UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TEOREMAS DE MASCHKE

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Ricardo Leite dos Santos

Santa Maria, RS, Brasil
2013

TEOREMAS DE MASCHKE

Ricardo Leite dos Santos

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração em Álgebra, da Universidade Federal de Santa Maria(UFSM,RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. João Roberto Lazzarin

Santa Maria, RS, Brasil
2013

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

TEOREMAS DE MASCHKE

elaborada por
Ricardo Leite dos Santos

como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

João Roberto Lazzarin, Dr.
(Presidente/Orientador)

Alveri Alves Sant'Ana, Dr.(UFRGS)

Dirceu Bagio, Dr.(UFSM)

Daiana Aparecida da Silva Flôres, Dr.(UFSM)(Suplente)

Santa Maria, 09 de maio de 2013.

Agradecimentos

A meu orientador, primeiramente por ter aceitado um estranho como orientando, por todos os ensinamentos de todos os tipos e pelo incentivo. Agradeço por toda a sua paciência e dedicação em me ensinar desde o mais básico. Agradeço pela ajuda fundamental na escrita deste trabalho, com a estrutura, apresentação dos textos, sugestões e correções.

A minha família por todo o apoio em todos os momentos, a minha irmã por todas as correções.

Aos professores Dirceu Bagio e Gastón García por toda a ajuda que me prestaram no intercâmbio e também por estarem sempre disponíveis para discutir dúvidas, sendo pessoalmente ou via e-mail.

Também gostaria de agradecer a todo o grupo de Córdoba pela acolhida durante o os seis meses que estive lá.

A todos os professores, colegas e amigos que estiveram presentes nesta etapa.

A secretária do PPGMat-UFSM Andréia Lucila da Costa Schlosser, por estar sempre a disposição para ajudar e sugerir o melhor a se fazer.

A capes, pelo suporte financeiro no decorrer destes dois anos.

Agradeço aos professores Alveri Alves Sant'Ana, Dirceu Bagio e Daiana Aparecida da Silva Flôres por terem aceitado a participar como banca, apontando-me várias correções, sugestões e críticas para o melhoramento deste trabalho.

Finalmente a minha esposa, Juliana por todo o carinho, companheirismo, incentivo e por me dar força para chegar até aqui.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Maria

TEOREMAS DE MASCHKE
AUTOR : RICARDO LEITE DOS SANTOS
ORIENTADOR : JOÃO ROBERTO LAZZARIN
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 09 de maio de 2013

Na teoria de representações de grupos, ter uma representação de um grupo G é equivalente a ter um $\Bbbk G$-módulo. Desde que $\Bbbk G$-módulos que são somas de $\Bbbk G$-módulos irredutíveis formam uma classe bastante importante na teoria de módulos, conhecer condições para que um $\Bbbk G$-módulo seja irredutível ou completamente redutível a partir das particularidades do corpo $\Bbbk$ e do grupo G passou a ser um problema bastante importante. Problema este cuja solução foi originalmente apresentada pelo matemático alemão Heinrich Maschke que provou que se a ordem do grupo G não for múltiplo da característica do corpo $\Bbbk$, então $\Bbbk G$ é completamente redutível (ou semissimples). A partir daí, questões independentes a teoria de representações, mas que dizem respeito a semissimplicidade de produtos cruzados em geral são tratados como Teorema tipo-Maschke. Nosso objetivo neste trabalho é apresentar algumas versões deste teorema. Iniciamos com versões mais clássicas envolvendo produtos cruzados globais e parciais para em seguida estudarmos versões em álgebras de Hopf e produtos smash.

Palavras-chave: Teoremas de Maschke. Semissimples. Ações Parciais de Grupos. Produto Cruzado. Álgebras de Hopf.

ABSTRACT
Dissertation
Graduate Program in Mathematics
Federal University of Santa Maria

MASCHKE'S THEOREM
AUTHOR : RICARDO LEITE DOS SANTOS
ADVISOR : JOÃO ROBERTO LAZZARIN
Date and Location of Defense: Santa Maria, May 9^{th}, 2013.

In representation theory, having a representation of a group G is equivalent to having a $\Bbbk G$-module. Since $\Bbbk G$-modules which are sums of irreducible $\Bbbk G$-modules form a very important class in the theory of modules, to know conditions for a $\Bbbk G$-module be irreducible or completely reducible from the particularities of the field $\Bbbk$ and the group G become a very important issue, whose solution was originally presented by the German mathematician Heinrich Maschke which proved that if the order of G is not a multiple of the characteristic of the field $\Bbbk$, then $\Bbbk G$ is completely reducible (or semisimple). From there, issues unrelated to representation theory, but that concern the semisimplicity of cross products in general are treated as Maschke-type theorem. Our goal in this dissertation is to present some versions of this theorem, starting with classic versions involving cross products for actions of groups on algebras and then versions for Hopf algebras and smash products.

Keywords: Maschke's Theorem. Semisimple. Partial Actions of Groups. Crossed Product. Hopf Algebra.

Sumário

Introdução

Heinrich Maschke foi um matemático alemão que viveu de 1853 a 1908. Em 1898, em seu artigo cujo título original em alemão é "Über den arithmetischen charakter der coefficienten der substitutionen endlicher linearer substituionsgruppen"publicado no Mathematische Annalen (ver [11]) e cujo objetivo inicial era o de simplificar o estudo de representações de grupos por anéis de matrizes, apresentou, provavelmente, o primeiro teorema importante sobre álgebras de grupos finitos que mostra o forte efeito da torção, ou da falta dela, sobre a estrutura destas álgebras. Tal resultado garante que se G é um grupo finito tal que a ordem de $|G| \neq 0$ em um corpo $\Bbbk$, isto é, $|G|$ não é um múltiplo da característica do corpo $\Bbbk$, então a álgebra de grupo $\Bbbk$G é semissimples (ver [1], pg 42).

A importância deste resultado ganha destaque na já bem desenvolvida teoria de anéis semissimples, cuja caracterização completa é dada no Teorema de Artin-Wedderburn (ver [10], Capítulo 1). Tal teorema mostra que álgebras semissimples são produtos diretos de um número finito de cópias de representações irredutíveis de G sobre $\Bbbk$, e consequentemente, cada $\Bbbk G$-módulo é uma soma direta de $\Bbbk G$-submódulos irredutíveis. O que reduz essencialmente a teoria das representações para o estudo de $\Bbbk G$-módulos irredutíveis (ver [1]).

Teoremas que caracterizam $\Bbbk G$ ou suas correspondentes generalizações, tais como, produtos cruzados e produtos smash em função do comportamento da torção da ordem de G em $\Bbbk$, são chamados Teoremas Tipo-Maschke. Em [15], seção 4 do Capítulo 1, encontramos várias versões, todas já consideradas, versões clássicas deste teorema. Todas têm em comum, não só enunciados que apontam generalizações do resultado original de Maschke, mas também, seguem um roteiro das ideias da demonstração original, todas utilizando da técnica de obter a partir de uma $\Bbbk$-projeção de um $\Bbbk G$-módulo sobre um $\Bbbk G$-submódulo uma $\Bbbk G$-projeção sobre este mesmo submódulo. Desde que cada $\Bbbk G$-projeção corresponde a um $\Bbbk G$-somando direto, conclui-se portanto que cada $\Bbbk G$-submódulo é um somando direto.

Ressaltamos que em todo o trabalho, salvo menção em contrário, usaremos as palavras anel ou álgebra para nos referirmos a um anel ou álgebra com unidade. Do mesmo modo, usaremos a notação $\Bbbk$ para denotar um corpo e a notação $\Bbbk$-estrutura para dizer que, antes de tudo, a estrutura é um $\Bbbk$-espaço vetorial. Por fim, os Teoremas de Maschke que trataremos neste trabalho são teoremas que tratam da questão de semissimplicidade de alguns tipos de anéis, módulos, álgebras de Hopf e produto smash.

No Capítulo 1, introduziremos algumas definições e resultados que fundamentarão o restante do trabalho, tais como módulos e anéis semissimples e produto tensorial entre módulos. No segundo capítulo, apresentamos duas versões de teoremas de Maschke, sendo uma delas mais clássica, onde $\Bbbk$G é trocado por uma estrutura mais geral, conhecida como produto cruzado. Para tanto, introduziremos o conceito de ações (globais) de grupos sobre álgebras nos moldes que aparecem nos livros [13] e [15]. Em seguida, neste mesmo capítulo, apresentamos a definição de ação parcial torcida de grupo sobre uma álgebra e seu respectivo produto cruzado parcial (torcido) que podem ser vistos em [5] ou [3]. Finalmente, apresentamos a versão parcial (torcida) para o Teorema de Maschke. Vale lembrar que a primeira versão parcial para o Teorema de Maschke foi feita para o caso não torcido e aparece em [7] e que apesar deste caso não torcido não ser exatamente um caso particular para o caso torcido, as técnicas empregadas nas demonstrações são muito similares. Escolhemos apresentar o caso torcido por envolver maior número de ingredientes nas contas que aparecem nas demonstrações, e que portanto, com algumas pequenas adaptações podemos recair ao caso não torcido.

No Capítulo 3, apresentamos três versões do Teorema de Maschke para álgebras de Hopf. Para isso, iniciamos com algumas seções que introduzirão toda linguagem de coálgebras e comódulos, notação sigma e outros ingredientes, tais como, álgebras separáveis, álgebras de Hopf e integrais. Seguiremos as notações usuais da literatura, mais especificamente, as encontradas nas referências [9], [2], [17] ou [14]. Também iremos construir os espaços duais de uma $\Bbbk$-álgebra e uma $\Bbbk$-coálgebra. Se A é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita (isto é, A é $\Bbbk$-espaço vetorial de dimensão finita) então o seu dual algébrico $A^* = \{f : A \to \Bbbk \mid f \text{ é } \Bbbk\text{-linear}\}$ será uma $\Bbbk$-coálgebra e, se C é uma $\Bbbk$-coálgebra de dimensão finita então o seu dual algébrico $C^* = \{f : C \to \Bbbk \mid f \text{ é } \Bbbk\text{-linear}\}$ será uma $\Bbbk$-álgebra. Com isso podemos apresentar uma versão "dual" para o Teorema de Maschke em álgebras de Hopf, que trata de provar a "cossemissimplicidade"da álgebra de Hopf, sob certas condições.

Finalizamos nosso trabalho apresentando no Capítulo 4, o conceito de ação de uma álgebra de Hopf H sobre uma $\Bbbk$-álgebra A para, a partir daí definirmos, o produto smash que é uma generalização para álgebras de Hopf do skew anel de grupo (vide referências [2] e [14]) e com isso, podemos apresentar nossa última versão do Teorema de Maschke para o produto smash.

Capítulo 1

Pré-requisitos e Definições

Neste primeiro capítulo iremos apresentar alguns resultados e definições básicas referentes a módulos sobre anéis com unidade, tais como semissimplicidade e produto tensorial. Também daremos uma definição clássica para uma álgebra, em particular, para a álgebra de grupo que nos acompanhará no restante do trabalho. Tais resultados podem ser encontrados em qualquer livro de teoria básica de módulos, como por exemplo [12], [8], [10] ou [16].

1.1 Módulos e Submódulos

Iniciamos esta seção lembrando de algumas definições que serão usadas no decorrer do texto. Não entraremos em detalhes e também omitiremos algumas demonstrações, pois temos como finalidade apenas relembrar os resultados que serão utilizados.

Definição 1.1.1. *Seja A um anel com unidade 1_A. Diz-se que um conjunto não vazio M é um* ***módulo à esquerda*** *sobre A (ou um A-módulo à esquerda) se M é um grupo abeliano em relação a uma operação, que indicaremos por $+$, e está definida uma lei de composição externa (ação) que a cada par $(a, m) \in A \times M$ associa um elemento $am \in M$, tal que, para todo $a, b \in A$ e para todo $m, n \in M$, verificam-se:*

(i) $a(bm) = (ab)m$;

(ii) $a(m + n) = am + an$;

(iii) $(a + b)m = am + bm$;

(iv) $1_A m = m$.

Observação 1.1.2. De forma análoga, definimos um A-módulo à direita, considerando-se a ação à direita por um elemento do anel A. Pode-se também definir um módulo para anéis sem unidade. Neste caso, omite-se o item (iv) da definição acima. Notemos que no caso de A ser um anel comutativo, todo A-módulo à esquerda é um A-módulo à direita (e vice-versa), desde que definamos $ma = am$ ($am = ma$).

Definição 1.1.3. *Seja M um A-módulo à esquerda. Um subconjunto $N \subseteq M$ diz-se um A-**submódulo** (à esquerda) de M ou simplesmente um submódulo (à esquerda) se N é um subgrupo aditivo de M e é fechado em relação à multiplicação por escalares.*

Exemplo 1.1.4. Se M é um A-módulo e $m \in M$, então o submódulo (*submódulo cíclico*) gerado por m, denotado por (m) ou Am, é:

$$(m) = \{am : a \in A\}.$$

No caso de existir $m \in M$ tal que $(m) = M$ dizemos que M é um A-módulo cíclico.

Temos, de modo análogo ao conceito de transformações lineares entre espaços vetoriais (que são módulos à esquerda sobre um corpo), a definição de um homomorfismo de A-módulos à esquerda.

Definição 1.1.5. *Sejam M e N dois A-módulos à esquerda. Uma função $f : M \to N$ diz-se um **homomorfismo de A-módulos à esquerda** ou um A-homomorfismo à esquerda se para todo $m, n \in M$ e para todo $\lambda \in A$ verificam-se: $f(m+n) = f(m) + f(n)$ e $f(\lambda m) = \lambda f(m)$. De modo análogo, definimos um homomorfismo de R-módulos à direita.*

Exemplo 1.1.6. Sejam A um anel e M, N dois A-módulos. Denotaremos por $Hom_A(M, N)$ o conjunto de todos os A-homomorfismos de M em N. Definindo a soma de dois elementos $f, g \in Hom_A(M, N)$ por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in M,$$

temos uma estrutura de grupo abeliano em $Hom_A(M, N)$. No caso que A é um anel comutativo, definindo a ação de um escalar $a \in A$ sobre um elemento $f \in Hom_A(M, N)$ por

$$(a \cdot f)(x) = af(x), \quad \forall x \in M,$$

temos que $Hom_A(M, N)$ é um A-módulo à esquerda. Mais geralmente, temos que $Hom_A(M, N)$ é um $C(A)$-módulo à esquerda com a ação dada acima, onde $C(A) = \{a \in A \mid ax = xa$ para todo $x \in A\}$.

Exemplo 1.1.7.

(i) Todo anel A é um A-módulo à esquerda via a multiplicação usual;

(ii) Se A for um K-módulo, onde A é um anel com unidade e K um anel comutativo com unidade onde $k(ab) = (ka)b = a(kb)$ para todo $k \in K$ e $a, b \in A$ dizemos então que A é uma K-***álgebra***. Em particular, todo anel A com unidade é uma $C(A)$-álgebra.

No capítulo 3 vamos retomar essa definição apresentando uma versão equivalente a partir de diagramas. No entanto, a definição acima é considerada como clássica para uma K-álgebra.

Observação 1.1.8. Se V um $\Bbbk$-espaço vetorial onde $\Bbbk$ é um corpo, então V é um $\Bbbk$-módulo. Como sabemos, todo espaço vetorial possui uma base, isto não acontece no geral em módulos. Quando um A-módulo à esquerda M possui uma base (às vezes chamada A-base) ele é chamado um A-***módulo livre***.

Exemplo 1.1.9. Seja K é um anel comutativo com unidade e G é um grupo. Indicaremos por KG o conjunto de todas as combinações lineares formais do tipo $\sum\limits_{g\in G} k_g g$ com $k_g \in K$ e $g \in G$, onde os elementos k_g são todos nulos, salvo um número finito. Definimos em KG as seguintes operações:

$$(\sum_{g\in G} k_g g) + (\sum_{g\in G} k_g^{'} g) = \sum_{g\in G} (k_g + k_g^{'}) g$$

e

$$(\sum_{g\in G} k_g g).(\sum_{h\in G} k_h h) = \sum_{f\in G} k_f f,$$

na qual $k_f = \sum\limits_{gh=f} k_g k_h$. Assim, KG tem estrutura de anel com unidade, $1_K 1_G$. Tal anel recebe o nome de *anel de grupo*. Naturalmente, KG é um K-módulo via:

$$\lambda.(\sum_{g\in G} k_g g) = \sum_{g\in G} (\lambda.k_g) g,$$

e desde que $\{1_K.g \mid g \in G\}$ forma uma base de KG segue que KG é livre.
Pela comutatividade de K, vemos que KG é uma K-álgebra, que é conhecida como **álgebra de grupo**.

A partir de agora veremos alguns tipos especiais de módulos e sequências de homomorfismos entre módulos. Tais definições e exemplos podem ser vistos em [12], [8] e [16].

Definição 1.1.10. *Sejam M, N e P A-módulos à esquerda e considere a seguinte sequência:*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

(i) *Dizemos que esta sequência é uma **sequência exata** (ou exata curta) de A-módulos se f for um A-homomorfismo injetor (A-monomorfismo), g for um A-homomorfismo sobrejetor (A-epimorfismo) e $Im(f) = Ker(g)$;*

(ii) *Dizemos que esta sequência* ***cinde*** *se $Im(f)$ é um somando direto de N. Equivalentemente, se existir um A-homomorfismo $\varphi : P \to N$ tal que $g \circ \varphi = id_P$. Equivalentemente, se existir um A-homomorfismo $\psi : N \to M$ tal que $\psi \circ f = id_M$.*

Definição 1.1.11. **(i)** *Dizemos que um A-módulo à esquerda Q é* ***injetivo*** *se dados A-módulos à esquerda M, N; um A-monomorfismo $f : M \to N$ e um A-homomorfismo $g : M \to Q$ sempre existir um A-homomorfismo $h : N \to Q$ tal que $h \circ f = g$.*

(ii) *Dizemos que um A-módulo à esquerda P é* ***projetivo*** *se dados A-módulos à esquerda M, N; um A-epimorfismo $f : M \to N$ e um A-homomorfismo $g : P \to N$ sempre existir um A-homomorfismo $h : P \to M$ tal que $f \circ h = g$.*

Exemplo 1.1.12. Todo A-módulo à esquerda livre é projetivo. De fato, sejam P um A-módulo livre com base $\{x_i\}_{i\in I}$, $f : M \to N$ um A-epimorfismo e $g : P \to N$ um A-homomorfismo. Sejam $y_i = g(x_i)$ para todo $i \in I$, como f é A-epimorfismo, existe $m_i \in M$ tal que $f(m_i) = y_i$ para todo $i \in I$. Definamos $h : \{x_i\}_{i\in I} \to M$ por $h(x_i) = m_i$ e estendemos por linearidade, isto é, $h(x) = h(\sum\limits_{i\in I} a_i x_i) = \sum\limits_{i\in I} a_i h(x_i) = \sum\limits_{i\in I} a_i m_i$. Note que, como $\{x_i\}_{i\in I}$ é uma base de P, h está bem definida. Assim, temos que para todo $x \in P$ vale:

$$(f \circ h)(x) = f(\sum_{i\in I} a_i m_i) = \sum_{i\in I} a_i f(m_i) = \sum_{i\in I} a_i y_i = \sum_{i\in I} a_i g(x_i) = g(\sum_{i\in I} a_i x_i) = g(x),$$

donde concluímos que P é projetivo.

Definição 1.1.13. *Seja M um A-módulo.*

(i) *Chama-se* ***resolução injetiva*** *de M a toda sequência exata da forma:*

$$0 \to M \xrightarrow{d_0} Q_0 \xrightarrow{d_1} Q_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_{n-1} \xrightarrow{d_n} Q_n \longrightarrow \cdots$$

onde cada Q_i é um A-módulo injetivo.

(ii) *Se existe uma resolução injetiva finita para M da forma:*

$$0 \to M \xrightarrow{d_0} Q_0 \xrightarrow{d_1} Q_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_{n-1} \xrightarrow{d_n} Q_n \to 0$$

define-se como a ***dimensão injetiva*** *ao menor $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ satisfazendo* ***(ii)****. Neste caso $\boldsymbol{n}$ é o comprimento da menor resolução injetiva finita de M que denotaremos por $idim_A(M) = n$.*

Exemplo 1.1.14. $idim_A(M) = 0$ se, e somente se, M é injetivo. De fato, se M é um A-módulo injetivo, então $0 \to M \xrightarrow{id_M} M \to 0$ é uma resolução injetiva (a menor possível) para M, logo $idim_A(M) = 0$. Reciprocamente, se $idim_A(M) = 0$ então M admite uma resolução injetiva de forma $0 \to M \xrightarrow{d_0} Q_0 \to 0$, logo $M \cong Q_0$ é injetivo.

1.2 Módulos e Anéis Simples e Semissimples

Esta seção trata de um dos pontos fundamentais deste trabalho, a semissimplicidade. Apresentaremos aqui as definições de módulos, anéis e álgebras semissimples e alguns resultados correlatos. Lembramos que dado um subespaço vetorial W de um espaço vetorial V podemos, a partir de uma base de W, completá-la formando uma base de V. No entanto estas idéias não valem para módulos em geral, por isso no caso em que, dado um submódulo S de um A-módulo à esquerda M existir um outro submódulo à esquerda T de M tal que $M = S \oplus T$ dizemos que S é um **somando direto** de M e que T é um **complemento** de S.

Definição 1.2.1. *Sejam A um anel e M um A-módulo à esquerda.*
(i) *M é chamado A-módulo **simples** (ou irredutível) se M é não-nulo e M não tem submódulos próprios, isto é, não tem submódulos além de (0) e M.*
(ii) *M é chamado A-módulo **semissimples** (ou completamente redutível) se todo A-submódulo de M é um somando direto.*

Diretamente da definição podemos concluir que um submódulo e um quociente de um módulo semissimples é semissimples. De fato, suponhamos que N é um submódulo de um módulo M semissimples, se S é um submódulo de N temos que S é submódulo de M e sendo M semissimples, existe S' submódulo de M tal que $M = S \oplus S'$. Daí, vem que $N = S \oplus (N \cap S')$. Se L é um quociente de M temos que $L \cong M/Ker(\pi)$ onde π é a projeção canônica de M em L. Agora, como $Ker(\pi)$ é submódulo de M temos que existe N' submódulo de M tal que $M = Ker(\pi) \oplus N'$, assim podemos considerar uma projeção ω de M em N' donde, $N' \cong M/Ker(\omega)$. Como $Ker(\omega) \cong Ker(\pi)$ tem-se, $L \cong M/Ker(\pi) \cong M/Ker(\omega) \cong N'$ e desde que N' é semissimples, segue-se que L é semissimples.

Lema 1.2.2. *Se M é um A-módulo à esquerda semissimples não-nulo, então M contém um submódulo simples.*

Demonstração. Seja $x \in M$, $x \neq 0$ e consideremos o submódulo de M, $L = Ax$. Seja $\mathcal{F}_x$ a família de todos os submódulos de L que são diferentes de L. Note que $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$ pois o submódulo (0) pertence a ela, e pode-se verificar que para toda cadeia crescente de submódulos distintos de L temos que a união destes é uma cota superior para esta cadeia, logo aplica-se o Lema de Zorn a esta família, donde existe H submódulo (distinto) de L maximal em $\mathcal{F}_x$. Desde que M é semissimples e H é submódulo de M, existe $\overline{H}$ submódulo de M tal que $M = H \oplus \overline{H}$. Notemos que

$$L = L \cap M = L \cap (H \oplus \overline{H}) \overset{(*)}{=} (L \cap H) \oplus (L \cap \overline{H}) = H \oplus (L \cap \overline{H}),$$

onde $(*)$ é válida devido a $H \subset L$. Então, $L/H \cong L \cap \overline{H}$. Notemos que L/H é simples. De fato, se $(0) \neq N \subset (L/H)$ então, existe P submódulo de L tal que $N = P/H$ e

$H \subset P \subset L$ com P distinto de H. Desde que H é maximal temos $P = L$ e assim, $N = L/H$. Logo $L \cap \overline{H}$ é submódulo simples de M . $\square$

Teorema 1.2.3. *Para um A-módulo à esquerda M as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *M é semissimples;*

(ii) *M é soma direta de uma família de submódulos simples de M;*

(iii) *M é soma de uma família de submódulos simples de M.*

Demonstração. (**i**) $\Rightarrow$ (**iii**) Seja M_1 a soma de todos os submódulos simples de M. Sendo M semissimples, existe M_2 tal que $M = M_1 \oplus M_2$. Suponhamos $M_2 \neq (0)$. Logo, pelo lema anterior, existe um submódulo simples N de M_2 (e, portanto de M). Desde que N é não-nulo e $(0) \neq N \subset M_1 \cap M_2$ temos uma contradição.
(**iii**) $\Rightarrow$ (**i**) Seja $M = \sum\limits_{i \in I} M_i$ onde cada M_i é um submódulo simples de M e N um submódulo de M. Consideremos agora a seguinte família de subconjuntos J de I:

$$\mathcal{F}_N = \{J \subset I : N \cap \sum_{j \in J} M_j = (0)\}.$$

Notemos que $\mathcal{F}_N$ não é vazia, pois $(0) \cap N = (0)$. Usando a relação de ordem parcial "$\subseteq$" em $\mathcal{F}_N$ podemos aplicar o Lema de Zorn, pois se $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_n \subseteq \cdots$ é uma cadeia em $\mathcal{F}_N$ então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$ é uma cota superior para esta cadeia, obtendo assim um elemento maximal em $\mathcal{F}_N$ que denotaremos por J.

Seja $M^{'} := N + (\sum\limits_{j \in J} M_j)$. Vejamos que $M = M^{'}$. Se tivermos que $M_i \subset M^{'}$ para todo $i \in I$, então $M = \sum\limits_{i \in I} M_i \subset M^{'} \subset M$ e temos o resultado. Suponhamos que exista $p \in I$ tal que $M_p \not\subset M^{'}$, como M_p é simples segue que $M_p \cap M^{'} = (0)$ pois $M_p \cap M^{'}$ é submódulo de M_p e $M_p \not\subset M^{'}$. Assim temos,

$$(0) = M_p \cap M^{'} = M_p \cap (N + (\sum_{j \in J} M_j)) = N \cap (M_p + (\sum_{j \in J} M_j)),$$

o que contradiz a maximalidade de J, pois $p \notin J$.
(**ii**) $\Leftrightarrow$ (**iii**) Notemos que se $M = \sum\limits_{i \in I} M_i$ onde cada M_i é um submódulo simples de M então, $M_j \cap \sum\limits_{i \in I^*} M_i$ é igual a (0) ou M_j, $\forall j \in I$ onde $I^* = I - \{j\}$. De fato, basta notar que esta interseção é um submódulo de M_j que é simples. $\square$

Teorema (Definição) 1.2.4. *Para um anel A com unidade as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Todo A-módulo à esquerda é projetivo;*

(ii) *Toda sequência exata curta de A-módulos à esquerda cinde;*

(iii) *Todo A-módulo à esquerda é injetivo;*

(iv) *Todo A-módulo à esquerda é semissimples;*

(v) *O A-módulo regular A, considerado como A-módulo à esquerda, é semissimples.*

Se uma, e portanto todas, as condições acima são válidas, A é dito um **anel semissimples** à esquerda.

Demonstração. **(i)** $\Leftrightarrow$ **(ii)** Consideremos a seguinte sequência exata curta de A-módulos:

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0.$$

Se todo A-módulo é projetivo segue que existe $g' : N \to M$ tal que $g \circ g' = id_N$ logo a sequência acima cinde. Agora suponhamos que toda sequência exata curta de A-módulos cinde. Seja M um A-módulo e consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u, "g"] & \end{tikzcd}$$

assim temos a seguinte sequência exata:

$$0 \to Ker(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \to 0$$

que por hipótese cinde. Logo existe $g' : B \to A$ tal que $f \circ g' = id_B$. Definimos então $\overline{g} = g' \circ g$. Assim, temos que $f \circ \overline{g} = f \circ g' \circ g = id_B \circ g = g$, logo $\overline{g} : M \to A$ completa o diagrama acima e o faz comutativo, portanto M é projetivo.
(iii) $\Leftrightarrow$ **(ii)** Similar ao caso anterior.
(ii) $\Leftrightarrow$ **(iv)** Sejam M um A-módulo e N um submódulo de M. Temos a seguinte sequência exata

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} (M/N) \to 0$$

onde i denota a inclusão e π a projeção usuais. Se a sequência cinde, $N = Im(i)$ é somando direto de M e então M é semissimples. Agora, seja

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

uma sequência exata de A-módulos. Assim, K, M e N são semissimples. Temos então que $Im(f) \cong K$ é submódulo de M e M é semissimples, portanto $Im(f)$ é somando direto de

M, e sendo assim, a sequência cinde.

(iv) $\Rightarrow$ **(v)** Tautologia.

(v) $\Rightarrow$ **(iv)** Seja M um A-módulo. Notemos que se $n \in M$, $(n) = An$ é um submódulo semissimples de M pois $An \cong A/I$ (A visto como A-módulo), logo $An = \sum\limits_{i \in I_n} M_i$ onde os M_i's são submódulos simples. Como $M = \sum\limits_{m \in \overline{M}} Am$ para algum conjunto de geradores $\overline{M}$, temos que $M = \sum\limits_{i \in I} M_i$ onde $I = \bigcup_{m \in \overline{M}} I_m$. Portanto, M é soma de submódulos simples, ou seja, M é semissimples. $\square$

Exemplo 1.2.5. Sejam $\Bbbk$ um corpo, V um $\Bbbk$-espaço vetorial e $W \subset V$ um subespaço. Assim, V/W é um espaço vetorial e portanto é um $\Bbbk$-módulo livre, donde pelo Exemplo 1.1.12 e usando que $id_{V/W} : V/W \to V/W$ é um homomorfismo temos que existe um homomorfismo $h : V/W \to V$ tal que $\pi \circ h = id_{V/W}$, ou seja, a seguinte sequência exata

$$0 \to W \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} (V/W) \to 0$$

cinde, logo W é um somando direto de V e portanto V é um $\Bbbk$-módulo semissimples.

Exemplo 1.2.6. $\mathbb{Z}$ não é $\mathbb{Z}$-módulo semissimples. De fato, se N é um submódulo não-nulo e distinto de $\mathbb{Z}$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ diferente de zero e de 1 tal que $N = \mathbb{Z}n$. Se N fosse um somando direto de $\mathbb{Z}$ existiria $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tal que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}n \oplus \mathbb{Z}m$ o que é um absurdo pois $mn \neq 0$, visto que $m, n \neq 0$ e $mn \in (\mathbb{Z}n \cap \mathbb{Z}m)$.

O próximo exemplo é um dos mais importantes da teoria de anéis semissimples pois, como veremos na observação que o sucede, ele dá uma caracterização para os anéis semissimples.

Exemplo 1.2.7. Seja D uma anel de divisão, isto é, um anel tal que todo elemento não-nulo possui um inverso, e seja $A = M_n(D)$ o anel das matrizes de ordem $(n \times n)$ com entradas em D. Vejamos que A é semissimples. Para isso, consideremos o A-módulo A e vamos mostrar que A se escreve como soma direta de A-submódulos simples. De fato, se E_{hk} denota a matriz $(n \times n)$ que possui o elemento 1_D na linha h, coluna k e zero nas demais entradas, temos que $A = \sum\limits_{i=1}^{n} AE_{ii}$. Vejamos que AE_{kk} é um A-módulo simples para $k = 1, \cdots, n$. Notemos que AE_{kk} é exatamente o conjunto das matrizes que possuem todas as entradas nulas exceto as da coluna k, suponhamos que I é um submódulo de AE_{kk} que possui alguma entrada não-nula, logo existe um $b \neq 0$, digamos na linha g e coluna k. Escrevendo $I = (a_{i,j})_{n \times n}$ temos que $(b_{i,j})_{n \times n} I = (b_{i,j})_{n \times n}(a_{i,j})_{n \times n} = E_{kk}$, onde $(b_{i,j})_{n \times n}$ é a matriz que possui o elemento b^{-1} na linha k coluna g e zero nas demais. Logo E_{kk} pertence a I, pois I é submódulo, e como gera AE_{kk} temos que $I = AE_{kk}$ e portanto AE_{kk} é simples para todo $k = 1, \cdots, n$, o que conclui a justificativa.

Observação 1.2.8. Seja A um anel semissimples à esquerda. Então,

$$A \cong M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times ... \times M_{n_r}(D_r)$$

para adequados anéis de divisão $D_1, D_2, ..., D_r$ e inteiros positivos $n_1, n_2, ..., n_r$. O número r está unicamente determinado, como os pares $(D_1, n_1), (D_2, n_2), ..., (D_r, n_r)$, a menos de permutações. Além disso, existem exatamente r módulos simples à esquerda não-isomorfos sobre A.

Este resultado é conhecido como **Teorema de Wedderburn-Artin**, e a sua demonstração pode ser vista na página 33 da referência [10]. Devido a este teorema, todo anel semissimples à esquerda é semissimples à direita e vice-versa. De agora em diante anéis **semissimples à esquerda** serão tratados simplesmente como anéis **semissimples**.

1.3 Produto Tensorial

Aqui apresentaremos a definição de produto tensorial entre dois A-módulos e algumas propriedades essenciais para o que segue. Todo conteúdo apresentado nesta seção encontra-se basicamente em [16] e [9]. Lembramos que, se M é um A-módulo à direita, N é um A-módulo à esquerda e G é um grupo (aditivo) abeliano, uma função $f : M \times N \to G$ é chamada **biaditiva** (ou A-biaditiva) se, para todo $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $a \in A$ temos:

(i) $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$;

(ii) $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$;

(iii) $f(am, n) = f(m, an)$.

No caso de G ser um A-módulo à esquerda, a função f é chamada **bilinear** (ou A-bilinear) se f é biaditiva e valer
(iii') $f(am, n) = f(m, an) = af(m, n)$.

Definição 1.3.1. *Um* ***produto tensorial*** *de um A-módulo à direita M por um A-módulo à esquerda N é um grupo abeliano que denotamos por $M \otimes_A N$ e uma função A-biaditiva π que satisfazem a seguinte propriedade universal: dados um grupo abeliano G e uma função A-biaditiva $f : M \times N \to G$ arbitrários existe um único homomorfismo (de $\mathbb{Z}$-módulos) $f' : M \otimes_A N \to G$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & M \otimes_A N \arrow[dl, "f'"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, $f' \circ \pi = f$.

Vejamos que dados dois A-módulos o produto tensorial entre eles sempre existe e é único (a menos de isomorfismos).

Teorema 1.3.2. *O produto tensorial de um A-módulo à direita M por um A-módulo à esquerda N existe.*

Demonstração. Seja $F = F(M \times N)$ um grupo (aditivo) abeliano livre com base $M \times N$, isto é, F é o grupo cujos elementos são $\mathbb{Z}$-combinações lineares de pares ordenados (m, n) com $m \in M$ e $n \in N$. Seja S o subgrupo de $F(M \times N)$ gerado por todos os elementos de uma das três formas a seguir:

(i) $(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$ com $m, m' \in M$ e $n \in N$;

(ii) $(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$ com $m \in M$ e $n, n' \in N$;

(iii) $(ma, n) - (m, an)$ com $m \in M$, $n \in N$ e $a \in A$.

Temos que F/S é um grupo (aditivo) abeliano e portanto um $\mathbb{Z}$-módulo com a adição definida por $[(m, n) + S] + [(m', n') + S)] = [(m, n) + (m', n')] + S$ e multiplicação por escalar definida por $\lambda[(m, n) + S] = (\lambda(m, n)) + S$ com $\lambda \in \mathbb{Z}$. Denotemos o grupo quociente $\frac{F}{S}$ por $M \otimes_A N$ e a classe $(m, n) + S$ por $m \otimes n$. Seja a função $h : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$ com $h(m, n) = m \otimes n$. Verifica-se facilmente que h é A-biaditiva. Sejam G um grupo (aditivo) abeliano e $f : M \times N \longrightarrow G$ uma função A-biaditiva. Como F é livre sobre $M \times N$, existe um único homomorfismo (de $\mathbb{Z}$-módulos) $\varphi : F \longrightarrow G$ com $\varphi(m, n) = f(m, n)$ para todo $(m, n) \in M \times N$. Como f é A-biaditiva, então $S \subset Ker(\varphi)$. Logo φ induz um homomorfismo (de $\mathbb{Z}$-módulos) $f' : M \otimes_A N \longrightarrow G$ com $f' : \sum(m_i \otimes n_i) \mapsto \varphi(\sum(m_i, n_i))$. De fato, sejam $\sum(m_i \otimes n_i) = \sum(c_j \otimes d_j)$. Então $\varphi(\sum(m_i, n_i) - \sum(c_j, d_j)) = 0 \Rightarrow \varphi(\sum(m_i, n_i)) - \varphi(\sum(c_j, d_j)) = 0$. Segue-se que $f'(\sum(m_i \otimes n_i)) = \varphi(\sum(m_i, n_i)) = \varphi(\sum(c_j, d_j)) = f'(\sum(c_j \otimes d_j))$. Isto mostra que f' está bem definida. Mostra-se facilmente que f' é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos. Ainda $f' \circ h(m, n) = f'(m \otimes n) = \varphi(m, n) = f(m, n)$. Logo, $f' \circ h = f$.

Suponhamos agora que exista $g' : M \otimes_A N \longrightarrow G$ homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, tal que $g' \circ h = f$. Seja $\sum(m_i \otimes n_i) \in M \otimes_A N$. Temos que $g' \circ h(m_i, n_i) = f' \circ h(m_i, n_i)$. Segue-se que $g'(m_i \otimes n_i) = f'(m_i \otimes n_i) \Rightarrow \sum g'(m_i \otimes n_i) = \sum f'(m_i \otimes n_i) \Rightarrow g'(\sum(m_i \otimes n_i)) = f'(\sum(m_i \otimes n_i))$. Isto mostra que $g' = f'$. $\square$

Observação 1.3.3. Da demonstração do teorema anterior segue-se que:

(i) $(a_1 + a_2) \otimes b = (a_1 \otimes b) + (a_2 \otimes b)$ *para todo* $a_1, a_2 \in M$ *e* $b \in N$;

(ii) $a \otimes (b_1 + b_2) = (a \otimes b_1) + (a \otimes b_2)$ *para todo* $a \in M$ *e* $b_1, b_2 \in N$;

(iii) *$ar \otimes b = a \otimes rb$ para todo $a \in M$, $b \in N$ e $r \in A$;*

(iv) $(0, b) = -[(0 + 0, b) - (0, b) - (0, b)] \in S$ *e* $(a, 0) = -[(a, 0 + 0) - (a, 0) - (a, 0)] \in S$. *Então,* $0 \otimes b = a \otimes 0 = 0_{M \otimes_A N}$*;*

(v) $0_{M \otimes_A N} = -(a \otimes b) + a \otimes b$. *Por outro lado,* $(-a) \otimes b + a \otimes b = (-a + a) \otimes b = 0 \otimes b = 0_{M \otimes_A N}$. *Da unicidade do oposto, segue-se que* $-(a \otimes b) = (-a) \otimes b$. *Logo, um elemento arbitrário de* $M \otimes_A N$ *é da forma* $\sum(a_i \otimes b_i)$*, onde somente um número finito dos somandos são não-nulos.*

Teorema 1.3.4. *Dois produtos tensoriais quaisquer de um A-módulo à direita M por um A-módulo à esquerda N são isomorfos (como $\mathbb{Z}$-módulos).*

Demonstração. Suponhamos que exista um segundo grupo (aditivo) abeliano X e uma função A-biaditiva $k : M \times N \longrightarrow X$ que também satisfazem a propriedade universal descrita na Definição 1.3.1. Temos:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "k"'] & & M \otimes_A N \arrow[dl, shift right, "k'"'] \\
& X \arrow[ur, shift right, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

onde k' e h' são homomorfismos (de $\mathbb{Z}$-módulos), tais que $k' \circ h = k$ e $h' \circ k = h$. Temos ainda o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & M \otimes_A N \arrow[dl, "id_{M \otimes_A N}"] \\
& M \otimes_A N &
\end{tikzcd}$$

Logo, $id_{M \otimes_A N} \circ h = h = h' \circ k = h' \circ (k' \circ h) = (h' \circ k') \circ h$. Pela unicidade, segue-se que $h' \circ k' = id_{M \otimes_A N}$. Analogamente, $id_X \circ k = k = k' \circ h = k' \circ (h' \circ k) = (k' \circ h') \circ k$. Pela unicidade, segue-se que $k' \circ h' = id_X$. Portanto $M \otimes_A N \cong X$. $\square$

Observação 1.3.5. **(i)** Sejam $f : M \to M'$ um homomorfismo de A-módulos à direita e $g : N \to N'$ um homomorfismo de A-módulos à esquerda. Então existe um único homomorfismo (de $\mathbb{Z}$-módulos) $h : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ com $h(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$;

(ii) Sejam $f : M \to M'$ e $f' : M' \to M''$ homomorfismos de A-módulos à direita. Sejam $g : N \to N'$ e $g' : N' \to N''$ homomorfismos de R-módulos à esquerda. Então

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

De fato, **(i)** A função $M \times N \to M' \otimes_A N'$ definida por $(a, b) \mapsto f(a) \otimes g(b)$ é uma função A-biaditiva. Basta usar agora a propriedade universal descrita na Definição 1.3.1. **(ii)** Temos que $f' \circ f : M \to M''$ e $g' \circ g : N \to N''$ são homomorfismos de A-módulos à direita e à esquerda respectivamente. Pelo teorema anterior existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) : M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N''$ com $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)(a \otimes b) = (f' \circ f)(a) \otimes (g' \circ g)(b)$. Temos também que:

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)(a \otimes b) = (f' \otimes g')(f(a) \otimes g(b)) = (f' \circ f)(a) \otimes (g' \circ g)(b).$$

Decorre da unicidade que

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

A aplicação $h : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ (homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos) com $a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$ é denotada por $f \otimes g$.

Definição 1.3.6. *Sejam A e B anéis. Um grupo (aditivo) abeliano M é um (A, B)-**bimódulo**, denotado por ${}_AM_B$, se M é um A-módulo à esquerda e um B-módulo à direita, onde $a(mb) = (am)b$ para todo $a \in A$, $m \in M$ e $b \in B$.*

Observação 1.3.7. Se M é um A-módulo à direita e N é um (A, B)-bimódulo, então $M \otimes_A N$ é um B-módulo à direita, onde $[\sum(a_i \otimes b_i)].s = \sum(a_i \otimes (b_i s)), s \in B$. Analogamente, se M é um (B, A)-bimódulo e N é um A-módulo à esquerda, então $M \otimes_A N$ é um B-módulo à esquerda, onde $s.[\sum(a_i \otimes b_i)] = \sum((sa_i) \otimes b_i), s \in B$.

Vejamos agora um teorema que garante a comutatividade e a associatividade do produto tensorial.

Teorema 1.3.8. ***(i)*** *Se A é anel comutativo e M é um A-módulo à direita e N um A-módulo à esquerda, então existe um A-isomorfismo (de A-módulos) $\tau : M \otimes_A N \to N \otimes_A M$ com $a \otimes b \mapsto b \otimes a$. Chamaremos o isomorfismo τ acima de **Twist**;*
(ii) *Se A é anel comutativo e M é um A-módulo à direita, N um A-módulo à esquerda e à direita e P um A-módulo à esquerda, então existe um A-isomorfismo (de A-módulos) $\gamma : M \otimes_A (N \otimes_A P) \to (M \otimes_A N) \otimes_A P$ com $a \otimes (b \otimes c) \mapsto (a \otimes b) \otimes c$;*
(iii) *Sejam A é um anel com unidade e M um A-módulo à esquerda. Então $A \otimes_A M \cong M$.*

Demonstração. (**i**) Como A é anel comutativo, verifica-se que se M é A-módulo à direita, então M é A-módulo à esquerda com $a.m = ma$, onde $m \in M$ e $a \in A$. Segue-se que dados $a, b \in A$ e $m \in M$, temos:

$$a.(mb) = (mb)a = m(ba) = m(ab) = (ma)b = (a.m)b.$$

Logo M é um (A, A)-bimódulo. Verifica-se também que N é um A-módulo à direita com $n.a = an$, onde $n \in N$ e $a \in A$, donde N é um (A, A)-bimódulo. Decorre que $M \otimes_A N$ é um A-módulo à esquerda e à direita simultaneamente. Temos também que dados $a, b \in A$ vale:
$a.[(\sum(a_i \otimes b_i)).b] = a.[\sum(a_i \otimes (b_i b))] = \sum((aa_i) \otimes (b_i b)) = [\sum((aa_i) \otimes b_i)].b = [a.(\sum(a_i \otimes b_i))].b.$
Logo $M \otimes_A N$ é (A, A)-bimódulo. Analogamente, concluímos que $N \otimes_A M$ é um (A, A)-bimódulo.

Verifica-se que a função $t : M \times N \to N \otimes_A M$ definida por $(a, b) \mapsto b \otimes a$, onde $a \in M$ e $b \in N$, é A-biaditiva. Portanto, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\tau : M \otimes_A N \to N \otimes_A M$, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "t"'] & & M \otimes_A N \arrow[dl, "\tau"] \\
& N \otimes_A M &
\end{tikzcd}$$

Verifica-se também que a função $q : N \times M \to M \otimes_A N$ definida por $(b, a) \mapsto a \otimes b$, onde $a \in M$ e $b \in N$, é A-biaditiva. Decorre que existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\theta : N \otimes_A M \to M \otimes_A N$, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
N \times M \arrow[rr, "\pi'"] \arrow[dr, "q"'] & & N \otimes_A M \arrow[dl, "\theta"] \\
& M \otimes_A N &
\end{tikzcd}$$

Portanto, tem-se que $\theta \circ \tau = id_{M \otimes_A N}$ e que $\tau \circ \theta = id_{N \otimes_A M}$. Daí, $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$, ou seja, τ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos. Portanto temos que τ é A-linear. Logo τ é um isomorfismo de A-módulos.
(**ii**) Similar a (**i**).
(**iii**) Basta definir $\varphi : A \times M \to M$ por: $\varphi((a, m)) = am$ e verificar que φ é A-biaditiva. Assim, existe um A-homomorfismo $\overline{\varphi} : A \otimes_A M \to M$ com $\overline{\varphi}(a \otimes m) = am$. Para ver que

$\overline{\varphi}$ é um isomorfismo basta observar que o $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f : M \to A \otimes_A M$ definido por $f(m) = 1_A \otimes m$ é tal que $\overline{\varphi} \circ f = id_M$ e $f \circ \overline{\varphi} = id_{A \otimes_A M}$. $\square$

No que segue U, V são espaços vetoriais sobre um corpo $\Bbbk$ e $Hom(U, V)$ denotará o espaço vetorial de todas as transformações lineares de U em V. Em particular, denotaremos por V^* a $Hom(V, \Bbbk)$ que é o espaço dos funcionais lineares de V. Se X e Y são $\Bbbk$-espaços vetoriais e $v : X \to Y$ é uma transformação linear, denotamos por $v^* : Y^* \to X^*$ a transposta de v definida por: $v^*(f) = f \circ v$ para toda $f \in Y^*$.

Sejam $f : U \to U'$ e $g : V \to V'$ transformações lineares. Assim, a transformação linear $f \otimes g : U \otimes V \to U' \otimes V'$ definida por: $(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)$, nos fornece a seguinte transformação linear:

$$\lambda : Hom(U, U') \otimes Hom(V, V') \to Hom(V \otimes U, U' \otimes V') \tag{1.1}$$

definida por $\lambda(f \otimes g)(v \otimes u) = f(u) \otimes g(v)$.

Lembremos também os seguintes isomorfismos:

$$Hom(\bigoplus_{i \in I} U_i, V) \to \prod_{i \in I} Hom(U_i, V) \tag{1.2}$$

definido por $f \mapsto (f \circ q_i)_{i \in I}$ onde $q_j : U_j \to \bigoplus_{i \in I} U_i$ é a inclusão natural.

$$(\bigoplus_{i \in I} U_i) \otimes V \cong \bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V) \tag{1.3}$$

$$Hom(U, \prod_{i \in I} V_i) \to \prod_{i \in I} Hom(U, V_i) \tag{1.4}$$

definido por $f \mapsto (p_i \circ f)_{i \in I}$ onde $p_j : \prod_{i \in I} V_i \to V_j$ é a projeção natural.

Teorema 1.3.9. *Nas notações acima, se pelo menos um dos pares* (U, U'), (V, V') *e* (U, V) *consistir de dois espaços vetoriais de dimensão finita, então a transformação linear* λ *definida em* (1.1) *é um isomorfismo.*

Demonstração. Assumimos que (U, U') são de dimensão finita. Assim, podemos escrever $U = \bigoplus_{i \in I} (\Bbbk u_i)$, onde $\{u_i\}_{i \in I}$ é uma base finita de U. Usando os isomorfismos (1.2) e (1.3) acima, λ é uma transformação de $(\prod_{i \in I} Hom(\Bbbk u_i, U')) \otimes Hom(V, V')$ em $\prod_{i \in I} Hom(V \otimes \Bbbk u_i, U' \otimes V')$. Como o conjunto de índices I é finito, podemos trocar $\prod$ por $\bigoplus$. Aplicando (1.3) novamente, nos resta provar que a transformação

$$\lambda : Hom(\Bbbk u_i, U') \otimes Hom(V, V') \to Hom(V \otimes \Bbbk u_i, U' \otimes V')$$

é um isomorfismo no caso em que $U = \Bbbk u_i$.

Desde que $\Bbbk u_i$ é unidimensional, isto equivale a verificar que a aplicação

$$\lambda' : U' \otimes Hom(V,V') \to Hom(V, U' \otimes V') \tag{1.5}$$

definida por $\lambda'(u' \otimes f)(v) = u' \otimes f(v)$ é um isomorfismo. De fato, por hipótese também temos que $U' = \bigoplus_{i\in J}(\Bbbk u'_j)$ onde $\{u'_j\}_{j\in J}$ é uma base finita de U'. Usando os isomorfismos (1.3) e (1.4) e o fato que podemos trocar o produto direto pela soma direta já que J é finito, obtemos:

$$U' \otimes Hom(V,V') \cong \bigoplus_{j\in J}(\Bbbk u'_j \otimes Hom(V,V'))$$

e

$$\begin{aligned} Hom(V, U' \otimes V') &\cong Hom(V, \bigoplus_{j\in J}(\Bbbk u'_j \otimes V')) \\ &\cong Hom(V, \prod_{j\in J}(\Bbbk u'_j \otimes V')) \\ &\cong \prod_{j\in J} Hom(V, (\Bbbk u'_j \otimes V')). \end{aligned}$$

Isto nos permite quebrar λ' no produto direto das transformações:

$$\lambda' : \Bbbk u'_j \otimes Hom(V,V') \to Hom(V, \Bbbk u'_j \otimes V')$$

e neste caso, λ' fica definida por: $\lambda'(u'_j \otimes f)(v) = u'_j \otimes f(v)$ o qual é um isomorfismo pois, $\Bbbk u'_j \cong \Bbbk$; $\Bbbk u'_j \otimes V' \cong V'$ e $\Bbbk u'_j \otimes Hom(V,V') \cong \Bbbk \otimes Hom(V,V') \cong Hom(V,V') \cong Hom(V, \Bbbk \otimes V') \cong Hom(V, \Bbbk u'_j \otimes V')$.

Mostra-se de maneira similar usando um dos outros dois casos. $\square$

Corolário 1.3.10. *Se U ou V for um $\Bbbk$-espaço vetorial de dimensão finita, então a transformação linear $\lambda : U^* \otimes V^* \to (V \otimes U)^*$ definida em (1.1) é um isomorfismo.*

Demonstração. Basta tomar $U' = V' = \Bbbk$ no teorema anterior para se ter

$$\lambda : Hom(U,\Bbbk) \otimes Hom(V,\Bbbk) \cong Hom(V \otimes U, \Bbbk \otimes \Bbbk) \cong Hom(V \otimes U, \Bbbk)$$

pois $\Bbbk \otimes \Bbbk \cong \Bbbk$. $\square$

Vejamos mais um resultado para fechar esta seção. Este resultado será usado no capítulo 4.

Teorema 1.3.11. *Sejam A e R anéis, M um A-módulo à direita, N um (A,R)-bimódulo* *e P um R-módulo à direita. Então*

$$\gamma : Hom_R(M \otimes_A N, P) \to Hom_A(M, Hom_R(N, P)),$$

dado por: $\gamma(h)(m)(n) = h(m \otimes n)$, para todo $h \in Hom_R(M \otimes_A N, P)$, $m \in M$ e $n \in N$ é um isomorfismo de grupos abelianos.

Demonstração. Começamos vendo que γ é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo. Se $m \in M$, $n \in N$ e $f, g \in Hom_R(M \otimes_A N, P)$, então

$$\gamma(f+g)(m)(n) = (f+g)(m \otimes n) = f(m \otimes n) + g(m \otimes n) = (\gamma(f) + \gamma(g))(m)(n).$$

Ainda, γ é injetor pois se $f \in Hom_R(M \otimes_A N, P)$ é tal que $\gamma(f)(m) = 0$ para todo $m \in M$, ou seja, $\gamma(f)(m)(n) = 0$ para todo $n \in N$, então $0 = \gamma(f)(m)(n) = f(m \otimes n)$, para todo $m \in M$ e $n \in N$, logo $f = 0$.
Finalmente, se $F \in Hom_A(M, Hom_R(N, P))$, então $\varphi : M \times N \to P$ definida por $\varphi(m, n) = F(m)(n)$ é A-biaditiva portanto existirá φ' tal que

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & M \otimes_A N \arrow[dl, "\varphi'"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, existe um $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\varphi' : M \otimes_A N \to P$ com $\varphi'(m \otimes n) = \varphi(m, n) = F(m)(n)$ para todo $m \in M$ e $n \in N$. Portanto, $F = \gamma(\varphi')$ e γ é sobrejetor. $\square$

Capítulo 2

Teoremas de Maschke em Produtos Cruzados

Ações de grupos sobre anéis aparecem na literatura de forma bastante contundente (ver por exemplo [4], [13] e [15]). A partir de uma ação de um grupo sobre um anel podemos construir uma nova estrutura conhecida na literatura como produto cruzado. Os produtos cruzados em geral não são anéis por apresentarem problemas de associatividade. Neste capítulo estaremos interessados em estudar condições suficientes para que o produto cruzado seja um anel associativo semissimples, portanto iniciamos discutindo um pouco sobre este tema.

No caso em que a ação é global (ver [13] e [15]) apresentamos condições necessárias e suficientes para que o produto seja associativo, já no caso de uma ação parcial de um grupo sobre um anel (ver [5] e [3]) a solução apresentada será nos moldes de [6], cuja solução dada foi a de estabelecer alguns axiomas iniciais na definição de ação de modo a garantir a associatividade deste produto cruzado. Finalizaremos este capítulo apresentando versões do Teorema de Maschke para estes produtos cruzados associativos.

2.1 Produto Cruzado Global

Dado um conjunto S não-vazio e um grupo G com elemento unidade 1_G uma **ação** (global) de G em S é uma função $\beta : G \times S \to S$ (usualmente denotada por $(g,x) \mapsto g \cdot x = g(x)$) tal que para todo $x \in S$ e $g, h \in G$ tem-se $1_G \cdot x = x$ e $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$. Dizemos que G **age** sobre um anel A se G age sobre o conjunto A e, além disso $\beta : G \to Aut(A)$ é um homomorfismo de grupos, isto é, $\beta(gh) = \beta(g)\beta(h)$, onde $Aut(A)$ é o conjunto dos automorfismos de A.

Começamos com a definição de produto cruzado global e, a partir deste definimos como casos particulares o *skew anel de grupo* e a *álgebra de grupo torcida*. Nesta seção provaremos sob quais condições estes serão semissimples.

Definição 2.1.1 (Produto Cruzado Global)**.** *Seja A um anel com unidade, G um grupo com unidade 1_G e i uma ação global de G sobre A, isto é, existe um homomorfismo de grupos $i : G \to Aut(A)$. Assumimos também dada, uma aplicação $\alpha : G \times G \to U(A)$ onde $U(A)$ é o grupo das unidades de A. O* ***produto cruzado global*** *de A por G, denotado por $A * G$, é um A-módulo livre com base $\{g \mid g \in G\}$. Portanto, um elemento de $A * G$ é da forma: $\sum_{g \in G} x_g g$ tal que $x_g \in A$ e $x_g \neq 0$ apenas para um número finito de elementos $g \in G$. Definimos a soma em $A * G$ pontualmente e a multiplicação por*

$$(ag).(bh) = ag(b)\alpha(g,h)gh,$$

para todo $x \in A$ e $g, h \in G$, na qual $g(b)$ denota $[i(g)](b)$.

Assumiremos que $\alpha(g, 1_G) = \alpha(1_G, h) = 1_A$ para todo $g, h \in G$. Isto é equivalente a dizer que, $1_A 1_G$ é a unidade de $A * G$. Em geral este produto não é associativo, no entanto, existem condições necessárias e suficientes para que isto ocorra.

Lema 2.1.2. *A associatividade de $A * G$ é equivalente as seguintes condições:*

(i) *$g(\alpha(h,f))\alpha(g,hf) = \alpha(g,h)\alpha(gh,f)$;*

(ii) *$[g \circ h](a) = \alpha(g,h)[gh](a)\alpha^{-1}(g,h)$.*

para todo $g, h, f \in G$ e $a \in A$.

Demonstração. Sejam $a, b, c \in A$ e $g, h, f \in G$. Assim, $A * G$ é associativo se, e somente se, $(ag.bh).cf = ag.(bh.cf)$. Por um lado, $(ag.bh).cf = (ag(b)\alpha(g,h)gh).cf = ag(b)\alpha(g,h)[gh](c)\alpha(gh,f)(gh)f$. Por outro lado, $ag.(bh.cf) = ag.(bh(c)\alpha(h,f)hf) = ag(bh(c)\alpha(h,f))\alpha(g,hf)g(hf) = ag(b)g(h(c))g(\alpha(h,f))\alpha(g,hf)g(hf)$. Como G é associativo, temos que $A * G$ é associativo se, e somente se,

$$ag(b)\alpha(g,h)[gh](c)\alpha(gh,f) = ag(b)g(h(c))g(\alpha(h,f))\alpha(g,hf). \tag{2.1}$$

Isso deve valer para todo $a, b, c \in A$. Em particular, se $a = b = c = 1$ temos que $1g(1)\alpha(g,h)[gh](1)\alpha(gh,f) = 1g(1)g(h(1))g(\alpha(h,f))\alpha(g,hf)$, então $\alpha(g,h)\alpha(gh,f) = g(\alpha(h,f))\alpha(g,hf)$. Também deve valer para todo $g, h, f \in G$, logo fazendo $f = 1_G$ e $a = b = 1$ temos: $1g(1)\alpha(g,h)[gh](c)\alpha(gh,1_G) = 1g(1)g(h(c))g(\alpha(h,1_G))\alpha(g,h1_G) \Leftrightarrow \alpha(g,h)[gh](c) = g(h(c))g(\alpha(h,1_G)) \Leftrightarrow \alpha(g,h)[gh](c)\alpha^{-1}(g,h) = g(h(c)) = [g \circ h](c)$ para todo $c \in A$. Portanto, se $A * G$ é associativo valem (**i**) e (**ii**).

Reciprocamente se valem (**i**) e (**ii**), então temos que

$$\alpha(g,h)[gh](c)\alpha(gh,f) \overset{(ii)}{=} (g \circ h)(c)\alpha(g,h)\alpha(gh,f) \overset{(i)}{=} (g \circ h)(c)g(\alpha(h,f))\alpha(g,hf),$$

agora multiplicando ambos os lados por $ag(b)$ obtemos (2.1). $\square$

De agora em diante, os produtos cruzados globais considerados serão associativos. Vejamos agora alguns exemplos de ações globais e produtos cruzados.

Exemplo 2.1.3. Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Podemos definir uma ação de H sobre G do seguinte modo: $\beta : H \times G \to G$ tal que $(h, x) \mapsto h \cdot x = hxh^{-1}$, para todo $h \in H, x \in G$. De fato,

$$1_H \cdot x = 1_H x (1_H)^{-1} = 1_G x (1_G)^{-1} = x$$

e

$$(hg) \cdot x = (hg)x(hg)^{-1} = h(gxg^{-1})h^{-1} = h(g \cdot x)h^{-1} = h \cdot (g \cdot x),$$

para todo $g, h \in H, x \in G$. Portanto, β é uma ação global de H sobre G.

Exemplo 2.1.4. Sejam $\mathbb{Z}$ e G um grupo cíclico de ordem 3 gerado por g. Consideremos o anel $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3$, onde $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ e seja $\beta : G \to Aut(A)$ dada por:
$\beta_1 = id_A$, $\beta_g(e_1) = e_2$, $\beta_g(e_2) = e_3$ e $\beta_g(e_3) = e_1$ estendendo-se linearmente. Por exemplo, $\beta_{g^2}(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = \beta_{g^2}(x_1e_1) + \beta_{g^2}(x_2e_2) + \beta_{g^2}(x_3e_3) = x_1\beta_{g^2}(e_1) + x_2\beta_{g^2}(e_2) + x_3\beta_{g^2}(e_3) = x_1\beta_g(\beta_g(e_1)) + x_2\beta_g(\beta_g(e_2)) + x_3\beta_g(\beta_g(e_3)) = x_1e_3 + x_2e_1 + x_3e_2$. É fácil ver que β é uma ação global de G sobre A.

Exemplo 2.1.5. Se tomarmos $\alpha(g, h) = 1_A$ para todo $g, h \in G$ na Definição 2.1.1, as condições do Lema 2.1.2 serão satisfeitas e teremos um produto cruzado. Neste caso particular, o produto cruzado é chamado de **skew anel de grupo** e denotado por $A \rtimes G$. Sendo assim, o produto em $A \rtimes G$ é dado por: $(ag) \cdot (bh) = ag(b)gh$ para todo $g, h \in G$ e $a, b \in A$;

No caso em que a ação também for trivial, isto é, $i(g) = 1_{Aut(A)} = id_A$ para todo $g \in G$, temos a álgebra de grupo definida no Exemplo 1.1.9. Em particular, um exemplo de skew anel de grupo não-trivial é dado pelo Exemplo 2.1.4. Observe ainda que tal anel é não comutativo pois, por exemplo $(e_2g)(e_1g) = e_2g^2$ mas, $(e_1g)(e_2g) = 0g^2$.

Exemplo 2.1.6. Se na Definição 2.1.1 tomarmos $A = \mathbb{k}$ (onde $\mathbb{k}$ é um corpo) e $i(g) = 1_{Aut(\mathbb{k})}$ para todo $g \in G$, temos um produto cruzado que é chamado de **álgebra de grupo torcida** e denotado por $\mathbb{k}^t(G)$. O produto em $\mathbb{k}^t(G)$ é dado por: $(xg) \cdot (yh) = xy\alpha(g, h)gh$ para todo $g, h \in G$ e $x, y \in \mathbb{k}$.

Agora, vejamos um lema de fundamental importância nas demonstrações de Teoremas de Maschke. Tal lema é uma das caracterizações dos Teoremas de Maschke visto que está presente em todas as suas demonstrações, salvo demonstrações alternativas.

Lema 2.1.7. *Seja V um A-módulo à esquerda e W um A-submódulo de V. Temos que W é um somando direto de V se, e somente se, existe uma A-projeção $\pi : V \to W$ (isto* *é, π é um homomorfismo de A-módulos à esquerda tal que $\pi(w) = w$, para todo $w \in W$ e $Im(\pi) = W$).*

Demonstração. Se existe um A-submódulo W' de V tal que $V = W \oplus W'$, podemos definir $\pi : V \to W$ por: $\pi(w + w') = w$, no qual $w \in W$ e $w' \in W'$. Claramente π é um A-homomorfismo que satisfaz as condições exigidas para ser uma A-projeção.

Reciprocamente, se existe uma A-projeção $\pi : V \to W$, então $Ker(\pi)$ é o complemento de W em V. Com efeito, se $x \in Ker(\pi) \cap W$ então $x = \pi(v)$ para algum $v \in V$. Assim, $0 = \pi(x) = \pi(\pi(v)) = \pi(v) = x$, logo $Ker(\pi) \cap W = (0)$. Além disso, $v = v - \pi(v) + \pi(v) \in Ker(\pi) + W$, para todo $v \in V$, pois $\pi(v - \pi(v)) = \pi(v) - \pi(\pi(v)) = \pi(v) - \pi(v) = 0$. □

Com estas ferramentas, podemos enunciar a nossa primeira versão de uma série de teoremas que conhecemos por Teoremas de Maschke. Estes resultados nos indicam condições suficientes para que um produto cruzado seja semissimples.

Teorema 2.1.8 (Teorema de Maschke para o Produto Cruzado)**.** *Seja $A * G$ um produto cruzado associativo, no qual G é um grupo finito tal que $|G|^{-1} \in A$. Seja V um $A * G$-módulo à esquerda e W um $A * G$-submódulo de V que tem um complemento em V como A-módulo. Então, W tem um complemento em V como $A * G$-módulo.*

Demonstração. Seja $V = W \oplus W'$ onde W' é um A-complemento para W. Assim, pelo Lema 2.1.7, podemos considerar uma A-projeção $\pi : V \to W$. Definamos $\lambda : V \to W$ por

$$\lambda(v) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \alpha^{-1}(g^{-1}, g) g^{-1} \pi(gv).$$

Afirmação: λ é um $A * G$-homomorfismo de módulos. De fato, sejam $a \in A$, $h \in G$ e $v \in V$. Desde que $\lambda(u + v) = \lambda(u) + \lambda(v)$, para todo $u, v \in V$ e $(a1_G)(1_A h) = ah$, basta verificarmos que $\lambda(av) = a\lambda(v)$ e $\lambda(hv) = h\lambda(v)$, para todo $a \in A$ e para todo $h \in G$. Mas,

$$\begin{aligned}
\lambda(av) &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \alpha(g^{-1}, g)^{-1} g^{-1} \pi(g(av)) \\
&= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \alpha(g^{-1}, g)^{-1} g^{-1} \pi(g(a) gv) \\
&= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \alpha(g^{-1}, g)^{-1} g^{-1} g(a) \pi(gv) \\
&= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \alpha(g^{-1}, g)^{-1} g^{-1}(g(a)) \alpha(g^{-1}, 1_G) g^{-1} \pi(gv) \\
&= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \alpha(g^{-1}, g)^{-1} a \alpha(g^{-1}, 1_G) g^{-1} \pi(gv) \\
&= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \alpha(g^{-1}, g)^{-1} a g^{-1} \pi(gv) \\
&= |G|^{-1} \sum_{g \in G} a \alpha(g^{-1}, g)^{-1} g^{-1} \pi(gv)
\end{aligned}$$

$$= \quad a\lambda(v).$$

Logo $\lambda(av) = a\lambda(v)$, para todo $a \in A$. Também temos:

$$\begin{aligned}
\lambda(hv) &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},g)^{-1}g^{-1}\pi(g.(h.v)) \\
&= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},g)^{-1}g^{-1}\pi((g.h).v) \\
&= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},g)^{-1}g^{-1}\pi(\alpha(g,h)gh.v) \\
&= |G|^{-1}\sum_{g\in G}[\alpha(g^{-1},g)^{-1}g^{-1}][\alpha(g,h)]\pi(gh.v) \\
&= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},g)^{-1}g^{-1}(\alpha(g,h))\alpha(g^{-1},1_G)g^{-1}\pi(gh.v) \\
&= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},g)^{-1}g^{-1}(\alpha(g,h))g^{-1}\pi(gh.v) \\
&= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},g)^{-1}\alpha(g^{-1},g)\alpha(g^{-1},gh)^{-1}g^{-1}\pi(gh.v) \\
&= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},gh)^{-1}g^{-1}\pi(gh.v) \\
&= |G|^{-1}\sum_{l\in G}\alpha(hl^{-1},l)^{-1}hl^{-1}\pi(l.v) \\
&= |G|^{-1}\sum_{l\in G}h.h^{-1}[\alpha(hl^{-1},l)^{-1}\alpha(h,l^{-1})^{-1}]l^{-1}\pi(l.v) \\
&= |G|^{-1}h\sum_{l\in G}\alpha(l^{-1},l)^{-1}l^{-1}\pi(l.v) \\
&= h|G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},g)^{-1}g^{-1}\pi(g.v) \\
&= h\lambda(v),
\end{aligned}$$

ou seja, $\lambda(hv) = h\lambda(v)$, para todo $h \in G$. Assim, λ é um $A * G$-homomorfismo. Resta verificar que $\lambda(w) = w$ para todo $w \in W$. Com efeito, se $w \in W$, então $gw = 1_A gw \in W$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lambda(w) &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},g)^{-1}g^{-1}\pi(g.w) \\
&= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},g)^{-1}g^{-1}(g.w) \\
&= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},g)^{-1}(g^{-1}g).w \\
&= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\alpha(g^{-1},g)^{-1}(\alpha(g^{-1},g)1_G).w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |G|^{-1}(\sum_{g\in G} 1_A)w \\ &= |G|^{-1}(|G|)w \\ &= 1_A w = w. \end{aligned}$$

Portanto, λ é uma $A*G$-projeção, logo pelo Lema 2.1.7, segue o resultado. $\square$

Corolário 2.1.9. ***(i)*** *Se A é um anel semissimples e G um grupo finito que atua globalmente sobre A tal que $|G|^{-1} \in A$, então o skew anel de grupo $A \rtimes G$ do Exemplo 2.1.5 é semissimples.*
(ii) *Se $\Bbbk$ é um corpo e G um grupo finito com $|G|^{-1} \in \Bbbk$, então a álgebra de grupo torcida $\Bbbk^t(G)$ é semissimples.*

Demonstração. Basta ver que todo skew anel de grupo e toda álgebra de grupo torcida é um produto cruzado (Exemplos 2.1.5 e 2.1.6). No item **(ii)** usamos ainda o fato de que todo corpo é semissimples. $\square$

Vejamos um exemplo onde se aplica este teorema. Para isso, relembremos o conceito de característica de um corpo $\Bbbk$. Dizemos que a característica de um corpo $\Bbbk$ é zero se a relação $ax = 0$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $0 \neq x \in \Bbbk$, implicar que $a = 0$. Se para algum $0 \neq x \in \Bbbk$ existir algum inteiro não-nulo a tal que $ax = 0$, então chama-se característica de $\Bbbk$ ao menor inteiro positivo p tal que para algum $x \neq 0$ em $\Bbbk$, se verifica $px = 0$. Denotaremos por $char(\Bbbk)$ a característica do corpo $\Bbbk$.

Exemplo 2.1.10. Seja G é um grupo finito e $\Bbbk$ um corpo. A álgebra de grupo $\Bbbk G$ é semissimples se, e somente se, a ordem (denotada por $|G|$) do grupo G não dividir a característica (denotada por p) do corpo $\Bbbk$.
Observemos que $|G|$ não dividir p significa que $|G|^{-1} \in \Bbbk$. De fato, se $|G|$ divide p então $p = |G|k$ para algum $0 \neq k \in \mathbb{Z}$, logo $0 = px = (|G|k)x$ para algum $0 \neq x \in \Bbbk \Rightarrow 0 = k|G|1_\Bbbk \Rightarrow 0 = |G|1_\Bbbk$, ou seja, $|G|^{-1} \notin \Bbbk$. Segue do item (**ii**) do corolário acima que $\Bbbk G$ é semissimples.

Reciprocamente, suponhamos por absurdo que $|G|$ divide p. Consideremos a seguinte função $\varphi : \Bbbk G \to \Bbbk$ definida por: $\varphi(kg) = k$, para todo $k \in \Bbbk$ e $g \in G$ e estendida por linearidade. Como $\{1_\Bbbk g : g \in G\}$ é uma base de $\Bbbk G$, φ está bem definida e claramente é um homomorfismo. Observamos que $\varphi(g) = 1_\Bbbk$ para todo $g \in G$. Agora, como $Ker(\varphi)$ é um ideal de $\Bbbk G$ existe J ideal de $\Bbbk G$ tal que $\Bbbk G = Ker(\varphi) \oplus J$. Observemos que, se $g \in G$, então $\varphi(g - 1_\Bbbk 1_G) = \varphi(g) - \varphi(1_\Bbbk 1_G) = 1_\Bbbk - 1_\Bbbk = 0$, logo $(g - 1_\Bbbk 1_G) \in Ker(\varphi)$, assim se $x \in J$ temos que $(g - 1_\Bbbk 1_G)x \in (Ker(\varphi) \cap J) = (0)$, logo $gx = (g - 1_\Bbbk 1_G)x + 1_\Bbbk 1_G x$, ou seja , $gx = 1_\Bbbk 1_G x = x$, para todo $x \in J$ e $g \in G$.

Temos que $J \subseteq L = \{x \in \Bbbk G : gx = x, \forall g \in G\}$. Vejamos que $L = (v)$, no qual $v = \sum_{g\in G} g$.

Com efeito, seja $h \in G$, $hv = h(\sum_{g\in G} g) = \sum_{g\in G} hg = \sum_{k\in G} k = v$, então $v \in L$. Reciprocamente, seja $x = \sum_{h\in G} \lambda_h h \in L$, então

$$\sum_{h\in G} \lambda_h h = g\sum_{h\in G} \lambda_h h = \sum_{h\in G} \lambda'_h gh$$

para certos $\lambda'_h \in \Bbbk$. Fazendo $gh = l \Leftrightarrow h = g^{-1}l$ temos $\sum_{l\in G} \lambda'_{g^{-1}l} l = \sum_{l\in G} \lambda_l l \Rightarrow \sum_{l\in G} (\lambda'_{g^{-1}l} - \lambda_l)l = 0$ e como G é uma base de $\Bbbk G$ temos que $\lambda'_{g^{-1}l} = \lambda_l$, $\forall l \in G$. Em particular, fazendo $l = 1_G$ obtemos $\lambda'_{g^{-1}} = \lambda_{1_G}$, portanto $\lambda_g = \lambda_{1_G}$ para todo $g \in G$. Logo, $x = \lambda_{1_G} v \in (v)$.

Agora $\varphi(v) = \varphi(\sum_{g\in G} g) = \sum_{g\in G} \varphi(g) = \sum_{g\in G} 1_\Bbbk = |G|1_\Bbbk = 0$, pois $|G|$ divide p, ou seja, $(v) \subset Ker(\varphi)$. Assim sendo $J \subseteq Ker(\varphi)$ e portanto $J = (0)$. Logo $\Bbbk G = Ker(\varphi)$ o que é um absurdo já que $1_\Bbbk 1_G \in \Bbbk G$ e $\varphi(1_\Bbbk 1_G) = 1_\Bbbk \neq 0$.

2.2 Produto Cruzado Parcial

Uma ação parcial torcida é uma generalização de um tipo de ação parcial com envolvente, cuja definição e mais detalhes podemos encontrar em [4] e [3]. A partir desta ação podemos construir um produto cruzado, o qual recebe o adjetivo parcial. Nosso objetivo nesta seção é apresentar uma versão do Teorema de Maschke para este produto.

Definição 2.2.1 (Ação Parcial Torcida)**.** *Uma* ***ação parcial torcida*** *de um grupo G sobre uma álgebra A é uma tripla $\alpha = (\{I_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ onde para cada $g \in G$, I_g é um ideal de A, $\alpha_g : I_{g^{-1}} \to I_g$ é um isomorfismo de álgebras e para cada $(g,h) \in G \times G$, $w_{g,h}$ é um elemento invertível no conjunto dos multiplicadores de $I_g I_{gh}$, satisfazendo as seguintes condições, para todo $g, h, t \in G$:*

(i) $I_1 = A$ *e* $\alpha_1 = id_A$;

(ii) $I_g^2 = I_g$ *e* $I_g I_h = I_h I_g$;

(iii) $\alpha_g(I_h I_{g^{-1}}) = I_g I_{gh}$;

(iv) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = w_{g,h}\alpha_{gh}(x)w_{g,h}^{-1}$, *para todo* $x \in I_{h^{-1}} I_{(gh)^{-1}}$;

(v) $w_{g,1} = w_{1,g} = Id_{I_g}$;

(vi) $\alpha_g(x w_{h,t})w_{g,ht} = \alpha_g(x)w_{g,h}w_{gh,t}$, *para todo* $x \in I_{g^{-1}} I_h I_{ht}$.

Se na definição acima $I_g = A$ para todo $g \in G$, então α é dita uma **ação global torcida**.

Exemplo 2.2.2. Seja $\beta = (B, \{\beta_g\}_{g\in G}, \{u_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ uma ação global torcida de um grupo G sobre um anel B (não necessariamente com unidade). Podemos restringir β a um ideal bilateral A de B tal que A tem unidade 1_A, tomando $I_g = A \cap \beta_g(A) = A \cdot \beta_g(A)$ e $\alpha_g = \beta_g|_{I_{g^{-1}}}$.

De fato, notemos que se $x \in I_g = A \cap \beta_g(A)$, então existe $a \in A$ tal que $x = \beta_g(a)$, logo $x1_A\beta_g(1_A) = \beta_g(a)1_A\beta_g(1_A) = 1_A\beta_g(a1_A) = 1_A\beta_g(a) = 1_Ax = x$. Analogamente, $1_A\beta_g(1_A)x = x$ donde conclui-se que cada I_g tem unidade 1_g dada por $1_g = 1_A\beta_g(1_A)$. Desde que A é um ideal bilateral de B com unidade 1_A, tem-se que $A = B1_A$ assim, $I_g = A \cap \beta_g(A) = B1_A \cap B\beta_g(1_A) = B1_A\beta_g(1_A) = B1_g$. Temos que 1_g é idempotente central em B pois, $1_g^2 = 1_g1_g = 1_A\beta_g(1_A)1_A\beta_g(1_A) = 1_A^2\beta_g(1_A)\beta_g(1_A) = 1_A\beta_g(1_A1_A) = 1_A\beta_g(1_A) = 1_g$. Desde que $1_Ab = b1_A$ para todo $b \in B$, temos para todo $g \in G$ que

$$b1_g = b1_A\beta_g(1_A) = 1_Ab\beta_g(1_A) = 1_A\beta_g(\beta_g^{-1}(b))\beta_g(1_A) = 1_A\beta_g(1_A)\beta_g(\beta_g^{-1}(b)) = 1_gb,$$

para todo $b \in B$ portanto 1_g é central em B. Com isto segue-se que (**i**), (**ii**) e (**iii**) são imediatas.

Além disso, se definirmos $\omega_{g,h} = u_{g,h}1_A\beta_g(1_A)\beta_{gh}(1_A) = u_{g,h}1_g1_{gh}$ temos:
(**iv**) $(\alpha_g \circ \alpha_h)(a) = \omega_{g,h}\alpha_{gh}(a)\omega_{g,h}^{-1}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\omega_{g,h}\alpha_{gh}(a)\omega_{g,h}^{-1} &= [u_{g,h}1_A\beta_g(1_A)\beta_{gh}(1_A)]\beta_{gh}(a)[u_{g,h}1_A\beta_g(1_A)\beta_{gh}(1_A)]^{-1} \\
&= u_{g,h}1_g\beta_{gh}(a)[u_{g,h}1_g\beta_{gh}(1_A)]^{-1} \\
&= u_{g,h}1_g\beta_{gh}(a)[\beta_{gh}(1_A)]^{-1}1_g[u_{g,h}]^{-1} \\
&= u_{g,h}1_g\beta_{gh}(a)\beta_{gh}(1_A^{-1})1_gu_{g,h}^{-1} \\
&= u_{g,h}\beta_{gh}(a)u_{g,h}^{-1} \\
&= \beta_g(\beta_h(a)) \\
&= (\alpha_g \circ \alpha_h)(a).
\end{aligned}$$

Para (**v**) temos:

$$\omega_{g,1} = u_{g,1}1_A\beta_g(1_A)\beta_g(1_A) = id_{I_g}1_A\beta_g(1_A)1_A\beta_g(1_A) = id_{I_g}1_g = id_{I_g}$$

e

$$\omega_{1,g} = u_{1,g}1_A\beta_1(1_A)\beta_g(1_A) = id_{I_g}1_A\beta_g(1_A) = id_{I_g}1_g = id_{I_g}$$

Agora vejamos (**vi**), isto é, $\alpha_g(a\omega_{h,t})\omega_{g,ht} = \alpha_g(a)\omega_{g,h}\omega_{gh,t}$.

$$\begin{aligned}
\alpha_g(a\omega_{h,t})\omega_{g,ht} &= \beta_g(au_{h,t}1_A\beta_h(1_A)\beta_{ht}(1_A))u_{g,ht}1_A\beta_g(1_A)\beta_{ght}(1_A) \\
&= \beta_g(au_{h,t}1_g1_{ht})u_{g,ht}1_g1_{ght} \\
&= \beta_g(au_{h,t})u_{g,ht} \\
&= \beta_g(a)u_{g,h}u_{gh,t};
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}\alpha_g(a)\omega_{g,h}\omega_{gh,t} &= \beta_g(a)u_{g,h}1_A\beta_g(1_A)\beta_{gh}(1_A)u_{gh,t}1_A\beta_{gh}(1_A)\beta_{ght}(1_A)\\ &= \beta_g(a)u_{g,h}1_g1_{gh}u_{gh,t}1_{gh}1_{ght}\\ &= \beta_g(a)u_{g,h}u_{gh,t}.\end{aligned}$$

Logo vale (**vi**).

Mais exemplos de ações parciais torcidas o leitor interessado pode ver em [3].

Definição 2.2.3 (Produto Cruzado Parcial)**.** *Dada uma ação parcial torcida α de um grupo G sobre uma álgebra A, o* ***produto cruzado parcial*** *$A *_\alpha G$ correspondente para α é uma soma direta de A-módulos $\oplus I_g\delta_g$ onde $g \in G$ e os δ_g's são símbolos. A adição é definida pontualmente e a multiplicação é dada por:*

$$(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_g^{-1}(a_g)b_h)w_{g,h}\delta_{gh}.$$

O próximo lema decorre diretamente da definição de ação parcial torcida e será utilizado na demonstração do Teorema de Maschke para o produto cruzado parcial. Na notação da Definição 2.2.3 temos:

Lema 2.2.4. ***(i)*** $\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = 1_g1_{gh}$;
(ii) $\alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,h}) = \omega_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}1_h\omega^{-1}_{g^{-1},gh}$.

Demonstração. (**i**) Primeiro vejamos que 1_g1_{gh} é a unidade de I_gI_{gh}. De fato, se $x \in I_gI_{gh}$, $x(1_g1_{gh}) = (x1_g)(1_{gh}) = x(1_{gh}) = x$ e $(1_g1_{gh})x = (1_g)(1_{gh}x) = (1_g)x = x$.
Agora vejamos que $\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)y = y\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = y$, $\forall y \in I_gI_{gh}$. De fato, se $y \in I_gI_{gh} = \alpha_g(I_{g^{-1}}I_h)$, então existe $x \in I_{g^{-1}}I_h$ tal que $\alpha_g(x) = y$, de onde
$y\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = \alpha_g(x)\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = \alpha_g(x(1_{g^{-1}}1_h)) = \alpha_g((x1_{g^{-1}})1_h) = \alpha_g(x1_h) = \alpha_g(x) = y$.
Analogamente $\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)y = y$. Assim temos o resultado.

(**ii**) Observemos que $\alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,h}) = \alpha_{g^{-1}}(1_g1_{gh}\omega_{g,h})$, assim do item (**vi**) da definição acima segue que: $\alpha_{g^{-1}}(1_g1_{gh}\omega_{g,h})\omega_{g^{-1},gh} = \alpha_{g^{-1}}(1_g1_{gh})\omega_{g,g^{-1}}$. Então,
$\alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,h}) = \alpha_{g^{-1}}(1_g1_{gh})\omega_{g^{-1},g}\omega^{-1}_{g^{-1},gh}$. Pelo item (**iii**) da definição e pelo item **(i)** lema tem-se:

$$\alpha_{g^{-1}}(1_g1_{gh}) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)) = \omega_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}1_h\omega^{-1}_{g^{-1},g}$$

portanto

$$\alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,h}) = \omega_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}1_h\omega^{-1}_{g^{-1},g}\omega_{g^{-1},g}\omega^{-1}_{g^{-1},gh} = \omega_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}1_h\omega^{-1}_{g^{-1},gh}.$$

□

Seja α uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre um anel A com unidade 1_A, então o elemento $\kappa = \sum_{g\in G} 1_g \in A$ é um elemento invariante sob a ação α, isto é,

$\alpha_h(\kappa 1_{h^{-1}}) = \kappa 1_h$ para todo $h \in G$. De fato, pelo Lema 2.2.4 item (**i**) temos

$$\alpha_h(\kappa 1_{h^{-1}}) = \sum_{g\in G} \alpha_h(1_g 1_{h^{-1}}) = \sum_{g\in G} 1_h 1_{hg} = (\sum_{g\in G} 1_g) 1_h = \kappa 1_h.$$

Nos próximos resultados desta seção κ denotará o elemento $\sum\limits_{g\in G} 1_g$.

Teorema 2.2.5 (Teorema de Maschke para o Produto Cruzado Parcial)**.** *Sejam α uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre uma álgebra A, V um $A *_\alpha G$-módulo à esquerda, U um $A*_\alpha G$-submódulo de V. Se κ é invertível em A e U é um somando direto de V como A-módulo à esquerda, então U é um somando direto de V como $A*_\alpha G$-módulo à esquerda.*

Demonstração. Basta considerar uma A-projeção $\pi : V \to U$ (ver Lema 2.1.7) e definir $\psi : V \to U$ por

$$\psi(v) = \kappa^{-1} \sum_{g\in G} w_{g^{-1},g}^{-1} 1_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} \pi(1_g \delta_g v),\ \forall v \in V.$$

Note que $\psi(u) = u$, para todo $u \in U$.

Afirmação: ψ é um homomorfismo de $A *_\alpha G$-módulos à esquerda.

Sejam $v \in V$, $h \in G$ fixo, $a \in A$. Então,

$$\begin{aligned}
\kappa\psi(1_h\delta_h \cdot v) &= \sum_{g\in G} \omega_{g^{-1},g}^{-1} 1_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} \pi[1_g\delta_g \cdot (1_h\delta_h \cdot v)] \\
&= \sum_{g\in G} \omega_{g^{-1},g}^{-1} 1_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} \pi[\alpha_g(\alpha_g^{-1}(1_g)1_h)\omega_{g,h}\delta_{gh} \cdot v] \\
&= \sum_{g\in G} \omega_{g^{-1},g}^{-1} 1_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} \pi[\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)\omega_{g,h}\delta_{gh} \cdot v] \\
&= \sum_{g\in G} \omega_{g^{-1},g}^{-1} 1_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} \alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)\omega_{g,h}\delta_1 \pi[1_{gh}\delta_{gh} \cdot v] \\
&= \sum_{g\in G} \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}^{-1}(\omega_{g^{-1},g}^{-1} 1_{g^{-1}})\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)\omega_{g,h})\omega_{g^{-1},1}\delta_{g^{-1}1} \pi[1_{gh}\delta_{gh} \cdot v] \\
&= \sum_{g\in G} \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}^{-1}(\omega_{g^{-1},g}^{-1} 1_{g^{-1}}))\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h))\alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,h})\delta_{g^{-1}} \pi[1_{gh}\delta_{gh} \cdot v] \\
&= \sum_{g\in G} (\omega_{g^{-1},g}^{-1} 1_{g^{-1}})(\omega_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}1_h\omega_{g^{-1},g}^{-1})\alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,h})\delta_{g^{-1}} \pi[1_{gh}\delta_{gh} \cdot v] \\
&= \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}1_h\omega_{g^{-1},g}^{-1}\alpha_{g^{-1}}(\omega_{g,h})\delta_{g^{-1}} \pi[1_{gh}\delta_{gh} \cdot v] \\
&= \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}1_h\omega_{g^{-1},g}^{-1}\omega_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}1_h\omega_{g^{-1},gh}^{-1}\delta_{g^{-1}} \pi[1_{gh}\delta_{gh} \cdot v] \\
&= \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}1_h\omega_{g^{-1},gh}^{-1}\delta_{g^{-1}} \pi[1_{gh}\delta_{gh} \cdot v].
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\kappa 1_h\delta_h\psi(v) &= \sum_{g\in G}(1_h\delta_h)(\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})\pi(1_g\delta_g\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}\alpha_h(\alpha_h^{-1}(1_h)\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}})\omega_{h,g^{-1}}\delta_{hg^{-1}}\pi(1_g\delta_g\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}\alpha_h(1_{h^{-1}}\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}})\omega_{h,g^{-1}}\delta_{hg^{-1}}\pi(1_g\delta_g\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}1_h1_{hg^{-1}}\omega_{hg^{-1},g}^{-1}\omega_{h,g^{-1}}^{-1}\omega_{h,g^{-1}}\delta_{hg^{-1}}\pi(1_g\delta_g\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}1_h1_{hg^{-1}}\omega_{hg^{-1},g}^{-1}\delta_{hg^{-1}}\pi(1_g\delta_g\cdot v).
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $f^{-1}=hg^{-1}\iff g=fh$ obtemos,

$$\kappa 1_h\delta_h\psi(v)=\sum_{f\in G}1_{f^{-1}}1_h\omega_{f^{-1},fh}^{-1}\delta_{f^{-1}}\pi(1_{fh}\delta_{fh}\cdot v),$$

donde conclui-se que $\psi(1_h\delta_h\cdot v)=1_h\delta_h\psi(v)$.
Para concluir a afirmação, vejamos que ψ é linear em relação a A.

$$\begin{aligned}
\kappa\psi(a\cdot v) &= \sum_{g\in G}\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g\cdot(a\cdot v))\\
&= \sum_{g\in G}\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g a\delta_1\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(\alpha_g(\alpha_g^{-1}(1_g)a)\omega_{g,1}\delta_g\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(\alpha_g(1_{g^{-1}}a)\delta_g\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\alpha_g(1_{g^{-1}}a)\delta_1\pi(1_g\delta_g\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}^{-1}(\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}})\alpha_g(1_{g^{-1}}a))\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}^{-1}(\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}))\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(1_{g^{-1}}a))\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}\omega_{g^{-1},g}\alpha_{g^{-1}g}(1_{g^{-1}}a)\omega_{g^{-1},g}^{-1}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}1_{g^{-1}}1_{g^{-1}}a\omega_{g^{-1},g}^{-1}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g\cdot v)\\
&= \sum_{g\in G}a\omega_{g^{-1},g}^{-1}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g\cdot v).
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\kappa a\psi(v) = \sum\limits_{g\in G} a\omega^{-1}_{g^{-1},g} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g \cdot v)$.
Assim $\psi(a \cdot v) = a \cdot \psi(v)$. Portanto ψ é uma $A *_\alpha G$-projeção. Finalmente, pelo Lema 2.1.7 segue-se o resultado. $\square$

Corolário 2.2.6. *Se A é um álgebra semissimples, α é uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre A e κ é invertível em A, então $A *_\alpha G$ é semissimples.*

Demonstração. Seja V um $A *_\alpha G$-módulo, então V é um A-módulo. Como A é anel semissimples temos pelo Teorema (Definição) 1.2.4 que V é um A-módulo semissimples. Seja W um $A *_\alpha G$-submódulo de V, como V é semissimples como A-módulo segue que W tem um A-complemento. Logo estamos nas condições do teorema anterior, assim W tem um $A *_\alpha G$-complemento o que significa que V é um $A *_\alpha G$-módulo semissimples. Portanto $A *_\alpha G$ é semissimples. $\square$

Capítulo 3

Teoremas de Maschke em Álgebras de Hopf

Uma álgebra de Hopf é um espaço vetorial que admite estrutura de álgebra e coálgebra, juntamente com uma compatibilidade entre estas estruturas e uma antípoda.

Neste capítulo, apresentamos três versões do Teorema de Maschke para estas álgebras. Para tanto, iniciaremos com algumas seções que introduzirão toda linguagem necessária para enunciarmos e provarmos tais teoremas. Os resultados aqui contidos podem ser encontrados na literatura. Mais precisamente ver [8], [2], [17] e [14]. Em todo o capítulo usaremos a notação $\mathbb{k}$ para denotar um corpo e a notação $\mathbb{k}$-estrutura, para dizer que antes de tudo a estrutura é um $\mathbb{k}$-espaço vetorial.

3.1 Álgebras, Coálgebras e Notação Sigma

Nesta seção apresentamos uma definição alternativa para uma $\mathbb{k}$-álgebra associativa com unidade dada em termos de diagramas e, a partir desta, "invertendo as flechas" obtemos a definição de coálgebra. Com isso, surgem novas estruturas que serão álgebras e coálgebras ao mesmo tempo. Daremos uma breve introdução a notação sigma, a qual é muito útil quando trabalhamos com coálgebras.

Definição 3.1.1 (Álgebra). *Uma* $\mathbb{k}$***-álgebra*** *(ou uma* ***álgebra sobre*** $\mathbb{k}$*) associativa com unidade é uma tripla* (A, m, μ)*, onde* A *é um* $\mathbb{k}$*-espaço vetorial,* $m : A \otimes A \longrightarrow A$ *e* $\mu : \mathbb{k} \longrightarrow A$ *são funções* $\mathbb{k}$*-lineares chamadas de multiplicação e unidade respectivamente, tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes id_A"] \arrow[d, "id_A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{k} \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes id_A"] \arrow[dr, "\psi\,\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \mathbb{k} \arrow[l, "id_A \otimes \mu"'] \arrow[dl, "\cong\,\phi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

No que segue, salvo menção em contrário, toda álgebra A será sobre um corpo $\Bbbk$ e associativa com unidade, ou seja, os dois diagramas acima são comutativos.

Observação 3.1.2. Temos para todo $a \in A$ (denotando $m(a \otimes b) = ab$):
(1) $a = 1_{\Bbbk}a = \psi(1_{\Bbbk} \otimes a) = m \circ (\mu \otimes id_A)(1_{\Bbbk} \otimes a) = m(\mu(1_{\Bbbk}) \otimes a) = \mu(1_{\Bbbk})a$;
(2) $a = a1_{\Bbbk} = \phi(a \otimes 1_{\Bbbk}) = m \circ (id_A \otimes \mu)(a \otimes 1_{\Bbbk}) = m(a \otimes \mu(1_{\Bbbk})) = a\mu(1_{\Bbbk})$.
Logo, $\mu(1_{\Bbbk}) = 1_A$.

Sejam A e B duas $\Bbbk$-álgebras. Dizemos que uma função $f : A \to B$ é um homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras quando f for $\Bbbk$-linear e tivermos $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo $a, b \in A$ e ainda, $f(1_A) = 1_B$. Do mesmo modo que definimos uma $\Bbbk$-álgebra em termos de diagramas, podemos redefinir um homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras de modo equivalente em termos de diagramas.

Definição 3.1.3 (Homomorfismo de Álgebras)**.** *Sejam (A, m_A, μ_A) e (B, m_B, μ_B) $\Bbbk$-álgebras e $f : A \to B$ uma aplicação. Dizemos que f é um **homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras** se f é $\Bbbk$-linear e os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] & \\
& B \\
\Bbbk \arrow[uu, "\mu_A"] \arrow[ur, "\mu_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Com a inversão das setas nos diagramas da definição de $\Bbbk$-álgebras surge o conceito de $\Bbbk$-coálgebra.

Definição 3.1.4 (Coálgebra)**.** *Uma **$\Bbbk$-coálgebra** (ou uma **coálgebra sobre** $\Bbbk$) é uma tripla (C, Δ, ε), onde C é um $\Bbbk$-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \Bbbk$ são funções $\Bbbk$-lineares chamadas de comultiplicação e counidade, respectivamente, tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon \otimes id_C"'] \arrow[r, "id_C \otimes \varepsilon"] & C \otimes \Bbbk \\
& C \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

De agora em diante, C denotará uma coálgebra $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ sobre um corpo $\Bbbk$ que é coassociativa (com comultiplicação Δ_C) e counitária (com counidade ε_C), ou seja, que os dois diagramas acima comutam. Um $\Bbbk$-subespaço vetorial D de C é chamado uma subcoálgebra se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.

A definição de um $\Bbbk$-homomorfismo (ou simplesmente um homomorfismo) de $\Bbbk$-coálgebras decorre da inversão das setas na definição de homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras.

Definição 3.1.5 (Homomorfismo de Coálgebras)**.** *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ $\Bbbk$-coálgebras. Então, uma função $\Bbbk$-linear $f : C \to D$ é dita um **homomorfismo de $\Bbbk$-coálgebras** se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk & \\ & D \arrow[ul, "\varepsilon_D"'] \\ C \arrow[uu, "\varepsilon_C"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Vejamos agora um pouco da notação sigma que é usada para operações com $\Bbbk$-coálgebras. A notação sigma é útil na simplificação de vários cálculos que envolvem $\Bbbk$-coálgebras.

Seja (C, Δ, ε) uma $\Bbbk$-coálgebra. Denotemos por $\Delta_1 = \Delta : C \to C \otimes C$ e em geral a definição se dá por recorrência, ou seja, $\Delta_n : C \to \underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{n+1 \text{ vezes}}$ é definido por

$$\Delta_n := (\Delta \otimes I^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$$

com $n \geq 2$, onde $I = id_C$ e $I^s = I \otimes I^{s-1}$, para $s \geq 1$. Com esta notação prova-se que,

$$\Delta_n = (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1},$$

para todo $n \geq 2$ e para todo $p \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Notemos que dados uma $\Bbbk$-coálgebra (C, Δ, ε) e $c \in C$, devíamos escrever

$$\Delta(c) = \sum_i c_{i1} \otimes c_{i2}, \tag{3.1}$$

mas, usaremos a notação $\sum c_1 \otimes c_2$ para indicar qualquer somatório do tipo (3.1) que represente a classe $\Delta(c)$ em $C \otimes C$. E mais geralmente, $\sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$ para denotar qualquer uma das representações possíveis para $\Delta_n(c)$. Por exemplo, o diagrama da coassociatividade nos diz que:

$$\begin{aligned} \Delta_2(c) &= (\Delta \otimes I)(\Delta(c)) \\ &= (\Delta \otimes I)(\sum c_1 \otimes c_2) \\ &= \sum \Delta(c_1) \otimes c_2 \\ &= \sum (\sum c_{1_1} \otimes c_{1_2}) \otimes c_2 \\ &= \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2, \end{aligned}$$

é igual a:

$$\begin{aligned}\Delta_2(c) &= (I\otimes\Delta)(\Delta(c))\\ &= (I\otimes\Delta)(\sum c_1\otimes c_2)\\ &= \sum c_1\otimes\Delta(c_2)\\ &= \sum c_1\otimes(\sum c_{2_1}\otimes c_{2_2})\\ &= \sum c_1\otimes c_{2_1}\otimes c_{2_2}.\end{aligned}$$

Portanto, $\sum c_{1_1}\otimes c_{1_2}\otimes c_2 = \sum c_1\otimes c_{2_1}c_{2_2}$ que escrevemos simplesmente como $\sum c_1\otimes c_2\otimes c_3$. Já o diagrama da counidade pode ser traduzido na notação sigma por

$$\sum \varepsilon(c_1)c_2 = c = \sum c_1\varepsilon(c_2), \text{ para todo } c\in C.$$

Vejamos agora dois exemplos, um de álgebra e outro de coálgebra que serão fundamentais para toda a teoria que segue.

Exemplo 3.1.6. Sejam $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$, $(D,\Delta_D,\varepsilon_D)$ duas $\Bbbk$-coálgebras coassociativas com counidade. Então, $(C\otimes D,\Delta_{C\otimes D},\varepsilon_{C\otimes D})$ é uma $\Bbbk$-coálgebra com:
$\Delta=\Delta_{C\otimes D}=(id_C\otimes\tau\otimes id_D)\circ(\Delta_C\otimes\Delta_D)$;
$\varepsilon=\varepsilon_{C\otimes D}=\varphi\circ(\varepsilon_C\otimes\varepsilon_D)$,
na qual $\tau : C\otimes D\to D\otimes C$ é o isomorfismo *twist* apresentado no Teorema 1.3.8 e $\varphi:\Bbbk\otimes\Bbbk\to\Bbbk$ é o isomorfismo canônico: $k_1\otimes k_2\mapsto k_1k_2$ para todo k_1, $k_2\in\Bbbk$.

Usando a notação sigma temos: $\Delta(c\otimes d)=\sum c_1\otimes d_1\otimes c_2\otimes d_2$ e $\varepsilon(c\otimes d)=\varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d)$. Vejamos que Δ satisfaz o diagrama da coassociatividade, isto é, $(\Delta\otimes id)\Delta(c\otimes d) = (id\otimes\Delta)\Delta(c\otimes d)$, para todo $c\otimes d\in C\otimes D$. Por um lado temos:

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes id)\Delta(c\otimes d) &= (\Delta\otimes id)(\sum c_1\otimes d_1\otimes c_2\otimes d_2)\\ &= \sum c_{1_1}\otimes d_{1_1}\otimes c_{1_2}\otimes d_{1_2}\otimes c_2\otimes d_2\\ &= \sum c_1\otimes d_1\otimes c_2\otimes d_2\otimes c_3\otimes d_3.\end{aligned}$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned}(id\otimes\Delta)\Delta(c\otimes d) &= (id\otimes\Delta)(\sum c_1\otimes d_1\otimes c_2\otimes d_2)\\ &= \sum c_1\otimes d_1\otimes c_{2_1}\otimes d_{2_1}\otimes c_{2_2}\otimes d_{2_2}\\ &= \sum c_1\otimes d_1\otimes c_2\otimes d_2\otimes c_3\otimes d_3.\end{aligned}$$

Logo $C\otimes D$ é coassociativa. Vejamos agora que ε satisfaz o diagrama da counidade, isto é, $c \otimes d = \sum (c_1 \otimes d_1)\varepsilon(c_2 \otimes d_2) = \sum \varepsilon(c_1 \otimes d_1)(c_2 \otimes d_2)$, para todo $c \otimes d \in C \otimes D$.

$$\begin{aligned}
\sum (c_1 \otimes d_1)\varepsilon(c_2 \otimes d_2) &= \sum (c_1 \otimes d_1)(\varepsilon_C(c_2)\varepsilon_D(d_2)) \\
&= \sum (c_1\varepsilon_C(c_2) \otimes d_1\varepsilon_D(d_2)) \\
&= c \otimes d \\
&= \sum \varepsilon(c_1 \otimes d_1)(c_2 \otimes d_2).
\end{aligned}$$

Portanto $C \otimes D$ é uma $\Bbbk$-coálgebra coassociativa com counidade.

Exemplo 3.1.7. Sejam (B, m_B, μ_B), (C, m_C, μ_C) duas $\Bbbk$-álgebras associativas com unidade. Então, $(B \otimes C, m_{B\otimes C}, \mu_{B\otimes C})$ é uma $\Bbbk$-álgebra com:
$m = m_{B\otimes C} = (m_B \otimes m_C)(id_B \otimes \tau \otimes id_C)$ e $\mu = \mu_{B\otimes C} = (\mu_B \otimes \mu_C) \circ \psi$. Na qual, como acima τ é o isomorfismo *twist* e $\psi : \Bbbk \to \Bbbk \otimes \Bbbk$ é o isomorfismo canônico: $k \mapsto k \otimes 1$ para todo $k \in \Bbbk$. De fato,
$m(m \otimes id)(b_1 \otimes c_1 \otimes b_2 \otimes c_2 \otimes b_3 \otimes c_3) = m(b_1b_2 \otimes c_1c_2 \otimes b_3 \otimes c_3) = (b_1b_2)b_3 \otimes (c_1c_2)c_3$.
Por outro lado, $m(id \otimes m)(b_1 \otimes c_1 \otimes b_2 \otimes c_2 \otimes b_3 \otimes c_3) = m(b_1 \otimes c_1 \otimes b_2b_3 \otimes c_2c_3) = b_1(b_2b_3) \otimes c_1(c_2c_3)$.
Como B e C são álgebras associativas temos que $B \otimes C$ é associativa. O axioma da unidade também é verificado de forma semelhante. Portanto $B \otimes C$ é uma $\Bbbk$-álgebra associativa com unidade.

Agora, vamos construir os espaços duais de uma $\Bbbk$-álgebra e uma $\Bbbk$-coálgebra. Se A é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita (isto é, A é $\Bbbk$-espaço vetorial de dimensão finita), então o seu dual algébrico $A^* = \{f : A \to \Bbbk \mid f$ é $\Bbbk$-linear$\}$ é uma $\Bbbk$-coálgebra. Se C é uma $\Bbbk$-coálgebra de dimensão finita então o seu dual algébrico $C^* = \{f : C \to \Bbbk \mid f$ é $\Bbbk$-linear$\}$ é uma $\Bbbk$-álgebra.

Vale observar que aqui trataremos o caso de dimensão finita. Porém pode-se construir o dual de uma coálgebra qualquer obtendo uma álgebra. No caso que A é uma álgebra qualquer, podemos fazer uma restrição no conjunto A^* de modo a obtermos uma coálgebra (ver por exemplo [2]).

Seja (C, Δ, ε) uma $\Bbbk$-coálgebra de dimensão finita. Definimos:

- $M : C^* \otimes C^* \to C^*$, dada por: $M = \Delta^* \circ \lambda \circ \tau$;
- $\eta : \Bbbk \to C^*$, dada por: $\eta = \varepsilon^* \circ \phi$.

Nos quais, Δ^* e ε^* são as respectivas transpostas de Δ e ε, τ vem do Teorema 1.3.8, λ vem do Corolário 1.3.10 e $\phi : \Bbbk \to \Bbbk^*$ que para cada $k \in \Bbbk$ associa a transformação linear $\phi_{(k)} : \Bbbk \to \Bbbk$, definida por $\phi_{(k)}(l) = kl$ para todo $l \in \Bbbk$. Notemos que, denotando $M(f \otimes g)$

por $f * g$ temos que $f * g \in C^*$ e que:

$$\begin{aligned}
(f * g)(c) &= \Delta^*(\lambda(\tau(f \otimes g)))(c) \\
&= \Delta^*(\lambda(g \otimes f))(c) \\
&= \lambda(g \otimes f)(\Delta(c)) \\
&= \lambda(g \otimes f)(\sum c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum f(c_1)g(c_2).
\end{aligned}$$

Assim, a aplicação M acima está bem definida e C^* é um $\Bbbk$-espaço vetorial. Tal produto recebe o nome de **produto de convolução**. Claramente, M e η são $\Bbbk$-lineares, ϕ está bem definida e $\eta(k)(c) = (\varepsilon^* \circ \phi)(k)(c) = \varepsilon^*(\phi_{(k)})(c) = (\phi_{(k)} \circ \varepsilon)(c) = \phi_{(k)}(\varepsilon(c)) = k\varepsilon(c)$. Logo η também está bem definida.
Agora, observemos que para todo $f, g, h \in C^*$ e $c \in C$ vale:

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2) \\
&= \sum f(c_{1_1})g(c_{1_2})h(c_2) \\
&= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \\
&= \sum f(c_1)g(c_{2_1})h(c_{2_2}) \\
&= \sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\
&= (f * (g * h))(c).
\end{aligned}$$

Logo $(f * g) * h = f * (g * h)$, ou seja, C^* é associativa.
Vejamos que $\eta(1)$ é a unidade da álgebra C^*.

$$(\eta(1) * f)(c) = \sum \eta(1)(c_1)f(c_2) = \sum \varepsilon(c_1)f(c_2) = f(\sum \varepsilon(c_1)c_2) = f(c),$$

para todo $c \in C$ e $f \in C^*$. Analogamente tem-se $(f * \eta(1)) = f$. Logo, (C^*, M, η) é uma $\Bbbk$-álgebra.

Seja (A, m, η) uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, então $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ é uma $\Bbbk$-coálgebra na qual:

- $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ é definida por $\Delta = \tau \circ \lambda^{-1} \circ m^*$;
- $\varepsilon : A^* \to \Bbbk$ é definida por $\varepsilon = \psi \circ \eta^*$,

onde, m^* e η^* são as transpostas de m e η, τ vem do Teorema 1.3.8, λ^{-1} vem do Corolário 1.3.10 e $\psi : \Bbbk^* \to \Bbbk$ é dada por $\psi(f) = f(1)$, para todo $f \in \Bbbk^*$. Observemos que, se $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ com $g_i, h_i \in A^*$, então $f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$, para todo $a, b \in A$. Se $(g'_j, h'_j)_j$ é outra família finita de elementos de A^* tal que $f(ab) = \sum_j g'_j(a)h'_j(b)$,

$\forall a, b \in A$, então pela injetividade de $(\tau \circ \lambda)$ temos que $\sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g'_j \otimes h'_j$. Em conclusão podemos definir $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ para certos $g_i, h_i \in A^*$ com a propriedade de que $f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$, para todo $a, b \in A$.

Seja $f \in A^*$ tal que $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ e suponhamos que $\Delta(g_i) = \sum_j g'_{i,j} \otimes g''_{i,j}$ e $\Delta(h_i) = \sum_j h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}$. Então,
(1) $(\Delta \otimes id_{A^*})\Delta(f) = \sum_{i,j} g'_{i,j} \otimes g''_{i,j} \otimes h_i$;
(2) $(id_{A^*} \otimes \Delta)\Delta(f) = \sum_{i,j} g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}$.
A igualdade das equações acima vem do fato de podermos estender o isomorfismo λ a um isomorfismo de $(A^* \otimes A^* \otimes A^*)$ em $(A \otimes A \otimes A)^*$ e usar o fato de ser injetivo. Logo, Δ é coassociativa.
Mostremos que ε definida anteriormente satisfaz o diagrama da counidade. De fato, seja $f \in A^*$ tal que $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$. Então,

$$(\sum_i \varepsilon(g_i)h_i)(a) = \sum_i g_i(1)h_i(a) = f(1a) = f(a);$$

$$(\sum_i g_i\varepsilon(h_i))(a) = \sum_i g_i(h_i(1)a) = \sum_i g_i(a)h_i(1) = f(a1) = f(a).$$

Portanto, $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ é uma $\Bbbk$-coálgebra.

Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra e C uma $\Bbbk$-coálgebra. Denotando por $Hom(C, A) = \{f : C \to A \mid f \text{ é } \Bbbk\text{-linear}\}$, mostraremos que $Hom(C, A)$ com o produto de convolução tem estrutura de $\Bbbk$-álgebra.

Proposição 3.1.8. *$Hom(C, A)$ é uma $\Bbbk$-álgebra com multiplicação $m_{Hom(C,A)} : Hom(C, A) \otimes Hom(C, A) \to Hom(C, A)$, $f \otimes g \mapsto f * g$ (produto de convolução) e unidade $\mu_{Hom(C,A)} : \Bbbk \to Hom(C, A)$, $\lambda \mapsto \lambda(\mu \circ \varepsilon)$.*

Demonstração. Primeiro observe que se $f, g \in Hom(C, A)$, então $f * g \in Hom(C, A)$. De modo análogo ao feito para o dual de uma coálgebra temos que $(f*g)*h = f*(g*h)$ para todo $f, g, h \in Hom(C, A)$, ou seja, $Hom(C, A)$ é associativa. Temos que $\mu \circ \varepsilon : C \to A$ é $\Bbbk$-linear, onde $\mu \circ \varepsilon(c) = \mu(\varepsilon(c)1_{\Bbbk}) = \varepsilon(c)\mu(1_{\Bbbk}) = \varepsilon(c)1_A$. Segue-se que para todo $f \in Hom(C, A)$ valem:
$(f * (\mu \circ \varepsilon))(c) = \sum f(c_1)(\mu \circ \varepsilon)(c_2) = \sum f(c_1)\varepsilon(c_2)1_A = f(\sum c_1\varepsilon(c_2)) = f(c)$ e
$((\mu \circ \varepsilon) * f)(c) = \sum(\mu \circ \varepsilon)(c_1)f(c_2) = \sum \varepsilon(c_1)1_A f(c_2) = f(\sum \varepsilon(c_1)c_2) = f(c)$.
Isto mostra que $1_{Hom(C,A)} = \mu \circ \varepsilon$. Logo $Hom(C, A)$ é uma $\Bbbk$-álgebra associativa com unidade. $\square$

Da mesma forma que apresentamos o conceito de coálgebra a partir de uma definição alternativa para álgebras envolvendo diagramas de homomorfismos, procederemos agora para introduzir a definição de comódulos sobre coálgebras dualizando diagramas que definem módulos sobre álgebras.

Definição 3.1.9. *Seja (A, m, μ) uma $\Bbbk$-álgebra. Um A-**módulo à esquerda** é um par (X, α), onde X é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\alpha : A \otimes X \to X$ é uma transformação linear tal que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes X \arrow[r, "id_A \otimes \alpha"] \arrow[d, "m \otimes id_X"'] & A \otimes X \arrow[d, "\alpha"] \\ A \otimes X \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes X \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & X \\ \Bbbk \otimes X \arrow[uu, "\mu \otimes id_X"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Ou seja, $\alpha(id_A \otimes \alpha) = \alpha(m \otimes id_X)$ e $\alpha(\mu \otimes id_X) = \varphi$ onde $\varphi : \Bbbk \otimes X \to X$ é definida por, $(k \otimes x) \mapsto kx$. Similarmente define-se A-módulo à direita.

Naturalmente esta definição é equivalente a Definição 1.1.1, desde que se tome $\alpha(a \otimes x) = a \cdot x$ para todo $a \in A$, $x \in X$ e vice-versa.

Agora, seja (C, Δ, ε) uma $\Bbbk$-coálgebra. Invertendo as flechas na definição acima obtemos:

Definição 3.1.10. *Um C-**comódulo à direita** é um par (M, ρ), onde M é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\rho : M \to M \otimes C$ é uma transformação linear, tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes id_C"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes \Bbbk & \\ & M \otimes C \arrow[ul, "id_M \otimes \varepsilon"'] \\ M \arrow[uu, "\psi"] \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Ou seja, $(id_M \otimes \Delta)\rho = (\rho \otimes id_C)\rho$ e $(id_M \otimes \varepsilon)\rho = \psi$ onde $\psi : M \to M \otimes \Bbbk$ é definida por $m \mapsto (m \otimes 1)$. Similarmente define-se C-comódulo à esquerda.

Seja (M, ρ) um C-comódulo à direita. Um $\Bbbk$-subespaço vetorial N de M é chamado um C-subcomódulo à direita se $\rho(N) \subseteq N \otimes C$.

Observação 3.1.11. Seja (M, ρ) um C-comódulo à direita. Então, pela notação sigma para comódulos, para todo elemento $m \in M$ denotamos $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ no qual $m_{(0)} \in M$ e $m_{(1)} \in C$. Assim, os diagramas da definição podem ser escritos usando a notação sigma da seguinte forma:
$\sum \varepsilon(m_{(1)})m_{(0)} = m$;
$\sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2$ a qual, como no caso de coálgebras, denotamos simplesmente por:
$\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)} = \sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2$.

Exemplo 3.1.12. Toda $\Bbbk$-coálgebra C é um C-comódulo à direita (esquerda) via Δ, ou seja, (C, Δ) é um C-comódulo.

De modo similar as definições de homomorfismo de álgebras e de coálgebras, vamos definir homomorfismos de módulos e de comódulos.

Definição 3.1.13. ***(i)*** *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra e (X, ν), (Y, μ) dois A-módulos à esquerda. Uma transformação linear $f : X \to Y$ é chamada um **homomorfismo de A-módulos** se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes X \arrow[r, "id_A \otimes f"] \arrow[d, "\nu"'] & A \otimes Y \arrow[d, "\mu"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

(ii) *Seja C uma $\Bbbk$-coálgebra e (M, ρ), (N, ϕ) dois C-comódulos à direita. Uma transformação linear $g : M \to N$ é chamada um **homomorfismo de C-comódulos** se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"'] & N \arrow[d, "\phi"] \\
M \otimes C \arrow[r, "g \otimes id_C"'] & N \otimes C
\end{tikzcd}$$

Como já era de se esperar, no contexto de C-comódulos também temos a questão da semissimplicidade das estruturas que aqui chama-se cossemissimplicidade. Para apresentar este novo conceito, lembramos a definição de comódulo projetivo e injetivo.

Definição 3.1.14. *(i) Um C-comódulo à direita M é chamado **injetivo** se, para todo homomorfismo injetivo $i : X \to Y$ de C-comódulos à direita, e para todo homomorfismo $f : X \to M$ de C-comódulos à direita, existe um homomorfismo de C-comódulos à direita $\overline{f} : Y \to M$ tal que $\overline{f} \circ i = f$.*
*(ii) Um C-comódulo à direita N é chamado **projetivo** se, para todo homomorfismo sobrejetor $\pi : X \to Y$ de C-comódulos à direita, e para todo homomorfismo $g : N \to Y$ de C-comódulos à direita, existe um homomorfismo de C-comódulos à direita $\overline{g} : N \to X$ tal que $\pi \circ \overline{g} = g$.*

A seguir apresentamos alguns resultados que nos auxiliarão na demonstração de uma versão do Teorema de Maschke para coálgebras. No entanto as demonstrações de alguns destes resultados serão omitidas pois fogem ao escopo deste trabalho, por envolver linguagem de categorias, coálgebras associadas, etc. Para maiores detalhes ver por exemplo os Capítulos 2 e 3 de [2]. Começamos vendo a definição de C-comódulo livre e uma caracterização para comódulos injetivos.

Proposição 3.1.15 ([2], Proposition 2.4.8)**.** *Seja $(M_i)_{i\in I}$ uma família de C-comódulos à direita injetivos. Então, a soma direta $\bigoplus_{i\in I} M_i$ é um C-comódulo à direita injetivo.*

Definição 3.1.16. *Um C-comódulo é chamado* ***livre*** *se é isomorfo a um comódulo da forma $X\otimes C$, com X um espaço vetorial, o qual é um C-comódulo à direita via: $id_X \otimes \Delta : X\otimes C \to X\otimes C\otimes C$.*

Exemplo 3.1.17 ([2], Corollary 2.4.5)**.** Todo C-comódulo livre é injetivo.
De fato, seja F um H-comódulo livre. Assim, $F \cong X\otimes C$, com X um espaço vetorial, ou seja, $F \cong (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \Bbbk x_\lambda)\otimes C \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(\Bbbk x_\lambda \otimes C) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(\Bbbk\otimes C)$, onde $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma $\Bbbk$-base de X. Logo, pela Proposição 3.1.15, basta mostrarmos que $\Bbbk\otimes C$ é injetivo. Mas, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[d, "\varphi"'] \\
 & C\otimes \Bbbk & N\otimes \Bbbk \arrow[l, "h\otimes id_{\Bbbk}"]
\end{tikzcd}$$

onde $h : N \to C$ é dado como segue. Fixamos uma $\Bbbk$-base de M, digamos $\beta = \{v_i\}_{i\in I}$ e completamos a uma $\Bbbk$-base de N, h é a transformação linear tal que $h(v) = f(v)$ para todo $v \in \beta$ e $h(v) = 0$ nos outros elementos da base de N. Assim, basta tomarmos $\overline{f} = (h\otimes id_{\Bbbk})\circ\varphi$ para que $\overline{f}\circ i = f$. Logo $C\otimes\Bbbk \cong \Bbbk\otimes C$ é injetivo.

Proposição 3.1.18. *Seja M um C-comódulo à direita. Então M é injetivo se, e somente se, M é somando direto de um C-comódulo livre.*

Demonstração. Suponhamos que $F = M\oplus X$ no qual X e F são C-comódulos à direita e F é livre. Consideramos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Q \arrow[dl, "g''"'] \arrow[ddl, "\exists g'"] \\
 & M \arrow[d, shift left, "i"] & \\
 & F \arrow[u, shift left, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

No qual i e π denotam a inclusão e a projeção canônica respectivemante e $f : P \to Q$ é um homomorfismo de C-comódulos à direita. Como F é livre, segue pelo Exemplo 3.1.17 que F injetivo, ou seja, existe g' tal que $g'\circ f = i\circ g$. Seja $g'' = \pi\circ g'$, assim temos $g''\circ f = \pi\circ g'\circ f = \pi\circ i\circ g = g$, ou seja, M é injetivo.
Reciprocamente, assumimos (M,ρ) é injetivo. Vejamos que todo C-comódulo à direita é

isomorfo a um subcomódulo de um C-comódulo livre. De fato, temos que $M \otimes C$ tem estrutura de C-comódulo à direita via $\overline{\rho} = id_M \otimes \Delta$. Temos pela definição de C-comódulo que ρ é um homomorfismo de C-comódulos à direita (pois $(M \otimes C, \overline{\rho})$ é um C-comódulo à direita). Notemos que, se $m \in M$ é tal que $\rho(m) = 0$ temos que $0 = \rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ e assim, sendo M um C-comódulo à direita segue que, $m = \sum \varepsilon(m_{(1)}) m_{(0)} = \varphi \circ (id_M \otimes \varepsilon) \circ \rho(m) = 0$, no qual φ é o isomorfismo de $M \otimes \Bbbk$ em M. Logo ρ é um monomorfismo, donde $M \cong Im(\rho)$ e $Im(\rho)$ é um subcomódulo do comódulo livre $M \otimes C$. Desde que $M \otimes C$ é livre, $M \otimes C$ é isomorfo a $C^{(I)}$, uma soma direta de I cópias de C. Assim existe um homomorfismo de C-comódulos injetivo $i : M \to C^{(I)}$ para um certo conjunto de indíces I. Como M é injetivo, temos que a sequência $0 \to M \to C^{(I)}$ cinde de onde, existe $j : C^{(I)} \to M$ tal que $j \circ i = id_M$ e, portanto $C^{(I)} \cong i(M) \oplus Ker(j) \cong M \oplus Ker(j)$, o que conclui a demonstração. $\square$

Seguindo as ideias das definições de módulos e anéis semissimples temos as seguintes definições:

Definição 3.1.19. ***(i)*** *Seja M um C-comódulo à direita. Dizemos que M é* ***simples*** *se $M \neq (0)$ e se os únicos subcomódulos de M são (0) e M. Dizemos que M é* ***cossemissimples à direita*** *se M for igual a uma soma C-subcomódulos simples;*

(ii) *Uma coálgebra C é chamada* ***simples*** *se as únicas subcoálgebras de C são (0) e C. Dizemos que C é* ***cossemissimples à direita*** *se todo C-comódulo a direita é cossemissimples.*

De modo análogo definimos cossemissimplicidade à esquerda.

Definição 3.1.20. *O* ***coradical*** *de uma coálgebra C é a soma de todas as subcoálgebras simples de C e é denotado por C_0.*

Lema 3.1.21 ([2], Proposition 3.1.4)**.** *Seja C uma coálgebra. Então, C_0 é igual a soma de todos os C-subcomódulos simples à direita de C, (denotada por $s(C_C)$) que é igual a soma de todos os C-subcomódulos simples à esquerda de C, (denotada por $s({}_CC)$).*

Teorema 3.1.22 ([2], Theorem 3.1.5)**.** *Seja C uma $\Bbbk$-coálgebra. São equivalentes:*

(i) *C é cossemissimples à esquerda;*

(ii) *C é cossemissimples à direita;*

(iii) *$C = C_0$;*

(iv) *Todo C-comódulo é injetivo;*

(v) *Todo C-comódulo é projetivo.*

3.2 Álgebras de Hopf

Existem conjuntos que possuem estruturas de álgebra e de coálgebra simultaneamente. Quando estas estruturas têm uma certa compatibilidade, dizemos que são biálgebras.

Definição 3.2.1 (Biálgebra). *Dizemos que uma quíntupla $(A, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ é uma **biálgebra sobre** $\Bbbk$ (ou uma $\Bbbk$-**biálgebra**) quando:*

(i) *(A, m, μ) é uma $\Bbbk$-álgebra;*

(ii) *(A, Δ, ε) é uma $\Bbbk$-coálgebra;*

(iii) *$\Delta : A \to A \otimes A$ e $\varepsilon : A \to \Bbbk$ são homomorfismos de $\Bbbk$-álgebras.*

Exemplo 3.2.2. Sejam G um grupo e $\Bbbk$ um corpo. Seja $H = \Bbbk G$ como definida no Exemplo 1.1.9. Temos que $H = \Bbbk G$ é uma biálgebra sobre $\Bbbk$ (com unidade $1_H = 1_\Bbbk 1_G$) definindo:

(i) Multiplicação $m : H \otimes H \to H$, onde $m(\lambda_g g \otimes \lambda_h h) = (\lambda_g \lambda_h)(gh)$ para todo λ_g, λ_h $\in \Bbbk$ e $g, h \in G$;

(ii) Unidade $\mu : \Bbbk \to H$ com $\mu(\lambda) = \lambda 1_G$;

(iii) Comultiplicação $\Delta : H \to H \otimes H$ (e denotando $1_\Bbbk g = g$) com $\Delta(g) = g \otimes g$ que é estendida linearmente sobre todos os elementos de $\Bbbk G$, isto é, $\Delta(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g g) = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g \Delta(g) = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g (g \otimes g)$;

(iv) Counidade $\varepsilon : H \to \Bbbk$ com $\varepsilon(g) = 1_\Bbbk$ que é estendida linearmente sobre todos os elementos de $\Bbbk G$, isto é, $\varepsilon(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g g) = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g \varepsilon(g) = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g$.

Proposição 3.2.3. *Sejam (A, m_A, μ_A) uma $\Bbbk$-álgebra e $(A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ uma $\Bbbk$-coálgebra. São equivalentes:*

(i) *Δ_A e ε_A são homomorfismos de $\Bbbk$-álgebras;*

(ii) *m_A e μ_A são homomorfismos de $\Bbbk$-coálgebras.*

Demonstração. Mostremos inicialmente (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**).
Por hipótese, temos que $\Delta_A : A \longrightarrow A \otimes A$ e $\varepsilon_A : A \longrightarrow \Bbbk$ são homomorfismos de $\Bbbk$-álgebras. Logo valem:

(I.1) $\Delta_A \circ m_A = m_{A \otimes A} \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A)$, onde $m_{A \otimes A} = (m_A \otimes m_A) \circ (id_A \otimes \tau \otimes id_A)$;

(I.2) $\Delta_A \circ \mu_A = \mu_{A \otimes A}$, onde $\mu_{A \otimes A} = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Phi$ com $\Phi : k \mapsto 1_\Bbbk \otimes k$, $k \in \Bbbk$;

(I.3) $\varepsilon_A \circ m_A = m_{\Bbbk} \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A)$;

(I.4) $\varepsilon_A \circ \mu_A = \mu_{\Bbbk}$.

Devemos mostrar que $m_A : A \otimes A \longrightarrow A$ e $\mu_A : \Bbbk \longrightarrow A$ são homomorfismos de coálgebras, isto é, que valem:

(II.1) $\Delta_A \circ m_A = (m_A \otimes m_A) \circ \Delta_{A \otimes A}$, onde $\Delta_{A \otimes A} = (id_A \otimes \tau \otimes id_A) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A)$;

(II.2) $\varepsilon_A \circ m_A = \varepsilon_{A \otimes A}$, onde $\varepsilon_{A \otimes A} = \gamma \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A)$ com $\gamma : k_1 \otimes k_2 \mapsto k_1 k_2$ com $k_1, k_2 \in \Bbbk$;

(II.3) $\Delta_A \circ \mu_A = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Delta_{\Bbbk}$;

(II.4) $\varepsilon_A \circ \mu_A = \varepsilon_{\Bbbk}$.

Observemos que pelo Exemplo 3.1.6 $(A \otimes A, \Delta_{A \otimes A}, \varepsilon_{A \otimes A})$ é uma $\Bbbk$-coálgebra.
Observemos ainda que $(\Bbbk, \Delta_{\Bbbk}, \varepsilon_{\Bbbk})$ com $\varepsilon_{\Bbbk}(k) = k$ e $\Delta_{\Bbbk}(k) = 1_{\Bbbk} \otimes k$ com $k \in \Bbbk$ é uma $\Bbbk$-coálgebra.
De (I.1), temos que:

(a) $\Delta_A \circ m_A = m_{A \otimes A} \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A) = [(m_A \otimes m_A) \circ (id_A \otimes \tau \otimes id_A)] \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A) = (m_A \otimes m_A) \circ [(id_A \otimes \tau \otimes id_A) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A)] = (m_A \otimes m_A) \circ \Delta_{A \otimes A}$ (logo vale **II.1**);

De (I.3), temos que:

(b) $\varepsilon_A \circ m_A = m_{\Bbbk} \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A) = \gamma \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A) = \varepsilon_{A \otimes A}$ (note que $m_{\Bbbk} = \gamma$; logo vale **II.2**);

De (I.2), temos que:

(c) $\Delta_A \circ \mu_A = \mu_{A \otimes A} = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Phi = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Delta_{\Bbbk}$ (note que $\Phi = \Delta_{\Bbbk}$; logo vale **II.3**);

De (I.4), temos que:

(d) $\varepsilon_A \circ \mu_A = \mu_{\Bbbk} = \varepsilon_{\Bbbk}$ (logo vale **II.4**).

Agora, vejamos que (**ii**) $\Rightarrow$ (**i**). Por hipótese valem (II.1), (II.2), (II.3) e (II.4).
Por (II.1), temos que:

(a) $\Delta_A \circ m_A = (m_A \otimes m_A) \circ \Delta_{A \otimes A} = (m_A \otimes m_A) \circ [(id_A \otimes \tau \otimes id_A) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A)] = [(m_A \otimes m_A) \circ (id_A \otimes \tau \otimes id_A)] \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A) = m_{A \otimes A} \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A)$ (logo vale **I.1**);

Por (II.3), temos que:

(b) $\Delta_A \circ \mu_A = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Delta_{\Bbbk} = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ \Phi = \mu_{A \otimes A}$ (logo vale **I.2**);

Por (II.2), temos que:

(c) $\varepsilon_A \circ m_A = \varepsilon_{A \otimes A} = \gamma \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A) = m_{\Bbbk} \circ (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A)$ (logo vale **I.3**);

Por (II.4), temos que:

(d) $\varepsilon_A \circ \mu_A = \varepsilon_{\Bbbk} = \mu_{\Bbbk}$ (logo vale **I.4**).

$\square$

Definição 3.2.4 (Álgebra de Hopf)**.** *Dizemos que uma biálgebra $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ sobre $\Bbbk$ é uma **álgebra de Hopf** se existir uma função $\Bbbk$-linear $S : H \longrightarrow H$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[d, "S \otimes id_H"] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mu \circ \varepsilon"] & H \otimes H \arrow[d, "id_H \otimes S"] \\
H \otimes H \arrow[r, "m"] & H & H \otimes H \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

A função S é chamada de antípoda de H. O diagrama acima nos diz que:

$$m \circ (S \otimes id_H) \circ \Delta = \mu \circ \varepsilon = m \circ (id_H \otimes S) \circ \Delta,$$

o que pode ser traduzido como:

$$\sum S(h_1)h_2 = \sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1 \text{ para todo } h \in H.$$

Exemplo 3.2.5. Usando a notação $1_{\Bbbk} g = g$, temos que $H = \Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf com antípoda $S(g) = g^{-1}$ que é estendida linearmente sobre todos os elementos de $\Bbbk G$, isto é, $S(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g g) = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g S(g) = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g g^{-1}$. De fato, pelo Exemplo visto, temos que $\Bbbk G$ é uma biálgebra. Temos também que:

(i) $m \circ (S \otimes id_H) \circ \Delta(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g g) = m \circ (S \otimes id_H)(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g \Delta(g)) = m \circ (S \otimes id_H)(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g (g \otimes g)) = m(\sum\limits_{g \in G} (S \otimes id_H)(\lambda_g g \otimes g)) = m(\sum\limits_{g \in G} (S(\lambda_g g) \otimes g)) = \sum\limits_{g \in G} m(\lambda_g g^{-1} \otimes g) = \sum\limits_{g \in G} (\lambda_g g^{-1}.g) = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g 1_G$;

(ii) $m \circ (id_H \otimes S) \circ \Delta(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g g) = m \circ (id_H \otimes S)(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g \Delta(g)) = m \circ (id_H \otimes S)(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g (g \otimes g)) = m(\sum\limits_{g \in G} (id_H \otimes S)(\lambda_g g \otimes g)) = \sum\limits_{g \in G} m(\lambda_g g \otimes g^{-1}) = \sum\limits_{g \in G} (\lambda_g g).(g^{-1}) = \sum\limits_{g \in G} (\lambda_g)(g.g^{-1}) = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g 1_G$;

(iii) $(\mu \circ \varepsilon)(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g g) = \mu(\sum\limits_{g \in G} \lambda_g) = \sum\limits_{g \in G} \mu(\lambda_g) = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g 1_G$.

Segue-se que $H = \Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf.

Exemplo 3.2.6 (Álgebra de Taft)**.** Seja $N \geq 2$ um inteiro e $q \in \Bbbk$ uma raiz N-ésima da unidade. Consideremos a álgebra $T_N(q)$ definida pelos geradores g e x e as relações:

$$g^N = 1; x^N = 0; gx = qxg. \tag{3.2}$$

Ou seja,

$$T_N(q) = \Bbbk < g, x \quad | \quad g^N = 1; \quad x^N = 0; \quad gx = qxg > .$$

Assim, $T_N(q)$ é uma álgebra de Hopf sobre $\Bbbk$ com Δ, ε e S determinadas por:

$$\begin{array}{rl} \Delta(g) = g \otimes g; & \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes g. \\ \varepsilon(g) = 1; & \varepsilon(x) = 0. \\ S(g) = g^{-1}; & S(x) = -xg^{-1}. \end{array}$$

Vejamos que as aplicações acima estão bem definidas. Como esta é uma álgebra gerada por elementos livres e relações basta verificarmos que as aplicações, quando aplicadas nos geradores, satisfazem tais relações.
Para $\Delta(x)$ e $\Delta(g)$ temos:

$$\Delta(g)^N = (g \otimes g)^N = g^N \otimes g^N = 1 \otimes 1;$$

$$\begin{aligned} \Delta(x)^N &= (1 \otimes x + x \otimes g)^N \\ &= (1 \otimes x)^N + (x \otimes g)^N \quad \text{(ver fórmula binomial quântica, por ex. [17] pág. 9)} \\ &= 1 \otimes x^N + x^N \otimes g^N \\ &= 1 \otimes 0 + 0 \otimes g^N = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(g)\Delta(x) &= (g \otimes g)(1 \otimes x + x \otimes g) \\ &= g \otimes gx + gx \otimes g^2 \\ &= g \otimes qxg + qxg \otimes g^2 \\ &= q(g \otimes xg + xg \otimes g^2) \\ &= q((1 \otimes x + x \otimes g)(g \otimes g)) \\ &= q\Delta(x)\Delta(g). \end{aligned}$$

Para $\varepsilon(x)$ e $\varepsilon(g)$ temos:

$$\varepsilon(x)^N = 0^N = 0;$$

$$\varepsilon(g)^N = 1^N = 1;$$

$$\varepsilon(g)\varepsilon(x) = 1 \cdot 0 = 0 = q\varepsilon(x)\varepsilon(g).$$

E finalmente para $S(x)$ e $S(g)$ temos:

$$S(x)^N = (-xg^{-1})^N = q^{r_n} x^N g^{-N} = 0,$$

onde $r_1 = 0$ e $r_n = r_{n-1} - n + 1$ para $n > 1$.

$$S(g)^N = (g^{-1})^N = (g^N)^{-1} = (1)^{-1} = 1,$$

e ainda,

$$\begin{aligned} S(g) \cdot_{op} S(x) &= S(x)S(g) \\ &= (-xg^{-1})g^{-1} \\ &= -qg^{-1}xg^{-1} \\ &= qS(g)S(x) \\ &= qS(x) \cdot_{op} S(g). \end{aligned}$$

Agora vejamos os diagramas da definição de álgebras de Hopf.
Diagrama da antípoda: $m \circ (S \otimes id)\Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (id \otimes S)\Delta$.

$$\begin{aligned} (m \circ (S \otimes id)\Delta)(x) &= m(S \otimes id)(1 \otimes x + x \otimes g) \\ &= m(1 \otimes x + -xg^{-1} \otimes g) \\ &= x - xg^{-1}g \\ &= 0 = \eta(0) = \eta(\varepsilon(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m \circ (id \otimes S)\Delta)(x) &= m(id \otimes S)(1 \otimes x + x \otimes g) \\ &= m(-1 \otimes xg^{-1} + x \otimes g^{-1}) \\ &= -xg^{-1} + xg^{-1} \\ &= 0 = \eta(0) = \eta(\varepsilon(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m \circ (S \otimes id)\Delta)(g) &= m(S \otimes id)(g \otimes g) \\ &= m(g^{-1} \otimes g) \\ &= g^{-1}g \\ &= 1 = \eta(1) = \eta(\varepsilon(g)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m \circ (id \otimes S)\Delta)(g) &= m(id \otimes S)(g \otimes g) \\ &= gg^{-1} \end{aligned}$$

$$= \quad 1 = \eta(1) = \eta(\varepsilon(g))$$

Diagrama da comultiplicação: $(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta$.

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(g) &= (\Delta \otimes id)(g \otimes g) \\
&= (g \otimes g) \otimes g \\
&= g \otimes (g \otimes g) \\
&= (id \otimes \Delta)(g \otimes g) \\
&= (id \otimes \Delta)\Delta(g).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(x) &= (\Delta \otimes id)(1 \otimes x + x \otimes g) \\
&= (1 \otimes 1) \otimes x + (1 \otimes x + x \otimes g) \otimes g \\
&= 1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes g + x \otimes g \otimes g \\
&= 1 \otimes (1 \otimes x + x \otimes g) + x \otimes g \otimes g \\
&= 1 \otimes \Delta(x) + x \otimes \Delta(g) \\
&= (id \otimes \Delta)\Delta(x).
\end{aligned}$$

Diagrama da counidade: $\varphi \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \varphi \circ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id$.

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(x) &= (\varphi \circ (id \otimes \varepsilon))(1 \otimes x + x \otimes g) \\
&= \varphi(1 \otimes \varepsilon(x) + x \otimes \varepsilon(g)) \\
&= 1 \cdot 0 + x \cdot 1 = x;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta)(x) &= (\varphi \circ (\varepsilon \otimes id))(1 \otimes x + x \otimes g) \\
&= \varphi(\varepsilon(1) \otimes x + \varepsilon(x) \otimes g) \\
&= 1 \cdot x + 0 \cdot g = x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(g) &= (\varphi \circ (id \otimes \varepsilon))(g \otimes g) \\
&= \varphi(g \otimes \varepsilon(g)) \\
&= g\varepsilon(g) = g;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta)(g) &= (\varphi \circ (\varepsilon \otimes id))(g \otimes g) \\
&= \varphi(\varepsilon(g) \otimes g) \\
&= \varepsilon(g)g = g.
\end{aligned}$$

Portanto, $T_N(q)$ com as aplicações definidas acima é uma álgebra de Hopf.

Agora vejamos uma proposição referente a antípoda que nos fornece um resultado fundamental para a demonstração do Teorema de Maschke para o produto smash que será apresentado no Capítulo 4.

Proposição 3.2.7. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então, para todo $g, h \in H$ temos:*

(i) $S(hg) = S(g)S(h)$;

(ii) $S(1) = 1$;

(iii) $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$;

(iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

Demonstração. (**i**) Consideremos $H \otimes H$ com estrutura de coálgebra dada no Exemplo 3.1.6 e H com estrutura de álgebra. Assim, podemos considerar a álgebra $Hom(H \otimes H, H)$ com a estrutura definida na Proposição 3.1.8. Notemos que o elemento unidade desta álgebra é dado por $\mu_H \varepsilon_{H\otimes H} : H \otimes H \to H$. Agora, consideremos as aplicações $F, G, M : H \otimes H \to H$ definidas para todo $g, h \in H$, por:

1. $F(h \otimes g) = S(g)S(h)$;
2. $G(h \otimes g) = S(hg)$;
3. $M(h \otimes g) = hg$.

Vejamos que M é a inversa à esquerda para F e inversa à direita para G. De fato, para todo $g, h \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
(M * F)(h \otimes g) &= \sum M((h \otimes g)_1)F((h \otimes g)_2) \\
&= \sum M(h_1 \otimes g_1)F(h_2 \otimes g_2) && (\Delta \text{ é hom. de álgebras}) \\
&= \sum h_1 g_1 S(g_2)S(h_2) \\
&= \sum h_1 \varepsilon(g) 1_H S(h_2) && (\text{def. de S para } g) \\
&= \sum \varepsilon(g) h_1 S(h_2) \\
&= \varepsilon(g)\varepsilon(h)1_H && (\text{def. de S para } h) \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H \\
&= \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g)1_H \\
&= \mu(\varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes g)) \\
&= id_{Hom(H\otimes H,H)}(h \otimes g);
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(G*M)(h\otimes g) &= \sum G((h\otimes g)_1)M((h\otimes g)_2) \\
&= \sum G(h_1\otimes g_1)M(h_2\otimes g_2) && (\Delta \text{ é hom. de álgebras}) \\
&= \sum S(h_1g_1)h_2g_2 \\
&= \sum S((hg)_1)(hg)_2 && (\Delta \text{ é hom. de álgebras}) \\
&= \varepsilon(hg)1_H && (\text{def. de S para } hg) \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H && (\ \varepsilon \text{ é hom. de álgebras}) \\
&= \varepsilon_{H\otimes H}(h\otimes g)1_H \\
&= \mu(\varepsilon_{H\otimes H}(h\otimes g)) \\
&= id_{Hom(H\otimes H,H)}(h\otimes g).
\end{aligned}$$

Como M é inversa à esquerda para F e à direita para G na álgebra $Hom(H\otimes H,H)$ e esta álgebra é associativa tem-se que $G = G*1_{Hom(H\otimes H,H)} = G*(M*F) = (G*M)*F = 1_{Hom(H\otimes H,H)} * F = F$. Logo $F = G$ o que conclui (**i**).

(**ii**) Aplicando a definição de antípoda para o elemento $1 \in H$ temos $\sum 1S(1) = \varepsilon(1)1 = 1$, pois ε é homomorfismo de álgebras e $\Delta(1) = \sum 1\otimes 1$. Logo $S(1) = 1$.

(**iii**) Considere H como uma coálgebra e $H\otimes H$ com estrutura de álgebra dada no Exemplo 3.1.7. Assim, podemos considerar a álgebra $Hom(H, H\otimes H)$ e as seguintes aplicações: $F, G : H \to H\otimes H$ definidas para todo $h \in H$, por:

1. $F(h) = \Delta(S(h))$;

2. $G(h) = \sum S(h_2)\otimes S(h_1)$.

Como anteriormente, mostra-se que Δ é uma inversa à esquerda para F e inversa à direita para G com respeito ao produto convolução, portanto $G = F$ e temos (**iii**).

(**iv**) Pela definição da antípoda temos que $\sum h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$. Portanto ao aplicarmos ε em ambos os lados desta igualdade obtemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\varepsilon(h)1_H) &= \varepsilon(\sum h_1S(h_2)) \\
\varepsilon(h)\varepsilon(1_H) &= \sum \varepsilon(h_1)\varepsilon(S(h_2)) \\
\varepsilon(h) &= \sum \varepsilon(\varepsilon(h_1)S(h_2)) \\
&= \varepsilon(\sum S(\varepsilon(h_1)h_2)) \\
&= \varepsilon(S(h)).
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. $\square$

3.3 Teorema de Maschke

Para chegarmos definitivamente ao Teorema de Maschke apresentaremos mais alguns conceitos. Continuaremos usando $\Bbbk$ para denotar um corpo e $\Bbbk$-estrutura para dizermos que a estrutura é um $\Bbbk$-espaço vetorial.

Definição 3.3.1 (Álgebra Separável)**.** *Seja A uma álgebra sobre $\Bbbk$. Dizemos que A é* ***separável*** *se existe um elemento $\boldsymbol{e} \in A \otimes A$ tal que:*

(i) *$ae = ea$, para todo $a \in A$;*

(ii) *$m(e) = 1$, no qual $m : A \otimes A \to A$ é a multiplicação em A.*

O elemento $\boldsymbol{e}$ é chamado de idempotente de separabilidade. Como $e \in A \otimes A$, então e é uma soma finita da seguinte forma: $e = \sum\limits_i x_i \otimes y_i$. Considerando tal forma para e, as condições da definição podem ser reescritas como:

(i) $\sum\limits_i ax_i \otimes y_i = \sum\limits_i x_i \otimes y_i a$, $\forall a \in A$. De fato, $a(\sum\limits_i x_i \otimes y_i) = (\sum\limits_i x_i \otimes y_i)a \Longrightarrow \sum\limits_i a(x_i \otimes y_i) = \sum\limits_i (x_i \otimes y_i)a \Longrightarrow \sum\limits_i ax_i \otimes y_i = \sum\limits_i x_i \otimes y_i a$.

(ii) $1 = \sum\limits_i x_i y_i$. De fato, $m(e) = m(\sum\limits_i x_i \otimes y_i) \Rightarrow m(e) = \sum\limits_i m(x_i \otimes y_i) \Rightarrow m(e) = \sum\limits_i x_i y_i \Rightarrow 1 = \sum\limits_i x_i y_i$.

Observemos que tal elemento e é um idempotente em $A \otimes A^{op}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
e^2 &= (\sum_i x_i \otimes y_i)(\sum_j x_j \otimes y_j) \\
&= \sum_{i,j} (x_i \otimes y_i)(x_j \otimes y_j) \\
&= \sum_{i,j} x_i x_j \otimes y_j y_i \\
&= \sum_{i,j} x_j \otimes y_j x_i y_i \\
&= \sum_j x_j \otimes (y_j \sum_i x_i y_i) \\
&= \sum_j x_j \otimes y_j \\
&= e.
\end{aligned}$$

Definição 3.3.2. *Uma álgebra de Hopf é dita* ***semissimples*** *se ela for uma álgebra semissimples, que por sua vez é semissimples se for um anel semissimples conforme Definição 1.2.4.*

Lema 3.3.3. *Se A é uma álgebra separável, então A é semissimples.*

Demonstração. Como A é separável sabemos que existe $e = \sum_i x_i \otimes y_i \in A \otimes A$ tal que valem: $\sum_i ax_i \otimes y_i = \sum_i x_i \otimes y_i a$ e $\sum_i x_i y_i = 1$, para todo $a \in A$. Sejam V um A-módulo e $W \subseteq V$ um A-submódulo de V. Desde que $\Bbbk$ é semissimples segue-se do Lema 2.1.7 que existe a $\Bbbk$-projeção $\pi : V \to W$. Agora consideramos $\lambda : V \to W$ definida por $\lambda(v) = \sum_i x_i \pi(y_i v)$, para todo $v \in V$, na qual $e = \sum_i x_i \otimes y_i$. Note que λ está bem definida, pois se $v \in V \Longrightarrow y_i v \in V \Longrightarrow \pi(y_i v) \in W \Longrightarrow x_i \pi(y_i v) \in W \Longrightarrow \sum_i x_i \pi(y_i v) = \lambda(v) \in W$. Notemos também que, se $w \in W$, então $y_i w \in W \Rightarrow \lambda(w) = \sum_i x_i \pi(y_i w) = \sum_i x_i y_i w = (\sum_i x_i y_i) w = w$, logo $\lambda(w) = w$, para todo $w \in W$. Temos ainda que λ é um homomorfismo de A-módulos pois, claramente $\lambda(u+v) = \lambda(u) + \lambda(v)$ e se $a \in A$ e $v \in V$,

$$
\begin{aligned}
\lambda(av) &= \sum_i x_i \pi(y_i \cdot (av)) \\
&= m(id_A \otimes \pi)(\sum_i x_i \otimes (y_i a) \cdot v) \\
&\overset{(*)}{=} m(id_A \otimes \pi)(\sum_i x_i \otimes y_i a) \centerdot (1_A \otimes v) \\
&= m(id_A \otimes \pi)(\sum_i ax_i \otimes y_i) \centerdot (1_A \otimes v) \\
&\overset{(*)}{=} m(id_A \otimes \pi)(\sum_i ax_i \otimes y_i \cdot v) \\
&= m(\sum_i ax_i \otimes \pi(y_i \cdot v)) \\
&= a \sum_i x_i \pi(y_i \cdot v) \\
&= a\lambda(v),
\end{aligned}
$$

onde $(*)$ vem do fato que, sendo V é um A-módulo à esquerda temos que $A \otimes V$ é um $A \otimes A$-módulo à esquerda via: $(x \otimes y) \centerdot (z \otimes v) := xz \otimes y \cdot v$.
Logo, pelo Lema 2.1.7, A é semissimples. □

Vejamos agora mais duas definições que estão intimamente ligadas com os Teoremas de Maschke que aparecem no contexto de álgebras de Hopf.

Definição 3.3.4 (Integral sobre H). *Seja H uma álgebra de Hopf sobre $\Bbbk$. Um elemento $t \in H^*$ é chamado uma **integral à esquerda** (respectivamente à direita) **sobre** H se $f * t = f(1)t$ (respectivamente $t * f = f(1)t$), $\forall f \in H^*$.*

Lema 3.3.5. Com as notações acima, $t \in H^*$ é uma integral à esquerda (respectivamente à direita) sobre $H \Leftrightarrow \sum t(x_2)x_1 = t(x)1$ (respectivamente $\sum t(x_1)x_2 = t(x)1$), para todo $x \in H$.

Demonstração. De fato, se $\sum t(x_2)x_1 = t(x)1$, então

$$(h^*t)(x) = \sum h^*(x_1)t(x_2) = h^*(\sum t(x_2)(x_1)) = h^*(t(x)1) = h^*(1)t(x),$$

para todo $h^* \in H^*$. Portanto t é uma integral à esquerda sobre H.

Reciprocamente, se $t \in H^*$ é uma integral à esquerda, então

$$(id_H \otimes t)\Delta(x) = (id_H \otimes t)(\sum x_1 \otimes x_2) = \sum x_1 \otimes t(x_2) \in H \otimes \Bbbk \cong H,$$

para todo $f \in H^*$ e $x \in H$, logo

$$f((id_H \otimes t)\Delta(x)) = f(\sum x_1 \otimes t(x_2)) = \sum f(x_1 t(x_2)) = \sum f(x_1)t(x_2) = (f * t)(x);$$

$$f((\eta \circ t)(x)) = f(t(x)1_H) = f(1_H)t(x).$$

Assim, $f((id_H \otimes t)\Delta(x)) = f((\eta \circ t)(x))$ é equivalente a $(f * t)(x) = f(1_H)t(x)$, $\forall x \in H$. Como $t \in H^*$ uma integral à esquerda, a última igualdade é verdadeira, o que implica que $f((id_H \otimes t)\Delta(x)) = f((\eta \circ t)(x))$, para todo $f \in H^*$. Portanto,

$$((id_H \otimes t)\Delta(x) - (\eta \circ t)(x)) \in \bigcap_{f \in H^*} Ker(f) = \{x \in H : f(x) = 0, \quad \forall f \in H^*\} = (H^*)^\perp = \{0\},$$

pois $\{0\}^\perp = H^*$ e assim $\{0\} = (\{0\}^\perp)^\perp = (H^*)^\perp$. Logo, $(id_H \otimes t)\Delta(x) = (\eta \circ t)(x)$, ou seja, $\sum t(x_2)x_1 = t(x)1_H$. Analogamente mostra-se o caso respectivo à direita. □

Definição 3.3.6 (Integral em H)**.** *Seja H uma álgebra de Hopf sobre $\Bbbk$ de dimensão finita. Uma **integral à esquerda** (resp. à direita) **em** H é um elemento $\Lambda_l \in H$ ($\Lambda_r \in H$) tal que $h\Lambda_l = \varepsilon(h)\Lambda_l$ ($\Lambda_r h = \varepsilon(h)\Lambda_r$), para todo $h \in H$.*

Observamos que $0 \in H$ é uma integral de ambos os lados em H e que os conjuntos de integrais à esquerda (à direita) em H são subespaços vetoriais de H.

Lema 3.3.7. *Se $t \in H$ é uma integral à direita em H, então $\sum \varepsilon(h_1)t_1 \otimes \varepsilon(h_2)t_2 = \sum t_1h_1 \otimes t_2h_2$ onde $\Delta(t) = \sum t_1 \otimes t_2$ e $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$.*

Demonstração. Como $t \in H$ é uma integral à direita temos que $th = \varepsilon(h)t$ $\forall h \in H$. Então

$$\Delta(th) = \Delta(\varepsilon(h)t) = \varepsilon(h)\Delta(t) = \varepsilon(h_1\varepsilon(h_2)) \sum t_1 \otimes t_2 = \sum \varepsilon(h_1)t_1 \otimes \varepsilon(h_2)t_2.$$

Agora, sendo Δ é homomorfismo de álgebras tem-se que : $\Delta(th) = \Delta(t)\Delta(h) = (\sum t_1 \otimes t_2)(\sum h_1 \otimes h_2) = \sum t_1h_1 \otimes t_2h_2$. Logo $\sum \varepsilon(h_1)t_1 \otimes \varepsilon(h_2)t_2 = \sum t_1h_1 \otimes t_2h_2$. □

No que segue, quando mencionarmos integrais em H, se pressupõe que estamos trabalhando com álgebras de Hopf de dimensão finita. No caso de integral sobre H estaremos no contexto geral (dimensão finita ou infinita).

Observação 3.3.8. No caso que $dimH < \infty$, comparando a Definição 3.3.4 e a Definição 3.3.6 temos que uma integral sobre H é definida como uma integral em H^*, pois pela dualização vista na seção 3.1 (H, m, η) fornece uma coálgebra $(H^*, \varepsilon_{H^*}, \Delta_{H^*})$ onde $\varepsilon_{H^*} = \psi \circ \eta^*$. Assim, $\varepsilon_{H^*}(f) = (\psi \circ \eta^*)(f) = \psi(\eta^*(f)) = \psi(f \circ \eta) = (f \circ \eta)(1) = f(\eta(1)) = f(1)$. Portanto $\varepsilon_{H^*}(f) = f(1)$.

No teorema a seguir usaremos fortemente a técnica das projeções (Lema 2.1.7 e Lema 3.3.3) em sua demonstração. Tal resultado nos fornece condições necessárias e suficientes para que uma álgebra de Hopf seja semissimples, o que faz com que seja considerado mais uma versão do Teorema de Maschke.

Teorema 3.3.9 (Teorema de Maschke)**.** *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. São equivalentes:*

(i) *H é uma álgebra semissimples;*

(ii) *H é uma álgebra separável;*

(iii) *Existe uma integral à direita Λ em H tal que $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$.*

Demonstração. **(i) ⇒ (iii)**: Consideremos a seguinte sequência exata de H-módulos:

$$0 \to Ker(\varepsilon) \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\varepsilon} \Bbbk \to 0.$$

Como H é semissimples, pelo Teorema (Definição) 1.2.4 esta sequência cinde, isto é, existe $\delta : \Bbbk \to H$ homomorfismo de H-módulos à direita tal que $\varepsilon \circ \delta = id_{\Bbbk}$. Assim o elemento $\Lambda = \delta(1)$ é uma integral à direita em H tal que $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Lambda h &= \delta(1)h \\
&= \delta(1.h) \qquad (\delta \text{ homomorfismo de } H\text{-módulos à direita}) \\
&= \delta(\varepsilon(h)1) \qquad (\Bbbk \text{ é } H\text{-módulo à direita via } k.h = \varepsilon(h)k) \\
&= \varepsilon(h)\delta(1) \qquad (\delta \text{ é } \Bbbk\text{-linear}) \\
&= \varepsilon(h)\Lambda.
\end{aligned}$$

Logo, Λ é integral à direita e $\varepsilon(\Lambda) = \varepsilon(\delta(1)) = (\varepsilon \circ \delta)(1) = 1 \neq 0$.

(iii) ⇒ (ii): Tomemos Λ integral à direita em H tal que $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$. Desde que múltiplos de integrais são integrais, podemos tomar Λ tal que $\varepsilon(\Lambda) = 1$. Seja $e = (S \otimes id) \circ \Delta(\Lambda) = \sum S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2 \in H \otimes H$. Pelo diagrama da definição de álgebra de Hopf, temos:

$m(e) = m(\sum S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2) = \sum m(S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2) = \sum S(\Lambda_1)\Lambda_2 = \varepsilon(\Lambda)1 = 1$ e também temos que:

$$\begin{aligned}
eh &= (\sum S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2)h \\
&= (\sum S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2)\varepsilon(h_1)h_2 \\
&\overset{(1)}{=} \sum \varepsilon(h_1)S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2 h_2 \\
&\overset{(2)}{=} \sum (h_1 S(h_2))S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2 h_3 \\
&= (m \otimes id)(\sum h_1 \otimes S(h_2)S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2 h_3) \\
&\overset{(3)}{=} (m \otimes id)(\sum h_1 \otimes (S \otimes id)(\Lambda_1 h_2 \otimes \Lambda_2 h_3)) \\
&\overset{(4)}{=} (m \otimes id)(\sum h_1 \otimes (S \otimes id)\Delta(\Lambda h_2)) \\
&\overset{(5)}{=} (m \otimes id)(\sum h_1 \otimes (S \otimes id)\Delta(\varepsilon(h_2)\Lambda)) \\
&= (m \otimes id)(\sum h_1 \otimes (S \otimes id)(\varepsilon(h_2)\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)) \\
&= (m \otimes id)(\sum h_1 \otimes \varepsilon(h_2)S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2) \\
&= \sum h_1 \varepsilon(h_2)S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2 \\
&= h(\sum S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2) = he.
\end{aligned}$$

Justificativas:
(1) $\varepsilon(h_1)$ é um elemento do corpo.
(2) Axioma da antípoda.
(3) S é antimorfismo.
(4) Δ é homomorfismo de álgebras.
(5) Λ é uma integral à direita(hipótese).
Portanto, $e = \sum S(\Lambda_1) \otimes \Lambda_2$ é um idempotente de separabilidade e H é separável.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)**: Lema 3.3.3. □

Observação 3.3.10. Aqui cabe observar que a condição (**iii**) pode ser substituida por: **(iii')** Existe uma integral à esquerda λ em H tal que $\varepsilon(\lambda) \neq 0$.
Isso porque, pelo item (**iv**) da Proposição 3.2.7 temos $\varepsilon \circ S = \varepsilon$ e ainda, do fato que $S(\mathcal{I}_l(H)) = \mathcal{I}_r(H)$, onde $\mathcal{I}_l(H)$ e $\mathcal{I}_r(H)$ denotam os espaços das integrais à esquerda e à direita em H respectivamente.

Exemplo 3.3.11. Notemos que se G é um grupo finito e $H = \Bbbk G$, então temos que $\sum\limits_{g \in G} g$ é uma integral à esquerda em H. Ainda mais, $\varepsilon(\sum\limits_{g\in G} g) = \sum\limits_{g\in G} \varepsilon(g) = \sum\limits_{g\in G} 1_{\Bbbk} = |G|1_{\Bbbk}$, onde $|G|$ é a ordem do grupo G. Pelo teorema acima, temos que se $|G|1_{\Bbbk} \neq 0$, então $H = \Bbbk G$ é semissimples. Mas, $|G|1_{\Bbbk} \neq 0$ se, e somente se, a ordem de G não divide a característica do corpo $\Bbbk$. Isso, mais uma vez comprova um resultado já visto para a álgebra de grupo $\Bbbk G$ no Corolário 2.1.10.

Exemplo 3.3.12. Consideremos agora a álgebra de Taft $T_N(q)$ dada no Exemplo 3.2.6. Vejamos que $\Lambda_l = \sum_{j=0}^{N-1} g^j x^{N-1} \in \mathcal{I}_l(T_N(q))$ e $\Lambda_r = \sum_{j=0}^{N-1} q^j g^j x^{N-1} \in \mathcal{I}_r(T_N(q))$. De fato,

$$\begin{aligned} g\Lambda_l = g\sum_{j=0}^{N-1} g^j x^{N-1} &= \sum_{j=0}^{N-1} gg^j x^{N-1} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} g^i x^{N-1} \\ &= 1\sum_{i=0}^{N-1} g^i x^{N-1} = \varepsilon(g)\Lambda_l \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x\Lambda_l = x\sum_{j=0}^{N-1} g^j x^{N-1} &= \sum_{j=0}^{N-1} xg^j x^{N-1} \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{j=0}^{N-1} q^{-j} g^j x x^{N-1} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} g^j x^N = 0 = \varepsilon(x)\Lambda_l. \end{aligned}$$

Onde $(*)$ vem do fato que $xg = q^{-1}gx$.
Como g e x geram $T_N(q)$ como álgebra e ε é homomorfismo de álgebras segue que para todo $h \in T_N(q)$, $h\Lambda_l = \varepsilon(h)\Lambda_l$.
Para Λ_r temos,

$$\Lambda_r x = \sum_{j=0}^{N-1} q^j g^j x^{N-1} x = \sum_{j=0}^{N-1} q^j g^j x^N = 0 = \varepsilon(x)\Lambda_r,$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda_r g &= \sum_{j=0}^{N-1} q^j g^j x^{N-1} g \\ &\overset{(**)}{=} \sum_{j=0}^{N-1} q^j g^j q^{-N+1} g x^{N-1} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} (q^N)^{-1} q^{j+1} g^{j+1} x^{N-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{N-1} q^{j+1} g^{j+1} x^{N-1} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} q^j g^j x^{N-1} = \varepsilon(g)\Lambda_r.
\end{aligned}
$$

Onde $(**)$ vem novamente de $xg = q^{-1}gx$. Pois,

$$
\begin{aligned}
x^{N-1}g &= x^{N-2}xg \\
&= x^{N-2}q^{-1}gx \\
&= q^{-1}x^{N-3}xgx \\
&= q^{-2}x^{N-4}xgx^2 \\
&\vdots \\
&= q^{-N+1}gx^{N-1}.
\end{aligned}
$$

Observamos que:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_l g &= \sum_{j=0}^{N-1} g^j x^{N-1} g \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} g^j q^{-N+1} g x^{N-1} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} q g^{j+1} x^{N-1} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} q g^j x^{N-1} = q\Lambda_l,
\end{aligned}
$$

ou seja, $\Lambda_l \notin \mathcal{I}_r(T_N(q))$.
Notemos que $dim T_N(q) < \infty$, logo $dim\mathcal{I}_l(T_N(q)) = 1$ (ver Corollary 5.2.6 de [2]). Como $0 \neq \Lambda_l \in \mathcal{I}_l(T_N(q))$, segue que Λ_l gera $\mathcal{I}_l(T_N(q))$. Ainda temos que:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\sum_{j=0}^{N-1} g^j x^{N-1}) &= \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon(g^j x^{N-1}) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon(g^j)\varepsilon(x^{N-1}) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} 1\varepsilon(x)^{N-1}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} 0 = 0.$$

Portanto, $\varepsilon(t) = 0$ para todo $t \in \mathcal{I}_l(T_N(q))$, pois ε é $\Bbbk$-linear. Assim, pelo Teorema de Maschke segue que $T_N(q)$ não é semissimples.

Como uma álgebra de Hopf possui estrutura de álgebra e de coálgebra, surge uma versão "dual" deste teorema, ou seja, um Teorema de Maschke que diz respeito a cossemissimplicidade de uma álgebra de Hopf. No que segue usaremos a notação H^* para denotar o dual algébrico do espaço vetorial H, ou seja, $H^* = \{f : H \to \Bbbk \mid f$ é uma transformação linear $\}$.

Vejamos agora mais alguns exemplos de comódulos e lemas técnicos que servirão de ferramentas para a demonstração do Teorema de Maschke para coálgebras.

Exemplo 3.3.13. Seja H uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf. Então, $\Bbbk$ é um H-comódulo à direita via: $\rho : \Bbbk \to \Bbbk \otimes H$ definida por: $\rho(k) = k \otimes 1_H$, $k \in \Bbbk$. De fato, temos que:
$(id_\Bbbk \otimes \Delta)\rho(k) = (id_\Bbbk \otimes \Delta)(k \otimes 1) = k \otimes 1 \otimes 1$ e
$(\rho \otimes id_H)\rho(k) = (\rho \otimes id_H)(k \otimes 1) = k \otimes 1 \otimes 1$,
para todo $k \in \Bbbk$. Logo vale $(id_\Bbbk \otimes \Delta)\rho = (\rho \otimes id_H)\rho$.
Agora $(id_\Bbbk \otimes \varepsilon)\rho(k) = (id_\Bbbk \otimes \varepsilon)(k \otimes 1) = k \otimes \varepsilon(1) = k \otimes 1 = \psi(k)$, no qual ψ denota o isomorfismo $H \cong \Bbbk \otimes H$. Portanto $\Bbbk$ é um H-comódulo à direita.

Exemplo 3.3.14. Sejam H uma álgebra de Hopf e M um H-comódulo à direita. Para todo H-comódulo à direita Q, o produto tensorial $M \otimes Q$ é um H-comódulo à direita via $\rho : M \otimes Q \to M \otimes Q \otimes H$ dada por: $\rho(m \otimes q) = \sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes m_{(1)} q_{(1)}$ para todo $m \in M$, $q \in Q$.

De fato, sendo M e Q H-comódulos à direita temos as seguintes igualdades:

$$\sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2 = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)}; \tag{3.3}$$

$$\sum \varepsilon(m_{(1)}) m_{(0)} = m; \tag{3.4}$$

$$\sum (q_{(0)})_{(0)} \otimes (q_{(0)})_{(1)} \otimes q_{(1)} = \sum q_{(0)} \otimes (q_{(1)})_1 \otimes (q_{(1)})_2 = \sum q_{(0)} \otimes q_{(1)} \otimes q_{(2)}; \tag{3.5}$$

$$\sum \varepsilon(q_{(1)}) q_{(0)} = q. \tag{3.6}$$

Queremos mostrar que valem:

$$(\rho \otimes id_H) \circ \rho = (id_{M\otimes Q} \otimes \Delta) \circ \rho \quad \text{e} \tag{3.7}$$

$$(\varphi \circ (id_{M\otimes Q} \otimes \varepsilon) \circ \rho)(m \otimes q) = m \otimes q, \quad \forall m \in M, q \in Q \tag{3.8}$$

Vejamos (3.7). Por um lado temos:

$$\begin{aligned}
((\rho \otimes id_H) \circ \rho)(m \otimes q) &= (\rho \otimes id_H)(\sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes m_{(1)}q_{(1)}) \\
&= \sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (q_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)}(q_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)}q_{(1)} \\
&= \sum m_{(0)} \otimes (q_{(0)})_{(0)} \otimes m_{(1)}(q_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(2)}q_{(1)} \quad \text{(por (3.3))} \\
&= \sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes m_{(1)}q_{(1)} \otimes m_{(2)}q_{(2)} \quad \text{(por (3.5))}.
\end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned}
((id_{M\otimes Q} \otimes \Delta) \circ \rho)(m \otimes q) &= (id_{M\otimes Q} \otimes \Delta)(\sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes m_{(1)}q_{(1)}) \\
&= \sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes (m_{(1)}q_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)}q_{(1)})_2 \\
&= \sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1(q_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2(q_{(1)})_2 \ (\Delta \text{ de álg.}) \\
&= \sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes m_{(1)}(q_{(1)})_1 \otimes m_{(2)}(q_{(1)})_2 \quad \text{(por (3.3))} \\
&= \sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes m_{(1)}q_{(1)} \otimes m_{(2)}q_{(2)} \quad \text{(por (3.5))}.
\end{aligned}$$

Portanto vale (3.7). Finalmente vale (3.8) pois,

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ (id_{M\otimes Q} \otimes \varepsilon) \circ \rho)(m \otimes q) &= (\varphi \circ (id_{M\otimes Q} \otimes \varepsilon))(\sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes m_{(1)}q_{(1)}) \\
&= \varphi(\sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes \varepsilon(m_{(1)}q_{(1)}) \\
&= \varphi(\sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes \varepsilon(m_{(1)})\varepsilon(q_{(1)}) \quad (\varepsilon \text{ é de álgebras}) \\
&= \sum m_{(0)} \otimes q_{(0)}\varepsilon(m_{(1)})\varepsilon(q_{(1)}) \quad (\text{isomorfismo } \varphi) \\
&= \sum \varepsilon(m_{(1)})m_{(0)} \otimes \varepsilon(q_{(1)})q_{(0)} \\
&= m \otimes q \quad \text{(por (3.4) e (3.6))}.
\end{aligned}$$

Logo $M \otimes Q$ é H-comódulo à direita.

Exemplo 3.3.15. Sejam H uma álgebra de Hopf e M um H-comódulo à direita. Então, $M \otimes H$ é um H-comódulo à direita via $\rho(m \otimes h) = \sum m_{(0)} \otimes h_1 \otimes m_{(1)}h_2$ e um H-módulo à direita via $(m \otimes h)g = m \otimes hg$ (denotaremos por α tal ação) e vale $\rho((m \otimes g)h) = \sum (m \otimes g)_{(0)}h_1 \otimes (m \otimes g)_{(1)}h_2$, para todo $m \in M$, $h, g \in H$.

Vejamos que $M \otimes H$ é um H-módulo à direita, isto é, que valem:

$$\alpha \circ (\alpha \otimes id_H) = \alpha \circ (id_{M \otimes H} \otimes M) \quad \text{e} \tag{3.9}$$

$$\alpha \circ (id_{M \otimes H} \otimes u) = \varphi \tag{3.10}$$

Onde $\varphi(m \otimes h \otimes k) = m \otimes hk$ é o isomorfismo natural. De fato,

$$\alpha \circ (\alpha \otimes id_H)(x \otimes f \otimes g \otimes h) = x \otimes (fg)h;$$

$$\alpha \circ (id_{M \otimes H} \otimes M)(x \otimes f \otimes g \otimes h) = x \otimes f(gh).$$

Sendo H associativa temos que vale (3.9).
$\alpha \circ (id_{M \otimes H} \otimes u)(m \otimes h \otimes k) = \alpha(m \otimes h \otimes k1_H) = m \otimes hk = \varphi(m \otimes h \otimes k)$, logo vale (3.10).

Como M é H-comódulo à direita e H é H-comódulo à direita via Δ, pelo exemplo anterior segue que $M \otimes H$ é um H-comódulo à direita via: $\rho(m \otimes h) = \sum m_{(0)} \otimes h_1 \otimes m_{(1)} h_2$.

Temos ainda que para todo $m \in M$, $g, h \in H$, vale:

$$\begin{aligned}
\rho((m \otimes g)h) &= \rho(m \otimes gh) \\
&= \sum m_{(0)} \otimes (gh)_1 \otimes m_{(1)}(gh)_2 \\
&= \sum m_{(0)} \otimes g_1 h_1 \otimes m_{(1)} g_2 h_2 \quad (\Delta \text{ é hom. de álgebras}) \\
&= \sum (m_{(0)} \otimes g_1) h_1 \otimes m_{(1)} g_2 h_2 \\
&= \sum ((m_{(0)} \otimes g_1) h_1) \otimes m_{(1)} g_2 h_2 \\
&= \sum (m \otimes g)_{(0)} h_1 \otimes (m \otimes g)_{(1)} h_2.
\end{aligned}$$

Lema 3.3.16. *Se Q é um H-comódulo injetivo, então $M \otimes Q$ é um H-comódulo injetivo.*

Demonstração. De fato, como Q é injetivo, pela Proposição 3.1.18, Q é um somando direto de $H^{(I)}$, para um certo conjunto de indíces I, como H-comódulo à direita, digamos $H^{(I)} \cong Q \oplus X$. Então, $(M \otimes H)^{(I)} \cong (M \otimes Q) \oplus (M \otimes X)$. Agora, pela Proposição 3.1.15, $M \otimes Q$ será injetivo se mostrarmos que $M \otimes H$ é H-comódulo à direita injetivo. Mas isso é equivalente a mostramos que $M \otimes H$ é um H-comódulo à direita via $\rho(m \otimes h) = \sum m_{(0)} \otimes h_1 \otimes m_{(1)} h_2$ e um H-módulo à direita via $(m \otimes h)g = m \otimes hg$ e que vale $\rho((m \otimes g)h) = \sum (m \otimes g)_{(0)} h_1 \otimes (m \otimes g)_{(1)} h_2$, para todo $m \in M$, $h, g \in H$. Assim, pelo Exemplo 3.3.15 segue que $M \otimes H$ é H-comódulo à direita injetivo. $\square$

Lema 3.3.17. *Seja M um H-comódulo à direita onde H é uma álgebra de Hopf. Então $idim_H(M) \leq idim_H(\Bbbk)$.*

Demonstração. Seja $0 \to \Bbbk \longrightarrow Q_0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow \cdots$ uma resolução injetiva (mínima) para o H-comódulo $\Bbbk$, e M um H-comódulo à direita. Para todo H-comódulo à direita Q, pelo Exemplo 3.3.14, temos que $M \otimes Q$ é um H-comódulo à direita via: $\rho(m \otimes q) =$

$\sum m_{(0)} \otimes q_{(0)} \otimes m_{(1)} q_{(1)}$ para todo $m \in M$, $q \in Q$. Tensorizando a resolução acima obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 \to M \cong M \otimes \Bbbk \longrightarrow M \otimes Q_0 \longrightarrow M \otimes Q_1 \longrightarrow \cdots$$

na qual, cada $M \otimes Q_i$ é injetivo pelo Lema 3.3.16. Observemos que a sequência é exata pois, M é um $\Bbbk$-espaço vetorial e assim, M é um módulo plano (ver, por exemplo, [16] página 131). Portanto, a sequência acima é uma resolução injetiva de M, logo $idim_H(M) \leq idim_H(\Bbbk)$. □

Teorema 3.3.18 (Teorema de Maschke para Coálgebras). *Seja H uma álgebra de Hopf. São equivalentes:*

(i) *H é cossemissimples (como coálgebra);*

(ii) *$\Bbbk$ é um H-comódulo à direita (à esquerda) injetivo;*

(iii) *Existe uma integral à direita (à esquerda) t sobre H satisfazendo $t(1_H) = 1_\Bbbk$.*

Demonstração. (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) Suponhamos H cossemissimples, ou seja, $H = H_0$ então, pelo Teorema 3.1.22 temos que todo H-comódulo à direita é injetivo. Como $\Bbbk$ tem estrutura de H-comódulo à direita (Exemplo 3.3.13) temos o resultado.
(**ii**) $\Rightarrow$ (**i**) Por hipótese, $\Bbbk$ é um H-comódulo à direita (à esquerda) injetivo, logo se M é um H-comódulo, pelo Lema 3.3.17 temos que $idim_H(M) \leq idim_H(\Bbbk)$ mas, $\Bbbk$ é injetivo e assim pelo Exemplo 1.1.14 temos que $idim_H(\Bbbk) = 0$. Logo $idim_H(M) = 0$, o que nos diz que M é um H-comódulo injetivo. Mostramos assim, que todo H-comódulo é injetivo donde, pelo Teorema 3.1.22, conclui-se que H é cossemissimples.
(**ii**) $\iff$ (**iii**) Considere $\eta : \Bbbk \to H$ (a unidade da álgebra H) que é um monomorfismo de H-comódulos à direita, assim temos que $\Bbbk$ é injetivo se, e somente se, existe um homomorfismo de H-comódulos a direita tal que $t \circ \eta = id_\Bbbk$. Como t é um homomorfismo de H-comódulos então satisfaz: $\rho \circ t = (t \otimes id_H) \circ \Delta$ donde $\sum t(x_1)x_2 = t(x)1_H$. Logo, pelo Lema 3.3.5, t é uma integral à direita que satisfaz $t(1_H) = t(\eta(1_\Bbbk)) = 1_\Bbbk$.
Agora se t é uma integral à direita tal que $t(1_H) = 1_\Bbbk$, temos que $(t \circ \eta)(k) = t(k1_H) = kt(1_H) = k = id_\Bbbk(k)$ para todo $k \in \Bbbk$, ou seja, $t \circ \eta = id_\Bbbk$. Logo $\Bbbk$ é injetivo. □

Observação 3.3.19. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então, H é cossemissimples se, e somente se, H^* é semissimples se, e somente se, existe uma integral à direita λ sobre H tal que $\lambda(1) \neq 0$.*

Capítulo 4

Teorema de Maschke para o Produto Smash

Neste capítulo vamos definir uma ação de uma álgebra de Hopf H em uma $\Bbbk$-álgebra A para a partir daí, definirmos o produto smash denotado por $A\#H$. Na Proposição 4.1.8 provaremos que o produto smash é uma generalização para álgebras de Hopf do skew anel de grupo, definido no Capítulo 2. Continuaremos denotando por $\Bbbk$ para um corpo e H para uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf com comultiplicação Δ, counidade ε e antípoda S. Mais detalhes e resultados em relação a este capítulo o leitor pode ver nas referências [2] e [14].

4.1 Módulo Álgebra e Produto Smash

Definição 4.1.1. *Dizemos que H **age** em uma álgebra A (ou que A é um H-**módulo álgebra** à esquerda) se as seguintes condições são satisfeitas:*
(MA1) *A é um H-módulo à esquerda (com a ação de $h \in H$ em $a \in A$ denotada por $h \cdot a$);*
(MA2) *$h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$, para todo $h \in H$ e $a, b \in A$;*
(MA3) *$h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$, para todo $h \in H$.*

Define-se H-módulo álgebra à direita de maneira similar. Agora, seja A uma $\Bbbk$-álgebra a qual é também um H-módulo à esquerda com estrutura dada por:

$$\upsilon : H \otimes A \to A, \ \upsilon(h \otimes a) = h \cdot a.$$

Pelo Teorema 1.3.11 temos que o isomorfismo

$$\tau : Hom(H \otimes A, A) \to Hom(A, Hom(H, A)),$$

associa a cada $\varphi \in Hom(H \otimes A, A)$ o elemento $\tau(\varphi)(a) \in Hom(H, A)$ que age sobre H do seguinte modo: $\tau(\varphi)(a)(h) = \varphi(h \otimes a)$, para todo $h \in H$.

Denote por $\psi : A \to Hom(H, A)$ a aplicação correspondente para υ pela bijeção τ acima, isto é, $\psi(a)(h) = \upsilon(h \otimes a)$ para todo $a \in A$, $h \in H$.

Proposição 4.1.2. *Com as notações acima, A é um H-módulo álgebra se, e somente se, ψ é um homomorfismo de álgebras.*

Demonstração. Se A é um H-módulo álgebra segue que existe $\upsilon : H \otimes A \to A$ tal que valem **(MA1)**, **(MA2)** e **(MA3)** e considere a bijeção acima $\psi : A \to Hom(H, A)$ com $\upsilon(h \otimes a) = \psi(a)(h)$, para todo $h \in H$ e $a \in A$. Vejamos que ψ é um homomorfismo de álgebras. Para todo $h \in H$ e $a \in A$ temos:
(1º) $\psi(ab) = \psi(a) * \psi(b)$. De fato,

$$\begin{aligned} \psi(ab)(h) &= \upsilon(h \otimes ab) \\ &= \sum \upsilon(h_1 \otimes a)\upsilon(h_2 \otimes b) \\ &= \sum \psi(a)(h_1)\psi(b)(h_2) \\ &= (\psi(a) * \psi(b))(h). \end{aligned}$$

(2º) $\psi(1_A) = 1_{Hom(H,A)}$. De fato,

$$\psi(1_A)(h) = \upsilon(h \otimes 1_A) = \varepsilon(h)1_A.$$

Reciprocamente, suponhamos $\psi : A \to Hom(H, A)$ um homomorfismo de álgebras. Da bijeção τ e de $\psi(ab) = \psi(a) * \psi(b)$ temos:

$$\begin{aligned} h \cdot (ab) &= \upsilon(h \otimes ab) \\ &= \psi(ab)(h) \\ &= (\psi(a) * \psi(b))(h) \\ &= \sum(\psi(a)(h_1))(\psi(b)(h_2)) \\ &= \sum \upsilon(h_1 \otimes a)(h_2 \otimes b) \\ &= \sum(h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b). \end{aligned}$$

Agora, de $\psi(1_A) = 1_{Hom(H,A)}$ obtemos

$$h \cdot 1_A = \upsilon(h \otimes 1_A) = \psi(1_A)(h) = 1_{Hom(H,A)}(h) = \varepsilon(h)1_A.$$

□

Lema 4.1.3. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra a qual é um H-módulo à esquerda tal que **(MA2)** é satisfeita. Então, para todo $a, b \in A$ e $h \in H$ tem-se:*

- ***(i)*** $(h \cdot a)b = \sum h_1 \cdot (a(S(h_2) \cdot b))$;
- ***(ii)*** *Se S é bijetiva, então* $a(h \cdot b) = \sum h_2 \cdot ((S^{-1}(h_1) \cdot a)b)$.

Demonstração. A demonstração segue basicamente de **(MA2)** e da tradução do diagrama da definição de Álgebra de Hopf. Temos,

$$\begin{aligned}
\sum h_1 \cdot (a(S(h_2) \cdot b)) &= \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot (S(h_3) \cdot b)) \\
&= \sum (h_1 \cdot a)(h_2 S(h_3) \cdot b) \\
&= \sum (h_1 \cdot a)((\varepsilon(h_2) 1_H) \cdot b) \\
&= (\sum (h_1 \cdot a)\varepsilon(h_2))(1_H \cdot b) \\
&= (\sum (h_1 \varepsilon(h_2)) \cdot a) b \\
&= (h \cdot a) b,
\end{aligned}$$

o que prova **(i)**. Também temos que:

$$\begin{aligned}
\sum h_2 \cdot ((S^{-1}(h_1) \cdot a) b) &= \sum (h_3 \cdot ((S^{-1}(h_2) \cdot a))(h_1 \cdot b) \\
&= \sum (h_3 (S^{-1}(h_2) \cdot a))(h_1 \cdot b) \\
&= \sum (\varepsilon(h_2) 1_H \cdot a)(h_1 \cdot b) \\
&= \sum a((\varepsilon(h_2) h_1) \cdot b) \\
&= a(h \cdot b),
\end{aligned}$$

o que prova **(ii)**. □

Definição 4.1.4. *Seja A um H-módulo álgebra. Chamaremos de* ***álgebra dos invariantes*** *ao conjunto:*

$$A^H = \{a \in A : h \cdot a = \varepsilon(h) a, \forall h \in H\}.$$

Observemos que A^H é uma $\Bbbk$-subálgebra de A. Com efeito, sejam $a, b \in A^H$,

$$h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) = \sum \varepsilon(h_1) a \varepsilon(h_2) b = \sum \varepsilon(h_1)\varepsilon(h_2) ab = \varepsilon(h_1 \varepsilon(h_2)) ab = \varepsilon(h) ab.$$

Logo, $ab \in A^H$, para todo $h \in H$.

Uma outra álgebra associada a uma ação de álgebra de Hopf H em uma álgebra A é a seguinte:

Definição 4.1.5. *Se A é um H-módulo álgebra, o* ***produto smash*** *de A por H, denotado por $A\#H$, é, como espaço vetorial, $A\#H = A \otimes H$, junto com a seguinte operação: (aqui denotamos um elemento $a \otimes h$ por $a\#h$)*

$$(a\#h)(b\#g) = \sum a(h_1 \cdot b)\#h_2 g$$

para todo $a, b \in A$ e $g, h \in H$.

Proposição 4.1.6. ***(i)*** *$A\#H$, junto com a multiplicação definida acima, é uma $\Bbbk$-álgebra com unidade dada por $1_A\#1_H$;*

(ii) *As aplicações $a \mapsto a\#1_H$ e $h \mapsto 1_A\#h$ são monomorfismos de $\Bbbk$-álgebras de A, respectivamente H, em $A\#H$;*

Demonstração. (**i**) Vejamos que $A\#H$ é associativa, isto é, $m(m \otimes id) = m(id \otimes m)$. Por um lado temos,

$$\begin{aligned} m(m \otimes id)((a\#h) \otimes (b\#g) \otimes (c\#e)) &= m((a(h_1 \cdot b)\#h_2g) \otimes (c\#e)) \\ &= a(h_1 \cdot b)((h_2g)_1 \cdot c)\#(h_2g)_2e \\ &= a(h_1 \cdot b)((h_2g_1) \cdot c)\#h_3g_2e, \end{aligned}$$

e por outro,

$$\begin{aligned} m(m \otimes id)((a\#h) \otimes (b\#g) \otimes (c\#e)) &= m((a\#h) \otimes (b(g_1 \cdot c))\#g_2e) \\ &= a(h_1 \cdot (b(g_1 \cdot c)))\#h_2g_2e \\ &= a((h_{1_1} \cdot b)(h_{1_2} \cdot (g_1 \cdot c)))\#h_2g_2e \\ &= a(h_1 \cdot b)(h_2 \cdot (g_1 \cdot c))\#h_3g_2e \\ &= a(h_1 \cdot b)(h_2g_1) \cdot c)\#h_3g_2e. \end{aligned}$$

Logo $A\#H$ é associativa. Vejamos agora a unidade de $A\#H$.

$$(a\#h)(1_A\#1_H) = a(h_1 \cdot 1_A)\#h_21_H = a\varepsilon(h_1)1_A\#h_2 = a\#\varepsilon(h_1)h_2 = a\#h;$$

$$(1_A\#1_H)(a\#h) = 1_A(1_H \cdot a)\#1_Hh = 1_Aa\#h = a\#h,$$

para todo $a \in A$ e $h \in H$. Portanto, $A\#H$ é uma $\Bbbk$-álgebra com unidade $1_A\#1_H$.

(**ii**) Denotando por p a aplicação $a \mapsto a\#1_H$, iniciamos mostrando que p é um homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras, isto é, $m_{A\#H} \circ (p \otimes p) = p \circ m_A$ e $(p \circ \eta_A) = \eta_{A\#H}$. De fato,

$$\begin{aligned} (m_{A\#H} \circ (p \otimes p))(a \otimes b) &= m_{A\#H}((a\#1_H) \otimes (b\#1_H)) \\ &= (a\#1_H)(b\#1_H) \\ &= (ab\#1_H) \\ &= p(ab) \\ &= (p \circ m_A)(a \otimes b), \end{aligned}$$

além disso,

$$(p \circ \eta_A)(k) = p(k1_A) = k1_A\#1_H = k(1_A\#1_H) = \eta_{A\#H}(k).$$

Analogamente, mostra-se que $h \mapsto 1_A \# h$ é um homomorfismo de álgebras. Agora, seja $a \in A$ tal que $a \in Ker(p)$. Vejamos que $a = 0$. Sabemos que se $\{a_i\}_{i \in I}$ e $\{h_j\}_{j \in J}$ são $\Bbbk$-bases de A e H respectivamente, então $\{a_i \otimes h_j\}_{i,j}$ é uma $\Bbbk$-base de $A \otimes H$. Assim se $a \in A$, então existem $\lambda_i \in \Bbbk$, $i \in I$, tais que $a = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$, além disso, desde que $1_H \neq 0$ existem $\alpha_j \in \Bbbk$, $j \in J$, nem todos nulos tais que $1_H = \sum_{j \in J} \alpha_j h_j$. Assim, se $a \# 1_H = 0$,

$$0 = a \# 1_H = \sum_{i \in I, j \in J} \lambda_i \alpha_j (a_i \otimes h_j),$$

então $\lambda_i \alpha_j = 0$, para todo $i \in I$ e $j \in J$. Como existe $j_0 \in J$ tal que $\alpha_{j_0} \neq 0$ segue-se que $\lambda_i \alpha_{j_0} = 0$ para todo $i \in I$. Assim, $\lambda_i = 0$ para todo $i \in I$, ou seja, $a = 0$. Logo p é um monomorfismo. Analogamente prova-se que $1_A \# h = 0$ implica $h = 0$. □

Lema 4.1.7. *Se A é um H-módulo álgebra e S é bijetiva, então*

$$a \# h = \sum (1_A \# h_2)(S^{-1}(h_1) \cdot a \# 1_H).$$

Demonstração. De fato, pela definição do produto smash temos:

$$\begin{aligned}
\sum (1_A \# h_2)(S^{-1}(h_1) \cdot a \# 1_H) &= \sum 1_A (h_{2_1} \cdot (S^{-1}(h_1) \cdot a)) \# h_{2_2} 1_H \\
&= \sum h_2 \cdot (S^{-1}(h_1) \cdot a)) \# h_3 \\
&= \sum h_2 S^{-1}(h_1) \cdot a \# h_3 \\
&= \sum \varepsilon(h_1) 1_H \cdot a \# h_2 \\
&= \sum 1_H \cdot a \# \varepsilon(h_1) h_2 \\
&= a \# h.
\end{aligned}$$

□

Agora vamos considerar as relações entre a ação de um grupo G sobre uma $\Bbbk$-álgebra com unidade A e os $\Bbbk G$-módulos álgebra. Neste sentido temos o seguinte resultado:

Proposição 4.1.8. *Sejam G um grupo e A uma $\Bbbk$-álgebra com unidade. Então, dada uma ação de G sobre A temos que A é um $\Bbbk G$-módulo álgebra. Reciprocamente, se A é um $\Bbbk G$-módulo álgebra, temos uma ação do grupo G sobre A.*

Demonstração. Suponhamos $\alpha : G \to Aut_{\Bbbk}(A)$ uma ação de G sobre A. Assim, a ação definida por:

$$g \cdot a := \alpha_g(a)$$

torna A um $\Bbbk G$-módulo álgebra à esquerda.
Reciprocamente, digamos que A é um $\Bbbk G$-módulo álgebra à esquerda. Assim, temos para todo $a, b \in A$ valem:

$$a = 1 \cdot a = g \cdot (g^{-1} \cdot a) = g^{-1} \cdot (g \cdot a);$$

$$g \cdot (a+b) = g \cdot a + g \cdot b;$$

$$g \cdot (ab) = (g \cdot a)(g \cdot b).$$

Logo, definindo α_g por:

$$\alpha_g(a) = g \cdot a, \quad \forall a \in A,$$

temos que $\alpha_g \in Aut_{\Bbbk}(A)$ para todo $g \in G$. Finalmente, a aplicação $\alpha : G \to Aut_{\Bbbk}(A)$ dada por $g \mapsto \alpha_g : A \to A$, onde $\alpha(g)(a) = \alpha_g(a) := g \cdot a$ é um homomorfismo de grupos. De fato,

$$\alpha_g(\alpha_h(a)) = \alpha_g(h \cdot a) = g \cdot (h \cdot a) = (gh) \cdot a = \alpha_{gh}(a), \forall a \in A.$$

Portanto, α é uma ação de G sobre A. □

Observemos que nesta situação, a multiplicação no produto smash é

$$(a\#g)(b\#h) = a(g \cdot b)\#gh = a\alpha_g(b)\#gh.$$

Ou seja, para a álgebra de Hopf $\Bbbk G$, o produto smash é simplesmente o skew anel de grupo definido no Exemplo 2.1.5.

4.2 Teorema de Maschke

Teorema 4.2.1 (Teorema de Maschke para o Produto Smash)**.** *Sejam H uma álgebra de Hopf semissimples de dimensão finita, A um H-módulo álgebra à esquerda, V um $A\#H$-módulo e W um $A\#H$-submódulo de V. Se W é um somando direto em V como A-módulos, então também é um somando direto de V como $A\#H$-módulos.*

Demonstração. Como H é semissimples e $dimH < \infty$ estamos nas condições do Teorema de Maschke 3.3.9. Logo existe uma integral à esquerda t em H tal que $\varepsilon(t) = 1$ e, mais ainda, nestas condições a antípoda S é bijetiva. Seja $\lambda : V \to W$ a projeção como A-módulos e $t \in H$ a integral à esquerda descrita acima. Definamos $\lambda' : V \to W$ por:

$$\lambda'(v) = \sum (1\#S(t_1))\lambda((1\#t_2)v), \text{ para todo } v \in V.$$

Desta forma temos que λ' é uma projeção como $A\#H$-módulos. De fato, vejamos que λ' é $A\#H$-linear. Desde que S é bijetiva podemos usar tensores da forma $a\#S(h)$ para representar um elemento arbitrário de $A\#H$. Temos,

$$\begin{aligned}
(a\#S(h))\lambda'(v) &= (a\#S(h))\sum(1\#S(t_1))\lambda((1\#t_2)v) \\
&= \sum[(a\#S(h))(1\#S(t_1))]\lambda((1\#t_2)v) \\
&= \sum[(a(S(h)_1 \cdot 1)\#(S(h)_2 S(t_1))]\lambda((1\#t_2)v)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum[(a\varepsilon(S(h)_1)1)\#(S(h)_2S(t_1))]\lambda((1\#t_2)v)\\
&\overset{(1)}{=} \sum(a\#\varepsilon(S(h)_1))(S(h)_2S(t_1))\lambda((1\#t_2)v)\\
&\overset{(2)}{=} \sum(a\#S(h)S(t_1))\lambda((1\#t_2)v)\\
&= \sum(a\#S(t_1h))\lambda((1\#t_2)v)\\
&= \sum(a\#S(t_1h_1))\lambda((1\#t_2h_2S(h_3))v)\\
&\overset{(3)}{=} \sum(a\#S(\varepsilon(h_1)t_1))\lambda((1\#t_2\varepsilon(h_2)S(h_3))v)\\
&= \sum(a\#S(t_1))\lambda((1\#t_2\varepsilon(h_1)S(\varepsilon(h_2)h_3))v)\\
&= \sum(a\#S(t_1))\lambda((1\#t_2S(h))v)\\
&\overset{(4)}{=} \sum(1_A\#S(t_1)_2)(S^{-1}(S(t_1)_1)\cdot a\#1_H)\lambda((1\#t_2S(h))v)\\
&= \sum(1_A\#S(t_{1_2}))(S^{-1}(S(t_{1_1}))\cdot a\#1_H)\lambda((1\#t_2S(h))v)\\
&= \sum(1_A\#S(t_1))(t_2\cdot a\#1_H)\lambda((1\#t_3S(h))v)\\
&\overset{(5)}{=} \sum(1_A\#S(t_1))\lambda((t_2\cdot a\#1_H)(1\#t_3S(h))v)\\
&= \sum(1_A\#S(t_1))\lambda((t_2\cdot a\#t_3S(h))v)\\
&= \sum(1_A\#S(t_1))\lambda((1\#t_2)(a\#S(h))v)\\
&= \lambda'((a\#S(h))v).
\end{aligned}
$$

Justificativas:

(1) Definição de ação.

(2) Por (**i**) da Proposição 3.2.7.

(3) Pelo Lema 3.3.7.

(4) Pelo Lema 4.1.7.

(5) Pelo fato de λ ser A-linear.

Logo λ' é $A\#H$-linear. Vejamos agora que λ' satisfaz as condições de uma projeção. Primeiro notemos que, se $w \in W$, então $(1\#t_2)w \in W$ e portanto $\lambda((1\#t_2)w) = (1\#t_2)w$. Temos assim que para todo $w \in W$:

$$
\begin{aligned}
\lambda'(w) &= \sum(1\#S(t_1))\lambda((1\#t_2)w)\\
&= \sum(1\#S(t_1))((1\#t_2)w)\\
&= \sum(1\#S(t_1))(1\#t_2)w\\
&= \sum(S(t_1)_1\cdot 1)\#S(t_1)_2t_2)w\\
&= \sum(\varepsilon(S(t_1)_1)\#S(t_1)_2t_2)w\\
&= \sum(1\#\varepsilon(S(t_1)_1)S(t_1)_2t_2)w\\
&= \sum(1\#S(t_1)t_2)w
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1\#\varepsilon(t))w \\
&= (1\#1)w \\
&= w.
\end{aligned}
$$

Logo, $V = W \oplus Ker(\lambda^{'})$ onde $Ker(\lambda^{'})$ é um $A\#H$-submódulo de V, e a demonstração está completa. $\square$

Conclusão

Começamos observando que os pré-requisitos para se chegar a versão original do teorema de Maschke são relativamente simples e podem ser vistos em cursos de álgebras introdutórios. No entanto as generalizações obtidas em alguns campos da álgebra exigem conhecimento adicional da área, mas que dominada as técnicas iniciais observa-se que, mesmo em contextos mais gerais, não necessitamos de um grande aprofundamento na teoria para enunciar e demonstrar teoremas similares, os chamados teorema tipo-Maschke. O maior ganho com estes teoremas vem do fato de que muitas estruturas algébricas que satisfazem certas condições podem ser vistas como sendo somas de algumas de suas subestruturas mais simples (isto ocorre quando uma estrutura algébrica é por exemplo semissimples) e com isso são mais facilmente estudadas e classificadas. Percebemos assim que cada versão destes teoremas assume posição de destaque na teoria em que se está desenvolvendo e por conseguinte, vários resultados são obtidos em decorrência de seu uso.

Percebemos também a existência de um padrão para que um teorema possa ser considerado "tipo-Maschke". Esse padrão pode ser encontrado tanto nos enunciados quanto nas suas demonstrações, como se pode observar nas versões apresentadas neste trabalho. Nas versões aqui apresentadas verificamos que estas possuem, em suas provas, sempre a mesma ideia original devida ao matemático alemão Heinrich Maschke, que percebeu que, se V um A-módulo à esquerda e W um A-submódulo de V então, W é um somando direto de V se, e somente se, existe uma A-projeção $\pi : V \to W$. Devido a este fato, em quase todas as demonstrações dos teoremas tipo-Maschke é indispensável apresentarmos uma projeção adequada entre A-módulos que compõem a estrutura a ser estudada. Este lema passou a ser indispensável a todo o resto do trabalho e considerado o lema fundamental que alicerça os principais resultados do nosso trabalho apesar de ser um lema de fácil demonstração e que é estudado em cursos iniciais de módulos. No entanto, a versão do teorema de Maschke para coálgebras (ver 3.3.18) tem um raciocínio um ligeiramente diferente, mas se enquadra na lista de teorema tipo-Maschke devido ao seu enunciado, que preserva interesse em estabelecer condições necessárias e suficientes para que uma coálgebra seja cossemissimples.

Mais especificamente, no segundo capítulo, aparecem dois teoremas tipo-Maschke que mais se aproximam do original, sendo ambos relacionados a produtos cruzados provenientes de ações globais e parciais respectivamente. Ambos apresentam condições necessárias para que um produto cruzado seja semissimples, cada qual em seu contexto particular, mas com enunciados bastante próximos um do outro. Observamos que enquanto o Teorema 2.1.8 exige que G seja um grupo finito tal que $|G|^{-1} \in A$ como condição para que o produto cruzado seja semissimples, o Teorema 2.2.5 exige que $\kappa = \sum\limits_{g \in G} 1_g$ seja invertível em A. Neste contexto uma aplicação relevante é a que diz que, a ordem de um grupo finito G não dividir a característica de um corpo $\Bbbk$ é equivalente a que a álgebra de grupo $\Bbbk G$ seja semissimples.

Pudemos ainda observar que as versões do teorema de Maschke para álgebras de Hopf, como as vistas nos teoremas 3.3.9 e 3.3.18, trocam as condições sobre inversibilidade da ordem do grupo e a inversibilidade do traço da unidade por componentes mais sofisticadas, como a existência de integrais unilaterais tais que a imagem pela aplicação counidade são não nulas. Isto proporciona uma família de exemplos de álgebras de Hopf que não são semissimples e uma família de álgebras de grupo $\Bbbk G$ que quando vistas como álgebras de Hopf, satisfazem claramente as condições suficientes para que sejam semissimples.

Finalmente no Capítulo 4, quando apresentado um teorema de tipo-Maschke para o produto smash, obtemos uma forte generalização dos teoremas do Capítulo 2, visto que pela Proposição 4.1.8 observamos que a família de skew anéis de grupos apresentada neste capítulo é um caso particular de produto smash. Portanto estruturas bastante gerais ainda podem ser classificadas como semissimples ou não, utilizando-se apenas recursos de verificação de hipóteses relativamente simples contidas no Teorema 4.2.1.

Referências Bibliográficas

[1] CURTIS, C. W.; REINER, I. **Methods of Representation Theory:** With Applications to Finite Groups and Orders, Vol. 1. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1981.

[2] DASCALESCU, S.; NASTASESCU, C.; RAIANU, S. **Hopf Algebras**: an introduction. New York: Marcel Dekker, 2001.

[3] DELLA FLORA, S. S. **Sobre Ações Parciais Torcidas de Grupos e o Produto Cruzado Parcial**. 2012. 82 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal de Porto Alegre, 2012.

[4] DOKUCHAEV, M.; EXEL, R. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. **Transactions of the American Mathematical Society**. v. 357, n. 5, p. 1931-1952, July 22, 2004.

[5] DOKUCHAEV, M.; EXEL, R.; SIMÓN, J. J. Globalization of twisted partial actions. **Transactions of the American Mathematical Society**. v. 362, n. 8, p. 4137-4160, March 24, 2010.

[6] DOKUCHAEV, M.; EXEL, R.; SIMÓN, J. J. Crossed product by twisted partial actions and graded algebras. **Journal of Algebra**. v. 320, n. 8, p. 3278-3310, 2008.

[7] FERRERO, M.; LAZZARIN,J. Partial actions and partial skew group rings. **Journal of Algebra**. v. 319, n. 12, p. 5247-5264, June 15, 2008.

[8] HUNGERFORD, T. W. **Algebra**. New York: Springer, 1974.

[9] KASSEL, C. **Quantum Groups**. New York: Springer-Verlag, 1995.

[10] LAM, T. Y. **A First Course in Non-commutative Rings**. 2nd ed. New York: Springer, 2001.

[11] MASCHKE, H.; Über den arithmetischen charakter der coefficienten der substitutionen endlicher linearer substituionsgruppen. **Mathematische Annalen**. 50 (1898), 492-498.

[12] MILIES, F.C.P. **Anéis e Módulos**. São Paulo: I.M.E da USP, 1972.

[13] MONTGOMERY, S. **Fixed Rings of Finite Automorphism Groups of Associative Rings**. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[14] MONTGOMERY, S. **Hopf Algebras and Their Actions on Rings**. Chicago: American Mathematical Society, 1992.

[15] PASSMAN, D. S. **Infinite Crossed Products**. Boston: Academic Press, 1989.

[16] ROTMAN, J. **An introduction to homological algebra**. 2nd ed. New York: Springer, 2009.

[17] SCHNEIDER, H.-J. **Lectures on Hopf Algebras**. Notes by Sonia Natale - University of Córdoba, 1994.