathbf{t}(s) \right|.$$

Se $\kappa_2(s) \neq 0, m \geq 3, \forall s \in I$, definimos

$$\mathbf{n}_2(s) = \frac{1}{\kappa_2(s)} \left[\frac{d}{ds}(\mathbf{n}_1(s)) + \kappa_1(s)\mathbf{t}(s) \right]$$

de modo que $\mathbf{n}_2(s)$ é um vetor perpendicular a $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}_1(s)$. Assim,

$$\mathbf{n}_1'(s) = -\kappa_1(s)\mathbf{t}(s) + \kappa_2(s)\mathbf{n}_2(s).$$

Suponhamos que para $i \leq m+1$ obtemos $(i+2)$ vetores ortonormais $\mathbf{t}(s), \dots, \mathbf{n}_i(s)$ que passam por γ no ponto $\gamma(s)$ e $(i+1)$ funções curvatura $\kappa_1(s), \dots, \kappa_{i+1}(s)$ que não se anulam, tais que

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}'(s) &= \kappa_1(s)\mathbf{n}_1(s) \\
\mathbf{n}'_1(s) &= -\kappa_1(s)\mathbf{t}(s) + \kappa_2(s)\mathbf{n}_2(s) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\mathbf{n}'_i(s) &= -\kappa_i(s)\mathbf{n}_{i-1}(s) + \kappa_{i+1}(s)\mathbf{n}_{i+1}(s).
\end{aligned}$$

Então

$$\mathbf{n}_j(s) \cdot \mathbf{n}_j(s) = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_j(s) \cdot \mathbf{n}_j(s)) = 2\mathbf{n}_j(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_j(s)) = 0.$$

Para $i < j$ temos

$$\mathbf{n}_i(s) \cdot \mathbf{n}_j(s) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_i(s) \cdot \mathbf{n}_j(s)) = \mathbf{n}_j(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_i(s)) + \mathbf{n}_i(s) \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_j(s)).$$

Portanto

$$\mathbf{n}'_j(s) = -\kappa_j(s)\mathbf{n}_{j-1}(s) + \text{vetor perpendicular a } \mathbf{t}(s), \mathbf{n}_1(s), \dots, \mathbf{n}_j(s). \quad (2.1)$$

Se $i < m$ definimos

$$\kappa_j(s) = \left| \frac{d}{ds}(\mathbf{n}_{j-1}(s)) + \kappa_{j-1}(s)\mathbf{n}_{j-2}(s) \right|$$

e se $\kappa_j(s) \neq 0, \forall s \in I$, temos

$$\mathbf{n}_j(s) = \frac{1}{\kappa_j(s)} \left[\frac{d}{ds}(\mathbf{n}_{j-1}(s)) + \kappa_{j-1}(s)\mathbf{n}_{j-2}(s) \right]$$

e portanto

$$\mathbf{n}'_{j-1}(s) = -\kappa_{j-1}(s)\mathbf{n}_{j-2}(s) + \kappa_{j-1}(s)\mathbf{n}_j(s).$$

Se $j = m$ então somente o vetor nulo é perpendicular a $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_1(s), \dots, \mathbf{n}_m(s)$ e a equação (2.1) fica

$$\mathbf{n}'_m(s) = -\kappa_m(s)\mathbf{n}_{m-1}(s).$$

No caso particular $j = m - 1$, se as $(m - 1)$ curvaturas são todas positivas, podemos definir a m -ésima curvatura com sinal tomando $\mathbf{n}_{j+1}(s) = \mathbf{n}_m(s)$ como sendo o único campo unitário ortogonal a $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_1(s), \dots, \mathbf{n}_{m-1}(s)$ tal que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s), \dots, \mathbf{n}_m(s)\}$ é uma base positivamente orientada de \mathbf{R}^{m+1} e assim

$$\kappa_m(s) = (\mathbf{n}'_{m-1}(s) + \kappa_{m-1}(s)\mathbf{n}_{m-2}(s)) \cdot \mathbf{n}_m(s) = \mathbf{n}'_{m-1}(s) \cdot \mathbf{n}_m(s).$$

Observe que o referencial de Frenet nada mais é do que o resultado do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicado aos vetores $\{\gamma'(s), \gamma''(s), \dots, \gamma^{(m+1)}(s)\}$.

As curvaturas $\kappa_1, \dots, \kappa_{m-1}$ de uma curva *boa* são estritamente positivas, e a curvatura κ_m pode ser qualquer valor real. Todas as curvas consideradas neste trabalho, terão as $(m-1)$ curvaturas não nulas. Além disso, o conjunto de curvas que têm esta propriedade forma um subconjunto aberto e denso de mergulhos de \mathbb{R} em \mathbb{R}^{m+1} com a topologia de Whitney [6]. Estas curvas são denominadas *genéricas*. Elas satisfazem a condição das curvas *boas*.

O resultado a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para o anulamento da última curvatura da curva γ .

Proposição 1. *Seja γ uma curva regular com parâmetro t qualquer. O conjunto $\{\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(m+1)}(t)\}$ é linearmente dependente se, e somente se $\kappa_m = 0$.*

Demonstração. Seja s o parâmetro pelo comprimento de arco, assim

$$|\gamma'(t)| = \frac{ds}{dt}.$$

Temos que o conjunto $\{\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(m+1)}(t)\}$ é linearmente dependente se, e somente se

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(m+1)}(t)) = 0.$$

Como

$$\mathbf{t}(s(t)) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|},$$

utilizando as equações de Frenet e escrevendo a_{ij} para $a_{ij}(t)$ e $\mathbf{t}(s)$ para $\mathbf{t}(s(t))$, temos

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= |\gamma'(t)|\mathbf{t}(s) = a_{11}\mathbf{t}(s) \\ \gamma''(t) &= \frac{da_{11}}{dt}\mathbf{t}(s) + a_{11}\frac{d\mathbf{t}(s)}{dt} = \frac{da_{11}}{dt}\mathbf{t}(s) + a_{11}\frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \\ &= \frac{da_{11}}{dt}\mathbf{t}(s) + a_{11}^2\kappa_1(s)\mathbf{n}_1(s) = a_{21}\mathbf{t}(s) + a_{22}\mathbf{n}_1(s) \\ \gamma'''(t) &= \frac{da_{21}}{dt}\mathbf{t}(s) + a_{21}\frac{d\mathbf{t}(s)}{dt} + \frac{da_{22}}{dt}\mathbf{n}_1(s) + a_{22}\frac{d\mathbf{n}_1(s)}{dt} \\ &= a_{31}\mathbf{t}(s) + a_{32}\mathbf{n}_1(s) + a_{11}a_{22}\kappa_2(s)\mathbf{n}_2(s) \\ &= a_{31}\mathbf{t}(s) + a_{32}\mathbf{n}_1(s) + a_{33}\mathbf{n}_2(s) \\ &\vdots \\ \gamma^{(i)}(t) &= a_{i1}\mathbf{t}(s) + a_{i2}\mathbf{n}_1(s) + \dots + a_{i1}^i\kappa_1(s)\kappa_2(s)\dots\kappa_{i-1}(s)\mathbf{n}_{i-1}(s) \\ &\vdots \\ \gamma^{(m+1)}(t) &= a_{(m+1)1}\mathbf{t}(s) + a_{(m+2)2}\mathbf{n}_1(s) + \dots + a_{11}^{(m+1)}\kappa_1(s)\kappa_2(s)\dots\kappa_m(s)\mathbf{n}_m(s) \\ &= a_{(m+1)1}\mathbf{t}(s) + a_{(m+2)2}\mathbf{n}_1(s) + \dots + a_{(m+1)(m+1)}\mathbf{n}_m(s). \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(m+1)}(t)) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m+1)1} & a_{(m+1)2} & a_{(m+1)3} & \cdots & a_{(m+1)(m+1)} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \cdots a_{(m+1)(m+1)}.$$

com

$$a_{11} = |\gamma'(t)| \text{ e } a_{ii} = (|\gamma'(t)|)^i \kappa_1(s) \kappa_2(s) \cdots \kappa_{i-1}(s) \text{ para } i > 1.$$

Então

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(m+1)}(t)) = (|\gamma'(t)|)^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \kappa_1^m(s) \kappa_2^{m-1}(s) \cdots \kappa_m(s).$$

Dessa maneira, como $\kappa_1(s), \kappa_2(s), \dots, \kappa_{m-1}(s)$ são todos não nulos e γ é regular temos

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(m+1)}(t)) = 0 \Leftrightarrow \kappa_m = 0.$$

□

2.2 Curvas no \mathbb{R}^3

Nesta subsecção obtemos alguns resultados específicos para o caso tridimensional que serão utilizados no decorrer do trabalho. Primeiramente fixaremos algumas notações:

i) $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_1(s)$ e $\mathbf{n}_2(s)$ são conhecidos, respectivamente, por *tangente* $\mathbf{t}(s)$, *normal* $\mathbf{n}(s)$ e *binormal* $\mathbf{b}(s)$ à curva γ no ponto s .

ii) $\kappa_1(s)$ e $\kappa_2(s)$ são conhecidos, respectivamente, por *curvatura* ($\kappa(s)$) e *torção* ($\tau(s)$) da curva γ no ponto s .

iii) Planos que passam pela curva γ no ponto $\gamma(s)$:

- *plano normal* é o plano gerado por $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$.
- *plano osculador* é o plano gerado por $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$.
- *plano retificante* é o plano gerado por $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$.

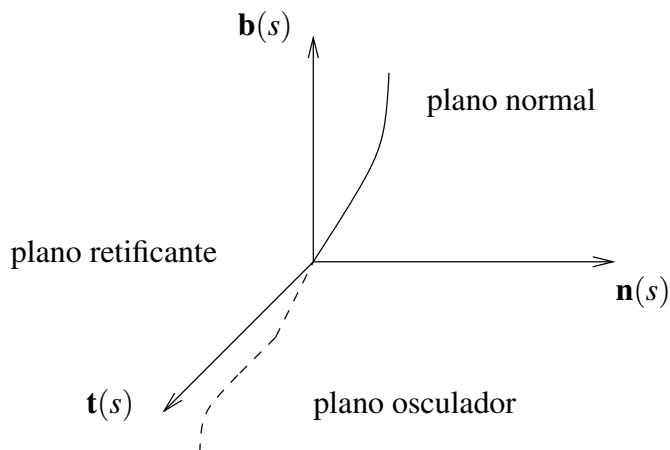


Figura 2.1: Planos retificante, normal e osculador.

Obtemos as fórmulas para a curvatura e a torção de uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular parametrizada com parâmetro qualquer que serão úteis no decorrer do trabalho.

Seja $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco, ou seja,

$$\beta(s(t)) = \gamma(t).$$

Derivando esta igualdade em relação a t e denotando por $'$ obtemos

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \gamma'(t).$$

Temos que

$$\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| \quad \text{e} \quad \frac{d\beta}{ds} = \mathbf{t}(s).$$

Assim

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Derivando γ' em relação a t , temos

$$\gamma'' = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{t} + \left(\frac{ds}{dt} \right)' \mathbf{t}' = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{t} + \left(\frac{ds}{dt} \right) \left(\kappa \frac{ds}{dt} \mathbf{n} \right).$$

Deste modo,

$$\gamma' \times \gamma'' = \mathbf{t} \frac{ds}{dt} \times \left(\frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{t} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 (\kappa \mathbf{n}) \right) = \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \mathbf{b}.$$

Portanto,

$$|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}| = \kappa |\dot{\gamma}|^3 \Rightarrow \kappa = \frac{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|}{|\dot{\gamma}|^3}. \quad (2.2)$$

Agora derivando $\ddot{\gamma}$ temos

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}''' &= \frac{d^3 s}{dt^3} \mathbf{t} + \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{t}' + \left(\kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right)' \mathbf{n} + \left(\kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{n}' \\ &= \left(\frac{d^3 s}{dt^3} - \kappa^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \right) \mathbf{t} + \left(\kappa' \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + 3\kappa \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} \right) \mathbf{n} \\ &\quad + \kappa \tau \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}''' &= \tau \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^6 \kappa (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \\ &= \tau \kappa^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^6 \\ &= \tau \kappa^2 |\dot{\gamma}|^6. \end{aligned}$$

como $|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2 = \kappa^2 |\dot{\gamma}|^6$, segue que

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}'''}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2}.$$

Capítulo 3

CONTATO

Nesta seção definimos o conceito de contato entre subvariedades. Em 2.1 analisamos o caso em que uma das subvariedades é uma curva e a outra um hiperplano e com isto, definimos um ponto de *aplainamento*. Em 2.2 estudamos o contato entre curvas e hipersferas e obtemos o conceito de *vértice*. Em 2.3 estudamos contato entre curvas e k -planos e k -esferas. As principais referências utilizadas foram [3] e [1].

A noção de contato entre subvariedades pode ser interpretada, de forma intuitiva, como o grau de tangência entre elas.

Sejam \mathcal{M} e \mathcal{N} subvariedades em \mathbb{R}^n , localmente definidas através do mergulho $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e da submersão $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, de modo que $\mathcal{M} = \phi(\mathbb{R}^m)$ e $\mathcal{N} = f^{-1}(0)$, respectivamente. Montaldi [10] mostrou que o estudo das singularidades da aplicação composta $f \circ \phi$ permite analisar o contato entre \mathcal{M} e \mathcal{N} no ponto p , onde p é o ponto de intersecção entre as duas subvariedades. A aplicação $f \circ \phi$ é denominada *aplicação de contato*.

Seja $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1-k}$ uma submersão dada por $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{m+1-k}(\mathbf{x}))$, $\mathcal{N} = f^{-1}(0)$ uma subvariedade e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ uma curva regular. Dizemos que γ tem *contato de ordem maior ou igual a k* em $t = t_0$ com \mathcal{N} se: $(f_j \circ \gamma)^{(p)}(t_0) = 0$, para $0 \leq p \leq k-1$, $j = 1, \dots, m+1-k$. Se, além disto, $(f_j \circ \gamma)^{(k)}(t_0) \neq 0$ então o contato é de ordem exatamente k .

Neste trabalho estamos interessados no caso em que ϕ é uma curva em \mathbb{R}^{m+1} .

3.1 Contato entre Curvas e Hiperplanos

Estudaremos agora o caso em que \mathcal{N} é um hiperplano H . Neste caso $H = f^{-1}(0)$ e $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{p}$ onde \mathbf{u} é um vetor perpendicular a H e $\mathbf{p} \in H$.

Para estudar as singularidades de $f \circ \gamma$, consideremos a *função altura* de γ na direção de \mathbf{u} definida por $f_h(t) = \gamma(t) \cdot \mathbf{u}$.

Definimos o *hiperplano osculador* de uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ como o subespaço gerado por $[\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(m)}]$. Temos então o seguinte resultado.

Proposição 2. *O hiperplano osculador de uma curva genérica γ tem contato de ordem pelo menos $m + 1$ com a curva nesse ponto.*

Demonstração. Considere γ parametrizada pelo comprimento de arco. Derivando a função altura, utilizando as equações de Frenet e levando em conta que as $m - 1$ curvaturas de uma curva boa são não nulas obtemos:

$$f'_h(s) = \gamma'(s) \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in [\mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s), \dots, \mathbf{n}_m(s)].$$

$$f''_h(s) = \gamma''(s) \cdot \mathbf{u} = \kappa_1(s) \mathbf{n}_1(s) \cdot \mathbf{u}. \text{ Logo, como } \kappa_1(s) \neq 0,$$

$$f'_h(s) = f''_h(s) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in [\mathbf{n}_2(s), \dots, \mathbf{n}_m(s)].$$

$$f'''_h(s) = \gamma'''(s) \cdot \mathbf{u}$$

$$f'_h(s) = f''_h(s) = f'''_h(s) = 0 \Leftrightarrow \kappa_1(s), \kappa_2(s) \neq 0, \mathbf{u} \in [\mathbf{n}_3(s), \dots, \mathbf{n}_m(s)].$$

Procedendo deste modo concluimos que

$$f_h^{(i)}(s) = \gamma^{(i)}(s) \cdot \mathbf{u}$$

$$f'_h(s) = f''_h(s) = \dots = f_h^{(i)}(s) = 0 \Leftrightarrow \kappa_1(s), \kappa_2(s) \dots \kappa_{i-1}(s) \neq 0, \mathbf{u} \in [\mathbf{n}_i(s), \dots, \mathbf{n}_m(s)].$$

e

$$f_h^{(m)}(s) = \gamma^{(m)}(s) \cdot \mathbf{u}$$

$f'_h(s) = f''_h(s) = \dots = f_h^{(m)}(s) = 0 \Leftrightarrow \kappa_1(s), \kappa_2(s) \dots \kappa_{m-1}(s) \neq 0, \mathbf{u} \perp \mathbf{n}_m(s)$. Logo, \mathbf{u} está na direção de $\mathbf{n}_m(s)$.

$$f_h^{(m+1)}(s) = \gamma^{(m+1)}(s) \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \kappa_1(s) \kappa_2(s) \dots \kappa_m(s) \mathbf{n}_m(s) \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Logo, o hiperplano osculador tem contato de ordem pelo menos $m + 1$ com a curva. □

Observamos que se a curva é boa existe um único hiperplano com esta propriedade, que é o hiperplano osculador.

Dos cálculos anteriores podemos concluir também que $\kappa_m(s_0) = 0$ se e somente se, o contato do hiperplano osculador com a curva em $\gamma(s_0)$ é de ordem pelo menos $m + 2$. Um ponto com esta propriedade é chamado de *ponto de aplainamento*. Se o contato entre a curva e o hiperplano osculador em s_0 é exatamente $m + 2$ então dizemos que a curva tem um ponto de *aplainamento ordinário*.

Temos então o seguinte resultado.

Proposição 3. *Um ponto $\gamma(t_0)$ é um ponto de aplainamento se, e somente se, $\kappa_m = 0$.*

Utilizando esta Proposição e a Proposição 1 do capítulo 1, obtemos

Proposição 4. *Um ponto t_0 é um ponto de aplainamento (flattening) se, e somente se, $\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(m+1)}(t)) = 0$.*

Em \mathbb{R}^3 temos um (flattening) da curva γ em t_0 se, e somente se a torção (τ) é nula neste ponto. O exemplo a seguir ilustra uma família de curvas no toro sem pontos de aplainamento.

Uma curva (q, p) no toro é uma curva γ que gira q vezes na direção longitudinal e p vezes na direção meridional.

Considerando o toro no espaço xyz obtido pela rotação do círculo de raio unitário ao redor do eixo z , com a a distância do centro deste círculo à origem, $a > 1$, temos que a curva (q, p) pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = ((a + \cos(nt)) \cos t, (a + \cos(nt)) \sin t, \sin(nt)).$$

Em [4] é obtido o seguinte resultado.

Proposição 5. *As curvas (q, p) nunca anulam a torção se, e somente se, $n^2 > 1$ e $\left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1}\right) < a < n^2 + 1$.*

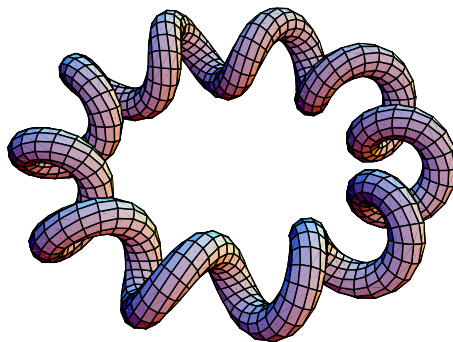


Figura 3.1: Curva $(1, 10)$ sobre o toro com $a = 5$

3.1.1 Contato entre curvas no espaço e planos

Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário. Analisaremos as singularidades da função $f_h(s) = \gamma(s) \cdot \mathbf{u}$.

Temos que $f'_h(s) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}$ é um vetor paralelo ao plano normal a $\gamma(s)$.

Logo,

$$f'_h(s) = f''_h(s) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \pm \mathbf{b}(s).$$

$$f'_h(s) = f''_h(s) = f'''_h(s) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \pm \mathbf{b}(s), \tau(s) = 0.$$

$$f'_h(s) = \dots = f_h^{(iv)}(s) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \pm \mathbf{b}(s), \tau(s) = \tau'(s) = 0.$$

Se $k(s) \neq 0$ existe um único plano que tem contato de ordem pelo menos 3 com γ em s , chamado *plano osculador*. Neste caso, o contato deste plano com a curva em s será maior se $\tau(s) = 0$, ou seja, nos pontos de aplainamento.

3.2 Contato entre Curvas e Hiperesferas

Seja \mathbb{S}^m uma hiperesfera em \mathbb{R}^{m+1} , sendo $\mathbb{S}^m = f^{-1}(0)$ onde $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{c}|^2 - r^2$.

Para analisar o contato entre uma curva γ e \mathbb{S}^m estudaremos as singularidades da função distância ao quadrado de γ em \mathbf{u} definida por

$$f_d(t) = |\gamma(t) - \mathbf{u}|^2 = (\gamma(t) - \mathbf{u}) \cdot (\gamma(t) - \mathbf{u}).$$

Considerando γ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco temos que:

$$\begin{aligned} f'_d(s) = 0 &\Leftrightarrow (\gamma(s) - \mathbf{u}) \perp \gamma'(s) \\ &\Leftrightarrow (\gamma(s) - \mathbf{u}) \in [\mathbf{n}_1(s), \dots, \mathbf{n}_m(s)] \\ &\Leftrightarrow \mathbf{u} = \gamma(s) + \sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{n}_i \\ &\Leftrightarrow \mathbf{u} - \gamma(s) = \sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{n}_i \\ f'_d(s) = f''_d(s) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \left(\sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{n}_i \right) \cdot \gamma''(s) = 0 \\ f'_d(s) = f''_d(s) = f'''_d(s) = 0 &\Leftrightarrow F_3(\gamma'(s), \gamma''(s)) - \left(\sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{n}_i \right) \cdot \gamma'''(s) = 0 \\ &\vdots \\ f'_d(s) = \dots = f_d^{(i)}(s) = 0 &\Leftrightarrow F_i(\gamma'(s), \dots, \gamma^{(i-1)}(s)) - \left(\sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{n}_i \right) \cdot \gamma^{(i)}(s) = 0 \\ &\vdots \\ f'_d(s) = \dots = f_d^{(m+1)}(s) = 0 &\Leftrightarrow F_{m+1}(\gamma'(s), \dots, \gamma^{(m)}(s)) - \left(\sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{n}_i \right) \cdot \gamma^{(m+1)}(s) = 0 \end{aligned}$$

onde F_i , $i \geq 1$ é uma função polinomial das primeiras $i - 1$ derivadas de γ .

Assim temos um sistema de m equações e m incógnitas

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{n}_i \right) \cdot \gamma''(s) &= 1 \\
\left(\sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{n}_i \right) \cdot \gamma'''(s) &= F_3 \\
&\vdots \\
\left(\sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{n}_i \right) \cdot \gamma^{(m+1)}(s) &= F_{m+1}
\end{aligned}$$

A matriz dos coeficientes é dada por

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1(s) \cdot \gamma''(s) & \mathbf{n}_2(s) \cdot \gamma''(s) & \cdots & \mathbf{n}_m(s) \cdot \gamma''(s) \\ \mathbf{n}_1(s) \cdot \gamma'''(s) & \mathbf{n}_2(s) \cdot \gamma'''(s) & \cdots & \mathbf{n}_m(s) \cdot \gamma'''(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{n}_1(s) \cdot \gamma^{(m+1)}(s) & \mathbf{n}_2(s) \cdot \gamma^{(m+1)}(s) & \cdots & \mathbf{n}_m(s) \cdot \gamma^{(m+1)}(s) \end{bmatrix}$$

Levando em conta que o conjunto $\beta = \{\gamma'(s), \gamma''(s), \dots, \gamma^{(m+1)}(s)\}$ é linearmente independente, mostraremos que $\det \mathcal{A} \neq 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\det \beta &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma''(s) \cdot \mathbf{t}(s) & \gamma''(s) \cdot \mathbf{n}_1(s) & \cdots & \gamma''(s) \cdot \mathbf{n}_m(s) \\ \gamma'''(s) \cdot \mathbf{t}(s) & \gamma'''(s) \cdot \mathbf{n}_1(s) & \cdots & \gamma'''(s) \cdot \mathbf{n}_m(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^{(m+1)}(s) \cdot \mathbf{t}(s) & \gamma^{(m+1)}(s) \cdot \mathbf{n}_1(s) & \cdots & \gamma^{(m+1)}(s) \cdot \mathbf{n}_m(s) \end{bmatrix} \\
&= 1 \cdot \det \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Como $\det \mathcal{A} \neq 0$, μ_i são unicamente determinados. Logo existe uma única hipersfera que tem contato de ordem pelo menos $m + 2$ com a curva em s . Esta hipersfera será chamada *hipersfera oscultriz*. Quando o contato desta hipersfera com γ é de ordem pelo menos $m + 3$ dizemos que γ tem *vértice* em s_0 .

3.2.1 Contato entre curvas no espaço e esferas

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Analisaremos as singularidades da função $f_d(s) = |\gamma(s) - \mathbf{u}|^2 = (\gamma(s) - \mathbf{u}) \cdot (\gamma(s) - \mathbf{u})$.

Temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f'_d(s) &= (\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{t}(s) \\ \frac{1}{2}f''_d(s) &= 1 + (\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{n}(s) \\ \frac{1}{2}f'''_d(s) &= (\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\kappa}'(s)\mathbf{n}(s) + (\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\kappa}(s)(-\boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{t}(s) + \boldsymbol{\tau}\mathbf{b}(s))\end{aligned}$$

Assim temos que $f'_d(s) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}$ está no plano normal em s . Logo,

$$\begin{aligned}f'_d(s) = f''_d(s) = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{u} = \boldsymbol{\gamma}(s) + \boldsymbol{\kappa}^{-1}(s)\mathbf{n}(s) + \mu\mathbf{b}(s), \mu \in \mathbb{R} \\ f'_d(s) = f''_d(s) = f'''_d(s) = 0 &\Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}(s) \neq 0 \text{ e } \mathbf{u} = \boldsymbol{\gamma}(s) + \frac{\mathbf{n}(s)}{\boldsymbol{\kappa}(s)} - \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'(s)}{\boldsymbol{\kappa}^2(s)\boldsymbol{\tau}(s)} \right) \mathbf{b}(s) \\ \text{ou } \boldsymbol{\tau}(s) = \boldsymbol{\kappa}'(s) = 0 &\text{ e } \mathbf{u} = \boldsymbol{\gamma}(s) + \boldsymbol{\kappa}^{-1}(s)\mathbf{n}(s) + \mu\mathbf{b}(s)\end{aligned}$$

Assim se $\boldsymbol{\kappa}(s) \neq 0$ e $\boldsymbol{\tau}(s) \neq 0$, existe uma *única* esfera que tem contato de ordem pelo menos 4 com a curva no ponto $\boldsymbol{\gamma}(s)$. Esta esfera é chamada a *esfera de curvatura* ou *esfera osculatríz* em s e o seu centro \mathbf{u} é chamado o *centro de curvatura esférica* em s .

3.2.2 Contato entre curvas planas e círculos

Seja $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \neq 0$.

Analisaremos as singularidades da função f_d em s .

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f'_d(s) &= (\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(s) \\ \frac{1}{2}f''_d(s) &= 1 + \boldsymbol{\kappa}(s)(\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(s) \\ \frac{1}{2}f'''_d(s) &= \boldsymbol{\kappa}'(s) \cdot (\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(s) - \boldsymbol{\kappa}^2(s)(\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(s)\end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
f'_d(s) = 0 &\Leftrightarrow (\gamma(s) - \mathbf{x}) \perp \mathbf{t}(s) \Leftrightarrow (\gamma(s) - \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{n}(s) \\
f'_d(s) = f''_d(s) = 0 &\Leftrightarrow 1 + \kappa(s)(\gamma(s) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(s) = 0 \\
&\Leftrightarrow 1 + \lambda \kappa(s) = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s), \kappa(s) \neq 0 \\
f'_d(s) = f''_d(s) = f'''_d(s) = 0 &\Leftrightarrow (\gamma(s) - \mathbf{x}) \cdot (\kappa'(s) \mathbf{n}(s) - \kappa^2(s) \mathbf{t}(s)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \kappa'(s) = 0
\end{aligned}$$

Temos então que o círculo osculador tem contato de ordem pelo menos 3 com a curva em $\gamma(s)$ e os vértices de γ são caracterizados por $\kappa'(s) = 0$.

Exemplo. Consideremos a elipse no plano parametrizada por

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad a \neq b, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

A fórmula para curvatura para uma curva plana $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ com parâmetro qualquer t é dada por

$$\kappa_{\gamma(t)} = \frac{x' y'' - x'' y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Deste modo,

$$\kappa_{\gamma(t)} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

Encontraremos os pontos de vértices de γ .

$$\frac{d\kappa_{\gamma(t)}}{dt} = \frac{-\frac{3}{2} ab(a^2 - b^2) \sin(2t)}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{5}{2}}}.$$

Assim,

$$\frac{d\kappa_{\gamma(t)}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \sin(2t) = 0.$$

Os pontos de vértice de γ são dados por: $(a, 0), (0, b), (-a, 0), (0, -b)$. Nestes pontos a curva γ tem contato de ordem pelo menos 4 com os respectivos círculos osculadores.

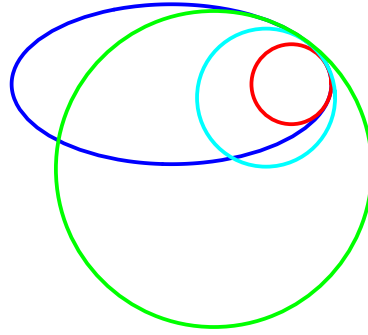


Figura 3.2: A elipse $(4\cos t, 2\sin t)$ e os círculos osculadores em $t = 0, t = \frac{\pi}{8}, t = \frac{\pi}{4}$.

3.3 Contato entre Curvas e k -planos e k -esferas

Analisaremos agora o contato no caso em que a subvariedade é um k -plano. Neste caso, o k -plano osculador de uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ é o subespaço gerado por $[\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(k)}]$.

Proposição 6. *O k -plano osculador de γ no ponto $\gamma(t)$, $1 \leq k < m$, tem contato de ordem pelo menos $(k+1)$ com a curva nesse ponto.*

Demonstração. Pela definição anterior, a função de contato do k -plano osculador com a curva γ no ponto $\gamma(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} f \circ \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{m+1-k} \\ t &\mapsto (f_1 \circ \gamma(t), f_2 \circ \gamma(t), \dots, f_{m+1-k} \circ \gamma(t)) \end{aligned}$$

onde $f_j^{-1}(0)$ são os hiperplanos ortogonais aos vetores normais $\mathbf{n}_{k-1+j}(t)$, $j = 1, \dots, m+1-k$ com $1 \leq k < m$.

Assim, a j -ésima coordenada de $f \circ \gamma(t)$ é a função de contato no ponto $\gamma(t)$ da curva γ com o hiperplano ortogonal a $\mathbf{n}_{k-1+j}(t)$, $j = 1, \dots, m+1-k$ e definimos $(f_j \circ \gamma)(t) = h(t, \mathbf{n}_{k-1+j}(t))$, $j = 1, \dots, m+1-k$, sendo h a função altura de γ no ponto $\gamma(t)$ associado ao vetor $\mathbf{n}_{k-1+j}(t)$.

Derivando a função de contato e substituindo cada coordenada por seu valor, obtemos:

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)^{(i)}(t) &= (h^{(i)}(t, \mathbf{n}_k(t)), h^{(i)}(t, \mathbf{n}_{k+1}(t)), \dots, h^{(i)}(t, \mathbf{n}_m(t))) \\ &= (\mathbf{n}_k(t) \cdot \gamma^{(i)}(t), \mathbf{n}_{k+1}(t) \cdot \gamma^{(i)}(t), \dots, \mathbf{n}_m(t) \cdot \gamma^{(i)}(t)), \quad 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Usando o fato $\mathbf{n}_{k-1+j}(t) \cdot \gamma^{(i)}(t) = 0$, $j = 1, \dots, m+1-k$, provamos que as derivadas de $(f \circ \gamma)(t)$ se anulam até a ordem k .

Portanto, os k -planos osculadores, $1 \leq k < m$ têm contato de ordem pelo menos $(k+1)$ com a curva em $\gamma(t)$.

□

Do mesmo modo que para k -planos, analisaremos o contato da curva com as k -esferas.

Definição 1. Quando $1 \leq k \leq m - 1$, definimos a k -esfera oscultriz de uma curva em \mathbb{R}^{m+1} como a intersecção da hiperesfera oscultriz com o $(k + 1)$ -plano osculador no ponto.

Agora vamos encontrar o centro da k -esfera oscultriz. Seja γ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco,

$$C(s) = \gamma(s) + c_1(s)\mathbf{n}_1(s) + c_2(s)\mathbf{n}_2(s) + \cdots + c_m(s)\mathbf{n}_m(s)$$

o centro da hiperesfera oscultriz e

$$\pi : X = \gamma(s) + \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \lambda_1(s)\mathbf{n}_1(s) + \cdots + \lambda_k(s)\mathbf{n}_k(s)$$

o $(k + 1)$ -plano osculador.

Fazendo a intersecção entre π e a hiperesfera oscultriz teremos uma k -esfera de centro C_k . Determinaremos este centro.

Temos que $C_k \in \pi$, assim

$$C_k(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \lambda_1(s)\mathbf{n}_1(s) + \cdots + \lambda_k(s)\mathbf{n}_k(s).$$

Como $C(s) - C_k(s) \in [\mathbf{t}(s), \cdots, \mathbf{n}_k(s)]^\perp = [\mathbf{n}_{k+1}(s), \cdots, \mathbf{n}_m(s)]$, temos

$$\begin{aligned} C(s) - C_k(s) &= -\lambda(s)\mathbf{t}(s) + (c_1(s) - \lambda_1(s))\mathbf{n}_1(s) + \cdots + (c_k(s) - \lambda_k(s))\mathbf{n}_k(s) \\ &\quad + c_{k+1}(s)\mathbf{n}_{k+1}(s) + \cdots + c_m(s)\mathbf{n}_m(s). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= 0 \\ c_1(s) - \lambda_1(s) &= 0 \\ &\vdots \\ c_k(s) - \lambda_k(s) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$C_k(s) = \gamma(s) + c_1(s)\mathbf{n}_1(s) + c_2(s)\mathbf{n}_2(s) + \cdots + c_k(s)\mathbf{n}_k(s) \quad (3.1)$$

é o centro da k -esfera oscultriz.

O próximo resultado caracteriza a ordem de contato entre a curva e a k -esfera oscultriz.

Proposição 7. *A k -esfera oscultriz de $\gamma \subset \mathbb{R}^{m+1}$ no ponto $\gamma(t)$ tem contato de ordem pelo menos $(k+2)$ com a curva nesse ponto, $1 \leq k \leq m-1$.*

Demonstração. Temos pela definição de k -esfera oscultriz que $S^k = H_{k+1} \cap S^m$, onde H_{k+1} é o $(k+1)$ -plano osculador e S^m a hipersfera oscultriz.

Logo a função f de contato de S^k com γ é dada por

$$\begin{aligned} f \circ \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{m-k+1} \\ t &\mapsto (f_1 \circ \gamma(t), \dots, f_{m-k} \circ \gamma(t), f_d \circ \gamma(t)) \end{aligned}$$

onde $f_j^{-1}(0), j = 1, \dots, m-k$ são os hiperplanos ortogonais aos vetores normais \mathbf{n}_{k-1+j} , $j = 1, \dots, m-k$ e $f_d^{-1}(0)$ é a hipersfera oscultriz.

Como S^m tem contato de ordem pelo menos $m+2$ e H_{k+1} tem contato de ordem pelo menos $k+2$ com γ , temos que

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= 0 \\ (f \circ \gamma)''(t) &= 0 \\ &\vdots \\ (f \circ \gamma)^{k+1}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, as k -esferas oscultrizes têm contato de ordem pelo menos $(k+2)$ com a curva em $\gamma(t)$. □

Capítulo 4

CURVAS FOCAIS

Neste capítulo estudamos a geometria da curva focal, que é uma generalização do clássico conceito de evoluta, e obtemos em termos das curvaturas focais, condições necessárias e suficientes para um ponto ser de vértice.

Uma curva plana tem vértice num ponto se este ponto é crítico para a função curvatura. Em tal ponto, como visto no capítulo 2, a curva tem maior ordem de contato com seu círculo osculador. Além disto, a evoluta não é regular neste ponto. Estes resultados são generalizados para curvas em \mathbb{R}^{m+1} . São obtidas também relações entre as curvaturas da curva com as curvaturas da curva focal.

Abordamos também na seção 4.2 alguns resultados específicos para curvas em \mathbb{R}^3 envolvendo vértices de Darboux e suas relações com a curva focal. As principais referências utilizadas foram [14] e [15].

4.1 Curva Focal e Vértices

Definição 2. A curva $C_\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ consistindo dos centros das hipersferas osculatrizes de uma curva (sem aplainamentos) $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ é chamada curva focal ou evoluta generalizada.

Como vimos o centro da hipersfera osculatriz em um ponto $\gamma(s)$ está no hiperplano normal da curva. Podemos parametrizar C_γ em termos dos vetores do referencial de Frenet como

$$C_\gamma(s) = (\gamma + c_1 \mathbf{n}_1 + c_2 \mathbf{n}_2 + \dots + c_m \mathbf{n}_m)(s)$$

onde os coeficientes c_1, \dots, c_m são funções diferenciáveis do parâmetro da curva γ , que denominaremos *i-ésima curvatura focal da curva γ* .

Consideramos a seguir alguns resultados envolvendo o vetor velocidade da curva focal. Neste caso, obtemos uma expressão para este vetor e analisamos o que ocorre nos pontos singulares da curva focal.

Lema 1. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ uma curva boa em \mathbb{R}^{m+1} . O vetor velocidade da curva focal de γ em t é proporcional ao vetor normal $n_m(t)$ de γ .*

Demonstração. Considere a família de funções $f_d : I \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ utilizada no capítulo 2 para obter o centro da hipersfera oscultriz definida por:

$$f_d(t) = \frac{1}{2} |\gamma(t) - \mathbf{x}|^2.$$

Usando o fato que $-f_d = \gamma \cdot \mathbf{x} - \frac{|\gamma|^2}{2} - \frac{|\mathbf{x}|^2}{2}$ e escrevendo $g = \frac{|\gamma|^2}{2}$, temos o seguinte sistema de $(m+1)$ equações que definem a curva focal $\mathbf{x}(t)$ de γ :

$$\begin{aligned} \gamma' \cdot \mathbf{x}(t) - g' &= 0 \\ \gamma'' \cdot \mathbf{x}(t) - g'' &= 0 \\ &\vdots \\ \gamma^{(m+1)} \cdot \mathbf{x}(t) - g^{(m+1)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Derivando cada equação em relação a t , obtemos o seguinte sistema de equações :

$$\begin{aligned} \gamma' \cdot \mathbf{x}'(t) + \gamma''(t) \cdot \mathbf{x}(t) - g'' &= 0 \\ \gamma'' \cdot \mathbf{x}'(t) + \gamma''' \cdot \mathbf{x}(t) - g''' &= 0 \\ &\vdots \\ \gamma^{(m)} \cdot \mathbf{x}'(t) + \gamma^{(m+1)} \cdot \mathbf{x}(t) - g^{(m+1)} &= 0 \\ \gamma^{(m+1)} \cdot \mathbf{x}'(t) + \gamma^{(m+2)} \cdot \mathbf{x}(t) - g^{(m+2)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Combinando a (i) -ésima equação do sistema (4.2) com a $(i+1)$ -ésima equação do sistema (4.1), para $i = 1, \dots, m$, obtemos:

$$\begin{aligned} \gamma' \cdot \mathbf{x}'(t) &= 0 \\ \gamma'' \cdot \mathbf{x}'(t) &= 0 \\ &\vdots \\ \gamma^{(m)} \cdot \mathbf{x}'(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Mostramos assim que o vetor velocidade $\mathbf{x}'(t)$ é ortogonal ao hiperplano osculador, isto é, $\mathbf{x}'(t)$ é proporcional ao vetor normal \mathbf{n}_m . \square

Vejamos o caso específico de uma curva plana.

No \mathbb{R}^2 podemos analisar geometricamente os pontos de vértice e o vetor velocidade da curva focal.

Consideremos $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. A curva focal é parametrizada por $C_\gamma(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$, e neste caso chamada evoluta.

Derivando $C_\gamma(s)$ obtemos

$$\begin{aligned} C'_\gamma(s) &= \gamma'(s) + \left(\frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \right) \mathbf{n}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}'(s) \\ &= \left(\frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \right) \mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Observamos que o vetor velocidade é proporcional a $\mathbf{n}(s)$ (vetor normal da curva no \mathbb{R}^2).

Como vimos no capítulo 2 os pontos onde $\kappa'(s) = 0$ são os pontos de vértice da curva γ . Em tais pontos $C'_\gamma = 0$, ou seja, C_γ não é uma curva regular.

A figura a seguir ilustra uma curva e sua respectiva curva focal (evoluta). Observamos que os pontos de vértice de γ correspondem a cúspides em sua evoluta. Esta correspondência será mostrada no capítulo 4.

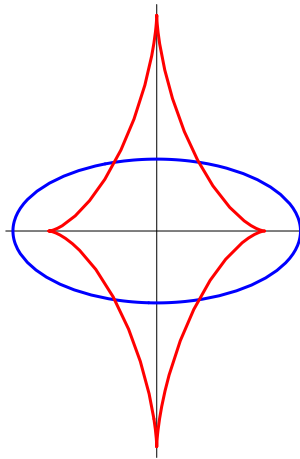


Figura 4.1: Elipse e sua evoluta.

No caso de curvas em \mathbb{R}^{m+1} temos o seguinte resultado.

Lema 2. *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ uma curva boa parametrizada pelo comprimento de arco s com $\kappa_m \neq 0$. A derivada de sua curva focal C_γ em relação a s é*

$$C'_\gamma(s) = (c'_m(s) + c_{m-1}(s)\kappa_m(s))\mathbf{n}_m(s).$$

Demonstração. Considere a curva focal de γ parametrizada por

$$C_\gamma(s) = (\gamma + c_1\mathbf{n}_1 + \dots + c_m\mathbf{n}_m)(s).$$

Derivando C_γ em relação ao parâmetro comprimento de arco de γ e usando as equações de Frenet obtemos

$$\begin{aligned}
C'_\gamma &= \mathbf{t} + c_1(-\kappa_1\mathbf{t} + \kappa_2\mathbf{n}_2) + \cdots + c_m(-\kappa_m\mathbf{n}_{m-1}) \\
&\quad + c'_1\mathbf{n}_1 + \cdots + c'_m\mathbf{n}_m \\
&= (1 - c_1\kappa_1)\mathbf{t} + \cdots + (c'_i + c_{i-1}\kappa_i - c_{i+1}\kappa_{i+1})\mathbf{n}_i + \cdots \\
&\quad + (c'_m + c_{m-1}\kappa_m)\mathbf{n}_m.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Pelo Lema 1, as primeiras $(m - 1)$ componentes de C'_γ se anulam. Consequentemente

$$C'_\gamma(s) = (c'_m(s) + c_{m-1}(s)\kappa_m(s))\mathbf{n}_m(s).$$

□

Observamos que em consequência das equações (4.4) do Lema 2 e do Lema 1 temos que

$$\begin{aligned}
1 &= \kappa_1 c_1 \\
c'_1 &= c_2 \kappa_2 \\
c'_2 &= -c_1 \kappa_2 + c_3 \kappa_3 \\
&\vdots \\
c'_i &= -c_{i-1} \kappa_i + c_{i+1} \kappa_{i+1} \\
&\vdots \\
c'_{m-1} &= -c_{m-2} \kappa_{m-1} + c_m \kappa_m.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Além disto, se γ for uma curva numa hipersfera $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ de raio R_m temos do fato que $R_m^2 = |C_\gamma - \gamma|^2$ é constante, que

$$\begin{aligned}
(R_m^2)' &= ((C_\gamma - \gamma) \cdot (C_\gamma - \gamma))' \\
&= 2(C'_\gamma - \gamma') \cdot (C_\gamma - \gamma) \\
&= 2((c'_m + c_{m-1}\kappa_m)\mathbf{n}_m - \mathbf{t}) \cdot (c_1\mathbf{n}_1 + \cdots + c_m\mathbf{n}_m) \\
&= 2c_m(c'_m + c_{m-1}\kappa_m).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Logo, para $c_m \neq 0$ temos $c'_m = -c_{m-1}\kappa_m$.

Temos assim o seguinte resultado

Teorema 1. *As curvaturas focais de uma curva parametrizada por comprimento de arco $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ sobre uma hipersfera satisfazem as seguintes equações*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ c_1' \\ c_2' \\ c_3' \\ \vdots \\ c_{m-1}' \\ c_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & & & \\ \vdots & & & & -\kappa_{m-1} & 0 & \kappa_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\kappa_m & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{m-1} \\ c_m \end{pmatrix}$$

Podemos obter as curvaturas euclidianas de uma curva γ a partir das curvaturas focais da curva. Mostraremos que vale a seguinte fórmula

Teorema 2. *As curvaturas euclidianas de uma curva boa $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ (com $\kappa_m \neq 0$), parametrizada por comprimento de arco, são dadas em termos das curvaturas focais de γ pela fórmula*

$$\kappa_i = \frac{c_1 c_1' + c_2 c_2' + \dots + c_{i-1} c_{i-1}'}{c_{i-1} c_i}.$$

Demonstração. Vamos mostrar por indução.

Usando as equações (4.5), obtemos que:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{c_1} \\ \kappa_2 &= \frac{c_1'}{c_2} = \frac{c_1 c_1'}{c_1 c_2} \\ \kappa_3 &= \frac{c_2' + c_1 \kappa_2}{c_3} = \frac{c_2' + c_1 \cdot \frac{c_1'}{c_2}}{c_3} = \frac{c_2 c_2' + c_1 \cdot c_1'}{c_2 c_3}. \end{aligned}$$

Suponha que

$$\kappa_i = \frac{c_{i-1} c_{i-1}' + \dots + c_2 c_2' + c_1 c_1'}{c_{i-1} c_i}. \quad (4.7)$$

As equações escalares do Teorema 1 implicam que

$$c_{i+1} \kappa_{i+1} = c_i' + c_{i-1} \kappa_i.$$

Substituindo na equação (4.7) temos:

$$\begin{aligned} c_{i+1}\kappa_{i+1} &= c'_i + \frac{c_{i-1}c'_{i-1} + \cdots + c_2c'_2 + c_1c'_1}{c_i} \\ &= \frac{c_i c'_i + c_{i-1}c'_{i-1} + \cdots + c_2c'_2 + c_1c'_1}{c_i}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\kappa_{i+1} = \frac{c_i c'_i + c_{i-1}c'_{i-1} + \cdots + c_2c'_2 + c_1c'_1}{c_i c_{i+1}}.$$

□

Do Teorema 2 concluímos que a primeira curvatura focal c_1 é $\frac{1}{\kappa_1}$. Além disto, se γ for uma curva no \mathbb{R}^3 , $c_2 = -\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}$, onde κ e τ são a curvatura e torção, respectivamente.

Logo,

$$C_\gamma = \gamma + \frac{1}{\kappa_1} \mathbf{n} - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \mathbf{b}.$$



Figura 4.2: Curva (1,3) no toro e sua curva focal.



Figura 4.3: Curva (1,7) no toro e sua curva focal.

Observe agora que se γ tem um vértice em t_0 , γ tem contato de ordem maior ou igual a $(m+3)$ com sua hipersfera oscultriz. Tem-se assim o seguinte resultado

Proposição 8. *Um ponto de não-aplainamento de uma curva boa em \mathbb{R}^{m+1} é um vértice se, e somente se, o vetor velocidade da curva focal é zero.*

Demonstração. Seja $\gamma(t)$ um vértice de γ , tal que $\gamma(t)$ não é um ponto de aplainamento. Então o sistema de equações (4.1) obtido na demonstração do Lema 1, também satisfaz a equação:

$$\gamma^{(m+2)} \cdot \mathbf{x}(t) - g^{(m+2)} = 0$$

a qual combinando com a última equação do sistema (4.2) resulta em

$$\gamma^{(m+2)} \cdot \mathbf{x}(t) - (\gamma^{(m+1)} \cdot \mathbf{x}'(t) + \gamma^{(m+2)} \cdot \mathbf{x}(t)) = 0 \Rightarrow \gamma^{(m+1)} \cdot \mathbf{x}'(t) = 0.$$

Esta equação junto com o sistema (4.3) implica que $\mathbf{x}'(t) = 0$.

Suponha agora que $\gamma(t_0)$ não é vértice, então o ponto correspondente da curva focal satisfaz a seguinte relação:

$$\gamma^{(m+2)} \cdot \mathbf{x}(t_0) - g^{(m+2)}(t_0) \neq 0$$

a qual junto com a última equação de (4.2), para $t = t_0$, implica que $\gamma^{(m+1)} \cdot \mathbf{x}'(t_0) \neq 0$, ou seja, $\mathbf{x}'(t_0) \neq 0$.

Portanto, se $\mathbf{x}'(t_0) = 0$, $\gamma(t_0)$ é vértice em um ponto de não-aplainamento. □

Esta Proposição juntamente com o Lema 2 nos permite caracterizar vértices de curvas em \mathbb{R}^{m+1} .

Teorema 3. *Um ponto de não-aplainamento de uma curva boa parametrizada por comprimento de arco em \mathbb{R}^{m+1} é um vértice se, e somente se,*

$$c'_m(s) + c_{m-1}(s)\kappa_m(s) = 0$$

nesse ponto.

Demonstração. Pelo Lema 2, temos que:

$$C'_\gamma(s) = (c'_m(s) + c_{m-1}(s)\kappa_m(s))\mathbf{n}_m(s).$$

Logo pela Proposição 8 γ tem vértice neste ponto se, e somente se, $C'_\gamma = 0$, o que equivale a $c'_m(s) + c_{m-1}(s)\kappa_m(s) = 0$. □

Observe que, se γ é uma curva numa hipersfera, C_γ é constante e, portanto

$$c'_m(s) + c_{m-1}(s)\kappa_m(s) \equiv 0.$$

Por outro lado, se $c'_m(s) + c_{m-1}(s)\kappa_m(s) \equiv 0$, C_γ é constante e, em virtude de (4.6), $R_m = |C_\gamma - \gamma|$ é constante. Assim obtemos a seguinte caracterização para curvas esféricas.

Teorema 4. *Uma curva boa parametrizada por comprimento de arco em \mathbb{R}^{m+1} , está sobre uma hiperesfera se, e somente se, $c'_m(s) + c_{m-1}(s)\kappa_m(s) \equiv 0$.*

Observe que num ponto de vértice o raio da hiperesfera oscultriz é crítico.

De fato, pela equação (4.6)

$$(R_m^2(s))' = 2c_m(c'_m + c_{m-1}\kappa_m).$$

Logo, se $c'_m + c_{m-1}\kappa_m = 0$, $R'_m(s) = 0$, ou seja, o raio da hiperesfera oscultriz é crítico nos pontos de vértice.

Porém a recíproca não é verdadeira para curvas em \mathbb{R}^{m+1} com $m > 1$.

Considere a hélice circular

$$\gamma(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, s \right).$$

$$\text{Neste caso, } (R^2(s))' = -2 \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \left(\left(-\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' + \frac{\tau}{\kappa} \right).$$

Como $\kappa = \text{constante}$, $\kappa' = 0$, o que implica que R é crítico. No entanto, $c'_m + c_{m-1}\kappa_m = \frac{\tau}{\kappa} = \text{constante} \neq 0$.

A seguir damos condições necessárias e suficientes, em termos das curvaturas focais, para o raio da k -esfera oscultriz de uma curva genérica em \mathbb{R}^{m+1} ser crítico.

Teorema 5. *Para $1 \leq k < m$ o raio da k -esfera oscultriz de uma curva genérica em \mathbb{R}^{m+1} é crítico se, e somente se, $c_k(s) = 0$ ou $c_{k+1}(s) = 0$. Além disso, $c_1(s)$ nunca se anula.*

Demonstração. Vimos no capítulo 2 na equação (3.1) que o centro da k -esfera oscultriz é dada por

$$C_k(s) = \gamma(s) + c_1(s)\mathbf{n}_1(s) + c_2(s)\mathbf{n}_2(s) + \cdots + c_k(s)\mathbf{n}_k(s).$$

Temos então que $R_k^2 = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_k^2$.

Assim,

$$R_k R'_k = c_1 c'_1 + \cdots + c_k c'_k.$$

Combinando esta equação com a equação (4.7) do Teorema 2 temos

$$c_{k+1} \kappa_{k+1} = \frac{R_k R'_k}{c_k}.$$

Logo

$$R_k R'_k = c_k c_{k+1} \kappa_{k+1}.$$

Para uma curva genérica temos que $\kappa_1(s), \kappa_2(s), \dots, \kappa_{m-1}(s)$ nunca se anulam e $\kappa_m(s)$ pode se anular em pontos isolados.

Consequentemente, para uma curva genérica em \mathbb{R}^{m+1} , $m > 1$, $R'_k = 0$, se, e somente se, $c_k = 0$ ou $c_{k+1} = 0$, $1 \leq k < m$.

Além disso, para uma curva regular, a função $c_1 = R_1 = \frac{1}{\kappa_1}$ nunca se anula. \square

Agora obteremos os vetores do referencial de Frenet da curva C_γ em termos dos vetores do referencial de Frenet da curva γ , bem como uma relação entre as curvaturas euclidianas K_1, \dots, K_m de C_γ com as de γ .

Teorema 6. *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ uma curva boa sem aplainamentos. Escreva $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ para suas curvaturas euclidianas e $\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ para seu referencial de Frenet. Para cada não-vértice $\gamma(s)$ de γ , escreva $\varepsilon(s)$ para o sinal de $(c'_m + c_{m-1}\kappa_m)(s)$ e $\delta_k(s)$ para o sinal de $(-1)^k \varepsilon(s) \kappa_m(s)$, $k = 1, \dots, m$.*

Para qualquer não-vértice de γ vale o seguinte:

a) *Os vetores do referencial de Frenet $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_m\}$ de C_γ são dados por $\mathbf{T} = \varepsilon \mathbf{n}_m$, $\mathbf{N}_k = \delta_k \mathbf{n}_{m-k}$, para $k = 1, \dots, m-1$ e $\mathbf{N}_m = \pm \mathbf{t}$, onde o sinal em $\pm \mathbf{t}$ é escolhido de modo a obter uma base positiva.*

b) *As curvaturas euclidianas K_1, \dots, K_m da curva focal de γ , estão relacionadas àquelas de γ por*

$$\frac{K_1}{|\kappa_m|} = \frac{K_2}{\kappa_{m-1}} = \dots = \frac{|K_m|}{\kappa_1} = \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} = \frac{1}{|C'_\gamma|}$$

o sinal de K_m é igual a δ_m vezes o sinal de $\pm \mathbf{t}$.

Consequentemente, a matriz de Frenet de C_γ é dada por

$$\frac{1}{|C'_\gamma|} \begin{bmatrix} 0 & |\kappa_m| & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -|\kappa_m| & 0 & \kappa_{m-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_{m-1} & 0 & \kappa_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_{m-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & -\kappa_3 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & 0 & -\kappa_2 & 0 & \mp \delta_m \kappa_1 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 & \pm \delta_m \kappa_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Demonstração. a) Seja $\delta(s)$ o parâmetro comprimento de arco de C_γ . Vamos assumir a mesma ori-

entação para a curva γ parametrizada por comprimento de arco s e a curva C_γ com o parâmetro $\delta(s)$.

Para qualquer ponto de não-vértice de γ , o Teorema 3 e o Lema 2 implicam que

$$\delta(s) = \int_{s_0}^s |C'_\gamma(t)| dt = \int_{s_0}^s |c'_m + c_{m-1}\kappa_m| dt$$

$$\text{Logo, } \frac{ds}{d\delta} = \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|}.$$

Assim, o vetor tangente unitário de C_γ é dado por:

$$\mathbf{T} = \frac{(c'_m + c_{m-1}\kappa_m)}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \mathbf{n}_m = \varepsilon \mathbf{n}_m. \quad (4.8)$$

Derivando (4.8) em relação a δ , aplicando as equações de Frenet de γ e levando em conta que $\kappa_1, \dots, \kappa_{m-1}$ são sempre positivas, obtemos

$$\begin{aligned} K_1 \mathbf{N}_1 &= \frac{d\mathbf{T}}{d\delta} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{d\delta} = \varepsilon \frac{d\mathbf{n}_m}{ds} \cdot \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \\ &= \varepsilon(-\kappa_m) \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \mathbf{n}_{m-1}. \text{ Logo} \\ \mathbf{N}_1 &= \delta_1 \mathbf{n}_{m-1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A curvatura K_1 de C_γ , é calculada do seguinte modo

$$\begin{aligned} |K_1 \mathbf{N}_1| &= \left| \frac{\varepsilon(-\kappa_m)}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \right| \cdot |\mathbf{n}_{m-1}| \\ K_1 &= \frac{|\kappa_m|}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo derivando (4.9) em relação a δ obtemos:

$$\begin{aligned} -K_1 \mathbf{T} + K_2 \mathbf{N}_2 &= \frac{d\mathbf{N}_1}{d\delta} = \frac{d\mathbf{N}_1}{ds} \frac{ds}{d\delta} \\ &= \delta_1 \frac{d(\mathbf{n}_{m-1})}{ds} \frac{ds}{d\delta} \\ &= \delta_1 (-\kappa_{m-1} \mathbf{n}_{m-2} + \kappa_m \mathbf{n}_m) \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|}. \end{aligned}$$

Para o vetor \mathbf{N}_2 de C_γ , temos

$$K_2 \mathbf{N}_2 = \delta_1 \cdot (-\kappa_{m-1}) \cdot \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \cdot \mathbf{n}_{m-2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_2 &= -\delta_1 \kappa_{m-1} \frac{1}{|c'_m + c_{m-1} \kappa_m|} \mathbf{n}_{m-2} \\ &= \delta_2 \mathbf{n}_{m-2}.\end{aligned}$$

Para obter a curvatura K_2 procedemos do seguinte modo

$$\begin{aligned}|K_2 \mathbf{N}_2| &= \left| \frac{\delta_2 \kappa_{m-1}}{|c'_m + c_{m-1} \kappa_m|} \right| \cdot |\mathbf{n}_{m-2}|. \text{ Assim} \\ K_2 &= \frac{\kappa_{m-1}}{|c'_m + c_{m-1} \kappa_m|}.\end{aligned}$$

Como $\frac{d\mathbf{N}_2}{d\delta} = -K_2 \mathbf{N}_1 + K_3 \mathbf{N}_3$, obtemos o vetor \mathbf{N}_3 através dos cálculos a seguir.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{N}_2}{d\delta} &= \frac{d\mathbf{N}_2}{ds} \frac{ds}{d\delta} \\ &= \delta_2 \frac{d(\mathbf{n}_{m-2})}{ds} \frac{ds}{d\delta} \\ &= \delta_2 (-\kappa_{m-2} \mathbf{n}_{m-3} + \kappa_{m-1} \mathbf{n}_{m-1}) \frac{1}{|c'_m + c_{m-1} \kappa_m|} \\ &= \delta_2 (-\kappa_{m-2}) \frac{1}{|c'_m + c_{m-1} \kappa_m|} \mathbf{n}_{m-3} \\ &\quad + \delta_2 \kappa_{m-1} \frac{1}{|c'_m + c_{m-1} \kappa_m|} \mathbf{n}_{m-1}.\end{aligned}$$

Calculando a curvatura K_3

$$\begin{aligned}K_3 \mathbf{N}_3 &= \delta_2 \cdot (-\kappa_{m-2}) \cdot \frac{1}{|c'_m + c_{m-1} \kappa_m|} \mathbf{n}_{m-3}. \text{ Logo,} \\ \mathbf{N}_3 &= \delta_3 \cdot \frac{\kappa_{m-2}}{|c'_m + c_{m-1} \kappa_m|} \mathbf{n}_{m-3} \\ &= \delta_3 \mathbf{n}_{m-3}.\end{aligned}$$

E assim obtemos a curvatura K_3

$$\begin{aligned}|K_3 \mathbf{N}_3| &= \left| \frac{\varepsilon(s) \kappa_{m-2}}{|c'_m + c_{m-1} \kappa_m|} \right| \cdot |\mathbf{n}_{m-3}|. \text{ Logo} \\ K_3 &= \frac{\kappa_{m-2}}{|c'_m + c_{m-1} \kappa_m|}.\end{aligned}$$

Seguindo do mesmo modo calculamos o vetor \mathbf{N}_{i+1} , como $\frac{d\mathbf{N}_i}{d\delta} = -K_i \mathbf{N}_{i-1} + K_{i+1} \mathbf{N}_{i+1}$, obte-

mos

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{N}_i}{d\delta} &= \frac{d\mathbf{N}_i}{ds} \frac{ds}{d\delta} \\
 &= \delta_i \frac{d(\mathbf{n}_{m-i})}{ds} \frac{ds}{d\delta} \\
 &= \frac{\delta_i(-\kappa_{m-i}\mathbf{n}_{m-i-1} + \kappa_{m-i+1}\mathbf{n}_{m-i+1})}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|}.
 \end{aligned}$$

Deste modo, temos

$$\begin{aligned}
 K_{i+1}\mathbf{N}_{i+1} &= \frac{\delta_{i+1}\kappa_{m-i}}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|}\mathbf{n}_{m-i+1}). \text{ Assim,} \\
 \mathbf{N}_{i+1} &= \delta_{i+1}\mathbf{n}_{m-i+1}.
 \end{aligned}$$

E conseqüentemente para a curvatura K_{i+1} temos

$$\begin{aligned}
 |K_{i+1}\mathbf{N}_{i+1}| &= \left| \frac{\delta_{i+1}\kappa_{m-i}}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \right| \cdot |\mathbf{n}_{m-i+1}|. \text{ Portanto} \\
 K_{i+1} &= \frac{\kappa_{m-i}}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|}.
 \end{aligned}$$

Agora resta encontrar o vetor \mathbf{N}_m e a curvatura K_m . Temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_m &= (-1)^m \cdot \varepsilon \cdot \kappa_m \mathbf{n}_{m-m} \\
 &= (-1)^m \cdot \varepsilon \cdot \kappa_m \mathbf{t} \\
 &= \delta_m \mathbf{t}.
 \end{aligned}$$

Assim

$$K_m = \frac{\kappa_1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|}.$$

b) Como obtido no item (a), temos

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{\kappa_m}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \\
K_2 &= \frac{\kappa_{m-1}}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \\
K_3 &= \frac{\kappa_{m-2}}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \\
&\vdots \\
K_{i+1} &= \frac{\kappa_{m-i}}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \\
&\vdots \\
K_m &= \frac{\kappa_1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|}.
\end{aligned}$$

Destas igualdades, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{K_1}{\kappa_m} &= \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \\
\frac{K_2}{\kappa_{m-1}} &= \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|} \\
&\vdots \\
\frac{K_{i+1}}{\kappa_{m-i}} &= \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|}.
\end{aligned}$$

Logo, as curvaturas K_1, K_2, \dots, K_m de C_γ , estão relacionadas com as curvaturas de γ , por

$$\frac{K_1}{|\kappa_m|} = \frac{K_2}{\kappa_{m-1}} = \dots = \frac{|K_m|}{\kappa_1} = \frac{1}{|c'_m + c_{m-1}\kappa_m|}.$$

□

Como vimos na equação (4.6), o raio R_m da hiperesfera oscultriz é crítico se, e somente se

$$c_m = 0 \text{ ou } c'_m + c_{m-1}\kappa_m = 0.$$

Chamaremos de *pseudo-vértice* um ponto em que $c_m = 0$. Com base nesta definição temos como consequência do Teorema 4 o seguinte resultado.

Proposição 9. *O raio da hiperesfera oscultriz de uma curva boa em \mathbb{R}^{m+1} , parametrizada por comprimento de arco é crítico se, e somente se, $c_m = 0$ ou $c'_m + c_{m-1}\kappa_m = 0$ naquele ponto.*

Demonstração. De fato, o raio R_m da hiperesfera oscultriz satisfaz $R_m^2 = |C_\gamma - \gamma|^2$. Temos da equação (4.6) que

$$(R_m^2)' = 2c_m(c_m' + c_{m-1}\kappa_m).$$

Segue que $(R_m^2)' = 0 \Leftrightarrow c_m = 0$ ou $c_m' + c_{m-1}\kappa_m = 0$, ou seja, se e somente se, γ tem um pseudo-vértice. \square

Corolário 1. *Em um pseudo-vértice de uma curva diferenciável em \mathbb{R}^{m+1} , ambos o raio da hipersfera oscultriz e o raio da $(m-1)$ -esfera são críticos.*

Demonstração. Já vimos que o raio da hipersfera oscultriz é crítico num pseudo-vértice.

Pelo Teorema 5 ($k = m-1$) o raio da $(m-1)$ -esfera oscultriz também é crítico. \square

Podemos interpretar geometricamente a curvatura focal c_m em um ponto de uma curva diferenciável em \mathbb{R}^{m+1} como a distância com sinal entre o hiperplano osculador e o centro da hipersfera oscultriz naquele ponto.

De fato, o centro da hipersfera oscultriz é

$C = \gamma(s) + c_1\mathbf{n}_1(s) + \cdots + c_m\mathbf{n}_m(s)$ e $\mathbf{n}_m(s)$ é o vetor normal do hiperplano osculador.

Deste modo,

$$|(C - \gamma(s)) \cdot (\mathbf{n}_m(s))| = |(c_1\mathbf{n}_1(s) + \cdots + c_m\mathbf{n}_m(s)) \cdot (\mathbf{n}_m(s))| = |c_m|.$$

4.2 Curva focal e vértice de Darboux

Nesta seção estudamos os vértices de Darboux e relacionamos com os resultados sobre curva focal. Quando um ponto se move ao longo de uma curva γ em \mathbb{R}^3 , o triedro de Frenet $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ paralelamente transladado até a origem, define um movimento rígido em torno da origem chamado *movimento de Frenet*. O eixo instantâneo de rotação do movimento de Frenet é chamado de *eixo de Darboux*. Determinamos o eixo de Darboux em um ponto pelo núcleo da matriz de Frenet na base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. De fato, a representação matricial é dada por

$$\mathcal{M}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que \mathbf{v} é uma direção fixa se $\mathcal{M}(s)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Considerando o polinômio característico $\det(\mathcal{M}(s) - \lambda I)$ temos que $\lambda = 0$ é a única raiz real.

Como estamos interessados na direção que é mantida fixa, consideramos apenas os autovalores reais, ou seja, $\lambda = 0$. Assim, $\tilde{\mathbf{d}} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$ é um autovetor associado a este autovalor.

O vetor normalizado de Darboux é dado por

$$\mathbf{d} = \frac{\tilde{\mathbf{d}}}{(\tau^2 + \kappa^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Os vetores do triedro de Frenet $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ e o vetor \mathbf{d} descrevem quatro curvas na esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, chamadas de *indicatriz tangente*, *indicatriz normal*, *indicatriz binormal* e de *indicatriz de Darboux* da curva, respectivamente.

Um ponto da curva onde o eixo de Darboux é estacionário, isto é, $\tilde{\mathbf{d}}' = 0$ é chamado de *vértice de Darboux*.

Agora definimos uma *hélice generalizada* e relacionamos com os resultados obtidos para as curvas focais.

Definição 3. Uma hélice generalizada é uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que vetores tangentes formam um ângulo constante com algum vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

A próxima proposição é um resultado clássico da geometria diferencial de curvas conhecido como *Teorema de Lancret* e caracteriza uma hélice generalizada.

Proposição 10. A curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ com curvatura não nula para todo $s \in I$ é uma hélice generalizada se, e somente se, a função $\frac{\tau}{\kappa}$ é constante para todo $s \in I$, onde κ e τ são respectivamente, a curvatura e a torção de γ .

A proposição a seguir estabelece uma relação entre os vértices de Darboux e os pontos críticos da função $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$.

Proposição 11. Os vértices de Darboux de uma curva γ são os pontos críticos da função $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$, ($\kappa \neq 0$) de sua indicatriz tangente.

Demonstração. Escreva $\omega = (\tau^2 + \kappa^2)^{\frac{1}{2}}$. Seja $\mathbf{d} = \left(\frac{\kappa}{\omega}\right) \mathbf{b} + \left(\frac{\tau}{\omega}\right) \mathbf{t}$ a indicatriz de Darboux.

Derivando \mathbf{d} em relação ao comprimento de arco de γ obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}' &= \left(\frac{\kappa' \omega - \kappa \omega'}{\omega^2}\right) \mathbf{b} + \left(\frac{\kappa}{\omega}\right) (-\tau \mathbf{n}) + \left(\frac{\tau' \omega - \tau \omega'}{\omega^2}\right) \mathbf{t} + \left(\frac{\tau}{\omega}\right) (\kappa \mathbf{n}) \\ &= \left(\frac{\kappa' \omega - \kappa \omega'}{\omega^2}\right) \mathbf{b} + \left(\frac{\tau \kappa - \tau \kappa}{\omega}\right) \mathbf{n} + \left(\frac{\tau' \omega - \tau \omega'}{\omega^2}\right) \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Como $\omega' = \frac{\kappa' \kappa + \tau' \tau}{\omega}$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}' &= \left(\frac{\kappa'}{\omega} - \frac{\kappa(\kappa' \kappa + \tau' \tau)}{\omega^3}\right) \mathbf{b} + \left(\frac{\tau'}{\omega} - \frac{\tau(\kappa' \kappa + \tau' \tau)}{\omega^3}\right) \mathbf{t} \\ &= \left(\frac{\tau^2 \kappa' - \kappa \tau' \tau}{\omega^3}\right) \mathbf{b} + \left(\frac{\kappa^2 \tau' - \tau \kappa \kappa'}{\omega^3}\right) \mathbf{t} \\ &= \left(\frac{\tau \kappa' - \kappa \tau'}{\omega^3}\right) (\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}). \end{aligned}$$

Segue que $\mathbf{d}' = 0 \Leftrightarrow \kappa\tau' - \tau\kappa' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$.

□

Observamos que a função $\frac{\tau}{\kappa}$ é a curvatura geodésica da indicatriz tangente \mathbf{t} de uma curva γ . De fato, sejam s e r os parâmetros comprimento de arco de γ e da sua indicatriz tangente \mathbf{t} , respectivamente. Temos que

$$\frac{dr}{ds} = |\mathbf{t}'| = |\kappa\mathbf{n}| = |\kappa|.$$

Como $\kappa(s) > 0, \forall s$, então

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{\kappa}.$$

Portanto,

$$\frac{d\mathbf{t}}{dr} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dr} = \mathbf{n}.$$

Assim,

$$\frac{d\mathbf{n}}{dr} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \frac{ds}{dr} = -\mathbf{t} + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)\mathbf{b}.$$

A curvatura geodésica de \mathbf{t} é dada por

$$\kappa_g = \left(\frac{d\mathbf{n}}{dr}\right) \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{n})$$

onde \mathbf{N} é o vetor normal unitário a esfera \mathbb{S}^2 .

Como \mathbf{t} é uma curva em \mathbb{S}^2 , podemos escolher $\mathbf{N} = \mathbf{t}$, logo

$$\kappa_g = (-\mathbf{t} + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right).$$

Observação. Os vértices de Darboux foram estudados em [11] e [14]. Em [12], são chamados de *pontos helicoidais*. Em tais pontos a curva tem contato de ordem superior com alguma hélice generalizada, conforme demonstrado em [12].

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema 6 para curvas em \mathbb{R}^3 .

Teorema 7. *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular sem vértices e com curvatura κ e torção τ não nulas para todo $s \in I$. Então a curva focal C_γ tem curvatura $\tilde{\kappa}$ e torção $\tilde{\tau}$ não nulas e*

$$\left| \frac{\tau}{\kappa} \cdot \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} \right| = 1.$$

Utilizando a Proposição 10 e o Teorema 7 obtemos

Corolário 2. *A curva focal de uma hélice com curvatura e torção nunca zero é também uma hélice com curvatura e torção nunca zero.*

Demonstração. Pela Proposição 10, temos que a curva γ é uma hélice se $\frac{\tau}{\kappa}$ é constante, ou seja, $\frac{\tau}{\kappa} = c$.

Como a torção de γ nunca é nula, (ocorre que $\tau > 0$ ou $\tau < 0$ sempre), pelo Teorema 7 segue que $\left| \frac{\tau}{\kappa} \cdot \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} \right| = 1$. Como $\frac{\tau}{\kappa} = c = \text{cte}$, $|c| \cdot \left| \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} \right| = 1$, ou seja, $\left| \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} \right| = \text{cte}$. Como $\tilde{\tau}$ não muda de sinal, $\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} = \text{cte}$.

Portanto, C_γ é também uma hélice. □

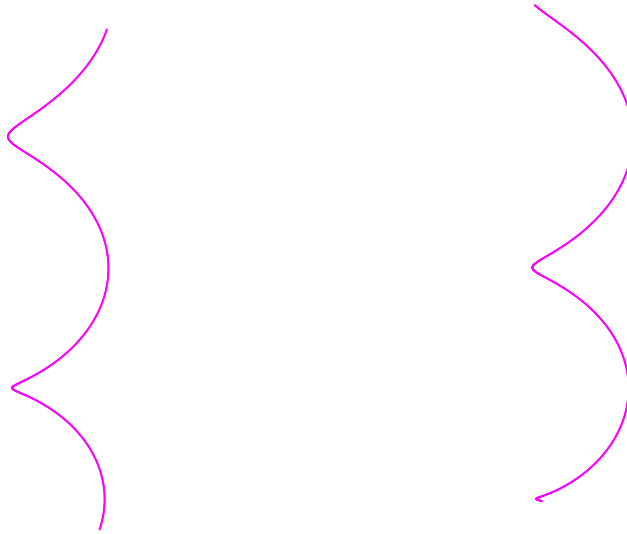


Figura 4.4: Hélice circular e sua curva focal.

Mostraremos no próximo resultado a relação entre a indicatriz de Darboux da curva γ e da curva focal para os pontos onde a curvatura e a torção de γ sejam não nulas e $|C'_\gamma| \neq 0$.

Teorema 8. *Uma curva γ no \mathbb{R}^3 e sua curva focal C_γ têm a mesma indicatriz de Darboux.*

Demonstração. Suponhamos \tilde{s} o parâmetro comprimento de arco de C_γ e $\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{b}}$ o triedro de Frenet de C_γ . Vamos assumir a curva orientada de modo que

$$\frac{C'_\gamma(\tilde{s})}{|C'_\gamma(\tilde{s})|} = \tilde{\mathbf{t}}(\tilde{s}) = \mathbf{b}(s)$$

onde $\mathbf{b}(s)$ é o vetor binormal de γ , ou seja, $\tilde{\mathbf{t}}(\tilde{s}) = \mathbf{b}(s)$.

Temos que $\frac{d\tilde{\mathbf{t}}(\tilde{s})}{d\tilde{s}} = \frac{d\mathbf{b}(s)}{ds}$. Utilizando as equações de Frenet, temos

$$\tilde{\kappa}(\tilde{s})\tilde{\mathbf{n}}(\tilde{s})\frac{d\tilde{s}}{ds} = -\tau(s)\mathbf{n}(s). \quad (4.10)$$

Temos dois casos a analisar em relação ao sinal da torção da curva γ .

- Se $\tau(s) < 0$, segue da equação acima que $\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{n}}$. Como $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{t}} \times \tilde{\mathbf{n}}$, segue que

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{t}}(\tilde{s}) = \mathbf{b}(s) \\ \tilde{\mathbf{n}}(\tilde{s}) = \mathbf{n}(s) \\ \tilde{\mathbf{b}}(\tilde{s}) = -\mathbf{t}(s) \end{cases}$$

Vamos obter a curvatura $\tilde{\kappa}(\tilde{s})$ e a torção $\tilde{\tau}(\tilde{s})$ de $C_{\tilde{\gamma}}$ a partir da curvatura $\kappa(s)$ e a torção $\tau(s)$ de γ . Considerando que $\tilde{\mathbf{b}}(\tilde{s}) = -\mathbf{t}(s)$ e $\tilde{\mathbf{n}}(\tilde{s}) = \mathbf{n}(s)$ temos as seguintes equações

$$\begin{aligned} -\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} &= \frac{d\tilde{\mathbf{b}}(\tilde{s})}{d\tilde{s}} \frac{d\tilde{s}}{ds} \\ -\kappa(s)\mathbf{n}(s) &= -\tilde{\tau}(\tilde{s})\mathbf{n}(s) \frac{d\tilde{s}}{ds} \\ -\kappa(s) &= -\tilde{\tau}(\tilde{s}) \frac{d\tilde{s}}{ds} \\ \tilde{\tau}(\tilde{s}) &= \frac{\kappa(s)}{d\tilde{s}/ds}. \end{aligned}$$

Pela equação (4.10) obtemos a curvatura $\tilde{\kappa}$ de $C_{\tilde{\gamma}}$. Temos

$$\tilde{\kappa}(\tilde{s}) \cdot \frac{d\tilde{s}}{ds} \cdot \mathbf{n}(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s) \Rightarrow \tilde{\kappa}(\tilde{s}) = -\frac{\tau(s)}{d\tilde{s}/ds}.$$

Pela definição do vetor de Darboux obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{d}}(\tilde{s}) = \tilde{\tau}(\tilde{s})\tilde{\mathbf{t}}(\tilde{s}) + \tilde{\kappa}(\tilde{s})\tilde{\mathbf{b}}(\tilde{s}) &= \frac{1}{d\tilde{s}/ds} (\kappa(s)\mathbf{b}(s) - \tau(s)(-\mathbf{t}(s))) \\ &= c(\kappa(s)\mathbf{b}(s) + \tau(s)\mathbf{t}(s)) \\ &= c\mathbf{d}(s). \end{aligned}$$

- Se $\tau(s) > 0$ a demonstração é análoga.

□

Capítulo 5

ENVELOPES E DESDOBRAMENTOS

Neste capítulo serão estudados envelopes e desdobramentos. O objetivo é estudar a estrutura local dos envelopes e conjuntos de bifurcação de uma família de aplicações.

No capítulo 5 será estudada a superfície focal de uma curva que é dada pelo envelope de uma família de planos normais à curva. No caso de uma curva plana, o envelope de uma família de retas normais à curva é dada pela evoluta da curva. Um dos objetivos é o estudo das singularidades deste envelope.

Para isto utilizaremos resultados sobre desdobramentos e envelopes, que serão introduzidos neste capítulo. Como nosso objetivo é aplicar estes resultados algumas demonstrações serão omitidas e podem ser encontradas em [1].

5.1 Envelopes

Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável. Dizemos que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ é um *ponto regular* de f , se f é uma *submersão* em \mathbf{x} , isto é, a diferencial de f em \mathbf{x} é sobrejetiva o que significa que a matriz Jacobiana em \mathbf{x} tem posto n . Um ponto $c \in \mathbb{R}^n$ é *valor regular* se todo $\mathbf{x} \in f^{-1}(c)$ é ponto regular. A notação $f : \mathbb{R}^m, v \rightarrow \mathbb{R}^n, c$ significa que f está definida numa vizinhança V de \mathbb{R}^m do ponto v .

O próximo resultado caracteriza localmente uma submersão.

Proposição 12. *Seja $f : \mathbb{R}^m, v \rightarrow \mathbb{R}^n, c$ uma submersão em v . Então existe uma vizinhança V de v em \mathbb{R}^m tal que $f^{-1}(c) \cap V$ é uma $(m - n)$ -variedade parametrizada em \mathbb{R}^m .*

A seguir definiremos o conceito de envelopes.

Suponha $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Usamos (t, x_1, \dots, x_r) como coordenadas de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$. Consideramos F como uma família de funções de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$, parametrizadas por t , isto é, escrevemos $F_t : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ para a função $F_t(\mathbf{x}) = F(t, \mathbf{x})$.

Suponhamos que para cada valor de t , 0 é valor regular de F_t , ou seja, quando $F(t, \mathbf{x}) = 0$, temos que $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ é não nula para algum i . Pela Proposição 12, $C_t = F^{-1}(0)$ é uma $(r - 1)$ -variedade parametrizada em uma vizinhança de cada ponto (para $r = 2$ temos uma curva e para $r = 3$ uma superfície).

Assim $F^{-1}(0)$ tem um espaço tangente em (t, \mathbf{x}) passando pelo ponto (t, \mathbf{x}) e paralelo ao núcleo de $DF(t, \mathbf{x})$. Este espaço tangente é vertical, isto é, paralelo ao eixo t , se $(1, 0, \dots, 0)$ pertence ao núcleo de $DF(t, \mathbf{x})$, o que equivale a $\partial F / \partial t(t, \mathbf{x}) = 0$.

Para $r = 2$, o conjunto $F = \partial F / \partial t = 0$ em \mathbb{R}^3 é a *curva dobra*. A projeção desta curva no plano (x_1, x_2) é o envelope.

Assumindo as hipóteses acima de uma família de funções F definimos o conjunto envelope dessa família.

Definição 4. O envelope de uma família $F : I \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\mathfrak{D}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \exists t \in I : F(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0\}.$$

Em [1] é mostrado que se $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t_0, \mathbf{x}_0) \neq 0$, então \mathfrak{D}_F é localmente uma $(r - 1)$ -variedade de \mathbb{R}^r .

Um ponto $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_F$ tal que existe t com $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) = 0$ é chamado *ponto de regressão*. Os demais pontos de \mathfrak{D}_F são chamados *regulares*. Um dos objetivos deste capítulo é obter resultados que permitam estudar \mathfrak{D}_F em uma vizinhança de um ponto de regressão.

Consideramos como exemplo, $F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a família de círculos no plano (x_1, x_2) de raio 1 centrados no eixo x_1 definida por $F(t, \mathbf{x}) = (x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1$.

Então $\frac{\partial F}{\partial t} = -2(x_1 - t)$. Deste modo

$$\mathfrak{D}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = t, x_2 = \pm 1\}.$$

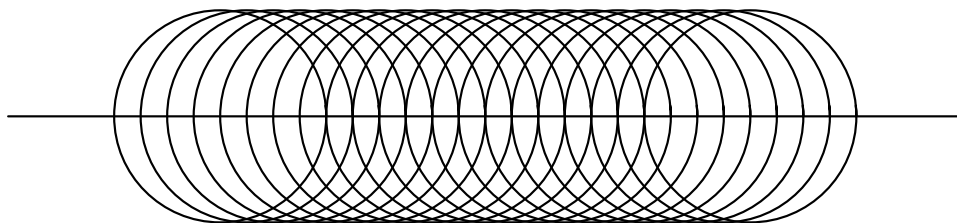


Figura 5.1: Envelope de uma família de círculos.

Outro exemplo é a família $F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(t, \mathbf{x}) = 2t^3 + t(1 - 2x_2) - x_1$. As curvas $F_t = 0$ são as normais da parábola $x_2 = x_1^2$ e

$$\mathfrak{D}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 27x_1^2 = 2(2x_2 - 1)^3\}$$

é o envelope das normais da parábola.

No exemplo a seguir calculamos os pontos regulares e os pontos de regressão do envelope da família de planos normais de uma curva.

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana parametrizada por comprimento de arco. Vamos calcular o envelope das retas normais desta curva. A família $F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a ser considerada é definida por $F(s, \mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \gamma(s)) \cdot \mathbf{t}(s)$.

Temos que

$$\begin{aligned} F(s, \mathbf{x}) &= 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \gamma(s) + \lambda \mathbf{n}(s) \\ \frac{\partial F}{\partial s} &= (\mathbf{x} - \gamma(s)) \cdot \mathbf{t}'(s) - \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) \\ &= (\mathbf{x} - \gamma(s)) \cdot \kappa(s) \mathbf{n}(s) - 1. \end{aligned}$$

Assim $F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow \kappa \neq 0$ e $\mathbf{x} = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$.

Então \mathbf{x} pertence ao envelope quando \mathbf{x} é centro de curvatura, ou seja, o envelope das retas normais são os centros de curvatura, que chamamos a *evoluta* da curva γ .

Calculando os pontos de regressão temos que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = (\mathbf{x} - \gamma(s)) \cdot \kappa'(s) \mathbf{n}(s) + (\mathbf{x} - \gamma(s)) \cdot \kappa^2(s) \mathbf{t}(s).$$

Assim $F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$ onde $\kappa'(s) = 0$. Logo, \mathbf{x} é um ponto de regressão se é o centro de curvatura nos pontos de vértice da curva γ .

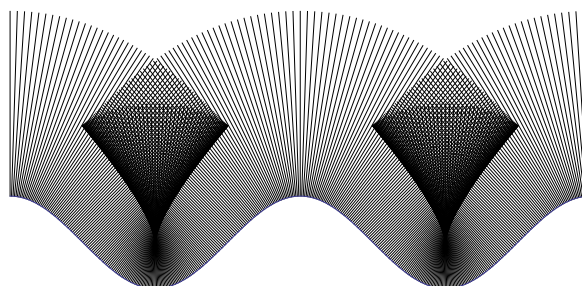


Figura 5.2: Curva cosseno e sua evoluta.

5.2 Desdobramentos

Nesta seção usaremos alguns resultados de teoria de singularidades para famílias de funções diferenciáveis. A principal referência utilizada é [1]. A seguir definimos o conceito de desdobramento para uma função F diferenciável.

Seja $F : I \times \mathbb{R}^r, (t_0, \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^r$ fixado temos uma função de I em \mathbb{R} definida por $f(t) = F(t, \mathbf{x}_0)$ e chamamos de um *desdobramento a r parâmetros* de f . Esta função será denotada por $F_{\mathbf{x}_0}$.

Dizemos que f tem uma A_k -singularidade em t_0 se $f^{(p)}(t_0) = 0$ para $1 \leq p \leq k$, e

$f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$. Também dizemos que f tem $A_{\leq k}$ -singularidade em t_0 se $f^{(p)}(t_0) = 0$ para $1 \leq p \leq k$.

Seja $k \geq 1$ um inteiro. O k -jato de f em t_0 é o polinômio

$$j^k f(t_0) = t f'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + \cdots + \frac{1}{k!} t^k f^{(k)}(t_0)$$

que é obtido pelo truncamento da série de Taylor para o grau k com o termo constante omitido. Quando incluímos o termo constante temos $f(t_0) + j^k f(t_0)$ como o k -jato com constante de f em t_0 .

Nosso objetivo é obter uma forma normal de um desdobramento F de uma função f que possui uma A_k -singularidade em t_0 . Para isto estudaremos os chamados desdobramentos versais e (p) versais.

5.2.1 Desdobramento (p) versal

Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, \mathbf{y}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a s parâmetros da função $g = G_{\mathbf{y}_0}$. Considere

$$a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{onde } a(t, \mathbf{x}_0) = t \text{ nas proximidades de } t_0$$

$$b : \mathbb{R}^r, \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbb{R}^s, \mathbf{y}_0$$

$$c : \mathbb{R}^r, \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

funções diferenciáveis.

Definição 5. O desdobramento $F(t, \mathbf{x}) = G(a(t, \mathbf{x}), b(\mathbf{x})) + c(\mathbf{x})$ é dito (p) induzido de G . O desdobramento G é chamado (p) versal se cada desdobramento de g é (p) induzido de G .

Temos o seguinte resultado que reduz o desdobramento em uma forma normal.

Proposição 13. O desdobramento $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $G(t, \mathbf{x}) = \pm t^{k+1} + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_{k-1} t^{k-1}$ é um desdobramento (p) versal de $g(t) = \pm t^{k+1}$ em $t_0 = 0$.

Seja F um desdobramento de f . Dois conjuntos importantes associados a F são definidos a seguir.

Definimos o conjunto singular \mathcal{S}_F de F como o conjunto dos pares (t, \mathbf{x}) para os quais $F_{\mathbf{x}}$ é singular em t :

$$\mathcal{S}_F = \{(t, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^r : \frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0\}.$$

O conjunto de bifurcação é o conjunto

$$\mathfrak{B}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \exists t \in \mathbb{R} : \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0\}.$$

O resultado que veremos a seguir estabelece que se F e G são dois desdobramentos (p) versais a r parâmetros de uma função do tipo A_k então os conjuntos de bifurcação \mathfrak{B}_F e \mathfrak{B}_G são localmente difeomorfos.

Mais precisamente, sejam F e G dois desdobramentos (p) versais a r parâmetros de f (em t_0) e g (em t_1), respectivamente, ambos do tipo A_k , isto é $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ onde $F(t, \mathbf{x}_0) = f(t)$, f do tipo A_k em t_0 e $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_1, \mathbf{u}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(t, \mathbf{u}_0) = g(t)$, g do tipo A_k em t_1 . Então existem vizinhanças U de (t_0, \mathbf{x}_0) e V de (t_1, \mathbf{u}_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tal que $\mathcal{S}_F \cap U$ e $\mathcal{S}_G \cap V$ são r -variedades parametrizadas.

De fato, supondo que F é um desdobramento (p) versal de $f = F_{\mathbf{x}_0}$ em t_0 , e se $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}_F$, vamos mostrar que (t_0, \mathbf{x}_0) é um ponto regular da função $\frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x})$.

A matriz jacobiana desta função é dada por

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_r} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) \end{array} \right)$$

Como F é (p) versal, pelo menos uma $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x_i}(t_0, \mathbf{x}_0)$ é não nula, ou seja, (t_0, \mathbf{x}_0) é ponto regular de $\frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x})$. Assim, \mathcal{S}_F é uma r -variedade parametrizada em \mathbb{R}^{r+1} em uma vizinhança U_1 de (t_0, \mathbf{x}_0) . Escrevendo $\pi : \mathcal{S}_F \rightarrow \mathbb{R}^r$ para a projeção $\pi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, \mathfrak{B}_F é localmente o conjunto dos valores críticos desta projeção, [1].

Além disto, vale o seguinte

Proposição 14. *Utilizando as hipóteses acima, as vizinhanças U e V podem ser escolhidas de modo que exista um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ da forma $\varphi(t, \mathbf{x}) = (a(t, \mathbf{x}), b(\mathbf{x}))$ onde $a(t_0, \mathbf{x}_0) = t_1$, $b(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0$ e*

$$i) \varphi(\mathcal{S}_F \cap U) = \mathcal{S}_G \cap V$$

ii) $b : \pi(U) \rightarrow \pi(V)$ é um difeomorfismo, onde π é a projeção em \mathbb{R}^r , e $b(\mathfrak{B}_F \cap \pi(U)) = \mathfrak{B}_G \cap \pi(V)$.

A Proposição 14 nos permite simplesmente falar sobre o conjunto de bifurcação de um desdobramento (p) versal a r parâmetros de uma função com uma singularidade A_k .

Finalmente, podemos agora classificar estes conjuntos de bifurcação para pequenos valores de r e k , $r \geq k - 1$.

Teorema 9. *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento (p) versal a r parâmetros de uma função f com uma A_k singularidade em t_0 . Temos:*

i) Se $k = 2$, então (t_0, \mathbf{x}_0) é um ponto dobra de $\pi|_{\mathcal{S}_F}$ e \mathfrak{B}_F é localmente difeomorfo a $\{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}$

ii) Se $k = 3$, então \mathfrak{B}_F é difeomorfo a $C \times \mathbb{R}^{r-2}$

iii) Se $k = 4$, então \mathfrak{B}_F é difeomorfo a $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$, onde $C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 = x_2^3\}$ é a cúspide ordinária e $SW = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$ é a superfície rabo de andorinha.

Demonstração. Demonstraremos ii).

Neste caso $F(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4}t^4 + x_1t + \frac{1}{2}t^2$ é um desdobramento (p) versal de $f(t) = \frac{1}{4}t^4$ em $t_0 = 0$ e temos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_F &= \{\mathbf{x} : t^3 + x_1 + x_2 t = 3t^2 + x_2 = 0 \text{ para algum } t\} \\
&= \{\mathbf{x} : x_1 = 2t^3, x_2 = -3t^2 \text{ para algum } t\} \\
&= \{\mathbf{x} : 27x_1^2 + 4x_2^3 = 0\}
\end{aligned}$$

Logo para $r = 2$ temos uma cúspide e para $r = 3$ temos um eixo cuspidal.

□

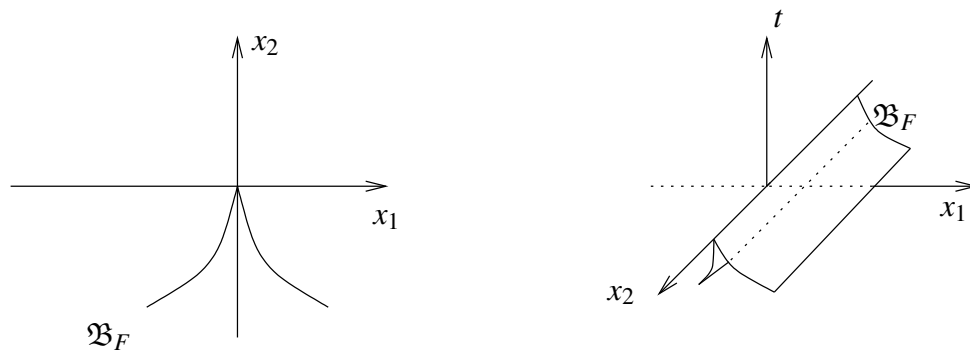


Figura 5.3: \mathfrak{B}_F quando $r = 2, 3$ e f com tipo A_3 .

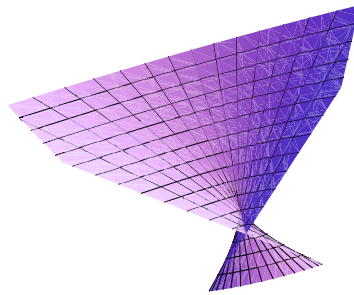


Figura 5.4: Superfície rabo de andorinha.

5.2.2 Critério para a verificação da (p) versalidade

Os seguintes critérios para verificação da (p) versalidade de um desdobramento são equivalentes.

Proposição 15. *Seja F um desdobramento de f , onde f é do tipo A_k ($k \geq 1$) em t_0 . Então F é (p) versal se, e somente se cada polinômio real $p(t)$ de grau $\leq k - 1$ e sem termo constante pode ser escrito da forma*

$$p(t) = \sum_{i=1}^r c_i j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) \right) (t_0)$$

para constantes reais c_i , e j^{k-1} denota o $(k-1)$ jato.

Proposição 16. *Seja $j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) \right) (t_0) = \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \dots + \alpha_{k-1,i}t^{k-1}$ para $i = 1, \dots, r$. Então F é (p) versal se, e somente se, a matriz $(k-1) \times r$ de coeficientes α tem posto $k-1$ para $(k-1 \leq r)$.*

Faremos a demonstração da Proposição 15.

Demonstração. Suponha que F seja um desdobramento (p) versal de f em 0. Então $G(t, \mathbf{x}) = t^{k+1} + x_1t + x_2t^2 + \dots + x_{k-1}t^{k-1}$ é (p) induzido de F , isto é, $G(t, \mathbf{x}) = F(a(t, \mathbf{x}), b(\mathbf{x}))$. Além disto, G é um desdobramento de f em $t = 0$.

Temos que

$$t^i = j^{k-1} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}(t, 0) \right) = \sum_{j=1}^r j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(t, 0) \right) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(0).$$

Logo, dado qualquer polinômio $p(t)$ de grau $\leq k-1$ temos

$$p(t) = \sum_{i=1}^r c_i j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) \right) (t_0).$$

Vamos assumir que todo polinômio de grau $\leq k-1$ sem termo constante é da forma

$$p(t) = \sum_{i=1}^r c_i j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) \right) (t_0).$$

Como f é do tipo A_k em t_0 f pode ser reduzida, numa vizinhança de t_0 , a uma das formas $g(t) = \pm t^{k+1}$, isto, é, $f(t) = g(h(t)) + c$ para um difeomorfismo $h: \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ e c constante, [1].

Assumindo $f(t) = t^{k+1}$. Seja $G(t, \mathbf{x}) = t^{k+1} + x_1t + x_2t^2 + \dots + x_{k-1}t^{k-1}$ um desdobramento (p) versal de f .

Logo, todo desdobramento F é (p) induzido de G , isto é,

$$F(t, \mathbf{x}) = G(a(t, \mathbf{x}), b(\mathbf{x})) + c(\mathbf{x}).$$

Chamando $a(t, \mathbf{x}) = u_0$ e $b(\mathbf{x}) = (u_1, \dots, u_{k-1})$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) &= \frac{\partial G}{\partial u_0}(a(t, \mathbf{x}_0), b(\mathbf{x}_0)) \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) \\ &+ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\partial G}{\partial u_l}(a(t, \mathbf{x}_0), b(\mathbf{x}_0)) \cdot \frac{\partial b_l}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial c}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) &= \frac{\partial G}{\partial t}(t, 0) \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\partial G}{\partial u_l}(t, 0) \cdot \frac{\partial b_l}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial c}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \\
&= (k+1)t^k \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) + \sum_{l=1}^{k-1} t^l \frac{\partial b_l}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \text{constante}
\end{aligned}$$

Como por hipótese, a matriz dos $k-1$ -jatos tem posto $k-1$, e o primeiro e último termo não contribuem para o $(k-1)$ -jato, segue que a matriz de $\frac{\partial b_l}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ tem posto $k-1$. Usaremos isto para provar que F é (p) versal.

Seja $F_1 : I \times \mathbb{R}^s, (0, \mathbf{w}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ qualquer desdobramento de f , onde utilizamos as coordenadas w_1, \dots, w_s em \mathbb{R}^s . Então, como na subseção (5.2.1) podemos encontrar funções $A(t, \mathbf{w}), B(\mathbf{w}), C(\mathbf{w})$ com

$$G(t, B(\mathbf{w})) = F_1(A(t, \mathbf{w}), \mathbf{w}) + C(\mathbf{w})$$

onde $A(t, \mathbf{w}_0) = t$ e as funções $\alpha(t, \mathbf{x}), b(\mathbf{x}), c(\mathbf{x})$ com

$$G(t, b(\mathbf{x})) = F(\alpha(t, \mathbf{x}), \mathbf{x}) + c(\mathbf{x})$$

e $\alpha(t, \mathbf{x}_0) = t$.

Vamos induzir F_1 de F . Considere a função

$$\begin{aligned}
\xi : \mathbb{R}^{r+s}, (\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_0) &\rightarrow \mathbb{R}^r \\
\xi(x_1, \dots, x_r, w_1, \dots, w_s) &= (b_1(\mathbf{x}) - B_1(\mathbf{w}), \dots, b_{k-1}(\mathbf{x}) - B_{k-1}(\mathbf{w}), x_k, \dots, x_r)
\end{aligned}$$

Temos

$$d\xi(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_1}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial b_1}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial b_1}{\partial x_r} & \frac{\partial B_1}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial w_s} \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \frac{\partial b_{k-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_{k-1}}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial b_{k-1}}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial b_{k-1}}{\partial x_r} & \frac{\partial B_{k-1}}{\partial w_1} & & \frac{\partial B_{k-1}}{\partial w_s} \\ 0 & & 0 & 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & & 0 & 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Como vimos a matriz $\left(\frac{\partial b_l}{\partial x_i}\right)_{(k-1) \times (k-1)}$ tem $\det \neq 0$. Logo, a submatriz $r \times r$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial b_l}{\partial x_i} \right)_{(k-1) \times (k-1)} & X \\ 0 & I_{(r-(k-1)) \times (r-(k-1))} \end{pmatrix}$$

tem $\det \neq 0$ e, portanto $d\xi(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_0)$ tem posto r . Logo, pelo Teorema da função implícita existem vizinhanças V_1 de \mathbf{x}_0 , V_2 de \mathbf{w}_0 tal que $\forall \mathbf{w}$ de V_2 , \exists único $B_1(\mathbf{w})$ em V_1 com $\xi(B_1(\mathbf{w}), \mathbf{w}) = (0, \tilde{\mathbf{x}}_0)$. Logo $b(B_1(\mathbf{w}) - B(\mathbf{w})) = 0$, ou seja, $b(B_1(\mathbf{w})) = B(\mathbf{w})$.

Desta forma

$$\begin{aligned} F_1(A(t, \mathbf{w}), \mathbf{w}) + C(\mathbf{w}) &= G(t, B(\mathbf{w})) = G(t, b(B_1(\mathbf{w}))) \\ &= F(\alpha(t, B_1(\mathbf{w})), B_1(\mathbf{w})) + C(B_1(\mathbf{w})) \end{aligned}$$

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma: A \times id &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \\ \gamma(t, \mathbf{w}) &= (A \times id)(t, \mathbf{w}) = (A(t, \mathbf{w}), \mathbf{w}) \end{aligned}$$

A matriz jacobiana de γ é dada por

$$d\gamma(0, \mathbf{w}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial t}(0, \mathbf{w}_0) & \frac{\partial A}{\partial w_1}(0, \mathbf{w}_0) & \cdots & \frac{\partial A}{\partial w_s}(0, \mathbf{w}_0) \\ 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\frac{\partial A}{\partial t}(0, \mathbf{w}_0) = 1 \neq 0$, então $d\gamma(0, \mathbf{w}_0)$ tem posto $s + 1$. Pelo Teorema da função implícita existem vizinhanças U_1 de 0 , U_2 de \mathbf{w}_0 tq $\forall \mathbf{w} \in U_2$, existe único $A_1(t, \mathbf{w})$ em U_1 com $A(A_1(t, \mathbf{w})) = t$ para (t, \mathbf{w}) próximo de $(0, \mathbf{w}_0)$. De fato, $A_1 \times id = (A \times id)^{-1}$ onde $id: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ é a aplicação identidade tal que $A_1(t, \mathbf{w}_0) = t$. Então:

$$F_1(t, \mathbf{w}) = F(\alpha(A_1(t, \mathbf{w}), B_1(\mathbf{w})), B_1(\mathbf{w})) + c(B_1(\mathbf{w})) - C(\mathbf{w})$$

e como $\alpha(A_1(t, \mathbf{w}), B_1(\mathbf{w})) = \alpha(t, \mathbf{x}_0) = t$ temos que F_1 é (p) induzido de F e assim F é (p) versal. \square

Temos que a Proposição 16 e a Proposição 15 são equivalentes. Como o conjunto $p(t)$ dos polinômios de grau $\leq k - 1$ é um espaço de dimensão $k - 1$, concluímos que $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{(k-1)1}), \dots, (\alpha_{1(k-1)}, \alpha_{2(k-1)}, \dots, \alpha_{(k-1)(k-1)})$ que são coordenadas dos vetores $j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) \right) (t_0)$, contém $k - 1$ vetores linearmente independentes se a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1(k-1)} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2(k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{(k-1)1} & \alpha_{(k-1)2} & \cdots & \alpha_{(k-1)(k-1)} \end{pmatrix}$$

tem posto $k - 1$.

5.2.3 Aplicações

Apresentamos inicialmente uma aplicação destes resultados para curvas planas.

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana parametrizada por comprimento de arco e $F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a família de funções distância ao quadrado, isto é, definida por $F(s, \mathbf{x}) = (\gamma(s) - \mathbf{x}) \cdot (\gamma(s) - \mathbf{x})$.

Temos que

$$\mathcal{S}_F = \{(s, \gamma(s) + \lambda \mathbf{n}(s)) : s \in I, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathfrak{B}_F = \{\mathbf{x} = \gamma(s) + \kappa^{-1} \mathbf{n}(s) \text{ com } \kappa(s) \neq 0\}.$$

Assim, \mathfrak{B}_F é a evoluta da curva γ . Analisando as A_k -singularidades ($k = 2, 3$) observamos que:

- $f = F_{\mathbf{x}_0}$ é do tipo A_2 se:

\mathbf{x}_0 é centro de curvatura em s_0 , mas $\frac{\partial^3 F}{\partial s^3}(s_0, \mathbf{x}_0) \neq 0$, que ocorre se $\kappa'(s_0) \neq 0$.

- $f = F_{\mathbf{x}_0}$ é do tipo A_3 se:

\mathbf{x}_0 é centro de curvatura em s_0 , $\kappa'(s_0) = 0$, $\kappa''(s_0) \neq 0$ e γ tem um vértice ordinário em s_0 .

Verificação da (p) versalidade de f em s_0 .

Agora considerando $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ e $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2)$ tal que $F(s, \mathbf{x}) = (X - x_1)^2 + (Y - x_2)^2$ temos:

- quando f é do tipo A_2 em s_0 , a matriz 1×2

$$\begin{pmatrix} -2X'(s_0) & -2Y'(s_0) \end{pmatrix}$$

tem posto 1 se a curva γ é regular.

- quando f é do tipo A_3 em s_0 , a matriz 2×2

$$\begin{pmatrix} -2X'(s_0) & -2Y'(s_0) \\ -X''(s_0) & -Y''(s_0) \end{pmatrix}$$

tem posto 2 se $\kappa(s_0) \neq 0$, o que ocorre quando definimos \mathfrak{B}_F .

O seguinte resultado caracteriza localmente cada ponto da evoluta.

Proposição 17. *Seja \mathbf{x} um ponto da evoluta de uma curva plana (regular), \mathbf{x} o centro de curvatura*

em s . Então, localmente em \mathbf{x} , a evoluta é

i) difeomorfa a uma reta em \mathbb{R}^2 , se a curva não tem vértice em s .

ii) difeomorfa a uma cúspide ordinária em \mathbb{R}^2 se a curva tem um vértice ordinário em s .

Observação. Para uma curva plana em geral a *evoluta* é localmente diferenciável, exceto nos pontos de cúspides ordinárias correspondentes aos vértices ordinários da curva.

Mostraremos um exemplo para curvas no \mathbb{R}^3 e encontraremos as condições para a (p) versalidade.

Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e $F: I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a família de funções distância ao quadrado definida por

$$\begin{aligned} F(s, \mathbf{x}) &= (\gamma(s) - \mathbf{x}) \cdot (\gamma(s) - \mathbf{x}) \\ &= (X(s) - x_1)^2 + (Y(s) - x_2)^2 + (Z(s) - x_3)^2 \end{aligned}$$

onde $\gamma(s) = (X(s), Y(s), Z(s))$.

Temos que o conjunto singular

$$S_F = \{(s, \gamma(s) + \lambda \mathbf{n}(s) + \mu \mathbf{b}(s)) : s \in I, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

O conjunto de bifurcação \mathfrak{B}_F consiste dos pontos

$$\mathbf{x} = \gamma(s) + \kappa^{-1} \mathbf{n}(s) + \mu \mathbf{b}(s), \mu \in \mathbb{R}$$

esta superfície é chamada *superfície focal* e será estudada no capítulo 5.

Podemos concluir que $F_{\mathbf{x}}$ tem uma singularidade do tipo A_2 em s se \mathbf{x} não está no centro de curvatura esférica em s , ou $\tau = 0$ enquanto $\kappa' \neq 0$.

Verificação da (p) versalidade de f em s_0 .

i) quando f é do tipo A_2 em s_0 , a matriz 1×3

$$\begin{pmatrix} -2X'(s_0) & -2Y'(s_0) & -2Z'(s_0) \end{pmatrix}$$

tem posto 1 se γ é regular.

ii) quando f é do tipo A_3 em s_0 , a matriz 2×3

$$\begin{pmatrix} -2X'(s_0) & -2Y'(s_0) & -2Z'(s_0) \\ -X''(s_0) & -Y''(s_0) & -Z''(s_0) \end{pmatrix}$$

tem posto 2 se $\kappa(s_0) \neq 0$.

ii) quando f é do tipo A_4 em s_0 , a matriz 3×3

$$\begin{pmatrix} -2X'(s_0) & -2Y'(s_0) & -2Z'(s_0) \\ -X''(s_0) & -Y''(s_0) & -Z''(s_0) \\ -1/3X'''(s_0) & -1/3Y'''(s_0) & -1/3Z'''(s_0) \end{pmatrix}$$

é não singular se $\tau(s_0) \neq 0$.

5.2.4 Desdobramento versal

Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, \mathbf{y}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a s parâmetros da função $g = G_{\mathbf{y}_0}$. Considere

$$\begin{aligned} a & : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{onde } a(t, \mathbf{x}_0) = t \text{ nas proximidades de } t_0 \\ b & : \mathbb{R}^r, \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbb{R}^s, \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

funções diferenciáveis.

Definição 6. O desdobramento $F(t, \mathbf{x}) = G(a(t, \mathbf{x}), b(\mathbf{x}))$ é dito induzido de G . O desdobramento G é chamado versal se cada desdobramento de g é induzido de G .

O seguinte resultado reduz o desdobramento versal em uma forma normal.

Proposição 18. O desdobramento $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $G(t, \mathbf{x}) = \pm t^{k+1} + x_1 + x_2 t + \dots + x_k t^{k-1}$ é um desdobramento versal de $g(t) = \pm t^{k+1}$ em $t_0 = 0$.

Seja F um desdobramento de f . Dois conjuntos importantes associados a F são definidos a seguir.

O conjunto-zero \mathcal{M}_F de F é dado por

$$\mathcal{M}_F = \{(t, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^r : F(t, \mathbf{x}) = 0\}.$$

O conjunto discriminante de F é

$$\mathcal{D}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \exists t \in I : F(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0\}.$$

O resultado que veremos a seguir estabelece que se F e G são dois desdobramentos versais a r parâmetros de uma função do tipo A_k então os conjuntos \mathcal{D}_F e \mathcal{D}_G são localmente difeomorfos.

Assumindo as mesmas hipóteses da Proposição 14, exceto que agora estamos considerando F e G dois desdobramentos versais a r parâmetros, respectivamente, de f em t_0 e g em t_1 , ambas funções do tipo A_k , existem vizinhanças U de (t_0, \mathbf{x}_0) e V de (t_1, \mathbf{u}_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tais que $\mathcal{M}_F \cap U$ e $\mathcal{M}_G \cap V$ são r -variedades parametrizadas.

Proposição 19. Utilizando a notação acima, as vizinhanças U e V podem ser escolhidas de modo que exista um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ da forma $\varphi(t, \mathbf{x}) = (a(t, \mathbf{x}), b(\mathbf{x}))$ onde $a(t_0, \mathbf{x}_0) = t_1$, $b(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0$ e

- i) $\varphi(\mathcal{M}_F \cap U) = \mathcal{M}_G \cap V$
 ii) $b : \pi(U) \rightarrow \pi(V)$ é um difeomorfismo, onde π é a projeção em \mathbb{R}^r , e $b(\mathcal{D}_F \cap \pi(U)) = \mathcal{D}_G \cap \pi(V)$.

Este resultado permitiu concluir que conjuntos discriminantes \mathcal{D}_F e \mathcal{D}_G são localmente difeomorfos para quaisquer desdobramentos versais a r parâmetros de uma função de tipo A_k .

Podemos agora classificar estes conjuntos discriminantes para pequenos valores de r e k , $r \geq k$.

Teorema 10. *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a r parâmetros de uma função f com uma A_k singularidade em t_0 .*

Suponha que F é um desdobramento versal.

i) *Se $\kappa = 1$, então \mathcal{D}_F é localmente difeomorfo a $0 \times \mathbb{R}^{r-1}$.*

ii) *Se $\kappa = 2$, então \mathcal{D}_F é localmente difeomorfo a $C \times \mathbb{R}^{r-2}$.*

iii) *Se $\kappa = 3$, então \mathcal{D}_F é localmente difeomorfo a $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$.*

onde $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$ é a cúspide ordinária e $SW = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$ é a superfície rabo de andorinha.

5.2.5 Critério para a verificação da versalidade

Da mesma forma temos dois critérios para a verificação da versalidade de um desdobramento F .

Proposição 20. *Seja F um desdobramento de f , do tipo A_k ($k \geq 1$) em t_0 . Então F é versal se, e somente se cada polinômio real $p(t)$ de grau $\leq k-1$ e com termo constante $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0)$, ($i = 1, \dots, r$) em t_0 pode ser escrito da forma*

$$p(t) = \sum_{i=1}^r c_i \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) + j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) \right) (t_0) \right]$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$.

Proposição 21. *Seja $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) + j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}_0) \right) (t_0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}t + \dots + \alpha_{k-1,i}t^{k-1}$ para $i = 1, \dots, r$. Então F é versal se, e somente se, a matriz $k \times r$, ($k \leq r$) de coeficientes α tem posto k .*

Capítulo 6

SUPERFÍCIE FOCAL

Neste capítulo estudamos a geometria da superfície focal de uma curva genérica $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Utilizando a teoria do capítulo 4, mostramos que esta superfície é singular ao longo da curva focal e que nos pontos de vértice de γ a superfície focal é localmente difeomorfa à superfície rabo de andorinha.

6.1 Geometria da Superfície Focal

Definimos a seguir a *superfície focal* ou *cáustica* de uma curva genérica em \mathbb{R}^3 . Temos que o plano normal a γ em um ponto é a união de todas retas normais a γ nesse ponto. Assim obtemos que

Definição 7. A *superfície focal* ou *cáustica* de uma curva γ em \mathbb{R}^3 é definida como o envelope dos planos normais de γ .

Dada uma curva genérica $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, seja $G: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ a família de funções distância ao quadrado dada por $G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \gamma(t)) \cdot (\mathbf{x} - \gamma(t))$. O conjunto de bifurcação da família G conforme definido no capítulo 4 é dado por

$$\mathfrak{B}_G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \exists t \in \mathbb{R} : \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0\}.$$

Mostraremos no próximo resultado que o conjunto de bifurcação de G e o envelope dos planos normais de $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, coincidem.

Proposição 22. A *cáustica* de γ coincide com o conjunto de bifurcação da família G de funções distância ao quadrado.

Demonstração. Seja $G: I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a família de funções distância ao quadrado definida por

$$G(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \gamma(t)|^2.$$

O conjunto de bifurcação da família G é dado por

$$\mathfrak{B}_G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \exists t \in I : \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0\}.$$

Temos :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} = 0 &\Leftrightarrow -(\mathbf{x} - \gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0 &\Leftrightarrow \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) - (\mathbf{x} - \gamma(t)) \cdot \gamma''(t) = 0. \end{aligned}$$

Agora consideremos $F : I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a família dos planos normais da curva γ definida por

$$F(t, \mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \gamma(t)) \cdot \mathbf{t}(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} F = 0 &\Leftrightarrow (\mathbf{x} - \gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \\ F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 &\Leftrightarrow -\gamma'(t) \cdot \gamma'(t) + (\mathbf{x} - \gamma(t)) \cdot \gamma''(t) = 0. \end{aligned}$$

O conjunto

$$\mathfrak{D}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0\}$$

é o conjunto discriminante de F , ou seja, o envelope da família de planos normais a curva $\gamma(t)$.

Dos cálculos anteriores concluímos que a cáustica de γ coincide com o conjunto de bifurcação de G . \square

Agora vamos calcular o conjunto de bifurcação da família G de funções distância ao quadrado. Considerando γ uma curva parametrizada por comprimento de arco temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial s} &= -(\mathbf{x} - \gamma(s)) \cdot \gamma'(s) = -(\mathbf{x} - \gamma(s)) \cdot \mathbf{t}(s) \\ \frac{\partial G}{\partial s} = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{x} - \gamma(s) = c_1 \mathbf{n}(s) + c_2 \mathbf{b}(s) \Leftrightarrow \mathbf{x} = \gamma(s) + c_1 \mathbf{n}(s) + c_2 \mathbf{b}(s) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} &= -\gamma'(s) \cdot (-\gamma'(s)) - (\mathbf{x} - \gamma(s)) \cdot \mathbf{t}'(s) = 1 - (\mathbf{x} - \gamma(s)) \cdot \kappa(s) \mathbf{n}(s) \\ \frac{\partial G}{\partial s} = \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = 0 &\Leftrightarrow 1 - (c_1 \mathbf{n}(s) + c_2 \mathbf{b}(s)) \cdot \kappa(s) \mathbf{n}(s) = 0 \\ &\Leftrightarrow c_1 \kappa(s) = 1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{\kappa(s)}, \kappa(s) \neq 0. \\ \mathbf{x} &= \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s) + c_2 \mathbf{b}(s), c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Encontramos assim o conjunto de bifurcação da família G , ou seja, a superfície focal da curva γ .

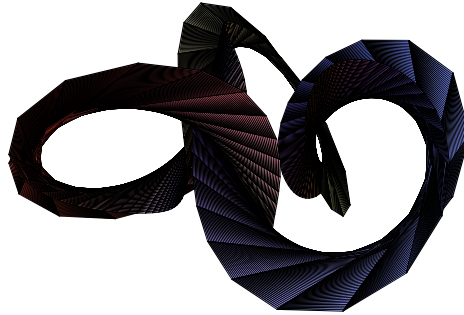


Figura 6.1: Superfície focal da curva (1,3) sobre o toro.

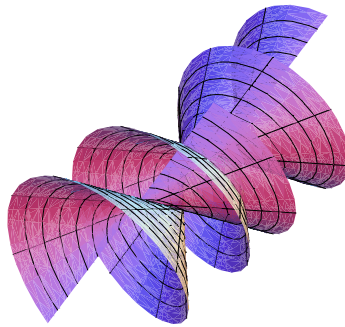


Figura 6.2: Superfície focal de uma hélice circular.

6.2 Singularidades da Superfície Focal

Nosso objetivo agora é aplicar os resultados do capítulo 4 para estudar as singularidades do conjunto de bifurcação da família $G(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \gamma(t)|^2$.

Para um ponto $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}_G$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 G}{\partial s^3} &= (\mathbf{x} - \gamma(s)) \cdot (\kappa'(s)\mathbf{n}(s) - \kappa^2(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\tau(s)\mathbf{b}(s)) \\ &= -\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} - c_2\kappa(s)\tau(s). \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\partial G^3}{\partial s^3} = 0 \Leftrightarrow \tau(s) \neq 0 \text{ e } \mathbf{x} = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\mathbf{b}(s)$$

ou

$\tau(s) = \kappa'(s) = 0$ e $\mathbf{x} = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s)$, onde $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ são respectivamente a curvatura e a torção da curva γ .

Vamos agora calcular $\frac{\partial^4 G}{\partial s^4}$ para $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}_G$ com $\tau \neq 0$ e $\frac{\partial G^3}{\partial s^3} = 0$.

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 G}{\partial s^4} &= -\kappa^2(s) - \left[-\kappa^2(s) + \frac{\kappa''(s)}{\kappa(s)} - \tau^2(s) - 2\frac{(\kappa')^2}{\kappa^2(s)} - \frac{\kappa'(s)\tau'(s)}{\kappa(s)\tau(s)} \right] \\ &= -\frac{\kappa''(s)}{\kappa(s)} + \tau^2(s) + 2\frac{(\kappa'(s))^2}{\kappa^2(s)} + \frac{\kappa'(s)\tau'(s)}{\kappa(s)\tau(s)} \\ &= \frac{-\kappa''(s)\kappa(s) + \tau^3(s)\kappa^2(s) + 2\tau(s)(\kappa'(s))^2 + \kappa(s)\kappa'(s)\tau'(s)}{\kappa'(s)\tau(s)} \\ &= \kappa(s)\tau(s)[c_1\tau(s) + c_2']. \end{aligned}$$

Logo, para $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}_G$ com $\tau \neq 0$

$$\frac{\partial G^3}{\partial s^3} = \frac{\partial^4 G}{\partial s^4} = 0 \Leftrightarrow c_1\tau(s) + c_2' = 0.$$

Para $\frac{\partial^5 G}{\partial s^5}$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 G}{\partial s^5} &= (\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s))[c_1\tau(s) + c_2'] \\ &\quad + \kappa(s)\tau(s)[c_1\tau(s) + c_2']'. \end{aligned}$$

Supondo que $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}_G$, $\tau \neq 0$, $\frac{\partial G^3}{\partial s^3} = \frac{\partial^4 G}{\partial s^4} = 0$ temos $\frac{\partial^5 G}{\partial s^5} \neq 0 \Leftrightarrow [c_1\tau(s) + c_2']' \neq 0$.

Para que possamos aplicar o Teorema 9 do capítulo 4 necessitamos estudar a (p) versalidade da família $G_{\mathbf{x}}$ para cada tipo de singularidade A_k . Conforme visto na subsecção 5.2.3, temos:

- Se $G_{\mathbf{x}}$ tem uma singularidade do tipo A_2 , então G é (p) versal se a curva γ é regular em $\gamma(s)$.
- Se $G_{\mathbf{x}}$ tem uma singularidade do tipo A_3 , então G é (p) versal se a curva γ tem a curvatura não nula em $\gamma(s)$.
- Se $G_{\mathbf{x}}$ tem uma singularidade do tipo A_4 , então G é (p) versal se a curva γ tem torção não nula em $\gamma(s)$.

Analisando as A_k singularidades para $k = 2, 3, 4$, temos que

i) $G_{\mathbf{x}}$ tem exatamente uma singularidade do tipo A_2 quando \mathbf{x} não é um ponto da curva focal.

ii) G_x tem exatamente uma singularidade do tipo A_3 quando x é um ponto da curva focal e a curva γ não tem vértice.

iii) G_x tem exatamente uma singularidade do tipo A_4 quando γ tem vértice ordinário.

Consequentemente as condições de (p) versalidade são satisfeitas e assim temos o seguinte resultado.

Teorema 11. *Seja x um ponto da superfície focal de uma curva genérica. Então, localmente em x , a superfície focal é*

i) difeomorfa a um plano se x não é um ponto da curva focal.

ii) difeomorfa a um eixo cuspidal se x pertence a curva focal e a curva focal não tem vértice no ponto correspondente.

iii) difeomorfa a uma superfície rabo de andorinha se x pertence a curva focal e a curva tem vértice ordinário no ponto correspondente.

CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos a geometria da superfície focal, dando ênfase as propriedades da curva focal. Dentre os resultados obtidos destacam-se a caracterização de vértice via curvaturas focais e a classificação das singularidades da superfície focal. Uma das principais contribuições deste trabalho foi a utilização da teoria de desdobramentos de uma função para obter esta classificação e a demonstração detalhada do critério da (p) versalidade de um desdobramento (Proposição 15). Uma perspectiva de trabalho futuro seria o estudo do conjunto focal de uma curva em \mathbb{R}^{m+1} e a obtenção do problema inverso: dada a cáustica, reconstruir a fonte de luz.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BRUCE J. W. and Giblin P. J. *Curves and Singularities*, 2.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [2] CARMO, M. P. *Differential geometry of curves and surfaces*, New Jersey, Editora Prentice-Hall, 1976.
- [3] CODESAL, E. S. *Aplicaciones del contacto con p-esferas al estudio de invariantes conformes*. 2003. 128f. Tese (Doutorado em Matemática)- Universidade de Valência, Valência, 2003.
- [4] COSTA, S.I.R. *On closed twisted curves*. Proc. Amer. Math. Soc., v. 109, p. 205-214, 1990.
- [5] GLUCK, H. *Higher curvatures in Euclidean Space*. Amer Math. Monthly, v.73, p.699-704, (1966).
- [6] GOLUBITSKY M. and Guillemin V. *Stable mappings and their singularities*, Editora Springer-Verlag, New York, 1973.
- [7] IZUMIYA, S. et al. *The rectifying developable and the spherical Darboux image of a space curve*. Geometry and topology of caustics, v.50, p. 137-149, 1999.
- [8] KREYSZIG, E. *Differential Geometry*. New York: Dover Publications, Inc., 1991.
- [9] MACHADO P.A.P. *Pontos Helicoidais e Vértices de Darboux de Curvas no Espaço Euclidiano*. 2010. 104 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2010.
- [10] MONTALDI J.A. *On contact between submanifolds*, Michigan Math. J., v. 33, p. 195-199, 1986.
- [11] ROMERO-FUSTER M. C. and SANABRIA-CODESAL E. *Generalized evolutes, vertices and conformal invariants of curves in \mathbb{R}^{n+1}* . Indagationes Mathematicae, **10**:2 (1999), 297-305.

- [12] ROMERO-FUSTER, M. C. and SANABRIA-CODESAL, E. *Generalized helices, twistings and flattenings of curves in n -space*. *Matemática Contemporânea*, v.17, p.267-280, 1999.
- [13] TENEBLAT K. *Introdução à geometria diferencial*, Brasília, Editora Unb, 1990.
- [14] URIBE-VARGAS R. *On singularities, "perestroikas" and differential geometry of space curves*. *Enseign Math (2)*, **50**(1-2) (2004)69-101.
- [15] URIBE-VARGAS R. *On vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves*. *Bull. of Brazilian Math. Soc.*, **36**:3 (2005)285-307.