

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
MATEMÁTICA

USO DA BASE DINÂMICA EM UM  
SISTEMA DE DUAS VIGAS ACOPLADAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aline Brum Seibel

Santa Maria, RS, Brasil

2013

# USO DA BASE DINÂMICA EM UM SISTEMA DE DUAS VIGAS ACOPLADAS

**Aline Brum Seibel**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Matemática Aplicada, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Mestre em Matemática.**

**Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Rosemaira Dalcin Copetti**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2013**

Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Ciências Naturais e Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação de Mestrado

**USO DA BASE DINÂMICA EM UM SISTEMA DE  
DUAS VIGAS ACOPLADAS**

elaborada por  
**Aline Brum Seibel**

como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Mestre em Matemática**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

**Rosemaira Dalcin Copetti, Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>.**  
(Orientadora)

**João Batista da Paz Carvalho, Prof. Dr. (UFRGS)**

**Leonardo Dagnino Chiwiacowsky, Prof. Dr. (UNISINOS)**

Santa Maria, 26 de agosto de 2013.

# AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho agradeço, primeiramente, aos meus pais Inácio e Dircinha por todo o apoio, esforço e incentivo para que eu pudesse estar completando mais uma etapa de minha vida. A minha irmã Morgana pela amizade, apoio e conselhos.

A professora Rosemaira Dalcin Copetti pela paciência, amizade, confiança, dedicação e pela oportunidade de trabalhar ao seu lado.

A professora Sandra Eliza Vielmo pelo carinho, amizade e pelo incentivo ao meu ingresso no mestrado.

Aos colegas de pós graduação pelo companheirismo, parceria e por terem tornado dias difíceis mais agradáveis. Agradeço especialmente ao amigo Vinicius pelo seu apoio, auxílio, paciência e amizade.

À família Brutti por terem me acolhido e me apoiado nos momentos em que mais precisei, especialmente à Danielle pela amizade, companheirismo e por compartilhar momentos bons e ruins.

E a todos que não foram citados, mas que de alguma forma contribuíram para minha formação.

A UFSM, PPGMat, CAPES pela oportunidade e disponibilização de recursos financeiros.

A todos fica aqui meu muito obrigada.

# RESUMO

Dissertação de Mestrado  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Universidade Federal de Santa Maria

## USO DA BASE DINÂMICA EM UM SISTEMA DE DUAS VIGAS ACOPLADAS

AUTORA: ALINE BRUM SEIBEL

ORIENTADORA: ROSEMAIRA DALCIN COPETTI

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 26 de agosto de 2013.

Neste trabalho é realizado um estudo sobre vibrações livres e forçadas de um sistema de dupla viga acoplado. O sistema é composto por duas vigas do tipo Euler-Bernoulli, paralelas, de mesmo comprimento, simplesmente apoiadas e conectadas por uma camada viscoelástica. São obtidas as frequências naturais e os modos de vibração ou autofunções do sistema acoplado utilizando uma metodologia para vigas uniformes, que usa a base dinâmica para escrever a solução da equação modal. O estudo é realizado através da análise modal e de uma formulação matricial em blocos, e a base dinâmica usada para escrever a solução da equação modal é gerada pela solução dinâmica de uma equação diferencial de quarta ordem cujos coeficientes são os mesmos do problema considerado. As frequências naturais e os modos de vibração para o sistema não amortecido são determinados para vários valores dos parâmetros da viga. Para o caso amortecido, consideramos o amortecimento individual em cada viga e o amortecimento que compõe a camada viscoelástica o qual caracteriza o acoplamento no sistema. A resposta forçada do sistema é escrita em função da resposta impulso matricial que é solução de um problema de valor inicial com condições iniciais impulsivas.

**Palavras-chave:** Viga Euler-Bernoulli Dupla. Base Dinâmica. Frequências e Modos de Vibração. Resposta Impulso Matricial. Amortecimento de Rayleigh.

# ABSTRACT

Dissertation  
Graduate Program in Mathematics  
Universidade Federal de Santa Maria

## USING THE DYNAMIC BASIS IN A TWO BEAMS COUPLED SYSTEM

AUTHOR: ALINE BRUM SEIBEL

ADVISOR: ROSEMAIRA DALCIN COPETTI

Date and Location of Defense: Santa Maria, August 26, 2013.

This work researches on free and forced vibrations of a double beam coupled system. The system is regarded as two Euler-Bernoulli beams which are parallel, have the same length, are simply supported and are connected through a viscoelastic layer. Natural frequencies and their mode shapes, also called eigenfunctions, of the coupled system are obtained through a uniform beam methodology which uses the free dynamical basis to represent the solution of the the modal equation. This study uses modal analysis and block matrix formulation, while the dynamical basis used to represent the modal solution is obtained from the dynamical solution of a fourth order differential equation whose coefficients are just those of the original problem. The natural frequencies and mode shapes of the undamped system are determined for several values of beam parameters. For the damped case, damping ratios of each beam and also of the viscoelastic layer (which characterizes the coupling the system) are considered. The forced response is represented using matrix impulse response, which is the solution of an initial value problem with impulsive initial conditions.

**Keywords:** Euler-Bernoulli Double Beam. Dynamic Basis. Frequencies and Vibrations Modes. Impulse Response Matrix. Rayleigh Damping.

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS



# LISTA DE SÍMBOLOS

$A, A_1, A_2$	Área da seção transversal
$\mathcal{B}$	Matriz de contorno
<b>C</b>	Matriz de amortecimento
$c, c_1, c_2$	Constantes de amortecimento
$E, E_1, E_2$	Módulo de elasticidade de Young
$EI, E_1I_1, E_2I_2$	Constante de Rigidez
$\mathbf{F}(t, x)$	Vetor força externa
$f(t)$	Forçante
$\mathbf{h}(x)$	Solução fundamental matricial
$\mathbf{h}_k$	Solução da equação matricial em diferenças
$h_i(t), \mathbf{h}_i(t)$	Resposta impulso temporal
$\mathbf{h}(t, x, \xi)$	Resposta impulso matricial
$i$	Unidade imaginária
<b>I</b>	Matriz identidade
$I$	Momento de Inércia
$k$	Constante de mola
$\mathbf{K}_k$	Matriz de rigidez
$\mathbf{K}_0$	Operador matricial
$L$	Comprimento da viga
<b>M</b>	Matriz de Massa
$M$	Massa
<b>O</b>	Matriz nula
$P(s)$	Polinômio característico
$r$	Constante de amortecimento
$\mathbf{V}(x) \mathbf{V}^i(x)$	Modos de vibração
$\mathbf{v}(t, x)$	Deslocamento transversal
$\Delta$	Equação característica
$\delta$	Delta de Dirac
$\zeta_i$	Relação de amortecimento
$\eta_i$	Coefficiente temporal
$\lambda$	Autovalor
$\xi$	Coordenada espacial
$\Phi$	Matriz modal
$\omega, \omega_i$	Frequências naturais
$\omega_d$	Frequência amortecida
$\Omega$	Matriz espectral

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Estruturas do tipo viga são amplamente utilizadas em muitos ramos da engenharia civil, mecânica e aeroespacial. Por isso, vibrações de vigas têm sido objeto de muitos estudos e vários métodos têm sido desenvolvidos para melhor entender essa dinâmica [?, ?, ?, ?, ?].

O estudo de vibração de vigas do tipo Euler-Bernoulli teve início no século XVIII com trabalhos de membros da família Bernoulli e Leonard Euler (1707 – 1783). Em 1744 Euler publicou o livro “Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes”, onde demonstra a solução da equação diferencial do movimento transversal de vigas prismáticas, bem como encontra as frequências naturais e os modos de vibração de vigas em balanço, simplesmente apoiada, bi-engastada e de extremidades livres. A teoria de Euler-Bernoulli considera que as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo neutral, portanto não há tensão de cisalhamento em seus planos e os efeitos de inércia rotatória também são desconsiderados. O modelo de vibração de vigas que leva em consideração os efeitos da inércia de rotação e tensão de cisalhamento é conhecido como teoria de viga de Timoshenko [?, ?].

As vibrações livres e forçadas de uma única viga com diferentes condições de contorno têm sido estudados extensivamente por muitos pesquisadores. Tanaka [?] apresenta um controle de fronteira ativa - ABC - de uma viga Euler-Bernoulli, o que possibilita gerar uma condição de contorno desejada em qualquer posição designada de uma estrutura de viga, permitindo, assim, à estrutura de possuir propriedades desejadas caracterizadas pelas condições de contorno. Abu-Hilal em [?] utiliza a função de Green para determinar a resposta dinâmica de uma viga Euler-Bernoulli sujeita a cargas distribuídas e concentradas. Tonetto em [?] estuda a dinâmica de vigas segmentadas aplicáveis em microscopia de força atômica (AMF), utilizando os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko com o uso da resposta impulso distribuída e de respostas fundamentais concentradas. Naguleswaran [?] obteve as três primeiras frequências naturais, a sensibilidade e os modos de vibração considerando diferentes áreas da seção transversal de uma viga bi-segmentada Euler-Bernoulli com condições de contorno clássicas em ambas as extremidades. Nash e Collar [?] obtiveram as expressões para as equações da frequência e dos modos de vibração para seis condições de contorno clássicas: fixa-livre, livre-livre, apoiada-livre, bi-apoiada, fixa-fixa e fixa-apoiada, apresentando os resultados experimentais, juntamente com os re-

sultados numéricos, obtidos usando os modelos de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko, considerando vigas não delgadas nas quais os efeitos do cisalhamento e da rotação foram importantes.

Embora as vibrações de um modelo com mais de uma viga tenham importância prática nos campos da engenharia e outras aplicações, existem poucas investigações envolvendo estes sistemas, quando comparado com um sistema de uma única viga. Um caso particular de interesse é o sistema de duas vigas acopladas por uma camada elástica ou viscoelástica. O sistema é composto por duas vigas paralelas de propriedades uniformes com uma camada de mola-amortecedor distribuídos entre as vigas. Destacam-se três principais aplicações destes sistemas: redução de peso, aumento de força e rigidez, e absorção de vibrações. [?].

O trabalho de Seelig e Hoppman [?] foi um dos pioneiros nos estudos sobre vibrações do sistema de duas vigas elasticamente conectadas, são obtidos os modos normais de um sistema de  $n$  vigas conectadas elasticamente, utilizando a teoria da viga de Euler-Bernoulli. Kessel e Raske em [?] determinaram a resposta amortecida do sistema de viga dupla elasticamente conectada devido a uma carga em movimento que oscila longitudinalmente ao longo de um dos membros sobre um ponto fixo, a deflexão do sistema de viga dupla amortecido é dividido em dois casos: no primeiro, as vigas tem amortecimento individual, no segundo, o amortecimento é introduzido como uma função da velocidade relativa das duas vigas. Hamada, Nakayama e Hayashi em [?], analisam as vibrações livre e forçada de um sistema de duas vigas paralelas elasticamente conectadas, sendo as constantes de massa e rigidez diferentes nas duas vigas e as deflexões do sistema são analisadas através da transformada de Laplace. Vu em [?], apresenta um método exato para resolver a vibração forçada transversal de um sistema de viga dupla submetido a uma excitação harmônica, onde a vibração livre para o caso particular de duas vigas paralelas conectadas elasticamente é desenvolvido para diferentes condições de contorno. Oniszcuk [?] analisa as vibrações livres de um sistema de duas vigas paralelas simplesmente apoiadas conectadas continuamente por uma camada elástica do tipo Winkler, o movimento do sistema é descrito por uma equação diferencial de quarta ordem, a qual é resolvida pelo método clássico de Bernoulli-Fourier. Em outro trabalho, Oniszcuk [?] determina a resposta forçada para o mesmo sistema usando o método da expansão modal, o sistema foi desacoplado através do conjunto de modos ortogonais formado por uma única viga. Abu-Hilal [?] analisou a resposta dinâmica de um sistema de viga dupla considerando uma carga em movimento constante para um sistema constituído por duas vigas Euler-Bernoulli simplesmente apoiadas ligadas por uma camada viscoelástica.

A base dinâmica tem sido usada frequentemente para determinar as frequências e os modos de vibração de um sistema composto por uma viga Euler-Bernoulli ou por uma viga Timoshenko [?]. Em Tsukazan [?] a base dinâmica foi usada para calcular as frequências e os modos de vibração de uma viga Euler-Bernoulli com seção transversal

descontínua. Copetti [?] utiliza a base dinâmica gerada pela solução de uma equação diferencial de quarta ordem para obter os modos e frequências de uma viga Euler-Bernoulli segmentada, que possui amortecimento interno e amortecimento viscoso externo nas seções da viga. Claeysen [?] determina a resposta forçada de sistemas discretos, concentrados e distribuídos em termos da resposta livre e da resposta permanente, através da utilização da base dinâmica gerada pela resposta impulso. Em trabalhos recentes foram consideradas vibrações transversais de vigas Euler-Bernoulli acopladas através de forças elásticas de van der Waals para nanotubos de carbono de uma ou mais camadas [?] em [?] foi estudado o efeito não local na resposta forçada para um nanotubo de carbono composto por uma única camada.

Neste trabalho, é considerado um sistema de duas vigas acopladas. O sistema consiste de duas vigas do tipo Euler-Bernoulli, paralelas, com a mesma extensão, que são unidas por uma camada viscoelástica, esta camada é composta por um sistema mola-amortecedor. As vigas são homogêneas, prismáticas e delgadas. As duas vigas possuem as extremidades apoiadas. O objetivo principal do presente trabalho é a utilização da metodologia desenvolvida para vigas uniformes de Euler-Bernoulli [?,?,?,?], estendendo-a para o caso de duas vigas acopladas. Análise modal e uma formulação matricial em blocos são utilizados para determinar as frequências naturais e os modos de vibração do sistema. Os modos de vibração são escritos usando-se a resposta impulso para compor a base de soluções. A resposta forçada é determinada utilizando-se a ortogonalidade dos modos para desacoplar o sistema envolvido.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira: no Capítulo 1, é apresentado o modelo matemático de viga de Euler-Bernoulli utilizando as Equações de Lagrange e o Princípio de Hamilton. Condições de contorno clássica e não clássicas também são apresentadas. No Capítulo 2, é descrita a metodologia utilizada na obtenção das frequências e dos modos de vibração do modelo de viga dupla com e sem amortecimento. O modelo é escrito na forma de uma equação diferencial matricial, e sua solução é dada em termos da base dinâmica. No Capítulo 3, a resposta forçada com e sem amortecimento do sistema é escrita em função da resposta impulso matricial. Nos dois casos, amortecido e não-amortecido, o sistema foi desacoplado utilizando o Teorema dos Modos Normais, já que foi considerado o amortecimento de Rayleigh.

# Capítulo 1

## EQUAÇÃO DA VIGA EULER-BERNOULLI

### 1.1 Introdução

A equação do movimento para a vibração transversal de vigas esbeltas foi derivada por Daniel Bernoulli em 1735 e as primeiras soluções da equação para várias condições de contorno foi dado por Euler em 1744. Sua abordagem tornou-se conhecida como teoria da viga de Euler-Bernoulli. Em 1921, Stephen Timoshenko apresentou uma teoria melhorada para a vibração de viga, onde considera os efeitos da inércia de rotação e deformação por cisalhamento [?].

Neste capítulo, são derivadas as equações do movimento e as condições de contorno de uma viga do tipo Euler-Bernoulli, a partir das Equações de Lagrange [?, ?] e Princípio de Hamilton [?, ?, ?], uma vez que a vibração é, em essência, um processo de troca de energia mecânica, nas formas de energia cinética e potencial.

### 1.2 Equações de Lagrange

Considere um sistema caracterizado por  $N$  partículas,  $3N$  coordenadas cartesianas e, também,  $3N$  coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$ . Em geral,

$$q_k = q_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t), \quad (1.1)$$

para  $k = 1, 2, \dots, 3N$ , onde  $x_j, y_j$  e  $z_j$  são as coordenadas do  $j$ -ésimo vetor posição dos  $N$  vetores posição que caracterizam o sistema. As coordenadas cartesianas também

podem ser escritas em termos das coordenadas generalizadas e, portanto,

$$x_j = x_j(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad (1.2)$$

$$y_j = y_j(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad (1.3)$$

$$z_j = z_j(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad (1.4)$$

para  $j = 1, 2, \dots, N$ . A energia cinética para um sistema de  $N$  partículas, em função das  $3N$  coordenadas generalizadas  $x_j$ ,  $y_j$  e  $z_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, N$  é :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2), \quad (1.5)$$

onde  $\dot{x}_j = \frac{\partial x_j}{\partial t}$  e  $m_j$  é a massa da  $j$ -ésima partícula. Obtém-se das equações (??), (??) e (??), respectivamente,

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}, \quad (1.6)$$

$$\dot{y}_j = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_j}{\partial t}, \quad (1.7)$$

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_j}{\partial t}, \quad (1.8)$$

com  $\dot{q}_k = \frac{\partial q_k}{\partial t}$ . O momentum generalizado, conjugado à coordenada generalizada  $q_k$ , correspondente a força  $Q_k$ , é definido como

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (1.9)$$

Derivando a equação (??) parcialmente em relação a  $\dot{q}_k$ , obtemos

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \dot{y}_j^2}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \dot{z}_j^2}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad (1.10)$$

isto é,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left( \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_j \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_j \frac{\partial \dot{z}_j}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad (1.11)$$

onde  $\dot{x}_j$ ,  $\dot{y}_j$ ,  $\dot{z}_j$ , são funções que dependem de  $q_1, \dots, q_{3N}$ ,  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$ ,  $t$ . Assim  $\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k}$  e  $\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial t}$  são funções que dependem somente de  $q_1, \dots, q_{3N}$ ,  $t$ . Então, diferenciando (??), (??) e (??)

segue, respectivamente,

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_j}{\partial q_k}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial y_j}{\partial q_k}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \dot{z}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial z_j}{\partial q_k}, \quad (1.14)$$

$j = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, 3N$ . Substituindo as equações (??), (??) e (??) na equação (??), obtém-se

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \dot{y}_j \frac{\partial y_j}{\partial q_k} + \dot{z}_j \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right). \quad (1.15)$$

Derivando com relação ao tempo a equação (??),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \sum_{j=1}^N \left[ (m_j \ddot{x}_j) \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + (m_j \ddot{y}_j) \frac{\partial y_j}{\partial q_k} + (m_j \ddot{z}_j) \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^N m_j \left[ \dot{x}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \dot{y}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial y_j}{\partial q_k} + \dot{z}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

De acordo com a segunda lei de Newton, a primeira parcela do lado direito da equação (??) pode ser reescrita como

$$Q_k = \sum_{j=1}^N \left[ (F_j)_x \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + (F_j)_y \frac{\partial y_j}{\partial q_k} + (F_j)_z \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right], \quad (1.17)$$

onde  $F_j$  é a força resultante sobre a partícula de massa  $m_j$  e  $Q_k$  é a  $\mathbf{k}$ -ésima componente da força generalizada. Utiliza-se a notação  $(F_j)_x$  para indicar a componente  $x$  do vetor  $F_j$ . As derivadas que aparecem no último termo da equação (??) são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \right) &= \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial q_k} = \\ &\frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_j}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde usamos a equação (??). Analogamente, usando as equações (??) e (??), pode-se escrever

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y_j}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial q_k}, \quad (1.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{z}_j}{\partial q_k}. \quad (1.20)$$



Substituindo as equações (??), tem-se (??) e (??) na equação (??),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \sum_{j=1}^N m_j \left( \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k} + \dot{y}_j \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial q_k} + \dot{z}_j \frac{\partial \dot{z}_j}{\partial q_k} \right), \quad (1.21)$$

isto é,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \left[ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{y}_j^2}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{z}_j^2}{\partial q_k} \right) \right], \quad (1.22)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial}{\partial q_k} \left[ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) \right], \quad (1.23)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, 3N. \quad (1.24)$$

As equações (??) representam as equações de Lagrange. Se a energia potencial existe, as forças  $Q_k$  são obtidas a partir da força energia potencial:

$$Q_k = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_k}, \quad (1.25)$$

neste caso a função Langrangeana é

$$\mathbf{L}(q_1, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}, t) = T - \mathbf{V}, \quad (1.26)$$

onde  $T$  depende de  $q_1, \dots, q_{3N}$  e  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$ , mas  $\mathbf{V}$  depende somente de  $q_1, \dots, q_{3N}$ . A substituição da equação (??) na equação (??) resulta em

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_k}, \quad (1.27)$$

isto é

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_k} = 0, \quad (1.28)$$

onde  $\mathbf{L} = T - \mathbf{V}$  é a função Lagrangeana. Como  $\mathbf{V}$  não depende de  $\dot{q}_k$  para  $k = 1, 2, \dots, 3N$ , segue da equação (??) que

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (1.29)$$

A substituição da equação (??) em (??), leva a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 3N, \quad (1.30)$$

que é a forma mais usual das equações de Lagrange.

### 1.3 Princípio de Hamilton

Considere um sistema arbitrário com coordenadas independentes  $q_1, \dots, q_n$  e a função de Lagrange  $\mathbf{L}(t, q_i, \dot{q}_i)$ , onde  $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$ . A integral

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{L} dt \quad (1.31)$$

representa a ação durante um intervalo de tempo  $(t_0, t_1)$  e a expressão  $\mathbf{L} dt$  é a ação elementar.

Uma vez que a função  $\mathbf{L}$  é da forma  $\mathbf{L} = \mathbf{L}(t, q_i, \dot{q}_i)$ , é necessário, a fim de resolver a equação (??), especificar as funções  $q_i = q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Em outras palavras, a ação  $W$  é um funcional dependente do movimento do sistema. Considerando arbitrariamente as funções

$$q_i = q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.32)$$

então tem-se um certo movimento cineticamente possível. Na coordenada espacial estendida de dimensão  $(n + 1)$ , onde as quantidades  $q_i$  e o tempo  $t$  são as coordenadas, esse movimento é descrito por um curva. Considere todas as possíveis curvas, ou “caminhos”, passando através de dois pontos específicos do espaço  $M_0(t_0, q_i^0)$  e  $M_1(t_1, q_i^1)$ , isto é, todos os movimentos possíveis caminhos que identificam o sistema a partir de uma dada posição inicial  $(q_i^0)$ , que é ocupada no momento  $t_0$ , para uma dada posição final  $(q_i^1)$ , que é ocupada no tempo  $t_1$ . Aqui, desde o início são fixados os instantes iniciais e finais de tempo  $t_0$  e  $t_1$ , respectivamente, e as posições iniciais e finais do sistema,  $(q_i^0)$  e  $(q_i^1)$ , respectivamente.

Suponha que, entre dois caminhos considerados, existe um chamado de caminho direto, isto é, um caminho do qual o sistema pode mover-se através de uma função específica  $\mathbf{L}$  (em determinado campo de força). Para um caminho direto as funções  $q_i = q_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) satisfazem as equações de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.33)$$

Todos os outros caminhos possíveis passando pelos pontos  $M_0$  e  $M_1$  são chamados de caminhos indiretos.

Mostra-se, mediante princípios variacionais, que a ação  $W$  tem um valor mínimo (mais precisamente estacionário) para o caminho direto em comparação com os caminhos indiretos. Aí está o princípio de Hamilton. Então, tem-se a seguinte situação:

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathbf{L} dt = 0 \quad (1.34)$$

Esta é a expressão matemática para o princípio de Hamilton.

O princípio de Hamilton também é conhecido como Princípio de Mínima Ação, ou princípio do menor esforço.

## 1.4 Modelo de viga Euler-Bernoulli

A equação da viga de Euler-Bernoulli é um modelo físico e matemático para estudar o comportamento do movimento transversal de uma viga. Constituída de uma equação diferencial parcial de quarta ordem, a equação de Euler-Bernoulli modela a evolução no tempo do movimento transversal de uma viga. Foi desenvolvida pelos matemáticos Leonhard Euler e Jakob Bernoulli.

A hipótese fundamental na teoria da viga de Euler-Bernoulli é que há pequenas deformações na viga, ou seja, as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo neutral. Na Figura ?? as fibras próximas à superfície côncava se contraem e as fibras próximas à superfície convexa tendem a se distender. A superfície que separa a região de compressão da região de distensão (onde o comprimento permanece inalterado) é chamada de eixo neutral. A derivação da equação de Euler-Bernoulli envolve as principais

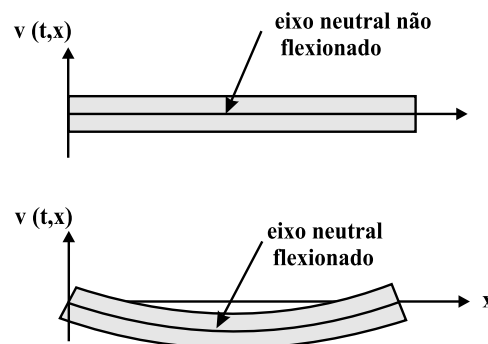


Figura 1.1: Eixo neutral

hipóteses físicas [?, ?, ?, ?, ?].

- O formato da viga é um prisma reto, cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões;
- Existência de uma linha neutra onde a viga não sofre nem tração nem compressão;

- As seções planas permanecem planas após a deformação e a curvatura da viga é assumida pequena;
- A viga é de material elástico e homogêneo;
- São desconsideradas as deformações por cisalhamento e inércia rotacional.

A partir do Princípio de Hamilton (??) é possível derivar o problema de deslocamento transversal  $v(t, x)$  de uma viga Euler-Bernoulli [?]. Para isso é necessário considerar a energia potencial e cinética de uma viga Euler-Bernoulli de comprimento  $L$ , as quais são dadas por, respectivamente:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (1.35)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (1.36)$$

onde  $EI$  denota a constante de rigidez e  $\rho A$  a constante de massa da viga. Substituindo as equações (??) e (??) no Princípio de Hamilton dado por (??), tem-se

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx - \delta \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] dt = 0. \quad (1.37)$$

No que segue supomos:

$$v(t_1, x) = v(t_2, x) = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t_1, x) = \frac{\partial v}{\partial x}(t_2, x) = 0. \quad (1.39)$$

Supomos ainda que na equação (??), a ordem entre a variação e a integral pode ser trocada, pode-se escrever o termo da energia cinética da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta \left[ \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \right] dt &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^L \rho A \delta \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^L 2\rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) dx \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} (\delta v) dx \right] dt. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Integrando por partes em relação à  $t$ , o último termo do lado direito da igualdade torna-se

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta \left[ \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \right] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v dx dt. \quad (1.41)$$

Agora, considere o termo da energia potencial, e sendo que a ordem da variação pode ser trocada,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left( \delta \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \right) dt &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^L EI \delta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ 2EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 (\delta v)}{\partial x^2} \right) dx dt. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Integrando por partes duas vezes em relação a  $x$ , segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left( \delta \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} - \right. \\ &\quad \left. \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) \right) \delta v \Big|_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \delta v dx \right] dt. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Substituindo na equação (??)

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (t, L) \right) \left( \delta \frac{\partial v}{\partial x} (t, L) \right) - \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (t, 0) \right) \left( \delta \frac{\partial v}{\partial x} (t, 0) \right) \right] - \\ &\left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) (t, L) \delta v(t, L) \right] - \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) (t, 0) \delta v(t, 0) \right] - \\ &\int_0^L \left[ \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] \delta v dx dt = 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Aplicando o Lema de DuBois-Reymond [?, ?], vem que

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (1.45)$$

é a Equação de Euler-Bernoulli para vigas, e

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) (t, 0) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta v(t, 0) = 0 \quad (1.46)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) (t, L) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta v(t, L) = 0 \quad (1.47)$$

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (t, 0) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) (t, 0) = 0 \quad (1.48)$$

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (t, L) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) (t, L) = 0 \quad (1.49)$$

## 1.5 Condições de Contorno

Na teoria de vigas são consideradas as interações com o meio externo, mecanismos ou dispositivos anexados as suas extremidades ou de forma intermediária, as quais podem ser expressas matematicamente através de condições de contorno. Os valores na fronteira podem modelar pontos de apoio, pontos de carga, momentos entre outros.

Em geral, as condições de contorno são classificadas como clássicas ou não-clássicas. Considere, para  $0 \leq x \leq L$ , a deflexão  $v(t, x)$ , o giro  $\frac{\partial v}{\partial x}(t, x)$ , momento fletor  $EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)$  e a força de cisalhamento  $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) (t, x)$ .

### Condições de Contorno Clássicas

Condições de contorno clássicas são aquelas que surgem naturalmente da dedução da equação de Euler-Bernoulli para uma viga de comprimento  $L$ , sem dispositivos anexados em suas extremidades. No que segue, considera-se  $EI$  e  $\rho A$  constante.

#### (i) Viga com extremidades fixa - fixa

A deflexão e o giro são nulos nas duas extremidades da viga.

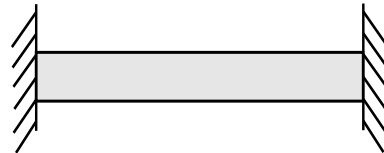


Figura 1.2: Viga fixa-fixa

$$v(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad (1.50)$$

$$v(t, L) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t, L) = 0. \quad (1.51)$$

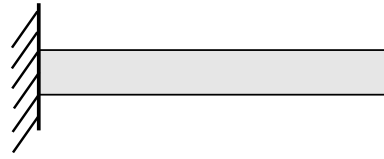
**(ii) Viga com extremidades fixa - livre**

Figura 1.3: Viga fixa-livre

A deflexão e o giro são nulos na extremidade fixa da viga ( $x = 0$ ).

$$v(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0. \quad (1.52)$$

As equações abaixo indicam que o momento fletor e a força de cisalhamento são nulos na extremidade livre da viga ( $x = L$ ).

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, L) = 0, \quad EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, L) = 0. \quad (1.53)$$

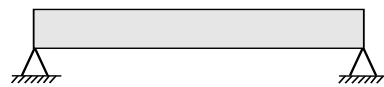
**(iii) Viga com extremidades apoiada - apoiada**

Figura 1.4: Viga apoiada-apoiada

A deflexão e o momento fletor são nulos nas duas extremidades da viga.

$$v(t, 0) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, 0) = 0. \quad (1.54)$$

$$v(t, L) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, L) = 0. \quad (1.55)$$

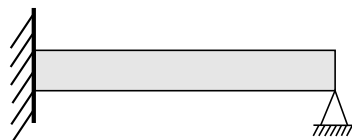
**(iv) Viga com extremidades fixa - apoiada**

Figura 1.5: Viga fixa-apoiada

O deslocamento e giro são nulos na extremidade fixa da viga ( $x = 0$ ).

$$v(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0. \quad (1.56)$$

O deslocamento e o momento fletor são nulos na extremidade apoiada da viga ( $x = L$ ).

$$v(t, L) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, L) = 0. \quad (1.57)$$

**(v) Viga com extremidade deslizando -livre**

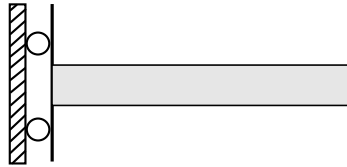


Figura 1.6: Viga com extremidades deslizando -livre

O giro e a força de cisalhamento são nulos na extremidade deslizando da viga ( $x = 0$ ).

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, 0) = 0. \quad (1.58)$$

O momento fletor e a força de cisalhamento são nulos na extremidade livre da viga ( $x = L$ ).

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, L) = 0, \quad EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, L) = 0.$$



## Condições de Contorno Não-Clássicas

Caracterizamos como condições de contorno não-clássicas aquelas em que a viga possui dispositivos ou mecanismos anexados em suas extremidades ou nas suas “intermediações”.

As condições de contorno não clássicas são deduzidas através do Princípio de Hamilton [?,?], incluindo termos de energia apropriados para a formulação de equações, será ilustrado abaixo, o caso de mola, massa e amortecedor anexados na viga [?].

### (i) Viga fixa-livre com uma massa anexada em $x = L$

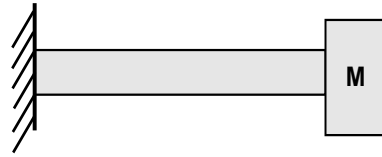


Figura 1.7: Viga fixa com massa  $M$  anexada

A energia cinética de um sistema com uma massa  $M$  anexada no final da viga leva a uma energia cinética na forma:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial v}{\partial t}(t, L) \right)^2. \quad (1.59)$$

A energia potencial, dada pela equação (??), não é afetada pela massa anexada. Aplicando o Princípio de Hamilton (??), tem-se

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + M \delta \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t}(t, L) \right)^2 \right] - \delta \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] dt = 0. \quad (1.60)$$

Cálculos análogos aos utilizados na derivação da equação para vigas de Euler-Bernoulli levam à obtenção da apropriada condição de contorno em  $x = L$ .

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, L) = 0, \quad (1.61)$$

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, L) = -M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, L). \quad (1.62)$$

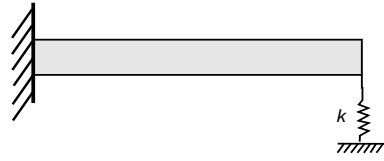
(ii) **Viga fixa - livre com dispositivo de mola em  $x = L$** 

Figura 1.8: Viga fixa-livre com dispositivo de mola

A energia cinética do sistema é dada pela equação (??), mas a energia potencial é modificada por conta da mola com rigidez  $k$  anexada na extremidade da viga, ou seja:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k [v(t, L)]^2. \quad (1.63)$$

Aplicando o Princípio de Hamilton (??):

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx - \delta \int_0^L EI \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx - \delta \frac{1}{2} k [v(t, L)]^2 \right] dt = 0. \quad (1.64)$$

Utilizando os mesmos cálculos realizados na derivação da equação de Euler-Bernoulli para vigas, obtém-se as seguintes condições de contorno:

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, L) = 0, \quad (1.65)$$

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, L) = -k v(t, L). \quad (1.66)$$

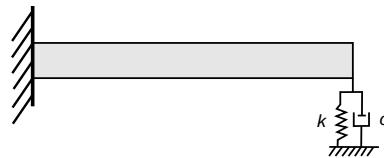
(iii) **Viga fixa-livre com dispositivos de mola e amortecedor anexados em  $x = L$** 

Figura 1.9: Viga fixa-livre com dispositivos de mola e amortecedor anexados

A energia potencial do sistema é dada pela equação (??). A força de amortecimento viscoso é não conservativa. O trabalho virtual da força de amortecimento, quando introduzida uma variação, é dada por:

$$\delta W_{nc} = -c \frac{\partial v}{\partial t}(t, L) \delta v(t, L). \quad (1.67)$$

Substituindo a equação (??) e a equação (??) no Princípio de Hamilton (??)

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx - \delta \int_0^L EI \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx - \delta k [v(L, t)]^2 - c \frac{\partial v}{\partial t}(t, L) \delta v(t, L) \right] dt = 0. \quad (1.68)$$

De forma análoga aos cálculos dos exemplos anteriores, as condições de contorno em  $x = L$  são dadas por

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, L) &= 0, \\ EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, L) &= -c \frac{\partial v}{\partial t}(t, L) - kv(t, L). \end{aligned}$$

# Capítulo 2

## MODELO DE UM SISTEMA DE DUAS VIGAS ACOPLADAS

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, são obtidas as frequências e os modos de vibração de um sistema composto por duas vigas acopladas, o qual denominaremos sistema de viga dupla. O sistema consiste de duas vigas do tipo Euler-Bernoulli. As vigas são simplesmente apoiadas, paralelas e conectadas continuamente por uma camada viscoelástica modelada por uma sistema mola-amortecedor. No primeiro momento, faz-se a descrição da metodologia a ser utilizada, incluindo o amortecimento de cada viga e o amortecimento que compõe a camada viscoelástica. O estudo é realizado a partir de uma formulação em blocos, a qual permite escrever o problema de maneira compacta. A solução da equação modal é escrita em termos da base dinâmica, gerada pela solução de uma equação diferencial de quarta ordem. A seguir, são realizadas simulações para os modos de vibração e a resposta livre do sistema sem e com amortecimento.

### 2.2 Descrição do modelo

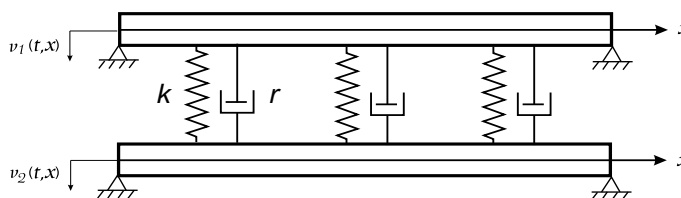


Figura 2.1: Sistema de duas vigas acoplado

Nesta seção, considera-se um sistema de duas vigas paralelas de comprimento  $L$ , acopladas continuamente por uma camada viscoelástica, a qual é modelada por um sistema mola-amortecedor. A vibração transversal do sistema de viga dupla como

mostra a Figura ?? é governado por duas equações diferenciais, baseadas na teoria de viga Euler Bernoulli,

$$\rho_1 A_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + k(v_1 - v_2) + c_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + r \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) + E_1 I_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho_2 A_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + k(v_2 - v_1) + c_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + r \left( \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) + E_2 I_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x^4} = 0, \quad (2.2)$$

onde  $E_i I_i$  é a constante de rigidez de flexão,  $E_i$  denota o módulo de elasticidade de Young,  $I_i$  o momento inércia,  $\rho_i A_i$  é a constante de massa por unidade de comprimento,  $\rho_i$  a densidade linear de massa e  $A_i$  denota a área da seção transversal da viga  $i$ , as constantes de rigidez de mola  $k$  e a constante de amortecimento  $r$ , compõem a camada viscoelástica,  $c_i$  denota a constante de amortecimento do material individual de cada viga,  $v_i(t, x)$  é a deflexão transversal da viga no instante  $t$  na posição  $x$ , onde  $i = 1$  indica a viga superior e  $i = 2$  a viga inferior [?].

As condições de contorno para o sistema de viga dupla simplesmente apoiadas são:

$$\begin{aligned} v_1(t, 0) &= v_2(t, 0) = 0, \\ v_1(t, L) &= v_2(t, L) = 0, \\ v_1''(t, 0) &= v_2''(t, 0) = 0, \\ v_1''(t, L) &= v_2''(t, L) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde  $v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ .

## 2.3 Formulação Matricial

As equações (??) e (??) podem ser manipuladas a fim de se obter um sistema matricial de segunda ordem. Assim, considerando  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x)$ , obtém-se a seguinte equação matricial

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{K} \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

onde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho_1 A_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 A_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + r & -r \\ -r & c_2 + r \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} E_1 I_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + k & -k \\ -k & E_2 I_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + k \end{pmatrix}.$$

Aqui,  $\mathbf{M}$  é a matriz que contém os termos  $\rho_i A_i$ , positiva definida,  $\mathbf{C}$  é uma matriz simétrica que envolve os termos de amortecimento  $c_i$  da viga e  $r$  correspondente ao amortecimento entre as vigas, e  $\mathbf{K}$  é uma matriz simétrica correspondente a constante de elasticidade entre as vigas e os operadores espaciais  $E_i I_i \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ .

## 2.4 Análise modal

Soluções para a equação (??) podem ser escritas através da análise modal, na seguinte forma,

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{V}(x), \quad (2.6)$$

onde  $\lambda$  é um autovalor associado a frequência e  $\mathbf{V}(x)$  são as autofunções, referente a amplitude modal, composta por  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$ , que correspondem à viga superior e a viga inferior, respectivamente, ou seja,

$$\mathbf{V}(x) = \begin{pmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Substituindo a equação (??) na equação (??), obtém-se

$$\mathbf{V}^{(iv)}(x) + \mathbf{K}_0^{-1}(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}_k) \mathbf{V}(x) = 0, \quad (2.8)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho_1 A_1 & 0 \\ 0 & \rho_1 A_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + r & -r \\ -r & c_2 + r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} E_1 I_1 & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{K}_0$  é definida positiva composta pelas constantes de rigidez flexural da primeira e segunda viga e a matriz  $\mathbf{K}_k$  é simétrica e carrega as informações acerca da constante de rigidez da mola.

Condições de contorno clássicas ou não clássicas podem ser escritas da seguinte maneira:

em  $x = 0$

$$\begin{aligned} a_{11} V_1(0) + b_{11} V_1'(0) + c_{11} V_1''(0) + d_{11} V_1'''(0) &= 0, \\ a_{11} V_2(0) + b_{11} V_2'(0) + c_{11} V_2''(0) + d_{11} V_2'''(0) &= 0, \\ a_{12} V_1(0) + b_{12} V_1'(0) + c_{12} V_1''(0) + d_{12} V_1'''(0) &= 0, \\ a_{12} V_2(0) + b_{12} V_2'(0) + c_{12} V_2''(0) + d_{12} V_2'''(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

e em  $x = L$

$$\begin{aligned}
a_{21}V_1(L) + b_{21}V_1'(L) + c_{21}V_1''(L) + d_{21}V_1'''(L) &= 0, \\
a_{21}V_2(L) + b_{21}V_2'(L) + c_{21}V_2''(L) + d_{21}V_2'''(L) &= 0, \\
a_{22}V_1(L) + b_{22}V_1'(L) + c_{22}V_1''(L) + d_{22}V_1'''(L) &= 0, \\
a_{22}V_2(L) + b_{22}V_2'(L) + c_{22}V_2''(L) + d_{22}V_2'''(L) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Matricialmente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11}\mathbf{V}(0) + \mathbf{B}_{11}\mathbf{V}'(0) + \mathbf{C}_{11}\mathbf{V}''(0) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{V}'''(0) &= 0, \\
\mathbf{A}_{12}\mathbf{V}(0) + \mathbf{B}_{21}\mathbf{V}'(0) + \mathbf{C}_{12}\mathbf{V}''(0) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{V}'''(0) &= 0, \\
\mathbf{A}_{21}\mathbf{V}(L) + \mathbf{B}_{21}\mathbf{V}'(L) + \mathbf{C}_{21}\mathbf{V}''(L) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{V}'''(L) &= 0, \\
\mathbf{A}_{22}\mathbf{V}(L) + \mathbf{B}_{22}\mathbf{V}'(L) + \mathbf{C}_{22}\mathbf{V}''(L) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{V}'''(L) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

onde os coeficientes  $\mathbf{A}_{ij}$ ,  $\mathbf{B}_{ij}$ ,  $\mathbf{C}_{ij}$  e  $\mathbf{D}_{ij}$  são matrizes diagonais. Por exemplo,  $\mathbf{A}_{ij} = a_{ij}\mathbf{I}$ , onde  $\mathbf{I}$  denota a matriz identidade de ordem dois. De modo análogo para  $\mathbf{B}_{ij}$ ,  $\mathbf{C}_{ij}$  e  $\mathbf{D}_{ij}$ . Para maiores detalhes [?, ?].

## 2.5 Base de soluções

A solução geral da equação (??) pode ser expressa através de uma base de soluções, ou seja

$$\mathbf{V}(x) = \Phi_1(x)\mathbf{e}_1 + \Phi_2(x)\mathbf{e}_2 + \Phi_3(x)\mathbf{e}_3 + \Phi_4(x)\mathbf{e}_4 = \Phi\mathbf{e}, \tag{2.13}$$

onde

$$\Phi = [\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x), \Phi_4(x)], \quad \Phi_j = \begin{pmatrix} \Phi_{j1}(x) & \Phi_{j2}(x) \\ \Phi_{j3}(x) & \Phi_{j4}(x) \end{pmatrix} \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{2.14}$$

é uma base qualquer de soluções, e

$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_4]^T, \quad \mathbf{e}_j = [e_{j1} \quad e_{j2}]^T \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{2.15}$$

é um vetor constante a ser determinado pelas condições de contorno.

## 2.6 Formulação matricial em blocos

A substituição da solução da equação (??) dadas por (??) em (??) conduz ao sistema matricial

$$\mathcal{U}\mathbf{e} = 0, \tag{2.16}$$

onde

$$\mathcal{U} = \mathcal{B}\Phi, \quad \mathbf{e} = [e_{11} \ e_{12} \ e_{21} \ e_{22} \ e_{31} \ e_{32} \ e_{41} \ e_{42}]^T. \quad (2.17)$$

A matriz  $\mathcal{B}$ , de ordem  $(8 \times 16)$ , carrega os coeficientes associados com as condições de contorno,

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}_L \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

com

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{C}_{11} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{D}_{12} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{21} & \mathbf{B}_{21} & \mathbf{C}_{21} & \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix},$$

onde  $\mathcal{B}_0$ , de ordem  $(4 \times 8)$ , indica a matriz que caracteriza as condições de contorno em  $x = 0$ ,  $\mathcal{B}_L$ , de ordem  $(4 \times 8)$ , indica a matriz que caracteriza as condições de contorno em  $x = L$  e  $\mathbf{0}$ , indica a matriz nula de ordem  $(4 \times 8)$ .

A matriz  $\Phi$ , de ordem  $(16 \times 8)$ , carrega os valores da base de soluções nas extremidades  $x = 0$  e  $x = L$ ,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_2(0) & \Phi_3(0) & \Phi_4(0) \\ \Phi_1'(0) & \Phi_2'(0) & \Phi_3'(0) & \Phi_4'(0) \\ \Phi_1''(0) & \Phi_2''(0) & \Phi_3''(0) & \Phi_4''(0) \\ \Phi_1'''(0) & \Phi_2'''(0) & \Phi_3'''(0) & \Phi_4'''(0) \\ \Phi_1(L) & \Phi_2(L) & \Phi_3(L) & \Phi_4(L) \\ \Phi_1'(L) & \Phi_2'(L) & \Phi_3'(L) & \Phi_4'(L) \\ \Phi_1''(L) & \Phi_2''(L) & \Phi_3''(L) & \Phi_4''(L) \\ \Phi_1'''(L) & \Phi_2'''(L) & \Phi_3'''(L) & \Phi_4'''(L) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

O sistema  $\mathcal{U}\mathbf{e} = 0$  possui soluções não-nulas para  $\mathbf{e}$  quando

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathcal{U}) = \det(\mathcal{B}\Phi) = 0. \quad (2.20)$$

Esta é a equação característica, cujas soluções são os autovalores  $\lambda$ , associados a autofunção  $\mathbf{V}(x)$ .

## 2.7 A base dinâmica

A equação modal (??), pode ser resolvida introduzindo uma base que simplifica o cálculo das constantes em (??). Utiliza-se a base dinâmica ou base fundamental [?, ?] que



é gerada pela matriz de ordem dois  $\mathbf{h}(x)$ , solução de

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(iv)}(x) + \mathbf{K}_0^{-1}(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K}_k)\mathbf{h}(x) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}'(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}''(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}'''(0) &= \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

e suas três primeiras derivadas  $\mathbf{h}'(x)$ ,  $\mathbf{h}''(x)$ ,  $\mathbf{h}'''(x)$ , onde  $\mathbf{0}$  é matriz nula e  $\mathbf{I}$  matriz identidade, ambas de ordem dois, de forma que a solução da equação (??) pode ser escrita como

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{h}(x)e_1 + \mathbf{h}'(x)e_2 + \mathbf{h}''(x)e_3 + \mathbf{h}'''(x)e_4, \quad (2.22)$$

onde

$$\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{11}(x) & \mathbf{h}_{12}(x) \\ \mathbf{h}_{21}(x) & \mathbf{h}_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

e  $e_1, e_2, e_3, e_4$  são vetores constantes. Assim,

$$\mathbf{V}(x) = \Phi(x)\mathbf{e}, \quad \text{e } \Phi(x) = [\mathbf{h}(x) \mathbf{h}'(x) \mathbf{h}''(x) \mathbf{h}'''(x)] \quad (2.24)$$

onde  $\mathbf{e}$  é um vetor constante de ordem  $(8 \times 1)$ . Substituindo a equação (??) nas condições de contorno (??), teremos o seguinte sistema matricial

$$\mathcal{U}(\lambda)\mathbf{e} = 0, \quad (2.25)$$

onde a matriz  $\mathcal{U}$  é de ordem  $(8 \times 8)$  que pode ser escrita na forma

$$\mathcal{U} = \mathcal{B}\Phi. \quad (2.26)$$

Aqui  $\mathcal{B}$  é uma matriz de ordem  $(8 \times 16)$ , que carrega informações sobre as condições de contorno, dada em (??), e  $\Phi$  matriz de ordem  $(16 \times 8)$ , que carrega informações da base de soluções nas extremidades da viga, ou seja

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{h}'(0) & \mathbf{h}''(0) & \mathbf{h}'''(0) \\ \mathbf{h}'(0) & \mathbf{h}''(0) & \mathbf{h}'''(0) & \mathbf{h}^{(iv)}(0) \\ \mathbf{h}''(0) & \mathbf{h}'''(0) & \mathbf{h}^{(iv)}(0) & \mathbf{h}^{(v)}(0) \\ \mathbf{h}'''(0) & \mathbf{h}^{(iv)}(0) & \mathbf{h}^{(v)}(0) & \mathbf{h}^{(vi)}(0) \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) \\ \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) & \mathbf{h}^{(v)}(L) \\ \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) & \mathbf{h}^{(v)}(L) & \mathbf{h}^{(vi)}(L) \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

e,  $\mathbf{e}$  é um vetor constante de ordem  $(8 \times 1)$ .

## 2.8 Determinação da base dinâmica

A matriz  $\mathbf{h}(x)$ , a qual é solução da equação (??), pode ser obtida por [?,?],

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{4N} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(x) \mathbf{h}_{(4N-j)}, \quad (2.28)$$

onde os  $b_i$ 's são os coeficientes do polinômio característico

$$P(s) = \det[s^4 + \mathbf{K}_0^{-1}(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}_k)] = \sum_{i=0}^{4N} b_i s^{4N-i}, \quad (2.29)$$

sendo  $\mathbf{h}_k$  solução da equação matricial em diferenças

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{k+4} + \mathbf{K}_0^{-1}(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}_k) \mathbf{h}_k &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_0 &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}_2 = \mathbf{0} \quad \mathbf{h}_3 = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

e  $d(x)$  é solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} b_0 d^{4N}(x) + b_1 d^{4N-1}(x) + \dots + b_{4N} d(x) &= 0, \\ d(0) &= 0, \quad d'(0) = 0, \dots, b_0 d^{(4N-1)}(0) = 1, \end{aligned} \quad (2.31)$$

com  $b_0, \dots, b_{4N}$  coeficientes da equação (??).

A escolha da base dinâmica possibilita a simplificação no cálculo das constantes do sistema  $\mathcal{U}(\lambda)\mathbf{e} = 0$  para determinadas condições de contorno do problema. As condições de contorno para vigas bi-apoiadas, as quais derivam da substituição das condições de contorno (??) na solução modal (??), são:

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}''(0) = 0, \quad \mathbf{V}(L) = \mathbf{V}''(L) = 0. \quad (2.32)$$

Substituindo as condições de contorno (??) em (??) e usando (??), implicará que as constantes  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_4$  são nulas, isto é,

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_4 = 0, \quad (2.33)$$

ou seja, os modos de vibração  $\mathbf{V}(x)$ , dados por (??), podem ser escritos como

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{h}(x)e_1 + \mathbf{h}''(x)e_3. \quad (2.34)$$

No polinômio (??) os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1, b_1 = b_2 = b_3 = b_5 = b_6 = b_7 = 0, \\
b_4 &= \left( \frac{\rho_1 A_1 E_2 I_2 + \rho_2 A_2 E_1 I_1}{E_1 I_1 E_2 I_2} \right) \lambda^2 + \left( \frac{E_2 I_2 (c_1 + r) + E_1 I_1 (c_2 + r)}{E_1 I_1 E_2 I_2} \right) \lambda + \frac{k(E_1 I_1 + E_2 I_2)}{E_1 I_1 E_2 I_2}, \\
b_8 &= \left( \frac{\rho_1 A_1 \rho_2 A_2}{E_1 I_1 E_2 I_2} \right) \lambda^4 + \left( \frac{\rho_1 A_1 (c_2 + r) + \rho_2 A_2 (c_1 + r)}{E_1 I_1 E_2 I_2} \right) \lambda^3 + \\
&+ \left( \frac{r(c_1 + c_2) + c_1 c_2 + k(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)}{E_1 I_1 E_2 I_2} \right) \lambda^2 + \left( \frac{k(c_1 + c_2)}{K_1 K_2} \right) \lambda.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Da equação em diferenças (??), são obtidas as matrizes

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_4 = \mathbf{h}_5 = \mathbf{h}_6 = \mathbf{0}, \tag{2.36}$$

$$\mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{h}_7 = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2 \rho_1 A_1 + \lambda c_1 + \lambda r + k}{E_1 I_1} & \frac{\lambda r + k}{E_1 I_1} \\ \frac{\lambda r + k}{E_2 I_2} & -\frac{\lambda^2 E_2 I_2 + \lambda c_2 + \lambda r + k}{E_2 I_2} \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

sendo  $\mathbf{0}$  matriz nula de ordem dois. Substituindo os coeficientes  $b_i$ 's dados em (??) na equação (??), tem-se

$$\begin{aligned}
b_0 d^{(viii)}(x) + b_4 d^{(iv)}(x) + b_8 d(x) &= 0, \\
d(0) = d'(0) = \dots = d^{(vi)}(0) &= 0, \quad b_0 d^{(vii)}(0) = 1,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned}
d(x) &= c_1 \sin(\sigma x) + c_2 \sinh(\sigma x) + c_3 \cos(\sigma x) + c_4 \cosh(\sigma x) + \\
&+ c_5 \sin(\varepsilon x) + c_6 \sinh(\varepsilon x) + c_7 \cos(\varepsilon x) + c_8 \cosh(\varepsilon x).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Pelas condições iniciais da equação (??), tem-se

$$d(x) = \frac{\sinh(\varepsilon x) - \sin(\varepsilon x)}{2b_0 \varepsilon^3 (\varepsilon^4 - \sigma^4)} - \frac{\sinh(\sigma x) - \sin(\sigma x)}{2b_0 \sigma^3 (\varepsilon^4 - \sigma^4)}, \tag{2.40}$$

com

$$\varepsilon = \left( \frac{-b_4 + \sqrt{b_4^2 - 4b_0 b_8}}{2b_0} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{e} \quad \sigma = \left( \frac{-b_4 - \sqrt{b_4^2 - 4b_0 b_8}}{2b_0} \right)^{\frac{1}{4}}. \tag{2.41}$$

Assim, desenvolvendo (??) obtém-se

$$\mathbf{h}(x) = (b_0 \mathbf{h}_7 + b_4 \mathbf{h}_3) d(x) + b_0 \mathbf{h}_3 d^{(iv)}(x), \tag{2.42}$$

onde  $b_i$ 's são dados em (??),  $\mathbf{h}_k$  em (??) e (??) e  $d(x)$  dado em (??), de modo que as componentes da matriz  $\mathbf{h}(x)$ , em (??), são dadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{11}(x) &= d^{(iv)}(x) + \left(2\lambda^2 + \frac{(E_1 I_1(r+c_2)+E_2 I_2(r+c_1))\lambda}{E_1 I_1 E_2 I_2} + \frac{k(E_1 I_1+E_2 I_2)}{E_1 I_1 E_2 I_2} - \frac{(\lambda^2 E_1 I_1+\lambda c_1+\lambda r+k)}{E_1 I_1}\right) d(x) \\ \mathbf{h}_{12}(x) &= \frac{(\lambda r+k)d(x)}{E_1 I_1} \\ \mathbf{h}_{21}(x) &= \frac{(\lambda r+k)d(x)}{E_2 I_2} \\ \mathbf{h}_{22}(x) &= d^{(iv)}(x) + \left(2\lambda^2 + \frac{(E_1 I_1(r+c_2)+E_2 I_2(r+c_1))\lambda}{E_1 I_1 E_2 I_2} + \frac{k(E_1 I_1+E_2 I_2)}{E_1 I_1 E_2 I_2} - \frac{(\lambda^2 E_2 I_2+\lambda c_2+\lambda r+k)}{E_2 I_2}\right) d(x)\end{aligned}$$

Observe que, devido às condições iniciais do problema (??) da solução fundamental  $\mathbf{h}(x)$ , o uso da base dinâmica introduzirá um elevado número de zeros na matriz  $\Phi$  dada em (??), possibilitando reduzir a ordem do sistema.

Esta abordagem será ilustrada considerando o caso de um sistema de duas vigas bi-apoiadas. As condições de contorno para este caso, dadas por (??), implicará que a matriz  $\mathcal{B}$ , dada em (??), que registra tais condições, é dada por

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

onde  $\mathbf{0}$  de ordem  $2 \times 2$  é uma matriz nula e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem  $2 \times 2$ , e a matriz  $\Phi$  dada em (??), pode ser escrita da seguinte maneira

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) \\ \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) & \mathbf{h}^{(v)}(L) \\ \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) & \mathbf{h}^{(v)}(L) & \mathbf{h}^{(vi)}(L) \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Por (??), tem-se

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_4 = 0, \quad (2.45)$$

assim, reduzimos o sistema

$$\mathcal{B}\Phi\mathbf{e} = 0, \quad (2.46)$$

para a forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) \\ \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.47)$$

Para uma solução não trivial de  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_3$ , deve-se ter que o determinante da matriz que

carrega as informações de  $\mathbf{h}(x)$  é igual a zero. Isto implica que a equação característica é dada por

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) \\ \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.48)$$

## 2.9 Simulações

Nesta seção são apresentadas simulações para o sistema de viga dupla com e sem amortecimento. O sistema é governado pelas equações (??) e (??). Nos dois casos, com e sem amortecimento, são obtidos as frequências, os modos de vibração e a resposta livre do sistema.

### 2.9.1 Sistema viga dupla sem amortecimento

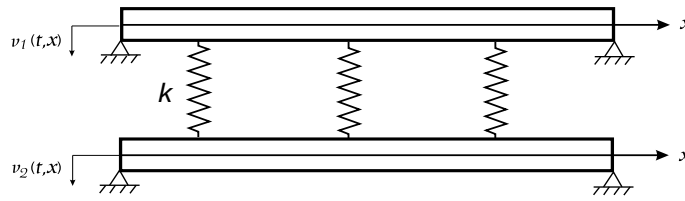


Figura 2.2: Sistema acoplado: viga dupla

Considere um sistema de viga dupla simplesmente apoiadas, acopladas por uma camada elástica, paralelas de comprimento  $L$ , conforme ilustra Figura ???. A constante de rigidez de mola  $k$  compõe a camada elástica,  $v_i(t, x)$  é a deflexão transversal da viga no instante  $t$  e na posição  $x$ , onde  $i = 1$  indica a viga superior e  $i = 2$  a viga inferior. As equações diferenciais que regem o sistema, segundo a teoria da viga de Euler-Bernoulli, são

$$\begin{aligned} \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + k(v_1 - v_2) + E_1 I_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} &= 0, \\ \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + k(v_2 - v_1) + E_2 I_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x^4} &= 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde  $E_i$  denota o módulo de elasticidade de Young,  $I_i$  o momento inércia,  $\rho_i$  a densidade linear de massa e  $A_i$  denota a área da seção transversal da viga  $i = 1, 2$ . As condições de contorno são dadas em (??).

Supondo soluções da forma

$$\begin{pmatrix} v_1(t, x) \\ v_2(t, x) \end{pmatrix} = \mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} V_1(x) \\ V_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

com  $\lambda = \omega i$ , onde  $\omega$  é a frequência natural do sistema,  $i$  é a unidade imaginária e  $\mathbf{V}(x)$  é a autofunção com o autovalor  $\lambda$ .

A equação modal para o sistema sem amortecimento resulta da substituição de (??) em (??) e é dada por

$$\mathbf{V}^{(iv)}(x) + \mathbf{K}_0^{-1}(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_k) \mathbf{V}(x) = 0, \quad (2.51)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho_1 A_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 A_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} E_1 I_1 & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

As condições de contorno da equação modal (??) são

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}''(0) = 0, \quad \mathbf{V}(L) = \mathbf{V}''(L) = 0. \quad (2.53)$$

A solução  $\mathbf{V}(x)$  para (??) de acordo com (??) é dada por

$$V(x) = \mathbf{h}(x)e_1 + \mathbf{h}'(x)e_2 + \mathbf{h}''(x)e_3 + \mathbf{h}'''(x)e_4. \quad (2.54)$$

Para a determinação de  $\mathbf{h}(x)$  usamos (??), (??), (??) e (??). Assim, a matriz  $\mathbf{h}(x)$  é da forma

$$\mathbf{h}(x) = (b_0 \mathbf{h}_7 + b_4 \mathbf{h}_3) d(x) + b_0 \mathbf{h}_3 d^{(iv)}(x), \quad (2.55)$$

onde,

$$b_0 = 1, b_1 = b_2 = b_3 = b_5 = b_6 = b_7 = 0,$$

$$b_4 = \left( \frac{\rho_1 A_1 E_2 I_2 + \rho_2 A_2 E_1 I_1}{E_1 I_1 E_2 I_2} \right) \lambda^2 + \frac{k(E_1 I_1 + E_2 I_2)}{E_1 I_1 E_2 I_2}, \quad (2.56)$$

$$b_8 = \frac{\rho_1 A_1 \rho_2 A_2}{E_1 I_1 E_2 I_2} \lambda^4 + \frac{k(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)}{E_1 I_1 E_2 I_2} \lambda^2.$$

Da equação em diferenças (??), obtém-se

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_4 = \mathbf{h}_5 = \mathbf{h}_6 = \mathbf{0}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_7 = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2 \rho_1 A_1 + k}{E_1 I_1} & \frac{k}{E_1 I_1} \\ \frac{k}{E_2 I_2} & -\frac{\lambda^2 \rho_2 A_2 + k}{E_2 I_2} \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

sendo  $\mathbf{0}$  matriz nula de ordem dois e  $d(x)$  dada por

$$d(x) = \frac{\sinh(\xi x) - \sin(\xi x)}{2b_0 \xi^3 (\xi^4 - \sigma^4)} - \frac{\sinh(\sigma x) - \sin(\sigma x)}{2b_0 \sigma^3 (\xi^4 - \sigma^4)}, \quad (2.59)$$

sendo,  $\xi$  e  $\sigma$  números reais dados em função dos coeficientes  $b_i$ 's, dados em (??), isto é,

$$\xi = \left( \frac{-b_4 + \sqrt{b_4^2 - 4b_0b_8}}{2b_0} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.60)$$

$$\sigma = \left( \frac{-b_4 - \sqrt{b_4^2 - 4b_0b_8}}{2b_0} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.61)$$

A matriz  $\mathbf{h}(x)$  dada por (??) pode ser desenvolvida e é da seguinte forma:

$$\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{11}(x) & \mathbf{h}_{12}(x) \\ \mathbf{h}_{21}(x) & \mathbf{h}_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{11}(x) &= d^{(iv)}(x) + \left( 2\lambda^2 + \frac{k(E_1I_1 + E_2I_2)}{E_1I_1E_2I_2} - \frac{(\lambda^2\rho_1A_1 + k)}{E_1I_1} \right) d(x), \\ \mathbf{h}_{12}(x) &= \frac{k}{E_1I_1} d(x), \\ \mathbf{h}_{21}(x) &= \frac{k}{E_2I_2} d(x), \\ \mathbf{h}_{22}(x) &= d^{(iv)}(x) + \left( 2\lambda^2 + \frac{k(E_1I_1 + E_2I_2)}{E_1I_1E_2I_2} - \frac{(\lambda^2\rho_2A_2 + k)}{E_2I_2} \right) d(x). \end{aligned}$$

A partir das condições de contorno (??) e a solução da equação modal (??), resolvendo o sistema (??), segue que a equação característica é dada por

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) \\ \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.63)$$

Nas simulações a seguir serão utilizados os parâmetros dados pela Tabela ??, dados em [?].

Parâmetro	Valor numérico	Unidade
Módulo de elasticidade de Young $E$	$1 \times 10^{10}$	$\frac{N}{m^2}$
Momento de inércia $I$	$4 \times 10^{-4}$	$m^4$
Densidade de massa $\rho$	$2 \times 10^3$	$\frac{kg}{m^3}$
Área da seção transversal $A$	$5 \times 10^{-2}$	$m^2$
Constante de elasticidade $k$	$1 \times 10^5$	$\frac{N}{m^2}$
Comprimento da viga $L$	10	$m$

Tabela 2.1: Parâmetros para viga dupla bi-apoiada sem amortecimento

Com a finalidade de observar os efeitos dos parâmetros de massa e rigidez no comportamento das frequências naturais e nos modos de vibração do sistema de viga dupla, foram realizadas simulações para os seguintes casos:

**CASO 1:**  $E_1 I_1 = EI, \quad E_2 I_2 = EI, \quad \rho_1 A_1 = \rho A, \quad \rho_2 A_2 = \rho A,$

**CASO 2:**  $E_1 I_1 = EI, \quad E_2 I_2 = 2(EI), \quad \rho_1 A_1 = \rho A, \quad \rho_2 A_2 = 2(\rho A),$

**CASO 3:**  $E_1 I_1 = EI, \quad E_2 I_2 = \frac{1}{2}(EI), \quad \rho_1 A_1 = \rho A, \quad \rho_2 A_2 = \rho A,$

**CASO 4:**  $E_1 I_1 = EI, \quad E_2 I_2 = EI, \quad \rho_1 A_1 = \rho A, \quad \rho_2 A_2 = \frac{1}{2}(\rho A).$

**CASO 5:**  $E_1 I_1 = EI, \quad E_2 I_2 = 2(EI), \quad \rho_1 A_1 = \rho A, \quad \rho_2 A_2 = \rho A.$

**CASO 6:**  $E_1 I_1 = EI, \quad E_2 I_2 = EI, \quad \rho_1 A_1 = \rho A, \quad \rho_2 A_2 = 2(\rho A).$

Em um sistema elasticamente conectado composto por duas vigas bi-apoiadas, as frequências naturais são obtidas aos pares  $\omega_{i1}, \omega_{i2}$ . Cada par possui uma frequência natural mais baixa  $\omega_{i1}$  e outra mais alta  $\omega_{i2}$ , ( $\omega_{i1} < \omega_{i2}$ ) [?, ?].

Este sistema executa dois tipos de movimento vibratório: vibrações síncronas, geradas pelas frequências naturais mais baixas  $\omega_{i1}$  e assíncronas, geradas pelas frequências naturais mais altas  $\omega_{i2}$  [?, ?, ?].

A representação dos modos de vibração do sistema de viga dupla síncronos, correspondentes às frequências  $\omega_{i1}$ , e a representação dos modos assíncronos, correspondentes às frequências  $\omega_{i2}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , são dadas pelas Figuras ?? e ??, respectivamente.

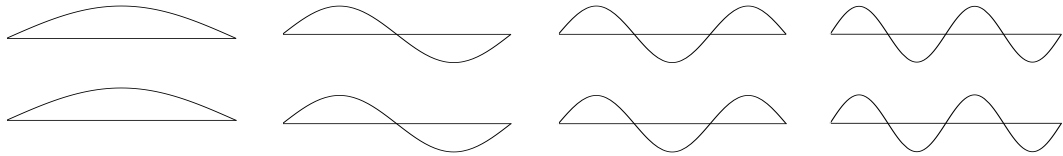


Figura 2.3: Modos de vibração síncronos

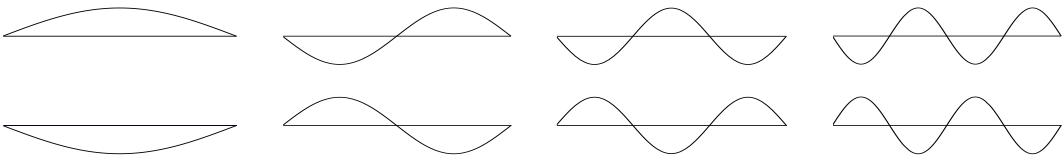


Figura 2.4: Modos de vibração assíncronos

Nas Tabelas ?? e ?? são apresentados os primeiros quatro pares de frequências naturais do sistema de viga dupla, sendo que cada par de frequências gera modos síncronos e assíncronos. Por exemplo, no segundo par de frequências  $\omega_{21}$  e  $\omega_{22}$ ,  $\omega_{21}$  corresponde a frequência associada ao segundo modo síncrono e  $\omega_{22}$  corresponde a frequência associada ao segundo modo assíncrono.

Compara-se nas Tabelas ?? e ?? os quatro pares de frequências naturais de vibração para os **CASOS 1, 2, 3, 4, 5 e 6**, obtidas no presente trabalho com as frequências obtidas por Oniszczuk, [?]. Os resultados obtidos no presente trabalho obtiveram excelente concordância.



Observe que as frequências encontradas no **CASO 2**, onde foi alterado o valor dos parâmetros de rigidez e massa na segunda viga para o dobro nos dois casos, estão próximas dos valores das frequências obtidas no **CASO 1**, onde as vigas são idênticas. Quando foi alterado o valor do parâmetro de rigidez na segunda viga (**CASOS 3 e 5**), as frequências sofreram alterações comparadas com o **CASO 1**, ou seja, para o **CASO 3** as frequências diminuíram e para o **CASO 5** as frequências aumentaram. Para os casos em que foi alterado o valor do parâmetro de massa na segunda viga (**CASOS 4 e 6**), as frequências sofreram alterações comparadas com o **CASO 1**, para o **CASO 4** as frequências aumentaram e para o **CASO 6** as frequências diminuíram.

	<b>CASO 1</b>		<b>CASO 2</b>		<b>CASO 3</b>	
$\omega_{ij}$	Este trabalho [?]		Este trabalho [?]		Este trabalho [?]	
$\omega_{11}$	19.73920880	19.7	19.73920880	19.7	16.95565418	17.0
$\omega_{12}$	48.88390703	48.9	43.46994784	43.5	47.92661410	47.9
$\omega_{21}$	78.95683503	79.0	78.9568351	79.0	61.83739295	62.0
$\omega_{22}$	90.74239282	90.7	87.94419730	87.9	86.76064543	86.6
$\omega_{31}$	177.6530320	177.7	177.6528805	177.7	129.2948371	129.6
$\omega_{32}$	183.1956337	183.2	181.8255889	181.8	180.6202177	180.3
$\omega_{41}$	315.8271071	315.8	315.8279639	315.8	225.5070134	226.0
$\omega_{42}$	318.9765409	319.0	318.192540	318.2	317.4381234	316.9

Tabela 2.2: Comparativo dos pares das frequências naturais - **CASO 1, 2 e 3**

	<b>CASO 4</b>		<b>CASO 5</b>		<b>CASO 6</b>	
$\omega_{ij}$	Este trabalho [?]		Este trabalho [?]		Este trabalho [?]	
$\omega_{11}$	22.55599719	28.6 <sup>1</sup>	23.78348609	23.8	15.94949857	11.8 <sup>1</sup>
$\omega_{12}$	60.49905860	60.5	51.02210192	51.0	42.77929452	44.1 <sup>1</sup>
$\omega_{21}$	83.47181720	83.5	84.12908795	84.1	59.02348822	52.9 <sup>1</sup>
$\omega_{22}$	121.3878133	121.4	116.7254989	116.8	85.83414561	89.8 <sup>1</sup>
$\omega_{31}$	180.2754484	180.3	180.3576781	180.3	127.4739912	123.8 <sup>1</sup>
$\omega_{32}$	255.3084286	255.3	253.2839155	253.4	180.5303305	183.2 <sup>1</sup>
$\omega_{41}$	317.3752992	317.4	317.3907677	317.2	224.4182047	222.2 <sup>1</sup>
$\omega_{42}$	448.9025368	448.9	447.7763060	447.9	317.4220783	319.2 <sup>1</sup>

Tabela 2.3: Comparativo dos pares das frequências naturais - **CASO 4, 5 e 6**

Em todos os casos considerados o formato dos modos segue o mesmo padrão, movimentos síncronos e assíncronos. Nos modos gerados pelas frequências obtidas no **CASO 1** a amplitude não sofre variação, enquanto que nos outros casos há variações nas amplitudes, como pode ser visto nas Figuras ??, ?? e ??.

Nas Figuras ??, ?? e ??,  $V_1(x)$  representa o modo de vibração da primeira viga e  $V_2(x)$  o modo de vibração da segunda viga. Na primeira coluna de cada figura tem-se os modos síncronos e na segunda coluna os modos assíncronos.

<sup>1</sup>Estas frequências não correspondem com as frequências encontradas em [?], uma vez que usando o método desenvolvido por [?], obtém-se resultados que concordam com o presente trabalho.

A Figura ?? apresenta uma comparação dos modos de vibração entre os **CASOS 1 e 2**, observa-se que aumentando o valor da massa e rigidez na segunda viga, a amplitude dos modos síncronos diminuem nas duas vigas. Nos modos assíncronos, a amplitude é maior para o **CASO 2** na primeira viga, enquanto que na segunda viga a amplitude é maior para o **CASO 1**.

A Figura ?? apresenta uma comparação dos modos de vibração entre os **CASOS 1 e 3**, pode se verificado que reduzindo o valor da rigidez na segunda viga, a amplitude dos modos síncronos para o **CASO 3** é menor que o **CASO 1** na primeira viga e maior na segunda viga. No entanto, nos modos assíncronos, o **CASO 3** apresenta amplitude maior que o **CASO 1** na primeira viga e menor na segunda. No primeiro modo síncrono e assíncrono as amplitudes estão bem próximas nos dois casos.

A Figura ?? apresenta uma comparação dos modos de vibração entre os **CASOS 1 e 4**, onde observa-se que reduzindo o valor da massa na segunda viga, a amplitude dos modos síncronos no **CASO 4** é maior que no **CASO 1** na primeira viga, enquanto que na segunda viga é menor, exceto no primeiro modo, onde a amplitude do modo para o **CASO 4** é maior que o **CASO 1**. Por outro lado, nos modos assíncronos, a amplitude é menor que no **CASO 1** na primeira viga e maior na segunda viga.

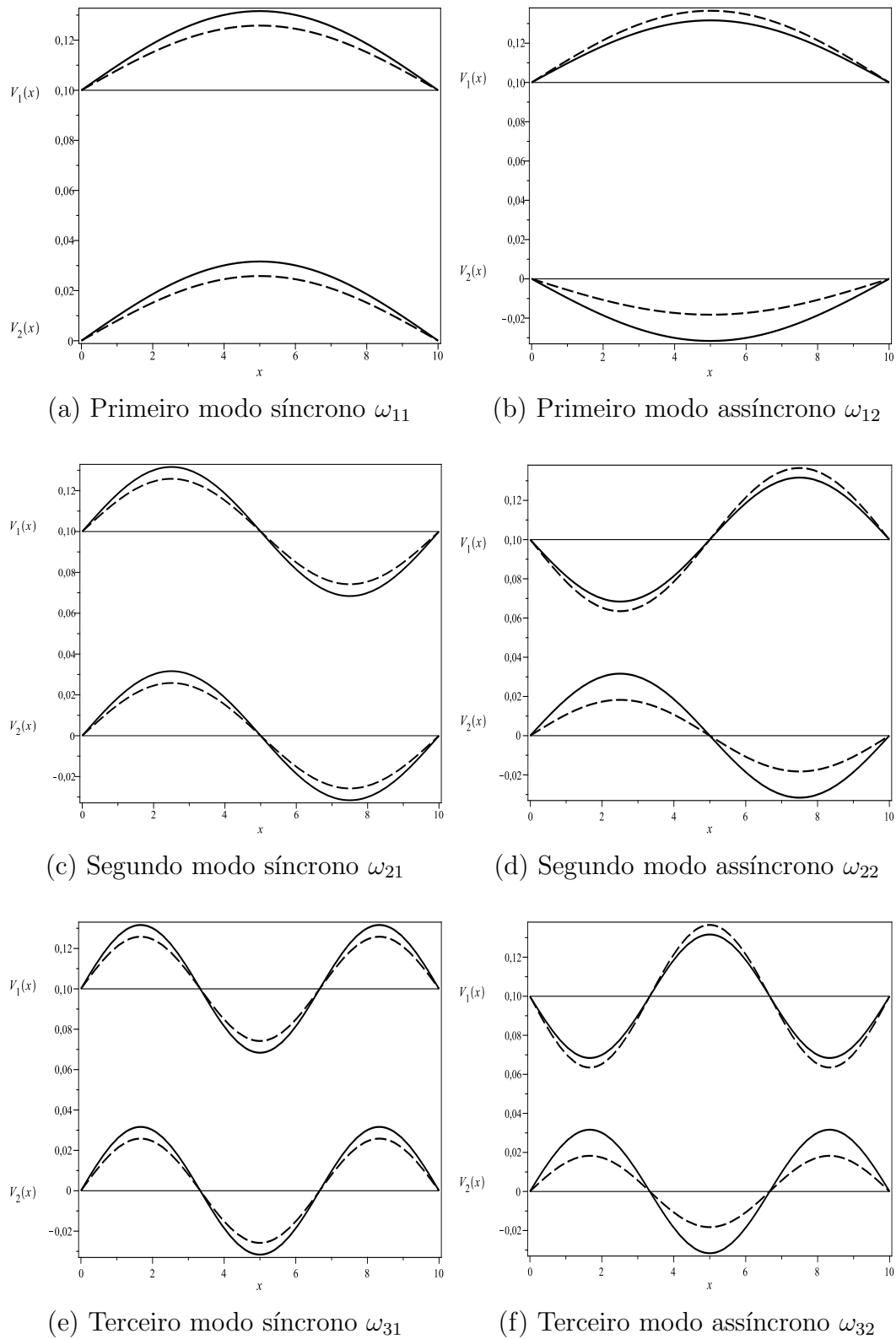


Figura 2.5: Três primeiros modos de vibração síncronos e assíncronos para frequências encontradas nos **CASOS 1 e 2**

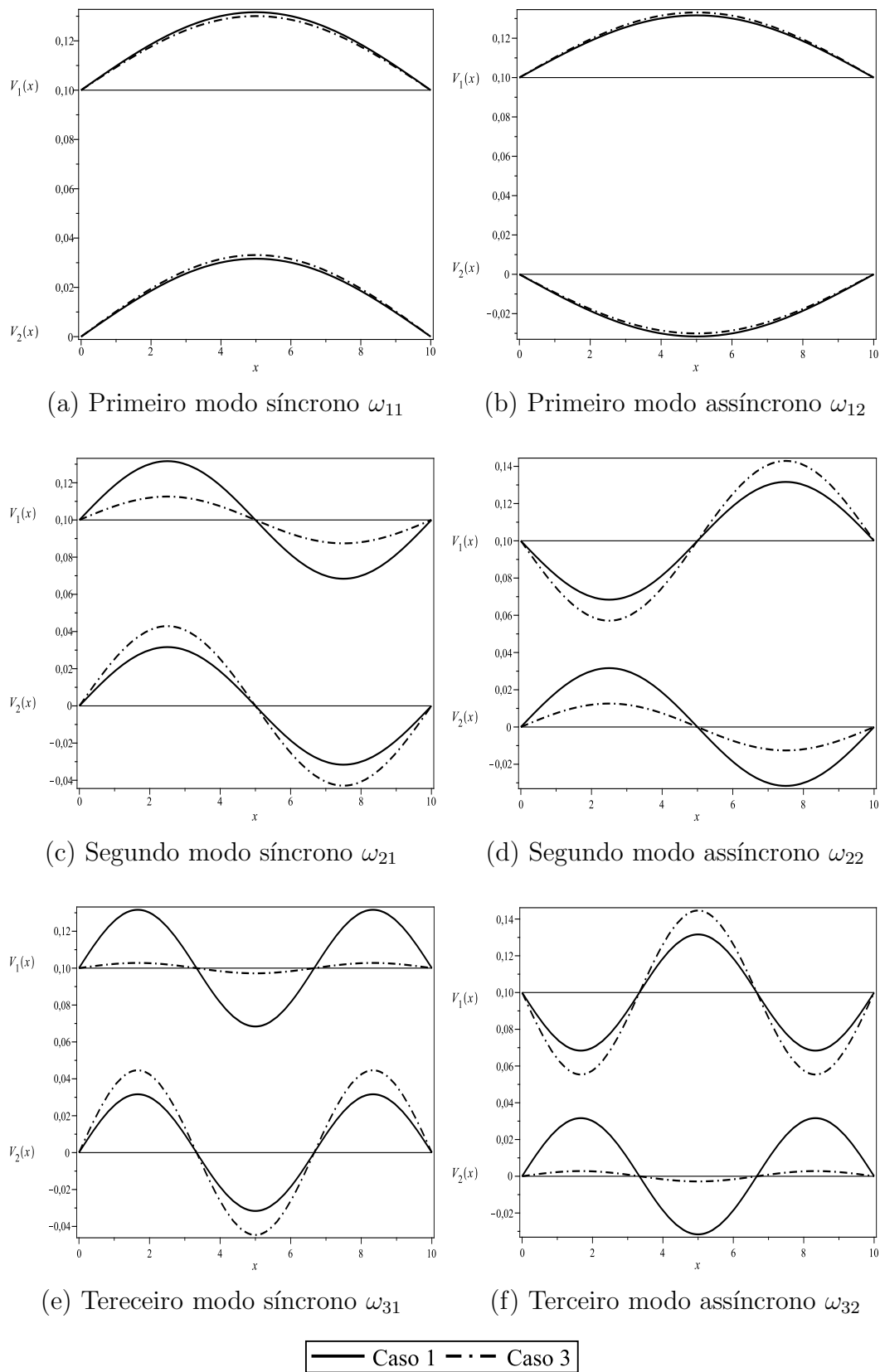


Figura 2.6: Três primeiros modos de vibração síncronos e assíncronos para frequências encontradas nos **CASOS 1 e 3**

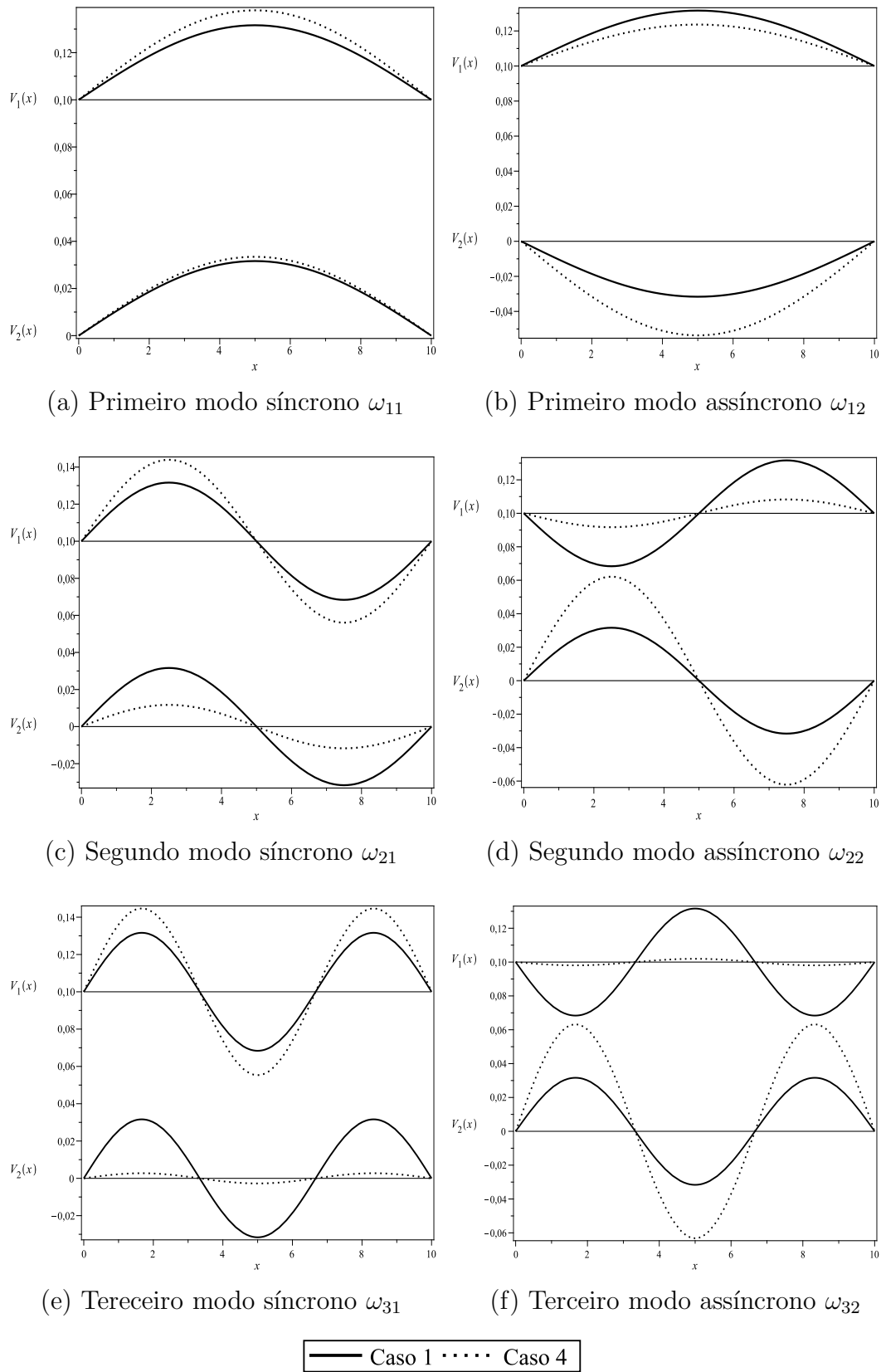
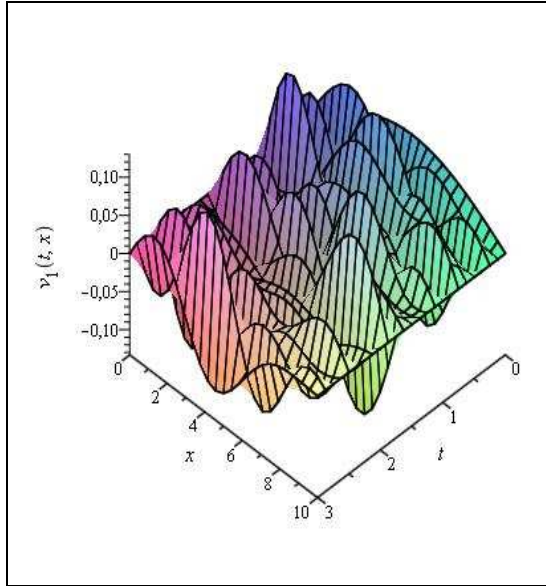
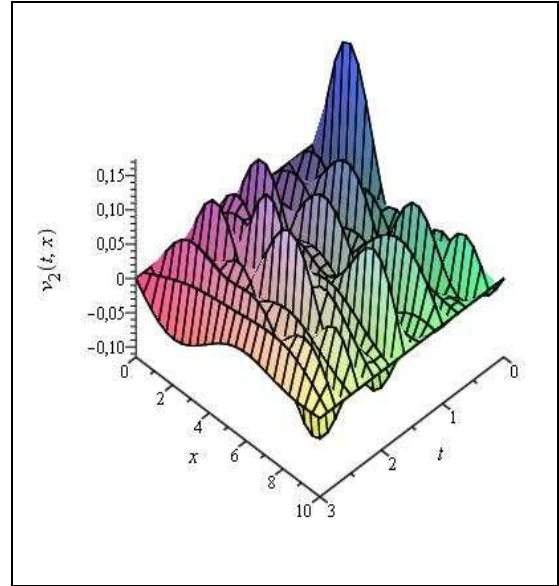


Figura 2.7: Três primeiros modos de vibração síncronos e assíncronos para frequências encontradas nos **CASOS 1 e 4**

Nas Figuras ?? e ?? é apresentada a parte real da resposta livre para os **CASOS 1, 2**, respectivamente.

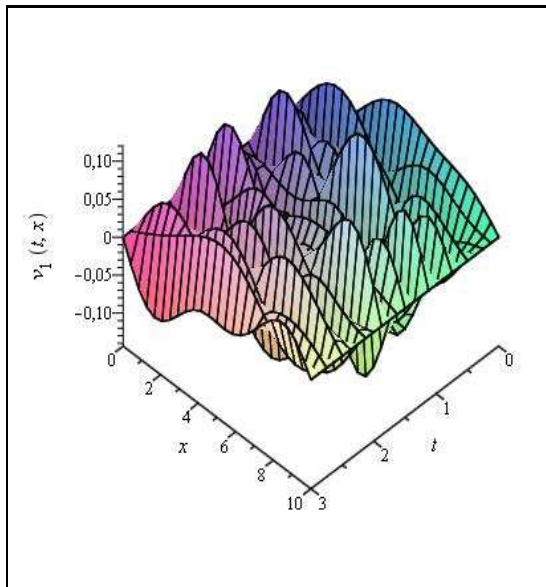


(a) Resposta livre na primeira viga

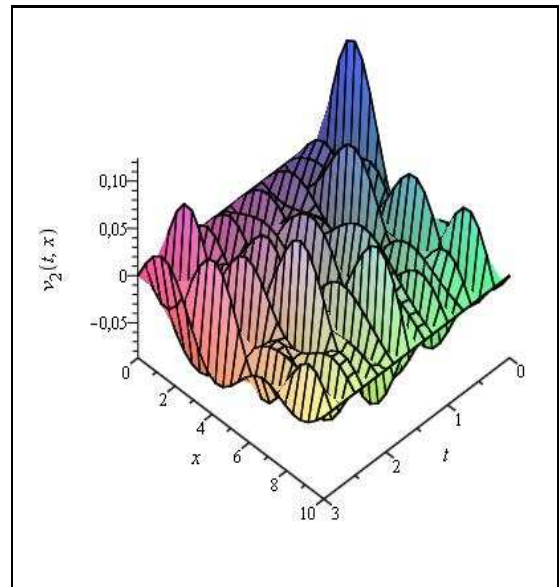


(b) Resposta livre segunda viga

Figura 2.8: Parte real da resposta livre para  $0 \leq x \leq 10$  e  $0 \leq t \leq 3$  - **CASO 1**



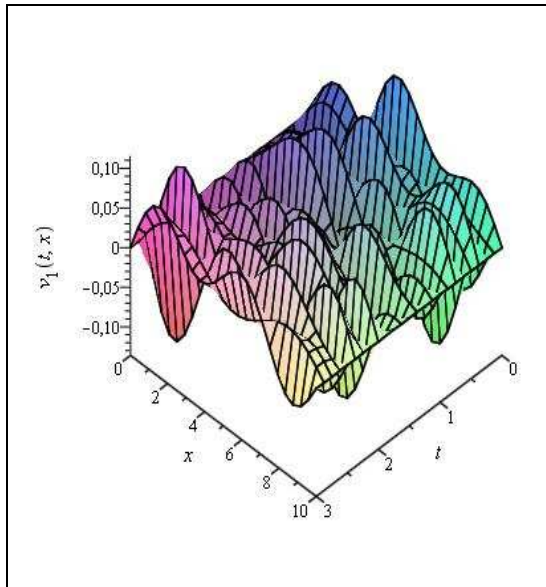
(a) Resposta livre primeira viga



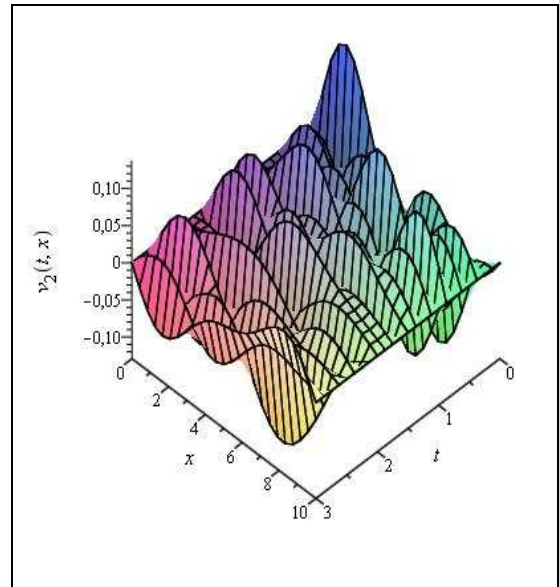
(b) Resposta livre segunda viga

Figura 2.9: Parte real da resposta livre para  $0 \leq x \leq 10$  e  $0 \leq t \leq 3$  - **CASO 2**

Nas Figuras ?? e ?? é apresentada a parte real da resposta livre para os **CASOS 3 e 4**, respectivamente.

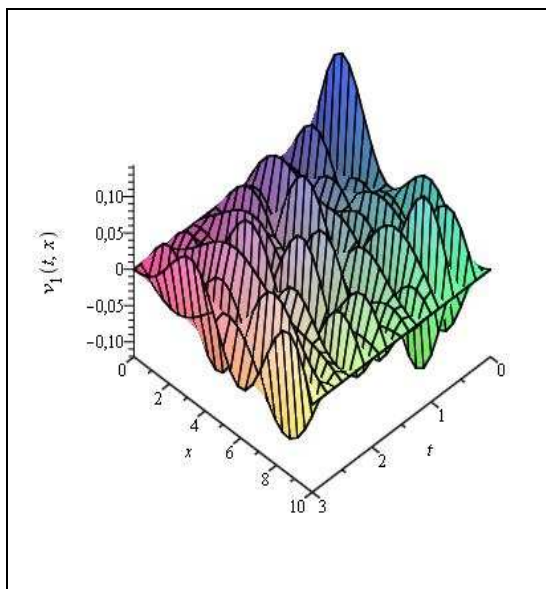


(a) Resposta livre primeira viga

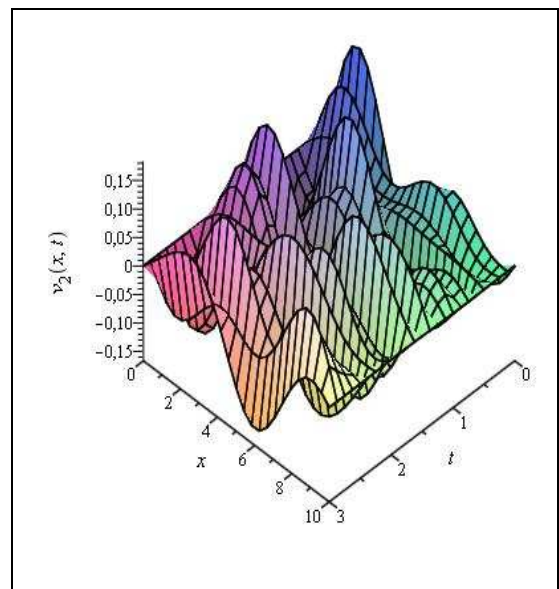


(b) Resposta livre segunda viga

Figura 2.10: Parte real da resposta livre para  $0 \leq x \leq 10$  e  $0 \leq t \leq 3$  - **CASO 3**



(a) Resposta livre primeira viga



(b) Resposta livre segunda viga

Figura 2.11: Parte real da resposta livre para  $0 \leq x \leq 10$  e  $0 \leq t \leq 3$  - **CASO 4**

Nas Figuras ?? e ?? é apresentado o comportamento das oscilações da parte real da resposta livre no ponto  $x = 5$  na primeira e segunda viga. A Figura ?? refere-se ao **CASO 1** e a Figura ?? refere-se ao **CASO 2**.

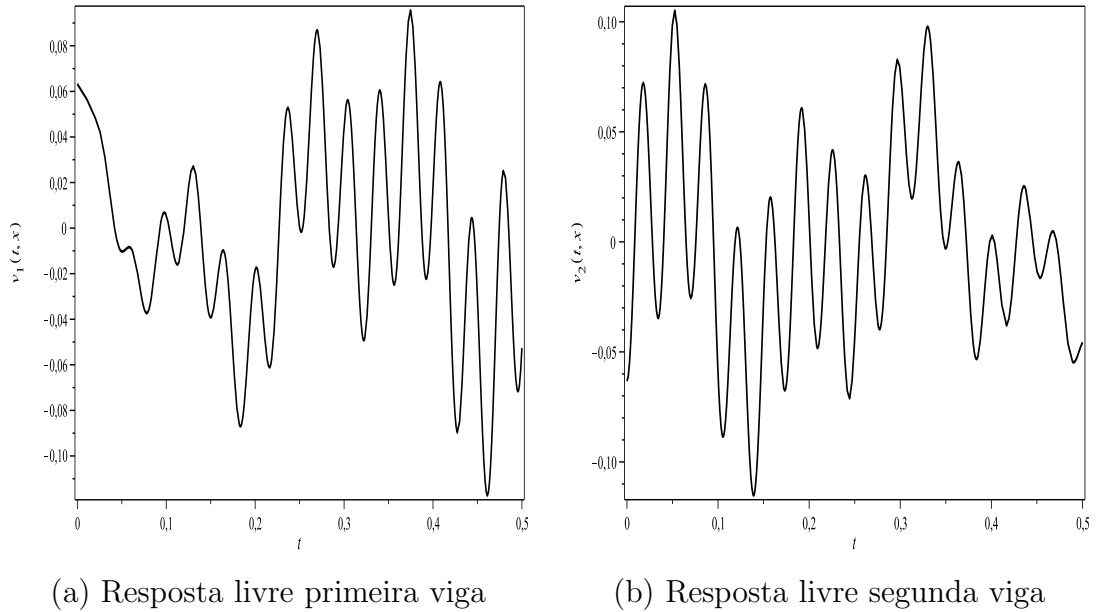


Figura 2.12: Corte em  $x = 5$  na parte real da resposta livre para  $0 \leq t \leq 0.5$  - **CASO 1**

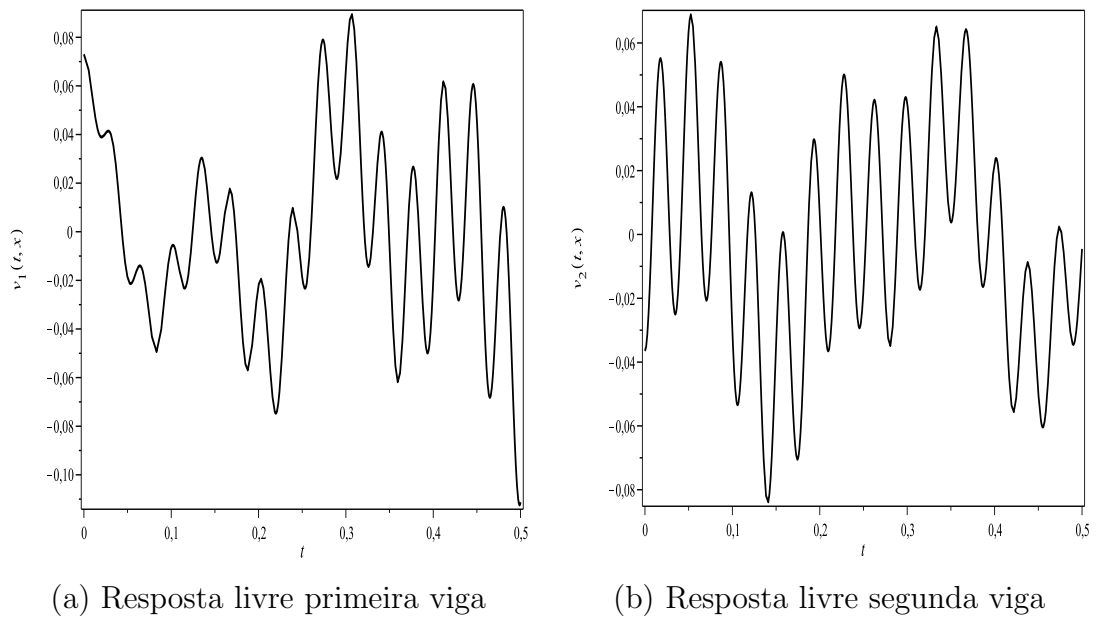


Figura 2.13: Corte em  $x = 5$  na parte real da resposta livre para  $0 \leq t \leq 0.5$  - **CASO 2**



Nas Figuras ?? e ?? é apresentado o comportamento das oscilações da parte real da resposta livre no ponto  $x = 5$  na primeira e segunda viga. A Figura ?? refere-se ao **CASO 3** e a Figura ?? refere-se ao **CASO 4**.

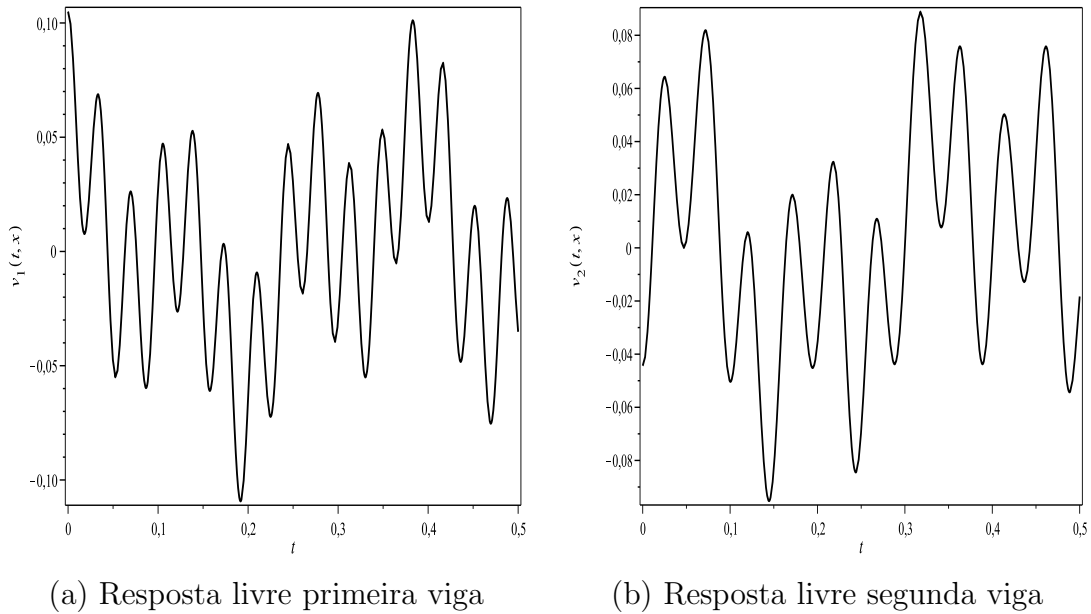


Figura 2.14: Corte em  $x = 5$  na parte real da resposta livre para  $0 \leq t \leq 0.5$  - **CASO 3**

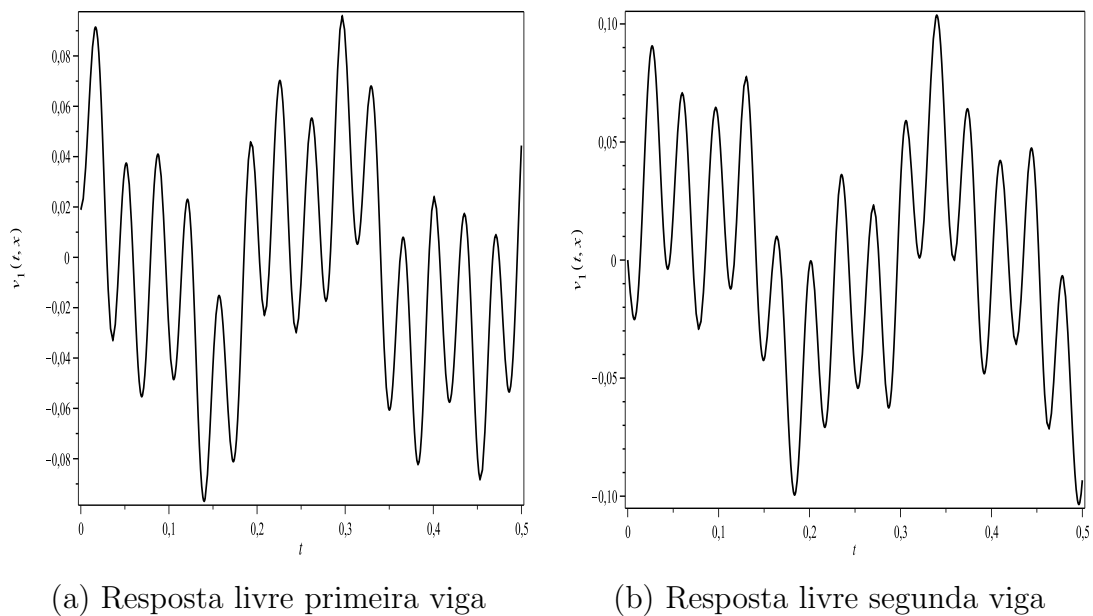


Figura 2.15: Corte em  $x = 5$  na parte real da resposta livre para  $0 \leq t \leq 0.5$  - **CASO 4**

Nas Figuras ?? e ?? é apresentada a parte imaginária da resposta livre para os **CASOS 1, 2**, respectivamente.

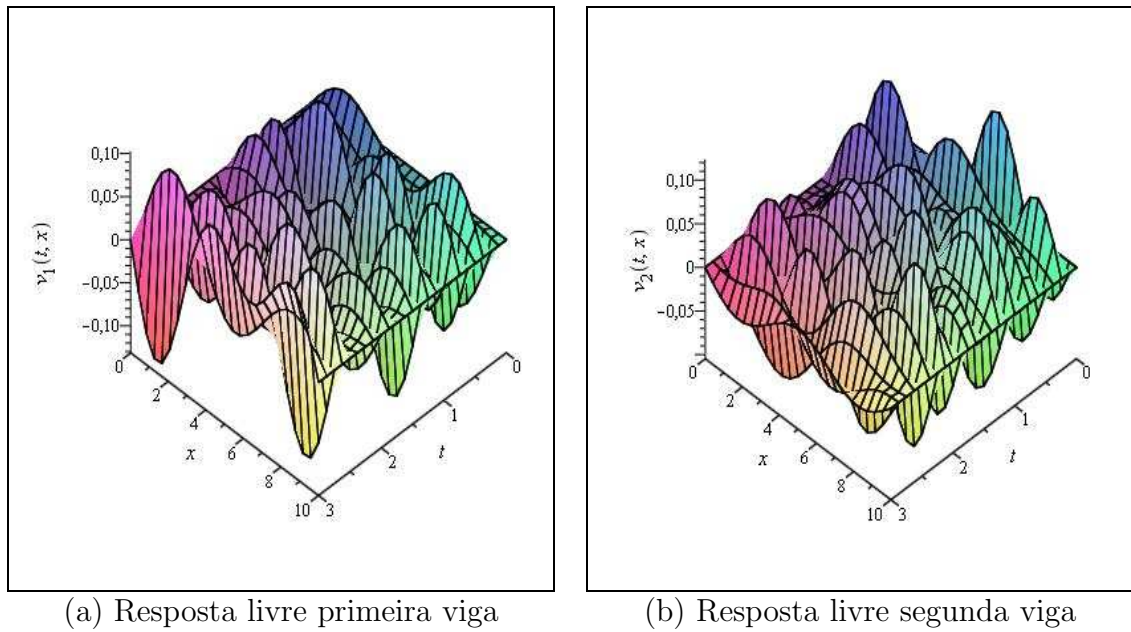


Figura 2.16: Parte imaginária da resposta livre para  $0 \leq x \leq 10$  e  $0 \leq t \leq 3$  - **CASO 1**

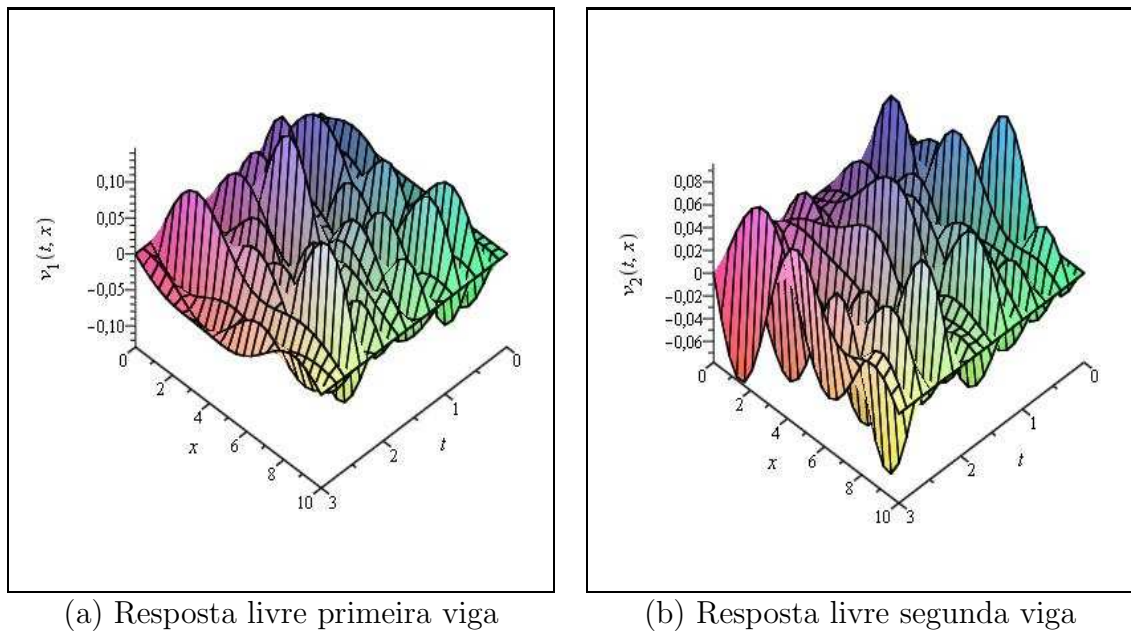


Figura 2.17: Parte imaginária da resposta livre para  $0 \leq x \leq 10$  e  $0 \leq t \leq 3$  - **CASO 2**

Nas Figuras ?? e ?? é apresentada a parte imaginária da resposta livre para os **CASOS 3** e **4**, respectivamente.

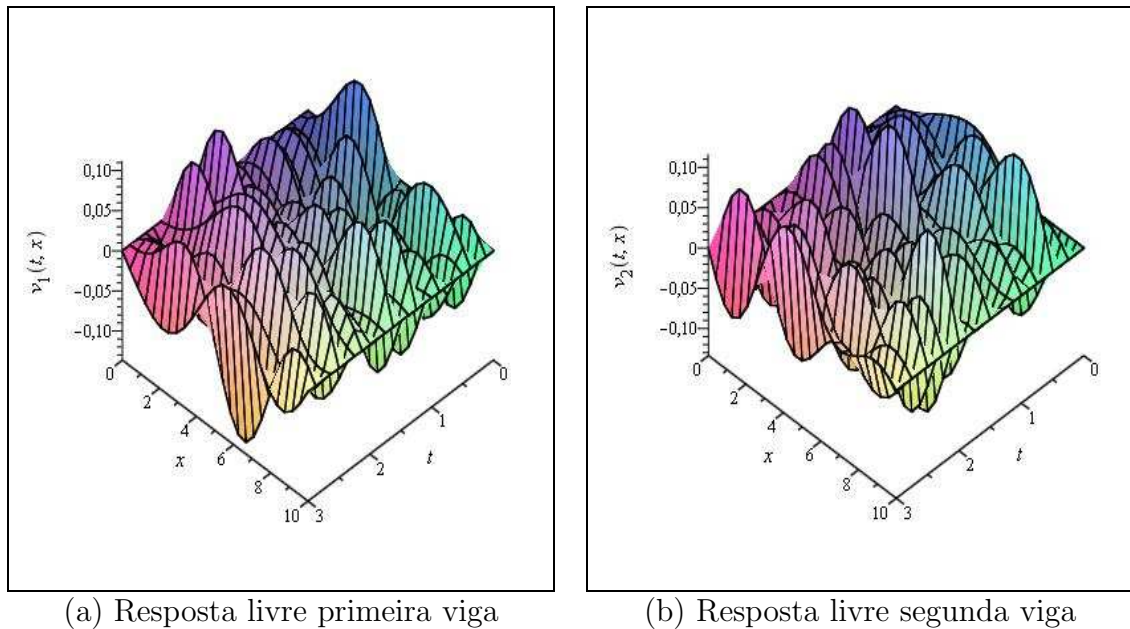


Figura 2.18: Parte imaginária da resposta livre para  $0 \leq x \leq 10$  e  $0 \leq t \leq 3$  - **CASO 3**

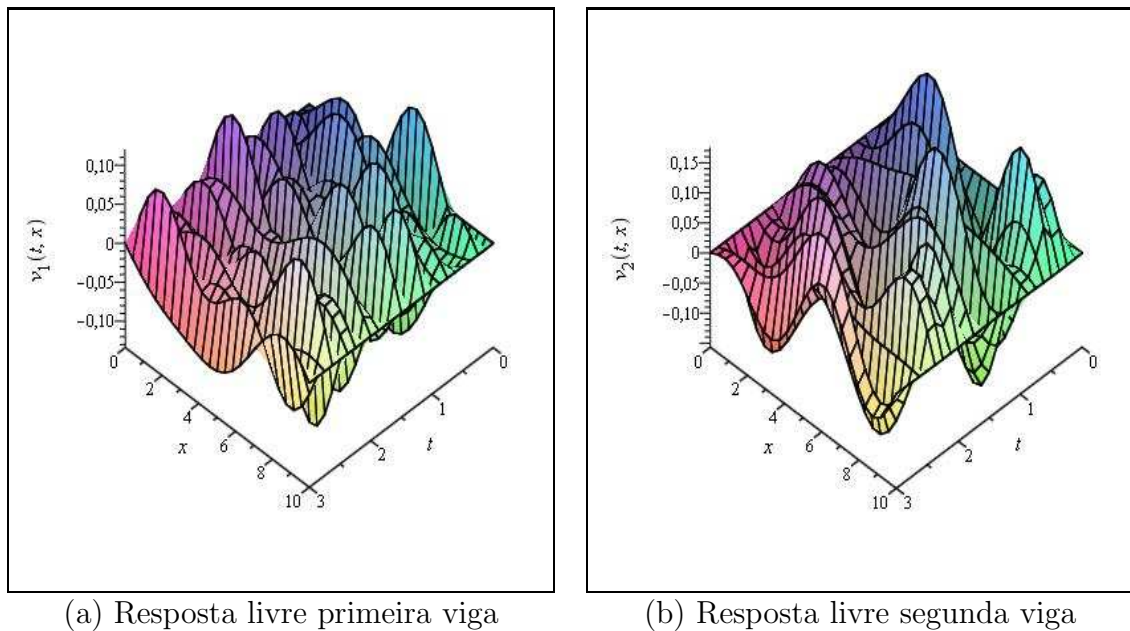


Figura 2.19: Parte imaginária da resposta livre para  $0 \leq x \leq 10$  e  $0 \leq t \leq 3$  - **CASO 4**

Nas Figuras ?? e ?? é apresentado o comportamento das oscilações da parte imaginária da resposta livre no ponto  $x = 5$ . A Figura ?? refere-se ao **CASO 1** e a Figura ?? refere-se ao **CASO 2**.

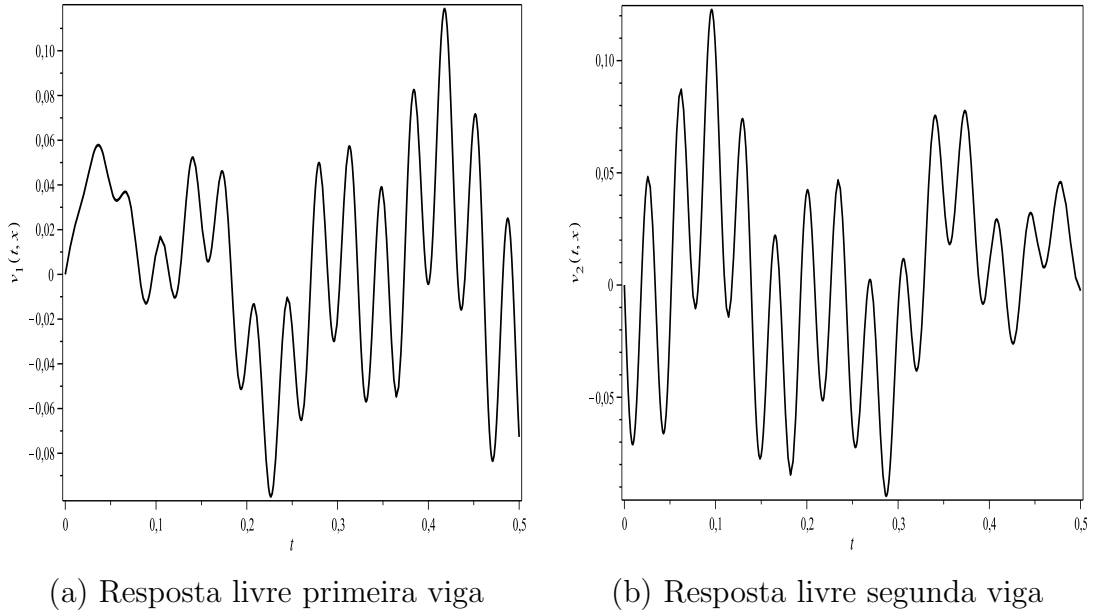


Figura 2.20: Corte em  $x = 5$  na parte imaginária da resposta livre para  $0 \leq t \leq 0.5$  - **CASO 1**

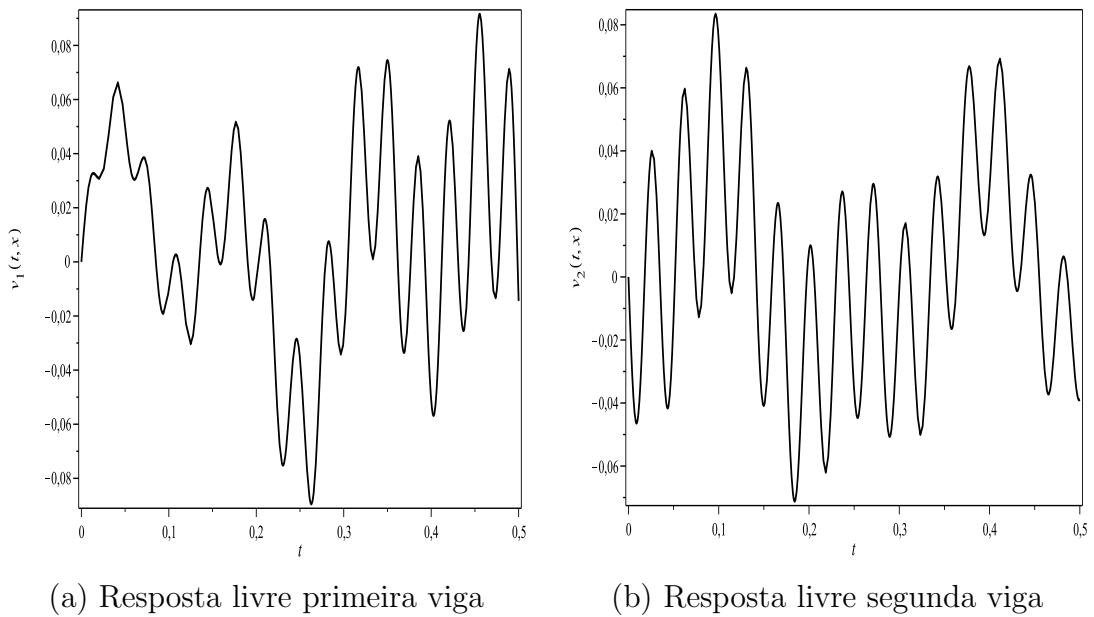


Figura 2.21: Corte em  $x = 5$  na parte imaginária da resposta livre para  $0 \leq t \leq 0.5$  - **CASO 2**

Nas Figuras ?? e ?? é apresentado o comportamento das oscilações da parte imaginária da resposta livre no ponto  $x = 5$ . A Figura ?? refere-se ao **CASO 3** e a Figura ?? refere-se ao **CASO 4**.

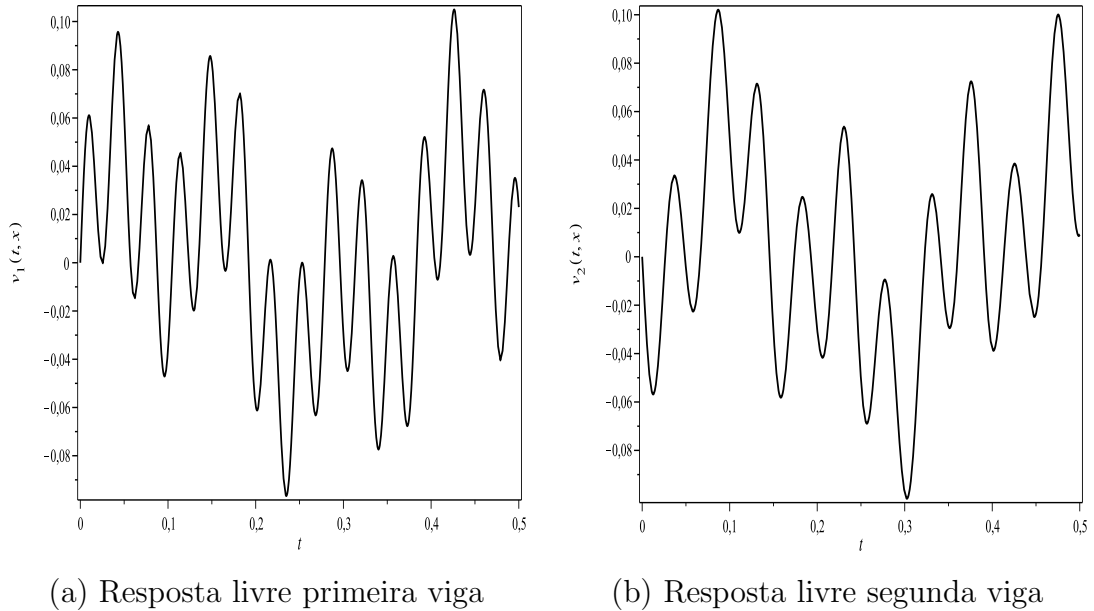


Figura 2.22: Corte em  $x = 5$  na parte imaginária da resposta livre para  $0 \leq t \leq 0.5$  - **CASO 3**

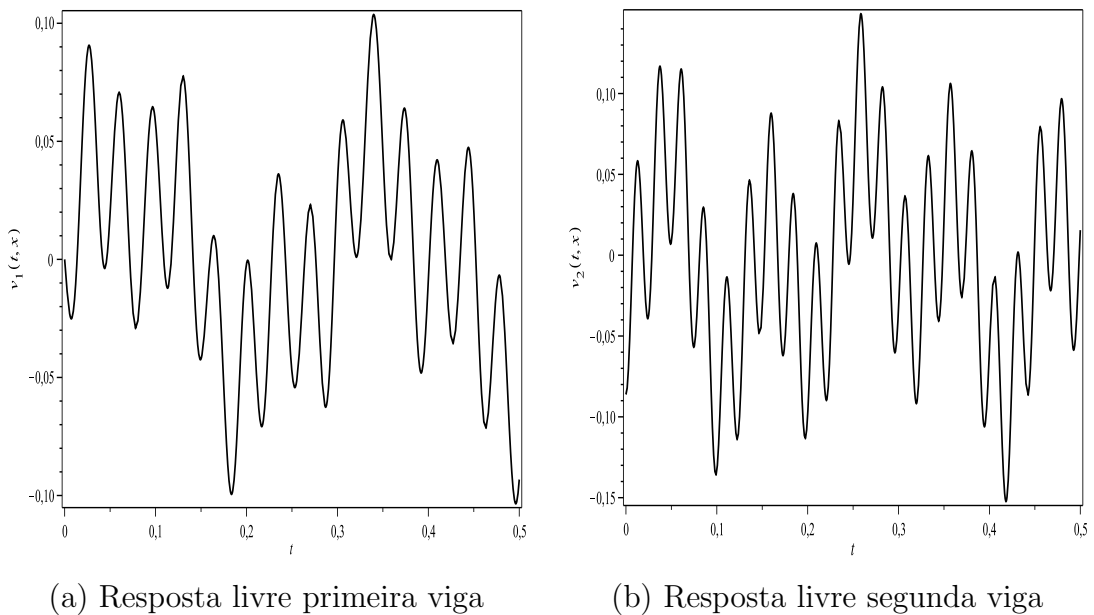


Figura 2.23: Corte em  $x = 5$  na parte imaginária da resposta livre para  $0 \leq t \leq 0.5$  - **CASO 4**

## 2.9.2 Sistema viga dupla com amortecimento

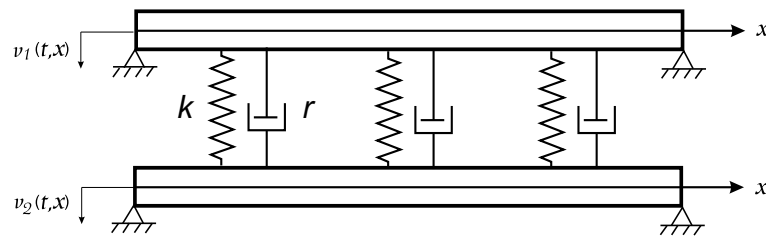


Figura 2.24: Sistema acoplado: viga dupla

O sistema considerado na seção anterior na ausência de forças externas é considerado conservativo. Isto implica que, se ele é excitado inicialmente e depois deixado a vibrar livremente, ele vibra infinitamente. Entretanto, sistemas conservativos representam idealizações matemáticas e, na prática, todos os sistemas possuem um certo grau de amortecimento, de modo que a vibração livre desaparece gradativamente.

Nesta seção, apresentam-se os modos de vibração e a resposta livre do sistema de viga dupla com amortecimento, considerando as vigas idênticas. Os parâmetros utilizados são os mesmos da resposta livre sem amortecimento dados pela Tabela ??.

As simulações a seguir são baseadas na teoria da Seção ?? à ??, onde  $c_1$ , é o amortecimento que depende do material da primeira viga,  $c_2$  é o amortecimento que depende do material da segunda viga e  $r$  é o amortecimento viscoso da camada viscoelástica entre as duas vigas.

Com o objetivo de estudar a interferência do amortecimento individual de cada viga e do amortecimento que compõe a camada viscoelástica, foram realizadas simulações para os seguintes casos:

$$\text{CASO 7 : } c_1 = 6 \times 10^3 \text{ Nms}^{-1}, \quad c_2 = 1 \text{ Nms}^{-1}, \quad r = 0,$$

$$\text{CASO 8 : } c_1 = 1 \text{ Nms}^{-1}, \quad c_2 = 6 \times 10^3 \text{ Nms}^{-1}, \quad r = 0,$$

$$\text{CASO 9 : } c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad r = 8 \times 10^3 \text{ Nms}^{-1}.$$

Na Tabela ?? são apresentados os primeiros quatro pares de autovalores para cada caso considerado, os quais geram os primeiros quatro modos de vibração do sistema.

Nas simulações para o sistema de viga dupla não amortecido, os modos de vibração realizam dois tipos de movimento: síncrono e assíncrono. No sistema amortecido os modos possuem o mesmo comportamento, síncronos e assíncronos, os quais são gerados por pares de autovalores  $\lambda_{i1}$  e  $\lambda_{i2}$ . Porém, não são em todos os casos que a sincronia do sistema amortecido será a mesma do sistema não amortecido, como será observado a seguir.

Nas Figuras ??, ?? e ?? é apresentada uma comparação entre os três primeiros modos de vibração amortecidos com os modos do sistema não amortecido. Os modos foram

$\lambda_{ij}$	CASO 7 e 8	CASO 9
$\lambda_{11}$	$-23.72950761 + 4.188071500 i$	$-16.67256806$
$\lambda_{12}$	$-6.275492393 + 39.55001988 i$	$-6.556665152 \times 10^{-10} + 19.73920880 i$
$\lambda_{21}$	$-28.80093684 + 79.12363349 i$	$-80.00000016 + 42.82734904 i$
$\lambda_{22}$	$-1.204063078 + 85.08089084 i$	$-1.580312502 \times 10^{-8} + 78.95683533 i$
$\lambda_{31}$	$-29.74180181 + 177.8903672 i$	$-80.00005560 + 164.8046096 i$
$\lambda_{32}$	$-0.2631945571 + 180.4459807 i$	$-0.6054483595 + 177.6531734 i$
$\lambda_{41}$	$-29.91652844 + 315.9773581 i$	$-78.93829189 + 309.8863349 i$
$\lambda_{42}$	$-0.08852017015 + 317.4062843 i$	$-1.701575680 + 319.0248651 i$

Tabela 2.4: Autovalores para os **CASOS 8, 9**

gerados pelos pares de autovalores listados na Tabela ??, onde  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$  representam os modos da primeira e segunda viga, respectivamente.

Na Figura ?? é apresentada uma comparação entre os três primeiros modos de vibração do sistema referentes aos autovalores obtidos nos **CASOS 1 e 7**. Observa-se na Figura ??, que o amortecimento na primeira viga não alterou a sincronia dos modos, o que mudou foi a amplitude. Nos modos síncronos a amplitude é maior na primeira viga para o **CASO 7**, enquanto que na segunda viga a amplitude é maior para o **CASO 1**. Nos modos assíncronos, a amplitude é maior na primeira viga para o **CASO 1** e maior na segunda viga para o **CASO 7**.

Na Figura ?? é apresentada uma comparação entre três primeiros modos de vibração do sistema referentes aos **CASOS 1 e 8**. Note na Figura ??, que o amortecimento na segunda viga não alterou a sincronia dos modos, mas, sim, a amplitude. Nos modos síncronos, a amplitude é maior na primeira viga para o **CASO 1**, enquanto que na segunda viga a amplitude é maior para o **CASO 8**. Nos modos assíncronos, a amplitude é maior na primeira viga para o **CASO 8** e maior na segunda viga para o **CASO 1**.

Na Figura ?? é apresentada uma comparação entre três primeiros modos de vibração do sistema referentes aos **CASOS 1 e 9**. Na Figura ?? observa-se que o amortecimento viscoso na camada viscoelástica entre as duas vigas,  $r$ , não alterou a amplitude dos modos de vibração do sistema, quando comparados com as amplitudes dos modos de vibração sem amortecimento. A interferência do amortecimento neste caso foi na sincronia dos modos, quando os modos do sistema não amortecidos são síncronos, os modos do sistema amortecido são assíncronos, e vice-versa.

Nas Figuras ??, ?? e ?? é apresentada a parte imaginária dos modos de vibração dos **CASOS 7, 8 e 9**, respectivamente.

A parte imaginária dos modos de vibração nos **CASOS 7 e 8** descrevem um movimento síncrono e assíncrono e seguem o padrão dos modos gerados pela parte real do **CASO 9**, o que pode ser observado nas Figuras ?? e ??. Note nessas figuras a diferença nas escalas para os modos correspondentes a primeira e segunda vigas, o que caracteriza uma significativa diferença em suas amplitudes.

Para o **CASO 9**, a parte imaginária dos modos não segue o padrão de movimento síncrono e assíncrono, o que se verifica na Figura ???. A parte imaginária de  $\lambda_{11}$  é nula, por isso o modo correspondente a este autovalor não é apresentado.



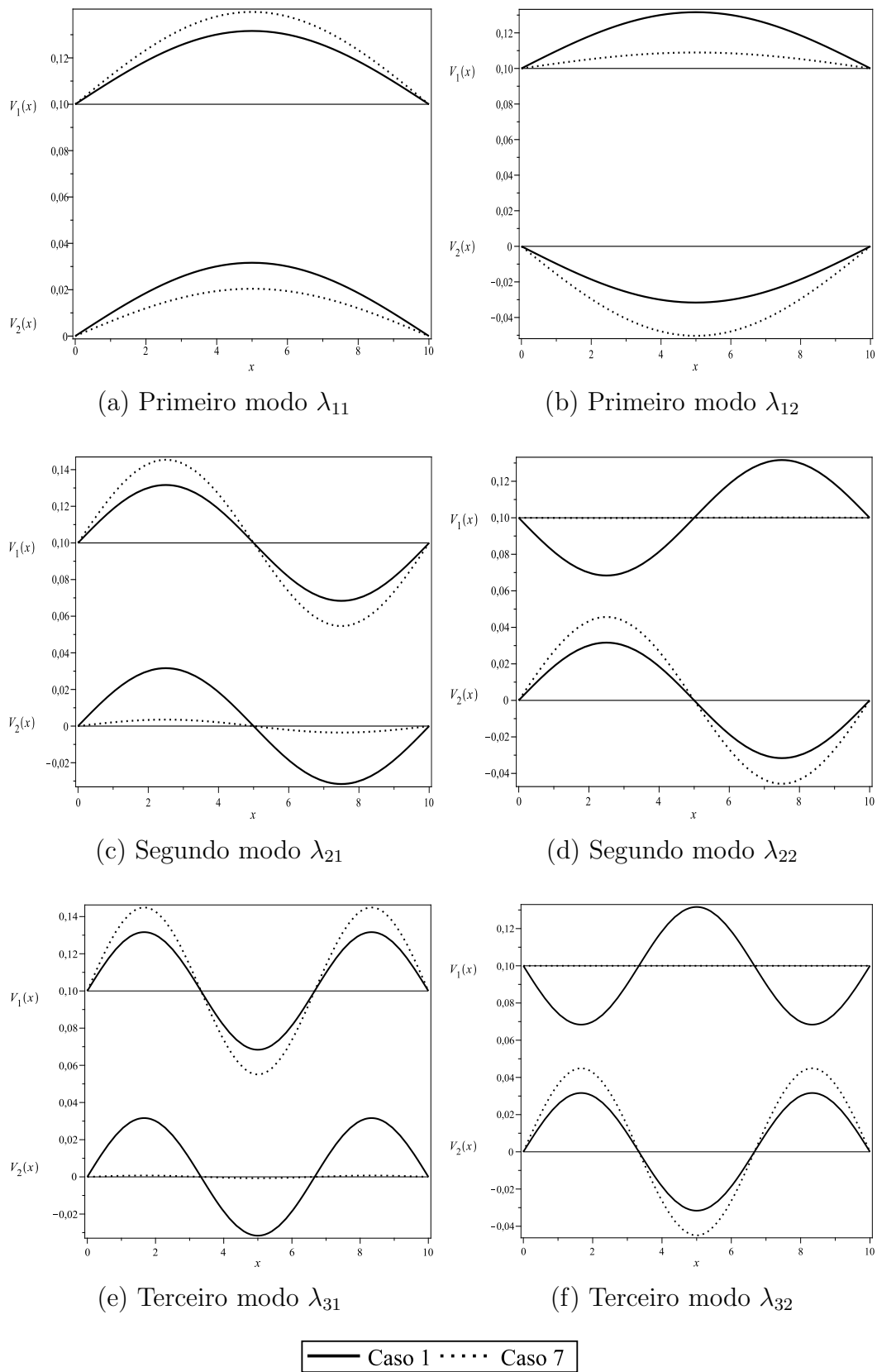


Figura 2.25: Três primeiros modos de vibração para autovalores obtidos nos **CASOS 1 e 7**

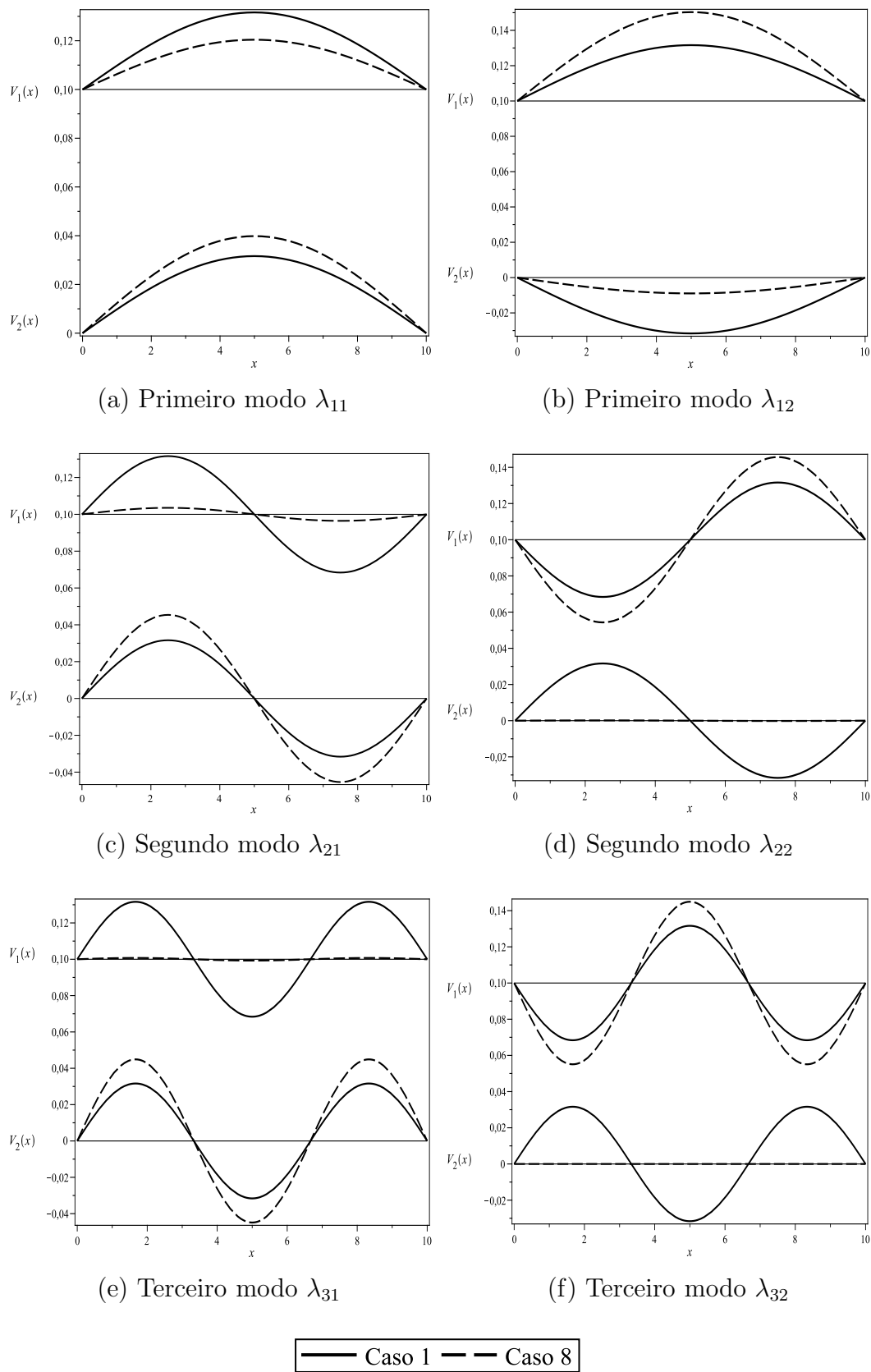


Figura 2.26: Três primeiros modos de vibração para autovalores obtidos nos **CASOS 1** e **8**

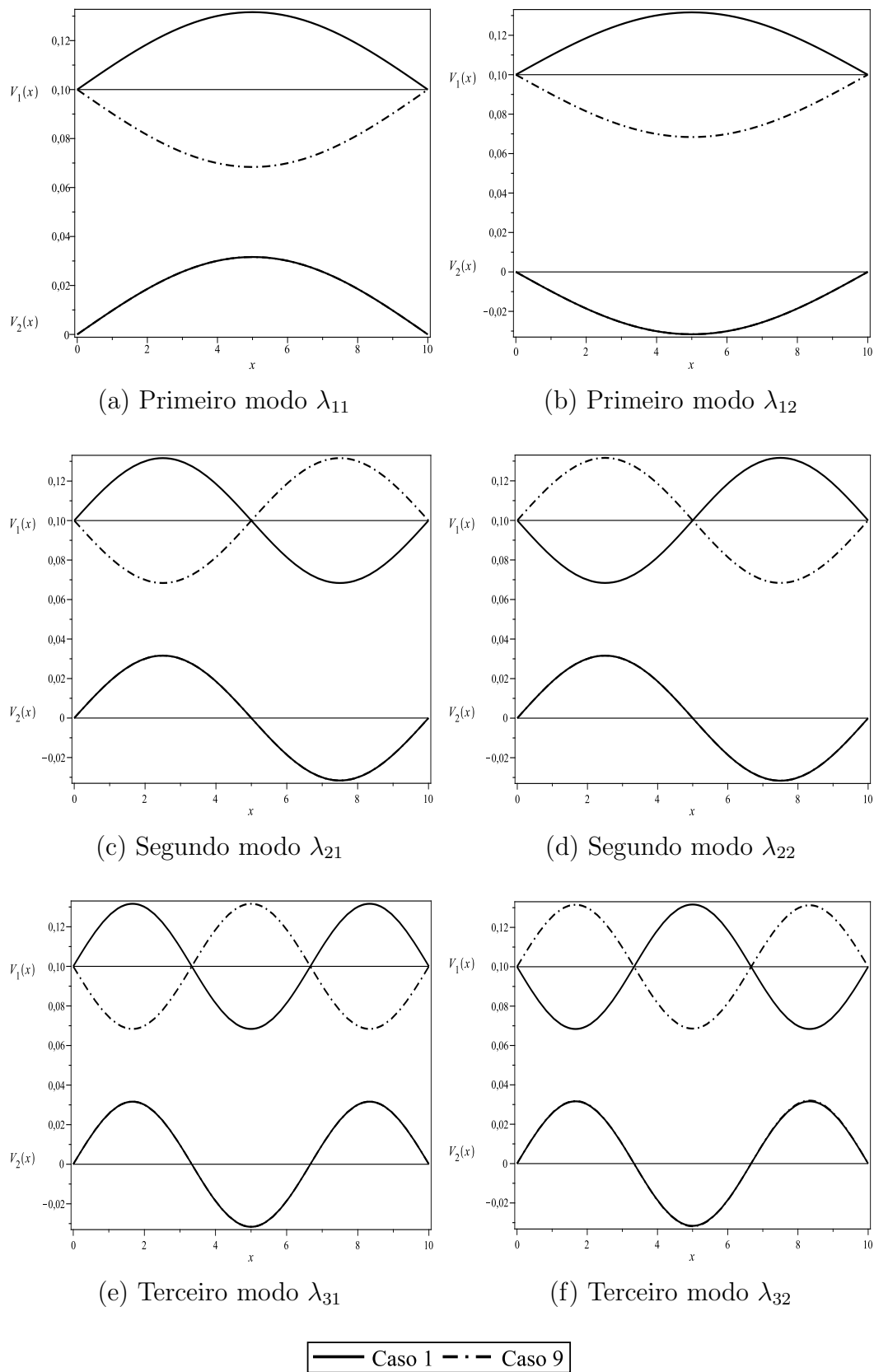


Figura 2.27: Três primeiros modos de vibração para autovalores obtidos nos **CASOS 1** e **9**

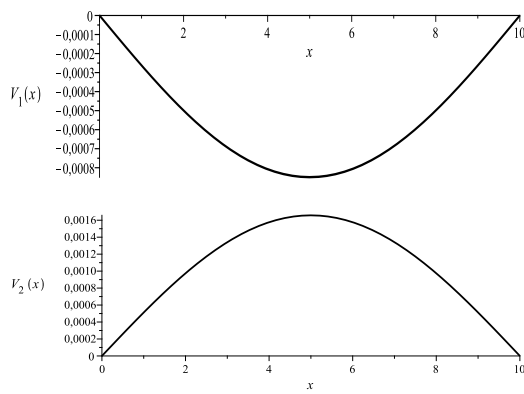
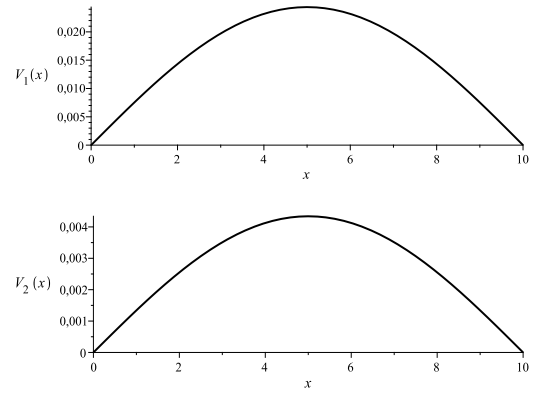
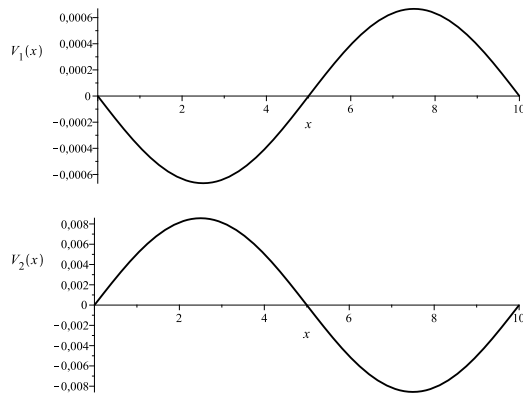
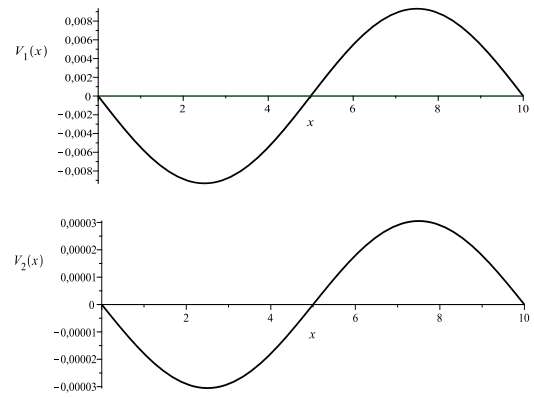
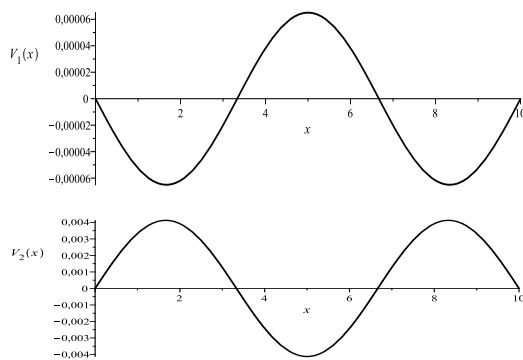
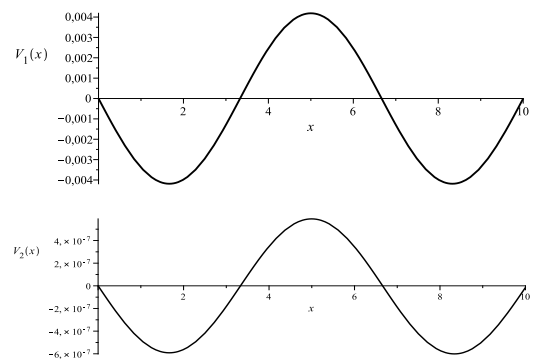
(a) Primeiro modo  $\lambda_{11}$ (b) Primeiro modo  $\lambda_{12}$ (c) Segundo modo  $\lambda_{21}$ (d) Segundo modo  $\lambda_{22}$ (e) Terceiro modo  $\lambda_{31}$ (f) Terceiro modo  $\lambda_{32}$ 

Figura 2.28: Três primeiros modos de vibração para autovalores obtidos no **CASO 7** - Parte imaginária

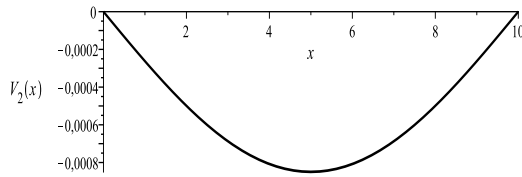
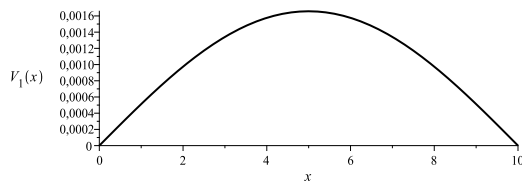
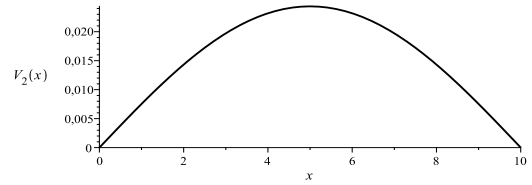
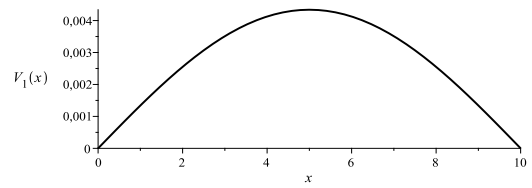
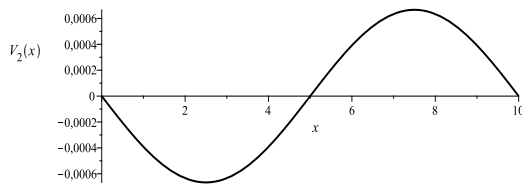
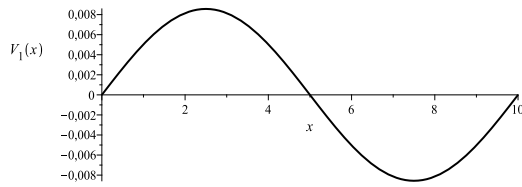
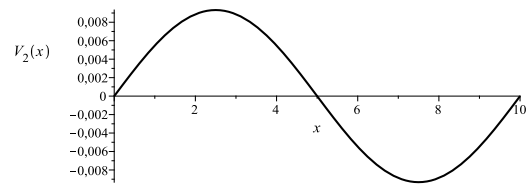
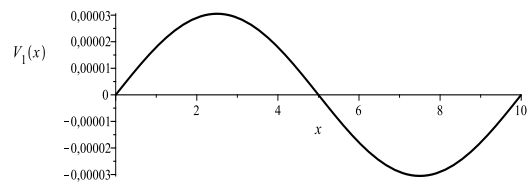
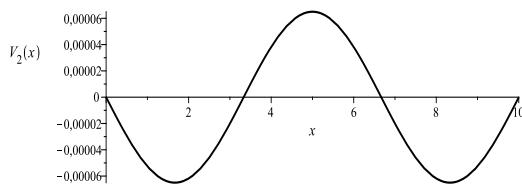
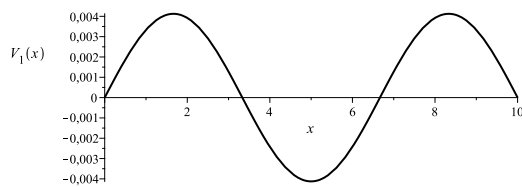
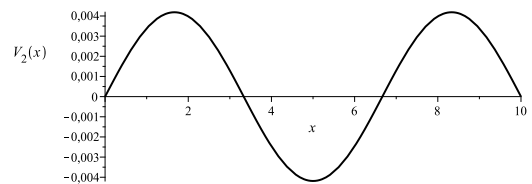
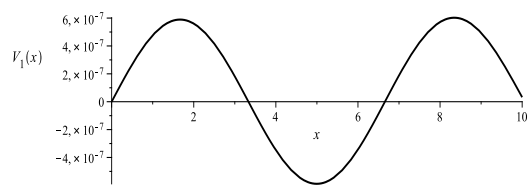
(a) Primeiro modo  $\lambda_{11}$ (b) Primeiro modo  $\lambda_{12}$ (c) Segundo modo  $\lambda_{21}$ (d) Segundo modo  $\lambda_{22}$ (e) Terceiro modo  $\lambda_{31}$ (f) Terceiro modo  $\lambda_{32}$ 

Figura 2.29: Três primeiros modos de vibração para autovalores obtidos no **CASO 8** - Parte imaginária

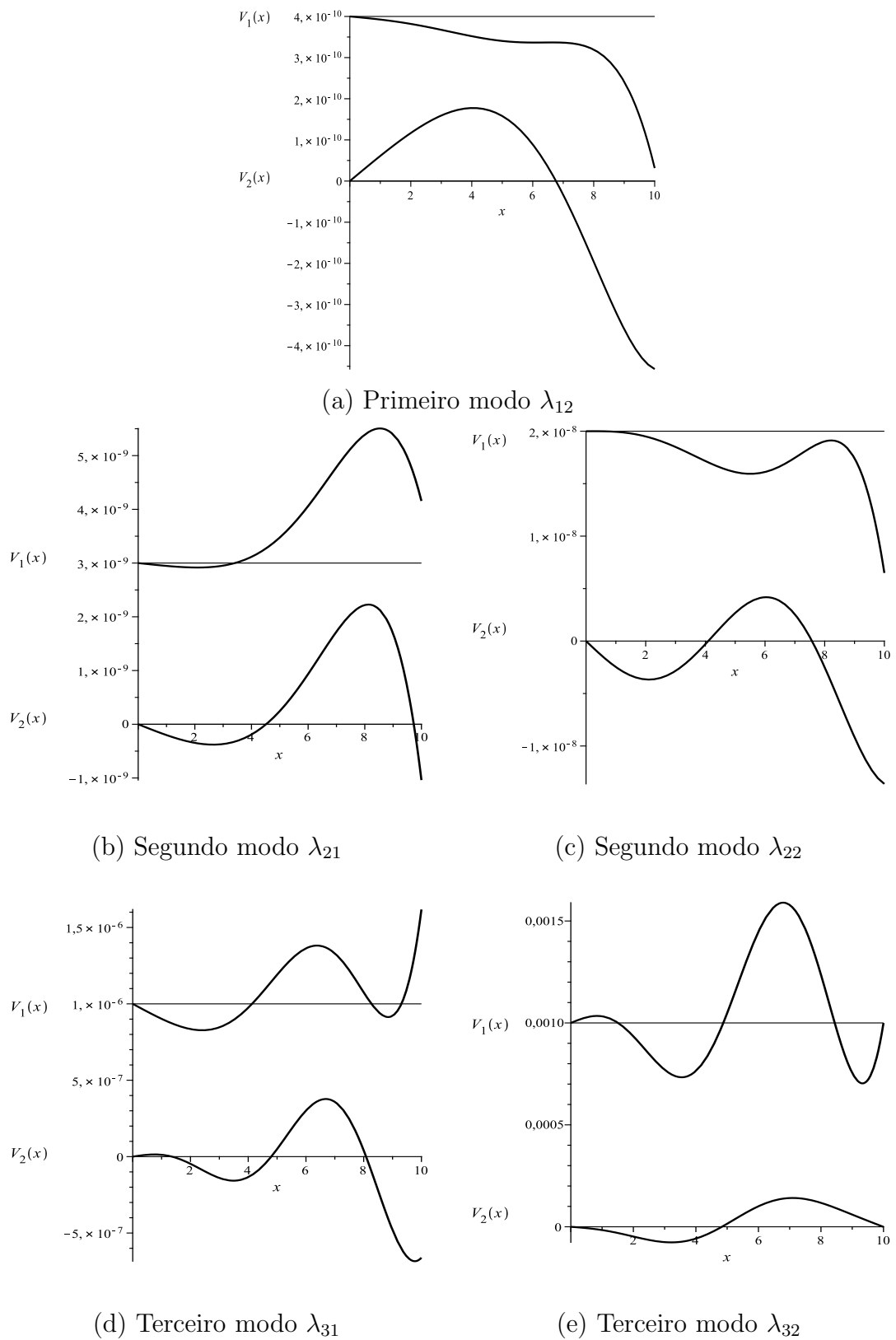


Figura 2.30: Três primeiros modos de vibração para autovalores obtidos no **CASO 9** - Parte imaginária

Observa-se que os autovalores do tipo  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  geram a resposta livre da forma  $v(t, x) = v_R(t, x) + Iv_I(t, x)$  sendo  $v_R$  e  $v_I$  reais e  $I$  a unidade imaginária. Com isso o efeito do amortecimento viscoso pode ser observado nas duas soluções do sistema, isto é, em  $v_R$  e  $v_I$ .

Na Figura ?? apresenta-se a parte real da resposta livre amortecida para o **CASO 7** e na Figura ?? a parte imaginária. Observe que a resposta livre na primeira viga tende ao equilíbrio mais rapidamente do que a resposta livre na segunda viga.

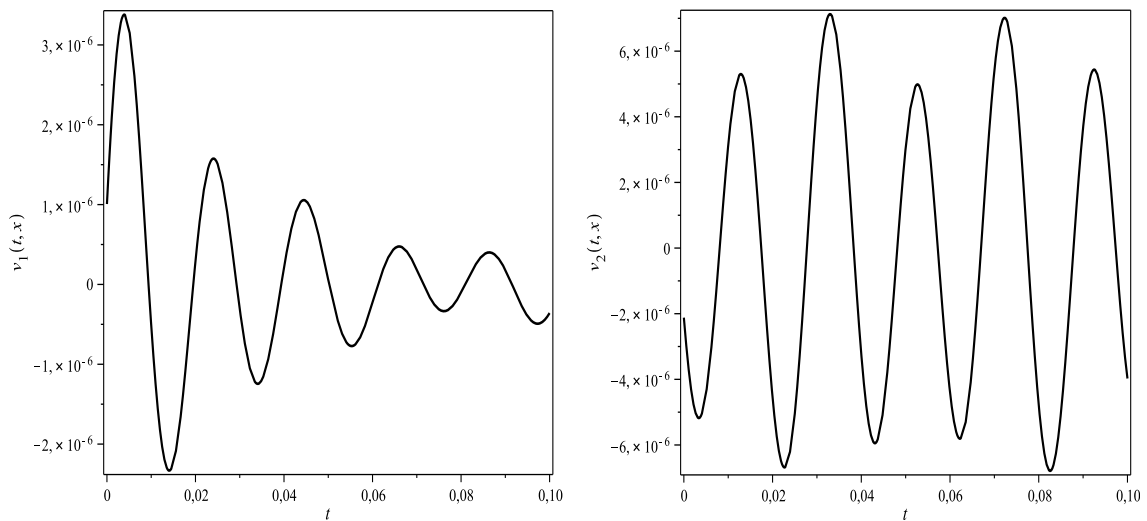


Figura 2.31: Parte real da resposta livre amortecida para o **CASO 7** com um corte em  $x = 9$  no intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 0.1$

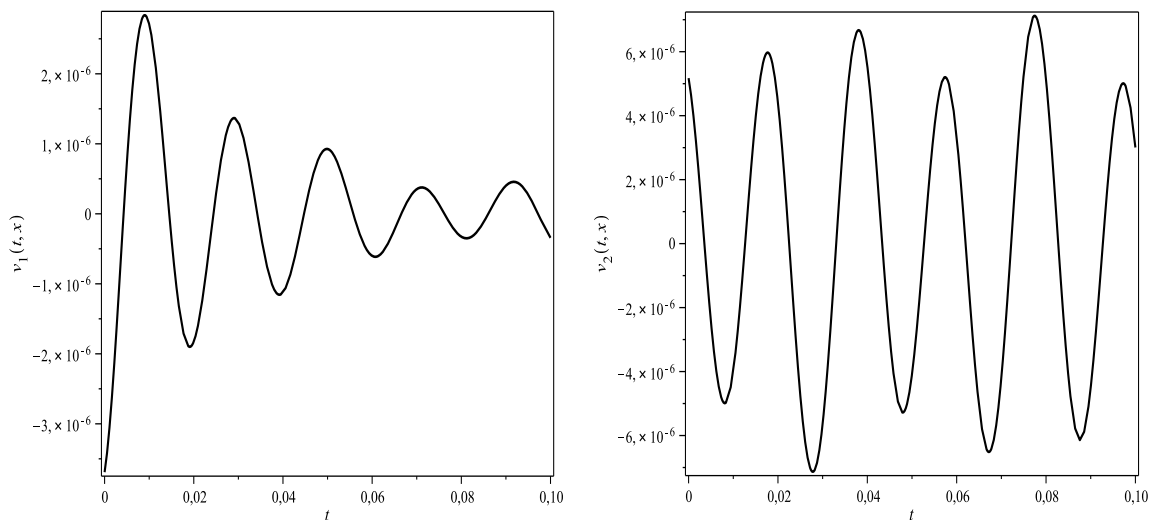


Figura 2.32: Parte imaginária da resposta livre amortecida para o **CASO 7** com um corte em  $x = 9$  no intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 0.1$

Na Figura ?? apresenta-se a parte real da resposta livre amortecida para o **CASO 8** e na Figura ?? a parte imaginária. Observe que a resposta livre na segunda viga tende ao equilíbrio mais rapidamente do que a resposta livre na primeira viga.

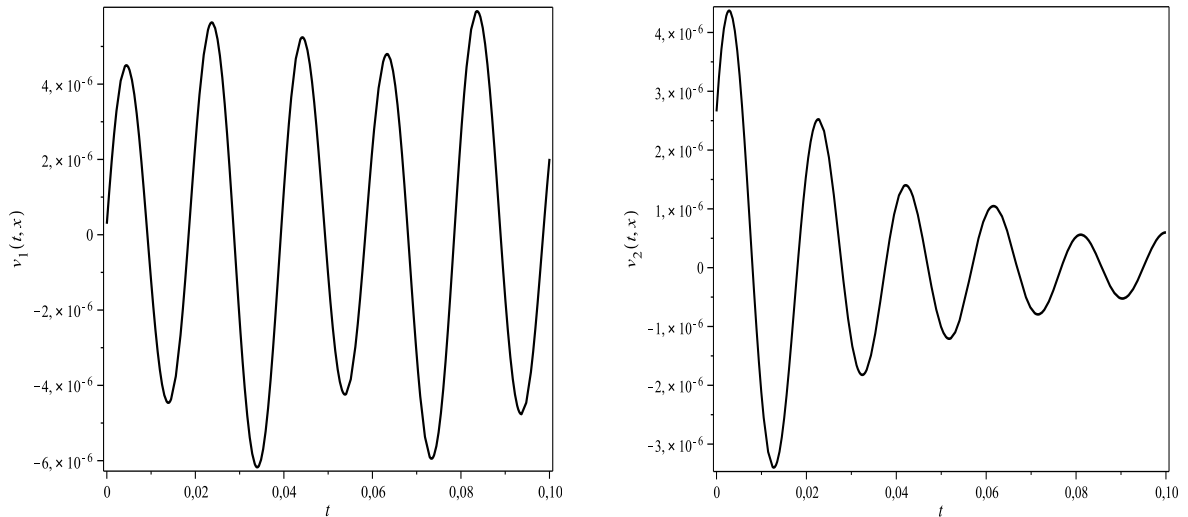


Figura 2.33: Parte real da resposta livre amortecida para o **CASO 8** com um corte em  $x = 9$  e  $0 \leq t \leq 0.1$

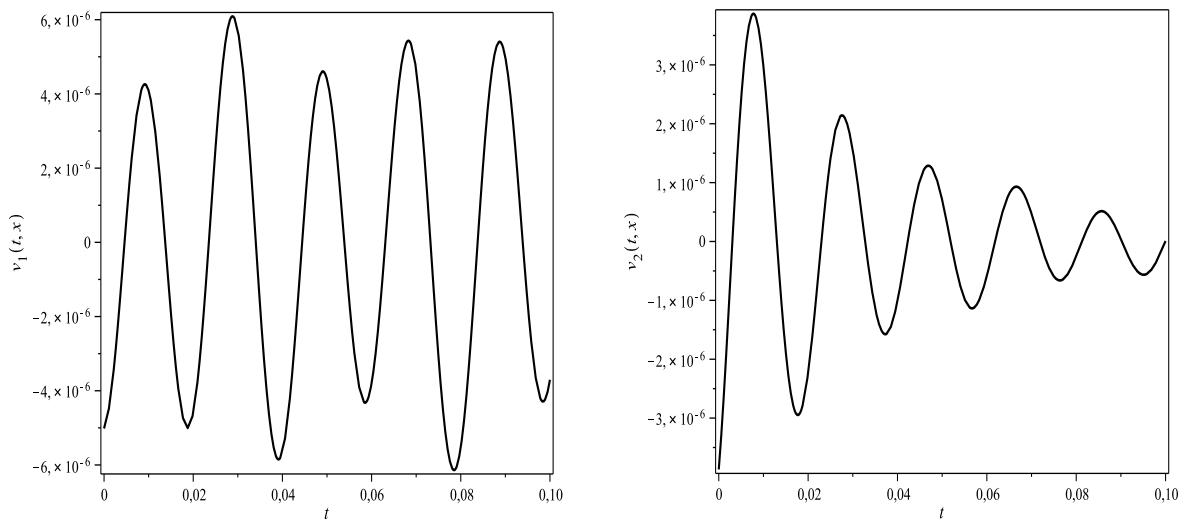


Figura 2.34: Parte imaginária da resposta livre amortecida para o **CASO 8** com um corte em  $x = 9$  e  $0 \leq t \leq 0.1$



Na Figura ?? apresenta-se a parte real da resposta livre amortecida para o **CASO 9** e na Figura ?? a parte imaginária.

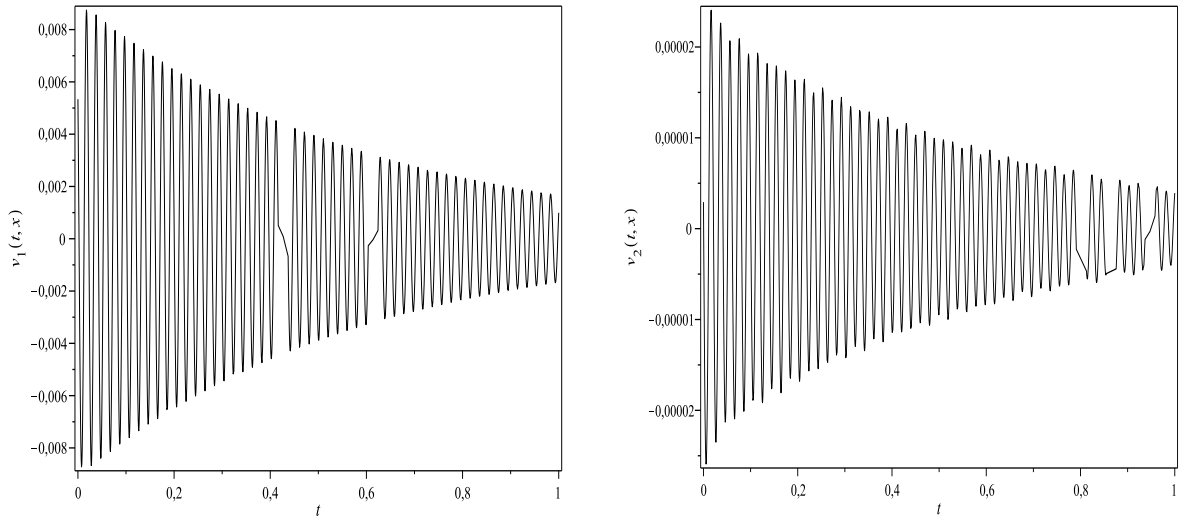


Figura 2.35: Parte real da resposta livre amortecida para o **CASO 9** com um corte em  $x = 9$  e  $0 \leq t \leq 1$

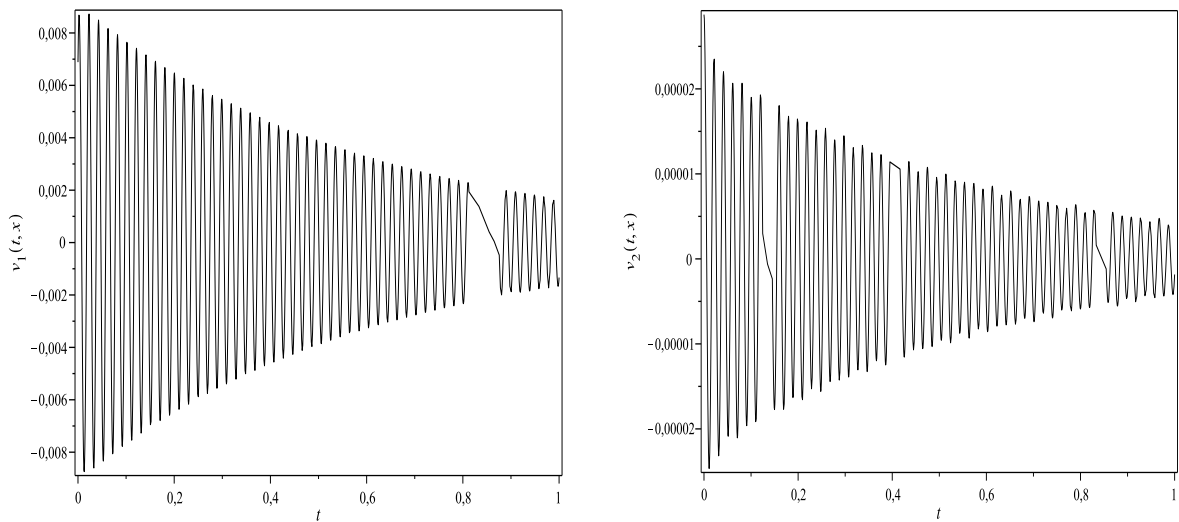


Figura 2.36: Parte imaginária da resposta livre amortecida para o **CASO 9** com um corte em  $x = 9$  e  $0 \leq t \leq 1$

# Capítulo 3

## RESPOSTA FORÇADA

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior foram estudadas as vibrações livres de um sistema, ou seja, sem interferência de uma força externa. Neste capítulo será apresentado o estudo das vibrações forçadas de um sistema de viga dupla simplesmente apoiadas, acopladas por uma camada viscoelástica. O sistema está sujeito a uma força externa. Estuda-se a resposta forçada em duas etapas, com e sem amortecimento. Nos dois casos o teorema dos modos normais é utilizado no desacoplamento do sistema, pois foi considerado o amortecimento de Rayleigh. A resposta forçada do sistema sem e com amortecimento é determinada em termos da resposta impulso matricial.

### 3.2 Resposta forçada sem amortecimento

Considere o sistema de viga dupla acoplado representado pela Figura ???. O sistema consiste de duas vigas paralelas, com a mesma extensão, que são unidas por uma camada elástica. As vigas são homogêneas, prismáticas e esbeltas, o que faz com que seja possível utilizar a teoria da viga de Euler-Bernoulli para a derivação das equações do movimento do sistema. As quatro extremidades das vigas são simplesmente apoiadas.

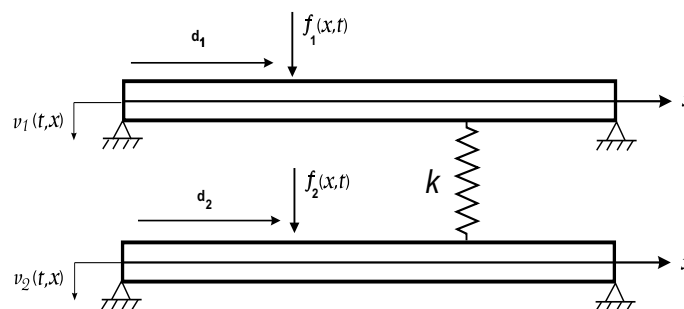


Figura 3.1: Sistema de viga dupla sujeito a uma força externa

As equações governantes para o sistema são dadas pelas seguintes equações diferenciais,

baseadas na teoria da viga de Euler Bernoulli

$$\begin{aligned}\rho_1 A_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + k(v_1 - v_2) + E_1 I_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} &= f_1(t, x), \\ \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + k(v_2 - v_1) + E_2 I_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x^4} &= f_2(t, x),\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $v_i(t, x)$  é a deflexão transversal da viga;  $f_i(t, x)$  representa a carga aplicada na viga;  $k$  representa a constante da mola, a qual compõe a camada elástica;  $E_i I_i$  e  $\rho_i A_i$ , denotam as constantes de rigidez e massa, onde  $E_i$  denota o módulo de elasticidade de Young,  $I_i$  o momento inércia,  $\rho_i$  a densidade de massa por unidade de comprimento e  $A_i$  denota a área da seção transversal da viga  $i$ ,  $i = 1, 2$ .

As condições de contorno do sistema de viga dupla simplesmente apoiadas são

$$v_i(t, 0) = 0 \quad v_i''(t, 0) = 0,\tag{3.2}$$

$$v_i(t, L) = 0 \quad v_i''(t, L) = 0,\tag{3.3}$$

onde  $v_i'' = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}$ ,  $i = 1, 2$ .

As equações (??) podem ser escritas matricialmente:

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{F}(t, x),\tag{3.4}$$

onde  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_k$  é uma matriz simétrica, com

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho_1 A_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 A_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1(t, x) \\ v_2(t, x) \end{pmatrix},\tag{3.5}$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} E_1 I_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}.\tag{3.6}$$

A matriz  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa por unidade de comprimento da viga, positiva definida, a matriz  $\mathbf{K}_0$  é definida positiva composta pelas constantes de rigidez flexural da primeira e segunda viga e a matriz simétrica  $\mathbf{K}_k$  carrega as informações acerca das constantes da mola. O vetor  $\mathbf{v} = [v_1(t, x) \ v_2(t, x)]^T$  é um vetor do espaço  $U = S \times \mathbb{R}^2$ , onde  $S$  é o subespaço de  $C^k[0, L]$  definido pelas condições de contorno do sistema [?].

A solução para (??), pode ser escrita através da integral [?, ?],

$$v(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{F}(\tau, \xi) d\xi d\tau,\tag{3.7}$$

onde  $\mathbf{h}(t, x, \xi)$  é a resposta impulso matricial de ordem dois, e  $\mathbf{F}(t, \xi) = [f_1(t, x) \ f_2(t, x)]^T$

é o vetor força externa. Para a determinação da matriz  $h(t, x, \xi)$ , escreve-se:

$$\mathbf{v}(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{V}^i(x) \eta_i(t), \quad (3.8)$$

onde  $\eta_i(t)$  são coeficientes temporais a serem determinados e  $\mathbf{V}^i(x) = [V_1^i(x), V_2^i(x)]^T$  são os  $i$ -ésimos modos de vibração do sistema. Substituindo (??) em (??), multiplicando à esquerda a equação (??) por  $(\mathbf{V}^j)^T(x)$  e integrando de 0 a  $L$  ambos os lados da equação, segue

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \ddot{\eta}_i(t) \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T(x) \mathbf{M} \mathbf{V}^i(x) dx + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(t) \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T(x) \mathbf{K} \mathbf{V}^i(x) dx = \\ = \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T(x) \mathbf{F}(t, x) dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sejam  $f$  e  $g$  elementos arbitrários do espaço vetorial  $U$ . Definindo o produto interno padrão sobre  $U$  como

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f^T g dx. \quad (3.10)$$

Assumindo que as matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  satisfaçam o teorema dos modos normais

$$\langle \mathbf{K} \mathbf{V}^j(x), \mathbf{V}^i(x) \rangle = \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T(x) \mathbf{K} \mathbf{V}^i(x) dx = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j, \\ \omega_i^2 & , \quad i = j, \end{cases}, \quad (3.11)$$

$$\langle \mathbf{M} \mathbf{V}^j(x), \mathbf{V}^i(x) \rangle = \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T(x) \mathbf{M} \mathbf{V}^i(x) dx = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j, \\ 1 & , \quad i = j, \end{cases}, \quad (3.12)$$

onde  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  são as frequências naturais do sistema. Assim, obtém-se o sistema desacoplado

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = G_i(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

onde

$$G_i(t) = \int_0^L (\mathbf{V}^i)^T(x) \mathbf{F}(t, x) dx. \quad (3.14)$$

A solução da equação (??), considerando condições iniciais nulas,  $\eta_i(0) = 0$  e  $\dot{\eta}_i(0) = 0$ , é dada pela integral de convolução

$$\eta_i(t) = \int_0^t h_i(t - \tau) G_i(\tau) d\tau, \quad (3.15)$$

onde  $h_i(t)$  é a resposta impulso temporal, solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \ddot{h}_i(t) + \omega_i^2 h_i(t) &= 0, \\ h_i(0) &= 0, \quad \dot{h}_i(0) = 1, \end{aligned} \quad (3.16)$$

ou seja,  $h_i(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\omega_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$

Substituindo (??) em (??), obtém-se

$$\mathbf{v}(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{V}^i(x) \int_0^t h_i(t - \tau) G_i(\tau) d\tau. \quad (3.17)$$

Agora, substituindo  $G_i(\tau)$  dado em (??), a resposta forçada pode ser escrita como

$$\mathbf{v}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \sum_{i=1}^{\infty} h_i(t - \tau) \mathbf{V}^i(x) (\mathbf{V}^i)^T(\xi) \mathbf{F}(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (3.18)$$

Comparando (??) com (??)

$$\mathbf{v}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{F}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (3.19)$$

onde

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1(t, x) \\ v_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

a matriz  $\mathbf{h}(t, x, \xi)$  é dada como

$$\mathbf{h}(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(t) \mathbf{V}^i(x) (\mathbf{V}^i)^T(\xi). \quad (3.21)$$

Assim, de (??), pode-se obter a resposta forçada da primeira e segunda vigas:

$$v_1(t, x) = \int_0^t \int_0^L (h_{11}(t - \tau, x, \xi) f_1(\tau, \xi) + h_{12}(t - \tau, x, \xi) f_2(\tau, \xi)) d\xi d\tau, \quad (3.22)$$

$$v_2(t, x) = \int_0^t \int_0^L (h_{21}(t - \tau, x, \xi) f_1(\tau, \xi) + h_{22}(t - \tau, x, \xi) f_2(\tau, \xi)) d\xi d\tau. \quad (3.23)$$

### 3.2.1 Simulações

Nesta seção são apresentadas simulações para o sistema forçado representado pela Figura ???. Para facilitar os cálculos considera-se as vigas idênticas, ou seja,

$$E_1 I_1 = E_2 I_2 = EI, \quad \rho_1 A_1 = \rho_2 A_2 = \rho A. \quad (3.24)$$

São utilizados os parâmetros dados pela Tabela ?? [?].

Considerando uma força aplicada num ponto fixo  $x = x_L$  na primeira viga, isto é, um forçante

$$f_1(t, x) = f(t)\delta(x - x_L), \quad (3.25)$$

onde  $\delta$  é a função  $\delta$  de Dirac e  $x_L$  é um ponto qualquer da viga para  $0 \leq L \leq 10$ , e  $f_2(t, x) = 0$ , tem-se que a resposta forçada em cada viga, dada por (??) e (??), pode ser escrita:

$$v_1(t, x) = \int_0^t \int_0^L h_{11}(t - \tau, x, \xi) f(\tau) \delta(\xi - x_L) d\xi d\tau, \quad (3.26)$$

$$v_2(t, x) = \int_0^t \int_0^L h_{21}(t - \tau, x, \xi) f(\tau) \delta(\xi - x_L) d\xi d\tau. \quad (3.27)$$

Usando a seguinte propriedade da função Delta de Dirac

$$\int_0^L g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0), \quad (3.28)$$

obtém-se a resposta forçada para o sistema de viga dupla

$$v_1(t, x) = \int_0^t f(\tau) h_{11}(t - \tau, x, x_L) d\tau, \quad (3.29)$$

$$v_2(t, x) = \int_0^t f(\tau) h_{21}(t - \tau, x, x_L) d\tau. \quad (3.30)$$

A resposta impulso matricial é apresentada nas Figuras ?? e ??, sendo que na primeira figura encontram-se os gráficos que representam o comportamento das componentes  $h_{11}$  e  $h_{21}$  para  $\xi = 4$  e na segunda encontram-se os gráficos que correspondem ao seu comportamento no ponto  $x = 5$ .

A resposta forçada do sistema de viga dupla estão descritas em (??) e (??) com um forçante aplicado num ponto da primeira viga dado por (??). As simulações foram realizadas considerando os seguintes tipos de forçante  $f_1(t) = f(t)\delta(x - x_L)$ , onde:

$$f(t) = \begin{cases} P_0, \\ P_0 \sin(nt). \end{cases} \quad (3.31)$$

A seguir, nas Figuras ?? a ??, a primeira e segunda coluna de cada figura referem-se à resposta forçada na primeira e segunda viga, respectivamente.

Nas Figuras ?? e ?? é apresentado o comportamento da resposta forçada, sendo que a Figura ?? mostra a resposta forçada para o forçante  $f(t) = P_0 = 100$ , já a Figura ?? apresenta a resposta forçada para  $f(t) = 100 \sin(3t)$ . Nas duas figuras os forçantes foram aplicados nos pontos  $x = 1$ ,  $x = 5$  e  $x = 9$  da primeira viga.

Na Figura ?? foram comparadas as oscilações da resposta forçada nos pontos  $x = 1$ ,  $x = 5$  e  $x = 9$  para o forçante  $f(t) = P_0 = 100$ .

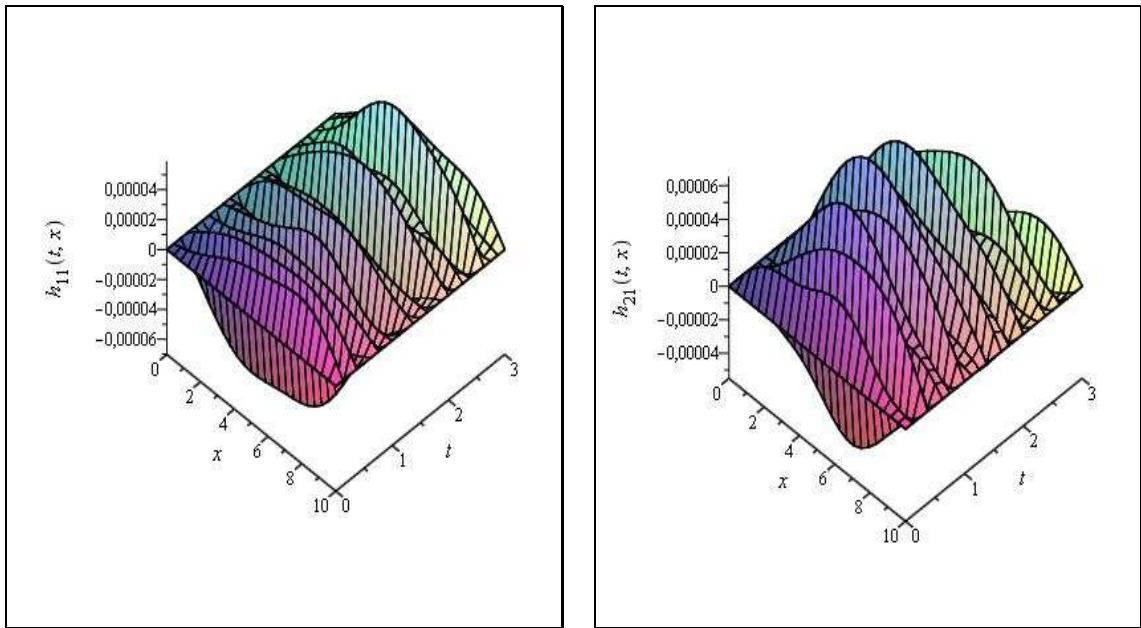


Figura 3.2: Componentes  $h_{11}$  e  $h_{21}$  da resposta impulso matricial para  $0 \leq t \leq 3$  e  $0 \leq x \leq 10$

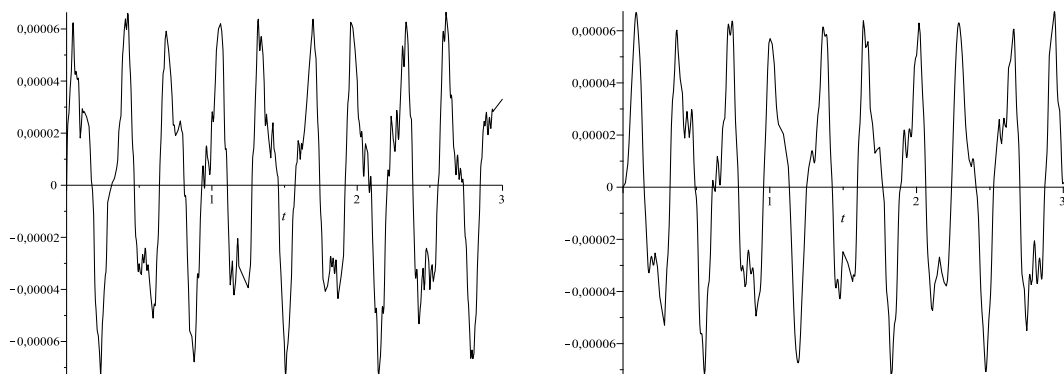


Figura 3.3: Componentes  $h_{11}$  e  $h_{21}$  da resposta impulso matricial com um corte em  $x = 5$  para  $0 \leq t \leq 3$

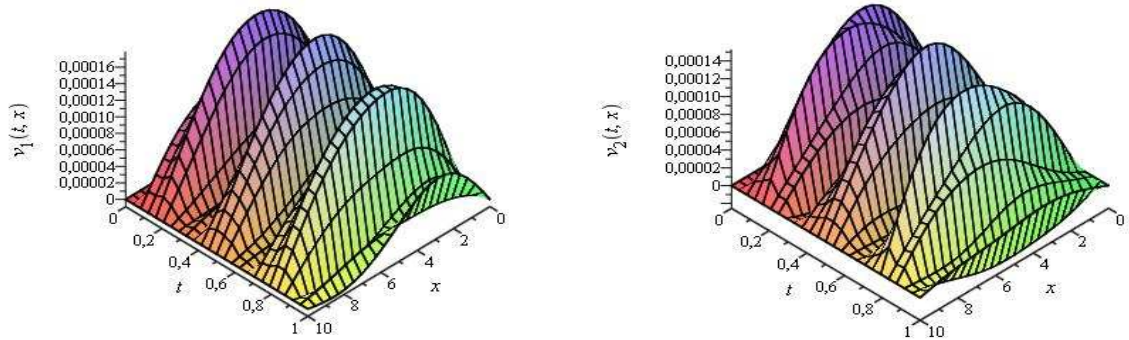
Na Figura ?? foram comparadas as oscilações da resposta forçada nos pontos  $x = 1$ ,  $5$  e  $x = 9$  para o forçante  $f(t) = 100 \sin(3t)$ .

Nas Figuras ?? e ?? pode-se observar que a amplitude das oscilações é maior na primeira viga, nos três pontos onde foi aplicada a força, o que era esperado, já que a força foi aplicada na primeira viga. A amplitude no meio das vigas ( $x = 5$ ) é maior do que nas extremidades, uma vez que as vigas são bi-apoiadas.

---

Forçante aplicado no ponto  $x_L = 1$  da primeira viga

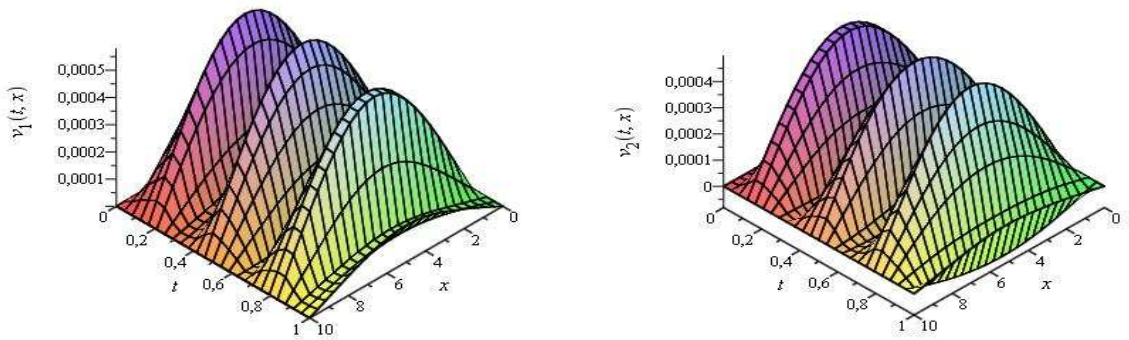
---



---

Forçante aplicado no ponto  $x_L = 5$  da primeira viga

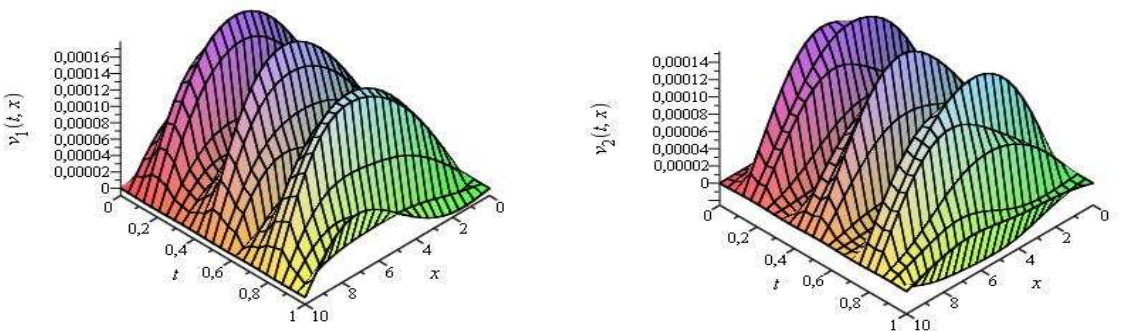
---



---

Forçante aplicado no ponto  $x_L = 9$  da primeira viga

---



---

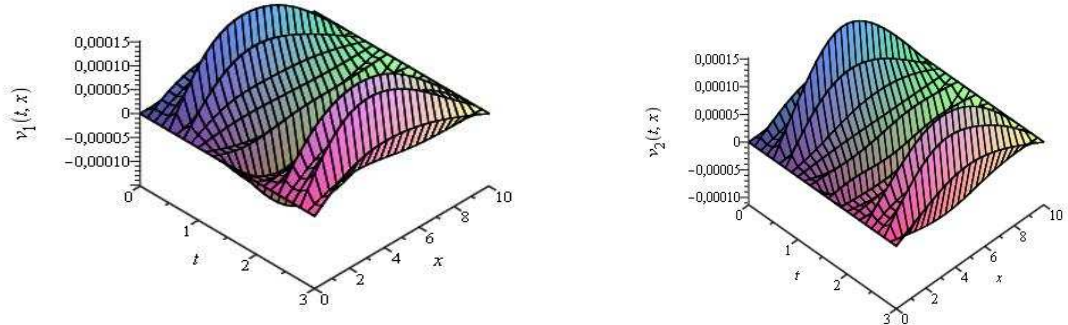
Figura 3.4: Resposta forçada para o forçante  $f(t) = 100$



---

Forçante aplicado no ponto  $x_L = 1$  da primeira viga

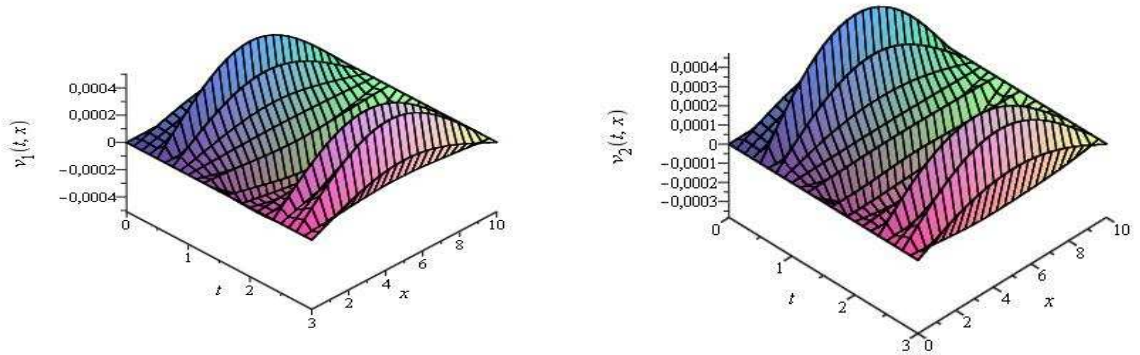
---



---

Forçante aplicado no ponto  $x_L = 5$  da primeira viga

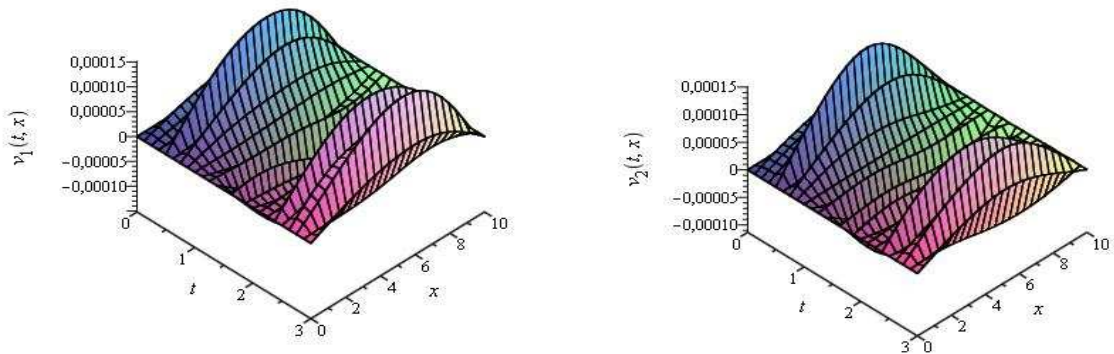
---



---

Forçante aplicado no ponto  $x_L = 9$  da primeira viga

---



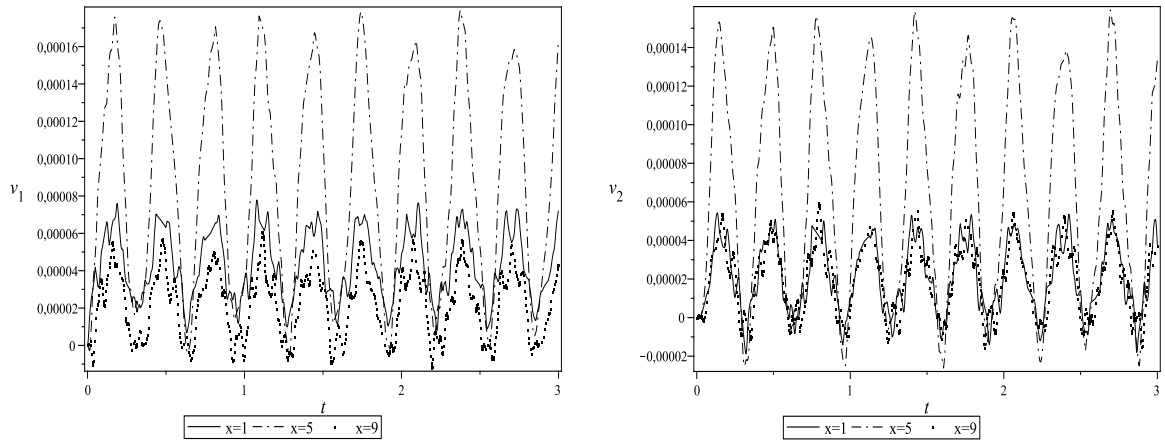
---

Figura 3.5: Resposta forçada para o forçante  $f(t) = 100 \sin(3t)$

---

 Forçante aplicado no ponto  $x_L = 1$  da primeira viga
 

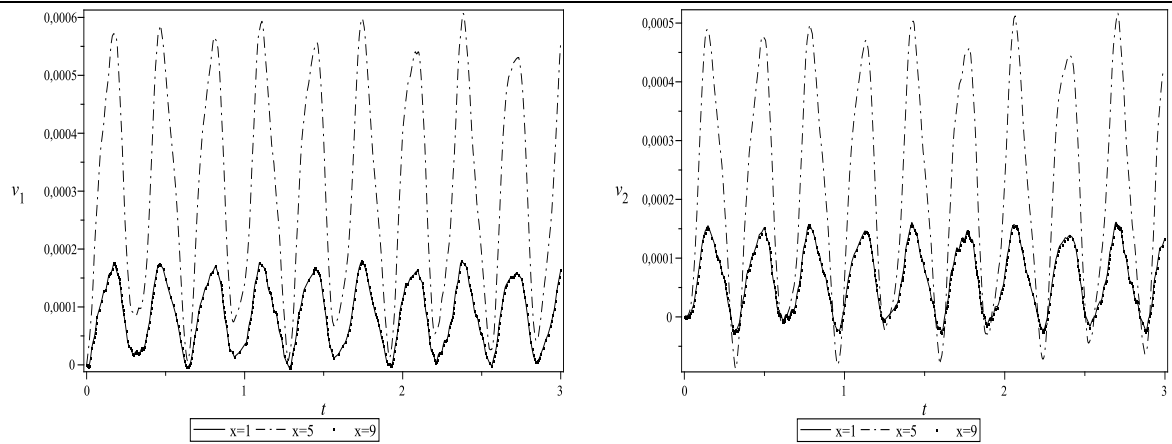
---

(a) Corte nos pontos  $x = 1$ ,  $x = 5$  e  $x = 9$  para  $0 \leq t \leq 3$ 


---

 Forçante aplicado no ponto  $x_L = 5$  da primeira viga
 

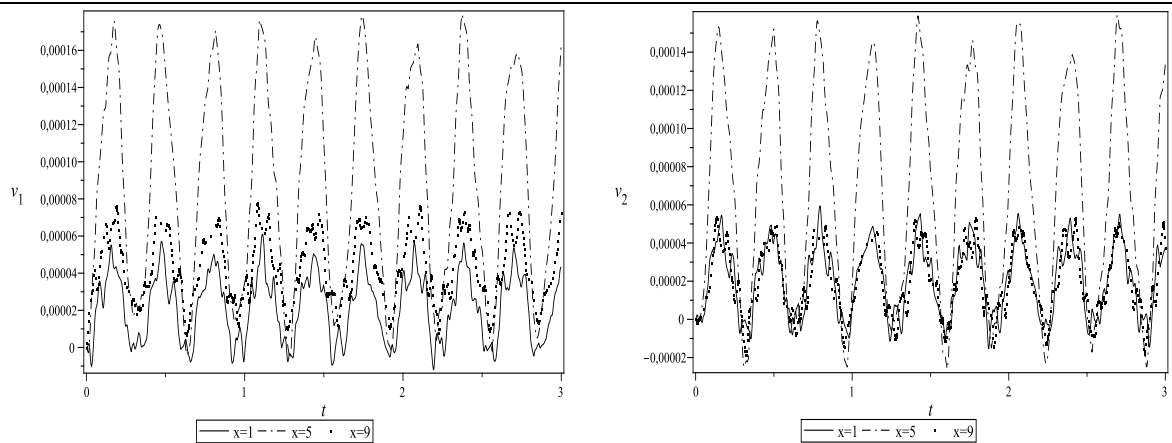
---

(b) Corte nos pontos  $x = 1$ ,  $x = 5$  e  $x = 9$  para  $0 \leq t \leq 3$ 


---

 Forçante aplicado no ponto  $x_L = 9$  da primeira viga
 

---

(c) Corte nos pontos  $x = 1$ ,  $x = 5$  e  $x = 9$  para  $0 \leq t \leq 3$ 

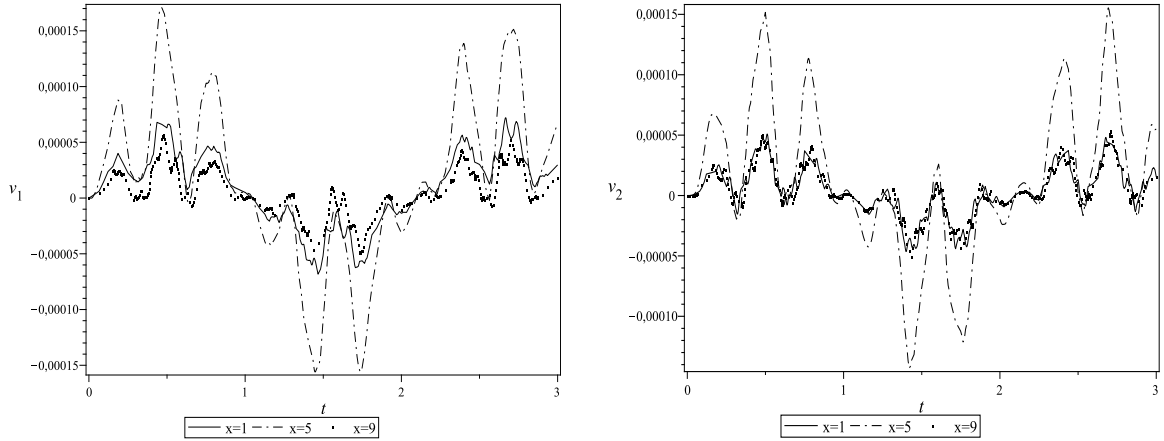

---

 Figura 3.6: Corte na resposta forçada para o forçante  $f(t) = P_0 = 100$

---

 Forçante aplicado no ponto  $x_L = 1$  da primeira viga
 

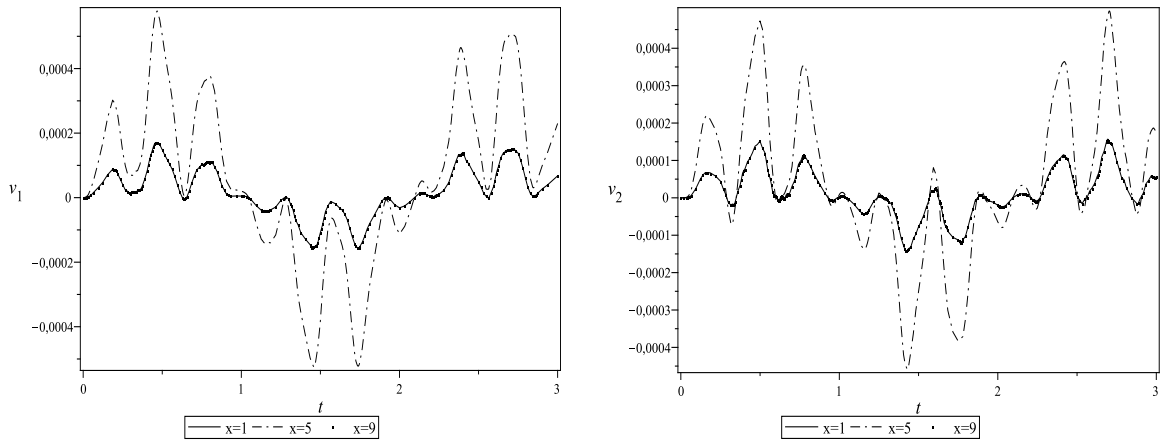
---

(a) Corte nos pontos  $x = 1$ ,  $x = 5$  e  $x = 9$  para  $0 \leq t \leq 3$ 


---

 Forçante aplicado no ponto  $x_L = 5$  da primeira viga
 

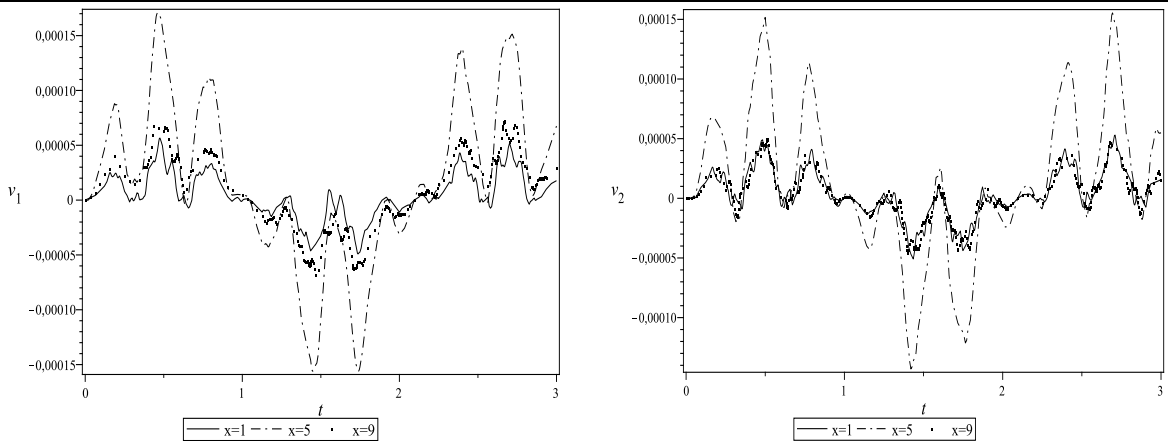
---

(b) Corte nos pontos  $x = 1$ ,  $x = 5$  e  $x = 9$  para  $0 \leq t \leq 3$ 


---

 Forçante aplicado no ponto  $x_L = 9$  da primeira viga
 

---

(c) Corte nos pontos  $x = 1$ ,  $x = 5$  e  $x = 9$  para  $0 \leq t \leq 3$ 


---

 Figura 3.7: Corte nos pontos na resposta forçada para o forçante  $f(t) = 100 \sin(3t)$

### 3.3 Resposta forçada com amortecimento

Considere o sistema de dupla viga sujeito a uma força externa descrito na Seção ???. Nesta seção supõem-se que as vigas estão unidas por uma camada viscoelástica. Esta camada é formada por uma mola e amortecedor, conforme Figura ???. As equações que

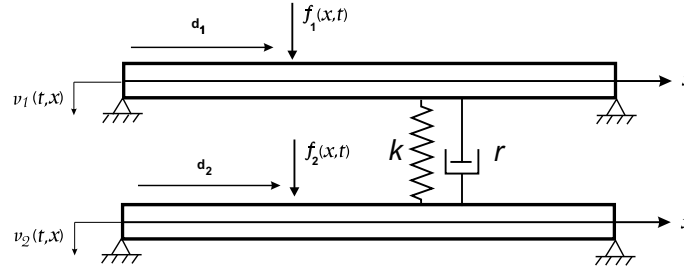


Figura 3.8: Sistema de viga dupla com amortecimento sujeito a uma força externa

governam o sistema amortecido são dadas pelas seguintes equações diferenciais, baseadas na teoria da viga de Euler Bernoulli

$$\begin{aligned} \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + r \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) + k(v_1 - v_2) + E_1 I_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} &= f_1(t, x), \\ \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + r \left( \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) + k(v_2 - v_1) + E_2 I_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x^4} &= f_2(t, x), \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde  $v_i(t, x)$  é a deflexão transversal da viga  $i$ ;  $f_i(t, x)$  representa a carga aplicada na viga  $i$ ;  $k$  e  $r$  representam a constante da mola e amortecimento, respectivamente, que modelam a camada viscoelástica;  $c_i$  é o amortecimento do material de cada viga;  $E_i I_i$  e  $\rho_i A_i$  denotam as constantes de rigidez e massa por unidade de comprimento, onde  $E_i$  denota o módulo de elasticidade de Young,  $I_i$  o momento inércia,  $\rho_i$  a densidade de massa e  $A_i$  denota a área da seção transversal da viga  $i$ ,  $i = 1, 2$ .

As condições de contorno do sistema de viga dupla simplesmente apoiadas são

$$\begin{aligned} v_i(t, 0) = 0 \quad v_i''(t, 0) = 0, \\ v_i(t, L) = 0 \quad v_i''(t, L) = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde  $v_i'' = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}$ ,  $i = 1, 2$ . As equações (??) podem ser escritas matricialmente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t, x) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}}(t, x) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t, x) = \mathbf{F}(t, x) \quad (3.34)$$

onde  $\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ ,  $\ddot{\mathbf{v}} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}$  e  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_k$  é uma matriz simétrica, com

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho_1 A_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 A_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + r & -r \\ -r & c_2 + r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} E_1 I_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1(t, x) \\ v_2(t, x) \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

A matriz  $\mathbf{M}$  é a matriz positiva definida de massa por unidade de comprimento da viga, a matriz simétrica  $\mathbf{C}$  carrega as constantes de amortecimento das vigas e da camada entre as vigas, a matriz  $\mathbf{K}_0$  é definida positiva composta pelas constantes de rigidez flexural da primeira e segunda viga e a matriz simétrica  $\mathbf{K}_k$  carrega as informações acerca das constantes da mola.

Diferentemente do caso não-amortecido, não há como desacoplar a equação (??) através da ortogonalidade dos modos. A condição especial de distribuição de amortecimento que permite a diagonalização da matriz  $\mathbf{C}$ , assim como as matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  é o amortecimento proporcional [?].

A proposta de amortecimento proporcional foi indicada por Rayleigh em seu trabalho *A Teoria do Som*, em que a matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  é combinação linear das matrizes de massa e rigidez, isto é:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (3.37)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais e positivas e portanto o Teorema dos Modos Normais [?, ?] é válido, ou seja as propriedades de ortogonalidade entre os modos continuam válidas. A equação (??) pode, então, ser desacoplada assim como a equação matricial de um sistema não-amortecido. Substituindo (??) em (??) leva a:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t, x) + [\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}]\dot{\mathbf{v}}(t, x) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t, x) = \mathbf{F}(t, x). \quad (3.38)$$

Supondo uma solução do tipo

$$\mathbf{v}(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{V}^i(x) \eta_i(t), \quad (3.39)$$

onde  $\eta_i(t)$  são coeficientes temporais a serem determinados e  $\mathbf{V}^i(x) = [V_1^i(x) V_2^i(x)]^T$  são os modos de vibração do sistema não amortecido, o qual desacopla  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$ .

Repetindo-se aqui, o processo de desacoplamento para o caso forçado não amortecido, ou seja, substituindo a solução (??) na equação (??), multiplicando à esquerda a equação (??) por  $(\mathbf{V}^j)^T(x)$  e integrando de 0 a  $L$  ambos os lados da equação, segue

$$\sum_{i=0}^{\infty} \ddot{\eta}_i(t) \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T(x) \mathbf{M} \mathbf{V}^i(x) dx + \sum_{i=0}^{\infty} \dot{\eta}_i(t) \int_0^L [\alpha (\mathbf{V}^j)^T \mathbf{M} \mathbf{V}^i + \beta (\mathbf{V}^j)^T \mathbf{K} \mathbf{V}^i] + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(t) \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T(x) \mathbf{K} \mathbf{V}^i(x) dx = \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T(x) \mathbf{F}(t, x) dx.$$

ou ainda,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \ddot{\eta}_i(t) \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T(x) \mathbf{M} \mathbf{V}^i(x) dx + \sum_{i=0}^{\infty} \dot{\eta}_i(t) \alpha \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T \mathbf{M} \mathbf{V}^i + \sum_{i=0}^{\infty} \dot{\eta}_i(t) \beta \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T \mathbf{K} \mathbf{V}^i + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(t) \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T(x) \mathbf{K} \mathbf{V}^i(x) dx = \int_0^L (\mathbf{V}^j)^T(x) \mathbf{F}(t, x) dx,$$

Utilizando o Teorema dos Modos Normais dado por (??) e (??), e o produto interno padrão (??), levará à seguinte equação desacoplada:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = \mathbf{G}_i(t), \quad (3.40)$$

onde

$$\mathbf{G}_i(t) = \int_0^L (\mathbf{V}^i)^T(x) \mathbf{F}(t, x) dx \quad (3.41)$$

e

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \beta \omega_i + \frac{1}{2\omega_i} \alpha \quad (3.42)$$

é a relação de amortecimento, onde  $\omega_i$  são as frequências naturais do sistema sem amortecimento.

A solução geral da equação (??), considerando condições iniciais nulas,  $\eta(0) = 0$  e  $\dot{\eta}(0) = 0$ , depende do valor de  $\zeta_i$ . Neste trabalho considera-se o caso subamortecido, ou seja  $0 < \zeta_i < 1$ , logo a solução é dada pela integral de convolução

$$\eta_i(t) = \int_0^t \mathbf{h}_i(t - \tau) \mathbf{G}_i(\tau) d\tau, \quad (3.43)$$

onde  $\mathbf{h}_i(t)$  é a resposta impulso temporal, solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{h}}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\mathbf{h}}_i(t) + \omega_i^2 \mathbf{h}_i(t) &= 0 \\ \mathbf{h}_i(0) = 0 \quad \dot{\mathbf{h}}_i(0) &= 1, \end{aligned} \quad (3.44)$$

isto é,

$$\mathbf{h}_i(t) = \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta_i \omega_i t} \sin \omega_d t, \quad (3.45)$$

onde  $\omega_d = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$  é a frequência de amortecimento. Observe que a frequência amortecida  $\omega_d$  depende da frequência  $\omega_i$  do sistema sem amortecimento. Substituindo (??) em (??)

$$\mathbf{v}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{h}_i(t - \tau) \mathbf{V}^i(x) (\mathbf{V}^i)^T(\xi) \mathbf{F}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (3.46)$$

ou ainda

$$\mathbf{v}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{F}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (3.47)$$

onde

$$\mathbf{h}(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{h}_i(t) \mathbf{V}^i(x) (\mathbf{V}^i)^T(\xi) \quad (3.48)$$

é a resposta impulso matricial e as matrizes  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{v}$  são dadas por

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1(t, x) \\ v_2(t, x) \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Assim, obtém-se a resposta forçada na primeira e segunda viga,

$$v_1(t, x) = \int_0^t \int_0^L (h_{11}(t - \tau, x, \xi) f_1(\tau, \xi) + h_{12}(t - \tau, x, \xi) f_2(\tau, \xi)) d\xi d\tau, \quad (3.50)$$

$$v_2(t, x) = \int_0^t \int_0^L (h_{21}(t - \tau, x, \xi) f_1(\tau, \xi) + h_{22}(t - \tau, x, \xi) f_2(\tau, \xi)) d\xi d\tau. \quad (3.51)$$

### 3.3.1 Simulações

Nestas simulações são utilizados os parâmetros dados pela Tabela ?? [?] e  $\alpha = 0.5$  e  $\beta = 0.01$ .

Considerando uma força aplicada num ponto fixo  $x = x_L$  na primeira viga

$$f_1(t, x) = f(t) \delta(x - x_L), \quad (3.52)$$

onde  $\delta$  é a função Delta de Dirac e  $x_L$  é um ponto qualquer da viga para  $0 \leq L \leq 10$ , e  $f_2(t, x) = 0$ . A resposta forçada em cada viga, dada por (??) e (??), pode ser escrita:

$$v_1(t, x) = \int_0^t \int_0^L h_{11}(t - \tau, x, \xi) f(\tau) \delta(\xi - x_L) d\xi d\tau, \quad (3.53)$$

$$v_2(t, x) = \int_0^t \int_0^L h_{21}(t - \tau, x, \xi) f(\tau) \delta(\xi - x_L) d\xi d\tau. \quad (3.54)$$

Utilizando a propriedade da função  $\delta$  de Dirac dada por (??), obtém-se a resposta forçada para o sistema viga dupla

$$\begin{aligned} v_1(t, x) &= \int_0^t \mathbf{f}(\tau) h_{11}(t - \tau, x, x_L) d\tau, \\ v_2(t, x) &= \int_0^t \mathbf{f}(\tau) h_{21}(t - \tau, x, x_L) d\tau. \end{aligned} \quad (3.55)$$

As seguintes simulações foram realizadas considerando o seguinte forçante:

$$f(t) = P_0 \cos(nt) \quad (3.56)$$

Na Figura ?? é apresentado um corte em  $x = 5$  no intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 3$  nas componentes  $h_{11}$  e  $h_{21}$  da resposta impulso matricial.

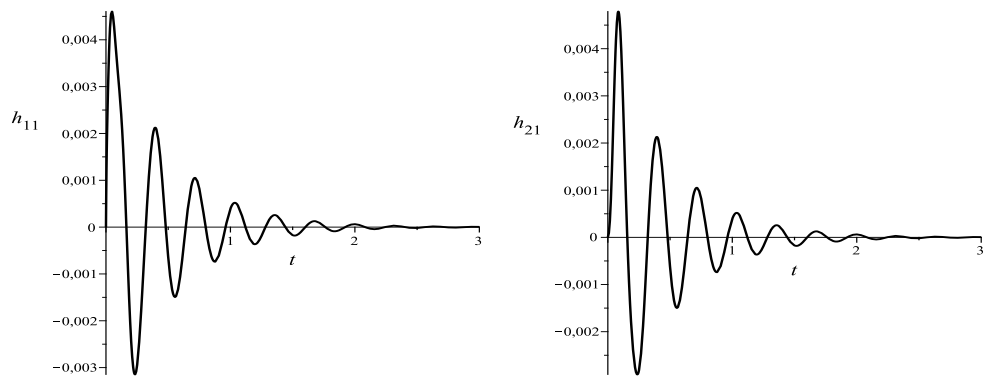


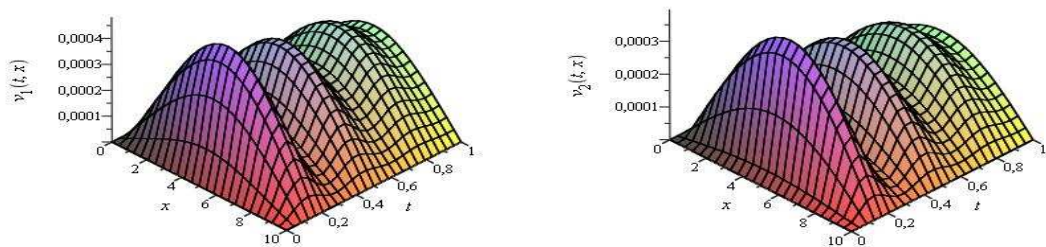
Figura 3.9: Componentes  $h_{11}$  e  $h_{21}$  da resposta impulso matricial para  $x = 5$  e  $0 \leq t \leq 3$

Na Figura ?? é apresentado o comportamento da resposta forçada com amortecimento, para o forçante  $f(t) = 100 \cos(\frac{1}{10}t)$ . A primeira coluna da Figura ?? refere-se a resposta forçada na primeira viga e a segunda coluna refere-se a resposta forçada na segunda viga.

---

Forçante aplicado no ponto  $x_L = 5$  da primeira viga

---




---

Forçante aplicado no ponto  $x_L = 9$  da primeira viga

---

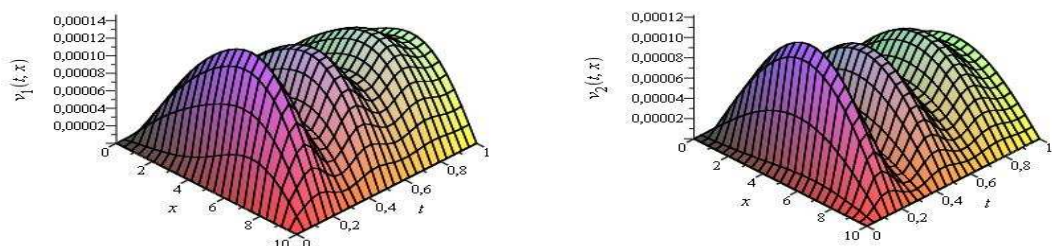


Figura 3.10: Resposta forçada com amortecimento para o forçante  $f(t) = 100 \cos(\frac{1}{10}t)$



Na Figura ?? apresentam-se as oscilações da resposta forçada com amortecimento para o forçante  $f(t) = 100 \cos(\frac{1}{10}t)$ . Observe que o amortecimento está presente no decréscimo da amplitude das oscilações. A amplitude na primeira viga, onde foi aplicado o forçante, é maior do que na segunda viga.

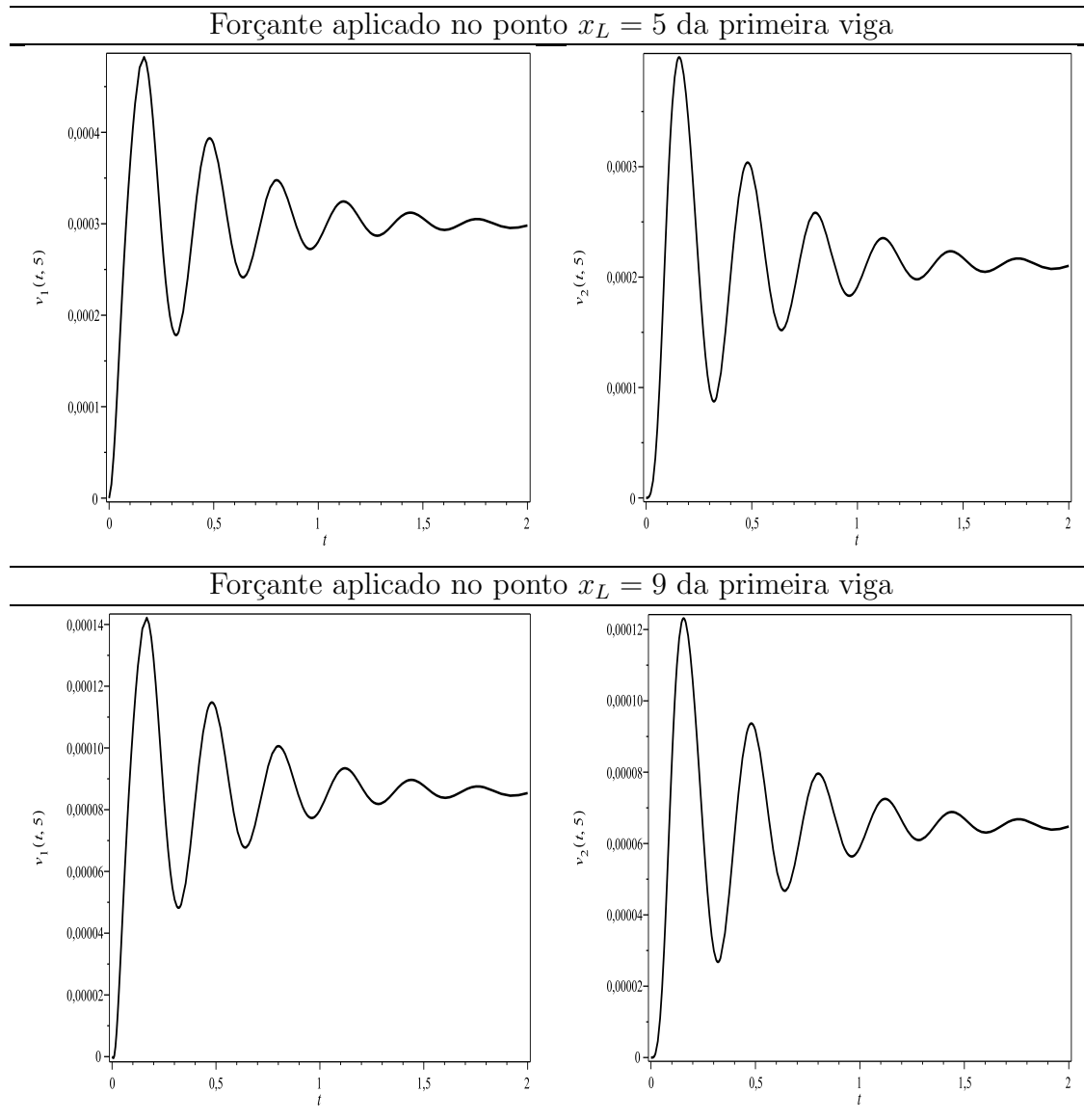


Figura 3.11: Corte no ponto  $x = 5$  com  $0 \leq t \leq 2$  na resposta forçada com amortecimento para o forçante  $f(t) = 100 \cos(\frac{1}{10}t)$

# CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi introduzida uma metodologia para o estudo das vibrações transversais livres e forçadas de um sistema de duas vigas acopladas.

A análise modal é usada para determinar as frequências naturais e as autofunções ou os modos de vibração do sistema acoplado, onde as autofunções são soluções de uma equação diferencial modal. Para escrever os modos de vibração de forma compacta, foi usada a base dinâmica gerada pela solução fundamental de uma equação diferencial de quarta ordem e suas três primeiras derivadas. Este cálculo foi realizado através de uma formulação matricial em blocos. O uso da base dinâmica reduz a dimensão do problema, o que facilita a obtenção das frequências e dos modos. As frequências obtidas aparecem aos pares gerando modos que realizam dois tipos de movimentos: síncronos e assíncronos dependendo da frequência considerada.

A resposta forçada, obtida a partir da relação de ortogonalidade dos modos, é escrita em termos da resposta impulso matricial. No caso amortecido foi considerado o amortecimento de Rayleigh. Várias simulações foram realizadas para diferentes tipos de parâmetros caracterizando vigas distintas, com e sem amortecimento e diferentes tipos de forçantes.

A metodologia que usa a base dinâmica e uma formulação matricial em blocos para determinar as frequências e os modos de vibração de vigas Euler-Bernoulli ou Timoshenko tem sido considerada em diversas situações, por exemplo, vigas segmentadas, vigas com condições de contorno clássicas ou não clássicas e nanotubos de carbono [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Assim, a contribuição do presente trabalho foi a extensão dessa metodologia para o caso de duas vigas uniformes do tipo Euler-Bernoulli acopladas por uma camada viscoelástica.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABU-HILAL, M. Dynamic response of a double Euler-Bernoulli beam due to a moving constant load. **Journal of sound and vibration**, vol. 297, 2006, p. 477-491.
- [2] ABU-HILAL, M. Forced vibration of Euler–Bernoulli beams by means of dynamic Green functions. **Journal of sound and vibration**, vol. 267, 2003, p. 191-207.
- [3] ADHIKARI, S.; WOODHOUSE, J. Identification of damping: part 1, viscous damping. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 243, 2001, p. 43-61.
- [4] ALDRAIHEM, O. J.; WETHERHOLD, R. C.; SINGH, T. **Intelligent beam structures: Timoshenko theory vs. Euler-Bernoulli theory**, Control Applications, 1996, Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on, 1996, p. 976-981.
- [5] CAUGHEY, T.K.; O’KELLY, M.E. Effect of damping on the natural frequencies of linear dynamic systems. **Journal of the Acoustical Society of America**, vol. 33, 1961, p. 1458-1461.
- [6] CAUGHEY, T.K. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. **Journal of Applied Mechanics**, vol. 27, 1960, p. 269.
- [7] CLAEYSSSEN, J. R.; CANAHUALPA, G.; JUNG, C. A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations. **Applied Numerical Mathematics**, vol. 30, 1999, p. 65-78.
- [8] CLAEYSSSEN, J. R.; FERREIRA, I.; COPETTI, R. D. Decomposition of forced responses in vibrating systems. **Applied numerical mathematics**, vol. 47, 2003, p. 391-405.
- [9] CLAEYSSSEN, J. R. On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dynamical matrix solutions. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 140, 1990, p. 73-84.
- [10] CLAEYSSSEN, J. R.; COPETTI, R. D.; TSUKAZAN, T. Matrix vibration formulation of damped multi-span beams. **ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition**, 2006, p. 413–421.

- [11] CLAEYSSSEN, J. R.; SODER, R. A. A dynamical basis for computing the modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 259(4), 2003, p. 986-990.
- [12] CLAEYSSSEN, J. R.; TSUKAZAN, T.; COPETTI, R. D. Nonlocal effects in modal analysis of forced responses with single carbon nanotubes. **Mechanical Systems and Signal Processing**, vol. 38(2), 2013, p. 299-311.
- [13] COPETTI, R. D.; CLAEYSSSEN, J. R.; TSUKAZAN, T. Modal Formulation of Segmented Euler-Bernoulli Beams, **Mathematical Problems in Engineering**, 2007, 18 pages, doi:10.1155/2007/36261.
- [14] CLAEYSSSEN, J. R.; TSUKAZAN, T.; COPETTI, R. D. Eigenanalysis of an Euler-Bernoulli model coupled with van der Waals forces for carbon nanotubes. **IMA Journal of Mathematics**, vol. 78, 2013, p. 1032-1050.
- [15] COPETTI, R. D. **Sistemas concentrados e distribuídos através da análise modal adjunta**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2002.
- [16] GANTMAKHER, F. R. **Lectures in analytical mechanics**. Mir Publishers, Moscow, 1970.
- [17] HAMADA, T. R.; NAKAYAMA, H.; HAYASHI, K. Free and forced vibrations of elastically connected double-beam systems. **Japan Society of Mechanical Engineers - JSME**, vol. 26, 1983, p, 1936-1942.
- [18] HILDEBRAND, F. B. **Methods of applied mathematics**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1952.
- [19] INMAN, D. J. **Vibration: with control, measurement, and stability**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1989.
- [20] INMAN, D. J. **Engineering vibration**. Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [21] KELLY, S. G. **Advanced vibration analysis**. Taylor & Francis, New York, 2006.
- [22] KELLY, S. G. Free and Forced Vibrations of Elastically Connected Structures. **Advances in Acoustics and Vibration**. vol. 2010, 2010, 11 pages, doi: 10.1155/2010/984361.
- [23] KESSEL, P.G.; RASKE, T.F. Damped Response of an Elastically Connected Double-Beam System Due to a Cyclic Moving Load. **The Journal of the Acoustical Society of America**, vol. 42, 1967, p. 873.

- [24] MARTINS, J. F. **Influência da inércia de rotação e da força cortante nas frequências naturais e na resposta dinâmica de estruturas de barras**. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas)- Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 1998.
- [25] NAGULESWARAN, S. Natural frequencies, sensitivity and mode shape details of an Euler-Bernoulli beam with one-step change in cross-section and with ends on classical supports. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 252, 2002, p. 751-767.
- [26] NASH, R. W. T.; COLLAR, A. R. The effects of shear flexibility and rotary inertia on the bending vibrations of beams. **Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics** 6. 1953, p. 186-222.
- [27] MEIROVITCH, L. **Fundamentals of vibrations**. Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [28] MEIROVITCH, L. **Principles and techniques of vibrations**. Prentice Hall, New Jersey, 1997.
- [29] MIGOTTO, D. **Autofunções e Frequências de Vibração do Modelo Euler-Bernoulli para Vigas Não-Clássicas**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2011.
- [30] ONISZCZUK, Z. Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 232(2), 2000, p. 387-403.
- [31] ONISZCZUK, Z. Transverse vibrations of elastically connected double-string complex system, Part I: Free Vibrations, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 232(2), 2000, p. 355-366.
- [32] ONISZCZUK, Z. Forced transverse vibrations of an elastically connected complex simply supported double-beam system. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 264, 2003, p. 273-286.
- [33] RAO, S. S. **Vibration of continuous systems**. John Wiley & Sons, New Jersey, 2007.
- [34] SYMON, K. R. **Mechanics**. Addison-Wesley, Massachusetts, 1971.
- [35] SEELIG, J.M.; HOPPMANN, W.H. Normal mode vibrations of systems of elastically connected parallel bars. **The Journal of the Acoustical Society of America**, vol. 36, 1964.

- [36] STOVANOVIC, V.; KOZIC, P. Forced transverse vibration of Rayleigh and Timoshenko double-beam system with effect of compressive axial load. **International Journal of Mechanical Sciences**, vol. 60, 2012, p. 59-71.
- [37] TANAKA, N.; IWAMOTO, H. Active boundary control of an Euler–Bernoulli beam for generating vibration-free state. **Journal of sound and vibration**, vol. 304, 2007, p. 570-586.
- [38] TONETTO, L. **Modelos elásticos para vigas segmentadas em microscopia de força atômica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2011.
- [39] TSUKAZAN, T. The use of a dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section, **Journal of sound and vibration**, vol. 281, 2005 1175-1185.
- [40] VU, H.V.; ORDONEZ, A.M.; KANNOPP, B.H. Vibration of a double-beam system. **Journal of sound and vibration**, vol. 229, 2000, p. 807-822.